

Niveau T^{le}

Éric Dubon
Francisco del Rey

Mathématiques d'excellence

Cours pour lycéens très motivés



Mathématiques d'excellence

Cours pour lycéens très motivés

Niveau T^{le}

Éric Dubon
Francisco del Rey



Avant-propos

Sans technique un don n'est rien
qu'une sale manie.
Georges Brassens.

Le présent ouvrage s'adresse en particulier aux élèves de Terminale (avec options maths complémentaires ou maths expertes) afin qu'ils puissent acquérir les bases nécessaires pour le cycle Terminal.

Nous partons du constat qu'au cours de ces 30 dernières années les différentes réformes éducatives ont fait que le programme de mathématiques promulgué aux élèves a beaucoup souffert tant dans son contenu que dans la façon de l'enseigner.

Le changement de paradigme a fait qu'une grande partie des étudiants entrant, à l'heure actuelle, dans le Supérieur manquent sérieusement de connaissances et d'outils afin de réussir leur insertion dans le Post-Bac.

Viennent alors soit de nombreux abandons soit une désaffection importante et dangereuse à long terme pour les études scientifiques en général et pour les mathématiques en particulier.

C'est pour ces raisons que nous avons souhaité écrire ces trois livres, proposer des infrastructures, afin que le lecteur puisse apprendre ou ré-apprendre les mathématiques élémentaires. Nous avons ainsi souhaité proposer un projet alternatif aux programmes de mathématiques des lycées et voilà pourquoi les trois tomes, qu'il faut aborder comme un tout, ne suivent donc pas à la lettre le programme officiel des classes de lycées et encore moins l'esprit.

Même si la plupart des objets mathématiques sont entièrement définis (ou redéfinis), le lecteur est supposé familier avec les notions de base et le vocabulaire de la géométrie de collège et une certaine aisance avec le calcul algébrique.

Nous avons pris le parti d'accélérer l'accès à l'analyse afin d'obtenir rapidement des résultats intéressants. Par exemple, les variations des polynômes du second degré furent étudiées dans le livre de Première à partir des dérivées alors qu'un traitement plus élémentaire et purement algébrique est possible (et répandu). Ce parti pris est assumé.

Pour les mêmes raisons, l'intégrale de Kurzweil-Henstock a été choisie dans ce cours de Terminale pour arriver le plus rapidement possible au théorème fondamental de l'analyse.

Bien que ce livre se veuille avant tout destiné aux élèves de Terminale (avec options maths complémentaires ou maths expertes) mais aussi à tout curieux désireux d'apprendre de « belles » mathématiques, il servira aussi à ceux qui sont intéressés par l'enseignement. C'est ainsi que ces trois livres peuvent être lus tels qu'ils sont présentés mais ils peuvent aussi être abordés suivant un certain ordre en fonction du but cherché. On peut ainsi regrouper les chapitres par thèmes : algèbre, géométrie, analyse et probabilité que nous résumons dans ce tableau :

	cours de seconde	cours de première	cours de terminale
Algèbre :	3 - 5 - 7	5 - 9 - 13	2
Géométrie :	6 - 11	6 - 7 - 8	1 - 7 - 8
Analyse :	9 - 10	1 - 2 - 3 - 4 - 12	3 - 4 - 5 - 6 - 9
Probabilités :	4 - 8 - 12	10 - 11	

Enfin nous avons pris le parti de ne pas développer l'histoire des mathématiques dans ces livres. Néanmoins, il nous semble plus qu'important de savoir à quelle époque les concepts présentés dans cet ouvrage ont pu voir le jour et quels mathématiciens en sont à l'origine.

Nous pensons que tout étudiant en mathématiques – tant au secondaire que dans le supérieur – doit acquérir un peu de l'histoire de cette science.

Pour cela nous vous proposons une liste non exhaustive de livres :

Hauchecorne Bertrand, Suratteau Daniel. *Des mathématiciens de A à Z* - 3^e édition entièrement refondue. Ellipses 2008.

Thirion Maurice. *Les mathématiques et le réel*. Ellipses 1999.

Nous terminons par quelques remarques pratiques.



Ce panneau signale un risque de dérapage fréquemment observé chez les lecteurs un peu rapides.

Le carré blanc à la fin de la dernière ligne d'une démonstration signale... la fin de la démonstration, que les auteurs n'iront pas plus loin ! C'est en somme une abréviation pour « la proposition en résulte » ou « ce qu'il fallait démontrer ». Il se présente sous cette forme : \square

Enfin, une place a été laissée à la programmation et notre choix a porté sur le langage **python** car c'est celui qui est le plus utilisé dans les lycées et dans le Supérieur.

Nous ne pouvons conclure cet avant-propos sans remercier Jean-Pierre Demailly pour son soutien et son apport. La rédaction de l'intégrale de Kurzweil-Henstock est la sienne. Nous sommes redevables à Emmanuel Vieillard-Baron car le chapitre sur les coniques et une bonne partie de l'arithmétique lui doivent beaucoup ainsi que son site « les mathématiques.net » qui fut une bonne source d'inspiration. Merci à Loïc Terrier pour ses graphiques et ses exercices. Merci aussi à Clémence Labrousse et à Philippe Colliard pour un soutien constant et précieux.

Table des matières

1	Barycentres	1
1.1	Définitions et premières propriétés	2
1.2	Propriétés du barycentre	5
1.3	Fonction scalaire de Leibniz. Lignes de niveau	7
1.4	Exercices	10
1.5	Solutions	14
1.6	Travaux dirigés	18
2	Arithmétique	23
2.1	Relation de divisibilité, division euclidienne	24
2.2	PGCD, théorèmes d'Euclide et de Bézout	29
2.3	Nombres premiers	37
2.4	Cryptage RSA	41
2.5	Résidus quadratiques	44
2.6	Exercices	51
2.7	Solutions	66
2.8	Problèmes	86
3	Intégration : théorie élémentaire	99
3.1	Sommes de Riemann	100
3.2	Définition de l'intégrale d'une fonction	103
3.3	Propriétés élémentaires de l'intégrale	109
3.4	Le théorème fondamental de l'analyse	111
3.5	Méthodes de calcul des primitives et des intégrales	114
3.6	Calcul d'aires	117
3.7	Intégrabilité de certaines fonctions	118
3.8	Quiz	125
3.9	Exercices : Primitives	129
3.10	Solutions	130
3.11	Exercices : Intégrales	133
3.12	Solutions	138
3.13	Problèmes	149
3.14	Travaux dirigés	155
4	Fonctions convexes	157

4.1	Définition	158
4.2	Inégalités de convexité	159
4.3	Fonctions convexes dérivables	163
4.4	Exemple	165
4.5	Quiz	165
4.6	Exercices	166
4.7	Solutions	168
4.8	Problèmes	172
4.9	Corrections	174
5	Courbes et limites complexes	183
5.1	Limites des suites à termes complexes	183
5.2	Limites de fonctions à valeurs complexes	186
5.3	Dérivées de fonctions à valeurs complexes	187
5.4	Courbes planes	189
5.5	Travaux dirigés	193
5.6	Exercices	195
5.7	Solutions	196
6	Exponentielle et logarithme	203
6.1	Une nouvelle fonction	204
6.2	Propriétés	207
6.3	Logarithme népérien	211
6.4	Retour vers l'intégration	215
6.5	Les autres fonctions exponentielles	219
6.6	Exponentielle complexe	223
6.7	Vrai ou Faux?	231
6.8	Exercices	233
6.9	Solutions	245
6.10	Travaux dirigés	273
6.11	Problèmes	278
7	Triangles semblables	301
7.1	Similitudes directes	302
7.2	Similitudes indirectes	307
7.3	Caractérisation des similitudes	311
7.4	Cas de similitude des triangles	313
7.5	Cas d'égalité des triangles	315
7.6	Exercices	317
7.7	Solutions	333

8	Coniques	361
8.1	Définitions et premières propriétés	362
8.2	Étude de la parabole : $e = 1$	364
8.3	Étude de l'ellipse : $0 < e < 1$	367
8.4	Étude de l'hyperbole : $1 < e$	372
8.5	Définition bifocale de l'ellipse et de l'hyperbole.	377
8.6	Courbes algébriques dans le plan	379
8.7	Intersection d'un cône et d'un plan	384
8.8	Exercices.	386
8.9	Solutions.	398
9	Équations différentielles	431
9.1	Définitions et premières propriétés	432
9.2	Équations différentielles du premier ordre homogènes : $y' - ay = 0$	432
9.3	Équation différentielle $ay' + by + cy = 0$ avec $a \neq 0$	433
9.4	Exercices.	439
9.5	Solutions.	441
9.6	Problème.	446
9.7	Corrigé	447
9.8	Travaux dirigés.	449
A	Principes des dénombrements	457
A.1	Cardinaux et bijections	458
A.2	Opérations sur les ensembles finis.	463
B	Fonctions trigonométriques	467
B.1	Enroulement complexe.	468
B.2	Nouvelles définitions	468
B.3	Équation fonctionnelle.	470
B.4	Dérivabilité.	472
B.5	Le cercle trigonométrique	473
B.6	Le retour du sinus et du cosinus.	474
	Table des matières du cours de seconde	477
	Table des matières du cours de première	481
	Index	485

Chapitre 1

Barycentres

Sommaire

1.1	Définitions et premières propriétés	2
1.2	Propriétés du barycentre	5
1.3	Fonction scalaire de Leibniz. Lignes de niveau	7
1.4	Exercices	10
1.5	Solutions	14
1.6	Travaux dirigés	18

1.1 Définitions et premières propriétés

1.1.1 Fonction vectorielle de Leibniz

On appelle **point pondéré** ou **point massif**, tout couple (A, α) où A est un point du plan ou de l'espace et α est un réel.

Soit un ensemble de points massifs $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$. On appelle **fonction vectorielle de Leibniz** la fonction qui à tout point M du plan ou de l'espace associe le vecteur \vec{V}_M noté aussi $\overline{f(M)}$ telle que

$$\vec{V}_M = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$$

Remarque 1.

Cherchons s'il existe des points M tels que $\vec{V}_M = \vec{0}$.

Nous choisissons un point O et par la règle de Chasles on a :

$$\begin{aligned} \vec{V}_M &= \alpha_1 (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_1}) + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_n}) \\ &= (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MO} + \alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i} \end{aligned}$$

Ainsi $\vec{V}_M = \vec{0}$ équivaut à $\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \overrightarrow{MO} + \overline{f(0)} = \vec{0}$.

Nous avons alors deux cas :

1. Si $\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) = 0$ alors
 si $\overline{f(0)} = \vec{0}$ tout point M est solution.
 si $\overline{f(0)} \neq \vec{0}$ il n'y a pas de solution.
2. Si $\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \neq 0$ alors $\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n} = (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{OM}$ et ainsi il existe une solution unique qui est un point M vérifiant :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$$

1.1. DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Définition 1.

Étant donné un système de points pondérés $\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$ tels que $\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) \neq 0$, il existe, alors, un unique point, noté G , du plan ou de l'espace tel que :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

déterminé par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}.$$

Ce point G se nomme **barycentre** de ce système de points pondérés.

1.1.2 Réduction de la fonction vectorielle de Leibniz

Nous avons vu que si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ alors

$$\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}.$$

Maintenant si on place le point O en G nous obtenons :

$$\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \overrightarrow{MG}$$

Autrement dit la somme de Leibniz peut être réduite :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MG}$$

Remarque 2.

Dans le cas où tous les coefficients sont égaux, le point G s'appelle **isobarycentre** des n points. Par exemple, l'isobarycentre de deux points du plan A et B est le milieu du segment $[AB]$. De même, l'isobarycentre de trois points du plan A, B, C non alignés est le centre de gravité du triangle ABC .

Exemple 1

Supposons que l'on nous donne deux points pondérés (A, α) et (B, β) avec $\alpha + \beta \neq 0$.

Nous avons alors $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ ce qui donne grâce à la relation de Chasles $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$ autrement dit après avoir factorisé :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$$

Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AG} sont donc colinéaires ce qui signifie que les points A, B et G sont alignés.

Exercice 1.

Construire le barycentre G des points pondérés $(A, 1), (B, 1), (C, -1)$.

Solution 1

Nous avons $\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}}{1 + 1 - 1} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

Remarque 3.

Dire que G est le barycentre de $(A, 1), (B, 1), (C, -1)$ est équivalent à dire que $AGBC$ est un parallélogramme.

1.1.3 Coordonnées du barycentre

Grâce à la formule vue précédemment $\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$ nous pouvons obtenir les coordonnées du

barycentre G :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}; \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}.$$

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Si on appelle z_1, z_2, \dots, z_n les affixes respectives des points A_1, A_2, \dots, A_n , alors l'affixe z_G du barycentre G du système pondéré $\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$ est

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}.$$

1.2 Propriétés du barycentre

1. Le barycentre ne change pas si on modifie l'ordre des points.
2. Le barycentre ne change pas si on multiplie les poids des points par un même réel k non nul.
3. Si les points A_1, A_2, \dots, A_n sont alignés sur une même droite alors G est un point de cette droite.
4. Si les points A_1, \dots, A_n sont coplanaires alors G appartient aussi à ce plan.

Théorème 1 (Barycentre partiel)

Dans la construction du barycentre de n points pondérés, on peut remplacer un certain nombre de ces points par leur barycentre affecté de la somme des coefficients des points qu'il remplace.

Démonstration 1

Soit le système $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$ avec $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ avec G barycentre de ces points. On a donc :

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \dots + \alpha_p \overrightarrow{GA_p} + \alpha_{p+1} \overrightarrow{GA_{p+1}} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}. \quad (1.1)$$

Le barycentre étant indépendant de l'ordre des points, on peut donc démontrer le théorème pour les p premiers points.

Soit I le barycentre de $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_p, \alpha_p)$ avec $\alpha_1 + \dots + \alpha_p \neq 0$, on a alors :

$$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \dots + \alpha_p \overrightarrow{GA_p} = (\alpha_1 + \dots + \alpha_p) \overrightarrow{GI}.$$

Si nous reportons alors cette égalité dans 1.1, nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i \overrightarrow{GI} + \alpha_{p+1} \overrightarrow{GA_{p+1}} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

Ceci signifie donc que G est le barycentre des points pondérés

$$(I, \sum_{i=1}^p \alpha_i), (A_{p+1}, \alpha_{p+1}), \dots, (A_n, \alpha_n).$$

□

Exercice 2.

1. Soient $ABCD$ un tétraèdre et P, Q, R des points tels que $ABCQ, ABDP, BDCR$ sont des parallélogrammes.

Montrer que les droites $(CP), (DQ), (AR)$ sont concourantes en G barycentre de $\{(A, 1), (B, -1), (C, 1), (D, 1)\}$.

2. Démontrer la propriété suivante :

Théorème 2

Dans un tétraèdre, les quatre segments joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée concourent en G isobarycentre de A, B, C, D , le point G étant situé aux trois-quarts de $\overrightarrow{AG_A}$ où G_A est le centre de gravité du triangle BCD .

De plus, les trois segments joignant les milieux de deux arêtes opposées ont pour milieu le point G .

Solution 2

1. Nous avons $\overrightarrow{RB} = \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{RD}$ donc $-\overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{RD} = \vec{0}$. Nous avons alors R barycentre de $(B, -1), (C, 1)$ et $(D, 1)$ et ainsi G est le barycentre de $(A, 1)$ et $(R, 1)$ ce qui implique que c'est un point de (AR) et grâce aux poids nous concluons que G est le milieu de $[AR]$.

De plus, comme nous avons $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PD}$ alors nous avons $-\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$. Cette égalité nous dit que P est le barycentre de $(B, -1), (A, 1)$ et $(D, 1)$ et donc que G est le barycentre de $(P, 1), (C, 1)$ ce qui, par le même raisonnement que précédemment nous permet de conclure que G est le milieu de $[PC]$.

Par un raisonnement analogue à ce que nous venons de faire mais cette fois-ci avec le parallélogramme $ABCQ$ nous obtenons G milieu de $[QD]$.

Finalement G est bien le point d'intersection des trois droites $(AR), (DQ)$ et (CP) .

2. Soit G l'isobarycentre des sommets A, B, C et D (autrement dit le centre de gravité du tétraèdre). Autrement dit nous avons :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

Soit I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$ (arêtes opposées).

Le point G est aussi le barycentre de $(I, 2)$ et $(J, 2)$ ce qui implique que G est le milieu de $[IJ]$. De même, nous avons G milieu des segments $[KN]$ et $[LM]$.

Soit G_A le centre de gravité de BCD (autrement dit isobarycentre de B, C, D) alors G est aussi le barycentre de $(A, 1), (G_A, 3)$ donc $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG_A}$. Ainsi G est un point de (AG_A) .

Par le même raisonnement nous obtenons $\overrightarrow{BG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BG_B}, \overrightarrow{CG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CG_C}, \overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DG_D}$.

1.3 Fonction scalaire de Leibniz. Lignes de niveau

On considère un système de n points pondérés $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$. On appelle **fonction scalaire de Leibniz** (associée à ce système) la fonction ϕ qui à chaque point M du plan associe le réel :

$$\phi(M) = \alpha_1 M A_1^2 + \dots + \alpha_n M A_n^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i M A_i^2.$$

1.3.1 Ligne de niveau $\sum_{i=1}^n \alpha_i M A_i^2 = k$

Le réel k étant donné, il s'agit de donner l'ensemble des points M du plan tels que $\phi(M) = k$. Cet ensemble que l'on a notera (E) s'appelle **ligne de niveau k** de la fonction ϕ .

Procédé pour déterminer (E) .

Premier cas : si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$.

On désigne, alors, par G le barycentre du système $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$ ce qui nous donne

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}.$$

Ainsi pour tout point M du plan, par la relation de Chasles, on a :

$$\phi(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i M A_i^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i})^2.$$

Puis par la formule des identités remarquables et le produit scalaire, on obtient :

$$\phi(M) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) M G^2 + \sum_{i=1}^n 2\alpha_i \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA_i} + \sum_{i=1}^n \alpha_i G A_i^2.$$

$$\text{Or, } \sum_{i=1}^n 2\alpha_i \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA_i} = 2\overrightarrow{MG} \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = 0 \text{ car } \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}.$$

En conclusion, pour tout point M du plan,

$$\phi(M) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) M G^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i}^2 = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) M G^2 + \phi(G).$$

Le réel $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i}^2$ est imposé par les données de l'énoncé, on le notera K . Ainsi nous obtenons l'équivalence suivante :

$$\phi(M) = k \Leftrightarrow M G^2 = \frac{k - K}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$$

Si nous posons $\frac{k - K}{n} = K'$ alors :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i$$

$$\phi(M) = k \Leftrightarrow GM^2 = K'.$$

Ce qui mène à la discussion suivante :

Si $K' < 0$ alors (E) est l'ensemble vide.

Si $K' = 0$ alors (E) se réduit au point G .

Si $K' > 0$ alors (E) est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{K'}$.

Remarque 4.

Si on constate qu'un certain point $A \neq G$ est un point de la ligne de niveau k de ϕ , alors on peut affirmer sans autre calcul que cette ligne de niveau est le cercle de centre G et de rayon GA .

Exercice 3.

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que

$$AB = BC = a.$$

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 5a^2.$$

Solution 3

Soit G le barycentre de $(A, 2), (B, 1), (C, 1)$. Soit I le milieu de $[BC]$ on a donc $(I, 2)$. Ainsi G est le barycentre de $(A, 2), (I, 2)$ autrement dit G est le milieu de $[AI]$.

Commençons tout d'abord par le membre de gauche de l'égalité, nous avons :

$$\begin{aligned} 2MA^2 + MB^2 + MC^2 &= 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 4MG^2 + 2GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}). \end{aligned}$$

Le fait que G soit barycentre nous donne $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Ainsi $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4MG^2 + 2GA^2 + GB^2 + GC^2 = 5a^2$.

Le fait que ABC soit un triangle rectangle isocèle donc par le théorème de Pythagore nous obtenons $GA = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ et donc $2GA^2 = \frac{a^2}{4}$.

Nous avons $AI = IB$ et G milieu de $[AI]$ donc $GB^2 = (\frac{a\sqrt{2}}{4})^2 + (\frac{a\sqrt{2}}{4})^2 = \frac{5a^2}{8}$. Comme, de plus, $GB = GC$ alors $GB^2 = GC^2$.

$$\text{Finalement } 2GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{5a^2}{4} = \frac{3a^2}{2}.$$

Ainsi l'égalité $4MG^2 + 2GA^2 + GB^2 + GC^2 = 5a^2$ nous donne, en tenant compte du résultat précédent.

$$4MG^2 = 5a^2 - \frac{3a^2}{2} \text{ ce qui permet de conclure que } MG^2 = \frac{7a^2}{8}.$$

Finalement l'ensemble des points vérifiant $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 5a^2$ est le cercle de centre G et de rayon $\frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Deuxième cas : si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$.

$$\text{Transformation de } \phi(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i M \Lambda_i^2.$$

Soit O un point quelconque du plan.

$$\begin{aligned} \phi(M) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{O\Lambda_i})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{O\Lambda_i} + \overrightarrow{O\Lambda_i}^2) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MO}^2}_{=0} + 2\overrightarrow{MO} \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{O\Lambda_i} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{O\Lambda_i}^2 \end{aligned}$$

Or $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{O\Lambda_i}^2$ est un réel fixé par les données de l'énoncé et $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{O\Lambda_i}$ est un vecteur \vec{v} fixé.

La ligne de niveau k de ϕ notée (E) est telle que

$$\phi(M) = k \text{ c'est-à-dire } 2\overrightarrow{MO} \cdot \vec{v} + \sum_{i=1}^n \alpha_i O \Lambda_i^2 = k$$

Si on pose $k' = \frac{k - \sum_{i=1}^n \alpha_i O \Lambda_i^2}{-2}$, on obtient alors $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{v} = k'$.

D'où la discussion suivante :

si $\vec{v} = \vec{0}$ et $k' \neq 0$ alors (E) est l'ensemble vide

si $\vec{v} = \vec{0}$ et $k' = 0$ alors (E) est tout le plan

si $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors posons $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$ et soit H la projection orthogonale de M sur (OA) . Nous avons, ainsi, l'équivalence suivante :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{v} = k' \iff \overrightarrow{OH} \times \overrightarrow{OA} = k' \iff \overrightarrow{OH} = \frac{k'}{OA}$$

Si on oriente, par exemple, l'axe comme \vec{v} alors $\overrightarrow{OA} = OA$ et $\overrightarrow{OH} = \frac{k'}{OA}$ ce qui permet de déterminer de façon explicite le point H sur (OA) .

Conclusion :

La ligne de niveau k de ϕ est la droite (Δ) passant par H est perpendiculaire à (OA) .

Remarque 5.

Si un point N est un point de l'ensemble, on peut dire directement que l'ensemble des points M est la droite passant par N et orthogonale à \vec{v} .

1.3.2 Ligne de niveau de l'application $f : M \mapsto \frac{MA}{MB}$

Il s'agit de trouver l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = k$ avec $k > 0$.

Si $k = 1$ alors $MA = MB$ d'où l'ensemble des points M est la médiatrice de $[AB]$.

Si $k \neq 1$ alors nous avons $MA = kMB$ ce qui est équivalent à dire que $MA^2 - k^2MB^2 = 0$. On retrouve alors le premier cas du paragraphe précédent et donc la ligne de niveau est un cercle.

Remarque 6.

On peut faire autrement.

On a $MA^2 - k^2MB^2 = 0 \Leftrightarrow (\vec{MA} - k\vec{MB})(\vec{MA} + k\vec{MB}) = 0$. Soit I barycentre de $\{(A, 1), (B, -k)\}$. $\vec{AI} = \frac{-k}{1-k}\vec{AB}$.

Soit J le barycentre de $\{(A, 1), (B, -k)\}$. $\vec{AJ} = \frac{k}{1+k}\vec{AB}$.

On obtient ainsi $\frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow (1-k)\vec{MI} \cdot (1+k)\vec{MJ} = 0$, autrement dit $\vec{MI} \cdot \vec{MJ} = 0$, donc l'ensemble des points M tels que $\frac{MA}{MB} = 1$ est un cercle de diamètre $[IJ]$.

1.4 Exercices

Exercice 4.

Soit $ABCD$ un quadrilatère qui n'est pas un parallélogramme. Soient I, J, K et L les milieux respectifs de $[AB], [BC], [CD]$, et $[DA]$. Soit G le point d'intersection de (IK) et (JL) .

Soient M et N les milieux respectifs des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

La droite (MN) s'appelle la droite de Newton du quadrilatère $ABCD$.

Démontrer qu'elle passe par G .

Exercice 5 (Ça balance pas mal).

Une marchande utilise une balance légèrement faussée : les deux bras de leviers ne sont pas exactement de la même longueur. N'étant pas malhonnête, elle pèse deux fois la marchandise : une fois dans le plateau de gauche, une fois dans le plateau de droite. Le poids facturé au client est la moyenne des deux poids obtenus.

Cette solution est-elle équitable ou quelqu'un est-il volé ?

Exercice 6 (Nouvelle-Calédonie, Mars 2005).**Partie A**

Étant donnés deux points distincts A_0 et B_0 d'une droite, on définit les points :

A_1 milieu du segment $[A_0B_0]$ et B_1 barycentre de $\{(A_0, 1) : (B_0, 2)\}$.

1. Placer les points A_1, B_1, A_2 et B_2 pour $A_0B_0 = 12$ cm.

Quelle conjecture peut-on faire sur les points A_n et B_n lorsque n devient très grand ?

2. On munit la droite (A_0B_0) du repère $(A_0; \vec{i})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{12} \overrightarrow{A_0B_0}$. Soit u_n et v_n les abscisses respectives des points A_n et B_n . Justifier que pour tout entier naturel n strictement positif, on a :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

Partie B

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 0, v_0 = 12, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

1. Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.
3. Dédire des deux questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.
4. On considère la suite (t_n) définie par $t_n = 2u_n + 3v_n$.
Montrer qu'elle est constante.

Partie C

À partir des résultats obtenus dans les parties A et B, préciser la limite des points A_n et B_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 7 (Cercles d'Apollonius).

Soit ABC un triangle non isocèle en C et, sur la parallèle en B à (AC) , les points C_1 et C_2 tels que $BC_1 = BC_2 = BC$. Démontrer que (CC_1) et (CC_2) sont sécantes avec (AB) en des points notés I et J . Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB}$ est le cercle de diamètre $[IJ]$.

Exercice 8 (Sept d'un coup).

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On désigne par I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes $[AB], [BC], [CD], [DA], [AC]$ et $[BD]$. On désigne par G_1, G_2, G_3 et G_4 les centres de gravité respectifs des triangles BCD, CDA, ABD et ABC .

Démontrer que les sept droites $(AG_1), (BG_2), (CG_3), (DG_4), (IK), (JL)$ et (MN) sont concourantes.

Exercice 9.

Soit $ABCD$ un tétraèdre tel que ABC, ABD et ACD soient trois triangles isocèles rectangles en A avec $AB = AC = AD = a$. On appelle A_1 le centre de gravité du triangle BCD .

- Montrer que la droite (AA_1) est orthogonale au plan (BCD) .
(On pourra par exemple calculer $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC}$).
- En exprimant de deux façons différentes le volume du tétraèdre $ABCD$, calculer la longueur du segment $[AA_1]$.
- On appelle G l'isobarycentre du tétraèdre $ABCD$ et I le milieu de $[BC]$.
 - Montrer que G appartient au segment $[AA_1]$ et déterminer la longueur AG .
 - Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = 2 \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

- Soit H le symétrique de A par rapport à G .
 - Démontrer que $4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$.
 - Démontrer l'égalité $HC^2 - HD^2 = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BA}$.
 - En déduire que $HC = HD$.

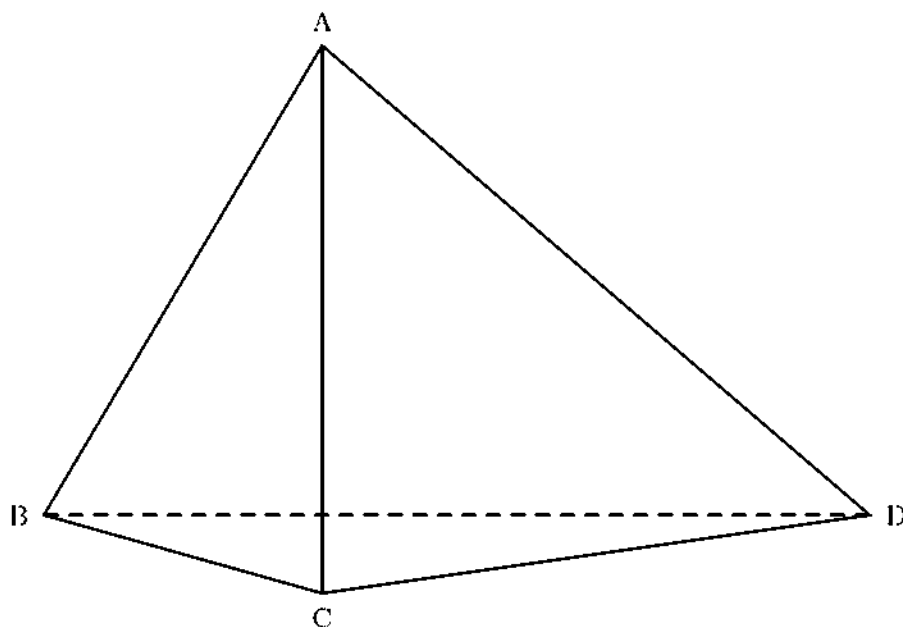
On rappelle que le volume d'une pyramide de hauteur h et d'aire de base associée b est

$$V = \frac{1}{3}bh.$$

Exercice 10.

On considère le tétraèdre ABCD ; on note I milieu du segment [AB] et J celui de [CD].

1. (a) Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés $\{(A, 1) : (B, 1) : (C, -1) : (D, 1)\}$.
Exprimez $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de \overrightarrow{CD} . Placez I, J et G_1 sur la figure (voir feuille annexe).
 - (b) Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés $\{(A, 1) : (B, 1) : (D, 2)\}$.
Démontrez que G_2 est le milieu du segment [ID]. Placez G_2 .
 - (c) Démontrez que IG_1DJ est un parallélogramme.
En déduire la position de G_2 par rapport aux points G_1 et J.
2. Soit m un réel. On note G_m le barycentre du système de points pondérés $\{(A, 1) : (B, 1) : (C, m-2) : (D, m)\}$.
 - (a) Précisez l'ensemble \mathcal{E} des valeurs de m pour lesquelles le barycentre G_m existe.
Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel m appartient à l'ensemble \mathcal{E} .
 - (b) Démontrez que G_m appartient au plan (ICD).
 - (c) Démontrez que le vecteur $m\overrightarrow{JG_m}$ est constant.
 - (d) En déduire l'ensemble \mathcal{F} des points G_m lorsque m décrit l'ensemble \mathcal{E} .



1.5 Solutions

Solution 4

Soit H le barycentre de $(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)$.

On sait que I est le barycentre de $(A, 1), (B, 1)$ et que K est le barycentre de $(C, 1), (D, 1)$.
 Donc H est le barycentre de $(I, 1), (K, 1)$ d'après le théorème 1. En particulier H appartient à la droite (IK) .

De même H est le barycentre de $(J, 1), (L, 1)$ et appartient à la droite (JL) .

Comme H est le point d'intersection de (IK) et (JL) , on a $G = H$.

De plus M est le barycentre de $(A, 1), (C, 1)$ et que N est le barycentre de $(B, 1), (D, 1)$.
 Donc G est le barycentre de $(M, 1), (N, 1)$ d'après le théorème 1. En particulier les points M, N et G sont alignés. On a même plus : G est le milieu de $[MN]$.

Solution 5 (Ça balance pas mal)

Soient L et ℓ les longueurs des fléaux, m la masse réelle, M_1 et M_2 les deux masses mesurées.

Les deux équilibres se traduisent par $\begin{cases} Lm = \ell M_1 \\ \ell m = LM_2 \end{cases}$. On exprime tout en fonction de m : $M_1 = \frac{Lm}{\ell}$ et $M_2 = \frac{\ell m}{L}$. D'où

$$m - \frac{M_1 + M_2}{2} = m \left(1 - \frac{L}{2\ell} - \frac{\ell}{2L} \right) = \frac{m}{2\ell L} (2\ell L - L^2 - \ell^2) = -\frac{m(L - \ell)^2}{2\ell L}.$$

Donc la masse réelle est toujours inférieure à la moyenne des masses mesurées.

Le client est donc toujours volé.

Solution 6 (Nouvelle-Calédonie, Mars 2005)

Partie A

1. Il semble que pour n assez grand les points A_n et B_n se rapprochent d'une même position limite.

2. On a $A_n = \text{milieu}[A_n B_n] \iff u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

D'autre part $B_{n+1} = \text{bar.}\{(A_n, 1); (B_n, 2)\} \iff v_{n+1} = \frac{1 \times u_n + 2 \times v_n}{1 + 2} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

Partie B

1. Soit $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{2u_n + 4v_n - 3u_n - 3v_n}{6} = \frac{1}{6}(v_n - u_n) = \frac{1}{6}w_n$.

La suite (w_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$. Or $w_0 = v_0 - u_0 = 12 - 0 = 12$, donc $w_n = 12 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n$. Tous les termes de la suite sont positifs et la raison étant comprise entre -1 et 1 , cette suite converge vers 0.

2. Calculons $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{-u_n + v_n}{2} = \frac{1}{2}w_n > 0$ d'après la question précédente. La suite (u_n) est donc croissante.

De même $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - v_n = \frac{u_n - v_n}{3} = -\frac{1}{3}w_n < 0$, d'après la question précédente.

3. D'après les deux questions précédentes les deux suites sont adjacentes car l'une est croissante, l'autre décroissante et la limite de leur différence est nulle. Elles convergent toutes les deux vers la même limite ℓ .

4. On a $t_{n+1} = 2u_{n+1} + 3v_{n+1} = u_n + v_n + u_n + 2v_n = 2u_n + 3v_n = t_n$. cette égalité vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (t_n) est constante. En particulier $t_n = t_0 = 2u_0 + 3v_0 = 3 \times 12 = 36$.

Partie C

$$\text{On a le système } \begin{cases} -u_n + v_n = 12 \times \frac{1}{6^n} \\ 2u_n + 3v_n = 36 \end{cases} \iff \begin{cases} -2u_n + 2v_n = 24 \times \frac{1}{6^n} \\ 2u_n + 3v_n = 36 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} u_n = +v_n - 12 \times \frac{1}{6^n} \\ 5v_n = 36 + 24 \times \frac{1}{6^n} \end{cases} \iff \begin{cases} u_n = +v_n - 12 \times \frac{1}{6^n} \\ v_n = \frac{36}{5} + \frac{24}{5} \times \frac{1}{6^n} \end{cases} \iff \begin{cases} u_n = \frac{36}{5} - \frac{36}{5} \times \frac{1}{6^n} \\ v_n = \frac{36}{5} + \frac{24}{5} \times \frac{1}{6^n} \end{cases}$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \frac{36}{5} = 7,2$.

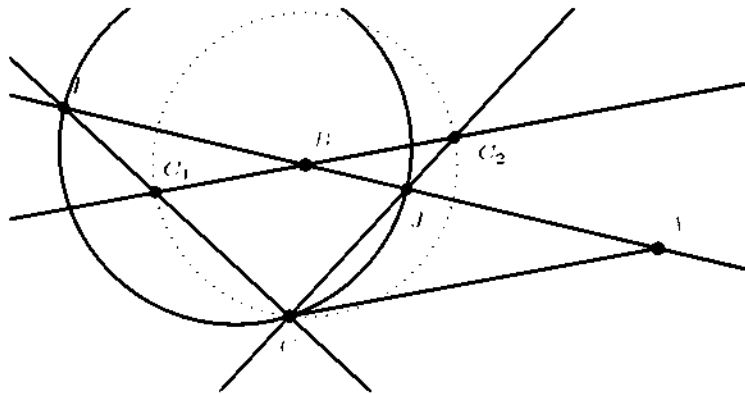
La position limite des points A_n et B_n quand n tend vers l'infini est donc le point d'abscisse 7,2.

Autre solution : On pose $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{U} := \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} := \begin{pmatrix} 12 \times \frac{1}{6^n} \\ 36 \end{pmatrix}$.

On a $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ d'après le théorème 7 page 582 du cours de première.

$$\text{Donc } \mathbf{U} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{36}{5} - \frac{36}{5} \times \frac{1}{6^n} \\ \frac{36}{5} + \frac{24}{5} \times \frac{1}{6^n} \end{pmatrix}.$$

Solution 7 (Cercles d'Apollonius)



Soit $k := \frac{CA}{CB}$. Puisque ABC n'est pas isocèle en C , on a $k \neq 1$. D'après le paragraphe 1.3.2, le lieu des points M est un cercle \mathcal{C} .

De plus, d'après le théorème de Thalès dans le triangle ACI , on a

$$k = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{BC_1} = \frac{AI}{BI}.$$

Donc $I \in \mathcal{C}$. De même Dans la configuration de Thalès-papillon,

$$k = \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{BC_2} = \frac{AJ}{BJ}.$$

Donc $J \in \mathcal{C}$.

Enfin on sait que la droite (AB) est un diamètre du cercle \mathcal{C} . Il en est donc de même de la droite (IJ) .
Donc \mathcal{C} est le cercle de diamètre $[IJ]$.

Solution 8 (Sept d'un coup)

On considère H l'isobarycentre de A, B, C et D . Le point H est le barycentre de $(A, 1)$ et $(G_1, 3)$ donc $H \in (AG_1)$, etc.

Solution 9

1. Par définition de A_1 centre de gravité du triangle BCD , donc isobarycentre des points B, C et D :

$$\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{A_1D} = \vec{0} \iff 3\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0} \iff \overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}).$$

$$\text{Calculons } \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) = \frac{-AC^2 + AD^2}{3} = 0, \text{ car } AC = AD.$$

Un calcul analogue montre que $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Conclusion : la droite (AA_1) orthogonale aux deux droites sécantes du plan (BCD) est orthogonale à ce plan.

2. La droite (AB) est perpendiculaire à (AC) et à (AD) , donc est perpendiculaire au plan (ACD) . Le volume du tétraèdre est donc égal à

$$V = AB \times S(ACD) = a \times \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{2}.$$

D'après la question précédente on peut également utiliser la hauteur AA_1 et la base (BCD) :

$$V = AA_1 \times S(BCD) = AA_1 \times \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2} \times a\sqrt{2} = AA_1 \times \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{On a donc } a \times \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{2} = AA_1 \times \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \iff AA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

3. (a) Le point G vérifie : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \iff 4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0} \iff \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

Or on a vu que $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$, donc $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1}$ qui signifie que G appartient à la droite (AA_1) (et même que G a pour abscisse $\frac{3}{4}$ si le repère est (A, A_1) .)

$$\text{On en déduit en prenant les normes que } AG = \frac{3}{4} \times \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

- (b) I est le milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$.

$$\text{D'autre part } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}.$$

$$\text{Donc } \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = 2\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| \iff 4MG = 4MI \iff MG = MI.$$

Conclusion : l'ensemble des points M cherchés est le plan médiateur du segment $[BC]$.

4. (a) Par définition de H : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GH} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

$$\text{Donc } 4\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \iff \overrightarrow{BA} = 4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}.$$

- (b) On a $HC^2 - HD^2 = (\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD})(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HD})$.

$$\text{Or } \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}, \text{ mais par définition du point } H,$$

$$\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{GA}.$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} = 4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} \text{ (d'après la question précédente).}$$

$$\text{D'autre part } \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{DC}.$$

$$\text{Conclusion : } HC^2 - HD^2 = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC}.$$

- (c) On a vu que $[BA]$ est hauteur pour la base (ACD) , donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$, donc $HC^2 - HD^2 = 0 \iff HC = HD$

Solution 10

1. (a) Pour tout point M on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MG_1}$.
si $M = I$ on a alors $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IG_1}$. Comme I est le milieu de $[AB]$ on a $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et, de plus, $-\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{CD}$ ce qui donne

$$\overrightarrow{IG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.$$

- (b) G_2 est le barycentre de $(A, 1), (B, 1)$ et $(D, 2)$, et donc, par associativité, G_2 est le barycentre de $(I, 2), (D, 2)$ car I est le milieu de $[AB]$.
Ainsi G_2 est l'isobarycentre donc le milieu de $[ID]$.
- (c) D'après 1.a), $\overrightarrow{IG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{JB}$ car J est le milieu de $[CD]$. Ainsi IG_1DJ est un parallélogramme.
Les diagonales de IG_1DJ se coupent donc en leur milieu, et, comme G_2 est le milieu de $[ID]$, G_1 est aussi le milieu de $[G_1J]$.
2. (a) G_m existe si et seulement si $1 + 1 + m - 2 + m = 2m \neq 0 \iff m \neq 0$. Autrement dit $\mathcal{E} = \mathbb{R}^*$.
- (b) G_m est le barycentre des points pondérés $(A, 1), (B, 1), (C, m - 2)$ et (D, m) , et donc, par associativité, G_m est le barycentre de $(I, 2), (C, m - 2)$ et (D, m) .
On en déduit que G_m appartient au plan (ICD) .
- (c) D'après la question précédente, G_m est le barycentre de $(I, 2), (C, m - 2)$ et (D, m) , et donc, pour tous points $M, m \in \mathcal{E}$,

$$2\overrightarrow{MI} + (m - 2)\overrightarrow{MC} + m\overrightarrow{MD} = 2m\overrightarrow{MG_m}$$

ce qui nous donne avec $M = J$,

$$2m\overrightarrow{JG_m} = 2\overrightarrow{JI} + (m - 2)\overrightarrow{JC} + m\overrightarrow{JM} = 2\overrightarrow{JI} + m(\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JM}) - 2\overrightarrow{JC}.$$

Sachant que J est le milieu de $[AB]$, on obtient donc $m\overrightarrow{JG_m} = \overrightarrow{JI} - \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{CI}$ est un vecteur constant indépendant de m .

- (d) D'après la question précédente, $\overrightarrow{JG_m} = \frac{1}{m}\overrightarrow{CI}$, avec $m \in \mathbb{R}^*$ ce qui donne $\frac{1}{m} \in \mathbb{R}^*$.

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{JG_m}$ et \overrightarrow{CI} sont colinéaires. L'ensemble \mathcal{F} est la droite parallèle à (CI) , privée de J et passant par J .

Comme G_1 et G_2 appartiennent aussi à cette droite et on en conclut que $\mathcal{F} = (G_1G_2) \setminus \{J\}$.

1.6 Travaux dirigés

Exercice 11 (Céviennes).

