COLLECTION EZO

COLLECTION ÉZO

MATHÉMATIQUES TLE S
TOME I

SUJETS ET CORRIGÉS-SUJETS DU BAC
RÉSUMÉS DE COURS

Christian K. AGBOKOU

Enseignant de mathématiques

NOMBRES COMPLEXES-INTÉGRATION
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES-PROBABILITÉS

Collection EZO

Scanné avec CamScanner

Scanné avec CamScanner

« L'organisation et l'effort doivent venir de nous mais les fruits qu'ils produisent viennent de nulle part et on n'a pas de prise sur eux d'avance ; cependant on peut les espérer avec certitude.»

Christian K. AGBOKOU

« Lorsque les pères s'habituent à laisser faire les enfants, lorsque les fils ne tiennent plus compte de leurs paroles.
lorsque les maîtres tremblent devant leurs élèves et préfèrent les flatter, lorsque finalement les jeunes méprisent les Lois parce qu'ils ne reconnaissent plus au-dessus d'eux l'autorité de rien et de personne. alors c'est là, en toute beauté et en toute jeunesse, le début de la tyrannie. »

Platon

Cet ouvrage est protégé par le Bureau Togolais des Droits d'Auteur (BUTODRA)

Tous droits réservés, la reproduction d'un extrait quelconque de ce livre par quelque procédé que ce soit, tant électronique que mécanique, en particulier par photocopie ou par microfilm est interdite sans l'autorisation écrite de l'auteur ou de ses ayants droit.
Toute représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit: photocopie, microfilm, bande magnétique, disque ou autre, constituerait donc une contrefaçon passible des peines prévues par la loi n°91-92 du 10 juin 1991 sur la reproduction des droits d'auteur.

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage (**Tome 1**) de la «**Collection ÉZO**» est conçu pour être un outil d'entraînement continu et progressif tout au long de l'année scolaire en classes de terminales C, D, E, F ou T_i. Il vient aider les apprenants qui se préparent au baccalauréat deuxième partie, à acquérir une méthode de travail et la rigueur mathématique nécessaire, non seulement pour la réussite au BacII, mais aussi à la poursuite sans encombre des études supérieures. Il est constitué d'exercices issus de sujets d'examens du Togo et d'autres exercices pouvant être donnés aux futurs examens.

A travers un tri minutieux des exercices classés méthodiquement par thème et entièrement corrigés, ce manuel se révèle comme une référence. C'est un indispensable espace qui donne à l'apprenant l'opportunité de compléter ses connaissances reçues en classes, d'avoir une idée de ce qui est demandé à l'examen, de faire un travail personnel et sérieux lui ouvrant la voie à la réussite.

Pour une couverture complète du programme de la classe de terminale C, D, E, F ou T_i, il est conseillé à l'élève de se procurer aussi le manuel (**Tome 2**) de la même collection qui traite de thèmes complémentaires.

Nous souhaitons que cet ouvrage soit le compagnon indispensable de votre préparation au baccalauréat en mathématiques et qu'il vous soit particulièrement utile lors de vos révisions. Pour ce faire, il vous propose

Scanné avec CamScanner

conformément aux nouveaux programmes (HPM) des classes de terminales C, D et E :

150 exercices entièrement corrigés et détaillés couvrant les différents aspects des chapitres traités.

Pour de futures éditions meilleures, nous nous ouvrons bien volontiers aux remarques et suggestions constructives des collègues et tout autre personne qui voudraient bien nous en présenter.

Les auteurs

NOMBRES COMPLEXES

RÉSUMÉ DE COURS

Nombres complexes et forme algébrique

Définition

On appelle nombre complexe tout nombre de la forme $a + ib$, tel que a et b sont des nombres réels et $i^2 = -1$.

- Un nombre complexe est souvent noté z, z', Z, Z', ...
- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Exemples de nombres complexes

$6 - 2i$; $-i + 1$; 3 ; $4i$; 0 ; -2

Remarque

On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Forme algébrique d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$.

- L'écriture $a + ib$ est appelée **forme algébrique** de z. Le nombre réel a est appelé **partie réelle** de z et noté $\mathcal{R}e(z)$. le nombre réel b est appelé **partie imaginaire** de z et noté $\mathfrak{Im}(z)$.

Remarques

- Si $b = 0$, alors $z = a$ est un nombre réel ;
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $z = ib$; le nombre z est dans ce cas dit **imaginaire pur**.

Egalité de deux nombres complexes

Propriété

Soient z et z' deux nombres complexes. On a :

- $z = z'$ si seulement si $\mathcal{R}e(z) = \mathcal{R}e(z')$ et $\mathfrak{Im}(z) = \mathfrak{Im}(z')$;
- $z = 0$ si et seulement si $\mathcal{R}e(z) = 0$ et $\mathfrak{Im}(z) = 0$.

Opérations dans $\mathbb{C}$

Somme et produit de nombres complexes

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.

On a : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$

Scanné avec CamScanner

$$zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

Opposé et inverse d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. Alors

- l'oppose de z est $-a - ib$
- l'inverse de z est $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$

Conjugué et module d'un nombre complexe Conjugué d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$. Alors le conjugué de z est le nombre complexe noté $\overline{z}$ tel que $\overline{z} = a - ib$.

Exemples

nombre complexe z	conjugue $\overline{z}$ de z
$2 - 3i$	$2 + 3i$
$-i + 1$	$i + 1$
$\sqrt{3} - i\sqrt{2}$	$\sqrt{3} + i\sqrt{2}$

Propriétés

Soient z et z' deux nombres complexes, on a

$1/\ \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $2/\ \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$; $3/\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$, $z' \neq 0$

$(4)\ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$; $z \neq 0$; (5) : $\begin{cases} \mathcal{R}e(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \\ \mathcal{I}m(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) \end{cases}$;

$(6)\begin{cases} z \text{ réel} \Leftrightarrow z = \overline{z} \\ z \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow z + \overline{z} = 0 \end{cases}$

Module d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe de forme algébrique z = a+ib, alors le module de z est le nombre réel positif noté |z| tel que

$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Remarque

$|z|^2 = z\overline{z}$

Propriétés

$1/\ |z| = |-z| = |\overline{z}|$, $2/\ z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$; $3/\ |z| = 1 \Leftrightarrow z^{-1} = \overline{z}$; $4/$ $|zz'| = |z||z'|$; $5/\ \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$, $z' \neq 0$; $6/ |z|^n = |z^n|$; $7/$ $|z + z'| \leq |z| + |z'|$, $8/\ |Re(z)| \leq |z|$ et $|Im(z)| \leq |z|$

Représentation géométrique d'un nombre complexe

Propriété

Soient A et B deux points du plan $\mathcal{P}$. On a

- $\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = aff(B) - aff(A)$ ou $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- $aff(\vec{u} + \vec{v}) = aff(\vec{u}) + aff(\vec{v})$ ou $z_{(\vec{u}+\vec{v})} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$
- $aff(k\vec{u}) = kaff(\vec{u})$ ou $z_{k\vec{u}} = kz_{\vec{u}}$.

Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul Argument d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul, M son image dans le plan muni d'un repere orthonormé (O, I, J).

- La mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ est appelée argument principal de z, il est noté $\text{APG}(z)$.
- Tout autre mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ est un argument de z et il est noté $\arg(z)$

Propriété

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. On a :

1/ $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

2/ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

3/ $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

4/ $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

5/ $\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

6/ $\arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

7/ Si $z \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\arg(z) = 0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

Scanné avec CamScanner

8/ Si $z \in \mathbb{R}_-^*$, alors $\arg(z) = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

9/ Si $z \in i\mathbb{R}_+^*$, alors $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

10/ Si $z \in i\mathbb{R}_-^*$, alors $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété

Soient a, b et c des nombres complexes d'images respectives A, B et C avec $A \neq B$ et $A \neq C$. Alors, on a : $arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) =$ $mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Conséquences

- Les points A, B et C sont alignes si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$

Propriété

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z') + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Forme trigonométrique

Définition

Soit z un nombre complexe d'argument θ et de module r. La forme trigonométrique de z est donnée par : $z = r(cos\theta + isin\theta)$.

Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement

Si $z = a + ib = r(cos\theta + isin\theta)$, alors on a par identification :

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\begin{cases} rcos\theta = a \\ rsin\theta = b \end{cases}$ soit encore $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et

$\begin{cases} cos\theta = \frac{a}{r} \\ sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}$

Forme exponentielle

Définition

Soit z un nombre complexe non nul de module r ($r \in \mathbb{R}_+^*$) et d'argument θ

On appelle forme exponentielle de z l'ecriture $z = re^{i\theta}$ ou $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$

Propriétés

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, n un entier relatif. On a

1. $z' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$; 2. $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$; 3. $z^n = r^n e^{in\theta}$;

4. $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

Formule d'Euler

Soit θ un nombre reel

On a $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$ donc $e^{-i\theta} = cos\theta - isin\theta$

On en deduit les proprietes suivantes

Propriétés

Pour tout nombre reel θ, on a :

1. $cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$; 2. $sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$; 3. $cosn\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$;

4. $sinn\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$

Les formules d'Euler permettent d'exprimer $(cos\theta)^n$ ou $(sin\theta)^p$ ou leurs produits a l'aide des cosinus ou des sinus de multiples entiers de θ , n et p etant des entiers naturels dans la pratique

On a ainsi : $(cos\theta)^n = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^n, n \in \mathbb{Z}$; $(sin\theta)^p = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}\right)^p, p \in \mathbb{Z}$

On developpe $(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ et $(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$ suivant la formule du binôme de Newton

Scanné avec CamScanner

Formule de Moivre

- Pour tout nombre réel θ et tout entier relatif n, on a : $(cos\theta + isin\theta)^n = cos(n\theta) + isin(n\theta)$ **(1).**
- Pour tout $z \neq 0$ et pour tout entier relatif n, on a : $arg(z^n) = nargz$ **(2)**

D'après la relation **(1)**, on a : $\begin{cases} cosn\theta = Re[(cos\theta + isin\theta)^n] \\ sinn\theta = Im[(cos\theta + isin\theta)^n] \end{cases}$

Cette formule permet d'exprimer cosnθ et sinnθ à l'aide de cosθ et sinθ.

N.B. On développe $(cos\theta + isin\theta)^n$ suivant la formule du binôme de Newton donnée par :

$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}, a, b \in \mathbb{C}$.

Racines $n^{ièmes}$ d'un nombre complexe

Définition

Soit z un nombre complexe et soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Les racines $n^{ièmes}$ de z sont les nombres complexes Z tels que $Z^n = z$.

Recherche des complexes Z tels $Z^n = z$, $n \geq 2$ et $z \in \mathbb{C}$

- Si $z = 0$, $Z^n = z$ admet 0 comme seule solution.
- Si $z \neq 0$, on exprime Z et z sous leur forme exponentielle.

$\begin{cases} Z = \rho e^{i\beta} où\ \rho = |Z|\ et\ \beta = argZ \\ z = re^{i\theta}\ où\ r = |z|\ et\ \theta = argz \end{cases}$, on a ainsi : $Z^n = \rho^n e^{in\beta}$.

D'où $Z^n = z \Leftrightarrow \rho^n e^{in\beta} = re^{i\theta}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\beta = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \beta = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

On déduit que l'équation $Z^n = z$ admet exactement n solutions Z_k telles : $Z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$, $0 \leq k \leq n-1$.

COLLECTION EZO

Nombres complexes Résumé de cours

Equations du second degré dans $\mathbb{C}$

Théorème

Tout nombre complexe non nul z admet deux racines carrées, c'est-dire que l'équation $Z \in \mathbb{C}, Z^2 = z$ admet deux solutions.

Si $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et $\theta = argz$, ses racines carrées sont $\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Remarque

Le nombre complexe 0 admet pour seule racine carrée 0.

Propriété

Si $p \in \mathbb{R}_+$, ses racines carrées sont $\sqrt{p}$ et $-\sqrt{p}$.

Si $r \in \mathbb{R}_-$, ses racines carrées sont $i\sqrt{|r|}$ et $-i\sqrt{|r|}$.

Equation du second degré à coefficients réels

Soit (E) : $z \in \mathbb{C}$, $az^2+bz+c = 0$, a, b, c$\in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

Le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta \geq 0$, alors les solutions de (E) sont : $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, alors les solutions de (E) sont : $\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, ce sont deux nombres conjugués.

Equation du second degré à coefficients complexes

Soit (E) : $z \in \mathbb{C}$, $az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$.

La même méthode qu'avec a, b, c $\in \mathbb{R}$ s'applique :

- Calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ (ou du discriminant réduit $\Delta' = b'^2 - ac$ où $b = 2b'$)
- Recherche des racines carrées δ_1 et δ_2 de Δ : les solutions de (E) sont alors $\frac{-b+\delta_1}{2a}$ et $\frac{-b+\delta_2}{2a}$.

N.B. La somme des solutions est $-\frac{b}{a}$ et leur produit est $\frac{c}{a}$ comme dans le cas réel.

Scanné avec CamScanner

Méthode algébrique de recherche des racines carrées d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$, a et b étant des réels. On cherche $Z = x + iy$ tel que $Z^2 = z$ avec x et y des réels.

Ce qui se traduit par les égalités suivantes :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (parties\ réelles\ de\ Z^2\ et\ de\ z)\ (1) \\ 2xy = b & (parties\ imaginaires\ de\ Z^2\ et\ de\ z)\ (3) \\ x^2 + y^2 = |z| & (modules\ de\ Z^2\ et\ de\ z)\ (2) \end{cases}$$

De (1) et (2), on déduit : $\begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(|z| + a) \\ y^2 = \frac{1}{2}(|z| - a) \end{cases}$ (*)

Le système (*) donne les valeurs de x et y. (3) vient préciser s'il faut choisir x et y de même signe ou de signes contraires.

Solution

$\Delta = 3 - 4i$; les racines carrées de Δ sont solutions de l'équation (E') : $\delta^2 = 3 - 4i$.

Posons $\delta = x + iy$, avec x et y des réels. On a: $\delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 3 - 4i$. D'autre part, $|\delta^2| = |3 - 4i| = 5 = x^2 + y^2$.

Résoudre l'équation (E') revient à résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système $(\Sigma)\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 2xy = -4 \end{cases}$.

(Σ) est équivalent au système $(\Sigma')\begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$

D'où $x = 2$ et $y = -1$; $x = -2$ et $y = 1$. Les racines carrées de Δ sont alors : $2 - i$ et $-2 + i$.

Les solutions de l'équation (E) sont :

$z_1 = \frac{-(2+3i)+(2-i)}{2} = -2i$; $z_2 = \frac{-(2+3i)+(-2+i)}{2} = -2 - i$

COLLECTION EZO

Nombres complexes *Résumé de cours*

Utilisation des nombres complexes en géométrie

Nombres complexes et configurations géométriques

Configuration	Caractérisation géométrique	Caractérisation complexe
Triangle ABC isocèle en A	$AB = AC$ et $mes\hat{A} = \alpha$, $(0 < \alpha < \pi$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}$ $\alpha \neq k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$
Triangle ABC équilatéral	$AB = AC$ et $mes\hat{A} = \frac{\pi}{3}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Triangle ABC rectangle et isocèle en A	$AB = AC$ et $mes\hat{A} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$
Triangle ABC rectangle en A	$mes\hat{A} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = bi$ $(b \in \mathbb{R}^*)$
Points A, B, C alignés	$Mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0[\pi]$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$
Points A, B, C, D cocycliques	$Mes(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv Mes(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})\ 0[\pi]$ $(Mes(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \not\equiv 0\ [\pi])$	$\frac{z_C - z_B}{z_B - z_A} : \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A} \in \mathbb{R}^*$

Nombres complexe et transformations planes

$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$z \longmapsto z' = az + b, a \in \mathbb{C}^*\ et\ b \in \mathbb{C}$.

Détermination de la nature d'une transformation du plan

Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$z \longmapsto z' = az + b, a \in \mathbb{C}^*\ et\ b \in \mathbb{C}$.

Scanné avec CamScanner

- Si $a = 1$, alors f est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.
- Si $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$, alors f est l'homothétie de rapport a et de centre Ω d'affixe $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$
- Si $a \in \mathbb{C}^* - \mathbb{R}$, alors on distingue deux cas :

1er cas :

Si $|a| = 1$, alors f est la rotation d'angle θ et de centre Ω d'affixe $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$

2eme cas :

Si $|a| \neq 1$, alors f est la similitude directe d'angle $\theta = arg a$, de rapport $k = |a|$ et de centre Ω d'affixe $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$.

Remarques

- Une translation n'a pas de point invariant.
- Le point invariant est obtenu en résolvant l'équation $z' = z$.

« Exige beaucoup de toi-même et attends peu des autres. Ainsi beaucoup d'ennuis te seront épargnés. » Confucius

EXERCICES

Exercice 01

1/ Calculez i^2, i^3 et i^4.

2/ Déduisez-en la valeur de i^{2006} et i^{2009} puis les entiers naturels n tels que i^n est imaginaire pur.

3/ Déterminez les entiers naturels n tels que $(1+i)^n$ soit un réel négatif.

Exercice 02

Soit P le plan muni d'un repère (O, I, J) et A le point d'affixe 2i. Soit Φ l'application de P - $\{A\}$ dans P qui à tout point M de coordonnées $(x\,;y)$ d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' de coordonnées $(X\,;Y)$ d'affixe $Z = X + iY$ telle que $Z = \frac{z+1}{z-2i}$.

1/ Montrez que tout point de P, sauf un point B que l'on précisera, a un antécédent unique par l'application Φ.

2/ Calculez X et Y en fonction de x et y.

3/ Quel est l'ensemble E_1 des points M du plan tels que Z est un nombre réel.

4/ Quel est l'ensemble E_2 des points M du plan tel que Z a pour argument $\frac{\pi}{2}$.

5/ Représentez E_1 et E_2 dans le plan en utilisant deux couleurs différentes.

Exercice 03

On considère le polynôme $P(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12)$.

1/ Démontrez que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle z_1.

2/ Déterminez un polynôme $Q(z)$ tel que $P(z) = (z - z_1)Q(z)$.

3/ Démontrez que l'équation $Q(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_2.

Scanné avec CamScanner

4/ Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
5/ On note z_3 la $3^{ème}$ solution de l'équation $P(z) = 0$.
Démontrez que les points du plan complexe A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 sont alignés.

Exercice 04

On donne $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$ et on considère l'équation (E) : $P(z) = 0$.
1/ Montrez que si w est solution de (E), il en est de même de $\overline{w}$ et de $\frac{1}{w}$.
2/ Calculez $P(1 + i)$ puis déduisez-en les solutions de (E).
3/ Mettez $P(z)$ sous forme de produit de deux polynômes du $2^{ème}$ degré à coefficients réels.

Exercice 05

Soit le nombre complexe $Z = (1 - x)\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$ avec $x \in \mathbb{R}$.
1/ Calculez le module et un argument de Z (on discutera selon les valeurs de x) . Donnez pour chaque cas la forme trigonométrique et la forme exponentielle de Z.
2/ Montrez que Z^{2004} est un réel dont on précisera le signe.
3. a. Montrez que l'équation $|Z| = 2$ admet deux racines Z_1 et Z_2 .
On notera Z_1 le complexe de plus grande partie réelle et Z_2 l'autre racine.
b. Ecrivez Z_1 et Z_2 sous forme algébrique.
c. Placez les points A_1 et A_2 d'affixes respectives Z_1 et Z_2 dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et vérifiez que A_2, O, A_1 sont alignés.

Exercice 06

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 4 cm. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre imaginaire pur de module 1.

On considère le point A, d'affixe $z_A = i$. A tout point M d'affixe z, M différent de A, on associe le point M' d'affixe z', défini par : $z' = \frac{iz - 2}{z + i}$.
1/ Démontrez que si z est imaginaire pur et $z \neq -i$, alors z' est imaginaire pur.
2/ Déterminez l'ensemble E_1 des points M, dont les affixes vérifient : $z' = z$.
3/ Déterminez l'ensemble E_2 des points M tels que M' soit le symétrique de M par rapport à O.
4/ Déterminez l'ensemble E_3 des points M tels que z' soit un nombre réel.
5/ Déterminez l'ensemble E_4 des points M tels que z' soit imaginaire pur.

Exercice 07

1/ Résolvez dans $\mathbb{C}$: $z^3 = 1$.
2/ a. Développez $\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^3$.
b. Soit l'équation (E) : $z^3 = 4\sqrt{2}(-1 - i)$. En posant $u = \frac{z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$, déterminez sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique les racines de l'équation (E).
3. Déduisez-en les valeurs exactes de $cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 08

1/ Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$. On désignera par z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution.
2/ a. Déterminez le module et un argument de chacun des nombres complexes z_1 et z_2.
b. Déterminez le module et un argument de $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$.

Scanné avec CamScanner

3/ Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité :1 cm), on considère le point M_1 d'affixe $\sqrt{2}(1+i)$, M_2 d'affixe $\sqrt{2}(1-i)$ et le point A d'affixe $z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

a. Déterminez l'affixe du point M_3, image de M_2 par l'homothétie h de centre A et de rapport -3.

b. Déterminez l'affixe du point M_4, image de M_2 par la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c. Placez dans le même repère les points A, M_1, M_2, M_3 et M_4.

d. Calculez $\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$.

e. Soit I le milieu du segment $[M_3M_4]$ et M_5 le symétrique de M_1 par rapport à I. Montrez que les points M_5, M_4, M_1 et M_3 forment un carré.

Exercice 09

Soit $a \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et f_a l'application du plan complexe dans lui-même qui, au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (-1 + i\tan a)z - i\tan a + 2$

1/ Déterminez le module et un argument du nombre complexe $-1 + i\tan a$.

2/ Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de f_a.

3/ Soit h_a l' homothétie de centre le point Ω d'affixe 1et de rapport $\frac{1}{\cos a}$.

Donnez une écriture complexe de la rotation r_a telle que : $f_a = r_a \circ h_a$.

Exercice 10

On donne le nombre complexe

$z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

a. Exprimez z^2 sous forme algébrique

b. Exprimez z^2 sous forme exponentielle.

c. Déduisez-en z sous forme exponentielle.

Exercice 11

Soient $z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

1. a/ Ecrivez sous forme algébrique $z_1 \times z_2$.

b/ Ecrivez sous forme exponentielle z_1, z_2 puis $z_1 \times z_2$.

c/ Déduisez-en $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

2. On pose $z_3 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}z_1$.

a/ Déterminez le module et un argument de z_3.

b/ Démontrez que $z_3{}^{12}$ est un nombre réel.

3. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2.

a/ Donnez une interprétation géométrique du module de z_1 et d'un argument de z_1.

b/ Quel est l'ensemble (E) des points M du plan d'affixe z vérifiant : $\left|z - \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \left|z - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right|$.

Exercice 12

Dans le plan complexe, on considère l'homothétie h de centre d'affixe $w = \frac{3(4+3\sqrt{3})}{11}$ et de rapport $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

1. Déterminez la transformation complexe associée à h.

2. Soient M et N deux points du plan d'affixes respectives $z_1 = i$ et $z_2 = -i$. On note $h(M) = M'$ et $h(N) = N'$.

a/ Déterminez les affixes z'_1 de M' et z'_2 de N'.

b/ Ecrivez sous forme trigonométrique z'_1 et z'_2.

3. On considère l'équation (E) :

$z \in \mathbb{C}$, $z^2 + 2\lambda^2\cos\theta(1+\cos\theta)z + \lambda^4(1+\cos\theta) = 0$, où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\theta \in]0;\pi[$.

Déterminez les solutions de cette équation en fonction de λ et de θ.

4. On suppose $\lambda = 1$.

a/ Calculez le module et l'argument des solutions de l'équation (E).

Scanné avec CamScanner

b/ Déterminez θ pour que z_1 et z_2 soient solutions de (E).

c/ Trouvez la valeur de θ pour que z'_1 et z'_2 soient solutions de (E).

d/ Placez les points M, N, M' et N' puis déduisez graphiquement le point d'affixe w.

Exercice 13

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) On considère l'application f définie sur $\mathbb{C}^*$ par :

$f(z) = \frac{1}{3}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

1/ On désigne par K le point d'affixe $f\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Calculez les coordonnées de K.

2/ Soit α un nombre réel. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$f(z) = \frac{2}{3}cos\alpha$.

3/ a. Déduisez-en la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E') :

$z^4 - 2(cos\alpha)z^2 + 1 = 0$. (On donnera les solutions sous forme exponentielle).

b. Vérifiez que les solutions de (E') sont deux à deux conjuguées.

c. Décomposez le polynôme à variable réelle x défini par :

$P(x) = x^4 - 2(cos\alpha)x^2 + 1$ en un produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

4/ On considère l'application h du plan complexe dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que: $2\left(z - \frac{1}{3}\right) = (1 + i)\left(z' - \frac{1}{3}\right)$.

a. Démontrez que h est une similitude plane directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

b. Démontrez que h est la composée d'une rotation et d'une homothétie dont on donnera les éléments .

Exercice 14

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$), on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z'. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, où x, x', y, y' sont des nombres réels.

On rappelle que z désigne le conjugué de z et que z désigne le module de z.

1/ Montrez que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si et seulement si $Re(z'\overline{z}) = 0$.

2/ Montrez que les points O, M et M' sont alignés si et seulement si $Im(z'\overline{z}) = 0$.

Applications

3/ N est le point d'affixe $z^2 - 1$. Quel est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont orthogonaux ?

4/ On suppose z non nul. P est le point d'affixe $\frac{1}{z^2} - 1$.

On recherche l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points O, N et P sont alignés.

a. Montrez que $\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)\left(\overline{z^2 - 1}\right) = -(\overline{z})^2\left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2$

b. En utilisant l'équivalence démontrée au début de l'exercice, concluez sur l'ensemble recherché.

Exercice 15

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$). Unité graphique : 2 cm.

1/ On rappelle que, pour tous nombres complexes a et b, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Résolvez dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^3 = 8$.

2/ On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c définies par : $a = 2$, $b = -1 + i\sqrt{3}$ et $c = -1 - i\sqrt{3}$.

On appelle r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Scanné avec CamScanner

On pose $B' = r'(B)$ et $C' = r(C)$ et on note b' et c' les affixes respectives de B' et C'.

a. Placez les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Dans la suite de l'exercice, on complétera cette figure.

b. Montrez que $b' = 2 + \sqrt{3} + 3i$.

c. Montrez que b' et c' sont des nombres conjugués.

3/ On appelle M, N, P et Q les milieux respectifs des segments $[CB], [BB'], [B'C']$ et $[C'C]$. On note m, n, p et q leurs affixes.

a. Montrez que l'affixe n du point N est égale à $\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1 + i\sqrt{3})$. Déduisez que les points O, N et C sont alignés.

b. Montrez que $n + 1 = i(q + 1)$. Que peut-on en déduire pour le triangle MNQ?

c. Montrez que le quadrilatère $MNPQ$ est un carré.

Exercice 16

Soit $\alpha \in]-\pi; \pi[\setminus \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$; $u = e^{i\alpha}$ et

$f(z) = z^3 - (u + 2\overline{u})z^2 + (2 + \overline{u}^2)z - \overline{u}$

1/ a/ Montrez que u est une solution de (E) : $f(z) = 0$.

b/ Résolvez alors dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $f(z) = 0$.

2/ On pose $Z^2 = u + 1 - \frac{u}{u^2+1}$

a/ Montrez que $Z^2 = u + 1 - \frac{1}{u+\overline{u}}$. Déduisez-en la partie réelle de Z^2.

b/ Pour quelles valeurs de α $Re(Z^2) = 1$?

3/ On suppose que $Re(Z^2) = 1$; montrez que :

a/ $Arg(Z^2 - 1) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

b/ $Arg\left(Z - \frac{1}{z}\right) - Arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Exercice 17

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct

$(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm.

On considère le point A d'affixe $z_A = 2 + i$ et le cercle (Γ) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

1. Faites une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice

2. a. Déterminez les affixes des points d'intersection de (Γ) et de l'axe $(O, \vec{u})$

b. On désigne par B et C les points d'affixes respectives $z_B = 1$ et $z_C = 3$.

Déterminez l'affixe z_D du point D diamétralement opposé au point B sur le cercle (Γ).

3. Soit M le point d'affixe $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$.

a. Calculez le nombre complexe $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$.

b. Interprétez géométriquement un argument du nombre $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$; déduisez-en que le point M appartient au cercle (Γ).

4. On note (Γ') le cercle de diamètre $[AB]$. La droite (BM) recoupe le cercle (Γ') en un point N.

a. Montrez que les droites (DM) et (AN) sont parallèles.

b. Déterminez l'affixe du point N.

5. On désigne par M' l'image du point M par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a. Déterminez l'affixe du point M'.

b. Montrez que le point M' appartient au cercle (Γ').

Exercice 18

1/ Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $4Z^2 - 12Z + 153 = 0$.

2/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C et P d'affixes respectives : $Z_A = \frac{3}{2} + 6i$; $Z_B = \frac{3}{2} - 6i$; $Z_C = -3 - \frac{1}{4}i$; $Z_P = 3 + 2i$ puis le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $Z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$.

Scanné avec CamScanner

a. Déterminez l'affixe Z_Q du point Q, image du point B par la translation t du vecteur $\vec{w}$.
b. Déterminez l'affixe Z_R du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.
c. Déterminez l'affixe Z_S du point S, image du point P par la rotation de centre A, d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
d. Placez les points P, Q, R et S.
3/ a. Démontrez que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.
b. Calculez $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$. Déduisez-en la nature précise du parallélogramme PQRS.
c. Justifiez que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle noté $(\mathcal{C})$. On calculera l'affixe de son centre et son rayon.
4. La droite (AP) est-elle tangente au cercle $(\mathcal{C})$?

Exercice 19

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique. Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.
1/ a. Déterminez l'affixe du point B_1 image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.
b. Déterminez l'affixe du point B' image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Placez les points A, B et B'.
2/ On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1 + i)z + 1$.
a. Montrez que B a pour image B' par f.
b. Montrez que A est le seul point invariant par f.
c. Etablissez que pour tout nombre complexe z distinct de i, $\frac{z'-z}{i-z} = -i$. Interprétez ce résultat en termes de distances puis

en termes d'angles. Déduisez-en une méthode de construction de M' à partir de M, pour M distinct de A.
3/ a. Donnez la nature et précisez les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z - 2| = \sqrt{2}$.
b. Démontrez que $z' - 3 - 2i = (1 + i)(z - 2)$. Déduisez-en que si le point M appartient à Σ_1, alors son image M' par f appartient à un cercle Σ_2, dont on précisera le centre et le rayon.
c. Tracez Σ_1 et Σ_2 sur la même figure que A, B et B'.

Exercice 20

Soit $A(1 - i)$, $B(3 + 4i)$, $C(-2i)$ et $D(w)$, quatre points du plan complexe $(O, \vec{U}, \vec{V})$.
1/ Déterminez l'affixe w de D pour que les points A, B et D soient alignés.
2/ Déterminez l'affixe w de D pour que (AD) soit perpendiculaire à (AC).
3/ Déterminez l'affixe w de D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.
4/ Déterminez l'affixe w de D pour que D soit le symétrique de A par rapport à B.
5/ Déterminez l'affixe w de D pour que D soit l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
6/ Déterminez l'affixe w de D pour que D soit l'image de B par la similitude directe de centre O, d'angle orienté $(\vec{U}, \overrightarrow{OA})$ et de rapport égal à OB.

Exercice 21

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par s l'application qui à tout point M de P de coordonnées $(x ; y)$ associe le point M' de

Scanné avec CamScanner

coordonnées $(x' ; y')$ tel que : $\begin{cases} x' = -x - y + 2 \\ y' = x - y - 1 \end{cases}$

1. Déterminez l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M.
2. Démontrez que s est une similitude plane directe. Précisez son angle, son rapport et son centre I.
3. Soit g l'application qui à tout point M de P associe l'isobarycentre G des points M, $M' = s(M)$ et $M'' = s(M')$.

a. Calculez, en fonction de l'affixe z de M, les affixes des points M'' et G.

b. Démontrez que g est une similitude plane directe. Quel est son centre ?

c. Déterminez l'affixe du point M_0 tel que $g(M_0)$ soit le point O.

Reportez sur une figure les points M_0, M_0', M_0'' correspondants, ainsi que le point I , centre de la similitude s.

Exercice 22

Soit $w = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. On considérons $X = w + w^2 + w^4$ et $Y = w^3 + w^5 + w^6$.

1/ Montrez que $Y = \overline{X}$ et que $Im(X) > 0$.

2/ Calculez $X + Y$ et XY. Déduisez-en que X et Y sont solutions d'une équation du second degré puis calculez X et Y

3/ Exprimez $Re(X)$ en fonction de $cos\frac{2\pi}{7}$.

4/ Déduisez-en que $cos\frac{2\pi}{7}$ est une racine du polynôme $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$.

Exercice 23

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points A d'affixes – 4 ; B d'affixe 4 ; E d'affixe $4i$; C et D tels que les quadrilatères $AOEC$ et $BOED$ sont des carrés.

1/ Placez les points précedents dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et donnez les affixes des points C et D.

2/ Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe $z' = (1 + i)z + 1 + 4i$.

a. Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de f.

b. Précisez les points $f(A)$ et $f(O)$. Déterminez l'image par f de la droite (CA) et celle de la médiatrice du segment $[AO]$.

c. Exprimez, pour tout point M d'affixe z, l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{MC}$ en fonction de z.

Déduisez-en que $MM' = MC$ et pour M distinct de C, montrez qu'une mesure de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MC}\right)$ est $\frac{\pi}{2}$.

3/ Soit J le milieu du segment $[EB]$ et I le milieu du segment $[AO]$. Déterminez l'image de J par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 24

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$). On désigne par T l'application de (P) dans (P) qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = (1 + i)z - i$.

1. Montrez que T est la composée d'une rotation et d'une homothétie de rapport positif dont on donnera les éléments caractéristiques. On note Ω le point invariant par T.

Donnez une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MM'}\right)$ en supposant que M ≠ Ω.

2. a/ Construisez M' image de M par T où M est un point distinct de Ω.

b/ Déterminez l'image (D') par T de la droite (D) d'équation $y = x$. Construisez (D').

3. a/ Montrez qu'il existe un point B de (P) distinct de Ω et un seul tel que les affixes z_0 de B et z'_0 de B' (où B' est l'image

Scanné avec CamScanner

de B par T) soient liés par la relation $z_0 z'_0 = 1$. Placez B et B' dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b/ Soit Ω' le symétrique de Ω par rapport à O. Montrez que les points Ω', Ω, B et B' sont cocycliques.

Déterminez l'affixe du centre G du cercle (Γ) passant par Ω', Ω, B et B'.

Exercice 25

Soit a un nombre complexe.

1. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$(1 + i)z^2 - 2i(a + 1)z + (i - 1)(a^2 + 1) = 0$.

2. Soient z_1 et z_2 les solutions de cette équation.

Trouvez entre z_1 et z_2 une relation indépendante de a.

3. Caractérisez la transformation f du plan complexe qui, à tout point M_1 d'affixe z_1 associe le point M_2 d'affixe z_2.

4. On pose $z_1 = x + iy$ et $z_2 = x' + iy'$.

a/ Exprimez x' et y' en fonction de x et y.

b/ Quelle est l'image par f de la droite (D) d'équation : $x + 2y - 1 = 0$.

Exercice 26

1. On considère dans $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :

(E) : $Z \in \mathbb{C}, Z^4 + (-5 + 3i)Z^3 + (8 - 9i)Z^2 + (-14 + 6i)Z + 10$.

a/ Vérifiez que 1 et i sont des solutions évidentes de (E).

b/ Résolvez l'équation (E).

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives 1, i, 1 – 3i et 3 – i.

a/ Placez ces points dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b/ Soit S la similitude directe qui transforme A en C et B en D

b_1/ Déterminez l'écriture complexe de S.

b_2/ Donnez les éléments caractéristiques de S (centre Ω, rapport k et angle α).

3. On considère la suite de points M_n d'affixe Z_n $(n \in \mathbb{N})$ avec $Z_0 = i$ et $Z_{n+1} = -2iZ_n + 1 - i$.

a/ Calculez $\frac{Z_{n+1} - w}{Z_n - w}$ où w est l'affixe du centre Ω de la similitude directe S. Déduisez-en la nature du triangle $\Omega M_n M_{n+1}$.

b/ Démontrez que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation : $U_n = |Z_{n+1} - Z_n|$ est une suite géométrique dont on précisera le 1er terme et la raison.

c/ Exprimez en fonction de n la longueur $d_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_{n-1}M_n + M_nM_{n+1}$ $(n \geq 2)$.

Exercice 27

Soit l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}, z^n = \frac{-9\sqrt{3} + 27i}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminez les solutions z_k de (E).

2. On pose n = 5.

Représentez dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points-images des solutions z_k de (E).

3. On pose $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$.

a/ Soit $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, exprimez α en fonction de $\bar{j}$.

b/ Montrez que α est une solution de l'équation $z^5 = \frac{-9\sqrt{3} + 27i}{2}$.

4. Soit la transformation T de P dans P, qui au point M de P d'affixe z associe le point M' de P d'affixe z' tel que :

$z' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)z + \frac{5 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i$.

a/ Ecrivez la forme algébrique du nombre complexe $w = (1 - i)(2 + \sqrt{3} + 3i)$.

b/ Donnez la nature de T et précisez ses éléments caractéristiques.

Scanné avec CamScanner

Exercice 28

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 3 + i\sqrt{3}$ et $c = 2i\sqrt{3}$.

1/ a. Calculez $\frac{a-b}{c-b}$ et déduisez-en que le triangle ABC est rectangle.

b. Déterminez l'affixe du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC.

2/ On note $(z_n)_{n\in IN}$, la suite de nombres complexes, de premier terme $z_0 = 0$ et A_n le point d'affixe z_n telle que $z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 2$.

a. Déterminez les affixes des points A_3 et A_4, sachant que $A_1 = A$ et $A_2 = B$.

b. Comparez les longueurs des segments $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$.

c. Etablissez que pour tout entier naturel n , on a :

$z_{n+1} - w = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - w)$ où $w = 1 + i\sqrt{3}$.

d. Déduisez-en que le point A_{n+1} est l'image de A_n par une transformation dont on précisera les éléments caractéristiques.

e. Justifiez que pour tout entier naturel n, on a : $A_{n+6} = A_n$.

Déterminez l'affixe du point A_{2017}.

3/ a. Démontrez que pour tout entier naturel n, $z_{n+1} - z_n = 2\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

b. Déterminez, pour tout entier naturel n, la longueur du segment $[A_nA_{n+1}]$.

Exercice 29

Dans le plan orienté, une unité étant choisie, on considère un rectangle $ABCD$ tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$; $AB = \sqrt{2}$ et $AD = 1$; I désigne le milieu de $[AB]$.

Partie A: Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que $MD^2 - MB^2 = 1$.

1. Vérifiez que les points C et I appartiennent à (E).

2 a. Déterminez et construisez (E).

b/ Déduisez-en que les droites (BD) et (CI) sont perpendiculaires.

Partie B: Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.

Soit S une similitude directe qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que: $z' = az + b$, où a et b sont des nombres complexes avec a non nul.

1. Déterminez les nombres complexes a et b pour que $S(D) = C$ et $S(C) = B$.

2. Soit T la similitude directe qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{i\sqrt{2}}{2} z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$.

Déterminez le rapport et l'angle de T.

3. Montrez que la similitude T transforme B en I.

4. Déduisez-en une autre justification de l'orthogonalité des droites (BD) et (CI).

5. Montrez que le centre Ω de la similitude T est le point d'intersection des droites (BD) et (CI).

Exercice 30

Pour tout nombre complexe z, on définit

$P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8$.

1. Calculez P(2) puis déduisez-en une factorisation de P(z) par $z - 2$.

2. Résolvez dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$. On note z_1 et z_2 les solutions de l'équation autres que 2, z_1 ayant une partie imaginaire positive.

Vérifiez que $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$. Déterminez le module et un argument de z_1 et de z_2.

Scanné avec CamScanner

3. a. Placez dans le plan, muni d'un repere orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unite graphique : 2 cm), les points : A d'affixe 2, B et C d'affixes respectives z_1 et z_2, et I milieu de [AB].

b. Demontrez que le triangle OAB est isocele. Deduisez-en une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{OI})$.

c. Calculez l'affixe z_I de I, puis le module de z_I.

d. Déduisez des résultats precedents les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$.

Exercice 31

Le plan complexe est muni d'un repere orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Pour tout nombre complexe z on pose $P(z) = z^3 - (4 + 6i)z^2 + (-6 + 16i)z + 12 - 4i$.

1. a. Calculez $P(1 + i)$.

b. Déterminez deux nombres complexes a et b tels que pour tout nombre complexe z, on a : $P(z) = (z - 1 - i)(z^2 + az + b)$.

c. Déterminez les solutions de l'equation $P(z) = 0$.

2. a. Placez les points A, B et C, images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ sachant que $|z_A| \leq |z_B| \leq |z_C|$. Déterminez la nature du triangle ABC.

b/ Montrez qu'il existe une unique similitude directe s de centre A qui transforme C en B.

c/ Donnez l'expression complexe de s. Déterminez le rapport et un angle de s.

3. On considère la transformation f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{1-i}{2}z + i$. Pour tout entier naturel n on pose : $f^1 = f$ et $f^n = f \circ f^{n-1}$. On définit une suite de points (M_n) par $M_0 = C$ et $M_n = f^n(M_0)$.

a/ Reconnaissez la transformation f et déterminez ses éléments caractéristiques.

b/ Déterminez la nature du triangle AM_nM_{n+1}.

c. Calculez en fonction de n la somme $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_nM_{n+1}$.

d. Calculez $\lim_{n \to +\infty} S_n$ et l'interpretez.

Exercice 32

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. On donne dans $\mathbb{C}$ l'equation :

(E_θ) : $z^3 + 2te^{i\theta}z^2 - 2te^{2i\theta}z - 4e^{3i\theta}(2 + i) = 0$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$.

a. Verifions que (E_θ) pour $(\theta = 0)$ admet une solution reelle a determiner.

b. Resolvez alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_0).

2. a. Montrez que z est une solution de (E_θ) si et seulement si $ze^{-i\theta}$ est solution de (E_0).

b. Deduisez-en les solutions (E_θ).

3. On note A, B et C les images des solutions de (E_0) avec $z_A \in \mathbb{R}$, $|z_B| < |z_C|$ et A', B' et C' celles des solutions de (E_θ).

a. Calculez puis interpretez les complexes $\frac{z_A}{z_B - z_C}$ et $\frac{z_B}{z_C - z_A}$.

b. Caracterisez l'application r de P dans P qui a tout point M(z) associe M'(z') tel que $z' = e^{i\theta}z$.

c/ Déduisez-en que les triangles ABC et A'B'C' ont le même orthocentre.

d. Montrez que les points A', B' et C' varient sur des cercles concentriques à préciser.

Exercice 33

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2cm). On désigne par m un nombre reel. On considere la transformation T_m du plan dans lui-même qui, a tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par: $z' = (m + i)z + m - 1 - i$.

1. Peut-on choisir m de telle sorte que T_m soit une translation ?

Scanné avec CamScanner

2. Déterminez le réel m de telle sorte que T_m soit une rotation. Précisez alors le centre et l'angle de cette rotation.

3. Dans la suite de l'exercice on pose : m = 1.

a/ Calculez l'affixe du point Ω invariant par T_m.

b/ Pour tout nombre complexe z différent de 1, calculez $\frac{z'-1}{z-1}$.

En interprétant géométriquement le module et un argument de $\frac{z'-1}{z-1}$, démontrez que T_1 est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

c/ Démontrez que, pour tout nombre z on a : $z' - z = i(z - 1)$.

Déduisez-en que si M est distinct de Ω, alors le triangle ΩMM' est rectangle isocèle en M.

4. On définit dans le plan une suite (M_n) de points en posant: $M_0 = O$, $M_1 = T_1(M_0)$, pour tout entier naturel n non nul: $M_n = T_1(M_{n-1})$.

a/ Placez les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b/ Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = \Omega M_n$.

Démontrez que la suite (d_n) est une suite géométrique, puis exprimez le terme général de cette suite en fonction de n. Converge-t-elle ?

« La vraie faute est celle qui on ne corrige pas. » Confucius

Exercice 34

Soit $(U_n)_{n\in IN}$ la suite géométrique de premier terme $U_0 = 4$, de raison $\frac{1}{2}$.

Soit $(V_n)_{n\in IN}$ la suite arithmétique de premier terme $V_0 = \frac{\pi}{4}$, de raison $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout entier naturel n, on note z_n le nombre complexe de module U_n et dont un argument est V_n.

1. a. Exprimez U_n et V_n en fonction de n.

b. Déduisez-en z_n.

2. Démontrez que (z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}i$ et de premier terme $z_0 = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$.

3. Soit (P) le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et M_n le point d'affixe z_n.

a. Déterminez la nature de la transformation F qui au point M_n associe le point M_{n+1} d'affixe z_{n+1}.

b. Donnez ses éléments caractéristiques.

4. Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = z_0 z_1 z_2 \dots z_n$.

a. Exprimez en fonction de n un argument de Z_n.

b. Démontrez que si n est impair, alors Z_n est réel.

Exercice 35

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé (O, I, J). On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -3$, $z_B = 2 + 2i$ et $z_C = 7i$.

1. Construisez le triangle ABC.

2. a. Vérifiez que les nombres complexes $z_A - z_B$ et $z_C - z_B$ ont même module que l'on précisera.

b/ Ecrivez le complexe $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ sous la forme trigonométrique.

c. Déduisez-en la nature du triangle ABC.

3. Soit S la similitude plane directe de centre A qui applique B sur C.

a/ Déterminez l'angle et le rapport de la similitude S.

b/ Construisez, dans le repère précédent, après justification, les points E et F images des points C et E par S. (On ne demande pas de chercher les coordonnées, ni les affixes de E et F).

4. On pose $A_0 = S(A)$; $A_1 = B$; $A_2 = S(B)$; $A_3 = S(C)$; $A_4 = S(E)$; $A_5 = S(A_4)$; ... ; pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $A_n = S(A_{n-1})$ et pour tout entier naturel n, $R_n = |z_{A_{n+1}} - z_{A_n}|$.

Scanné avec CamScanner

a. Calculez $|z_{A_1} - z_{A_0}|$ et R_2

b. Déduisez-en la nature précise du triangle AA_2A_3

5. a. Démontrez que, pour tout entier n, le triangle AA_nA_{n+1} est isocèle et rectangle en A_n

b. Démontrez que la suite (R_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$

c. Démontrez que, pour tout entier naturel non nul n, $R_n = 2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{29}$

Exercice 36

I- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -i$, $z_B = 1 + i$, $z_C = -1 + 2i$ et $z_D = -2$

1. Placez les points A, B, C et D

2. a. Interprétez géométriquement le module et un argument du nombre complexe $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_D} = Z$.

b. Calculez le nombre complexe Z.

3. Déterminez le module et un argument de Z puis déduisez-en la nature du quadrilatère ABCD

II- Soit λ un nombre complexe de module 1.

On définit, pour tout entier naturel n la suite (Z_n) de nombres complexes par : $\begin{cases} Z_0 = 0 \\ Z_{n+1} = \lambda Z_n - i \end{cases}$

On note M_n le point d'affixe Z_n

1. a. Calculez Z_1, Z_2 et Z_3.

b. Démontrez que : $\forall n \in IN^*, Z_n = -(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \cdots + \lambda + 1)i$

c. Déduisez-en que : $\forall n \in IN, Z_n = \frac{1-\lambda^n}{\lambda - 1} i$.

2. On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\lambda^k = 1$.

Démontrez que pour tout entier naturel, $Z_{n+k} = Z_n$

1. Etablissez que $Z_0 = i$

2. Montrez que : $\forall n \in IN$ et $\forall k \in IN$, $Z_n = Z_{n+4k}$

3. Montrez que M_{n+1} est l'image de M_n par une rotation φ dont on précisera le centre et l'angle

4. Déterminez les images de A, B, C et D par φ et placez dans le repère précédent ces images

5. Montrez que : $\forall n \in IN$, $Z_{4n+1} = -i$

Exercice 37

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soient A_0 le point d'affixe 2 et A'_0 le point d'affixe $1 - i\sqrt{3}$ et A_1 le milieu du segment $[A_0A'_0]$. Plus généralement si A_n est un point d'affixe z_n on désigne par A'_n le point d'affixe $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_n$ et par A_{n+1} le milieu du segment $[A_nA'_n]$

On note r_n et θ_n le module et l'argument de z_n

1. Déterminez l'affixe de chacun des points suivants : A_1, A'_1, A_2 et A'_2

2. a. Pour tout entier naturel n, exprimez z_{n+1} en fonction z_n. Déduisez-en l'expression de z_n en fonction de n

Montrez que A_{n+1} est l'image de A_n par une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques

b. Etablissez les expressions de r_n et θ_n en fonction de n

c. Déterminez la limite de r_n lorsque n tend vers $+\infty$, puis interprétez géométriquement le résultat obtenu

d. Comparez les modules et les arguments de z_n et z_{n+8}

3/ a. Etablissez que $A_nA_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} A_{n-1}A_n$, puis exprimez A_nA_{n+1} en fonction de n

b. Déterminez en fonction de n, la longueur d_n de la ligne brisée $A_0A_1 \ldots\ldots\ldots A_nA_{n+1}$

Scanné avec CamScanner

a/ Calculez $|z_{A_2} - z_{A_0}|$ et R_2.

b. Déduisez-en la nature précise du triangle AA_2A_3.

5. a. Démontrez que, pour tout entier n, le triangle AA_nA_{n+1} est isocèle et rectangle en A_n.

b/ Démontrez que la suite (R_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$.

c/ Démontrez que, pour tout entier naturel non nul n, $R_n = 2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{29}$.

Exercice 36

I- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = -i$; $z_B = 1 + i$; $z_C = -1 + 2i$ et $z_D = -2$.

1/ Placez les points A, B, C et D.

2/ a. Interprétez géométriquement le module et un argument du nombre complexe $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_D} = Z$.

b. Calculez le nombre complexe Z.

3/ Déterminez le module et un argument de Z puis déduisez-en la nature du quadrilatère ABCD.

II- Soit λ un nombre complexe de module 1.

On définit, pour tout entier naturel n la suite (Z_n) de nombres complexes par : $\begin{cases} Z_0 = 0 \\ Z_{n+1} = \lambda Z_n - i \end{cases}$

On note M_n le point d'affixe Z_n.

1/ a. Calculez Z_1, Z_2 et Z_3.

b. Démontrez que : $\forall n \in IN^*, Z_n = -(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \cdots + \lambda + 1)i$

c. Déduisez-en que : $\forall n \in IN, Z_n = \frac{1-\lambda^n}{\lambda-1} i$.

2/ On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\lambda^k = 1$.

Démontrez que pour tout entier naturel, $Z_{n+k} = Z_n$.

3/ Etude du cas $\lambda = i$

a. Montrez que : $\forall n \in IN$ et $\forall k \in IN, Z_k = Z_{4n+k}$.

b. Montrez que M_{n+1} est l'image de M_n par une rotation φ dont on précisera le centre et l'angle.

c. Déterminez les images de A, B, C et D par φ et placez dans le repère précédent ces images.

d. Montrez que : $\forall n \in IN, Z_{4n+1} = -i$.

Exercice 37

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soient A_0 le point d'affixe 2 et A'_0 le point d'affixe $1 - i\sqrt{3}$ et A_1 le milieu du segment $[A_0A'_0]$. Plus généralement si A_n est un point d'affixe z_n on désigne par A'_n le point d'affixe $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_n$ et par A_{n+1}, le milieu du segment $[A_nA'_n]$.

On note r_n et θ_n, le module et l'argument de z_n.

1/ Déterminez l'affixe de chacun des points suivants : A_1, A'_1, A_2 et A'_2.

2/ a. Pour tout entier naturel n, exprimez z_{n+1} en fonction z_n Déduisez-en l'expression de z_n en fonction de n.

Montrez que A_{n+1} est l'image de A_n par une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

b. Etablissez les expressions de r_n et θ_n en fonction de n

c. Déterminez la limite de r_n lorsque n tend vers $+\infty$, puis interprétez géométriquement le résultat obtenu.

d. Comparez les modules et les arguments de z_n et z_{n+6}

3/ a. Etablissez que $A_nA_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} A_{n-1}A_n$, puis exprimez A_nA_{n+1} en fonction de n.

b. Déterminez en fonction de n, la longueur d_n de la ligne brisée $A_0A_1 \ldots\ldots\ldots A_nA_{n+1}$.

Scanné avec CamScanner

c. Calculez la limite de d_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 38

Pour tout réel θ de $]\pi;\pi]$, on considère la fonction f_θ définie par : pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{e^{i\theta}\}$, $f_\theta(z) = \frac{1 + ze^{i\theta}}{e^{i\theta} - z}$.

1. Vérifiez que si $\theta \in \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$, alors f_θ est constante.

2. On pose $\theta = 0$

a. Montrez que pour tous nombres complexes z et z' de $\mathbb{C} \setminus \{-1; 1\}$: $f_0(z) = z'$ si et seulement si $z = -f_0(-z')$.

b. Montrez que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $f_0(e^{i\alpha}) = \frac{i}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$.

c. Déterminez les racines carrées de $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

d. Utilisez les questions a., b. et c/ pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1 + z)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)(1 - z)^2$.

3. On suppose que $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on désigne par A, B, M et M' les points d'affixes respectives $e^{i\theta}$, $-e^{-i\theta}$, z et $z' = f_\theta(z)$.

a. Montrez que pour tout point $M \neq A$ et $M \neq B$, $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'})$ $\equiv \theta + \pi + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})[2\pi]$.

b/ Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, déterminez et construisez l'ensemble Γ des points M lorsque M' décrit la demi-droite d'équation : $\begin{cases} y = -x \\ x > 0 \end{cases}$

Exercice 39

Le plan complexe est muni d'un repere orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{v})$. Soient les points $A(i)$ et $B(-i)$.

Soit f l'application de $\mathcal{P} \setminus \{B\}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que : $z' = \frac{iz + 1}{z + i}$.

I. On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Soit $M(z) \in \mathcal{P} \setminus \{A; B\}$, $N(\overline{z})$ et $M'(z')$ l'image de M par f.

a/ Montrez que A, N et M' sont alignés.

b/ Montrez que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})[2\pi]$.

c/ Déduisez-en que : z' est un réel non nul si, et seulement si, M appartient au cercle $\mathcal{C}$ privé de A et B.

2. Soit $M_1 \in \mathcal{C} \setminus \{A; B\}$ et $M_1' = f(M_1)$.

Déduisez des questions précédentes une construction de M_1'.

II. Soit dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $\left(\frac{iz + 1}{z + i}\right)^3 = 1$.

1. a/ Montrez que si z est solution de (E) alors $M(z)$ appartient à la médiatrice de $[AB]$.

b/ Déduisez-en que si z est solution de (E) alors z est réel.

2. a/ Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Montrez que $\frac{i\tan\alpha + 1}{\tan\alpha + i} = e^{i\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$.

b/ Déduisez-en les valeurs de $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ tels que $\tan\alpha$ soit une solution de l'équation (E).

Exercice 40

On considère, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante :

$(E_n) : (iz)^n = (z + 2i)^n$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Scanné avec CamScanner

1. a/ Déterminez et écrivez sous forme trigonométrique les solutions z_1 et z_2 de l'équation (E_2), où z_1 est la solution telle que $Re(z_1) < 0$.

b/ On pose $u = -\frac{\sqrt{2}}{2} z_1$. Montrez que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $(u)^p + (\overline{u})^p = 2cos\left(\frac{p\pi}{4}\right)$ où $\overline{u}$ est le conjugué de u.

c/ On considère l'application f définie de l'ensemble des nombres complexes sur lui-même par : $f(z) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p z^p cos\left(\frac{p\pi}{4}\right)$.

Montrez que $f(z) = \frac{1}{2}[(1 + uz)^n + (1 + \overline{u}z)^n]$

d/ Résolvez, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 0$.

2. On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les deux points $A(-2i)$ et $M(z)$ où z est un nombre complexe.

a/ Montrez que si z est solution de (E_n), alors $OM = AM$.

b/ Déduisez-en que toute solution de (E_n) peut s'écrire sous la forme $a - i$ où a est un réel.

3. a Résolvez dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E_n).

b/ Montrez que les solutions de (E_n) peuvent s'écrire sous la forme : $z_k = -i - \frac{1}{tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{n}\right)}$ où $k \in \{0; 1; \ldots, n-1\}$.

« Tu dois devenir l'homme que tu es. Fais ce que toi seul peux faire. Deviens sans cesse celui que tu es, sois le maître et le sculpteur de toi-même. Friedrich Nietzsche

CORRIGES DES EXERCICES-NOMBRES COMPLEXES

Corrigé 01

1/ Calculons i^2, i^3 et i^4

$i^2 = -1$; $i^3 = i^2 \times i = -i$; $i^4 = i^2 \times i^2 = (-1)^2 = 1$

2/ Déduisons la valeur de i^{2006} et i^{2009} puis les entiers naturels n tels que i^n est imaginaire pur

La division euclidienne de 2006 par 4 donne $2006 = 4 \times 501 + 2$. Ainsi, $i^{2006} = i^{4\times501} \times i^2 = (i^4)^{501} \times (-1) = (1)^{501} \times (-1)$, d'où $i^{2006} = -1$;

La division euclidienne de 2009 par 4 donne $2009 = 4 \times 502 + 1$. Ainsi, $i^{2009} = i^{4\times502} \times i = (i^4)^{502} \times i = (1)^{502} \times i$, d'où $i^{2009} = i$;

Soient q et r le quotient et le reste de la division n par 4. On a donc $n = 4q + r$ avec $0 \leq r < 3$.

Si $r = 0$, c'est-à-dire si $n = 4q$, $i^n = i^{4q} = (i^4)^q = (1)^q = 1$

Si $r = 1$, c'est-à-dire si $n = 4q + 1$, $i^n = i^{4q+1} = (i^4)^q \times i = (1)^q \times i = i$

Si $r = 2$, c'est-à-dire si $n = 4q + 2$, $i^n = i^{4q+2} = (i^4)^q \times i^2 = (1)^q \times (-1) = -1$

Si $r = 3$, c'est-à-dire si $n = 4q + 3$, $i^n = i^{4q+3} = (i^4)^q \times i^3 = (1)^q \times (-i) = -i$

Les entiers naturels n tels que i^n est imaginaire pur sont donc de la forme $n = 4q + 1$ ou $n = 4q + 3$

3/ Déterminons les entiers naturels n tels que $(1 + i)^n$ est un réel négatif

$|1 + i| = \sqrt{2}$

Scanné avec CamScanner

Soit θ un argument de $1+i$, on a $\begin{cases} cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, d'où :

$\theta = \frac{\pi}{4}[2\pi]$. Ainsi $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, et pour tout entier naturel n,

$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$. On en déduit que

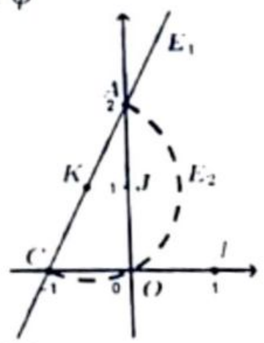
$(1+i)^n$ sera un réel négatif si et seulement si $\frac{n\pi}{4} = \pi + 2k\pi$,

$k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire si et seulement si $n = 4(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$

Corrigé 02

$Z = \frac{z+1}{z-2i}$; $z = x+iy$ et $Z = X+iY$

1/ Montrons que tout point de P sauf un point B a un antécédent unique par ϕ



ϕ est définie ssi $z \neq 2i$

Résolvons l'équation (E) : $\frac{z+1}{z-2i} = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$

$\frac{z+1}{z-2i} = \alpha \Leftrightarrow z+1 = \alpha(z-2i)$

$\Leftrightarrow (1-\alpha)z = -1-2\alpha i$ (*)

(E) admet une solution unique ssi $1-\alpha \neq 0$ c'est-à-dire ssi $\alpha \neq 1$.

Pour $\alpha \neq 1$, (*)$\Leftrightarrow z = \frac{1+2\alpha}{\alpha-1}$.

Conclusion : Tout point de (P) admet un antécédent unique par ϕ sauf le point B d'affixe 1.

2/ Calcul de X et Y en fonction de x et y

$Z = X+iY$ et $z = x+iy$, donc $Z = \frac{x+iy+1}{x+iy-2i}$ soit

$Z = \frac{[x+1+iy][x-i(y-2)]}{x^2+(y-2)^2} = \frac{x^2+x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2} + i\frac{2x-y+2}{x^2+(y-2)^2}$

d'où : $X = \frac{x^2+x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2}$ et $Y = \frac{2x-y+2}{x^2+(y-2)^2}$

3/ Ensemble E_1 des points M tels que Z est réel

Z est réel$\Leftrightarrow Y = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-y+2}{x^2+(y-2)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x-y+2 = 0$, car $x^2+(y-2)^2 \neq 0$. On déduit que : E_1 est la droite d'équation $y = 2x+2$ privée du point $A(0;2)$.

4/ Ensemble E_2 des points M tels que Z a pour argument $\frac{\pi}{2}$

$arg Z = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow arg\frac{z+1}{z-2i} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow mes(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CM}) = \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow mes(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{2}$

On déduit que : E_2 est le demi-cercle de diamètre $[AC]$ contenant le point O et privé des points A et C. C est le point d'affixe -1

Autre méthode

$arg Z = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ Y > 0 \end{cases}$

$X = 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4}$, il s'agit de l'équation du cercle (C_1) de centre $K(-\frac{1}{2};1)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (1)

$Y > 0 \Leftrightarrow y > 2x+2$; il s'agit du demi-plan (P_1) de frontière E_1 exclue et contenant le point O(0 ; 0).

E_2 est donc l'intersection de (C_1) et de (P_1). D'où le résultat de la 1ère méthode.

5/ Représentation de E_1 et E_2 (confer figure)

Corrigé 03

$P(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i-11)z - 3(4i+12)$.

1/ Démontrons que l'équation (E): $P(z) = 0$ admet une solution réelle z_1.

Scanné avec CamScanner

Posons $z_1 = a$ où $a \in \mathbb{R}$

z_1 solution de $(E) \Leftrightarrow a^3 + 9ia^2 + 2(6i - 11)a - 3(4i + 12) = 0$

$\Leftrightarrow a^3 - 22a - 36 + i(9a^2 + 12a - 12) = 0$

$\Leftrightarrow a^3 - 22a - 36 + 3i(3a^2 + 4a - 4) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 22a - 36 = 0 \\ 3a^2 + 4a - 4 = 0 \end{cases}$

Cherchons les racines de $3a^2 + 4a - 4 = 0$

On a $\Delta = 64 = 8^2$, donc $a_1 = \frac{-4-8}{6}$ et $a_2 = \frac{-4+8}{6}$ soit $a_1 = -2$ et $a_2 = \frac{2}{3}$ On vérifie que sur ces deux racines trouvées, seule -2 est racine de $a^3 - 22a - 36 = 0$. D'où la seule racine réelle de $P(z)$ est $z_1 = -2$.

2/ Déterminons un polynôme $Q(z)$ tel que $P(z) = (z - z_1)Q(z)$

Comme -2 est une racine de $P(z)$, alors il existe un polynôme $Q(z)$ de degré 2 tel que $P(z) = (z + 2)Q(z)$.

Posons $Q(z) = az^2 + bz + c$ où a, b et $c \in \mathbb{C}$.

$P(z) = (z + 2)(az^2 + bz + c)$

$P(z) = az^3 + (2a + b)z^2 + (2b + c)z + 2c$

On a par identification $\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 9i \\ 2b + c = 12i - 22 \\ 2c = -12i - 36 \end{cases}$ soit

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 9i - 2 \\ c = -6i - 18 \end{cases}$. D'où $Q(z) = z^2 + (9i - 2)z - 6(3 + i)$

3/ Démontrons que l'équation $Q(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_2.

Calculons le discriminant de $Q(z)$

$\Delta = (9i - 2)^2 - 4 \times 1 \times [-6(3 + i)] = -5 - 12i$

« J'ai appris que le courage n'est pas l'absence de peur, mais la capacité de la vaincre. » Nelson Mandela

Déterminons les racines carrées de $-5 - 12i$ en posant $\delta^2 = -5 - 12i$ où $\delta = x + iy$. On obtient: $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = -12 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$,

d'où $\begin{cases} x^2 = 4 \\ xy = -6 \\ y^2 = 9 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 2 \text{ ou } -2 \\ xy = -6 \\ y = 3 \text{ ou } y = -3 \end{cases}$ Ainsi les racines carrées de $-5 - 12i$ sont $2 - 3i$ et $-2 + 3i$

Il vient que les racines de $Q(z)$ sont $\frac{-(9i-2)+2-3i}{2} = 2 - 6i$ et $\frac{-(9i-2)-2+3i}{2} = -3i$. Il apparaît que l'équation $Q(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure $z_2 = -3i$.

NB : On peut aussi procéder comme à la question 1/ en posant $z_2 = bi$

4/ Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z + 2)Q(z) = 0$

$\Leftrightarrow z = -2$ ou $Q(z) = 0$

$\Leftrightarrow z = -2$ ou $z = -3i$ ou $z = 2 - 6i$, d'après 3/

$S = \{-2; -3i; 2 - 6i\}$

5/ Démontrons que les points A, B et C sont alignés

Soient A le point d'affixe $z_1 = -2$, B le point d'affixe $z_2 = -3i$ et C le point d'affixe $z_3 = 2 - 6i$.

On a $z_{\overrightarrow{AB}} = z_2 - z_1 = -3i + 2$ et $z_{\overrightarrow{AC}} = z_3 - z_1 = 4 - 6i$, donc $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = 2$. Par suite $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$, d'où les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, en conséquence les points A, B et C sont alignés.

Corrigé 04

$P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$, (E) : $P(z) = 0$

1/ Montrons que si w est solution de (E), il en est de même de $\overline{w}$ et de $\frac{1}{w}$.

Scanné avec CamScanner

Supposons que w est solution de (E), on a alors P(w) = 0.

On a : $P(\overline{w}) = \overline{w}^4 - 3\overline{w}^3 + \frac{9}{2}\overline{w}^2 - 3\overline{w} + 1$

$= \overline{w^4} - 3\overline{w^3} + \frac{9}{2}\overline{w^2} - 3\overline{w} + 1$

$= \overline{w^4 - 3w^3 + \frac{9}{2}w^2 - 3w + 1}$

$= \overline{P(w)} = 0$, car P(w) = 0.

$P\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^4} - 3\frac{1}{w^3} + \frac{9}{2}\frac{1}{w^2} - 3\frac{1}{w} + 1$

$P\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{w^4 - 3w^3 + \frac{9}{2}w^2 - 3w + 1}{w^4} = \frac{P(w)}{w^4} = 0$, car $P(w) = 0$

2. Calcul de $P(1+i)$

On a : $P(1+i) = 0$

Déduction

On a: $\overline{1+i} = 1 - i$; $\frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ et $\overline{\left(\frac{1}{1+i}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, donc d'après 1. comme $P(1+i) = 0$, alors :

$P(1-i) = P\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) = P\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 0$. D'où les solutions de (E) sont : $1 + i$, $1 - i$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

3. $P(z)$ sous forme de produit de deux polynômes du 2ème degré à coefficients réels

$P(z) = \left[\left(z - (1+i)\right)\left(z - (1-i)\right)\right]\left[\left(z - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right)\left(z - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right)\right] = (z^2 + 1)\left(z^2 - z + \frac{1}{2}\right)$

Corrigé 05

$Z = (1-x)\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$ avec $x \in \mathbb{R}$.

1/ Le module et un argument de Z (on discutera selon les valeurs de x)

$|Z| = |1-x|\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|$, d'où $|Z| = |1-x|$, car $\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$

$arg(Z) = \arg(1-x) + arg\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)[2\pi]$

$arg(Z) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} & si\ x < 1 \\ \frac{4\pi}{3} & si\ x > 1 \end{cases}$, car

$\arg(1-x) = \begin{cases} 0[2\pi]\ si\ 1-x > 0 \\ \pi[2\pi]\ si\ 1-x < 0 \end{cases}$

Forme trigonométrique et forme exponentielle de Z

Si $x < 1$, $Z = (1-x)\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right) = (1-x)e^{i\frac{\pi}{3}}$

Si $x > 1$, $Z = (x-1)\left(cos\frac{4\pi}{3} + isin\frac{4\pi}{3}\right) = (x-1)e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Si $x = 1$, alors $Z = 0$, donc $arg(Z)$ est non défini.

2/ Montrons que Z^{2004} est un réel dont on précisera le signe

Si $x < 1$, $arg(Z^{2004}) = \frac{2004\pi}{3} = 668\pi = 0[2\pi]$

Si $x > 1$, $arg(Z^{2004}) = \frac{2004\times 4\pi}{3} = 2672\pi = 0[2\pi]$

Si $x = 1$, $Z^{2004} = 0$.

Ainsi, dans tous les cas, soit $Z^{2004} = 0$ ou $arg(Z^{2004}) = 0[2\pi]$. Donc Z^{2004} est un réel positif.

3/ a. Montrons que l'équation |Z| = 2 admet deux racines Z_1 et Z_2

$|Z| = 2 \Leftrightarrow |1-x| = 2$

$\Leftrightarrow 1 - x = 2$ ou $1 - x = -2$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$

Il y a donc deux valeurs possibles pour Z

$Z_1 = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$ et $Z_2 = 2\left(cos\frac{4\pi}{3} + isin\frac{4\pi}{3}\right)$.

b. Ecrivons Z_1 et Z_2 sous forme algébrique

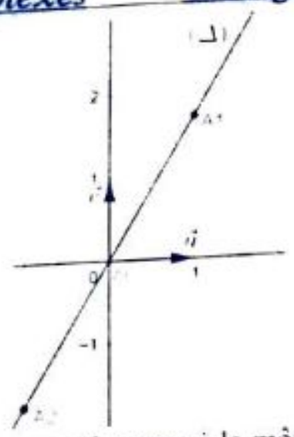
$Z_1 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$ et

$Z_2 = -2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$

c. Plaçons les points A_1 et A_2

« Le seul homme à ne jamais faire d'erreur est celui qui ne fait rien. »
Théodore Roosevelt

Scanné avec CamScanner



Comme A_1, O et A_2 appartiennent à la même droite (Δ), alors ils sont alignés.

Corrigé 06

$z_A = i$ et $z' = \frac{iz-2}{z+i}$

1/ Démontrons que si z est imaginaire pur et $z \neq -i$, alors z' est imaginaire pur

Posons $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$. On a alors :

$z \neq -i \Leftrightarrow iy \neq -i$

$\Leftrightarrow y \neq -1$

$\Leftrightarrow y \in \mathbb{R} - \{-1\}$. Ainsi :

$z' = \frac{i(iy)-2}{iy+i} \Leftrightarrow z' = \frac{-y-2}{iy+i}$

$\Leftrightarrow z' = \frac{-y-2}{i(y+1)}$

$\Leftrightarrow z' = i\frac{y+2}{y+1}$

Or $y \in \mathbb{R} - \{-1\} \Rightarrow y+2 \in \mathbb{R}$ et $y+1 \in \mathbb{R}^*$, donc $\frac{y+2}{y+1} \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit que z' est imaginaire pur.

2/ Déterminons l'ensemble E_1 des points M, dont les affixes vérifient : $z' = z$

Pour tout $z \neq -i$, $z' = z \Leftrightarrow \frac{iz-2}{z+i} = z$

$\Leftrightarrow iz - 2 = z^2 + iz$

$\Leftrightarrow z^2 = -2$

$\Leftrightarrow z_1 = i\sqrt{2}$ ou $z_2 = -i\sqrt{2}$

D'où $E_1 = \{M_1; M_2\}$ où M_1 et M_2 sont les points d'affixes respectives de z_1 et z_2.

3/ Déterminons l'ensemble E_2 des points M tels que M' est le symétrique de M par rapport à O

Notons par (*) « M' est le symétrique de M par rapport à O »

$(*) \Leftrightarrow z' = -z$

$\Leftrightarrow \frac{iz-2}{z+i} = -z$

$\Leftrightarrow iz - 2 = -z^2 - iz$

$\Leftrightarrow z^2 + 2iz - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (z+i)^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow z + i = 1$ ou $z + i = -1$

$\Leftrightarrow z_3 = 1 - i$ ou $z_4 = -1 - i$

D'où : $E_2 = \{M_3; M_4\}$ où M_3 et M_4 sont les points d'affixes respectives de z_3 et z_4.

4/ Déterminons l'ensemble E_3 des points M tels que z' est un nombre réel

z' est un nombre réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.

On a : $z' = \frac{iz-2}{z+i} = \frac{i(x+iy)-2}{x+iy+i} = \frac{ix-y-2}{x+i(y+1)}$

$z' = \frac{|ix-(y+2)||x-i(y+1)|}{|x+i(y+1)||x-i(y+1)|}$

$z' = \frac{ix^2+x(y+1)-x(y+2)+i(y+2)(y+1)}{x^2+(y+1)^2}$

$z' = \frac{x(y+1)-x(y+2)}{x^2+(y+1)^2} + i\frac{x^2+(y+2)(y+1)}{x^2+(y+1)^2}$

z' nombre réel $\Leftrightarrow \mathcal{I}m(z) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+(y+2)(y+1)}{x^2+(y+1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + (y+2)(y+1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = 0$

Scanné avec CamScanner

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

On déduit que E_3 est le cercle de centre $K\left(0; -\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

5/ Déterminons l'ensemble E_4 des points M tels que z' est imaginaire pur

z' imaginaire pur $\Leftrightarrow \mathcal{R}e(z') = 0$

$\Leftrightarrow x(y + 1) - x(y + 2) = 0$

$\Leftrightarrow -x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

On déduit que E_4 est la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) privée du point $A(0; -1)$.

Corrigé 07

1. Résolvons dans $\mathbb{C}$: $z^3 = 1$

La résolution de $z^3 = 1$ revient à déterminer les racines cubiques de 1 qui sont les nombres complexes $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$, $k \in \{0; 1; 2\}$ soit $z_0 = 1$, $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2/ a. Développons $\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^3$

Posons : $A = \left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^3$. On a :

$A = \left(\sqrt{2}\right)^3 - 3\left(\sqrt{2}\right)^2(i\sqrt{2}) + 3(\sqrt{2})(i\sqrt{2})^2 - (i\sqrt{2})^3$

$A = 4\sqrt{2}(-1 - i)$.

b. $z' = 4\sqrt{2}(-1 - i)$. En posant $u = \frac{z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$,

Déterminons sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique les racines de l'équation (E)

(E)$\Leftrightarrow z^3 = \left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^3$

$\Leftrightarrow \frac{z^3}{\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^3} = 1$

$\Leftrightarrow \left(\frac{z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}\right)^3 = 1$

$\Leftrightarrow u^3 = 1$, car $u = \frac{z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$

D'après 1/, les solutions de l'équation en u sont les nombres complexes $u_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$, $k \in \{0; 1; 2\}$. Or $u_k = \frac{z_k}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$, donc les solutions de (E) sont les nombres complexes :

$z_k = \left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)u_k = \left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)e^{i\frac{2k\pi}{3}}$, $k \in \{0; 1; 2\}$

Forme algébrique des solutions

$z_0 = \left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right) \times 1 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

$z_1 = \left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$

$z_2 = \left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + i\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$

Forme trigonométrique des solutions

On a : $z_k = \sqrt{2}(1 - i)e^{i\frac{2k\pi}{3}} = \sqrt{2} \times \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{2k\pi}{3}}$, donc :

$z_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\times 0} = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$, donc $z_1 = 2\left(cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

$z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2e^{i\frac{13\pi}{12}}$, donc $z_2 = 2\left(cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right)$

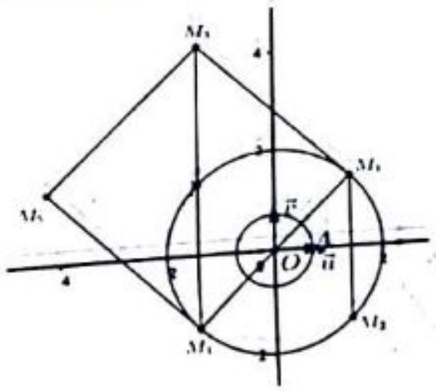
3/ Déduisons les valeurs exactes de $cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

D'après la question 2/b, on a :

$z_1 = 2\left(cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$, d'où l'on déduit que : $\begin{cases} cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \\ sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

Corrigé 08



$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

1/ $\Delta = -8$

$z_2 = \frac{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}}{2}$ et $z_1 = \frac{2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}}{2}$ soit $z_1 = \sqrt{2}(1+i)$ et $z_2 = \sqrt{2}(1-i)$, donc $S = \{\sqrt{2}(1+i); \sqrt{2}(1-i)\}$.

2/a. $\begin{cases} |z_1| = 2 \\ arg z_1 = \frac{\pi}{4} \end{cases}$ et $\begin{cases} |z_2| = 2 \\ arg z_2 = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$

b. $\begin{cases} \left|\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 = \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2} = \frac{4}{4} = 1 \\ arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = 2arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 2(arg z_1 - arg z_2) = \pi \end{cases}$

3/ a. On a : $z' - \frac{\sqrt{2}}{2} = -3\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ soit

$z_{M_3} = -3\left(z_{M_2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$, d'où $z_{M_3} = \sqrt{2}(-1+3i)$.

b. On a : $z' = e^{-\frac{\pi}{2}}z$ soit $z' = -iz$ et $z_{M_4} = -iz_{M_2}$, d'où $z_{M_4} = -\sqrt{2}(1+i)$.

c. Plaçons les points (voir figure)

d. $\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} = i$

e. Comme $\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} = i$, alors le triangle $M_4M_1M_3$ est rectangle et isocèle en M_1. Comme I est milieu du segment $[M_3M_4]$ et

M_5 le symétrique de M_1 par rapport à I, alors (M_3M_4) et (M_1M_5) sont perpendiculaires et $M_3M_4 = M_1M_5$. Il s'ensuit, que le quadrilatère $M_4M_1M_3M_5$ est un losange et un rectangle, d'où c'est un carré.

Corrigé 09

Soit $a \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$; $z' = (-1 + i\tan a)z - i\tan a + 2$

1/ Déterminons le module et un argument du nombre complexe $-1 + i\tan a$

On a : $-1 + i\tan a = \frac{-e^{-ia}}{\cos a} = \frac{e^{i(\pi-a)}}{\cos a} = \frac{1}{\cos a}e^{i(\pi-a)}$

Or a $\in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \cos a > 0$, donc $|-1 + i\tan a| = \frac{1}{\cos a}$ et $arg(-1 + i\tan a) = \pi - a$

2/ Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de f_a

L'expression complexe de f_a est de la forme $z' = az + b$, avec $a \neq 0$, donc f_a est une similitude directe de rapport $k = \frac{1}{\cos a}$, d'angle $\theta = \pi - a$ et de centre Ω_a d'affixe $w_a = \frac{-i\tan a + 2}{1 - (-1 + i\tan a)} = \frac{-i\tan a + 2}{2 - i\tan a}$ soit $w_a = 1$.

3/ Soit h_a l'homothétie de centre le point Ω d'affixe 1 et de rapport $\frac{1}{\cos a}$.

Ecriture complexe de la rotation r_a telle que : $f_a = r_a \circ h_a$

Comme $f_a = S_{\left(\Omega, \frac{1}{\cos a}, \pi - a\right)}$ et que $h_a = h_{\left(\Omega, \frac{1}{\cos a}\right)}$, alors r_a est la rotation de centre Ω et d'angle $\theta = \pi - a$. D'où son expression complexe est donnée par :

$z' - 1 = e^{i(\pi-a)}(z - 1)$ soit $z' = e^{i(\pi-a)}z + 1 - e^{i(\pi-a)}$

Corrigé 10

$z = -\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

a. Expression de z^2 sous forme algébrique

$z^2 = \left(-\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)^2$

Scanné avec CamScanner

$z^2 = 2 + \sqrt{2} + i^2(2 - \sqrt{2}) - 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$

$z^2 = 2\sqrt{2} - i2\sqrt{2}$

b. Expression de z^2 sous forme trigonométrique

$|z^2| = 4$ et $z^2 = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\left(cos\frac{\pi}{4} - sin\frac{\pi}{4}\right)$

c. Déduisons z sous forme exponentielle.

$z^2 = 4\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \Rightarrow argz^2 \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

$\Rightarrow 2argz \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

$\Rightarrow argz \equiv -\frac{\pi}{8}[\pi]$ **(1)**

$|z^2| = 4 \Leftrightarrow |z|^2 = 4$

$\Leftrightarrow |z| = 2$ **(2)**

De **(1)** et **(2)** on déduit que $z = 2(cos(argz) + sin(argz))$

Or sur $]-\pi;\pi]$, $z = 2\left(cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)$ ou $z = 2\left(cos\left(-\frac{\pi}{8} + \pi\right) + isin\left(-\frac{\pi}{8} + \pi\right)\right) = 2\left(cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)$. Or $Im(z) > 0$ et $Re(z) < 0$, donc $z = 2\left(cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)$ soit $z = 2e^{i\frac{7\pi}{8}}$

De **(1)** et **(2)** on déduit que $z = 2\left(cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)$.

Corrigé 11

$z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

1. a. $z_1 z_2$ sous forme algébrique

$z_1 z_2 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

b. Forme exponentielle de z_1, z_2 et $z_1 z_2$

$z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$; $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$; $z_1 z_2 = e^{-i\frac{5\pi}{12}}$

c. Déduisons $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$

D'après a. et b. $e^{-i\frac{5\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

D'où : $\begin{cases} \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

Or: $\begin{cases} \cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2}\right) = sin\frac{\pi}{12} \\ \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2}\right) = -cos\frac{\pi}{12} \end{cases}$,

donc $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

2. $z_3 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}z_1$

a. Module et argument de z_3

$z_3 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = 1 - e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$z_3 = e^{-i\frac{\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}}\right) = 2ie^{-i\frac{\pi}{12}}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}}}{2i}\right)$

$z_3 = 2ie^{-i\frac{\pi}{12}}sin\frac{\pi}{12} = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}sin\frac{\pi}{12}$. Il vient que :

$|z_3| = 2sin\frac{\pi}{12}$ et $argz_3 = \frac{5\pi}{12}$

b. Démontrons que $z_3{}^{12}$ est un nombre réel

On a : $z_3{}^{12} = \left(2e^{i\frac{5\pi}{12}}sin\frac{\pi}{12}\right)^{12} = 2^{12}e^{i\frac{5\pi}{12}}sin^{12}\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$z_3{}^{12} = -\left(2sin\frac{\pi}{12}\right)^{12}$. Or: $-\left(2sin\frac{\pi}{12}\right)^{12} \in \mathbb{R}$, donc $z_3{}^{12}$ est un nombre réel.

3. $A(z_1)$ et $B(z_2)$

a. Interprétation géométrique

$|z_1| = |z_{\overrightarrow{OA}}| = \|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{2}$

$argz_1 = arg(z_{\overrightarrow{OA}}) = mes(\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = -\frac{\pi}{6}$

b. Déterminons l'ensemble (E)

Scanné avec CamScanner

$\left|z - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right| = \left|z - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right| \Leftrightarrow |z - z_1| = |z - z_2| \Leftrightarrow$
$|z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow MA = MB.$
On déduit que (E) est la médiatrice du segment $[AB]$.