Soit ABC un triangle, u, v et w trois réels tels que $v + w \neq 0$, $w + u \neq 0$, $u + v \neq 0$, et $u + v + w \neq 0$.

On considère les trois points A' , B' et C' , appartenant aux côtés respectifs (BC) , (CA) et (AB) définis par :

- A' est le barycentre du système de points massifs $\{(B, v), (C, w)\}$,
- B' est le barycentre du système de points massifs $\{(A, u), (C, w)\}$,
- C' est le barycentre du système de points massifs $\{(A, u), (B, v)\}$,

ainsi que G est le barycentre du système de points massifs $\{(A, u), (B, v), (C, w)\}$.

Démontrer que les trois droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes en G .

Définition 2.

Trois droites issues des sommets d'un triangle et concourantes s'appellent des **céviennes** de ce triangle.

Solution 11 (Céviennes)

Par associativité du barycentre, G est le barycentre de $\{(A, u), (A', v + w)\}$, donc $G \in (AA')$. *Mutatis mutandis*, $G \in (BB')$ et $G \in (CC')$.

Exercice 12 (Aires et céviennes).

Soit M un point intérieur au triangle ABC . Montrer que M est barycentre des points A, B, C affectés de coefficients proportionnels aux aires des triangles MBC, MCA, MAB .

Solution 12 (Aires et céviennes)

Soit N l'intersection des droites (AM) et (BC) . Si M est le barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$, alors N est le barycentre de $(B, \beta), (C, \gamma)$. Les triangles NMB et NMC ont même hauteur issue de M : le quotient de leurs aires est donc : $\frac{NB}{NC} = \frac{\gamma}{\beta}$.

Il en est de même des triangles NAB et NAC . Donc :

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\text{aire } NAB}{\text{aire } NAC} = \frac{\text{aire } NMB}{\text{aire } NMC} = \frac{\text{aire } NAB - \text{aire } NMB}{\text{aire } NAC - \text{aire } NMC} = \frac{\text{aire } MAB}{\text{aire } MAC},$$

où l'on s'est servi une fois de plus du théorème 38 page 82 du cours de seconde.

On conclut à l'aide de l'exercice 11.

Exercice 13 (Propriété du centre du cercle inscrit dans un triangle).

On donne un triangle ABC et l'on pose $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

1. Démontrer que le barycentre du système de points massifs $\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$ est le centre I du cercle inscrit dans le triangle.
2. On se propose de démontrer l'égalité

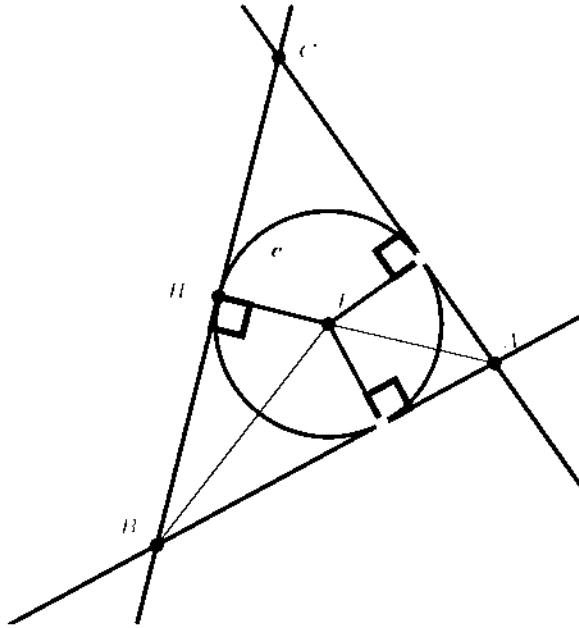
$$aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc.$$

Pour cela, on appliquera la fonction scalaire de Leibniz au système de points massifs précédent, en plaçant successivement le point M en A , B , C .

3. Trouver des formules analogues pour les centres des cercles ex-inscrits.

Solution 13 (Propriété du centre du cercle inscrit dans un triangle)

1.



Sur la figure ci-contre, on a

$$h := IJ = IK = IH.$$

Donc $\text{aire } AIB = \frac{ch}{2}$, $\text{aire } AIC = \frac{bh}{2}$ et $\text{aire } CIB = \frac{ah}{2}$.

D'après l'exercice précédent, I est le barycentre de $(A, a), (B, b), (C, c)$.

2. La formule de Leibniz s'écrit :

$$aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 = (a + b + c)MI^2 + aIA^2 + bIB^2 + cIC^2.$$

Posons $S := aIA^2 + bIB^2 + cIC^2$. Prenons M respectivement en A , B , C et multiplions les deux membres des relations obtenues respectivement par a , b , c . Nous obtenons :

$$\begin{aligned} abc(b + c) &= a(a + b + c)AI^2 + aS \\ abc(c + a) &= b(a + b + c)BI^2 + bS \\ abc(a + b) &= c(a + b + c)CI^2 + cS \end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre, il vient :

$$2abc(a + b + c) = 2(a + b + c)S.$$

D'où $S = abc$.

3. Pour le centre J du cercle ex-inscrit dans l'angle A , on trouverait de même :

$$aJA^2 - bJB^2 - cJC^2 = abc.$$

Exercice 14 (Orthocentre).

On donne un triangle ABC d'orthocentre H . Démontrer que H est le barycentre du système de points massifs $\{(A, \tan \widehat{A}), (B, \tan \widehat{B}), (C, \tan \widehat{C})\}$.

Solution 14 (Orthocentre)

On note A' la projection orthogonale de A sur (BC) .

Supposons d'abord \widehat{B} et \widehat{C} aigus. On a : $\frac{AA'}{BA'} = \tan \widehat{B}$ et $\frac{AA'}{CA'} = \tan \widehat{C}$. D'où $BA' \cdot \tan \widehat{B} = CA' \cdot \tan \widehat{C}$. Mais $A' \in [BC]$, on en déduit que :

$$\tan \widehat{B} \cdot \overrightarrow{BA'} + \tan \widehat{C} \cdot \overrightarrow{CA'} = \vec{0}.$$

c'est-à-dire : A' est le barycentre du système de points massifs $\{(B, \tan \widehat{B}), (C, \tan \widehat{C})\}$.

Le raisonnement est analogue si un des deux angles \widehat{B} ou \widehat{C} est obtus.

Dans tous les cas, on en déduit que H est le barycentre de $(A, \tan \widehat{A}), (B, \tan \widehat{B}), (C, \tan \widehat{C})$, à condition que $\tan \widehat{A} + \tan \widehat{B} + \tan \widehat{C} \neq 0$.

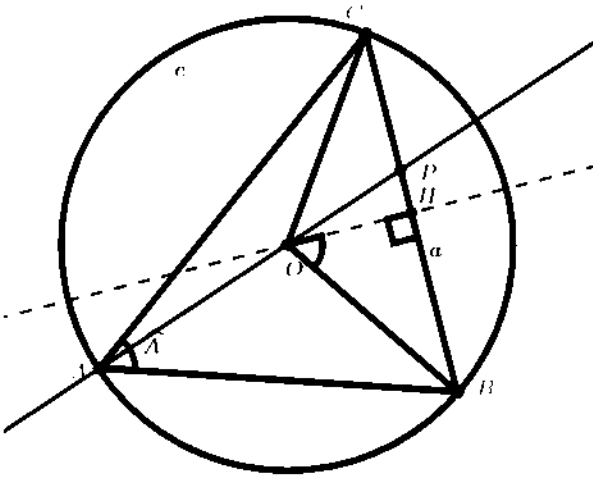
$$\text{Or } \tan(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) = \frac{\tan \widehat{A} + \tan \widehat{B} + \tan \widehat{C} - \tan \widehat{A} \cdot \tan \widehat{B} \cdot \tan \widehat{C}}{1 - \tan \widehat{A} \cdot \tan \widehat{B} - \tan \widehat{C} \cdot \tan \widehat{A} - \tan \widehat{B} \cdot \tan \widehat{C}}$$

Or $\tan(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) = \tan \pi = 0$. Donc $\tan \widehat{A} + \tan \widehat{B} + \tan \widehat{C} = \tan \widehat{A} \cdot \tan \widehat{B} \cdot \tan \widehat{C}$ ce qui exclut $\tan \widehat{A} + \tan \widehat{B} + \tan \widehat{C} = 0$.

Exercice 15 (Centre du cercle circonscrit).

On donne un triangle ABC et O le centre du cercle circonscrit à ABC . Démontrer que O est le barycentre du système de points massifs $\{(A, \sin(2\widehat{A})), (B, \sin(2\widehat{B})), (C, \sin(2\widehat{C}))\}$.

Solution 15 (Centre du cercle circonscrit)



Soit H le milieu de $[BC]$. La droite (OH) est bissectrice de \widehat{BOC} .

D'après le théorème de l'angle inscrit, les angles \widehat{A} et \widehat{BOH} sont égaux.

L'aire du triangle BOC égale

$$2 \times \frac{a \sin \widehat{A}}{2} = R \sin \widehat{A} \cos \widehat{A} = \frac{R}{2} \sin (2\widehat{A}),$$

en appelant R le rayon du cercle circonscrit.

D'après l'exercice 12, O est bien le barycentre de

$$\left\{ \left(A, \frac{R}{2} \sin (2\widehat{A}) \right), \left(B, \frac{R}{2} \sin (2\widehat{B}) \right), \left(C, \frac{R}{2} \sin (2\widehat{C}) \right) \right\}$$

donc par homogénéité, il est aussi celui de

$$\left\{ \left(A, \sin (2\widehat{A}) \right), \left(B, \sin (2\widehat{B}) \right), \left(C, \sin (2\widehat{C}) \right) \right\}.$$

Chapitre 2

Arithmétique

Sommaire

2.1	Relation de divisibilité, division euclidienne	24
2.2	PGCD, théorèmes d'Euclide et de Bézout	29
2.3	Nombres premiers	37
2.4	Cryptage RSA	41
2.5	Résidus quadratiques	44
2.6	Exercices	51
2.7	Solutions	66
2.8	Problèmes	86

« Le père Rouault vint apporter à Charles le paiement de sa jambe remise, soixante-quinze francs en pièces de quarante sous. »
Gustave FLAUBERT. *Madame Bovary*. 1857.

Pour bien aborder ce chapitre

L'arithmétique a toujours fasciné les hommes, les mathématiciens comme les profanes. Avec un peu de curiosité et d'observation, n'importe qui peut conjecturer des propriétés qui peuvent s'avérer ardues à démontrer. On peut par exemple contempler le tableau des derniers chiffres de i^j pour $0 \leq i \leq 9$ et $1 \leq j \leq 5$. Les lignes pour $j = 1$ et $j = 5$ sont identiques. Une explication viendra plus tard...

$j \setminus i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	4	9	6	5	6	9	4	1
3	1	8	7	4	5	6	3	2	9
4	1	6	1	6	5	6	1	6	1
5	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Par ailleurs, on peut s'émerveiller devant les nombres premiers, le mystère de leur répartition et la beauté gratuite de leur étude. Gratuite? Rien n'est moins sûr! La découverte d'un algorithme rapide de décomposition en facteurs premiers mettrait à mal bien des codes secrets et l'arithmétique est devenu un secteur d'étude stratégique.

L'arithmétique est une école de rigueur. Mais une fois les mécanismes acquis, ce chapitre devient une récréation.

2.1 Relation de divisibilité, division euclidienne

2.1.1 Relation de divisibilité

Définition 1 (Divisibilité).

Soient deux entiers relatifs $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. On dit que l'entier a **divise** l'entier b si et seulement si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $b = ka$.

Notation 1.

On notera $a \mid b$ (se lit « a divise b ») le fait que l'entier a divise l'entier b .

Remarque 1.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \mid 0;$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \mid n \implies n = 0;$$

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4, (a \mid b \text{ et } c \mid d) \implies ac \mid bd.$$

Théorème 1 (Propriétés de la divisibilité)

- La relation « divise » est réflexive : $\forall a \in \mathbb{Z}, a \mid a$.
- La relation « divise » est transitive : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3, (a \mid b \text{ et } b \mid c) \implies a \mid c$.
- On a $(a \mid b \text{ et } b \mid a) \iff (a = \pm b)$.

Démonstration 1

1. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Comme $a = 1 \times a$ il est clair que $a \mid a$.

2.

$$\begin{cases} a \mid b \\ b \mid c \end{cases} \implies \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, b = ka \\ \exists k' \in \mathbb{Z}, c = kb \end{cases} \implies c = kk'a \implies a \mid c$$

3. On a : $(a \mid b \text{ et } b \mid a) \implies (\exists (k, k') \in \mathbb{Z}^2 : b = ka \text{ et } a = k'b) \implies a = kk'a$. Il vient alors :

- si $a = 0$ alors $b = ka = 0$ et donc $a = b$.
- si $a \neq 0$, $kk' = 1$, comme k et k' sont des entiers, cette égalité n'est possible que si $k = k' = 1$ ou alors si $k = k' = -1$. On a finalement bien $a = \pm b$. \square

Réciproquement si $a = \pm b$, on a nécessairement $(a \mid b \text{ et } b \mid a)$.

Théorème 2

Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ et $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$(a \mid b \text{ et } a \mid c) \implies a \mid (k_1 b + k_2 c)$$

Démonstration 2

En effet :

$$(a \mid b \text{ et } a \mid c) \implies \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, b = ka \\ \exists k' \in \mathbb{Z}, c = ka \end{cases} \implies k_1 b + k_2 c = k_1 ka + k_2 k' a = (k_1 k + k_2 k') a \implies a \mid (k_1 b + k_2 c)$$

2.1.2 L'art d'accommoder les restes**Définition 2 (Congruence).**

Considérons un entier strictement positif $n \in \mathbb{N}^*$ et deux entiers $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. On dit que l'entier a est **congru** à l'entier b modulo n , et l'on note $a \equiv b \pmod{n}$ lorsque l'entier n divise l'entier $(b - a)$:

$$a \equiv b \pmod{n} \iff n \mid (b - a).$$

Théorème 3 (Compatibilité des lois avec les congruences)

Soient quatre entiers $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que

- $a \equiv b \pmod{n}$:
- $c \equiv d \pmod{n}$.

Alors

1. $a + c \equiv b + d \pmod{n}$:
2. $a \times c \equiv b \times d \pmod{n}$:
3. $\forall k \in \mathbb{N}, a^k \equiv b^k \pmod{n}$.

Démonstration 3

On sait qu'il existe deux entiers k et ℓ tels que $a = b + kn$ et $c = d + \ell n$.

1. Évident.
2. On a $ac = (b + kn) \times (d + \ell n) = bd + \underbrace{(kd + b\ell + k\ell n)}_{k \in \mathbb{Z}} n$ donc $a \times c \equiv b \times d \pmod{n}$.
3. Par une récurrence sans difficulté. □

Pour démontrer que $a \mid b$ il peut être intéressant de démontrer que $b \equiv 0 \pmod{a}$.

Exemple 1

On veut démontrer que 641 divise $2^{32} + 1$.

On remarque que $n = 641 = 1 + 640 = 1 + 5 \times 2^7 = 625 + 16 = 5^4 + 2^4$.

On en déduit $5 \times 2^7 \equiv -1 \pmod{n}$. En élevant à la puissance 4, on a $5^4 \times 2^{28} \equiv 1 \pmod{n}$. Comme $5^4 \equiv -2^4 \pmod{n}$, on obtient $-2^4 \times 2^{28} \equiv 1 \pmod{n}$ soit en ajoutant 2^{32} aux deux membres, $0 \equiv 2^{32} + 1 \pmod{n}$, ce qu'il fallait vérifier.

Cet exemple historique est dû à Euler et fournit un contre-exemple à une conjecture de Fermat :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2^n} + 1 \text{ est premier.}$$

Exemple 2

Pour un nombre entier n (écrit en base 10) on a $n \equiv a \pmod{10}$ où a désigne le chiffre des unités de n . Ainsi la dernière ligne du tableau des i^j p. 24 peut se lire $i^5 \equiv i \pmod{10}$ pour tous entiers i .

Exemple 3

On a $10 \equiv 1 \pmod{9}$ et donc $\forall k \in \mathbb{N}, 10^k \equiv 1 \pmod{9}$. En particulier $\sum_{k=0}^p a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^p a_k \pmod{9}$.

Autrement dit, un nombre entier $n = \sum_{k=0}^p a_k 10^k$ (écrit en base 10) est congru modulo 9 à la somme de

ses chiffres, et donc aussi à la somme des chiffres de la somme de ses chiffres, etc. C'est le principe de la *preuve par neuf* enseignée autrefois à l'école élémentaire. Elle peut s'énoncer de la façon suivante : « Le produit des restes des deux facteurs modulo 9 est congru au reste du produit modulo 9 ».

L'exemple suivant est dû à Eugène Ionesco. *La Leçon* (1951).

LE PROFESSEUR

...combien font, par exemple, trois milliards sept cent cinquante-cinq millions neuf cent quatre-vingt-dix-huit mille deux cent cinquante et un, multiplié par cinq milliards cent soixante-deux millions trois cent trois mille cinq cent huit ?

L'ÉLÈVE, *très vite*.

Ça fait dix-neuf quintillions trois cent quatre-vingt dix quadrillions deux trillions huit cent quarante quatre milliards deux cent dix-neuf millions cent soixante-quatre mille cinq cent huit...

On prend $a = 3755998251$, $b = 5162303508$. La somme des chiffres de a vaut 54 donc $a \equiv 0 \pmod{9}$. De même la somme des chiffres de b vaut 33 donc $b \equiv 6 \pmod{9}$. Donc le produit ab est congru à 0 modulo 9.

La somme des chiffres du produit $c = 19390002844219164508$ annoncé par l'élève vaut 76 donc $c \equiv 4 \pmod{9}$.

Moralité, le résultat donné par l'élève est faux.

Exemple 4

On peut se demander quelle est valeur exacte du produit. Faute d'un logiciel de calcul formel qui donnerait la solution, on travaille avec une calculatrice qui donne quatorze chiffres significatifs (en l'occurrence il s'agit d'un tableur).

Il donne $3755998251 \times 5162303508 = 19389602947179200000$. Il est clair que les derniers chiffres sont faux. Pour les trouver, on travaille modulo 10^7 , ce qui va donner les sept derniers chiffres : Soit $a' = 5998251$ et $b' = 2303508$. On a $a \equiv a' \pmod{10^7}$ et $b \equiv b' \pmod{10^7}$. On a donc $ab \equiv a'b' \pmod{10^7}$. Le tableur donne $a'b' = 13817019164508 \equiv 19164508 \pmod{10^7}$. On peut donc reconstituer $ab = 19389602947179164508$.

Bien entendu, on vérifie avec la preuve par neuf que $ab \equiv 0 \pmod{9}$.

Définition 3 (Système complet de restes modulo m).

Soit m un entier ≥ 2 . On appelle système complet de restes modulo m un système d'entiers contenant un et un seul représentant de chaque classe.

Exemples : $\{0, \dots, m-1\}$, système de m entiers consécutifs, m entiers non congrus modulo m deux à deux.

Théorème 4

Soit $x \mapsto f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ une fonction polynôme où les $a_i \in \mathbb{Z}$.

On suppose que l'on a $f(r)$ non congru à 0 modulo m pour r décrivant un **système complet de restes modulo m** . On a alors pour tous $x \in \mathbb{Z}$, $f(x)$ non congru à 0 modulo m .

Démonstration 4

En effet, soit $x \in \mathbb{Z}$, il existe un r appartenant au système complet de restes modulo m , tel que $x \equiv r \pmod{m}$. Comme par ailleurs, $\sum_{i=0}^n a_i x^i \equiv \sum_{i=0}^n a_i r^i \pmod{m}$, le résultat en découle. \square

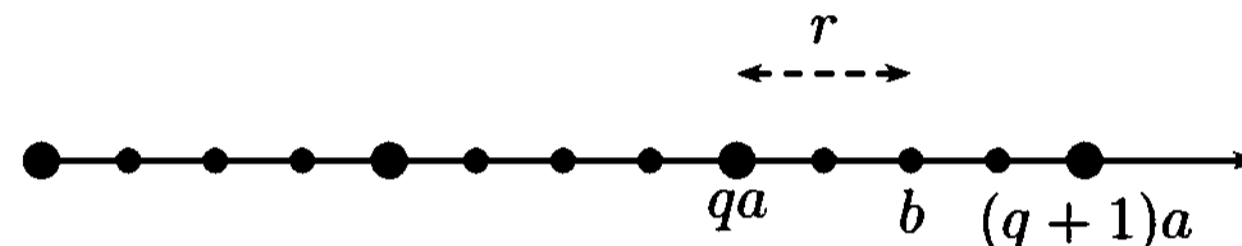
2.1.3 Division euclidienne

FIGURE 2.1 – Division euclidienne dans \mathbb{Z}

Théorème 5 (Division euclidienne)

Soient deux entiers $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ avec $b \neq 0$. Alors il existe un **unique couple** $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

1. $a = bq + r$
2. $0 \leq r < b$

On dit que l'entier q est le **quotient** et l'entier r le **reste** de la **division euclidienne** de a par b .

Démonstration 5

– **Unicité :** Soient $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ et $(q', r') \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a = qb + r$, $0 \leq r < b$ et $a = q'b + r'$, $0 \leq r' < b$. Comme $0 \leq r < b$ et $0 \leq r' < b$, on a : $b|q' - q| = |r' - r| < b$ ce qui n'est possible que si $|q' - q| = 0$, c'est-à-dire que si $q = q'$. Ceci entraîne $r = r'$ et donc $(q, r) = (q', r')$.

– **Existence :**

– Supposons que $a \in \mathbb{N}$ et considérons l'ensemble $\mathcal{M} = \{n \in \mathbb{N} \mid nb \leq a\}$ des multiples de b inférieurs à a . \mathcal{M} est une partie de \mathbb{N} . De plus, \mathcal{M} est :

- non vide car $0 \in \mathcal{M}$.
- majorée par a . En effet, si $n \in \mathcal{M}$ alors, comme $b \geq 1$, $n \leq nb \leq a$ donc $n \leq a$.

On en déduit que \mathcal{M} admet un plus grand élément, noté q qui vérifie :

1. $qb \leq a$ car $q \in \mathcal{M}$.
2. $(q+1)b > a$ car $q+1 > q$ et q est le plus grand élément de \mathcal{M} , donc $q+1 \notin \mathcal{M}$.

Posons $r = a - bq$. On a bien $a = bq + r$. Par ailleurs $0 \leq r$ car $a \geq bq$ et $r < b$ car $b = (q+1)b - qb > a - qb = r$.

– Supposons maintenant que $a \in \mathbb{Z}$. Si a est positif, on se ramène au cas précédent. Sinon $-a$ est positif et il existe $(q', r') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $-a = q'b + r'$ et $0 \leq r' < b$. On a donc $a = b(-q') - r'$. Si $r' = 0$ alors on pose $q = -q'$ et $r = 0$. On obtient ainsi le couple recherché. Sinon, si $r' \neq 0$, alors $r' \in \{1, \dots, b-1\}$ et $a = b(-q' - 1) + (b - r')$. On pose alors $q = -q' - 1$ et $r = b - r'$ et on obtient, ici encore, le couple recherché. \square

2.2 PGCD, théorèmes d'Euclide et de Bézout

2.2.1 PGCD, PPCM

Définition 4 (PGCD, PPCM).

Soient deux entiers non tous deux nuls $(a, b) \in \mathbb{Z}^{*2}$.

1. L'ensemble des diviseurs de \mathbb{N}^* communs à a et b admet un plus grand élément noté $a \wedge b$. C'est le **plus grand commun diviseur (PGCD)** des entiers a et b .
2. L'ensemble des entiers de \mathbb{N}^* multiples communs de a et b admet un plus petit élément noté : $a \vee b$. C'est le **plus petit commun multiple (PPCM)** des entiers a et b .

Si $a = b = 0$, on pose $a \wedge b = a \vee b = 0$.

2.2.2 Algorithme d'Euclide

Théorème 6 (Théorème d'Euclide)

Soient deux entiers $(a, b) \in \mathbb{Z}^{*2}$. Effectuons la division euclidienne de l'entier a par l'entier b :

$$\text{il existe un unique couple } (q, r) \in \mathbb{N}^2 : a = bq + r \text{ et } 0 \leq r < b$$

Alors :

$$a \wedge b = b \wedge r$$

Démonstration 6

Comme $r = a - bq$, tout entier divisant à la fois a et b divise aussi r . L'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs communs à b et r . En particulier, ces deux ensembles ont le même plus grand élément, ce qui s'écrit aussi : $a \wedge b = b \wedge r$. □

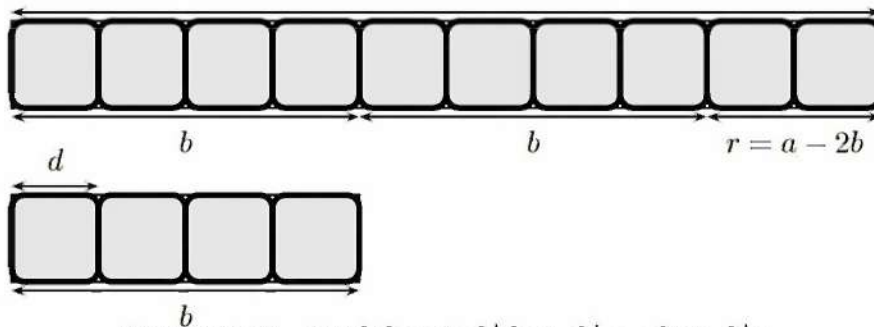


FIGURE 2.2 – Euclide : si $d \mid b$ et $d \mid a$, alors $d \mid r$

Le théorème précédent justifie l'algorithme d'Euclide pour trouver le pgcd de deux entiers non nuls $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$. On pose $r_0 = a$, $r_1 = b$ et on définit ensuite $\forall k \geq 1$, les couples (q_k, r_k) en utilisant une division euclidienne :

$$\text{si } r_k \neq 0, \exists!(q_k, r_{k+1}) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tq } r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1} \text{ et } 0 \leq r_{k+1} < r_k$$

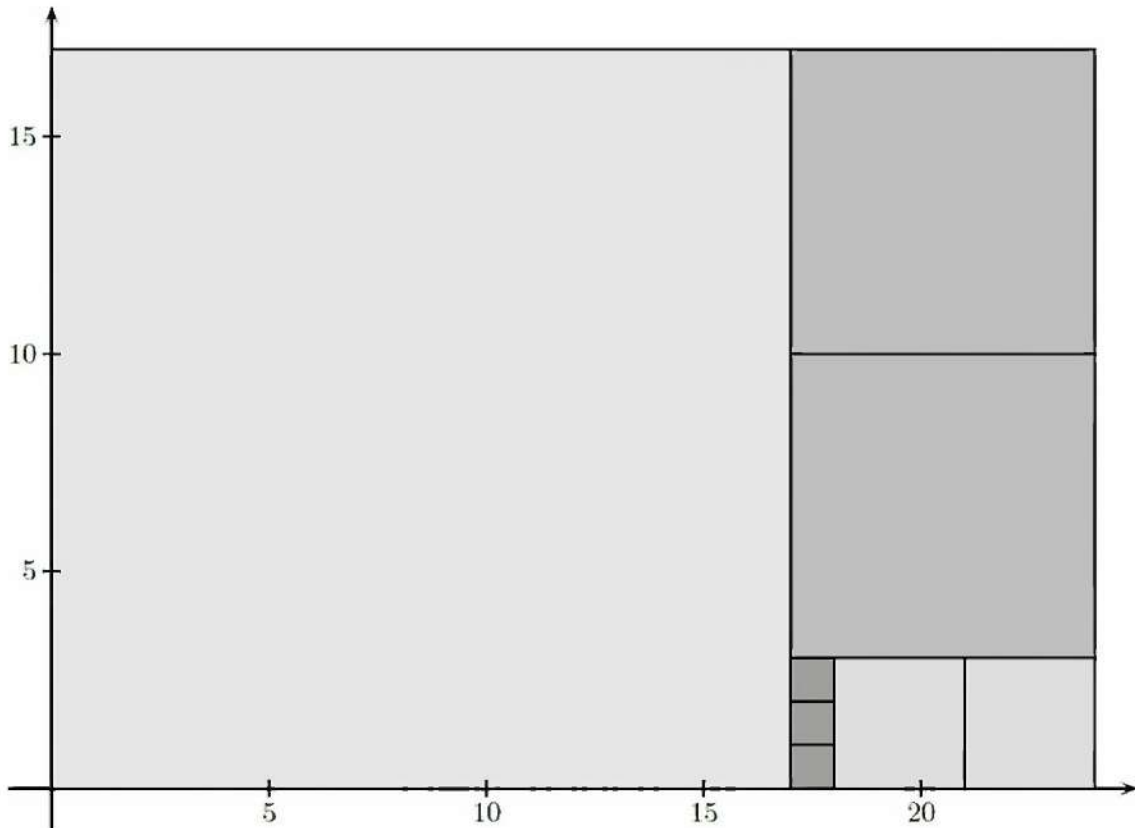
Comme la suite d'entiers (r_k) est strictement décroissante, il existe un rang $n \geq 1$ tel que $r_n \neq 0$ et $r_{n+1} = 0$. D'après le théorème d'Euclide, on a $\forall k \in [0, n-1]$, $a \wedge b = r_k \wedge r_{k+1}$. Comme r_n divise r_{n-1} , on a $r_n \wedge r_{n-1} = r_n$. Par conséquent, le dernier reste non-nul r_n est le pgcd des entiers (a, b) .

Exemple 5

Déterminons le pgcd des entiers 366 et 43 en utilisant l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 366 &= \boxed{43} \times 8 + \boxed{22} \\ \boxed{43} &= \boxed{22} \times 1 + \boxed{21} \\ \boxed{22} &= \boxed{21} \times 1 + \boxed{1} \\ \boxed{21} &= \boxed{1} \times 21 + 0 \end{aligned}$$

donc $366 \wedge 43 = 1$.



Le pgcd de 17 et 24 égale 1.

```
def euclide0(a,b):
    while b>0:
        (a,b)=(b,a%b)
    return a

print(euclide0(3352,2018))
```

ou sous une forme récursive :

```
def euclide1(a,b):
    if b==0:
        return a
    else:
        return euclide1(b,a%b)

print(euclide0(3352,2018))
```

Définition 5 (Nombres premiers entre eux).

On dit que deux nombres a et b sont **premiers entre eux** si et seulement si leur plus grand diviseur commun est 1. autrement dit si et seulement si $a \wedge b = 1$.

2.2.3 Théorème de Bézout

Théorème 7 (Coefficients de Bézout)

Soient deux entiers non nuls $(a, b) \in \mathbb{Z}^{*2}$. Il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$au + bv = a \wedge b.$$

Un tel couple (u, v) est appelé **couple de coefficients de Bézout pour a et b** .

Démonstration 7

Quitte à considérer $|a|$ et $|b|$ à la place de a et b , on peut supposer a et b positifs. La preuve se fait par récurrence sur b . Si $b = 0$, alors $a \wedge b = a$ et $1.a + 0.b = a$ donc un couple de coefficient de Bézout est $(1, 0)$. On fixe $b \in \mathbb{N}^*$ et on suppose que la propriété est vraie pour tout $a \in \mathbb{N}$ et tout nombre n de l'intervalle d'entier $\{0, \dots, b-1\}$. Par division euclidienne, il existe $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r \leq b-1$. D'après le théorème d'Euclide, on sait que $a \wedge b = b \wedge r$. On applique l'hypothèse de récurrence à b et r , il existe $(U, V) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $Ub + Vr = b \wedge r$. Donc $Ub + V(a - bq) = a \wedge b$ et $Va + (U - Vq)b = a \wedge b$. La propriété est alors prouvée par récurrence. \square

Remarque 2.

Il n'y a pas unicité du couple de coefficients de Bézout de deux entiers.

Théorème 8 (Théorème de Bézout)

Soient deux entiers non nuls $(a, b) \in \mathbb{Z}^{*2}$. On a

$$a \wedge b = 1 \iff (\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 : 1 = au + bv)$$

Démonstration 8

\Rightarrow C'est une conséquence directe du théorème précédent.

\Leftarrow Supposons qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$. Si d est un diviseur commun à a et b alors d est un diviseur de 1. Il est alors clair que $a \wedge b = 1$. \square

Remarque 3.

Soient deux entiers $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. L'algorithme d'Euclide étendu permet de trouver un couple de Bézout $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$. On définit les suites (r_k) et (q_k) des restes dans l'algorithme d'Euclide. Notons $r_n = a \wedge b = 1$ le dernier reste non-nul. On pose $r_0 = a$, $r_1 = b$ et par récurrence, on définit

$$\forall k \geq 1, r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1} \text{ avec } 0 < r_{k+1} \leq r_k$$

On définit simultanément deux suites (u_k) et (v_k) telles que

$$\forall k \in [0, n], r_k = u_k a + v_k b$$

Pour que cette propriété soit vraie pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on doit poser :

$$(u_0, v_0) = (1, 0), (u_1, v_1) = (0, 1) \text{ et } \forall k \in [2, n], \begin{cases} u_{k+1} = u_{k-1} - q_k u_k \\ v_{k+1} = v_{k-1} - q_k v_k \end{cases}$$

On a alors $1 = au_n + bv_n$.

$r_0 = a$	$r_1 = b$	r_2	\dots	r_k	\dots	1
	q_1	q_2	\dots	q_k	\dots	q_n
1	0	u_2	\dots	u_k	\dots	$u_n = u$
0	1	v_2	\dots	v_k	\dots	$v_n = v$

Un programme Python qui retourne le pgcd puis les coefficients de Bézout de deux nombres a et b .

```
def euclide(a,b):
    (r,u,v,r1,u1,v1)=(a,1,0,b,0,1)
    while r1>0:
        q=r//r1
        (r,u,v,r1,u1,v1)=(r1,u1,v1,r-q*r1,u-q*u1,v-q*v1)
    return (r,u,v)
```

```
print(euclide(3352,2018))
```

Exemple 6

Déterminons grâce à l'algorithme d'Euclide un couple de Bézout pour $a = 22$ et $b = 17$.

$r_0 = 22$	$r_1 = 17$	$r_2 = 5$	$r_3 = 2$	$r_4 = 1$
	$q_1 = 1$	$q_2 = 3$	$q_3 = 2$	$q_4 = 2$
$u_0 = 1$	$u_1 = 0$	$u_2 = 1$	$u_3 = -3$	$u_4 = 7$
$v_0 = 0$	$v_1 = 1$	$v_2 = -1$	$v_3 = 4$	$v_4 = -9$

et $1 = 7 \times 22 - 9 \times 17$.

Théorème 9 (Théorème de Gauss)

Soient trois entiers non nuls $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^{*3}$.

$$(a \mid bc \text{ et } a \wedge b = 1) \implies a \mid c$$

Démonstration 9

Si $a \wedge b = 1$ alors, d'après le théorème de Bézout 8, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$. On a donc aussi $auc + bvc = c$. Mais comme a divise bc et que a divise auc , a divise $auc + bvc = c$. \square

Théorème 10 (Caractérisation des diviseurs et des multiples)

Soient deux entiers $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

1. Soit un entier $d \in \mathbb{Z}$. $\begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases} \iff d \mid (a \wedge b)$
2. Soit un entier $m \in \mathbb{Z}$. $\begin{cases} a \mid m \\ b \mid m \end{cases} \iff (a \vee b) \mid m$.

Démonstration 10

1. Supposons que d divise a et b et notons $\delta = a \wedge b$. D'après le théorème 7, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $au + bv = \delta$. Comme $d \mid a$ et que $d \mid b$, on sait que $d \mid \delta$. La réciproque est facile.
2. Supposons que a et b divisent m et notons $\mu = a \vee b$. Il existe $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $\mu = ka$ et $\mu = k'b$. Il existe aussi $l, l' \in \mathbb{N}$ tels que $m = la$ et $m = l'b$. De plus, par application du théorème 5, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m = p\mu + r$ et $0 \leq r < \mu$. On peut alors écrire $la = pka + r$ et $l'b = pk'b + r$ et donc $a \mid r$ et $b \mid r$. Si $r \neq 0$ alors r est un multiple commun à a et b . Par définition de μ , il vient $r \geq \mu$ ce qui est impossible. Donc $r = 0$ et μ divise m . La réciproque est évidente. \square

Théorème 11

Soient deux entiers non nuls $(a, b) \in \mathbb{Z}^{*2}$. Pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} (ka) \wedge (kb) = k(a \wedge b) \\ (ka) \vee (kb) = k(a \vee b) \end{cases}$.

Démonstration 11

Posons $\delta = a \wedge b$ et $\Delta = ka \wedge kb$. Il est clair que $k\delta \mid \Delta$. Montrons que $\Delta \mid k\delta$, ce qui prouvera la première égalité. Comme $k \mid \Delta$ il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\Delta = km$. Mais alors $km \mid ka$ et $m \mid a$. De même, $km \mid kb$ et donc $m \mid b$. L'entier m est donc un diviseur de δ et $\Delta = km \mid k\delta$.

Posons maintenant $d = a \vee b$ et $D = ka \vee kb$. L'entier kd est un multiple de ka et kb donc $D \mid kd$. Si on montre de plus que $kd \mid D$ alors la seconde égalité sera prouvée. Comme $ka \mid D$ et que $kb \mid D$, il existe des entiers m_1 et m_2 tels que $D = kam_1 = kbm_2$. L'entier k est donc un diviseur de D et il existe un entier D' tel que $D = kD'$. Par suite, on a $D' = am_1 = bm_2$ et D' est donc un multiple commun à a et b ce qui amène $d \mid D'$ ainsi que $kd \mid D$. \square

2.2.4 Résolutions de congruences

Soit $n \geq 2$ un entier naturel. On se donne deux entiers a et b et on cherche à résoudre l'équation

$$[ax \equiv b \pmod{n} \quad \text{inconnue } x \in \mathbb{Z}].$$

Posons $\delta = a \wedge n$. Il est clair que si x est solution, alors δ divise b . De ce fait :

- Si δ ne divise pas b , alors l'équation n'admet pas de solution.
- Si δ ne divise pas b , alors on pose $n' = \frac{n}{\delta}$, $a' = \frac{a}{\delta}$ et $b' = \frac{b}{\delta}$ et on est amené à résoudre l'équation dans le cas a et n sont premiers entre eux. On se place désormais dans ce cas.

Remarque 4.

Lorsqu'on résout une équation $[ax = b; \text{ inconnue } x \in \mathbb{R}]$ on multiplie les deux membres par l'inverse de $a \neq 0$. Seulement ici nous travaillons avec des entiers. Il va falloir trouver ici un **entier** u qui joue le rôle d'inverse de a premier avec n .

On écrit une égalité de Bézout entre a et n : $au + nv = 1$ ce qui donne en réduisant modulo n : $au \equiv 1 \pmod{n}$. Maintenant en multipliant les deux membres de la congruence de départ par u , on obtient $x \equiv bu \pmod{n}$. Donc l'ensemble des solutions est $\{x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, x = bu + kn\}$.

Exemples 7

1.

$$[6x \equiv 8 \pmod{9} \quad \text{inconnue } x \in \mathbb{Z}].$$

On a $a \vee n = 6 \vee 9 = 3$ et 3 ne divise pas $b := 8$. Donc l'équation n'admet pas de solution.

2.

$$[252x \equiv 126 \pmod{306} \quad \text{inconnue } x \in \mathbb{Z}].$$

On a $a \vee n = 252 \vee 306 = 18$ et 18 divise $b := 126 = 7 \times 18$. Donc l'équation est équivalente à $14 \equiv 7 \pmod{17}$. En cherchant une relation de Bézout entre 14 et 17, on trouve $-6 \times 14 + 5 \times 17 = 1$.

En multipliant les deux membres de la congruence par -6 on obtient $x \equiv -42 \pmod{17}$ soit $x \equiv 9 \pmod{17}$.

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, x = 9 + 17k\}.$$

2.2.5 Équation $Ax + By = C$

On se donne trois entiers non nuls $(A, B, C) \in \mathbb{Z}^{*3}$, et on considère l'équation diophantienne :

$$(E) : [Ax + By = C \quad \text{inconnue } (x, y) \in \mathbb{Z}^2]$$

Notons $\delta = A \wedge B$. Si δ ne divise pas C , alors $S = \emptyset$.

En effet, par contraposée, si $S \neq \emptyset$ alors il existe $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $Ax + By = C$. Comme $\delta \mid A$ et $\delta \mid B$, $\delta \mid C$.

On suppose désormais que $\delta \mid C$. Il existe trois entiers non nuls $(A', B', C') \in \mathbb{Z}^{*3}$ tels que $A = \delta A'$, $B = \delta B'$ avec $A' \wedge B' = 1$, et $C = \delta C'$. L'équation (E) a même ensemble de solutions que l'équation

$$(E') : A'x + B'y = C'$$

Soit (x, y) une solution de (E) . Alors $Ax + By = C$. Comme A, B, C sont divisibles par δ , on peut écrire $A'x + B'y = C'$ et (x, y) est solution de (E') . Réciproquement, si (x, y) est solution de (E') alors $A'x + B'y = C'$ et en multipliant par δ , on obtient $Ax + By = C$ et (x, y) est solution de (E) .

Solution particulière de l'équation (E')

Comme A' et B' sont premiers entre eux, on peut déterminer un couple (u, v) de coefficients de Bezout tels que $A'u + B'v = 1$. Alors $(C'u, C'v)$ est une solution de (E') .

Solution générale de l'équation (E')

On considère une solution particulière (u, v) de (E') . On cherche une autre solution de (E') . On peut l'écrire $(u + a, v + b)$ où $a, b \in \mathbb{Z}$. On doit alors avoir $A'(u + a) + B'(v + b) = C'$ soit $A'a + B'b = 0$. Comme $A' \wedge B' = 1$, on en déduit que grâce au théorème de Gauss que a est un multiple de B' et que b est un multiple de A' : $a = kB'$ et $b = lA'$. On injecte dans $A'a + B'b = 0$ et on trouve que $l = -k$. Donc une solution de (E') est de la forme $(u + kB', v - kA')$ où $k \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, on vérifie facilement que tout couple de cette forme est solution de (E') . On en déduit que $\mathcal{S} = \{(u + kB', v - kA') \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Exemple 8

Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation

$$(E) : 24x + 20y = 36$$

On applique la méthode précédente. Les solutions de (E) sont celles de $(E') : 6x + 5y = 9$. Un couple de coefficients de Bezout pour 6 et 5 est $(1, -1)$. Donc une solution particulière de (E') est $(9, -9)$ Les solutions de (E) sont les couples $(9 + 5k, -9 - 6k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

2.2.6 Autres propriétés

Théorème 12 (Autres propriétés du PGCD)

Soient trois entiers non nuls $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^{*3}$.