Corrigé 12

On considère l'homothétie h de centre d'affixe $w = \frac{3(4+3\sqrt{3})}{11}$ et de rapport $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

1. Déterminons la transformation complexe associée à h
Soient M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z' tel que $h(M) = M'$. On a : h(M) = M' $\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$
$\Leftrightarrow z' - w = k(z - w)$
$\Leftrightarrow z' = \frac{3\sqrt{3}}{4}z - \frac{3}{4}$

2. $z_1 = i$ et $z_2 = -i$ tels que h(M) = M' et h(N) = N'
a/ Déterminons les affixes z'_1 de M' et z'_2 de N'
$z'_1 = \frac{3\sqrt{3}}{4}z_1 - \frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}i - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i$
$z'_2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}z_2 - \frac{3}{4} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}i - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i$
b/ Forme trigonométrique z'_1 et z'_2
On a : $|z'_1| = \frac{3}{2}$ et $\begin{cases} cos\alpha_1 = -\frac{1}{2} \\ sin\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$, donc $\alpha_1 = \frac{2\pi}{3}$
On déduit que $z'_1 = \frac{3}{2}\left(cos\frac{2\pi}{3} + sin\frac{2\pi}{3}\right)$
Or $z'_2 = \overline{z'_1}$, donc $z'_2 = \frac{3}{2}\left(cos\frac{2\pi}{3} - sin\frac{2\pi}{3}\right)$

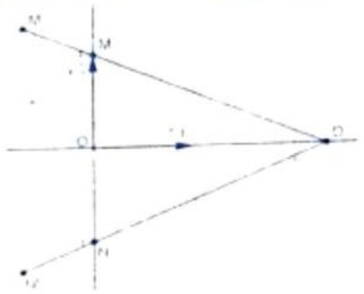
3. On considère l'équation (E) :
$z \in \mathbb{C}, z^2 + 2\lambda^2 cos\theta(1 + cos\theta)z + \lambda^4(1 + cos\theta) = 0$, où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\theta \in]0; \pi[$.
Déterminons les solutions de cette équation en fonction de λ et de θ
$\Delta = 4\lambda^4 cos^2\theta(1 + cos\theta)^2 - 4\lambda^4(1 + cos\theta)^2$
$\Delta = 4\lambda^4(1 + cos\theta)^2(cos^2\theta - 1)$

$\Delta = 4\lambda^4(1 + cos\theta)^2 sin^2\theta i^2$
$\delta = 2\lambda^2(1 + cos\theta)sin\theta i$ est une racine carrée de Δ, d'où les solutions de (E) sont :
$z''_1 = -\lambda^2(1 + cos\theta)(cos\theta + isin\theta)$ et
$z''_2 = -\lambda^2(1 + cos\theta)(cos\theta - isin\theta)$

4. On suppose $\lambda = 1$
a/ Calculons le module et l'argument des solutions de l'équation (E)
On a : $z''_1 = \lambda^2(1 + cos\theta)e^{i(\theta+\pi)}$ et
$z''_2 = \lambda^2(1 + cos\theta)e^{i(-\theta+\pi)}$, car $\lambda^2(1 + cos\theta) > 0$, d'où on déduit que :
$|z''_1| = |z''_2| = 1 + cos\theta$ et $\begin{cases} argz''_1 = \theta + \pi \\ argz''_2 = -\theta + \pi \end{cases}$
b/ Déterminons θ pour que z_1 et z_2 soient solutions de (E)
On a : $z_1 = cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}$ et $z_2 = cos\frac{\pi}{2} - isin\frac{\pi}{2}$
z_1 et z_2 sont solutions de (E) si et seulement si on a :
$\begin{cases} 1 + cos\theta = 1 \\ \theta + \pi = \frac{\pi}{2} \\ -\theta + \pi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$ soit $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$
c/ Trouvons la valeur de θ pour que z'_1 et z'_2 soient solutions de (E)
z'_1 et z'_2 sont solutions de (E) si et seulement si on a $\begin{cases} 1 + cos\theta = \frac{3}{2} \\ \theta + \pi = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$ soit $\begin{cases} cos\theta = \frac{1}{2} \\ \theta = \frac{\pi}{3} \end{cases}$. D'où $\theta = \frac{\pi}{3}$.
d/ Plaçons les points M, N, M' et N' puis déduisons graphiquement le point d'affixe w

« Aucun de nous, en agissant seul, ne peut atteindre le succès. »
Nelson Mandela

Scanné avec CamScanner



Corrigé 13

$f(z) = \frac{1}{3}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

1. Coordonnées de K

$f\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right)$

$f\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$f\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{3}$, donc $K\left(\frac{1}{3}; 0\right)$

2. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $f(z) = \frac{2}{3}cos\alpha$

(E) $\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{2}{3}cos\alpha$

$\Leftrightarrow z^2 + 1 = 2zcos\alpha$

$\Leftrightarrow z^2 - 2(cos\alpha)z + 1 = 0$.

$\Delta = (2cos\alpha)^2 - 4 = (2isin\alpha)^2$

$z_1 = cos\alpha - i|sin\alpha|$ et $z_2 = cos\alpha + i|sin\alpha|$

D'où : $\{e^{i\alpha}; e^{-i\alpha}\}$

3. a/ Déduisons la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E') :

$z^4 - 2(cos\alpha)z^2 + 1 = 0$

En posant $Z = z^2$, (E') $\Leftrightarrow \begin{cases} Z^2 - 2(cos\alpha)Z + 1 = 0 \\ Z = z^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow z^2 = e^{i\alpha}$ ou $z^2 = e^{-i\alpha}$

$\Leftrightarrow z = e^{i\frac{\alpha}{2}}$ ou $z = -e^{i\frac{\alpha}{2}}$ ou $z = e^{-i\frac{\alpha}{2}}$ ou $z = -e^{-i\frac{\alpha}{2}}$

$S = \left\{e^{i\frac{\alpha}{2}}; -e^{i\frac{\alpha}{2}}; e^{-i\frac{\alpha}{2}}; -e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right\}$

b/ Vérifions que les solutions de (E') sont deux à deux conjuguées

On a : $e^{-i\frac{\alpha}{2}} = \overline{e^{i\frac{\alpha}{2}}}$ et $-e^{-i\frac{\alpha}{2}} = \overline{-e^{i\frac{\alpha}{2}}}$, d'où le résultat.

c/ Décomposons $P(x) = x^4 - 2(cos\alpha)x^2 + 1$

De la résolution de (E'), on déduit que :

$z^4 - 2(cos\alpha)z^2 + 1 = \left(z - e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)\left(z - e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)\left(z + e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)\left(z + e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)$

$= \left[z^2 - \left(e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)z + 1\right]\left[z^2 + \left(e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)z + 1\right]$

$= \left[z^2 - 2\left(cos\frac{\alpha}{2}\right)z + 1\right]\left[z^2 + 2\left(cos\frac{\alpha}{2}\right)z + 1\right]$. D'où :

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$P(x) = \left[x^2 - 2\left(cos\frac{\alpha}{2}\right)x + 1\right]\left[x^2 + 2\left(cos\frac{\alpha}{2}\right)x + 1\right]$

4.a/ Démontrons que h est une similitude plane directe dont on précisera les éléments caractéristiques

$2\left(z - \frac{1}{3}\right) = (1 + i)\left(z' - \frac{1}{3}\right)$ (*)

(*) $\Leftrightarrow z' - \frac{1}{3} = \frac{2}{1+i}\left(z - \frac{1}{3}\right)$

$\Leftrightarrow z' - \frac{1}{3} = (1 - i)\left(z - \frac{1}{3}\right)$ avec $|1 - i| = \sqrt{2}$, donc h est une similitude directe de rapport $k = \sqrt{2}$, d'angle $\theta = \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$ et de centre $K\left(\frac{1}{3}; 0\right)$.

b/ Démontrons que h est la composée d'une rotation et d'une homothétie dont on donnera les éléments caractéristiques

D'après 4.a/, la décomposition de h permet de dire que h est la composée de la rotation de centre $K\left(\frac{1}{3}; 0\right)$, d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de l'homothétie de centre $K\left(\frac{1}{3}; 0\right)$ et de rapport $\sqrt{2}$.

Scanné avec CamScanner

Corrigé 14

1/ Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si et seulement si $Re(z'\overline{z}) = 0$

$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OM'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

Or $z'\overline{z} = (x' + iy')(x - iy)$

$z'\overline{z} = xx' + yy' + i(xy' - x'y)$ et $Re(z'\overline{z}) = xx' + yy'$, donc $xx' + yy' = 0$ si et seulement si $Re(z'\overline{z}) = 0$

2/ Montrons que les points O, M et M' sont alignés si et seulement si $Im(z'\overline{z}) = 0$

O, M et M' sont alignés si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = 0$.

Or $\det\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = 0 \Leftrightarrow xy' - x'y = 0$

$\Leftrightarrow Im(z'\overline{z}) = 0$, car $Im(z'\overline{z}) = xy' - x'y$

Applications

3/ N est le point d'affixe $z^2 - 1$.

Ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont orthogonaux

Prenons $z' = z^2 - 1 = x^2 - y^2 - 1 + 2ixy$, alors

$xx' + yy' = x(x^2 - y^2 - 1) + y(2xy)$

$xx' + yy' = x(x^2 + y^2 - 1)$, donc on a :

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + y^2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $^2 + y^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ (axe des ordonnées) ou $x^2 + y^2 = 1$ (cercle trigonométrique)

L'ensemble des points M est la réunion de l'axe des abscisses et du cercle trigonométrique.

4/ a. Montrons que $\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)\left(\overline{z^2 - 1}\right) = -(\overline{z})^2\left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2$

$\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)\left(\overline{z^2 - 1}\right) = \left(\frac{1}{z^2} - 1\right)\left(\overline{z^2\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)}\right)$

$= \left(\frac{1}{z^2} - 1\right)\left(-\overline{z^2\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)}\right)$

$= \left(\frac{1}{z^2} - 1\right)\left(\overline{-z^2}\right)\overline{\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)}$

$= \left(\overline{-1}\right)\left(\overline{z^2}\right)\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)\overline{\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)}$

$\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)\left(\overline{z^2 - 1}\right) = -\left(\overline{z^2}\right)\left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2$, car $z\overline{z} = |z|^2$

b. En utilisant l'équivalence démontrée au début de l'exercice, concluons sur l'ensemble recherché

Comme $\left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2$ est réel, la partie imaginaire de $\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)\left(\overline{z^2 - 1}\right)$ est celle de $-\left(\overline{z^2}\right) = -(x - iy)^2 = -x^2 + y^2 + 2ixy$. D'où : l'ensemble cherché est la réunion des axes des abscisses et des ordonnées.

Corrigé 15

1. Résolvez dans $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^3 = 8$

$z^3 = 8 \Leftrightarrow z^3 - 2^3 = 0$

$\Leftrightarrow (z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0$

$\Leftrightarrow z - 2 = 0$ ou $z^2 + 2z + 4 = 0$

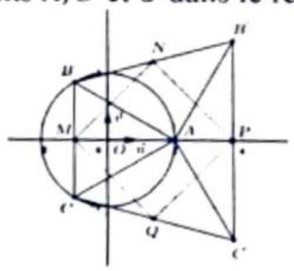
$\Leftrightarrow z = 2$ ou $z^2 + 2z + 4 = 0$

Le discriminant de $z^2 + 2z + 4 = 0$ est $\Delta = 4 - 16 = \left(2i\sqrt{3}\right)^2$, d'où ses solutions sont :

$z_1 = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$

$S = \left\{2; -1 - i\sqrt{3}; -1 + i\sqrt{3}\right\}$

2. a. Plaçons les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$



Scanné avec CamScanner

b. Montrons que $b' = 2 + \sqrt{3} + 3i$

$b' - a = e^{-i\frac{\pi}{2}}(b - a) \Leftrightarrow b' = 2 - i(-1 + i\sqrt{3} - 2)$

$\Leftrightarrow b' = 2 + \sqrt{3} + 3i$

c. Montrons que b' et c' sont des nombres conjugués

$c' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(c - a) \Leftrightarrow c' = 2 + i(-1 - i\sqrt{3} - 2)$

$\Leftrightarrow c' = 2 + \sqrt{3} - 3i$

On a : $\overline{c'} = 2 + \sqrt{3} + 3i = b'$, d'où b' et c' sont des nombres conjugués.

3. a. Montrons que l'affixe n du point N est à $\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1 + i\sqrt{3})$

$n = \frac{b + b'}{2} = \frac{-1 + i\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 3i}{2}$

$n = \frac{1 + \sqrt{3} + (\sqrt{3} + 3)i}{2}$

$n = \frac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{3}(1 + \sqrt{3})i}{2}$

$n = \frac{(1 + \sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})}{2}$

$n = \frac{(1 + \sqrt{3})}{2}(1 + i\sqrt{3})$

Déduisons que les points O, N et C sont alignés

On a : $n = \frac{(1 + \sqrt{3})}{2}(1 + i\sqrt{3})$; or $c = -1 - i\sqrt{3}$, donc

$n = -\frac{(1 + \sqrt{3})}{2}c$ soit $\overrightarrow{ON} = -\frac{(1 + \sqrt{3})}{2}\overrightarrow{OC}$. D'où l'on déduit que les vecteurs $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont colinéaires, par suite les points O, N et C sont alignés.

b. Montrons que $n + 1 = i(q + 1)$

M a pour affixe $\frac{b + c}{2} = -1$, Q est le milieu de [C'C] et a pour affixe le conjugué de n (puisque c et c' sont les conjugués respectifs de b et b'), soit $q = \frac{(1 + \sqrt{3})}{2}(1 - i\sqrt{3})$.

On a alors :

$n + 1 = \frac{(1 + \sqrt{3})}{2}(1 + i\sqrt{3}) + 1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ et

$i(q + 1) = i\frac{(1 + \sqrt{3})}{2}(1 - i\sqrt{3}) + i = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$, donc on obtient bien : $n + 1 = i(q + 1)$.

$n + 1 = i(q + 1) \Leftrightarrow \frac{n+1}{q+1} = i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{n+1}{q+1}\right| = 1 \\ arg\left(\frac{n+1}{q+1}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} MN = MQ \\ Mes(\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MN}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Il s'ensuit que le triangle MNQ est rectangle et isocèle en M.

c. Montrons que le quadrilatère $MNPQ$ est un carré

Comme Q est le symétrique de N par rapport à (Ox) et que M et P sont sur (Ox), les triangles MNP et MQP sont isométriques donc $MNPQ$ est un carré.

Corrigé 16

Soit $\alpha \in]-\pi; \pi[\setminus \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$; $u = e^{i\alpha}$ et

$f(z) = z^3 - (u + 2\overline{u})z^2 + (2 + \overline{u}^2)z - \overline{u}$

1/ a. Montrons que u est une solution de (E) : $f(z) = 0$

$f(u) = u^3 - (u + 2\overline{u})u^2 + (2 + \overline{u}^2)u - \overline{u}$

$f(u) = u^3 - u^3 - 2\overline{u}u^2 + 2u + \overline{u}^2 u - \overline{u}$

$f(u) = -2(\overline{u}u)u + 2u + \overline{u}(\overline{u}u) - \overline{u}$

$f(u) = -2u + 2u + \overline{u} - \overline{u}$, car $\overline{u}u = |u|^2 = 1$

$f(u) = 0$, donc u est une solution de (E) : $f(z) = 0$

b/ Résolvons alors dans $\mathbb{C}$(E) : $f(z) = 0$

Comme $f(u) = 0$, alors il existe des nombres complexes a, b et c tels que $f(z) = (z - u)(az^2 + bz + c) = az^3 + (-ua + b)z^2 + (c - ub)z - uc$, d'où par identification on a : $\begin{cases} a = 1 \\ -ua + b = -u - 2\overline{u} \\ c - ub = 2 + \overline{u}^2 \\ -uc = -\overline{u} \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2\overline{u} \\ c = \overline{u}^2 \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

D'où $f(z) = (z-u)(z^2 - 2\overline{u}z + \overline{u}^2)$ et

$f(z) = 0 \Leftrightarrow z - u = 0$ ou $z^2 - 2\overline{u}z + \overline{u}^2 = 0$

$\Leftrightarrow z = u$ ou $(z-\overline{u})^2 = 0$

$\Leftrightarrow z = u$ ou $z = \overline{u}$

$S = \{u; \overline{u}\}$

2. a/ Montrons que $Z^2 = u + 1 - \frac{1}{u+\overline{u}}$

$Z^2 = u + 1 - \frac{u}{u^2+1}$

$Z^2 = u + 1 - \frac{u}{u(u+\frac{1}{u})}$

$Z^2 = u + 1 - \frac{1}{u+\frac{1}{u}}$

$Z^2 = u + 1 - \frac{1}{u+\overline{u}}$, car $\overline{u}u = 1 \Rightarrow \overline{u} = \frac{1}{u}$

Déduisons la partie réelle de Z^2.

$u = e^{i\alpha} = cos\alpha + isin\alpha$, donc :

$Z^2 = cos\alpha + isin\alpha + 1 - \frac{1}{2cos\alpha}$, car $u + \overline{u} = 2cos\alpha$, d'où

$Re(Z^2) = cos\alpha + 1 - \frac{1}{2cos\alpha}$

b/ Valeurs de α pour lesquelles $Re(Z^2) = 1$

$Re(Z^2) = 1 \Leftrightarrow cos\alpha + 1 - \frac{1}{2cos\alpha} = 1$

$\Leftrightarrow cos\alpha = \frac{1}{2cos\alpha}$

$\Leftrightarrow 2cos^2\alpha = 1$

$\Leftrightarrow cos^2\alpha = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ ou $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ ou $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ ou $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$

On conclut que $Re(Z^2) = 1$ pour $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right\}$

3/ On suppose que $Re(Z^2) = 1$;

a/ Montrons que $Arg(Z^2 - 1) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

$Re(Z^2) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} cos\alpha = \frac{1}{2cos\alpha} \\ Z^2 - 1 = isin\alpha \end{cases}$

$\Rightarrow Arg(Z^2-1) \equiv Arg(isin\alpha) \equiv \begin{cases} \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ si } \alpha > 0 \\ -\frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow Arg(Z^2-1) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

b/ Montrons que $Arg\left(Z - \frac{1}{z}\right) - Arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

$Arg\left(Z - \frac{1}{z}\right) - Arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv Arg\left(\frac{Z^2-1}{z}\right) + Arg(Z)[2\pi]$

$Arg\left(Z - \frac{1}{z}\right) - Arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv Arg(Z^2 - 1)[2\pi]$, d'où :

$Arg\left(Z - \frac{1}{z}\right) - Arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

Corrigé 17

1. (confer figure)

2. a. Affixes des points d'intersection de (Γ) et de l'axe $(O, \vec{u})$

(Γ) a pour équation $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$

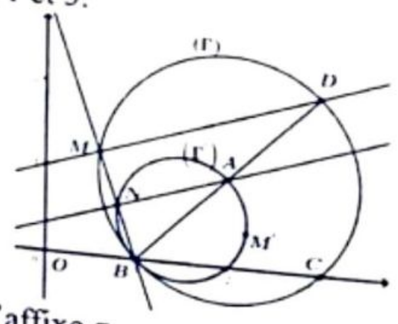
$M(x;y) \in (\Gamma) \cap (O, \vec{u}) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ ou } x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

On déduit que les affixes des points d'intersection de (Γ) et de l'axe $(O, \vec{u})$ sont 1 et 3.



b. Déterminons l'affixe z_D

Scanné avec CamScanner

D est donc le symétrique de B par rapport au point A, d'où $z_A = \frac{z_B + z_D}{2}$ soit $z_D = 2z_A - z_B = 2(2+i) - 1$, donc $z_D = 3 + 2i$

3/ a. Calculons le nombre complexe $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$

$$\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M} = \frac{3 + 2i - \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i}{1 - \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i} = \frac{\frac{12}{5} + \frac{4}{5}i}{\frac{2}{5} - \frac{6}{5}i} = \frac{12 + 4i}{2 - 6i} = \frac{6 + 2i}{1 - 3i}$$

$$\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M} = \frac{(6 + 2i)(1 + 3i)}{10} = \frac{20i}{10} = 2i$$

b. Interprétons géométriquement un argument du nombre $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$ et déduisons-en que le point M appartient au cercle (Γ)

$Arg\left(\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}\right) = Arg(2i) = \frac{\pi}{2} = Mes(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD})$, donc le triangle BMD est rectangle en M : M appartient au cercle de diamètre $[BD]$, c'est-à-dire au cercle (Γ).

4/ a. Montrons que les droites (DM) et (AN) sont parallèles

Comme N appartient au cercle (Γ'), le triangle ANB est rectangle en N, par suite les droites (AN) et (BM) sont orthogonales. De plus les droites (MD) et (BM) sont orthogonales d'après la question précédente. Par conséquent les droites (DM) et (AN) sont parallèles, car orthogonales à la même droite (BM).

b. Déterminons l'affixe du point N

D'après 4.a. et le théorème des milieux, la droite (AN) coupe le segment $[MB]$ en son milieu, donc N est le milieu de $[MB]$

et $z_N = \frac{1 + \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i}{2} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$.

5. a. Déterminons l'affixe du point M'

L'écriture complexe de la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est : $z' - z_B = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - z_B)$, c'est-à-dire $z' = -iz + 1 + i$. d'où $z_{M'} = -i\left(\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i\right) + 1 + i$ soit $z_{M'} = \frac{11}{5} + \frac{2}{5}i$.

b. Montrons que le point M' appartient au cercle (Γ')

On a : $\overrightarrow{AM'}.\overrightarrow{BM'} = \left(\frac{11}{5} - 2\right)\left(\frac{11}{5} - 1\right) + \left(\frac{2}{5} - 1\right)\left(\frac{2}{5}\right)$

$\overrightarrow{AM'}.\overrightarrow{BM'} = \frac{1}{5} \times \frac{6}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = 0$. Comme $\overrightarrow{AM'}.\overrightarrow{BM'} = 0$, alors le triangle ABM' est rectangle en M' et est inscrit dans le cercle de diamètre $[AB]$. Par conséquent le point M' appartient au cercle (Γ').

Corrigé 18

1/ Résolvons dans ℂ l'équation $4Z^2 - 12Z + 153 = 0$

On a : $\Delta' = -576 = (24i)^2$ et $Z_1 = \frac{3}{2} + 6i$ et $Z_2 = \frac{3}{2} - 6i$

$S = \left\{\frac{3}{2} + 6i; \frac{3}{2} - 6i\right\}$

2/ a. Déterminons l'affixe Z_Q du point Q

$Z_Q = Z_B + Z_{\vec{w}} = \frac{3}{2} - 6i - 1 + \frac{5}{2}i = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$

b. Déterminons l'affixe Z_R du point R

$Z_R - Z_C = -\frac{1}{3}(Z_P - Z_C) \Leftrightarrow Z_R = -\frac{1}{3}\left(3 + 2i + 3 + \frac{1}{4}i\right) - 3 - \frac{1}{4}i$

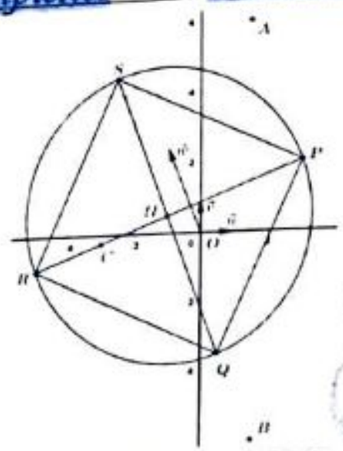
$\Leftrightarrow Z_R = -5 - i$

c. Déterminons l'affixe Z_S du point S,

$Z_S - Z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(Z_P - Z_A) \Leftrightarrow Z_S = -i\left(3 + 2i - \frac{3}{2} - 6i\right) + \frac{3}{2} + 6i \Leftrightarrow Z_S = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}i$

d. Plaçons les points P, Q, R et S

Scanné avec CamScanner



3/ a. Démontrons que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme

On a : $\overrightarrow{PQ} = Z_Q - Z_P = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i - 3 - 2i = -\frac{5}{2} - \frac{11}{2}i$ et $\overrightarrow{SR} = Z_R - Z_S = -5 - i + \frac{5}{2} - \frac{9}{2}i = -\frac{5}{2} - \frac{11}{2}i$, soit $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$, donc le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

b. Calculons $\frac{Z_R - Z_Q}{Z_P - Z_Q}$. Déduisons la nature précise de PQRS

$$\frac{Z_R - Z_Q}{Z_P - Z_Q} = \frac{-5-i-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i}{3+2i-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i} = \frac{-11+5i}{-5-11i} = \frac{(-11+5i)(-5+11i)}{25+121} = -\frac{146i}{146},$$

d'où $\frac{Z_R - Z_Q}{Z_P - Z_Q} = -i$.

Comme $\frac{Z_R - Z_Q}{Z_P - Z_Q} = -i$, alors $\overrightarrow{QR}$ et $\overrightarrow{QP}$ sont orthogonaux et $QR = QP$, d'où on déduit que PQRS est un carré.

c. Justifions que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle noté $(\mathcal{C})$.

Soit Ω le centre du cercle passant par le carré PQRS. Ω est le milieu commun des segments $[PR]$ et $[SQ]$. D'où :

$Z_\Omega = \frac{Z_P + Z_R}{2} = \frac{1}{2}(-5 - i + 3 + i) = -1.$

Le rayon est $r = \frac{1}{2}PR = \frac{1}{2}\sqrt{64+4} = \sqrt{17}$

4/ La droite (AP) est-elle tangente au cercle $(\mathcal{C})$?

On a $Z_{\overrightarrow{PA}} = \frac{3}{2} + 6i - 3 - 2i = -\frac{3}{2} + 4i$:

$Z_{\overrightarrow{P\Omega}} = -1 - 3 - 2i = -4 - 2i$ et $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{P\Omega} = 6 - 8 = -2$.

Comme $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{P\Omega} \neq 0$, alors la (AP) n'est pas tangente au cercle $(\mathcal{C})$.

Corrigé 19

1/ a. Déterminons l'affixe du point B_1

L'expression complexe de l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$ est : $z' - i = \sqrt{2}(z - i)$, d'où :

$z_{B_1} = \sqrt{2}(2 - i) + i.$

b. Déterminons l'affixe du point B'

L'expression complexe de la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$ est : $z' - i = e^{i\frac{\pi}{4}}(z - i)$, d'où :

$z_{B'} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{2}(2 - i) + i - i\right) + i$

$z_{B'} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)\left[\sqrt{2}(2 - i)\right] + i$

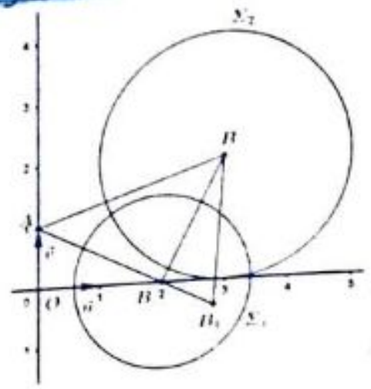
$z_{B'} = (1 + i)(2 - i) + i$

$z_{B'} = 3 + 2i$

Plaçons les points A, B et B'

La vie est un défi à relever, un bonheur à mériter, une aventure à tenter. Mère Teresa

Scanné avec CamScanner



2/ $z' = (1+i)z + 1$.

a. Montrons que B a pour image B' par f

On a : $z'_B = (1+i)z_B + 1 = 2(1+i) + 1$

$z'_B = 3 + 2i = z_{B'}$, donc B a pour image B' par f.

b. Montrons que A est le seul point invariant par f

$z = (1+i)z + 1 \Leftrightarrow -iz = 1$

$\Leftrightarrow z = i = z_A$

On déduit que A est le seul point invariant par f.

c. Etablissons que pour tout nombre complexe z distinct de

$\frac{z'-z}{i-z} = -i$

$\frac{z'-z}{i-z} = \frac{(1+i)z+1-z}{i-z} = \frac{iz+1}{i-z} = \frac{iz-i^2}{i-z} = \frac{i(z-i)}{-(z-i)} = -i$

Interprétation en termes de distances puis en termes d'angles

$\frac{z'-z}{i-z} = -i \Rightarrow \left|\frac{z'-z}{i-z}\right| = 1$

$\Rightarrow MM' = MA$

$\frac{z'-z}{i-z} = -i \Rightarrow Arg\left(\frac{z'-z}{i-z}\right) = -\frac{\pi}{2}$ soit $Mes\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'}\right) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Méthode de construction de M' à partir de M

Pour un point M quelconque on trace le cercle de centre M, à rayon MA puis la perpendiculaire à (MA) passant par M qui va couper le cercle précédent en un seul point M' pour lequel l'angle droit sera négatif.

3/ a. Nature les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z-2| = \sqrt{2}$

L'équation $|z-2| = \sqrt{2}$ caractérise le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$ représentant Σ_1.

b. Démontrons que $z' - 3 - 2i = (1+i)(z-2)$

$z' - 3 - 2i = (1+i)z + 1 - 3 - 2i$

$z' - 3 - 2i = (1+i)z - 2(1+i)$

$z' - 3 - 2i = (1+i)(z-2)$ (*)

Déduisons que si le point M appartient à Σ_1, alors son image M' par f appartient à un cercle Σ_2, dont on précisera le centre et le rayon

(*)$\Rightarrow |z' - 3 - 2i| = |(1+i)(z-2)|$

$\Rightarrow |z' - z_{B'}| = |1+i||z-2|$

$\Rightarrow |z' - z_{B'}| = \sqrt{2}|z-2|$ (**)

Ainsi, si $|z-2| = \sqrt{2}$, (**)$\Rightarrow |z' - z_{B'}| = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$, d'où si le point M appartient à Σ_1, alors son image M' par f appartient à un cercle Σ_2 de centre B' et de rayon 2.

c. Traçons Σ_1 et Σ_2 (voir figure)

Corrigé 20

$z_A = 1 - i$; $z_B = 3 + 4i$; $z_C = -2i$; $z_D = w$

1/ Affixe w de D pour que les points A, B et D soient alignés

Pour que A, B et D soient alignés, il suffit que : $Z = \frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} \in \mathbb{R}$.

$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Z = \overline{Z}$.

Or $\overline{Z} = \overline{\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A}\right)} = \frac{\overline{z_B} - \overline{z_A}}{\overline{z_D} - \overline{z_A}} = \frac{3-4i-(1+i)}{\overline{w}-(1+i)} = \frac{2-5i}{\overline{w}-1-i}$ et $Z = \frac{2+5i}{w-1+i}$

$Z = \overline{Z} \Leftrightarrow \frac{2+5i}{w-1+i} = \frac{2-5i}{\overline{w}-1-i}$

$\Leftrightarrow (2+5i)(\overline{w} - 1 - i) = (2-5i)(w-1+i)$

$\Leftrightarrow 2(\overline{w} - w) + 5i(\overline{w} + w) = 14i$ **(1)**

En posant $w = a + ib, (a; b) \in \mathbb{R}^2$,

Scanné avec CamScanner

(1) $\Leftrightarrow 2(-2ib) + 5i(2a) = 14i$

$\Leftrightarrow 5a - 2b = 7$

A, B et D sont alignés lorsque $5a - 2b = 7$avec $w = a + ib$.

2/ Affixe w de D pour que (AD) soit perpendiculaire à (AC)

$(AD) \perp (AC) \Leftrightarrow Z = \frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} \in i\mathbb{R}$.

$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Z + \overline{Z} = 0$. Or: $Z = \frac{w - 1 + i}{-2i - 1 + i} = \frac{w - 1 + i}{-1 - i}$, d'où

$\overline{Z} = \frac{\overline{w} - 1 - i}{-1 + i}$.

$Z + \overline{Z} = \frac{w - 1 + i}{-1 - i} + \frac{\overline{w} - 1 - i}{-1 + i}$

$= \frac{(-1+i)w + (-1+i)^2 - (1+i)\overline{w} + (1+i)^2}{(1+i)(1-i)}$

$Z + \overline{Z} = \frac{(-1+i)w - (1+i)\overline{w}}{2}$

D'ou : $Z + \overline{Z} = 0 \Leftrightarrow \frac{(-1+i)w - (1+i)\overline{w}}{2} = 0$

$\Leftrightarrow -(w + \overline{w}) + i(w - \overline{w}) = 0$ **(2)**

En posant $w = x + iy$, on a :

(2) $\Leftrightarrow -x + i(2iy) = 0 \Leftrightarrow y = -x$, d'où $w = x - ix = (1-i)x$

$(AD) \perp (AC)$ lorsque w est de la forme $w = (1 - i)x$ où x est un nombre réel.

3/ Affixe w de D pour que ABCD soit un parallélogramme

ABCD est un parallélogramme ssi $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$.

Or: $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 2 + 5i$ et $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = -2i - w$.

donc : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}} \Leftrightarrow 2 + 5i = -2i - w \Leftrightarrow w = -2 - 7i$

Conclusion

ABCD est un parallélogramme lorsque $w = -2 - 7i$.

4/ Affixe w de D pour que D soit le symétrique de A par rapport à B

D symétrique de A par rapport à B $\Rightarrow z_B = \frac{z_A + z_D}{2}$ **(3)**

(3) $\Leftrightarrow z_D = 2z_B - z_A \Leftrightarrow w = 2(3 + 4i) - (1 - i)$

$\Leftrightarrow w = 5 + 9i$

D est le symétrique de A par rapport à B lorsque $w = 5 + 9i$.

5/ Affixe w de D pour que $D = R_{\left(A, \frac{\pi}{3}\right)}(C)$

Soit D l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Alors on a : $z_D - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_C - z_A)$ soit

$z_D = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-2i - 1 + i) + 1 - i$

$w = -i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \sqrt{3} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - i$

$w = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{-3-\sqrt{3}}{2}$

6. Affixe w de D pour que D soit l'image de B par la similitude directe de centre O, d'angle orienté $(\vec{U}, \overrightarrow{OA})$ et de rapport égal à OB

Soit D l'image de B par la similitude directe de centre O, d'angle orienté $(\vec{U}, \overrightarrow{OA})$ et de rapport égal à OB.

On a alors : $z_D - z_O = OBe^{iarg z_A}(z_B - z_O)$ soit

$w = |z_B|e^{iarg z_A} z_B$. Or $arg z_A = \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$ et $|z_B| = 5$. D'où : $\boldsymbol{w = 5(1 - i)(3 + 4i) = 5(7 + i)}$

Corrigé 21

$\begin{cases} x' = -x - y + 2 \\ y' = x - y - 1 \end{cases}$ (*)

1. Déterminons l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M

En posant $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

(*)$\Leftrightarrow x' + iy' = (-x - y + 2) + i(x - y - 1)$

$\Leftrightarrow z' = (-x - iy) + (-y + ix) + 2 - i$

$\Leftrightarrow z' = -(x + iy) + i(iy + x) + 2 - i$

$\Leftrightarrow z' = -z + iz + 2 - i$

$\Leftrightarrow z' = (i - 1)z + 2 - i$

NB : On pourra aussi utiliser $\frac{z + \bar{z}}{2} = x$ et $\frac{z - \bar{z}}{2i} = y$

Scanné avec CamScanner

2. Démontrons que s est une similitude plane directe
L'expression complexe de s étant sous la forme $z' = az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ telle que $|a| = |i-1| = \sqrt{2}$, donc s est une similitude directe plane de rapport $k = \sqrt{2}$, d'angle $\theta = arg(i-1) = \frac{3\pi}{4}$ et de centre I d'affixe $z_I = \frac{2-i}{1-i+1} = 1$.

3. a. Calculons les affixes des points M'' et G

$z_{M''} = (i-1)z_{M'} + 2 - i$
$z_{M''} = (i-1)[(i-1)z + 2 - i] + 2 - i$
$z_{M''} = (i-1)^2 z + (i-1)(2-i) + 2 - i$
$z_{M''} = -2iz - 1 + 3i + 2 - i$
$z_{M''} = -2iz + 1 + 2i$

L'isobarycentre G de $M, M' = s(M)$ et M'' vérifie
$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GM'} + \overrightarrow{GM''} = \vec{0}$ (1)

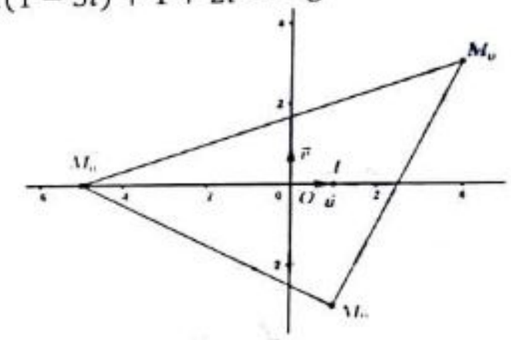
(1) $\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{GM}} + z_{\overrightarrow{GM'}} + z_{\overrightarrow{GM''}} = 0$
$\Leftrightarrow z_G - z_M + z_G - z_{M'} + z_G - z_{M''} = 0$
$\Leftrightarrow 3z_G = z_M + z_{M'} + z_{M''}$
$\Leftrightarrow z_G = \frac{z_M + z_{M'} + z_{M''}}{3}$
$\Leftrightarrow z_G = \frac{z + [(i-1)z + 2 - i] + (-2iz + 1 + 2i)}{3}$
$\Leftrightarrow z_G = \frac{(1 + i - 1 - 2i)z + 2 - i + 1 + 2i}{3}$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{z_G = \frac{-iz + 3 + i}{3}}$

b. Démontrons que g est une similitude plane directe.
L'écriture complexe de g étant donnée par $z_G = \frac{-iz+3+i}{3}$ qui est sous la forme $z' = az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ telle que $|a| = \left|\frac{-i}{3}\right| = \frac{1}{3}$, alors g est une similitude directe plane de rapport $k = \frac{1}{3}$, d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre Ω d'affixe $z_\Omega = \frac{1+\frac{i}{3}}{1+\frac{i}{3}} = 1 = i$
c'est-à-dire de même centre I que s.

c. Déterminons l'affixe du point M_0 tel que $g(M_0) = 0$
Soit z_0 l'affixe de M_0, on a alors:

$g(M_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{-iz_0 + 3 + i}{3} = 0$
$\Leftrightarrow -iz_0 + 3 + i = 0$
$\Leftrightarrow -iz_0 = -3 - i$
$\Leftrightarrow -i^2 z_0 = -3i - i^2$
$\Leftrightarrow z_0 = 1 - 3i$

Soient z'_0 et z''_0 les affixes respectives de M'_0 et M_0'', on a :
$z'_0 = (i-1)(1-3i) + 2 - i = 4 + 3i$
$z''_0 = -2i(1-3i) + 1 + 2i = -5$



Corrigé 22

1/ Montrons que $Y = \overline{X}$ et que $Im(X) > 0$

On a : $\left(e^{i\frac{2\pi}{7}}\right)^7 = 1$ c'est-à-dire $w^7 = 1$ (1), donc w est une racine septième de l'unité.

(1) $\Rightarrow \overline{w}w^7 = \overline{w}$
$\Rightarrow |\overline{w}|^2 w^6 = \overline{w}$
$\Rightarrow w^6 = \overline{w}$, car $|\overline{w}|^2 = 1$

De manière analogue, on déduit successivement de (1) que :
$w^5 = \overline{w}^2$, $w^4 = \overline{w}^3$ (soit $\overline{w}^4 = w^3$), donc :

$Y = w^3 + w^5 + w^6$
$Y = \overline{w}^4 + \overline{w}^2 + \overline{w}$
$Y = \overline{w + w^2 + w^4}$
$Y = \overline{X}$

Scanné avec CamScanner

2. Démontrons que s est une similitude plane directe
L'expression complexe de s étant sous la forme $z' = az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ telle que $|a| = |i-1| = \sqrt{2}$, donc s est une similitude directe plane de rapport $k = \sqrt{2}$, d'angle $\theta = arg(i-1) = \frac{3\pi}{4}$ et de centre I d'affixe $z_I = \frac{2-i}{1-i+1} = 1$.

3. a. Calculons les affixes des points M'' et G

$z_{M''} = (i-1)z_{M'} + 2 - i$
$z_{M''} = (i-1)[(i-1)z + 2 - i] + 2 - i$
$z_{M''} = (i-1)^2 z + (i-1)(2-i) + 2 - i$
$z_{M''} = -2iz - 1 + 3i + 2 - i$
$z_{M''} = -2iz + 1 + 2i$

L'isobarycentre G de $M, M' = s(M)$ et M'' vérifie
$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GM'} + \overrightarrow{GM''} = \vec{0}$ (1)

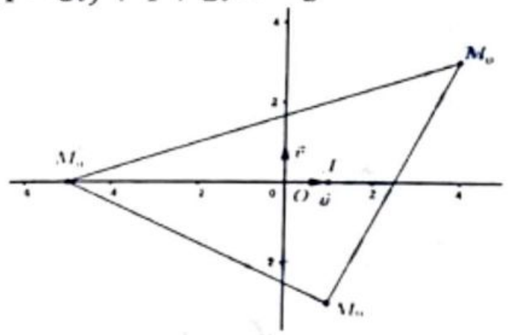
$(1) \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{GM}} + z_{\overrightarrow{GM'}} + z_{\overrightarrow{GM''}} = 0$
$\Leftrightarrow z_G - z_M + z_G - z_{M'} + z_G - z_{M''} = 0$
$\Leftrightarrow 3z_G = z_M + z_{M'} + z_{M''}$
$\Leftrightarrow z_G = \frac{z_M + z_{M'} + z_{M''}}{3}$
$\Leftrightarrow z_G = \frac{z + [(i-1)z + 2 - i] + (-2iz + 1 + 2i)}{3}$
$\Leftrightarrow z_G = \frac{(1 + i - 1 - 2i)z + 2 - i + 1 + 2i}{3}$
$\Leftrightarrow \mathbf{z_G = \frac{-iz + 3 + i}{3}}$

b. Démontrons que g est une similitude plane directe.
L'écriture complexe de g étant donnée par $z_G = \frac{-iz+3+i}{3}$ qui est sous la forme $z' = az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ telle que $|a| = \left|\frac{-i}{3}\right| = \frac{1}{3}$, alors g est une similitude directe plane de rapport $k = \frac{1}{3}$, d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre Ω d'affixe $z_\Omega = \frac{1 + \frac{i}{3}}{1 + \frac{i}{3}} = 1 = z_I$,
c'est-à-dire de même centre I que s.

c. Déterminons l'affixe du point M_0 tel que $g(M_0) = O$
Soit z_0 l'affixe de M_0, on a alors:

$g(M_0) = O \Leftrightarrow \frac{-iz_0 + 3 + i}{3} = 0$
$\Leftrightarrow -iz_0 + 3 + i = 0$
$\Leftrightarrow -iz_0 = -3 - i$
$\Leftrightarrow -i^2 z_0 = -3i - i^2$
$\Leftrightarrow z_0 = 1 - 3i$

Soient z'_0 et z''_0 les affixes respectives de M'_0 et M_0'', on a
$z'_0 = (i-1)(1-3i) + 2 - i = 4 + 3i$
$z''_0 = -2i(1-3i) + 1 + 2i = -5$



Corrigé 22

1/ Montrons que $Y = \overline{X}$ et que $Im(X) > 0$

On a : $\left(e^{i\frac{2\pi}{7}}\right)^7 = 1$ c'est-à-dire $w^7 = 1$ (1), donc w est une racine septième de l'unité.

$(1) \Rightarrow \overline{w}w^7 = \overline{w}$
$\Rightarrow |\overline{w}|^2 w^6 = \overline{w}$
$\Rightarrow w^6 = \overline{w}$, car $|\overline{w}|^2 = 1$

De manière analogue, on déduit successivement de (1) que : $w^5 = \overline{w}^2$, $w^4 = \overline{w}^3$ (soit $\overline{w}^4 = w^3$), donc :

$Y = w^3 + w^5 + w^6$
$Y = \overline{w}^4 + \overline{w}^2 + \overline{w}$
$Y = \overline{w + w^2 + w^4}$
$Y = \overline{X}$

Scanné avec CamScanner

On a : $X = cos\frac{2\pi}{7} + cos\frac{4\pi}{7} + cos\frac{8\pi}{7} + i\left(sin\frac{2\pi}{7} + sin\frac{4\pi}{7} + sin\frac{8\pi}{7}\right)$ et $Im(X) = sin\frac{2\pi}{7} + sin\frac{4\pi}{7} + sin\frac{8\pi}{7}$.

Or : $\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7} \in [0;\pi]$. donc $sin\frac{2\pi}{7} > 0$ et $sin\frac{4\pi}{7} > 0$. De plus $\left|sin\frac{8\pi}{7}\right| = sin\frac{\pi}{7} < sin\frac{2\pi}{7}$, car la fonction sin est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Il s'ensuit que :

$Im(X) = sin\frac{2\pi}{7} + sin\frac{4\pi}{7} + sin\frac{8\pi}{7} > 0$.

2/ Calculons X + Y et XY

$$X + Y = w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6$$
$$= -1 + 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6$$
$$= -1 + \frac{1 - w^7}{1 - w}$$

$X + Y = -1$, car $w^7 = 1$

$$XY = w^4 + w^5 + w^7 + w^6 + w^7 + w^9 + w^7 + w^8 + w^{10}$$
$$XY = w^4 + w^5 + 3w^7 + w^6 + w^2 + w + w^3$$
$$XY = (1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6) + 2$$
$$XY = 2$$

Déduisons que X et Y sont solutions d'une équation du second degré puis calculons X et Y

On a : $\begin{cases} X + Y = -1 \\ XY = 2 \end{cases}$, donc X et Y sont solutions de l'équation (E) : $z^2 + z + 2 = 0$.

(E) a pour discriminant $\Delta = -7$, donc $z_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$ et $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$. Or $Im(X) > 0$, donc $X = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$ et $Y = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$.

3/ Expression de $Re(X)$ en fonction de $cos\frac{2\pi}{7}$

Remarquons que $Re(w^4) = Re(w^3)$, donc :

$$Re(X) = Re(w + w^2 + w^4)$$
$$Re(X) = Re(w + w^2 + w^3)$$
$$Re(X) = cos\frac{2\pi}{7} + cos2\frac{2\pi}{7} + cos3\frac{2\pi}{7}$$

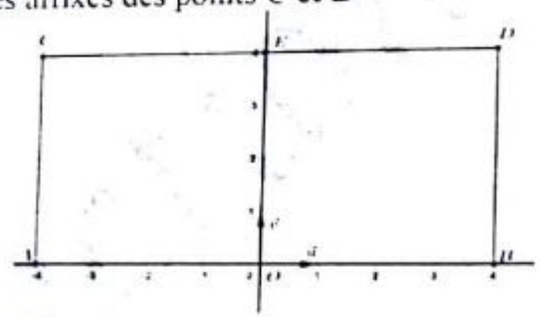
$$Re(X) = cos\frac{2\pi}{7} + \left(2cos^2\frac{2\pi}{7} - 1\right) + \left(4cos^3\frac{2\pi}{7} - 3cos\frac{2\pi}{7}\right)$$
$$Re(X) = 4cos^3\frac{2\pi}{7} + 2cos^2\frac{2\pi}{7} - 2cos\frac{2\pi}{7} - 1 \quad (2)$$

4/ Déduisons que $cos\frac{2\pi}{7}$ est une racine du polynôme $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$

Comme $Re(X) = -\frac{1}{2}$ d'après 2, alors l'égalité (2) devient : $-\frac{1}{2} = 4cos^3\frac{2\pi}{7} + 2cos^2\frac{2\pi}{7} - 2cos\frac{2\pi}{7} - 1$ soit $8cos^3\frac{2\pi}{7} + 4cos^2\frac{2\pi}{7} - 4cos\frac{2\pi}{7} - 1 = 0$, par suite $cos\frac{2\pi}{7}$ est une racine du polynôme $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$.

Corrigé 23

1. Plaçons les points précédents dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et donnons les affixes des points C et D



Affixes des points C et D

On a : $z_C = -4 + 4i$ et $z_D = 4 + 4i$

2. $z' = (1 + i)z + 4 + 4i$.

a/ Nature et éléments caractéristiques de f

L'expression complexe de f est sous la forme $z' = az + b$ avec $|a| = |1 + i| = \sqrt{2}$, donc f est une similitude directe plane de rapport $k = \sqrt{2}$, d'angle $\theta = arg(1 + i) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$, de centre Ω d'affixe $z_\Omega = \frac{4+4i}{1-1-i} = -4 + 4i = z_C$, d'où $\Omega = C$

b/ Précisons les points $f(A)$ et $f(O)$

$f(A) = A' \Rightarrow z_{A'} = (1 + i)z_A + 4 + 4i$

Scanné avec CamScanner

$$z_{A'} = -4 - 4i + 4 + 4i$$
$$z_{A'} = 0 = z_O$$

On déduit que $A' = O$, d'où $f(A) = O$.

$f(O) = O' \Rightarrow z_{O'} = (1+i)z_O + 4 + 4i$

$$z_{O'} = 4 + 4i = z_D$$

$z_{A'} = 0$, donc $O' = D$, d'où $f(A) = O$.

- Image par f de la droite (CA)

On a : $f(C) = C$ et $f(A) = O$. Or l'image d'une droite par une similitude directe est une droite, donc l'image de la droite (CA) est la droite (OC).

- Image de la médiatrice de $[AO]$

On a : $f(O) = D$ et $f(A) = O$. donc l'image par f de la médiatrice de $[AO]$ est la médiatrice de $[OD]$. Or $[OD]$ est une diagonale du carré $BOED$, donc sa médiatrice est le segment $[EB]$. En définitive, l'image par f de la médiatrice du segment $[AO]$ est le segment $[EB]$.

c/ Expression de l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{MC}$

$z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{M'} - z_M$

$z_{\overrightarrow{MM'}} = (1+i)z + 4 + 4i - z.$

$z_{\overrightarrow{MM'}} = iz + 4 + 4i$

$z_{\overrightarrow{MC}} = z_C - z_M$

$z_{\overrightarrow{MC}} = -4 + 4i - z$

Déduisons que $MM' = MC$ et pour M distinct de C, montrons qu'une mesure de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MC}\right)$ est $\frac{\pi}{2}$

On a : $\left|z_{\overrightarrow{MM'}}\right| = |iz + 4 + 4i|$

$\left|z_{\overrightarrow{MM'}}\right| = |i||z - 4i + 4|$

$\left|z_{\overrightarrow{MM'}}\right| = |z - 4i + 4|$

$\left|z_{\overrightarrow{MC}}\right| = |-4 + 4i - z|$

$\left|z_{\overrightarrow{MC}}\right| = |-1||z - 4i + 4|$

$\left|z_{\overrightarrow{MC}}\right| = |z - 4i + 4| = \left|z_{\overrightarrow{MM'}}\right|$, donc $MM' = MC$ et pour M distinct de C.

On a : $Mes\left(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MC}\right) = arg\left(\frac{z_{MC}}{z_{MM'}}\right)$

$$= arg\left(\frac{-4 + 4i - z}{iz + 4 + 4i}\right)$$
$$= arg\left[\frac{-(z - 4i + 4)}{i(z - 4i + 4)}\right]$$
$$= arg\left(\frac{-1}{i}\right)$$
$$= arg(i)$$

$Mes\left(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MC}\right) = \frac{\pi}{2}$

3. Déterminons l'image de J

$\begin{cases} J \text{ milieu de } [EB] \\ I \text{ milieu de } [AO] \end{cases} \Rightarrow f(I) = J$, car d'après 2.b/ l'image de la médiatrice de $[AO]$ est le segment $[EB]$.

D'après 2.c/ on a : $IJ = IC$ et $Mes(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IC}) = \frac{\pi}{2}$. On conclut que l'image de J par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est C.

Autre méthode

J milieu de $[EB] \Rightarrow z_J = \frac{z_E + z_B}{2} = \frac{4+4i}{2} = 2 + 2i$

I milieu de $[AO] \Rightarrow z_I = \frac{z_A + z_O}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

L'application complexe associée à la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est R : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$z' \mapsto iz - 2 + 2i$$

Trouvons l'image de J par R

On a : $z'_J = iz_J - 2 + 2i$

$z'_J = i(2 + 2i) - 2 + 2i$

$z'_J = -4 + 4i = z_C$. On conclut que $R(J) = C$.

Corrigé 24

1. Montrons que T est la composée d'une rotation et d'une homothétie de rapport positif dont on donnera les éléments caractéristiques.

Scanné avec CamScanner

L'expression complexe de T est sous la forme $z' = az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$, donc T est une similitude directe plane (non réduite à une translation). Par conséquent, T est la composée d'une rotation et d'une homothétie de rapport positif.

- Eléments caractéristiques

-rapport : $k = |a| = |1 + i| = \sqrt{2}$

-angle : $\theta = arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$

-centre Ω : $z_\Omega = \frac{-i}{1 - 1 - i} = 1$

- Une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MM'}\right)$

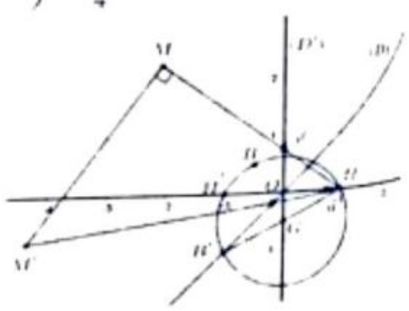
Pour M $\neq \Omega$, on a : $Mes\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MM'}\right) = Arg\left(\frac{z' - z}{z - z_\Omega}\right)$

Or : $\frac{z' - z}{z - z_\Omega} = \frac{(1+i)z - i - z}{z - 1} = \frac{i(z - 1)}{z - 1} = i$, donc $Arg\left(\frac{z' - z}{z - z_\Omega}\right) = \frac{\pi}{2}$

D'ou : $Mes\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MM'}\right) = \frac{\pi}{2}$.

2. a Construisons M' image de M par T où M est un point distinct de Ω

$M' = T(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \sqrt{2}\Omega M \\ Mes\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$ et $Mes\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MM'}\right) = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle direct en M.



b/ Déterminons l'image (D') par T de la droite (D) d'équation $y = x$

$(D') = T((D))$.

Soit $M \in (D)$, on a :

$z_M = x + ix = (1 + i)x$

$z_{M'} = (1 + i)^2 x - i = (2x - 1)i$

Ainsi (D') est la droite d'équation $x = 0$.

[*(D') est l'axe des ordonnées.*]

Autres méthodes

Soit I(1 ; 1), on a : $(D) = (OI) : (D) = T((D)) = (O'I')$.

$z_{O'} = (1 + i)z_O - i = -i$ et $z_{I'} = (1 + i)z_I - i = i$, donc (D') est l'axe des ordonnées.

- Utilisation de l'expression analytique
- Utilisation de l'angle de la similitude et de l'image d'un point de (D).

Construisons (D') (confer figure)

3. a/ Montrons qu'il existe un point B de (P) distinct de Ω et un seul tel que les affixes z_0 de B et z'_0 de B' (où B' est l'image de B par T) soient liés par la relation $z_0 z'_0 = 1$

$z_0 z'_0 = 1 \Leftrightarrow z_0\left[(1 + i)z_0 - i\right] = 1$

$\Leftrightarrow (1 + i)^2 z_0 - iz_0 - 1 = 0$

Le discriminant de l'équation du second degré en z_0 ci-dessus est $\Delta = 3 + 4i$. Soit $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$. On choisit $\delta = 2 + i$.

Autre méthode

$\Delta = i^2 + 4i + 4 \Rightarrow \Delta = (2 + i)^2$

Dans tous les cas, on a : $z_0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ou $z_0 = 1$. Or $B \neq \Omega$, donc $z_0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

Plaçons B et B' dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On a : $z_{B'} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i} = -1 - i$

Confer la figure

b/ Soit Ω' le symétrique de Ω par rapport à O.

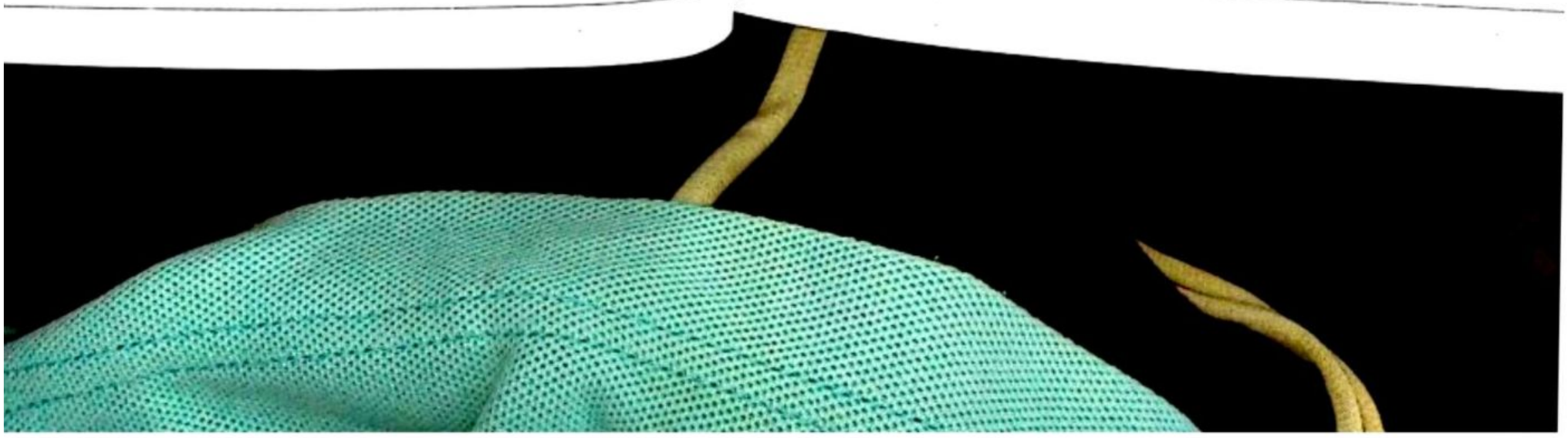
Montrons que les points Ω', Ω, B et B' sont cocycliques

$\Omega BB'$ est rectangle en B, donc Ω, B et B' appartiennent au cercle de diamètre $[\Omega B']$.

Vérifions que $\Omega\Omega'B'$ est rectangle en Ω'

$z_{\Omega'B'} = -1 - i + 1 = -i$: $\overrightarrow{\Omega'B'}$ dirige l'axe des ordonnées.

Donc $\overrightarrow{\Omega'B'} \perp \overrightarrow{\Omega\Omega'}$. Il vient que les points Ω', Ω, B et B' appartiennent au cercle de diamètre $[\Omega B']$.



Scanné avec CamScanner

Scanné avec CamScanner

Conclusion : Les points Ω', Ω, B et B' sont cocycliques.
Déterminons l'affixe du centre G du cercle (Γ)
G est le milieu de $[\Omega B']$, donc $z_G = -\frac{1}{2}i$.

Corrigé 25

1. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$(1+i)z^2 - 2i(a+1)z + (i-1)(a^2+1) = 0, a \in \mathbb{C}$
$\Delta' = [i(a+1)]^2 - (1+i)(i-1)(a^2+1)$
$= -(a+1)^2 + 2(a^2+1)$
$= a^2 - 2a + 1$
$\Delta' = (a-1)^2$
$a-1$ est une racine carrée de Δ', les solutions sont donc :
$z_1 = \frac{i(a+1)-a+1}{1+i} = 1 + ia$ et $z_2 = \frac{i(a+1)+a-1}{1+i} = a + i$
$S = \{1+ia; a+i\}$ si $a \neq 1$ ou $S = \{1+i\}$ si $a = 1$.
2. Trouvons entre z_1 et z_2 une relation indépendante de a
Si $a \neq 1$, $\begin{cases} z_1 = 1 + ia \\ z_2 = a + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} iz_1 = i - a \\ z_2 = a + i \end{cases}$
En faisant somme membre on obtient la relation :
$iz_1 + z_2 = 2i$ ou $iz_2 - z_1 = -2$
$\begin{cases} z_2 = 1 + ia \\ z_1 = a + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} iz_2 = i - a \\ z_1 = a + i \end{cases}$
En faisant somme membre on obtient la relation :
$iz_2 + z_1 = 2i$ ou $iz_1 - z_2 = -2$
Si $a = 1$, alors $z_2 = z_1$
3. Caractérisons la transformation f du plan complexe qui, à tout point M_1 d'affixe z_1 associe le point M_2 d'affixe z_2
$f: M_1(z_1) \mapsto M_2(z_2)$ a pour écriture complexe $z_2 = -iz_1 + 2i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. f est donc une rotation de centre Ω d'affixe $z_\Omega = \frac{2i}{1+i} = 1 + i$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
Autre solution
Dans le cas $z_1 = a + i$ et $z_2 = 1 + ia$, alors f aurait pour écriture complexe : $z_2 = iz_1 + 2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $f = R(\Omega, \frac{\pi}{2})$.

4. On pose $z_1 = x + iy$ et $z_2 = x' + iy'$.
a/ Expression de x' et y' en fonction de x et y
Pour $z_2 = -iz_1 + 2i$, en posant $z_1 = x + iy$ et $z_2 = x' + iy'$, on a : $x' + iy' = -i(x+iy) + 2i = -ix + y + 2i$
soit $x' + iy' = y + (2-x)i$. D'où : $\begin{cases} x' = y \\ y' = 2 - x \end{cases}$
Pour $z_2 = iz_1 + 2$, on a : $\begin{cases} x' = 2 - y \\ y' = x \end{cases}$
b/ Image par f de la droite (D) d'équation : $x + 2y - 1 = 0$
Soient $M_1(x; y) \in (D)$ et $M_2(x'; y') = f(M_1)$
On a : $\begin{cases} x' = y \\ y' = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x' \\ x = 2 - y' \end{cases}$
$M_1(x; y) \in (D) \Leftrightarrow x + 2y - 1 = 0$
$\Leftrightarrow (2 - y') + 2x' - 1 = 0$
$\Leftrightarrow 2x' - y' + 1 = 0$
On déduit que l'image de (D) par f est la droite (D') d'équation $2x - y + 1 = 0$.
Dans le second cas, (D') a pour équation : $2x - y - 3 = 0$

Corrigé 26

1. (E) : $Z \in \mathbb{C}$, $Z^4 + (-5+3i)Z^3 + (8-9i)Z^2 + (-14+6i)Z + 10$.
a/ Vérifions que 1 et i sont des solutions évidentes de (E)
Posons $P(Z) = Z^4 + (-5+3i)Z^3 + (8-9i)Z^2 + (-14+6i)Z + 10$
$P(1) = 1 + (-5+3i) + (8-9i) + (-14+6i) + 10$
$P(1) = 0$
$P(i) = (i)^4 + (-5+3i)(i)^3 + (8-9i)(i)^2 + (-14+6i)(i) + 10$
$P(i) = 1 - (-5.+3i)i - (8-9i) + (-14+6i)i + 10$
$P(i) = 1 + 5i + 3 - 8 + 9i - 14i - 6 + 10$
$P(i) = 0$
On déduit que 1 et i sont solutions de (E).
b/ Résolvons l'équation (E)

Scanné avec CamScanner

1 et i étant solutions de (E), il existe deux nombres complexes a et b tels que $P(z) = (z-1)(z-i)(z^2+az+b)$

On obtient par la division euclidienne de P(z) par $(z-1)(z-i) = z^2-(1+i)z+i$, $z^2+az+b = z^2+(-4+4i)-10i$

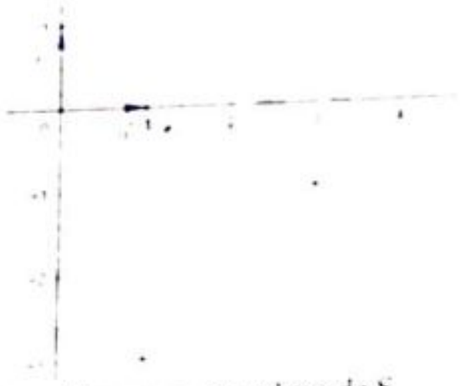
Donc (E)$\Leftrightarrow z=1$ ou $z=i$ ou (E') $z^2+(-4+4i)-10i=0$

Pour (E'), on a : $\Delta = (-4+4i)^2+40i = 8i = (2+2i)^2$

On a : $z_1 = \frac{4-4i+2+2i}{2} = 3-i$ et $z_2 = \frac{4-4i-2-2i}{2} = 1-3i$

d'où : $S_{(E)} = \{1; i; 3-i; 1-3i\}$

2. a/ Plaçons les points $A(1), B(i), C(1-3i)$ et $D(3-i)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$



b/ b_1/ Déterminons l'écriture complexe de S

L'écriture complexe de S est de la forme $z' = az+b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

$S(A) = C \Leftrightarrow az_A+b = z_C$ et $S(B) = D \Leftrightarrow az_B+b = z_D$

On obtient : $\begin{cases} 1-3i = a+b \ (1) \\ 3-i = ai+b \ (2) \end{cases}$

$(2)-(1) \Rightarrow (i-1)a = 2+2i$

$\Rightarrow a = -2i$

$(1) \Rightarrow b = 1-3i+2i = 1-i$. On déduit que :

$z' = -2iz+1-i$

b_2/ Eléments caractéristiques de S

S est la similitude directe de rapport $k = |-2i| = 2$, d'angle $\alpha = \arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}$ et de centre Ω d'affixe $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1-i}{1+2i} = \frac{-1-3i}{5}$

3. M_n d'affixe Z_n $(n \in \mathbb{N})$ avec $z_0 = i$ et $z_{n+1} = -2iz_n + 1-i$.

a/ Calculons $\frac{z_{n+1}-w}{z_n-w}$ où w est l'affixe du centre Ω de la similitude directe S.

On a : $z_{n+1} - w = -2iz_n + 1 - i - \frac{-1-3i}{5}$

$= -2iz_n + \frac{6-2i}{5}$

$= -2i\left(z_n + \frac{6i+2}{10}\right)$

$= -2i\left(z_n + \frac{1+3i}{5}\right)$

$= -2i\left(z_n - \frac{-1-3i}{5}\right)$

$z_{n+1} - w = -2i(z_n - w)$, donc $\frac{z_{n+1}-w}{z_n-w} = -2i$, car $z_n \neq w$

Déduisons la nature du triangle $\Omega M_n M_{n+1}$

$\frac{z_{n+1}-w}{z_n-w} = -2i \Rightarrow arg\left(\frac{z_{n+1}-w}{z_n-w}\right) = \arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}$. d'où l'on déduit que le triangle $\Omega M_n M_{n+1}$ est rectangle en Ω.

b/Démontrons que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation : $U_n = |z_{n+1} - z_n|$ est une suite géométrique dont on précisera le 1er terme et la raison

Remarquons que $U_n = M_n M_{n+1}$

On a : $U_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}|$

$U_{n+1} = |-2iz_{n+1} + 1 - i - (-2iz_n + 1 - i)|$

$U_{n+1} = |-2iz_{n+1} + 2iz_n|$

$U_{n+1} = |-2i||z_{n+1} - z_n|$

$U_{n+1} = 2|z_{n+1} - z_n|$ soit $U_{n+1} = 2U_n$. Il s'ensuit que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2 et de 1er terme $U_0 = |z_1 - z_0| = BD = \sqrt{13}$

Scanné avec CamScanner

c/ Expression de la longueur d_n en fonction de n $d_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_{n-1}M_n + M_nM_{n+1}$

$d_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1} + U_n$

$d_n = U_0 \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$

$d_n = \sqrt{13}(2^{n+1} - 1)$

Corrigé 27

(E) : $z \in \mathbb{C}, z^n = \frac{-9\sqrt{3} + 27i}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$

1. Déterminons les solutions z_k de (E)

$z^n = \frac{-9\sqrt{3} + 27i}{2}$

$z^n = 9\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$z^n = 9\sqrt{3}\left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right)$

Posons $z = r(cos\theta + isin\theta)$, $r > 0$, alors on a :

$(E) \Leftrightarrow r^n(cos\theta + isin\theta)^n = 9\sqrt{3}\left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right)$

$(E) \Leftrightarrow r^n(cosn\theta + isinn\theta) = 9\sqrt{3}\left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^n = 9\sqrt{3} \\ n\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \{0; 1; \ldots; n-1\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{9\sqrt{3}} \\ n\theta = \frac{2\pi + 6k\pi}{3n}, \quad k \in \{0; 1; \ldots; n-1\} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow z_k = \sqrt[n]{9\sqrt{3}}\left(cos\left(\frac{2\pi + 6k\pi}{3n}\right) + isin\left(\frac{2\pi + 6k\pi}{3n}\right)\right)$,

$k \in \{0; 1; \ldots; n-1\}$

NB : On peut aussi poser $z = re^{i\theta}$ pour trouver les z_k.

2. On pose $n = 5$.

Représentation des points-images des solutions z_k de (E)

Pour $n = 5$, on d'après 1., $z_k = \sqrt[5]{9\sqrt{3}}\left(cos\left(\frac{2\pi + 6k\pi}{15}\right) + isin\left(\frac{2\pi + 6k\pi}{15}\right)\right)$, $k \in \{0; 1; \ldots; 4\}$

Or $\sqrt[5]{9\sqrt{3}} = \sqrt[5]{3^2\sqrt{3}} = \sqrt[5]{(\sqrt{3})^5} = \sqrt{3}$, donc

$z_k = \sqrt{3}\left(cos\left(\frac{2\pi + 6k\pi}{15}\right) + isin\left(\frac{2\pi + 6k\pi}{15}\right)\right)$, $k \in \{0; 1; \ldots; 4\}$

Les points-images de z_k sont les sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$

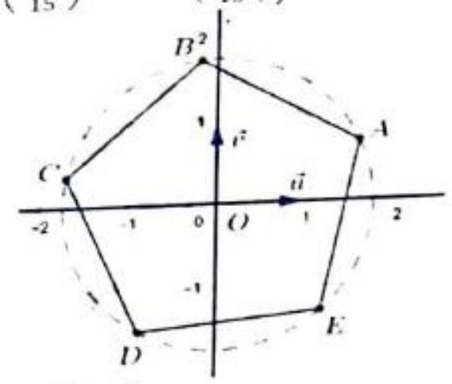
On a : $z_0 = \sqrt{3}\left(cos\left(\frac{2\pi}{15}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{15}\right)\right)$

$z_1 = \sqrt{3}\left(cos\left(\frac{8\pi}{15}\right) + isin\left(\frac{8\pi}{15}\right)\right)$

$z_2 = \sqrt{3}\left(cos\left(\frac{14\pi}{15}\right) + isin\left(\frac{14\pi}{15}\right)\right)$

$z_3 = \sqrt{3}\left(cos\left(\frac{20\pi}{15}\right) + isin\left(\frac{20\pi}{15}\right)\right)$

$z_4 = \sqrt{3}\left(cos\left(\frac{26\pi}{15}\right) + isin\left(\frac{26\pi}{15}\right)\right)$



3. On pose $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$.

a/ Soit $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, expression de α en fonction de $\bar{j}$

$\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

$\alpha = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ soit $\alpha = \bar{j}\sqrt{3}$

b/ Montrons que α est une solution de l'équation $z^5 = \frac{-9\sqrt{3} + 27i}{2}$

Scanné avec CamScanner

$a^5 = (\bar{j}\sqrt{3})^5 = 9\sqrt{3}(\bar{j})^5$

$a^5 = 9\sqrt{3}\left(cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$a^5 = 9\sqrt{3}\left(cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{10\pi}{3}\right)\right)$

Or : $-\frac{10\pi}{3} = -4\pi + \frac{2\pi}{3}$, donc :

$a^5 = 9\sqrt{3}\left(cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$a^5 = 9\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$a^5 = \frac{-9\sqrt{3}+27i}{2}$. Il vient que α est une solution de l'équation $z^5 = \frac{-9\sqrt{3}+27i}{2}$.

4. $z' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)z + \frac{5+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$

a/ Forme algébrique $w = (1-i)(2+\sqrt{3}+3i)$

$w = (1-i)(2+\sqrt{3}+3i)$

$w = 2 + \sqrt{3} + 3i - 2i - i\sqrt{3} + 3$

$w = 5 + \sqrt{3} + i(1-\sqrt{3})$

b/ Nature de et éléments caractéristiques de T

L'écriture complexe de T est de la forme $z' = az + b$ avec $a = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \in \mathbb{C}^*$ et $b = \frac{5+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i \in \mathbb{C}$, donc T est une similitude directe plane.

Rapport : $k = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right| = |\alpha| = \sqrt{3}$

Angle : $arg\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right) = arg\alpha = 0 + arg\bar{j} = -\frac{2\pi}{3}$

Centre Ω: $z_\Omega = \frac{\frac{5+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i} = \frac{5+\sqrt{3}+i(1-\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}+3i}$

$z_\Omega = \frac{(1-i)(2+\sqrt{3}+3i)}{2+\sqrt{3}+3i}$

$z_\Omega = 1 - i$

Conclusion : T est une similitude directe plane de rapport $\sqrt{3}$, d'angle de mesure $-\frac{2\pi}{3}$ et de centre Ω d'affixe $1 - i$.

Corrigé 28

a = 2, $b = 3 + i\sqrt{3}$ et $c = 2i\sqrt{3}$.

1/ a. Calculons $\frac{a-b}{c-b}$

$\frac{a-b}{c-b} = \frac{2-1-i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{-3-i\sqrt{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}(-1-i\sqrt{3})} = \frac{i\sqrt{3}}{3}$

On déduit que $\frac{a-b}{c-b} = \frac{i\sqrt{3}}{3}$. Comme $\frac{a-b}{c-b} \in i\mathbb{R}^*$, alors ABC est un triangle rectangle en B.

b. Déterminons l'affixe du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC

Comme ABC est un triangle rectangle en B, alors Ω est le milieu de son hypoténuse $[AC]$. D'où $z_\Omega = \frac{z_A + z_C}{2}$ soit $z_\Omega = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$.

2/ $\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n + 2 \end{cases}$ A_n le point d'affixe z_n

a. Déterminons les affixes des points A_3 et A_4.

On a : $z_0 = 0$; $z_1 = a = 2$; $z_2 = b = 3 + i\sqrt{3}$; $z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_2 + 2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(3 + i\sqrt{3}) + 2$ soit $z_3 = 2 + 2i\sqrt{3}$.

On déduit que $A_3(2 + 2i\sqrt{3})$.

$z_4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_3 + 2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(2 + 2i\sqrt{3}) + 2$ soit $z_3 = 2i\sqrt{3}$.

On déduit que $A_4(2i\sqrt{3})$.

b. Comparons les longueurs des segments $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$

On a : $A_1A_2 = |3 + i\sqrt{3} - 2| = |1 + i\sqrt{3}| = 2$; $A_2A_3 = |2 + 2i\sqrt{3} - 3 - i\sqrt{3}| = |-1 + i\sqrt{3}| = 2$;

Scanné avec CamScanner

$A_3A_4 = |2i\sqrt{3} - 2 - 2i\sqrt{3}| = |-2| = 2$. On remarque que

- $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$.

c. Etablissons que pour tout entier naturel n , on a :

$z_{n+1} - w = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - w)$ où $w = 1 + i\sqrt{3}$

$z_{n+1} - w = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n + 1 - i\sqrt{3}$

$= \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left[z_n + 2\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right]$

$= \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left[z_n + 2\frac{(1-i\sqrt{3})^2}{4}\right]$

$= \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left[z_n + \frac{-2-2i\sqrt{3}}{2}\right]$

$z_{n+1} - w = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left[z_n - (1 + i\sqrt{3})\right]$.

Or $z_n - (1 + i\sqrt{3}) = z_n - w$, donc :

$z_{n+1} - w = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - w)$

d. Déduisons que le A_{n+1} est l'image de A_n

D'après ce qui précède, $z_{n+1} - w = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - w)$ soit

$z_{n+1} - w = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_n - w)$. On en déduit que $A_{n+1}(z_{n+1})$ est l'image de $A_n(z_n)$ par la rotation de centre $\Omega(w)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

e. Justifions que pour tout entier naturel n, on a : $A_{n+6} = A_n$

D'après 2/ d., on a : $z_{n+1} - w = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_n - w)$. Ainsi, on a :

$z_{n+1} - w = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_n - w)$

$z_{n+2} - w = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_{n+1} - w)$

$z_{n+3} - w = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_{n+2} - w)$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

$z_{n+5} - w = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_{n+4} - w)$

$z_{n+6} - w = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_{n+5} - w)$

En faisant produit membre à membre et en simplifiant, on a : $z_{n+6} - w = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6(z_n - w) = e^{i2\pi}(z_n - w)$. Or $e^{i2\pi} = 1$, donc $z_{n+6} - w = z_n - w$. Par conséquent : $z_{n+6} = z_n$, d'où $A_{n+6} = A_n$.

Autre méthode

Désignons par R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On a d'après 2/ d :

$A_{n+6} = R(A_{n+5}) = R \circ R(A_{n+4}) = \cdots = R^6(A_n)$.

Or R^6 est la rotation de centre Ω et d'angle $6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi$.

Donc, R^6 est une application identique et par suite : $A_{n+6} = A_n$.

Déterminons l'affixe du point A_{2017}

On constate que $2017 = 1 + 336 \times 6$, donc $A_{2017} = A_1$.On déduit que $A_{2017} = 2$.

3/ a. Démontrons que pour tout entier naturel n, $z_{n+1} - z_n = 2\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$

Raisonnons par récurrence, en notant (P_n): $z_{n+1} - z_n = 2\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$, $\forall n \in IN$

On a : $z_1 - z_0 = 2\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^0 = 2$, donc la proposition (P_0) est vraie au rang 1.

Supposons que (P_n) est vraie au rang k et montrons que qu'elle l'est aussi au rang $k + 1$. On a :

$z_{k+2} - z_{k+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_{k+1} + 2 - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_k - 2$

$z_{k+2} - z_{k+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_{k+1} - z_k)$

$z_{k+2} - z_{k+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left[2\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^k\right]$, car $z_{k+1} - z_k = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^k$

Scanné avec CamScanner

$z_{k+2} - z_{k+1} = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{k+1}$, ce qui montre que (P_n) est vraie au rang $k+1$.

On conclut que : $\forall n \in IN,\ z_{n+1} - z_n = 2\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$

b. Déterminons, pour tout entier naturel n, la longueur du segment $[A_nA_{n+1}]$

$A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left|2\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n\right|$

$A_nA_{n+1} = 2\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right|^n = 2 \times 1^n = 2$, donc : $\forall n \in IN$, $A_nA_{n+1} = 2$.

Corrigé 29

Partie A

1: On remarque que $AB = CD = 2$ et $AD = BC = 1$. Donc, $CD^2 - CB^2 = 2 - 1 = 1$. C appartient bien à (E). De même, I étant le milieu de [AB], on a: $AI = BI = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $DI^2 = AD^2 + AI^2 = 1 + \frac{1}{4}$ donc: $DI^2 - BI^2 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = 1$, d'ou I appartient aussi à (E).

2. a

$$MD^2 - MB^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IB}\right) + ID^2 - IB^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BD} = 0, \text{ car } ID^2 - IB^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BD} = 0$$

On en déduit que l'ensemble (E) est donc une droite perpendiculaire à (BD). Comme C et I appartiennent à (E), alors cette droite est la droite (CI).

b. Déduisons que les droites (BD) et (CI) sont perpendiculaires

Cela se déduit immédiatement du 1.a/

Partie B

Les coordonnées des points sont: $A(0\,;0)$, $B(\sqrt{2}\,;0)$, $D(0\,;1)$

et $C(\sqrt{2}\,;1)$

1. Déterminons les nombres complexes a et b

D a pour affixe i, C a pour affixe $\sqrt{2} + i$ et B a pour affixe $\sqrt{2}$ et on a : $\begin{cases} S(D) = C \\ S(C) = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} az_D + b = z_C \\ az_C + b = z_B \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} + i = ai + b \\ \sqrt{2} = a(\sqrt{2} + i) + b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -ai + \sqrt{2} + i \\ a\sqrt{2} = -i \end{cases}$$

Donc $a = \frac{-i}{\sqrt{2}} = -\frac{i\sqrt{2}}{2}$ et $b = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} + i = \frac{\sqrt{2}}{2} + i$.

2. Déterminons le rapport et l'angle de T

La similitude directe T associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = -\frac{i\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$. Par suite, son rapport est $k = \left|-\frac{i\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et son angle est $\theta = arg\left(-\frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}(mod2\pi)$.

Remarquons que T n'est autre que la similitude S

3. Montrons que la similitude T transforme B en I

$T(B)$ a pour affixe $z'_B = -\frac{i\sqrt{2}}{2}z_B + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$

$$z'_B = -\frac{i\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$$
$$z'_B = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}z_B.$$ On déduit que $T(B)$ est le milieu I de $[AB]$.

4. Déduisons une autre justification de l'orthogonalité des droites (BD) et (CI)

On a : $S(D) = C$ et $S(B) = I$ L'image d'une droite par une similitude est une droite, donc l'image par T de la droite (BD) est la droite (CI). Comme l'angle de T est $-\frac{\pi}{2}$, on en déduit que ces deux droites sont bien perpendiculaires.

5. Montrons que le centre Ω de la similitude T est le point d'intersection des droites (BD) et (CI)

Scanné avec CamScanner

Le centre Ω de la similitude T est son point invariant, c'est-à-dire le point d'affixe z solution de l'équation.

$z = -\frac{i\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$, donc $z_\Omega = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+i}{1+i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}+2i}{2+i\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}i}{\sqrt{2}+i}$ soit

$z_\Omega = \frac{(1+\sqrt{2}i)(\sqrt{2}-i)}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{i}{3}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{I\Omega}$, $\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{D\Omega}$ et $\overrightarrow{DB}$ ont pour affixes respectives :

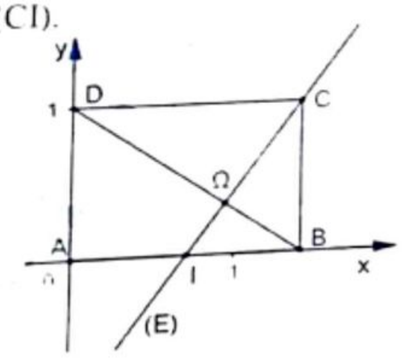
$z_{\overrightarrow{I\Omega}} = z_\Omega - z_I = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{i}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+2i}{6}$

$z_{\overrightarrow{IC}} = z_C - z_I = \sqrt{2} + i - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+2i}{2}$

$z_{\overrightarrow{D\Omega}} = z_\Omega - z_D = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{i}{3} - i = \frac{2\sqrt{2}-2i}{3} = \frac{2}{3}(\sqrt{2}-i)$

$z_{\overrightarrow{DB}} = z_B - z_D = \sqrt{2} - i$.

Donc $\overrightarrow{I\Omega} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{D\Omega} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DB}$; par suite les points I, Ω et C d'une part, D, Ω et B, d'autre part, sont alignés. Il s'ensuit que le centre Ω de la similitude T est le point d'intersection des droites (BD) et (CI).



Corrigé 30

$P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8$

1. Calculons

$P(2) = (2)^3 + 2(\sqrt{2}-1)(2)^2 + 4(1-\sqrt{2})(2) - 8 = 8 +$

$8\sqrt{2} - 8 + 8 - 8\sqrt{2} - 8 = 0$.

On déduit que P(z) est factorisable par $z - 2$. Il existe donc trois nombres a, b et c tels que $P(z) = (z-2)(az^2 + bz + c)$ $= az^3 + (-2a + b)z^2 + (-2b + c)z - 2c$. On obtient par identification $\begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = 2(\sqrt{2}-1) \\ -2b + c = 4(1-\sqrt{2}) \\ -2c = -8 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2\sqrt{2} \\ c = 4 \end{cases}$ d'où :

$P(z) = (z-2)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4)$

2. Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation P(z) = 0

On a : $P(z) = 0 \Leftrightarrow z - 2 = 0$ ou $z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$.

Résolvons $z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$. On a : $\Delta = -8 = (2i\sqrt{2})^2$

D'où $z_1 = \frac{-2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_2 = \frac{-2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}}{2} =$ $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$. D'où $S = \{2; -\sqrt{2} - i\sqrt{2}; -\sqrt{2} + i\sqrt{2}\}$

Vérifions que $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$

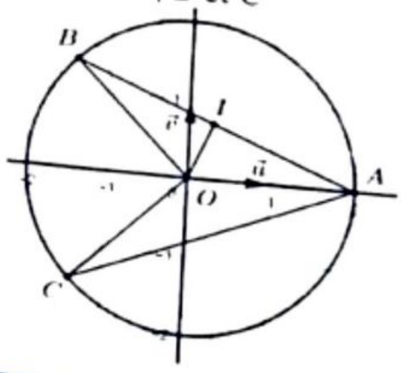
On a : $z_1 + z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} - \sqrt{2} - i\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$

Déterminons le module et un argument de z_1 et de z_2

On a : $|z_1| = |-\sqrt{2} + i\sqrt{2}| = 2$, donc $z_1 = 2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$ $2\left(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}\right)$, d'où $argz_1 = \frac{3\pi}{4}$

$|z_2| = |-\sqrt{2} - i\sqrt{2}| = 2$, donc $z_2 = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$ $2\left(cos\frac{3\pi}{4} - isin\frac{3\pi}{4}\right)$, d'où $argz_2 = -\frac{3\pi}{4}$.

3. a. Plaçons dans le plan A, B et C



Scanné avec CamScanner

b. Démontrons que le triangle OAB est isocèle et déduisons une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OI})$

On a : $|z_A| = 2$ et $|z_B| = 2$, donc OA = OB, d'où le triangle OAB est isocèle en O.

Comme I est milieu [AB] et que le triangle est isocèle en 0, alors la médiane (OI) issue de O est aussi bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$. On en déduit que $(\vec{u}, \overrightarrow{OI}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. Or $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg\frac{z_B}{z_A} = arg z_B = arg z_1 = \frac{3\pi}{4}$, donc une mesure de $(\vec{u}, \overrightarrow{OI})$ est $\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{8}$.

c. Calculons l'affixe z_I de I, puis le module de z_I

$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $|z_I| = \sqrt{\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$

d. Déduisons des résultats précédents les valeurs exactes de $cos\frac{3\pi}{8}$ et $sin\frac{3\pi}{8}$

Comme $(\vec{u}, \overrightarrow{OI}) = \frac{3\pi}{8}$, alors $arg z_I = \frac{3\pi}{8}$. Or $z_I = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

donc $cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}{|z_I|} = \frac{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ et $sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{|z_I|} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

Corrigé 31

$P(z) = z^3 - (4 + 6i)z^2 + (-6 + 16i)z + 12 - 4i$.

1. a/ Calculons $P(1 + i)$

$P(1 + i) = (1 + i)^3 - (4 + 6i)(1 + i)^2 + (-6 + 16i)(1 + i) + 12 - 4i$.

$P(1 + i) = 0$

b/ Déterminons deux nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z, on a : $P(z) = (z - 1 - i)(z^2 + az + b)$

On a : $P(z) = z^3 + (a - 1 - i)z^2 + (b - a - ia)z - b - bi$, donc par identification

$\begin{cases} a - 1 - i = -4 - 6i \\ b - a - ia = -6 + 16i \\ -b - bi = 12 - 4i \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = -3 - 5i \\ b = -4 + 8i \end{cases}$

D'où : $P(z) = (z - 1 - i)(z^2 + -(3 + 5i)z - 4 + 8i)$.

c/ Déterminons les solutions de l'équation $P(z) = 0$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 1 + i$ ou $z^2 + -(3 + 5i)z - 4 + 8i = 0$ (E)

(E) a pour discriminant :

$\Delta = |-(3 + 5i)|^2 - 4(-4 + 8i) = -2i = (1 - i)^2$, donc $z_1 = \frac{3 + 5i + 1 - i}{2} = 2 + 2i$ et $z_2 = \frac{3 + 5i - 1 + i}{2} = 1 + 3i$,

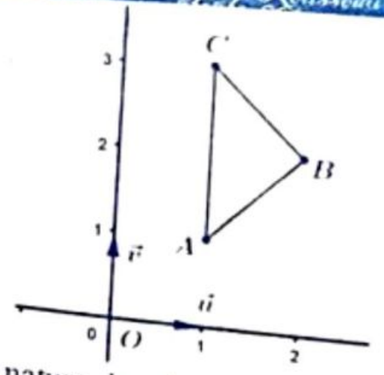
d'où : $S = \{1 + i; 2 + 2i; 1 + 3i\}$

2. a/ Plaçons les points A, B et C, images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ sachant que $|z_A| \leq |z_B| \leq |z_C|$

On a : $|1 + i| = \sqrt{2}$; $|2 + 2i| = 2\sqrt{2}$ et $|1 + 3i| = 10$

soit $|1 + i| \leq |2 + 2i| \leq |1 + 3i|$, donc $z_A = 1 + i$; $z_B = 2 + 2i$ et $z_C = 1 + 3i$.

Le monde de la réalité a ses limites, le monde de l'imagination est sans frontières. J. J. Rousseau



Déterminons la nature du triangle ABC

ABC est un triangle rectangle et isocèle en B, car on a : $BC = BA = \sqrt{2}$ et $AC = 2$ soit $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Scanné avec CamScanner

b/ Montrons qu'il existe une unique similitude directe s de centre A qui transforme C en B

On a : A, B et C sont deux à deux différents puis $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = arg\left(\frac{z_{AB}}{z_{AC}}\right) = arg\left(\frac{1+i}{2i}\right) = arg\frac{1}{2}(1-i) = -\frac{\pi}{4}$

D'où l'existence d'une similitude directe s de centre A, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

c/ Expression complexe de s, son rapport et un angle

Comme $s = s_{\left(A,-\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$, alors on a :

$z' - z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}(z - z_A)$ soit

$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z - 1 - i) + 1 + i$, d'où :

$z' = \frac{1-i}{2}z + i$

3. $z' = \frac{1-i}{2}z + i$.

a/ Reconnaissons la transformation f et déterminons ses éléments caractéristiques

D'après 2.c/, $f = s_{\left(A,-\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

b/ Déterminons la nature du triangle AM_nM_{n+1}

Comme $M_{n+1} = f(M_n)$, alors AM_nM_{n+1} est un triangle rectangle et isocèle en M_{n+1}, car $Mes(AM_n, AM_{n+1}) = -\frac{\pi}{4}$ et $\frac{AM_{n+1}}{AM_n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c/ Calculons en fonction de n la somme :

$S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_nM_{n+1}$

Posons : $\forall n \in IN$, $U_n = M_nM_{n+1}$, alors

$S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1} + U_n$

On a : $U_{n+1} = M_{n+1}M_{n+2}$

$U_{n+1} = |z_{M_{n+2}} - z_{M_{n+1}}|$

$U_{n+1} = \left|\frac{1-i}{2}z_{M_{n+1}} + i - \left(\frac{1-i}{2}z_{M_n} + i\right)\right|$

$U_{n+1} = \left|\frac{1-i}{2}z_{M_{n+1}} - \frac{1-i}{2}z_{M_n}\right|$

$U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_{M_{n+1}} - z_{M_n}|$

$U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}M_nM_{n+1}$

$U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}U_n$

On en déduit que (U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de 1er terme $U_0 = M_0M_1 = BC = \sqrt{2}$. Il vient que $S_n = U_0\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$ soit

$S_n = \frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right]$

d/ Calculons $\lim_{n\to+\infty} S_n$ et interprétons.

Comme $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} = 0$. Il s'ensuit que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$.

Corrigé 32

1. (E_θ): $z^3 + 2ie^{i\theta}z^2 - 2ie^{2i\theta}z - 4e^{3i\theta}(2+i) = 0$ avec $\theta \in [0; 2\pi[$

a/ Vérifions que (E_0) admet une solution réelle

On a : (E_0): $z^3 + 2iz^2 - 2iz - 4(2+i) = 0$

Soit z_0 un reel.

z_0 solution de $(E_0) \Leftrightarrow {z_0}^3 + 2i{z_0}^2 - 2iz_0 - 4(2+i) = 0$

$\Leftrightarrow {z_0}^3 - 8 + i(2{z_0}^2 - 2z_0 - 4) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} {z_0}^3 - 8 = 0 & (1) \\ 2{z_0}^2 - 2z_0 - 4 = 0 & (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow z_0 = 2$

$z_0 = 2$ vérifie (2), donc $z_0 = 2$ est solution de (E_0).

Scanné avec CamScanner

Réciproquement, il est simple de vérifier que 2 est une solution de (E_0)

b/ Résolvons alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_0)

Comme 2 est une solution de (E_0), alors $P(z) = z^3 + 2iz^2 - 2iz - 4(2+i)$ est divisible par $z-2$, par conséquent il existe deux nombres complexes a et b tels que $P(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$ c'est-à-dire $P(z) = z^3 + (a-2)z^2 + (b-2a)z - 2b$

On obtient : $\begin{cases} a-2 = 2i \\ b-2a = -2i \\ -2b = -8-4i \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 2+2i \\ b = 4+2i \end{cases}$

D'ou : $P(z) = (z-2)(z^2 + (2+2i)z + 4 + 2i)$

$(E_0) \Leftrightarrow z = 2$ ou (E) : $z^2 + (2+2i)z + 4 + 2i = 0$

Le discriminant de (E) est $\Delta = (2+2i)^2 - 4(4+2i)$ soit $\Delta = -16 = (4i)^2$

$z_1 = \frac{-(2+2i)-4i}{2} = -1-3i$, $z_2 = \frac{-(2+2i)+4i}{2} = -1+i$

L'ensemble des solutions de (E_0) est :

$S_0 = \{2; -1-3i; -1+i\}$

2. a/ Montrons que z est une solution de (E_θ) si et seulement si $ze^{-i\theta}$ est solution de (E_0)

z solution de $(E_\theta) \Leftrightarrow z^3 + 2ie^{i\theta}z^2 - 2ie^{2i\theta}z - 4e^{3i\theta}(2+i) = 0$

$\Leftrightarrow e^{3i\theta}\left(e^{-3i\theta}z^3 + 2ie^{-2i\theta}z^2 - 2ie^{-i\theta}z - 4(2+i)\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(ze^{-i\theta}\right)^3 + 2i\left(ze^{-i\theta}\right)^2 - 2i\left(e^{-i\theta}z\right) - 4(2+i) = 0$

$\Leftrightarrow ze^{-i\theta}$ est solution de (E_0).

b/ Déduisons les solutions (E_θ)

D'après les questions précédentes, l'ensemble des solutions de (E_θ) est :

$S_\theta = \{2e^{-i\theta}; (-1-3i)e^{-i\theta}; (-1+i)e^{-i\theta}\}$

3

On a : $z_A = 2$; $z_B = -1+i$, $z_C = -1-3i$,

$z_{A'} = 2e^{-i\theta}$, $z_{B'} = (-1+i)e^{-i\theta}$, $z_{C'} = (-1-3i)e^{-i\theta}$

a/ Calculons puis interprétons les complexes $\frac{z_A}{z_B - z_C}$ et $\frac{\frac{z_B}{z_C - z_A}}{\frac{z_A}{z_B - z_C}} = \frac{2}{-1+i-(-1-3i)} = -\frac{1}{2}i$. On déduit que $(OA) \perp (BC)$ (*)

$\frac{z_B}{z_C - z_A} = \frac{-1+i}{-1-3i-2} = \frac{(-1+i)(1-i)}{-4(1+i)(1-i)} = -\frac{1}{3}i$. On déduit que $(OB) \perp (AC)$ (**)

(*) et (**) montrent que O est un point commun aux hauteurs issues de A et B dans le triangle ABC, il vient que O est l'orthocentre du triangle ABC.

b/ Caractérisons l'application r de P dans P qui à tout point M(z) associe M'(z') tel que $z' = e^{i\theta}z$

1ère méthode :

L'écriture complexe de r est de la forme $z' = az + b$ avec $a = e^{i\theta}$ et $b = 0$.

Si $\theta = 0$, alors r est l'application identique du plan (translation de vecteur nul).

Si $\theta = \pi$, alors r est la symétrie centrale (homothétie de rapport -1) de centre O (car $\frac{b}{1-a} = 0$).

Si $\theta \in]0; 2\pi[- \{\pi\}$, alors r est la rotation (car $a = e^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $|a| = 1$) de centre O (car $\frac{b}{1-a} = 0$) et d'angle $\theta = arg a$.

Dans les trois cas on peut conclure que r est la rotation de centre O et d'angle θ.

2ème méthode :

Si $z = 0$, alors $z' = 0$, d'où $r(O) = O$.

Si $z \neq 0$, alors $z' \neq 0$, donc $\frac{z'}{z} = e^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{z'}{z}\right| = 1 \\ arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \theta \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \theta[2\pi] \end{cases}$ soit $M' = r_{(O,\theta)}(M)$.

Ainsi, r est la rotation de centre O et d'angle θ.

Scanné avec CamScanner

c/ Déduisons que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont le même orthocentre

On sait que $z_{A'} = z_A e^{-i\theta} \Rightarrow r(A) = A'$. De même, $r(B) = B'$ et $r(C) = C'$. Donc r transforme l'orthocentre O du triangle ABC en l'orthocentre du triangle A'B'C'. Or O est invariant par r, les triangles ABC et $A'B'C'$ ont le même orthocentre.

d) Montrons que les points A', B' et C' varient sur des cercles concentriques à préciser

On a : $|z_{A'}| = |2e^{i\theta}| = 2 \Rightarrow A' \in \mathcal{C}_{(O,2)}$

$|z_{B'}| = |(-1+i)e^{i\theta}| = \sqrt{2} \Rightarrow B' \in \mathcal{C}_{(O,\sqrt{2})}$

$|z_{C'}| = |(-1-3i)e^{i\theta}| = \sqrt{10} \Rightarrow C' \in \mathcal{C}_{(O,\sqrt{10})}$

Donc, les points A', B' et C' varient sur des cercles concentriques de centre O.

Corrigé 33

$z' = (m+i)z + m - 1 - i$.

1. Peut-on choisir m de telle sorte que T_m soit une translation?

Si T_m est une translation, alors $m + i = 1$. Par suite $m = 1 - i \in \mathbb{C}$. Or $m \in \mathbb{R}$, donc il n'existe pas de nombres réels m tels que T_m soit une translation.

2. Déterminons le réel m de telle sorte que T_m soit une rotation.

T_m est une rotation $\Rightarrow \begin{cases} m+i \in \mathbb{C} \\ |m+i| = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} m+i \in \mathbb{C} \\ |m+i| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+i \in \mathbb{C} \\ m^2+1 = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m+i \in \mathbb{C} \\ m^2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m+i \in \mathbb{C} \\ m = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m = 0$

On a alors $z' = iz - 1 - i$ avec $arg(i) = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{-1-i}{1-i} = \frac{-2i}{2} = -i$. On déduit que T_0 est une rotation de centre d'affixe $-i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

3. Pour $m = 1$, on a : $z' = (1+i)z - i$

a/ Calculons l'affixe du point Ω invariant par T_m

On a : $z' = z \Leftrightarrow z = (1+i)z - i$

$\Leftrightarrow -iz = -i$

$\Leftrightarrow z = 1$

On déduit que $z_\Omega = 1$ est le point invariant de T_1.

b/ Calculons $\frac{z'-1}{z-1}$ pour $z \neq 1$

$$\frac{z'-1}{z-1} = \frac{(1+i)z - i - 1}{z-1} = \frac{z + iz - i - 1}{z-1} = \frac{i(z-1) + z - 1}{z-1} = \frac{(i+1)(z-1)}{z-1}$$

$$\boldsymbol{\frac{z'-1}{z-1} = i+1}$$

Démontrons que T_1 est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques

On a : $\left|\frac{z'-1}{z-1}\right| = |i+1| = \sqrt{2}$ et $arg\left(\frac{z'-1}{z-1}\right) = arg(i+1) = \frac{\pi}{4}$, donc $\frac{z'-1}{z-1} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ soit $(z'-1) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-1)$.

On reconnait l'écriture complexe de la similitude directe plane de centre Ω, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

c/ Démontrons que, pour tout nombre z on a : $z' - z = i(z-1)$

On a : $z' - z = (1+i)z - i - z$

$z' - z = iz - i$

$\boldsymbol{z' - z = i(z-1)}$ (*)

Déduisons que si M est distinct de Ω, alors le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle en M

Scanné avec CamScanner

$(*) \Rightarrow |z' - z| = |z - 1|$, donc $MM' = \Omega M$ (1)

$(*) \Rightarrow arg\left(\frac{z'-z}{z-1}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (2).

(1) et (2) montrent que le triangle ΩMM' est rectangle isocèle en M.

4. $M_0 = O$, $M_1 = T_1(M_0)$, $\forall n \in IN^*, M_n = T_1(M_{n-1})$.

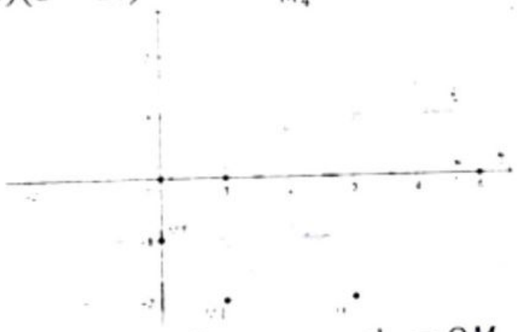
a/ Plaçons les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

$z' = (1+i)z - i$

$z_{M_1} = -i$; $z_{M_2} = (1+i)(-i) - i$ soit $z_{M_2} = 1 - 2i$

$z_{M_3} = (1+i)(1-2i) - i$ soit $z_{M_3} = 3 - 2i$

$z_{M_4} = (1+i)(3-2i) - i$ soit $z_{M_4} = 5$



b/ Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = \Omega M_n$.

Démontrons que la suite (d_n) est une suite géométrique, puis exprimons le terme général de cette suite en fonction de n

On a : $d_{n+1} = \Omega M_{n+1}$

$d_{n+1} = |z_{M_{n+1}} - z_\Omega|$

$d_{n+1} = |(1+i)z_{M_n} - i - 1|$

$d_{n+1} = |(1+i)z_{M_n} - (1+i)|$

$d_{n+1} = |(1+i)(z_{M_n} - 1)|$

$d_{n+1} = |1+i||z_{M_n} - 1|$

$d_{n+1} = \sqrt{2}|z_{M_n} - z_\Omega|$

$d_{n+1} = \sqrt{2}\Omega M_n$ soit $d_{n+1} = \sqrt{2}d_n$. On déduit que (d_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de 1er terme $d_0 = 1$. Il s'ensuit que $d_n = (\sqrt{2})^n$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{2})^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = +\infty$, car $\sqrt{2} > 1$; donc la suite (d_n) est divergente.

Corrigé 34

1/ a. Expression de U_n et V_n en fonction de n

$U_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$; $V_n = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$

b. Déduisez-en z_n

$z_n = U_n e^{iV_n} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right)}$

2/ Démontrons que (z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}i$ et de premier terme $z_0 = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$

$z_{n+1} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}$

$z_{n+1} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}$

$z_{n+1} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right)}$

$z_{n+1} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right)}$

$z_{n+1} = 2i\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right)}$

$z_{n+1} = 2i\left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right)}$

$z_{n+1} = \frac{1}{2}i\left[4\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right)}\right]$

$z_{n+1} = \frac{1}{2}iz_n$

On déduit que (z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}i$ et de premier terme $z_0 = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$.

Scanné avec CamScanner

3/ a. Déterminons la nature de la transformation F qui au point M_n associe le point M_{n+1} d'affixe z_{n+1}

On a : $z_{n+1} = \frac{1}{2}iz_n$, donc la transformation complexe associée à F est $z \mapsto \frac{1}{2}iz$. Comme cette écriture est de la forme $z \mapsto az + b$, avec $a \in C^*$ F est une similitude directe.

b. Eléments caractéristiques de F

F a pour centre O, de rapport $k = \left|\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2}$ et d'angle $\theta = arg\left(\frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

4/ Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = z_0 z_1 z_2 \ldots z_n$.

a. Expression en fonction de n un argument de Z_n

$argZ_n = arg(z_0 z_1 z_2 \ldots z_n)$

$argZ_n = argz_0 + argz_1 + \cdots + argz_n$

$argZ_n = \sum_{k=0}^{n} argz_k = \sum_0^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)$

$argZ_n = \sum_0^n \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\sum_0^n k = \frac{(n+1)\pi}{4} + \frac{\pi}{4}n(n+1)$

$argZ_n = \frac{(n+1)^2\pi}{4}$

b. Démontrons que si n est impair, alors Z_n est réel .

Supposons que n est impair et posons $n = 2p - 1$. Alors $(n+1)^2 = 4p^2$ et par suite $argZ_n = \frac{(n+1)^2\pi}{4} = p^2\pi$ est un multiple de π. il en résulte que Z_n, nombre complexe dont un argument est un multiple de π, est un réel (et même un réel positif).

Corrigé 35

2. a/ Vérifions que les nombres complexes $z_A - z_B$ et $z_C - z_B$ ont même module que l'on précisera

On a : $|z_A - z_B| = |-5 - 2i| = \sqrt{29}$;

$|z_C - z_B| = |-2 + 5i| = \sqrt{29}$, donc

$|z_A - z_B| = |z_C - z_B| = \sqrt{29}$.

b/ Ecriture de $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ sous la forme trigonométrique

on a : $\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = 1$ (1)

$arg\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = arg\left(\frac{-5-2i}{-2+5i}\right) = arg(i) = \frac{\pi}{2}$ (2). De (1) et (2) on déduit que $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}} = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

c/ Déduisons la nature du triangle ABC

Comme $|z_A - z_B| = |z_C - z_B|$ et $arg\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{\pi}{2}$, alors le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

3. a/ Angle et rapport de la similitude S

L'expression complexe de S est de la forme :

$z' = az + b$ (*) où z est l'affixe de M et z' celle de M'.

On a : $z_C = az_B + b$. Or $b = z_A(1 - a) = -3 + 3a$.

(*)$\Rightarrow z_C = az_B - 3 + 3a$

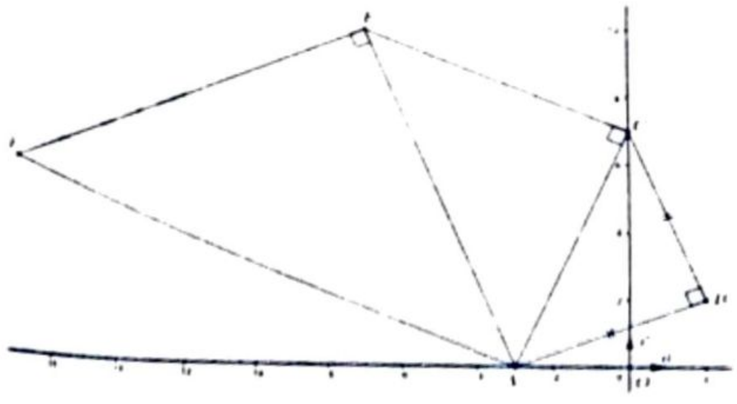
$\Rightarrow a = \frac{z_C+3}{z_B+3}$

$\Rightarrow a = \frac{7i+3}{5+2i}$

$\Rightarrow a = 1 + i$, soit $a = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. On déduit que S est la similitude directe d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $k = \sqrt{2}$.

b/ Figure

ABC étant isocèle et rectangle en B son image ACE est rectangle en C, AEF image de ACE est rectangle en E.



Scanné avec CamScanner

4. $A_n = S(A_{n-1})$ et $R_n = |z_{A_{n+1}} - z_{A_n}| \ \forall n \in IN$

a/ Calculons $|z_{A_2} - z_{A_0}|$ et R_2

$|z_{A_2} - z_{A_0}| = |(1+i)z_B + 3i + 3|$

$= |(1+i)(2+2i) + 3i + 3|$

$= |3 + 7i| = \sqrt{58}$

$|z_{A_2} - z_{A_0}| = \sqrt{58}$

$R_2 = |z_{A_3} - z_{A_2}|$

$R_2 = |(1+i)(7i) - 4i|$

$R_2 = |-7 + 3i|$

$R_2 = \sqrt{58}$

b/ Déduisons la nature précise du triangle AA_2A_3

On a : $\frac{|z_{A_2}-z_{A_0}|}{|z_{A_3}-z_{A_2}|} = \left|\frac{z_{A_2}-z_{A_0}}{z_{A_3}-z_{A_2}}\right| = 1$ et $arg\frac{z_{A_2}-z_{A_0}}{z_{A_3}-z_{A_2}} = \frac{\pi}{2}$

De plus, on sait que $\begin{cases} S(A_0) = A_0 = A \\ S(B) = A_2 \\ S(C) = A_3 \end{cases}$. Or ABC est un triangle rectangle et isocèle en B, donc son image AA_2A_3 par S est aussi un triangle rectangle et isocèle en $A_2 = S(B)$.

5. a/ Démontrons que, pour tout entier n, le triangle AA_nA_{n+1} est isocèle et rectangle en A_n.

Raisonnons par récurrence.

Pour n = 2, on a AA_2A_3 est un triangle rectangle et isocèle en A_2.

Supposons que le triangle AA_nA_{n+1} est rectangle et isocèle en A_n et montrons que $AA_{n+1}A_{n+2}$ est un triangle rectangle et isocèle en A_{n+1}. On a : $\begin{cases} S(A) = A \\ S(B) = A_2 \\ S(C) = A_3 \\ \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \\ S(A_n) = A_{n+1} \\ S(A_{n+1}) = A_{n+2} \end{cases}$

Or AA_nA_{n+1} est rectangle et isocèle en A_n d'après hypothèse, donc son image $AA_{n+1}A_{n+2}$ par S est aussi un triangle rectangle et isocèle en $A_{n+1} = S(A_n)$.

On conclut que, pour tout entier n, le triangle AA_nA_{n+1} est isocèle et rectangle en A_n.

b/ Démontrons que la suite (R_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$

$R_{n+1} = |z_{A_{n+2}} - z_{A_{n+1}}|$

$R_{n+1} = |(1+i)z_{A_{n+1}} + 3i - 3i - (1+i)z_{A_n}|$

$R_{n+1} = |1+i||z_{A_{n+1}} - z_{A_n}|$

$R_{n+1} = \sqrt{2}|z_{A_{n+1}} - z_{A_n}|$

$R_{n+1} = \sqrt{2}R_n$, car $R_n = |z_{A_{n+1}} - z_{A_n}|$; on déduit que (R_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$.

c/ Démontrons que, pour tout entier naturel non nul n, $R_n = 2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{29}$.

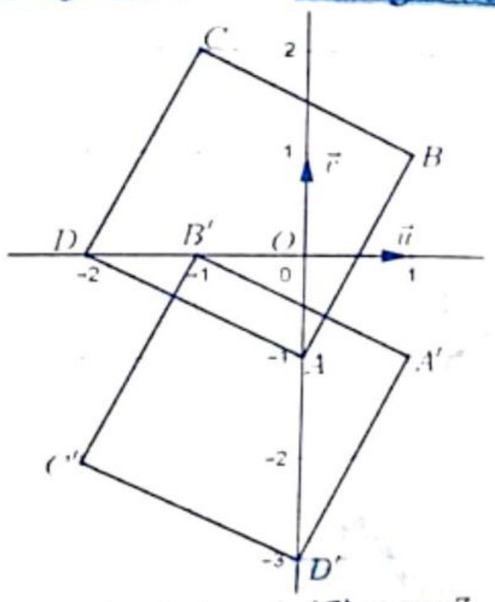
Comme (R_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de 1er terme $R_1 = |z_{A_2} - z_{A_1}| = \sqrt{29}$, alors son terme général est donné par : $R_n = \left(\sqrt{2}\right)^{n-1} R_1 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{n-1}\sqrt{29}$ soit $R_n = 2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{29}$.

Corrigé 36

I. 1/ Plaçons les points A, B, C et D

« Pour récolter plus de roses, il suffit de planter plus de rosiers. »
George Eliet

Scanné avec CamScanner



2/ a. Interprétation géométrique de $|Z|$ et $argZ$

$|Z| = \left|\frac{z_A - z_C}{z_B - z_D}\right| = \frac{|z_A - z_C|}{|z_B - z_D|} = \frac{|z_{\overrightarrow{CA}}|}{|z_{\overrightarrow{DB}}|} = \frac{CA}{DB}$

$argZ = arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_D}\right) = arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{CA}}}{z_{\overrightarrow{DB}}}\right) = Mes(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CA})$

b. Calculons le nombre complexe Z

$Z = \frac{-i+1-2i}{1+i+2} = \frac{(1-3i)(3-i)}{3^2+1^2} = \frac{3-i-9i-3}{10} = -i$

3/ Module et l'argument de Z

$|Z| = |-i| = 1$ et $argZ = arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$.

Déduisons la nature du quadrilatère ABCD

$|Z| = 1 \Leftrightarrow CA = DB$

$argZ = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow Mes(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{2}$, donc $(CA) \perp (DB)$.

De plus $\begin{cases} z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 1 + i + i = 1 + 2i \\ z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = -1 + 2i + 2 = 1 + 2i \end{cases}$, donc

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$, d'où $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. On en déduit que ABCD est un parallélogramme.

Conclusion

ABCD est un carré : parallélogramme de diagonales perpendiculaires et de même mesure.

II- $\begin{cases} Z_0 = 0 \\ Z_{n+1} = \lambda Z_n - i \end{cases}$

I/ a. Calculons Z_1, Z_2 et Z_3

$Z_1 = \lambda Z_0 - i = \lambda \times 0 - i = -i$

$Z_2 = \lambda Z_1 - i = \lambda(-i) - i = -(\lambda + 1)i$

$Z_3 = \lambda Z_2 - i = -\lambda(\lambda + 1)i - i = -\lambda^2 i - \lambda i - i$

$Z_3 = -(\lambda^2 + \lambda + 1)i$

b. Démontrons que : $\forall n \in IN^*$, $Z_n = -(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \cdots + \lambda + 1)i$

Remarquons que $Z_n = -(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \cdots + \lambda^1 + \lambda^0)i$

Raisonnons par récurrence.

- Pour n = 1, on a : $Z_1 = -\lambda^0 i = -i$ (vérifié en I/a.)

Pour n = 2, on a : $Z_2 = -(\lambda^1 + \lambda^0)i = -(\lambda + 1)i$ (vérifié en I/a.)

Pour n = 3, on a : $Z_3 = -(\lambda^2 + \lambda^1 + \lambda^0)i$

$Z_3 = -(\lambda^2 + \lambda + 1)i$ (vérifié en I/a.)

- Supposons que pour un rang $k \geq 3$,

$Z_k = -(\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2} + \cdots + \lambda + 1)i$. On obtient alors

$Z_{k+1} = \lambda Z_k - i$

$Z_{k+1} = -\lambda(\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2} + \cdots + \lambda + 1)i - i$

$Z_{k+1} = -(\lambda^k + \lambda^{k-1} + \cdots + \lambda^2 + \lambda)i - i$

$Z_{k+1} = -(\lambda^k + \lambda^{k-1} + \cdots + \lambda^2 + \lambda + 1)i$

- On conclut que : $\forall n \in IN^*$, $Z_n = -(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \cdots + \lambda + 1)i$

c. Déduisons que : $\forall n \in IN$, $Z_n = \frac{1-\lambda^n}{\lambda-1} i$

Pour n = 0, $Z_0 = \frac{1-\lambda^0}{\lambda-1} i = \frac{1-1}{\lambda-1} i = 0$

Pour $n \in IN^*$, $Z_n = -(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \cdots + \lambda + 1)i$

Scanné avec CamScanner

Or $\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \cdots + \lambda + 1$ est une somme d'une progression géométrique de raison λ et de 1er terme 1, donc $\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \cdots + \lambda + 1 = 1 \times \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda} = \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$, car $\lambda \neq 1$. Par suite $Z_n = \frac{1-\lambda^n}{\lambda-1} i$.

2/ On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $\lambda^k = 1$. Démontrons que pour tout entier naturel, $Z_{n+k} = Z_n$

On a $Z_n = \frac{1-\lambda^n}{\lambda-1} i$, donc $Z_{n+k} = \frac{1-\lambda^{n+k}}{\lambda-1} i = \frac{1-\lambda^n \times \lambda^k}{\lambda-1} i$

$= \frac{1-\lambda^n \times 1}{\lambda-1} = \frac{1-\lambda^n}{\lambda-1} = Z_n$. D'où $Z_{n+k} = Z_n$

3/ Etude du cas $\lambda = i$

a. Montrons que : $\forall n \in IN$ et $\forall k \in IN$, $Z_k = Z_{4n+k}$.

$Z_n = \frac{1-i^n}{i-1} i$, donc $Z_k = \frac{1-i^k}{i-1} i = 0$, car $i^k = 1$

$Z_{4n+k} = \frac{1-i^{4n+k}}{i-1} i = \frac{1-i^{4n} \times i^k}{i-1} i$. Or $i^{4n} = 1$ et $i^k = 1$, donc $Z_{4n+k} = 0$. D'où : $\forall n \in IN$ et $\forall k \in IN$, $Z_k = Z_{4n+k}$

b. Montrons que M_{n+1} est l'image de M_n par une rotation φ dont on précisera le centre et l'angle

On a $Z_{n+1} = iZ_n - i$

$|i| = 1$, donc M_{n+1} est l'image de M_n par une rotation φ.

Angle θ de φ

$\theta = \arg(i) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$

Centre Ω de φ

$Z_\Omega = \frac{-i}{1-i} = \frac{-i(1+i)}{2} = \frac{1}{2}(1-i)$, donc $\Omega\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

c. Images de A, B, C et D par φ

Soit $A' = \varphi(A)$, on a : $Z_{A'} = iZ_A - i = i(-i) - i = 1 - i$.

donc $A'(1; -i)$

Soit $B' = \varphi(B)$, on a : $Z_{B'} = iZ_B - i = i(1+i) - i$

$Z_{B'} = -1$, donc $B'(-1; 0)$

Soit $C' = \varphi(C)$, on a : $Z_{C'} = iZ_C - i = i(-1+2i) - i$

$Z_{C'} = -2 - 2i$, donc $C'(-2; -2)$

Soit $D' = \varphi(D)$, on a : $Z_{D'} = iZ_D - i = i(-2) - i$

$Z_{D'} = -3i$, donc $D'(0; -3)$

Plaçons ces images dans le repère précédent (confer figure précédente)

d. Montrons que : $\forall n \in IN$, $Z_{4n+1} = -i$

On a : $Z_{4n+1} = \frac{1-i^{4n+1}}{i-1} i$. Or $i^{4n+1} = i$, donc

$Z_{4n+1} = \frac{1-i}{i-1} i = -\frac{i-1}{i-1} i = -i$.

Corrigé 37

$A_0(2) : A'_0(1 - i\sqrt{3})$; $A_n(z_n)$ et $A'_n\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) z_n\right)$;

$z_n = r_n e^{i\theta_n}$

1. Affixe des points A_1 ; A'_1 ; A_2 ; A'_2

$z_{A_1} = \frac{2 + (1 - i\sqrt{3})}{2} = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_{A'_1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -i\sqrt{3}$

$z_{A_2} = \frac{z_{A_1} + z_{A'_1}}{2} = \frac{\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - i\sqrt{3}}{2} = \frac{3 - 3i\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4} - \frac{3i\sqrt{3}}{4}$

$z_{A'_2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) z_{A_2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{4} - \frac{3i\sqrt{3}}{4}\right)$

$z_{A'_2} = -\frac{3}{4} - \frac{i3\sqrt{3}}{4}$

2. a/ Expression de z_{n+1} en fonction de z_n

z_{n+1} est l'affixe du point A_{n+1}, milieu du segment $[A_n A'_n]$.

donc : $z_{n+1} = \frac{z_{A_n} + z_{A'_n}}{2} = \frac{z_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) z_n}{2} = \frac{\left(\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) z_n}{2}$

$z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4}\right) z_n$. On déduit que les affixes z_n forment une suite géométrique de raison $\frac{3}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4}$ et de 1er terme $z_0 = 2$. D'où $z_n = 2\left(\frac{3}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4}\right)^n$.

Montrons que A_{n+1} est l'image de A_n par une similitude directe

Scanné avec CamScanner

$z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4}\right) z_n$ est sous la forme $z' = az + b$ avec $b = 0$

et $a = \frac{3}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4}$ tel que $|a| = \left|\frac{3}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4}\right| = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

donc A_{n+1} est l'image de A_n par une similitude directe de centre O, de rapport $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\theta = arg\left(\frac{3}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

b/ Etablissons les expressions de r_n et θ_n en fonction de n

$\theta_n = arg z_n = arg 2\left(\frac{3}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4}\right)^n = arg\left(\frac{3}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4}\right)^n$

$\theta_n = n arg\left(\frac{3}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4}\right) = -\frac{n\pi}{6}$

$r_n = |z_n| = \left|2\left(\frac{3}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4}\right)^n\right| = 2\left|\frac{3}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4}\right|^n$

$r_n = 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

c/ Limite de r_n lorsque n tend vers $+\infty$

$\lim_{n \to +\infty} r_n = \lim_{n \to +\infty} 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$; car $-1 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$

Interprétation géométrique

Lorsque n devient de plus en plus grand, la distance OA_n se rapproche de plus en plus de 0.

d/ Comparons les modules et arguments de z_n et z_{n+6}

On a : $z_{n+6} = 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+6} e^{-\frac{(n+6)\pi}{6}}$

donc : $\begin{cases} arg z_{n+6} = -\frac{(n+6)\pi}{6} = -\frac{n\pi}{6} - \pi \\ |z_{n+6}| = 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 \times 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \end{cases}$

soit $\begin{cases} \theta_{n+6} = -\frac{n\pi}{6} - \pi = \theta_n - \pi \\ r_{n+6} = \frac{27}{64} r_n \end{cases}$ On en déduit que r_{n+6} s r_n.

3. a/ Etablissons que $A_n A_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} A_{n-1} A_n$

$A_n A_{n+1} = |z_{n+1} - z_n|$

$A_n A_{n+1} = \left|2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} e^{-\frac{(n+1)\pi}{6}} - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-\frac{n\pi}{6}}\right|$

$A_n A_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left|2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-\frac{n\pi}{6}} - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} e^{-\frac{(n-1)\pi}{6}}\right|$

$A_n A_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)|z_n - z_{n-1}| = \frac{\sqrt{3}}{2} A_{n-1} A_n$

On a par itération :

$A_n A_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} A_{n-1} A_n$

$A_{n-1} A_n = \frac{\sqrt{3}}{2} A_{n-2} A_{n-1}$

$A_{n-2} A_{n-1} = \frac{\sqrt{3}}{2} A_{n-3} A_{n-2}$

$A_1 A_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} A_1 A_0$

En multipliant membre à membre et en simplifiant, on obtient :

$A_n A_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n A_1 A_0$

Or $A_1 A_0 = \left|\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\right| = 1$, donc $A_n A_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

b/ Déterminons d_n a

$d_n = A_0 A_1 \ldots\ldots\ldots A_n A_{n+1}$

$d_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \cdots + A_n A_{n+1}$

$d_n = 1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

$d_n = \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2 - \sqrt{3}}\left[1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\right]$

$d_n = 2(2 + \sqrt{3})\left[1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\right]$

Scanné avec CamScanner

$$\lim_{n\to+\infty} d_n = \lim_{n\to+\infty} 2(2+\sqrt{3})\left[1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$\lim_{n\to+\infty} d_n = 2(2+\sqrt{3})$, car $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} = 0$

Corrigé 38

1. Vérifions que si $\theta \in \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$, alors f_θ est constante

$f_{-\frac{\pi}{2}}(z) = \frac{1+ze^{-i\frac{\pi}{2}}}{e^{-i\frac{\pi}{2}}-z} = \frac{1-iz}{-i-z} = \frac{i(-i-z)}{-i-z} = i$ et

$f_{\frac{\pi}{2}}(z) = \frac{1+ze^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}-z} = \frac{1+iz}{i-z} = \frac{-i(i-z)}{i-z} = -i$, d'où f_θ est constante pour $\theta \in \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$.

a/ Montrons que pour tous nombres complexes z et z' de $\mathbb{C}\setminus\{-1;1\}$: $f_0(z) = z'$ si et seulement si $z = -f_0(-z')$

Pour $\theta = 0$, $f_0(z) = \frac{1+z}{1-z}$

$f_0(z) = z' \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} = z'$

$\Leftrightarrow 1+z = z' - zz'$

$\Leftrightarrow z(1+z') = -1+z'$

$\Leftrightarrow z = \frac{-1+z'}{1+z'}$

$\Leftrightarrow z = -\frac{1+(-z')}{1-(-z')}$

$\Leftrightarrow -f_0(-z')$

b/ Montrons que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$, $f_0(e^{i\alpha}) = \frac{i}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

$f_0(e^{i\alpha}) = \frac{1+e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}} = \frac{\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}+e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}}{\left(e^{-i\frac{\alpha}{2}}-e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}}{-2i\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{-i\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{i}{\tan\frac{\alpha}{2}}$

c/ Déterminons les racines carrées de $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

$u^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc $u = e^{i\frac{\pi}{8}}$ ou $u = -e^{i\frac{\pi}{8}} = e^{i\frac{9\pi}{8}}$

d/ Résolvons (E) : $(1+z)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(1-z)^2$

(E) $\Leftrightarrow \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \Leftrightarrow \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = u^2 \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} = e^{i\frac{\pi}{8}}$ ou $\frac{1+z}{1-z} = e^{i\frac{9\pi}{8}} \Leftrightarrow f_0(z) = e^{i\frac{\pi}{8}}$ ou $f_0(z) = e^{i\frac{9\pi}{8}}$ *(d'après 2.c)*

$\Leftrightarrow z = -f_0\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)$ ou $z = -f_0\left(e^{i\frac{9\pi}{8}}\right)$

$\Leftrightarrow z = -\frac{i}{\tan\frac{\pi}{16}}$ ou $z = -\frac{i}{\tan\frac{9\pi}{16}} = \frac{i}{\tan\frac{\pi}{16}}$ d'après 2.b

$S = \left\{-\frac{i}{\tan\frac{\pi}{16}}; \frac{i}{\tan\frac{\pi}{16}}\right\}$

3. a/ On a : $f_\theta(z) = \frac{1+ze^{i\theta}}{e^{i\theta}-z} = \frac{e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}+z\right)}{e^{i\theta}-z}$, donc

$z_{M'} - z_O = -e^{i\theta}\frac{z-(-e^{-i\theta})}{z-e^{i\theta}} \Rightarrow arg(z_{M'}-z_O) \equiv arg\left(=-e^{i\theta}\frac{z-(-e^{-i\theta})}{z-e^{i\theta}}\right)[2\pi]$

$\Rightarrow (\vec{u},\overrightarrow{OM'}) \equiv \theta+\pi+arg\left(\frac{z_M-z_B}{z_M-z_A}\right)[2\pi]$, $M \neq A$ et $M \neq B$

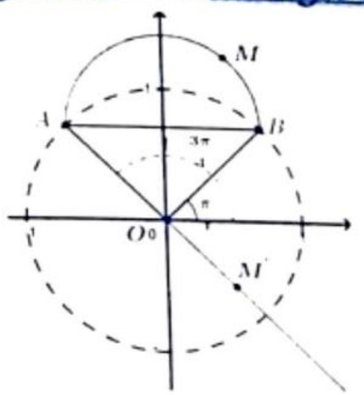
$\Rightarrow (\vec{u},\overrightarrow{OM'}) \equiv \theta+\pi+(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})[2\pi]$, $M \neq A$ et $M \neq B$

b/ Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, $z_A = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_B = -e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Si M' décrit la demi-droite d'équation : $\begin{cases} y = -x \\ x > 0 \end{cases}$, alors $(\vec{u},\overrightarrow{OM'}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ et d'après ce qui précède : $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \equiv -\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}-\pi[2\pi] \equiv -\frac{3\pi}{2}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et par suite M appartient au demi-cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B.

"Crains surtout le jugement de ceux qui te jugent au nom de Celui qui a dit : "ne jugez point" Maurice Clavelin

Scanné avec CamScanner



Corrigé 39

$A(i)$, $B(-i)$ et $z' = \frac{iz+1}{z+i}$.

I. 1. a/ Montrons que A, N et M' sont alignés

$\frac{z_{\overrightarrow{AM'}}}{z_{\overrightarrow{AN}}} = \frac{z'-i}{\bar{z}-i} = \frac{\frac{iz+1}{z+i}-i}{\bar{z}-i} = \frac{2}{(\bar{z}-i)(z+i)} = \frac{2}{(z+i)(\overline{z+i})} = \frac{2}{|z+i|^2}$

Comme $\frac{2}{|z+i|^2} \in \mathbb{R}$, alors $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires. D'où les points A, N et M' sont alignés.

b/ Montrons que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})[2\pi]$

$z' = \frac{iz+1}{z+i} = i\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$ et

$(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \equiv arg(z')[2\pi] \equiv arg(i) + arg\left(\frac{z-i}{z+i}\right)[2\pi]$

$(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \frac{\pi}{2} + arg\left(\frac{z_M - z_A}{z_M - z_B}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})[2\pi]$

c/ Déduisons-en que : z' est un réel non nul si, et seulement si M appartient au cercle $\mathcal{C}$ privé de A et B.

z' est un réel non nul $\Leftrightarrow \begin{cases} arg z' = k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ z' \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ z \neq i \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = -\frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ M \neq A \end{cases}$

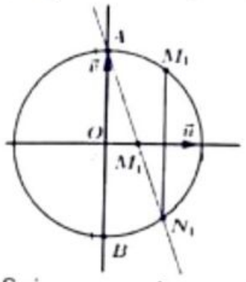
$\Leftrightarrow M \in \mathcal{C} \setminus \{A; B\}$

2. Déduisons des questions précédentes une construction de M_1'

Soit $M_1(z_1) \in \mathcal{C} \setminus \{A; B\}$ et $M_1'(z_1') = f(M_1)$

D'après 1.c/ on déduit que z_1' est réel : $M_1' \in (O, \vec{u})$.

D'après 1.a/ $M_1' \in (AN_1)$ avec $N_1 = S_{(O,\vec{u})}(M)$.



D'où M_1' est le point d'intersection de l'axe $(O, \vec{u})$ et de la droite (AN_1).

II. (E) : $\left(\frac{iz+1}{z+i}\right)^3 = 1, z \in \mathbb{C}$

1. a/ Montrons que si z est solution de (E) alors $M(z)$ appartient à la médiatrice de $[AB]$

Soit z une solution de (E) et M le point-image de z, alors on a

$\left(\frac{iz+1}{z+i}\right)^3 = 1 \Rightarrow \left|\left(\frac{iz+1}{z+i}\right)^3\right| = 1$

$\Leftrightarrow \left|\frac{iz+1}{z+i}\right|^3 = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{iz+1}{z+i}\right| = 1 \Leftrightarrow |iz + 1| = |z + i| \Leftrightarrow |i(z-i)| = |z + i| \Leftrightarrow |i||z - i| = |z + i|$

$\Leftrightarrow |z - i| = |z + i| \Leftrightarrow MA = MB$

$\Leftrightarrow M(z)$ appartient à la médiatrice de $[AB]$.

b/ Déduisons que si z est solution de (E) alors z est réel

Soit z une solution de l'équation (E) et M le point-image de z, alors $M(z)$ appartient à la médiatrice de $[AB]$, donc $M(z) \in (O, \vec{u})$.

2. a/ Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Montrons que $\frac{itan\alpha + 1}{tan\alpha + i} = e^{i\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$

Scanné avec CamScanner

$\frac{itan\alpha+1}{tan\alpha+i} = \frac{i\left(\frac{sin\alpha}{cos\alpha}\right)+1}{\frac{sin\alpha}{cos\alpha}+i} = \frac{isin\alpha+cos\alpha}{sin\alpha+icos\alpha} = \frac{cos\alpha+isin\alpha}{i(cos\alpha-sin\alpha)} = \frac{e^{i\alpha}}{ie^{-i\alpha}}$, donc

$\frac{itan\alpha+1}{tan\alpha+i} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}} = e^{i\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}$

b/ Déduisons les valeurs de $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tels que $tan\alpha$ soit une solution de l'équation (E).

$tan\alpha$ est une solution de l'équation (E) et $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$\Leftrightarrow \left(\frac{itan\alpha+1}{tan\alpha+i}\right)^3 = 1$ et $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$\Leftrightarrow \left(e^{i\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}\right)^3 = 1$ et $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$\Leftrightarrow e^{i\left(6\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)} = 1$ et $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$\Leftrightarrow 6\alpha - \frac{3\pi}{2} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ ou $\alpha = \frac{-\pi}{12}$ ou $\alpha = \frac{-5\pi}{12}$

Corrigé 40

$(E_n) : (iz)^n = (z+2i)^n$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. a/ Déterminons les solutions z_1 et z_2 de l'équation (E_2)

$(E_2) : (iz)^2 = (z+2i)^2$

$(E_2) \Leftrightarrow -z^2 = z^2 + 4iz - 4$

$\Leftrightarrow -2z^2 - 4iz + 4 = 0$

$\Leftrightarrow z^2 + 2iz - 2 = 0$

$\Delta = -4 + 8 = 4$

$z_1 = \frac{-2i-2}{2} = -1 - i$ et $z_2 = \frac{-2i+2}{2} = -1 + i$

$z_1 = \sqrt{2}\left(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right)$ et $z_2 = \sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}\right)$

$S = \left\{\sqrt{2}\left(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right); \sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}\right)\right\}$

b/ Montrons que : $\forall p \in \mathbb{N}, (u)^p + (\overline{u})^p = 2cos\left(\frac{p\pi}{4}\right)$

$u = -\frac{\sqrt{2}}{2}z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = -e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ soit $u = cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}$. On a alors :

$(u)^p + (\overline{u})^p = e^{i\frac{p\pi}{4}} + e^{-i\frac{p\pi}{4}} = 2cos\left(\frac{p\pi}{4}\right)$, car $z + \overline{z} = 2Re(z)$

c/ $f(z) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p z^p cos\left(\frac{p\pi}{4}\right)$.

Montrons que $f(z) = \frac{1}{2}[(1+uz)^n + (1+\overline{u}z)^n]$

$\frac{1}{2}[(1+uz)^n + (1+\overline{u}z)^n] = \frac{1}{2}\left[\sum_{p=0}^{n} C_n^p (uz)^p + \sum_{p=0}^{n} C_n^p (\overline{u}z)^p\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\sum_{p=0}^{n}\left(C_n^p (uz)^p + C_n^p (\overline{u}z)^p\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\sum_{p=0}^{n} C_n^p z^p \left(u^p + \overline{u}^p\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\sum_{p=0}^{n} C_n^p z^p \left(2cos\left(\frac{p\pi}{4}\right)\right)\right]$, car $(u)^p + (\overline{u})^p = 2cos\left(\frac{p\pi}{4}\right)$

$\frac{1}{2}[(1+uz)^n + (1+\overline{u}z)^n] = \left[\sum_{p=0}^{n} C_n^p z^p \left(cos\left(\frac{p\pi}{4}\right)\right)\right]$

D'où : $f(z) = \frac{1}{2}[(1+uz)^n + (1+\overline{u}z)^n]$

d/ Résolvons, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 0$

$f(z) = 0 \Leftrightarrow (1+uz)^n + (1+\overline{u}z)^n = 0$

$\Leftrightarrow (1+uz)^n = -(1+\overline{u}z)^n$

$\Leftrightarrow \frac{(1+uz)^n}{(1+\overline{u}z)^n} = -1$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1+uz}{1+\overline{u}z}\right)^n = -1$

$\Leftrightarrow Z^n = -1$, où $Z = \frac{1+uz}{1+\overline{u}z}$

Scanné avec CamScanner

$\Leftrightarrow Z_k = e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{n}\right)}, 0 \leq k \leq n-1$.

Or $Z = \frac{1+uz}{1+\bar{u}z} \Leftrightarrow Z + \bar{u}zZ = 1 + uz$

$\Leftrightarrow (\bar{u}Z - u)z = 1 - Z$

$\Leftrightarrow z = \frac{1-Z}{\bar{u}Z-u}$

$\Leftrightarrow z = \frac{Z-1}{u-\bar{u}Z}$

D'où : $z_k = \frac{e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{n}\right)} - 1}{u - \bar{u}e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{n}\right)}}, 0 \leq k \leq n-1$

2. a/ Montrons que si z est solution de (E_n), alors OM = AM

Supposons que z est solution de (E_n)

z est solution de $(E_n) \Leftrightarrow (iz)^n = (z+2i)^n$

$\Rightarrow |iz|^n = |z+2i|^n$

$\Leftrightarrow |i|^n|z|^n = |z+2i|^n$

$\Leftrightarrow |z|^n = |z+2i|^n$

$\Leftrightarrow |z| = |z-(-2i)|$

$\Leftrightarrow OM = AM$, car $z_A = 2i$ et $z_M = z$

b/ Déduisons que toute solution de (E_n) peut s'écrire sous la forme $a - i$ où a est un réel

D'après 2.a/ on a :

z est solution de $(E_n) \Rightarrow M \in (\Delta)$, où (Δ) est la médiatrice de $[OA]$.

$\Rightarrow Im(z) = -1$, car $(\Delta): y = -1$

$\Rightarrow z = a - i, a \in \mathbb{R}$

3. a/ Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E_n)

$(iz)^n = (z+2i)^n \Leftrightarrow \frac{(iz)^n}{(z+2i)^n} = 1$

$\Leftrightarrow \left(\frac{iz}{z+2i}\right)^n = 1$

$\Leftrightarrow Y^n = 1$, où $Y = \frac{iz}{z+2i} \left(\Leftrightarrow z = \frac{2iY}{i-Y}\right)$

$\Leftrightarrow Y_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, 0 \leq k \leq n-1$

Or: $Y = \frac{iz}{z+2i} \Leftrightarrow z(Y-i) = -2iY$

$\Leftrightarrow z = \frac{2iY}{i-Y} = \frac{2Y}{1+iY}$

D'où : $z_k = \frac{2e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1+ie^{\frac{2ik\pi}{n}}} = \frac{2e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1+e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}+\frac{\pi}{2}\right)}}, 0 \leq k \leq n-1$ (*)

b/ Montrons que les solutions de (E_n) peuvent s'écrire sous la forme :

$z_k = -i - \frac{1}{tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{n}\right)}$ où $k \in \{0; 1; \ldots, n-1\}$

$(*) \Leftrightarrow z_k = \frac{2e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{e^{i\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{-i\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{i\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{4}\right)}\right)} = \frac{2e^{\left|\frac{2ik\pi}{n}-\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{4}\right)\right|}}{2cos\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{4}\right)}$

$\Leftrightarrow z_k = \frac{e^{\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{4}\right)}}{cos\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{cos\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{4}\right)+isin\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{4}\right)}{cos\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{4}\right)}$

Or : $\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4} = \left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2}$ et comme $cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -sinx$, alors $cos\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4}\right) = -sin\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{4}\right)$.

D'où : $z_k = \frac{cos\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{4}\right)+isin\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{4}\right)}{-sin\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{4}\right)}$

$z_k = -i - \frac{cos\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{4}\right)}{sin\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{4}\right)} = -i - \frac{1}{tan\left(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{4}\right)}, k \in \{0; 1; \ldots, n-1\}$

Scanné avec CamScanner

INTÉGRATION

RÉSUMÉ DE COURS

Intégration des fonctions continues

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle K, a et b deux éléments de K.

On appelle intégrale de a à b de f le nombre réel $F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f sur K. On note : $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$

Exemples

$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$; $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos(t)dt = [sint]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Propriété1

Soit f une fonction continue sur un intervalle K, a et b deux éléments de K. On a :

$\int_a^a f(x)dx = 0$; $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Propriété 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle K et a un élément de K.

La fonction F : $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$, de K vers $\mathbb{R}$, est la primitive de f sur K qui s'annule en a.

Conséquence

Soit f une fonction continue sur un intervalle K et a un élément de K.

Alors la fonction $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur K et $F'(x) = f(x)$ pour tout x de K.

Propriété 3

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle K, $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative, a et b deux éléments de K $(a < b)$.

$\int_a^b f(t)dt$ est l'aire (en unités d'aire) du domaine D délimité par $(\mathcal{C})$, (OI) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Remarques

- L'aire de D (en unités d'aire) peut être noté $\mathcal{A}(D)$.
- Le domaine précédent est aussi l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tels que $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

Exemple

L'unité graphique est 2cm sur chaque axe.

Calculer l'aire, en cm², de l'ensemble D des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tels que : $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq y \leq cosx$

La fonction cosinus est continue et positive sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. On a : $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} costdt = [sint]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$. L'unité d'aire est égale à 4cm² ;donc l'aire de D est égale à 8cm².

Propriétés algébriques

Propriété1 (relation de Chasles)

Soit f une fonction continue sur un intervalle K, a, b et c trois éléments de K. On a : $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$

Propriété 2 (linéarité de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle K, α un nombre réel, a et b deux éléments de K. On a :

- $\int_a^b \alpha f(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt$
- $\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$

Scanné avec CamScanner

Remarque

En particulier, on a : $\int_a^b [-f(t)]dt = -\int_a^b f(t)dt$

Exemple

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+cos2t}{2} dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2t dt$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2t dt = \frac{1}{2}[t]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}sin2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2 t dt = \frac{\pi+2}{8}$

Propriétés de comparaison

Propriété3 (signe de l'intégrale)

Soit f une fonction continue sur un intervalle K, a et b deux éléments de K $(a \leq b)$.Si f est positive sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

Propriété4

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle K, a et b deux éléments de K $(a \leq b)$. Si $f \leq g$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

Remarque

Soit f une fonction continue sur un intervalle K, a et b deux éléments de K $(a \leq b)$. On a : $-|f| \leq f \leq |f|$ sur $[a;b]$; on en déduit que : $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.

Inégalité de la moyenne

Propriété1

Soit f une fonction continue sur un intervalle K, a et b deux éléments de K $(a \leq b)$. Si m et M sont deux nombres réels tels que pour tout t élément de $[a;b]$, $m \leq f(t) \leq M$, alors :

$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$.

(La propriété ci-dessus est appelée inégalité de la moyenne)

Exemple

Démontrer que $\frac{1}{8} \leq \int_2^4 \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{2}$

La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ est décroissante sur $[2;4]$; on a donc :$\forall t \in [2;4]$, $\frac{1}{16} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{4}$. On en déduit que : $\frac{4-2}{16} \leq \int_2^4 \frac{dt}{t^2} \leq \frac{4-2}{4}$ c'est-à-dire $\frac{1}{8} \leq \int_2^4 \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{2}$.

Propriété 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle K, a et b deux éléments de K. Si M est un nombre réel tel que pour tout t élément de K, $|f(t)| \leq M, alors$ $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq M|b-a|$.

Valeur moyenne d'une fonction

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ $(a \neq b)$.
On appelle **valeur moyenne de f sur $[a;b]$** le nombre réel μ tel que : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$.

Exemple

Calculer la valeur moyenne de la fonction $x \longmapsto x^2$ sur $[1;3]$.

On a : $\mu = \frac{1}{3-1}\int_1^3 x^2 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{1}{2}\frac{27-1}{3} = \frac{13}{3}$

Techniques de calcul d'une intégrale
Intégration par parties

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle K telles que les dérivées u' et v' sont continues sur K, a et b deux éléments de K. On a :

$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$

En effet : $(uv)' = u'v + uv' \Longrightarrow \int_a^b (uv)'(t)dt = \int_a^b (uv')(t)dt +$ $\int_a^b (u'v)(t)dt$ soit

Scanné avec CamScanner

$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$

Exemples

Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration sur par parties :

I=$\int_2^{-1} xe^x dx$; J=$\int_1^e xlnxdx$; K=$\int_0^{\frac{\pi}{2}} tsintdt$.

Intégration de fonctions paires, impaires

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle K symétrique par rapport à 0.

Pour tout a élément de K, on a :

- si f **est paire**, $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$
- si f **est impaire**, $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$

« La chance, c'est la faculté de s'adapter instantanément à l'imprévu. »
Alfred Capus

EXERCICES

Exercice 01

On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2-1}{2x-1}$.

1/ Déterminez les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{2x-1}$.

2/ Déduisez-en le calcul des intégrales suivantes :

$I = \int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1} dx$ et $J = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{cos^3 x}{1-2sinx} dx$.

Exercice 02

On se propose de trouver sans les calculer séparément, les valeurs des trois intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4 x dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 x dx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sin^2 x cos^2 x dx$.

1/ Calculez $I - J$ et $I + J + K$.

2/ Exprimez $cos4x$ en fonction de $cosx$ et de $sinx$. Déduisez-en la valeur de $I + J - 3K$.

3/ Trouvez à partir des questions précédentes, les valeurs de I, J et K.

Exercice 03

On considère les intégrales $A = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3} dx$ et $B = \int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3} dx$

1/ Calculez A.

2/ Calculez $A + B$.

3/ Déduisez-en la valeur de B.

Exercice 04

On pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{1+2sinx} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin2x}{1+2sinx} dx$.

Soit $K = I + J$.

Scanné avec CamScanner

1/ Calculez K.
2/ Calculez I.
3/ Déduisez-en J.

Exercice 05

1/ Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{e^{x-1}}$ et soit H la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $H(x) = \int_1^x f(t)dt$.

a. Justifiez que f et H sont bien définies sur $[1; +\infty[$.

b. Quelle relation existe-t-il entre H et f ?

c. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. Interprétez en termes d'aire le nombre $H(3)$.

2/ On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre $H(3)$.

a. Montrez que pour tout réel $x > 0$, $\frac{x}{e^x-1} = x\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$.

b. Déduisez-en que $\int_1^3 f(x)dx = 3ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - ln\left(1-\frac{1}{e}\right) - \int_1^3 ln(1-e^{-x})\,dx$

c. Montrez que si $1 \leq x \leq 3$, alors $ln\left(1-\frac{1}{e}\right) \leq ln(1-e^{-x}) \leq ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$.

d. Déduisez-en un encadrement de $\int_1^3 ln(1-e^{-x})dx$, puis de $\int_1^3 f(x)dx$.

Exercice 06

On considère l'intégrale : $I = \int_0^1 e^x cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)dx$

Calculez I à l'aide de deux intégrations par parties successives.

Exercice 07

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ par :

$g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$.

a. Déterminez les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$: $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$.

b. Trouvez une primitive G de g sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$. Trouvez une primitive F de f sur $]1 ; +\infty[$.

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculez : $I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} lnxdx$. On donnera le résultat sous la forme $pln2 + qln3$ avec p et q rationnels.

Exercice 08

1/ Démontrez la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation du produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur $[a; b]$.

2/ Soient les deux intégrales définies par $I = \int_0^\pi e^x sinxdx$ et $J = \int_0^\pi e^x cosxdx$.

a. Démontrez que $I = -J$ et que $I = J + e^\pi + 1$.

b. Déduisez-en les valeurs exactes de I et J.

Exercice 09

Soient les deux intégrales définies par : $I = \int_0^\pi e^x cos^2 xdx$ et $J = \int_0^\pi e^x sin^2 xdx$.

1/ Calculez $I + J$.

2/ a. Montrez que $J - I = \int_\pi^0 e^x cosaxdx$ où a est un réel à déterminer.

b. A l'aide d'une double intégration par parties, démontrez que $J - I = \frac{1}{5}(1-e^\pi)$.

3. Déterminez les valeurs exactes de I et J.

Scanné avec CamScanner

Exercice 10

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^2 x}\,dx$.

1. Calculez I_0, I_1 et I_2. (Pour I_0, on pourra utiliser le changement de variable : $t = \frac{\pi}{2} - x$.)

2. Démontrez que la suite (I_n) est positive et décroissante. Est-elle convergente ?

3. a. Démontrez que pour tout x élément de $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ et tout entier naturel n non nul, on a : $0 \le \frac{\cos^n x}{\sin^2 x} \le 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

b. Déduisez-en la limite de la suite (I_n).

Exercice 11

On considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 (x+1)^n e^{-x}dx$ où n est un entier naturel.

1/ Montrez que I_n existe et est strictement positive.

2/ Calculez I_0.

3/ A l'aide d'une intégration par parties, démontrez que $I_n = 1 - \frac{2^n}{e} + nI_{n-1}$ pour $n \ge 1$.

4/ Déduisez-en les valeurs de I_1, I_2 et I_3.

5/ En utilisant les résultats de la question précédente, calculez $I_n = \int_0^1 (3x^3 + 7x^2 + 9x + 5)e^{-x}dx$.

Exercice 12

1. Pour x différent de 0 et de -1, déterminez les réels a et b tels que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.

2. Soit f la fonction numérique définie par :

$f(x) = \frac{1}{x} + ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

a. Déterminez l'ensemble de définition de f.

b. b_1/ Justifiez l'existence de l'intégrale $\int_1^2 ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx$.

b_2/ Calculez $\int_1^2 ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx$ à l'aide d'une intégration par parties puis déduisez-en :

$I = \int_1^2 f(x)dx$.

c. Soit m un réel positif non nul et x un élément de l'ensemble $[m; m+1]$. Montrez que :

c_1/ $\frac{1}{m+1} \le \int_m^{m+1} \frac{dx}{x} \le \frac{1}{m}$.

c_2/ $\int_m^{m+1} \frac{dx}{x} = \frac{1}{m} - f(m)$.

c_3/ $0 \le f(m) \le \frac{1}{m(m+1)}$.

d. On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$S_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)}$.

A l'aide de la question 1., simplifiez S_n, puis montrez que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel à préciser.

e. Déduisez de la question 2.c_3/ que :

$0 \le f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \le S_n$ et calculez $lim \sum_{i=n}^{2n} f(i)$.

Exercice 13

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_0^1 (1-u)^n \sqrt{u}du$.

1. a/ Démontrez que : $\forall n \in IN,\ I_n \ge 0$.

b/ Démontrez que : $\forall n \in IN,\ I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1-u)^n u^{3/2}du$ et déduisez-en le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in IN^*}$.

2. Montrez que la suite $(I_n)_{n\in IN}$ est convergente.

3. a/ Vérifiez que la dérivée de la fonction : $u \mapsto u^{3/2}$ sur $[0;1]$ est la fonction $u \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{u}$.

b/ Calculez I_0 et I_1.

c/En utilisant la question 1.b/, démontrez à l'aide d'une intégration par parties, que $I_n = \frac{2n+5}{2n+2} I_{n+1}$.

4. a/ Déduisez-en l'expression de I_n en fonction de I_0 et de n.

b/ Calculez I_4.

Scanné avec CamScanner

Exercice 14

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_0^{\pi} sin^n x dx$.

1. Calculez I_0 et I_1.

2. Sans calculer I_n, démontrez que la suite (I_n) est décroissante.

3. A l'aide d'une intégration par parties, démontrez que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

4. a/ Calculez I_9, I_{10} et I_{11}.

b/ Déduisez-en que : $\frac{2^{17}}{3^4\times7^2\times11} \leq \pi \leq \frac{2^{16}}{3^4\times5\times7^2}$.

Exercice 15

Le but de l'exercice : approcher $ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0; +\infty[$.

Soit a dans l'intervalle $[0; +\infty[$; on note $I_0(a) = \int_0^a \frac{dt}{1+t}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}} dt$.

1/ Calculez $I_0(a)$ en fonction de a.

2/ A l'aide d'une intégration par parties, exprimez $I_1(a)$ en fonction de a.

3/ A l'aide d'une intégration par parties, démontrez que $I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1} + I_k(a)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

4/ Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$. Démontrez en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$ que $I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$.

5/ Soit $J(a) = \int_0^a (t-a)^5 dt$. Calculez J(a).

6/ a. Démontrez que pour tout $t \in [0; a]$, $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5$.

b. Démontrez que pour tout $a \in [0; +\infty[$, $J(a) \leq I_5(a) \leq 0$.

7/ Déduisez-en que pour tout $a \in [0; +\infty[$, $|\ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{a^6}{6}$.

8/ Déterminez, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.

Exercice 16

1/ Calculez $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$ et $B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$.

2/ Déterminez les réels a, b et c tels que pour tout $t > 0$, $\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2}$.

Déduisez-en la valeur de $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$.

3/ On pose $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3} dx$.

Exprimez J en fonction de I et déduisez-en la valeur de J.

Exercice 17

$(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x dx$.

1. Calculez I_1 et I_2.

2. En utilisant la technique d'intégration par parties, démontrez que $nI_n = (n-1)I_{n-2}$. Déduisez-en I_3, I_4, I_5 et I_6.

3. Reprendre l'exercice en considérant la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n x dx$.

Exercice 18

On considère les intégrales définies : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sin^n x}{cosx} dx$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{cosx} dx$.

1. Justifiez l'existence de la suite (I_n).

2. Calculez l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{3}} sin^n x cosx dx$. Déduisez-en $I_{n+2} - I_n$ en fonction de n.

Scanné avec CamScanner

3. Calculez I_1. Déduisez-en I_3 et I_5.

4. a/ Soit f l'application qui à $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ associe $f(x) = ln\left[tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$.

Montrez que f est une primitive de la fonction g définie sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ par $x \mapsto g(x) = \frac{1}{cosx}$.

b/ Déduisez-en I_0, puis I_2 et I_4.

Exercice 19

Pour tout entier naturel n, on définit : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x dx$.

1. Calculez I_0 et J_0.

2. En intégrant par parties, I_n puis J_n, montrez que

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

3. Déduisez-en les expressions de I_n et J_n.

4. Déterminez la limite de I_n et de J_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 20

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul. Pour tout n, on pose : $I_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^e (\ln t)^n dt$.

1. a. Montrez que $I_1 = -1$.

b. Démontrez que pour tout n, on a : $I_{n+1} = I_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e$.

c. Prouvez alors que, pour tout n, on a : $I_n = \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) e - 1$.

2. a. Démontrez que : $0 \leq \int_1^e (\ln t)^n dt \leq e - 1$.

b. Déduisez-en que : $|I_n| \leq \frac{e-1}{n!}$.

c. Que peut-on déduire pour la suite (I_n)?

3. Pour tout n, on pose : $S_n = \frac{1}{0!} + \frac{(-1)}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$

Déduire des questions précédentes la limite de la suite (S_n).

Exercice 21

On pose $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$ et pour tout $\in \mathbb{N}^*$ $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(x) dx$.

1. Calculez I_0, I_1 et I_2.

2. a/ Montrez que pour tout entier n, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

b/ Déduisez-en I_3, I_4, I_5 et I_6.

c/ Montrez que pour tout entier naturel n, $0 < I_{n+1} \leq I_n$.

3. a/ Montrez que pour tout entier $n \geq 0$, $1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}}$.

b/ Montrez alors que $\lim_{n \to +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} = 1$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = (n+1) I_n I_{n+1}$.

a/ Montrez que la suite (u_n) est constante et que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{\pi}{2}$.

b/ Montrez que $\frac{\pi}{2(n+1)} \leq I_n^2 \leq \frac{\pi}{2n}$. Donnez un encadrement de I_{1000}.

Exercice 22

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par : $U_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ et, pour $n > 0$, $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

1/ a. Soit f la fonction numérique définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Calculez la dérivée f' de f. Déduisez U_0.

b. Calculez U_1.

2/ a. Prouvez que la suite (U_n) est décroissante. Déduisez-en que la suite (U_n) est convergente.

b. Montrez que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$ et pour tout $n \geq 1$, on a : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$ (1)

Scanné avec CamScanner

Déterminez alors la limite de (U_n).

3/ Pour tout $n \geq 3$, on pose $I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}dx$.

a. Vérifiez que pour tout $n \geq 3$, on a : $U_n + U_{n-2} = I_n$.

Par une intégration par parties portant sur I_n, montrez que pour tout entier $n \geq 3$, on a : $nU_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2}$.

b. Déduisez-en que pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$(2n-1)U_n \leq \sqrt{2}$. **(2)**

c. A l'aide des inégalités (1) et (2), montrez que la suite (nU_n) est convergente et calculez sa limite.

Exercice 23

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par : $x_n = \int_0^1 t^n costdt$ et $y_n = \int_0^1 t^n sintdt$

1/ a. Montrez que la suite (x_n) est à termes positifs.

b. Etudiez les variations de la suite (x_n).

c. Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite (x_n).

2/ a. Démontrez que pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b. Déduisez-en la limite de la suite (x_n).

3/ a. A l'aide d'une intégration par parties, démontrez que, pour tout entier naturel n non nul,

$x_{n+1} = -(n+1)y_n + sin1$.

b. Déduisez-en que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$.

4/ On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)x_n - cos1$. Déterminez $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} ny_n$.

Exercice 24

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

1/ Montrez que la fonction $f: t \mapsto (2-t)e^t$ est une primitive de $g: t \mapsto (1-t)e^t$ sur $[0; 1]$. Déduisez-en la valeur de u_1.

2/ Montrez à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul, $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$ (R)

Partie B

1/ On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (u_n) en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus. (Voir tableau ci-dessous).

Quelle conjecture peût-on faire sur la convergence de la suite (u_n) quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

Partie C

Dans cette partie on se propose d'étudier la suite (u_n) à partir de la définition : pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$

1/ Montrez que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq 0$.

2/ a. Montrez que pour tout réel t de l'intervalle $[0; 1]$ et pour tout entier naturel non nul n

$(1-t)^n e^t \leq e(1-t)^n$

b. Déduisez-en que pour tout n non nul, $u_n \leq \frac{e}{n+1}$.

3/ Déterminez la limite de la suite (u_n).

Partie D

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (u_n).

$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$.

« Je préfère risquer en osant, que regretter de ne pas avoir su saisir l'occasion qui se présentait. »
Nicolas Sarkozy

Scanné avec CamScanner

Tableau des valeurs de u_n

Valeurs de n	Valeurs de u_n affichées par la 1ère calculatrice	Valeurs de u_n affichées par la 2ème calculatrice
1	7,188182845E-01	7,1828182846E-01
2	4,3656365691E-01	4,3656365692E-01
3	3,09690907075E-01	3,0969097076E-01
4	2,3876388301E-01	2,3876388304E-01
5	1,9381941508E-01	1,9381941520E-01
6	1,6291649051E-01	1,6291649120E-01
7	1,4041543358E-01	1,4041543840E-01
8	1,2332346869E-01	1,2332350720E-01
9	1,0991121828E-01	1,0991156480E-01
10	9,9112182825E-02	9,115648000E-02
11	9,0234011080E-02	9,0272128000E-02
12	8,2808132963E-02	8,3265536000E-02
13	7,6505728522E-02	8,2451968000E-02
14	7,1080199309E-02	1,5432755200E-01
15	6,6202989636E-02	1,3149132800E+00
16	5,9247834186E-02	2,0038612480E+01
17	7,2131811612E-03	3,3965641216E+02
18	-8,7016273909E-01	6,1128154189E+03
19	-1,7533092042E+01	1,1614249296E+05
20	-3,5166184085E+02	2,3228488592E+06
21	-7,3858986580E+03	4,8779825043E+07
22	-1,6249077047E+05	1,0731561499E+09
23	-3,7372887209E+06	2,4682591448E+10
24	-8,9694930302E+07	5,9238219474E+11
25	-2,2423732585E+09	1,4809554869E+13

Etant donné un réel a, on considère la suite (v_n) définie par :
$v_1 = a$ et pour tout entier naturel non nul n,
$v_{n+1} = (n+1)v_n - 1$

1/ En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$v_n = u_n + (n!)(a + 2 - e)$ où n! désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.

2/ Etudiez le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a. (On rappelle que $\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$)

3/ Déduisez-en une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.

Exercice 25

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel non nul n par : $U_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$.

1. Calculez U_1.

2. a/ Montrez pour tout $x \geq 0$ et tout entier naturel non nul n, $1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$.

b/ Déduisez-en que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $1 - \frac{1}{1+n} \leq U_n \leq 1$.

c/ Déterminez $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $V_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n} dx$.

3. a/ A l'aide d'une intégration par parties, montrez que $V_n = ln2 - \int_0^1 ln(1 + x^n)dx$.

b/ Montrez que pour tout réel $t \geq 0$, $0 \leq \ln(1+t) \leq t$

Déduisez-en que, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq \int_0^1 ln(1 + x^n)dx \leq \frac{1}{1+n}$.

c/ Déterminez alors $\lim_{n\to+\infty} V_n$.

4.a/ Vérifiez que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $V_n + nU_n = n$.

b/ Déduisez-en que $\lim_{n\to+\infty} n(1 - U_n) = ln2$.

Scanné avec CamScanner

Exercice 26

On pose $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} sin3xdx$ et, pour tout nombre n entier naturel non nul, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n sin3xdx$.

1. a. Calculez I_0.
b. En utilisant une intégration par parties, calculer I_1.
2. a. En effectuant deux intégrations par parties successives, déterminez, lorsque $n \geq 1$, I_{n+2} en fonction de I_n.
b. Vérifiez que $I_3 = \frac{\pi^2}{108} - \frac{2}{27}$.
3. Sans calculer l'intégrale I_n.
a. Montrez que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
b. Pour tout nombre n entier naturel non nul, comparez I_n à $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n dx$.
c. Déterminez $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 27

1/ a. Calculez $\int_0^x te^t dt$, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$

b. Soient a une constante réel et u la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^x + a$.

Soit U la primitive de u sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
i/ Exprimez U(x) à l'aide d'une intégrale.
ii/ Déduisez U(x) en fonction de x.
2/ f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = xe^x - 2\int_0^1 f(x)dx \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Calculez $\int_0^1 f(x)dx$.

Exercice 28

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx$.

1/ Calculez I_2.
2/ a. Pour tout entier naturel non nul n et tout réel x de $[1; 2]$, on pose : $f_n(x) = \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}}$. Montrez que pour tout entier naturel $n \geq 2$ et tout réel x de $[1; 2]$, $f'_{n-1}(x) = -(n-1)f_n(x) - f_{n+1}(x)$.
b. Déduisez-en que, pour tout entier naturel $n \geq 2$:
$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$.
c. Calculez I_3.
3/ a. Etablissez que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1 ; 2]$, on a : $0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$.
b. Déduisez-en un encadrement pour I_n puis étudiez la limite éventuelle de la suite (I_n).

Exercice 29

On pose pour tout entier naturel $n \geq 1$, $I_n = \int_0^2 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+4}} dx$.

1/ Calculez I_1.
2/ Montrez que pour tout entier naturel $n \geq 3$,
$I_n = \int_0^2 x^{n-2}\sqrt{x^2+4}dx - 4I_{n-2}$.
3/ Déduisez-en, à l'aide d'une intégration par parties, que $nI_n = 2^n\sqrt{2} - 4(n-1)I_{n-2}$, pour tout entier naturel $n \geq 3$.
Déduisez-en les valeurs de I_3 et I_5.

Exercice 30

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{4e^x}{e^x+1}$.

1/ a/.Démontrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - \frac{4}{e^x+1}$.
b. Montrez que la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé admet deux asymptotes.
c. Tracez la courbe (C) et ses asymptotes.
2/ Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose

Scanné avec CamScanner

$u_n = \int_{lnn}^{ln(n+1)} f(x)dx$.

a. A l'aide de la courbe (C), donnez une interprétation graphique de u_n.

b. Etablissez que pour tout $n \geq 1$, $u_n = 4ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$.

3/ On pose pour tout $n \geq 1$, $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
Donnez une interprétation en termes d'aires de S_n et déduisez de 2/b. une expression simple de S_n.

4/ a. Calculez en unités d'aires, l'aire $A(n)$ du domaine délimité par la courbe (C) et les droites d'équations $y = 4$, $x = 0$ et $x = ln(n + 1)$.

b. Déterminez la limite de $A(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 31

On considère la suite (I_n) définie pour n entier naturel non nul par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$.

Pour tout entier naturel non nul n et tout réel x, on pose $g_n(x) = x^n e^{x^2}$.

1/ a. Démontrez que la fonction G_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $G_1(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g_1.

b. Déduisez-en la valeur de I_1.

c. Pour tout entier naturel non nul n et tout réel x, on pose $h_n(x) = x^n$.
Montrez que pour tout réel x$(h_{n+1} \times G_1)'(x) = g_{n+2}(x) + \frac{n+1}{2} g_n(x)$.

d. Déduisez-en que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, on a : $I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2} I_n$.

e. Calculez I_3 et I_5.

2/ a. Montrez que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n \geq 0$.

b. Montrez que la suite (I_n) est décroissante.

c. Déduisez-en que la suite (I_n) est convergente. On note l sa limite.

d. Déterminez la valeur de l.

Exercice 32

Pour tout réel t et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose :
$G_0(t) = \int_0^t e^x dx$ et $G_n(t) = \int_0^t x^n e^x dx$

1. a/ Démontrez que $G_n(t)$ existe pour tout entier naturel et donnez l'expression de $G_0(t)$ et de $G_1(t)$ en fonction de t.

b/ Démontrez que pour tout $t \geq 0$, on a : $\frac{1}{2}t^2 \leq G_1(t) \leq \frac{1}{2}t^2e^t$

c/ Démontrez que pour tout $t \leq 0$, on a : $\frac{1}{2}t^2e^t \leq G_1(t) \leq \frac{1}{2}t^2$.

d/ Déduisez-en la limite : $\lim_{t \to 0} \frac{te^t - e^t + 1}{t(e^t - 1)}$.

2/ Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose :
$I_n = G_n(1) = \int_0^1 x^n e^x dx$

a/ Montrez, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $G_n(t) = t^n e^t - nG_{n-1}(t)$.
Déduisez-en I_n en fonction de I_{n-1} pour $n \geq 1$.

b/ Montrez que la suite (I_n) est décroissante et positive. Que peut-on en déduire ?

c/ Donnez un encadrement de I_n qui permet de calculer $\lim_{n \to +\infty} I_n$ puis calculez cette limite.

Exercice 33

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f_n(x) = \frac{(1-x)^n}{n!} e^x$ où $n \in IN^*$.

1/ Montrez que si : $0 \leq x \leq 1$, on a $0 \leq f_n(x) \leq \frac{e}{n!}$.

2/ Soit $I_n = \int_{1-x}^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$ pour $0 \leq x \leq 1$.

a. A l'aide d'une intégration par parties, calculez I_1.

Scanné avec CamScanner

b. En intégrant par parties I_{n+1} vérifiez la relation de récurrence : $I_{n+1} = I_n - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{1-x}$.

c. Démontrez alors que pour tout entier n non nul,

$I_n = e - e^{1-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$.

d. En utilisant I/ déterminez $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ puis déduisez-en

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$.

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout entier naturel non nul par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2\times 1!} + \frac{1}{2^2\times 2!} + \cdots + \frac{1}{2^n\times n!}$$

$$v_n = 1 + \frac{1}{3\times 1!} + \frac{1}{3^2\times 2!} + \cdots + \frac{1}{3^n\times n!}$$

Déterminez $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 34

Soit $x \neq -1$ et n un entier naturel.

1. Vérifiez que :

$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n = \frac{(-1)^n x^{n+1} + 1}{x+1}$

2. Déduisez-en que :

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} - \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{x+1}dx$.

3. On pose $J_n = \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{x+1}dx$.

Montrez que pour tout n, $J_n = \frac{(-1)^n}{n+2}\left(\frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(x+1)^2}dx\right)$.

(on pourra faire une intégration par parties.)

4. Montrez que, pour tout $x \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}$:

$0 \leq x^{n+2} \leq 1$ et $0 \leq \frac{x^{n+2}}{(x+1)^2} \leq 1$

5. On pose $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Quelle est la limite de u_n.

6. Déterminez la plus petite valeur n_0 de n pour laquelle u_n est une valeur approchée de $ln2$ à 5×10^{-2} près.

Exercice 35

PARTIE A : Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants : soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$.

- Si $u \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b u(x)dx \geq 0$.
- Pour tous réels α et β, $\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]dx = \alpha\int_a^b u(x)dx + \beta\int_a^b v(x)dx$.

Démontrez que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 , 1] par $f(x) = e^{-x^2}$ et on définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \int_0^1 x^n f(x)dx = \int_0^1 x^n e^{-x^2}dx \end{cases}$$

1. a. Démontrez que, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1], $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq 1$.

b. Déduisez-en que $\frac{1}{e} \leq u_0 \leq 1$.

2. Calculez u_1.

3. a. Démontrez que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n$.

b. Etudiez les variations de la suite (u_n).

c. Déduisez-en que la suite (u_n) est convergente.

4. a. Démontrez que, pour tout entier naturel , $u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b. Déduisez-en la limite de la suite (u_n)

Scanné avec CamScanner

Exercice 36

1. Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \\ U_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

a/ En posant $x = tant$ où $t \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, montrez que $U_0 = \frac{\pi}{4}$.

b/ Montrez que la suite (U_n) est positive et décroissante et déduisez-en qu'elle est convergente.

c/ Montrez que pour tout entier naturel n on a :

$U_{n+1} + U_n = \frac{1}{2n+1}$. Déduisez-en U_1 et U_2.

d/ Donnez un encadrement de U_n qui permet de calculer la limite de U_n puis calculez $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

2. Soit(V_n) la suite définie par :

$\begin{cases} V_0 = \int_0^1 ln(1+x^2)dx \\ V_n = \int_0^1 (2n+1)x^{2n}ln(1+x^2)dx, \ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

a/ En utilisant une intégration par parties, démontrez que pour tout entier naturel $n \geq 0$, on a : $V_n = ln2 - 2U_{n+1}$.

b/ Déduisez-en la valeur exacte de $V_0 = \int_0^1 ln(1+x^2)dx$.

c/ Déduisez de ce qui précède les variations de (V_n) et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

Exercice 37

Pour tout n dans IN, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$ et

$J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$.

1/Quelle est la dérivée de la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$? Calculez I_0.

2/ Calculez I_1.

3/ Montrez que pour tout n dans IN, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Déduisez-en la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Montrez que J_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

4/ Etablissez à l'aide d'une intégration par parties que $I_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{n+1}J_n$.

Quelle est la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 38

On considère les intégrales $I = \int_0^\pi cos^4 x dx$ et $J = \int_0^\pi sin^4 x dx$.

1/ a. Montrez que l'intégrale I peut s'écrire : $I = \int_0^\pi cosx(cosx - cosxsin^2 x)dx$.

b. A l'aide d'une intégration par parties, montrez que $I = \int_0^\pi sin^2 x dx - \frac{1}{3}J$.

c. Montrez de même que $J = \int_0^\pi cos^2 x dx - \frac{1}{3}I$.

2/ a. Montrez que $I + J = \frac{3\pi}{4}$.

b. Montrez que $J - I = 0$.

c. Déduisez-en les intégrales I et J.

Exercice 39

On se propose dans cet exercice de calculer la limite de la suite numérique de terme général $U_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, $n \geq 2$.

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x - lnx$.

1. Dressez le tableau de variation de f.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$; on pose $I(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)dx$.

a/ En utilisant une intégration par parties, calculez $\int_\lambda^1 lnx dx$.

b/ Déduisez-en le calcul de $I(\lambda)$ puis $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0 \\ >}} I(\lambda)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$, on pose : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Scanné avec CamScanner

a/ Montrez que : $\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$, pour $1 \leq k \leq n-1$.

b/ Déduisez-en que : $S_n - \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$ puis que $I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$.

c/ En utilisant 3.b/, montrez que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{2}$.

4. a/ Montrez que : $\sum_{k=1}^{n} ln\left(\frac{k}{n}\right) = ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$ et que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

b/ Déduisez-en que : $S_n = \frac{n^2+n}{2n^2} - lnU_n$.

c/ Déduisez de ce qui précède $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 40 **(uniquement pour C et E)**

Soit (C)l'ensemble des fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\int_{3x}^{x} \frac{f(t)}{t}dt$.

1/ Montrez que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, puis calculez sa fonction dérivée F'.

2/ a. Montrez que si f est une fonction constante, alors F est aussi une fonction constante puis définissez F dans ce cas.

b. Définissez F pour $f: t \mapsto \frac{1}{t}$.

Dans la suite de l'exercice f est la fonction : $t \mapsto cost$.

3/ a. Déterminez le signe de : $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

b. Montrez que pour tout t de $\mathbb{R}_+^*$, $\frac{f(t)}{t} \leq \frac{1}{t}$ et que F est une fonction bornée.

c. Démontrez que pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $sinx \leq x$.

d. Démontrez que pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $F(x) + ln3 = -2\int_{3x}^{x} \frac{sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t}dt$ et que $0 \leq F(x) + ln3 \leq 2x^2$.

Déduisez-en la limite de F à droite en 0.

4/ a. Etablissez, en utilisant la méthode d'intégration par parties que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \left|F(x) - \frac{3sinx - sin3x}{3x}\right| \leq \frac{2}{3x}$ et déduisez-en la limite de F en $+\infty$.

b. Montrez que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F'(x) = \frac{4cosxsin^2x}{x}$.

5/ Soit F_1 la restriction de F à $]0; 2\pi]$.

a. Dressez le tableau de variation de F_1.

b. Montrez que l'équation $x \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[$, $F_1(x) = 0$ admet une unique solution.