1. Soient trois entiers $(\delta, a', b') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^2$ tels que $a = \delta a'$, $b = \delta b'$. alors

$$(\delta = a \wedge b) \iff (a' \wedge b' = 1)$$

$$2. \begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \iff a \wedge (bc) = 1 :$$

$$3. \begin{cases} a \mid c \\ b \mid c \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \implies ab \mid c :$$

4. pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$, si $a \wedge b = 1$. alors $a^p \wedge b^q = 1$;
 5. pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $a^k \wedge b^k = (a \wedge b)^k$.

Démonstration 12

- C'est une conséquence directe de la proposition 10.
- \Rightarrow Si $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$, alors par application du théorème de Bézout 8, il existe des entiers s, t, u, v tels que $sa + tb = 1$ et $ua + vc = 1$. Si on multiplie membre à membre ces deux égalités, on obtient l'égalité de Bezout : $(sua + vsc + tub)a + (tvc)b = 1$ et en conclusion $a \wedge (bc) = 1$.
 \Leftarrow Réciproquement, si $a \wedge (bc) = 1$ alors il est clair que a est premier à la fois avec b et c .
- Comme $a \mid c$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $c = ka$. Mais comme $b \mid c = ka$ et que $a \wedge b = 1$ alors par le théorème de Gauss 9, il vient que $b \mid k$. En conclusion $ab \mid c$.
- Considérons $A, B \in \mathbb{N}^*$ tels que $A \wedge B = 1$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Si on applique la deuxième règle avec $a = A$, $b = B$ et $c = B$, on obtient : $A \wedge B^2 = 1$. En l'appliquant une nouvelle fois avec $a = A$, $b = B$ et $c = B^2$, il vient que $A \wedge B^3 = 1$. Si on l'applique encore $m - 3$ fois, il vient que : $A \wedge B^m = 1$. En résumé, on a prouvé que si $A \wedge B = 1$ alors $A \wedge B^m = 1$. Considérons $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \wedge b = 1$ et $p, q \in \mathbb{N}^*$. On applique ce résultat à $A = a$, $B = b$ et $m = q$. Il vient $a \wedge b^q = 1$. On l'applique alors une nouvelle fois mais à $A = b^q$, $B = a$ et $m = p$ et on trouve : $a^p \wedge b^q = 1$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Posons $\delta = a \wedge b$. Grâce à la première règle, on a : $\frac{a}{\delta} \wedge \frac{b}{\delta} = 1$ et grâce à la quatrième : $(\frac{a}{\delta})^k \wedge (\frac{b}{\delta})^k = 1$. En appliquant à nouveau la première règle, il vient que : $a^k \wedge b^k = \delta^k = (a \wedge b)^k$. \square

Théorème 13 (Relation entre PGCD et PPCM)

Soient deux entiers non nuls $(a, b) \in \mathbb{Z}^{*2}$.

- Si $a \wedge b = 1$ alors $a \vee b = |ab|$;
- $(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|$.

Démonstration 13

- Supposons que a et b sont positifs et premiers entre eux. Soit d un multiple commun à a et b . Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tels que $d = ka$. Comme $b \mid d$ et que $a \wedge b = 1$, on en déduit, grâce au théorème de

Gauss 9, que $b \mid k$ et qu'il existe donc $k' \in \mathbb{N}$ tel que $d = k'ab$. Comme d est le plus petit commun multiple de a et b , il vient forcément que $k' = 1$ et que $d = ab$. Si a et b ne sont pas tous deux positifs, on applique ce résultat à $|a|$ et $|b|$.

2. Notons $\delta = a \wedge b$ et $a = \delta a'$, $b = \delta b'$ avec $a', b' \in \mathbb{Z}$. Montrons que l'ensemble des multiples communs à a et b est l'ensemble des multiples de $\delta a' b'$. Il est clair que tout multiple de $\delta a' b'$ est un multiple commun à a et b . Réciproquement, si m est un multiple commun à a et b alors il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $m = ka = k'b$. On a aussi : $m = k\delta a' = k'\delta b'$. Comme a' et b' sont premiers entre eux, cette égalité implique, par application du théorème de Gauss 9 que $b' \mid k$. Donc m est un multiple de $\delta a' b'$. Il s'ensuit que le ppem de a et b est le plus petit multiple de $\delta a' b'$, c'est-à-dire que $a \vee b = |\delta a' b'|$. Il vient alors $\delta(a \vee b) = \delta|\delta a' b'| = |ab|$ d'où l'égalité. \square

2.3 Nombres premiers

2.3.1 Nombres premiers

Définition 6 (Nombre premier, nombre composé).

Un entier $n \in \mathbb{N}$ est dit **premier** si $n \geq 2$ et si ses seuls diviseurs dans \mathbb{N} , sont 1 ou lui-même :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, k \mid n \implies k \in \{1, n\}$$

On note \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers.

Si un entier $n \in \mathbb{N}$ n'est pas premier, on dit qu'il est **composé**.

Remarque 5.

Un entier positif est premier si et seulement si le cardinal de l'ensemble de ses diviseurs est égal à 2.

Théorème 14 (Propriétés des nombres premiers)

1. Soit un entier $p \in \mathbb{N}$ premier, et $a \in \mathbb{Z}$ un entier. Alors, $p \mid a$ ou bien $p \wedge a = 1$.
2. Si n et m sont deux nombres premiers distincts, ils sont premiers entre eux : $n \neq m \implies n \wedge m = 1$.
3. Si n est un nombre premier et si $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^k$.

$$n \mid a_1 \dots a_k \implies [\exists i \in \{1, \dots, k\} : n \mid a_i]$$

Démonstration 14

1. Si n et a ne sont pas premiers entre eux alors $\delta = n \wedge a > 1$. Mais comme $\delta \mid n$ et que n est premier, $\delta = 1$ ce qui n'est pas possible ou $\delta = n$. En conclusion, $n \mid a$.
2. n est premier et peut diviser m donc d'après le point précédent $n \wedge m = 1$.

3. D'après le théorème de Gauss et une petite récurrence. □

Théorème 15

Tout entier supérieur à 2 admet un diviseur premier.

Démonstration 15

Effectuons une récurrence forte. Si $p = 2$ alors p possède un diviseur premier : lui-même. Supposons la propriété vérifiée pour tout entier $p \in \{2, \dots, n\}$ et montrons-la pour $p = n + 1$. Soit \mathcal{A} l'ensemble des diviseurs de $n + 1$. On a $|\mathcal{A}| \geq 2$. Si $|\mathcal{A}| = 2$ alors $n + 1$ est premier et cela démontre la propriété sinon \mathcal{A} contient un entier $q \in \{2, \dots, n\}$ qui divise $n + 1$. On applique l'hypothèse de récurrence à q : q possède un diviseur premier. Ce diviseur premier divise nécessairement aussi $n + 1$ et donc $n + 1$ possède un diviseur premier. La propriété est donc démontrée par récurrence. □

Théorème 16

L'ensemble \mathcal{P} des nombres premiers est infini.

Démonstration 16

Supposons que ce ne soit pas le cas. \mathcal{P} forme alors une partie finie de \mathbb{N} . \mathcal{P} possède donc un plus grand élément n . Considérons le nombre entier $N = n! + 1$. On a : $N > n$. D'après la proposition précédente, n possède un diviseur premier p différent de 1. Ce dernier est nécessairement élément de l'ensemble $\{2, \dots, n\}$. p divise donc aussi $n!$. Mais alors p divise 1 ce qui est impossible. L'ensemble \mathcal{P} des nombres premiers est donc infini. □

2.3.2 Décomposition en facteurs premiers

Lemme 17

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On considère m nombre premiers $p_1, \dots, p_m \in \mathcal{P}$ distincts deux à deux et des entiers naturels non nuls $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. On forme le nombre entier $p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$. Alors tout diviseur premier de n est l'un des p_i où $i \in \{1, \dots, m\}$.

Démonstration 17

Considérons l'ensemble \mathcal{A} des entiers de la forme $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \dots, p_m \in \mathcal{P}$ distincts deux à deux et $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{N}^*$ qui admettent un diviseur premier différent de chacun des p_i . La propriété sera prouvée si on montre que \mathcal{A} est vide. Supposons que ce n'est pas le cas. Alors comme \mathcal{A} est une partie de \mathbb{N} , \mathcal{A} admet un plus petit élément $n_0 = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$ et d'après la proposition 15, n_0 admet un diviseur premier p qui n'est, par définition de \mathcal{A} , aucun des p_i . L'entier p divise donc le produit $p_1 \cdot p_1^{\alpha_1 - 1} \dots p_m^{\alpha_m}$. Les entiers p et p_i sont premiers entre eux car premiers. On en déduit, par application du lemme de Gauss, que $p \mid p_1^{\alpha_1 - 1} \dots p_m^{\alpha_m}$. Mais comme n_0 est le plus petit élément de \mathcal{A} , l'entier $p_1^{\alpha_1 - 1} \dots p_m^{\alpha_m}$ n'est pas élément de \mathcal{A} et p est l'un des p_i pour $i \in \{1, \dots, m\}$ ce qui rentre en contradiction avec l'hypothèse faite sur p . Le lemme est alors prouvé par l'absurde. □

Théorème 18 (Décomposition en facteurs premiers)

Soit un entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Cet entier n s'écrit de façon unique de la manière suivante :

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$$

où $m \in \mathbb{N}^*$, $p_1 < \dots < p_m$ sont m nombres premiers et où $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{N}^*$. Ce résultat se formule aussi sous la forme suivante : n s'écrit de manière unique, à l'ordre des facteurs près, comme

$$n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(n)}$$

où $\nu_p(n) \in \mathbb{N}$ est appelé la **p-valuation** de l'entier n .

Démonstration 18

Existence La preuve se fait par récurrence sur n . Si $n = 2$ alors comme $2 \in \mathcal{P}$, la proposition est vraie. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Supposons que tout entier $< n$ se décompose comme indiqué dans le théorème. Si n est premier alors le théorème est vrai pour n . Sinon n admet un diviseur premier $p \in \mathcal{P}$ et il existe $0 < m < n$ tel que $n = pm$. Mais par application de l'hypothèse de récurrence, m se décompose comme indiqué dans le théorème et il en est alors de même de n . L'existence de la décomposition est alors prouvée par récurrence.

Unicité La preuve se fait à nouveau par récurrence. Supposons que $2 = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$ avec pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $p_i \in \mathcal{P}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ et $p_1 < \dots < p_m$. Comme 2 est le plus petit des nombres premiers, il vient : $2 = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m} \geq 2^{\alpha_1} \times \dots \times 2^{\alpha_m}$ ce qui n'est possible que si $m = 1$, $p_1 = 2$, $\alpha_1 = 1$. L'unicité de la décomposition de 2 en facteurs premiers est alors prouvée. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que tout entier $< n$ admet une unique décomposition en facteurs premiers et supposons que ce ne soit pas le cas pour n , c'est-à-dire que n admet au moins deux décompositions en facteurs premiers : $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m} = p_1^{\alpha'_1} \dots p_{m'}^{\alpha'_{m'}}$. Par application du lemme précédent, il vient $p_1 = p'_i$ pour un certain $i \in \{1, \dots, m'\}$ et $p'_j = p_j$ pour un certain $j \in \{1, \dots, m\}$. Mais $p_1 \leq p_j = p'_j \leq p'_i = p_1$ et forcément $p_1 = p'_j$. On peut alors écrire :

$$\frac{n}{p_1} = p_1^{\alpha_1-1} \dots p_m^{\alpha_m} = p_1^{\alpha'_1-1} \dots p_{m'}^{\alpha'_{m'}}$$

L'hypothèse de récurrence nous permet d'affirmer que la décomposition de n/p_1 en facteurs premiers est unique donc : $m = m'$, $p_1 = p'_1$, $p_2 = p'_2$, ..., $p_m = p'_m$, $\alpha_1 = \alpha'_1$, ..., $\alpha_m = \alpha'_m$. Les deux décompositions de n en facteurs premiers sont donc égales. L'unicité est ainsi prouvée par récurrence. \square

Remarque 6.

Tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ non nul s'écrit de façon unique sous la forme :

$$n = \pm \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(|n|)}.$$

Pour des entiers $a, b \in \mathbb{N}^*$, et $p \in \mathcal{P}$,

$$\nu_p(a \times b) = \nu_p(a) + \nu_p(b) \quad a \mid b \implies \nu_p(a) \leq \nu_p(b)$$

Théorème 19 (Expression du PGCD et du PPCM à l'aide des facteurs premiers)

Soient deux entiers non nuls $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$. Leur décomposition en facteurs premiers s'écrit :

$$a = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(a)} \quad b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(b)}$$

Alors la décomposition de $a \wedge b$ et de $a \vee b$ en facteurs premiers s'écrit :

$$a \wedge b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}} \quad a \vee b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\max\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}}$$

Démonstration 19

Posons $\delta = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}}$ et montrons que $\delta = a \wedge b$. Considérons $a', b' \in \mathbb{N}$ tels que $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$. D'après la proposition 12, on aura montré que $\delta = a \wedge b$ si et seulement si $a' \wedge b' = 1$. Supposons que ce ne soit pas le cas alors il existe un diviseur $d \neq 1$ commun à a et b qu'on peut supposer premier. On a donc :

$$d \mid \frac{a}{\delta} = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(a) - \min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}} \quad \text{et} \quad d \mid \frac{b}{\delta} = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(b) - \min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}}.$$

Il vient alors que d est un facteur de chacun des deux produits ci dessus et que $\nu_d(a) - \min\{\nu_d(a), \nu_d(b)\} \geq 1$ ainsi que $\nu_d(b) - \min\{\nu_d(a), \nu_d(b)\} \geq 1$ ce qui constitue une contradiction et prouve par l'absurde que $a' \wedge b' = 1$. La formule pour le pgcd est ainsi démontrée. On procède de même pour le ppm. \square

Exemple 9

Soit $n \in \mathbb{N}$ non nul. $n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(|n|)}$. Les diviseurs positifs d de n s'écrivent $d = \prod_{p \in \mathcal{P}, p \mid n} p^{\nu_p(|d|)}$, avec $\forall p \in \mathcal{P}, \nu_p(|d|) \leq \nu_p(|n|)$. Pour chaque $p \in \mathcal{P}$ qui divise n , on a $\nu_p(|n|) + 1$ choix pour $\nu_p(|d|)$, à savoir $0, 1, \dots, \nu_p(|n|)$. On obtient ainsi

$$\prod_{p \in \mathcal{P}, p \mid n} (\nu_p(|n|) + 1)$$

diviseurs positifs de n . Ces diviseurs de n sont distincts deux à deux à cause du théorème de décomposition en facteurs premiers.

2.4 Cryptage RSA

On se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Un message est transformé – de façon transparente – en un nombre $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ou plusieurs nombres m_1, \dots appartenant à $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Pour coder le nombre m Aísling choisit une bijection f de $\{0, 1, \dots, n-1\}$ dans lui-même et calcule $f(m)$. Pour décoder le message $m' := f(m)$ d'Aísling, Brendan calcule l'image de m' par la bijection réciproque de f . Il retrouve alors m .

2.4.1 Chiffrement linéaire

Aísling choisit $b \in \mathbb{Z}$ et a un entier premier avec n . Elle communique secrètement ces informations à Brendan. La bijection pour un chiffrement linéaire est définie par

$$\forall m \in \{0, 1, \dots, n-1\}, f(m) = r_{am+b},$$

où r_k désigne le reste de k dans la division euclidienne de k par n .

La bijection réciproque est définie par

$$\forall m \in \{0, 1, \dots, n-1\}, f^{-1}(m') = r_{u(m'-b)},$$

où u désigne l'unique entier de $\{0, 1, \dots, n-1\}$ tel que $au \equiv 1 \pmod{n}$. Il est facile de déterminer u à l'aide de l'algorithme d'Euclide étendu (voir remarque 3).

Pour décoder le message qu'il vient d'intercepter, il suffit à Ciarán de connaître a et b .

2.4.2 Indicatrice d'Euler

Notation 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $Z_n^\times = \{m \in \mathbb{N}^* \mid m \leq n \text{ et } m \text{ premier avec } n\}$.

Définition 7.

On appelle **indatrice d'Euler** la fonction φ , de \mathbb{N}^* dans lui-même, définie par

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathbb{N}^* &\longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ n &\longmapsto & \text{Card}(Z_n^\times). \end{aligned}$$

Exemple 10

On a $\varphi(10) = 4$ car parmi les nombres de 1 à 10, seuls, 1, 3, 7 et 9 sont premiers avec 10.

2.4.3 Quelques calculs

Théorème 20

1. Soit p un nombre premier. on a $\varphi(p) = p - 1$.
2. Soit p un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. on a $\varphi(p^\alpha) = (p - 1)p^{\alpha-1}$.
3. Soit p et q deux nombres premiers distincts. on a $\varphi(pq) = (p - 1)(q - 1)$.

Démonstration 20

1. En effet soit $0 < m < p$, le seul diviseur commun à p et m est 1. donc $m \vee p = 1$ et $m \in Z_p^\times$. Comme $p \notin Z_p^\times$, on a donc $\varphi(p) = p - 1$.
2. Soit $d \neq 1$ un diviseur de p^α . Le seul diviseur premier de d est donc p . De ce fait si $m \in \{1, 2, \dots, p^\alpha\}$ n'est pas premier avec p^α , alors m est un multiple de p . Inversement si m est un multiple de p , alors m n'est pas premier avec p^α . Dans $\{1, 2, \dots, p^\alpha\}$, il y a $p^{\alpha-1}$ tels multiples. Il reste donc $\varphi(p^\alpha) = (p - 1)p^{\alpha-1}$ nombres premiers avec p^α .
3. À nouveau. on va compter les nombres $m \in \{1, 2, \dots, pq\}$ qui ne sont pas premiers avec pq . Soit $d \neq 1$ un diviseur de pq . Les seuls diviseurs premiers possibles de d sont donc p ou q . Donc si $m \in \{1, 2, \dots, pq\}$ n'est pas premier avec pq , alors c'est un multiple de p ou de q . Il y a q multiples de p : $p, 2p, \dots, qp$. Il y a p multiples de q : $q, 2q, \dots, pq$. Attention, le nombre pq a été compté deux fois. Est-ce le seul ? Peut-on avoir $kp = \ell q$ avec $0 < k < q$ et $0 < \ell < p$. On aurait $q \mid kp$ et q premier avec p donc d'après le théorème de Gauss $q \mid k$ ce qui n'est pas possible. Il y a donc $p + q - 1$ nombres de $\{1, 2, \dots, pq\}$ qui ne sont pas premiers avec pq . Il reste donc $\varphi(pq) = pq - (p + q - 1) = (p - 1)(q - 1)$ nombres premiers avec pq . \square

2.4.4 Théorème d'Euler-Fermat

On commence par rappeler que si m et n sont premiers entre eux et si r_m désigne le reste de m dans la division euclidienne par n , alors $r_m \in Z_n^\times$.

Ensuite on rappelle que si a et m sont premiers avec n , il en est de même du produit am . Voir le théorème 12.

Théorème 21 (Euler (1763))

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit a un entier premier avec n . On a

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{[n]}.$$

Démonstration 21

Soit $m \in \mathbb{Z}$ on pose r_m le reste de m dans la division euclidienne par n . On définit pour tout $a \in Z_n^\times$,

$$\begin{aligned} \phi_a : Z_n^\times &\longrightarrow Z_n^\times \\ m &\longmapsto r_{am}. \end{aligned}$$

L'application ϕ_a^{-1} est bien définie car – d'après les deux rappels plus haut – pour tout entier $m \in Z_n^\times$ on a bien $r_{am} \in Z_n^\times$.

1. Gardez cette application à l'œil. Elle va revenir souvent.

L'application ϕ_a est injective : Soit m et m' deux entiers de Z_n^\times tels que $\phi_a(m) = \phi_a(m')$. On a alors $am \equiv am' \pmod{n}$ soit $n \mid a(m - m')$. Or n est premier avec a donc, d'après le théorème de Gauss 9, $n \mid m - m'$ soit $m \equiv m' \pmod{n}$ donc $m = m'$ puisque m et m' appartiennent à Z_n^\times .

L'application ϕ_a est bijective d'après le théorème 10 page 463.

De ce fait on a

$$\prod_{m \in Z_n^\times} m = \prod_{m \in Z_n^\times} \phi_a(m)$$

puisque dans le membre de droite on a effectué le produit des facteurs de gauche dans un ordre différent. Donc

$$\begin{aligned} \prod_{m \in Z_n^\times} m &\equiv \prod_{m \in Z_n^\times} (am) \pmod{n} \\ &\equiv a^{\varphi(n)} \prod_{m \in Z_n^\times} m \pmod{n}. \end{aligned}$$

Maintenant, d'après le théorème 12, le nombre $p := \prod_{m \in Z_n^\times} m$ est premier avec n . D'après le théorème 8 il

existe deux entiers u et v tels que $up + vn = 1$. On en déduit que $up \equiv 1 \pmod{n}$. À partir de $p \equiv a^{\varphi(n)} p \pmod{n}$ on en déduit que $up \equiv a^{\varphi(n)} up \pmod{n}$ soit $1 \equiv a^{\varphi(n)} \pmod{n}$ ce qu'il fallait démontrer. \square

2.4.5 Chiffrement RSA

1. Aísling choisit p et q , deux nombres premiers distincts, qu'elle garde secrets.
Exemple : $p = 2647$ et $q = 3181$. Bien entendu Aísling a intérêt de choisir des nombres plus grands si elle veut garantir le secret.
2. Aísling calcule leur produit $n = pq$, appelé **module de chiffrement**, qu'elle rend public.
Exemple : $n = pq = 2647 \times 3181 = 8420107$.
3. Aísling calcule $\varphi(n) = (p - 1)(q - 1)$, qu'elle garde secret.
Exemple : $\varphi(n) = (p - 1)(q - 1) = 2646 \times 3180 = 8414280$.
4. Aísling choisit un entier naturel e premier avec $\varphi(n)$ et strictement inférieur à $\varphi(n)$, appelé **exposant de chiffrement**, qu'elle rend public.
Exemple : $e = 2801$.
5. Aísling calcule l'entier naturel d , inverse de e modulo $\varphi(n)$, et strictement inférieur à $\varphi(n)$, appelé **exposant de déchiffrement** : d peut se calculer efficacement par l'algorithme d'Euclide étendu (voir la remarque 3).
Exemple : $d = 7639241$.

Brendan veut envoyer un message à Aísling. Ce message est transformé de façon transparente en un nombre a . Ensuite Brendan calcule $b := a^e$ modulo n , qu'il transmet à Aísling.

Aísling reçoit b et calcule $c := b^d$ modulo n . Or $c \equiv a^{ed} \equiv a^1 \pmod{n}$. Autrement dit Aísling est en mesure de reconstituer le message de Brendan.

Ciarán veut connaître le message a . Il connaît n et e qui sont publics. Il a réussi à intercepter le message codé $b = a^e$. Pour reconstituer a il a donc besoin de trouver d . Il le pourra s'il connaît $\varphi(n)$, c'est-à-dire s'il connaît p et q (ou $p + q$). Autrement dit la sécurité de la communication dépend de la difficulté de décomposer n en produit de deux facteurs premiers.

De ce fait, il est important pour Aísling d'avoir à sa disposition de grands nombres premiers.

2.5 Résidus quadratiques

Soit p un nombre premier impair, c'est-à-dire supérieur ou égal à 3.

Dans ce paragraphe, on gardera les notations φ_a , Z_p^\times du paragraphe précédent. Le théorème 21 devient :

$$\forall a \in Z_p^\times = \{1, 2, \dots, p-1\}, a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Une démonstration alternative est donnée à l'exercice 32 page 58.

2.5.1 Définition

Définition 8.

Soit p un nombre premier impair, soit $m \in Z_p^\times$.

On dit que m est un **résidu quadratique** modulo p s'il existe $a \in Z_p^\times$ tel que $m \equiv a^2 \pmod{p}$.

On note $\left(\frac{m}{p}\right) = 1$ si m est résidu quadratique modulo p et $\left(\frac{m}{p}\right) = -1$ sinon.

Remarque 7.

Le symbole $\left(\frac{m}{p}\right) = 1$ est appelé **symbole de Legendre**.

Notation 3.

On note par la suite $C := \left\{ m \in Z_p^\times, \left(\frac{m}{p}\right) = 1 \right\}$ et $\bar{C} := \left\{ m \in Z_p^\times, \left(\frac{m}{p}\right) = -1 \right\}$.

Lemme 22

Soit m et n deux éléments de Z_p^\times .

Si $m^2 \equiv n^2 \pmod{p}$ alors $m \equiv n \pmod{p}$ ou $m \equiv -n \pmod{p}$.

Démonstration 22

En effet on a $(m+n)(m-n) \equiv 0 \pmod{p}$. Si on n'a pas $(m+n) \equiv 0 \pmod{p}$ alors il existe $u \in Z_p^\times$ tel que $u(m+n) \equiv 1 \pmod{p}$. Dans ces conditions on a $u(m+n)(m-n) \equiv 0 \pmod{p}$ soit $m-n \equiv 0 \pmod{p}$.

Raisonnement symétrique si on n'a pas $(m-n) \equiv 0 \pmod{p}$. □

Théorème 23

$$\text{Card}(C) = \text{Card}(\overline{C}) = \frac{p-1}{2}.$$

Démonstration 23

1. Les restes modulo p des nombres $1^2, 2^2, \dots, \frac{p-1}{2}$ sont distincts d'après le lemme 22 et appartiennent à Z_p^\times toujours d'après le même lemme. Donc $\text{Card}(C) \geq \frac{p-1}{2}$. Reste à montrer qu'il n'y a pas d'autre élément dans C .
2. Soit $m \in Z_p^\times$ pour lequel il existe $a \in Z_p^\times$ tel que $m \equiv a^2 \pmod{p}$. Supposons que a n'appartienne pas à $\{1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}\}$, cela signifie que $\frac{p-1}{2} < a < p$. Dans ces conditions, on a $0 < p-a < \frac{p+1}{2}$ c'est-à-dire $0 < p-a \leq \frac{p-1}{2}$. Comme a et $p-a$ ont les mêmes carrés modulo p , on a bien m congru à l'un des nombres $1^2, 2^2, \dots, \frac{p-1}{2}$.
3. On a donc $\text{Card}(C) = \frac{p-1}{2}$. Comme $\text{Card}(Z_p^\times) = p-1$, il reste $\text{Card}(\overline{C}) = \frac{p-1}{2}$. \square

2.5.2 Caractère quadratique d'Euler**Théorème 24 (Wilson)**

On a $\prod_{m \in Z_p^\times} m \equiv -1 \pmod{p}$.

Démonstration 24

Soit $m_1 \in Z_p^\times \setminus \{1, p-1\}$. Comme φ_{m_1} est bijectif, il existe un unique $u_1 \in Z_p^\times$ tel que $u_1 m_1 \equiv 1 \pmod{p}$. De plus, d'après le lemme 22 on a $u_1 \neq m_1$ et aussi $u_1 \neq 1$ et $u_1 \neq -1$.

On choisit ensuite $m_2 \in Z_p^\times \setminus \{1, p-1, m_1, u_1\}$. À nouveau, il existe un unique $u_2 \in Z_p^\times$ tel que $u_2 m_2 \equiv 1 \pmod{p}$. De plus, d'après le lemme 22 on a aussi $u_2 \neq m_2$, $u_2 \neq 1$ et $u_2 \neq -1$ et de plus $u_2 \neq u_1$ et $u_2 \neq m_1$ (injectivité de φ_{u_2} et de φ_{m_2}).

(...)²

Au bout de $\frac{p-1}{2}$ choix, on a épuisé tous les éléments de Z_p^\times . Il est temps d'effectuer

$$\prod_{m \in Z_p^\times} m \equiv 1 \times (-1) \times (u_1 m_1) \times (u_2 m_2) \times \dots \times (u_{\frac{p-1}{2}} m_{\frac{p-1}{2}}) \equiv 1 \times (-1) \times 1 \times 1 \times \dots \times 1 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Théorème 25 (Euler (1761))

Soit p un nombre premier impair, soit m un entier premier avec p . On a

$$m^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{m}{p}\right) \pmod{p}.$$

2. Comme on dit lorsqu'on n'a pas envie de rédiger une récurrence.

Démonstration 25

1. Soit $m \in C$. Il existe $a \in Z_p^\times$ tel que $m \equiv a^2 \pmod{[p]}$. De ce fait

$$m^{\frac{p-1}{2}} \equiv (a^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv a^{p-1} \equiv 1 \pmod{[p]},$$

d'après le théorème 21.

2. Soit $m \in \overline{C}$. On va procéder comme pour la démonstration du lemme 24.

On choisit $m_1 \in Z_p^\times$. Comme φ_{m_1} est bijectif, il existe un unique $u_1 \in Z_p^\times$ tel que $u_1 m_1 \equiv m \pmod{[p]}$. De plus on a $u_1 \neq m_1$ car sinon on aurait $m \equiv u_1^2 \pmod{[p]}$ ce qui est impossible avec $m \in \overline{C}$.

On choisit ensuite $m_2 \in Z_p^\times \setminus \{m_1, u_1\}$. À nouveau, il existe un unique $u_2 \in Z_p^\times$ tel que $u_2 m_2 \equiv m \pmod{[p]}$. De plus $u_2 \neq m_2$ ($m \in \overline{C}$), $u_2 \neq u_1$ et $u_2 \neq m_1$ (injectivité de φ_{u_2}).

(...)³

Au bout de $\frac{p-1}{2}$ choix, on a épuisé tous les éléments de Z_p^\times . On peut alors effectuer

$$-1 \equiv \prod_{n \in Z_p^\times} n \equiv (u_1 m_1) \times (u_2 m_2) \times \dots \times (u_{\frac{p-1}{2}} m_{\frac{p-1}{2}}) \equiv m \times m \times \dots \times m \equiv m^{\frac{p-1}{2}} \pmod{[p]}.$$

Théorème 26

Soit p un nombre premier impair.

1.

$$\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{[p]}$$

2.

$$\left(\frac{2}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \pmod{[p]}$$

Démonstration 26

1. Simple application du théorème 25 dans le cas $m = p - 1 \equiv -1 \pmod{[p]}$.

2. On écrit les $\frac{p-1}{2}$ congruences

$$\begin{array}{rcl} p-1 & \equiv & 1 \times (-1)^1 \pmod{[p]} \\ 2 & \equiv & 2 \times (-1)^2 \pmod{[p]} \\ p-3 & \equiv & 3 \times (-1)^3 \pmod{[p]} \\ 4 & \equiv & 4 \times (-1)^4 \pmod{[p]} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r & \equiv & \frac{p-1}{2} \times (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{[p]} \end{array}$$

3. Air connu.

où $r = \frac{p-1}{2}$ ou $p - \frac{p-1}{2}$ suivant la parité de $\frac{p-1}{2}$. On multiplie ces congruences entre elles en remarquant que les nombres de gauche sont tous pairs :

$$2 \times 4 \times \dots \times (p-1) \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)! \times (-1)^{1+2+\dots+(p-1)/2} \pmod{p}.$$

En mettant 2 en facteur dans chaque facteur de gauche, on obtient

$$2^{\frac{p-1}{2}} \times \left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)! \times (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \pmod{p}.$$

Tous les facteurs qui interviennent dans $\left(\frac{p-1}{2}\right)!$ sont strictement inférieurs à p donc premiers avec p qui est premier. Donc leur produit, $\left(\frac{p-1}{2}\right)!$ est premier avec p . On en déduit que $2^{\frac{p-1}{2}} \times \left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \pmod{p}$ ce qu'il fallait vérifier. \square

Par conséquent -1 est résidu quadratique modulo p si et seulement si $p \equiv 1 \pmod{4}$ et 2 est résidu quadratique modulo p si et seulement si $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$.

Théorème 27

Soit m et m' deux nombres premiers avec p . On a

$$\left(\frac{mm'}{p}\right) = \left(\frac{m}{p}\right) \times \left(\frac{m'}{p}\right)$$

Démonstration 27

En effet

$$\left(\frac{mm'}{p}\right) \equiv (mm')^{\frac{p-1}{2}} \equiv m^{\frac{p-1}{2}} \times m'^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{m}{p}\right) \times \left(\frac{m'}{p}\right) \pmod{p}.$$

Comme ces deux nombres appartiennent à $\{-1, 1\}$ et sont congrus modulo $p \neq 2$, ils sont égaux. \square

2.5.3 Loi de réciprocité quadratique

On se donne deux nombres premiers impairs et distincts p et q .

On considère l'ensemble $\mathcal{A} := \left\{1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}\right\}$.

Soit $m \in \mathcal{A}$. On effectue la division euclidienne de qm par p :

$$qm = r_m + k_m p,$$

avec $r_m \in \mathbb{Z}_p^\times$ puisque $r_m = 0$ est exclus (m et q sont premiers à p donc il en est de même de leur produit). On veut se ramener à des restes dans \mathcal{A} .

Si $r_m \in \mathcal{A}$, il n'y a rien à faire. On pose $\rho_m := r_m$ et on peut écrire

$$qm = \rho_m + k_m p. \tag{2.1}$$

Sinon on écrit $\rho_m := r_m - p$ avec $-\rho_m \in \mathcal{A}$ et

$$qm = \rho_m + p + k_m p. \tag{2.2}$$

On écrit ces $\frac{p-1}{2}$ égalités pour les $\frac{p-1}{2}$ valeurs de $m \in \mathcal{A}$. Il y en a s du type (2.2) et $t := \frac{p-1}{2} - s$ du type (2.1)

Lemme 28 (de Gauss)

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^s.$$

Démonstration 28

On transforme les égalités (2.1) et (2.2) en $\frac{p-1}{2}$ congruences modulo p :

$$qm \equiv \rho_m \pmod{p}. \quad (2.3)$$

Maintenant les $\frac{p-1}{2}$ restes ρ_m ne sont jamais égaux ni opposés. En effet, $\rho_m = \pm \rho_{m'}$ entraîne $q(m \mp m') \equiv 0 \pmod{p}$ donc $m \mp m' \equiv 0 \pmod{p}$ et $m \equiv \pm m' \pmod{p}$ donc $m = m'$ (il n'y a pas d'opposés dans \mathcal{A}). De ce fait on obtient une injection

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ m &\longmapsto |\rho_m| \end{aligned}$$

c'est donc une bijection d'après le théorème 10 page 463 du cours de première.

On a donc $\prod_{m \in \mathcal{A}} |\rho_m| = \left(\frac{p-1}{2}\right)!$. Par ailleurs $\rho_m = -|\rho_m|$ si et seulement si m produit une égalité du type (2.2).

Donc $\prod_{m \in \mathcal{A}} \rho_m = (-1)^s \left(\frac{p-1}{2}\right)!$. On peut donc conclure en multipliant les $\frac{p-1}{2}$ congruences (2.3) que

$$q^{\frac{p-1}{2}} \times \left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv (-1)^s \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p},$$

puis – comme on l'a déjà vu lors de la démonstration du théorème 25 –

$$q^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^s \pmod{p}.$$

Le théorème 25 permet d'achever la démonstration. □

Théorème 29 (Loi de réciprocité quadratique)

Soit p et q deux nombres premiers impairs et distincts.

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

Démonstration 29

On transforme les égalités (2.1) et (2.2) en $\frac{p-1}{2}$ congruences modulo 2 cette fois :

$$m \equiv \rho_m + k_m \pmod{2} \text{ pour (2.1) et } m \equiv 1 + \rho_m + k_m \pmod{2} \text{ pour (2.2).}$$

En additionnant ces $\frac{p-1}{2}$ congruences on obtient

$$\sum_{m=1}^{\frac{p-1}{2}} m \equiv s + \sum_{m=1}^{\frac{p-1}{2}} \rho_m + \sum_{m=1}^{\frac{p-1}{2}} k_m \pmod{[2]}.$$

Or on a vu plus haut que $\sum_{m=1}^{\frac{p-1}{2}} m = \sum_{m=1}^{\frac{p-1}{2}} |\rho_m|$. Or $|\rho_m| = \pm \rho_m \equiv \rho_m \pmod{[2]}$. De ce fait,

$$s \equiv \sum_{m=1}^{\frac{p-1}{2}} k_m \pmod{[2]}.$$

Or k_m est le quotient euclidien de qm par p c'est-à-dire $\left\lfloor \frac{qm}{p} \right\rfloor$, la partie entière de $\frac{qm}{p}$. Donc $s \equiv \sum_{m=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{qm}{p} \right\rfloor \pmod{[2]}$.

En inversant les rôles de p et de q on obtient :

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^\alpha$$

avec $\alpha := \sum_{m=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{qm}{p} \right\rfloor + \sum_{m'=1}^{\frac{q-1}{2}} \left\lfloor \frac{pm'}{q} \right\rfloor$.

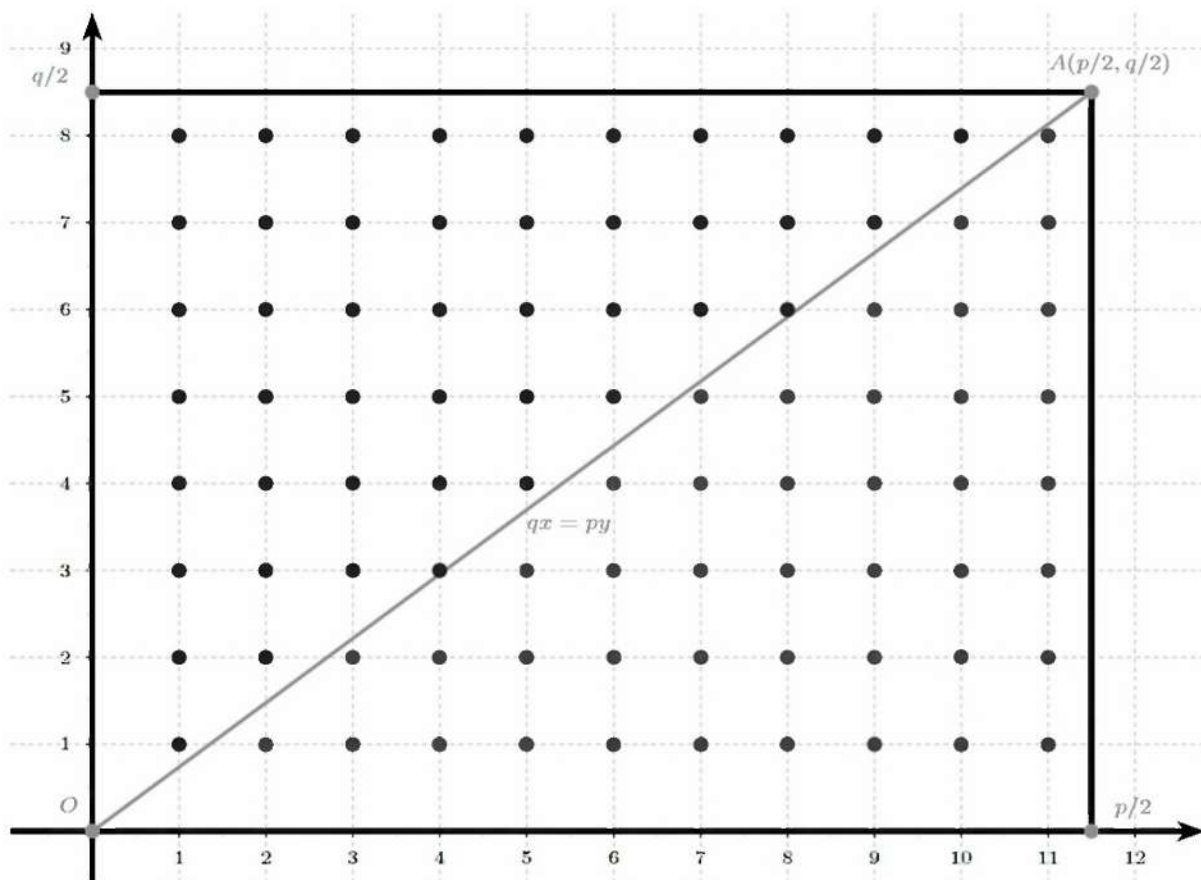
Dans un repère orthonormé on trace le rectangle de sommets de coordonnées $(0,0)$, $(p/2,0)$, $(p/2,q/2)$ et $(0,q/2)$. On trace la diagonale d'équation $qx = py$.

Lorsqu'on prend une abscisse m avec $1 \leq m < p/2$, soit $1 \leq m \leq \frac{p-1}{2}$, l'entier $\left\lfloor \frac{qm}{p} \right\rfloor$ est le nombre de points rouges à coordonnées entières, d'abscisse m sous la diagonale. En sommant sur m , la somme $\sum_{m=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{qm}{p} \right\rfloor$ est le nombre de points sous la diagonale.

Symétriquement, $\sum_{m'=1}^{\frac{q-1}{2}} \left\lfloor \frac{pm'}{q} \right\rfloor$ est le nombre de points sous la diagonale.

Avant de pouvoir affirmer que α est le nombre de points à coordonnées entières à l'intérieur du rectangle, encore faut-il s'assurer qu'il n'y a pas de points sur la diagonale (qui auraient été comptés deux fois). En effet une solution de $pm = qm'$ entraîne $p \mid qm'$ donc $p \mid m'$ d'après le théorème de Gauss 9, ce qui n'est pas possible avec $1 \leq m < p/2$.

Il ne reste plus qu'à compter les points à coordonnées entières. C'est $\alpha = \frac{p-1}{2} \times \frac{q-1}{2}$. La loi de réciprocité quadratique en découle. \square



$p = 23$ et $q = 17$.

Exemple 11

On a $\left(\frac{1789}{2017}\right) \left(\frac{2017}{1789}\right) = (-1)^{1008 \times 894} = 1$ d'après la loi de réciprocité quadratique. Donc $\left(\frac{1789}{2017}\right) = \left(\frac{2017}{1789}\right) = \left(\frac{228}{1789}\right)$ par réduction modulo 1789. Or $228 = 2^2 \times 3 \times 19$.

On a clairement $\left(\frac{2^2}{2017}\right) = 1$. Par ailleurs $\left(\frac{3}{1789}\right) \left(\frac{1789}{3}\right) = (-1)^{1 \times 894} = 1$ et $\left(\frac{19}{1789}\right) \left(\frac{1789}{19}\right) = (-1)^{9 \times 894} = 1$ d'après la loi de réciprocité quadratique. Donc $\left(\frac{1789}{2017}\right) = \left(\frac{1789}{3}\right) \times \left(\frac{1789}{19}\right) = \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{3}{19}\right)$ par réductions modulo 3 et 19.