« Si j'en m'apprenais que la fin du monde est pour demain, je planterai quand même un pommier. » Martin Luther

Scanné avec CamScanner

CORRIGES DES EXERCICES-INTEGRATION

Corrigé 01

$f(x) = \frac{x^2-1}{2x-1}$.

1/ Déterminons les réels a, b et c

$f(x) = \frac{2ax^2+(-a+2b)x-b+c}{2x-1} = \frac{x^2-1}{2x-1}$, donc $\begin{cases} 2a = 1 \\ -a+2b = 0, \\ -b+c = -1 \end{cases}$

d'où : $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$ et $c = -\frac{3}{4}$ et $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{\frac{3}{4}}{2x-1}$

2/ Déduisons le calcul des intégrales suivantes :

$I = \int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1}dx = \int_{-1}^{0} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{\frac{3}{4}}{2x-1}\right)dx$

$I = \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}ln|2x-1|\right]_{-1}^{0} = \frac{3}{8}ln3$

$J = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{cos^3x}{1-2sinx}dx$

La fonction à intégrer ressemble un peu à la précédente en prenant $u = sinx$.

$f(u) = \frac{u^2-1}{2u-1} \Rightarrow f(sinx) = \frac{sin^2x-1}{2sinx-1} = \frac{cos^2x}{1-2sinx}$. Pour intégrer $f(sinx)$, il faut que ce soit sous la forme $(sinx)'F'(sinx)$ où F est une primitive de f. Or on a à intégrer $\frac{cos^3x}{1-2sinx} = cosx\left[\frac{cos^2x}{1-2sinx}\right] = cosx\left[\frac{1-sin^2x}{1-2sinx}\right]$, donc tout est ok.

On a finalement :

$J = \left[\frac{1}{4}sin^2x + \frac{1}{4}sinx - \frac{3}{8}ln|2sinx-1|\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{0} = \frac{3}{8}ln2$

Corrigé 02

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4xdx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4xdx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sin^2xcos^2xdx$.

1/ Calculons $I-J$ et $I+J+K$

$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4xdx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4xdx$

$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^4x - sin^4x)dx$

$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^2x + sin^2x)(cos^2x - sin^2x)dx$

$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^2x - sin^2x)dx$

$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2xdx$

$I-J = \left[\frac{1}{2}sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I-J = 0$

$I+J+K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sin^2xcos^2xdx$

$I+J+K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^4x + sin^4x + 2sin^2xcos^2x)dx$

$I+J+K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin^2x + cos^2x)^2dx$

$I+J+K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$, car $sin^2x + cos^2x = 1$

$I+J+K = [x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I+J+K = \frac{\pi}{2}$

2/ Expression de $cos4x$ en fonction de $cosx$ et de $sinx$

$cos4x = cos^22x - sin^22x$

$cos4x = (cos^2x - sin^2x)^2 - (2sinxcosx)^2$

$cos4x = cos^4x + sin^4x - 2cos^2xsin^2x - 4sin^2xcos^2x$

$cos4x = cos^4x + sin^4x - 6cos^2xsin^2x$

Déduisons $I+J-3K$

$I+J-3K =$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4xdx - 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sin^2xcos^2xdx$

$I+J-3K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [cos^4x + sin^4x - 6cos^2xsin^2x]dx$

$I+J-3K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos4xdx$

$I+J-3K = \left[\frac{1}{4}sin4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I+J-3K = 0$

Scanné avec CamScanner

Scanné avec CamScanner

3/ Trouvons à partir des questions précédentes, les valeurs de I, J et K

On a : $\begin{cases} I - J = 0 \\ I + J + K = \frac{\pi}{2} \\ I + J - 3K = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} I = J \\ 2I + K = \frac{\pi}{2} \\ 2I - 3K = 0 \end{cases}$

On obtient $I = J = \frac{3\pi}{16}$ et $K = \frac{\pi}{8}$

Corrigé 03

1/ Calculons A

$A = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3} dx = \left[-\frac{1}{4(1+x^2)^2}\right]_0^1$ soit $A = -\frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$

2/ Calculons $A + B$

$A + B = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3} dx + \int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3} dx$

$A + B = \int_0^1 \frac{x(1+x^2)}{(1+x^2)^3} dx$

$A + B = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \left[-\frac{1}{2(1+x^2)}\right]_0^1$

$A + B = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

3/ Déduisons la valeur de B

$A + B = \frac{1}{4} \Rightarrow B = \frac{1}{4} - A = \frac{1}{4} - \frac{3}{16}$ soit $B = \frac{1}{16}$.

Corrigé 04

1/ Calculons K

$K = I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{1+2sinx} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin2x}{1+2sinx} dx$

$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx + sin2x}{1+2sinx} dx$

$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx + 2cosxsinx}{1+2sinx} dx$

$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+2sinx)cosx}{1+2sinx} dx$

$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx dx$

$K = [sinx]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

2/ Calculons I

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{1+2sinx} dx$

$I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2cosx}{1+2sinx} dx$

$I = \left[\frac{1}{2} ln(1 + 2sinx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I = \frac{ln3}{2}$

3/ Déduisons J

$J = K - I = 1 - \frac{ln3}{2}$

Corrigé 05

1/ a. $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$, $H(x) = \int_1^x f(t)dt$; comme $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, alors $e^x - 1 \neq 0$ donc f existe et est continue sur $\mathbb{R}$: f a donc une primitive F et $H(x) = F(x) - F(1)$ existe sur $\mathbb{R}$.

b. Grâce au cours nous savons que $H'(x) = F'(x) - 0 = f(x)$

c. $H(3)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe (C) de f, l'axe (Ox), les droites $x = 1$ et $x = 3$.

2/ a. Multiplions $f(x)$ par e^{-x} au numérateur et au dénominateur : $f(x) = \frac{xe^{-x}}{(e^x - 1)e^{-x}} = \frac{xe^{-x}}{e^x e^{-x} - e^{-x}} = x\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$

b. On reconnaît dans $\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ la dérivée de $ln|1 - e^{-x}|$; il faut donc intégrons $\int_1^3 f(x)dx$ par parties en posant :

$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \end{cases}$, on a $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = ln|1 - e^{-x}| \end{cases}$

Or $1 - e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq e^{-x} \Leftrightarrow 0 \geq -x \Leftrightarrow x \geq 0$, donc $v(x) = ln(1 - e^{-x})$. D'où :

$\int_1^3 f(x)dx = [xln(1 - e^{-x})]_1^3 - \int_1^3 ln(1 - e^{-x})dx$

Scanné avec CamScanner

$\int_1^3 f(x)dx = 3ln(1-e^{-3}) - ln(1-e^{-1}) - \int_1^3 ln(1-e^{-x})dx$

c. La fonction $x \mapsto 1-e^{-x}$ est strictement positive si $1 \leq x \leq 3$: $\left(ln(1-e^{-x})\right)' = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} > 0$, donc $x \mapsto ln(1-e^{-x})$ est croissante sur $[1;3]$ d'où $ln(1-e^{-1}) \leq ln(1-e^{-x}) \leq ln(1-e^{-3})$.

d. En intégrant la double inégalité précédente, on a :

$(3-1)ln(1-e^{-1}) \leq \int_1^3 ln(1-e^{-x})dx \leq (3-1)ln(1-e^{-3})$ soit $2ln(1-e^{-1}) \leq \int_1^3 ln(1-e^{-x})dx \leq 2ln(1-e^{-3})$, d'où : $-2ln(1-e^{-3}) \leq -\int_1^3 ln(1-e^{-x})dx \leq -2ln(1-e^{-1})$. Il s'ensuit que :

$3ln(1-e^{-3}) - ln(1-e^{-1}) - 2ln(1-e^{-3}) \leq -\int_1^3 ln(1-e^{-x})dx \leq 3ln(1-e^{-3}) - ln(1-e^{-1}) - 2ln(1-e^{-1})$ et enfin :

$ln\left(\frac{1-e^{-3}}{1-e^{-1}}\right) \leq \int_1^3 f(x)dx \leq 3ln\left(\frac{1-e^{-3}}{1-e^{-1}}\right) \Leftrightarrow ln\left(\frac{e^3-1}{e^3-e^2}\right) \leq \int_1^3 f(x)dx \leq 3ln\left(\frac{e^3-1}{e^3-e^2}\right)$

Corrigé 06

Calculons $I = \int_0^1 e^x cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)dx$

Posons $\begin{cases} u(x) = cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \\ v'(x) = e^x \end{cases}$ on a : $\begin{cases} u'(x) = -\frac{\pi}{4}sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \\ v(x) = e^x \end{cases}$.

donc $I = \left[e^x cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right]_0^1 + \frac{\pi}{4}\int_0^1 e^x sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)dx$

$I = e\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{\pi}{4}\int_0^1 e^x sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)dx \quad (*)$

Intégrons par parties $J = \int_0^1 e^x sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)dx$ en posant

$\begin{cases} u(x) = sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \\ v'(x) = e^x \end{cases}$ on a : $\begin{cases} u'(x) = \frac{\pi}{4}cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \\ v(x) = e^x \end{cases}$, donc

$J = \left[e^x sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right]_0^1 - \frac{\pi}{4}\int_0^1 e^x cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)dx$

$J = e\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}I$

$(*) \Rightarrow I = e\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{\pi}{4}\left[e\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}I\right]$

$\Rightarrow \left(1 + \frac{\pi^2}{16}\right)I = e\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + e\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

$\Rightarrow I = \frac{16}{\pi^2+16}\left(\frac{4e\sqrt{2} + e\pi\sqrt{2} - 8}{8}\right)$

$\Rightarrow I = \frac{2e\sqrt{2}(4+\pi) - 16}{\pi^2+16}$

Corrigé 07

1. $g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$.

a. Déterminons les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$: $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$.

$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1} = \frac{a(x^2-1)+b(x^2-x)+c(x^2+x)}{x(x^2-1)}$

$= \frac{(a+b+c)x^2 + (-b+c)x - a}{x(x^2-1)} = \frac{1}{x(x^2-1)}$

On a par identification, $\begin{cases} -a = 1 \\ -b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$, donc

$\frac{1}{x(x^2-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}$

b. Une primitive G de g sur l'intervalle $]1;+\infty[$

La fonction g est continue sur $]1;+\infty[$ en tant que fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]1;+\infty[$. g admet donc des primitives sur $]1;+\infty[$. Sur $]1;+\infty[$, on a $x > 0$, $x+1 > 0$ et $x-1 > 0$ et donc, d'après la question précédente, une primitive de g sur $]1;+\infty[$ est la fonction $G(x) = -lnx + \frac{1}{2}ln(x+1) + \frac{1}{2}ln(x-1)$.

Scanné avec CamScanner

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$.

Une primitive F de f sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ est $F(x) = -\frac{1}{x^2-1}$.

3. Calculons : $I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} lnx dx$

Intégrons i par parties en posant :

$\begin{cases} v(x) = lnx \\ u'(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2} = f(x) \end{cases}$, on a $\begin{cases} v'(x) = \frac{1}{x} \\ u(x) = -\frac{1}{x^2-1} = F(x) \end{cases}$ et

$I = \left[-\frac{1}{x^2-1} lnx\right]_2^3 + \int_2^3 \frac{1}{x^2-1} \times \frac{1}{x} dx$

$I = -\frac{1}{8} ln3 + \frac{1}{3} ln2 + \int_2^3 \frac{1}{x(x^2-1)} dx$

$I = -\frac{1}{8} ln3 + \frac{1}{3} ln2 + [G(x)]_2^3$

$I = -\frac{1}{8} ln3 + \frac{1}{3} ln2 - ln3 + \frac{1}{2} ln4 + \frac{1}{2} ln2 + ln2 - \frac{1}{2} ln3$

$I = \left(-\frac{1}{8} - 1 - \frac{1}{2}\right) ln3 + \left(\frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2} + 1\right) ln2$

$I = \frac{17}{6} ln2 - \frac{13}{8} ln3$ avec $q = -\frac{13}{8}$ et $p = \frac{17}{6}$.

Corrigé 08

1/ Démontrons la formule d'intégration par parties

On a : $(uv)' = u'v + v'u$ (*)

$(*) \Rightarrow \int_a^b (uv)'(x)dx = \int_a^b (u'v)(x)\,dx + \int_a^b (v'u)(x)dx$

$\Rightarrow \int_a^b (u'v)(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b (v'u)(x)dx$

2/ $I = \int_0^\pi e^x sinxdx$ et $J = \int_0^\pi e^x cosxdx$

a. Démontrons que $I = -J$ et que $I = J + e^\pi + 1$

Intégrons I par parties en posant $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = sinx \end{cases}$, on a :

$\begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = cosx \end{cases}$, donc $I = [e^x sinx]_0^\pi - \int_0^\pi e^x cosxdx$

$I = -J$, car $[e^x sinx]_0^\pi = 0$

Intégrons maintenant I par parties en posant $\begin{cases} u'(x) = sinx \\ v(x) = e^x \end{cases}$,

on a : $\begin{cases} u(x) = -cosx \\ v'(x) = e^x \end{cases}$, donc $I = [-e^x cosx]_0^\pi + \int_0^\pi e^x cosxdx$

$I = e^\pi + 1 + J$ soit $I = J + e^\pi + 1$.

b. Déduisons les valeurs exactes de I et J

D'après a. on a : $\begin{cases} I = -J & (1) \\ I = J + e^\pi + 1 & (2) \end{cases}$

On déduit que $J = -\frac{e^\pi+1}{2}$ et $I = \frac{e^\pi+1}{2}$

Corrigé 09

I/ Calculons $I + J$

$I + J = \int_0^\pi e^x cos^2 x dx + \int_0^\pi e^x sin^2 x dx$

$I + J = \int_0^\pi e^x (cos^2 x + sin^2 x) dx$

$I + J = \int_0^\pi e^x dx$, car $cos^2 x + sin^2 x = 1$

$I + J = [e^x]_0^\pi$

$I + J = e^\pi - e^0$

$I + J = e^\pi - 1$

2/ a. Montrons que $J - I = \int_\pi^0 e^x cosaxdx$

$J - I = \int_0^\pi e^x sin^2 x dx - \int_0^\pi e^x cos^2 x dx$

$J - I = \int_0^\pi e^x (sin^2 x - cos^2 x) dx$

$J - I = -\int_0^\pi e^x cos2x dx$, car $cos^2 x - sin^2 x = cos2x$

$J - I = \int_\pi^0 e^x cos2x dx$, d'où $a = 2$.

b. Démontrons que $J - I = \frac{1}{5}(1 - e^\pi)$

$J - I = \int_\pi^0 e^x cos2x dx$

Posons $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = cos2x \end{cases}$, on a : $\begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = -2sin2x \end{cases}$, donc

$J - I = [e^x cos2x]_\pi^0 + 2\int_\pi^0 e^x sin2x dx$

$J - I = 1 - e^\pi - 2K$ (*), où $K = \int_\pi^0 e^x sin2x dx$

Scanné avec CamScanner

En posant $\begin{cases} A'(x) = e^x \\ B(x) = sin2x \end{cases}$ on a $\begin{cases} A(x) = e^x \\ B'(x) = 2cos2x \end{cases}$ et

$K = [e^x sin2x]_\pi^0 - 2\int_\pi^0 e^x cos2x dx$

$K = 0 - 2\int_\pi^0 e^x cos2x dx$

$K = -2(J - I)$.

Par suite $(*) \Leftrightarrow J - I = 1 - e^\pi + 2[-2(J - I)]$

$\Leftrightarrow J - I = 1 - e^\pi - 4(J - I)$

$\Leftrightarrow 5(J - I) = 1 - e^\pi$

$\Leftrightarrow J - I = \frac{1}{5}(1 - e^\pi)$

3. Déterminons les valeurs exactes de I et J

D'après 1/ et 2/ on a le système suivant $\begin{cases} J + I = e^\pi - 1 \\ J - I = \frac{1}{5}(1 - e^\pi) \end{cases}$

On a : $2J = \left(1 - \frac{1}{5}\right)(e^\pi - 1)$ soit $J = \frac{2}{5}(e^\pi - 1)$

$J + I = e^\pi - 1 \Rightarrow I = e^\pi - 1 - J$

$\Rightarrow I = \left(1 - \frac{2}{5}\right)(e^\pi - 1)$

$\Rightarrow I = \frac{3}{5}(e^\pi - 1)$

Corrigé 10

$I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x}{sin^2 x} dx$.

1. Calculons I_0, I_1 et I_2

$I_0 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^0 x}{sin^2 x} dx$

$I_0 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sin^2 x} dx$

Posons $t = \frac{\pi}{2} - x$: $dt = -dx$ et $x = \frac{\pi}{2} - t$. Ainsi :

$I_0 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{-1}{cos^2 t} dt$

$I_0 = -[tant]_{\frac{\pi}{4}}^{0} = 1$

$I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{sin^2 x} dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-cosx}{sin^2 x} dx = -\left[\frac{1}{sinx}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} - 1$

$I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^2 x}{sin^2 x} dx$

$I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - sin^2 x}{sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sin^2 x} dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx$

$I_2 = I_0 - [x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$I_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$

2. Démontrons que la suite (I_n) est positive et décroissante

$\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, $cosx \geq 0$ et $cos^n x \geq 0$, donc $\frac{cos^n x}{sin^2 x} \geq 0$. Par suite $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x}{sin^2 x} dx \geq 0$, c'est-à-dire : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, $I_n \geq 0$: I_n est positive.

$I_{n+1} - I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^{n+1} x}{sin^2 x} dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x}{sin^2 x} dx$

$I_{n+1} - I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{cos^{n+1} x}{sin^2 x} - \frac{cos^n x}{sin^2 x}\right) dx$

$I_{n+1} - I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x}{sin^2 x}(cosx - 1) dx$

Or : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{cos^n x}{sin^2 x} \geq 0$ et $cosx - 1 \leq 0$, donc $\frac{cos^n x}{sin^2 x}(cosx - 1) \leq 0$. Par suite $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x}{sin^2 x}(cosx - 1) dx \leq 0$: $I_{n+1} - I_n \leq 0$. On déduit que (I_n) est décroissante.

Comme la suite (I_n) est positive (minorée par 0) et décroissante, alors elle est convergente.

3. a. Démontrons que pour tout x élément de $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ et tout entier naturel n non nul, on a : $0 \leq \frac{cos^n x}{sin^2 x} \leq 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow cos^n\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq cos^n x \leq cos^n\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $x \mapsto cosx$ est

Scanné avec CamScanner

décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$

$$\Rightarrow 0 \leq cos^n x \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \quad (1)$$

$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \leq sin^2 x \leq sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$, car $x \mapsto sinx$ est croissante sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \leq sin^2 x \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{1}{sin^2 x} \leq 2 \quad (2)$$

(1)×(2) $\Rightarrow 0 \leq \frac{cos^n x}{sin^2 x} \leq 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ (*)

b. Déduisons la limite de la suite (I_n)

(*)$\Rightarrow 0 \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n x}{sin^2 x} dx \leq 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx$

$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n [x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \times \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$, donc par comparaison $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Corrigé 11

$I_n = \int_0^1 (x+1)^n e^{-x} dx$ où n est un entier naturel.

1/ Montrons que I_n existe et est strictement positive

Les fonctions $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto (x+1)^n$ $(n \in IN)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, donc continues sur $[0;1]$. Par suite $x \mapsto (x+1)^n e^{-x}$ est continue sur $[0;1]$ comme produit de deux fonctions continues. Il vient que $x \mapsto (x+1)^n e^{-x}$ admet une primitive sur $[0;1]$, l'existence de $I_n = \int_0^1 (x+1)^n e^{-x} dx$ est assurée.

D'autre part : $\forall x \in [0;1]$, $(x+1)^n e^{-x} > 0$, d'où d'apres la positivité de l'intégrale, on a : $\int_0^1 (x+1)^n e^{-x} dx > 0$ soit $I_n > 0$ pour $n \in IN$.

2/ Calculons I_0

$I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx$

$I_0 = [-e^{-x}]_0^1 = 1 - e^{-1}$

3/ Démontrons que $I_n = 1 - \frac{2^n}{e} + nI_{n-1}$ pour $n \geq 1$

$I_n = \int_0^1 (x+1)^n e^{-x} dx$

Posons $\begin{cases} u(x) = (x+1)^n \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$, on a $\begin{cases} u'(x) = n(x+1)^{n-1} \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$I_n = [-e^{-x}(x+1)^n]_0^1 + n\int_0^1 (x+1)^{n-1} e^{-x} dx$

$I_n = -2^n e^{-1} + 1 + nI_{n-1}$ soit $I_n = 1 - \frac{2^n}{e} + nI_{n-1}$.

4/ Déduisons les valeurs de I_1, I_2 et I_3

$I_1 = 1 - \frac{2}{e} + I_0$

$I_1 = 1 - \frac{2}{e} + 1 - e^{-1}$

$I_1 = 2 - \frac{3}{e}$

$I_2 = 1 - \frac{2^2}{e} + 2I_1$

$I_2 = 1 - \frac{4}{e} + 2\left(2 - \frac{3}{e}\right)$

$I_2 = 5 - \frac{10}{e}$

$I_3 = 1 - \frac{2^3}{e} + 3I_2$.

$I_3 = 1 - \frac{8}{e} + 3\left(5 - \frac{10}{e}\right)$

$I_3 = 16 - \frac{38}{e}$

5/ Calculons $I_n = \int_0^1 (3x^3 + 7x^2 + 9x + 5)e^{-x} dx$

Posons $A = 3x^3 + 7x^2 + 9x + 5$

$A = 3(x+1)^3 - 2x^2 + 2$

$A = 3(x+1)^3 - 2[(x+1)^2 - 2x - 1] + 2$

Scanné avec CamScanner

$A = 3(x+1)^3 - 2(x+1)^2 + 4x + 4$
$A = 3(x+1)^3 - 2(x+1)^2 + 4(x+1)$, donc
$I_n = 3\int_0^1 (x+1)^3 e^{-x}dx - 2\int_0^1 (x+1)^2 e^{-x}dx +$
$4\int_0^1 (x+1)e^{-x}dx$
$I_n = 3I_3 - 2I_2 + 4I_1$
$I_n = 3\left(16 - \frac{38}{e}\right) - 2\left(5 - \frac{10}{e}\right) + 4\left(2 - \frac{3}{e}\right)$
$I_n = 46 - \frac{106}{e}$.

Corrigé 12

1/ Déterminons les réels a et b tels que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$

On a : $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{(a+b)x + a}{x(x+1)}$, d'où par identification à $\frac{1}{x(x+1)}$, on obtient $\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$ et alors $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

2/ Soit f la fonction numérique définie par :
$f(x) = \frac{1}{x} + ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

a. Déterminons l'ensemble de définition de f
$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}/x+1 \neq 0 \text{ et } \frac{x}{x+1} > 0\right\}$
$D_f =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$

b. b_1 Justifions l'existence de l'intégrale $\int_1^2 ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx$
$u: x \mapsto ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ est continue sur $[1; 2]$, donc $\int_1^2 ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx$ existe.

b_2/ Calculons $\int_1^2 ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx$ à l'aide d'une intégration par parties
Posons $A = \int_1^2 ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx$
Posons $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \end{cases}$, on a : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \end{cases}$, donc :
$A = \left[xln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x+1}dx$

$A = \left[xln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \ln(x+1)\right]_1^2$ soit encore :
$\int_1^2 ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx = 4ln2 - 3ln3$.
Déduisons $I = \int_1^2 f(x)dx$
$I = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_1^2 ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx$
$I = [lnx]_1^2 + 4ln2 - 3ln3$
$I = [lnx]_1^2 + 5ln2 - 3ln3$, car $[lnx]_1^2 = ln2$

c. Montrons que :
c_1/ $\frac{1}{m+1} \leq \int_m^{m+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{m}$
$x \in [m; m+1] \Leftrightarrow m \leq x \leq m+1$
$\Rightarrow \frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{m}$
$\Rightarrow \frac{1}{m+1}\int_m^{m+1} dx \leq \int_m^{m+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{m}\int_m^{m+1} dx$
$\Rightarrow \frac{1}{m+1} \leq \int_m^{m+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{m}$

c_2/ $\int_m^{m+1} \frac{dx}{x} = \frac{1}{m} - f(m)$
$\int_m^{m+1} \frac{dx}{x} = [lnx]_m^{m+1} = ln(m+1) - lnm$
$\int_m^{m+1} \frac{dx}{x} = -ln\left(\frac{m}{m+1}\right)$
Or $f(m) = \frac{1}{m} + ln\left(\frac{m}{m+1}\right)$, d'où $\int_m^{m+1} \frac{dx}{x} = \frac{1}{m} - f(m)$.

c_3/ $0 \leq f(m) \leq \frac{1}{m(m+1)}$

D'après c_1, on a : $\frac{1}{m+1} \leq \int_m^{m+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{m}$, donc
$\frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{m} - f(m) \leq \frac{1}{m}$, car $\int_m^{m+1} \frac{dx}{x} = \frac{1}{m} - f(m)$. Par suite $\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m} \leq -f(m) \leq 0$. On en déduit que : $0 \leq f(m) \leq \frac{1}{m(m+1)}$

d. Simplifions S_n puis montrons que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel à préciser
$S_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)}$.

Scanné avec CamScanner

$S_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \cdots + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)$

$S_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1}$

On a : $\lim_{n\to+\infty} S_n = 0$, donc (S_n) converge vers 0

c. Déduisons de la question 2.c$_3$ que :

$0 \leq f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \leq S_n$ et calculons $lim \sum_{i=n}^{2n} f(i)$

Pour tout i tel que $n \leq i \leq 2n$, on a : $0 \leq f(i) \leq \frac{1}{i(i+1)}$ (*)

(*)$\Rightarrow 0 \leq \sum_{i=n}^{2n} f(i) \leq \sum_{i=n}^{2n} \left(\frac{1}{i(i+1)}\right)$

$\Rightarrow 0 \leq \sum_{i=n}^{2n} f(i) \leq S_n$

Comme $\lim_{n\to+\infty} S_n = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=n}^{2n} f(i) = 0$

Corrigé 13

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \int_0^1 (1-u)^n \sqrt{u}\,du$.

1. a Démontrons que : $\forall n \in IN, I_n \geq 0$

$0 \leq u \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -u \leq 0$

$\Rightarrow 0 \leq 1-u \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq (1-u)^n \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq (1-u)^n\sqrt{u} \leq 1\sqrt{u}$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 (1-u)^n \sqrt{u}\,du \leq \int_0^1 \sqrt{u}du$

D'où : $\forall n \in IN, I_n \geq 0$

b/ Démontrons que :

$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1-u)^n u^{3/2} du$

On a : $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1-u)^{n+1}\sqrt{u}\,du - \int_0^1 (1-u)^n \sqrt{u}\,du$

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \left[(1-u)^{n+1}\sqrt{u} - (1-u)^n\sqrt{u}\right] du$

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \left[(1-u)^n\sqrt{u}(1-u-1)\right] du$

$I_{n+1} - I_n = -\int_0^1 (1-u)^n \sqrt{u} \times u\,du$

$I_{n+1} - I_n = -\int_0^1 (1-u)^n u^{3/2} du$

$I_{n+1} - I_n = \int_1^0 (1-u)^n u^{3/2} du$

Sens de variation de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$I_{n+1} - I_n = -\int_0^1 (1-u)^n u^{3/2} du$

Or $(1-u)^n u^{3/2} \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in [0;1]$, donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$. Par conséquent (I_n) est décroissante.

2. Montrons que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

La suite (I_n) est décroissante et minorée, donc elle converge.

3. a/ Vérifions que la dérivée de la fonction : $u \mapsto u^{3/2}$ sur $[0;1]$ est la fonction $u \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{u}$

La fonction $u \mapsto u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0;1]$.

La fonction $u \mapsto \sqrt{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc sur $]0;1]$.

Donc $u \mapsto u\sqrt{u}$ est dérivable sur $]0;1]$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0;1]$.

On a : $\lim_{n\to+\infty} \frac{u^{3/2} - 0}{u - 0} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{u} = 0$, donc $u \mapsto u\sqrt{u}$ est dérivable en 0.

Conclusion

$u \mapsto u\sqrt{u}$ est dérivable sur $[0;1]$ et sa dérivée est la fonction $u \mapsto u^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}\sqrt{u}$

b/ Calculons I_0 et I_1

$I_0 = \int_0^1 \sqrt{u}du = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{3}{2}\sqrt{u}du = \frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

$I_1 = \int_0^1 (1-u)\sqrt{u}du = \int_0^1 \sqrt{u}du - \int_0^1 u\sqrt{u}du$

$I_1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5}\left[u^{5/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$

c/ Démontrons à l'aide d'une intégration par parties, que $I_n = \frac{2n+5}{2n+2} I_{n+1}$

Soit $t_n = I_{n+1} - I_n$

Posons $\begin{cases} f(u) = u^{3/2} \\ g'(u) = (1-u)^n \end{cases}$, on a : $\begin{cases} f'(u) = \frac{3}{2}u^{1/2} \\ g(u) = \frac{-(1-u)^{n+1}}{n+1} \end{cases}$

Scanné avec CamScanner
Scanné avec CamScanner

Les fonctions f et g sont continues sur [0; 1]

$t_n = \left[\frac{-(1-u)^{n+1}}{n+1} \times u^{3/2}\right]_0^1 + \frac{3}{2(n+1)}\int_0^1 (1-u)^{n+1}\sqrt{u}du$

$t_n = \frac{3}{2(n+1)} I_{n+1} = \frac{3}{2n+2} I_{n+1}$ soit $I_{n+1} - I_n = \frac{3}{2n+2} I_{n+1}$.

D'où : $I_n = \frac{2n+5}{2n+2} I_{n+1}$

4. a. Déduisons l'expression de I_n en fonction de I_0 et de n

On a : $\begin{cases} I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1} \\ I_{n-1} = \frac{2n-2}{2n+1} I_{n-2} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ I_3 = \frac{6}{9} I_2 \\ I_2 = \frac{4}{7} I_1 \\ I_1 = \frac{2}{5} I_0 \end{cases}$

En multiplication membre à membre et en simplifiant les égalités ci-dessus, on obtient :

$I_n = \frac{2n(2n-2)\times\cdots\times 6\times 4\times 2}{(2n+3)(2n+1)\times\cdots\times 9\times 7\times 5} I_0$

b/ Calculons I_4

$I_4 = \frac{8\times 6\times 4\times 2}{11\times 9\times 7\times 5} I_0 = \frac{8\times 6\times 4\times 2\times 2}{11\times 9\times 7\times 5\times 3}$ soit $I_4 = \frac{256}{3465}$.

Corrigé 14

1. Calculons I_0 et I_1

$I_0 = \int_0^\pi dx = [x]_0^\pi = \pi$

$I_1 = \int_0^\pi \sin x dx$

$I_1 = [-\cos x]_0^\pi$

$I_1 = 2$

2. Démontrons que la suite (I_n) est décroissante

On a : $I_{n+1} - I_n = \int_0^\pi \sin^{n+1} x dx - \int_0^\pi \sin^n x dx$

$I_{n+1} - I_n = \int_0^\pi (\sin^{n+1} x - \sin^n x) dx$

$I_{n+1} - I_n = \int_0^\pi \sin^n x(\sin x - 1) dx$

Or : $\forall x \in [0; \pi]$, $\sin^n x \geq 0$ et $\sin x - 1 \leq 0$, donc $\sin^n x(\sin x - 1) \leq 0$. Comme $0 \leq \pi$, alors en passant à l'intégrale, on a : $\int_0^\pi (\sin^{n+1} x - \sin^n x) dx \leq 0$ soit $I_{n+1} - I_n \leq 0$. On conclut que la suite (I_n) est décroissante.

3. A l'aide d'une intégration par parties, démontrons que :

$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

$I_{n+2} = \int_0^\pi \sin^{n+2} x dx$

$I_{n+2} = \int_0^\pi \sin^2 x \sin^n x dx$

$I_{n+2} = \int_0^\pi (1 - \cos^2 x)\sin^n x dx$

$I_{n+2} = \int_0^\pi \sin^n x dx - \int_0^\pi \cos^2 x \sin^n x dx$

$I_{n+2} = I_n - \int_0^\pi \cos x(\cos x \sin^n x) dx$

Calculons $J = \int_0^\pi \cos x(\cos x \sin^n) x dx$ par intégrations par parties.

Posons $\begin{cases} u(x) = \cos x \\ v'(x) = \cos x \sin^n x \end{cases}$, on a : $\begin{cases} u'(x) = -\sin x \\ v(x) = \frac{1}{n+1}\sin^{n+1} x \end{cases}$

$J = \left[\frac{1}{n+1}\cos x \sin^{n+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x dx$

$J = \frac{1}{n+1} I_{n+2}$, donc $I_{n+2} = I_n - \frac{1}{n+1} I_{n+2}$ soit $\frac{n+2}{n+1} I_{n+2} = I_n$.

d'où $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

4. a/ Calculons I_9, I_{10} et I_{11}

$I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{4}{3}$; $I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2}\pi$; $I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} I_0 = \frac{3\pi}{8}$

$I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times 2 = \frac{16}{15}$; $I_6 = \frac{5}{6} I_4 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} I_0 = \frac{5}{16}\pi$;

$I_7 = \frac{6}{7} I_5 = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} I_1 = \frac{32}{35}$;

$I_8 = \frac{7}{8} I_6 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} I_0 = \frac{35}{128}\pi$;

$I_9 = \frac{8}{9} I_7 = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{9} I_1 = \frac{256}{315}$

$I_{10} = \frac{9}{10} I_6 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} \times \frac{9}{10} I_0 = \frac{63}{256}\pi$

$I_{11} = \frac{10}{11} I_9 = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{9} \times \frac{10}{11} I_1 = \frac{512}{693}$

Scanné avec CamScanner

Les fonctions f et g sont continues sur [0; 1]

$t_n = \left[\frac{-(1-u)^{n+1}}{n+1} \times u^{3/2}\right]_0^1 + \frac{3}{2(n+1)}\int_0^1 (1-u)^{n+1}\sqrt{u}du$

$t_n = \frac{3}{2(n+1)} I_{n+1} = \frac{3}{2n+2} I_{n+1}$ soit $I_{n+1} - I_n = \frac{3}{2n+2} I_{n+1}$.

D'où : $I_n = \frac{2n+5}{2n+2} I_{n+1}$

4. a/ Déduisons l'expression de I_n en fonction de I_0 et de n

On a : $\begin{cases} I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1} \\ I_{n-1} = \frac{2n-2}{2n+1} I_{n-2} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ I_3 = \frac{6}{9} I_2 \\ I_2 = \frac{4}{7} I_1 \\ I_1 = \frac{2}{5} I_0 \end{cases}$

En multiplication membre à membre et en simplifiant les égalités ci-dessus, on obtient :

$I_n = \frac{2n(2n-2)\times\cdots\times 6\times 4\times 2}{(2n+3)(2n+1)\times\cdots\times 9\times 7\times 5} I_0$

b/ Calculons I_4

$I_4 = \frac{8\times 6\times 4\times 2}{11\times 9\times 7\times 5} I_0 = \frac{8\times 6\times 4\times 2\times 2}{11\times 9\times 7\times 5\times 3}$ soit $I_4 = \frac{256}{3465}$.

Corrigé 14

1. Calculons I_0 et I_1

$I_0 = \int_0^\pi dx = [x]_0^\pi = \pi$

$I_1 = \int_0^\pi sinxdx$

$I_1 = [-cosx]_0^\pi$

$I_1 = 2$

2. Démontrons que la suite (I_n) est décroissante

On a : $I_{n+1} - I_n = \int_0^\pi sin^{n+1}xdx - \int_0^\pi sin^n xdx$

$I_{n+1} - I_n = \int_0^\pi (sin^{n+1}x - sin^n x)dx$

$I_{n+1} - I_n = \int_0^\pi sin^n x(sinx - 1)dx$

Or : $\forall x \in [0;\pi]$, $sin^n x \geq 0$ et $sinx - 1 \leq 0$, donc $sin^n x(sinx - 1) \leq 0$. Comme $0 \leq \pi$, alors en passant à l'intégrale, on a : $\int_0^\pi (sin^{n+1}x - sin^n x)dx \leq 0$ soit $I_{n+1} - I_n \leq 0$. On conclut que la suite (I_n) est décroissante.

3. A l'aide d'une intégration par parties, démontrons que :

$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

$I_{n+2} = \int_0^\pi sin^{n+2}xdx$

$I_{n+2} = \int_0^\pi sin^2 x sin^n xdx$

$I_{n+2} = \int_0^\pi (1 - cos^2 x)sin^n xdx$

$I_{n+2} = \int_0^\pi sin^n xdx - \int_0^\pi cos^2 x sin^n xdx$

$I_{n+2} = I_n - \int_0^\pi cosx(cosxsin^n x)dx$

Calculons $J = \int_0^\pi cosx(cosxsin^n)xdx$ par intégrations par parties.

Posons $\begin{cases} u(x) = cosx \\ v'(x) = cosxsin^n x \end{cases}$, on a : $\begin{cases} u'(x) = -sinx \\ v(x) = \frac{1}{n+1} sin^{n+1}x \end{cases}$

$J = \left[\frac{1}{n+1} cosxsin^{n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n+2}xdx$

$J = \frac{1}{n+1} I_{n+2}$, donc $I_{n+2} = I_n - \frac{1}{n+1} I_{n+2}$ soit $\frac{n+2}{n+1} I_{n+2} = I_n$.

d'où $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

4. a/ Calculons I_9, I_{10} et I_{11}

$I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{4}{3}$; $I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2}\pi$; $I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} I_0 = \frac{3\pi}{8}$

$I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times 2 = \frac{16}{15}$; $I_6 = \frac{5}{6} I_4 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} I_0 = \frac{5}{16}\pi$;

$I_7 = \frac{6}{7} I_5 = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} I_1 = \frac{32}{35}$;

$I_8 = \frac{7}{8} I_6 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} I_0 = \frac{35}{128}\pi$;

$I_9 = \frac{8}{9} I_7 = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{9} I_1 = \frac{256}{315}$

$I_{10} = \frac{9}{10} I_6 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} \times \frac{9}{10} I_0 = \frac{63}{256}\pi$

$I_{11} = \frac{10}{11} I_9 = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{9} \times \frac{10}{11} I_1 = \frac{512}{693}$

Scanné avec CamScanner

b Déduisons que $\frac{2^{17}}{3^4\times7^2\times11} \le \pi \le \frac{2^{16}}{3^4\times5\times7^2}$

La suite (I_n) étant décroissante, on a : $I_{11} \le I_{10} \le I_9$ (*)

$(*) \Leftrightarrow \frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{9}\times\frac{10}{11}I_1 \le \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}\times\frac{9}{10}I_0 \le \frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{9}I_1$

$\Leftrightarrow \frac{2^9}{3^2\times7\times11} \le \frac{2^8\times7}{2^8}\pi \le \frac{2^8}{5\times7\times9}$

$\Leftrightarrow \frac{2^9}{3^2\times7\times11} \le \frac{3^2\times7}{2^8}\pi \le \frac{2^8}{3^2\times5\times7}$

$\Leftrightarrow \frac{2^{17}}{3^4\times7^2\times11} \le \pi \le \frac{2^{16}}{3^4\times5\times7^2}$

Corrigé 15

Soit a dans l'intervalle $]0; +\infty[$; on note $I_0(a) = \int_0^a \frac{dt}{1+t}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$I_k(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}dt$.

1/ Calculons $I_0(a)$ en fonction de a

$I_0(a) = \int_0^a \frac{dt}{1+t} = [ln(1+t)]_0^a$

$I_0(a) = ln(1+a)$

2/ Exprimons $I_1(a)$ en fonction de a

$I_1(a) = \int_0^a \frac{t-a}{(1+t)^2}dt$

Posons $\begin{cases} u(t) = t-a \\ v'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} \end{cases}$, on a : $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\frac{1}{1+t} \end{cases}$

$I_1(a) = \left[\frac{-(t-a)}{1+t}\right]_0^a + \int_0^a \frac{dt}{1+t}$

$I_1(a) = ln(1+a) - a$

3/ Démontrons que $I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1} + I_k(a)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

On a : $I_{k+1}(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^{k+1}}{(1+t)^{k+2}}dt$

Posons $\begin{cases} u(t) = (t-a)^{k+1} \\ v'(t) = \frac{1}{(1+t)^{k+2}} \end{cases}$, on a $\begin{cases} u'(t) = (k+1)(t-a)^k \\ v(t) = \frac{-1}{(k+1)(1+t)^{k+1}} \end{cases}$

donc : $I_{k+1}(a) = \left[\frac{-(t-a)^{k+1}}{(k+1)(1+t)^{k+1}}\right]_0^a + \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}dt$

$I_{k+1}(a) = \frac{(-a)^{k+1}}{k+1} + I_k(a)$

$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1} + I_k(a)$

4 $P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$.

Démontrons en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$, que $I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$

$I_2(a) = \frac{a^2}{2} + I_1(a) = \frac{a^2}{2} + ln(1+a) - a$

$I_3(a) = -\frac{a^3}{3} + I_2(a) = -\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} + ln(1+a) - a$

$I_4(a) = \frac{a^4}{4} + I_3(a) = \frac{a^4}{4} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} + ln(1+a) - a$

$I_5(a) = -\frac{a^5}{5} + I_4(a) = -\frac{a^5}{5} + \frac{a^4}{4} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} + ln(1+a) - a$

$I_5(a) = -\left(\frac{a^5}{5} - \frac{a^4}{4} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} + a\right) + ln(1+a)$

$I_5(a) = -P(a) + ln(1+a)$ soit $I_5(a) = ln(1+a) - P(a)$

5 Soit $J(a) = \int_0^a (t-a)^5 dt$. Calculons $J(a)$

$J(a) = \left[\frac{(t-a)^6}{6}\right]_0^a = -\frac{1}{6}a^6$

6. a. Démontrons que pour tout $t \in [0; a]$, $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \ge (t-a)^5$

$t \in [0; a] \Rightarrow t \ge 0$

$\Rightarrow 1+t \ge 1$

$\Rightarrow (1+t)^6 \ge 1$

$\Rightarrow \frac{1}{(1+t)^6} \le 1$ (1)

$t \in [0; a] \Rightarrow t \le a$

$\Rightarrow t-a \le 0$

$\Rightarrow (t-a)^5 \le 0$

Scanné avec CamScanner

En multipliant (1) par $(t-a)^5$, on a : $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5$ (2)

b. Démontrons que pour tout $a \in [0; +\infty[$, $J(a) \leq I_5(a) \leq 0$

(2) $\Rightarrow \int_0^a \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} dt \geq \int_0^a (t-a)^5 dt$

$\Rightarrow I_5(a) \geq J(a)$ soit $J(a) \leq I_5(a)$.

De plus, $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \leq 0$ d'après 6.a. donc en intégrant sur $[0; a]$, on a : $\int_0^a \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} dt \leq 0$ d'après le signe de l'intégrale.

7 Déduisons que pour tout $a \in [0; +\infty[$, $|\ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{a^6}{6}$

D'après 4, on a :

$|ln(1+a) - P(a)| = |I_5(a)| \leq \left|\int_0^a (t-a)^5 dt\right| = \frac{1}{6}a^6$, d'où $|ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{a^6}{6}$.

8. Déterminons, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près

Il suffit de choisir $\frac{a^6}{6} \leq 10^{-3}$ soit $a \leq \sqrt[6]{6.10^{-3}} \cong 0{,}426$ (ou $\leq e^{\frac{1}{6}ln(10^{-3})} \cong 0{,}426$)

Corrigé 16

1/ Calculons $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$ et $B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$

$A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$

$A = [ln(1+e^x)]_0^1 = ln(1+e) - ln2 = ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

$B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$

$B = \left[-\frac{1}{1+e^x}\right]_0^1 = -\frac{1}{1+e} + \frac{1}{2} = \frac{e-1}{2(1+e)}$

2/ Déterminons les réels a, b et c tels que pour tout $t > 0$.

$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2}$

$\forall t > 0, a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2} = \frac{a(1+t)^2 + bt(1+t) + ct}{(1+t)^2}$

$= \frac{(a+b)t^2 + (2a+b+c)t + a}{(1+t)^2}$

donc $\frac{(a+b)t^2 + (2a+b+c)t + a}{(1+t)^2} = \frac{1}{(1+t)^2}$, d'où par identification

on a : $\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b+c=0 \\ a=1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$

D'où : $\frac{1}{(1+t)^2} = 1 - \frac{t}{1+t} - \frac{t}{(1+t)^2}$ (*)

Déduisons la valeur de $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$

$I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$

$I = \int_0^1 \left[1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\right] dx$

$I = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx - \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$

$I = [x]_0^1 - A - B$

$I = 1 - ln\left(\frac{1+e}{2}\right) - \frac{e-1}{2(1+e)}$

3/ On pose $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3} dx$

Expression de J en fonction de I

Intégrons J par parties en posant : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^3} \end{cases}$, on obtient : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{-1}{2(1+e^x)^2} \end{cases}$, donc :

$J = \left[\frac{-x}{2(1+e^x)^2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$

$J = \frac{-1}{2(1+e)^2} + \frac{1}{2}I$

Déduisons la valeur de J

$J = \frac{-1}{2(1+e)^2} + \frac{1}{2}\left[1 - ln\left(\frac{1+e}{2}\right) - \frac{e-1}{2(1+e)}\right]$

Scanné avec CamScanner

$J = \frac{-1}{2(1+e)^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}ln\left(\frac{1+e}{2}\right) - \frac{e-1}{4(1+e)}$

$J = \frac{-2-(e^2-1)}{4(1+e)^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

$J = -\frac{e^2+1}{4(1+e)^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

$J = \frac{2(e^2+4e+1)}{4(1+e)^2} - \frac{1}{2}ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

Corrigé 17

1. Calculons I_1 et I_2

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx$

$I_1 = [-cosx]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I_1 = 1$

$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xdx$

$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2x\right)dx$

$I_2 = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I_2 = \frac{\pi}{4}$

2. Démontrons que $nI_n = (n-1)I_{n-2}$

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^nxdx$

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2x \times sin^{n-2}xdx$

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - cos^2x) \times sin^{n-2}xdx$

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}xdx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2xsin^{n-2}xdx$

$I_n = I_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2xsin^{n-2}xdx$

Calculons $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2xsin^{n-2}xdx$ par intégration par parties

Posons : $\begin{cases} u(x) = cosx \\ v'(x) = cosxsin^{n-2}x \end{cases}$ on a : $\begin{cases} u'(x) = -sinx \\ v(x) = \frac{1}{n-1}sin^{n-1}x \end{cases}$

$I = \left[\frac{1}{n-1}cosxsin^{n-1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^nxdx$

$I = \frac{1}{n-1}I_n$, donc $I_n = I_{n-2} - \frac{1}{n-1}I_n$ soit $\frac{n}{n-1}I_n = I_{n-2}$,

d'où $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

Déduisons I_3, I_4, I_5 et I_6

$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$

$I_3 = \frac{2}{3}I_1 = \frac{2}{3}$; $I_4 = \frac{3}{4}I_2 = \frac{3\pi}{16}$; $I_5 = \frac{4}{5}I_3 = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$;

$I_6 = \frac{5}{6}I_4 = \frac{5}{6} \times \frac{3\pi}{16} = \frac{5\pi}{32}$

3. $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^nxdx$

On s'inspire des méthodes utilisées pour répondre aux questions relatives à $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^nxdx$.

Corrigé 18

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x}dx$; $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}dx$

1. Justifions l'existence de (I_n)

Les fonctions $x \mapsto sinx$ et $x \mapsto cosx$ sont continues sur $\mathbb{R}$, donc sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$. Il en est de même de la fonction $x \mapsto sin^nx$.

De plus la fonction $x \mapsto cosx$ ne s'annule pas sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$, donc la fonction $x \mapsto \frac{sin^nx}{cosx}$ est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$. Il s'ensuit que la suite (I_n) est bien définie.

2. a. Calculons $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x\cos x dx$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x\cos x dx$

$I = \left[\frac{1}{n+1}\sin^{n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$I = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$

b. Déduisons $I_{n+2} - I_n$ en fonction de n

Scanné avec CamScanner

$I_{n+2} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+2}x}{\cos x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x}dx$

$I_{n+2} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x}(\sin^2 x - 1)dx$

$I_{n+2} - I_n = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \cos x dx$

$I_{n+2} - I_n = -\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$

3. Calculons I_1 et déduisons I_3 et I_5

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}dx = -[\ln\cos x]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$I_1 = -ln\frac{1}{2} = ln2$

$I_3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + I_1$

$I_3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + ln2 = ln2 - \frac{3}{8}$

$I_5 = -\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 + I_3$

$I_5 = -\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 + ln2 - \frac{3}{8}$

$I_5 = \ln 2 - \frac{33}{64}$

4. $f(x) = ln\left[tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

a. Montrons que f est une primitive de la fonction g définie sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ par $x \mapsto g(x) = \frac{1}{cosx}$

La fonction f est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ et

$f'(x) = \frac{1}{tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \times \frac{1}{cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \times \frac{1}{2}$

$f'(x) = \frac{1}{2sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

$f'(x) = \frac{1}{sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{cosx} = g(x)$

On déduit que f est une primitive de la fonction g sur $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$.

b. Déduisons I_0 puis I_2 et I_4

$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}dx = [f(x)]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$I_0 = ln\left[tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

$I_0 = ln(2+\sqrt{3})$

$I_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + I_0$

$I_2 = ln(2+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$I_4 = -\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + I_2$

$I_4 = ln(2+\sqrt{3}) - \frac{5\sqrt{3}}{8}$

Corrigé 19

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin x dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos x dx$

1. Calculons I_0 et J_0

$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

2. Montrons que $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$

Posons $\begin{cases} u(x) = e^{-nx} \\ v'(x) = sinx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = -ne^{-nx} \\ v(x) = -cosx \end{cases}$, d'où

$I_n = [-e^{-nx}\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos x dx$

$I_n = 1 - nJ_n$ d'où $I_n + nJ_n = 1$

Posons $\begin{cases} u(x) = e^{-nx} \\ v'(x) = cosx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = -ne^{-nx} \\ v(x) = sinx \end{cases}$, d'où

$J_n = [e^{-nx}\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin x dx$

$J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} + nI_n$

Scanné avec CamScanner

D'où : $-nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}}$.

On a : $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$ **(1)**

3. Déduisons les expressions de I_n et J_n

En résolvant le système (1), on obtient : $I_n = \frac{1 - ne^{-n\frac{\pi}{2}}}{1+n^2}$ et $J_n = \frac{n + e^{-n\frac{\pi}{2}}}{1+n^2}$

4. Limite de I_n et de J_n

$\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1 - ne^{-n\frac{\pi}{2}}}{1+n^2} = 0$, car $\begin{cases} 1 - ne^{-n\frac{\pi}{2}} \to 1 \\ 1 + n^2 \to +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n + e^{-n\frac{\pi}{2}}}{1+n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(1 + \frac{e^{-n\frac{\pi}{2}}}{n}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(1 + \frac{e^{-n\frac{\pi}{2}}}{n}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \times \frac{\left(1 + \frac{e^{-n\frac{\pi}{2}}}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = 0, \text{ car } \begin{cases} 1 + \frac{e^{-n\frac{\pi}{2}}}{n} \to 1 \\ 1 + \frac{1}{n^2} \to 1 \\ \frac{1}{n} \to 0 \end{cases}$$

Corrigé 20

on pose : $I_n = \frac{(-1)^n}{n!}\int_1^e (\ln t)^n dt$.

1. **a.** Montrons que $I_1 = -1$

$I_1 = -\int_1^e \ln t dt = [t\ln t - t]_1^e = -1$

b. Démontrons que pour tout n, on a : $I_{n+1} = I_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}e$

$I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\int_1^e (\ln t)^{n+1} dt$

Posons $\begin{cases} u(t) = (\ln t)^{n+1} \\ v'(t) = 1 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} u'(t) = (n+1)\frac{(\ln t)^n}{t} \\ v(t) = t \end{cases}$

$\int_1^e (\ln t)^{n+1} dt = [t(\ln t)^{n+1}]_1^e - (n+1)\int_1^e (\ln t)^n dt$

$\int_1^e (\ln t)^{n+1} dt = e - (n+1)\int_1^e (\ln t)^n dt$, donc

$I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}e - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(n+1)\int_1^e (\ln t)^n dt$

$I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}\int_1^e (\ln t)^n dt$

D'où : $I_{n+1} = I_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}e$

c. Prouvons alors que, pour tout n, on a : $I_n = \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)e - 1$

On a : $I_{n+1} - I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}e$, $\forall n \geq 1$, donc:

$I_2 - I_1 = \frac{1}{2!}e$

$I_3 - I_2 = -\frac{1}{3!}e$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$I_n - I_{n-1} = \frac{(-1)^n}{n!}e$

En faisant somme membre à membre et en simplifiant, on obtient :

$I_n - I_1 = \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)e$, donc : $I_n = \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)e - 1$, car $\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} = 0$ et $I_1 = -1$.

2. **a.** Démontrons que : $0 \leq \int_1^e (\ln t)^n dt \leq e - 1$

On a : $t \in [1; e] \Leftrightarrow 1 \leq t \leq e$

$\Rightarrow 0 \leq \ln t \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq (\ln t)^n \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq \int_1^e (\ln t)^n dt \leq \int_1^e dt$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow 0 \leq \int_1^e (\ln t)^n dt \leq e - 1$, car $\int_1^e dt = e - 1$

b. Déduisons-en que : $|I_n| \leq \frac{e-1}{n!}$

On a : $|I_n| = \frac{1}{n!}\int_1^e (\ln t)^n dt$, or :

$0 \leq \int_1^e (\ln t)^n dt \leq e - 1$, donc $|I_n| \leq \frac{e-1}{n!}$.

c. Déduction pour la suite (I_n)

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e-1}{n!} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |I_n| = 0$. Ainsi, la suite (I_n) converge vers 0.

3. Déduisons la limite de la suite (S_n)

On a : $I_n = eS_n - 1$, or $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (eS_n - 1) = 0$, d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{e}$.

Corrigé 21

On pose $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$ et pour tout $\in \mathbb{N}^*$ $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(x)dx$.

1. Calculons I_0, I_1 et I_2

$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)dx = [sinx]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2x\right) dx$

$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2xdx$

$I_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I_2 = \frac{\pi}{4}$

2. a/ Montrons que pour tout entier n, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{n+2}(x)dx$. Pour $n \geq 1$, posons

$\begin{cases} u(x) = cos^{n+1}x \\ v'(x) = cosx \end{cases}$, on a : $\begin{cases} u'(x) = -(n+1)sinxcos^n x \\ v(x) = sinx \end{cases}$

donc $I_{n+2} = [sinxcos^{n+1}x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 x cos^n x dx$

$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - cos^2 x)cos^n x dx$, car

$[sinxcos^{n+1}x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$

$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(x)dx - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{n+2}(x)dx$

$I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$, d'où l'on tire :

$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ pour tout entier n

b/ Déduisons I_3, I_4, I_5 et I_6

$I_3 = \frac{2}{3}I_1 = \frac{2}{3}$; $I_4 = \frac{3}{4}I_2 = \frac{3\pi}{16}$; $I_5 = \frac{4}{5}I_3 = \frac{8}{15}$;

$I_6 = \frac{5}{6}I_4 = \frac{5\pi}{32}$.

c/ Montrons que pour tout entier naturel n, $0 < I_{n+1} \leq I_n$

$x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow 0 \leq cosx \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq cos^{n+1}x \leq cos^n x$, car : $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $cosx \geq 0$

$\Rightarrow 0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{n+1}x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n x dx$, car : $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ $cosx > 0$

$\Rightarrow 0 < I_{n+1} \leq I_n$

3. a/ Montrons que pour tout entier n≥ 0, $1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}}$

D'après la question précédente, (I_n) est une suite strictement positive et croissante. Par suite $0 < I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$. Ce qui implique que $1 \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}}$ pour tout entier n≥ 0 (*).

b/ Montrons alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$

D'après 2.a/, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$, n$\geq 0$. On en déduit que :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1$. Par passage à la limite dans (*), on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} = 1$

4. $u_n = (n+1)I_n I_{n+1}$.

Scanné avec CamScanner

a/ Montrons que la suite (u_n) est constante et que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{\pi}{2}$

$\forall n \geq 0, u_{n+1} - u_n = (n+2)I_{n+1}I_{n+2} - (n+1)I_nI_{n+1}$

$u_{n+1} - u_n = I_{n+1}[(n+2)I_{n+2} - (n+1)I_n]$

Or d'après 2.a', $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n \Leftrightarrow (n+2)I_{n+2} - (n+1)I_n = 0$, d'où $u_{n+1} - u_n = 0$ pour tout entier naturel, c'est-à-dire que la suite (u_n) est constante.

On a : $u_0 = I_0I_1 = \frac{\pi}{2}$, donc $\forall n \geq 0, u_n = \frac{\pi}{2}$.

b/ Montrons que $\frac{\pi}{2(n+1)} \leq {I_n}^2 \leq \frac{\pi}{2n}$

Comme la suite (I_n) est décroissante, on peut écrire $nI_nI_{n+1} \leq n{I_n}^2 \leq nI_nI_{n-1}$ soit encore $\frac{n}{n+1}(n+1)I_nI_{n+1} \leq n{I_n}^2 \leq nI_nI_{n-1}$. Il en résulte que $\left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{\pi}{2} \leq n{I_n}^2 \leq \frac{\pi}{2}$, pour tout entier non nul. Ce qui implique que $\frac{\pi}{2(n+1)} \leq {I_n}^2 \leq \frac{\pi}{2n}$, pour tout entier non nul.

On déduit de l'inégalité précédente que $\sqrt{\frac{\pi}{2002}} \leq I_{1000} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2000}}$.

Corrigé 22

$U_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ et, pour $n > 0$, $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

1/ a. Soit f la fonction numérique définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Calculons $f'(x)$

f est dérivable sur $[0; 1]$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $[0; 1]$. On a : $\forall x \in [0; 1]$,

$f'(x) = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$, donc $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Déduisons U_0

$U_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = [f(x)]_0^1$, donc $U_0 = ln(1+\sqrt{2})$

b. Calculons U_1

$U_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}dx = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1$

$U_1 = \sqrt{2} - 1$

2/ a. Prouvons que la suite (U_n) est décroissante

$U_{n+1} - U_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}dx - \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$U_{n+1} - U_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}dx$

Or : $\forall x \in [0; 1], x^n \geq 0, x - 1 \leq 0$ et $\sqrt{1+x^2} > 0$, donc $\frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}} \leq 0$ et $\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}dx \leq 0$, d'où $U_{n+1} - U_n \leq 0$. Par suite la suite (U_n) est décroissante.

Déduisons que la suite (U_n) est convergente

$\forall n \in IN, \forall x \in [0; 1], \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$, donc $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx \geq 0$.

D'où : $\forall n \in IN, U_n \geq 0$.

La suite (U_n) étant minorée et décroissante, alors elle converge.

b. Montrons que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$ et pour tout $n \geq 1$, on a :

$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$ (1)

$x \in [0; 1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq 1 + x^2 \leq 2$

$\Rightarrow 1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$

$\Rightarrow \frac{x^n}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$, car $x^n \geq 0$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{2}}dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx \leq \int_0^1 x^n dx$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow \left[\frac{x^n}{(n+1)\sqrt{2}}\right]_0^1 \leq U_n \leq \left[\frac{x^n}{n+1}\right]_0^1$

$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

Déterminons alors la limite de (U_n)

On a $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$, d'après le théorème des gendarmes.

3/ Pour tout $n \geq 3$, on pose $I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}dx$.

a. Vérifions que pour tout $n \geq 3$, on a : $U_n + U_{n-2} = I_n$

$U_n + U_{n-2} = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx + \int_0^1 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$U_n + U_{n-2} = \int_0^1 \frac{x^{n-2}(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$U_n + U_{n-2} = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}dx$, d'où $U_n + U_{n-2} = I_n$.

Montrons que pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$nU_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2}$

$I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}dx$

Posons $\begin{cases} u(x) = \sqrt{1+x^2} \\ v'(x) = x^{n-2} \end{cases}$, on a : $\begin{cases} u'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ v(x) = \frac{1}{n-1}x^{n-1} \end{cases}$, donc

$I_n = \left[\frac{1}{n-1}x^{n-1}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \frac{1}{n-1}\int_0^1 x^{n-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$I_n = \frac{1}{n-1}\sqrt{2} - \frac{1}{n-1}U_n$. Or $U_n + U_{n-2} = I_n$, donc $(n-1)U_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2} - U_n$. Par suite $nU_n + (n-1)U_{n-2} = \sqrt{2}$.

b. Déduisons que pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$(2n-1)U_n \leq \sqrt{2}$. (2)

La suite (U_n) est décroissante, donc $U_n \leq U_{n-2}$ et d'après ce qui précède en 3/a, on a : $nU_n + (n-1)U_n \leq \sqrt{2}$ c'est-à-dire $(2n-1)U_n \leq \sqrt{2}$.

c. Montrons que la suite (nU_n) est convergente et calculons sa limite

On a : $\begin{cases} \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1} \quad (1) \\ (2n-1)U_n \leq \sqrt{2} \quad (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \quad (1')$

$(2) \Leftrightarrow U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2n-1} \quad (2')$

$(1')$ et $(2') \Rightarrow \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2n-1}$

$\Rightarrow \frac{n}{(n+1)\sqrt{2}} \leq nU_n \leq \frac{n\sqrt{2}}{2n-1}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n\sqrt{2}}{2n-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc la suite (nU_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Corrigé 23

$x_n = \int_0^1 t^n costdt$ et $y_n = \int_0^1 t^n sintdt$.

1/ a. Montrons que la suite (x_n) est à termes positifs $\forall t \in [0;1]$, $cost > 0$ et $t^n \geq 0$, donc la fonction $t \mapsto t^n cost$ est positive sur l'intervalle $[0;1]$. De plus, cette fonction est continue sur $[0;1]$, d'où la positivité de l'intégrale permet d'avoir $\int_0^1 t^n costdt \geq 0$ soit $x_n \geq 0$ pour tout entier naturel n non nul.

b. Variations de la suite (x_n)

On a : $x_{n+1} - x_n = \int_0^1 t^{n+1}costdt - \int_0^1 t^n costdt$

$x_{n+1} - x_n = \int_0^1 t^n cost(t-1)dt$

Or : $\forall t \in [0;1]$, $t^n cost \geq 0$ et $t - 1 \leq 0$, donc $t^n cost(t-1) \leq 0$. Par suite $\int_0^1 t^n cost(t-1)dt \leq 0$. D'où : $\forall n \in IN^*$, $\forall t \in [0;1]$, $x_{n+1} - x_n \leq 0$, donc la suite (x_n) est décroissante.

c. Déduction

Scanné avec CamScanner

Comme la suite (x_n) est décroissante et minorée par 0, alors elle est convergente.

2/ a. Démontrons que pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leq \frac{1}{n+1}$

$t \in [0;1] \Rightarrow 0 \leq cost \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq t^n cost \leq t^n$, car $t \geq 0$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 t^n costdt \leq \int_0^1 t^n dt$

$\Rightarrow 0 \leq x_n \leq \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1$

$\Rightarrow 0 \leq x_n \leq \frac{1}{n+1}$

On déduit que : $\forall n \in IN^*, x_n \leq \frac{1}{n+1}$

b. Déduisons la limite de la suite (x_n)

Comme $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n+1}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, alors d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

3/ a. Démontrons que, pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} = -(n+1)y_n + sin1$

On a : $x_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} costdt$

Posons $\begin{cases} u(t) = t^{n+1} \\ v'(t) = cost \end{cases}$, on a $\begin{cases} u'(t) = (n+1)t^n \\ v(t) = sint \end{cases}$, donc:

$x_{n+1} = [t^{n+1}sint]_0^1 - (n+1)\int_0^1 t^n sintdt$

$x_{n+1} = sin1 - (n+1)y_n$ soit $x_{n+1} = -(n+1)y_n + sin1$

b. Déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$

$x_{n+1} = -(n+1)y_n + sin1 \Rightarrow y_n = -\frac{x_{n+1}}{n+1} + \frac{sin1}{n+1}$

$\Rightarrow y_n = \frac{sin1 - x_{n+1}}{n+1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{sin1-x_{n+1}}{n+1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, car

$\begin{cases} sin1 - x_{n+1} \to sin1 \\ n+1 \to +\infty \end{cases}$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = 0$

4/ Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} ny_n$

$y_{n+1} = (n+1)x_n - cos1 \Rightarrow nx_n = y_{n+1} - x_n + cos1$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{n+1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = cos1$.

On sait que $y_n = \frac{sin1 - x_{n+1}}{n+1}$, donc $ny_n = \frac{n}{n+1}(sin1 - x_{n+1})$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} ny_n = sin1$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} sin1 - x_{n+1} = sin1$.

Corrigé 24

Partie A

1/ Montrons que la fonction $f: t \mapsto (2-t)e^t$ est une primitive de $g: t \mapsto (1-t)e^t$ sur $[0;1]$

La fonction f est dérivable sur $[0;1]$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $[0;1]$. De plus, pour tout reel t de $[0;1]$, on a : $f'(t) = -e^t + (2-t)e^t = (1-t)e^t = g(t)$

Il s'ensuit que f est une primitive de g sur $[0;1]$.

On en déduit que : $u_1 = \int_0^1 (1-t)e^t dt = \int_0^1 g(t)dt$

$u_1 = [f(t)]_0^1 = e - 2$

2/ Montrons que, pour tout n non nul, $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$ (R)

On a : $u_{n+1} = \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt$

Posons $\begin{cases} u(t) = (1-t)^{n+1} \\ v'(t) = e^t \end{cases}$, on a $\begin{cases} u'(t) = -(n+1)(1-t)^n \\ v(t) = e^t \end{cases}$

donc : $u_{n+1} = [(1-t)^{n+1}e^t]_0^1 + (n+1)\int_0^1 (1-t)^n e^t dt$

$u_{n+1} = -1 + (n+1)u_n$ soit $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$.

Partie B

Conjecture sur la convergence de (u_n)

Pour la première calculatrice, il semblerait que la suite (u_n) soit décroissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Pour la deuxième calculatrice, il semblerait que la suite (u_n) soit tout d'abord décroissante puis croissante à partir du rang 14 et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Scanné avec CamScanner

Partie C

$u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$

1/ Montrons que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq 0$

Soient n un entier naturel non nul et t un réel de [0; 1].

$\forall t \in [0;\ 1]$, $1 - t \geq 0$, donc $(1-t)^n \geq 0$.

Par suite $(1-t)^n e^t \geq 0$, car $e^t > 0$ pour tout t de [0; 1].

$(1-t)^n e^t \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \geq 0$ d'après la positivité de l'intégrale. D'où : $\forall n \in IN^*$, $u_n \geq 0$.

2/ a. Montrons que pour tout réel t de l'intervalle [0; 1] et pour tout entier naturel non nul n, $(1-t)^n e^t \leq e(1-t)^n$

$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow e^t \leq e$, car la fonction exponentielle est croissante

$\Rightarrow (1-t)^n e^t \leq e(1-t)^n$ (*), car $(1-t)^n \geq 0$ sur [0; 1]

b. Déduisons que pour tout n non nul, $u_n \leq \frac{e}{n+1}$

$(*) \Rightarrow \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leq e \int_0^1 (1-t)^n dt$

$\Rightarrow u_n \leq e\left[-\frac{1}{n+1}(1-t)^{n+1}\right]_0^1$

$\Rightarrow u_n \leq \frac{e}{n+1}$

3/ Limite de la suite (u_n)

$\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$, donc par comparaison $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Partie D

$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$; $v_1 = a$ et $v_{n+1} = (n+1)v_n - 1$

1/ Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n + (n!)(a+2-e)$

On a : $u_1 + (1!)(a+2-e) = e - 2 + a + 2 - e = a = v_1$

Supposons que pour un n fixé $(n \geq 1)$, $v_n = u_n + (n!)(a+2-e)$ et montrons $v_{n+1} = u_{n+1} + [(n+1)!](a+2-e)$

$v_{n+1} = (n+1)v_n - 1$

$v_{n+1} = (n+1)u_n + [(n+1)!](a+2-e) - 1$

$v_{n+1} = [(n+1)u_n - 1] + [(n+1)!](a+2-e)$

$v_{n+1} = u_{n+1} + [(n+1)!](a+2-e)$

Conclusion : $\forall n \in IN^*$, $v_n = u_n + (n!)(a+2-e)$

2/ Comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a

D'après C.3/ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. D'autre part si $a > e-2$, alors $a+2-e > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} (n!)(a+2-e) = +\infty$ et si $a < e-2$, alors $a+2-e < 0$ et $\lim_{n\to+\infty} (n!)(a+2-e) = -\infty$. Enfin, si $a = e-2$, alors $v_n = u_n$.

Donc : $\lim_{n\to+\infty} v_n = \begin{cases} +\infty \text{ si } a > e-2 \\ 0 \text{ si } a = e-2 \\ -\infty \text{ si } a < e-2 \end{cases}$

3/ Déduisons une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.

La première calculatrice prend pour a une valeur approchée par défaut de $e-2$ et différente de $e-2$ et la deuxième prend pour a une valeur approchée par excès de $e-2$ et différente de $e-2$. Il est donc normal que la suite semble tendre vers $-\infty$ dans le premier cas et vers $+\infty$ dans le deuxième.

Il faut noter qu'aucune calculatrice n'est capable de fournir le bon résultat, car toute calculatrice ne travaille qu'avec des valeurs approchées de $e-2$ différentes de $e-2$.

Corrigé 25

1. Calculons U_1

$U_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$

$U_1 = [ln(1+x)]_0^1 = ln2$

2. a/ Montrons pour tout $x \geq 0$ et tout entier naturel non nul n, $1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$

$x \geq 0 \Rightarrow x^n \geq 0$

$\Rightarrow 1 + x^n \geq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{1+x^n} \leq 1$ (1)

$x \geq 0 \Rightarrow x^{2n} \geq 0$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow -x^{2n} \leq 0$
$\Rightarrow 1 - x^{2n} \leq 1$
$\Rightarrow (1 + x^n)(1 - x^n) \leq 1$
$\Rightarrow 1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n}$, (2) car $1 + x^n > 0$.

De (1) et (2), on déduit que $1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$. (*)

b/ Déduisons que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $1 - \frac{1}{1+n} \leq U_n \leq 1$

$(*) \Rightarrow \int_0^1 (1 - x^n)dx \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} \leq \int_0^1 dx$

$\Rightarrow \left[x - \frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 \leq U_n \leq [x]_0^1$

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n+1} \leq U_n \leq 1$

c/ Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$, donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$.

$V_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n}dx$, $n \geq 1$

3. a/ Montrons que $V_n = ln2 - \int_0^1 ln(1 + x^n)dx$

Posons $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} \end{cases}$, on a : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = ln(1 + x^n) \end{cases}$, donc

$V_n = [xln(1 + x^n)]_0^1 - \int_0^1 ln(1 + x^n)dx$

$V_n = ln2 - \int_0^1 ln(1 + x^n)dx$

b/ Montrons que pour tout réel $t \geq 0$, $0 \leq \ln(1 + t) \leq t$

$t \geq 0 \Rightarrow 1 + t \geq 1$
$\Rightarrow ln(1 + t) \geq 0$ (1)

Posons $f(t) = ln(1 + t) - t$ pour $t \geq 0$

$f'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{-t}{1+t}$

$\forall t \geq 0$, $f'(t) \leq 0$, donc f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ avec $f(0) = 0$. Il s'ensuit que : $\forall t \geq 0$, $f(t) \leq 0$ c'est-à-dire $ln(1 + t) \leq t$ (2)

De (1) et (2), on déduit que : $\forall t \geq 0, 0 \leq ln(1 + t) \leq t$

Déduisons que, pour tout $n \geq 1$,

$0 \leq \int_0^1 ln(1 + x^n)dx \leq \frac{1}{1+n}$

Soit $x \geq 0$, posons $t = x^n$ dans l'inégalité précédente, on a :

$0 \leq ln(1 + x^n) \leq x^n$ (*)

$(*) \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 ln(1 + x^n)dx \leq \int_0^1 x^n dx$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 ln(1 + x^n)dx \leq \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 ln(1 + x^n)dx \leq \frac{1}{1+n}$ (**)

c/ Déterminons alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

$(**) \Rightarrow -\frac{1}{1+n} \leq -\int_0^1 ln(1 + x^n)dx \leq 0$

$\Rightarrow ln2 - \frac{1}{1+n} \leq ln2 - \int_0^1 ln(1 + x^n)dx \leq ln2$

$\Rightarrow ln2 - \frac{1}{1+n} \leq V_n \leq ln2$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(ln2 - \frac{1}{1+n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} ln2 = ln2$, donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = ln2$.

4.a/ Vérifions que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$V_n + nU_n = n$

$V_n + nU_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n}dx + n\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx$

$V_n + nU_n = \int_0^1 \left(\frac{nx^n}{1+x^n} + \frac{n}{1+x^n}\right)dx$

$V_n + nU_n = n\int_0^1 \frac{x^n+1}{1+x^n}dx$

$V_n + nU_n = n\int_0^1 dx$

$V_n + nU_n = n[x]_0^1$

$V_n + nU_n = n$

b/ Déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1 - U_n) = ln2$

$V_n + nU_n = n \Leftrightarrow V_n = n(1 - U_n)$, donc :

$\lim\limits_{n\to+\infty} n(1 - U_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = ln2$,

d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1 - U_n) = ln2$

Scanné avec CamScanner

Corrigé 26

On pose $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} sin3xdx$ et $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n sin3xdx$

1/ a. Calculons I_0

$I_0 = \left[-\frac{1}{3}cos3x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}$

b. Calculons I_1

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} xsin3xdx$

Posons $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = sin3x \end{cases}$, on a $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{1}{3}cos3x \end{cases}$, donc

$I_1 = \left[-\frac{1}{3}xcos3x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} cos3xdx$

$I_1 = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}sin3x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{9}$

2/ a. Déterminons, lorsque $n \geq 1$, I_{n+2} en fonction de I_n

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n sin3xdx$.

Posons $\begin{cases} u(x) = sin3x \\ v'(x) = x^n \end{cases}$, on a $\begin{cases} u'(x) = 3cos3x \\ v(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \end{cases}$, donc

$I_n = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}sin3x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{3}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{n+1}cos3xdx$

Intégrons par parties $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{n+1}cos3xdx$ en posant

$\begin{cases} u(x) = cos3x \\ v'(x) = x^{n+1} \end{cases}$, on a $\begin{cases} u'(x) = -3sin3x \\ v(x) = \frac{1}{n+2}x^{n+2} \end{cases}$, donc

$J_n = \left[\frac{1}{n+2}x^{n+2}cos3x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{3}{n+2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{n+2}sin3xdx$

$J_n = \frac{3}{n+2}I_{n+2}$, d'où : $I_n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1} - \frac{3}{n+1} \times \frac{3}{n+2}I_{n+2}$

$$I_n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1} - \frac{9}{(n+1)(n+2)}I_{n+2} \quad (1)$$

b. Vérifions que $I_3 = \frac{\pi^2}{18} - \frac{2}{27}$

(1) $\Rightarrow I_{n+2} = -\frac{(n+1)(n+2)}{9}I_n + \frac{n+2}{9}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1}$. Ainsi :

$I_3 = -\frac{6}{9}I_1 + \frac{3}{9}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2$

$I_3 = -\frac{6}{9} \times \frac{1}{9} + \frac{3}{9}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2$

$I_3 = -\frac{2}{27} + \frac{\pi^2}{108}$

3/ a. Montrons que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone

$x \in \left[0;\frac{\pi}{6}\right], \Rightarrow 0 \leq x^{n+1} \leq x^n \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq x^{n+1}sin3x \leq x^n sin3x$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{n+1}sin3xdx \leq \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n sin3xdx$

$\Rightarrow 0 \leq I_{n+1} \leq I_n$

On déduit que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc monotone.

b. Comparons I_n à $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n dx$

$x \in \left[0;\frac{\pi}{6}\right] \Rightarrow 0 \leq sin3x \leq \frac{1}{2} \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq x^n sin3x \leq x^n$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n sin3xdx \leq \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n dx$

$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n dx$

c. Déterminons $\lim_{n\to+\infty} I_n$

On a : $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n dx = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n dx = 0$, car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1} = 0$ (puisque $\left|\frac{\pi}{6}\right| < 1$). On en déduit, d'après le théorème des gendarmes que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Corrigé 27

1/ a. Calculons $\int_0^x te^t dt$, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$

La fonction $t \mapsto te^t$ est continue sur $\mathbb{R}$. $0 \in \mathbb{R}$, donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x te^t dt$ existe. En intégrant par parties en posant

Scanné avec CamScanner

$\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^t \end{cases}$, on a $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = e^t \end{cases}$, donc :

$\int_0^x te^t dt = [te^t]_0^x - \int_0^x e^t dt = [te^t - e^t]_0^x$

$\int_0^x te^t dt = (x-1)e^x + 1$

b. $u(x) = xe^x + a$

Soit U la primitive de u sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

i/ Exprimons U(x) à l'aide d'une intégrale

$U(x) = \int_0^x u(t)dt = \int_0^x (te^t + a)dt$

ii/ Déduisons $U(x)$ en fonction de x

$U(x) = \int_0^x te^t dt + a\int_0^x dt$

$U(x) = (x-1)e^x + 1 + a[t]_0^x$

$U(x) = (x-1)e^x + 1 + ax.$

2/ $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = xe^x - 2\int_0^1 f(x)dx \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Calculons $\int_0^1 f(x)dx$

Posons $c = -2\int_0^1 f(x)dx$, alors $f'(x) = xe^x + c$, d'où

$f(x) = \int_0^x (te^t + c)dt$

$f(x) = \int_0^x te^t dt + c\int_0^x dt$

$f(x) = (x-1)e^x + 1 + cx$

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xe^x dx + \int_0^1 (-e^x + 1 + cx)dx$

$\int_0^1 f(x)dx = 1 + \left[-e^x + x + \frac{c}{2}x^2\right]_0^1$

$\int_0^1 f(x)dx = 1 - e + 1 + \frac{c}{2} + 1$

$\int_0^1 f(x)dx = 3 - e + \frac{c}{2}$

$\int_0^1 f(x)dx = 3 - e - \int_0^1 f(x)dx$, d'où $2\int_0^1 f(x)dx = 3-e$

soit $\int_0^1 f(x)dx = \frac{3-e}{2}$.

Corrigé 28

$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx$

1/ Calculez I_2

$I_2 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = I_2 = -\int_1^2 -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$

$I_2 = -\left[e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = e - e^{\frac{1}{2}}$ soit $I_2 = e - \sqrt{e}$

2/ a. Montrons que pour tout entier naturel $n \geq 2$ et tout réel x de $[1; 2]$. $f'_{n-1}(x) = -(n-1)f_n(x) - f_{n+1}(x)$

On a : $f_{n-1}(x) = \frac{1}{x^{n-1}} e^{\frac{1}{x}}$ et $f'_{n-1}(x) = \frac{-n+1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^{n-1}} \times \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

$f'_{n-1}(x) = \frac{-(n-1)}{x^n} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}$, soit

$f'_{n-1}(x) = -(n-1)f_n(x) - f_{n+1}(x)$ **(1)**

b. Déduisons que, pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$

(1)$\Rightarrow f_{n+1}(x) = -f'_{n-1}(x) = -(n-1)f_n(x)$

$\Rightarrow \int_1^2 f_{n+1}(x)dx = -\int_1^2 f'_{n-1}(x)dx - (n-1)\int_1^2 f_n(x)dx$

$\Rightarrow I_{n+1} = -[f_{n-1}(x)]_1^2 - (n-1)I_n$

$\Rightarrow I_{n+1} = -\left(\frac{1}{2^{n-1}} e^{\frac{1}{2}} - e\right) - (n-1)I_n$

$\Rightarrow I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$

c. Calculons I_3

$I_3 = e - \frac{\sqrt{e}}{2} - I_2$

$I_3 = e - \frac{\sqrt{e}}{2} - (e - \sqrt{e})$ soit $I_3 = \frac{\sqrt{e}}{2}$.

3/ a. Etablissons que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1 ; 2]$, on a : $0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$

Soit $n \geq 2$ et $x \in [1 ; 2]$, alors $\frac{1}{x^n} \geq 0$ et $e^{\frac{1}{x}} \geq 0$, donc $\frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}}$.

D'autre part $\frac{1}{x} \leq 1$ et par la croissance de la fonction

Scanné avec CamScanner

exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $e^{\frac{1}{x}} \leq e$. Il vient que :

$\forall n \geq 2$ et $x \in]1\,;\,2]$, $0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$

b. Déduisons un encadrement pour I_n

$0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n} \Rightarrow 0 \leq \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx \leq e \int_1^2 \frac{1}{x^n} dx$

$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq e \left[\frac{1}{(1-n)x^{n-1}}\right]_1^2$

$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq \frac{e}{n-1}$

Donc : $\forall n \geq 2$ et $x \in]1\,;\,2]$, $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n-1}$

Etudions la limite éventuelle de la suite (I_n)

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n-1} = 0$, donc le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Corrigé 29

On pose pour tout entier naturel $n \geq 1$, $I_n = \int_0^2 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+4}} dx$.

1/ Calculez I_1

$I_1 = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx = \left[\sqrt{x^2+4}\right]_0^2$ soit $I_1 = 2\sqrt{2} - 2$

2/ Montrons que pour tout entier naturel $n \geq 3$,

$I_n = \int_0^2 x^{n-2}\sqrt{x^2+4}dx - 4I_{n-2}$

On a $\frac{x^n}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{x^{n-2}(x^2+4)-4x^{n-2}}{\sqrt{x^2+4}}$, donc $I_n = \int_0^2 \frac{x^{n-2}(x^2+4)}{\sqrt{x^2+4}} dx - 4\int_0^2 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{x^2+4}} dx$

$I_n = \int_0^2 \frac{x^{n-2}(x^2+4)}{\sqrt{x^2+4}} dx - 4\int_0^2 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{x^2+4}} dx$

$I_n = \int_0^2 x^{n-2}\sqrt{x^2+4}dx - 4I_{n-2}$ (*)

3/ Déduisons que $nI_n = 2^n\sqrt{2} - 4(n-1)I_{n-2}$, $\forall n \geq 3$

Intégrons par parties $I'_n = \int_0^2 x^{n-2}\sqrt{x^2+4}dx$

Posons $\begin{cases} u'(x) = x^{n-2} \\ v(x) = \sqrt{x^2+4} \end{cases}$, on a $\begin{cases} u(x) = \frac{1}{n-1}x^{n-1} \\ v'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \end{cases}$, donc

$I'_n = \int_0^2 x^{n-2}\sqrt{x^2+4}dx$

$I'_n = \left[\frac{1}{n-1}x^{n-1}\sqrt{x^2+4}\right]_0^2 - \frac{1}{n-1}\int_0^2 x^{n-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$

$I'_n = \frac{1}{n-1}2^{n-1}\sqrt{8} - \frac{1}{n-1}I_n$

$I'_n = \frac{2^n}{n-1}\sqrt{2} - \frac{1}{n-1}I_n$, donc

(*)$\Rightarrow I_n = \frac{2^n}{n-1}\sqrt{2} - \frac{1}{n-1}I_n - 4I_{n-2}$

$\Rightarrow I_n + \frac{1}{n-1}I_n = \frac{2^n}{n-1}\sqrt{2} - 4I_{n-2}$

$\Rightarrow \frac{n}{n-1}I_n = \frac{2^n}{n-1}\sqrt{2} - 4I_{n-2}$

$\Rightarrow nI_n = 2^n\sqrt{2} - 4(n-1)I_{n-2}$

Déduisons les valeurs de I_3 et I_5

$3I_3 = 2^3\sqrt{2} - 8I_1$

$I_3 = \frac{2^3\sqrt{2}-8(2\sqrt{2}-2)}{3}$ soit $I_3 = \frac{16-8\sqrt{2}}{3}$

$5I_5 = 2^5\sqrt{2} - 16I_3$

$I_5 = \frac{2^5\sqrt{2}-16\left(\frac{16-8\sqrt{2}}{3}\right)}{5}$ soit $I_5 = \frac{224\sqrt{2}-256}{15}$.

Corrigé 30

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{4e^x}{e^x+1}$.

1/ a. Démontrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - \frac{4}{e^x+1}$

$4 - \frac{4}{e^x+1} = \frac{4e^x+4-4}{e^x+1} = \frac{4e^x}{e^x+1} = f(x)$

b. Montrons que la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé admet deux asymptotes

On a : $D_f = \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(4 - \frac{4}{e^x+1}\right) = 4$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$

Scanné avec CamScanner

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(4-\frac{4}{e^x+1}\right) = 0$, car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$. On déduit que la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé admet deux asymptotes horizontales : les droites d'équations $y = 0$ et $y = 4$.

c. Tracé de la courbe (C) et ses asymptotes (confer figure ci-dessous))

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, on a :

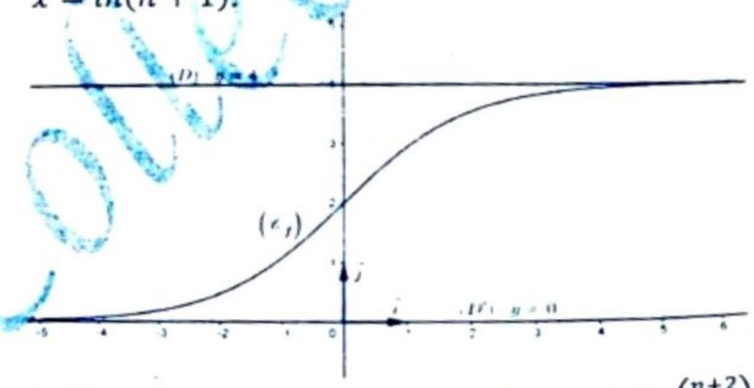
$f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$ et $f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	4

2/ $u_n = \int_{lnn}^{ln(n+1)} f(x)dx$, $n \geq 1$

a. Interprétation graphique de u_n

Puisque $f(x)$ pour tout x réel, $u_n = \int_{lnn}^{ln(n+1)} f(x)dx$ désigne l'aire (en unités d'aires) du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = lnn$ et $x = ln(n+1)$.



b. Etablissons que pour tout $n \geq 1$, $u_n = 4ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

$u_n = \int_{lnn}^{ln(n+1)} f(x)dx = 4\int_{lnn}^{ln(n+1)} \frac{e^x}{e^x+1}dx$

$u_n = 4[ln(e^x+1)]_{lnn}^{ln(n+1)}$

$u_n = 4[ln(n+2) - ln(n+1)]$

$u_n = 4ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

3/ On pose pour tout $n \geq 1$, $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

Interprétation en termes d'aires de S_n

S_n représente l'aire (en unités d'aires), du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites $x = 0$ (donc l'axe des ordonnées) et $x = ln(n+1)$.

Déduisons de 2.b/ une expression simple de S_n

$\forall n \geq 1$, $u_n = 4ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$, donc :

$S_n = 4ln\left(\frac{1+2}{1+1}\right) + 4ln\left(\frac{2+2}{2+1}\right) + 4ln\left(\frac{3+2}{3+1}\right) + \cdots + 4ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

$S_n = 4\left[ln\left(\frac{3}{2}\right) + ln\left(\frac{4}{3}\right) + \cdots + ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right]$

$S_n = 4ln\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\ldots\times\frac{n+2}{n+1}\right)$

$S_n = 4ln\left(\frac{n+2}{2}\right)$

4/ a. Calculons l'aire $A(n)$

$A(n) = \int_0^{ln(n+1)}(4 - f(x))dx$

$A(n) = 4\int_0^{ln(n+1)} dx - \int_0^{ln(n+1)} f(x)dx$

$A(n) = 4ln(n+1) - S_n$

$A(n) = 4ln(n+1) - 4ln\left(\frac{n+2}{2}\right)$

$A(n) = 4[ln(n+1) - ln(n+2) + ln2]$

$A(n) = 4ln\left(2\frac{n+1}{n+2}\right)$

b. Limite de $A(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$

$\lim_{n\to+\infty} A(n) = \lim_{n\to+\infty} 4ln\left(2\frac{n+1}{n+2}\right)$

$\lim_{n\to+\infty} A(n) = 4ln2$, car $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+2} = 1$.

Scanné avec CamScanner

Corrigé 31

$I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$., $g_n(x) = x^n e^{x^2}$, $n \in IN^*$

1/ a. Démontrons que la fonction G_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $G_1(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g_1

La fonction G_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $G_1'(x) = xe^{x^2} = g_1(x)$, donc $G_1(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g_1.

b. Déduisons la valeur de I_1

$I_1 = \int_0^1 xe^{x^2} dx = \int_0^1 g_1(x)dx = [G_1(x)]_0^1$

$I_1 = \frac{1}{2}(e-1)$

c. $h_n(x) = x^n$, $n \in IN^*$

Montrons que pour tout réel x $(h_{n+1} \times G_1)'(x) = g_{n+2}(x) + \frac{n+1}{2} g_n(x)$

Soit $n \in IN^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(h_{n+1} \times G_1)(x) = \frac{x^{n+1}}{2} e^{x^2}$, donc

$(h_{n+1} \times G_1)'(x) = \frac{(n+1)x^n}{2} e^{x^2} + x^{n+2}e^{x^2}$

$(h_{n+1} \times G_1)'(x) = \frac{n+1}{2} g_n(x) + g_{n+2}(x)$.

d. Déduisons que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, on a : $I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2} I_n$

$I_{n+2} + \frac{n+1}{2} I_n = \int_0^1 x^{n+2} e^{x^2} dx + \frac{n+1}{2} \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$

$I_{n+2} + \frac{n+1}{2} I_n = \int_0^1 \left(x^{n+2} + \frac{n+1}{2} x^n\right) e^{x^2} dx$

$I_{n+2} + \frac{n+1}{2} I_n = \int_0^1 (h_{n+1} \times G_1)'(x)dx$

$I_{n+2} + \frac{n+1}{2} I_n = [(h_{n+1} \times G_1)(x)]_0^1 = \left[\frac{x^{n+1}}{2} e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e$,

donc : $\forall n \in IN^*$, $I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2} I_n$.

e. Calculons I_3 et I_5

$I_3 = \frac{1}{2}e - I_1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}(e-1)$

$I_3 = \frac{1}{2}$

$I_5 = \frac{1}{2}e - 2I_3 = \frac{1}{2}e - 1$ soit $I_5 = \frac{1}{2}(e-2)$

2/ a. Montrons que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n \geq 0$.

$\forall n \in IN^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^n e^{x^2} \geq 0$. La positivité de l'intégrale permet de déduire que $\int_0^1 x^n e^{x^2} dx \geq 0$. Il vient que : $\forall n \in IN^*$, $I_n \geq 0$.

b. Montrons que la suite (I_n) est décroissante

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x^{n+1} - x^n) e^{x^2} dx$

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n (x-1) e^{x^2} dx$

Or : $\forall x \in [0;1]$, $x^n(x-1)e^{x^2} \leq 0$, car $\begin{cases} x^n \geq 0 \\ e^{x^2} > 0 \\ x - 1 \leq 0 \end{cases}$, donc

$\int_0^1 x^n (x-1) e^{x^2} dx \leq 0$. Par suite : $\forall n \in IN^*$, $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

D'où la suite (I_n) est décroissante.

c. Déduisons que la suite (I_n) est convergente

Comme la suite (I_n) est décroissante et minorée (par 0), alors elle converge.

d. Déterminons la valeur de ℓ

Comme (I_n) est à termes positifs, alors $\ell \geq 0$.

Raisonnons par l'absurde en supposant $\ell > 0$.

D'après la question 1/d, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 3, $I_n = \frac{e}{2} - \frac{n-1}{2} I_{n-2}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} I_{n-2} = \ell > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n-1}{2} I_{n-2} = +\infty$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e}{2} - \frac{n-1}{2} I_{n-2} = -\infty$. Ce qui est une contradiction et donc $\ell = 0$.

Corrigé 32

$G_0(t) = \int_0^t e^x dx$ et $G_n(t) = \int_0^t x^n e^x dx$, $n \geq 1$

1. a/ Démontrons que $G_n(t)$ existe pour tout entier naturel

$x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x^n$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc continues sur l'intervalle $[0;t]$ où $t \in \mathbb{R}$. Par suite la fonction $x \mapsto x^n e^x$ est continue sur $[0;t]$ comme produit de deux fonctions continues

Scanné avec CamScanner

sur $[0;t]$. Elle admet donc une primitive sur $[0;t]$. Ce qui assure l'existence de $G_n(t)$.

Expression de $G_0(t)$ et de $G_1(t)$ en fonction de t

$G_0(t) = \int_0^t e^x dx = [e^x]_0^t = e^t$

$G_1(t) = \int_0^t xe^x dx$

Posons $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases}$, on a $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$, donc

$G_1(t) = [xe^x]_0^t - \int_0^t e^x dx = [xe^x - e^x]_0^t$

$G_1(t) = (t-1)e^t + 1$

b/ Démontrons que pour tout $t \geq 0$, on a : $\frac{1}{2}t^2 \leq G_1(t) \leq \frac{1}{2}t^2e^t$

Soit $t \geq 0$, $x \in [0;t] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq t$

$\Rightarrow e^0 \leq e^x \leq e^t$

$\Rightarrow x \leq xe^x \leq xe^t$

$\Rightarrow \int_0^t x dx \leq \int_0^t xe^x dx \leq e^t \int_0^t x dx$

$\Rightarrow \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^t \leq G_1(t) \leq e^t \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^t$

$\Rightarrow \frac{1}{2}t^2 \leq G_1(t) \leq \frac{1}{2}t^2e^t$ **(1)**

c/ Démontrons que pour tout $t \leq 0$, on a : $\frac{1}{2}t^2e^t \leq G_1(t) \leq \frac{1}{2}t^2$

Soit $t \leq 0$, on a : $G_1(t) = \int_0^t xe^t dx = -\int_t^0 xe^t dx$

$x \in [t;0] \Leftrightarrow t \leq x \leq 0$

$\Rightarrow e^t \leq e^x \leq e^0$

$\Rightarrow xe^t \geq xe^x \geq x$, car $x \leq 0$

$\Rightarrow e^t \int_t^0 x dx \geq \int_t^0 xe^x dx \geq \int_t^0 x dx$

$\Rightarrow -e^t \int_t^0 x dx \leq -\int_t^0 xe^x dx \leq -\int_t^0 x dx$

$\Rightarrow e^t \int_0^t x dx \leq G_1(t) \leq \int_0^t x dx$

$\Rightarrow e^t \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^t \leq G_1(t) \leq \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^t$

$\Rightarrow \frac{1}{2}t^2e^t \leq G_1(t) \leq \frac{1}{2}t^2$ **(1')**

d/ Déduisons la limite : $\lim_{t\to 0} \frac{te^t - e^t + 1}{t(e^t-1)}$

Si $t \geq 0$, alors $e^t - 1 \geq 0$ et (1) $\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{t}{e^t-1} \leq \frac{te^t-e^t+1}{t(e^t-1)} \leq \frac{1}{2}\frac{te^t}{e^t-1}$.

Or $\lim_{\substack{t\to 0 \\ >}} \frac{t}{e^t-1} = 1$, donc $\lim_{\substack{t\to 0 \\ >}} \frac{te^t-e^t+1}{t(e^t-1)} = \frac{1}{2}$

Si $t \leq 0$, alors $e^t - 1 \leq 0$ et (1') $\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{te^t}{e^t-1} \leq \frac{te^t-e^t+1}{t(e^t-1)} \leq \frac{1}{2}\frac{t}{e^t-1}$, d'où $\lim_{\substack{t\to 0 \\ <}} \frac{te^t-e^t+1}{t(e^t-1)} = \frac{1}{2}$.

On conclut que : $\lim_{t\to 0} \frac{te^t-e^t+1}{t(e^t-1)} = \frac{1}{2}$.

2. $I_n = G_n(1) = \int_0^1 x^n e^x dx$, $n \geq 1$

a/ Montrons que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$G_n(t) = t^n e^t - nG_{n-1}(t)$

On a $G_n(t) = \int_0^t x^n e^x dx$

Posons $\begin{cases} u(x) = x^n \\ v'(x) = e^x \end{cases}$ on a : $\begin{cases} u'(x) = nx^{n-1} \\ v(x) = e^x \end{cases}$, donc :

$G_n(t) = [x^n e^x]_0^t - n\int_0^t x^{n-1}e^x dx$

$G_n(t) = t^n e^t - nG_{n-1}(t)$

Déduisons I_n en fonction de I_{n-1} pour $n \geq 1$

D'après ce qui précède, on a : $I_n = e - nI_{n-1}$

b/ Montrons que la suite (I_n) est décroissante et positive

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^n \leq x^{n-1}$

$\Rightarrow 0 \leq x^n e^x \leq x^{n-1}e^x$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 x^n e^x dx \leq \int_0^1 x^{n-1}e^x dx$

$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq I_{n-1}$

(I_n) est décroissante et minorée par 0, donc (I_n) est convergente.

c/ Encadrement de I_n

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^x \leq e$

$\Rightarrow x^n \leq x^n e^x \leq ex^n$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow \int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^x dx \leq e\int_0^1 x^n dx$

$\Rightarrow \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 \leq I_n \leq e\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$, alors d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Corrigé 33

$f_n(x) = \frac{(1-x)^n}{n!}e^x$ où $n \in IN^*$.

1/ Montrons que si $:0 \leq x \leq 1$, on a $0 \leq f_n(x) \leq \frac{e}{n!}$

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^x \leq e$ (1)

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0$

$\Rightarrow 0 \leq 1 - x \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq (1-x)^n \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{(1-x)^n}{n!} \leq \frac{1}{n!}$, (2) car $\frac{1}{n!} > 0$

(1)×(2) $\Rightarrow 0 \leq \frac{(1-x)^n}{n!}e^x \leq \frac{e}{n!}$ soit $0 \leq f_n(x) \leq \frac{e}{n!}$.

2/ Soit $I_n = \int_{1-x}^1 \frac{(1-t)^n}{n!}e^t dt$ pour $0 \leq x \leq 1$.

a. Calculons I_1

$I_1 = \int_{1-x}^1 (1-t)e^t dt$

Posons $\begin{cases} u(t) = 1-t \\ v'(t) = e^t \end{cases}$, on a $\begin{cases} u'(t) = -1 \\ v(t) = e^t \end{cases}$ et

$I_1 = [(1-t)e^t]_{1-x}^1 + \int_{1-x}^1 e^t dt$

$I_1 = -xe^{1-x} + [e^t]_{1-x}^1$

$I_1 = xe^{1-x} + e - e^{1-x}$ soit $I_1 = e - \left(1 + \frac{x}{1!}\right)e^{1-x}$

b. Vérifions la relation de récurrence : $I_{n+1} = I_n - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{1-x}$

$I_{n+1} = \int_{1-x}^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^t dt$

Posons $\begin{cases} u(t) = \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \\ v'(t) = e^t \end{cases}$, on a $\begin{cases} u'(t) = -\frac{(1-t)^n}{n!} \\ v(t) = e^t \end{cases}$ et

$I_{n+1} = \left[\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^t\right]_{1-x}^1 + \int_{1-x}^1 \frac{(1-t)^n}{n!}e^t dt$

$I_{n+1} = -\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{1-x} + I_n$ soit $I_{n+1} = I_n - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{1-x}$.

c. Démontrons alors que pour tout entier n non nul,

$I_n = e - e^{1-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$

$I_{n+1} = I_n - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{1-x} \Rightarrow I_{n+1} - I_n = -\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{1-x}$

On a donc :

$I_n - I_{n-1} = -\frac{x^n}{n!}e^{1-x}$

$I_{n-1} - I_{n-2} = -\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{1-x}$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

$I_3 - I_2 = -\frac{x^3}{2!}e^{1-x}$

$I_2 - I_1 = -\frac{x^2}{2!}e^{1-x}$

- - - - - - - - - - - - -

En faisant somme membre à membre et en simplifiant, on a : $I_n - I_1 = -\left(\frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{1-x}$, d'où :

$I_n = e - \left(1 + \frac{x}{1!}\right)e^{1-x} - \left(\frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{1-x}$ soit

$I_n = e - e^{1-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$

d Déterminez $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

$t \in [1-x; 1] \Rightarrow 0 \leq f_n(t) \leq \frac{e}{n!}$

$\Rightarrow 0 \leq \int_{1-x}^1 \frac{(1-t)^n}{n!}e^t dt \leq \frac{e}{n!}\int_{1-x}^1 dt$

$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{ex}{n!}$

Scanné avec CamScanner

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{ex}{n!} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

Déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$

$I_n = e - e^{1-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$, donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[e - e^{1-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\right]$ c'est-à-dire $\left[-e^{1-x} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\right] = -e$, d'où

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = \frac{e}{e^{1-x}} = e^x \quad (*)$

Applications

$u_n = 1 + \frac{1}{2\times1!} + \frac{1}{2^2\times2!} + \cdots + \frac{1}{2^n\times n!}$

$v_n = 1 + \frac{1}{3\times1!} + \frac{1}{3^2\times2!} + \cdots + \frac{1}{3^n\times n!}$

En posant $x = \frac{1}{2}$ dans (*), on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2\times1!} + \frac{1}{2^2\times2!} + \cdots + \frac{1}{2^n\times n!}\right) = e^{\frac{1}{2}}$. D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^{\frac{1}{2}}$

En posant $x = \frac{1}{3}$ dans (*), on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{3\times1!} + \frac{1}{3^2\times2!} + \cdots + \frac{1}{3^n\times n!}\right) = e^{\frac{1}{3}}$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = e^{\frac{1}{3}}$

Corrigé 34

Soit $x \neq -1$ et n un entier naturel.

1. Vérifions que :

$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n = \frac{(-1)^n x^{n+1} + 1}{x+1}$

$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $-x$ et de premier terme 1 ; d'où :

$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$

Or $1 - (-x)^{n+1} = 1 - (-1)^{n+1}(-x)^{n+1}$

$= 1 - (-1)(-1)^n(-x)^{n+1} = 1 + (-1)^n(-x)^{n+1}$ d'où :

$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n = \frac{(-1)^n x^{n+1} + 1}{x+1}$ (*)

2. Déduisons que :

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} - \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{x+1} dx$

$(*) \Rightarrow \int_0^1 (1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n)\, dx = \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1} + 1}{x+1} dx$

$\Rightarrow \left[x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{x+1} dx + \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} - \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{x+1} dx$

3. On pose $J_n = \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{x+1} dx$

Montrons que pour tout n, $J_n = \frac{(-1)^n}{n+2}\left(\frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(x+1)^2} dx\right)$

Utilisons une intégration par parties en posant :

$\begin{cases} u'(x) = (-1)^n x^{n+1} \\ v(x) = \frac{1}{x+1} \end{cases}$, on a $\begin{cases} u(x) = \frac{(-1)^n}{n+2} x^{n+2} \\ v'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \end{cases}$, donc

$J_n = \left[\frac{(-1)^n}{n+2} x^{n+1} \times \left(\frac{1}{x+1}\right)\right]_0^1 + \frac{(-1)^n}{n+2} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(x+1)^2} dx$

$J_n = \frac{(-1)^n}{2(n+2)} + \frac{(-1)^n}{n+2} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(x+1)^2} dx$

$J_n = \frac{(-1)^n}{n+2}\left(\frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(x+1)^2} dx\right)$

4. Montrons que, pour tout $x \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}$:

$0 \leq x^{n+2} \leq 1$ et $0 \leq \frac{x^{n+2}}{(x+1)^2} \leq 1$

$x \in [0; 1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq x^{n+2} \leq 1$ **(1)**

$x \in [0; 1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq x + 1 \leq 2$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow 1 \leq (x+1)^2 \leq 4$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{(x+1)^2} \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{(x+1)^2} \leq 1 \quad (2)$

$(1)\times(2) \Rightarrow 0 \leq \frac{x^{n+2}}{(x+1)^2} \leq 1$

5. On pose $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Limite de u_n

$0 \leq \frac{x^{n+2}}{(x+1)^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(x+1)^2}dx \leq \int_0^1 dx$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(x+1)^2}dx \leq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(x+1)^2}dx \leq \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{(-1)^n}{2(n+2)} \leq J_n \leq \frac{3(-1)^n}{2(n+2)}$

$\Rightarrow \frac{(-1)^n}{2(n+2)} \leq u_n - \int_0^1 \frac{dx}{x+1} \leq \frac{3(-1)^n}{2(n+2)}$

$\Rightarrow \frac{(-1)^n}{2(n+2)} \leq u_n - [ln(x+1)]_0^1 \leq \frac{3(-1)^n}{2(n+2)}$

$\Rightarrow \frac{(-1)^n}{2(n+2)} \leq u_n - ln2 \leq \frac{3(-1)^n}{2(n+2)}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2(n+2)} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3(-1)^n}{2(n+2)} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - ln2) = 0$.

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = ln2$.

6. Déterminons la plus petite valeur n_0 de n pour laquelle u_n est une valeur approchée de $ln2$ à 5×10^{-2} près

Il suffit de poser : $\frac{3}{2(n+2)} \leq 5 \times 10^{-2}(**)$

$(**) \Rightarrow \frac{1}{(n+2)} \leq \frac{10}{3} \times 10^{-2}$

$\Rightarrow \frac{1}{(n+2)} \leq \frac{10}{3} \times 10^{-2}$

$\Rightarrow \frac{1}{(n+2)} \leq \frac{1}{30}$

$\Rightarrow n + 2 \geq 30$

$\Rightarrow n \geq 28$

On déduit que $n_0 = 28$.

Corrigé 35

Partie A

Par linéarité de l'intégrale : $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \Leftrightarrow \int_a^b (f-g)(x)dx \leq 0$. Or pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \leq g(x)$, donc $f - g \leq 0$ et le premier rappel assure le résultat.

Partie B

1/a. f est la composée de la fonction $x \longmapsto -x^2$, décroissante sur $[0;1]$, suivie de la fonction exponentielle croissante sur $\mathbb{R}$. f est donc décroissante sur $[0;1]$.

On peut bien sûr argumenter sur la dérivabilité de f puis le signe de sa dérivée.

On en déduit que, pour tout x de $[0;1]$,

$f(1) \leq f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow \frac{1}{e} \leq f(x) \leq 1$.

b. Par croissance de l'intégrale, on déduit de la question précédente que :

$\int_0^1 \frac{1}{e}dx \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 1dx \Leftrightarrow \frac{1}{e} \leq u_0 \leq 1$.

2/ $u_1 = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 xe^{-x^2}dx$

On pose $u(x) = -x^2$, ainsi pose $u'(x) = -2x$ et $(u'e^u)(x) = -2xf(x) \Leftrightarrow xf(x) = -\frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$. On a donc : $u_1 = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2e} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

3/ a. Comme la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$, pour tout x de $[0;1]$, $x^n f(x) \geq 0$.

Enfin, comme les bornes sont dans le bon ordre, par positivité de l'intégrale, on a bien le résultat.

b. Pour tout n dans IN, $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1} f(x) - x^n f(x)dx = \int_0^1 (x-1)x^n f(x)dx \leq 0$, car la fonction

Scanné avec CamScanner

intégrée est clairement négative sur $[0\ ;\ 1]$. La suite (u_n) est donc décroissante.

c. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

4/ a. D'après la question 1/a, pour tout x de $[0\ ;\ 1]$, $f(x) \leq 1$, par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 x^n f(x)dx \leq \int_0^1 x^n dx \Leftrightarrow \int_0^1 x^n f(x)dx \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 x^n f(x)dx \leq \frac{1}{n+1}.$$

b. D'après les questions 3.a et 4.a, on a $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes la suite converge vers 0.

Corrigé 36

1. Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \\ U_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

a/ En posant $x = tant$ où $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, montrons que $U_0 = \frac{\pi}{4}$

$U_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

Posons $x = tant$: $dx = (1 + tan^2 t)dt$, $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}, \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

donc $U_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+tan^2 t}(1 + tan^2 t)dt$

$U_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = [t]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$

b/ Montrons que la suite (U_n) est positive et décroissante et déduisons qu'elle est convergente

On a $U_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx$

$\forall x \in [0;1], \frac{1}{1+x^2} > 0$ et $\frac{x^{2n}}{1+x^2} \geq 0$, donc $U_0 \geq 0$ et :$\forall$ IN^*, $U_n \geq 0$. D'autre part : $\forall x \in [0;1]$, :$\forall n \in IN^*$, x $x^{2n} \leq 1$ (*)

$(*) \Rightarrow \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

$\Rightarrow U_{n+1} \leq U_n \leq U_0$

On conclut que (U_n) est positive et décroissante. Elle converge, car décroissante et minorée.

c/ Montrons que pour tout entier naturel n on a :

$U_{n+1} + U_n = \frac{1}{2n+1}$

$U_{n+1} + U_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$

$U_{n+1} + U_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} + \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$

$U_{n+1} + U_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}(x^2+1)}{1+x^2}dx$

$U_{n+1} + U_n = \int_0^1 x^{2n}dx$

$U_{n+1} + U_n = \left[\frac{1}{2n+1}x^{2n}\right]_0^1$

$U_{n+1} + U_n = \frac{1}{2n+1}$

Déduisons U_1 et U_2

$U_1 + U_0 = 1 \Rightarrow U_1 = 1 - \frac{\pi}{4}$

$U_2 + U_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow U_2 = \frac{1}{3} - U_1$

$\Rightarrow U_2 = \frac{-2}{3} + \frac{\pi}{4}$

d/ Un encadrement de U_n

$\forall n \in IN$, $U_n \geq 0$, donc $\forall n \in IN$, $U_{n+1} + U_n \geq U_n$, $($

$\forall n \in IN$, $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2n+1}$

Calculons $\lim_{n\to+\infty} U_n$

Scanné avec CamScanner

intégrée est clairement négative sur $[0\ ;\ 1]$. La suite (u_n) est donc décroissante.

c. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

4/ a. D'après la question 1/a, pour tout x de $[0\ ;\ 1]$, $f(x) \leq 1$, par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 x^n f(x)dx \leq \int_0^1 x^n dx \Leftrightarrow \int_0^1 x^n f(x)dx \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 x^n f(x)dx \leq \frac{1}{n+1}.$$

b. D'après les questions 3.a et 4.a, on a $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes la suite converge vers 0.

Corrigé 36

1. Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \\ U_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

a/ En posant $x = tant$ où $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, montrons que $U_0 = \frac{\pi}{4}$

$U_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

Posons $x = tant$: $dx = (1+tan^2t)dt$, $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

donc $U_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+tan^2t}(1+tan^2t)dt$

$U_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = [t]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$

b/ Montrons que la suite (U_n) est positive et décroissante et déduisons qu'elle est convergente

On a $U_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx$

$\forall x \in [0;1], \frac{1}{1+x^2} > 0$ et $\frac{x^{2n}}{1+x^2} \geq 0$, donc $U_0 \geq 0$ et $:\forall n \in IN^*, U_n \geq 0$. D'autre part : $\forall x \in [0;1], :\forall n \in IN^*, x^{2n+2} \leq x^{2n} \leq 1$ (*)

$$(*) \Rightarrow \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$$
$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$
$$\Rightarrow U_{n+1} \leq U_n \leq U_0$$

On conclut que (U_n) est positive et décroissante. Elle converge, car décroissante et minorée.

c/ Montrons que pour tout entier naturel n on a :

$U_{n+1} + U_n = \frac{1}{2n+1}$

$U_{n+1} + U_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$

$U_{n+1} + U_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} + \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$

$U_{n+1} + U_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}(x^2+1)}{1+x^2}dx$

$U_{n+1} + U_n = \int_0^1 x^{2n}dx$

$U_{n+1} + U_n = \left[\frac{1}{2n+1}x^{2n}\right]_0^1$

$U_{n+1} + U_n = \frac{1}{2n+1}$

Déduisons U_1 et U_2

$U_1 + U_0 = 1 \Rightarrow U_1 = 1 - \frac{\pi}{4}$

$U_2 + U_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow U_2 = \frac{1}{3} - U_1$

$\Rightarrow U_2 = \frac{-2}{3} + \frac{\pi}{4}$

d. Un encadrement de U_n

$\forall n \in IN, U_n \geq 0$, donc $\forall n \in IN, U_{n+1} + U_n \geq U_n$, donc :

$\forall n \in IN, 0 \leq U_n \leq \frac{1}{2n+1}$

Calculons $\lim_{n\to+\infty} U_n$

Scanné avec CamScanner

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$, alors d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

2. $\begin{cases} V_0 = \int_0^1 ln(1+x^2)dx \\ V_n = \int_0^1 (2n+1)x^{2n} ln(1+x^2)dx, \ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

a/ Démontrons que pour tout entier naturel $n \geq 0$, on a :

$V_n = ln2 - 2U_{n+1}$

$V_n = \int_0^1 (2n+1)x^{2n} \ln(1+x^2)\,dx$

Posons $\begin{cases} u(x) = ln(1+x^2) \\ v'(x) = (2n+1)x^{2n} \end{cases}$, on a $\begin{cases} u'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \\ v(x) = x^{2n+1} \end{cases}$, donc

$V_n = [x^{2n+1} ln(1+x^2)]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx$

$V_n = ln2 - 2U_{n+1}$.

b/ Déduisons la valeur exacte de $V_0 = \int_0^1 ln(1+x^2)dx$

$V_0 = ln2 - 2U_1$

$V_0 = ln2 - 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

$V_0 = ln2 - 2 + \frac{\pi}{2}$

c/ Déduisons les variations de (V_n)

Comme la suite (U_n) est décroissante et $V_n = ln2 - 2U_{n+1}$, alors la suite (V_n) est croissante.

Valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (ln2 - 2U_{n+1})$

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = ln2$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

Corrigé 37

1/ $f'(x) = \frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{(x+\sqrt{1+x^2})} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{(x+\sqrt{1+x^2})} = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = [f(x)]_0^1 = ln(1+\sqrt{2})$

2/ $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$

3/ Montrons que pour tout n dans IN, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

$\forall x \in [0;1], \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$ et $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1 : 0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$ (*)

(*) $\Rightarrow 0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$, par multiplication par x^n

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq \int_0^1 x^n dx$

$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

Déduisons la limite de I_n

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

Montrons que J_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

De façon analogue, on montre successivement que

$0 \leq \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \leq x^{n+2}$ et $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+3}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

4/ Etablissons que $I_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{n+1} J_n$

Posons $\begin{cases} u'(x) = x^n \\ v(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$, on a $\begin{cases} u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ v'(x) = -\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$, donc

$I_n = \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx$

$I_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{n+1} J_n$

On a $nI_n = \frac{n}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{n}{n+1} J_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{2}} + \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} \times \lim\limits_{n\to+\infty} J_n$

Scanné avec CamScanner

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{(n+1)\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}J_n=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}nI_n=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Corrigé 38

a/ Montrons que l'intégrale I peut s'écrire :

$I=\int_0^{\pi}cosx(cosx-cosxsin^2x)dx$

$cosx(cosx-cosxsin^2x)=cos^2x-cos^2xsin^2x$

$cosx(cosx-cosxsin^2x)=cos^2x(1-sin^2x)$

$cosx(cosx-cosxsin^2x)=cos^2x\times cos^2x=cos^4x$, d'où

$I=\int_0^{\pi}cos^4xdx=\int_0^{\pi}cosx(cosx-cosxsin^2x)dx$

b. Montrons que $I=\int_0^{\pi}sin^2xdx-\frac{1}{3}J$

Posons $\begin{cases}u(x)=cosx\\v'(x)=cosx-cosxsin^2x\end{cases}$, on a :

$\begin{cases}u'(x)=-sinx\\v(x)=sinx-\frac{1}{3}sin^3x\end{cases}$, d'ou :

$I=\left[cosx\left(sinx-\frac{1}{3}sin^3x\right)\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}sinx\left(sinx-\frac{1}{3}sin^3x\right)dx$

$I=\int_0^{\pi}\left(sin^2x-\frac{1}{3}sin^4x\right)dx$, car $\left[cosx\left(sinx-\frac{1}{3}sin^3x\right)\right]_0^{\pi}=0$

$I=\int_0^{\pi}sin^2xdx-\frac{1}{3}\int_0^{\pi}sin^4xdx$

$I=\int_0^{\pi}sin^2xdx-\frac{1}{3}J$

c/ Montrons de même que $J=\int_0^{\pi}cos^2xdx-\frac{1}{3}I$

On vérifie que: $J=\int_0^{\pi}sinx(sinx-sinxcos^2x)dx$

Intégrons J par parties en posant $\begin{cases}u(x)=sinx\\v'(x)=sinx-sinxcos^2x\end{cases}$

on a : $\begin{cases}u'(x)=cosx\\v(x)=-cosx+\frac{1}{3}cos^3x\end{cases}$. D'où :

$J=\left[sinx\left(-cosx+\frac{1}{3}cos^3x\right)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}cosx\left(-cosx+\frac{1}{3}cos^3x\right)dx$

$J=\int_0^{\pi}\left(cos^2x-\frac{1}{3}cos^4x\right)dx$

$J=\int_0^{\pi}cos^2xdx-\frac{1}{3}\int_0^{\pi}cos^4xdx$

$J=\int_0^{\pi}cos^2xdx-\frac{1}{3}I$

2. a/ Montrons que $I+J=\frac{3\pi}{4}$

$I=\int_0^{\pi}sin^2xdx-\frac{1}{3}J$ et $=\int_0^{\pi}cos^2xdx-\frac{1}{3}I$, donc

$I+J=\int_0^{\pi}sin^2xdx+\int_0^{\pi}cos^2xdx-\frac{1}{3}(I+J)$, donc

$I+J+\frac{1}{3}(I+J)=\int_0^{\pi}(sin^2x+cos^2x)dx$

$\frac{4}{3}(I+J)=\int_0^{\pi}dx=[x]_0^{\pi}=\pi$, d'où $I+J=\frac{3\pi}{4}$

b/ Montrons que $J-I=0$

$J-I=\int_0^{\pi}sin^4xdx-\int_0^{\pi}cos^4xdx$

$J-I=\int_0^{\pi}(sin^4x-cos^4x)dx$

$J-I=\int_0^{\pi}(sin^2x-cos^2x)(sin^2x+cos^2x)dx$

$J-I=\int_0^{\pi}(sin^2x-cos^2x)dx$

$J-I=\int_0^{\pi}\left(\frac{1-cos2x}{2}-\frac{1+cos2x}{2}\right)dx$

$J-I=\int_0^{\pi}-cos2xdx=\left[-\frac{1}{2}sin2x\right]_0^{\pi}=0$

c/ Déduisons les intégrales I et J

On a $\begin{cases}-I+J=0\\I+J=\frac{3\pi}{4}\end{cases}$, d'où : $I=J=\frac{3\pi}{8}$.

Scanné avec CamScanner

Corrigé 39

$U_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, $n \geq 2$; $x \in]0;+\infty[$, $f(x) = x - lnx$.

1. Tableau de variation de f

$D_f = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\} =]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x - lnx = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x - lnx)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{lnx}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, car $\begin{cases} x \to +\infty \\ \frac{lnx}{x} \to 0 \end{cases}$

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout x de $]0;+\infty[$, on a :

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 1$

Tableau de variations

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$; on pose $I(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)dx$.

a/ Calculons $\int_\lambda^1 lnxdx$

Posons $\begin{cases} u(x) = lnx \\ v'(x) = 1 \end{cases}$, on a : $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$, donc :

$\int_\lambda^1 lnxdx = [xlnx]_\lambda^1 - \int_\lambda^1 dx$

$\int_\lambda^1 lnxdx = [xlnx - x]_\lambda^1 = -1 - \lambda ln\lambda + \lambda$

b/ Déduisons le calcul de $I(\lambda)$ puis $\lim\limits_{\lambda\to 0} I(\lambda)$

$I(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)dx = \int_\lambda^1 xdx - \int_\lambda^1 lnxdx$

$I(\lambda) = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_\lambda^1 - \int_\lambda^1 lnxdx$

$I(\lambda) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda^2 + 1 + \lambda ln\lambda - \lambda$

$I(\lambda) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda ln\lambda - \lambda$

$\lim\limits_{\lambda\to 0} I(\lambda) = \frac{3}{2}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$, on pose : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

a/ Montrons que : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, pour $1 \leq k \leq n-1$

$\forall t \in \left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$, $1 \leq k \leq n$, $\frac{1}{n} \leq \frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n} \leq 1$,

donc $\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right] \subset [0;1]$;

f étant décroissante sur $\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$, alors :

$t \in \left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right] \Rightarrow f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$

$\Rightarrow \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right)dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)dt$

$\Rightarrow f\left(\frac{k+1}{n}\right)[t]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq f\left(\frac{k}{n}\right)[t]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}$

$\Rightarrow \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

b/ Déduisons que : $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$ puis que $I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$

« Vivre est la chose la plus rare. La plupart des gens se contente d'exister. » Oscar Wilde

D'après ce qui précède, on a :

Scanné avec CamScanner

$\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$

$\frac{1}{n}f\left(\frac{3}{n}\right) \leq \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

$\frac{1}{n}f\left(\frac{n-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{n-2}{n}}^{\frac{n-1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{n-2}{n}\right)$

$\frac{1}{n}f(1) \leq \int_{\frac{n-1}{n}}^{1} f(t)dt \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{n-1}{n}\right)$

……

En faisant somme membre à membre **et** en simplifiant on a : $S_n - \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leq S_n - \frac{1}{n}f(1)$

soit $S_n - \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n - \frac{1}{n}$, car $f(1) = 1$. D'où l'on déduit : $S_n - \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$ **(1)**

En ajoutant $\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$ à chaque membre de la double inégalité (1) précédente, on obtient :

$S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$ **(2)**

De (1) et (2), on déduit que : $I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$ (*)

c/ En utilisant 3.b/, Montrons que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{2}$

(*)$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \lim_{n\to+\infty} S_n \leq \lim_{n\to+\infty}\left[I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\right]$

Or $\lim_{n\to+\infty} I\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{3}{2}$ (car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$) et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}ln\frac{1}{n}\right] = 0$, donc $\frac{3}{2} \leq \lim_{n\to+\infty} S_n \leq \frac{3}{2}$. Il vient, d'après le théorème des gendarmes que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{2}$.

4. a/ Montrons que : $\sum_{k=1}^{n} ln\left(\frac{k}{n}\right) = ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$ et que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$\sum_{k=1}^{n} ln\left(\frac{k}{n}\right) = ln\left(\frac{1}{n}\right) + ln\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + ln\left(\frac{n}{n}\right)$

$\sum_{k=1}^{n} ln\left(\frac{k}{n}\right) = ln\left(\frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \ldots \times \frac{n}{n}\right)$

$\sum_{k=1}^{n} ln\left(\frac{k}{n}\right) = ln\left(\frac{1\times 2\times \ldots \times n}{n^n}\right)$

$\sum_{k=1}^{n} ln\left(\frac{k}{n}\right) = ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$

$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Il s'agit de la somme des n premiers termes non nuls d'une suite arithmétique de raison 1, d'où $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

b/ Déduisez-en que : $S_n = \frac{n^2+n}{2n^2} - lnU_n$

$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = S_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} - \sum_{k=1}^{n} ln\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

$S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ln\left(\frac{k}{n}\right)$

$S_n = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n}ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$

$S_n = \frac{n^2+n}{2n^2} - ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

$S_n = \frac{n^2+n}{2n^2} - ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n^n}}\right)$

$S_n = \frac{n^2+n}{2n^2} - ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)$

$S_n = \frac{n^2+n}{2n^2} - ln(U_n)$

c/ Déduisons $\lim_{n\to+\infty} U_n$

$S_n = \frac{n^2+n}{2n^2} - ln(U_n) \Rightarrow ln(U_n) = \frac{n^2+n}{2n^2} - S_n$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} ln(U_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} - \lim_{n\to+\infty} S_n$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} ln(U_n) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} ln(U_n) = -1$

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow ln\left(\lim_{n\to+\infty} U_n\right) = -1,$$

car la fonction ln est continue

$$\Rightarrow ln\left(\lim_{n\to+\infty} U_n\right) = lne^{-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = e^{-1}$$

Corrigé 40

1. Montrons que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ puis calculons sa fonction dérivée F'

Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t}$ et $t \mapsto f(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $3x \in \mathbb{R}_+^*$.

donc $[x; 3x] \subset \mathbb{R}_+^*$, par suite $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est continue $[x; 3x]$. On déduit que F est bien définie et donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $F'(x) = G'(x) - 3G'(3x)$ où $G(x) = \int_a^x \frac{f(t)}{t} dt$ avec a un élément de $\mathbb{R}_+^*$. D'où :

$$F'(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{f(3x)}{x} = \frac{f(x) - f(3x)}{x}$$

2. a/ Montrons que si f est constante alors F est aussi constante

Supposons que f est constante, alors $f(x) = f(3x)$, donc $f(x) - f(3x) = 0$, par suite $F'(x) = 0$ et $F(x) = cste$.

En posant $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$F(x) = \int_{3x}^{x} \frac{k}{t} dt = k(lnx - ln3x)$$

$$F(x) = kln\left(\frac{x}{3x}\right) = -kln3$$

b/ Définissons F pour $f: t \mapsto \frac{1}{t}$

$$F(x) = \int_{3x}^{x} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_{3x}^{x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x} = -\frac{2}{3x}$$

3. a/ Signe de $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et de $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{cost}{t} dt = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cost}{t} dt$

$\forall t \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{cost}{t} \geq 0$, donc $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cost}{t} dt \geq 0$. D'où $F\left(\frac{\pi}{6}\right) \leq 0$

$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cost}{t} dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{cost}{t} dt$

$\forall t \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $\frac{cost}{t} \leq 0$, donc $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{cost}{t} dt \leq 0$. D'où $F\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0$

b/ Montrons que pour tout t de $\mathbb{R}_+^*$, $\frac{f(t)}{t} \leq \frac{1}{t}$

$t \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow -1 \leq cost \leq 1$

$\Rightarrow -\frac{1}{t} \leq \frac{cost}{t} \leq \frac{1}{t}$, car $t > 0$

$\Rightarrow -\frac{1}{t} \leq \frac{f(t)}{t} \leq \frac{1}{t}$

D'où : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{f(t)}{t} \leq \frac{1}{t}$.

Montrons que F est bornée

$t \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow \frac{f(t)}{t} \leq \frac{1}{t}$

$\Rightarrow \int_{3x}^{x} \frac{f(t)}{t} dt \leq \int_{3x}^{x} \frac{1}{t} dt$

$\Rightarrow \int_{3x}^{x} \frac{f(t)}{t} dt \leq [lnt]_{3x}^{x}$

$\Rightarrow F(x) \leq -ln3$

$\Rightarrow |F(x)| \leq ln3$

On déduit que F est bornée.

c/ Démontrons que pour tout t de $\mathbb{R}_+^*$, $sinx \leq x$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall t \in [0; x]$, $cost \leq 1$, donc $\int_0^x cost\, dt \leq \int_0^x dt$ soit $sinx \leq x$.

Autre méthode

Soit $h(x) = sinx - x$

Scanné avec CamScanner

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x) = cosx - 1$. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x) \leq 0$, donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} h(x) = 0$, donc :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) \leq 0$, c'est-à-dire $sinx \leq x$.

d/ Démontrons que pour tout t de $\mathbb{R}_+^*$, $F(x) + ln3 = -2\int_{3x}^{x} \frac{sin^2\frac{t}{2}}{t} dt$

On a : $F(x) = \int_{3x}^{x} \frac{cost}{t} dt = \int_{3x}^{x} \frac{1 - 2sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t} dt$

$F(x) = \int_{3x}^{x} \frac{1}{t} dt - 2\int_{3x}^{x} \frac{sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t} dt = -ln3 - 2\int_{3x}^{x} \frac{sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t} dt$

D'où : $F(x) + ln3 = -2\int_{3x}^{x} \frac{sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t} dt$

Montrons que $0 \leq F(x) + ln3 \leq 2x^2$

$t \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow 0 \leq sin\frac{t}{2} \leq \frac{t}{2}$, d'après 3/c

$\Rightarrow 0 \leq sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \leq \frac{t^2}{4}$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t} \leq \frac{t}{4}$

$\Rightarrow 0 \leq 2\int_{x}^{3x} \frac{sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t} dt \leq \int_{x}^{3x} \frac{t}{2} dt$

Or : $\int_{x}^{3x} \frac{t}{2} dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_{x}^{3x} = 2x^2$, donc $0 \leq F(x) + ln3 \leq 2x^2$.

Déduisons la limite de F en 0

Comme $0 \leq F(x) + ln3 \leq 2x^2$ et que $\lim\limits_{x \to 0} 2x^2 = 0$, alors d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = 0$.

4. a/ Etablissons que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$\left|F(x) - \frac{3sinx - sin3x}{3x}\right| \leq \frac{2}{3x}$ (1)

Intégrons par parties $F(x) = \int_{3x}^{x} \frac{cost}{t} dt$ en posant :

$\begin{cases} u'(t) = cost \\ v(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$; on a : $\begin{cases} u(t) = sint \\ v'(t) = -\frac{1}{t^2} \end{cases}$, donc

$F(x) = \left[\frac{1}{t} sint\right]_{3x}^{x} + \int_{3x}^{x} \frac{sint}{t^2} dt$

$F(x) = \frac{sinx}{x} - \frac{sin3x}{3x} + \int_{3x}^{x} \frac{sint}{t^2} dt$

$F(x) = \frac{3sinx - sin3x}{3x} + \int_{3x}^{x} \frac{sint}{t^2} dt$.

D'où $\left|F(x) - \frac{3sinx - sin3x}{3x}\right| = \left|\int_{3x}^{x} \frac{sint}{t^2} dt\right|$

Or : $\left|\int_{3x}^{x} \frac{sint}{t^2} dt\right| \leq \int_{3x}^{x} \left|\frac{sint}{t^2}\right| dt$

$\left|\int_{3x}^{x} \frac{sint}{t^2} dt\right| \leq \int_{3x}^{x} \frac{|sint|}{t^2} dt$

$\left|\int_{3x}^{x} \frac{sint}{t^2} dt\right| \leq \int_{3x}^{x} \frac{1}{t^2} dt$

$\left|\int_{3x}^{x} \frac{sint}{t^2} dt\right| \leq \left|-\frac{1}{t}\right|_{3x}^{x}$

$\left|\int_{3x}^{x} \frac{sint}{t^2} dt\right| \leq \frac{2}{3x}$

D'où : $\left|F(x) - \frac{3sinx - sin3x}{3x}\right| \leq \frac{2}{3x}$

Déduisons la limite de F en $+\infty$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{3x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{sinx}{x} - \frac{sin3x}{3x}\right)$.

Or $\begin{cases} \left|\frac{sinx}{x}\right| \leq \frac{1}{x} \\ \left|\frac{sin3x}{3x}\right| \leq \frac{1}{3x} \end{cases}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{3x} = 0$, donc

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{sinx}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{sin3x}{3x} = 0 \end{cases}$. D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

b/ Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F'(x) = \frac{4cosxsin^2x}{x}$

D'après 1/, $F'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - f(3x))$

donc $F'(x) = \frac{1}{x}(cosx - cos3x)$.

Or : $cosx - cos3x = -2sin2xsin(-x)$

$cosx - cos3x = 2sin2xsinx = 4cosxsin^2x$, donc

Scanné avec CamScanner

$F'(x) = \frac{4cosxsin^2x}{x}$

5. a/ Tableau de variation de F_1 sur $]0; 2\pi]$

Le signe de $F'(x)$ est celui de $cosxsin^2x$

$cosxsin^2x = 0 \Leftrightarrow cosx = 0$ ou $sin^2x = 0$

$cosx = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$

$sin^2x = 0 \Leftrightarrow x = \pi$ ou $x = 2\pi$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$F'_1(x)$	‖	+	0	−	0	−	0	+	∘
$F_1(x)$	‖ 0	↗	$F_1\left(\frac{\pi}{2}\right)$	↘	$F_1(\pi)$	↘	$F_1\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	↗	$F_1(2\pi)$

b/ Montrons que l'équation $x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$, $F_1(x) = 0$ admet une unique solution

F_1 est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$.

De plus, d'après la question 3/a. $F_1\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0$ et $F_1\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$.

Donc l'équation $x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$, $F_1(x) = 0$ admet une unique solution.

«Priez comme si tout dépend de Dieu, alors quand vous avez fini, allez travailler comme tout dépend de vous.»

Martin Luther

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

RÉSUMÉ DE COURS

Définition

On appelle équation différentielle toute équation dont l'inconnue est une fonction et dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonction inconnue.

Lorsque la seule dérivée apparaissant dans l'équation différentielle est la dérivée 1ère, on dit que l'équation est du 1er ordre.

Si la dérivée seconde représente le degré le plus grand de l'équation, on dit que l'équation différentielle est du second ordre.

Ainsi de suite on définit une équation différentielle d'ordre n.

Equations différentielles du type y'+ay = 0

Théorème

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + ay = 0$, $a \in \mathbb{R}$. sont les fonctions f définies par $f(x) = ke^{-ax}$ où k est une constante réelle arbitraire.

Solution vérifiant une condition initiale donnée

Théorème

Si x_0 et y_0 sont deux nombres réels quelconques, alors l'équation différentielle $y' + ay = 0$, $(a \in \mathbb{R})$ admet une solution et une seule prenant la valeur y_0 en x_0.

Exemple : Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle $y' + 3y = 0$ telle que $f(2) = 3$.

Solution

La solution générale de l'équation y'+3y = 0 est de la forme $f(x) = ke^{-3x}$, $k \in \mathbb{R}$.

$f(2) = 3 \Rightarrow ke^{-6} = 3$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow k = 3e^6$

D'où finalement $f(x) = 3e^{3(2-x)}$.

Equations différentielles du type $y'' + ay = 0$

On associe à l'équation différentielles du type $y'' + ay = 0$ (1) l'équation $r^2 + a = 0$ d'inconnue r dite **équation caractéristique associée à (1)**.

On distinguera 3 cas :

- si $a < 0$, la solution générale de l'équation (1) est de la forme $f(x) = Ae^{wx} + Be^{-wx}, (A, B \in \mathbb{R})$ *et* w est l'une des solutions de l'équation caractéristique $r^2+a=0$
- si $a = 0$, la solution générale de l'equation (1) est de la forme $f(x) = Ax + B, A, B \in \mathbb{R}$.
- si $a > 0$, la solution générale est de la forme $f(x) = Acoswx + Bsinwx, (A, B \in \mathbb{R})$ avec $w \in \mathbb{R}$ tel que iw et –iw sont solutions de l'équation caractéristique.

La solution précédente peut aussi être écrite sous la forme $f(x) = Ccos(wx + \varphi), C, \varphi \in \mathbb{R}$..

Exemples

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $3y'' - \frac{1}{3}y = 0$,

2) $y'' + 16y = 0$

3) $y'' = 0$

Solution

1) L'équation caractéristique associée est $3r^2 - \frac{1}{3} = 0$ d'où $r_1 = \frac{1}{3}$ et $r_2 = -\frac{1}{3}$. La solution de l'équation différentielle est

$f(x) = Ae^{\frac{1}{3}x} + Be^{-\frac{1}{3}x}, (A, B \in \mathbb{R})$

2) L'équation caractéristique associée est $r^2+16=0$ d'où $r_1 = 4i$ et $r_2 = -4i$. La solution est donnée par $f(x) = Acos4x + Bsin4x, (A, B \in \mathbb{R})$.

3) La solution de cette équation est de la forme $f(x) = Ax + B, (A, B \in \mathbb{R})$.

Equations différentielles du type $ay'' + by' + cy = 0$ $(a \neq 0)$

A l'équation différentielle du type $ay'' + by' + cy = 0$ $(a \neq 0)$ (2) on associe l'équation caractéristique $ar^2+br+c=0$.

Théorème

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ de l'équation caractéristique et on distingue trois cas :

- si $\Delta > 0$, alors la solution générale est de la forme $f(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}, (A, B \in \mathbb{R})$ avec r_1 *et* r_2 les solutions de l'équation caractéristique.
- si $\Delta = 0$, alors la solution générale de l'équation (2) est de la forme $(Ax + B)e^{r_0 x}$ où r_0 est la solution de l'équation caractéristique. A et B sont des constantes réelles.
- si $\Delta < 0$, alors la solution générale de l'équation différentielle (2) est de la forme $f(x) = (Acos\beta x + Bsin\beta x)e^{\alpha x}$, où $r_1 = \alpha + i\beta$ *et* $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les solutions de l'équation caractéristique avec A et B des constantes réelles.

Cette dernière solution peut aussi s'écrire:

$f(x) = [Ccos(\beta x + \varphi)]e^{\alpha x}, C, \varphi \in \mathbb{R}$.

Scanné avec CamScanner

Equations différentielles — Résumé de cours

Théorème

Pour tout triplet x_0, y_0, y'_0 de nombres réels, il existe une unique solution f de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ telle que $\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y'_0 \end{cases}$

Exemple

Déterminer la solution f de l'équation différentielle $y'' + 5y' + 6y = 0$ vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 6$.

Solution

L'équation caractéristique est $r^2 + 5r + 6 = 0$.

$\Delta = 1$ et $r_1 = -3$; $r_2 = -2$

La solution de cette équation différentielle $y'' + 5y' + 6y = 0$ est $f(x) = Ae^{-3x} + Be^{-2x}$, $(A, B \in \mathbb{R})$

D'où: $f'(x) = -3Ae^{-3x} - 2Be^{-2x}$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ -3A - 2B = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = 9 \\ A = -8 \end{cases}$$

On obtient : $f(x) = -8e^{-3x} + 9e^{-2x}$

« Le mariage des esprits est plus grand que celui des corps. »
Érasme

Equations différentielles — Exercices

EXERCICES

Exercice 01

1/ Résolvez l'équation différentielle (E) : $y'' + y = 0$.

2/ Déterminez la solution particulière de (E) vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$.

3/ Résolvez :

a. dans $\mathbb{R}$: $f(x) + 2 = 0$

b. dans $]0 ; 2\pi[$: $f(x) + 2 = 0$.

Exercice 02

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y' + 20y = 0$.

1. Résolvez cette équation différentielle.

2. Déterminez la solution particulière vérifiant $y(0) = 3$ et $y'(0) = 6 + 12\sqrt{3}$.

Exercice 03

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y = -\frac{16}{3}e^{-2x}$.

1/ Résolvez l'équation différentielle (E_0): $y'' - 4y = 0$.

2/ Vérifiez que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{4}{3}xe^{-2x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3/ Déduisez-en l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4/ Déterminez la solution particulière h vérifiant $h(0) = \frac{4}{3}$ et $h'(0) = -\frac{4}{3}$.

Exercice 04

Une comparaison à un modèle d'écoulement amène à considérer que la vitesse d'écoulement v_0 d'un liquide dans un tube cylindrique est solution de l'équation différentielle (E): $4v' + v = 3e^{\frac{x}{2}} - 1$ avec la condition initiale $v_0 = 0$.

1/ Résolvez l'équation différentielle $4v' + v = 0$

Scanné avec CamScanner

2/ Déterminez les constantes A et B pour que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = Ae^{\frac{x}{2}} + B$ soit une solution particulière de l'équation (E).
3/ Résolvez l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.
4/ Déterminez la solution particulière vérifiant $v(0) = 0$.

Exercice 05

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 8e^x$, où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.
1/ Déterminez les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_0) : y'' - 2y' + y = 0$
2/ Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 4x^2e^x$. Démontrez que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3/ Déduisez-en l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4/ Déterminez la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = -4$ et $f'(0) = -4$.

Exercice 06

Un mobile se déplace sur un axe horizontal $(x'x)$ avec un mouvement uniformément varié.
On désigne par $x(t)$ la position du mobile à l'instant t, $x'(t)$ sa vitesse et $x''(t)$ son accélération. (t est exprimé en s et $x(t)$ en mètres).
On suppose de plus qu'à tout instant t, l'accélération $x''(t)$ est proportionnelle à $x(t)$ de coefficient $-\frac{\pi^2}{4}$.
1/ Déterminez l'équation horaire du mouvement si l'on sait que $x(1) = 2$ et $x(2) = 0$.
2/ Déterminez la position et la vitesse du mobile à l'instant t = 0.

3/ Représentez $x \mapsto x(t)$.

Exercice 07

1/ Résolvez l'équation différentielle suivante (E) : $4y'' + 49y = 0$ où y est une fonction numérique de la variable réelle x.
2/ Déterminez la solution f de l'équation (E) qui vérifie : $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $f(0) = -\sqrt{2}$.
3/ Montrez que, pour tout réel x, $f(x) = 2cos\left(\frac{7}{2}x - \frac{3\pi}{4}\right)$
4/ Calculez la valeur moyenne de la fonction f sur $\left[\frac{\pi}{14}; \frac{5\pi}{14}\right]$.

Exercice 08

1/ Résolvez l'équation différentielle $(E) : y'' - 4y' + 5y = 0$.
2/ On considère l'équation différentielle
$(E') : y'' - 4y' + 5y = (-x + 1)e^x$.
a. Déterminez les réels a et b tels que la fonction g définie par : $g(x) = (ax + b)e^x$ soit une solution de (E').
b. h désignant une solution de l'équation différentielle (E), montrez que la fonction f telle que :
$f(x) = g(x) + h(x)$ est une solution de l'équation (E').
3/ Déterminez, parmi les fonctions définies en 2.b/, celle dont la courbe représentative dans un repère orthonormé passe par le point $A(0\,;1)$ et admet en ce point une tangente à la droite d'équation : $y + x = 0$.

Exercice 09

On considère le système (Σ) : $\begin{cases} y' = -z \\ z' = y - 2z \end{cases}$ où les inconnues sont les fonctions y et z.
1/ Démontrez que si $(y\,;\,z)$ est solution de (Σ), alors les

Scanné avec CamScanner

fonctions y et z sont deux fois dérivables et vérifient l'équation différentielle (E) : $u'' + 2u' + u = 0$.

2/ Résolution de (E)

a. En écrivant (E) sous la forme $u'' + u' + u' + u = 0$, démontrez qu'une fonction est solution de (E) si et seulement si elle est solution de l'équation différentielle (E') : $v' + v = ae^{-x}$ $(a \in \mathbb{R})$.

b. Vérifiez que la fonction g : $x \mapsto axe^{-x}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de (E'). Démontrez qu'une fonction f est solution de (E') si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle $v' + v = 0$.

c. Déduisez-en la résolution sur $\mathbb{R}$ de (E).

3/ Résolvez sur $\mathbb{R}$ le système (Σ).

Exercice 10

Un ressort, à spires non jointives, a une extrémité en A. Un dispositif permet d'exercer en son extrémité M, sur l'axe $(O, \vec{\imath})$, une force qui vérifie l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y = 3cost$.

1/ Résolvez l'équation différentielle : $y'' + 4y = 0$.

2/ Soit la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = cost$. Montrez que g est solution de l'équation différentielle (E).

3/ Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = cost + acos(2t) + bsin(2t)$ où a et b sont deux réels. Vérifiez que f est solution de l'équation différentielle (E).

4/ Déterminez les réels a et b tels que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$. (A l'instant t = 0, le point M est situé en O et sa vitesse est nulle).

5/ On suppose dans cette question que l'abscisse du point M est donnée, en fonction du temps, par la fonction h définie par : $h(t) = cost - cos2t$.

a. Montrez que, pour tout réel t, on a : $-2 \leq h(t) \leq 2$ (la distance du point M au point O est inférieure ou égal à 2).

b. Pour quelles valeurs de t a-t-on $h(t) = 0$? (Le point M est alors situé en O.)

Exercice 11

1/ Soient les équations différentielles $y' - y = 0$ (E_1) et $y' + y = 0$ (E_2) où y représente une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, et où y' représente sa dérivée.

Déterminez les solutions de (E_1) et (E_2).

2/ a. Déterminez la solution particulière f_1 de (E_1) telle que $f_1(0) = 2$.

b. Déterminez la solution particulière f_2 de (E_2) telle que $f_2(0) = -1$.

3/ Montrez que résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $f_1(x) - f_2(x) = 3$ revient à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $2e^{2x} - 3e^{2x} + 1 = 0$.

4/ Résolvez sur $\mathbb{R}$ l'équation $2e^{2x} - 3e^{2x} + 1 = 0$.

Exercice 12

1. On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y'' - xy' + y = 0$.

a/ Soit z une fonction deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$. Démontrez que xz est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle (E') : $xz' = A$, $(A \in \mathbb{R})$.

b/ Résolvez sur $]0; +\infty[$ (E') puis (E).

2. A l'aide d'un raisonnement analogue, résolvez sur $]-\infty; 0[$ l'équation différentielle : $y' = \frac{x+y}{x}$.

Exercice 13

I. Soit (E) l'équation différentielle $y' + y = \frac{1}{e^x - 1}$ où y est une fonction, de la variable réelle x, dérivable sur $]0; +\infty[$.

1/ Résolvez l'équation différentielle sans second membre associé à (E).

Scanné avec CamScanner

Scanné avec CamScanner

2/ a. L'on s'intéresse aux solutions particulières φ de (E) de la forme $\varphi(x) = \frac{h(x)}{e^x}$ où h est une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$. Sachant que φ est une solution de (E), déterminez h.
b. Déduisez-en la solution générale de (E).
c. Parmi les solutions de (E), déterminez la solution f qui vérifie la condition $f(ln2) = 0$.

II. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{ln(e^x-1)}{e^x}$.

On pose $I(\alpha) = \int_{ln2}^{ln\alpha} f(x)dx$, $\alpha > 2$.

1/ a. Déterminez une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{e^x-1}$.
b. Déduisez-en une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{e^x-1}$. On remarque que $\frac{e^x}{e^x-1} = 1 + \frac{1}{e^x-1}$.
2/ En utilisant le fait que f est une solution sur $]0; +\infty[$ de l'équation différentielle (E), prouvez que $I(\alpha) = -f(ln\alpha) + ln(\alpha - 1) - ln\alpha + ln2$.
3/ Déduisez-en que $I(\alpha) = -\frac{ln(\alpha-1)}{\alpha} + ln\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + ln2$.
4/ Calculez $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} I(\alpha)$.

Exercice 14

1/ Résolvez l'équation différentielle (E) : $9y'' + \pi^2 y = 0$.
2/On désigne par f la solution particulière de (E) dont la courbe représentative, dans un repère orthonormal, passe par le point P de coordonnées $\left(1; -\sqrt{2}\right)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
a. En utilisant les données ci-dessus, précisez $f(1)$ et $f'(1)$.
b. Déterminez f.
c. Vérifiez que, pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{2}cos\left[\frac{\pi}{3}(x+2)\right]$.
3/ a. Montrez que f est périodique de période 6.

b. Calculez la valeur efficace de f, c'est-à-dire le réel I positif défini par : $I^2 = \frac{1}{6}\int_0^6 [f(x)]^2 dx$.

Exercice 15

1/ Soit à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_1) : $y' + 2y = cosx$.
a. Déterminez deux nombres réels p et q tels que la fonction $g: x \mapsto pcosx + qsinx$ est solution de (E_1).
b. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrez que $f + g$ est une solution de (E_1) si et seulement si f est solution de l'équation différentielle (E_2): $y'' + 2y = 0$.
c. Résolvez (E_2) et déduisez-en les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_1).
2/ On considère l'équation différentielle (E_3): $y'' - 2y' + y = -3x + 4$.
a. Déterminez une fonction polynôme de degré 1 solution de (E_3).
b. Démontrez que la fonction f est solution de (E_3) si et seulement si $h = f - g$ est solution de (E_4): $y'' - 2y' + y = 0$.
c. Résolvez l'équation différentielle (E_4) et déduisez-en les solutions de (E_3).
d. Déterminez la solution u de l'équation (E_3) telle que $u(0) = -1$ et $u'(0) = 0$.

Exercice 16

Soit l'équation différentielle (E) : $16y'' + y = 0$.
1/ Trouvez la solution générale de (E).
2/ Déterminez la solution g de (E) sachant que $\int_0^{\pi} g(x)dx = 4\sqrt{2} - 4$ et $\int_0^{2\pi} g(x)dx = 0$.

Scanné avec CamScanner

3/ Déterminez la solution f de (E) vérifiant : $f'(0) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ et $f'(2\pi) = -\frac{1}{4}$.

4/ a. Démontrez que : $\forall \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$.

b. Calculez $f(-2\pi)$, $f(2\pi)$, $f'(x)$ puis établissez le tableau de variation de f sur $[-2\pi;\ 2\pi]$

c. Construisez la courbe (C_f) représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

5/ Calculez l'aire de la partie du plan délimité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 2\pi$.

Exercice 17

On donne l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 4y = (x + 1)e^{-2x}$ **(1)**.

1. Résolvez l'équation homogène : $y'' + 4y' + 4y = 0$ **(2)**.

2. On considère $h(x) = p(x)e^{-2x}$ où p est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Démontrez que si h est une solution particulière de l'équation **(1)**, alors p est une fonction polynôme de degré trois que l'on déterminera.

b. f étant une solution quelconque de l'équation **(1)**, démontrez que $f - h$ est une solution de l'équation homogène **(2)**.

c. Déduisez la solution de l'équation **(1)**.

3. Soit f une solution de l'équation **(1)**.

a. Vérifiez que pour tout réel x, $4f(x) - (x + 1)e^{-2x} = -f''(x) - 4f'(x)$ puis déterminez en fonction de f et f' une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 4f(x) - (x + 1)e^{-2x}$.

b. Vérifiez que la fonction $x \mapsto \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right)e^{-2x}$ est une solution de (1). Déduisez la valeur de

$I = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)e^{-2x}dx$.

Exercice 18

On considère les équations différentielles suivantes :

(E) : $y''(x) - 2my'(x) + 3y(x) = 2(1 - 2x)e^x$,

(E') : $y''(x) - 2my'(x) + 3y(x) = 0$; dans lesquelles m est un paramètre réel.

1. Résolvez, suivant les valeurs de m, l'équation (E').

2. Déterminez la valeur de m pour laquelle, la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2e^x$ est une solution de (E).

3. Dans cette question, on donne m = 2.

a/ Soit φ une fonction au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

a_1/ Montrez que si φ est une solution de (E) alors $(\varphi - h)$ est une solution de (E').

a_2/ Montrez que si $(\varphi - h)$ est une solution de (E') alors φ est une solution de (E).

b/ Déduisez de 1., la résolution de (E') : puis résolvez (E).

c/ Déterminez la solution de f de (E) dont la courbe représentative, dans le plan rapporté à un repère orthonormé passe par le point $\Omega(0; -1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1.

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = (x^2 - 2)e^x + e^{3x}$ et U une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 2(1 - 2x)e^x$.

a/ Sachant que g est une solution de (E), montrez que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{1}{3}[U(x) - g'(x) + 4g(x)]$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

b/ Déterminez une expression de $U(x)$ de la forme :

$U(x) = (ax + b)e^x$ où a et b sont des constantes réelles.

c/ Déduisez-en $G(x)$.

Exercice 19

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = x - 1$.

Scanné avec CamScanner

1/ A l'aide d'une intégration par parties, calculez $\int_1^x e^t(t-1)dt$.

2/ Soit z une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, on pose $f(x) = z(x)e^{-x}$. Montrez que f est solution de (E) si, et seulement si, pour tout x réel, $z'(x) = e^x(x-1)$.

3/ A l'aide de la première question, déterminez toutes les fonctions z vérifiant $z'(x) = e^x(x-1)$.

4/ Déduisez de la question précédente les solutions de (E). Déterminez la solution pour laquelle l'image de 1 est 0.

Exercice 20

Une étude sur le comportement de bactéries placées dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence a conduit à proposer une loi d'évolution de la forme $N'(t) = 2N(t) - 0{,}0045[N(t)]^2$ **(1)** où t est le temps exprimé en heures. N(t) représente le nombre d'individus présents dans l'enceinte à l'instant t ; à $t = 0$ on a $N(0) = 1$ (en milliers).

1/ On pose $y(t) = \frac{1}{N(t)}$; montrez que y est solution d'une équation différentielle (E) du type $y' = ay + b$.

2/ Résolvez (E).

3/ Déduisez-en que la solution de (1) est :

$N(t) = \frac{1}{0{,}99775e^{-2t} + 0{,}00225}$

4/ Etudiez les variations de N.

5/ Montrez que $N(t) = \frac{e^{2t}}{0{,}99775 + 0{,}00225e^{2t}}$. Déduisez-en une primitive de N(t).

6/ On appelle nombre moyen de bactéries la limite quand T tend vers $+\infty$ de $\frac{1}{T}\int_0^T N(t)dt$.

Calculez cette intégrale et déduisez-en le nombre moyen de bactéries dans l'enceinte.

Exercice 21

1/ Restitution organisée des connaissances

Prérequis : on sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions de la forme $f(x) = Ce^{ax}$ où C est une constante réelle.

a. Déterminez les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

b. En faisant un changement de variable de la forme $y = \varphi(Y)$ dans l'équation précédente on obtient l'équation $Y' = 2aY + 2b\sqrt{Y}$. Quelle est la fonction φ à votre avis ?

2/ Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (1) : $y' + y = 2e^{-x}$, dans laquelle y désigne une fonction inconnue de la variable réelle x, dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

a. Résolvez l'équation différentielle **(2)** : $y' + y = 0$.

b. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$. Trouvez les valeurs de α et β telles que h soit solution de l'équation (1).

3/ On admet que toute solution de (1) s'écrit sous la forme $g + h$, ou g désigne une solution de l'équation (2).

a. Déterminez l'ensemble des solutions de l'équation (1).

b. Déterminez la solution f de l'équation (1) vérifiant la condition initiale $f(0) = -1$.

c. Quelle est la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$? Vers $-\infty$? Dressez le tableau de variation de f.

Exercice 22

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{3e^{x/4}}{2 + e^{x/4}}$

a. Démontrez que $f(x) = \frac{3}{1 + 2e^{-x/4}}$

b. Etudiez les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c. Etudiez les variations de la fonction f.

Partie B

Scanné avec CamScanner

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années.

L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus.

Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle $(E_1) : y' = \frac{y}{4}$.

1. a. Résolvez l'équation différentielle (E_1) .

b. Déterminez l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date t = 0, la population comprend 100 rongeurs, c'est-a-dire $g(0) = 1$.

c. Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$(E_2) : \begin{cases} u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{[u(t)]^2}{12} \\ u(0) = 1 \end{cases}$ pour tout nombre réel t positif ou nul, où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

a. On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la fonction h définie par $h = \frac{1}{u}$.

Démontrez que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions

$(E_3) : \begin{cases} h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} \\ h(0) = 1 \end{cases}$ pour tout nombre réel t positif ou nul, ou h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

b. Donnez les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ et déduisez-en l'expression de la fonction h puis celle de la fonction u.

c. Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

Exercice 23

I/ Dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.

On suppose connu le résultat suivant : la fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$ et $\varphi(0) = 1$.

Soit a un réel donné.

a. Montrez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.

b. Soit g une solution de l'équation $y' = ay$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = g(x)e^{-ax}$.

Montrez que h est une fonction constante.

c. Déduisez-en l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + cos\, x$

a. Déterminez deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_0(x) = acosx + bsinx$ soit une solution de (E).

b. Résolvez l'équation différentielle $(E_0) : y' = 2y$.

c. Démontrez que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0).

d. Déduisez-en les solutions de (E).

e. Déterminez la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Exercice 24

Dans un plan muni d'un repère orthononnal $(o; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ on désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f définie et

Scanné avec CamScanner

dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, f et f' ne s'annulant pas sur l'intervalle I.
On note M un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x et d'ordonnée $y = f(x)$.
On désigne par T la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point M.
On rappelle qu'une équation de T est de la forme :
$Y = f'(x)[X - x] + f(x)$.

I. Question préliminaire

1/ Montrez que T coupe l'axe des abscisses en un point H dont l'abscisse X_T vérifie : $X_T = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

2/ Montrez que T coupe l'axe des ordonnées en un point K dont l'ordonnée Y_T vérifie : $Y_T = f(x) - xf'(x)$.

II. k désigne un réel fixé non nul. On cherche à déterminer les fonctions f pour lesquelles la différence $x - X_T$ est constante, et égale à k, pour tout nombre réel x. (Propriété 1)

1/ Démontrez que f vérifie la propriété 1 si et seulement si f vérifie l'équation différentielle: $y' = \frac{1}{k}y$.

2/ Déduisez-en la famille des fonctions vérifiant la propriété 1 et déterminez pour $k = \frac{1}{2}$ la fonction f de cette famille qui vérifie de plus la condition : $f(0) = 1$.

III. k désigne un réel fixé non nul. On cherche à déterminer les fonctions f pour lesquelles la différence $y - Y_T$ est constante et égale à k, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $I =]0\ ;\ +\infty[$. (Propriété 2)

1/ Démontrez que f vérifie la condition posée si et seulement si f vérifie l'équation différentielle : $y' = \frac{k}{x}$.

2/ Déduisez-en la famille des fonctions vérifiant la propriété 2 et déterminez pour $k = \frac{1}{2}$ la fonction f de cette famille qui vérifie la condition : $f(1) = 0$.

Exercice 25

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

1/ Montrez que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

2/ On considère l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$.
Résolvez l'équation différentielle (E').

3/ Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrez que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E').

4/ Déduisez-en toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

5/ Déterminez l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie B

On considère la fonction f_k définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f_k(x) = (x + k)e^{-x}$ où k est un nombre réel donné.
On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal.

1/ Montrez que la fonction f_k admet un maximum en $x_k = 2$.

2/ On note M_k le point de la courbe C_k d'abscisse $1 - k$.
Montrez que le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$.

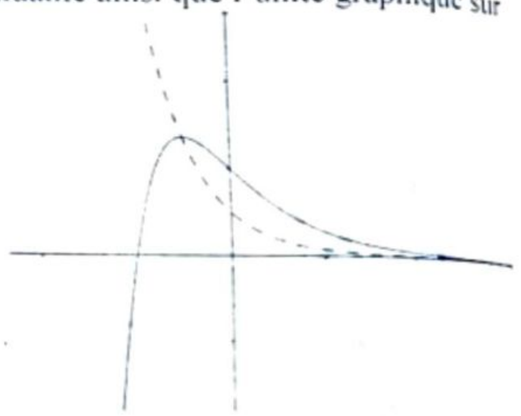
3/ Sur le graphique donné ci-dessous, le repère est orthogonal mais l'unité sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées ainsi que les noms des courbes n'apparaissent pas.
Sur ce graphique, on a tracé deux courbes :

- la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$.
- la courbe C_k d'équation $y = (x + k)e^{-x}$ pour un certain nombre réel k donné.

a. Identifiez les courbes et les nommez sur la figure

Scanné avec CamScanner

b. En expliquant la démarche utilisée, déterminez la valeur du nombre réel k correspondante ainsi que l'unité graphique sur chacun des axes.



4/ À l'aide d'une intégration par parties, calculez $\int_0^2 (x+2)e^{-x}dx$. Donnez une interprétation graphique de cette intégrale.

Exercice 26

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

A. Résolution d'une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = e^x - 2x$ où la fonction inconnue y, de la variable réelle x, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' désigne sa fonction dérivée.

1/ Déterminez les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_0) : y' - y = 0$.

2/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x + 2x + 2$. Démontrez que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3/ Déduisez-en l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4/ Déterminez la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 3$.

B. Calcul intégral

1/ On note $I = \int_{-1}^{1}(2x+2)dx$. Montrez que $I = 4$.

2/ On note $J = \int_{-1}^{1}(x+1)e^x dx$.

Démontrez à l'aide d'une intégration par partie que $J = e + e^{-1}$.

3/ a. On note $K = \int_{-1}^{1} f(x)dx$, où f est la solution de (E) définie dans A.4.

Déduisez de ce qui précède la valeur exacte de K.

b. Donnez la valeur de K, arrondie à 10^{-2}.

c. On admet que pour tout x de l'intervalle $[-1; 1]$, $f(x) \geq 0$. Donnez une interprétation graphique de K.

Exercice 27

On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition (C) $\begin{cases} f(-x)f'(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R} \\ f(0) = -4 \end{cases}$ (où f' désigne la fonction dérivée de f) et de trouver cette fonction.

1/ On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant à la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(-x)f(x)$.

a. Démontrez que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

b. Calculez la fonction dérivée de la fonction g.

c. Déduisez-en que la fonction g est constante et déterminez sa valeur.

d. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{1}{16}y$. Montrez que la fonction f est solution de cette équation et qu'elle vérifie $f(0) = -4$.

2/ Questions de cours

On sait que la fonction $x \mapsto e^{\frac{x}{16}}$ est solution de l'équation différentielle (E). Démontrez alors que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $x \mapsto Ke^{\frac{x}{16}}$ où K est un nombre réel quelconque.

b. Démontrez qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0.

Scanné avec CamScanner

c. Déduisez des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C) et précisez quelle est cette fonction.

Exercice 28

Dans cet exercice on étudie une épidémie dans une population.

Partie A-Etude de la progression de l'épidémie pendant 30jours

Au début de l'épidémie on constate que 0,01% de la population est contaminé.

Pour t appartenant à $[0; 30]$, on note $y(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours. On a donc $y(0) = 0{,}01$.

On admet que la fonction y ainsi définie sur $[0; 30]$ est dérivable, strictement positive et vérifie : $y' = 0{,}05y(10 - y)$.

1/ On considère la fonction z définie sur $[0; 30]$ par $z = \frac{1}{y}$.

Démontrez que la fonction y satisfait aux conditions $\begin{cases} y(0) = 0{,}01 \\ y' = 0{,}05y(10 - y) \end{cases}$ si et seulement si la fonction z satisfait aux conditions $\begin{cases} z(0) = 100 \\ z' = -0{,}5z + 0{,}05 \end{cases}$

2/ a. Déduisez-en une expression de la fonction z puis celle de la fonction y.

b. Calculez le pourcentage de la population infectée après 30 jours. On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche.

Partie B-Etude sur l'efficacité d'un vaccin

Le quart de la population est vacciné contre cette maladie contagieuse. De plus, on estime que sur la population vaccinée, 92% des individus ne tombent pas malades. Sur la population totale, on estime aussi que 10% des individus sont malades.

On choisit au hasard un individu dans cette population.

1/ Montrez que la probabilité de l'événement « l'individu n'est pas vacciné et tombe malade » est égale à 0,08.

2/ Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu qui n'est pas vacciné ?

Exercice 29

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille. Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t(exprimé en années à partir de l'origine 2000).

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0 ; +\infty[$, et satisfait l'équation différentielle : (E): $y' = -\frac{1}{20}y(3 - \ln y)$.

1/ Démontrez l'équivalence suivante :

Une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0 ; +\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0 ; +\infty[$,

$f'(t) = -\frac{1}{20}f(t)[3 - \ln(f(t))]$ si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0 ; +\infty[$, $g'(t) = \frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20}$.

2/ Donnez la solution générale de l'équation différentielle : (H): $z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}$.

3/ Déduisez-en qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0 ; +\infty[$: $f(t) = \exp\left(3 + Cexp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$.

(La notation exp désigne la fonction exponentielle naturelle $x \mapsto e^x$)

4/ La fonction initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par : $f(t) = exp\left(3 - 3exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$.

Scanné avec CamScanner

a. Déterminez la limite de la fonction f en $+\infty$

b. Déterminez le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.

c. Résolvez dans $[0 ; +\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0{,}02$.

Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

Exercice 30

Soit N_0 le nombre de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant $t = 0$ (N_0 étant un réel strictement positif, exprimé en million d'individus).

Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution de cette population de bactéries :

-un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (partie A)

-un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (partie B)

Partie A

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence. Dans ce premier modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). La fonction f est donc solution de l'équation différentielle : $y' = ay$.

(où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales).

1/ Résolvez cette équation différentielle, sachant que $f(0) = N_0$.

2/ On note T le temps de doublement de la propagation bactérienne. Démontrez que, pour tout réel t positif : $f(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$

Partie B

Le milieu étant limité (en volume, en élément nutritifs...), le nombre de bactérie ne peut pas croître indéfiniment de façon

exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue période. Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante : soit $g(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus) ; la fonction g est une fonction strictement positive et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ qui vérifie pour tout t de $[0 ; +\infty[$ la relation :

(E): $g'(t) = ag(t)\left(1 - \frac{g(t)}{M}\right)$, où M est une constante strictement positive dépendant des conditions expérimentales et a le réel défini dans la partie A.

1/ a. Démontrez que si g est une fonction positive vérifiant la relation (E), alors la fonction $\frac{1}{g}$ est la solution de l'équation différentielle (E') : $y' + ay = \frac{a}{M}$.

b. Résolvez (E').

c. Démontrez que si h est une solution strictement positive de (E'), alors $\frac{1}{h}$ vérifie (E).

2/ On suppose désormais que, pour tout réel positif t, $g(t) = \frac{M}{1+Ce^{-at}}$ où C est une constante strictement supérieure à 1, dépendant des conditions expérimentales.

a. Déterminez la limite de g en $+\infty$ et démontrez, pour tout réel t positif ou nul, la double inégalité : $0 < g(t) < M$.

b. Etudiez le sens de variation de g (On pourra utiliser la relation (E)).

Démontrez qu'il existe un réel unique t_0 positif tel que $g(t_0) = \frac{M}{2}$.

c. Démontrez que $g''(t) = a\left(1 - \frac{2g}{M}\right)g'(t)$. Etudiez le signe de g''. Déduisez-en que la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries est décroissante à partir de l'instant t_0 défini ci-dessus. Exprimez t_0 en fonction de a et C.

Scanné avec CamScanner

d. Sachant que le nombre de bactéries à l'instant t est $g(t)$, calculez le nombre moyen de bactéries entre les instants 0 et t_0. en fonction de M et C.

« Nos actions agissent sur nous tout autant que nous agissons sur elles. » George Eliot

CORRIGES DES EXERCICE-EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Corrigé 01

1/ L'équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = i$ ou $r = -i$. Les solutions sont donc les fonctions de la forme : $y = A\cos x + B\sin x$.

2/ $f(0) = 1 \Rightarrow A = 1$. $f'(x) = -A\sin x + B\cos x$. $f'(0) = 3 \Rightarrow B = 3$. La solution particulière est donc : $y = f(x) = \cos x + 3\sin x$.

3/ a. $f(x) = -2 \Leftrightarrow \cos x + 3\sin x = -2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x = -\cos\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos\frac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} - x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $\frac{\pi}{3} - x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{12} - 2k\pi$ ou $x = \frac{13\pi}{12} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$S = \left\{-\frac{5\pi}{12} - 2k\pi; \frac{13\pi}{12} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b. La résolution est la même qu'au a. Seul l'ensemble des solutions change. On retient, parmi les solutions précédentes, celles qui appartiennent à $[0 ; 2\pi[$. D'où

$$S' = \left\{\frac{19\pi}{12}; \frac{13\pi}{12}\right\}$$

Corrigé 02

1/ (E) : $y'' - 4y' + 20y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 20 = 0 : \Delta = -64$, donc on a deux solutions complexes conjuguées $r_1 = 2 - 4i$ et $r_2 = 2 + 4i$. Les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle sont les fonctions du type $f(x) = [\lambda\cos(4x) + \mu\sin(4x)]e^{2x}$, où λ et μ sont des réels quelconques.

Scanné avec CamScanner

2/ Solution particulière vérifiant $y(0) = 3$ et $y'(0) = 6 + 12\sqrt{3}$.

$y(0) = 3 \Leftrightarrow [\lambda \cos 0 + \mu \sin 0]e^0 = 3 \Leftrightarrow \lambda = 3$.

$y'(x) = [-4\lambda \sin(4x) + 4\mu \cos(4x)]e^{2x} + [\lambda \cos(4x) + \mu \sin(4x)](2e^{2x})$

$y'(0) = 6 + 12\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$[-4\lambda \sin 0 + 4\mu \cos 0]e^0 + [\lambda \cos 0 + \mu \sin 0](2e^0) = 6 + 12\sqrt{3} \Leftrightarrow 4\mu + 2\lambda = 6 + 12\sqrt{3}$. Comme $\lambda = 3$, on trouve $4\mu + 6 = 6 + 12\sqrt{3} \Leftrightarrow 4\mu = 12\sqrt{3}$ d'où $= 3\sqrt{3}$.

La solution est : $y(x) = [3\cos(4x) + 3\sqrt{3}\sin(4x)]e^{2x}$.

Corrigé 03

(E) : $y'' - 4y = -\frac{16}{3}e^{-2x}$

1/ (E_0): $y'' - 4y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - 4 = 0$, d'où $\Delta = 16$ et $r_1 = -2$ et $r_2 = 2$. Les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) sont les fonctions $f(x) = \lambda e^{-2x} + \mu e^{2x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2/ $g(x) = \frac{4}{3}xe^{-2x}$ donc $g'(x) = \frac{4}{3}e^{-2x} + \frac{4}{3}x(-2e^{-2x})$ et

$g''(x) = \frac{4}{3}(-2e^{-2x}) + \frac{4}{3}(-2e^{-2x}) + \frac{4}{3}x(4e^{-2x})$

$g''(x) - 4g(x) = \frac{4}{3}(-2e^{-2x}) + \frac{4}{3}(-2e^{-2x}) + \frac{4}{3}x(4e^{-2x}) - 4 \times \frac{4}{3}xe^{-2x} = -\frac{16}{3}e^{-2x}$

Conclusion : $g(x) = \frac{4}{3}xe^{-2x}$ est bien une solution particulière de l'équation différentielle (E)

3/ L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est donc formé des fonctions : $f(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{2x} + \frac{4}{3}xe^{-2x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

4/ Solution particulière h vérifiant $h(0) = \frac{4}{3}$ et $h'(0) = -\frac{4}{3}$

Si $h(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{2x} + \frac{4}{3}xe^{-2x}$ alors $h(0) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \lambda e^0 + \mu e^0 + 0 = \frac{4}{3}$ donc $\lambda + \mu = \frac{4}{3}$ **(1)**

$h'(x) = 2\lambda e^{2x} - 2\mu e^{-2x} + \frac{4}{3}e^{-2x} + \frac{4}{3}x(-2e^{-2x})$ donc

$h'(0) = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow 2\lambda e^0 - 2\mu e^0 + \frac{4}{3}e^0 + 0 = -\frac{4}{3}$.

On en déduit $2\lambda - 2\mu = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow \lambda - \mu = -\frac{4}{3}$ **(2)**.

(1) + (2) donne $2\lambda = 0$ d'où $\lambda = 0$ et $\mu = \frac{4}{3}$.

Conclusion : $h(x) = \frac{4}{3}(e^{-2x} + xe^{-2x})$.