On a clairement $\left(\frac{1}{3}\right) = 1$. On a $\left(\frac{3}{19}\right) \left(\frac{19}{3}\right) = (-1)^{1 \times 9} = -1$ d'après la loi de réciprocité quadratique.

Donc $\left(\frac{1789}{2017}\right) = -\left(\frac{19}{3}\right) = -1 \times \left(\frac{1}{3}\right) = -1$.

Donc 1789 n'est pas un carré modulo 2017.

Xcas donne le résultat sans difficulté apparente.

Xcas en ligne. Tapez une instruction dans cette console (assistant avec la bouée).

```
legendre_symbol(1789,2017)
```

```
-1
```

2.6 Exercices

2.6.1 Divisibilité

Exercice 1.

Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation $x - 1 \mid x + 3$.

Exercice 2.

Sachant que $3285 = 25 \times 123 + 210$ trouver, sans effectuer cette division, le reste et le quotient de la division euclidienne de 3285 par 123.

Exercice 3.

Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 24.

Exercice 4.

Montrer que $\forall n \geq 0, 6 \mid 5n^3 + n$.

2.6.2 Congruences

Exercice 5.

Démontrer que $A = 55^{2012} + 55^{2011} + 55^{2010}$ est un multiple de 13.

Exercice 6.

Quels sont les deux derniers chiffres (des unités et des dizaines) de 2011^{2011} ?

Exercice 7.

Démontrer, en réduisant modulo 7, que l'équation $a^2 - 7b^2 = -1$ n'admet pas de solution $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

Exercice 8.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$.
Démontrer que n^p et n^{p+4} ont le même chiffre des unités.

Exercice 9.

Démontrer que, lorsque n est entier, $3n^2 + 3n + 7$ n'est jamais un cube.

Indication 1.

On pourra raisonner modulo 9.

Exercice 10.

Déterminer l'ensemble des congruences de carrés modulo 11.
On s'intéresse ensuite à l'équation $x^2 + y^2 = 11z^2$.

Exercice 11.

1. Écrire une relation de Bézout entre 100 et 13.
2. Démontrer qu'il existe deux exposants distincts m et n dans \mathbb{N} , tels que $13^m \equiv 13^n \pmod{100}$.
3. En déduire qu'il existe un exposant $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $13^p \equiv 1 \pmod{100}$.
4. Démontrer qu'il existe un exposant $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que,

$$\forall p \in \mathbb{N}, (13^p \equiv 1 \pmod{100}) \implies (p_0 \mid p).$$

5. Vérifier que $p_0 = 20$.
6. Quels sont les deux derniers chiffres (des unités et des dizaines) de 2013^{2013} ?

Exercice 12.

1. Démontrer qu'il n'existe aucun $n \in \mathbf{N}^*$ vérifiant l'égalité

$$(3 + 4i)^n = 5^n.$$

2. Soit a, b et c trois entiers non nuls vérifiant

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Démontrer qu'il n'existe aucun $n \in \mathbf{N}^*$ vérifiant l'égalité

$$(a + bi)^n = c^n.$$

2.6.3 Bézout, PGCD, PPCM**Exercice 13.**

Calculer le pgcd des couples

1. $(120, 230)$

2. $(210, 135)$

3. $(211, 112)$

Exercice 14.

Soient a, b des nombres premiers entre eux. Montrer que :

1. $a \wedge (a + b) = b \wedge (a + b) = 1.$

2. $(a + b) \wedge ab = 1.$

Exercice 15.

Trouver tous les couples d'entiers naturels $(a, b) \in \mathbf{N}^2$ ($a \leq b$) tels que $a \wedge b = 18$ et $a + b = 360$.

Exercice 16.

Trouver tous les couples d'entiers naturels $(a, b) \in \mathbf{N}^2$ ($a \leq b$) tels que $a \wedge b = 18$ et $ab = 126$.

Exercice 17.

Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation $1665x + 1035y = 45$.

Exercice 18 (pgcd binaire).

Soit a et b deux entiers naturels.

1. Démontrer que $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a - b, b)$.
2. Démontrer que si a et b sont pairs alors $\text{pgcd}(a, b) = 2\text{pgcd}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$.
3. Démontrer que si a est pair et b est impair alors $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}\left(\frac{a}{2}, b\right)$.
4. Décrire un algorithme de calcul du pgcd de a et b basé sur les propriétés précédentes.

Exercice 19.

Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si tout entier supérieur ou égal à $(a - 1)(b - 1)$ est de la forme $au + bv$ pour un couple $(u, v) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 20.

Soient deux entiers non nuls $(n, m) \in \mathbb{N}^{*2}$. On suppose que $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q}$. Montrez qu'alors $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 21.

Soient deux entiers non nuls $(a, b) \in \mathbb{Z}^{*2}$. On note $\delta = a \wedge b$ leur pgcd et $\mu = a \vee b$ leur ppcm. Montrez que

$$(a + b) \wedge \mu = \delta$$

Exercice 22.

Trouver les couples d'entiers $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$ vérifiant

$$11x - 5y = 10 \text{ et } x \wedge y = 10$$

Exercice 23.

Considérons deux entiers $(a, b) \in \mathbb{Z}^{*2}$ premiers entre eux : $a \wedge b = 1$ et un couple de Bézout $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au_0 + bv_0 = 1$. Déterminer l'ensemble de tous les couples de Bézout $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant $au + bv = 1$.

Exercice 24.

Soient deux entiers non nuls $(a, b) \in \mathbb{Z}^{*2}$ premiers entre eux. On suppose de plus que $|a|$ et $|b|$ ne sont pas tous les deux égaux à 1. Démontrez qu'il existe deux entiers $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$au + bv = 1 \text{ et } |u| < |b|, |v| \leq |a|$$

Exercice 25.

Soient n et k deux entiers naturels strictement positifs.

1. Démontrez que $\frac{n}{n \wedge k}$ divise $\binom{n}{k}$.
2. Démontrez que $\frac{n+1-k}{(n+1) \wedge k}$ divise $\binom{n}{k}$.
3. Démontrez que $\frac{(n+1) \wedge (k-1)}{n+2-k} \binom{n}{k-1}$ est un entier.

Exercice 26.

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2}b_n$. Montrer ensuite que les entiers a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 27.

On considère la suite de Fibonacci définie par

$$u_0 = 0, u_1 = 1, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1. Montrer que $\forall n \geq 1, u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$.
2. Montrer que deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*$.

$$u_{n+p} = u_n u_{p-1} + u_{n+1} u_p$$

et en déduire que

$$u_n \wedge u_p = u_n \wedge u_{n+p}$$

4. Montrer que $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$,

$$u_n \wedge u_m = u_{n \wedge m}$$

5. Montrer que pour tout entier $n \geq 5$, si u_n est un nombre premier, alors n est un nombre premier. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 28.

On appelle **nombre de Fermat**, les entiers de la forme

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer que pour tout entier $x \in \mathbb{N}$, l'entier $x^{2^p} - 1$ est divisible par $x + 1$.
2. Montrer que deux nombres de Fermat distincts sont premiers entre eux.

2.6.4 Nombres premiers**Exercice 29.**

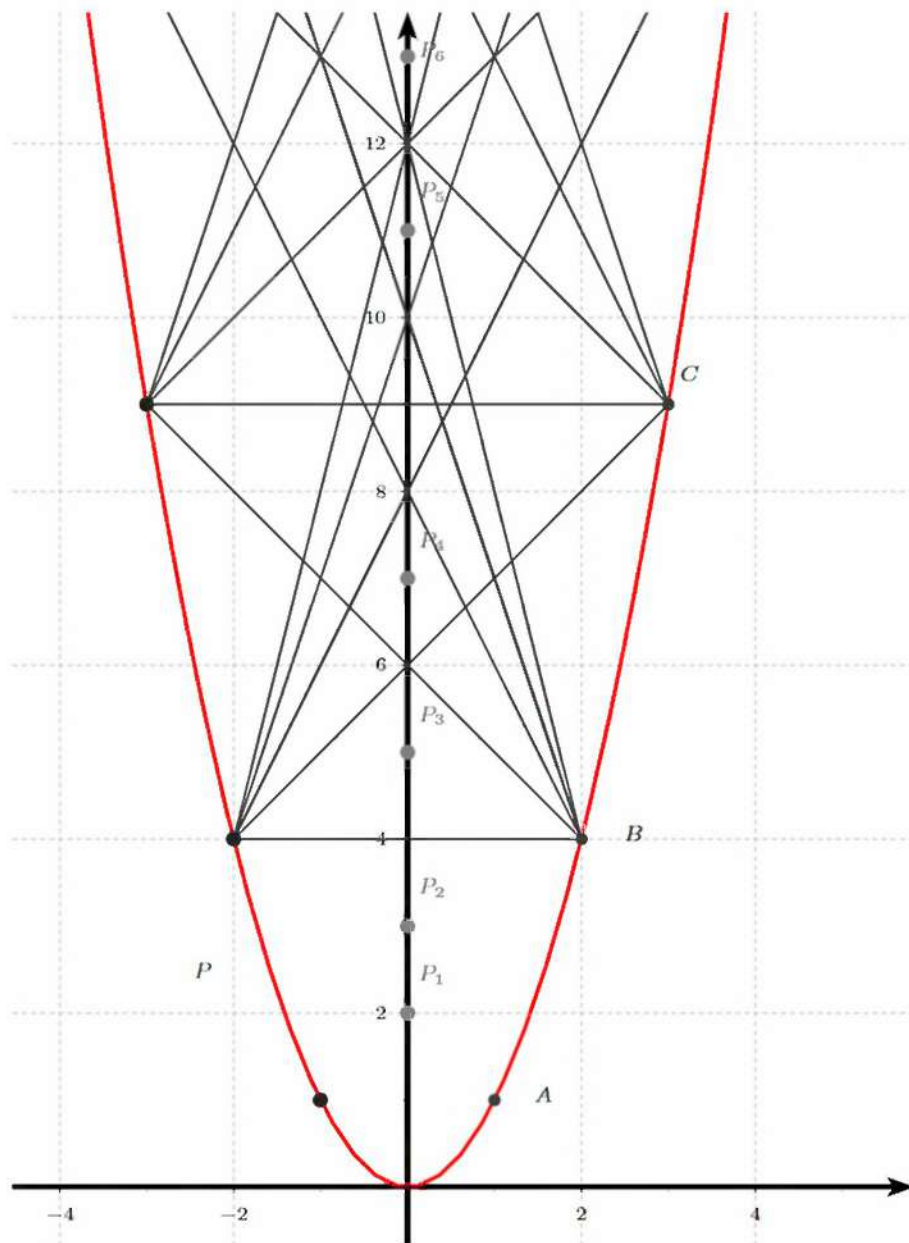
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$2^n - 1 \text{ premier} \implies n \text{ premier}.$$

Exercice 30.

Montrer que le nombre $n^4 - n^2 + 16$ avec $n \in \mathbb{Z}$ est composé.

Exercice 31 (Parabole de Matsijevic).



Sur la parabole d'équation $y = x^2$ on relie entre eux tous les points à coordonnées entières dont l'ordonnée est strictement plus grande que 1. Démontrer que les points de l'axe des ordonnées d'ordonnée entière strictement plus grande que 1 qui ne sont pas atteints par l'un des segments sont les points dont l'ordonnée est un nombre premier.

Exercice 32.

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que $\forall k \in \{1, \dots, p-1\}, p \mid \binom{p}{k}$.
2. En déduire le **petit théorème de Fermat** :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, p \mid n^p - n.$$

3. Résoudre en entiers naturels n et m .
$$\begin{cases} n^{17} + m^{17} = 232630643127370 \\ n^{13} - m^{13} = 96887416084 \end{cases}$$

Exercice 33.

1. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathcal{P}, p > 2$,

$$x^p + 1 = (x + 1)(1 - x + x^2 + \dots + x^{p-1}).$$

2. Soit $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $a^n + 1$ est premier.
 - (a) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^k$.
 - (b) Que penser de l'affirmation : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2^n} + 1$ est premier ?

Exercice 34.

Soit p et q deux nombres premiers distincts.

Démontrer que pour tout entier naturel $n, p^{2^n} + q^{2^n}$ n'est pas un multiple de $p + q$.

Exercice 35.

À la suite d'un hold-up, on interroge quatre témoins qui ont vu les malfaiteurs s'enfuir en voiture : Antonin dit que le numéro d'immatriculation comporte quatre chiffres. Bébert, que les deux premiers chiffres sont identiques. Corentin que les deux derniers chiffres sont identiques. Dudule le matheux a remarqué que le nombre en question est un carré parfait. Quel est ce numéro d'immatriculation ?

Exercice 36 (Vrai ou Faux?).

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3u_n + 1$.
 L'affirmation suivante est-elle vraie ?
 « Pour tout nombre premier impair p , l'entier naturel u_p est un nombre premier. »

2.6.5 Décomposition en facteurs premiers.**Exercice 37.**

Démontrer que $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 38.

Déterminer le nombre de diviseurs de $10!$.

Exercice 39.

Au cours d'un congrès de mathématiques, des mathématiciens (en nombre n) sont logés dans les n chambres d'un hôtel. Ils décident (dans des circonstances qui restent à déterminer), de s'attribuer le numéro de leur chambre. Avant que la horde ne se mette à envahir l'hôtel toutes leurs chambres sont fermées. Le mathématicien numéro k doit changer l'état (ouvert/fermé) des chambres qui portent un numéro multiple du sien.

1. Quel est le nombre de portes qui seront ouvertes après le passage des mathématiciens ?

2. Démontrer que $\sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ est un entier pair. $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x .

Exercice 40.

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble E des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^{*3}$ vérifiant l'équation de Pythagore :

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

1. Montrer que pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$, le triplet $(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$ appartient à l'ensemble E . Donner 3 éléments distincts de l'ensemble E .
2. On considère un triplet $(x, y, z) \in E$ vérifiant $x \wedge y = 1$.
 - (a) Montrer qu'alors $x \wedge z = 1$ et $y \wedge z = 1$.
 - (b) Montrer que les entiers x et y ne sont pas de même parité.
 - (c) On suppose par exemple que x est impair et que y est pair. Montrer qu'il existe deux entiers non nuls $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ premiers entre eux tels que

$$x = p - q, \quad y = p + q, \quad y^2 = 4pq$$

Montrer que p et q sont des carrés parfaits.

3. En déduire l'ensemble E .

Exercice 41.

D'après Antoine Chambert-Loir.

Le code de sécurité sociale est formé de 13 chiffres décimaux suivi d'une clef de deux chiffres. Si N est l'entier de 13 chiffres et c la clef, on a

$$c \equiv 97 - N \pmod{97},$$

c étant compris entre 1 et 97.

1. Montrer que 97 est un nombre premier.
2. Quelle est la clef d'un individu dont le numéro de sécurité sociale serait 1-79-64-78-646-378 ?
3. Un numéro de sécurité sociale est 2-54-xx-35-231-584, clé 79, mais les caractères xx sont illisibles. Quel est le département de naissance de la personne en question ?
4. Montrer que la clef de contrôle détecte une erreur sur un chiffre.
5. Montrer que $n = 96$ est le plus petit entier > 0 tel que $10^n \equiv 1 \pmod{97}$.
6. Montrer plus généralement que la clef de contrôle détecte l'interversion de deux chiffres quelconques.

Exercice 42.

1. Trouver $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels la double inégalité

$$(a \wedge bc) (b \wedge c) = (b \wedge ac) (a \wedge c) = (c \wedge ab) (a \wedge b)$$

n'est pas vérifiée.

2. On dit que $n \in \mathbb{N}$ est libre de carrés s'il n'est pas divisible par le carré d'un entier > 2 .
Démontrer que si $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ sont des entiers libres de carrés, alors on a :

$$(a \wedge bc) (b \wedge c) = (b \wedge ac) (a \wedge c) = (c \wedge ab) (a \wedge b).$$

2.6.6 Exercices supplémentaires**Exercice 43.**

1. Soit $a \in \{0, \dots, 15\}$. Pour quelles valeurs de a l'équation $k^4 \equiv a \pmod{16}$ admet-elle des solutions k dans \mathbb{Z} .

2. Résoudre en nombres entiers l'équation $\sum_{i=1}^{12} x_i^4 = 2013$.

Exercice 44.

Soit n un entier. En regardant modulo 3, démontrer que $N = (n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (n+99)^2$ n'est jamais la puissance p -ième d'un entier, avec $p \geq 2$.

Exercice 45.

Soit $a, k \in \mathbb{N}^*$ tels que $a^2 + k \mid (a-1)a(a+1)$. Démontrer que $k \geq a$.

Exercice 46.

Trouver un entier naturel n qui n'admet pas d'autres diviseurs premiers que 2 et 3 tel que n^2 admet 3 fois plus de diviseurs dans \mathbb{N} que n .

Exercice 47.

Soit α, d et n trois entiers naturels tels que d et α sont premiers entre eux et tels que $d \geq 2$ et $n \geq 2$. Existe-t-il toujours un entier choisi parmi $\alpha, \alpha + d, \alpha + 2d, \dots, \alpha + (n-1)d$ qui soit premier avec n ?

Exercice 48.

Soit n un entier pair. Montrer que $n + 1$ divise $S_n = \sum_{k=1}^n k^{n+1}$.

Exercice 49.

Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que 7 divise n^n .

Exercice 50.

Démontrer que si p et $p^2 + 2$ sont premiers alors $p^3 + 2$ l'est aussi.

Exercice 51.

Démontrer que $S := 3^{105} + 4^{105}$ est divisible par 13, 43, 49, 181, 211, 379.

Exercice 52.

On veut déterminer les couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation

$$7^n - 3 \times 2^m = 1 \quad (E)$$

1. On suppose $m \leq 4$. Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.
2. On suppose maintenant que $m \geq 5$.
 - (a) Montrer que si (n, m) vérifie l'égalité (E) , alors $7^n \equiv 1 \pmod{32}$.
 - (b) En étudiant les reste de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple (n, m) vérifie l'égalité (E) , alors n est divisible par 4.
 - (c) En déduire que si le couple (n, m) vérifie l'égalité (E) , alors $7^n \equiv 1 \pmod{5}$.
 - (d) Pour $m \geq 5$, existe-t-il des couples (n, m) d'entiers naturels vérifiant l'égalité (E) ?
3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant l'égalité (E) .

Exercice 53 (Calcul de congruences).

1. Combien valent $12^{2006} \pmod{7}$ et $5^{641} \pmod{22}$?
2. Soit n un entier relatif. Montrer que $n^3 - n$ est divisible par 6 et que $n^5 - n$ est divisible par 30.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que 11 divise $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ et que 19 divise $2^{2^{6n+2}} + 3$.
4. Quel est le dernier chiffre décimal de $S := 7^{7^{7^{7^{7^7}}}}$?

Exercice 54.

Résoudre dans \mathbb{Z}^2 les équations

$$529x + 391y = 23 \quad 368x + 161y = 253 \quad 585x + 287y = 23 \quad 10101x + 1001y = 101.$$

Exercice 55.

1. Soient a et b deux entiers. Quelle est la congruence modulo 4 de $a^2 + b^2$? Montrer que si p est un nombre premier différent de 2 qui s'écrit comme somme de deux carrés, alors $p - 1$ est un multiple de 4.
2. Montrer qu'un entier au carré est congru à 0 ou 1 modulo 4 et à 0, 1 ou 4 modulo 8. Une somme de trois carrés d'entiers peut-elle être congrue à -1 modulo 8?

Exercice 56.

Soient $a, b, n \in \mathbb{Z}$ tels que $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Montrer que $\text{pgcd}(an, b) = \text{pgcd}(n, b)$.

Exercice 57 (Parlez-vous chinois ?).

Résoudre les systèmes d'équations :

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{23} \\ x \equiv 3 \pmod{13} \end{cases} \quad \begin{cases} 7x \equiv 5 \pmod{19} \\ 3x \equiv 1 \pmod{11} \end{cases} \quad \begin{cases} x \equiv 8 \pmod{12} \\ x \equiv 1 \pmod{21} \end{cases}$$

Exercice 58 (Parlez-vous chinois ?).

Sous la dynastie des Tang, au VII^e siècle en Chine, l'empereur voulut connaître le nombre exact des ses soldats. Bien qu'il en eût un nombre presque innombrable, il savait qu'il en avait moins d'un demi-million. Il fit alors ranger ses soldats en carrés de trente personnes de côté. Il en resta 156. Il les fit alors se ranger en carrés de trente et une personnes de côté. Il en resta alors 448. Combien de soldats avait l'armée de l'empereur ?

Exercice 59 (Points à coordonnées entières sur une hyperbole).

On se propose de démontrer qu'il n'existe pas de points à coordonnées entières sur l'hyperbole d'équation $84x^2 - 137xy + 55y^2 = 1$.

1. Factoriser $84x^2 - 137xy + 55y^2$.

Indication 2.

XCas le fait très bien.

2. Résoudre l'équation en nombres entiers $(x, y) : 7x - 5y = 1$.
3. Démontrer qu'aucune solution de l'équation précédente n'est solution de l'équation en nombres entiers $(x, y) : 12x - 11y = 1$.
4. Terminer sur le même schéma la démonstration de ce qu'il n'existe pas de points à coordonnées entières sur l'hyperbole d'équation $84x^2 - 137xy + 55y^2 = 1$.

Exercice 60.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telles que $\det A$ et $\det B$ sont premiers entre eux. Montrer qu'il existe $U, V \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telles que $AU + BV = I_2$.

Exercice 61.

Soit a et b deux entiers supérieurs à 2.
Démontrer que $1 + ab$ divise $1 + a^4(1 + ab - b^4)$.

2.6.7 Résidus quadratiques**Exercice 62.**

Démontrer que l'équation

$$y^2 = x^3 + 23$$

n'a pas de solutions en entiers x et y .

Exercice 63.

Démontrer que l'équation

$$3x(x + 1) + 7 = y^3$$

n'a pas de solutions en entiers x et y .

Exercice 64.

1. Soit $P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} x^{a_i} \in \mathbb{Z}[x]$, où les $a_i \in \mathbb{N}$.

On suppose que les a_i forment un système complet de restes modulo n .

Démontrer que $p(x)$ est divisible par $g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} x^i$.

2. Démontrer que 1280000401 n'est pas premier.

Exercice 65.

Soit i un entier supérieur ou égal à 2.

Démontrer que $\left[\frac{(i-1)! + 1}{i} - \left\lfloor \frac{(i-1)!}{i} \right\rfloor \right] = 0$ si i n'est pas premier et 1 si i est premier.

Exercice 66 (Gauss (1876)).

Soit p un nombre premier impair, $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)$. On appelle $r_1, \dots, r_{\frac{p-1}{2}}$ les $\frac{p-1}{2}$ résidus quadratiques pour le module p et $n_1, \dots, n_{\frac{p-1}{2}}$ les $\frac{p-1}{2}$ non-résidus quadratiques pour le module p . Calculer

$$E(p) = \left(\omega^{r_1} + \dots + \omega^{r_{\frac{p-1}{2}}} \right) \left(\omega^{n_1} + \dots + \omega^{n_{\frac{p-1}{2}}} \right).$$

2.6.8 Probabilités**Exercice 67 (Indicatrice d'Euler).**

Soit $n > 1$ un entier fixé. On choisit de manière équiprobable un entier x dans $\{1, \dots, n\}$. Pour tout entier $m \leq n$, on note A_m l'événement « m divise x ». On note également B l'événement « x est premier avec n ». Enfin, on note p_1, \dots, p_r les diviseurs premiers de n .

1. Exprimer B en fonction des A_{p_k} .
2. Pour tout entier naturel m qui divise n , calculer la probabilité de A_m .
3. Montrer que les événements A_{p_1}, \dots, A_{p_r} sont mutuellement indépendants.
4. En déduire la probabilité de B .
5. Application : on note $\phi(n)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n . Démontrer que

$$\phi(n) = n \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_k} \right).$$

2.7 Solutions**2.7.1 Divisibilité****Solution 1**

On remarque que 1 n'est pas une solution de l'équation. On suppose donc que $x \neq 1$ et on écrit :

$$x - 1 \mid x + 3 \iff \frac{x+3}{x-1} = 1 + \frac{4}{x-1} \in \mathbb{Z}.$$

Mais les diviseurs de 4 sont $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Donc x est solution de l'équation si et seulement si $x - 1$ est égal à un de ces 6 nombres. On trouve alors pour l'ensemble solution $\{-3, -1, 0, 2, 3, 5\}$.

Solution 2

On sait que le reste doit être plus petit que le quotient. Alors $3285 = 25 \times 123 + 123 + 87 = 26 \times 123 + 87$ et par unicité du couple quotient-reste on trouve que le quotient est 26 et le reste 87.

Solution 3

On remarque que dans 4 nombres successifs, il y a toujours un diviseur de 2, un de 3 et un de 4. Donc il est clair que le produit de ces 4 nombres est divisible par 24.

Solution 4

Par récurrence. La propriété est vraie au rang 0. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $6 \mid 5n^3 + n$ et montrons que $6 \mid 5(n+1)^3 + n + 1$. On calcule : $5(n+1)^3 + n + 1 = 5n^3 + n + 15n^2 + 15n + 6$. Mais $6 \mid 5n^3 + n$ d'après l'hypothèse de récurrence. Comme $3 \mid 15$ que et $2 \mid n^2 + n = n(n+1)$ (n ou $n+1$ est pair), $6 \mid 15n^2 + 15n$ et la propriété reste vraie au rang $n+1$. On termine en appliquant le théorème de récurrence.

2.7.2 Congruences**Solution 5**

$$A = 55^{2010}(55^2 + 55 + 1) = 55^{2010}(55 \times 56 + 1).$$

Or $55 = 4 \times 13 + 3$ donc $55 \times 56 + 1 \equiv 3 \times 4 + 1 \pmod{13}$ soit $55 \times 56 + 1 \equiv 0 \pmod{13}$.

Solution 6

On a $2011 \equiv 11 \pmod{100}$, donc $2011^{2011} \equiv 11^{2011} \pmod{100}$. En développant à l'aide de la formule du binôme, on a

$$11^n = 1 + 10n + 100 \left(\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} 10^{k-2} \right).$$

Donc $11^n \equiv 1 + 10n \pmod{100}$. En particulier $11^{2011} \equiv 1 + 10 \times 2011 \pmod{100}$, soit $2011^{2011} \equiv 11 \pmod{100}$. Les deux derniers chiffres sont 1 et 1.

Solution 7

On considère le système complet de restes modulo 7 : $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Les carrés de ces nombres sont congrus à 9 (ou à 2), à 4, à 1 ou à zéro, modulo 7. Aucun n'est congru à -1 , donc d'après la proposition 4 p. 27, l'équation $x^2 \equiv -1 \pmod{7}$ n'admet pas de solution dans \mathbb{Z} . On en déduit que l'équation $a^2 - 7b^2 = -1$ n'admet pas de solution $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

Solution 8

On calcule $n^p(n^4 - 1) \pmod{10}$ et on montre que c'est toujours nul modulo 10 :

Si $n = 2, 4, 6, 8$ alors $n^4 - 1 \equiv 5 \pmod{10}$ donc $n^p(n^4 - 1) \equiv 2(\dots) \cdot 5 \equiv 0 \pmod{10}$

Si $n = 1, 3, 7, 9$ alors $n^4 - 1 \equiv 0 \pmod{10}$ donc $n^p(n^4 - 1) \equiv 0 \pmod{10}$

Si $n = 5$ alors $n^4 - 1 \equiv 4 \pmod{10}$ donc $n^p(n^4 - 1) \equiv 5^p \cdot 4 \equiv 0 \pmod{10}$ puisque $p \geq 1$

On peut aussi raisonner par récurrence :

$$\begin{aligned} (n+1)^{p+4} - (n+1)^p &= (n+1)^{p-1}[(n+1)^5 - (n+1)] \\ &= (n+1)^{p-1}[(n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1) - (n+1)] \\ &= (n+1)^{p-1}[(n^5 - n) + 10(n^3 + n^2) + 5(n^4 + n)] \end{aligned}$$

Comme $n^4 + n$ est pair, si le résultat vaut pour n et $p = 1$, alors il vaut pour $n+1$ et tout $p \geq 1$.

Solution 9

On considère $3n^2 + 3n + 7 \pmod{9}$. Si $n \equiv 0 \pmod{3}$ ou $n \equiv 2 \pmod{3}$ alors $n^2 + n \equiv n(n+1) \equiv 0 \pmod{3}$; si $n \equiv 1 \pmod{3}$ alors $n^2 + n \equiv 2 \pmod{3}$. Donc, $n^2 + n \equiv 0$ ou $2 \pmod{9}$ donc $3n^2 + 3n \equiv 0$ ou $6 \pmod{9}$, ainsi $3n^2 + 3n + 7 \equiv 7$ ou $4 \pmod{9}$.

Cependant, puisque tous les cubes sont congrus à $-1, 0$, ou $1 \pmod{9}$, on ne peut pas avoir un cube d'entier congru à 4 ou $7 \pmod{9}$, donc $3n^2 + 3n + 7$ n'est jamais un cube.

On peut aussi résoudre cet exercice avec un tableau de congruences :

$n \pmod{9}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n^2 \pmod{9}$	0	1	4	0	7	7	0	4	1
$n^2 + n \pmod{9}$	0	2	6	3	2	3	6	2	0
$3n^2 + 3n \pmod{9}$	0	6	0	0	6	0	0	6	0
$3n^2 + 3n + 7 \pmod{9}$	7	4	7	7	4	7	7	4	7
$p \pmod{9}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p^3 \pmod{9}$	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1

Voir aussi l'exercice 63 et sa solution 63.

Solution 10

Avec un tableau de congruences, on trouve l'ensemble $\mathcal{C} = \{0, 1, 3, 4, 5, 9\}$.

Soit x, y, z non nuls. solution. Quitte à diviser x, y et z par leur pgcd, on peut les supposer premiers entre eux dans leur ensemble. Or la seule possibilité pour obtenir un multiple de 11 en additionnant deux nombres de $\mathcal{C} = \{0, 1, 3, 4, 5, 9\}$ c'est de prendre 0 et 0. Donc $x \equiv 0 \pmod{11}$ et $y \equiv 0 \pmod{11}$. On peut donc écrire x et y sous la forme $x = 11k$ et $y = 11q$. On en déduit $z^2 = 11(k^2 + q^2)$ donc $11 \mid z^2$ et comme 11 est premier on a $11 \mid z$ donc 11 divise le pgcd de x, y et z . Contradiction.

On n'a donc que la solution $(0, 0, 0)$.

Solution 11

1. En écrivant $100 = 8 \times 13 - 4$ puis $13 = 4 \times 3 + 1$ on peut remonter :

$$1 = 13 - 4 \times 3 = 13 + 3 \times 100 - 24 \times 13 = 3 \times 100 - 23 \times 13.$$

2. Comme il y a 100 restes possibles, d'après le principe des tiroirs (proposition 11 p. 463) on peut trouver deux exposants distincts m et n inférieurs ou égaux à 100 tels que $13^m \equiv 13^n \pmod{100}$.
3. On prend $n < m$ pour fixer les idées. On a

$$13^{m-n} 13^n \equiv 13^n \pmod{100} \quad (1)$$

Comme 13 est premier avec 100, 13^n est aussi premier avec 100. On écrit une relation de Bézout (théorème 7) : $13^n u + 100v = 1$, ce qui entraîne $13^n u \equiv 1 \pmod{100}$. En multipliant (1) par u , on obtient $13^{m-n} 13^n u \equiv 13^n u \pmod{100}$ soit $13^{m-n} \equiv 1 \pmod{100}$. Il suffit donc de prendre $p = m - n$.

4. L'ensemble des $p \in \mathbb{N}^* \mid 13^p \equiv 1 \pmod{100}$ est non vide, donc admet un plus petit élément p_0 . Ensuite soit $p \in \mathbb{N}^* \mid 13^p \equiv 1 \pmod{100}$, en écrivant la division euclidienne par p_0 , on a $p = p_0 q + r$ avec $0 \leq r < p_0$. Donc $13^p = 13^{p_0 q + r} = (13^{p_0})^q 13^r \equiv 13^r \pmod{100}$. On en déduit que $r = 0$. Sinon il serait plus petit que le plus petit strictement positif à savoir p_0 . Dire que $r = 0$ c'est dire que $p_0 \mid p$.
5. On va utiliser l'exponentiation rapide. (exemple 17 p. 357 dans le cours de seconde.) puissance 2 : $13^2 = 169 \equiv -31 \pmod{100}$. puissance 4 : $(-31)^2 = 961 \equiv -39 \pmod{100}$. puissance 5 : $-39 \times 13 = -507 \equiv -7 \pmod{100}$. puissance 10 : $(-7)^2 \equiv 49 \pmod{100}$. puissance 20 : $49^2 = 2401 \equiv 1 \pmod{100}$. Donc p_0 divise 20. Maintenant $p_0 = 20$, car sinon on aurait $13^4 \equiv 1 \pmod{100}$ ou $13^{10} \equiv 1 \pmod{100}$.

6. On a $2013 = 100 \times 20 + 13$ donc $2013^{2013} \equiv 13^{13} \pmod{100}$. En recyclant les résultats de l'exponentiation rapide $13^{13} = 13^{10} \times 13^2 \times 13 \equiv 49 \times (-31) \times 13 \equiv -19747 \equiv 53 \pmod{100}$. Les deux derniers chiffres sont 5 et 3.

Bien entendu on peut dans une large mesure remplacer 100 et 2013 par deux nombres premiers entre eux.

Solution 12

1. On a $(3 + 4i)^2 \equiv (3 + 4i) \pmod{5}$. Par une récurrence sans difficulté, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists ((3 + 4i)^n)^2 \equiv 4 \pmod{5}$.
2. On montre par récurrence que $(a + ib)^n \equiv (2a)^{n-1}(a + ib) \pmod{c}$.

2.7.3 Bézout, PGCD, PPCM

Solution 13

On applique l'algorithme d'Euclide et on trouve :

1. $120 \wedge 230 = 10$
2. $210 \wedge 135 = 15$
3. $211 \wedge 112 = 1$

Solution 14

1. On suppose que a et $a + b$ ne sont pas premiers entre eux. Alors soit k un diviseur commun à a et $a + b$ différent de 1. Comme $k \mid a$ et que $k \mid a + b$, $k \mid b$ et donc $k \mid a \wedge b = 1$ ce qui n'est pas possible. Donc $a \wedge (a + b) = 1$. La seconde relation se prouve en échangeant les lettres a et b dans la première.
2. Comme avant, on suppose que ab et $a + b$ ne sont pas premiers entre eux. Alors soit k un diviseur premier commun à ab et $a + b$ différent de 1. Comme $k \mid ab$, $k \mid a$ ou $k \mid b$. On suppose que $k \mid a$, alors comme avant, comme $k \mid a + b$, $k \mid b$ et donc $k \mid a \wedge b = 1$ ce qui n'est pas possible.

Solution 15

Soient $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ un couple solution du problème. Alors il existe $(a', b') \in \mathbb{N}^2$ tel que $a = 18a'$, $b = 18b'$ et $a' \wedge b' = 1$. De plus comme $a + b = 360$, on sait que $a' + b' = 360/18 = 20$. En résumé, (a', b') est un couple de deux entiers premiers entre eux et de somme 20. Les seuls couples à vérifier cette propriété sont

$$(1, 19), (3, 17), (7, 13), (9, 11).$$

On multiplie ces couples par 18 pour retrouver le couple (a, b) :

$$(18, 342), (54, 306), (126, 234), (162, 198).$$

Réciproquement, chacun de ces couples vérifie les deux conditions.

Solution 16

Soient $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ un couple solution du problème. Alors il existe $(a', b') \in \mathbb{N}^2$ tel que $a = 18a'$, $b = 18b'$ et $a' \wedge b' = 1$. Comme $ab = 126$, on sait que $a'b' = 7$. Les seuls couples à vérifier cette propriété sont $(1, 6), (2, 5), (3, 4)$. On multiplie par 18 pour retrouver les couples (a, b) : $(18, 108), (36, 90), (54, 72)$. Réciproquement, chacun de ces couples vérifie les deux conditions.

Solution 17

Comme $1665 \wedge 1035 = 45$ cette équation est équivalente à $37x + 23y = 1$. Comme 37 et 23 sont premiers entre eux cette équation admet des solutions par le théorème de Bézout. Une d'entre elles est par exemple donnée par $x = 5$ et $y = -8$. Les autres s'en déduisent, elles sont de la forme $(5 - 23k, -8 + 37k)$. En effet, elles sont de la forme $(5 + a, -8 + b)$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. On injecte dans $37x + 23y = 1$ et il vient que $37a + 23b = 0$. Comme 23 et 37 sont premiers, on en déduit que $23 \mid a$ et $37 \mid b$. Donc il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels

que $a = 23k$ et $b = 37k'$. On injecte dans l'égalité $37a + 23b = 0$ et on trouve que $k = -k'$ d'où la forme des solutions. Réciproquement, tout couple de cette forme est solution de l'équation.

Solution 18 (pgcd binaire)

- $d := \text{pgcd}(a, b)$ divise a et b donc il divise leur différence $a - b$. C'est donc un diviseur commun à $a - b$ et à b donc il divise $d' := \text{pgcd}(a - b, b)$.
Inversement, d' divise $a - b$ et b donc il divise leur somme, donc il divise d .
- On a $2 \mid a$ et $2 \mid b$ donc $2 \mid d := \text{pgcd}(a, b)$: donc il existe $\delta \in \mathbb{N}$ tel que $d = 2\delta$.
Maintenant $\delta \mid \frac{a}{2}$ et $\delta \mid \frac{b}{2}$ donc $\delta \mid d' := \text{pgcd}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$.
Inversement $2d' \mid 2\frac{a}{2} = a$ et $2d' \mid 2\frac{b}{2} = b$ donc $2d' \mid d$.
- On pose $d := \text{pgcd}(a, b)$, $a = da'$, $b = db'$, et $\text{pgcd}(a', b') = 1$. d est impair, donc a' est pair. D'après le théorème de Bézout, $\frac{a'}{2}$ et b' sont premiers entre eux. Donc $\text{pgcd}(d\frac{a'}{2}, db') = d$ soit $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}\left(\frac{a}{2}, b\right)$.
- On commence par accumuler dans le pgcd la puissance de 2 maximale grâce à la question 2. À partir de là on ne peut plus avoir deux nombres pairs.
Ensuite si l'un des nombres est pair, on le divise par 2.
Sinon on les soustrait et on est ramené au cas précédent.
Dès que l'un des nombres est nul, on s'arrête. On multiplie l'autre nombre par la puissance de 2 et on obtient le pgcd.

question		2.	1.	3.	3.	1.	3.	3.	1.	3.	1.	
a	714	357	84	42	21	21	21	21	21	21	0	
b	546	273	273	273	273	252	126	63	42	21	21	
p	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	42

Solution 19

⇐ On suppose que

$$\forall n \geq (a-1)(b-1), \exists (u, v) \in \mathbb{N}^2, au + bv = n.$$

Soit $n = ab + 1$. On a $n \geq (a-1)(b-1)$ donc il existe deux entiers naturels u et v tels que $au + bv = ab + 1$ donc $a(u-b) + bv = ab + 1$. D'après le théorème de Bézout, a et b sont premiers entre eux.

⇒ On suppose que a et b sont premiers entre eux.

Soit $n \geq (a-1)(b-1)$. L'algorithme d'Euclide étendu nous assure l'existence d'un couple $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au_0 + bv_0 = n$, donc $\forall k \in \mathbb{Z}, a(u_0 - kb) + b(v_0 + kb) = n$.

Dire que $v_0 + kb \in \mathbb{N}$, c'est dire que $k \geq -\frac{v_0}{b}$. On choisit $k = \left\lfloor -\frac{v_0}{b} \right\rfloor$.

On en déduit que $v_0 + (k-1)a < 0$ soit $v_0 + ka < a$ soit $v_0 + ka \leq a - 1$.

$$\begin{aligned} \text{On en déduit que} \quad & b(v_0 + ka) \leq b(a-1) \\ \text{soit} \quad & n - a(u_0 - kb) \leq b(a-1) \\ \text{soit} \quad & -a(u_0 - kb) \leq b(a-1) - n \\ \text{soit} \quad & a(u_0 - kb) \geq -b(a-1) + n \\ & \geq (b-1)(a-1) - b(a-1) \\ & \geq -a + 1 \\ \text{donc} \quad & u_0 - kb \geq -1 + \frac{1}{a} > -1 \\ \text{donc} \quad & u_0 - kb \geq 0 \quad \text{puisque } u_0 - kb \in \mathbb{Z} \\ \text{donc} \quad & u_0 - kb \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

En posant $u = u_0 - kb$ et $v = v_0 + ka$ on a bien $au + bv = n$ avec $(u, v) \in \mathbb{N}^2$.

Solution 20

1. Comme $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q}$, il existe deux entiers $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que $\sqrt[n]{m} = p/q$ avec $p \wedge q = 1$. Alors, $p^n = mq^n$. Mais puisque p et q sont premiers entre eux, on sait que p^n et q^n sont également premiers entre eux. Puisque p^n/mq^n avec $p^n \wedge q^n = 1$, d'après le théorème de Gauss, il vient que p^n divise m . Donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = kp^n$. Mais alors on a $k = \frac{1}{q^n}$ et donc $q^n = 1$. Par conséquent, $m = p^n$ et donc $\sqrt[n]{m} = p$.
2. Comme $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q}$, il existe deux entiers $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que $\sqrt[n]{m} = p/q$ avec q le plus petit possible. De ce fait $mq^n = p^n$ donc q divise p^n . Soit k le plus petit entier tel que q divise p^k . Supposons l'espace d'un instant que $k > 1$, on écrit la division euclidienne de p^{k-1} par q :

$$p^{k-1} = aq + r: \quad 0 \leq r < q.$$

$r = 0$ n'est pas possible car sinon q divise p^{k-1} et on a supposé k le plus petit possible. De plus $rp = p^k - aqp$ est un multiple de q : $rp = qb$ pour un certain b . Or $\frac{p}{q} = \frac{b}{r}$ ce qui contredit le fait que q soit le plus petit possible. Donc $k > 1$ ne tient pas. Donc $k = 1$. Donc q divise p et de ce fait $\sqrt[n]{m} = p/q \in \mathbb{N}$.