Corrigé 04

1/ $4v' + v = 0 \Leftrightarrow v' + \frac{1}{4}v = 0$ l'ensemble des fonctions solutions sont de la forme $y(x) = ke^{-\frac{x}{4}}$; $k \in \mathbb{R}$

2/ $u(x) = Ae^{\frac{x}{2}} + B$ donc $u'(x) = \frac{A}{2}e^{\frac{x}{2}}$.

u est solution de (E) $\Leftrightarrow 4\frac{A}{2}e^{\frac{x}{2}} + Ae^{\frac{x}{2}} + B = 3e^{\frac{x}{2}} - 1$ ce qui donne $3Ae^{\frac{x}{2}} + B = 3e^{\frac{x}{2}} - 1$ et on obtient $A = 1$ et $B = -1$.

D'où $u(x) = e^{\frac{x}{2}} - 1$.

3/ L'équation (E) a donc pour solutions les fonctions de la forme : $v(x) = e^{\frac{x}{2}} - 1 + ke^{-\frac{x}{4}}$.

4/ $v(0) = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 + k = 0 \Leftrightarrow k = 0$. La solution particulière est donc $v(x) = e^{\frac{x}{2}} - 1$.

Corrigé 05

1/ (E_0) : $y'' - 2y' + y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$, donc $\Delta = 0$ et $r_1 = r_2 = 1$. Les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'equation différentielle : (E_0) : $y'' - 2y' + y = 0$ sont les fonctions $f(x) = (\lambda x + \mu)e^x$, $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$

2/ $h(x) = 4x^2e^x$ donc $h'(x) = 8xe^x + 4x^2e^x$ et $h''(x) = 8e^x + 8xe^x + 8xe^x + 4x^2e^x = 8e^x + 16xe^x + 4x^2e^x$. Alors $h''(x) - 2h'(x) + h(x) = 8e^x + 16xe^x + 4x^2e^x - 2(8xe^x + 4x^2e^x) + 4x^2e^x = 8e^x$. D'où h est une solution particulière de (E).

Scanné avec CamScanner

ensemble des solutions de l'équation différentielle (E)
ne des fonctions $f : x \mapsto (Ax + B)e^{-x} + 4x^2e^{-x}$, où

$f(0) = A = -\sqrt{2}$
$f'(x) = (Ax - A + B)e^{-x} - (4x^2 - 8x)e^{-x}$ et $f'(0) = \pi + 3$
$-A + B = -\sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} - B = -\sqrt{2}$
$\Rightarrow B = 0$
ait que $f(x) = -\sqrt{2}e^{-x} - 4x^2e^{-x}$

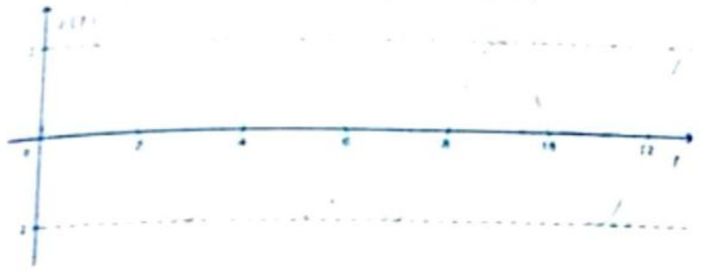
Corrigé 06

mmons l'équation horaire du mouvement
tion $x \mapsto x(t)$ est la restriction à $\mathbb{R}_+$ de la solution de
on différentielle $x'' - \frac{\pi^2}{4}x = 0$ qui vérifie $x(1) = 2$ et
0. Il existe deux réels A et B tels que $x(t) =$
$t) + B\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, $t \in \mathbb{R}_+$. De l'hypothèse $x(1) = 2$ et
0 on déduit que $A = 2$ et $B = 0$. Par suite, l'équation
du mouvement est $x(t) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, $t \in \mathbb{R}_+$.
mmons la position et la vitesse du mobile
ant $t = 0$, $x'(0) = 0$, c'est-à-dire que le mobile est à
t du repère
≥ 0, $x'(t) = \pi\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, donc $x'(0) = \pi$, c'est-à-dire
itesse du mobile à l'instant $t = 0$ est π m/s.
nensation de $x \mapsto x(t)$.
tion $x \mapsto 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ est périodique et dont 4 est une
Il suffit donc de l'étudier sur $[0; 4]$. Pour tout $t \geq 0$,
$\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

La logique est le dernier refuge des gens sans imagination.
Oscar Wilde

Tableau de variation de $x(t)$

t	0		1		3		4
$x'(t)$	+	0	−	0	+		
$x(t)$	0	↗	2	↘	−2	↗	0



Corrigé 07

1. Résolvons l'équation différentielle suivante (E)

(E) équivaut à $y'' + \left(\frac{7}{2}\right)^2 y = 0$.

L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions f définies, pour tout réel x, par

$f(x) = A\cos\left(\frac{7}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{7}{2}x\right)$, A et B $\in \mathbb{R}$.

2. Déterminons la solution f de l'équation (E) qui vérifie $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $f(0) = -\sqrt{2}$.

$x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{7}{2}A\sin\left(\frac{7}{2}x\right) + \frac{7}{2}B\cos\left(\frac{7}{2}x\right)$ et

$$\begin{cases} f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ f(0) = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -A\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) + B\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 0 \\ A = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + B\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ A = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}B = 0 \\ A = -\sqrt{2} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} B = \sqrt{2} \\ A = -\sqrt{2} \end{cases}$$

La solution f de (E) vérifiant $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $f(0) = -\sqrt{2}$ est :

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -\sqrt{2}\cos\left(\frac{7}{2}x\right) + \sqrt{2}\sin\left(\frac{7}{2}x\right)$

3/ Montrons que, pour tout réel x, $f(x) = 2cos\left(\frac{7}{2}x - \frac{3\pi}{4}\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{7}{2}x\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{7}{2}x\right)\right]$

$f(x) = 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)cos\left(\frac{7}{2}x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{7}{2}x\right)\right]$

Or $\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a - b)$, d'où:

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2\cos\left(\frac{7}{2}x - \frac{3\pi}{4}\right)$

4/ La valeur moyenne m de f sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{14}; \frac{5\pi}{14}\right]$.

$$\mu = \frac{1}{\frac{5\pi}{14} - \frac{\pi}{14}} \int_{\frac{\pi}{14}}^{\frac{5\pi}{14}} f(x)dx$$

$$\mu = \frac{7}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{14}}^{\frac{5\pi}{14}} 2\cos\left(\frac{7}{2}x - \frac{3\pi}{4}\right)dx$$

$$\mu = \frac{7}{\pi} \int_{\frac{\pi}{14}}^{\frac{5\pi}{14}} \cos\left(\frac{7}{2}x - \frac{3\pi}{4}\right)dx$$

$$\mu = \frac{7}{\pi}\left[\frac{2}{7}\sin\left(\frac{7}{2}x - \frac{3\pi}{4}\right)\right]_{\frac{\pi}{14}}^{\frac{5\pi}{14}}$$

$$\mu = \frac{2}{\pi}\left[\sin\left(\frac{7}{2} \times \frac{5\pi}{14} - \frac{3\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{7}{2} \times \frac{\pi}{14} - \frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$\mu = \frac{2}{\pi}\left[\sin\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$\mu = \frac{2}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$\mu = \frac{2}{\pi} \times 2$ soit $\mu = \frac{4}{\pi}$

La valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{14}; \frac{5\pi}{14}\right]$ est $\frac{4}{\pi}$.

Corrigé 08

1/ L'équation caractéristique associée à (E) est : $r^2 - 4r + 5 = 0$: $\Delta' = -1$, on a donc deux solutions complexes conjuguées $2 + i$ et $2 - i$. Il vient que les solutions de (E) sont les fonctions : $x \mapsto e^{2x}(Acosx + Bsinx)$, $A, B \in \mathbb{R}$.

2/ a. On a : $g(x) = (ax + b)e^x$, donc:

$g'(x) = (a + b + ax)e^x$ et $g''(x) = (2a + b + ax)e^x$

Comme $g(x)$ est solution de (E'), on a :

$g''(x) - 4g'(x) + 5\,g(x) = (-x + 1)e^x$

$\Leftrightarrow (2a + b + ax)e^x - 4(a + b + ax)e^x + 5(ax + b)e^x = (-x + 1)e^x$

$\Leftrightarrow (-2a + 2b + 2ax)e^x = (-x + 1)e^x$

$\Leftrightarrow (-2a + 2b + 2ax) = (-x + 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -1 \\ -2a + 2b = 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$ et $b = 0$

On déduit que $g(x) = -\frac{1}{2}xe^x$.

b. On a $[g(x) + h(x)]'' - 4[g(x) + h(x)]' + 5[g(x) + h(x)] = [g(x)]'' - 4[g(x)]' + 5[g(x)] + [h(x)]'' - 4[h(x)]' + 5[h(x)] = (-x + 1)e^x + 0 = (-x + 1)e^x$

D'où $f(x) = g(x) + h(x)$ est une solution de l'équation (E').

3/ Les solutions de (E') sont les fonctions f définies par :

$f(x) = g(x) + h(x)$ et $f'(x) = g'(x) + h'(x)$. D'où :

$f'(x) = -\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}xe^x + 2e^{2x}[(2A + B)cosx + (2B - A)sinx]$. D'après les données et 2/a, on a:

$f(0) = g(0) + h(0) = 0 + A = 0 \Rightarrow A = 0$;

$f'(0) = g'(0) + h'(0) = -\frac{1}{2} + 2(2A + B) = -1 \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$

Donc la fonction cherchée est $f: x \mapsto -\frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{4}e^{2x}sinx$.

L'expérience est le nom que chacun donne à ses erreurs.
Oscar Wilde

Scanné avec CamScanner

Corrigé 09

1/ On a $(\sum)$: $\begin{cases} y' = -z & (i) \\ z' = y - 2z & (ii) \end{cases}$

- On a $(i) \Rightarrow y'' = -z' = -y + 2z$ d'après (ii)

$$\begin{cases} y' = -z \\ y'' = -y + 2z \end{cases} \Rightarrow y'' + 2y' + y = 0$$

- On a : $(ii) \Rightarrow z'' = -y' - 2z' = -z - 2z'$ donc $z'' + 2z' + z = 0$. D'où le résultat.

2/a. On a :(E) :$(u'' + u') + (u' + u) = 0$ soit encore $(u' + u)' + (u' + u) = 0$, donc $u' + u$ est solution de l'équation différentielle $y' + y = 0$. Donc : $(u' + u)(x) = ae^{-x}$, $(a \in \mathbb{R})$.

b. $g: x \longmapsto axe^{-x}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de (E')

En effet, on a : $g'(x) = a(1 - x)e^{-x}$ et $g'(x) + g(x) = ae^{-x}$.

$f - g$ solution de $v' + v = 0 \Leftrightarrow (f - g)' + (f - g) = 0$

$\Leftrightarrow f' + f - (g' + g) = 0$

$\Leftrightarrow f' + f - ae^{-x} = 0$, car g est solution de (E')

$\Leftrightarrow f' + f = ae^{-x}$, donc : f est solution de (E') si et seulement si $(f - g)$ est solution de $v' + v = 0$.

c. On a : $(f - g)(x) = be^{-x}$; donc les solutions de (E) sont les fonctions f définies par : $f(x) = (ax + b)e^{-x}$, $(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$.

3/ Si $(y; z)$ est solution de $(\sum)$, alors : $y = (ax + b)e^{-x}$ et $z = (cx + d)e^{-x}$. Réciproquement, si y et z sont solutions de $(\sum)$, alors $y' = -z \Rightarrow c = a$ et $d = b - a$.

Donc: $\begin{cases} y = (ax + b)e^{-x} \\ z = (ax + b - a)e^{-x} \end{cases}$

Corrigé 10

1/ Soit (E') l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$.

(E') équivaut à $y'' + 2^2 y = 0$.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ est l'ensemble des fonctions f définies, pour tout réel t, par $f(t) = Acos2t + Bsin2t$ où A et B, $A, B \in \mathbb{R}$.

2/ Soit g la fonction définie, pour tout réel t, $g(t) = \cos t$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = -sint$ et $g''(t) = -cost$. Il s'ensuit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g''(t) + 4g(t) = -\cos t + 4\cos t$ soit $g''(t) + 4g(t) = 3cost$. D'où g est solution de l'équation différentielle (E).

3/ Vérifions que f est solution de l'équation différentielle (E)

$\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = -\sin t - 2a \sin 2t + 2b \cos 2t$

$f''(t) = -\cos t - 4a \cos 2t - 4b \sin 2t$.

Nous en déduisons que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$f''(t) + 4f(t) = -\cos t - 4a \cos 2t - 4b \sin 2t + 4\cos t + 4a \cos 2t + 4b \sin 2t$. D'où :

$\forall t \in \mathbb{R}$, $f''(t) + 4f(t) = 3\cos t$: f est solution de l'équation différentielle (E).

4/ Déterminons a et b tels que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$

$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a = 0 \\ 2b = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$

La solution particulière de (E) est donc définie, pour tout t, par $f(t) = \cos t - \cos 2t$.

5/ a. Montrons que, pour tout réel t, on a : $-2 \leq h(t) \leq 2$

Remarquons que la fonction h définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $f(t) = \cos t - \cos 2t$ n'est autre que celle qui a été déterminée à la question précédente.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos t \leq 1$ et $-1 \leq -\cos 2t \leq 1$.

Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $-2 \leq \cos t - \cos 2t \leq 2$

D'où : $\forall t \in \mathbb{R}$, $-2 \leq h(t) \leq 2$.

Scanné avec CamScanner

b. Déterminons t tel que $h(t) = 0$

$h(t) = 0 \Leftrightarrow cost - cos2t = 0$

$\Leftrightarrow \cos t - 2cos^2 t + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \cos t \\ -2X^2 + X + 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \cos t \\ -2X^2 + 2X - (X - 1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \cos t \\ -2X(X - 1) - (X - 1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \cos t \\ (X - 1)(-2X - 1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \cos t \\ X = 1. \end{cases}$ ou $\begin{cases} X = \cos t \\ X = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \cos t = 1$ ou $\cos t = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos t = \cos 0$ ou $\cos t = \cos \frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow t = 2k\pi$ ou $t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $t = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

L'ensemble des solutions de l'équation $h(t) = 0$ est

$\left\{2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\}$, $(k \in \mathbb{Z})$

Corrigé 11

1/ Déterminons les solutions de (E_1) et (E_2).

$(E_1) \Leftrightarrow y' = y$, donc l'ensemble des solutions de (E_1) est l'ensemble des fonctions f définies, pour tout réel x, par $f(x) = Ae^x$, où $A \in \mathbb{R}$.

$(E_2) \Leftrightarrow y' = -y$, donc l'ensemble des solutions de (E_2) est l'ensemble des fonctions f définies, pour tout réel x, par $f(x) = Be^{-x}$, où $B \in \mathbb{R}$.

2/ a. Déterminons la solution particulière f_1 de (E_1)

$f_1(0) = 2 \Leftrightarrow Ae^0 = 2$, donc $A = 2$

f_1 est définie, pour tout réel x, par $f_1(x) = 2e^x$.

b. Déterminons la solution particulière f_2 de (E_2)

$f_2(0) = -1 \Leftrightarrow Be^0 = -1$, donc $B = -1$.

f_2 est définie, pour tout réel x, par $f_2(x) = -e^{-x}$

3/ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) - f_2(x) = 3 \Leftrightarrow 2e^x + e^{-x} = 3$

$\Leftrightarrow 2e^x + \frac{1}{e^x} = 3$

$\Leftrightarrow \frac{2e^{2x} + 1 - 3e^x}{e^x} = 0$

$\Leftrightarrow 2e^x + 1 - 3e^x = 0$ (car, pour tout réel x, $e^x \neq 0$). Par suite :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) - f_2(x) = 3$ équivaut à $2e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$

4/ Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation $2e^{2x} - 3e^{2x} + 1 = 0$

$2e^{2x} + 3e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(e^x)^2 - 3e^x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = X \\ 2X^2 - 3X + 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = X \\ X \in \left\{1; \frac{1}{2}\right\} \end{cases}$

$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ et $e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -ln2$, d'où :

$S = \{0; -ln2\}$.

Corrigé 12

1.a/ Posons : $y = xz$.

On a : $y' = z + xz'$ et $y'' = 2z' + xz''$.

y est solution de (E) $\Leftrightarrow x^2(2z' + xz'') - x(z + xz') + xz = 0$

$\Leftrightarrow x^2z' + x^3z'' = 0$

$\Leftrightarrow x^2(z' + xz'') = 0$

$\Leftrightarrow z' + xz'' = 0$, car $x \in]0; +\infty[$, donc $x \neq 0$

$\Leftrightarrow (xz')' = 0$.

On en déduit que : $xz' = A$, $(A \in \mathbb{R})$

b/ Résolvons sur $]0; +\infty[$ (E') puis (E)

$xz' = A \Leftrightarrow z' = \frac{A}{x}$

$\Leftrightarrow z = Alnx + B$, $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

Donc l'équation (E) a pour solution :

Scanné avec CamScanner

$y = xz = Axlnx + Bx, A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$

2. Résolvons sur $]-\infty; 0[$ l'équation différentielle : $y' = \frac{x+y}{x}$

On a (H) : $y' = \frac{x+y}{x} \Leftrightarrow xy' = x + y$

Posons $y = xz$. On a : $y' = z + xz'$. xz est solution de (H) si et seulement si : $x(z + xz') = x + xz$ c'est-à-dire si et seulement si $z' = \frac{1}{x}$, car $x \in]-\infty; 0[$, donc $x \neq 0$.

D'où : $z = ln(-x) + C, (C \in \mathbb{R})$. Par suite :

$y = x\ln(-x) + Cx, (C \in \mathbb{R})$.

Corrigé 13

I-(E): $y' + y = \frac{1}{e^x - 1}$.

1/ Résolution de $y' + y = 0$

$r + 1 = 0 \Rightarrow r = -1$

$S = \{x \mapsto Ae^{-x}, A \in \mathbb{R}\}$

2/ a. Déterminons h telle que $\varphi(x) = \frac{h(x)}{e^x}$.

φ solution de (E) $\Leftrightarrow \varphi'(x) + \varphi(x) = \frac{1}{e^x - 1}$.

Or $\varphi'(x) = \frac{e^x h'(x) - e^x h(x)}{e^{2x}} \Leftrightarrow \varphi'(x) = \frac{h'(x) - h(x)}{e^x}$, donc

(E) $\Leftrightarrow \frac{h'(x) - h(x)}{e^x} + \frac{h(x)}{e^x} = \frac{1}{e^x - 1}$

$\Leftrightarrow h'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) = ln(e^x - 1) + K, K \in \mathbb{R}$

b. Déduisons la solution générale de (E)

$\varphi(x) = \frac{h(x)}{e^x} \Rightarrow \varphi(x) = \frac{ln(e^x - 1) + K}{e^x}$.

La solution générale de (E) est de la forme :

$g(x) = Ae^{-x} + \frac{ln(e^x - 1) + K}{e^x}$. En posant $B = A + K$, on obtient : $g(x) = Be^{-x} + \frac{ln(e^x - 1)}{e^x}$

c. La solution de (E) vérifiant $f(\ln 2) = 0$

$Be^{-\ln 2} + \frac{\ln(e^{\ln 2} - 1)}{e^{\ln 2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}B = 0$, d'où $B = 0$.

On déduit que $f(x) = \frac{ln(e^x - 1)}{e^x}$

II. $f(x) = \frac{\ln(e^x - 1)}{e^x}$, $I(\alpha) = \int_{\ln 2}^{\ln \alpha} f(x)dx, \alpha > 2$

1/ a. Déterminons une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{e^x - 1}$

Une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{e^x - 1}$ est la fonction G définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $G(x) = ln(e^x - 1)$

b. Déduisons une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{e^x - 1}$

Une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{e^x - 1}$ est la fonction F définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $F(x) = ln(e^x - 1) - x$.

2/ Prouvons que $I(\alpha) = -f(ln\alpha) + ln(\alpha - 1) - ln\alpha + ln2$

f solution de (E) $\Leftrightarrow f'(x) + f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$

$\Leftrightarrow f(x) = -f'(x) + \frac{1}{e^x - 1}$

$I(\alpha) = \int_{\ln 2}^{\ln \alpha} f(x)dx = \int_{\ln 2}^{\ln \alpha} \left(-f'(x) + \frac{1}{e^x - 1}\right) dx$

$I(\alpha) = [-f(x) + \ln(e^x - 1) - x]_{\ln 2}^{\ln \alpha}$

$I(\alpha) = -f(\ln \alpha) + f(\ln 2) + \ln(e^{\ln \alpha} - 1) - \ln \alpha - \ln(e^{\ln \alpha} - 1) + \ln 2$

D'où : $I(\alpha) = -f(ln\alpha) + ln(\alpha - 1) - ln\alpha + ln2$

3/ Déduisons que $I(\alpha) = -\frac{ln(\alpha - 1)}{\alpha} + ln\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + ln2$

$I(\alpha) = -\frac{\ln(e^{\ln \alpha} - 1)}{e^{\ln \alpha}} + \ln\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right) + \ln 2$

D'où : $I(\alpha) = -\frac{ln(\alpha - 1)}{\alpha} + ln\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + ln2$.

4/ Calculons $\lim_{\alpha \to +\infty} I(\alpha)$.

$\lim_{\alpha \to +\infty} I(\alpha) = \lim_{\alpha \to +\infty} \left[-\frac{ln(\alpha - 1)}{\alpha} + ln\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + ln2\right]$

$\lim_{\alpha \to +\infty} I(\alpha) = ln2$, car $\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\ln(\alpha - 1)}{\alpha} = \lim_{\alpha \to +\infty} \left[\frac{\ln(\alpha - 1)}{\alpha - 1} \times \frac{\alpha - 1}{\alpha}\right] = 0$ et $\lim_{\alpha \to +\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = 0$.

Scanné avec CamScanner

Corrigé 14

1/ Soit (E) l'équation différentielle (E): $9y'' + \pi^2 y = 0$.

(E) équivaut à $y'' + \frac{\pi^2}{9} y = 0$, qui est de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$ en posant $\omega = \frac{\pi}{3}$. Il s'ensuit que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions f définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = A\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + B\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$, où A et B désignent deux réels quelconques.

2/ a. Soit f la solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par le point P de coordonnées $(1; -\sqrt{2})$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses. Ces données permettent de trouver que : $f(1) = -\sqrt{2}$ et $f'(1) = 0$

b. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = -A \times \frac{\pi}{3} \times \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) + B \times \frac{\pi}{3} \times \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$, donc

$$\begin{cases} f(1) = -\sqrt{2} \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + B\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{2} \\ -A \times \frac{\pi}{3} \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + B \times \frac{\pi}{3} \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B = -\sqrt{2} \\ -\frac{\pi\sqrt{3}}{6}A + \frac{\pi}{6}B = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + \sqrt{3}B = -2\sqrt{2} \\ -\sqrt{3}A + B = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + 3A = -2\sqrt{2} \\ B = \sqrt{3}A \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ B = -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

On en déduit que, pour tout réel x,

$f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - \frac{\sqrt{6}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

c. Vérifions que, pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{2}\cos\left[\frac{\pi}{3}(x+2)\right]$

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2}\left[-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)\right]$

$f(x) = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)\right]$

$f(x) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{2\pi}{3}\right)$

D'où, pour tout réel x, $f(x) = \sqrt{2}\cos\left[\frac{\pi}{3}(x+2)\right]$

3/ a. Montrons que f est périodique de période 6

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+6) = \sqrt{2}\cos\left[\frac{\pi}{3}(x+2+6)\right]$

$f(x+6) = \sqrt{2}\cos\left[\frac{\pi}{3}(x+2) + 2\pi\right]$

$f(x+6) = \sqrt{2}\cos\left[\frac{\pi}{3}(x+2)\right]$, car la fonction $x \mapsto \cos x$ est périodique de période 2π sur $\mathbb{R}$.

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+6) = f(x)$, donc f est périodique de période 6.

b. Calculons $I^2 = \frac{1}{6}\int_0^6 [f(x)]^2 dx$

$I^2 = \frac{1}{6}\int_0^6 2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{2\pi}{3}\right) dx$

$I^2 = \frac{1}{3}\int_0^6 \cos^2\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{2\pi}{3}\right) dx$

$I^2 = \frac{1}{3}\int_0^6 \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left[2\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{2\pi}{3}\right)\right]\right) dx$, car $\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$

$I^2 = \frac{1}{6}\int_0^6 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}x + \frac{4\pi}{3}\right)\right) dx$

$I^2 = \frac{1}{6}\left[x + \frac{3}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{3}x + \frac{4\pi}{3}\right)\right]_0^6$

$I^2 = \frac{1}{6}\left[6 + \frac{3}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{3} \times 6 + \frac{4\pi}{3}\right) - \frac{3}{2\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]$

$I^2 = \frac{1}{6}\left[6 + \frac{3}{2\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \frac{3}{2\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]$

$I^2 = 1$ avec $I > 0$. On en déduit que $I = 1$.

La valeur efficace de f est donc égale à 1.

Scanné avec CamScanner

Corrigé 15

1/ a $g(x) = pcosx + qsinx$ et $g'(x) = -psinx + qcosx$

g solution de $(E_1) \Rightarrow -psinx + qcosx + 2pcosx + 2qsinx = cosx$

$$\Rightarrow (2q - p)sinx + (q + 2p)cosx = cosx$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2q - p = 0 \\ q + 2p = 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{5} \\ p = \frac{2}{5} \end{cases}$$

b. $f + g$ *solution de* $(E_1) \Leftrightarrow (f + g)'(x) + 2(f + g)(x) = cosx$

$$\Leftrightarrow f'(x) + g'(x) + 2f(x) + 2g(x) = cosx$$
$$\Leftrightarrow f' + 2f = 0, car\ g'(x) + 2g(x) = cosx$$

d'après 1.a.

$$\Leftrightarrow f\ est\ solution\ de\ (E_2)$$

c. La solution générale de (E_2) est sous la forme $f(x) = Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$

Déduction des solutions de (E_1)

f solution de $(E_2) \Leftrightarrow f + g\ est\ solution\ de\ (E_1)$, or $g(x) = \frac{2}{5}cosx + \frac{1}{5}sinx$ et $f(x) = Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$. D'où $h(x) = \frac{2}{5}cosx + \frac{1}{5}sinx + Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

2/ a. Déterminons la fonction g

Soit $g(x) = ax + b$ ce polynôme, on a : $g'(x) = a$ et $g''(x) = 0$.

g solution de $(E_3) \Leftrightarrow g''(x) - 2g'(x) + g(x) = -3x + 4$
$\Leftrightarrow -2a + ax + b = -3x + 4$
$\Leftrightarrow ax + b - 2a = -3x + 4$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \end{cases}$. D'où $g(x) = -3x - 2$

b. Démontrons que f solution de (E_3) si et seulement si $h = f - g$ est solution de (E_4): $y'' - 2y' + y = 0$

$h = f - g \Rightarrow h' = f' - g'$

$\Rightarrow h'' = f'' - g''$

f solution de $(E_3) \Leftrightarrow f''(x) - 2f'(x) + f(x) = -3x + 4$
$\Leftrightarrow f''(x) - 2f'(x) + f(x) -$
$(g''(x) - 2g'(x) + g(x)) = -3x + 4 - (-3x + 4)$
$\Leftrightarrow f'' - g'' - 2(f' - g') + (f - g) = 0$
$\Leftrightarrow h'' - 2h' + h = 0$
$\Leftrightarrow h$ est solution de (E_4)

c. Résolvons (E_4)

L'équation caractéristique associée à (E_4) est : $r^2 - 2r + 1 = 0$ soit $r = 1$. D'où la solution de (E_4) est de la forme $h(x) = (Ax + B)e^x$, A, B $\in \mathbb{R}$.

Les solutions de (E_3) sont donc de la forme $f(x) = (Ax + B)e^x + g(x)$, soit $f(x) = (Ax + B)e^x - 3x - 2$, A, B $\in \mathbb{R}$.

d. Déterminons la solution u de (E_3) tel que $u(0) = -1$ et $u'(0) = 0$.

$u(x) = (Ax + B)e^x - 3x - 2$ et $u'(x) = (Ax + B + A)e^x - 3$

$\begin{cases} u(0) = -1 \\ u'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B - 2 = 1 \\ A + B - 3 = 0 \end{cases}$, d'où $A = 2$ et $B = 1$.

On déduit que $u(x) = (2x + 1)e^x - 3x - 2$.

Corrigé 16

Soit l'équation différentielle (E) : $16y'' + y = 0$.

1. Trouvons la solution générale de (E).

L'équation caractéristique associée à (E) est :, $16r^2 + 1 = 0$.

$16r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{1}{4}i$ ou $r = -\frac{1}{4}i$.

La solution générale de (E) est de la forme :

$f(x) = Acos\left(\frac{1}{4}x\right) + Bsin\left(\frac{1}{4}x\right)$, $A, B \in \mathbb{R}$

2. Déterminons la solution g de (E) sachant que

$\int_0^{\pi} g(x)dx = 4\sqrt{2} - 4$ **(1)** et $\int_0^{2\pi} g(x)dx = 0$ **(2)**

Scanné avec CamScanner

orrigé 15

a $g(x) = pcosx + qsinx$ et $g'(x) = -psinx + qcosx$
solution de $(E_1) \Rightarrow -psinx + qcosx + 2pcosx + qsinx = cosx$

$$\Rightarrow (2q - p)sinx + (q + 2p)cosx = cosx$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2q - p = 0 \\ q + 2p = 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{5} \\ p = \frac{2}{5} \end{cases}$$

). $f + g$ solution de $(E_1) \Leftrightarrow (f + g)'(x) + 2(f + g)(x) = cosx$

$$\Leftrightarrow f'(x) + g'(x) + 2f(x) + 2g(x) = cosx$$
$$\Leftrightarrow f' + 2f = 0, car\ g'(x) + 2g(x) = cosx$$

d'après 1.a.

$$\Leftrightarrow f \text{ est solution de } (E_2)$$

c. La solution générale de (E_2) est sous la forme $f(x) = Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$

Déduction des solutions de (E_1)

f solution de $(E_2) \Leftrightarrow f + g$ est solution de (E_1), or $g(x) = \frac{2}{5}cosx + \frac{1}{5}sinx$ et $f(x) = Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$. D'où $h(x) = \frac{2}{5}cosx + \frac{1}{5}sinx + Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

2/ a. Déterminons la fonction g

Soit $g(x) = ax + b$ ce polynôme, on a : $g'(x) = a$ et $g''(x) = 0$.

g solution de $(E_3) \Leftrightarrow g''(x) - 2g'(x) + g(x) = -3x + 4$
$\Leftrightarrow -2a + ax + b = -3x + 4$
$\Leftrightarrow ax + b - 2a = -3x + 4$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \end{cases}$. D'où $g(x) = -3x - 2$

b. Démontrons que f solution de (E_3) si et seulement si $h = f - g$ est solution de (E_4): $y'' - 2y' + y = 0$

$h = f - g \Rightarrow h' = f' - g'$

$\Rightarrow h'' = f'' - g''$

f solution de $(E_3) \Leftrightarrow f''(x) - 2f'(x) + f(x) = -3x + 4$
$\Leftrightarrow f''(x) - 2f'(x) + f(x) -$
$(g''(x) - 2g'(x) + g(x)) = -3x + 4 - (-3x + 4)$
$\Leftrightarrow f'' - g'' - 2(f' - g') + (f - g) = 0$
$\Leftrightarrow h'' - 2h' + h = 0$
$\Leftrightarrow h$ est solution de (E_4)

c. Résolvons (E_4)

L'équation caractéristique associée à (E_4) est : $r^2 - 2r + 1 = 0$ soit $r = 1$. D'où la solution de (E_4) est de la forme $h(x) = (Ax + B)e^x$, A, B $\in \mathbb{R}$.

Les solutions de (E_3) sont donc de la forme $f(x) = (Ax + B)e^x + g(x)$, soit $f(x) = (Ax + B)e^x - 3x - 2$, A, B $\in \mathbb{R}$.

d. Déterminons la solution u de (E_3) tel que $u(0) = -1$ et $u'(0) = 0$.

$u(x) = (Ax + B)e^x - 3x - 2$ et $u'(x) = (Ax + B + A)e^x - 3$

$\begin{cases} u(0) = -1 \\ u'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B - 2 = 1 \\ A + B - 3 = 0 \end{cases}$, d'où $A = 2$ et $B = 1$.

On déduit que $u(x) = (2x + 1)e^x - 3x - 2$.

Corrigé 16

Soit l'équation différentielle (E) : $16y'' + y = 0$.

1. Trouvons la solution générale de (E).

L'équation caractéristique associée à (E) est :. $16r^2 + 1 = 0$.

$16r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{1}{4}i$ ou $r = -\frac{1}{4}i$.

La solution générale de (E) est de la forme :

$f(x) = Acos\left(\frac{1}{4}x\right) + Bsin\left(\frac{1}{4}x\right)$, $A, B \in \mathbb{R}$

2. Déterminons la solution g de (E) sachant que

$\int_0^{\pi} g(x)dx = 4\sqrt{2} - 4$ **(1)** et $\int_0^{2\pi} g(x)dx = 0$ **(2)**

Scanné avec CamScanner

On a : $\int_0^{\pi} g(x)dx = \int_0^{\pi} \left[Acos\left(\frac{1}{4}x\right) + Bsin\left(\frac{1}{4}x\right)\right]dx$

$\int_0^{\pi} g(x)dx = \left[4Asin\left(\frac{1}{4}x\right) - 4Bcos\left(\frac{1}{4}x\right)\right]_0^{\pi}$

$\int_0^{\pi} g(x)dx = 4A\frac{\sqrt{2}}{2} - 4B\frac{\sqrt{2}}{2} + 4B$

$(1) \Leftrightarrow 4\left(A\frac{\sqrt{2}}{2} - B\frac{\sqrt{2}}{2} + B\right) = 4\sqrt{2} - 4$

$\Leftrightarrow A\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)B = \sqrt{2} - 1 \quad (1')$

$\int_0^{2\pi} g(x)dx = \int_0^{2\pi} \left[Acos\left(\frac{1}{4}x\right) + Bsin\left(\frac{1}{4}x\right)\right]dx$

$\int_0^{2\pi} g(x)dx = \left[4Asin\left(\frac{1}{4}x\right) - 4Bcos\left(\frac{1}{4}x\right)\right]_0^{\pi}$

$\int_0^{\pi} g(x)dx = 4A + 4B$

$(2) \Leftrightarrow 4A + 4B = 0$

$\Leftrightarrow A = -B \quad (2')$

De (1') et (2'), on déduit que $A = 1$ et $B = -1$.

- On obtient $g(x) = cos\left(\frac{1}{4}x\right) - sin\left(\frac{1}{4}x\right)$.

3. Déterminons la solution f de (E) vérifiant : $f'(0) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ et $f'(2\pi) = -\frac{1}{4}$

On a : $f'(x) = -\frac{1}{4}Asin\left(\frac{1}{4}x\right) + \frac{1}{4}cos\left(\frac{1}{4}x\right)$

$f'(0) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow B = -\sqrt{3}$; $f'(2\pi) = -\frac{1}{4} \Rightarrow A = 1$

On déduit que $f(x) = cos\left(\frac{1}{4}x\right) - \sqrt{3}sin\left(\frac{1}{4}x\right)$.

4. a. Démontrons que : $\forall \in \mathbb{R}, f(x) = 2cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$.

$f(x) = cos\left(\frac{1}{4}x\right) - \sqrt{3}sin\left(\frac{1}{4}x\right)$

$f(x) = 2\left[\frac{1}{2}cos\left(\frac{1}{4}x\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}sin\left(\frac{1}{4}x\right)\right]$

$f(x) = 2\left[cos\frac{\pi}{3}cos\left(\frac{1}{4}x\right) - sin\frac{\pi}{3}sin\left(\frac{1}{4}x\right)\right]$

$f(x) = 2cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$.

b. Calculons $f(-2\pi)$, $f(2\pi)$, $f'(x)$ puis établissons le tableau de variation de f sur $[-2\pi; 2\pi]$

$f(-2\pi) = \sqrt{3}$; $f(2\pi) = -\sqrt{3}$;

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{1}{2}sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$

Tableau de variation

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x}{4} + \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 4\left(k - \frac{1}{3}\right)k, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{4\pi}{3}$

x	-2π		$-\frac{4\pi}{3}$		2π
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$\sqrt{3}$	↗	2	↘	$-\sqrt{3}$

c. Tracé de la courbe (C_f) (voir figure)

On a : $f(0) = 1$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$

5. Calcul de l'aire $\mathcal{A}$

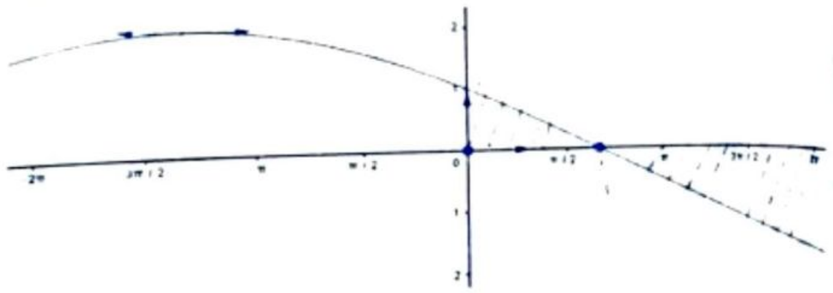
$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} f(x)dx \times u.a.$

$\mathcal{A} = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} f(x)dx \times u.a + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{2\pi} -f(x)dx \times u.a$

$\mathcal{A} = 4(3 - \sqrt{3})u.a.$

Scanné avec CamScanner

« C'est blesser un peuple au plus profond de lui-même que de l'atteindre dans sa culture et sa langue. » François Mitterrand



Corrigé 17

$y'' + 4y' + 4y = (x+1)e^{-2x}$ (1).

1. Résolvons l'équation homogène : $y'' + 4y' + 4y = 0$ (2)

L'équation caractéristique associée à (2) est : $r^2 + 4r + 4 = 0$

$\Delta' = 0$, donc $r_0 = -2$. Il vient que les solutions de (2) sont les fonctions de la forme : $y(x) = (Ax + B)\,e^{-2x}$, A, B $\in \mathbb{R}$.

2. $h(x) = p(x)e^{-2x}$

a. Démontrons que si h est une solution particulière de l'équation (1), alors p est une fonction polynôme de degré trois que l'on déterminera

Supposons que h est une solution particulière de (1), alors on a :

$h''(x) + 4h'(x) + 4h(x) = (x+1)e^{-2x}$ (*)

Or : $h'(x) = (p'(x) - 2p(x))e^{-2x}$

$h''(x) = (p''(x) - 4p'(x) + 4p(x))e^{-2x}$, donc :

(*)$\Rightarrow \left[(p''(x) - 4p'(x) + 4p(x))\right]e^{-2x} + (4p'(x) - 8p(x))e^{-2x} + 4p(x)e^{-2x} = (x+1)e^{-2x}$ soit $p''(x) = (x+1)e^{-2x}$. On déduit que : $p''(x) = x + 1$, d'où $p'(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + c$ et $p(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + cx + d$, où c et d sont des réels. On conclut que p est une fonction polynôme de degré 3.

b. Démontrons que f – h est une solution de l'équation homogène (2).

Posons $g(x) = f(x) - h(x)$; on a : $f(x) = g(x) + h(x)$

f solution de (1) $\Rightarrow$ $f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = (x+1)e^{-2x}$

$\Rightarrow g''(x) + 4g'(x) + 4g(x) + h''(x) + 4h'(x) + 4h(x) = (x+1)e^{-2x}$

$\Rightarrow g''(x) + 4g'(x) + 4g(x) + (x+1)e^{-2x} = (x+1)e^{-2x}$, car h est solution de (1)

$\Rightarrow g''(x) + 4g'(x) + 4g(x) = 0$

$\Rightarrow (f''(x) - h''(x)) + 4(f'(x) - h'(x)) + 4(f(x) - h(x)) = 0$.

D'où f – h est une solution de l'équation homogène (2).

c. Déduisons la solution de l'équation (1)

La solution générale de (1) est la famille de fonctions donnée par : $f(x) = g(x) + h(x)$.

$f(x) = (Ax + B)e^{-2x} + p(x)e^{-2x}$, soit $f(x) = (Ax + B + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + cx + d)e^{-2x}$, A, B, c, d $\in \mathbb{R}$

3. a. Vérifions que pour tout réel x, $4f(x) - (x+1)e^{-2x} = -f''(x) - 4f'(x)$

f solution de (1) $\Rightarrow f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = (x+1)e^{-2x}$

$\Rightarrow 4f(x) - (x+1)e^{-2x} = -f''(x) - 4f'(x)$,

d'où le résultat.

Primitive de $4f(x) - (x+1)e^{-2x}$

Posons $k(x) = 4f(x) - (x+1)e^{-2x}$; on a :

$k(x) = -f''(x) - 4f'(x)$, d'où une primitive de k(x) est :

$K(x) = -f'(x) - 4f(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$

b. Vérifions que la fonction $x \mapsto \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right)e^{-2x}$ est une solution de (1)

Posons $u(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right)e^{-2x}$, *on a :*

$u'(x) = \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{-2x}$,

$u''(x) = \left(\frac{2}{3}x^3 - 2x + 1\right)e^{-2x}$

On a : $u''(x) + 4u'(x) + u(x) = (x+1)e^{-2x}$, donc :

$x \mapsto \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right)e^{-2x}$ est une solution de (1)

Scanné avec CamScanner

Déduisons la valeur de $I = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)e^{-2x}\,dx$

Posons : $f(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right)e^{-2x}$, on a :

$4f(x) - (x+1)e^{-2x} = \left(\frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right)e^{-2x} + (x+1)e^{-2x} -$

$(x+1)e^{-2x} = \left(\frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right)e^{-2x}$, d'où :

$I = \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right)e^{-2x}dx = [-f'(x) - 4f(x)]_0^1$

Or : $f'(x) = \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{-2x}$, $f'(1) = -\frac{7}{12}e^{-2}$, $f(1) = \frac{7}{6}e^{-2}$, $f'(0) = -\frac{1}{4}$ et $f(0) = \frac{1}{4}$, donc :

$I = \frac{4}{12}e^{-2} - \frac{14}{3}e^{-2} + \frac{3}{4}$ soit $I = -\frac{49}{12}e^{-2} + \frac{3}{4}$.

Corrigé 18

1/ L'équation caractéristique d'inconnue r associée à (E') est : $r^2-2mr+3=0$ (*). On a : $\Delta' = m^2 - 3$

Tableau de signe de Δ

m	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
Δ	+	0 −	0	+

- Pour $m \in]-\infty;-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};+\infty[$, $\Delta' > 0$ et (*) admet deux solutions réelles distinctes $r_1 = m - \sqrt{m^2-3}$ et $r_2 = m + \sqrt{m^2-3}$. Ainsi (E') a pour solutions les fonctions de la forme f: $x \mapsto Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$
- Pour $m = -\sqrt{3}$, $\Delta' = 0$ et(*) admet une solution double $r_0 = -\sqrt{3}$. (E') a alors pour solutions les fonctions de la forme $f: x \mapsto (Ax+B)e^{-\sqrt{3}x}$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$
- Pour $m = \sqrt{3}$, $\Delta' = 0$ et(*) admet une solution double $r_0 = \sqrt{3}$. (E') a alors pour solutions les fonctions de la forme $f: x \mapsto (Ax+B)e^{\sqrt{3}x}$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

- Pour $m \in]-\sqrt{3};\sqrt{3}[$, $\Delta' < 0$ et (*) admet deux solutions complexes conjuguées $r_1 = m - i\sqrt{3-m^2}$ et $r_2 = m + i\sqrt{3-m^2}$ et (E') a pour solutions les fonctions de la forme $f: x \mapsto \left[A\cos\left(x\sqrt{3-m^2}\right) + B\sin\left(x\sqrt{3-m^2}\right)\right]e^{mx}$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

2/ $h: x \mapsto x^2e^x$ est une solution de (E) si et seulement si (E) : $h''(x) - 2mh'(x) + 3h(x) = 2(1-2x)e^x$.

Or $h'(x) = (x^2+2x)e^x$ et $h''(x) = (x^2+4x+2)e^x$, donc $[(x^2+4x+2) - 2m(x^2+2x) + 3x^2]e^x = 2(1-2x)e^x$

soit $(4-2m)x^2 + (4-4m)x = -4x$

D'où : $\begin{cases} 4-2m = 0 \\ 4-4m = -4 \end{cases}$ c'est-à-dire $m = 2$.

3/ On prend m = 2

a_1. φ solution de (E) équivaut à : $\varphi''(x) - 4\varphi'(x) + 3\varphi(x) = 2(1-2x)e^x$ (1)

Or $h''(x) - 4h'(x) + 3h(x) = 2(1-2x)e^x$ (2)

(1) − (2) $\Rightarrow [\varphi''(x) - 4\varphi'(x) + 3\varphi(x)] - [h''(x) - 4h'(x) + 3h(x)] = 0$

$\Rightarrow (\varphi - h)''(x) - 4(\varphi - h)'(x) + 3(\varphi - h)(x) = 0$

$\Rightarrow \varphi - h$ est une solution de (E').

a_2. $\varphi - h$ est une solution de (E')

$\Rightarrow (\varphi - h)''(x) - 4(\varphi - h)'(x) + 3(\varphi - h)(x) = 0$

$\Rightarrow [\varphi''(x) - 4\varphi'(x) + 3\varphi(x)] - [h''(x) - 4h'(x) + 3h(x)] = 0$

$\Rightarrow [\varphi''(x) - 4\varphi'(x) + 3\varphi(x)] = [h''(x) - 4h'(x) + 3h(x)]$.

Or $h''(x) - 4h'(x) + 3h(x) = 2(1-2x)e^x$, donc $\varphi''(x) - 4\varphi'(x) + 3\varphi(x) = 2(1-2x)e^x$. Il s'ensuit que la fonction φ est une solution de (E).

b. $2 \in]-\infty;-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};+\infty[$ et les solutions de (*) sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$, d'où les solutions de (E') sont les fonctions de la forme $k: x \mapsto Ae^x + Be^{3x}$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

Résolution de l'équation (E)

Scanné avec CamScanner

Posons $k = \varphi - h$, alors $\varphi(x) - h(x) = k(x)$, d'où $\varphi(x) = h(x) + k(x)$.

φ solution de (E) $\Rightarrow \varphi(x) = Ae^x + Be^{3x} + x^2e^x$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

On conclut que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $\varphi(x) = (A + x^2)e^x + Be^{3x}$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

c. $\Omega(0; -1) \in (C_f) \Rightarrow f(0) = -1$ soit $A + B = -1$ (3)

Comme la tangente à la courbe (C_f) en 0 a pour coefficient directeur 1, alors $f'(0) = 1$.

Or $f'(x) = (x^2 + 2x + A)e^x + 3Be^{3x}$, donc $f'(0) = 1 \Rightarrow A + 3B = 1$ (4). On obtient le système suivant : $\begin{cases} A + B = -1 \\ A + 3B = 1 \end{cases}$ qui donne $A = -2$ et $B = 1$. D'où : $S_{(E)} = \{f : x \mapsto (-2 + x^2)e^x + e^{3x}\}$.

4/a.

g solution de (E) $\Rightarrow g''(x) - 4g'(x) + 3g(x) = 2(1 - 2x)e^x$ $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) - 4g(x) + 3G(x) = U(x) + c$, où G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$, c est une constante réelle. On déduit que $G(x) = \frac{1}{3}[U(x) - g'(x) + 4g(x) + c]$

En prenant c = 0, on a : $G(x) = \frac{1}{3}[U(x) - g'(x) + 4g(x)]$

Autre méthode

G est dérivable comme somme de fonctions dérivables et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = \frac{1}{3}[U'(x) - g''(x) + 4g'(x)]$

$\Leftrightarrow G'(x) = \frac{1}{3}[2(1 - 2x)e^x + 3g(x) - 2(1 - 2x)e^x]$

$\Leftrightarrow G'(x) = \frac{1}{3}[3g(x)]$

$\Leftrightarrow G'(x) = g(x)$

D'où la fonction G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

4/ b. Pour $U(x) = (ax + b)e^x$, on a $U'(x) = (ax + b + a)e^x$

En identifiant à $U'(x) = 2(1 - 2x)e^x$, on obtient :

$a = -4$ et $b = 6$, d'où $U(x) = (-4x + 6)e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c. $G(x) = \frac{1}{3}[U(x) - g'(x) + 4g(x)]$

$G(x) = \frac{1}{3}[(-4x + 6)e^x - (-2 + x^2)e^x - 2xe^x - 3e^x + 4(-2 + x^2)e^x + 4e^{3x}]$

$G(x) = (x^2 - 2x)e^x + \frac{1}{3}e^{3x}$

Corrigé 19

1/ Calculons $\int_1^x e^t(t - 1)dt$

Posons $\begin{cases} u = t - 1 \\ v' = e^t \end{cases}$ on a $\begin{cases} u' = 1 \\ v = e^t \end{cases}$ et on obtient :

$\int_1^x e^t(t - 1)dt = [(t - 1)e^t]_1^x - \int_1^x e^t dt$

$\int_1^x e^t(t - 1)dt = (x - 1)e^x - 0 - e^x + e$

$\int_1^x e^t(t - 1)dt = (x - 2)e^x + e$

2/ $f(x) = z(x)e^{-x}$.

f est solution de (E) :

$f'(x) + f(x) = x - 1 \Leftrightarrow z'(x)e^{-x} - z(x)e^{-x} + z(x)e^{-x} = x - 1$

$\Leftrightarrow z'(x)e^{-x} = x - 1$

$\Leftrightarrow z'(x) = (x - 1)e^x$

3/ Déterminons les fonctions z vérifiant $z'(x) = e^x(x - 1)$

Il est clair que z est une des primitives de $(x - 1)e^x$, soit une fonction du type du 1. Agrémentée d'une constante : $z(x) = (x - 2)e^x + e + K$.

4/ $f(x) = z(x)e^{-x} \Rightarrow f(x) = x - 2 + ee^{-x} + Ke^{-x}$;

$f(x) = -1 + ee^{-1} + Ke^{-1} = Ke^{-1} = 0 \Rightarrow K = 0$

La solution cherchée est donc $f(x) = x - 2 + e^{-x+1}$.

Corrigé 20

1/ $y(t) = \frac{1}{N(t)} \Leftrightarrow N(t) = \frac{1}{y(t)} \Rightarrow N'(t) = -\frac{y'(t)}{y^2(t)}$. Remplaçons dans (1) :

Scanné avec CamScanner

$N'(t) = 2N(t) - 0{,}0045N(t) \Leftrightarrow -\frac{y'}{y^2} = \frac{2}{y} - \frac{0{,}0045}{y^2} \Leftrightarrow y' = -2y + 0{,}0045$.

2/ On a donc la solution $y(t) = Ce^{-2t} - \frac{0{,}0045}{-2} = Ce^{-2t} + 0{,}00225$. Pour $t = 0$ *on a* $N(0) = 1$, d'où $y(0) = 1$ et donc $1 = C + 0{,}00225$, d'où $C = 0{,}99775$.

3/ La solution pour N est donc

$N(t) = \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{0{,}00225 + 0{,}99775e^{-2t}} = \frac{e^{2t}}{0{,}00225e^{2t} + 0{,}99775}$

4/ On a

$N'(t) = \frac{-(-2e^{-2t} \times 0{,}99775}{(0{,}00225 + 0{,}99775e^{-2t})^2} = \frac{1{,}9955e^{-2t}}{(0{,}00225 + 0{,}99775e^{-2t})^2} > 0$

donc N est croissante. En $+\infty$ sa limite est $\frac{1}{0{,}00225} \cong 444$

5/ $N(t) = \frac{e^{2t}}{0{,}99775 + 0{,}00225e^{2t}}$; $N(t)$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = 0{,}00225e^{2t} - 0{,}00125$, soit $u' = 0{,}0045e^{2t}$.

On écrit donc $N(t) = \frac{1}{0{,}0045} \frac{0{,}0045e^{2t}}{0{,}00225e^{2t} + 0{,}99775}$; une primitive de N est alors : $t \mapsto \frac{1}{0{,}0045} \ln(0{,}00225e^{2t} + 0{,}99775)$

6/ $\frac{1}{T}\int_0^T N(t)dt = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{0{,}0045} \ln(0{,}00225e^{2t} + 0{,}99775)\right]_0^T$

$\frac{1}{T}\int_0^T N(t)dt = \frac{\ln(0{,}00225e^{2T} + 0{,}99775) - \ln(1)}{0{,}0045T}$

$\frac{1}{T}\int_0^T N(t)dt = \frac{\ln(0{,}00225e^{2T} + 0{,}99775)}{0{,}0045T}$

Quand T tend vers $+\infty$; $(0{,}00225e^{2T} + 0{,}99775)$ est équivalent à $0{,}00225e^{2T}$ et $\frac{\ln(0{,}00225e^{2T} + 0{,}99775)}{0{,}0045T}$ est équivalent à $\frac{2T + \ln(0{,}00225)}{0{,}0045T} = \frac{2}{0{,}0045} + \frac{\ln(0{,}00225)}{0{,}0045T}$ qui tend donc vers $\frac{2}{0{,}0045} \cong 444$

Corrigé 21

1/ a. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme : $x \longmapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ où C est une

constante réelle.

1/ b. Comme il y a une racine dans $Y' = 2aY + 2b\sqrt{Y}$ on peut se dire que $y = \varphi(Y) = \sqrt{Y}$: dérivons $y' = \frac{Y'}{2\sqrt{Y}}$, ce qui donne $y' = ay + b \Leftrightarrow \frac{Y'}{2\sqrt{Y}} = a\sqrt{Y} + b \Leftrightarrow$

$Y' = 2aY + 2b\sqrt{Y}$.

2/ a. $y' + y = 0$ a pour solutions $y = Ce^{-x}$.

b. $h(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x} \Rightarrow h'(x) = (\alpha - \alpha x - \beta)e^{-x}$

$\Rightarrow (\alpha - \alpha x - \beta)e^{-x} + (\alpha x + \beta)e^{-x} = 2e^{-x}$ d'où par identification : $\alpha = 2$ et β quelconque, par exemple 0, soit $h(x) = 2xe^{-x}$.

3/ a. $y = g + h \Rightarrow y = Ce^{-x} + 2xe^{-x} = (C + 2x)e^{-x}$.

b. $f(0) = C = -1 \Rightarrow f(x) = (2x - 1)e^{-x}$.

c. Lorsque x tend vers $+\infty$, f tend vers 0(croissances comparées) ; vers $-\infty$, f tend vers $-\infty$ car $2x - 1$ tend vers $-\infty$ et e^{-x} vers $+\infty$.

$f'(x) = -f(x) + 2e^{-x} = (3 - 2x)e^{-x}$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$2e^{-1,5}$	↘	0

Corrigé 22

Partie A

a. On multiplie en haut et en bas par $e^{-\frac{x}{4}}$:

$f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}e^{-\frac{x}{4}}}{e^{-\frac{x}{4}}\left(2 + e^{\frac{x}{4}}\right)} = \frac{3}{2e^{-\frac{x}{4}} + 1}$.

Scanné avec CamScanner

$N'(t) = 2N(t) - 0{,}0045N(t) \Leftrightarrow -\frac{y'}{y^2} = \frac{2}{y} - \frac{0{,}0045}{y^2} \Leftrightarrow y' = -2y + 0{,}0045$.

2/ On a donc la solution $y(t) = Ce^{-2t} - \frac{0{,}0045}{-2} = Ce^{-2t} + 0{,}00225$. Pour $t = 0$ on a $N(0) = 1$, d'où $y(0) = 1$ et donc $1 = C + 0{,}00225$, d'où $C = 0{,}99775$.

3/ La solution pour N est donc

$N(t) = \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{0{,}00225+0{,}99775e^{-2t}} = \frac{e^{2t}}{0{,}00225e^{2t}+0{,}99775}$

4/ On a

$N'(t) = \frac{-(-2e^{-2t}\times 0{,}99775}{(0{,}00225+0{,}99775e^{-2t})^2} = \frac{1{,}9955e^{-2t}}{(0{,}00225+0{,}99775e^{-2t})^2} > 0$

donc N est croissante. En $+\infty$ sa limite est $\frac{1}{0{,}00225} \cong 444$

5/ $N(t) = \frac{e^{2t}}{0{,}99775 + 0{,}00225e^{2t}}$; $N(t)$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = 0{,}00225e^{2t} - 0{,}00125$, soit $u' = 0{,}0045e^{2t}$.

On écrit donc $N(t) = \frac{1}{0{,}0045}\frac{0{,}0045e^{2t}}{0{,}00225e^{2t}+0{,}99775}$; une primitive de N est alors : $t \mapsto \frac{1}{0{,}0045}\ln(0{,}00225e^{2t} + 0{,}99775)$

6/ $\frac{1}{T}\int_0^T N(t)dt = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{0{,}0045}\ln(0{,}00225e^{2t} + 0{,}99775)\right]_0^T$

$\frac{1}{T}\int_0^T N(t)dt = \frac{\ln(0{,}00225e^{2T}+0{,}99775)-\ln(1)}{0{,}0045T}$

$\frac{1}{T}\int_0^T N(t)dt = \frac{\ln(0{,}00225e^{2T}+0{,}99775)}{0{,}0045T}$

Quand T tend vers $+\infty$; $(0{,}00225e^{2T} + 0{,}99775)$ est équivalent à $0{,}00225e^{2T}$ et $\frac{\ln(0{,}00225e^{2T}+0{,}99775)}{0{,}0045T}$ est équivalent à $\frac{2T+\ln(0{,}00225)}{0{,}0045T} = \frac{2}{0{,}0045} + \frac{\ln(0{,}00225)}{0{,}0045T}$ qui tend donc vers $\frac{2}{0{,}0045} \cong 444$

Corrigé 21

1/ a. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme : $x \longmapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ où C est une

constante réelle.

1/ b. Comme il y a une racine dans $Y' = 2aY + 2b\sqrt{Y}$ on peut se dire que $y = \varphi(Y) = \sqrt{Y}$: dérivons $y' = \frac{Y'}{2\sqrt{Y}}$, ce qui donne $y' = ay + b \Leftrightarrow \frac{Y'}{2\sqrt{Y}} = a\sqrt{Y} + b \Leftrightarrow$

$Y' = 2aY + 2b\sqrt{Y}$.

2/ a. $y' + y = 0$ a pour solutions $y = Ce^{-x}$.

b. $h(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x} \Rightarrow h'(x) = (\alpha - \alpha x - \beta)e^{-x}$

$\Rightarrow (\alpha - \alpha x - \beta)e^{-x} + (\alpha x + \beta)e^{-x} = 2e^{-x}$ d'où par identification : $\alpha = 2$ et β quelconque, par exemple 0, soit $h(x) = 2xe^{-x}$.

3/ a. $y = g + h \Rightarrow y = Ce^{-x} + 2xe^{-x} = (C + 2x)e^{-x}$.

b. $f(0) = C = -1 \Rightarrow f(x) = (2x - 1)e^{-x}$.

c. Lorsque x tend vers $+\infty$, f tend vers 0(croissances comparées) ; vers $-\infty$, f tend vers $-\infty$ car $2x - 1$ tend vers $-\infty$ et e^{-x} vers $+\infty$.

$f'(x) = -f(x) + 2e^{-x} = (3 - 2x)e^{-x}$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$2e^{-1,5}$	↘ 0

Corrigé 22

Partie A

a. On multiplie en haut et en bas par $e^{-\frac{x}{4}}$:

$f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}e^{-\frac{x}{4}}}{e^{-\frac{x}{4}}\left(2+e^{\frac{x}{4}}\right)} = \frac{3}{2e^{-\frac{x}{4}}+1}$.

Scanné avec CamScanner

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{2e^{-\frac{x}{4}}+1} = 0$, car $\begin{cases} e^{-\frac{x}{4}} \to +\infty \\ \frac{3}{2e^{-\frac{x}{4}}+1} \to 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{2e^{-\frac{x}{4}}+1} = 3$, car $\begin{cases} e^{-\frac{x}{4}} \to 0 \\ 2e^{-\frac{x}{4}}+1 \to 1 \end{cases}$

c. On peut remarquer que $e^{-\frac{x}{4}}$ est décroissante et que la fonction inverse l'est également, on a alors une fonction croissante : $a \le b \Rightarrow e^{-\frac{a}{4}} \ge e^{-\frac{b}{4}} + 1$

$\Rightarrow 2e^{-\frac{a}{4}} + 1 \ge 2e^{-\frac{b}{4}} + 1$

$\Rightarrow \frac{3}{2e^{-\frac{a}{4}}+1} \le \frac{3}{2e^{-\frac{b}{4}}+1}$

$\Rightarrow f(a) \le f(b)$.

Avec la dérivée, on a :

$f'(x) = 3\frac{-\left(-2\times\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}\right)}{\left(1+2e^{-\frac{x}{4}}\right)^2} = 3\frac{\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{4}}}{\left(1+2e^{-\frac{x}{4}}\right)^2} > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1/a. $y' = \frac{y}{4}$ a pour solution $y = Ce^{\frac{1}{4}t}$. $C \in \mathbb{R}$

b. Avec $g(0) = 1$, on a $y(0) = Ce^{\frac{1}{4}\times 0} = C = 1$ d'où $g(t) = e^{\frac{1}{4}t}$.

c. $g(t) = e^{\frac{1}{4}t} \ge 3 \Leftrightarrow \frac{1}{4}t \ge ln3 \Leftrightarrow t \ge 4\ln 3 \approx 4{,}4$ soit environ 4 ans et 5 mois. Après 5 années on est sûr que la population dépassera les 300 individus.

2/ (E_2) : $\begin{cases} u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{u(t)^2}{12} \\ u(0) = 1 \end{cases}$

a. $h = \frac{1}{u} \Rightarrow h' = -\frac{u'}{u^2}$. Or le système (E_2), devient, en divisant par u^2 : $\begin{cases} \frac{u'(t)}{u^2(t)} = \frac{1}{4}\frac{1}{u(t)} - \frac{1}{12} \\ u(0) = 1 \end{cases}$, soit $\begin{cases} h'(t) = \frac{1}{4}h(t) - \frac{1}{12} \\ h(0) = \frac{1}{u(0)} = 1 \end{cases}$

b. $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ a pour solution

$y = Ce^{-\frac{1}{4}t} - \frac{1/12}{-1/4} = Ce^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}$. On a donc $h(t) = Ce^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}$ et avec $h(0) = 1$, on tire $C + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow C = \frac{2}{3}$. La solution u est donc $u(t) = \frac{1}{h(t)} = \frac{1}{\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}t}+\frac{1}{3}} = \frac{3}{2e^{-\frac{1}{4}t}+1}$, où l'on retrouve la fonction f de la partie A.

c. Lorsque t tend vers $+\infty$, u se comporte comme f et tend vers 3, la population de rongeurs se stabilise donc vers 300 individus.

Corrigé 23

1/ a. Montrons que la fonction f est solution $y' = ay$

$f'(x) = ae^{ax} = af(x)$ donc $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.

b. Montrons que h est une fonction constante

$h'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax}$

$h'(x) = ag(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax}$

$h'(x) = 0$. On en déduit que $h(x) = K$, $K \in \mathbb{R}$.

c. Ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$

$h(x) = K = g(x)e^{-ax} \Rightarrow g(x) = Ke^{ax}$.

2/ a. Déterminons les réels a et b

$f_0'(x) = 2f_0(x) + \cos x \Leftrightarrow -a\sin x + b\cos x = 2(a\cos x + b\sin x) + \cos x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = 2b \\ b = 2a + 1 \end{cases}$ d'où : $\begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ b = \frac{1}{5} \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

$f_0(x) = -\frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$.

b. Résolvons l'équation différentielle $(E_0) : y' = 2y$

$y' = 2y$ a pour solution $y = Ke^{2x}$, $K \in \mathbb{R}$.

c. f est solution de (E) si et seulement si

$\begin{cases} f'(x) = 2f(x) + \cos x \\ f'_0(x) = 2f_0(x) + \cos x \end{cases} \Leftrightarrow (f' - f'_0)(x) = 2(f - f_0)(x)$.

donc $f - f_0$ est solution de (E_0).

d. Les solutions de (E) sont données par $(f - f_0)(x) = Ke^{2x}$.

d'où : $f(x) = \left(-\frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x\right) + Ke^{2x}$, $K \in \mathbb{R}$.

e. Déterminons la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$k\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{2}{5}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{\pi}{2}\right) + Ke^{2\times\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5} + Ke^{\pi}$

$k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow K = -\frac{1}{5}e^{-\pi}$, d'où :

$k(x) = \left(-\frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x\right) - \frac{1}{5}e^{2x-\pi}$

Corrigé 24

I.1/ Pour tout réel x de I, $f'(x) \neq 0$. Alors la droite T n'est pas parallèle à l'axe $(o; \vec{i})$. Donc T coupe l'axe $(o; \vec{i})$ en un unique point H dont l'abscisse X_T est la solution de l'équation d'inconnue X : $f'(x)(X - x) + f(x) = 0$.

Or : $f'(x)(X - x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)(X - x) = -f(x)$

$\Leftrightarrow X - x = -\frac{f(x)}{f'(x)}$

$\Leftrightarrow X = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, donc :

$X_T = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

2/ T admet une équation réduite du type $Y = ax + b$. Alors la droite T n'est pas parallèle à l'axe $(o; \vec{j})$. Donc T coupe l'axe $(o; \vec{j})$ en un unique point K dont l'ordonnée Y_T vérifie $Y_T = f'(x)(0 - x) + f(x)$ soit $Y_T = f(x) - xf'(x)$.

II. Soit $k \in \mathbb{R}^*$, k fixé et f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \neq 0$.

1/ f vérifie la propriété1 $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $x - X_T = k$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $x - \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right) = k$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{f(x)}{f'(x)} = k$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = kf'(x)$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{k}f(x)$

$\Leftrightarrow f$ est une solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{k}y$.

2/ On sait que les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{\frac{1}{k}x}$ où λ désigne une constante réelle. On sait aussi que l'équation différentielle $y' = 2y$ admet une unique solution satisfaisant à la condition initiale $y(0) = 1$. Cette solution est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lambda e^{2x}$ où λ vérifie $\lambda e^{2\times 0} = 1$. Donc $\lambda = 1$ puis $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}$.

III. Soit $k \in \mathbb{R}^*$, k fixé et f une fonction dérivable sur $I =]0, +\infty[$ telle que $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$.

1/ f vérifie la propriété 2 $\Leftrightarrow \forall x \in I, f(x) - Y_T = k$

$\Leftrightarrow \forall x \in I, f(x) - \left(f(x) - xf'(x)\right) = k$

$\Leftrightarrow \forall x \in I, xf'(x) = k$

$\Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) = \frac{k}{x}$

$\Leftrightarrow f$ est une solution sur I de l'équation différentielle $y' = \frac{k}{x}$.

2/ Les solutions de cette équation différentielle sont les primitives sur I de la fonction $u: x \longmapsto k \times \frac{1}{x}$. Ces solutions sont donc les fonctions $x \longmapsto klnx + \lambda$ où λ désigne une constante réelle. On sait de plus qu'une fonction u continue sur un intervalle I admet une seule primitive sur I qui prend une valeur donnée en un point donné. Dès lors, il existe une unique solution de $y' = \frac{1/2}{x}$ satisfaisant à la condition

Scanné avec CamScanner

$y(1) = 0$. Cette solution est la fonction f définie sur I par $f(x) = \frac{1}{2}lnx + \lambda$ où λ vérifie $\frac{1}{2}ln x + \lambda = 1$.

Donc $\lambda = 1$ puis : $\forall x > 0, f(x) = 1 + \frac{1}{2}lnx$.

Corrigé 25

Partie A

1/ u est dérivable sur IR comme produit de fonctions dérivables, et pour tout réel x : $u'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$.

Donc pour tout réel x : $u'(x) + u(x) = e^{-x}$. u est donc bien solution de (E).

2/ Les solutions de (E') sont de la forme : $y(x) = Ce^{-x}$, où C est un réel fixé.

3/ v est solution de (E) si et seulement si pour tout réel x, $v'(x) + v(x) = e^{-x}$, ce qui équivaut à : pour tout réel x, $v'(x) + v(x) = u'(x) + u(x)$, ce qui équivaut à : pour tout réel x, $(v-u)'(x) + (v-u)(x) = 0$, ce qui équivaut à $v - u$ est solution de (E').

4/ De ce qui précède, on déduit que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme : $v(x) = Ce^{-x} + xe^{-x}$, où C est un réel fixé.

5/ g est solution de (E) donc il existe un réel C tel que pour tout x : $g(x) = Ce^{-x} + xe^{-x}$.

Comme $g(0) = 2$, on en déduit que $C = 2$. On déduit que : $g(x) = 2e^{-x} + xe^{-x}$.

Partie B

1/ Pour tout réel k la fonction f_k est dérivable sur IR comme produit de fonctions dérivables, et pour tout réel x : $f_k'(x) = (1 - (x + k))e^{-x}$.

Pour tout réel x : $e^{-x} > 0$, donc $f_k'(x)$ est du signe de $(1 - x - k)$ à savoir positif sur $]-\infty ; 1 - k]$, négatif sinon. Du lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction, on déduit que la fonction f_k admet un maximum pour $x = 1 - k$.

2/ M_k est le point de C_k d'abscisse $1 - k$ donc son ordonnée est $f_k(1 - k) = e^{k-1} = e^{-(1-k)}$. Il est donc bien sur Γ.

3/ a. Par composition, la fonction représentée par Γ est décroissante, alors que f_k n'est pas monotone, les courbes sont donc faciles à identifier.

b. Γ passe par le point de coordonnées (0;1). On en déduit que l'unité graphique en ordonnée est 2 cm. Comme $f_k(0) = k$, on « lit » $k = 2$.

$f_2(x) = 0$ si et seulement si $x = -2$, donc la courbe C_2 passe par le point de coordonnées $(-2\ ;\ 0)$.

On en déduit que l'unité graphique en abscisse est également 2cm.

Remarque : on retrouve, comme par hasard, la fonction g de la **partie A** !

4/ Calculons $I = \int_0^2 (x + 2)e^{-x}dx$

Posons $\begin{cases} u(x) = x + 2 \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$, on a $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{-x} \end{cases}$ et on obtient :

$I = [-(x + 2)e^{-x}]_0^2 - \int_0^2 -e^{-x}dx = -4e^{-2} + 2 + [-e^{-x}]_0^2 = 3 - 5e^{-2}$

La fonction f_k étant positive sur $[0\ ;\ 2]$, on a ainsi calculé l'aire (en unités d'aire) délimitée par l'axe des abscisses, la courbe C_k et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

Corrigé 26

A. Résolution d'une équation différentielle

1/ La solution générale de (E_0) est du type $y_0(x) = ke^{-G(x)}$ où k est un nombre réel quelconque et G une primitive de la fonction $x \longmapsto -1$ d'où : $y_0(x) = ke^x$, où $k \in \mathbb{R}$.

2/ On calcule la dérivée de g :

$g'(x) = 1e^x + xe^x + 2 \times 1 + 0 = e^x + xe^x + 2$

On remplace dans l'équation (E) :

$g'(x) - g(x) = (e^x + xe^x + 2) - (xe^x + 2x + 2)$

Scanné avec CamScanner

$g'(x) - g(x) = e^x + xe^x + 2 - xe^x - 2x - 2$

$g'(x) - g(x) = e^x - 2x$

La fonction g est une solution particulière de l'équation (E).

3/ L'ensemble des solutions de (E) s'obtient en additionnant une solution particulière de (E) à la solution générale de l'équation homogène (E_0). On obtient alors :

$y(x) = y_0(x) + g(x)$ soit $y(x) = ke^x + xe^x + 2x + 2$.

4/ On choisit $f(x) = ke^x + xe^x + 2x + 2$ avec $f(0) = 3$ d'où : $f(0) = k\,e^0 + 0 \times e^0 + 2 \times 0 + 2 = 3 \Leftrightarrow k + 2 = 3$.

On obtient $k = 1$, d'où : $f(x) = e^x + xe^x + 2x + 2$.

B. Calcul intégral

1/ $I = \int_{-1}^{1}(2x + 2)dx$

$I = [x^2 + 2x]_{-1}^{1}$

$I = (1^2 + 2 \times 1) - ((-1)^2 + 2(-1))$

$I = 4$

2/ $J = \int_{-1}^{1}(x + 1)e^x dx$

$J = [(x + 1)e^x]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x\,dx$

$J = \left((1 + 1)e^1\right) - ((-1 + 1)e^{-1} - [e^x]_{-1}^{1}$

$J = 2e - 0 - e + e^{-1}$

D'où : $J = e + e^{-1}$

3/ a. $K = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1}(x + 1)e^x dx + \int_{-1}^{1}(2x + 2)dx$

$K = J + I$

$K = e + e^{-1} + 4$

b. $K = 7{,}09$

c. K désigne l'aire (en unité d'aire) de la portion de plan délimitée par les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de la fonction f.

Corrigé 27

1/a. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x)f'(x) = 1$. En changeant x en –x on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)f'(-x) = 1$. En particulier le produit $f(x)f'(-x) = 1$ n'est jamais nul, donc f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

b. f étant dérivable sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition. Par suite g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $g'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$

Or $f(-x)f'(x) = 1$ et $f(x)f'(-x) = 1$ en changeant x en $-x$. D'où : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 0$.

c. Comme g' est nulle sur $\mathbb{R}$, alors g est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Or $g(0) = f(0)f(0) = 16$, donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 16$.

d. Soit x un réel. D'après les questions précédentes, on a : $f(x)f(-x) = 16$ et f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, d'où $\frac{1}{f(-x)} = \frac{f(x)}{16}$.

Or $\frac{1}{f(-x)} = f'(x)$ d'après la condition (C), donc $f'(x) = \frac{f(x)}{16}$.

Il vient que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{f(x)}{16}$, d'où f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{1}{16}y$. De plus $f(0) = -4$ d'après les hypothèses de (C).

2/ a. Soit f une solution de l'équation différentielle (E).

Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x)e^{-\frac{x}{16}}$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$h'(x) = f'(x)e^{-\frac{x}{16}} - \frac{1}{16}f(x)e^{-\frac{x}{16}} = e^{-\frac{x}{16}}\left[f'(x) - \frac{1}{16}f(x)\right] = 0$, car f est solution de l'équation différentielle (E). D'où h' est nulle sur $\mathbb{R}$, par suite h est une fonction constante sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = K$, K étant une constante réelle. D'où $f(x) = Ke^{\frac{x}{16}}$ avec K réel.

Réciproquement, soit K un nombre réel. La fonction $f : x \mapsto Ke^{\frac{x}{16}}$ est solution de (E). En effet, $f'(x) = K \times \frac{1}{16}e^{\frac{x}{16}} = \frac{1}{16}f(x)$.

Scanné avec CamScanner

$g'(x) - g(x) = e^x + xe^x + 2 - xe^x - 2x - 2$
$g'(x) - g(x) = e^x - 2x$
La fonction g est une solution particulière de l'équation (E).
3/ L'ensemble des solutions de (E) s'obtient en additionnant une solution particulière de (E) à la solution générale de l'équation homogène (E_0). On obtient alors :
$y(x) = y_0(x) + g(x)$ soit $y(x) = ke^x + xe^x + 2x + 2$.
4/ On choisit $f(x) = ke^x + xe^x + 2x + 2$ avec $f(0) = 3$
d'où : $f(0) = k\,e^0 + 0 \times e^0 + 2 \times 0 + 2 = 3 \Leftrightarrow k + 2 = 3$.
On obtient $k = 1$, d'où : $f(x) = e^x + xe^x + 2x + 2$.

B. Calcul intégral

1/ $I = \int_{-1}^{1}(2x + 2)dx$
$I = [x^2 + 2x]_{-1}^{1}$
$I = (1^2 + 2 \times 1) - ((-1)^2 + 2(-1))$
$I = 4$

2/ $J = \int_{-1}^{1}(x + 1)e^x dx$
$J = [(x + 1)e^x]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x\,dx$
$J = \left((1 + 1)e^1\right) - ((-1 + 1)e^{-1} - [e^x]_{-1}^{1}$
$J = 2e - 0 - e + e^{-1}$
D'où : $J = e + e^{-1}$

3/ a. $K = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1}(x + 1)e^x dx + \int_{-1}^{1}(2x + 2)dx$
$K = J + I$
$K = e + e^{-1} + 4$

b. $K = 7{,}09$

c. K désigne l'aire (en unité d'aire) de la portion de plan délimitée par les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de la fonction f.

Corrigé 27

1/a. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x)f'(x) = 1$. En changeant x en $-x$ on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)f'(-x) = 1$. En particulier le produit $f(x)f'(-x) = 1$ n'est jamais nul, donc f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

b. f étant dérivable sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition. Par suite g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $g'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$
Or $f(-x)f'(x) = 1$ et $f(x)f'(-x) = 1$ en changeant x en $-x$. D'où : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 0$.
c. Comme g' est nulle sur $\mathbb{R}$, alors g est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Or $g(0) = f(0)f(0) = 16$, donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 16$.
d. Soit x un réel. D'après les questions précédentes, on a : $f(x)f(-x) = 16$ et f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, d'où $\frac{1}{f(-x)} = \frac{f(x)}{16}$.
Or $\frac{1}{f(-x)} = f'(x)$ d'après la condition (C), donc $f'(x) = \frac{f(x)}{16}$.
Il vient que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{f(x)}{16}$, d'où f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{1}{16}y$. De plus $f(0) = -4$ d'après les hypothèses de (C).

2/ a. Soit f une solution de l'équation différentielle (E).
Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x)e^{-\frac{x}{16}}$.
h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :
$h'(x) = f'(x)e^{-\frac{x}{16}} - \frac{1}{16}f(x)e^{-\frac{x}{16}} = e^{-\frac{x}{16}}\left[f'(x) - \frac{1}{16}f(x)\right] = 0$, car f est solution de l'équation différentielle (E). D'où h' est nulle sur $\mathbb{R}$, par suite h est une fonction constante sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = K$, K étant une constante réelle. D'où $f(x) = Ke^{\frac{x}{16}}$ avec K réel.
Réciproquement, soit K un nombre réel. La fonction $f: x \mapsto Ke^{\frac{x}{16}}$ est solution de (E). En effet, $f'(x) = K \times \frac{1}{16}e^{\frac{x}{16}} = \frac{1}{16}f(x)$.

Scanné avec CamScanner

b. Notons $f_K : x \mapsto Ke^{\frac{x}{16}}$

$f_K(0) = -4 \Leftrightarrow Ke^0 = -4$, donc $K = -4$.

La fonction $x \mapsto -4e^{\frac{x}{16}}$ est l'unique solution de (E) prenant la valeur -4 en 0

3/ D'apres les questions précédentes : si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C), alors f est la fonction $x \mapsto -4e^{\frac{x}{16}}$.

Réciproquement : montrons que la fonction $f : x \mapsto -4e^{\frac{x}{16}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et satisfait la condition (C).

- f est une fonction exponentielle, donc dérivable sur $\mathbb{R}$; sa dérivée est $f' : x \mapsto -\frac{1}{4}e^{\frac{x}{16}}$;
- $f(0) = -4$;
- $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(-x)f'(x) = -4e^{\frac{x}{16}} \times \left(-\frac{1}{4}e^{\frac{x}{16}}\right) = 1 \times e^0 = 1$.

On conclut que $f : x \mapsto -4e^{\frac{x}{16}}$ est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C).

Corrigé 28

1/ On considère la fonction z définie sur $[0;30]$ par $z = \frac{1}{y}$

Démontrons que la fonction y satisfait aux conditions $\begin{cases} y(0) = 0{,}01 \\ y' = 0{,}05y(10-y) \end{cases}$ si et seulement si la fonction z satisfait aux conditions $\begin{cases} z(0) = 100 \\ z' = -0{,}5z + 0{,}05 \end{cases}$

Comme y est dérivable sur $[0;30]$, alors z aussi l'est et on a : $y' = -\frac{z'}{z^2}$. D'où on a :

$$\begin{cases} y(0) = 0{,}01 \\ y' = 0{,}05y(10-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z(0) = 100 \\ -\frac{z'}{z^2} = \frac{0{,}05}{z}\left(10 - \frac{1}{z}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z(0) = 100 \\ z' = -0{,}05z\left(10 - \frac{1}{z}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z(0) = 100 \\ z' = -0{,}5z + 0{,}05 \end{cases}$$

2/ a. Déduisons une expression de z puis celle y

z est donc solution d'une équation différentielle de la forme $z' = az + b$. Les solutions sont les fonctions définies sur $[0;30]$ par $z(t) = ke^{-0{,}5t} + 0{,}1$, $k \in \mathbb{R}$.

$z(0) = 100 \Leftrightarrow ke^{-0{,}5\times 0} + 0{,}1 = 100$

$\Leftrightarrow k = 99{,}9$

Ainsi, z est définie par : $z(t) = 99{,}9e^{-0{,}5t} + 0{,}1$

On déduit que $y(t) = \frac{1}{99{,}9e^{-0{,}5t} + 0{,}1}$

b. Le pourcentage de la population infectée après 30 jours

On veut donc $y(30)$.

$y(30) = \frac{1}{99{,}9e^{-0{,}5\times 30} + 0{,}1} \cong 9{,}99$. On déduit qu'après 30 jours, 10% de la population est infecté.

Partie B-Etude sur l'efficacité d'un vaccin

Notons M l'événement « l'individu tombe malade » et V « l'individu est vacciné »

On a : $p(V) = 0{,}25$; $p_V(\overline{M}) = 0{,}92$ et $p(M) = 0{,}1$

On obtient : $p(\overline{V}) = 0{,}75$; $p_{\overline{V}}(M) = 0{,}08$

1/ Montrons que la probabilité de l'évenement « l'individu n'est pas vacciné et tombe malade » est égale à 0,08.

On veut $p(M \cap \overline{V})$

On a : $p(M \cap V) = p(V) \times p_V(M) = 0{,}25 \times 0{,}08 = 0{,}02$

$p_M(V) = \frac{p(M\cap V)}{p(M)} = \frac{0{,}02}{0{,}1} = 0{,}2$

$p_M(\overline{V}) = 1 - p_M(V) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

Enfin, $p(M \cap \overline{V}) = p(M) \times p_M(\overline{V}) = 0{,}1 \times 0{,}8 = 0{,}08$

2/ On cherche à calculer $p_{\overline{V}}(M)$

$p_{\overline{V}}(M) = \frac{p(M\cap\overline{V})}{p(\overline{V})} = \frac{0{,}08}{0{,}75} = \frac{8}{75}$

Scanné avec CamScanner

Corrigé 29

1. Soit f une fonction dérivable et strictement positive sur $]0; +\infty[$. Alors la fonction g = ln(f) est dérivable sur $]0; +\infty[$. De plus, pour tout réel positif t, on a $g'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$. Mais alors pour tout réel t de $]0; +\infty[$, $f'(t) = -\frac{1}{20}f(t)[3 - \ln(f(t))]$

$\Leftrightarrow$ pour tout réel de $]0; +\infty[$, $\frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{1}{20}[3 - \ln(f(t))]$

$\Leftrightarrow$ pour tout réel t de $]0 ; +\infty[$, $g'(t) = -\frac{1}{20}[3 - g(t)]$

$\Leftrightarrow$ pour tout réel t de $]0 ; +\infty[$, $g'(t) = \frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20}$.

2. Si a et b sont deux réels, a étant non nul, on sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme : $t \longmapsto Ce^{at} - \frac{b}{a}$ où C est une constante réelle.

Ici, a= $\frac{1}{20}$ et b = $-\frac{3}{20}$. Donc les solutions sur $]0 ; +\infty[$ de l'équation (H) sont les fonctions g définies sur $]0 ; +\infty[$ par : pour tout réel positif t, $g(t) = 3 + Ce^{t/20}$ où C est une constante réelle.

3. D'après 1, g est solution de (H), donc il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0 ; +\infty[$, $f(t)=e^{g(t)} = exp\left(3 + Cexp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$.

4/ a. Calculons $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$

$\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t}{20} = +\infty$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} exp\left(\frac{t}{20}\right) = +\infty$ puis $\lim\limits_{t\to+\infty} 3 - 3exp\left(\frac{t}{20}\right) = -\infty$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} exp\left(3 - 3exp\left(\frac{t}{20}\right)\right) = 0$, d'où $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

b. f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et pour tout réel positif t, on a $f'(t) = \frac{1}{20} \times (-3)exp\left(\frac{t}{20}\right) \times exp\left(3 - 3exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$

$f'(t) = -\frac{3}{20} \times exp\left(\frac{t}{20}\right) exp\left(3 - 3exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$.

Comme la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et donc, sur $[0 ; +\infty[$, f' est strictement négative sur $]0 ; +\infty[$. On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

c. Soit t un réel positif.

$f(t) < 0{,}02 \Leftrightarrow exp\left(3 - 3exp\left(\frac{t}{20}\right)\right) < \frac{1}{50}$

$\Leftrightarrow 3 - 3exp\left(\frac{t}{20}\right) < \ln\left(\frac{1}{50}\right)$ (Par stricte croissance de la fonction ln sur $]0; +\infty[$)

$\Leftrightarrow 3exp\left(\frac{t}{20}\right) < 3 + \ln(50)$

$\Leftrightarrow exp\left(\frac{t}{20}\right) > 1 + \frac{\ln(50)}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{t}{20} > \ln\left(1 + \frac{\ln(50)}{3}\right)$

$\Leftrightarrow t > 20\ln\left(1 + \frac{\ln(50)}{3}\right) = 16{,}693\ldots$.