Solution 21

On sait qu'il existe $(a', b') \in \mathbb{Z}^{*2}$ tels que $a = \delta a'$, $b = \delta b'$ et $a' \wedge b' = 1$. On a de plus $\delta\mu = ab$ donc $\mu = \delta a'b'$. Par conséquent,

$$(a + b) \wedge \mu = (\delta(a' + b')) \wedge (\delta a'b') = \delta \times ((a' + b') \wedge a'b')$$

Mais puisque a' et b' sont premiers entre eux, on a également $a' \wedge (a' + b') = 1$ et $b' \wedge (a' + b') = 1$ (il suffit d'écrire une relation de Bézout). Donc puisque $a' \wedge b' = 1$, $a'b' \wedge (a' + b') = 1$. Finalement, $(a + b) \wedge \mu = \delta$.

Solution 22

Supposons que (x, y) soit un couple d'entier satisfaisant les hypothèses. Comme $x \wedge y = 10$, on peut écrire $x = 10x'$ et $y = 10y'$ avec $x' \wedge y' = 1$. Alors le couple d'entiers (x', y') vérifie

$$11x' - 5y' = 1$$

Un couple de Bézout évident est $(x', y') = (1, 2)$. On trouve alors (voir le paragraphe 2.2.5) qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x' = 1 + 5k \text{ et } y' = 2 + 11k$$

d'où nécessairement

$$x = 10 + 50k \text{ et } y = 20 + 100k$$

On vérifie réciproquement que tout couple de cette forme convient.

Solution 23

Par soustraction on a $a(u - u_0) = b(v_0 - v)$. Donc b divise $a(u - u_0)$. Puisque (a, b) sont premiers entre eux, d'après le lemme de Gauss, b divise nécessairement $u - u_0$, donc $\exists k \in \mathbb{Z}$, $u - u_0 = kb$ ou $u = u_0 + kb$. En remplaçant $u - u_0$ par kb , on obtient alors $akb = b(v_0 - v)$, d'où $v = v_0 - ka$.

Réciproquement, les couples $(u_0 + kb, v_0 - ka)$, $k \in \mathbb{Z}$ sont bien solutions.

Solution 24

Quitte à changer a et/ou b en leurs opposés, on peut toujours supposer a et b positifs. Il suffit pour cela de changer le/les signe/s de u ou v selon les cas.

On écrit une relation de Bézout $au_0 + bv_0 = 1$. Reste à avoir $-b < u < b$ et $-a < v < a$ en posant $u = u_0 + kb$ et $v = v_0 - ka$ (voir exercice précédent). On a bien $au + bv = 1$. Pour avoir $|u| < b$, il suffit de prendre $-b < v < b$ soit $-1 - \frac{u_0}{b} < k < 1 - \frac{u_0}{b}$. On choisit k entier dans un intervalle ouvert de longueur 2.

On a deux possibilités, sauf lorsque $\frac{u_0}{b}$ est entier (pour $b = \pm 1$), auquel cas on peut (et on doit) choisir $k = -\frac{u_0}{b}$ et donc $u = 0$ et par suite $bv = 1$ entraîne bien $v = \pm 1$ et donc $|v| \leq |a|$ puisque dans ce cas on n'a pas $|a| = 1$.

Lorsque $\frac{u_0}{b}$ n'est pas entier, on a donc deux possibilités pour (u_1, v_1) et $(u_1 + b, v_1 - b)$ qui vérifient $|u| < b$. Comme $au + bv = 1$, on a $0 \leq au + bv = 1 < ab$. Donc $ab < -au \leq bv < ab - au < ab + ab$.

Donc $-a < v < 2a$. Deux cas se présentent : Si $-a < u < a$, alors c'est gagné. Sinon c'est qu'on s'est trompé dans le choix de a_1 et on considère cette fois $v - a$ qui vérifie $0 \leq v - a < a$ et c'est encore gagné.

Solution 25

1. On a $(n \wedge k) \binom{n}{k} = \binom{n}{n \wedge k} \binom{n \wedge k}{k} \binom{n \wedge k}{k}$. Or $k \binom{n \wedge k}{k} = n \binom{n \wedge k}{k-1}$,

donc $(n \wedge k) \binom{n}{k} = \binom{n}{n \wedge k} \binom{n \wedge k}{k-1} \binom{n \wedge k}{k-1} = n \binom{n \wedge k}{k-1} \binom{n \wedge k}{k-1}$.

C'est bien dire que $\frac{n}{n \wedge k}$ divise $\binom{n}{k}$.

2. De même, $(n+1-k) \binom{n}{k} = \binom{n+1-k}{n \wedge k} \binom{n \wedge k}{k} \binom{n \wedge k}{k}$. Or $k \binom{n \wedge k}{k} = (n+1-k) \binom{n \wedge k}{k-1}$.

donc $(n \wedge k) \binom{n}{k} = \binom{n+1-k}{n \wedge k} \binom{n \wedge k}{k-1} \binom{n \wedge k}{k-1} = (n+1-k) \binom{n \wedge k}{k-1} \binom{n \wedge k}{k-1}$.

C'est bien dire que $\frac{n+1-k}{(n+1) \wedge k}$ divise $\binom{n}{k}$.

3. D'après la question précédente, en remplaçant k par $k-1$,

$m := \frac{(n+2-k) \wedge (k-1)}{n+2-k} \binom{n}{k-1}$ est un entier.

Or $(n+2-k) \wedge (k-1) = (n+1) \wedge (k-1)$ d'où le résultat.

Solution 26

D'après la formule du binôme :

$$(1 + \sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{2}^k = \sum_{p=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2p} 2^p + \sqrt{2} \sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2p+1} 2^p.$$

Il suffit de poser

$$a_n = \sum_{p=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2p} 2^p \quad b_n = \sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2p+1} 2^p.$$

De la même façon, on montre l'existence de $(c_n, d_n) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $(\sqrt{2} - 1)^n = c_n + \sqrt{2}d_n$. En effectuant le produit,

$$1 = (\sqrt{2} - 1)^n (\sqrt{2} + 1)^n = a_n c_n + 2b_n d_n + \sqrt{2}(b_n c_n + d_n a_n).$$

Mais puisque $\sqrt{2}$ n'est pas le quotient de deux entiers, il vient que $b_n c_n + a_n d_n = 0$ et donc on obtient une relation de Bézout entre les entiers a_n et b_n :

$$c_n a_n + 2d_n b_n = 1,$$

ce qui montre que les entiers a_n et b_n sont premiers entre eux.

Solution 27

1. Par récurrence, en écrivant

$$u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = (u_{n+1} + u_n)u_n - u_{n+1}^2 = u_{n+1}(u_n - u_{n+1}) + u_n^2 = (-1)^{n+1}.$$

Voir aussi l'exercice 21 page 18 du cours de première.

2. L'identité précédente fournit une identité de Bézout entre u_n et u_{n+1} .
3. Par récurrence sur p , en écrivant $u_{n+p+1} = u_{n+1+p}$ et en remarquant que

$$\begin{aligned} u_{n+p+1} &= u_{n+1}u_{p-1} + u_{n+2}u_p \\ &= u_{n+1}u_{p-1} + (u_{n+1} + u_n)u_p \\ &= u_{n+1}(u_{p-1} + u_p) + u_nu_p \\ &= u_{n+1}u_{p+1} + u_nu_p \end{aligned}$$

De la relation précédente, tout entier qui divise u_n et u_p divise u_{n+p} et tout entier qui divise u_n et u_{n+p} divise le produit $u_{n+1}u_p$, mais comme il est premier avec u_{n+1} , il divise u_p . Donc

$$u_n \wedge u_p = u_n \wedge u_{n+p}$$

4. Appliquer le résultat précédent en faisant tourner l'algorithme d'Euclide.
5. Soit n un entier supérieur à 5, tel que u_n soit premier. Si n n'était pas premier, on aurait un diviseur propre $d \geq 3$. Mais alors u_n serait divisible par u_d avec $2 \leq u_d < u_n$, ce qui est impossible. La réciproque est fautive avec $n = 19$, et $F_{19} = 5181 = 37 \times 113$.

Solution 28

Soient deux entiers $n < m$. Posons $p = m - n$ et écrivons

$$F_m - 2 = 2^{2^m} - 1 = 2^{2^{n+p}} - 1 = 2^{2^n 2^p} - 1 = \left(2^{2^n}\right)^{2^p} - 1$$

Mais pour tout entier x , l'entier $x^{2^p} - 1$ est divisible par $x + 1$. Il existe donc un entier $q \in \mathbb{N}$ tel que

$$F_m - 2 = (2^{2^n} + 1)q$$

c'est-à-dire

$$F_m - F_n q = 2.$$

Il en résulte que $F_m \wedge F_n$ est un diviseur de 2. Mais puisque les nombres de Fermat sont impairs, le seul diviseur possible est 1.

2.7.4 Nombres premiers

Solution 29

Soit p et q deux entiers naturels. On a $2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1^q = (2^p - 1)(2^{p(q-1)} + 2^{p(q-2)} + \dots + 2^p + 1)$. Si on prend p et q plus grands que 1, alors $2^p - 1 \geq 3$ et la somme $2^{p(q-1)} + 2^{p(q-2)} + \dots + 2^p + 1$ comporte q termes tous plus grands que 1. Donc $2^{pq} - 1$ est composé. En résumé, si pq est composé, alors $2^{pq} - 1$ est composé. Par contraposée, si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.

Solution 30

On factorise : $n^4 - n^2 + 16 = (n^2 + 4)^2 - 9n^2 = (n^2 - 3n + 4)(n^2 + 3n + 4)$. Les deux trinômes $x^2 - 3x + 4$ et $x^2 + 3x + 4$ ne s'annulent pas sur \mathbb{R} et donc pas sur \mathbb{Z} . On vérifie qu'il en est de même des trinômes $x^2 - 3x + 4 \pm 1$ et $x^2 + 3x + 4 \pm 1$. Le nombre $n^4 - n^2 + 16$ est donc bien composé.

Solution 31 (Parabole de Matsijevic)

Soit $M(m, m^2)$ et $N(n, n^2)$ deux points de la parabole à coordonnées entières, avec $m^2 > 1$ et $n^2 > 1$. La droite (MN) est dirigée par $\vec{u} \begin{vmatrix} 1 \\ m+n \end{vmatrix}$. Elle admet pour équation $(m+n)x - y = mn$. Lorsque $x = 0$, l'ordonnée égale le nombre composé mn .

Solution 32

1. Soit $k \in \{1, \dots, p-1\}$. On sait que $A_p^k = k! \binom{p}{k}$. Mais $p \mid A_p^k = p(p-1) \dots (p-k+1)$ donc comme

p est premier $p \mid k!$ ou $p \mid \binom{p}{k}$. Si $p \mid k!$ alors p divise un des entiers $1, 2, \dots, k < p$ ce qui n'est pas possible et prouve la propriété.

Plus rapide : On écrit $k \binom{p}{k} = p \binom{p-1}{k-1}$ (puisque $k \geq 1$). Maintenant $p \mid k \binom{p}{k}$ et p est premier avec k (puisque $k \neq p$). Donc d'après le théorème de Gauss, $p \mid \binom{p}{k}$.

2. On effectue un raisonnement par récurrence. Si $n = 0$ alors la propriété est vérifiée. Soit $n \in \mathbb{N}$. On la suppose vraie au rang n : $p \mid n^p - n$ et on montre que $p \mid (n+1)^p - (n+1)$. On utilise la formule du binôme :

$$(n+1)^p - (n+1) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k - (n+1) = n^p - n + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} n^k$$

Comme $p \mid n^p - n$ et que $p \mid \binom{p}{k}$ pour $k \in \{1, \dots, p-1\}$, on sait que $p \mid (n+1)^p - (n+1)$ et le petit théorème de Fermat est prouvé par récurrence pour $n \geq 0$. Si $n < 0$ et si $p = 2$ alors $n^2 - n = n(n-1)$ est clairement divisible par 2. Si $p > 2$, comme p est premier il est impair et en notant $m = -n$, on a $n^p - n = -m^p + m = -(m^p - m)$ qui est divisible par p .

3. D'après la première égalité, m et n sont plus petits que 10 puisque $232630643127370 < 10^{17}$.

En réduisant la première égalité modulo 17 et la deuxième modulo 13, on obtient :

$$\begin{cases} n+m \equiv 10 \pmod{17} \\ n^{13} - m^{13} \equiv 4 \pmod{13} \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} n+m = 10 \text{ ou } 27 \\ n^{13} - m^{13} = 4 \end{cases}. \text{ Or } n+m = 27 \text{ est impossible.}$$

car $n+m$ et $n-m$ ont même parité. On en déduit que $n = 7$ et $m = 5$.

Réciproquement, on vérifie que $(7, 5)$ est solution.

Solution 33

1. On développe la seconde partie de l'égalité et on simplifie par télescopage.

2. (a) On va effectuer un raisonnement par contraposée. On suppose que n n'est de la forme $n = 2^k$ pour aucun $k \in \mathbb{N}$. Alors n est de la forme pq avec $p > 2$ premier et $q \in \mathbb{N}$. On écrit alors

$$a^n + 1 = a^{pq} + 1 = (a^q)^p + 1 = (a^q + 1) (1 - a^q + (a^q)^2 - \dots + (a^q)^{p-1}),$$

et on remarque que les deux facteurs de ce produit sont strictement plus grand que 1. Donc $a^n + 1$ n'est pas premier.

(b) Avec un logiciel de calcul formel, on montre que $2^{2^5} + 1 = 641 \times 6700417$. Par ailleurs une démonstration a déjà été donnée dans l'exemple 1 p. 26.

Solution 34

On a $p \equiv -q \pmod{p+q}$, donc $p^{2n} \equiv q^{2n} \pmod{p+q}$.

Par l'absurde : supposons $p^{2n} + q^{2n} \equiv 0 \pmod{p+q}$, on aurait $p^{2n} + q^{2n} \equiv 2q^{2n} \pmod{p+q}$, soit $(p+q) \mid 2q^{2n}$.

Puisque q^{2n} est premier avec $p+q$, d'après le lemme de Gauss, on aurait $p+q \mid 2$ ce qui est absurde.

Solution 35

Le numéro d'immatriculation s'écrit $N = \overline{aabb} = 11 \times 100a + 11b = 11(100a + b)$. Donc $11 \mid N$. Comme N est un carré parfait, l'exposant de 11 dans la décomposition de N en facteurs premiers est pair. Donc $11^2 = 121$ divise N : soit $N = 121k$. Comme N est un carré parfait, k l'est aussi (regarder sa décomposition en facteurs premiers). Donc $N = 121M^2$ avec $M \in \mathbb{N}$. Les essais pour M variant de 1 à 9 montrent que seul $M = 8$ convient, et alors $N = 7744 = 88^2$.

Remarque : On pourrait aller plus vite en remarquant qu'un nombre dont les deux derniers chiffres sont impairs n'est jamais un carré parfait. Mais c'est un autre exercice...

Solution 36 (Vrai ou Faux ?)

Cette affirmation est FAUSSE.

En effet, ce procédé serait trop simple pour trouver de grands nombres premiers à coup sûr.

Comme il s'agit d'une proposition V, il suffit pour établir sa fausseté de trouver un contreexemple.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	1	4	13	40	121

L'entier 5 est premier alors que $u_5 = 121 = 11 \times 11$ n'est pas premier.

2.7.5 Décomposition en facteurs premiers.**Solution 37**

Par l'absurde. On suppose $\sqrt{7} = \frac{p}{q}$ d'où $p^2 = 7q^2$. La valuation 7-adique de p^2 est un entier pair, la valuation 7-adique de q^2 est aussi un entier pair. La valuation 7-adique de $7q^2$ est un entier impair. D'après l'unicité de la valuation 7-adique on a donc un entier qui est à la fois pair et impair. Contradiction.

Solution 38

On sait que $10! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 10$ donc $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$ et un diviseur de $10!$ est donc de la forme $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$ avec $a \in \{, \dots, \}08$, $b \in \{, \dots, \}04$, $c \in \{, \dots, \}02$ et $d \in \{, \dots, \}01$. Réciproquement, tout nombre de cette forme divise $10!$. On compte alors $9 \times 5 \times 3 \times 2 = \boxed{270}$ diviseurs de $10!$.

Solution 39

1. Plaçons nous du point de vue d'une porte. Elle sera ouverte après le passage des mathématiciens si son état (ouvert/fermé) a été modifié par un nombre impair de mathématiciens (et fermée sinon). Autrement dit elle sera ouverte *in fine* si son numéro m admet un nombre impair de diviseurs (positifs).

D'après la remarque 9 p. 40, il y a un total de $\prod_{p \in \mathcal{P}} (\nu_p(m) + 1)$ diviseurs de m . Maintenant un produit

de facteurs est impair si et seulement si chacun des facteurs est impairs, donc dans notre cas on doit avoir tous les $\nu_p(m) + 1$ impairs c'est-à-dire tous les $\nu_p(m)$ pairs ce qui signifie que m est un carré parfait.

Une autre façon de voir : Si d est un diviseur de m alors $\frac{m}{d}$ est aussi un diviseur de m . On peut ainsi regrouper les diviseurs de m deux par deux, sauf si, par extraordinaire, m et $\frac{m}{d}$ sont égaux,

c'est-à-dire lorsque $m = d^2$ donc lorsque m est un carré parfait.

Notre problème devient donc : Combien y a-t-il de carrés parfaits entre 1 et n ? Il y en a $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

2. Plaçons nous du point de vue du mathématicien numéro k . Il change l'état (ouvert/fermé) des portes $k, 2k, \dots$. De combien de portes change-t-il l'état? En n combien de fois k ? Il va $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. Il y a donc eu au total $\sum_{k=1}^n \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ changement d'état. Si on enlève les $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ portes exceptionnelles, toutes les portes ont changé un nombre pair de fois. C'est bien dire que $\sum_{k=1}^n \lfloor \frac{n}{k} \rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ est un entier pair.

Solution 40

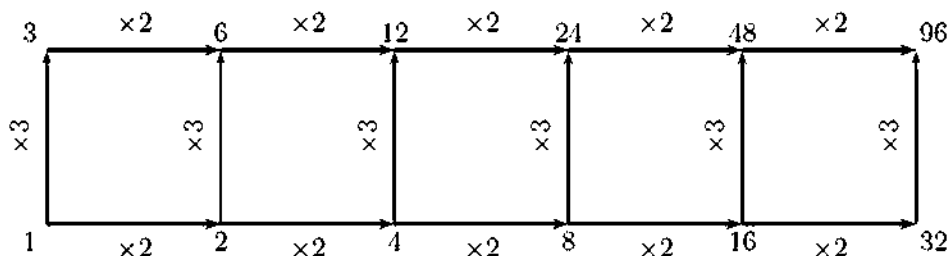
- Par un calcul simple.
 - (a) Si x et y étaient pairs, $2 \mid x \wedge y$, impossible. Si on suppose x impair, et y impair, alors $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{4}$, ce qui est impossible car $z^2 \equiv 0 \pmod{4}$ (regarder la décomposition de z en facteurs premiers, et la puissance de 2).
 - (b) Posons $p = (z + x)/2$ et $q = (z - x)/2$. Ce sont des entiers car z et x sont impairs. Ils sont positifs car $z > x$. Comme $x \wedge z = 1$, d'après le théorème de Bézout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $ux + vz = 1$, mais alors $(u + v)p + (v - u)q = 1$ ce qui montre que $p \wedge q = 1$. Alors $4pq = z^2 - x^2 = y^2$.
 - (c) Comme $p \wedge q = 1$, ils n'ont pas de facteurs premiers en commun dans leur décomposition. Comme $pq = y^2/4$ est un carré, tous les exposants dans la décomposition de p et q sont pairs, ce qui montre que p et q sont des carrés.
3. Soit $(x, y, z) \in E$, si $x \wedge y \neq 1$, en posant $\delta = x \wedge y$, on a $\delta^2(x'^2 + y'^2) = z^2$ et donc δ^2/z^2 , par conséquent, il existe $z' \in \mathbb{N}$ tel que $z^2 = \delta^2 z'^2$ (comme z^2 est un carré, z^2/δ^2 en est encore un comme on le voit en examinant la décomposition en facteurs premiers). Alors $x'^2 + y'^2 = z'^2$ avec $x' \wedge y' = 1$. D'après la question précédente, il existe $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que $(x, y, z) = (\delta^2(a^2 - b^2), 2ab, \delta^2(a^2 + b^2))$. On a donc montré (avec la première question) que

$$E = \{\delta^2(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2) : (a, b) \in \mathbb{N}^{*2}, \delta \in \mathbb{N}\}$$

Solution 41

- Oui.
- On a $100 \equiv 3 \pmod{97}$, d'où $10^{2k} \equiv 3^k \pmod{97}$. On regroupe par tranche de deux chiffres. On a $1796478646378 \equiv 78 + 3 \times 63 + 9 \times 64 + 27 \times 78 + 81 \times 64 + 243 \times 79 + 729 \times 1 \equiv 28059 \equiv 59 + 3 \times 80 + 9 \times 2 \equiv 317 \equiv 17 + 3 \times 3 \equiv 26 \pmod{97}$. Donc $e = 97 - 26 = 71$.
- On a $2540035231584 \equiv 84 + 3 \times 15 + 9 \times 23 + 27 \times 35 + 243 \times 54 + 729 \times 2 \equiv 15861 \equiv 61 + 3 \times 58 + 9 \times 1 \equiv 244 \equiv 50 \pmod{97}$. Soit n le numéro du département. On a $N \equiv 50 + 81n \pmod{97}$. Soit à résoudre $50 + 81n \equiv -79 \pmod{97}$ soit $16n \equiv 32 \pmod{97}$. On cherche une relation de Bézout entre 16 et 97, ce qui va vite car $97 = 6 \times 16 + 1$. Donc en multipliant la dernière congruence par -6 , on obtient $n \equiv 32 \times (-6) \pmod{97}$ soit $n = 2$. Donc elle est née dans l'Aisne (à moins qu'elle ne soit née à l'étranger (code 99)).
- Se tromper sur le k -ième chiffre, c'est faire une erreur de $\pm a_k 10^k$. Comme 97 est un nombre premier, a_k , compris entre 1 et 9 est premier avec 97. De même, 10 est premier avec 97. Donc 10^k est premier avec 97 ainsi que $\pm a_k 10^k$. En particulier $\pm a_k 10^k \not\equiv 0 \pmod{97}$ donc $N \pm a_k 10^k \not\equiv N \pmod{97}$ et par suite N et $N \pm a_k 10^k$ n'ont pas la même clef. Donc attribuer à $N \pm a_k 10^k$ la même clef qu'à N produira un message d'erreur.

5. Soit $p = 97$ et $n = 10$ est premier avec p . D'après le petit théorème de Fermat (exercice 32 p. 58), $p \mid n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$. Puisque p est premier avec n , d'après le théorème de Gauss 9 p. 33, $p \mid n^{p-1} - 1$ autrement dit $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ et dans le cas d'espèce, $10^{96} \equiv 1 \pmod{97}$.
Puisque $96 = 3 \times 32 = 3 \times 2^5$. Il reste à vérifier que $10^{32} \not\equiv 1 \pmod{97}$ et que $10^{48} \not\equiv 1 \pmod{97}$.
En effet pour arriver à 96, il faut passer par 32 ou 48.



Par exponentiation rapide, $10^2 \equiv 3 \pmod{97}$, $10^4 \equiv 9 \pmod{97}$, $10^8 \equiv -16 \pmod{97}$, $10^{16} \equiv 256 \equiv 62 \equiv -35 \pmod{97}$ et $10^{32} \equiv 1225 \equiv 61 \pmod{97}$.

Par ailleurs, $10^{48} = 10^{32} \times 10^{16} \equiv -35 \times 61 \equiv -2135 \equiv -1 \pmod{97}$, ce qu'il fallait vérifier.

6. À partir de N , si on intervertit les k -ièmes et m -ièmes chiffres, on soustrait $a_k 10^k$, puis on soustrait $a_m 10^m$ et à la place on rajoute $a_k 10^m$ et $a_m 10^k$. Donc la question est de savoir pour quelles valeurs de $k, m \in \{0, \dots, 12\}$ et quelles valeurs de $a_k, a_m \in \{0, \dots, 9\}$ on a

$$a_k 10^k - a_m 10^m \equiv a_m 10^k - a_k 10^m \pmod{97},$$

soit

$$97 \mid (a_k - a_m)(10^k - 10^m).$$

Supposons l'espace d'un instant que $a_k > a_m$, autrement dit supposons que l'on ait fait une vraie interversion. On aurait alors $a_k - a_m \in \{0, \dots, 9\}$ et donc $a_k - a_m$ premier avec 97. Donc à nouveau d'après le théorème de Gauss, $97 \mid 10^k - 10^m$.

► si $m > k$, on a $97 \mid 10^k(10^{m-k} - 1)$. Comme 10^k est premier avec 97, on a $97 \mid 10^{m-k} - 1$ soit $10^{m-k} \equiv 1 \pmod{97}$. Comme $m - k \leq 12 < 96$ on a une contradiction avec la question précédente.

► même contradiction si $m < k$.

Donc la seule interversion qui ne sera pas décelée par la clef est celle de deux chiffres identiques!

Solution 42

1. Pour $a = 2, b = 4, c = 8$, on a

$$(a \wedge bc)(b \wedge c) = 2 \times 4 \text{ et } (c \wedge ab)(a \wedge b) = 8 \times 2.$$

2. Un entier $n \in \mathbb{N}$ est libre de carrés si $\forall p \in \mathcal{P}, 0 \leq v_p(n) \leq 1$.

On considère un nombre premier p et on peut supposer sans perte de généralité que $v_p(a) \leq v_p(b) \leq v_p(c)$. À ce moment-là on n'a plus que quatre choix : 0, 0, 0 et 1, 1, 1 pas très intéressants et 0, 0, 1 et 0, 1, 1.

► Pour le cas $(v_p(a), v_p(b), v_p(c)) = (0, 0, 1)$, on a $v_p(bc) = 0 + 1 = 1$ donc $v_p(a \wedge bc) = \min(0, 1) = 0$ par ailleurs $v_p(b \wedge c) = \min(0, 1) = 0$. Donc $v_p((a \wedge bc)(b \wedge c)) = 0 + 0 = 0$.

De même, $v_p(ac) = 0 + 1 = 1$ donc $v_p(b \wedge ac) = \min(0, 1) = 0$ par ailleurs $v_p(a \wedge c) = \min(0, 1) = 0$. Donc $v_p((b \wedge ac)(a \wedge c)) = 0 + 0 = 0$.

Enfin $v_p(ab) = 0 + 0 = 0$ donc $v_p(b \wedge ac) = \min(0, 0) = 0$.

On a donc l'égalité entre les valuations p -adiques des trois nombres $(a \wedge bc)$ $(b \wedge c)$, $(b \wedge ac)$ $(a \wedge c)$ et $(c \wedge ab)$ $(a \wedge b)$, ceci pour tout nombre premier p . Ce qui prouve bien que ces trois nombres sont égaux.

► Pour le cas $(v_p(a), v_p(b), v_p(c)) = (0, 1, 1)$, on a $v_p(bc) = 1 + 1 = 2$ donc $v_p(a \wedge bc) = \min(0, 2) = 0$ par ailleurs $v_p(b \wedge c) = \min(1, 1) = 1$. Donc $v_p((a \wedge bc) (b \wedge c)) = 0 + 1 = 1$.

De même, $v_p(ac) = 0 + 1 = 1$ donc $v_p(b \wedge ac) = \min(1, 1) = 1$ par ailleurs $v_p(a \wedge c) = \min(0, 1) = 0$. Donc $v_p((b \wedge ac) (a \wedge c)) = 1 + 0 = 1$.

Enfin $v_p(ab) = 0 + 1 = 1$ donc $v_p(c \wedge ab) = \min(1, 1) = 1$ par ailleurs $v_p(a \wedge b) = \min(0, 1) = 0$. Donc $v_p((c \wedge ab) (a \wedge b)) = 1 + 0 = 1$.

On a donc l'égalité entre les valuations p -adiques des trois nombres $(a \wedge bc)$ $(b \wedge c)$, $(b \wedge ac)$ $(a \wedge c)$ et $(c \wedge ab)$ $(a \wedge b)$, ceci pour tout nombre premier p . Ce qui prouve bien que ces trois nombres sont égaux.

2.7.6 Exercices supplémentaires

Solution 43

1. On a $1^4 \equiv 1 \pmod{16}$. De plus, d'après la formule du binôme, $(n+4)^4 = n^4 + 16(n^3 + 6n^2 + 16n + 16) \equiv n^4 \pmod{16}$. Donc $5^4 \equiv 9^4 \equiv 13^4 \equiv 1 \pmod{16}$. De même puisque $15 \equiv -1 \pmod{16}$, donc $3^4 \equiv 7^4 \equiv 11^4 \equiv 13^4 \equiv 15^4 \equiv 1 \pmod{16}$. Par ailleurs $(2p)^4 = 16p^4 \equiv 0 \pmod{16}$. Donc les seules valeurs de a pour lesquelles l'équation $k^4 \equiv a \pmod{16}$ admet des solutions sont 0 où 1.

2. Comme $2000 = 4 \times 500 = 4 \times 4 \times 5 \times 25 \equiv 0 \pmod{16}$. Donc $2013 \equiv 13 \pmod{16}$. Donc il y a au maximum douze 1 modulo 16, donc on ne peut pas obtenir 13. Il n'y a pas de solution.

Solution 44

On développe : $N = (n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (n+99)^2 = 99x^2 + 2x(1 + \dots + 99) + (1^2 + \dots + 99^2) = 99x^2 + 9900x + \frac{99 \times 100 \times 199}{6} = 99x^2 + 9900x + 328350$. Or 3 divise 99, 9900 ainsi que 328350. Donc 3 divise N . En revanche 9 divise 99, 9900 mais pas 328350. Donc 9 ne divise pas N . D'où le résultat.

Solution 45

On a $a^2 + k \mid a^3 - a$ et $a^2 + k \mid a(a^2 + k)$ donc $a^2 + k \mid a(a^2 + k) - (a^3 - a) = ak + a$, ce qui entraîne $a^2 + k \leq ak + a$, soit $(a-1)(k-a) \geq 0$, donc $k \geq a$. à moins que $a = 1$, auquel cas k étant un entier strictement positif, on a aussi $k \geq a$.

Solution 46

Le nombre n s'écrit $2^a \times 3^b$. Il admet $(a+1)(b+1)$ diviseurs distincts. De même n^2 s'écrit $2^{2a} \times 3^{2b}$. Il admet $(2a+1)(2b+1)$ diviseurs distincts. On cherche donc deux entiers a et b vérifiant $(2a+1)(2b+1) = 3(a+1)(b+1)$, soit $ab = (a+b) + 2$. En posant $s = a+b$ et $p = ab$, a et b sont solutions entières de $T^2 - sT + p + 2 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = s^2 - 4(s+2) = (s-2)^2 - 12$. Puisqu'on cherche des solutions entières, Δ est nécessairement le carré d'un entier : $\Delta = d^2$, donc $(s-2)^2 - d^2 = 12$ soit $(s_2 - d)(s_2 + d) = 2 \times 6$. Maintenant $s_2 - d$ et $s_2 + d$ ont même parité, et sont donc tous les deux pairs puisque leur produit est pair. Donc $(s_2 - d) = 2$ et $(s_2 + d) = 6$ ce qui donne $s = 6$ puis les solutions de $T^2 - 6T + 8 = 0$ qui sont 2 et 6. On a donc $n = 2^6 \times 3^2 = 576$ ou $n = 2^2 \times 3^6 = 2916$. On vérifie que ces deux solutions conviennent bien.

Solution 47

Si n est une puissance d'un nombre premier p , alors α et d étant premiers entre eux, au plus l'un des deux est divisible par p .

Si α n'est pas divisible par p , alors $\alpha + 0 \cdot p$ convient. Si d n'est pas divisible par p , alors il admet un inverse u modulo n et donc pour $x = u(1 - \alpha) \pmod{n}$, $\alpha + xd$ convient.

Maintenant, on suppose que l'on a un x_p qui marche pour chaque facteur premier p de n . Alors il existe un x congru à x_p modulo p^k pour chaque p^k divisant exactement n , et ce x est solution pour n .

Enfin ce x est défini modulo n , donc on peut le prendre compris entre 0 et $n - 1$, et le nombre cherché est $\alpha + xd$.

Solution 48

En changeant l'ordre de sommation,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (n+1-k)^{n+1} \\ &\equiv \sum_{k=1}^n (-k)^{n+1} \pmod{n+1} \\ &\equiv \sum_{k=1}^n k^{n+1} \pmod{n+1} \quad \text{car } n+1 \text{ est impair} \\ &\equiv -S_n \pmod{n+1} \end{aligned}$$

Donc $2S_n \equiv 0 \pmod{n+1}$ donc $S_n \equiv 0 \pmod{n+1}$ car 2 est premier avec $n+1$.

Solution 49

Ce sont les entiers n divisibles par 7 car 7 est premier.

Solution 50

Si $p = 3$ l'implication est vraie. Si $p \neq 3$ est premier alors $p \not\equiv 0 \pmod{3}$, donc $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ et $p^2 + 2 \equiv 0 \pmod{3}$. Dire que dans ces conditions $p^2 + 2$ est premier, c'est dire que $p^2 + 2 = 3$ ce qui est incompatible avec p premier.

Moralité, pour $p \neq 3$ la proposition « p et $p^2 + 2$ sont premiers » est fausse, donc l'implication est vraie.

Solution 51

13 Les entiers 3 et 4 sont premiers avec 13, donc d'après le théorème de Fermat-Euler, $3^{12} \equiv 4^{12} \equiv 1 \pmod{13}$. Or $105 \equiv 9 \pmod{12}$ donc

$$3^{105} + 4^{105} \equiv 3^9 + 4^9 \equiv 27^3 + 64^3 \equiv 1^3 + (-1)^3 \equiv 0 \pmod{13}.$$

43 On a $105 \equiv 21 \pmod{42}$ donc $S \equiv 3^{21} + 4^{21} \equiv 3^{21} + 2^{42} \equiv \left(\frac{3}{43}\right) + 1 \pmod{43}$.

Or d'après la loi de réciprocité quadratique, $\left(\frac{3}{43}\right) \times \left(\frac{43}{3}\right) = (-1)^{(3-1)/2 \times (43-1)/2} = -1$. Comme $\left(\frac{43}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right) = 1$, on a bien $S \equiv -1 + 1 \pmod{43}$.

49 Lorsque n est impair, $a^n + b^n$ est divisible par $a + b$. Donc $S = (3^7)^{15} + (4^7)^{15}$ est divisible par $3^7 + 4^7$. Lequel $3^7 + 4^7$ peut s'écrire $3^7 + 4^7 = (3+4)(3^6 - 3^5 \times 4 + 3^4 \times 4^2 + \dots - 3 \times 4^5 + 4^6)$. Or $4 \equiv -3 \pmod{7}$. Donc $3^6 - 3^5 \times 4 + 3^4 \times 4^2 + \dots - 3 \times 4^5 + 4^6 \equiv 3^6 + 3^6 + \dots + 3^6 + 3^6 \equiv 7 \times 3^6 \equiv 0 \pmod{7}$. Donc $7 \times 7 = 49$ divise S .

181 Pour la même raison, $a + b := 3^5 + 4^5$ divise S . Or $3^5 + 4^5 = 7 \times 181$, d'où le résultat.

211 On a à nouveau $S \equiv 3^{105} + 2^{210} \equiv \left(\frac{3}{211}\right) + 1 \pmod{211}$.

Toujours d'après la loi de réciprocité quadratique, $\left(\frac{3}{211}\right) \times \left(\frac{211}{3}\right) = (-1)^{(3-1)/2 \times (211-1)/2} = (-1)^{105} = -1$. Comme $\left(\frac{211}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right) = 1$, on a bien $S \equiv -1 + 1 \pmod{211}$.

379 Brutalement, 49 divise $3^7 + 4^7$ et $3^7 + 4^7 = 49 \times 379$.

421 On a $4^{105} = 2^{210} \equiv \left(\frac{2}{421}\right) \pmod{421}$. Or $\left(\frac{2}{421}\right) = (-1)^{(420 \times 422/8)} = (-1)^{105 \times 211} = -1$.

Pour le calcul de 3^{105} c'est un peu plus pénible. On trouve $3^6 \equiv 308 \equiv -113 \pmod{421}$. D'où $3^{12} \equiv (-113)^2 \equiv 139 \pmod{421}$ et $3^{13} \equiv 3 \times 139 \equiv -4 \pmod{421}$. Donc $3^{104} \equiv (-4)^8 \equiv 2^{16} \equiv 281 \pmod{421}$. Enfin $3^{105} \equiv 3 \times 281 \equiv 1 \pmod{421}$.

Solution 52

1. ► Si $m = 1$ alors $n = 1$ convient et le couple $(1, 1)$ est solution de (E) .
 - Si $m = 2$ alors $1 + 3 \times 4 = 13$ n'est pas une puissance de 7. Il n'y a pas de couple $(n, 2)$ solution de (E) .
 - Si $m = 3$ alors $1 + 3 \times 8 = 25$ n'est pas une puissance de 7. Il n'y a pas de couple $(n, 3)$ solution de (E) .
 - Si $m = 4$ alors $1 + 3 \times 16 = 49 = 7^2$ est une puissance de 7. Le couple $(2, 4)$ est solution de (E) .
2. (a) Si (n, m) vérifie l'égalité (E) , alors $7^n - 3 \times 2^{m-5}2^5 = 1$ donc en réduisant modulo $2^5 = 32$, on obtient bien $7^n - 0 \equiv 1 \pmod{32}$.
 - (b) On trouve successivement
 - $7^1 \equiv 7 \pmod{32}$.
 - $7^2 \equiv 49 \equiv 17 \pmod{32}$.
 - $7^3 \equiv 17 \times 7 \equiv 119 \equiv -9 \pmod{32}$ et
 - $7^4 \equiv -9 \times 7 \equiv -63 \equiv 1 \pmod{32}$.
 De ce fait, si $n = 4k + r$, avec $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ alors $7^n \equiv 7^{4k} \times 7^r \equiv (7^4)^k \times 7^r \equiv 7^r \pmod{32}$. De ce fait, on a $7^n \equiv 1 \pmod{32}$ si et seulement si $n \equiv 0 \pmod{4}$ autrement dit n est divisible par 4.
 - (c) Si le couple (n, m) est solution de (E) alors n est un multiple de 4 (question précédente). Donc $7^n \equiv 2^n \pmod{5}$ puisque $7 \equiv 2 \pmod{5}$ et en écrivant $n = 4k$ avec $k \in \mathbb{N}$ on a bien $2^n \equiv (2^4)^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{5}$.
 - (d) La réponse est non. Supposons l'espace d'un instant que le couple (n, m) soit solution de (E) avec $m \geq 5$. En effet en réduisant modulo 5 l'égalité (E) , on obtient $7^n - 3 \times 2 \times 2^{m-1} \equiv 1 - 2^{m-1} \pmod{5}$ puisque $m \geq 1$ et par suite $1 - 2^{m-1} \equiv 1 \pmod{5}$ donc $2^{m-1} \equiv 0 \pmod{5}$, c'est-à-dire que le nombre premier 5 divise 2^{m-1} . Cette dernière proposition n'est pas vraie car 2 est le seul nombre premier qui divise 2^{m-1} .
On a bien établi qu'il n'existe pas de couple (n, m) d'entiers naturels solution de (E) avec $m \geq 5$.
3. De ce fait les seules solutions (n, m) de (E) vérifient $m \leq 4$. D'après la première question, il n'existe que deux solutions : $(1, 1)$ et $(2, 4)$.

Solution 53 (Calcul de congruences)

1. On a $12 \equiv -2 \pmod{7}$ donc $12^{2006} \equiv (-2)^{2006} \equiv 2^{2006} \pmod{7}$. D'après le petit théorème de Fermat (exercice 32), on a $2^6 \equiv 1 \pmod{7}$ donc $2^{2004} = (2^6)^{334} \equiv 1 \pmod{7}$ et $2^{2006} = (2^6)^{334} \times 2^2 \equiv 4 \pmod{7}$.
On a $22 \wedge 5 = 1$ et $\varphi(22) = (2-1) \times (11-1) = 10$. D'après le théorème 21 d'Euler-Fermat, on a $5^{10} \equiv 1 \pmod{22}$ et $5^{10} \equiv (5^{10})^{54} \times 5 \equiv 1^{54} \times 5 \equiv 5 \pmod{22}$.
2. On a $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$. Donc $n^3 - n$ est nul pour n appartenant au système complet de restes modulo 3 donc congru à zéro modulo 3 pour tout entier n . Pour les mêmes raisons $n^3 - n$ est congru à zéro modulo 3 pour tout entier n .

$$\text{On a } \begin{cases} 2 \mid n^3 - n \\ 3 \mid n^3 - n \\ 2 \wedge 3 = 1 \end{cases} \text{ donc } 2 \times 3 \mid n^3 - n.$$

On a $n^5 - n = (n^3 - n)(n^2 + 1)$. Donc $6 \mid n^3 - n$ d'après la question précédente. On a $n^4 \equiv 1 \pmod{5}$ pour n non divisible par 5 et $n^5 - n \equiv 0 \pmod{5}$ pour n multiple de 5. Dans tous les cas $n^5 - n \equiv 0 \pmod{5}$.

$$\text{On a } \begin{cases} 6 \mid n^5 - n \\ 5 \mid n^5 - n \end{cases} \text{ donc } 5 \times 6 \mid n^5 - n.$$

$$5 \wedge 6 = 1$$

3. On a $3^{n+3} - 4^{n+2} = 27 \times 3^n - 16 \times 256^n \equiv 5 \times 3^n - 5 \times 3^n \equiv 0 \pmod{11}$.

On a $2^{6n+2} = 4 \times 64^n \equiv 4 \times 10^n \pmod{18}$. Or $4 \times 10^n \equiv 4 \pmod{18}$ c'est-à-dire que $9 \mid 4 \times 10^n - 4$. Comme $2 \mid 4 \times 10^n - 4$ et que $2 \wedge 9 = 1$ on en déduit que $18 \mid 4 \times 10^n - 4$ c'est-à-dire que $2^{6n+2} \equiv 4 \pmod{18}$. D'après le petit théorème de Fermat, $2^{2^{6n+2}} \equiv 2^4 \pmod{19}$, donc $2^{2^{6n+2}} + 3 \equiv 16 + 3 \equiv 0 \pmod{19}$, ce qu'il fallait démontrer.

4. On va regarder séparément modulo 2 et modulo 5. Le nombre S est clairement impair : $S \equiv 1 \pmod{2}$. On a $S = 7^m$ avec $m := 7^{7^{7^{7^7}}}$. On a $m = 7^f$ avec $f := 7^{7^{7^7}}$ impair. Donc $m \equiv (-1)^f \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4}$. Donc $S \equiv 2^3 \equiv 1 \pmod{5}$.

$$\text{On a } \begin{cases} 2 \mid S - 1 \\ 5 \mid S - 1 \end{cases} \text{ donc } 2 \times 5 \mid S - 1. \text{ Le chiffre des unités de } S \text{ est } 1.$$

$$2 \wedge 5 = 1$$

Solution 54

- $529x + 391y = 23$. On a $529 \wedge 391 = 23$. Après division par le pgcd, l'équation devient $23x + 17y = 1$. L'algorithme d'Euclide étendu fournit une solution $(3, -4)$. On en déduit que $23(x-3) + 17(y+4) = 0$. 23 divise $17(y+4)$ et $23 \wedge 17 = 1$ donc d'après le lemme de Gauss, 23 divise $y+4$, c'est-à-dire, il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $y = 23k - 4$. En reportant dans $23(x-3) + 17(y+4) = 0$, on trouve $x = -17k + 3$. Inversement, tous les couples $(23k + 3, -17k - 4)$ sont solution pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
- $368x + 161y = 253$. On a $368 \wedge 161 = 23$. Après division par le pgcd, l'équation devient $16x + 7y = 11$. L'algorithme d'Euclide étendu fournit $16 \times (-3) + 7 \times 7 = 1$ donc $16 \times (-33) + 7 \times 77 = 11$. On en déduit que $16(x+33) + 7(y-77) = 0$. 16 divise $7(y-77)$ et $16 \wedge 7 = 1$ donc d'après le lemme de Gauss, 16 divise $y-77$, c'est-à-dire, il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $y = 16k + 77$. En reportant dans $16(x+33) + 7(y-77) = 0$, on trouve $x = -7k - 33$. Inversement, tous les couples $(-7k - 33, 16k + 77)$ sont solution pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On peut remarquer, que $k := -4$ fournit la solution plus « simple » $(-5, 13)$.
- $585x + 287y = 23$. On a $585 \wedge 287 = 1$. L'algorithme d'Euclide étendu fournit $-26 \times 585 + 53 \times 287 = 1$ donc $585 \times (-598) + 287 \times 1219 = 23$. On en déduit que $585(x+598) + 287(y-1219) = 0$. 585 divise $287(y-1219)$ et $585 \wedge 287 = 1$ donc d'après le lemme de Gauss, 585 divise $y-1219$, c'est-à-dire, il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $y = 585k + 1219$. En reportant dans $585(x+598) + 287(y-1219) = 0$, on trouve $x = -287k - 598$. Inversement, tous les couples $(-287k - 598, 585k + 1219)$ sont solution pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On peut remarquer, que $k := -2$ fournit la solution plus « simple » $(-24, 49)$.
- $10101x + 1001y = 101$. On a $10101 \wedge 1001 = 91$. Comme 91 ne divise pas 101, l'équation n'a pas de solution.

Solution 55

1. Modulo 4 les carrés sont 0 ou 1. Les sommes de deux carrés sont donc 0, 1 ou 2.

$a^2 \backslash b^2$	0	1
0	0	1
1	1	2

Maintenant si $p = a^2 + b^2$ est un nombre impair (premier ou non), il est congru à 1 ou 3 modulo 4 en tant que nombre impair. Il n'est pas congru à 3 modulo 4 en tant que somme de deux carrés modulo 4.

2. On regarde les congruences possibles modulo 8 :

$a^2 \backslash b^2$	0	1	4
0	0	1	4
1	1	2	5
4	4	5	0

$c^2 \backslash a^2 + b^2$	0	1	2	4	5
0	0	1	2	4	5
1	1	2	3	5	6
4	4	5	6	0	1

Le deuxième tableau montre qu'une somme de trois carrés ne peut pas être congrue à 7 c'est-à-dire -1 modulo 8.

Solution 56

Soit $d := \text{pgcd}(an, b)$. On a $d \mid b$. De ce fait $\text{pgcd}(d, a)$ divise d et b donc a et b donc leur pgcd, c'est-à-dire 1. Donc d et a sont premiers entre eux. D'après le lemme de Gauss, puisque $\mid an$ on a $d \mid n$.

En résumé, $d \mid b$ et $d \mid n$ donc $d \mid \text{pgcd}(n, b)$.

Soit $d' := \text{pgcd}(n, b)$. On a $d' \mid n$ donc $d' \mid an$. Or $d' \mid b$ donc d' divise leur pgcd.

En fin de compte on a $d \mid \text{pgcd}(n, b)$ et $d' \mid \text{pgcd}(an, b)$ donc $d = d'$.

Solution 57 (Parlez-vous chinois?)

1. $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{23} \\ x \equiv 3 \pmod{13} \end{cases}$ On va chercher une solution. Les entiers 23 et 13 sont premiers entre eux. D'après l'algorithme d'Euclide étendu, $-7 \times 13 + 4 \times 23 = 1$ donc $-7 \times 13 \equiv 1 \pmod{23}$ et $4 \times 23 \equiv 1 \pmod{13}$. On en déduit que $x := -14 \times 13 + 12 \times 23 = -166$ est solution du système. De plus, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $13 \times 23k - 166$ est aussi solution.

Réciproquement, soit x' une autre solution. On a $23 \mid (x - x')$ et $13 \mid (x - x')$. Comme 23 et 13 sont premiers entre eux, on a $13 \times 23 \mid (x - x')$, soit $x' = 13 \times 23k - 166$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

2. $\begin{cases} 7x \equiv 5 \pmod{19} \\ 3x \equiv 1 \pmod{11} \end{cases}$ Les entiers 19 et 11 sont premiers entre eux. D'après l'algorithme d'Euclide étendu, $-4 \times 19 + 7 \times 11 = 1$ donc $-4 \times 19 \equiv 1 \pmod{11}$ et $7 \times 11 \equiv 1 \pmod{19}$.

Les entiers 19 et 7 sont premiers entre eux. D'après l'algorithme d'Euclide étendu, $3 \times 19 - 8 \times 7 = 1$ donc $-8 \times 7 \equiv 1 \pmod{19}$ et $x \equiv -8 \times 5 \equiv -2 \pmod{19}$.

Les entiers 11 et 3 sont premiers entre eux. D'après l'algorithme d'Euclide étendu, $4 \times 3 - 11 = 1$ donc $4 \times 3 \equiv 1 \pmod{11}$ et $x \equiv 4 \pmod{11}$.

On est ramené à la situation de l'exemple précédent : $\begin{cases} x \equiv -2 \pmod{19} \\ x \equiv 4 \pmod{11} \end{cases}$ L'entier $x := -2 \times 11 \times 7 + 4 \times (-4) \times 19 = -458$ est donc solution. Les autres solutions sont les entiers $11 \times 19k - 458$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. $\begin{cases} x \equiv 8 \pmod{12} \\ x \equiv 1 \pmod{21} \end{cases}$ Cette fois on a $12 \wedge 21 = 3$. Une solution x vérifie $x \equiv 8 \equiv 2 \pmod{3}$ et $x \equiv 1 \pmod{3}$. Il n'y a donc pas de solution.

Solution 58 (Parlez-vous chinois?)

Soit N le nombre de soldats. Il est solution positive du système $\begin{cases} N \equiv 156 \pmod{30^2} \\ N \equiv 448 \pmod{31^2} \end{cases}$ Les nombres 30 et 31 sont premiers entre eux. Il en est donc de même pour 30^2 et 31^2 . D'après l'algorithme d'Euclide

étendu, $63 \times 30^2 - 59 \times 31^2 = 1$. On a donc $63 \times 30^2 \equiv 1 \pmod{[31^2]}$ et $-59 \times 31^2 \equiv 1 \pmod{[30^2]}$. Donc $x := 448 \times 63 \times 30^2 - 156 \times 59 \times 31^2 \equiv 448 \pmod{[31^2]}$ et $x \equiv 156 \pmod{[30^2]}$. Or $x = 16556556 = 19 \times 30^2 \times 31^2 + 123456$. Donc $N = 123456$. En effet, $123456 + 30^2 \times 31^2 > 500000$.

Solution 59 (Points à coordonnées entières sur une hyperbole)

1. Pour tous réels x et y , $84x^2 - 137xy + 55y^2 = (7x - 5y)(12x - 11y)$.
2. $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est solution de $7x - 5y = 1$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 3 + 5k$ et $y = 4 + 7k$.
3. Soit $x = 3 + 5k$ et $y = 4 + 7k$ une solution de l'équation précédente. On a alors $12x - 11y = 36 + 60k - 44 - 77k = -8 - 17k$. L'équation $-8 - 17k = 1$ n'admet pas de solution dans \mathbb{Z} . D'où le résultat.
4. $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est solution de $7x - 5y = -1$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2 + 5k$ et $y = 3 + 7k$.

Soit $x = 2 + 5k$ et $y = 3 + 7k$ une solution de l'équation précédente. On a alors $12x - 11y = 24 + 60k - 33 - 77k = -9 - 17k$. L'équation $-9 - 17k = 1$ n'admet pas de solution dans \mathbb{Z} . D'où le résultat.

Enfin le produit de deux entiers égale 1 si et seulement si les deux entiers sont égaux à 1 ou bien sont égaux à -1.

Remarque 8.

On pouvait se passer de cette dernière étude en remarquant que (x_0, y_0) est solution du système $\begin{cases} 7x - 5y = -1 \\ 12x - 11y = -1 \end{cases}$ si et seulement si $(-x_0, -y_0)$ est solution du système $\begin{cases} 7x - 5y = 1 \\ 12x - 11y = 1 \end{cases}$

Solution 60

On sait qu'il existe u et v dans \mathbb{Z} tels que $u \det \mathbf{A} + v \det \mathbf{B} = 1$.

Si $\det \mathbf{A} = 0$ alors $\det \mathbf{B} = 1$ et $\mathbf{V} := \mathbf{B}^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On prend pour \mathbf{U} la matrice nulle.

Si $\det \mathbf{B} = 0$ on peut échanger les rôles de \mathbf{A} et \mathbf{B} .

Si $\det \mathbf{A} \neq 0$ et $\det \mathbf{B} \neq 0$ On peut choisir $\mathbf{U} := u \det \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ et $\mathbf{V} := v \det \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

Solution 61

1. Soit $n := 1 + ab$. On a $1 + ab - b^4 \equiv -b^4 \pmod{[n]}$. Donc $1 + a^4(1 + ab - b^4) \equiv 1 - a^4b^4 \pmod{[n]}$. Or $ab \equiv -1 \pmod{[n]}$. Donc $a^4b^4 \equiv 1 \pmod{[n]}$ et $1 + a^4(1 + ab - b^4) \equiv 1 - 1 \pmod{[n]}$. \square
2. On a pour tous réels a et b ,

$$1 + a^4(1 + ab - b^4) = (1 + ab) \times (1 - ab + a^2b^2 - a^3b^3 + a^4).$$

2.7.7 Résidus quadratiques

Solution 62

Supposons que (x, y) soit solution.

- $x \equiv 0 \pmod{2}$ donnerait $y^2 \equiv 3 \pmod{4}$ ce qui est impossible.
- $x \equiv 3 \pmod{4}$ donnerait $y^2 \equiv 2 \pmod{4}$ ce qui est impossible.

- Reste $x \equiv 1 \pmod{4}$.

Dans ce cas, $x^2 - 3x + 9 \equiv 3 \pmod{4}$. Il existe donc au moins un diviseur premier $p \equiv 3 \pmod{4}$ de $x^2 - 3x + 9$, donc de $(x^2 - 3x + 9)(x + 3) = x^3 + 27$.

On a donc $y^2 \equiv -4 \pmod{p}$, donc $\left(\frac{-4}{p}\right) = 1$, donc $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$, ce qui contredit $p \equiv 3 \pmod{4}$.

Solution 63

1. $3|y^3 - 7 \Rightarrow y = 3k + 1$ pour un entier k .

Ainsi l'équation devient :

$$x(x + 1) = 9k^3 + 9k^2 + 3k - 2 \equiv 1 \pmod{3}$$

Cas 1 : $x \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow x(x + 1) \equiv 0(0 + 1) \equiv 0 \pmod{3}$, impossible.

Cas 2 : $x \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow x(x + 1) \equiv 1(1 + 1) \equiv 2 \pmod{3}$, impossible.

Cas 3 : $x \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow x(x + 1) \equiv 2(2 + 1) \equiv 0 \pmod{3}$, impossible.

Ainsi $3x(x + 1) + 7 = y^3$ n'a pas de solutions en entiers.

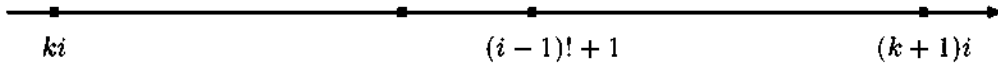
2. On a $p \mid x^p - x \forall x \in \mathbb{Z}$ and $p \in \mathbb{P}$, ainsi $y^3 \equiv y \pmod{3} \Rightarrow y \equiv 7 \equiv 1 \pmod{3}$. En substituant comme ci-dessus $y = 3k + 1$ on obtient $3 \mid x^2 + x - 1 \Rightarrow 3 \mid 4(x^2 + x - 1) \Rightarrow 3 \mid (2x + 1)^2 - 5 \cdot 1^2$, mais 5 est un résidu quadratique de p si et seulement si $10 \mid p^2 - 1$, ce qui n'est pas le cas.

Solution 64

1. Soit ζ une racine de $g(x)$, ζ vérifie $\zeta^n = 1$ et $\zeta \neq 1$. ζ est donc aussi racine de $p(x)$. Donc $X - \zeta$ divise $p(X)$. Comme les ζ sont distincts, les $X - \zeta$ sont premiers entre eux et leur produit, $g(x)$ divise $p(X)$.
2. $1280000401 = a^7 + a^2 + 1$ avec $a = 20$. Pour $n = 3, 7, 2$ et 1 forment un système complet de restes modulo 3. Donc $X^7 + X^2 + 1$ est divisible par $X^2 + X + 1$. En posant la division, on trouve $X^7 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^5 - X^4 + X^2 - X + 1)$. D'où $a^7 + a^2 + 1 = (a^2 + a + 1)(a^5 - a^4 + a^2 - a + 1)$ soit $1280000401 = 421 \times 3040381$.

Solution 65

$$(i - 1)!$$



Dans le cas de la figure, $\left[\frac{(i - 1)!}{i}\right] = k$ et $\left[\frac{(i - 1)! + 1}{i} - \left[\frac{(i - 1)!}{i}\right]\right] = 0$. Donc pour avoir un saut d'une unité et donc $\left[\frac{(i - 1)! + 1}{i} - \left[\frac{(i - 1)!}{i}\right]\right] = 1$, il est nécessaire et suffisant d'avoir $(i - 1)! + 1$ pile sur ki ce qui veut dire i premier d'après le théorème de Wilson (théorème 24 page 45).

Solution 66

On pose $q = \frac{p - 1}{2}$ et

$$\epsilon = \begin{cases} 0 & \text{si } p \equiv 1 \pmod{p} \\ 1 & \text{si } p \equiv 3 \pmod{p} \end{cases} \quad (2.4)$$

et pour $k = 0, 1, \dots, p - 1$.

$$N(k) = \sum_{\substack{i, j=1 \\ r_i + n_j \equiv k \pmod{p}}}^q 1. \quad (2.5)$$

Si k est résidu quadratique pour le module p , alors $\{kr_i, i = 1, \dots, q\}$ est un système complet de résidus quadratiques pour le module p et $\{kn_i, i = 1, \dots, q\}$ est un système complet de non résidus quadratiques

pour le module p .

Si k est non résidu quadratique pour le module p , alors $\{kn_i, i = 1, \dots, q\}$ est un système complet de résidus quadratiques pour le module p et $\{kr_i, i = 1, \dots, q\}$ est un système complet de non résidus quadratiques pour le module p .

En remplaçant r_i par kr_i et n_j par kn_j dans (2.5) on obtient

$$N(k) = N(1), \quad k = 1, \dots, p-1 \quad (2.6)$$

Maintenant -1 est résidu quadratique pour le module p lorsque $p \equiv 1 \pmod{p}$ et -1 est non résidu quadratique pour le module p lorsque $p \equiv 3 \pmod{p}$. Donc

$$N(0) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ r_i \equiv -n_j \pmod{p}}}^q 1 = \epsilon q. \quad (2.7)$$

Or,

$$\sum_{k=0}^{p-1} N(k) = \sum_{i,j=1}^q 1 = q^2 \quad (2.8)$$

On en déduit :

$$\epsilon q + 2qN(1) = q^2.$$

D'où

$$N(1) = \frac{q - \epsilon}{2}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} E(p) &= \left(\sum_{i=1}^q \omega^{r_i} \right) \left(\sum_{j=1}^q \omega^{n_j} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^q \omega^{r_i+n_j} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{\substack{i,j=1 \\ r_i+n_j \equiv k \pmod{p}}}^q \omega^{r_i+n_j} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \omega^k N(k) \\ &= N(0) + N(1) (\omega + \omega^2 + \dots + \omega^{p-1}) \\ &= N(0) - N(1) \\ &= \epsilon q - \frac{q - \epsilon}{2}, \end{aligned}$$

Soit

$$E(p) = \begin{cases} \frac{1-p}{4} & \text{si } p \equiv 1 \pmod{p} \\ \frac{1+p}{4} & \text{si } p \equiv 3 \pmod{p} \end{cases}$$

2.7.8 Probabilités

Solution 67 (Indicatrice d'Euler)

1. On sait que x est premier avec n si et seulement si aucun des diviseurs premiers de n ne divise x . On a donc :

$$B = \overline{A_{p_1}} \cap \dots \cap \overline{A_{p_r}}.$$

2. Puisque qu'on est en situation d'équiprobabilité, il suffit de calculer le cardinal de A_m . Mais si $n = km$, alors les multiples de m qui sont inférieurs ou égaux à n sont $m, 2m, \dots, km$. On a donc

$$P(A_m) = \frac{k}{n} = \frac{1}{m}.$$

3. Soit $i_1 < \dots < i_m$ des entiers distincts choisis dans $\{1, \dots, r\}$. On doit prouver que

$$P(A_{p_{i_1}}) \dots P(A_{p_{i_m}}) = P(A_{p_{i_1}} \cap \dots \cap A_{p_{i_m}}).$$

Mais,

$$P(A_{p_{i_1}}) \dots P(A_{p_{i_m}}) = \prod_{j=1}^m \frac{1}{p_{i_j}}.$$

D'autre part, puisque p_{i_1}, \dots, p_{i_m} sont premiers entre eux deux à deux, un entier est multiple de $p_{i_1} \dots p_{i_m}$ si et seulement s'il est multiple de chaque $p_{i_j}, j = 1, \dots, m$. On en déduit que

$$A_{p_{i_1}} \cap \dots \cap A_{p_{i_m}} = A_{p_{i_1} \dots p_{i_m}},$$

soit

$$P(A_{p_{i_1}} \cap \dots \cap A_{p_{i_m}}) = \frac{1}{p_{i_1} \dots p_{i_m}},$$

ce qui prouve le résultat voulu.

4. Les événements $\overline{A_{p_1}}, \dots, \overline{A_{p_r}}$ sont également indépendants. On en déduit que

$$P(B) = \prod_{j=1}^r P(\overline{A_{p_j}}) = \prod_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_j}\right).$$

5. On sait aussi, par le modèle de l'équiprobabilité et puisque le cardinal de B est égal à $\phi(n)$, que

$$P(B) = \frac{\phi(n)}{n}$$

ce qui, grâce à la question précédente, donne le résultat voulu.

2.8 Problèmes

Le problème suivant est tiré d'un article de John Cohn de 1964. Il se propose de démontrer que les seules valeurs prises par la suite (F_n) qui sont des carrés d'entiers sont 0, 1 et 144. Une des idées motrices est que si un entier A est un carré dans \mathbb{N} , alors il est nécessairement un carré modulo tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pas seulement n premier.

Problème 1 (Fibonacci rides again)

On considère les deux suites d'entiers définies par :

$$F_{-1} := 1; F_0 := 0; L_{-1} := -1; L_0 := 2; \quad \text{et } \forall n \geq -1, F_{n+2} := F_{n+1} + F_n, \quad L_{n+2} := L_{n+1} + L_n.$$

On rappelle (exercice 11 page 591 du cours de première) que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, F_{n+p} = F_{n-1}F_p + F_nF_{p+1}. \quad (2.9)$$

On avait alors posé $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{U}_n := \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{U}_0$.

1. (a) Démontrer que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, (m \mid n \implies F_m \mid F_n) \quad (2.10)$$

(b) Démontrer que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, 2F_{m+n} = F_mL_n + F_nL_m \quad (2.11)$$

$$\text{et } \forall m, n \in \mathbb{N}, 2L_{m+n} = 5F_mF_n + L_nL_m \quad (2.12)$$

(c) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ et en déduire que

$$\forall m \in \mathbb{N}, L_{4m} = L_{2m}^2 - 2 \quad (2.13)$$

(d) Démontrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \text{pgcd}(F_{3m}, L_{3m}) = 2 \quad (2.14)$$

$$\text{et } \forall m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m \implies \text{pgcd}(F_m, L_m) = 1 \quad (2.15)$$

2. On démontre ensuite les lemmes suivants :

(a)

$$\forall p \in \mathbb{N}, L_{6p} \equiv 2 \pmod{4}. \quad (2.16)$$

(b)

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, L_{2r} \equiv 3 \pmod{4}. \quad (2.17)$$

(c) Résidus quadratiques : Démontrer que

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, -1 \text{ n'est pas résidu quadratique modulo } L_{2r} \quad (2.18)$$

$$\text{et pour } r \geq 2, 2 \text{ est résidu quadratique modulo } L_{2r}. \quad (2.19)$$

(d)

$$\forall r \geq 2, 3 \nmid L_{2^r}. \quad (2.20)$$

(e)

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, \forall \ell \in \mathbb{N}, F_{\ell+2^r+1} \equiv -F_\ell \pmod{[L_{2^r}]}. \quad (2.21)$$

3. Démontrer les théorèmes suivants :

(a) À l'aide de (2.11) :

T1 : Si F_n est un carré dans \mathbb{N} , alors $n \equiv 0, 1, 2, 6$ ou $11 \pmod{12}$.

(b) À l'aide de (2.11), (2.10) et à l'aide de (2.16) :

T2 : Si $n \equiv 6 \pmod{12}$, alors F_n n'est pas un carré dans \mathbb{N} .

(c) À l'aide de (2.21) et (2.19) :

T3 : Soit $n = 12p + q$ avec $p > 0$ et $q \in \{-1, 1, 2\}$. F_n n'est pas un carré dans \mathbb{N} .

(d) À l'aide de (2.21), (2.17), (2.20) et (2.19) :

T4 : Soit $n = 24p + 12$ avec $p > 0$.(i) F_n n'est pas un carré dans \mathbb{N} .(ii) $\frac{1}{2}F_n$ n'est pas un carré dans \mathbb{N} .(e) T5 : Soit $n \equiv 0 \pmod{12}$. Si F_n est un carré dans \mathbb{N} , alors $n = 12$.**Correction 1**

1. (a) On va démontrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $\mathcal{P}_k : F_{km} \equiv 0 \pmod{[F_m]}$. On a clairement \mathcal{P}_0 . Soit $k \in \mathbb{N}$ pour lequel on a \mathcal{P}_k , en spécifiant $n := km$ et $p := m$ dans (2.9) on obtient bien $F_{(k+1)m} \equiv 0 \pmod{[F_m]}$ c'est-à-dire \mathcal{P}_{k+1} . On conclut avec le théorème de récurrence.

(b) On va démontrer par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ que $\mathcal{H}_m : \forall n \in \mathbb{N}, 2F_{m+n} = F_m L_n + F_n L_m$. \mathcal{H}_0 est claire dans la mesure où, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $F_0 L_n + F_n L_0 = 2F_n = 2F_{0+n}$.On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{V}_n := \begin{pmatrix} L_n \\ L_{n+1} \end{pmatrix}$ on vérifie sans peine que $\mathbf{V}_n = \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{V}_0$.

$$\text{On a } \mathbf{U}_n + \mathbf{V}_n = \mathbf{A}^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{A}^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\mathbf{A}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\mathbf{A}^n \cdot \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\mathbf{A}^{n+1} \cdot \mathbf{U}_0.$$

On en déduit que $2F_{n+1} = F_n + L_n = F_1 L_n + F_n L_1$ et ce pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. C'est \mathcal{H}_1 .On va démontrer $\forall m \in \mathbb{N}$, \mathcal{H}_m par une récurrence à deux pas : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $(\mathcal{H}_{m-1} \text{ et } \mathcal{H}_m) \implies \mathcal{H}_{m+1}$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ pour lequel on a $(\mathcal{H}_{m-1} \text{ et } \mathcal{H}_m)$.Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} 2F_{m+n+1} &= 2F_{m+n} + 2F_{m-1+n} \\ &= \underbrace{F_m L_n + F_n L_m}_{\text{d'après } \mathcal{H}_m} + \underbrace{F_{m-1} L_n + F_n L_{m-1}}_{\text{d'après } \mathcal{H}_{m-1}} \\ &= (F_m + F_{m-1})L_n + F_n(L_m + L_{m-1}) \\ &= F_{m+1}L_n + F_n L_{m+1} \end{aligned}$$

et ce pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. C'est \mathcal{H}_{m+1} . On conclut avec le théorème de récurrence. On va démontrer par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ que $\mathcal{K}_m : \forall n \in \mathbb{N}, 2L_{m+n} = F_m F_n + L_n L_m$.

\mathcal{K}_0 est claire dans la mesure où, pour tout entier $n \in \mathbb{N}, F_0 F_n + L_n L_0 = 2L_n = 2L_{0+n}$.

On a $5U_n + V_n = \mathbf{A}^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mathbf{A}^n \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\mathbf{A}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\mathbf{A}^n \cdot \mathbf{A} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\mathbf{A}^{n+1} \cdot \mathbf{V}_0$.

On en déduit que $2L_{n+1} = 5F_n + L_n = 5F_1 F_n + L_n L_1$ et ce pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. C'est \mathcal{K}_1 .

On va démontrer $\forall m \in \mathbb{N}, \mathcal{K}_m$ par une récurrence à deux pas :

$\forall m \in \mathbb{N}^*, ((\mathcal{K}_{m-1} \text{ et } \mathcal{K}_m) \implies \mathcal{K}_{m+1})$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ pour lequel on a $(\mathcal{K}_{m-1} \text{ et } \mathcal{K}_m)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} 2L_{m+n+1} &= 2L_{m+n} + 2L_{m-1+n} \\ &= \underbrace{5F_m F_n + L_n L_m}_{\text{d'après } \mathcal{K}_m} + \underbrace{5F_{m-1} F_n + L_n L_{m-1}}_{\text{d'après } \mathcal{K}_{m-1}} \\ &= 5(F_m + F_{m-1})F_n + F_n(L_m + L_{m-1}) \\ &= 5F_{m+1}L_n + F_n L_{m+1} \end{aligned}$$

et ce pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. C'est \mathcal{K}_{m+1} . On conclut avec le théorème de récurrence.

- (c) On pose $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\Phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On vérifie que $\Phi^2 = \Phi + 1, \Phi'^2 = \Phi' + 1$ et $\Phi\Phi' = -1$. On démontre par une récurrence à deux pas, $\mathcal{L}_n : F_n = \Phi^n + \Phi'^n$. Les propositions \mathcal{L}_0 et \mathcal{L}_1 sont claires. Et si pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a \mathcal{L}_{n-1} et \mathcal{L}_n alors

$$L_{n+1} = L_{n-1} + L_n = \Phi^{n-1} + \Phi^n + \Phi'^{n-1} + \Phi'^n = \Phi^{n-1}(1 + \Phi) + \Phi'^{n-1}(1 + \Phi) = \Phi^{n+1} + \Phi'^{n+1}$$

c'est-à-dire \mathcal{L}_{n+1} . On conclut avec le théorème de récurrence.

Maintenant pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$L_{2n}^2 - 2 = (\Phi^{2n} + \Phi'^{2n})^2 - 2 = (\Phi^{4n} + \Phi'^{4n}) + 2(\Phi\Phi')^{2n} - 2 = L_{4n} + 2(-1)^{2n} - 2 = L_{4n}.$$

- (d) En spécifiant $n := 3$ dans (2.11) et (2.12), on a, $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} F_{m+3} = 2F_m + L_m \\ L_{m+3} = 5F_m + 2L_m \end{cases}. \text{ Ainsi } F_m \wedge L_m \text{ divise } F_m \text{ et } L_m \text{ donc aussi } 2F_m + L_m = F_{m+3}.$$

Il divise aussi $5F_m + 2L_m = L_{m+3}$. Donc il divise leur pgcd : $F_m \wedge L_m$ divise $F_{m+3} \wedge L_{m+3}$.

Inversement, puisque le système $\begin{cases} F_{m+3} = 2F_m + L_m \\ L_{m+3} = 5F_m + 2L_m \end{cases}$ peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} F_{m+3} \\ L_{m+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_m \\ L_m \end{pmatrix} \text{ on en déduit que } \begin{pmatrix} F_m \\ L_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F_{m+3} \\ L_{m+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{m+3} \\ L_{m+3} \end{pmatrix}.$$

Cette fois $F_{m+3} \wedge L_{m+3}$ divise F_{m+3} et L_{m+3} donc aussi $-2F_{m+3} + L_{m+3} = F_m$.

Il divise aussi L_m . Donc il divise leur pgcd : $F_{m+3} \wedge L_{m+3}$ divise $F_m \wedge L_m$. On a donc $F_{m+3} \wedge L_{m+3} = F_m \wedge L_m$ et ce pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Trois récurrences immédiates donnent :

- si $m \equiv 0 \pmod{3}$ alors $F_m \wedge L_m = F_0 \wedge L_0 = 2 \wedge 0 = 2$,
- si $m \equiv 1 \pmod{3}$ alors $F_m \wedge L_m = F_1 \wedge L_1 = 1 \wedge 1 = 1$,
- si $m \equiv 2 \pmod{3}$ alors $F_m \wedge L_m = F_2 \wedge L_2 = 1 \wedge 3 = 1$.

- (a) Soit $m \in \mathbb{N}$. On a $\begin{pmatrix} F_{m+6} \\ L_{m+6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} F_m \\ L_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 20 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_m \\ L_m \end{pmatrix}$. Donc $L_{m+6} = 20F_m + 9L_m \equiv L_m \pmod{4}$. Une récurrence évidente donne $\forall p \in \mathbb{N}, L_{6p} \equiv L_0 \equiv 2 \pmod{4}$.

- (b) On démontre par récurrence sur $r \in \mathbb{N}^*$ que $\mathcal{M}_r : L_{2^r} \equiv 3 \pmod{4}$. On a $L_{2^1} = L_2 = 3$ donc on a bien \mathcal{M}_1 et $L_{2^2} = L_4 = 7$ donc on a bien \mathcal{M}_2 . Soit $r \geq 2$ pour lequel on a \mathcal{M}_r . D'après (2.12) en spécifiant $m := 2^{r-1}$ on a alors

$$L_{4 \times 2^{r-1}} = L_{2^{r+1}} = \underbrace{L_{2^r}^2 - 2}_{\text{d'après } \mathcal{M}_r} \equiv 3^2 - 2 \equiv 3 \pmod{4}.$$

On conclut avec le théorème de récurrence.

- (c) Pour $r \geq 2$, d'après (2.12) en spécifiant $m := 2^{r-2}$ on a alors $L_{2^r} = L_{2^{r-2}}^2 - 2$. On a en particulier $2 \equiv L_{2^{r-2}}^2 \pmod{L_{2^r}}$ et 2 est un carré modulo L_{2^r} .

On écrit L_{2^r} comme produit de nombres premiers distincts ou non : $L_{2^r} = p_1 p_2 \dots p_s$. D'après (2.17), aucun de ces nombres premier n'est 2 et au moins l'un d'entre eux — disons p_1 pour fixer les idées — est congru à 3 modulo 4. De ce fait on a $\left(\frac{-1}{p_1}\right)$ d'après le théorème 26 page 46. Maintenant, si on avait $a^2 + 1 = k p_1 p_2 \dots p_s$ pour un certain $a \in \mathbb{Z}$ et un certain $k \in \mathbb{Z}$, on aurait $a^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p_1}$, et on vient de voir que ce n'était pas possible.

- (d) Si on avait $p_1 := 3$ comme facteur premier on aurait 2 qui serait un carré modulo 3 ce qui n'est pas le cas.
 (e) D'après (2.11) on a en spécifiant $n := \ell$ et $m := 2^r$,

$$\begin{aligned} 2F_{\ell+2^r+1} &= F_\ell L_{2^r+1} + L_\ell F_{2^r+1} \\ &= F_\ell \underbrace{(L_{2^r}^2 - 2)}_{\text{d'après (2.13)}} + L_\ell \underbrace{L_{2^r} F_{2^r}}_{\text{d'après (2.11)}} \\ &\equiv -2F_\ell \pmod{L_{2^r}} \end{aligned}$$

Or $L_{2^r} \equiv 3 \pmod{4}$ donc impair donc premier avec 2. Donc il existe un entier u tel que $2u \equiv 1 \pmod{L_{2^r}}$. En multipliant les deux membres par u on obtient bien (2.21).

- (a) On a $F_{12} = 144$ et $L_{12} = 322$. D'après (2.11) on a

$$F_{n+12} = 72L_n + 161F_n \equiv F_n \pmod{8}.$$

En regardant les douze premiers termes de la suite (F_n) modulo 8 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F_n	0	1	1	2	3	5	0	5	5	2	7	1	0	1

La suite (F_n) modulo 8 est périodique de période 12; De plus, les carrés modulo 8 sont 0, 1 et 4. Donc les seuls carrés possibles pour F_n le sont nécessairement pour $n \equiv 0, 1, 2, 6$ ou 11 (mod 12).

- (b) Soit $n = 12p + 6$. D'après (2.11),

$$2F_n = 2F_{12p+6} = F_{12p}L_6 + F_6L_{12p} = 18F_{12p} + 8L_{12p}.$$

Or $F_{12} = 144$ divise F_{12p} d'après (2.10), et donc $F_{12p} \equiv 0 \pmod{16}$. Donc

$$F_n = 9F_{12p} + 4L_{12p} \equiv 0 + 4 \times 2 \equiv 8 \pmod{16}.$$

Comme les carrés modulo 16 sont 0, 1, 4 et 9, F_n n'est pas un carré dans \mathbb{N} .

- (c) Soit $p > 0$. On pose $p = 2^{r-1}P$ avec $r \geq 1$ et P impair. Ainsi $n = 12p + q = 6 \times 2^r P + q$ avec $q = -1, 1$ ou 2 .

D'après le lemme (2.21), appliqué $3P$ fois,

$$\begin{aligned} F_n &= F_{6 \times 2^r P + q} \\ &\equiv (-1)^{3P} F_q \pmod{F_{2^r}} \\ &\equiv -F_q \pmod{F_{2^r}} \text{ puisque } P \text{ est impair} \\ &\equiv -1 \pmod{F_{2^r}} \end{aligned}$$

puisque $F_1 = F_2 = F_{-1} = 1$.

Donc F_n n'est pas un carré modulo F_{2^r} d'après (2.19). À plus forte raison F_n n'est pas un carré dans \mathbb{N} .

- (d) On pose $p = 2^{r-2}P$ avec $r \geq 2$ et P impair. Ainsi $n = 24p + 12 = 6 \times 2^r P + 12$.
À nouveau grâce au lemme (2.21),

$$F_n = F_{6 \times 2^r P + 12} \equiv (-1)^{3P} F_{12} \equiv -144 \pmod{F_{2^r}}.$$

Or d'après le lemme (2.17), $L_{2^r} \equiv 3 \pmod{4}$ donc L_{2^r} est premier à 4. D'après le lemme (2.20), puisque $r \geq 2$, $3 \nmid L_{2^r}$, donc L_{2^r} est premier à 3. Donc L_{2^r} est premier à 12. De ce fait il existe un entier u tel que $12u \equiv 1 \pmod{[L_{2^r}]}$. Maintenant, F_n ne peut pas être un carré k^2 avec $k \in \mathbb{N}$, sinon on aurait $(uk)^2 \equiv -144u^2 \equiv -1 \pmod{[L_{2^r}]}$ en contradiction avec le lemme (2.19). C'est le (i).

On a $3 \mid n$, donc d'après (2.10), $F_3 \mid F_n$ donc F_n est bien pair.

Par ailleurs, F_n et L_n ont même parité pour $n = 0$ et $n = 1$ donc pour tous $n \in \mathbb{N}$. Comme $3 \nmid 2^r$ on en déduit que $\text{pgcd}(F_{2^r}, L_{2^r}) = 1$ d'après (2.14), et donc que L_{2^r} est impair.

Supposons l'espace d'un instant que $\frac{1}{2}F_n$ soit le carré de l'entier k , on aurait $k^2 \equiv -72 \pmod{[L_{2^r}]}$. Or, d'après le lemme (2.19), il existe $v \in \mathbb{Z}$, $v^2 \equiv 2 \pmod{[L_{2^r}]}$. Maintenant 12 est premier avec L_{2^r} . Donc il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $12u \equiv 1 \pmod{[L_{2^r}]}$. Par conséquent $k^2 u^2 v^2 \equiv -72u^2 v^2 \equiv -144u^2 \equiv -1 \pmod{[L_{2^r}]}$ en contradiction avec le lemme (2.19). C'est le (ii).

- (e) On a $F_{12} = 144 = 12^2$. On va démontrer par une descente infinie que c'est l'unique F_{12m} qui est un carré dans \mathbb{N} ou le double d'un carré.

Supposons que F_{12m} soit un carré dans \mathbb{N} avec $m > 1$. D'après le théorème T4, m est pair. De plus $F_{24} = F_{12}L_{12} = 144 \times 322$ d'après (2.11). Comme F_{24} n'est pas un carré, on a donc $m \geq 4$. Maintenant, d'après (2.11), on a $F_{12m} = F_{6m}L_{6m}$ et d'après (2.14) F_{6m} et L_{6m} n'ont que 2 comme diviseur commun. Donc F_{6m} est soit un carré, soit le double d'un carré. Puisque $m \geq 4$ et que m est pair on a $\frac{1}{2}m > 1$ et on construit ainsi une descente infinie, c'est-à-dire une suite strictement décroissante d'entiers naturels. Inutile de le préciser, une telle suite ne peut pas exister.

On reprend une des idées du problème précédent : la suite des restes de la suite de Fibonacci modulo un nombre premier. Les notations restent les mêmes.

Définition 9 (Suite périodique).

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite définie sur un intervalle I de \mathbb{N} non borné. On dit que $(u_n)_{n \in I}$ est périodique s'il existe un entier $T \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \in I, u_{n+T} = u_n.$$

Un tel nombre T s'appelle alors **une période** de $(u_n)_{n \in I}$.

Il est clair que si T est une période d'une suite périodique, alors tout multiple strictement positif de T est aussi une période de cette même suite.

L'ensemble des périodes d'une suite périodique est une partie de \mathbb{N} non vide. Elle admet donc un plus petit élément.

Définition 10.

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite périodique définie sur un intervalle I . La plus petite période s'appelle la **période** de $(u_n)_{n \in I}$.

Problème 2

Soit p un nombre premier. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n^{(p)}$ le reste de F_n dans la division euclidienne par p . Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible, on abrège $R_n := R_n^{(p)}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que pour que F_n soit pair, il faut et il suffit que 3 divise n .
2. Soit p un nombre premier. En utilisant le principe des tiroirs (théorème 11 page 463), Démontrer que la suite $(R_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$ admet une période $T \leq p^2$.
3. Vérifier que la suite $(R_n^{(5)})_{n \in \mathbb{N}}$ admet 20 comme période.
4. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n \times 3^n$.
Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \equiv u_{n+1} + u_n \pmod{5}$.
5. Soit $p := 11$.
 - (a) Vérifier que 4 et 8 sont solutions de la congruence

$$x^2 \equiv x + 1 \pmod{p}.$$

- (b) Démontrer que si $x \in \mathbb{Z}$ est solution de la congruence

$$x^2 \equiv x + 1 \pmod{p},$$

alors $x \equiv 4 \pmod{p}$ ou $x \equiv 8 \pmod{p}$.

- (c) Déterminer deux entiers a et b tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a \times 4^n + b \times 8^n \equiv F_n \pmod{p}.$$

- (d) En déduire que $p - 1 = 10$ est une période de la suite $(R_n^{(11)})_{n \in \mathbb{N}}$.

6. Soit $p > 5$ un nombre premier. On pose $m := \frac{p-1}{2}$.

(a) Démontrer que pour que $\left(\frac{5}{p}\right) = 1$, il faut et il suffit que $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$.

(b) Démontrer que pour que $x \in \mathbb{Z}$ soit solution de la congruence

$$x^2 \equiv x + 1 \pmod{p},$$

il faut et il suffit que x soit solution de la congruence

$$(x+m)^2 \equiv m^2 + 1 \pmod{p}.$$

(c) En déduire que lorsque $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$, l'équation

$$[x^2 \equiv x + 1 \pmod{p}, \text{ inconnue } x \in \{0, 1, \dots, p-1\}]$$

admet deux solutions distinctes (modulo p) x_1 et x_2 .

(d) Démontrer qu'il existe deux entiers a et b tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, ax_1^n + bx_2^n \equiv F_n \pmod{p}.$$

(e) En déduire que $p-1$ est une période de la suite $(R_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$.

7. On prend $p = 1532516992679$. Écrire un programme Python qui calcule m , $m^2 + 1$, d , x_1 et x_2 ainsi que a .

Correction 2

1. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $R_{n+2}^{(2)} \equiv R_{n+1}^{(2)} + R_n^{(2)} \pmod{2}$. On en déduit que $R_2^{(2)} = 1$, $R_3^{(2)} = 0 = R_0^{(2)}$, $R_4^{(2)} = 1 = R_1^{(2)}$ et par une récurrence à deux pas, que la suite $(R_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$ admet une période égale à 3. Le résultat en découle.

2. Comme les termes de la suite $(R_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$ ne peuvent prendre que p valeurs au plus et par suite les couples $\left(R_n^{(p)}, R_{n+1}^{(p)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peuvent prendre que p^2 valeurs au plus. On considère les $p^2 + 1$ premiers couples $\left(R_n^{(p)}, R_{n+1}^{(p)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ de termes de la suite $(R_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$, pour $n \in \{0, 1, \dots, p^2\}$. D'après le principe des tiroirs, il existe deux indices $k > \ell$ de $n \in \{0, 1, \dots, p^2\}$ tels que $R_k^{(p)} = R_\ell^{(p)}$ et $R_{k+1}^{(p)} = R_{\ell+1}^{(p)}$. On pose $T := k - \ell$.