Puisque 0,02 millier d'individus = 20 individus, le réel ci-dessus est le nombre d'années cherché. On veut un nombre entier d'années à partir duquel la taille de l'échantillon sera inférieure à vingt individus. Donc, au bout de 17 ans, la taille de l'échantillon sera inférieure à vingt individus.

Corrigé 30

Partie A

1/ L'unique solution de l'équation différentielle vérifiant $f(0) = N_0$ est définie par $f(t) = N_0e^{at}$

2/ La condition $f(T) = 2f(0)$ s'écrit : $a = \frac{1}{T}ln2$, d'où le résultat.

Partie B

1/ g étant strictement positive et dérivable, g' l'est aussi. On écrit : $\left(\frac{1}{g}\right)'(t) + a\left(\frac{1}{g}\right)(t) = \frac{-g'(t)+ag(t)}{(g(t))^2}$ qui, en tenant

Scanné avec CamScanner

compte de l'hypothèse exprimée par (E), donne l'implication demandée.

b. Les solutions de (E') sont les fonctions f définies sur IR pour lesquelles on peut trouver un réel k tel que, pour tout réel t, $f(t) = \frac{1}{M} + ke^{-at}$.

c. Si h est une solution strictement positive de (E'), h est dérivable et non nulle sur IR. Les calculs précédents peuvent alors être fait « à l'envers ».

$\left(\frac{1}{h}\right)'(t) = \frac{-h'(t)}{(h(t))^2} = \frac{ah(t) - \frac{a}{M}}{(h(t))^2}$, car et h est solution de (E')

$\left(\frac{1}{h}\right)'(t) = a\left(\frac{1}{h(t)}\right) - \frac{a}{Mh(t)} = a\left(\frac{1}{h(t)}\right)\left(1 - \frac{\frac{1}{h(t)}}{M}\right)$, d'où :

$\frac{1}{h}$ vérifie (E).

2/ a. Le dénominateur de l'expression définissant g peut être lu comme l'image du réel t par une fonction positive décroissante ayant pour limite 1 en $+\infty$. Cette observation fournit les résultats.

b. La fonction g' a le signe de g, qui est donc croissante. La fonction g est continue et croissante sur IR^+. Son minimum est $\frac{M}{1+C}$ et elle prend des valeurs supérieures à $\frac{M}{2}$. Donc elle prend la valeur $\frac{M}{2}$, en une seule occasion.

c. De $g' = ag - \frac{a}{M}g^2$, on déduit l'égalité demandée. Le signe de g'' est celui de $1 - \frac{2g}{M}$. L'existence et l'unicité de t_0 étant prouvées par des considérations d'analyse, on trouve la valeur de t_0 en résolvant l'équation $\frac{M}{2} = \frac{M}{1+Ce^{-at}}$. Elle s'écrit aussi : $Ce^{-at} = 1$ et a pour solution $t_0 = \frac{1}{a}lnC$.

d. Cette valeur moyenne est donnée par : $m = \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} \frac{M}{1+Ce^{-at}}dt$, et elle s'écrit finalement :

$m = aM\frac{ln2C - ln(C+1)}{lnC}$

PROBABILITÉS

RÉSUMÉ DE COURS

Définitions

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.

- On appelle événement toute partie de Ω.
- On appelle événement élémentaire tout singleton de Ω.

Exemples

On lance un dé et on observe le numéro tiré.

« Obtenir un nombre impair » est l'événement $\{1; 3; 5\}$.

« Obtenir un nombre premier pair » est l'événement élémentaire $\{2\}$.

Probabilité d'un événement: définition et propriétés

Définition

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. On appelle probabilité sur Ω toute application P de $\wp(\Omega)$ vers $[0; 1]$, qui à toute partie A de Ω associe le nombre réel P(A) appelé probabilité de l'événement A et vérifiant les conditions suivantes :

- $\forall A \in \Omega, 0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$; $P(\emptyset) = 0$
- Si $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n\}$, *alors* $P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} P(\{e_i\})$

Exemple 1

Soit Ω l'univers des éventualités a, b, c, d et e d'une expérience aléatoire, déterminer la probabilité sur Ω telle que :

$P(\{a\}) = 2P(\{b\}) = 2P(\{c\}) = 4P(\{d\}) = 4P(\{e\})$.

Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ où $A = \{a; b\}$, $B = \{c; e\}$, $C = \{b; c; d\}$.

Solution

$P(\Omega) = P(\{a\}) + P(\{b\}) + P(\{c\}) + P(\{d\}) + P(\{e\})$

Scanné avec CamScanner

$P(\Omega) = 10P(\{e\})$
Or $P(\Omega) = 1$, donc $P(\{e\}) = 0,1$
On déduit que : $P(\{b\}) = 0,2$; $P(\{a\}) = 0,4$; $P(\{c\}) = 0,2$; $P(\{d\}) = 0,1$ et $P(\{e\}) = 0,1$.
$P(A) = P(\{a\}) + P(\{b\}) = 0,6$
$P(B) = P(\{c\}) + P(\{e\}) = 0,3$
$P(C) = P(\{b\}) + P(\{c\}) + P(\{d\}) = 0,5$

Propriétés
1/ Si A et B sont deux événements incompatibles ($A \cap B = \emptyset$), alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
2/ Si A et B sont deux événements quelconques, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
3/Si $\overline{A}$ est le contraire d'un événement A, alors $P(\overline{A})=1-P(A)$.

Probabilité des événements équiprobables

Définition
Il y a **équiprobabilité** sur Ω lorsque tous les événements de Ω ont la même probabilité.
Dans ce cas, pour tout événement A de Ω, on a :

$$P(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$$

Probabilité conditionnelle

Définition
On appelle probabilité de **A sachant B** et on note $P_B(A)$ ou P(A/B) le nombre $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ avec $P(B) \neq 0$. On écrit : $P_B(A) = P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Exemple
Une usine de conditionnement de café abrite deux machines qui travaillent en chaîne. Les fèves de café décortiquées et séchées passent dans la 1ère machine pour torréfaction. la 2ème

machine a alors pour fonction de moudre les fèves de café grillées.
Des experts ont estimé à :
0,002 la probabilité pour que la 1ère machine tombe en panne.
0,003 la probabilité pour que la 2ème machine tombe en panne.
0,6 la probabilité pour que la 2ème machine tombe en panne lorsque la 1ère est en panne.
Calculer :
1-la probabilité pour que les deux machines tombent simultanément en panne.
2-la probabilité pour que la 1ère machine tombe en panne lorsque la 2ème est en panne.

Solution
Notons par T « la 1ère machine tombe en panne » et M « la 2ème machine tombe en panne »
On a : $M \cap T$ « les deux machines tombent simultanément en panne »
$P(T) = 0,002$, $P(M) = 0,003$, $P_T(M) = 0,6$
$P(M \cap T) = P(T) \times P_T(M) = P(M) \times P_M(T) = 0,002 \times 0,6 = 0,0012$

$$P_M(T) = \frac{P(M\cap T)}{P(M)} = \frac{0,0012}{0,003} = 0,4$$

Événements indépendants

On dit que deux événements d'un univers sont indépendants en probabilité, lorsque la probabilité de l'un n'est pas modifiée par la réalisation de l'autre.
On a alors : A et B sont indépendants si et seulement si :

$$\begin{cases} (1): P_B(A) = P(A), P(B) \neq 0 \\ (2): P_A(B) = P(B), P(A) \neq 0 \\ (3): P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \end{cases}$$

L'art de la médecine consiste à distraire le malade pendant que la nature le guérit. » Voltaire

Scanné avec CamScanner

Probabilités totales

Définition

On dit que $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$ forment une partition de Ω signifie que $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$ sont deux à deux disjoints et $B_1 \cup B_2 \cup \ldots\ldots \cup B_n = \Omega$.

Propriété

Si $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$ forment une partition de l'univers Ω

- Pour tout événement A de Ω, $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n)$.
- Pour tout k, $(1 \leq k \leq n)$, $P(A \cap B_k) = P_{B_k}(A) \times P(B_k)$.

Variables aléatoires

Définition

On considère une expérience aléatoire et Ω l'univers fini des réalisations.

Une variable aléatoire X sur Ω est une fonction définie sur Ω et prenant n variables réelles $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$.

Loi de probabilité-Fonction de répartition

La loi de probabilité de X est l'ensemble des couples $(x_i; P(X = x_i))$ pour $1 \leq i \leq n$.

On note $(X \leq x)$ l'événement : « la variable X prend une valeur inférieure ou égale à x ».

La fonction F définie par : $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0; 1]$, $x \longmapsto P(X \leq x)$ est appelée fonction de répartition de X.

En pratique, on obtient :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ pour } x < x_1, \\ F(x_{i-1}) + P(X = x_i), \text{ pour } x_i \leq x < x_{i+1} \\ 1, \text{ pour } x_n \leq x, \end{cases}$$

Exercice

Une urne contient deux boules bleues numérotées 1 et 3, désignées par B_1 et B_3, et deux boules noires numérotées 1 et 2, désignées par N_1 et N_2.

On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

1) Donner les différentes issues possibles de cette expérience.

On considère la fonction X qui, à toute issue de l'expérience associe la somme des numéros des deux boules tirées.

2) Quelles sont les valeurs prises par X. Déterminer la loi de probabilité de X. 3) Définir et construire la fonction de répartition de X.

Solution

1. Les issues possibles sont les paires :

$\Omega = \{(B_1, B_3), (B_1, N_1), (B_1, N_2), (B_3, N_1), (B_3, N_2), (N_1, N_2)\}$

2. Valeurs prises par X

$X(\Omega) = [2; 3; 4; 5]$

- Loi de probabilité de X

x_i	2	3	4	5
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ \ si\ x \in]-\infty; 2[\\ \frac{1}{6}\ si\ x \in [2; 3[\\ \frac{1}{2}\ si\ x \in [3; 4[\\ \frac{5}{6}\ si\ x \in [4; 5[\\ 1\ si\ x \in [5; +\infty[\end{cases}$$

Espérance mathématique -Variance et écart – type

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ telles que $p_i = P(X = x_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Scanné avec CamScanner

Scanné avec CamScanner

1/ L'espérance mathématique de X, notée E(X) est le nombre défini par $E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$.
2/ La variance de X, notée V(X) est le nombre défini par $V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2$. Dans la pratique, on utilise plus la formule : $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$.
3/ L'écart-type de X, noté $\sigma(X)$ est le nombre positif défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemple
Déterminer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X définie dans l'exemple précédent.

On a : $E(X) = \frac{7}{2}$; $V(x) = \frac{11}{12}$; $\sigma(X) = \sqrt{\frac{11}{12}}$.

Loi Binomiale

1/ On appelle **épreuve de Bernoulli**, toute épreuve aléatoire ne conduisant qu'à deux éventualités appelées SUCCES noté S ou ECHEC noté E ou $\overline{S}$.
2/ On appelle **schéma de Bernoulli**, une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
La probabilité p du succès et **le nombre n** d'épreuves sont appelés **paramètres** du schéma de Bernoulli.

Propriétés
Soit un schéma de Bernoulli de paramètres n et p. Soit X la variable aléatoire égale au nombre k de succès $(0 \leq k \leq n)$.
1/ La loi de probabilité de X est donnée par : $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où q = 1 – p. Cette loi de probabilité est appelée loi binomiale de paramètres n et p.
2/ L'espérance mathématique et la variance de X sont :
$\boldsymbol{E(X) = np,\ V(X) = npq}$.

La folie c'est se comporter de la même manière tout en attendant un résultat différent Einstein

EXERCICES

Exercice 01
Soient A et B deux événements tels que $P(A) = \frac{1}{5}$ et $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.
1/ Supposons que A et B soient incompatibles. Calculez $P(B)$.
2/ Supposons que A et B soient indépendants. Calculez $P(B)$.
3/ Calculez $P(B)$ en supposant que l'événement A ne peut être réalisé que si l'événement B est réalisé.

Exercice 02
1/ Montrez que, pour 3 événements quelconques A, B, C, on a $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.
2/ Généralisez dans le cas de n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Exercice 03
On s'intéresse à la présence sur les véhicules d'un parc automobile des trois dispositifs de sécurité suivants : ABS ; AirBags ; Correcteur de trajectoire. On sait que 7 véhicules ne sont munis d'aucun de ces dispositifs, alors que 18 véhicules sont munis des trois dispositifs. Tous les véhicules munis d'un correcteur de trajectoire sont munis aussi d'au moins un autre dispositif de sécurité. 305 véhicules disposent de deux dispositifs de sécurité au moins. 298 véhicules disposent de l'ABS, 428 véhicules disposent d'airbags et 122 véhicules disposent des deux. Enfin 87 véhicules disposent de l'ABS et d'un correcteur de trajectoire.
1/ Représentez ces données par un diagramme.
2/ Quel est le nombre total de véhicules de ce parc automobile ?
3/ Quel est le nombre de véhicules de ce parc disposant d'un et d'un seul dispositif de sécurité ?

Scanné avec CamScanner

4/ Quel est le nombre de véhicules de ce parc disposant d'au plus un dispositif de sécurité ?

Exercice 04

Une enquête effectuée auprès de 1500 personnes adultes (habitants d'une ville) portant sur les jeux d'argent indique que : - 1182 jouent à la loterie (A)
- 310 vont au casino (B)
- 190 jouent autant à la loterie qu'au casino.

a. Si une personne adulte (de la ville) est choisie au hasard, quelle est la probabilité qu'elle joue à la loterie ou au casino ?
b. Quelle est la probabilité qu'elle joue uniquement au casino ?

Exercice 05

Soient A, B et C des événements. On pose $E_1 = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ et $E_2 = A \cap (B \cup C)$.

1/ Montrez que E_1 et E_2 sont incompatibles.

2/ Déterminez l'ensemble $E_1 \cup E_2$.

3/ On donne $P(A) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}4$; $P(C) = 0{,}3$; $P(B \cap C) = 0{,}1$; $P(A \cap C) = 0{,}1$; $P(A \cap B) = 0{,}2$ et $P(A \cap B \cap C) = 0{,}05$. Calculez $P(E_1)$ et $P(E_2)$.

Exercice 06

On dispose d'un dé pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note p_i la probabilité de l'événement « le résultat du lancer est i ».

1/ Calculez p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6 sachant que $p_2 = p_1$; $p_3 = 3p_1$; $p_4 = 2p_1$; $p_5 = 2p_6$; $p_6 = 2p_3$.

2/ Calculez la probabilité de l'événement « obtenir un numéro pair ».

3/ On lance 5 fois de suite le dé. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois un numéro pair.

Exercice 07

Une urne contient 5 jetons blancs et 3 jetons rouges. Un jeu consiste à tirer simultanément 5 jetons de l'urne. Pour chaque jeton rouge tiré, le joueur gagne 100 francs et pour chaque jeton blanc tiré, il perd n francs ($n > 0$). Soit Y la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

1/ Déterminez en fonction de n, la loi de probabilité de Y.

2/ Calculez en fonction de n, E(Y).

3/ Déterminez n pour que le jeu soit équitable.

Exercice 08

Lors de l'épreuve de Mathématiques du Bac, un candidat doit répondre à un QCM composé de 10 questions. Pour chacune d'elles il est proposé 4 réponses possibles, mais une seule est correcte. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des 10 questions.

1/ Calculez la probabilité qu'un candidat, à l'issue de ce QCM
a) trouve uniquement la première question.
b) obtienne exactement une réponse correcte.

2/ Soit X la variable aléatoire qui à toute grille de réponses rendues par un candidat, associe le nombre k de réponses correctes.
a) Déterminez en fonction de k la probabilité qu'un candidat ait k réponses exactes.
b) calculez $p(X \leq 1)$ et déduisez-en $p(X \geq 2)$.

3/ Calculez E(X). A-t-on intérêt à répondre au hasard à ce QCM ?

Exercice 09

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches. Ces k + 3 boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

Scanné avec CamScanner

-Un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
-Un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
-Un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas-là qu'il gagne la partie.

Partie A

Dans la partie A, on pose k = 7.
Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1/ Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ait tiré deux boules de couleurs différentes. Démontrez que p = 0,42

2/ Soit n un entier naturel tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de parties gagnées par le joueur et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.

a. Expliquez pourquoi la variable X suit la loi binomiale de paramètre n et p.

b. Exprimez p_n en fonction de n, puis calculez p_0 en arrondissant au millième.

c. Déterminez le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99%.

Partie B

Dans la partie B, le nombre k est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Un joueur joue une partie.

On note la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1/ a. Justifiez l'égalité : $p(Y_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}$

b. Ecrivez la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k.

2/ On note $E(Y_k)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_k.
On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $E(Y_k)$ est strictement positive.
Déterminez les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.

Exercice 10

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis. On sait également que 30 des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

Partie A

On choisit au hasard un membre de cette association et on note : F l'événement « le membre choisi est une femme »,
T l'évènement « le membre choisi adhère à la section tennis ».

1/ Montrez que la probabilité de l'évènement F est égale à $\frac{2}{5}$

2/ On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis. Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

Partie B

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie.

1/ Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard et de manière indépendante pour tenir la loterie

Scanné avec CamScanner

a. Déterminez la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

b. Pour tout entier naturel n non nul, on note P_n la probabilité qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

Montrez que pour tout entier n non nul, $P_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$.

c. Déterminez le nombre minimal de semaines pour que $P_n \geq 0{,}99$.

2/ Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons : 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 20 euros chacun, les autres ne rapportent rien.

Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5€ puis tirer au hasard successivement avec remise deux jetons de l'urne : il reçoit alors 20 euros par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.

On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des 5€) réalisé par un joueur lors d'une partie à cette loterie.

a. Déterminez la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Calculez l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interprétez le résultat obtenu.

Exercice 11

Le personnel d'un très grand hôpital est réparti en trois catégories : les médecins, les soignants (non médecins) et le personnel AT (Administratif ou technique).

12% des personnels sont médecins et 71% sont des soignants.

67% des médecins sont des hommes et 92% des soignants sont des femmes.

On donnera une valeur approchée de tous les résultats à 10^{-4} près.

1/ On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital.

a. Quelle est la probabilité d'interroger une femme soignante ?

b. Quelle est la probabilité d'interroger une femme médecin ?

c. On sait que 88% du personnel est féminin. Calculez la probabilité d'interroger une femme AT. Déduisez-en la probabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie du personnel AT.

2/ Une entreprise souhaite envoyer un courrier publicitaire à 40 personnes qui travaillent dans cet hôpital. Elle a la liste du personnel mais ne connaît pas la fonction de chacun. Elle choisit au hasard 40 noms de la liste (en raison de la taille de la population, on considère qu'il s'agit de 40 tirages successifs indépendants avec remise).

Quelle est la probabilité que, sur 40 courriers envoyés, 10 exactement soient reçus par des médecins ?

Exercice 12

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes U_1, U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Il y a trois boules noires dans l'urne U_1, deux boules noires dans l'urne U_2 et une boule noire dans l'urne U_3, et toutes les autres boules contenues dans les urnes sont blanches.

Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie se déroule de la façon suivante :

Le joueur lance le dé ;

Scanné avec CamScanner

-s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans l'urne U_1;
-s'il obtient un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_2, on note sa couleur et la remet dans l'urne U_2;
-si le numéro amené par le dé n'est ni le 1 ni un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_3, note sa couleur et la remet dans l'urne U_3.

On désigne par A, B, C, et N les évènements suivants :

A : « le dé amène le numéro 1 »

B : « le dé amène un multiple de trois »

C : « le dé amène un numéro qui n'est ni le 1 ni un multiple de trois »

N : « la boule tirée est noire »

1/ Le joueur joue une partie.

a. Montrez que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\frac{5}{3k}$.

b. Calculez la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

c. Déterminez k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieur à $\frac{1}{2}$.

d. Déterminez k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\frac{1}{30}$.

2/ Dans cette question k est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\frac{1}{30}$.

Le joueur joue 20 parties, indépendantes les unes des autres.

Calculez, sous forme exacte puis arrondie à 10^{-3}, la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

Exercice 13

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

- Si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6.

-Si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.

A la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'évènement «le jeton tiré est blanc » et G l'évènement « le joueur gagne le jeu ».

L'événement contraire d'un évènement E sera noté $\bar{E}$.

La probabilité d'un événement E sera notée $p(E)$.

Partie A

1/ Montrez que $p(G) = \frac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

2/ Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu?

3/ Un joueur fait quatre parties de façon indépendante.

Calculez la probabilité qu'il en gagne exactement deux et donnez-en une valeur approchée à 10^{-3} près.

4/ Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,99 ?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

Scanné avec CamScanner

- Chaque joueur paie 1€ par partie ;
- Si le joueur gagne la partie, il reçoit 5€ ;
- Si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1/ On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie

a. Donnez la loi de probabilité de X et son espérance E(X).

b. On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si E(X)<0. Le jeu est-il favorable à l'organisateur?

2/ L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc.

Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

Exercice 14

Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties. La probabilité que le joueur perde la première partie est 0,2. Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :

- S'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05 ;
- S'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,01.

1/ On appelle :

E_1 L'événement « le joueur perd la première partie » ;

E_2 L'événement « le joueur perd la deuxième partie » ;

E_3 L'événement « le joueur perd la troisième partie ».

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois ou le joueur perd lors des trois premières parties. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Montrez que la probabilité de l'événement (X= 2) est égale à 0,031 et que celle de l'événement (X= 3) est égale à 0,002.

c. Déterminez la loi de probabilité de X.

d. Calculez l'espérance de X.

2/ Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'événement : « le joueur perd la n-ième partie », $\overline{E_n}$ l'événement contraire, et on note p_n la probabilité de l'événement E_n.

a. Exprimez, pour tout entier naturel n non nul, les probabilités de l'événement $E_n \cap E_{n+1}$ et $\overline{E_n} \cap E_{n+1}$ en fonction de p_n

b. Déduisez-en que $p_{n+1} = 0{,}05p_n + 0{,}05$ pour tout entier naturel n non nul.

1/ On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - \frac{1}{19}$

a. Montrez que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Déduisez-en, pour tout entier naturel n non nul, u_n puis p_n en fonction de n

c. Calculez la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Une personne qui n'a jamais commis d'erreurs n'a jamais tenter d'innover. - Einstein

Exercice 15

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

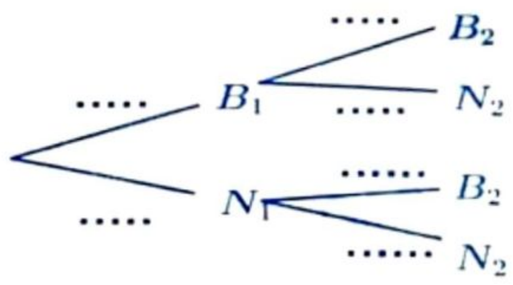
U_1 Contient k boules blanches (k entier naturel supérieur ou égal à 1) et 3 boules noires.

U_2 Contient 2 boules blanches et une boule noire.

On tire au hasard une boule dans U_1 et on la place dans U_2. On tire ensuite, au hasard, une boule dans U_2.

Scanné avec CamScanner

L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.
On note B_1 (respectivement N_1) l'événement « on a tiré une boule blanche (resp noire) dans l'urne U_1 ».
On note B_2 (respectivement N_2) l'événement « on a tiré une boule blanche (resp noire) dans l'urne U_1 ».
1/ a. Recopiez et complétez par les probabilités manquantes l'arbre ci-dessous :



b. Montrez que la probabilité de l'événement B_2 est égale à $\frac{3k+6}{4k+12}$.

Dans la suite on considère que $k = 12$.

1/ Un joueur mise 8 euros et effectue une épreuve.
Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne, le joueur reçoit 12 euros.
Sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise.
Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.
a. Montrez que les valeurs possibles de X sont 4 et -8.
b. Déterminez la loi de probabilité de la variable X.
c. Calculez l'espérance mathématique de X.
d. Le jeu est-il favorable au joueur ?
2/ Un joueur participe n fois de suite à ce jeu.

Au début de chaque épreuve, l'urne U_1 contient 12 boules blanches et 3 noires, et l'urne U_2 contient 2 boules blanches et 1 noire.
Ainsi, les épreuves successives sont indépendantes.
Déterminez le plus petit entier n pour que la probabilité de réaliser au moins une fois l'événement B_2 soit supérieur ou égale à 0,99.

Exercice 16

NB : On donnera les résultats des questions 1 et 2 sous forme de fraction irréductible.
M. Nicoué a 17 cravates : 12 cravates à motifs et 5 cravates unies. Il range toujours 10 cravates (7 à motifs et 3 unies) du côté gauche de son armoire et 7 cravates (5 à motifs et 2 unies) de l'autre côté.
1/ M. Nicoué devant partir en voyage pendant 3 jours a besoin de 3 cravates. Pour cela, il choisit 3 cravates simultanément et au hasard du côté gauche de son armoire.
Soit X le nombre de cravates à motifs qu'il choisit.
a. Déterminez la loi de probabilité de X.
b. Calculez E(X).
2/ Lorsqu'il ne voyage pas, pour déterminer la cravate qu'il portera dans la journée, M. Nicoué utilise la méthode suivante : il choisit un côté de l'armoire au hasard, de façon équiprobable, et il prend ensuite une cravate, toujours au hasard, sur le côté choisi.
On considère les événements suivants :
G : « M. Nicoué choisit le côté gauche de l'armoire ».
D : « M. Nicoué choisit le côté droit de l'armoire ».
M : « M. Nicoué tire une cravate à motifs ».
U : « M. Nicoué tire une cravate unie ».
a. Calculez la probabilité P(M).
b. Calculez la probabilité P(G/M).

Scanné avec CamScanner

3/ Tous les jours, pendant n jours, M. Nicoué effectue son choix en suivant la méthode indiquée en 2. Chaque soir, il remet la cravate utilisée pendant la journée à sa place.
a. Calculez en fonction de n la probabilité P_n pour qu'il ait pris au moins une cravate à motifs.
b. Calculez la plus petite valeur n pour laquelle $P_n \geq 0{,}99$.

Exercice 17

Une urne contient 9 boules (4 rouges, 2 bleues et 3 vertes) identiques au toucher. Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.
1/ On tire simultanément deux boules de l'urne et on note leur couleur. Calculez la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur.
2/ On tire une boule de l'urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne ; puis on tire une seconde boule et on note sa couleur. Calculez la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur.
3/ On adopte la règle suivante : soit n un entier naturel non nul ; on gagne 10n francs si les deux boules tirées sont de la même couleur et on perd n^2 francs dans le cas contraire.
On désigne par X (respectivement Y) la variable aléatoire qui, à tout tirage de deux boules de l'urne selon le procédé décrit dans la question1/ (respectivement dans la question 2/), associe le gain algébrique réalisé à l'issue du tirage.
a. Déterminez E(X) et E(Y) les espérances mathématiques de X et Y respectivement.
b. Déterminez les valeurs de l'entier naturel n telles que $E(X) < 0 < E(Y)$.

Exercice 18

Une entreprise fabrique des appareils électroniques.
La probabilité pour qu'un appareil fabriqué fonctionne parfaitement est $\frac{9}{10}$.

1/ On note F l'événement « l'appareil fonctionne parfaitement» et $\overline{F}$ l'événement contraire de F. Calculez la probabilité de l'événement $\overline{F}$.
2/ On fait subir à chaque appareil un test avant sa livraison ; on constate que :

- quand un appareil est en parfait état de fonctionnement, il est toujours accepté à l'issue du test.
- quand un appareil n'est pas en parfait état de fonctionnement, il peut être néanmoins accepté avec une probabilité de $\frac{1}{11}$.

On note T l'événement : « l'appareil est accepté à l'issue du test ».
a. Montrez que la probabilité de l'événement T et F noté $T \cap F$ est égale à $\frac{9}{10}$.
b. Calculez la probabilité $T \cap \overline{F}$.
c. Déduisez-en la probabilité de l'événement T.
d. Calculez la probabilité de F sachant T (probabilité conditionnel de F par rapport à T).

Exercice 19

Un groupe de 22 personnes décide d'aller au cinéma deux samedis de suite pour voir deux films A et B. Le premier samedi, huit personnes décident de voir le film A, et les autres vont voir le film B. Le deuxième samedi, quatre personnes décident de revoir le film A, deux vont revoir le film B, et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.
Après la deuxième séance, on interroge au hasard une personne de ce groupe.
On considère les événements suivants :
A_1 : « la personne interrogée a vu le film A le premier samedi »

Scanné avec CamScanner

A_2: « la personne interrogée a vu le film A le deuxième samedi »
B_1: « la personne interrogée a vu le film B le premier samedi »
B_2: « la personne interrogée a vu le film B le deuxième samedi »
1/ Calculez les probabilités suivantes :
$P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(A_2/A_1)$, $P(A_1 \cap A_2)$, $P(B_2/A_1)$, $P(B_2/B_1)$, $P(A_1 \cap B_2)$, $P(A_2 \cap B_1)$, $P(B_1 \cap B_2)$, $P(A_2/B_1)$, ...
2/ Le prix du billet pour le film A est de 30 F et de 20 F pour le film B. On appelle X la variable aléatoire égale au coût total, pour la personne interrogée, des deux séances de cinéma.
a. Déterminez la loi de probabilité de X.
b. Calculez l'espérance mathématique de X.
3/ Déterminez la fonction de répartition de X, puis construisez sa courbe représentative.

« Ne fais jamais rien contre ta conscience même si l'État te le demande. » Einstein

Exercice 20

Pour les questions 1 et 2, on donnera les résultats sous forme de fraction et sous forme décimale approchée par défaut à 10^{-3} près.
Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.
1/ Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.
a. Déterminez la loi de probabilité de X.

b. Calculez l'espérance mathématique de X.
2/ Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie.
On considère les événements suivants :
* C_1 : "L'enfant choisit la boîte cubique",
* C_2 : "L'enfant choisit la boîte cylindrique",
* R : "L'enfant prend une bille rouge",
* V : "L 'enfant prend une bille verte".

a. Représentez par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.
b. Calculez la probabilité de l'événement R.
c. Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?
3/ L'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.
a. Exprimez, en fonction de n, la probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.
b. Calculez la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geq 0{,}99$.

Exercice 21

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire au hasard une boule de l'urne, on lit le numéro noté a, puis on remet la boule tirée dans l' urne. On tire ensuite une deuxième boule de l'urne et on note b le numéro de la boule tirée. Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan. On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(a;\ 1)$ et $(ab - b + 6; b + 1)$. (a et b sont les réels définis ci-dessus).
1/ Démontrez que la probabilité que ces vecteurs soient colinéaires est égale à $\frac{1}{5}$.
2/ Deux personnes A et B jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après: au cours d'une partie chaque joueur effectue le tirage de deux

Scanné avec CamScanner

boules tel que décrit dans la 1ère question. Si A obtient des vecteurs colinéaires et B des vecteurs non colinéaires, A est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête. Si A obtient des vecteurs non colinéaires et B des vecteurs colinéaires, B est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête. Dans les autres cas les joueurs entreprennent une nouvelle partie: le jeu continue.

Pour tout entier $n \geq 1$: on désigne par:

A_n: « A gagne la n^{eme} partie».

B_n: « B gagne la n^{eme} partie».

C_n: « le jeu continue après la n^{eme} partie ».

a. Calculez les probabilités $P(A_1)$, $P(B_1)$ et $P(C_1)$ des événements A_1, B_1 et C_1.

b. Etant donné que $C_{n+1} \subset C_n$, $A_{n+1} \subset C_n$ et $B_{n+1} \subset C_n$, déterminez $C_{n+1} \cap C_n$, $B_{n+1} \cap C_n$ et $A_{n+1} \cap C_n$.

c. Donnez $P(C_{n+1}/C_n)$, $P(B_{n+1}/C_n)$ et $P(A_{n+1}/C_n)$. Exprimez $P(C_{n+1})$, $P(B_{n+1})$ et $P(A_{n+1})$ en fonction de $P(C_n)$.

d. Déduisez-en que $P(C_n) = \left(\frac{17}{25}\right)^n$, $P(B_n) = P(A_n) = \frac{4}{25}\left(\frac{17}{25}\right)^{n-1}$.

e. Déterminez le plus petit entier naturel n tel que $P(A_n) \leq 0{,}01$.

Exercice 22

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un nombre entier naturel supérieur ou égale 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. A chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tiré. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.

On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

Les trois questions de l'exercice sont indépendantes.

1/ Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

a. Démontrez que : $P(X = -1) = \frac{20n}{(n+10)(n+9)}$.

b. Calculez, en fonction de n, la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable X.

c. Vérifiez que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut : $E(X) = \frac{-6n^2-14n+360}{(n+10)(n+9)}$

d. Déterminez les valeurs de n pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.

2/ Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants. Déterminez la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces tirages soit strictement supérieur à 0,999.

Exercice 23

Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Partie A

On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges. Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

1/ Calculez la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires.

2/ Soit l'événement C : « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ».

Scanné avec CamScanner

Démontrez que la probabilité de l'événement C est égale à $\frac{7}{18}$

3/ Calculez la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes.

4/ A l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, quelle est la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes ?

Partie B

On dispose d'un second dé cubique B équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires.

Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B ;

- Si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé B et on note la couleur de la face obtenue ;
- Si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur de la face obtenue.

1/ a. Construisez un arbre de probabilité traduisant cette situation.

b. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ?

2/ Montrez que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égales à $\frac{4}{9}$.

3/ Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?

Exercice 24

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.

20% des boules portent le numéro 1 et sont rouges.

Les autres portent le numéro 2 et parmi elles, 10% sont rouges et les autres sont vertes.

1/ On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

2/ On a tiré une boule au hasard. Elle est rouge. Montrez que la probabilité qu'elle porte le numéro 2 est égale à $\frac{2}{7}$.

3/ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 :

On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise (après chaque tirage la boule est remise dans l'urne).

a. Exprimez en fonction de n la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages.

b. Déterminez l'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 25

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.

Dans un pays, il y a 2% de la population contaminé par un virus.

Partie A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

-La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).

-La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (sensibilité du test)

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

Scanné avec CamScanner

On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif » $\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les événements contraires de V et T.

1/ a. Précisez les valeurs des probabilités $P(V), P_V(T), P_{\overline{V}}(\overline{T})$. Traduisez la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

b. Déduisez-en la probabilité de l'événement $V \cap T$

2/ Démontrez que la probabilité que le test soit positif est de 0,0492.

3/ a. Justifiez par un calcul la phrase :

L'événement : « le test est positif, il n'y a qu'environ 40% de ''chance'' que la personne soit contaminée »

b. Déterminez la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

Partie B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants. On appelle par X la variable aléatoire qui donne le nombre de personne contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1/ Justifiez que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

2/ Calculez la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

Exercice 26

Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires.

Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires.

Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois : s'il obtient 1, il tire au

hasard une boule de l'urne A, sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.

1/ Soit R l'événement « le joueur obtient une boule rouge ».

Montrez que $p(R) = 0{,}15$.

2/ Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B ?

Partie B

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la **partie A**, dans des conditions identiques et indépendantes (c'est-à-dire qu'à l'issue de la première épreuve, les urnes retrouvent leur composition initiale).

Soit x un entier naturel non nul.

Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne x euros s'il obtient une boule rouge et perd 2 euros s'il obtient une boule noire.

On désigne par G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves. La variable aléatoire G prend donc les valeurs $2x, x-2$ et -4.

1/ Déterminez la loi de probabilité de G.

2/ Exprimez l'espérance $E(G)$ de la variable aléatoire G en fonction de x.

3/ Pour quelles valeurs de x a-t-on $E(G) \geq 0$?

Exercice 27

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient 4 jetons numérotés de 2 à 4.

L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 6 boules noires.

Un jeu consiste à tirer un jeton de l'urne U_1, à noter son numéro, puis à tirer simultanément de l'urne U_2 le nombre de

Scanné avec CamScanner

boules indiqué par le jeton.

On considère les événements suivants :

J_1 « Le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéros 1 »

J_2 « Le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 2 »

J_3 « Le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 3 »

J_4 « Le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 4 »

B « Toutes les boules tirées de l'urne U_2 sont blanches »

On donnera tous les résultats sous la forme d'une fraction irréductible sauf dans la question 4.b) où une valeur arrondie à 10^{-2} suffit.

1/ Calculez $p_{J_1}(B)$, probabilité de l'événement B sachant que l'événement J_1 est réalisé.

Calculez de même la probabilité $p_{J_2}(B)$.

On admet dans la suite les résultats suivants :

$p_{J_3}(B) = \frac{1}{30}$ *et* $p_{J_4}(B) = \frac{1}{210}$

2/ Montrez que $p(B)$, probabilité de l'événement B, vaut $\frac{1}{7}$.

On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

3/ On dit à un joueur que toutes les boules qu'il a tirées sont blanches. Quelle est la probabilité que le jeton tiré porte le numéro 3 ?

4/ On joue 10 fois de suite à ce jeu. Chacune des parties est indépendante des précédentes. On note N la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de parties ou toutes les boules tirées sont blanches.

a. Quelle est la probabilité suivie par la variable aléatoire N ?

b. Calculez la probabilité de l'événement (N = 3).

Exercice 28

On dispose de deux urnes et d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

L'urne U_1 contient trois boules rouges et une boule noire.

L'urne U_2 contient trois boules rouges et deux boules noires.

Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé ; si le résultat est 1, il tire au hasard une boule dans l'urne U_1, sinon il tire au hasard dans l'urne U_2.

On considère les évènements suivants :

A : « obtenir 1 en lançant le dé »

B : « obtenir une boule noire »

1/ a. Construisez un arbre pondéré traduisant cette expérience aléatoire.

b. Montrez que la probabilité d'obtenir une boule noire est $\frac{3}{8}$.

c. Sachant que l'on a tiré une boule noire, calculez la probabilité d'avoir obtenu 1 en lançant le dé.

2/ On convient qu'une partie est gagnée lorsque la boule obtenue est noire. Une personne joue dix parties indépendantes en remettant, après chaque partie, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

a. Calculez la probabilité de gagner exactement trois parties. On donnera le résultat arrondi au millième.

b. Calculez la probabilité de gagner au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

c. On donne le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(X < k)$	0,09	0,63	0,21	0,46	0,96	0,72	0,61	0,92	0,99	0,99
	1	7	1	7	3	5	6	2	9	9

Scanné avec CamScanner

Soit N un entier naturel compris entre 1 et 10. On considère l'événement : « la personne gagne au moins N parties ». A partir de quelle valeur de N la probabilité de cet événement est-elle inférieure à $\frac{1}{10}$?

Exercice 29

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle [0 ; 80].
Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.
Parmi les cubes bleus, 40% ont leurs faces marquées d'un cercle, 20% ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.
Parmi les cubes rouges, 20% ont leurs faces marquées d'un cercle, x% ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Partie A : expérience 1

On tire au hasard un cube de l'urne.

1/ Démontrez que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à $0{,}12 + 0{,}004x$.

2/ Déterminez x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.

3/ Déterminez x pour que les événements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » soient indépendants.

4/ On suppose dans cette question que $x = 50$.
Calculez la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

Partie B : expérience 2

On tire au hasard simultanément 3 cubes de l'urne.

Les résultats seront arrondis au millième.

1/ Quelle est la probabilité de tirer au moins un cube rouge ?

2/ Quelle est la probabilité que les cubes tirés soient de la même couleur ?

3/ Quelle est la probabilité de tirer exactement un cube marqué d'un cercle ?

Exercice 30

1/ En notant $p(A/B)$ la probabilité de l'événement « A sachant B » et $\overline{B}$ l'événement contraire de B, démontrez que :
$p\left(A/\overline{B}\right) = \frac{p(A)-p(A/B)\times p(B)}{1-p(B)}$.

2/ Lors d'une récente saison de chasse (période durant laquelle la chasse est autorisée dans une région donnée), on a pu établir les statistiques suivantes : 30% des renards sont enragés ; parmi les renards abattus, 40% étaient enragés.

a. En désignant par b ($b \neq 1$) la probabilité pour qu'un renard soit abattu lors de la saison de chasse, calculez en fonction de b la probabilité p pour qu'un renard survivant soit enragé.
(Durant la période considérée, on négligera les autres causes de décès ainsi que les nouveaux cas de rage.)

b. Quelle est la plus petite valeur de b pour que p soit inférieur ou égal à 0,1 ?

c. A l'issue d'une saison de chasse, la probabilité pour qu'un territoire soit décontaminé de la rage est égale à $\frac{1}{3}$. Une chasse est divisée en 10 territoires et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de territoires décontaminés après la saison de chasse.
Quelle est, dans les conditions précédentes, et en supposant que les résultats sont indépendants d'un territoire à l'autre, la probabilité d'avoir décontaminé au moins huit territoires sur les dix à l'issue de la saison ?

Scanné avec CamScanner

Exercice 31

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5% de ce cheptel (ou 5 pour mille).

1/ On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

2/ a. On choisit successivement et au hasard 10 animaux. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades parmi eux.

Montrez que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres. Calculez son espérance mathématique.

b. On désigne par A l'événement : « aucun animal n'est malade parmi les 10 ». On désigne par B l'événement : « au moins un animal est malade parmi les 10 ». Calculez les probabilités de A et B.

3/ On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8. Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,9. On note T l'événement : « avoir un test positif à cette maladie » et M l'événement : « être atteint de cette maladie ».

a. Représentez par un arbre pondéré les données de l'énoncé.

b. Calculez la probabilité de l'événement T.

c. Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif ?

Exercice 32

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir. On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3. Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8. Lors du

premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'événement :

T_n : « Le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage.»

P_n : « Le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage.»

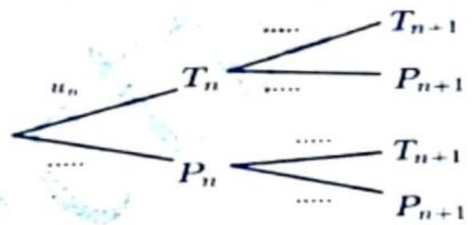
On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$u_n = p(T_n)$, où $p(T_n)$ est la probabilité de l'événement T_n.

1/ a. Donnez les valeurs des probabilités $p(T_1)$, $p(P_2)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}(T_2)$ et $p_{P_1}(T_2)$.

b. Montrez que $p(T_2) = \frac{1}{4}$.

c. Recopiez et complétez l'arbre suivant :



d. Démontrez que pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0{,}1u_n + 0{,}2$.

e. A l'aide de la calculatrice, émettez une conjecture concernant la limite de la suite (u_n).

2/ On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $v_n = u_n - \frac{2}{9}$

a. Démontrez que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{10}$. Précisez son premier terme.

Scanné avec CamScanner

b. Exprimez v_n en fonction de n. Déduisez-en l'expression de u_n en fonction de n.

c. Calculez la limite de la suite (u_n). Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en 1/e ?

Exercice 33

On considère les fonctions numériques f, g et h définies par :

$$\begin{cases} f(x) = (x^2 + x)ln|x| \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} ; \begin{cases} g(x) = \frac{ln(x^2+1)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

et $\begin{cases} h(x) = 1 - e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$.

I. 1/ Etudiez la continuité et la dérivabilité de f, g et h au point d'abscisse $x_0 = 0$.

2/ Montrez que : $\forall x \geq 0$, $ln(x^2 + 1) \leq x^2$. Déduisez-en que : $\forall x \in [0; 1]$, $g(x) \leq x$.

II. Lors d'un examen oral de mathématiques, chaque candidat devra tirer une des trois enveloppes identiques dans une urne. Les trois enveloppes contiennent l'une la fonction f, l'autre la fonction g et la troisième la fonction h. Le candidat étudiera la continuité et la dérivabilité en $x_0 = 0$ de la fonction qu'il aura choisie. On suppose les tirages équiprobables.

1/ Calculez la probabilité pour qu'un candidat donné tire une enveloppe contenant une fonction continue et dérivable en $x_0 = 0$.

2/ Au tour d'un candidat lamda, connu déjà de son examinateur qu'il ne peut répondre qu'à la question concernant la fonction f, il lui est accordé de procéder par tirages successifs sans remise jusqu'à obtenir la fonction f.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués par le fameux candidat.

a. Déterminez la loi de probabilité de X.

b. Calculez l'espérance mathématique et la variance de X.

c. Construisez la courbe de la fonction de répartition de X.

Exercice 34

Afin de créer une loterie, on met dans une urne n billets différents (n supérieur ou égal à 3), dont deux et deux seulement sont gagnants.

1 Dans cette question, on choisit au hasard et simultanément deux billets dans l'urne.

a. On suppose ici n = 10. X désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les choisis. Déterminez la loi de probabilité de X.

b. On revient au cas général avec n supérieur ou égal à 3. Calculez la probabilité, notée p_n, d'avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.

2 Dans cette question, on choisit au hasard deux billets dans cette urne en remettant le premier billet tiré avant de tirer le second.

a. On suppose ici n = 10. Y désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux choisis. Déterminez la loi de probabilité de Y.

b. On revient au cas général avec n supérieur ou égal à 3. Calculez la probabilité, notée q_n, d'avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.

3 a. Montrez que pour tout n supérieur ou égal à 3, on a $p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)}$.

b. En remarquant que pour tout entier n, n – 2 est inférieur à n – 1, déterminez un entier naturel n_0 tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0, on ait $p_n - q_n < 10^{-3}$.

c. Pour obtenir exactement un billet gagnant en choisissant deux billets de cette loterie, est-il préférable de tirer simultanément ou de les tirer l'un après l'autre en remettant le premier billet tiré.

Scanné avec CamScanner

Exercice 35

Un secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel : les ingénieurs, les opérateurs de production et les agents de maintenance.
Il y a 8% d'ingénieurs et 80% d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50% des ingénieurs, 25% des agents de maintenance et 60% des opérateurs de production.
On interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise. On note :

- M l'événement : « Le personnel interrogé est un agent de maintenance.»
- O l'événement : « Le personnel interrogé est un opérateur de production.»
- I l'événement : « Le personnel interrogé est un ingénieur.»
- F l'événement : « Le personnel interrogé est une femme.»

1/ Construisez un arbre pondéré correspondant aux données.
2/ Calculez la probabilité d'interroger :
a. un agent de maintenance,
b. une femme agent de maintenance,
c. une femme.
3/ Le service de maintenance effectue l'entretien de machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue ; des études ont montré que sur une journée :

- la probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,002.
- la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à 0,003.
- la probabilité qu'une panne se produise est égale à 0,04.

On note :

- A l'événement : « l'alarme se déclenche»
- B l'événement : « une panne se produit»

a. Démontrez que la probabilité qu'une panne se produise et l'alarme se déclenche est égale à 0,037.
b. Calculez la probabilité que l'alarme se déclenche.
c. Calculez la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

Exercice 36

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.
U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires.
U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.
On tire au hasard et simultanément deux boules de U_1 et on les met dans U_2, puis on tire au hasard et simultanément deux boules de U_2 et on les met dans U_1 ; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.
1/ On considère l'événement A « après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ.
Montrez que la probabilité $p(A)$ de l'événement A peut s'écrire : $p(A) = \frac{3n^2+15n+9}{5(n+3)(n+2)}$.
2/ On considère l'événement B : « après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche ».
Calculez la probabilité $p(B)$ de l'événement B.
3/ Un joueur mise 200 francs et effectue une épreuve. A l'issue de cette épreuve, on désigne par α le nombre de boules blanches contenues dans U_2.
Le joueur reçoit $10n(3-\alpha)$ francs.
a. Expliquez pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 6.
Dans la suite, on considère $n > 6$ et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeurs les gains algébriques du joueur.
b. Déterminez la loi de probabilité de X.
c. Calculez l'espérance mathématique de X.

Scanné avec CamScanner

Exercice 37

Pour réaliser une enquête, un employé interroge des personnes prises au hasard dans une galerie commerçante. Il se demande si trois personnes au moins accepteront de répondre.

1/ Dans cette question, on suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard accepte de répondre est 0,1.

L'employé interroge 50 personnes de manière indépendante.

On considère les événements suivants :

A : « au moins une personne accepte de répondre »

B : « moins de trois personnes acceptent de répondre »

C : « trois personnes ou plus acceptent de répondre »

Calculez les probabilités des événements A, B et C. On arrondira au millième.

2/ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Dans cette question on suppose que la variable aléatoire X qui, à tout groupe de n personnes interrogées indépendamment, associe le nombre de personnes ayant accepté de répondre, suit la loi de probabilité définie par :

$$\begin{cases} \forall k, 0 \leq k \leq n-1, P(X=k) = \dfrac{e^{-a}a^k}{k!} \\ P(X=n) = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{e^{-a}a^k}{k!} \text{ avec } a = \frac{n}{10} \end{cases} \text{ et}$$

a. Montrez que la probabilité qu'au moins trois personnes répondent est donnée par $f(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)$.

b. Calculez $f(5)$. Donnez-en l'arrondi au millième. Cette modélisation donne t-elle un résultat voisin de celui obtenu à la question 1/ ?

3/ On conserve le modèle de la question 2. On souhaite déterminer le nombre minimum de personnes à interroger pour que la probabilité pour que trois d'entre d'elles au moins répondent soit supérieure ou égale à 0,95.

a. Etudiez les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 1 - e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$ ainsi que sa limite en $+\infty$. Dressez son tableau de variations.

b. Montrez que l'équation $f(x) = 0{,}95$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}^+$, et que cette solution est comprise entre 6,29 et 6,3.

c. Déduisez-en le nombre minimum de personnes à interroger.

Exercice 38

Dans un village de vacances situé en montagne, deux familles A et B disposent de cinq circuits balisés de promenades c_1, c_2, c_3, c_4, c_5.

Partie A

Chaque matin, chacune des familles tire au hasard, indépendamment l'une de l'autre, un des cinq circuits.

1/ Combien y-a-t-il de tirages possibles pour l'ensemble des deux familles ?

2/ Quelle est la probabilité pour qu'elles fassent le même jour, le même circuit ?

3/ Quelle est la probabilité pour que pendant n jours consécutifs, elles ne se trouvent jamais sur le même circuit ?

4. Déterminez la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité de se trouver au moins une fois sur le même circuit est supérieure ou égale à 0,9.

Partie B

On considère dans cette partie deux jours consécutifs. Le deuxième jour chaque famille élimine de son tirage le circuit qu'elle a fait la veille. Il reste donc quatre circuits pour chacune des deux familles. On note :

E l'événement « les deux familles font le même circuit le premier jour ».

F l'événement « les deux familles font le même circuit le deuxième jour ».

Scanné avec CamScanner

lculez les probabilités suivantes : P(E), $P_E(F)$, $P_{\overline{E}}(F)$, F∩E) et P(F∩$\overline{E}$). Déduisez-en P(F).

ercice 39

ans tout l'exercice on considère 20 boules indiscernables au ucher (10 noires et 10 blanches) et deux urnes A et B dans acune desquelles on placera 10 boules suivant un mode qui ra précisé dans chaque question.

On choisit dix boules au hasard et on les met dans l'urne A. n place les dix autres boules dans l'urne B.

. Quelle est la probabilité pour que les deux urnes ne ontiennent chacune que des boules de même couleur ?

. Quelle est la probabilité pour que les deux urnes contien- ent chacune 5 boules blanches et 5 boules noires ?

/ Soit x un entier tel que $0 \leq x \leq 10$. On place maintenant x oules blanches et $10 - x$ boules noires dans l'urne A et les $10 - x$ boules blanches et x boules noires restantes dans 'urne B. On procède à l'expérience E : on tire au hasard une oule de A et on la met dans B, puis on tire au hasard une oule de B et on la met dans A. On désigne par M l'événement « chacune des deux urnes a la même composition avant et après l'expérience ».

a. Pour cette question on prend $x = 6$.
Quelle est la probabilité de l'événement M ?

b. Montrez que la probabilité de l'événement M est égale à : $\frac{1}{55}(-x^2 + 10x + 5)$.

c. Pour quelles valeurs de x l'événement M est-il plus probable que l'événement contraire $\overline{M}$?

Exercice 40

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique. Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un

mois, soit au total quarante trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p. Le prix de chaque trajet est de 10 euros, en cas de fraude l'amende est de 100 euros. Claude fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude. Soit X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Claude est contrôlé au i-ème trajet et la valeur 0 sinon. Soit X la variable aléatoire définie par $X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{40}$.

1/ Déterminez la loi de probabilité de X.

2/ Dans cette partie on suppose que $p = \frac{1}{20}$.

a. Calculez l'espérance mathématique de X.

b. Calculez les probabilités P(X = 0), P(X = 1) et P(X = 2).

c. Calculez à 10^{-4} près la probabilité pour que Claude soit contrôlé au plus deux fois.

3/ Soit Z_i la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur.
Justifiez l'égalité Z = 400 − 100X puis calculez l'espérance mathématique de Z pour $p = \frac{1}{5}$.

4/ On désire maintenant déterminer p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure à 99%.

a. Démontrez que $p(X \leq 2) = (1-p)^{38}(741p^2 + 38p + 1)$.

b. Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par :
$f(x) = (1-x)^{38}(741x^2 + 38x + 1)$. Montrez que f est strictement décroissante sur [0 ; 1] et qu'il existe un unique réel x_0 appartenant à l'intervalle [0 ; 1] tel que $f(x_0) = 0{,}01$.
Déterminez l'entier naturel n tel que $\frac{n}{100} < x_0 < \frac{n+1}{100}$.

c. Déduisez-en la valeur minimale qu'il faut attribuer à p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure ou égale à 99%. (On exprimera p en fonction de x_0).

Scanné avec CamScanner

CORRIGES DES EXERCICES-PROBABILITES

Corrigé 01

1/ Comme A et B sont incompatibles alors $A \cap B = \emptyset$, d'où :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow P(B) = P(A \cup B) - P(A)$
$\Rightarrow P(B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$

2/ Comme A et B sont indépendants, alors $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
Par suite, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)(1 - P(A))$. D'où $P(B) = \frac{P(A \cup B) - P(A)}{1 - P(A)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{8}$

3/ A ne peut être réalisé que si l'événement B est réalisé, donc tous les événements de A sont dans B. D'où $P(A \cap B) = P(A)$.
Par suite, $P(A \cup B) = P(B) = \frac{1}{2}$.

Corrigé 02

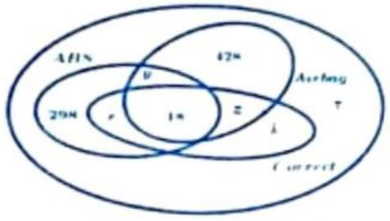
1/ Posons $E = B \cup C$, alors $P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E)$, $P(E) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$.
Or $A \cap E = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, donc $P(A \cap E) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$. Il s'ensuit que $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

2/ On procède de manière analogue en utilisant un raisonnement par récurrence.

Corrigé 03

1/ Notons $x = card(ABS \cap Correct), y = card(ABS \cap Airbag), z = card(Correct \cap Airbag), k = card(Correct.)$.

« La vérité est comme le soleil. Elle fait tout voir et ne se laisse pas regarder. » Victor Hugo



Tous les véhicules munis d'un correcteur de trajectoire sont munis aussi d'au moins un autre dispositif de sécurité :
$k = x + z - 18$; 305 véhicules disposent de deux dispositifs de sécurité au moins : $(x - 18) + (y - 18) + (z - 18) + 18 = 305$; 122 véhicules disposent d'ABS et d'Airbag : $y = 122$; 87 véhicules disposent de l'ABS et d'un correcteur de trajectoire :
$(x - 18) + (y - 18) + (z - 18) + 18 = 305 \Leftrightarrow 69 + 104 + z = 305 \Leftrightarrow z = 132$
$k = x + z - 18 = 87 + 132 - 18 = 201$
2/ Au total on a : $107 + 192 + 0 + 104 + 114 + 69 + 18 + 7 = 611$ véhicules.
3/ $107 + 192 + 0 = 299$
4/ au plus un c'est 0 ou 1, donc ça fait : $299 + 7 = 306$ véhicules.

Corrigé 04

a. $P(A) = \frac{1182}{1500} = 0,788$; $P(B) = \frac{310}{1500} = 0,2067$; $P(A \cap B) = \frac{190}{1500} = 0,1267$.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,868$.
b. Il y a $310 - 190 = 120$ joueurs qui jouent uniquement au casino, d'où $(C) = \frac{120}{1500} = 0,08$.

Corrigé 05

1/ $E_1 \cap E_2 = A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap A \cap (B \cup C)$
$E_1 \cap E_2 = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap B) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap C) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$
On conclut que E_1 et E_2 sont incompatibles.

Scanné avec CamScanner

2/ Remarquons que $A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = A \cap (\overline{B \cup C})$. Ainsi, en posant $K = B \cup C$, on a : $E_1 \cup E_2 = (A \cap \overline{K}) \cup (A \cap K) = A$.

3/ On calcule $P(K) = P(B \cup C) = 0,4 + 0,3 - 0,1 = 0,6$; $P(\overline{B \cup C}) = 0,4$; $P(E_1) + P(E_2) = P(A) = 0,6$

En utilisant la formule de l'exercice précédent, on a :

$P(A \cup K) = P(A \cup B \cup C)$

$P(A \cup K) = 0,4 + 0,3 - 0,1 - 0,1 - 0,2 + 0,5 = 0,95$. Par ailleurs, $P(A \cup K) = P(A) + P(K) - P(A \cap K)$, donc : $0,95 = 0,6 + 0,6 - P(E_2)$, d'où $P(E_2) = 0,25$.

Enfin, $P(E_1) = 0,6 - 0,25 = 0,35$.

Corrigé 06

1. Exprimons toutes les probabilités en fonction de P_1

$P_2 = P_1$; $P_3 = 3P_1$; $P_4 = 2P_1$; $P_6 = 2P_3 = 6P_1$; $P_5 = 2P_6 = 12P_1$. Or $\sum P_i = 1$ donc $25P_1 = 1$ d'où $P_1 = \frac{1}{25}$. On en déduit que

$P_2 = \frac{1}{25}$; $P_3 = \frac{3}{25}$; $P_4 = \frac{2}{25}$; $P_5 = \frac{12}{25}$; $P_6 = \frac{6}{25}$

2. On obtient un numéro pair, si on a 2 ou 4 ou 6 ; donc la probabilité d'obtenir un numéro pair est : $P_2 + P_4 + P_6 = \frac{9}{25}$.

3. la probabilité d'obtenir 4 fois un numéro pair lors des 5 lancers est : $C_5^4 \left(\frac{9}{25}\right)^4 \times \left(1 - \frac{9}{25}\right)^1 \cong 0,05$

Corrigé 07

1/ Loi de probabilité de Y

Le joueur peut tirer 5JB ou (4JB et 1JR) ou (3JB et 2JR) ou (2JB et 3JR).

- S'il tire 5JB, il aura un gain algébrique de $-5n$.
- S'il tire 4JB et 1JR, il aura un gain algébrique de $100 - 4n$.
- S'il tire 3JB et 2JR, il aura un gain algébrique de $200 - 3n$.
- S'il tire 2JB et 3JR, il aura un gain algébrique de $300 - 2n$.

Par conséquent les valeurs y_i prises par la variable aléatoire Y sont : $-5n$; $100 - 4n$; $200 - 3n$; $300 - 2n$.

D'où $p(Y = -5n) = \frac{C_5^5}{C_8^5} = \frac{1}{56}$; $p(Y = 100 - 4n) = \frac{C_5^4 \times C_3^1}{C_8^5} = \frac{15}{56}$; $p(Y = 200 - 3n) = \frac{C_5^3 \times C_3^2}{C_8^5} = \frac{30}{56}$; $p(Y = 300 - 2n) = \frac{C_5^2 \times C_3^3}{C_8^5} = \frac{10}{56}$. On obtient ainsi la loi de probabilité de Y, présentée dans le tableau suivant :

y_i	$-5n$	$100 - 4n$	$200 - 3n$	$300 - 2n$
$p(Y = y_i)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

On remarque que $\sum pi = 1$.

2/ $E(Y) = \sum_{i=1}^{4} y_i p_i = \frac{-5n}{56} + \frac{1500-60n}{56} + \frac{6000-90n}{56} + \frac{3000-20n}{56}$

$E(Y) = \frac{10500-175n}{56}$

3. Le jeu est équitable si et seulement si $E(Y) = 0$.

$E(Y) = 0 \Leftrightarrow 10500 - 175n = 0$

$\Leftrightarrow n = 60$

On conclut que le jeu est équitable lorsque $n = 60$.

Corrigé 08

1/ Pour chaque question, la probabilité d'obtenir une réponse correcte est $\frac{1}{4}$ et celle d'obtenir une réponse incorrecte est $\frac{3}{4}$.

a) Le candidat trouve la première question signifie qu'il obtient une réponse correcte pour la première question et des réponses fausses pour les 9 autres questions. Par conséquent la probabilité de trouver la 1ère question est : $\left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^9 \cong 0,018$.

b) Le candidat obtient une réponse correcte : la réponse correcte peut être obtenue à la $1^{ère}$ question ou à la $2^{ème}$ ou ...etc. Donc le choix de places se pose, d'où la probabilité d'obtenir 1 réponse correcte est $C_{10}^1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^9 \cong 0,18$.

2/ a) X suit la loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{4}$, donc la probabilité d'obtenir k réponses correctes en répondant aux 10 questions est $p(X = k) = C_{10}^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k}$.

Scanné avec CamScanner

2/ Remarquons que $A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = A \cap (\overline{B \cup C})$. Ainsi, en posant $K = B \cup C$, on a : $E_1 \cup E_2 = (A \cap \overline{K}) \cup (A \cap K) = A$.

3/ On calcule $P(K) = P(B \cup C) = 0,4 + 0,3 - 0,1 = 0,6$; $P(\overline{B \cup C}) = 0,4$; $P(E_1) + P(E_2) = P(A) = 0,6$

En utilisant la formule de l'exercice précédent, on a :

$P(A \cup K) = P(A \cup B \cup C)$

$P(A \cup K) = 0,4 + 0,3 - 0,1 - 0,1 - 0,2 + 0,5 = 0,95$. Par ailleurs, $P(A \cup K) = P(A) + P(K) - P(A \cap K)$, donc : $0,95 = 0,6 + 0,6 - P(E_2)$, d'où $P(E_2) = 0,25$.

Enfin, $P(E_1) = 0,6 - 0,25 = 0,35$.

Corrigé 06

1. Exprimons toutes les probabilités en fonction de P_1

$P_2 = P_1$; $P_3 = 3P_1$; $P_4 = 2P_1$; $P_6 = 2P_3 = 6P_1$; $P_5 = 2P_6 = 12P_1$. Or $\sum P_i = 1$ donc $25P_1 = 1$ d'où $P_1 = \frac{1}{25}$. On en déduit que

$P_2 = \frac{1}{25}$; $P_3 = \frac{3}{25}$; $P_4 = \frac{2}{25}$; $P_5 = \frac{12}{25}$; $P_6 = \frac{6}{25}$.

2. On obtient un numéro pair, si on a 2 ou 4 ou 6 ; donc la probabilité d'obtenir un numéro pair est : $P_2 + P_4 + P_6 = \frac{9}{25}$.

3. la probabilité d'obtenir 4 fois un numéro pair lors des 5 lancers est : $C_5^4 \left(\frac{9}{25}\right)^4 \times \left(1 - \frac{9}{25}\right)^1 \cong 0,05$

Corrigé 07

1/ Loi de probabilité de Y

Le joueur peut tirer 5JB ou (4JB et 1JR) ou (3JB et 2JR) ou (2JB et 3JR).

- S'il tire 5JB, il aura un gain algébrique de $-5n$.
- S'il tire 4JB et 1JR, il aura un gain algébrique de $100 - 4n$.
- S'il tire 3JB et 2JR, il aura un gain algébrique de $200 - 3n$.
- S'il tire 2JB et 3JR, il aura un gain algébrique de $300 - 2n$.

Par conséquent les valeurs y_i prises par la variable aléatoire Y sont : $-5n$; $100 - 4n$, $200 - 3n$; $300 - 2n$.

D'où $p(Y = -5n) = \frac{C_5^5}{C_8^5} = \frac{1}{56}$; $p(Y = 100 - 4n) = \frac{C_5^4 \times C_3^1}{C_8^5} = \frac{15}{56}$

$p(Y = 200 - 3n) = \frac{C_5^3 \times C_3^2}{C_8^5} = \frac{30}{56}$; $p(Y = 300 - 2n) = \frac{C_5^2 \times C_3^3}{C_8^5} = \frac{10}{56}$. On obtient ainsi la loi de probabilité de Y, présentée dans le tableau suivant :

y_i	$-5n$	$100 - 4n$	$200 - 3n$	$300 - 2n$
$p(Y = y_i)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

On remarque que $\sum pi = 1$.

2/ $E(Y) = \sum_{i=1}^{4} y_i p_i = \frac{-5n}{56} + \frac{1500-60n}{56} + \frac{6000-90n}{56} + \frac{3000-20n}{56}$

$E(Y) = \frac{10500-175n}{56}$

3. Le jeu est équitable si et seulement si $E(Y) = 0$.

$E(Y) = 0 \Leftrightarrow 10500 - 175n = 0$

$\Leftrightarrow n = 60$

On conclut que le jeu est équitable lorsque $n = 60$.

Corrigé 08

1/ Pour chaque question, la probabilité d'obtenir une réponse correcte est $\frac{1}{4}$ et celle d'obtenir une réponse incorrecte est $\frac{3}{4}$.

a) Le candidat trouve la première question signifie qu'il obtient une réponse correcte pour la première question et des réponses fausses pour les 9 autres questions. Par conséquent la probabilité de trouver la 1ère question est : $\left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^9 \cong 0,018$.

b) Le candidat obtient une réponse correcte : la réponse correcte peut être obtenue à la $1^{ère}$ question ou à la $2^{ème}$ ou ...etc. Donc le choix de places se pose, d'où la probabilité d'obtenir 1 réponse correcte est $C_{10}^1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^9 \cong 0,18$.

2/ a) X suit la loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{4}$, donc la probabilité d'obtenir k réponses correctes en répondant aux 10 questions est $p(X = k) = C_{10}^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k}$.

Scanné avec CamScanner

b) $p(X \leq 1) = p(X = 0) + p(X = 1) = \left(\frac{3}{4}\right)^{10} + \left(\frac{1}{4}\right)^{1}\left(\frac{3}{4}\right)^{9} \cong 0{,}23$.

$P(X \geq 2) = ?$

On a $\left(\overline{X \leq 1}\right) = (X > 1) = (X \geq 2)$. $P(X \geq 2) = P\left(\overline{X \leq 1}\right) = 1 - P(X \leq 1) \cong 0{,}77$

3/ X suit la loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{4}$ donc

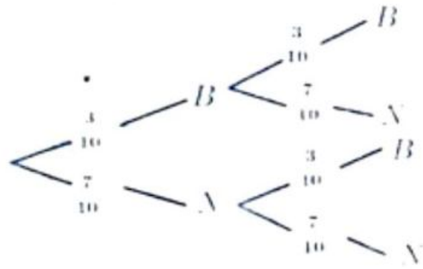
$E(X) = 10 \times \frac{1}{4} = 2{,}5$ $E(X) = 2{,}5$ signifie qu'un candidat qui répond au hasard à ce QCM, obtient en moyenne 2,5 réponses correctes sur 10. Par conséquent on n'a pas intérêt à répondre au hasard à ce QCM.

Corrigé 09

Partie A

1/ On note N l'événement « la boule obtenue au cours d'un tirage est noire » et B l'événement « la boule obtenue au cours d'un tirage est blanche » (de sorte que l'événement B est l'événement N).

Représentons la situation par un arbre :



Les deux boules sont de couleurs différentes si et seulement si la première boule tirée est noire et la deuxième est blanche ou la première est blanche et la deuxième est noire. La probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes est

- $p = \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{42}{100} = 0{,}42$

2/ a. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

-n expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;

-chaque expérience a deux issues : « le candidat gagne la partie » avec une probabilité p = 0,42 (d'après la question précédente) ou « le candidat perd la partie » avec une probabilité 1 − p = 0,58. La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres n et p = 0, 42.

b. $p_n = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$

$p_n = 1 - \binom{n}{0} \times 0{,}42^0 \times 0{,}58^n = 1 - 0{,}58^n$

En particulier, $p_{10} = 1 - 0{,}58^{10} = 0{,}996$ arrondie au millième.

c. Soit n un entier naturel non nul.

$p_n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - 0{,}58^n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}58^n \leq 0{,}01$

$\Leftrightarrow ln0{,}58^n \leq ln(0{,}01)$

$\Leftrightarrow nln0{,}58 \leq ln(0{,}01)$

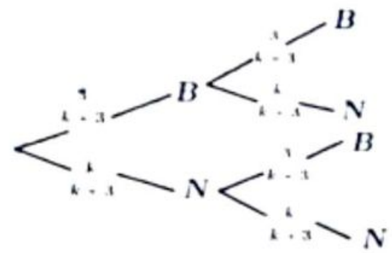
$\Leftrightarrow n \geq \frac{ln(0{,}01)}{ln0{,}58}$ avec $\frac{ln(0{,}01)}{ln0{,}58} \cong 8{,}4$

$\Leftrightarrow n \geq 9$

Le joueur doit jouer un nombre minimal de 9 parties pour que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99%.

Partie B

1/ a. L'événement $Y_k = 5$ est l'événement « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ». Représentons la situation par un arbre.



$p(Y_k = 5)$ est la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes, d'où :

$p(Y_k = 5) = \frac{k}{k+3} \times \frac{3}{k+3} + \frac{3}{k+3} \times \frac{k}{k+3} = \frac{6k}{(k+3)^2}$

b. De même $p(Y_k = -9) = \frac{3}{k+3} \times \frac{3}{k+3} = \frac{9}{(k+3)^2}$ et

$p(Y_k = -1) = \frac{k}{k+3} \times \frac{k}{k+3} = \frac{k^2}{(k+3)^2}$

Donnons alors la loi de probabilité de Y_k dans un tableau :

Scanné avec CamScanner

y_i	-9	-1	5
$p(Y_k = y_i)$	$\frac{9}{(k+3)^2}$	$\frac{k^2}{(k+3)^2}$	$\frac{6k}{(k+3)^2}$

2/ Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$E(Y_k) = -9 \times \frac{9}{(k+3)^2} - 1 \times \frac{k^2}{(k+3)^2} + 5 \times \frac{6k}{(k+3)^2} = \frac{-k^2+30k-81}{(k+3)^2}$

$E(Y_k) > 0 \Leftrightarrow \frac{-k^2+30k-81}{(k+3)^2} > 0$

$\Leftrightarrow -k^2 + 30k - 81 > 0$, car $(k+3)^2 > 0$

$\Leftrightarrow -k^2 + 30k - 81 > 0$

$\Leftrightarrow k^2 - 30k + 81 < 0$

$\Leftrightarrow (k-15)^2 - 15^2 + 81 < 0$

$\Leftrightarrow (k-15)^2 - 12^2 < 0$

$\Leftrightarrow (k-27)(k-3) < 0$

$\Leftrightarrow k \in]3; 27[$

$\Leftrightarrow k \in [4; 26]$

Les valeurs de k pour lesquelles le jeu est favorable au joueur sont 4, 5, 6, ..., 24, 25 et 26.

Corrigé 10

1/ Montrons que la probabilité de l'évènement F est égale à $\frac{2}{5}$

L'énoncé fournit $p_F(T) = \frac{1}{4}$, $p_{\overline{F}}(T) = \frac{1}{3}$ et p(T) = $\frac{3}{10}$ et demande $p(F)$. Posons $p = p(F)$. Représentons la situation par un arbre (voir figure ci-dessus)

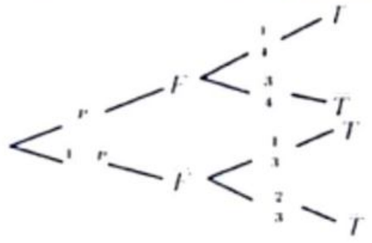
La formule des probabilités totales fournit :

$p(F) = p(F \cap T) + p(\overline{F} \cap T)$

$p(F) = p(F) \times p_F(T) + p(\overline{F}) p_{\overline{F}}(T)$

Et donc $\frac{1}{4}p + \frac{1}{3}(1-p) = \frac{3}{10}$ puis $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)p = \frac{1}{3} - \frac{3}{10}$ puis $\frac{p}{12} = \frac{1}{30}$.

d'où : $p(F) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$.



2/ La probabilité demandée est $p_T(F)$

$p_T(F) = \frac{p(F \cap T)}{p(T)} = \frac{p(F) \times p_F(T)}{p(T)} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{3}$

Partie B

1/a. Notons Y le nombre de membres adhérant à la section tennis parmi les membres choisis. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 4 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le membre choisi adhère à la section tennis » avec une probabilité $p = \frac{3}{10}$ ou « le membre choisi n'adhère pas à la section tennis » avec une probabilité $1 - p = \frac{7}{10}$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres n = 4 et $p = \frac{3}{10}$. La probabilité demandée est $p(Y = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)^2$. La calculatrice fournit $p(Y = 2) = 0,2646$.

b. Soit $n \in IN^*$. On remplace 4 par n et on obtient pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, $p(Y = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{3}{10}\right)^k\left(\frac{7}{10}\right)^{n-k}$.

Par suite : $p_n = p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0)$

$p_n = 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{3}{10}\right)^0\left(\frac{7}{10}\right)^n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$

c. Soit $n \in IN^*$

$p_n \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n \geq 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{10}\right)^n \leq 0,01$

Scanné avec CamScanner

$\Leftrightarrow \left(\frac{10}{7}\right)^n \geq 100$

$\Leftrightarrow nln\left(\frac{10}{7}\right) \geq ln100$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{ln100}{ln\left(\frac{10}{7}\right)}$

$\Leftrightarrow n \geq 12{,}9\ldots$

$\Leftrightarrow n \geq 13$, car n est un entier naturel.

Le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geq 0,99$ est 13.

2/ La variable aléatoire X prend trois valeurs : $35 = 40 - 5$ quand le joueur tire deux jetons gagnants, $15 = 20 - 5$ quand le joueur tire un jeton gagnant et -5 quand le joueur ne tire aucun jeton gagnant.

• La probabilité de tirer deux jetons gagnants est :

$\left(\frac{10}{100}\right)^2 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}$

• La probabilité de ne tirer aucun jeton gagnant est $\left(\frac{90}{100}\right)^2 = \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{81}{100}$

• La probabilité de tirer un jeton gagnant est :

$1 - \frac{1}{100} - \frac{81}{100} = \frac{18}{100}$

Donnons la loi de probabilité de X dans un tableau :

x_i	35	15	-5
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{100}$	$\frac{18}{100}$	$\frac{81}{100}$

b. L'espérance mathématique de X est : $E(X) = 35 \times \frac{1}{100} + 15 \times \frac{18}{100} - 5 \times \frac{81}{100} = -1$.

Le gain algébrique moyen à cette loterie est $-1€$ ou encore en moyenne, le joueur perd 1 euro par partie jouée. Le gain algébrique est strictement négatif et donc le jeu est défavorable au joueur ou encore le jeu est favorable aux membres de l'association qui organisent la loterie.

Corrigé 11

1. a. Notons M (respectivement S, AT, H et F) l'événement « la personne interrogée est un médecin, (respectivement un soignant, un administratif ou technique, un homme, une femme) ». La probabilité demandée est $p(F \cap S)$.

L'énoncé fournit $p(S) = 0,71$ et $p_S(F) = 0,92$.

Donc $p(F \cap S) = p(S) \times p_S(F) = 0,71 \times 0,92 = 0,6532$. La probabilité d'interroger une femme soignante est 0,6532.

b. La probabilité demandée est $p(M \cap F)$

Comme toute personne est soit un homme soit une femme, la formule des probabilités totales permet d'écrire

$p(M) = p(M \cap F) + p(M \cap H) = p(M \cap F) + p(M) \times p_M(H)$.

L'énoncé fournit $p(M) = 0,12$ et $p_M(H) = 0,67$.

Donc $p(M \cap F) = p(M) - p(M) \times p_M(H) = p(M)(1 - p_M(H))$

$p(M \cap F) = 0,12(1 - 0,67) = 0,0396$.

c. La première probabilité demandée est $p(AT \cap F)$.

La formule des probabilités totales permet d'écrire

$p(AT \cap F) = p(F) - p(M \cap F) - p(S \cap F)$

$p(AT \cap F) = 0,8 - 0,0396 - 0,6532 = 0,1072$.

La probabilité d'interroger une femme faisant partie du personnel AT est 0,1072.

Ensuite, $p(AT) = 1 - p(M) - p(S) = 1 - 0,12 - 0,71 = 0,17$ et donc $p_{AT}(F) = \frac{p(AT \cap F)}{p(AT)} = \frac{0,1072}{0,17} = 0,6306$ arrondi à 10^{-4}.

La probabilité d'interroger une femme sachant qu'elle fait partie du personnel AT est 0,6306 à 10^{-4} près.

2. Notons X le nombre de médecins qui ont reçu le courrier. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

• 40 expériences identiques et indépendantes sont effectuées

• chaque expérience a deux issues : « la personne qui a reçu le courrier est médecin » avec une probabilité $p = 0,12$ (fournie par

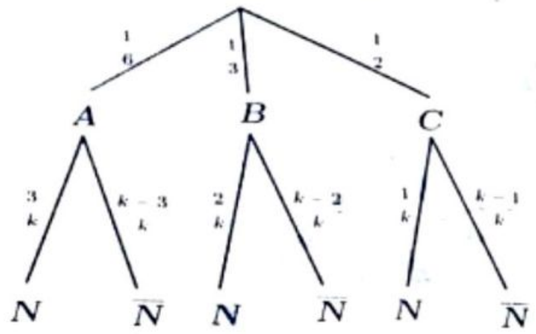
Scanné avec CamScanner

l'énoncé) ou « la personne qui a reçu le courrier n'est pas médecin » avec une probabilité $1 - p = 0{,}88$. La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0{,}12$. La probabilité demandée est $p(X = 10)$ et on a :

$p(X = 10) = \binom{40}{10}(0{,}12)^{10}(0{,}88)^{30} = 0{,}0113$ à 10^{-4} près.

Corrigé12

1. a. Représentons la situation par un arbre.



D'après la formule des probabilités totales, on a :

$P(N) = P(N \cap A) + P(N \cap B) + P(N \cap C)$

$P(N) = P(A) \times P_A(N) + P(B) \times P_B(N) + P(C) \times P_C(N)$

$P(N) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{k} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{k} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{k} = \frac{5}{3k}$

b. La probabilité demandée est $P_N(A)$

$P_N(A) = \frac{P(A \cap N)}{P(N)} = \frac{P(A) \times P_N(A)}{P(N)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{3}{k}}{\frac{5}{3k}} = \frac{3}{10}$

On peut noter que cette dernière probabilité ne dépend pas de k.

c. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 3.

$p(N) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{3k} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3k}{5} \leq 2 \Leftrightarrow k \leq \frac{10}{3} \Leftrightarrow k \leq 3$ (car k est un entier). Finalement la probabilité de l'événement N est supérieure à $\frac{1}{2}$ si et seulement si $k \leq 3$: $p(N) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow k \leq 3$

d. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 3.

$p(N) = \frac{1}{30} \Leftrightarrow \frac{5}{3k} = \frac{1}{30} \Leftrightarrow \frac{3k}{5} = 30 \Leftrightarrow k = 50.$

2/ Notons X le nombre de boules noires obtenues. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

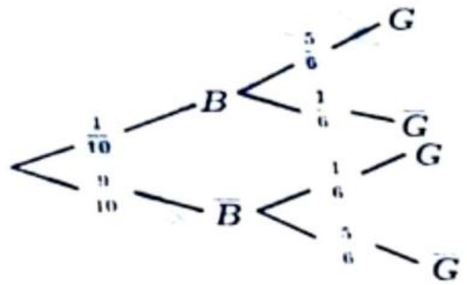
- 20 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la boule tirée est noire » avec une probabilité $p = \frac{1}{30}$ ou « la boule tirée n'est pas noire » avec une probabilité $1 - p = \frac{29}{30}$. La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{1}{30}$. La probabilité demandée est $p(X \geq 1)$ et on a :

$p(X \geq 1) \Leftrightarrow 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\frac{29}{30}\right)^n = 0{,}492$ arrondie au 10^{-3}.

Corrigé 13

Partie A

1/ Représentons la situation par un arbre



D'après la formule des probabilités totales, on a :

$p(G) = p(G \cap B) + p\left(G \cap \overline{B}\right)$

$p(G) = p(B) \times p_B(G) + p(\overline{B}) \times p_{\overline{B}}(G)$

$p(G) = \frac{1}{10} \times \frac{5}{6} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}$

2/ La probabilité demandée est $p_{\overline{G}}(B)$.

$p_{\overline{G}}(B) = \frac{p(B \cap \overline{G})}{p(\overline{G})} = \frac{p(B) \times p_B(\overline{G})}{1 - p(G)} = \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{6}}{1 - \frac{7}{30}} = \frac{1}{46}$

3/ Notons X le nombre de gains. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

Scanné avec CamScanner

• 4 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
• chaque expérience a deux issues : « le joueur gagne » avec une probabilité $p = \frac{7}{30}$ (d'après 1/) ou « le joueur perd » avec une probabilité $1 - p = \frac{23}{30}$. La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres n = 4 et $p = \frac{7}{30}$. La probabilité demandée est p(X = 2) et on a :

$p(X = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{7}{30}\right)^2 \times \left(\frac{23}{30}\right)^2 = \frac{25921}{135000} = 0{,}192$ à 10^{-3} près.

La probabilité que le joueur gagne exactement deux parties est égale à 0, 192 à 10−3 près.

La probabilité que le joueur gagne exactement deux parties est égale à 0, 192 à 10^{-3} près.

4/ Soit n le nombre de parties jouées. L'événement « le joueur gagne au moins une partie en n tentatives » est le contraire de l'événement « le joueur ne gagne aucune partie en n tentatives ». A chaque partie, la probabilité que le joueur perde est $\frac{23}{30}$. La probabilité que le joueur perde toutes les parties est donc $\left(\frac{23}{30}\right)^n$ n et finalement la probabilité que le joueur gagne au moins une partie est $1 - \left(\frac{23}{30}\right)^n$.

$$1 - \left(\frac{23}{30}\right)^n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow \left(\frac{23}{30}\right)^n \leq 0{,}01$$
$$\Leftrightarrow ln\left(\frac{23}{30}\right)^n \leq ln(0{,}01)$$
$$\Leftrightarrow nln\left(\frac{23}{30}\right) \leq ln(0{,}01)$$
$$\Leftrightarrow n \geq \frac{ln(0{,}01)}{ln\left(\frac{23}{30}\right)}$$
$$\Leftrightarrow n \geq 17{,}3\ldots$$
$$\Leftrightarrow n \geq 18$$

Le nombre minimal de parties à jouer pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0, 99 est 18.

Partie B

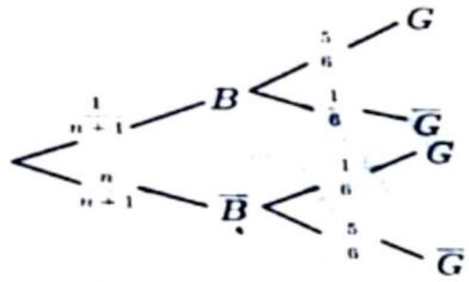
1/ a. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

x_i	4	-1
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{30}$	$\frac{23}{30}$

L'espérance de X est donnée par :

$E(X) = 4 \times \frac{7}{30} - 1 \times \frac{23}{30} = \frac{5}{30}$, donc $E(X) = \frac{1}{6}$.

b. Comme E(X)> 0 alors le jeu est défavorable à l'organisateur.



D'après la formule des probabilités totales, on a :

$p(G) = p(G \cap B) + p(G \cap \overline{B})$

$p(G) = p(B) \times p_B(G) + p(\overline{B}) \times p_{\overline{B}}(G)$

$p(G) = \frac{1}{n+1} \times \frac{5}{6} + \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{6} = \frac{n+5}{6(n+1)}$

Comme $1 - \frac{n+5}{6(n+1)} = \frac{5n+1}{6(n+1)}$, alors la loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	4	-1
$P(X = x_i)$	$\frac{n+5}{6(n+1)}$	$\frac{5n+1}{6(n+1)}$

L'espérance est $E(X) = \frac{4(n+5)}{6(n+1)} - \frac{5n+1}{6(n+1)} = \frac{-n+19}{6(n+1)}$.

$E(X) > 0 \Leftrightarrow \frac{-n+19}{6(n+1)}) > 0 \Leftrightarrow -n + 19 > 0 \Leftrightarrow n < 19$

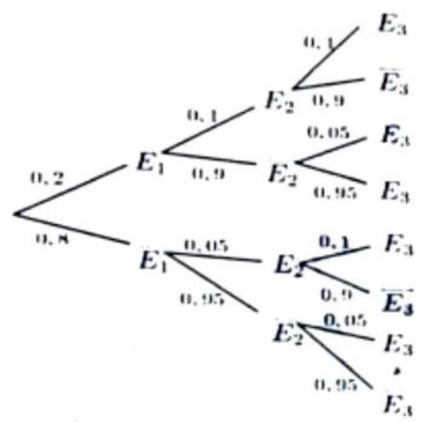
Scanné avec CamScanner

On déduit que $n = 18$, car n est un entier naturel.

Il vient que jusqu'à 18 jetons noirs, le jeu est défavorable à l'organisateur.

Corrigé 14

1/ Représentons la situation à l'aide d'un arbre pondéré



a. X peut prendre les valeurs : 0 ; 1 ; 2 ou 3.

b. On a : $p(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}) = p(E_1 \cap E_2) \times p_{E_1 \cap E_2}(\overline{E_3})$

$p(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}) = p(E_1) \times p_{E_1}(E_2) \times p_{E_1 \cap E_2}(\overline{E_3})$

$p(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}) = 0,2 \times 0,1 \times 0,9 = 0,018$

De même : $p(E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3) = 0,2 \times 0,9 \times 0,05 = 0,009$ et $p(\overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3) = 0,8 \times 0,05 \times 0,1 = 0,004$. D'où :

$p(X = 2) = p(\overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3) + p(E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3) + p(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3})$

$p(X = 2) = 0,004 + 0,009 + 0,018 = 0,031$

On a aussi :

$p(X = 3) = p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 0,2 \times 0,1 \times 0,1 = 0,002$

D'où $p(X = 2) = 0,031$ et $p(X = 3) = 0,002$.

c. on a : $p(X = 0) = p(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) = 0,8 \times 0,95 \times 0,95 = 0,722$ et $p(X = 1) = 1 - p(X = 0) - p(X = 2) - p(X = 3)$

$p(X = 1) = 1 - 0,722 - 0,031 - 0,002 = 0,245$.

La loi de probabilité de X est donnée par :

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,722	0,245	0,031	0,002

d. $E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 0 \times 0,722 + 1 \times 0,245 + 2 \times 0,031 + 3 \times 0,002$ soit $E(X) = 0,313$.

2. a. Soit n un entier naturel non nul

$p(E_n \cap E_{n+1}) = p(E_n) \times p_{E_n}(E_{n+1}) = p_n \times 0,1 = 0,1p_n$ et

$p(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) = p(\overline{E_n}) \times p_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$

$p(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) = (1 - p_n) \times 0,05 = -0,05p_n + 0,05$. donc :

$\forall n \in IN^*, p(E_n \cap E_{n+1}) = 0,1p_n$ et

$p(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) = -0,05p_n + 0,05$

b. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$p_{n+1} = p(E_{n+1}) = p(E_n \cap E_{n+1}) + p(\overline{E_n} \cap E_{n+1})$

$p_{n+1} = 0,1p_n = -0,05p_n + 0,05 = \mathbf{0,05p_n + 0,05}$

3. a. Soit n un entier naturel non nul.

$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{19} = 0,05p_n + 0,05 - \frac{1}{19}$

$u_{n+1} = 0,05\left(p_n + 1 - \frac{1}{19 \times 0,05}\right) = 0,05\left(p_n - \frac{0,95-1}{19 \times 0,05}\right)$

$u_{n+1} = 0,05\left(p_n - \frac{0,05}{19 \times 0,05}\right) = 0,05\left(p_n - \frac{1}{19}\right) = 0,05u_n$.

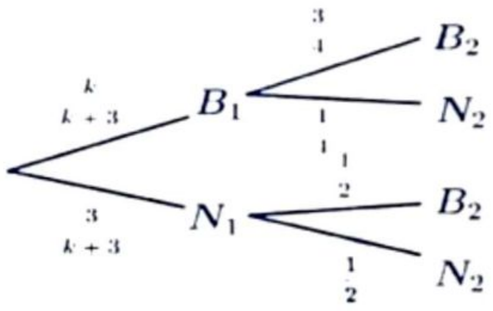
On conclut que la suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison q = 0,05 et de 1er terme $u_1 = p_1 - \frac{1}{19} = 0,2 - \frac{1}{19} = \frac{1}{5} - \frac{1}{19} = \frac{14}{95}$.

b. D'après ce qui précède, on a : $u_n = \frac{14}{95} \times 0,05^{n-1}$ et $p_n = u_n + \frac{1}{19} = \frac{14}{95} \times 0,05^{n-1} + \frac{1}{19}$

Comme $|0{,}05| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}05^{n-1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{19}$.

Corrigé 15

1/ a. Complétons l'arbre



b. La formule des probabilités totales permet d'écrire :

$p(B_2) = p(B_1 \cap B_2) + p(N_1 \cap B_2)$

$p(B_2) = p(B_1) \times p_{B_1} p(B_2) + p(N_1) \times p_{N_1} p(B_2)$

$p(B_2) = \frac{k}{k+3} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{k+3} \times \frac{1}{2} = \frac{3k+6}{4k+12}$

2/ Quand k = 12, $p(B_2) = \frac{42}{60} = \frac{7}{10} = 0{,}7$ et donc $p(N_2) = 1 - p(B_2) = 0$.

a. Si le joueur gagne, son gain algébrique est $12 - 8 = 4$ euros et s'il perd, son gain algébrique est $0 - 8 = -8$ euros. Donc les valeurs possibles de X sont 4 et -8.

b. La loi de probabilité de X est :

x_i	4	-8
$p(X = x_i)$	0,7	0,3

c. $E(X) = 0{,}7 \times 4 + 0{,}3 \times (-8) = 2{,}8 - 2{,}4 = 0{,}4$. $E(X) = 0{,}4$.

d. Puisque $E(X) > 0$, le jeu est favorable au joueur.

3/ Notons Y le nombre de fois que l'événement B_2 est réalisé. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de Bernoulli. En effet.

- n expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « l'événement B_2 est réalisé » avec une probabilité $p = 0{,}7$ ou « l'événement N_2 est réalisé » avec une probabilité $1 - p = 0{,}3$. La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}7$. La probabilité de réaliser au moins une fois l'événement B_2 est $p(Y \geq 1)$. Or $p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - 0{,}3n$

$p(Y \geq 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - 0{,}3^n \geq 0{,}99$

$\Leftrightarrow 0{,}3^n \leq 0{,}01$

$\Leftrightarrow n ln 0{,}3 \leq ln 0{,}01$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{ln 0{,}01}{ln 0{,}3}$, car $ln 0{,}3 < 0$

$\Leftrightarrow n \geq 3{,}8...$

$\Leftrightarrow n \geq 4$, car n est un entier naturel.

Le plus petit entier naturel cherché est 4.

Corrigé 16

1 a. M. Nicoué choisit 3 cravates parmi les 10 cravates qui se trouvent du côté gauche de son armoire.

Remarquons qu'on est dans un cas d'équiprobabilité.

Soit Ω l'univers associé à l'expérience.

Le nombre de choix distincts qu'il peut effectuer est : card $\Omega = C_{10}^3 = 120$.

Désignons par X la variable aléatoire donnant le nombre de cravates à motifs qu'il a choisi.

Notons aussi que sur les 10 cravates situées du côté gauche de son armoire, 7 sont à motifs et 3 sont unies. Donc $X \in \{0; 1; 2; 3\}$ c'est-à-dire $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$.

$P(X = 0) = \frac{C_3^3}{120} = \frac{1}{120}$

$P(X = 1) = \frac{C_3^2 \times C_7^1}{120} = \frac{3 \times 7}{120} = \frac{7}{40}$

$P(X = 2) = \frac{1 \times C_7^2}{120} = \frac{3 \times 21}{120} = \frac{21}{40}$

Scanné avec CamScanner

$P(X = 3) = \frac{C_7^3}{120} = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}$

Loi de probabilité de X

x_i	0	1	2	3
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{1}{120}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{24}$

b. $E(X) = \sum_{i=0}^{3} x_i\, P(\{X = x_i\})$

$E(X) = 0 \times \frac{1}{120} + 1 \times \frac{7}{40} + 2 \times \frac{21}{40} + 3 \times \frac{7}{24}$

$E(X) = \frac{21}{10}$

2/ a. L'événement M : « M. Nicoué tire une cravate à motifs » est réalisé, lorsque M. Nicoué a :

-soit choisi le coté droit de l'armoire et tiré une cravate à motifs de ce coté : il s'agit de l'événement $M \cap D$.

- soit choisi le coté gauche de l'armoire et tiré une cravate à motifs de ce coté : il s'agit de l'événement $M \cap G$.

Il s'ensuit que $M = (M \cap D) \cup (M \cap G)$ où $M \cap D$ et $M \cap G$ sont deux événements incompatibles. D'où :

$P(M) = P(M \cap D) + P(M \cap G)$.

Or $\begin{cases} P(M \cap D) = P(M/D) \times P(D) \\ P(M \cap G) = P(M/G) \times P(G) \end{cases}$ avec $\begin{cases} P\left(\frac{M}{G}\right) = \frac{7}{10} \\ P\left(\frac{M}{D}\right) = \frac{5}{7} \\ P(D) = P(G) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Donc, $P(M) = \frac{7}{20} + \frac{5}{14} = \frac{99}{140}$

b. $P(G/M) = \frac{P(M \cap G)}{P(M)} = \frac{\frac{7}{20}}{\frac{99}{140}} = \frac{49}{99}$

3/ a. L'événement M : « M. Nicoué tire une cravate à motifs » est l'événement contraire de «M. Nicoué n'a pris que des cravates unies. » : U_s

Or la probabilité que M. Nicoué choisit une cravate unie est : P(U) $= P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 1 - \frac{99}{140} = \frac{41}{140}$.

Définissons les événements :

U_i : « le jour i, M. Nicoué choisit une cravate unie » pour $i \in \{1; 2; \ldots; n\}$.

NB : les U_i sont deux à deux indépendants et $P(U_i) = P(U)$ pour $i = 1; 2; \ldots; n$.

On a : $U_s = U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n$. donc

$P(U_s) = P(U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n)$

$P(U_s) = P(U_1) \times P(U_2) \times \ldots \times P(U_n)$

$P(U_s) = \prod_{i=1}^{n} P(U_i) = (P(U))^n = \left(\frac{41}{140}\right)^n$.

Il s'ensuit que la probabilité pour que M. Nicoué n'a pris que des cravates unies est $\left(\frac{41}{140}\right)^n$, d'où : $P_n = 1 - \left(\frac{41}{140}\right)^n$

b. $P_n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{41}{140}\right)^n \geq 0{,}99$

$\Leftrightarrow \left(\frac{41}{140}\right)^n \leq 0{,}01$

$\Leftrightarrow ln\left(\frac{41}{140}\right)^n \; ln(0{,}01)$

$\Rightarrow n ln\left(\frac{41}{140}\right) \; ln(0{,}01)$

$\Rightarrow n \geq \frac{ln(0{,}01)}{ln\left(\frac{41}{140}\right)}$

$\Rightarrow n \geq 3{,}7$ à 0,1 près

On déduit que la plus petite valeur de n répondant à la question est : n = 4.

Corrigé 17

1 Puisqu'on tire simultanément deux boules dans l'urne qui en contient 9, nous avons $C_9^2 = 36$ tirages distincts. Si nous nommons Ω_1 l'univers associé à l'épreuve, on a : card$\Omega_1 = C_9^2 = 36$.

Les deux boules tirées sont deux la même couleur si l'on a :

-soit tiré deux boules rouges (événements R_1)

- soit tiré deux boules bleues (événements B_1)

- soit tiré deux boules vertes (événements V_1)

De plus nous sommes dans une situation d'équiprobabilité, d'où :

$P(R_1) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Scanné avec CamScanner

$$P(B_1) = \frac{C_2^2}{C_9^2} = \frac{1}{36}$$

$$P(V_1) = \frac{C_3^2}{C_9^2} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Les événements R_1, B_1 et V_1 étant incompatibles deux à deux incompatibles, nous en déduisons que la probabilité de l'événement C_1 « On obtient 2 boules de même couleur» est :

$P(C_1) = P(R_1 \cup B_1 \cup V_1) = P(R_1) + P(B_1) + P(V_1)$

$P(C_1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{12}$

$P(C_1) = \frac{5}{18}$

La probabilité d'obtenir deux boules de même couleur est $\frac{5}{18}$

2/ Comme on tire successivement deux boules, en remettant la 1ère boule dans l'urne avant le 2ème tirage, nous avons dans ce cas 9 choix pour la 1ère boule et 9 choix pour la 2ème boule. On peut donc effectuer $9^2 = 81$ tirages distinctes. Soit Ω_2 l'univers associé à l'épreuve, on a : $\text{card}\Omega_2 = 9^2 = 81$.

Notons R_2, B_2 et V_2 les événements :

R_2 : « Les deux boules tirées sont rouges »

B_2 : « Les deux boules tirées sont bleues »

V_2 : « Les deux boules tirées sont vertes »

On a : $P(R_2) = \frac{4^2}{9^2} = \frac{16}{81}$; $P(B_2) = \frac{2^2}{9^2} = \frac{4}{81}$ et $P(V_2) = \frac{3^2}{9^2} = \frac{9}{81}$.

Il vient que : $P(C_2) = P(R_2 \cup B_2 \cup V_2)$

$P(C_2) = P(R_2) + P(B_2) + P(V_2)$

$P(C_2) = \frac{16}{81} + \frac{4}{81} + \frac{9}{81}$

$P(C_2) = \frac{29}{81}$

C_2 est l'événement « On obtient 2 boules de même couleur» c'est-à-dire $C_2 = R_2 \cup B_2 \cup V_2$.

La probabilité d'obtenir deux boules de même couleur est $\frac{29}{81}$.

3/ X étant la variable aléatoire associée au tirage simultané des deux boules, X peut prendre les valeurs 10n et $-n^2$ et on a :

$$\begin{cases} P(X = 10n) = \frac{5}{18} \\ P(X = -n^2) = 1 - P(X = 10n) = \frac{13}{18} \end{cases}$$

La loi de probabilité est résumée dans le tableau ci-dessous :

x_i	$10n$	$-n^2$
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{18}$	$\frac{13}{18}$

L'espérance mathématique de X est :

$E(X) = 10n \times \frac{5}{18} - n^2 \times \frac{13}{18}$

$E(X) = \frac{50n - 13n^2}{18}$

De même Y peut prendre les valeurs 10 n et $-n^2$ avec

$$\begin{cases} P(Y = 10n) = \frac{29}{81} \\ P(Y = -n^2) = 1 - P(X = 10n) = \frac{52}{81} \end{cases}$$

La loi de probabilité est résumée dans le tableau ci-dessous :

x_i	$10n$	$-n^2$
$P(X = x_i)$	$\frac{29}{81}$	$\frac{52}{81}$

L'espérance mathématique de Y est :

$E(X) = 10n \times \frac{29}{81} - n^2 \times \frac{52}{81}$

$E(X) = \frac{290n - 52n^2}{81}$

b. $E(X) < 0 \Leftrightarrow \frac{50n - 13n^2}{18} < 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow n(50 - 13n) < 0$

$\Leftrightarrow 50 - 13n < 0$, car $n > 0$

$\Leftrightarrow n > \frac{50}{13} \cong 3{,}8$ à 0,1 près.

On déduit que $E(X) < 0$ pour tout entier naturel $n \geq 4$.

$$E(Y) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{290n - 52n^2}{81} > 0 \\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2n(-26n+145)}{81} > 0 \\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -26n + 145 > 0 \\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$, car $n > 0$

$\Leftrightarrow n < \frac{145}{26} \cong 5{,}5$ à 0,1 près.

On en déduit que $E(Y) > 0$ pour tout entier naturel $n \leq 5$.n

Conclusion : Les valeurs de pour lesquelles on a $E(X) < 0 < E(Y)$ sont n = 4 et n = 5.

Corrigé 18

1/ Calculons la probabilité de l'événement $\overline{F}$

On sait que $P(F) + P(\overline{F}) = 1$, or $P(F) = \frac{9}{10}$, donc $P(\overline{F}) = 1 - P(F)$,

$P(\overline{F}) = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$.

2/ a. Montrons que $P(T \cap F)$ est égale à $\frac{9}{10}$

On a : $P(T \cap F) = P_F(T) \times p(F)$. Or $P_F(T) = 1$ et $P(F) = \frac{9}{10}$,

d'où : $P(T \cap F) = 1 \times \frac{9}{10}$ soit $P(T \cap F) = \frac{9}{10}$

b. Calculons la probabilité $T \cap \overline{F}$

$P(T \cap \overline{F}) = P_{\overline{F}}(T) \times P(\overline{F})$. Or $P_{\overline{F}}(T) = \frac{1}{11}$ et $P(\overline{F}) = \frac{1}{10}$, donc

$P(T \cap \overline{F}) = \frac{1}{11} \times \frac{1}{10}$ soit $P(T \cap \overline{F}) = \frac{1}{110}$.

c. Déduisons la probabilité de l'événement T

On sait que $T = (T \cap F) \cup (T \cap \overline{F})$. Par suite/

$P(T) = P(T \cap F) + P(T \cap \overline{F})$ soit $P(T) = \frac{9}{10} + \frac{1}{110} = \frac{100}{110} = \frac{10}{11}$.

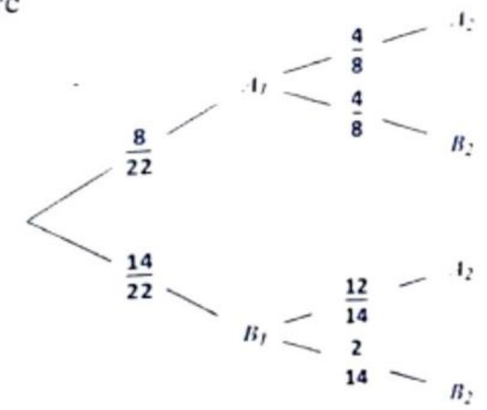
d. Calculons la probabilité de F sachant T

On a : $P_T(F) = \frac{P(T \cap F)}{P(T)} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{10}{11}} = \frac{9}{10} \times \frac{11}{10}$, d'où $P_T(F) = \frac{99}{100}$.

« Nos jeunes aiment le luxe le luxe, ont de mauvaises manières, se moquent de l'autorité et n'ont aucun respect pour l'âge. À notre époque, les enfants sont des tyrans. » Socrate

Corrigé 19

Arbre pondéré



1/ Calculons les probabilités suivantes :

$P(A_1) = \frac{8}{22} = \frac{4}{11}$

$P(A_2/A_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$P(A_2/B_1) = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$

$P(A_2) = P(A_2/A_1) \times P(A_1) + P(A_2/B_1) \times P(B_1)$

$P(A_2) = \frac{4}{8} \times \frac{8}{22} + \frac{12}{14} \times \frac{14}{22} = \frac{9}{11}$

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2/A_1) \times P(A_1) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{11} = \frac{2}{11}$

$P(B_2/A_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$P(B_2/B_1) = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$

$P(A_1 \cap B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{11} = \frac{2}{11}$

$P(A_2 \cap B_1) = \frac{12}{14} \times \frac{14}{22} = \frac{6}{11}$

$P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{7} \times \frac{14}{22} = \frac{1}{11}$

$P(A_2/B_1) = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$

2/ a. Determinons la loi de probabilité de X

$X(\Omega) = \{40; 50; 60\}$

$P(X = 40) = P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{11}$

Scanné avec CamScanner

$P(X = 50) = P(A_1 \cap B_2) + P(A_2 \cap B_1) = \frac{2}{11} + \frac{6}{11}$

$P(X = 50) = \frac{8}{11}$

$P(X = 60) = P(A_1 \cap A_2) = \frac{2}{11}$

x_i	40	50	60
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{2}{11}$

b. Espérance mathématique de X

$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i P(X = x_i)$

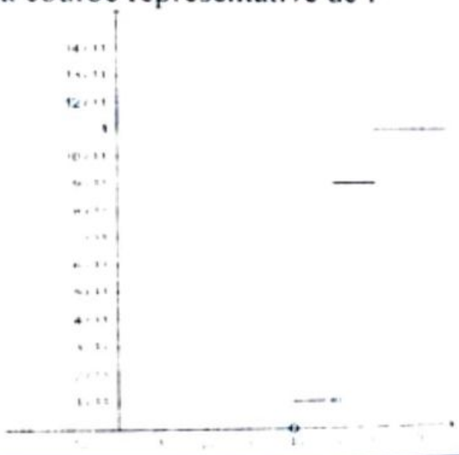
$E(X) = \frac{40 + 8\times50 + 2\times60}{11}$ soit $E(X) = \frac{560}{11}$.

3. Déterminons la fonction de répartition de X

$$F: \mathbb{R} \to [0; 1]$$
$$x \mapsto P(X \leq x)$$

On a : $F(x) = \begin{cases} 0 \ si\ x \in]-\infty; 40[\\ \frac{1}{11} \ si\ x \in [40; 50[\\ \frac{9}{11} \ si\ x \in [50; 60[\\ 1 \ si\ x \in [60; +\infty[\end{cases}$

Construction de la courbe représentative de F



« La vie de l'homme dépend pas de sa volonté; sans volonté, elle serait abandonnée au hasard. » Confucius

Corrigé 20

Soit Ω l'univers associé à l'expérience, on a :

$\text{card}\Omega = C_{13}^3 = \frac{13\times12\times11}{3\times2\times1} = 286$

1. Comme il y a 10 rouges, il peut prendre 0, 1, 2 ou 3 billes rouges, donc l'univers-image est donné par : $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$

a. Si on tire k rouges, on tire $3 - k$ vertes, d'où on a :

$P(\{X = k\}) = \frac{C_{10}^k C_3^{3-k}}{\text{card}\Omega} = \frac{C_{10}^k C_3^{3-k}}{286}$

k	0	1	2	3
$P(\{X = k\})$	$\frac{1}{286}$	$\frac{30}{286}$	$\frac{135}{286}$	$\frac{120}{286}$

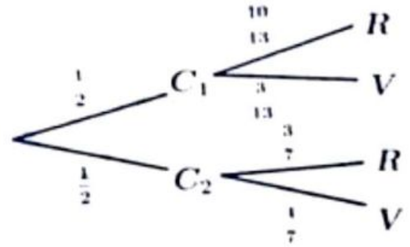
$P(X = 0) \cong 0{,}003$; $P(X = 1) \cong 0{,}104$; $P(X = 2) \cong 0{,}472$; $P(X = 3) \cong 0{,}419$.

b. Espérance mathématique de X

$E(X) = 0\times\frac{1}{286} + 1\times\frac{30}{286} + 2\times\frac{135}{286} + 3\times\frac{120}{286}$

$E(X) = \frac{660}{286} = \frac{330}{143} \cong 2{,}307$.

2. a. Arbre de choix



b. Calcul de P(R)

$P(R) = P(R \cap C_1) + P(R \cap C_2)$

$P(R) = P(C_1)\times P_{C_1}(R) + P(C_2)\times P_{C_2}(R)$

$P(R) = \frac{1}{2}\times\frac{10}{13} + \frac{1}{2}\times\frac{3}{7}$

$P(R) = \frac{109}{182} \cong 0{,}599$

c. Probabilité que la boule provienne de la boite cubique

$P_R(C_1) = \frac{P(R \cap C_1)}{P(R)} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{109}{182}}$

$P_R(C_1) = \frac{70}{109} \cong 0{,}642$

3/ a. Expression de p_n en fonction de n

Il s'agit d'une loi binomiale de paramètres n et p où p est la probabilité de « tirer une rouge »

Le contraire de l'événement « l'enfant a pris au moins une boule rouge au cours des n choix » est « l'enfant n'a pris que des verts au cours des choix ». D'où :

$p_n = P(X \geq 1) = 1 - C_n^0 \left(\frac{109}{182}\right)^0 \left(\frac{73}{182}\right)^n$

$p_n \quad 1 - \left(\frac{73}{182}\right)^n$

b. Calculons la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geq 0{,}99$

$1 - \left(\frac{73}{182}\right)^n \geq 0{,}99 \Rightarrow \left(\frac{73}{182}\right)^n \leq 0{,}01$

$\Rightarrow ln\left(\frac{73}{182}\right)^n \leq ln0{,}01$

$\Rightarrow nln\left(\frac{73}{182}\right) \leq ln0{,}01$

$\Rightarrow n \geq \frac{ln0{,}01}{ln\left(\frac{73}{182}\right)} \cong 5{,}04$

On déduit que la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geq 0{,}99$ est $n = 6$.

Corrigé 21

L'univers associé à l'expérience est :

$\Omega = \{(a; b)\ avec\ 1 \leq a \leq 5 \text{ et } 1 \leq b \leq 5\}$, donc $card\Omega = 25$

$\vec{u}(a;\ 1)$ et $\vec{v}(ab - b + 6; b + 1)$

1/ Démontrons que la probabilité que ces vecteurs soient colinéaires est égale à $\frac{1}{5}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $dét(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ c'est-à-dire

$\begin{vmatrix} a & ab - b + 6 \\ 1 & b + 1 \end{vmatrix} = 0$ soit $a + b = 6$.

Soit p la probabilité pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires, alors p est la probabilité de l'événement :

$A = \{(1; 5); (2; 4); (3; 3); (4; 2); (5; 1)\}$, donc $p = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{1}{5}$

2 a. Calculons les probabilités $P(A_1)$, $P(B_1)$ et $P(C_1)$

Il y a indépendance entre les résultats des joueurs A et B, donc la probabilité de l'intersection est le produit des probabilités. A_1, B_1 et C_1 sont des intersections d'événements indépendants, d'après 1/ on a : $p(A_1) = \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{25}$; $p(B_1) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$;

$p(C_1) = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{17}{25}$

A_1, B_1 et C_1 sont les trois issues exclusives de la première partie et on a bien $p(A_1) + p(B_1) + p(C_1) = 1$

b. Déterminons $C_{n+1} \cap C_n$, $B_{n+1} \cap C_n$ et $A_{n+1} \cap C_n$

$C_{n+1} \cap C_n = C_{n+1}$; $B_{n+1} \cap C_n = B_{n+1}$; $A_{n+1} \cap C_n = A_{n+1}$

c. Donnons $P(C_{n+1}/C_n)$, $P(B_{n+1}/C_n)$ et $P(A_{n+1}/C_n)$

Comme toutes les parties, la $(n+1)^{ème}$ partie a 3 éventualités exclusives. Toutes les parties se déroulent dans les mêmes conditions. Le calcul direct des probabilités conditionnelles donne:

$P(C_{n+1}/C_n) = P(C_1) = \frac{17}{25}$; $P(A_{n+1}/C_n) = P(A_1) = \frac{4}{25}$

$P(B_{n+1}/C_n) = P(B_1) = \frac{17}{25}$.

Exprimons $P(C_{n+1})$, $P(B_{n+1})$ et $P(A_{n+1})$ en fonction de $P(C_n)$

D'après 2/b et les propriétés des probabilités conditionnelles on a :

$P(C_{n+1}) = P(C_{n+1} \cap C_n) = P(C_{n+1}/C_n) \times P(C_n)$

$P(C_{n+1}) = \frac{17}{25} P(C_n)$

$P(B_{n+1}) = P(B_{n+1} \cap C_n) = P(B_{n+1}/C_n) \times P(C_n)$

$P(B_{n+1}) = \frac{4}{25} P(C_n)$

$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap C_n) = P(A_{n+1}/C_n) \times P(C_n)$

$P(A_{n+1}) = \frac{4}{25} P(C_n)$

d. Déduisons que $P(C_n) = \left(\frac{17}{25}\right)^n$, $P(B_n) = P(A_n) = \frac{4}{25}\left(\frac{17}{25}\right)^{n-1}$

Les égalités précédentes sont des relations de récurrence

La première relation définit les probabilités $P(C_n)$ comme une suite géométrique de raison $\frac{17}{25}$ et de premier terme $P(C_1) = \frac{17}{25}$.

D'où : $P(C_n) = \frac{17}{25}\left(\frac{17}{25}\right)^{n-1} = \left(\frac{17}{25}\right)^n$.

Il s'ensuit que $P(B_n) = \frac{4}{25} P(C_{n-1}) = \frac{4}{25}\left(\frac{17}{25}\right)^{n-1}$ et

$P(A_n) = \frac{4}{25}P(C_{n-1}) = \frac{4}{25}\left(\frac{17}{25}\right)^{n-1}$

e. Déterminons le plus petit entier naturel n tel que $P(A_n) \leq 0{,}01$

$$\frac{4}{25}\left(\frac{17}{25}\right)^{n-1} \leq 0{,}01 \Leftrightarrow \left(\frac{17}{25}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{16}$$
$$\Leftrightarrow (n-1)ln\left(\frac{17}{25}\right) \leq -ln16$$
$$\Leftrightarrow n - 1 \geq -\frac{ln16}{ln\left(\frac{17}{25}\right)}$$
$$\Leftrightarrow n \geq 1 - \frac{ln16}{ln\left(\frac{17}{25}\right)}$$

avec $1 - \frac{ln16}{ln\left(\frac{17}{25}\right)} \cong 8{,}19$, d'où l'on déduit que le plus petit entier naturel n tel que $P(A_n) \leq 0{,}01$ est $n_0 = 9$.

Corrigé 22

1/ a. $X = -1$ correspond à l'événement « le joueur tire une boule blanche et une boule rouge ». Notons B_1 (respectivement B_2) l'événement « la première (respectivement la deuxième) boule tirée est blanche ». l'événement $\{X = -1\}$ est encore l'événement $(B_1 \cap \overline{B_2}) \cup (\overline{B_1} \cap B_2)$. De plus, les événements $(B_1 \cap \overline{B_2})$ et $(\overline{B_1} \cap B_2)$ sont incompatibles. La probabilité demandée est donc

$p\left((B_1 \cap \overline{B_2}) \cup (\overline{B_1} \cap B_2)\right) = p(B_1 \cap \overline{B_2}) + p(\overline{B_1} \cap B_2)$ $p\left((B_1 \cap \overline{B_2}) \cup (\overline{B_1} \cap B_2)\right) = p(B_1) \times p_{B_1}(\overline{B_2}) + p(\overline{B_1}) \times p_{\overline{B_1}}(B_2)$

$p\left((B_1 \cap \overline{B_2}) \cup (\overline{B_1} \cap B_2)\right) = \frac{10}{n+10} \times \frac{n}{n+9} + \frac{n}{n+10} \times \frac{10}{n+9}$

$p\left((B_1 \cap \overline{B_2}) \cup (\overline{B_1} \cap B_2)\right) = \frac{20n}{(n+10)(n+9)}$

b. Les deux autres valeurs prises par la variable X sont 4 dans le cas où le joueur tire deux boules blanches et -6 dans le cas où le joueur tire deux boules rouges. La probabilité de tirer deux boules blanches est :

$p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2)$

$p(B_1 \cap B_2) = \frac{10}{n+10} \times \frac{9}{n+9} = \frac{90}{(n+10)(n+9)}$

Enfin, $p(X = -6)$ est la probabilité de tirer deux boules rouges

$p(X = -6) = p(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = p(\overline{B_1}) \times p_{\overline{B_1}}(\overline{B_2})$

$p(X = -6) = \frac{n}{n+10} \times \frac{n-1}{n+9} = \frac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)}$

$p(X = -6) = \frac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)}$; $p(X = -1) = \frac{20n}{(n+10)(n+9)}$ et

$p(X = 4) = \frac{90}{(n+10)(n+9)}$

$E(X) = (-6) \times p(X = -6) + (-1) \times p(X = -1) + 4 \times p(X = 4)$

$E(X) = -6\frac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)} - \frac{20n}{(n+10)(n+9)} + 4\frac{90}{(n+10)(n+9)}$

$E(X) = \frac{-6n(n-1)-20n+360}{(n+10)(n+9)} = \frac{-6n^2-14n+360}{(n+10)(n+9)}$

c. $E(X) > 0 \Leftrightarrow \frac{-6n^2-14n+360}{(n+10)(n+9)} > 0 \Leftrightarrow -6n^2 - 14n + 360 > 0 \Leftrightarrow 3n^2 + 7n - 180 < 0$.

Le discriminant du trinôme $3n^2 + 7n - 180$ est $\Delta = 49 + 2160 = 2209 > 0$. Ce trinôme admet deux racines réelles à savoir $x_1 = \frac{-7-\sqrt{2209}}{6} = \frac{-7-47}{6} = -9$ et $x_2 = \frac{-7+\sqrt{2209}}{6} = \frac{20}{3} = 6{,}666\ldots$ on sait que $x^2 + \frac{7}{3}x - 60 < 0 \Leftrightarrow x \in]x_1, x_2[$. Mais alors, puisque n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, $E(X) > 0 \Leftrightarrow n \in]x_1; x_2[\Leftrightarrow n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Les valeurs de n pour lesquelles E(X) > 0 sont 2, 3, 4, 5 et 6.

2 Notons Y le nombre de boules rouges obtenues sur 20 tirages successifs avec remise d'une boule de l'urne. Y suit un schéma de BERNOULLI. En effet,

-Une même expérience (à savoir tirer une boule de l'urne) à deux éventualités (obtenir une boule rouge ou ne pas obtenir une boule rouge) est effectuée 20 fois de manière indépendante (puisque la boule est remise dans l'urne à chaque tirage)

-A chaque expérience, la probabilité de tirer une boule rouge est $p = \frac{n}{n+10}$ et la probabilité de ne pas tirer une boule rouge est $1 - p = \frac{n}{n+10}$.

La probabilité d'obtenir au moins une boule rouge est $p(Y \geq 1)$ avec $p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0)$

$p(Y \geq 1) = 1 - \binom{20}{0}\left(\frac{n}{n+10}\right)^0\left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} = 1 - \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20}$

$p(Y \geq 1) > 0{,}999 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} > 0{,}999$

$\Leftrightarrow \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} < 0{,}001 \quad \Leftrightarrow ln\left(\left(\left(\frac{10}{n+10}\right)^{20}\right)\right) <$ $\ln(0{,}001)$ (Par stricte croissante de la fonction $\ln$ sur $]0, +\infty[$

$\Leftrightarrow 20ln\left(\frac{10}{n+10}\right) < ln(0{,}001)$

$\Leftrightarrow ln\left(\frac{10}{n+10}\right) < \frac{ln(0{,}001)}{20}$

$\Leftrightarrow \frac{10}{n+10} < e^{\frac{ln(0{,}001)}{20}}$ (Par stricte croissante de la fonction exponentielle sur IR)

$\Leftrightarrow \frac{10}{n+10} > e^{-\frac{ln(0{,}001)}{20}}$ (Par stricte décroissante de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$)

$\Leftrightarrow n + 10 > 10e^{-\frac{ln(0{,}001)}{20}}$

$\Leftrightarrow n > 10e^{-\frac{\ln(0{,}001)}{20}} - 10$

$\Leftrightarrow n > 4, 1 \ldots \Leftrightarrow n \geq 5$ (car n est entier).

La probabilité d'obtenir au moins une boule rouge est strictement supérieure à 0,999 si et seulement si $n \geq 5$

Corrigé 23

Partie A

1/ A chaque lancer, la probabilité d'obtenir une face noire est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. puisque les lancers sont effectués de manière indépendante, la probabilité d'obtenir deux faces noires c'est-à-dire une face noire à chaque lancer est $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

La probabilité d'obtenir deux faces noires est $\frac{1}{9}$

2/ De même, la probabilité d'obtenir deux faces vertes est $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ et la probabilité d'obtenir deux faces rouges est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Donc $p(C) = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{4} = \frac{4+1+9}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$, donc $\boldsymbol{p(C) = \frac{7}{18}}$

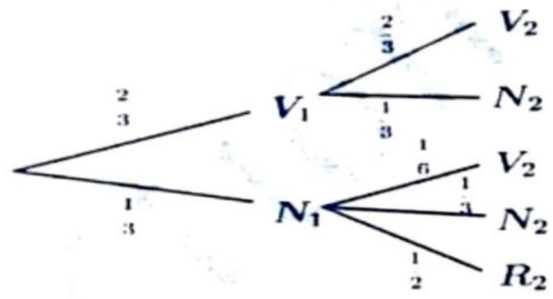
3/ L'événement « les deux faces obtenues sont de couleurs différentes » est l'événement $\bar{C}$ et $\boldsymbol{p(\bar{C}) = 1 - p(C) = \frac{11}{18}}$

4/ Notons V l'évènement « les deux faces obtenues sont vertes ».

La probabilité demandée est $p_C(V)$. Or $p_C(V) = \frac{p(V \cap C)}{p(C)} = \frac{p(V)}{p(C)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{7}{18}} = \frac{18}{7 \times 36} = \frac{1}{7 \times 2} = \frac{1}{14}$, donc $\boldsymbol{p_C(V) = \frac{1}{14}}$

Partie B

1/ a. Représentons alors la situation par un arbre.



b. Puisqu'on a obtenu une face verte au premier lancer, on a relancé le dé B avec une probabilité $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ d'obtenir une face verte au deuxième lancer. D'où : $\boldsymbol{p_{V_1}(V_2) = \frac{2}{3}}$

2/ La probabilité demandée est $p(V_1 \cap V_2)$

$p(V_1 \cap V_2) = p(V_1) \times p_{V_1}(V_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

3/ La probabilité demandée est $p(V_2)$.

D'après la formule des probabilités totales,

$p(V_2) = p(V_1 \cap V_2) + p(N_1 \cap V_2)$. Or $p(V_1 \cap V_2) = \frac{4}{9}$.

Ensuite, $p(N_1 \cap V_2) = p(N_1) \times p_{N_1}(V_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$.

D'où finalement : $p(V_2) = \frac{4}{9} + \frac{1}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$.

La probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer est $\frac{1}{2}$.

Corrigé 24

1/ L'énoncé donne $p(R \cap U) = p(U) = 0{,}2$ et donc $p(\bar{U}) = 1 - p(U) = 0{,}8$. L'énoncé donne aussi $P_{\bar{U}}(R) = 0{,}1$. La formule des probabilités totales permet alors d'écrire

$p(R) = p(R \cap U) + p(R \cap \bar{U})$

$p(R) = p(R \cap U) + p(\bar{U}) \times P_{\bar{U}}(R) p(R)$

$p(R) = 0{,}2 + 0{,}8 \times 0{,}1 = 0{,}28$

La probabilité que la boule tirée porte le n°2 sachant qu'elle est rouge est $\frac{2}{7}$.

2/ La probabilité demandée est $P_R(\bar{U})$

$$P_R(\bar{U}) = \frac{p(R \cap \bar{U})}{p(R)} = \frac{p(\bar{U}) \times P_{\bar{U}}(R)}{p(R)}$$

$$P_R(\bar{U}) = \frac{0{,}8 \times 0{,}1}{0{,}28} = \frac{0{,}08}{0{,}28} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$$

La probabilité que la boule tirée porte le n°2 sachant qu'elle est rouge $\frac{2}{7}$.

3/ a. Notons X le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- n expériences identiques et indépendantes (les tirages se faisant avec remise) sont effectuées ;
- chaque expérience à deux issues : « la boule tirée est rouge et porte le n°1 » avec une probabilité $p = 0{,}2$ ou son contraire avec une probabilité $1 - p = 0{,}8$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}2$.

La probabilité demandée est $p(X \geq 1)$ et on a :

$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}8^n$

b. Soit n un entier naturel supérieure ou égal à 2.

$$p(X \geq 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - 0{,}8^n \geq 0{,}99$$
$$\Leftrightarrow 0{,}8^n \leq 0{,}01$$
$$\Leftrightarrow \ln 0{,}8^n \leq \ln(0{,}01)$$
$$\Leftrightarrow n \ln(0{,}8) \leq \ln(0{,}01)$$
$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)} \ (car \ \ln(0{,}8) < 0)$$
$$\Leftrightarrow n \geq 20{,}6 \ldots.$$
$$\Leftrightarrow n \geq 21 \ (car \ n \ est \ un \ entier).$$

La probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égale à 0, 99 à partir de n = 21.

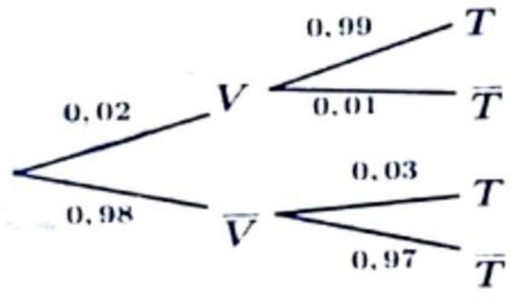
Corrigé 25

Partie A

1/ a. L'énoncé fournit directement $P(V) = 0{,}02$:

$P_V(T) = 0{,}99$ et $P_{\bar{V}}(\bar{T}) = 0{,}97$.

Représentons la situation par un arbre



b. On en déduit que $p(V \cap T) = P(V) \times P_V(T) = 0{,}02 \times 0{,}99 = 0{,}0198$ soit $p(V \cap T) = 0{,}0198$.

2/ La probabilité demandée est $p(T)$. D'après la formule des probabilités totales, $p(T) = p(T \cap V) + p(T \cap \bar{V})$.

D'après la question précédente, $p(V \cap T) = 0{,}0198$ et d'autre part $p(T \cap \bar{V}) = p(\bar{V}) \times P_{\bar{V}}(T) = \big(1 - p(V)\big)\big(1 - P_{\bar{V}}(\bar{T})\big)$ et

Scanné avec CamScanner

$p(T \cap \bar{V}) = (1 - 0{,}02)(1 - 0{,}97) = 0{,}98 \times 0{,}03 = 0{,}0294$, donc
$\boldsymbol{p(T) = 0{,}0198 + 0{,}0294 = 0{,}0492}$

3/ a. La probabilité demandée est $P_T(V)$.

Or, $P_T(V) = \frac{p(V \cap T)}{p(T)} = \frac{0{,}0198}{0{,}0492} = 0{,}402 \ldots$

Donc $P_T(V) = 0{,}4$ à 10^{-2} près ou encore $P_T(V) = 40\%$ à 1% près ce qui justifie la phrase de l'énoncé.

b. La probabilité demandée est $P_{\bar{T}}(\bar{V})$. Or, $P_{\bar{T}}(\bar{V}) = \frac{p(\bar{V} \cap \bar{T})}{p(\bar{T})}$.

Ensuite, d'après la question 2/, $p(\bar{T}) = 1 - p(T) = 1 - 0{,}0492 = 0{,}9508$ et d'autre part

$p(\bar{V} \cap \bar{T}) = p(\bar{V}) \times P_{\bar{V}}(\bar{T}) = 0{,}98 \times 0{,}97 = 0{,}9506$

Puis $\boldsymbol{P_{\bar{T}}(\bar{V}) = \frac{0{,}9506}{0{,}9508} = 0{,}9998}$ *arrondi* à 10^{-4}.

Partie B

1/ La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

-10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;

-Chaque expérience à deux issues : « la personne est contaminée par le virus »avec une probabilité $p = 0{,}02$ ou « la personne n'est pas contaminée par le virus » avec une probabilité $1 - p = 0{,}98$.

La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ *et* $p = 0{,}02$.

2/ La probabilité demandée est $p(x \geq 2)$.

On a : $p(x \geq 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1)$

$p(x \geq 2) = 1 - \binom{10}{0} \times 0{,}02^0 \times 0{,}98^{10} - \binom{10}{1} \times 0{,}02^1 \times 0{,}98^9$ soit $p(x \geq 2) = 0{,}0162$ *arrondi* à 10^{-4}.

Corrigé 26

Partie A

1/ Notons A (resp B) l'évènement « le joueur tire une boule dans l'urne A (resp B) ». La formule des probabilités totales permet d'écrire :

$p(R) = p(A \cap R) + p(B \cap R) = p(A) \times p_A(R) + p(B) \times p_B(R)$

$\boldsymbol{p(R) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{10} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{10} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20} = 0{,}15}$

2/ Calculons les probabilités des évènements A et B sachant que l'évènement R est réalisé.

$p_R(A) = \frac{p(A \cap R)}{p(R)} = \frac{p(A) \times p_A(R)}{p(R)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{4}{10}}{\frac{3}{20}} = \frac{1}{15} \times \frac{20}{3} = \frac{4}{9}$ et

$p_R(B) = \frac{p(B \cap R)}{p(R)} = \frac{p(B) \times p_B(R)}{p(R)} = \frac{\frac{5}{6} \times \frac{1}{10}}{\frac{3}{20}} = \frac{1}{12} \times \frac{20}{3} = \frac{5}{9}$

Ainsi, $p_R(B) > p_R(A)$, donc **si le joueur obtient une boule rouge, il est plus probable que cette boule provienne de l'urne B.**

Partie B

1/ Notons X le nombre de boules rouges obtenues au cours des deux épreuves. La variable aléatoire G a la même loi de probabilité que la variable X.

Maintenant, la variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

-2 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;

-Chaque expérience a deux issues : « la boule tirée est rouge » avec une probabilité $p = 0{,}15$ (d'après A.1/) ou « la boule tirée n'est pas rouge » avec une probabilité $1 - p = 0{,}85$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = 0{,}15$. On obtient ainsi :

- $p(G = 2x) = p = (X = 2) = \binom{2}{2}(0{,}15)^2(0{,}85)^0 = 0{,}0225$
- $p(G = x - 2) = p(X = 1) = \binom{2}{1}(0{,}15)^1(0{,}85)^1 = 0{,}225$.
- $p(G = -4) = p(X = 0) = \binom{2}{0}(0{,}15)^0(0{,}85)^2 = 0{,}7225$.

On peut résumer ces résultats dans un tableau.

t	$2x$	$x - 2$	-4
$p(G = t)$	0,0225	0,255	0,7225

$E(G) = 2xp(G = 2x) + (x - 2)p(G = x - 2) - 4p(G = -4)$

$E(G) = 0{,}0225(2x) + 0{,}255(x - 2) + 0{,}7225(-4)$

$E(G) = 0{,}3x - 3{,}4$

$E(G) \geq 0 \Leftrightarrow 0{,}3x - 3{,}4 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{34}{3}$

$\Leftrightarrow x > 12$ (car x est entier)

L'espérance de gain devient positive pour x > 12.

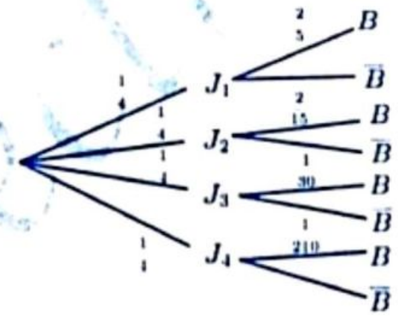
Corrigé 27

1/ Quand l'événement J_1 est réalisé, on doit tirer une boule de l'urne U_2. Puisque l'urne contient 10 boules dont 4 sont blanches, $p_{J_1}(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Quand l'événement J_2 est réalisé, on doit tirer deux boules de l'urne U_2. Il y a $\binom{10}{2}$ tirages simultanés de 2 boules parmi les 10 de l'urne U_2 et parmi ces tirages, il y a $\binom{4}{2}$ tirages simultanés de deux boules parmi les 4 blanches. Donc $p_{J_2}(B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{4\times3}{2}}{\frac{10\times9}{2}} = \frac{4\times3}{10\times9} = \frac{2}{5\times3} = \frac{2}{15}$.

$p_{J_1}(B) = \frac{2}{5}, p_{J_2}(B) = \frac{2}{15}, p_{J_3}(B) = \frac{1}{30}$ et $p_{J_4}(B) = \frac{1}{210}$

2/ Représentons la situation par un arbre.



D'après la formule des probabilités totales, on a :

$p(B) = p(J_1) \times p_{J_1}(B) + p(J_2) \times p_{J_2}(B) + p(J_3) \times p_{J_3}(B) + p(J_4) \times p_{J_4}(B) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5} + \frac{2}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{210}\right)$

$p(B) = \frac{1}{4} \times \frac{84+28+7+1}{210} = \frac{120}{4\times210} = \frac{4\times30}{4\times30\times7} = \frac{1}{7}$

3/ La probabilité demandée est $p_B(J_3)$

$p_B(J_3) = \frac{p(J_3 \cap B)}{p(B)} = \frac{p(J_3) \times p_{J_3}(B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{30}}{\frac{1}{7}} = \frac{7}{120}$

4/ a. La variable aléatoire N est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

-10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;

-Chaque expérience a deux issues : « toutes les boules tirées sont blanches » avec une probabilité $p = \frac{1}{7}$ (d'après la question 2/) ou « au moins une boule tirée n'est pas blanche » avec une probabilité $1 - p = \frac{6}{7}$.

La variable aléatoire N suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = \frac{1}{7}$.

On sait alors que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 10$,

$p(X = k) = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{7}\right)^k\left(\frac{6}{7}\right)^{10-k}$

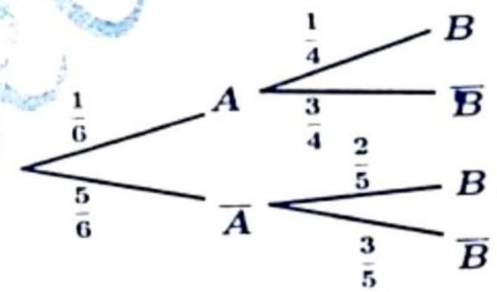
b. D'après la question précédente,

$p(N = 3) = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{7}\right)^3\left(\frac{6}{7}\right)^7 = 0,118\ldots$

Et donc $p(N = 3) = 0,12$ arrondi à 10^{-2}

Corrigé 28

1/ a. Représentons la situation par un arbre.



b. D'après la formule des probabilités totales,

$p(B) = p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{4} + \frac{5}{6}\times\frac{2}{5}$

$p(B) = \frac{1}{24} + \frac{1}{3} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$

c. La probabilité demandée est $p_B(A)$.

$p_B(A) = \frac{p(B\cap A)}{p(B)} = \frac{p(A)\times p_A(B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{24}\times\frac{8}{3} = \frac{1}{9}$.

2/ a. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

-10 expériences identiques sont effectuées ;

-Chaque expérience a deux issues : « la boule obtenue est noire » avec une probabilité $p = \frac{3}{8}$ (d'après la question 1/b.) ou « la boule obtenue n'est pas noire » avec une probabilité $1 - p = \frac{5}{8}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{8}$.

On sait alors que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 10$,

$p(X = k) = \binom{10}{k}\left(\frac{3}{8}\right)^k\left(\frac{5}{8}\right)^{10-k}$

En particulier, $p(X = 3) = \binom{10}{3}\left(\frac{3}{8}\right)^3\left(\frac{5}{8}\right)^7$

$p(X = 3) = \frac{10\times9\times8}{3\times2}\times\frac{3^3\times5^7}{8^{10}} = 120\times\frac{3^3\times5^7}{8^{10}} = 0{,}2357$

Et donc la probabilité de gagner exactement 3 parties est 0,236 arrondie au millième.

b. La probabilité demandée est $p(X \geq 1)$.

$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{10}{0}\left(\frac{3}{8}\right)^0\left(\frac{5}{8}\right)^{10} = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{10} =$ 0,9909

Et donc la probabilité de gagner au moins 1 partie est 0,991 arrondie au millième

c. La probabilité considérée est $p(X \geq N)$.

$p(X \geq N) \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow 1 - p(X < N) \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow p(X > N) \geq \frac{9}{10}$.

D'après le tableau fourni dans l'énoncé, la valeur de N à parti de laquelle la probabilité de l'événement « la personne gagne au moins N parties » devient inférieure à $\frac{1}{10}$ est 7.

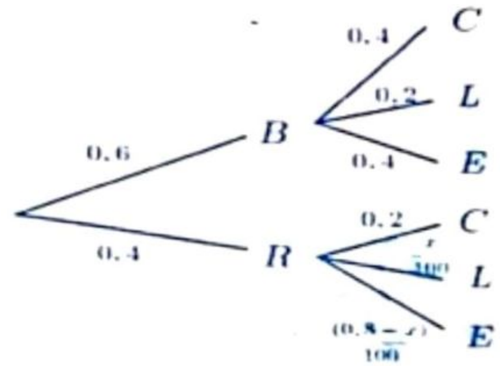
L'homme fort cache ses misères. C'est le coq qu'on entend crier, jamais le bœuf

Félix Leclerc

Corrigé 29

Partie A

1/ Notons B l'événement « le cube tiré est bleu », R l'événement « le cube tiré est rouge », C l'événement « le cube tiré est marqué d'un cercle », L l'événement « le cube tiré est marqué d'un losange », E l'événement « le cube tiré est marqué d'une étoile ». Représentons la situation par un arbre.



La probabilité demandée est $p(L)$. D'après la formule des probabilités totales,

$p(L) = p(B)\times p_B(L) + p(R)\times p_R(L) = 0{,}6\times0{,}2 + (1-0{,}6)\times\frac{x}{100} = 0{,}12 + 0{,}004x$.

2/ De même,

$p(E) = p(B)\times p_B(E) + p(R)\times p_R(E) = 0{,}6\times(1-0{,}4-0{,}2) + 0{,}4\times(1-0{,}2-0{,}01x) = 0{,}24 + 0{,}4(0{,}8-0{,}01x) = 0{,}56 - 0{,}004x$, puis

$p(L) = p(E) \Leftrightarrow 0{,}12 + 0{,}004x = 0{,}56 - 0{,}004x \Leftrightarrow 0{,}008x = 0{,}44 \Leftrightarrow x = \frac{0{,}44}{0{,}008} \Leftrightarrow x = 55$

3/ Les événements B et L sont indépendants si et seulement si $p_B(L) = p(L)$.

Or, $p(L) = p_B(L) \Leftrightarrow 0{,}12 + 0{,}004x = 0{,}2 \Leftrightarrow 0{,}004x = 0{,}08 \Leftrightarrow x = \frac{0{,}08}{0{,}004} \Leftrightarrow x = 20$.

4/ Ici, la probabilité demandée est $p_L(B)$.

$p_L(B) = \frac{p(B\cap L)}{p(L)} = \frac{p(B)\times p_B(L)}{p(L)} = \frac{0{,}6\times0{,}2}{0{,}12+0{,}004\times50} = \frac{0{,}12}{0{,}32} = 0{,}375$

Partie B

1/ L'événement considéré est l'événement contraire de l'événement « les trois cubes tirés sont bleus ». le nombre de tirage simultanés de 3 cubes parmi les 100 que contient l'urne est :

$\binom{100}{3} = \frac{100\times99\times98}{3\times2} = 100 \times 33 \times 49 = 161700.$

Le nombre de tirages simultanés de 3 cubes parmi les 60 bleus est :

$\binom{60}{3} = \frac{60\times59\times58}{3\times2} = 10 \times 59 \times 58 = 34220.$

La probabilité demandée est donc

$1 - \frac{34220}{161700} = \frac{12748}{16170} = 0{,}788$ Arrondi au millième.

2/ La probabilité d'obtenir trois cubes bleus est $\frac{34220}{161700}$. De même, la probabilité d'obtenir trois cubes rouges est $\frac{\binom{40}{3}}{\binom{100}{3}} = \frac{\frac{40\times39\times38}{3\times2}}{161700} = \frac{9880}{161700}$.

La probabilité d'obtenir trois cubes de même couleur est donc

$\frac{34220}{161700} + \frac{9880}{161700} = \frac{44100}{161700} = 0{,}274$ Arrondi au millième.

3/ Le nombre de cubes bleus marqués d'un cercle est $0{,}4\times 60 = 24$ et le nombre de cubes rouges marqués d'un cercle est $0{,}2 \times 40 = 8$.

Le nombre total de cubes marqués d'un cercle est 32.

Le nombre de tirages simultanés de 3 cubes dont 1 est l'un des 32 cubes marqués d'un cercle et les deux autres sont deux des 68 cubes non marqués d'un cercle est :

$\binom{32}{1} \times \binom{68}{1} = 32 \times \frac{68\times67}{2} = 72896.$

La probabilité demandée est donc $\frac{72896}{161700} = 0{,}451$ Arrondi au millième.

Corrigé 30

1/ Démontrons que $p(A/\overline{B}) = \frac{p(A)-p(A/B)\times p(B)}{1-p(B)}$

On a $p(A/\overline{B}) = \frac{p(A\cap\overline{B})}{p(\overline{B})}$. On sait que $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ et $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \emptyset$, donc $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$.

d'où $p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A \cap B)$.

Or $p(A \cap B) = p(A/B) \times p(B)$, donc $p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A/B) \times p(B)$. De plus $p(\overline{B}) = 1 - p(B)$.

D'où : $p(A/\overline{B}) = \frac{p(A)-p(A/B)\times p(B)}{1-p(B)}$

2/ a. Calculons en fonction de b la probabilité p

Notons A l'évenement « un renard est enragé » et B l'événement « un renard est abattu »

On a $p = p(A/\overline{B})$, donc d'après la question 1/on a $p = \frac{p(A)-p(A/B)\times p(B)}{1-p(B)}$. De plus $p(A) = 0{,}3$ et $p(B) = 0{,}4$, d'où :

$p = \frac{0{,}3-0{,}4b}{1-b}$.

b. Plus petite valeur de b pour que $p \leq 0{,}1$

$p \leq 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{0{,}3-0{,}4b}{1-b} \leq 0{,}1$

$\Leftrightarrow 0{,}2 - 0{,}3b \leq 0{,}1$, car $b \neq 1$

$\Leftrightarrow b \geq \frac{2}{3}$

On en déduit que la plus petite valeur de p est $\frac{2}{3}$.

c. Probabilité d'avoir décontaminé au moins 8 territoires sur 10

$p(X \geq 8) = p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10)$

Or X suit une loi binomiale de paramètres $p = \frac{1}{3}$ et n = 10, d'où :

$p(X \geq 8) = C_{10}^{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{8}\left(\frac{2}{3}\right)^{2} + C_{10}^{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{1} + C_{10}^{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}$

$p(X \geq 8) = \frac{1}{3^{10}}(45 \times 4 + 10 \times 2 + 1)$

$p(X \geq 8) = \frac{67}{3^{10}}$

Corrigé 31

1/ La probabilité qu'un animal choisi au hasard dans le cheptel soit malade est egale a $\frac{5}{1000}$.

2/ a. La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

-10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;

-Chaque expérience a deux issues : « l'animal est malade » avec une probabilité P= 0,005 (d'après 2.) ou « l'animal n'est pas malade » avec une probabilité $1-P = 0{,}995$.
La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres n= 10 et p = 0,005.

On a : $E(X) = np = 10 \times \frac{5}{1000} = 0{,}05$

b. L'évènement A est l'évènement $X = 0$

$p(A) = p(X = 0) = \binom{10}{0}(0{,}005)^0(0{,}995)^{10} = (0{,}995)^{10}$.

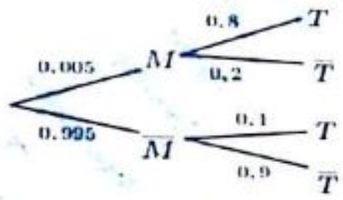
Ensuite, l'évènement B est l'évènement contraire de l'évènement A et donc : $P(B) = 1 - p(A) = 1 - (0{,}995)^{10}$.

P(A) = $(0{,}995)^{10} = 0{,}951$ à 10^{-3} près

P(B) = $1 - (0{,}995)^{10} = 0{,}048$ à 10^{-3} près.

3/ a. On a: $p_M(\bar{T}) = 1 - p_M(T) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ *et* $p_{\bar{M}}(T) = 1 - p_{\bar{M}}(\bar{T}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

On peut alors représenter la situation par un arbre.



b. Tout d'abord $p_{\bar{M}}(T) = 1 - p_{\bar{M}}(\bar{T}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$. Mais alors, d'après la formule des probabilités totales

$p(T) = p(T \cap M) + p(T \cap \bar{M}) = p(M) \times p_M(T) + p(\bar{M}) \times p_{\bar{M}}(T) = 0{,}005 \times 0{,}8 + 0{,}8 + 0{,}995 \times 0{,}1 = 0{,}1035.$

$p(T) = 0{,}1035$

c. La probabilité demandée est $P_T(M)$

$P_T(M) = \frac{p(T \cap M)}{p(T)} = \frac{p(M) \times p_M(T)}{p(T)} = \frac{0{,}005 \times 0{,}8}{0{,}1035} = \frac{8}{207}$

$P_T(M) = 0{,}038$ à 10^{-3} *près*.

Dieu n'a pas besoin de tes bonnes œuvres, mais ton voisin si
Martin Luther

Corrigé 32

1/3. L'énoncé donne $p(T_1) = \frac{1}{2}$ *et* $p(P_1) = p(\bar{T}_1) = \frac{1}{2}$ *puis* $p_{T_1}(T_2) = 0{,}3$ *et* $p_{P_1}(T_2) = 1 - p_{T_1}(P_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

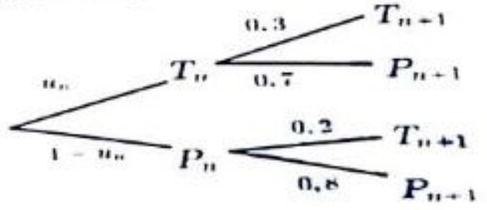
b. D'après la formule des probabilités totales et puisque P_2 sont respectivement les événements contraires de T_2.

$p(T_2) = p(T_1 \cap T_2) + p(P_1 \cap T_2)$

$p(T_2) = p(T_1) \times p_{T_1}(T_2) + p(P_1) \times p_{P_1}(T_2)$

$p(T_2) = \frac{1}{2} \times 0{,}3 + \frac{1}{2} \times 0{,}2 = \frac{1}{2} \times (0{,}3 + 0{,}2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

c. Représentons la situation par un arbre



d. D'après la formule des probabilités totales et puisque P_n *et* p_{n+1} sont respectivement les événements contraires de T_n *et* T_{n+1}.

$u_{n+1} = p(T_{n+1}) = p(T_n \cap T_{n+1}) + p(P_n \cap T_{n+1})$

$u_{n+1} = p(T_n) \times p_{T_n}(T_{n+1}) + p(P_n) \times p_{P_n}(T_{n+1})$

$u_{n+1} = u_n \times 0{,}3 + (1 - u_n) \times 0{,}2 = 0{,}1u_n + 0{,}2$

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}1\,u_n + 0{,}2$

c. La machine donne

n	u_n
1	0,5
2	0,25
3	0,225
4	0,2225
5	0,22225
6	0,222225

Il semblerait que la suite (u_n) $n \in IN$ converge vers $l = 0{,}222$ ...

2/ a. Soit n un entier naturel non nul.

Scanné avec CamScanner

$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{9} = 0{,}1u_n + 0{,}2 - \frac{2}{9}$

$v_{n+1} = \frac{1}{10}u_n + \frac{1}{5} - \frac{2}{9} = \frac{1}{10}u_n - \frac{1}{45}$

$v_{n+1} = \frac{1}{10}\left(u_n - \frac{10}{45}\right) = \frac{1}{10}\left(u_n - \frac{2}{9}\right) = \frac{1}{10}v_n$

La suite (v_n) $n \in IN$ est géométrique de raison $\frac{1}{10}$ et de premier terme $v_1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}$.

b. Soit n un entier naturel non nul.

$v_n = v_1 \times q^{n+1} = \frac{5}{18} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{5}{18\times 10^{n-1}}$

On en déduit que $u_n = \frac{2}{9} + v_n = \frac{2}{9} + \frac{5}{18\times 10^{n-1}}$.

Pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \frac{2}{9} + \frac{5}{18\times 10^{n-1}}$.

c. Comme $10 > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 10^n = +\infty$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{18\times 10^{n-1}} = 0$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{9}$

Puisque $\frac{2}{9} = 0{,}222\ldots$, la conjecture émise en 1/e. est validée.

Corrigé 33

I. 1/ Etudions la dérivabilité de f, g et h au point d'abscisse $x_0 = 0$

Pour f, on a : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}(x+1)ln|x|$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$, car $\begin{cases} x+1 \to 1 \\ ln|x| \to -\infty \end{cases}$

Il s'ensuit que f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$

Pour g, on a : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(x^2+1)}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 1$, car $\lim\limits_{X\to 0} \frac{ln(X+1)}{X}$

Il s'ensuit que g est dérivable en $x_0 = 0$

Pour h, on a : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x\left(-\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = 0$, car $\begin{cases} -\frac{1}{x^2} \to -\infty \\ xe^x \to 0 \end{cases}$

Il s'ensuit que h est dérivable en $x_0 = 0$.

Etudions la continuité de f, g et h au point d'abscisse $x_0 = 0$

Comme les fonctions g et h sont dérivables en $x_0 = 0$, alors elles sont aussi continues en $x_0 = 0$.

Pour f, on a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x+1)x ln|x|$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, car $\begin{cases} x+1 \to 1 \\ xln|x| \to 0 \end{cases}$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$, alors f est continue en $x_0 = 0$.

2. Montrons que : $\forall x \geq 0,\ ln(x^2+1) \leq x^2$

Posons $\varphi(x) = ln(x^2+1) - x^2$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \varphi'(x) = -2x\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$.

$\forall x \geq 0,\ \varphi'(x) \leq 0$, donc φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

De plus $\varphi(0) = 0$, donc : $\forall x \geq 0,\ \varphi(x) \leq 0$. D'où le résultat.

Déduisons que : $\forall x \in [0;1],\ g(x) \leq x$

On a : $\forall x \geq 0,\ ln(x^2+1) \leq x^2$; on en déduit que : $\forall x > 0$, $\frac{ln(x^2+1)}{x} \leq x$. Par suite : $\forall x \in [0;1],\ g(x) \leq x$ puisque $[0;1] \subset [0;+\infty[$ et $g(0) = 0$.

II. 1/ Calculons la probabilité pour qu'un candidat donné tire une enveloppe contenant une fonction continue et dérivable en $x_0 = 0$

Soit A cet événement.

Les fonctions g et h sont continues et dérivables en 0 et f ne l'est pas, donc $p(A) = \frac{2}{3}$.

2/ a. Déterminons la loi de probabilité de X

Soit Ω l'univers, on a : $X(\Omega) = \{1;2;3\}$.

$p(X=1) = \frac{1}{3}$; $p(X=2) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$; $p(X=3) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

x_i	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

b. Calculons l'espérance mathématique et la variance de X

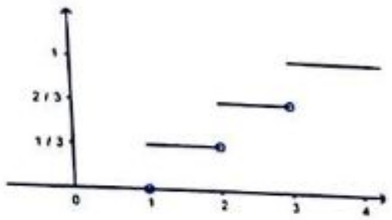
On a : $E(X) = 1\times\frac{1}{3} + 2\times\frac{1}{3} + 3\times\frac{1}{3} = 2$

$V(X) = 1^2\times\frac{1}{3} + 2^2\times\frac{1}{3} + 3^2\times\frac{1}{3} - 2^2 = \frac{2}{3}$

Scanné avec CamScanner

c. Construisons la courbe de la fonction de répartition de X

On a : $F(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x < 1 \\ \frac{1}{3} \; si \; 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{3} \; si \; 2 \leq x < 3 \\ 1 \; si \; x \geq 3 \end{cases}$



Corrigé 34

1/ a. Loi de probabilité de X

Il y a C_{10}^2 façons différentes de choisir deux billets parmi dix billets.

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 0 ; 1 ou 2.

- Il y a C_8^2 façons de choisir deux billets parmi les 8 billets non gagnants, d'où

$P(X = 0) = \frac{C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{8\times7}{10\times9} = \frac{28}{45}$

- On choisit C_2^1 billets gagnant parmi les deux gagnants et C_8^1 billet parmi les billets non gagnants, d'où :

$P(X = 1) = \frac{C_2^1 \times C_8^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45}$

- Il n'y a qu'une seule façon de choisir les deux billets gagnants, d'où :

$P(X = 2) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$

On obtient le tableau récapitulatif suivant :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{45}$

b. Calculons la probabilité p_n

$p_n = \frac{C_2^1 \times C_{n-2}^1}{C_n^2} = \frac{2(n-2)}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{4(n-2)}{n(n-1)}$

2/ a. Loi de probabilité de Y

Ici, il a remise du billet après le 1er tirage

Il y a donc 10^2 tirages différents.

Y peut prendre les valeurs 0 ; 1 et 2. On a ainsi :

$P(Y = 0) = \frac{8\times8}{10^2} = \frac{16}{25}$

$P(Y = 1) = \frac{2\times8+8\times2}{10^2} = \frac{8}{25}$

$P(Y = 2) = \frac{2\times2}{10^2} = \frac{1}{25}$

On obtient le tableau récapitulatif suivant :

y_i	0	1	2
$P(Y = y_i)$	$\frac{16}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{1}{25}$

b. Calculons la probabilité q_n

Il y a donc n^2 tirages différents, et parmi ces tirages il y a $2(n-2) + (n-2) \times 2 = 4(n-2)$ tirages avec un seul billet gagnant. D'où $q_n = \frac{4(n-2)}{n^2}$

3/ a. Montrons que pour tout n supérieur ou égal à 3, on a :

$p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)}$

$p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n(n-1)} - \frac{4(n-2)}{n^2} = \frac{4n(n-2)-4(n-2)(n-1)}{n^2(n-1)}$ soit

$p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)}$.

b. Déterminons n_0 tel que $p_n - q_n < 10^{-3}$

$n-2 < n-1 \Rightarrow 0 < \frac{n-2}{n-1} < 1 \Rightarrow p_n - q_n < \frac{4}{n^2}$

$\frac{4}{n^2} < 10^{-3} \Rightarrow n^2 > 4 \times 10^3 \Rightarrow n > \sqrt{4 \times 10^3} \cong 63{,}25.$

On déduit que $n_0 = 64$.

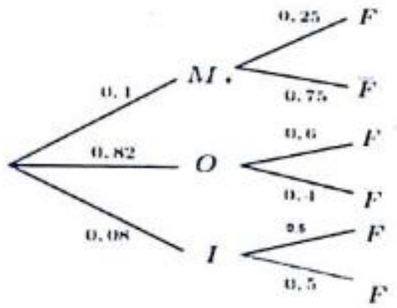
Pour $n \geq 3$, $p_n - q_n$ est positif, donc $p_n > q_n$. Par suite, pour avoir un seul billet gagnant, il est préférable de tirer deux billets simultanément.

Scanné avec CamScanner

Corrigé 35

P(I) = 8% = 0,08 ; P(O) = 80% ; P(F) = 50% ; $P_M(F) = 25\%$; $P_O(F) = 60\%$

1/ Arbre pondéré



2/ a. Probabilité d'interroger un agent de maintenance

$P(M) = 1 - P(\overline{M})$

$P(M) = 1 - P(I \cup O)$

$P(M) = 1 - (P(I) + P(O))$

$P(M) = 1 - (0,08 + 0,8)$

$P(M) = 0,12$

b. Probabilité d'interroger une femme agent de maintenance

$P(F \cap M) = P(M) \times P_M(F)$

$P(F \cap M) = 0,12 \times 0,25$

$P(F \cap M) = 0,03$

c. Probabilité d'interroger une femme

$P(F) = P(F \cap M) + P(F \cap O) + P(F \cap I)$

Or $P(F \cap O) = P(O) \times P_O(F)$ et $P(F \cap I) = P(I) \times P_I(F)$, donc

$P(F) = 0,03 + 0,8 \times 0,6 + 0,08 \times 0,05$

$P(F) = 0,55$

3/a. Démontrons que $P(B \cap A) = 0,037$

On a : $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$ soit

$P(B \cap A) = P(B) - P(B \cap \overline{A})$ Or $P(B) = 0,04$ et

$P(B \cap \overline{A}) = 0,003$, donc $P(B \cap A) = 0,04 - 0,003 = 0,037$

b. Calculons la probabilité que l'alarme se déclenche

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

$P(A) = 0,037 + 0,002 = 0,039$

c. Calculons $P_A(B)$

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,037}{0,039} = 0,9487$

Corrigé 36

Composition des urnes au départ U_1(nB ;3N) U_2(2B ;1N)

1/ Montrons que $p(A) = \frac{3n^2+15n+9}{5(n+3)(n+2)}$

Cherchons les événements élémentaires qui composent A.

U_1	2N	2B	1B1N
U_2	2N	2B	1B1N

Utilisons le calcul de la probabilité produit.

$p(A) = \frac{C_3^2}{C_{n+3}^2} \times \frac{C_3^2}{C_5^2} + \frac{C_n^2}{C_{n+3}^2} \times \frac{C_4^2}{C_5^2} + \frac{C_n^1 \times C_3^1}{C_{n+3}^2} \times \frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_5^2}$

$p(A) = \frac{9+3n^2-3n+18n}{5(n+3)(n+2)}$

D'où : $p(A) = \frac{3n^2+15n+9}{5(n+3)(n+2)}$

2/ Calculons la probabilité $p(B)$ de l'événement B

Cherchons les événements élémentaires qui composent A.

U_1	1B1N	2N
U_2	2B	1B1N

Utilisons le calcul de la probabilité produit

$p(B) = \frac{C_n^1 \times C_3^1}{C_{n+3}^2} \times \frac{C_3^2}{C_5^2} + \frac{C_3^2}{C_{n+2}^2} \times \frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_5^2}$

$p(B) = \frac{9n+18}{5(n+3)(n+2)}$

3/ Le joueur reçoit $10n(3-\alpha)$ francs.

a. Explication

Le gain maximum g du joueur est atteint si $\alpha = 0$, soit $g = 30n - 200$. Le jeu est profitable au joueur si $g > 0$.

Or $g > 0 \Leftrightarrow 30n - 200 > 0$

$\Leftrightarrow n > \frac{20}{3}$, soit $n > 6$.

Ainsi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 6.

Scanné avec CamScanner

b. Déterminons la loi de probabilité de X
Valeurs prises par X
Soit E l'univers associé à l'expérience, on a :
$X(E) = \{-200; 10n - 200; 20n - 200; 30n - 200\}$
Pour $a = 3$, $\{X = -200\} = \{(2B; 1B1N); (1B1N; 2N)\}$
$P(X = -200) = \frac{n(2n+1)}{5(n+3)(n+2)}$
Pour $a = 2$,
$\{X = 10n - 200\} = \{(2B; 2B); (2N; 2N); (1B1N; 1B1N)\}$
$P(X = 10n - 200) = P(A)$
Pour $a = 1$, $\{X = 20n - 200\} = B$, donc
$P(X = 20n - 200) = P(B)$
Pour $a = 0$, $"X = 30n - 200" = \{(2N; 2B)\}$, donc :
$P(X = 30n - 200) = \frac{3}{5(n+3)(n+2)}$
c. Calculons l'espérance mathématique de X
$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P_i$
$E(X) = \frac{30n^3+150n^2+90n+180n^2+360n+90n}{5(n+3)(n+2)} - 200$
$E(X) = \frac{6n^3+66n^2+108n}{5(n+3)(n+2)} - 200$

Corrigé 37

1/ Calculons les probabilités des événements A, B et C
Nous sommes en présence d'une loi binomiale de paramètres n = 50 et p = 0,1.
L'événement contraire de A a pour probabilité $0{,}9^{50}$, donc
$P(A) = 1 - 0{,}9^{50} \cong 0{,}995$
B est la réunion des événements « 2 personnes répondent », « une personne répond » et « personne ne répond », donc :
$P(B) = \binom{50}{2} \times 0{,}1^2 \times 0{,}9^{48} + \binom{50}{\&} \times 0{,}1^1 \times 0{,}9^{49} + 0{,}9^{50}$.
On obtient $P(B) \cong 0{,}113$.
C est l'événement contraire de B, donc $P(C) = 1 - P(B) \cong 0{,}887$.
2/ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

a. Montrons que la probabilité qu'au moins trois personnes répondent est donnée par $f(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)$
« au moins trois personnes répondent » est l'événement contraire de la réunion de trois événements : « personne ne répond », « une personne répond » et « deux personnes répondent ». Ainsi, en utilisant la loi de probabilité donnée, on a : $f(a) = 1 -$
$P(X \leq 2) = 1 - \left(\frac{e^{-a}a^0}{0!} + \frac{e^{-a}a^1}{1!} + \frac{e^{-a}a^2}{2!}\right)$
$f(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)$
b. Calculons $f(5) = 1 - e^{-5}(1 + 5 + 12{,}5) \cong 0{,}875$.
Oui, ce résultat est assez proche de celui obtenu avec le modèle binomial.
3/ On conserve le modèle de la question 2. On souhaite déterminer le nombre minimum de personnes à interroger pour que la probabilité pour que trois d'entre d'elles au moins répondent soit supérieure ou égale à 0,95.
a. Variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 1 -$
$e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$ f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout x de $\mathbb{R}^+$, on a : $f'(x) = \frac{x^2}{2}e^{-x}$. Cette fonction est croissante ; sa limite en $+\infty$ est 1.

Qu'est-ce que la vieillesse ? C'est d'abord perdre la curiosité.
François Mitterrand

Tableau de variations

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	1

b. Montrons que l'équation $f(x) = 0{,}95$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}^+$, et que cette solution est comprise entre 6,29 et 6,3

Scanné avec CamScanner

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc elle définit une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $[0; 1]$. $0{,}95 \in [0; 1]$, de plus $f(6{,}29) < 0{,}95$ et $f(6{,}3) > 0{,}95$, donc l'équation $f(x) = 0{,}95$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}^+$, et que cette solution est comprise entre 6,29 et 6,3

c. Déduisons le nombre minimum de personnes à interroger

Il est nécessaire d'interroger un minimum de 63 personnes (car $a = \frac{n}{10}$) pour que la probabilité que trois personnes d'entre elles au moins répondent soit supérieure à 0,95.

Corrigé 38

Partie A

1/ La famille A a 5 choix de même que la famille B, il y a 25 tirages possibles.

2/ Si on appelle (a ;b) un tirage, il y a 5 choix possibles pour a et si on veut le même pour b, il n'y a qu'un choix, soit 5.1=5. La probabilité est donc $p = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

3/ Soit X le nombre de jours où les deux familles font le même circuit, X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{5}$; elles ne se trouveront jamais sur le même circuit si X = 0 : $P(X = 0) = (1-p)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$

4/ La probabilité de se trouver au moins une fois sur le même circuit est : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n$

$P(X \geq 1) \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n \geq 0{,}9$

$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^n \leq 0{,}1$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{ln0{,}1}{ln\left(\frac{4}{5}\right)} \cong 10{,}32$. On déduit que $n = 11$.

Partie B

$P(E) = \frac{1}{5}$; $P_E(F) = \frac{1}{4}$; $P(F \cap E) = P(E) \times P_E(F) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

Pour $P_{\overline{E}}(F)$, comme les deux familles ont toutes les deux éliminé un circuit différent, elles ne peuvent se retrouver que sur les trois,

donc $P_{\overline{E}}(F) = \frac{1}{3}$; on tire $P(F \cap \overline{E}) = P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}(F)$, d'où $P(F \cap \overline{E}) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$; $P(F) = P(F \cap E) + P(F \cap \overline{E})$ soit $P(F) = \frac{1}{20} + \frac{4}{15} = \frac{19}{60}$.

Corrigé 39

1/ a. Pour avoir dix boules de même couleur dans chaque urne il faut avoir 10 noires dans A et 10 Blanches dans B ou le contraire. Le nombre de répartitions est de C_{20}^{10}, le nombre de choix permettant 10 noires dans A et 10 blanches dans B est $C_{10}^{10} \times C_{10}^{10} = 1$, la probabilité est donc :

$p_1 = 2 \times \frac{1}{C_{20}^{10}} = \frac{1}{92378} \cong 10^{-5}$.

b. 5 boules blanches et 5 boules noires dans A : $C_{10}^5 \times C_{10}^5$, d'où la probabilité $p_2 = \frac{C_{10}^5 \times C_{10}^5}{C_{20}^{10}} \cong 0{,}34$.

2/ a. $x = 6$: il faut tirer une blanche de A et la mettre dans B puis tirer une blanche de B et la mettre dans A, soit $\frac{6}{10} \times \frac{5}{11}$ ou bien tirer une noire de A et la mettre dans B puis tirer une noire de B et la mettre dans A, soit $\frac{4}{10} \times \frac{7}{11}$; au total cela fait

$p(M) = \frac{30}{110} + \frac{28}{110} = \frac{58}{110}$ avec $x = 6$

b. Même raisonnement :

$p(M) = \frac{x}{10} \times \frac{10-x+1}{11} + \frac{10-x}{10} \times \frac{x+1}{11}$

$p(M) = \frac{1}{110}(11x - x^2 + 9x - x^2 + 10)$

$p(M) = \frac{1}{55}(-x^2 + 10x + 5)$

c. On veut savoir quand $p(M) \geq 1 - p(M)$

$p(M) \geq 1 - p(M) \Leftrightarrow p(M) \geq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -x^2 + 10x + 5 \geq \frac{55}{2}$

$\Leftrightarrow -x^2 + 10x - \frac{45}{2} \geq 0$

$\Leftrightarrow 3{,}42 \leq x \leq 6{,}58$ après résolution.

Il faut donc qu'il y ait 4, 5 ou 6 boules blanches dans l'urne A.

Scanné avec CamScanner

Corrigé 40

1/ Chaque variable X_i est l'indicatrice de l'évènement A : Claude est contrôlé ; on a : $P(X_i = 1) = P(A) = p$ et $P(X_i = 0) = P(\overline{A}) = 1 - p$

La somme de toutes ces variables aléatoires donne une loi binomiale de paramètres n = 40 et p.

2/ $p = \frac{1}{20}$

a. D'après le cours E(X) = $np = \frac{40}{20} = 2$.

b. $P(X = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{20^k} \left(\frac{19}{20}\right)^{n-k}$, d'où $P(X = 0) = \left(\frac{19}{20}\right)^{40}$,

$P(X = 1) = 40 \times \frac{1}{20} \left(\frac{19}{20}\right)^{39} = 2\left(\frac{19}{20}\right)^{39}$,

$P(X = 2) = \frac{40\times39}{2} \times \frac{1}{20^2} \left(\frac{19}{20}\right)^{38} = \frac{39}{20}\left(\frac{19}{20}\right)^{38}$

c. On cherche $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$,

donc $P(X \leq 2) = \left(\frac{19}{20}\right)^{40} + 2\left(\frac{19}{20}\right)^{39} + \frac{39}{20}\left(\frac{19}{20}\right)^{38} \cong 0{,}6767$.

3/ Z_i = gain algébrique réalisé par le fraudeur :

Claude fraude 40 fois un ticket à 10 €, il gagne donc 400 € ; s'il est contrôlé X fois, il perd 100X, d'où son « gain » est Z = 400 – 100X.

Z suit évidemment la même loi que X ; pour $p = \frac{1}{5}$ et n = 40, on a E(X) = np = 8 d'où E(Z) = 400 – 100E(X), donc E(Z) = 400 – 800 = –400.

4/ a. On reprend ce qui a été fait précédemment :

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$, donc $P(X \leq 2) = (1-p)^{40} + 40p(1-p)^{39} + \frac{40\times39}{2}p^2(1-p)^{38}$

d'où en mettant $(1-p)^{38}$ en facteur :

$P(X \leq 2) = (1-p)^{38}[(1-p)^2 + 40p(1-p) + 780p^2]$

$P(X \leq 2) = (1-p)^{38}(1 - 2p + p^2 + 40p - 40p^2 + 780p^2)$

$P(X \leq 2) = (1-p)^{38}(1 - 38p + 741p^2)$

b. $f(x) = (1-x)^{38}(741x^2 + 38x + 1)$

$f'(x) = -38(1-x)^{37}(741x^2 + 38x + 1) + (1-x)^{38}(1482x + 38)$

$f'(x) = (1-x)^{37}(-28158x^2 - 1444x - 38 + 1482x + 38 - 1482x^2 - 38x)$

$f'(x) = -29640x^2(1-x)^{37}$

f' est bien négative sur $]0\,;\,1[$, donc f est strictement décroissante sur $]0\,;\,1[$. Comme $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$, il existe un unique réel x_0 appartenant à l'intervalle $]0\,;\,1[$ tel que $f(x_0) = 0{,}01$. A la calculette on a $f(0{,}19) \cong 0{,}0116$ et $f(0{,}20) \cong 0{,}0079$, d'où $\frac{19}{100} < x_0 < \frac{20}{100}$ et n = 19.

c. En fait on cherche $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2)$ et on veut que cette probabilité soit supérieure à 0,99.

$P(X \geq 3) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - P(X \leq 2) \geq 0{,}99$

$\Leftrightarrow P(X \leq 2) \leq 0{,}01$, d'où avec ce qu'on a fait précédemment: $p \geq 0{,}19$. Pratiquement, cela signifie qu'il faut contrôler un passager sur 5 environ (et dans ce cas le « gain » de Claude est de −400 €

Scanné avec CamScanner

TABLE DES MATIERES

1 **AVANT-PROPOS** 3

2 **NOMBRES COMPLEXES** 5

2.1 RÉSUMÉ DE COURS 5

2.1.1 EXERCICES 15

2.1.2 CORRIGÉS DES EXERCICES 41

3 **INTÉGRATION** 124

3.1 RÉSUMÉ DE COURS 124

3.1.1 EXERCICES 129

3.1.2 CORRIGÉS DES EXERCICES 152

4 **EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES** 225

4.1 RÉSUMÉ DE COURS 225

4.1.1 EXERCICES 229

4.1.2 CORRIGÉS DES EXERCICES 251

5 **PROBABILITÉS** 291

5.1 RÉSUMÉ DE COURS 291

5.1.1 EXERCICES 297

5.1.2 CORRIGÉS DES EXERCICES 334

Scanné avec CamScanner

MATHÉMATIQUES
COLLECTION ÉZO

- Nombres complexes
- Intégration
- Equations différentielles
- Probabilités

Tle S

SUJETS & CORRIGÉS - SUJETS DU BAC

LE RECUEIL DES FUTURS SUJETS DU BAC

RÉSUMÉS DE COURS

Edition 2021

TOME 1

AGBOKOU K. Christian

Tél.: +228 **90 87 44 10 / 98 52 37 50**

Editions CICERI

BUTODRA OL. 7267

Scanné avec CamScanner