Une récurrence à deux pas sans malice permet de vérifier que $\forall n \geq \ell$, $R_{n+T}^{(p)} = R_n^{(p)}$. Il reste à revenir en arrière, grâce à la congruence

$$R_{n-1}^{(p)} \equiv R_{n+1}^{(p)} - R_n^{(p)} \pmod{p},$$

et à démontrer par une récurrence finie que $\forall n \geq 0$, $R_{n+T}^{(p)} = R_n^{(p)}$.

Donc T est une période de la suite $(R_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$ et $T = k - \ell \leq p^2$.

3. Un tout petit programme Python fait l'affaire.

```
U = [0,1]
for k in range(20):
    T=U[0]
    U[0]= U[1]
    U[1] = (U[1]+T)%5
print(U[0],U[1])
```

On trouve ainsi $R_{20}^{(5)} = R_0^{(5)}$ et $R_{21}^{(5)} = R_1^{(5)}$, donc toujours par la même petite récurrence à deux pas, 20 est une période de la suite $(R_n^{(5)})_{n \in \mathbb{N}}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+2} - u_{n+1} - u_n &= (2n+4) \times 3^{n+2} - (2n+2) \times 3^{n+1} - 2n \times 3^n \\ &= 3^n (18(n+2) - 6(n+1) - 2n) \\ &\equiv 3^n (3(n+2) - (n+1) - 2n) \\ &\equiv 0 \pmod{5}. \end{aligned}$$

Comme $u_0 = 0$ et $u_1 = 6 \equiv 1 \pmod{5}$ on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \equiv F_n \pmod{5}$.

5. (a) On écrit $(x-4)(x-8) = x^2 - 12x + 32 \equiv x^2 - x - 1 \pmod{11}$.

(b) Inversement, si $x^2 \equiv x+1 \pmod{11}$, alors $(x-4)(x-8) \equiv 0 \pmod{11}$, donc le nombre premier 11 divise le produit $(x-4)(x-8)$, donc il divise l'un ou l'autre des deux facteurs. Donc $x \equiv 4 \pmod{11}$ ou $x \equiv 8 \pmod{11}$.

(c) On commence par remarquer que pour tous entiers a et b on a, en posant $v_n := a \times 4^n + b \times 8^n$:

$$\begin{aligned} v_{n+2} - v_{n+1} - v_n &= a \times 4^n (4^2 - 4 - 1) + b \times 8^n (8^2 - 8 - 1) \\ &\equiv a \times 4^n \times 0 + b \times 8^n \times 0 \\ &\equiv 0 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à trouver a et b pour que $v_0 \equiv 0 \pmod{11}$ et $v_1 \equiv 1 \pmod{11}$, soit $a+b \equiv 0 \pmod{11}$ et $4a+8b \equiv 1 \pmod{11}$. Ainsi $a \equiv -b \pmod{11}$ et $-4a \equiv 1 \pmod{11}$. On trouve alors (Euclide étendu etc.) $a = 8$ et $b = 3$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n \equiv 8 \times 4^n + 3 \times 8^n \pmod{11}.$$

(d) D'après le petit théorème de Fermat, on a $4^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ et $8^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Le résultat en découle.

6. (a) D'après la loi de réciprocité quadratique, on a

$$\left(\frac{p}{5}\right) \left(\frac{5}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \times \frac{5-1}{2}} = (-1)^{p-1} = 1.$$

Or modulo 5 les seuls carrés sont 0^2 , 1^2 et 2^2 . Donc 5 est un carré modulo p si et seulement si $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$.

(b) On écrit le trinôme $x^2 - x - 1$ sous forme canonique, en tenant compte de $-1 \equiv 2m \pmod{p}$.

$$\begin{aligned} x^2 - x - 1 &\equiv x^2 + 2mx - 1 \\ &\equiv (x+m)^2 - 1 - m^2 \pmod{p} \end{aligned}$$

Soit

$$(x+m)^2 \equiv m^2 + 1 \pmod{p}.$$

(c) On va démontrer que $\left(\frac{m^2+1}{p}\right) = 1$.

En effet, $4m^2 + 4 = (p - 1)^2 + 4 \equiv 1 + 4 \pmod{p}$. Donc $4(m^2 + 1)$ est un carré modulo p : $4(m^2 + 1) \equiv u^2 \pmod{p}$ pour au moins un $u \in \mathbb{Z}$. De plus $2(m + 1) \equiv 1 \pmod{p}$ donc $(m^2 + 1) \equiv (u(m + 1))^2 \pmod{p}$ et $m^2 + 1$ est aussi un carré modulo p .

On remarque ensuite que $4(m^2 + 1) \not\equiv 0 \pmod{p}$, donc $d := u(m + 1) \not\equiv 0 \pmod{p}$ et $2d \not\equiv 0 \pmod{p}$. De ce fait $x_1 := -m + d$ et $x_2 := -m - d$ sont deux solutions distinctes modulo p puisque $x_1 - x_2 = 2d$.

(d) D'après les questions précédentes, il suffit de trouver a et b tels que $a + b \equiv 0 \pmod{p}$ et $ax_1 + bx_2 \equiv 1 \pmod{p}$ soit $a \equiv -b \pmod{p}$ et $a(x_1 - x_2) = 2ad \equiv 1 \pmod{p}$.

Or $2d$ est premier avec p puisque son carré, $4d^2 = 4(m^2 + 1) \equiv 5 \pmod{p}$ est lui-même premier avec p . Donc d'après l'algorithme d'Euclide étendu, il existe $a \in \mathbb{Z}$, $2ad \equiv 1 \pmod{p}$. On voit alors que le couple $(a, -a)$ convient.

(e) Simple conséquence du petit théorème de Fermat.

7. On constate que $p = 1532516992679 \equiv -1 \pmod{5}$ et $p = 7699259 \equiv -1 \pmod{4}$.

De ce fait, si q est un carré modulo p et p ne divise pas q , alors d'après le critère quadratique d'Euler, $q^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ et par suite $d := q^{\frac{p+1}{4}}$ vérifie $d^2 = q^{\frac{p+1}{2}} = q^{\frac{p-1}{2}} q \equiv q \pmod{p}$. Donc d est une racine carrée de q modulo p .

```
def racine(a):
    return pow(a, (p+1)//4, p)

def inverse(a):
    return pow(a, p-2, p)

p=1532516992679
m=(p-1)//2
q=(m*m+1)%p
print(q)
d=racine(q)          #racine carree de q modulo p
print(d)
print((d*d-q)%p)    #on verifie que d*d = q modulo p
x1=(-m+d)%p
x2=(-m-d)%p
d2=(2*d)%p
print(x1)
print(x2)
print((x1*x1-x1)%p) #on verifie que x1*x1=x1+1 modulo p
a=inverse(d2)
print(a)            #on calcule l'inverse de 2*d modulo p
print((a*d2)%p)    #on verifie bien que 2*a2d = 1 modulo p.
```

```
383129248171 956908436338 0 190649939999 1341867052681 1 689266773071 1
```

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n \equiv 689266773071 (190649939999^n - 1341867052681^n) \pmod{[1532516992679]}$.

Mais qu'en est-il des périodes de la suite $R_n^{(p)}$ lorsque $p \equiv \pm 2 \pmod{5}$?

On a vu que $m^2 + 1$ n'avait pas de racines carrées modulo p . Nous allons contourner cet obstacle comme nous l'avons fait pour les nombres complexes dans le problème 20 page 602 du cours de première, mais en remplaçant cette fois -1 par $m^2 + 1$.

Problème 3

Soit $p \equiv \pm 2 \pmod{5}$ un nombre premier impair et $m := \frac{p-1}{2}$. Plus généralement on conserve les notations du problème précédent.

Soit \mathcal{C} l'ensemble des matrices $\left\{ \mathbf{M}(a, b) := \begin{pmatrix} a & b \\ b(m^2 + 1) & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{Z} \right\}$.

On pose $\mathbf{D} := \mathbf{M}(0, 1)$ et $\mathbf{O} := \mathbf{M}(0, 0)$

- Démontrer que $\forall (a, b, a', b') \in \mathbb{Z}^4$, $\mathbf{M}(a, b) + \mathbf{M}(a', b') = \mathbf{M}(a + a', b + b')$ et $\mathbf{M}(a, b) \cdot \mathbf{M}(a', b') = \mathbf{M}(aa' + bb'(m^2 + 1), ab' + ba') = \mathbf{M}(a', b') \cdot \mathbf{M}(a, b)$.
- Démontrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $k\mathbf{M}(a, b) = \mathbf{M}(ka, kb)$
et $\mathbf{M}(a, b) \cdot \mathbf{M}(a', b') = \mathbf{M}(aa' + bb'(m^2 + 1), ab' + ba') = \mathbf{M}(a', b') \cdot \mathbf{M}(a, b)$.
- Démontrer que $\mathbf{D}^2 = \mathbf{I}_2 = \mathbf{M}(1, 0)$.

Définition 11.

Soit \mathbf{M} et \mathbf{M}' deux matrices de \mathcal{C} . On dit que \mathbf{M} et \mathbf{M}' sont congrues modulo p , ce qu'on note $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}' \pmod{p}$ s'il existe une matrice $\mathbf{K} \in \mathcal{C}$ telle que $\mathbf{M} = \mathbf{M}' + p\mathbf{K}$.

- Soit \mathbf{M}_1 et \mathbf{M}'_1 deux matrices de \mathcal{C} telles que $\mathbf{M}_1 \equiv \mathbf{M}'_1 \pmod{p}$. Soit \mathbf{M}_2 et \mathbf{M}'_2 deux matrices de \mathcal{C} telles que $\mathbf{M}_2 \equiv \mathbf{M}'_2 \pmod{p}$.
Démontrer que $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \equiv \mathbf{M}'_1 + \mathbf{M}'_2 \pmod{p}$ et que $\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 \equiv \mathbf{M}'_1 \cdot \mathbf{M}'_2 \pmod{p}$.
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{M}_1^n \equiv \mathbf{M}'_1^n \pmod{p}$.
- Démontrer que si $\mathbf{M} \in \mathcal{C}$ n'est pas congrue à $\mathbf{O} \pmod{p}$ alors il existe $\mathbf{A} \in \mathcal{C}$ tel que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{M} \equiv \mathbf{I}_2 \pmod{p}$.
- Démontrer que si ni \mathbf{M} ni \mathbf{N} n'est congrue à \mathbf{O} modulo p alors $\mathbf{M} \cdot \mathbf{N}$ n'est pas congrue à \mathbf{O} modulo p .

Soit $\overline{\mathcal{C}} := \left\{ \mathbf{M}(a, b) \mid \begin{matrix} 0 \leq a < p \\ 0 \leq b < p \end{matrix} \right\}$ et $\overline{\mathcal{C}}^* := \overline{\mathcal{C}} \setminus \{\mathbf{O}\}$.

- Démontrer que $\forall \mathbf{M} \in \overline{\mathcal{C}}^*$, $\exists! \mathbf{M}_p \in \overline{\mathcal{C}}^*$, $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}_p \pmod{p}$.

- Soit $\mathbf{A} \in \overline{\mathcal{C}}^*$.

Démontrer que $\Phi_{\mathbf{A}} : \overline{\mathcal{C}}^* \rightarrow \overline{\mathcal{C}}^*$
 $\mathbf{M} \mapsto (\mathbf{A} \cdot \mathbf{M})_p$ est une bijection.

- En calculant soigneusement $\prod_{\mathbf{M} \in \overline{\mathcal{C}}^*} \mathbf{M}$ et $\prod_{\mathbf{M} \in \overline{\mathcal{C}}^*} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{M})_p$, démontrer que

$$\mathbf{A}^{p^2-1} \equiv \mathbf{I}_2 \pmod{p}.$$

On pose $\mathbf{Q} := \mathbf{M}(-m, 1)$ et $\mathbf{R} := \mathbf{M}(-m, -1)$.

- Vérifier que $\mathbf{Q}^2 \equiv \mathbf{Q} + \mathbf{I}_2 \pmod{p}$ et que $\mathbf{R}^2 \equiv \mathbf{R} + \mathbf{I}_2 \pmod{p}$.

- Démontrer qu'il existe $\mathbf{A} \in \overline{\mathcal{C}}^*$, $\Phi_n := \mathbf{A} \cdot (\mathbf{Q}^n - \mathbf{R}^n) \equiv F_n \mathbf{I}_2 \pmod{p}$.

- En déduire que la suite de Fibonacci admet $p^2 - 1$ comme période modulo p lorsque p est premier et $p \equiv \pm 2 \pmod{5}$.

Correction 3

Les questions 1 à 4 sont des vérifications de routine.

5. Soit $M := M(a, b) \in \mathcal{C}$ qui n'est pas congrue à $O \pmod{p}$. On a donc a ou b non congru à 0 modulo p . Or $M(a, -b) \cdot M(a, -b) = (a^2 - b^2(m^2 + 1))I_2$.

Maintenant, $\delta := a^2 - b^2(m^2 + 1)$ est premier avec p . En effet, par l'absurde, si b n'est pas congru à 0 modulo p , alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $kb \equiv 1 \pmod{p}$ et alors $k^2\delta \equiv (ka)^2 - (m^2 + 1) \pmod{p}$ donc $\delta \equiv 0 \pmod{p}$ entrerait en contradiction avec $m^2 + 1$ non résidu quadratique modulo p (voir problème précédent). Donc $b \equiv 0 \pmod{p}$ et $a^2 \equiv 0 \pmod{p}$ ce qui contredit a non congru à 0 modulo p .

On a donc établi que δ est premier avec p . Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k\delta \equiv 1 \pmod{p}$ et ainsi $A := kM(a, -b)$ vérifie bien $A \cdot M = I_2 \pmod{p}$.

6. Par l'absurde. On suppose $M \cdot N = O \pmod{p}$.
- Si $M \in \mathcal{C}$ n'est pas congrue à $O \pmod{p}$ alors il existe $A \in \mathcal{C}$ tel que $A \cdot M = I_2 \pmod{p}$. Donc $A \cdot (M \cdot N) = O \pmod{p}$ et $(A \cdot M) \cdot N = N \pmod{p}$. Contradiction.
 - Si $N \in \mathcal{C}$ n'est pas congrue à $O \pmod{p}$ alors il existe $A \in \mathcal{C}$ tel que $A \cdot N = I_2 \pmod{p}$. Donc $(M \cdot N) \cdot A = O \pmod{p}$ et $M \cdot (N \cdot A) = M \pmod{p}$ puisque $N \cdot A = N \cdot A = I_2 \pmod{p}$. Contradiction là encore.

7. On a pour a et b entiers relatifs, $M(a, b) \equiv M(r, r') \pmod{p}$ avec r le reste de a dans la division par p et r' le reste de b dans la division par p .

On a bien entendu $M(r, r') \in \overline{\mathcal{C}}$.

8. Comme les ensembles de départ et d'arrivée ont le même nombre d'éléments, d'après le théorème trois pour le prix de deux (10 page 463), il suffit de démontrer que Φ_A est injective.

Soit $M, M' \in \overline{\mathcal{C}}^*$ telles que $\Phi_A(M) = \Phi_A(M')$. En particulier, on a $A \cdot M = A \cdot M' \pmod{p}$ donc $A \cdot (M - M') = O \pmod{p}$. Or il existe $B \in \overline{\mathcal{C}}^*$ telle que $B \cdot A = I_2 \pmod{p}$ d'après 5. Donc $B \cdot A \cdot (M - M') = O \pmod{p}$ soit $M - M' = O \pmod{p}$. Les deux matrices M et M' sont congrues modulo p . Comme elles sont toutes deux dans $\overline{\mathcal{C}}$, elles sont clairement égales.

Donc Φ_A est injective, ce qu'il suffisait de démontrer.

9. D'après la question précédente on a $\prod_{M \in \overline{\mathcal{C}}^*} M = \prod_{M \in \overline{\mathcal{C}}^*} (A \cdot M)_p$, car on peut commuter les matrices, d'après la question 2.

En particulier on a $\prod_{M \in \overline{\mathcal{C}}^*} M \equiv \prod_{M \in \overline{\mathcal{C}}^*} (A \cdot M) \pmod{p}$.

Or, toujours d'après la question 2, $\prod_{M \in \overline{\mathcal{C}}^*} (A \cdot M) = A^{p^2-1} \prod_{M \in \overline{\mathcal{C}}^*} M$.

Or toute matrice $M \in \overline{\mathcal{C}}^*$ n'est pas congrue à O modulo p , donc d'après la question 5, il existe une matrice $M^{(*)} \in \mathcal{C}$ telle que $M^{(*)} \cdot M = I_2 \pmod{p}$.

De ce fait, on a $\prod_{M \in \overline{\mathcal{C}}^*} M^{(*)} \prod_{M \in \overline{\mathcal{C}}^*} M = \prod_{M \in \overline{\mathcal{C}}^*} M^{(*)} A^{p^2-1} \prod_{M \in \overline{\mathcal{C}}^*} M$, et, parce que les matrices de \mathcal{C} commutent entre elles, $I_2 \equiv A^{p^2-1} \pmod{p}$.

Remarque 9.

Le lecteur scrupuleux remarquera que l'on se sert dans les calculs non seulement de la commutativité du produit des matrices de \mathcal{C} , mais aussi de l'associativité (théorème 4 page 579 dans le cours de première).

Sans ces **deux** propriétés, la notation $\prod_{M \in \overline{\mathcal{C}}^*} M$ elle-même n'aurait pas de sens.

10. Routine.

11. On a $\mathbf{Q} - \mathbf{R} = \mathbf{M}(0, 2)$ laquelle n'est pas congrue à \mathbf{O} modulo p . Donc il existe $\mathbf{A} \in \mathcal{C}$ telle que $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{R}) = \mathbf{I}_2 \pmod{p}$.

Maintenant, on a $\Phi_0 = F_0 \mathbf{I}_2 \pmod{p}$ et $\Phi_1 = F_0 \mathbf{I}_2 \pmod{p}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Phi_{n+2} = \Phi_{n+1} + \Phi_n \pmod{p}$ (vérification de routine). Par une récurrence de routine, on a bien $\Phi_n = F_n \mathbf{I}_2 \pmod{p}$.

12. Comme les suites \mathbf{Q}^n et \mathbf{R}^n sont périodiques modulo p et admettent $p^2 - 1$ comme période, il en est de même de la suite Φ_n . Donc la suite de matrices $F_n \mathbf{I}_2$ l'est aussi.

Donc la suite d'entiers $(F_n)_n$ est périodique modulo p et admet $p^2 - 1$ comme période.

Chapitre 3

Intégration : théorie élémentaire

Sommaire

3.1	Sommes de Riemann	100
3.2	Définition de l'intégrale d'une fonction	103
3.3	Propriétés élémentaires de l'intégrale	109
3.4	Le théorème fondamental de l'analyse	111
3.5	Méthodes de calcul des primitives et des intégrales	114
3.6	Calcul d'aires	117
3.7	Intégrabilité de certaines fonctions	118
3.8	Quiz	125
3.9	Exercices : Primitives	129
3.10	Solutions	130
3.11	Exercices : Intégrales	133
3.12	Solutions	138
3.13	Problèmes	149
3.14	Travaux dirigés	155

Introduction

Les auteurs ont souhaité ne pas introduire la notion d'intégrale d'une fonction comme étant une aire sous une courbe. Cette vision trop réductrice à leur goût est malheureusement la seule présentée en Terminale. Ils ont donc pris le parti de l'aborder à travers l'intégrale de Kurzweil-Henstock ce qui a pour mérite de présenter la notion d'intégration d'une fonction puis l'intégrale au sens de Riemann de façon plus naturelle.

Les auteurs remercient Jean-Pierre Demailly de leur avoir laissé la possibilité d'utiliser ses notes sur le sujet.

Le lecteur intéressé par une présentation plus complète et par de possibles applications de la théorie peuvent trouver plus d'informations sur la page web suivante :

<https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/kurzweil.pdf>

3.1 Sommes de Riemann

Dans toute cette section, a et b désignent deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction, définie sur l'intervalle $[a, b]$, à valeurs dans \mathbb{R} . La portion du plan comprise entre le graphe de f et l'axe horizontal est l'ensemble des couples (x, y) tels que :

$$0 \leq y \leq f(x) \text{ si } f(x) \geq 0, \quad f(x) \leq y \leq 0 \text{ si } f(x) \leq 0.$$

Pour une fonction f suffisamment régulière, nous souhaitons évaluer l'aire A de cette portion de plan, en comptant positivement les surfaces situées au-dessus de l'axe horizontal, et négativement celles situées au-dessous (Fig. 1). Nous parlerons de « l'aire algébrique située sous le graphe de f ».

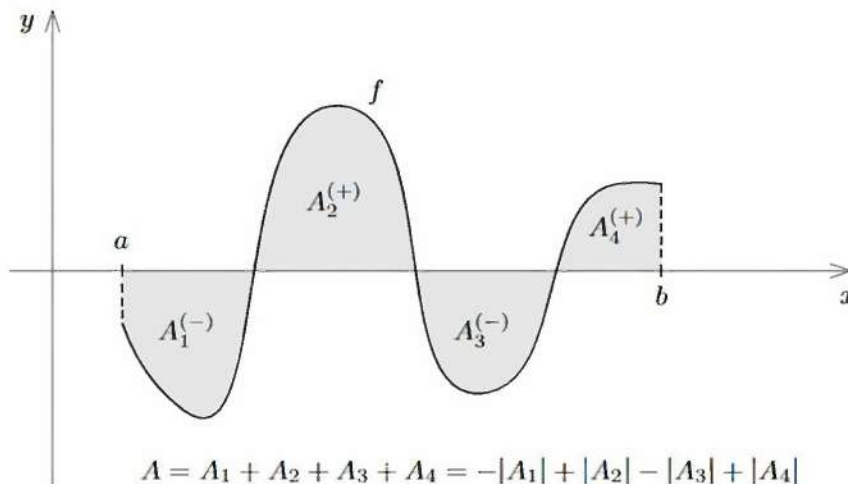


Fig. 1. Aire algébrique située sous le graphe de f .

L'idée est de découper l'intervalle $[a, b]$ au moyen d'une subdivision en sous-intervalles $[a_j, a_{j+1}]$, puis de sommer les aires de rectangles basés sur les intervalles $[a_j, a_{j+1}]$. La figure 2, ci-dessous, résume le procédé.

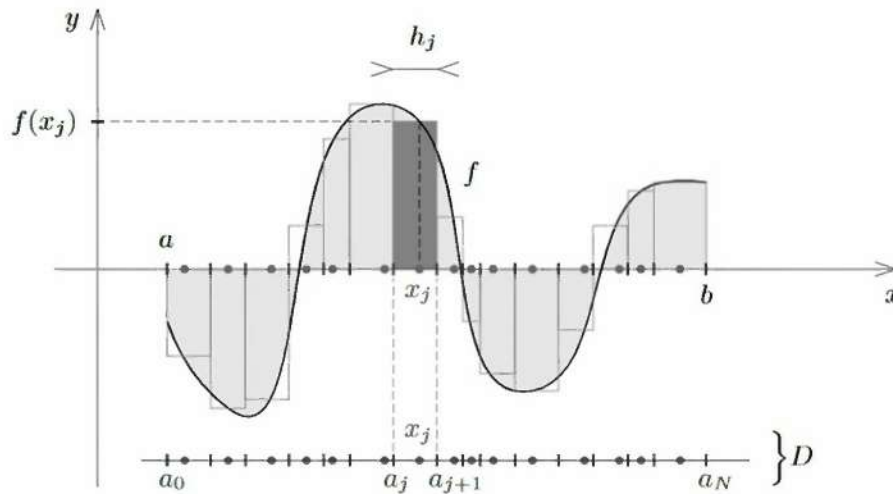


Fig. 2. Somme de Riemann associée à f sur D .

La somme des aires des rectangles figurés ci-dessus est donnée par $\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)(a_{j+1} - a_j)$, et on est ainsi conduit à poser la définition suivante.

3.1.1 Définition

Définition 1.

1. On appelle **subdivision pointée** de l'intervalle $[a, b]$ la donnée de $N + 1$ points

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{N-1} < a_N = b$$

et de N points x_0, x_1, \dots, x_{N-1} tels que

$$\forall j = 0, 1, \dots, N - 1, \quad x_j \in [a_j, a_{j+1}].$$

Elle sera notée

$$D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}_{0 \leq j < N}.$$

Les réels $h_j = a_{j+1} - a_j$ (amplitudes des intervalles) sont les **pas** de la subdivision.

2. Soit D une subdivision pointée de l'intervalle $[a, b]$ et f une fonction de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On appelle **somme de Riemann** associée à f sur D , le réel

$$S_D(f) = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)(a_{j+1} - a_j) = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) h_j.$$

La somme de Riemann $S_D(f)$ est l'**aire algébrique** de la réunion des rectangles de largeur h_j et de hauteur $f(x_j)$ (Fig. 2). Il s'agit bien d'une aire algébrique, puisque $f(x_j)h_j$ est compté positivement si

$f(x_j) > 0$ et négativement si $f(x_j) < 0$.

Intuitivement l'aire A cherchée est la limite de $S_D(f)$ quand les pas h_j tendent vers 0. Un choix possible consiste par exemple à prendre une subdivision en sous-intervalles égaux

$$a_j = a + jh = a + j \frac{b-a}{N}, \quad 0 \leq j \leq N \quad \text{ou} \quad h_j = h = \frac{b-a}{N},$$

que l'on peut combiner avec un choix quelconque des points x_j .

3.1.2 Exemple

Comme premier exemple, considérons la fonction identité $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

Pour $N \geq 1$, posons : $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{N}$, \dots , $a_j = \frac{j}{N}$, \dots , $a_N = 1$. Les pas de cette subdivision sont tous égaux à $\frac{1}{N}$. Voici trois calculs de "sommées de Riemann", selon que l'on place les points x_j au début, au milieu ou à la fin des intervalles $[a_j, a_{j+1}]$ (rappelons que la somme des N premiers entiers vaut $N(N+1)/2$).

$$x_j = a_j : \quad S_D(f) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{j}{N} \frac{1}{N} = \frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} j = \frac{N-1}{2N}, \quad (1.2a)$$

$$x_j = \frac{a_j + a_{j+1}}{2} : \quad S_D(f) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{2j+1}{2N} \frac{1}{N} = \frac{1}{2N^2} \sum_{j=0}^{N-1} 2j+1 = \frac{1}{2}, \quad (1.2b)$$

$$x_j = a_{j+1} : \quad S_D(f) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{j+1}{N} \frac{1}{N} = \frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} j+1 = \frac{N+1}{2N}. \quad (1.2c)$$

La seconde somme est égale à $\frac{1}{2}$ pour tout N , les deux autres tendent vers $\frac{1}{2}$ quand N tend vers l'infini.

L'aire du triangle sous le graphe de la fonction est bien $\frac{1}{2}$:

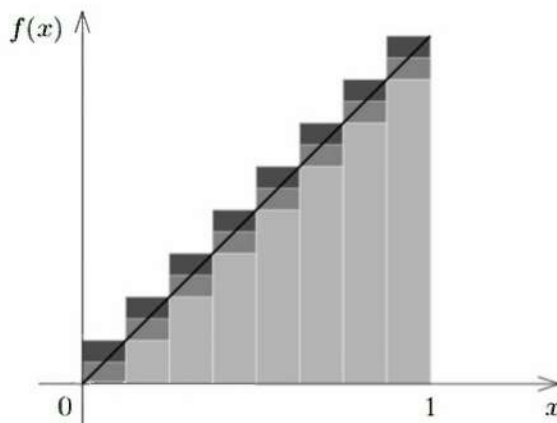


Fig. 3. Sommes de Riemann associées à l'identité sur $[0, 1]$.

Dans la suite, nous aurons besoin pour des raisons à la fois théoriques et pratiques de considérer des sommes de Riemann sur des subdivisions arbitraires. Il est facile de voir à partir de la définition 2 que ces sommes vérifient les propriétés suivantes.

3.1.3 Propriétés fondamentales.

1. **Linéarité.** Si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions quelconques et λ, μ des constantes réelles, alors

$$S_D(\lambda f + \mu g) = \lambda S_D(f) + \mu S_D(g).$$

2. **Monotonie.** Si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions quelconques, alors

$$f \geq g \Rightarrow S_D(f) \geq S_D(g).$$

En particulier, si $f \geq 0$, alors $S_D(f) \geq 0$.

3. **Formule de Chasles.** Soient $a < b < c$ des réels et f une fonction définie sur $[a, c]$. Si D_1 est une subdivision pointée de $[a, b]$ et D_2 une subdivision pointée de $[b, c]$, alors $D_1 \cup D_2$ est une subdivision pointée de $[a, c]$ et

$$S_{D_1 \cup D_2}(f) = S_{D_1}(f) + S_{D_2}(f).$$

3.2 Définition de l'intégrale d'une fonction

La première idée qui vient à l'esprit est de considérer des subdivisions pointées $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}_{0 \leq j < N}$ dont les pas $h_j = a_{j+1} - a_j$ sont tels que $0 < h_j \leq \delta$ avec δ tendant vers 0, et de regarder si les sommes de Riemann $S_D(f)$ convergent bien vers une limite Λ . Cette limite sera alors interprétée comme étant l'aire cherchée. On aboutit à la définition suivante, qui est la définition historiquement introduite par Cauchy et Riemann.

3.2.1 Intégrale au sens de Riemann

Définition 2.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quelconque. On dit que f est **intégrable au sens de Riemann** (ou Riemann-intégrable) s'il existe un réel Λ qui représente l'aire algébrique située sous le graphe de f , tel que pour toute marge d'erreur $\varepsilon > 0$ donnée *a priori*, on peut trouver un réel $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision pointée $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$ de $[a, b]$ on ait

$$h_j = a_{j+1} - a_j \leq \delta \Rightarrow |S_D(f) - \Lambda| \leq \varepsilon.$$

Le nombre réel Λ de la définition précédente est appelé **intégrale** de f sur $[a, b]$ et noté

$$\Lambda = \int_a^b f(x) dx.$$

et on dit que $\int_a^b f(x) dx$ est la limite des sommes de Riemann $S_D(f)$, lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.

La définition ci-dessus sous-entend que le nombre Λ est unique.

Théorème 1

Si f est Riemann-intégrable alors la valeur de $A := \int_a^b f(x) dx$ est unique.

Démonstration 1

Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et supposons qu'il existe deux valeurs A et B qui satisfassent la définition 2. Soit $\epsilon > 0$ fixé et choisissons δ_A et δ_B associés à A et B respectivement. Soit $\delta = \min(\delta_A, \delta_B)$ et on prend \mathcal{P} une subdivision de diamètre plus petit que δ . On note alors $(t_i, t_{i+1})_n$ une telle subdivision et en utilisant l'inégalité triangulaire on a :

$$|A - B| \leq \left| A - \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)[t_{i+1} - t_i] \right| + \left| \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)[t_{i+1} - t_i] - B \right| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}.$$

Étant donné que ϵ est quelconque, d'après le théorème 19 page 72 du cours de seconde on en déduit que $A = B$. \square

Dans cette définition, on peut, par exemple, se contenter de prendre une subdivision en N sous-intervalles de pas constant $h = \frac{b-a}{N}$, et on obtient alors la conséquence immédiate suivante.

3.2.2 Convergence des sommes de Riemann

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction intégrable au sens de Riemann, on a

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(a + \frac{j}{N}(b-a)\right) \text{ cas } [x_j = a_j]$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{N} \sum_{j=1}^N f\left(a + \frac{j}{N}(b-a)\right) \text{ cas } [x_j = a_{j+1}]$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(a + \frac{2j+1}{2N}(b-a)\right) \text{ cas } [x_j = \frac{a_j + a_{j+1}}{2}].$$

Si l'aire $\int_a^b f(x) dx$ située sous le graphe de f est connue d'une manière ou d'une autre, on peut alors en déduire la valeur des limites correspondantes : il faut savoir pour cela que la fonction f est intégrable au sens de Riemann, on démontrera plus tard (cf. théorèmes 15 et 7.10) que c'est le cas si f est continue ou continue par morceaux.

3.2.3 Exemple

Considérons la somme

$$\frac{1}{N^2} \left(\sqrt{1(N-1)} + \sqrt{2(N-2)} + \dots + \sqrt{(N-1)1} \right)$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\frac{1}{N} \left(\sqrt{\frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right)} + \sqrt{\frac{2}{N} \left(1 - \frac{2}{N}\right)} + \dots + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{1}{N}} \right).$$

C'est une somme de Riemann associée à la fonction $x \rightarrow \sqrt{x(1-x)}$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Sa limite, lorsque n tend vers $+\infty$, est égale à : $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$. Or, le graphe $y = \sqrt{x(1-x)}$ de cette fonction est un demi-arc du cercle $x^2 - x + y = 0$, soit encore $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, c'est donc un demi-cercle de centre $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$. La limite de la sommation est égale à l'aire du demi-disque, qui vaut $\pi/8$. \square

Cependant, on s'aperçoit assez vite que la définition de l'intégrabilité au sens de Riemann impose des restrictions assez gênantes sur la fonction f :

3.2.4 Condition nécessaire.

Théorème 2

Toute fonction f Riemann-intégrable est bornée.

Démonstration 2

En effet, selon la définition 2, prenons $\delta > 0$ donnant une erreur au plus ε . Pour une subdivision D de pas constant $h \leq \delta$, à savoir $h = \frac{b-a}{N}$ avec $N \geq \frac{b-a}{\delta}$, nous devons avoir la majoration $|S_D(f) - A| \leq \varepsilon$, donc

$$|S_D(f)| = \left| \frac{b-a}{N} \sum_{0 \leq j < N} f(x_j) \right| \leq |A| + \varepsilon \Rightarrow \left| \sum_{0 \leq j < N} f(x_j) \right| \leq \frac{N}{b-a} (|A| + \varepsilon),$$

ceci pour tout choix des points $x_j \in [a_j, a_{j+1}]$. Choisissons pour l'un des points x_j un point $x \in [a, b]$ quelconque, et pour les autres les points a_j de la subdivision. Il vient alors

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x)| \leq \sum_{0 \leq j < N} |f(a_j)| + \frac{N}{b-a} (|A| + \varepsilon),$$

ce qui montre que f doit être bornée. \square

Cette restriction que f soit bornée est très gênante, puisqu'on verra à l'exemple 7 qu'il existe des fonctions non bornées pour lesquelles l'aire située sous le graphe est finie et calculable sans difficulté. D'autre part, d'un point de vue concret de calcul numérique, on peut être amené à faire des calculs d'aires pour des fonctions bornées qui « oscillent plus » à certains endroits qu'à d'autres :

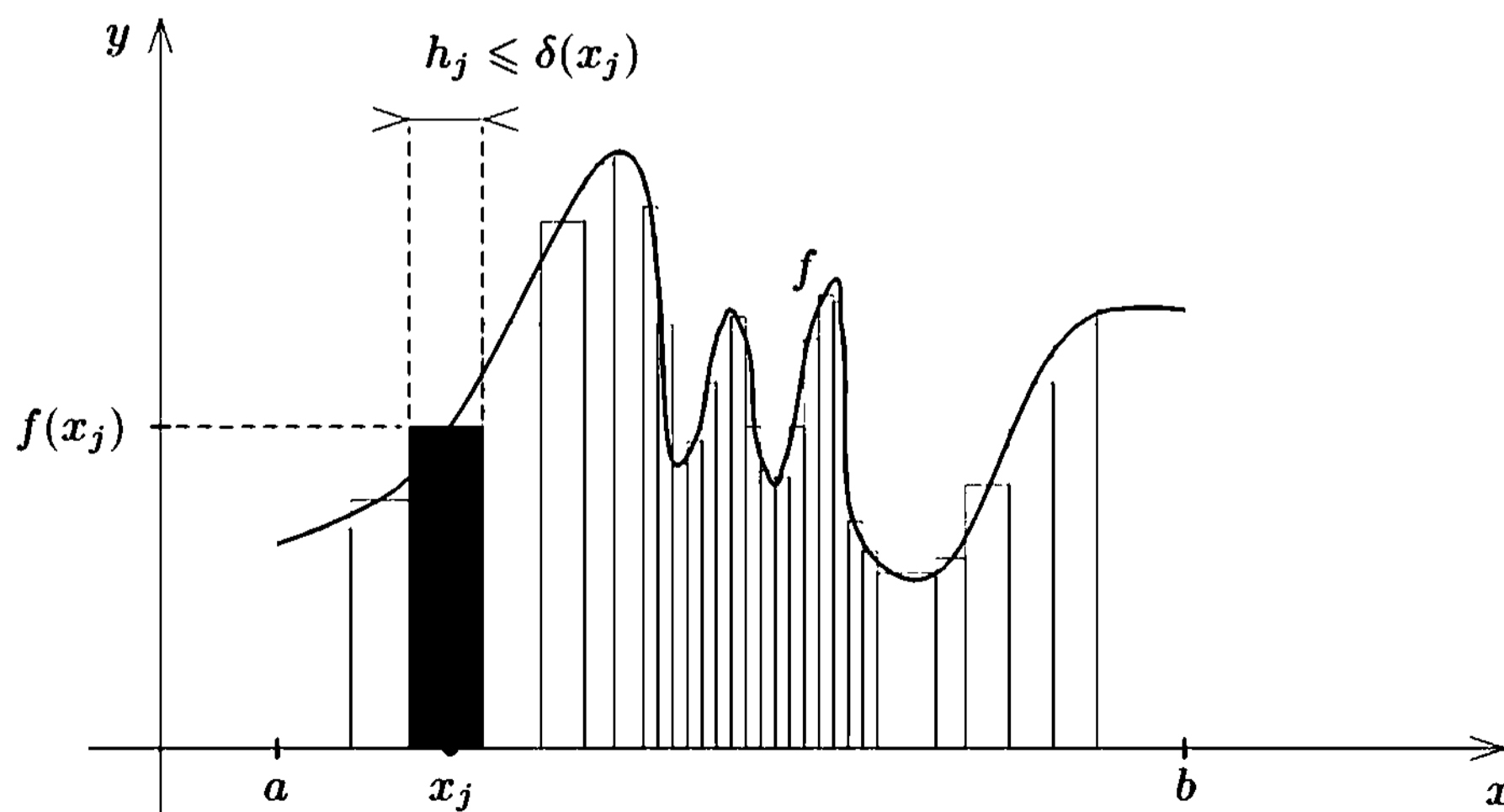


Fig. 4. Somme de Riemann à pas variable.

Dans ce cas, on sent bien intuitivement que l'on a intérêt à resserrer davantage les pas h_j aux endroits où f oscille davantage. Plutôt que de supposer que $h_j \leq \delta$ où δ est un réel positif fixé, il vaudra donc mieux demander que les pas h_j satisfassent une condition $h_j \leq \delta(x_j)$ où $\delta(x_j)$ est une quantité positive assez petite dépendant de l'endroit où l'on prend le rectangle de hauteur $f(x_j)$. On choisira alors des fonctions $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ positives qui serviront à majorer les pas h_j . Une telle fonction sera appelée une *jauge* sur $[a, b]$.

3.2.5 Jauges

Définition 3.

Soit $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction positive quelconque.

Une subdivision pointée $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}_{0 \leq j < N}$ de $[a, b]$ sera dite δ -fine si

$$\forall j = 0, 1, \dots, N-1, \quad h_j = a_{j+1} - a_j \leq \delta(x_j).$$

Si δ_* et δ sont deux jauges telles que $\delta_* \leq \delta$, alors toute subdivision δ_* -fine est aussi δ -fine. Le résultat suivant, appelé *lemme de Cousin*, affirme que la définition précédente n'est jamais vide de contenu.

3.2.6 Lemme de Cousin

Lemme 3

Soit $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une jauge. Alors il existe une subdivision pointée D de l'intervalle $[a, b]$ qui est δ -fine.

Démonstration 3

Elle est basée sur un procédé de dichotomie. Nous allons raisonner par l'absurde, en supposant que $[a, b]$ n'admet pas de subdivision pointée δ -fine. Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Divisons l'intervalle $[a_0, b_0]$ en deux, et considérons les deux moitiés $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ et $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$: si chacune des deux admettait une subdivision δ -fine, la réunion de ces deux subdivisions serait une subdivision δ -fine de $[a_0, b_0]$. Donc l'une des deux moitiés au moins n'admet pas de subdivision δ -fine : on note celle-ci $[a_1, b_1]$.

On itère ensuite le procédé, de manière à construire des intervalles emboîtés $[a_k, b_k]$, de longueur $(b-a)/2^k$, dont aucun n'admet de subdivision δ -fine. Les suites (a_k) et (b_k) sont adjacentes par construction, donc elles convergent vers la même limite. Soit x_0 cette limite. Puisque $\delta(x_0) > 0$, il existe k_0 tel que

$$[a_{k_0}, b_{k_0}] \subset [x_0 - \frac{1}{2}\delta(x_0), x_0 + \frac{1}{2}\delta(x_0)].$$

Donc la subdivision pointée de $[a_{k_0}, b_{k_0}]$ formée seulement de l'intervalle tout entier et du point x_0 est δ -fine. D'où la contradiction. \square

3.2.7 Intégrale au sens de Henstock-Kurzweil

Définition 4.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quelconque. On dit que f est **intégrable au sens de Henstock-Kurzweil** (ou HK-intégrable) s'il existe un réel Λ qui représente l'aire algébrique située sous le graphe de f , tel que pour toute marge d'erreur $\varepsilon > 0$ donnée *a priori*, on peut trouver une jauge $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ en sorte que pour toute subdivision pointée $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$ de $[a, b]$ on ait

$$D \text{ } \delta\text{-fine} \Rightarrow |S_D(f) - \Lambda| \leq \varepsilon.$$

(une telle jauge δ sera dite ε -adaptée à f). Le nombre réel Λ de la définition précédente est appelé **intégrale** de f sur $[a, b]$, on écrit

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\text{HK}, D} S_D(f) = \lim_{\text{HK}, D} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)(a_{j+1} - a_j)$$

et on dit que $\int_a^b f(x) dx$ est la limite (au sens de Henstock-Kurzweil) des sommes de Riemann, lorsque la subdivision D devient de plus en plus fine

Cette définition est de façon évidente plus générale que celle de Riemann, par conséquent toute fonction intégrable au sens de Riemann est aussi intégrable au sens de Henstock-Kurzweil :

Théorème 4

Si f est intégrable au sens de Riemann alors elle l'est au sens de Henstock-Kurzweil.

Démonstration 4

Si f est intégrable au sens de Riemann alors il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\delta > 0$ tel que si $\mathcal{P} = \{(I_i, t_i)_{i=1, \dots, n}\}$ est une subdivision pointée de I avec, pour tout $i = 1, \dots, n$, $|I_i| < \delta$, alors $|S_{\mathcal{P}}(f) - \ell| \leq \varepsilon$. Comme f est intégrable au sens de Riemann, il suffit de choisir comme jauge $d : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in I$, on a $d(x) = \frac{\delta}{2}$. Ainsi f est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil avec l'intégrale égale à ℓ . \square

D'autre part, si une jauge δ est ε -adaptée, alors toute jauge $\delta_* \leq \delta$ est encore ε -adaptée. Nous utiliserons cette observation à plusieurs reprises dans la section suivante. La notation dx intervient pour rappeler qu'à la limite on considère des rectangles « infiniment » fins de largeur $dx = a_{j+1} - a_j$, considérée comme accroissement infiniment petit de la variable x (voir Fig. 6 ci-après), et l'écriture symbolique $\int_a^b f(x) dx$ se lit « somme de a à b de $f(x) dx$ ».

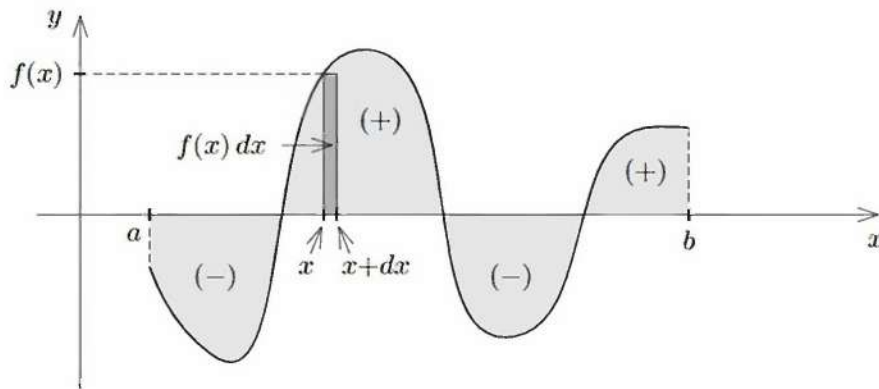


Fig. 5. Intégrale et son élément différentiel $f(x) dx$.

3.2.8 Exemple

On appelle fonction en escalier sur $[a, b]$ une fonction f telle qu'il existe des points $(u_i)_{0 \leq i \leq p}$ de $[a, b]$ et des constantes réelles c_i telles que

$$a = u_0 < u_1 < \dots < u_p = b \quad \text{et} \quad f(x) = c_i \quad \text{sur} \quad]u_i, u_{i+1}[,$$

les valeurs $f(u_i) \in \mathbb{R}$ étant elles-mêmes quelconques, éventuellement différentes des valeurs c_i .

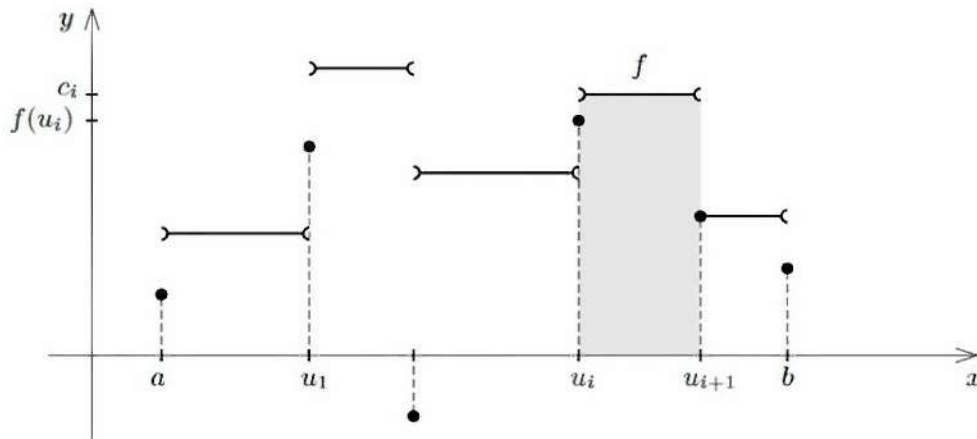


Fig. 6. Une fonction en escalier.

Nous affirmons :

Théorème 5

Toute fonction en escalier f est intégrable au sens de Riemann, et on a

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{p-1} c_i (u_{i+1} - u_i).$$

3.3 Propriétés élémentaires de l'intégrale

Les propriétés énoncées dans cette section sont, dans l'ordre, la linéarité, la monotonie et la relation de Chasles. Elles sont obtenues par passage à la limite à partir des propriétés analogues des sommes de Riemann $S_D(f)$ (propriétés 3.1.3 (a,b,c)), et valent pour l'intégrabilité au sens de Riemann et de Henstock-Kurzweil indifféremment.

3.3.1 Linéarité

Théorème 6

Si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions intégrables sur $[a, b]$ et λ, μ des constantes réelles, alors $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

Démonstration 6

En termes de limites de sommes de Riemann sur des subdivisions pointées D de $[a, b]$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx &= \lim_{\text{HK}, D} S_D(\lambda f + \mu g) = \lim_{\text{HK}, D} \lambda S_D(f) + \mu S_D(g) \\ &= \lambda \lim_{\text{HK}, D} S_D(f) + \mu \lim_{\text{HK}, D} S_D(g) \end{aligned}$$

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

Pour analyser plus en détail cet argument, reprenons le calcul en termes de jauges, une marge d'erreur $\varepsilon > 0$ étant fixée *a priori*. Posons

$$A = \int_a^b f(x) dx, \quad B = \int_a^b g(x) dx.$$

Il existe par hypothèse des jauges δ_1, δ_2 telles que si D est δ_1 -fine alors $|S_D(f) - A| \leq \varepsilon$ et si D est δ_2 -fine alors $|S_D(g) - B| \leq \varepsilon$. Prenons une subdivision D δ -fine avec $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Comme $S_D(\lambda f + \mu g) = \lambda S_D(f) + \mu S_D(g)$ on en déduit

$$|S_D(\lambda f + \mu g) - (\lambda A + \mu B)| \leq (|\lambda| + |\mu|)\varepsilon.$$

Ceci montre que $\lambda f + \mu g$ est intégrable et que son intégrale est bien $\lambda A + \mu B$. □

Remarque 1.

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction qui est nulle partout sauf en un nombre fini de points $u_i \in [a, b]$, alors f est Riemann-intégrable d'intégrale nulle.

3.3.2 Monotonie

Théorème 7

Si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions intégrables sur $[a, b]$

$$f \geq g \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Démonstration 7

Cela résulte de l'inégalité sur les sommes de Riemann $S_D(f) \geq S_D(g)$, par passage à la limite. \square

3.3.3 Relation de Chasles

Théorème 8

Soient $a < b < c$ des réels et $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est intégrable sur $[a, b]$ et intégrable sur $[b, c]$, alors f est intégrable sur $[a, c]$ et

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

Ceci vaut aussi bien pour l'intégrabilité au sens de Henstock-Kurzweil que pour l'intégrabilité au sens de Riemann.

Démonstration 8

Fixons un réel $\varepsilon > 0$ et choisissons des jauges $\delta_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $\delta_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ε -adaptées à f sur $[a, b]$ et $[b, c]$ respectivement. Autrement dit, si on écrit

$$\Lambda_1 = \int_a^b f(x) dx, \quad \Lambda_2 = \int_b^c f(x) dx, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2,$$

on aura $|S_{D_1}(f) - \Lambda_1| \leq \varepsilon$ et $|S_{D_2}(f) - \Lambda_2| \leq \varepsilon$ pour toutes subdivisions pointées δ_1 -fines D_1 de $[a, b]$ et δ_2 -fines D_2 de $[b, c]$. Si nous supposons démontrée l'intégrabilité de f sur $[a, c]$, c'est-à-dire l'existence de la limite $\lim_{\text{HK}, D} S_D(f)$ lorsque D parcourt les subdivisions pointées de $[a, c]$, alors on peut prendre une jauge δ sur $[a, c]$ telle que $\delta \leq \delta_1$ sur $[a, b]$ et $\delta \leq \delta_2$ sur $[b, c]$, et une subdivision $D = D_1 \cup D_2$ δ -fine égale à la réunion d'une subdivision D_1 δ_1 -fine de $[a, b]$ et d'une subdivision D_2 δ_2 -fine de $[b, c]$. On obtient dans ces conditions $S_D(f) = S_{D_1}(f) + S_{D_2}(f)$, donc $|S_D(f) - \Lambda| \leq 2\varepsilon$ et la relation désirée

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{\text{HK}, D} S_D(f) = \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

s'ensuit en prenant ε arbitrairement petit. La seule difficulté qui reste est de démontrer l'existence de la limite $\lim_{\text{HK}, D} S_D(f)$ pour des subdivisions $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$ de $[a, c]$ ne comprenant pas nécessairement $a_j = b$ comme l'un des points intermédiaires, ce qui est *a priori* requis pour prouver l'intégrabilité

de f sur $[a, c]$. La méthode consiste à redécouper l'intervalle $[a_j, a_{j+1}]$ de D qui contient le point b , et à estimer de combien on modifie ainsi la somme de Riemann $S_D(f)$. \square

3.3.4 Preuve de l'intégrabilité de f sur $[a, c]$ sous les hypothèses de 3.3.3

On sait que f est bornée, disons $|f| \leq M$ (si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et $[b, c]$, elle y est nécessairement bornée d'après la condition 2.4). Prenons pour D une subdivision pointée δ -fine avec $\delta \leq \min(\delta_1, \delta_2)$. Si l'un des intervalles $[a_j, a_{j+1}]$ contient b en son intérieur, on remplace son point de marquage x_j par $x'_j = b$, ce qui donne après découpage comme ci-dessus une nouvelle subdivision $D' = D_1 \cup D_2$ δ -fine telle que

$$S_{D'}(f) = S_{D_1}(f) + S_{D_2}(f) \Rightarrow |S_{D'}(f) - A| \leq 2\varepsilon.$$

On a de plus

$$|S_D(f) - S_{D'}(f)| = |(f(x_j) - f(b))h_j| \leq 2M\delta,$$

par conséquent $|S_D(f) - A| \leq 4\varepsilon$ dès que $\delta \leq \min(\delta_1, \delta_2, \varepsilon/M)$. Ceci entraîne bien l'intégrabilité de f au sens de Riemann sur l'intervalle $[a, c]$, ainsi que la formule de Chasles. \square

Pour des réels a, b qui ne vérifient pas nécessairement $a < b$, on pose

$$(3.6) \quad \int_a^b f(x) dx = 0 \quad \text{si } a = b, \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \text{si } a > b.$$

Remarque 2.

On peut vérifier que la relation de Chasles reste valable dans tous les cas, quel que soit l'ordre des réels a, b, c , à condition bien sûr que f soit intégrable sur chacun des intervalles mis en jeu.

3.4 Le théorème fondamental de l'analyse

On appelle théorème fondamental de l'analyse, le fait que l'intégration (calcul d'aires) et la dérivation (calcul de tangentes et de différentielles) sont des opérations inverses l'une de l'autre.

3.4.1 Théorème

Théorème 9

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors f' est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil et

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Démonstration 9

Commençons par une preuve heuristique (c'est-à-dire simplifiée, mais non rigoureuse).

Soit $D = \{[a_j, a_{j+1}], x_j\}$ une subdivision pointée assez fine. On a par définition

$$\int_a^b f'(x) dx \simeq \sum_{j=0}^{N-1} f'(x_j)(a_{j+1} - a_j).$$

Mais $f'(x_j)$ peut être vue comme une approximation de la pente de f sur l'intervalle $[a_j, a_{j+1}]$ et on a donc $f'(x_j)(a_{j+1} - a_j) \simeq f(a_{j+1}) - f(a_j)$, d'où

$$\int_a^b f'(x) dx \simeq \sum_{j=0}^{N-1} (f(a_{j+1}) - f(a_j)) = f(b) - f(a).$$

Il n'est pas difficile de rendre cet argument rigoureux.

L'hypothèse de l'existence de $f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ signifie par définition que pour tout $x \in [a, b]$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\delta(x) > 0$ tel que

$$y \in [a, b], \quad 0 < |y - x| \leq \delta(x) \Rightarrow \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - f'(x) \right| \leq \varepsilon, \quad \text{et donc}$$

$$y \in [a, b], \quad y \in [x - \delta(x), x + \delta(x)] \Rightarrow |f(y) - f(x) - (y - x)f'(x)| \leq \varepsilon|y - x|$$

(puisque l'inégalité est vraie aussi de manière évidente pour $y = x$). Prenons une subdivision pointée $D = \{[a_j, a_{j+1}], x_j\}$ δ -fine, c'est-à-dire telle que $h_j = a_{j+1} - a_j \leq \delta(x_j)$. En appliquant l'égalité ci-dessus à $x = x_j$ et $y = a_j$ ou $y = a_{j+1}$, il vient

$$|f(a_j) - f(x_j) - (a_j - x_j)f'(x_j)| \leq \varepsilon|a_j - x_j| = \varepsilon(x_j - a_j),$$

$$|f(a_{j+1}) - f(x_j) - (a_{j+1} - x_j)f'(x_j)| \leq \varepsilon|a_{j+1} - x_j| = \varepsilon(a_{j+1} - x_j).$$

En faisant la différence, l'inégalité $|v - u| \leq |u| + |v|$ donne

$$|f(a_{j+1}) - f(a_j) - (a_{j+1} - a_j)f'(x_j)| \leq \varepsilon(a_{j+1} - a_j).$$

La sommation de ces inégalités pour $j = 0, 1, \dots, N - 1$ implique en définitive

$$|f(b) - f(a) - S_D(f')| \leq \varepsilon(b - a),$$

par conséquent

$$\int_a^b f'(x) dx = \lim_{\text{HK}, D} S_D(f') = f(b) - f(a). \quad \square$$

Notons qu'on retrouve ainsi le résultat important suivant qui a été démontré alternativement (et de manière plus classique) dans le cours de première au moyen du théorème des accroissements finis (11 page 141).

3.4.2 Corollaire

Corollaire 10

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} , telle que $f' = 0$ (resp. $f' \geq 0$, $f' \leq 0$). Alors f est constante (resp. croissante, décroissante).

Démonstration 10

En effet, pour tous points $a < b$ dans I , on voit que $f(b) - f(a)$ est égal à 0 (resp. positif ou nul, négatif ou nul). \square

Le théorème fondamental peut aussi s'énoncer comme une formule de calcul d'une intégrale d'une fonction à partir d'une primitive de cette fonction.

3.4.3 Calcul des intégrales au moyen de primitives

Théorème 11

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ admet une primitive F (c'est-à-dire si F est dérivable et $F' = f$), alors f est HK-intégrable et

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{encore noté} \quad [F(x)]_a^b.$$

Pour exploiter cette formule, il convient de connaître une liste suffisante de primitives de fonctions usuelles. En connaître un certain nombre par cœur devient vite indispensable pour être en mesure de calculer les intégrales de manière efficace. Compte tenu de la formule 4.3, une primitive quelconque F d'une fonction continue f , là où elle est définie, sera notée sous la forme

$$(4.4) \quad F(x) = \int f(x) dx + C,$$

où C désigne une constante quelconque. Une écriture de la forme $\int f(x) dx$ est parfois appelée *intégrale indéfinie*. Voici une liste de primitives qui permet déjà de calculer un bon nombre d'intégrales usuelles. Les variables α , a , b représentent ici des nombres réels quelconques avec $a \neq 0$.

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
$\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$	$\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cotan x + C$

Remarque 3.

Autant dans la notation $\int_a^b f(x) dx$ la lettre x est muette – c'est-à-dire que $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$ – autant dans l'intégrale indéfinie $\int f(x) dx$ est une fonction de la variable x .

3.5 Méthodes de calcul des primitives et des intégrales

Il convient d'observer qu'il est en général impossible d'explicitier en termes de fonctions usuelles les primitives de beaucoup de fonctions pourtant relativement simples. Ainsi on peut montrer que e^{x^2} ou $\ln(\sin x)$ ¹ ont des primitives qui ne peuvent pas s'exprimer en termes des fonctions trigonométriques, puissances, exponentielles, logarithmes et leurs composées. Lorsque le calcul est possible, on s'appuie le plus souvent sur l'une des deux formules importantes qui suivent.

3.5.1 Formule d'intégration par parties

Théorème 12

Soient $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Le produit uv est alors dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$. Par conséquent $uv' = (uv)' - u'v$ est intégrable si et seulement si $u'v$ l'est, et dans ce cas

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b (uv)'(x) dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx.$$

On a donc la formule

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx,$$

qui peut encore se récrire de manière plus abrégée

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

En termes de primitives et avec la notation des intégrales indéfinies, on peut aussi écrire

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

1. Ces fonctions seront étudiées au chapitre 6.

Exemple 1

Déterminer $\int x \cos x dx$

On pose $u'(x) = \cos x$ et $v(x) = x$ ce qui donne $u(x) = \sin x$ et $v'(x) = 1$
ce qui donne $\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = -x \sin x + \cos x + k.$

Exemple 2

Déterminer $\int \sin^2 dx$

On pose $u'(x) = \sin x$ et $v(x) = \sin x$. Ainsi $u(x) = -\cos x$ et $v'(x) = \cos x$.
ce qui donne $\int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x - \int -\cos^2 dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 dx.$

On doit donc déterminer la primitive $\int \cos^2 dx$, nous allons pour cela utiliser la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ce qui nous permet d'écrire $\int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2) dx.$

Ainsi $\int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 dx$ ce qui est équivalent à
 $2 \int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + x$ et finalement nous obtenons

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + k.$$

3.5.2 Formule de changement de variable

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive F . On a alors

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Il est souvent commode de changer de variable, en posant $x = \varphi(t)$ pour une certaine fonction $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ dérivable telle que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$ (on ne suppose pas nécessairement $a \leq b$ ni $\alpha \leq \beta$). Il vient alors

$$\int_a^b f(x) dx = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = [F \circ \varphi(t)]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta (F \circ \varphi)'(t) dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

On a donc la formule fondamentale

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_\alpha^\beta f \circ \varphi d\varphi.$$

En pratique, on effectue les substitutions

$$x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t) dt, \quad a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta),$$

en prenant soin de changer les bornes comme indiqué. En termes d'intégrales indéfinies, si F désigne une primitive de f , on peut écrire

$$F(x) = F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Si les intégrales portent sur des fonctions trigonométriques, il faut faire, en général, le changement de variable suivant :

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

Si se sont des fonctions irrationnelles avec un radical au dénominateur :

1. Si le radical est de la forme $\sqrt{a^2 - x^2}$ alors on pose $x = a \sin t$.
2. Si le radical est de la forme $\sqrt{a^2 + x^2}$ alors on pose $x = a \tan t$.
3. Si le radical est de la forme $\sqrt{x^2 - a^2}$ alors on pose $x = \frac{a}{\cos t}$.

Exemple 3

Calculer :

$$\int \frac{x^2 + 4x}{\sqrt{x^3 + 6x^2 - 7}} dx$$

nous faisons le changement de variable $t = x^3 + 6x^2 - 7$ nous avons alors $dt = (3x^2 + 12x)dx = 3(x^2 + 4x)dx$. Ce qui nous donne :

$$\int \frac{x^2 + 4x}{\sqrt{x^3 + 6x^2 - 7}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3(x^2 + 4x)}{\sqrt{x^3 + 6x^2 - 7}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt.$$

$$\text{Alors } \int \frac{x^2 + 4x}{\sqrt{x^3 + 6x^2 - 7}} dx = \frac{1}{3} t^{\frac{1}{2}} + cste = \frac{2}{3} \sqrt{x^3 + 6x^2 - 7} + cste$$

Exemple 4

Calculer : $\int \sin^3 x \cos x dx$.

Le changement de variable est $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. On obtient :

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + Cste = \frac{1}{4} \sin^4 x + Cste$$

Exemple 5

Calculer : $\int \cos^4 x \cdot \sin x dx$

On pose $u = \cos x$ ainsi $du = -\sin x dx$

ce qui donne $\int \cos^4 x \cdot \sin x dx = -\int u^4 du = -\frac{u^5}{5} + k = -\frac{\cos^5 x}{5} + c.$

3.6 Calcul d'aires

Par définition même, l'intégrale d'une fonction f calcule l'aire algébrique située sous son graphe. Pour un domaine plan quelconque, la frontière est en général délimitée par les graphes de plusieurs fonctions (deux au moins, davantage si le domaine comporte des « trous » ou des « renforcements »).

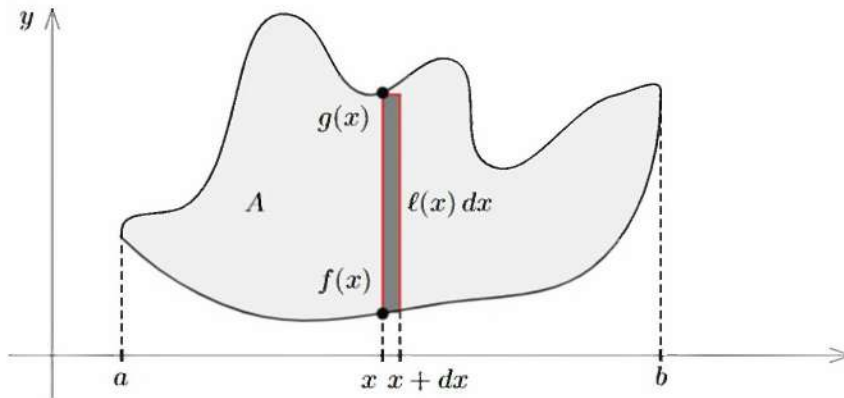


Fig. 7. Aire d'un domaine délimité par des graphes de fonctions.

Comme on le voit par soustraction des aires situées sous les graphes de f et g respectivement (et en remplaçant si nécessaire f, g par $f + C, g + C$ pour avoir des fonctions positives), l'aire du domaine plan est égale à la différence

$$A = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx.$$

L'aire d'un tel domaine plan est donc donnée par l'intégrale par rapport à x de la longueur $\ell(x) = g(x) - f(x)$ des sections « verticales » du domaine :

$$A = \int_a^b \ell(x) dx = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$

Exemple 6

Cherchons l'aire délimitée par l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, de demi-axes a et b . Le domaine délimité par l'ellipse est compris entre les graphes des fonctions $g(x) = b\sqrt{1 - (x/a)^2}$ et $f(x) = -g(x)$ pour $x \in [-a, a]$, ce qui donne

$$A = \int_{-a}^a 2g(x) dx = 2b \int_{-a}^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx.$$

Le changement de variable $x = a \sin t$ avec $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ donne $dx = a \cos t dt$, d'où

$$A = 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt = 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \pi ab. \quad \square$$

Les ellipses seront vues en détail au chapitre 8.

3.7 Intégrabilité de certaines fonctions

3.7.1 Encadrement par des fonctions en escalier et intégrabilité

Nous nous proposons de démontrer ici que quelques classes usuelles de fonctions (notamment les fonctions continues ou monotones par morceaux) sont intégrables.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. L'idée est de considérer des encadrements

$$(7.1) \quad \varphi \leq f \leq \psi$$

de f par des fonctions en escalier φ, ψ , comme figuré sur le schéma ci-dessous.

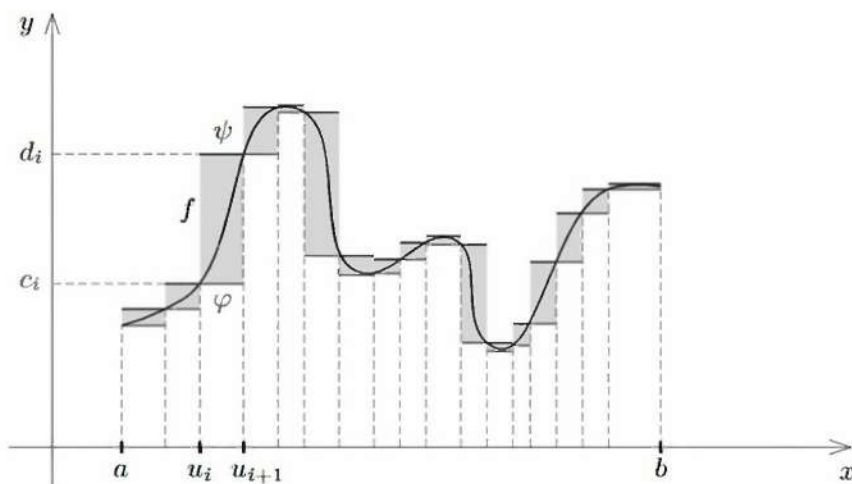


Fig. 8. Encadrement d'une fonction bornée f par des fonctions en escalier.

On peut supposer ici que les fonctions en escalier φ et ψ sont exprimées au moyen de la même subdivision $a = u_0 < u_1 < \dots < u_p = b$, sinon il est toujours possible de redécouper les subdivisions qui les définissent pour arriver à une subdivision commune [de plus, comme les valeurs $\varphi(u_i), \psi(u_i)$ ne jouent pas de rôle

dans les intégrales, on peut choisir par exemple $\varphi(u_i) = \psi(u_i) = f(u_i)$]. Dans cette situation, l'erreur due à l'encadrement de l'aire est précisément

$$(7.2) \quad \int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{0 \leq i \leq p-1} (d_i - c_i)(u_{i+1} - u_i)$$

(somme des aires des rectangles dessinés en grisé sur la Fig. 8). On obtient ainsi le critère suivant.

3.7.2 Critère d'intégrabilité au sens de Riemann

Théorème 13

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en escalier sur $[a, b]$ telles que :

$$\phi \leq f \leq \psi \text{ et } \int_a^b (\psi - \phi) < \varepsilon.$$

Démonstration 13

\Rightarrow Si f est Riemann intégrable, alors il existe un réel Λ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision pointée $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}$ de $[a, b]$ on ait

$$h_j = a_{j+1} - a_j \leq \delta \Rightarrow |S_D(f) - \Lambda| \leq \varepsilon.$$

On sait qu'il existe deux bornes m et M tels que $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$. On se place dans le segment $[a_j, a_{j+1}]$. On définit deux suites par dichotomie par $M_0 := M, m_0 := m$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

► Si $\forall x \in [a_j, a_{j+1}], f(x) \leq \frac{M_n + m_n}{2}$ alors $M_{n+1} := \frac{M_n + m_n}{2}$ et $m_{n+1} := m_n$,

► Si $\exists x \in [a_j, a_{j+1}], f(x) > \frac{M_n + m_n}{2}$ alors $M_{n+1} := M_n$ et $m_{n+1} := \frac{M_n + m_n}{2}$.

Les suites $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, mais ce n'est pas ce qui nous intéresse. On a

$$\forall x \in [a_j, a_{j+1}], f(x) \leq M_n \exists x_{j,n} \in [a_j, a_{j+1}], f(x_{j,n}) > m_n \text{ et } M_n - m_n = \frac{M - m}{2^n}.$$

On pose $\forall x \in]a_j, a_{j+1}[, \psi_n(x) := M_n$. Les fonctions $(\psi_n)_n$ sont en escalier et majorent f . On pose $S := \sum_j f(x_{j,n})(a_{j+1} - a_j)$ la somme de Riemann associée à la subdivision pointée $D_n = \{([a_j, a_{j+1}], x_{j,n})\}$. On a donc $S - \Lambda \leq |S - \Lambda| \leq \varepsilon$.

De plus $\int_a^b \psi_n - S = \sum_j (M_n - f(x_{j,n}))(a_{j+1} - a_j) \leq \sum_j \frac{M - m}{2^n} (a_{j+1} - a_j) \leq \frac{M - m}{2^n} (b - a)$.

On construit de même deux suites $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur chaque segment $[a_j, a_{j+1}]$ telles que

$$\forall x \in [a_j, a_{j+1}], f(x) \geq P_n \exists x'_{j,n} \in [a_j, a_{j+1}], f(x'_{j,n}) < p_n \text{ et } P_n - p_n = \frac{M - m}{2^n},$$

On pose $\forall x \in]a_j, a_{j+1}[, \phi_n(x) := P_n$. Les fonctions $(\phi_n)_n$ sont en escalier et mineurent f . On pose $S' := \sum_j f(x'_{j,n})(a_{j+1} - a_j)$ la somme de Riemann associée à la subdivision pointée $D'_n =$

$\{([a_j, a_{j+1}], x'_{j,n})\}$. On a donc $\Lambda - S' \leq |S' - \Lambda| \leq \varepsilon$.

De plus $S' - \int_a^b \phi_n = \sum_j (f(x'_{j,n}) - p_n)(a_{j+1} - a_j) \leq \sum_j \frac{M - m}{2^n} (a_{j+1} - a_j) \leq \frac{M - m}{2^n} (b - a)$.

En fin de compte

$$\begin{aligned} \int_a^b (\psi_n - \phi_n) &= \int_a^b \psi_n - S + S - \Lambda + \Lambda - S' + S' - \int_a^b \phi_n \\ &\leq \frac{M - m}{2^n} (b - a) + \varepsilon + \varepsilon + \frac{M - m}{2^n} (b - a) \\ &\leq 3\varepsilon, \end{aligned}$$

pourvu qu'on ait choisi n assez grand pour avoir $\frac{M - m}{2^n} \leq \varepsilon$. Le lecteur sceptique est renvoyé au théorème 18 page 59 du cours de première pour ce dernier point.

\Leftarrow La difficulté est de trouver la valeur de l'intégrale Λ . Pour cela on se donne $n \in \mathbb{N}^*$. En spécifiant $\varepsilon := \frac{1}{n}$, on sait qu'il existe $\phi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en escalier sur $[a, b]$ telles que :

$$\phi_n \leq f \leq \psi_n \text{ et } \int_a^b (\psi - \phi) < \frac{1}{n}.$$

Maintenant on construit par récurrence deux suites $\tilde{\phi}_n$ et $\tilde{\psi}_n$ par $\tilde{\phi}_1 := \phi_1$ et $\tilde{\psi}_1 := \psi_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\tilde{\phi}_{n+1} := \max(\phi_{n+1}, \tilde{\phi}_n)$ et $\tilde{\psi}_{n+1} := \min(\psi_{n+1}, \tilde{\psi}_n)$.

On vérifie par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\tilde{\phi}_n$ et $\tilde{\psi}_n$ sont des fonctions en escalier, que

$$\forall x \in [a, b], \phi_n(x) \leq \tilde{\phi}_n(x) \leq f(x) \leq \tilde{\psi}_n(x) \leq \psi_n(x),$$

que la suite $(\tilde{\phi}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et que la suite $(\tilde{\psi}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

On en déduit que

$$\int_a^b (\tilde{\psi}_n - \tilde{\phi}_n) \leq \int_a^b (\psi_n - \phi_n) \leq \frac{1}{n}.$$

Donc les suites $(\tilde{\phi}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\tilde{\psi}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Leur limite commune sera notée Λ pardi !

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Lambda - \int_a^b \tilde{\phi}_n \leq \frac{1}{n}$ et $\int_a^b \tilde{\psi}_n - \Lambda \leq \frac{1}{n}$.

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

On a donc $\forall x \in [a, b]$, $\tilde{\phi}_n(x) \leq f(x) \leq \tilde{\psi}_n(x)$. On en déduit que

$$\int_a^b \tilde{\phi}_n = S_D(\tilde{\phi}_n) \leq S_D(f) \leq S_D(\tilde{\psi}_n) = \int_a^b \tilde{\psi}_n,$$

Donc $0 \leq S_D(f) - \Lambda \leq S_D(\tilde{\psi}_n) - \Lambda \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$ et ainsi $|S_D(f) - \Lambda| < \varepsilon$, et ce pour toute subdivision pointée adaptée à $\tilde{\phi}_n$ et $\tilde{\psi}_n$, donc pour toute division plus fine.

C'est bien dire que f est Riemann-intégrable. \square

3.7.3 Fonctions monotones

Théorème 14

Toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotone est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.

Démonstration 14

Supposons par exemple f croissante et soit $a = u_1 < \dots < u_p = b$ une subdivision δ -fine de $[a, b]$, où $\delta > 0$ est une constante. De manière évidente, on définit un encadrement $\varphi \leq f \leq \psi$ de f par des fonctions en escalier en posant

$$\varphi(x) = f(u_j) \text{ sur }]u_j, u_{j+1}[, \quad \psi(x) = f(u_{j+1}) \text{ sur }]u_j, u_{j+1}[$$

(et $\varphi(u_j) = \psi(u_j) = f(u_j)$ comme déjà convenu). Ceci donne

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx &= \sum_{0 \leq j \leq N-1} (f(u_{j+1}) - f(u_j))(u_{j+1} - u_j) \\ &\leq \delta \sum_{0 \leq j \leq N-1} (f(u_{j+1}) - f(u_j)) = \delta(f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

□

3.7.4 Fonctions continues**Théorème 15**

Toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.

Démonstration 15

Soit $\varepsilon > 0$. La continuité de f en tout point $x \in [a, b]$ implique l'existence d'un réel $\delta(x) > 0$ tel que

$$\forall x' \in [a, b], \quad x' \in [x - \delta(x), x + \delta(x)] \Rightarrow |f(x') - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Soit $D = ([a_j, a_{j+1}], x_j)_{0 \leq j < N}$ une subdivision pointée δ -fine. En prenant $x = x_j$ et en faisant parcourir à x' l'intervalle $[a_j, a_{j+1}] \subset [x_j - \delta(x_j), x_j + \delta(x_j)]$, on déduit de la majoration $|f(x') - f(x_j)| \leq \varepsilon$ que les bornes inf et sup

$$m_j = \inf_{x' \in [a_j, a_{j+1}]} f(x'), \quad M_j = \sup_{x' \in [a_j, a_{j+1}]} f(x')$$

sont comprises entre $f(x_j) - \varepsilon$ et $f(x_j) + \varepsilon$. par conséquent $M_j - m_j \leq 2\varepsilon$. On obtient ainsi un encadrement $\varphi \leq f \leq \psi$ de f par des fonctions en escalier φ, ψ telles que

$$\varphi(x) = m_j, \quad \psi(x) = M_j \quad \text{si } x \in]a_j, a_{j+1}[, \quad \varphi(a_j) = \psi(a_j) = f(a_j),$$

et de plus

$$\int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{0 \leq j \leq N-1} (M_j - m_j)(a_{j+1} - a_j) \leq 2\varepsilon \sum_{0 \leq j \leq N-1} a_{j+1} - a_j = 2\varepsilon(b - a).$$

La fonction f est donc intégrable. □

3.7.5 Primitives des fonctions continues

Théorème 16

Toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ admet une primitive F , donnée par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

Les autres primitives sont les fonctions de la forme $F_1(x) = F(x) + C$ où C est une constante.

Démonstration 16

Nous savons que l'intégrale donnant $F(x)$ existe par le théorème 15. La relation de Chasles donne

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt \Rightarrow \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'hypothèse de continuité dit que $f(x) - \varepsilon \leq f(t) \leq f(x) + \varepsilon$ pour $|t - x| \leq \delta(x)$, on a donc

$$f(x) - \varepsilon = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(x) - \varepsilon) dt \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(x) + \varepsilon) dt = f(x) + \varepsilon$$

pour $|h| \leq \delta(x)$, ce qui signifie que

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Si on a une autre primitive F_1 , il vient $(F_1 - F)' = f' - f' = 0$, donc $F_1 - F = C$ constante. \square

3.7.6 Monotonie

Théorème 17

- a) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue positive ou nulle, on a $\int_a^b f(x) dx = 0$ si et seulement si $f = 0$.
- b) Si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues et $f \leq g$, on a $\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$ dès que f et g se sont pas égales.

Démonstration 17

- a) Si f n'est pas nulle, il existe un point $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$, et on pose alors $\varepsilon = f(x_0)/2$. La continuité de f en x_0 implique qu'il existe un intervalle $[x_0, x_0 + \eta]$ (ou $[x_0 - \eta, x_0]$, si $x_0 = b$) sur lequel $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. On voit donc qu'il existe un sous-intervalle $[c, d]$ de $[a, b]$ de longueur $d - c = \eta > 0$ sur lequel $f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon \geq \varepsilon$. Par suite $\int_a^b f(x) dx \geq \int_c^d f(x) dx \geq (d - c) \varepsilon > 0$.
- b) Si $f \leq g$ et $f \neq g$, alors $h = g - f \geq 0$ n'est pas nulle, donc $\int_a^b h(x) dx > 0$ d'après (a). \square

3.7.7 Formule de la moyenne

Théorème 18 (Formule de la moyenne)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que la «valeur moyenne de f sur $[a, b]$ » soit égale à $f(c)$:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c).$$

Démonstration 18

Soit $m = \min_{[a,b]} f$. $M = \max_{[a,b]} f$. Supposons d'abord f non constante. D'après la proposition 17(b) appliquée aux inégalités $m \leq f \leq M$, nous avons

$$m(b-a) < \int_a^b f(x) dx < M(b-a), \quad \text{soit} \quad m < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx < M.$$

La formule de la moyenne est donc une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, puisque $f(]a, b[)$ est un intervalle qui contient l'intervalle $]m, M[$. Si f est égale à une constante C , le résultat est évident, les deux membres de la formule étant égaux à C quel que soit le choix de $c \in]a, b[$. \square

3.7.8 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 19 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$.

$$\left| \int fg \right| \leq \left(\int f^2 \right)^{1/2} \left(\int g^2 \right)^{1/2}.$$

Démonstration 19

Soit $t \in \mathbb{R}$. La fonction $(f - tg)^2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue à valeurs positives. Donc

$$\int (f - tg)^2 = \int f^2 - 2t \int fg + t^2 \int g^2 \geq 0,$$

et ce pour tout $t \in \mathbb{R}$. En posant $A := \int g^2$, $B := 2 \int fg$ et $C := \int f^2$, le discriminant du trinôme (si $A > 0$) est négatif, donc $4B^2 - 4AC \leq 0$, ce qui donne $B^2 \leq AC$ et le résultat demandé en prenant les racines carrées positives des deux membres.

Si $A = 0$ alors $B = 0$ et le résultat est établi. \square

Remarques 4.

- L'hypothèse de continuité peut être grandement affaiblie. Voir la remarque 5.
- L'inégalité de Cauchy-Schwarz est (avec le théorème d'intégration par parties) le théorème le plus important de ce chapitre et peut-être des trois volumes du cours!

Nous terminerons par un exemple de fonction f qui n'est plus bornée.

Exemple 7

On prend $[a, b] = [0, 1]$ et f telle que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ si $x \in]0, 1]$ et $f(0) = 0$.

On introduit une subdivision pointée $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}_{0 \leq j < N}$ telle que $a_j = (\frac{j}{N})^2$ pour $0 \leq j \leq N$ et on pose $x_j = (\frac{t_j}{N})^2$ avec $t_j \in [j, j+1]$. On a alors $a_{j+1} - a_j = \frac{2j+1}{N^2}$ et $f(x_j) = \frac{N}{t_j}$ si $t_j > 0$, d'où

$$S_D(f) = \frac{1}{N} \sum_{0 \leq j \leq N-1, t_j > 0} \frac{2j+1}{t_j}.$$

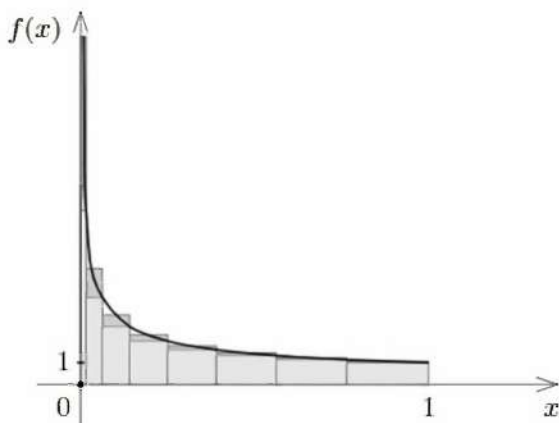


Fig. 9. Sommes de Riemann associées à $f(x) = 1/\sqrt{x}$ sur $[0, 1]$.

Le choix le plus simple est $t_j = j + \frac{1}{2}$, qui donne $\frac{2j+1}{t_j} = 2$ et donc $S_D(f) = 2$. Si on choisit plutôt $t_j = j+1$, on obtient la valeur minimale possible pour $S_D(f)$, mais comme $\frac{2j+1}{j+1} \rightarrow 2$ quand $j \rightarrow +\infty$, il est facile de voir que l'on a encore $S_D(f) \rightarrow 2$ pour $N \rightarrow +\infty$ (on peut observer par exemple que $\frac{2j+1}{j+1} = 2 - \frac{1}{j+1} \geq 2 - \frac{1}{\sqrt{N}}$ pour $\sqrt{N} \leq j \leq N$). Comme $a_{j+1} - a_j \leq \frac{2N-1}{N^2} \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$, ce calcul amène à penser que l'aire du domaine non borné défini par $0 < x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1/\sqrt{x}$ est bien finie et égale à 2. \square

3.8 Quiz

3.8.1 Énoncé

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier.

1. L'aire d'un disque de rayon 1 égale π .
2. Toute fonction continue est intégrable (au sens de Henstock-Kurzweil).
3. Toute fonction dérivée est intégrable (au sens de Henstock-Kurzweil).
4. Toute fonction dérivée est intégrable au sens de Riemann.
5. Il existe des fonctions intégrables (au sens de Henstock-Kurzweil) qui ne sont pas intégrables au sens de Riemann.
6. La fonction

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

est intégrable (au sens de Henstock-Kurzweil).

7. La fonction précédente est intégrable au sens de Riemann.
8. Au sens de Henstock-Kurzweil, la somme de deux fonctions intégrables est intégrable.
9. Au sens de Henstock-Kurzweil, le produit de deux fonctions intégrables est intégrable.
10. Dans le théorème d'intégration par parties

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

les fonctions u' et v' doivent être **continues**.

11. On considère la fonction $f : x \mapsto x$ sur l'intervalle $I = [0, 2]$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

- (a) $\sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n}$ est une somme de Riemann associée à f sur I .
- (b) $\sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n^2}$ est une somme de Riemann associée à f sur I .
- (c) $\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2i}{n^2}$ est une somme de Riemann associée à f sur I .
- (d) $\sum_{i=1}^n \frac{4i}{n^2}$ est une somme de Riemann associée à f sur I .

3.8.2 Corrigé

1. VRAI. Encore heureux. Reprendre l'exemple 6 en spécifiant $a := 1$ et $b := 1$.
2. VRAI. En effet, toute fonction continue est intégrable au sens de Riemann (théorème 15). Puis toute fonction intégrable au sens de Riemann est intégrable (au sens de Henstock-Kurzweil). Voir en cela la remarque qui suit la définition 4.

3. VRAI. C'est le théorème 9.

4. FAUX. Contrexemple : soit f définie sur $]0, 1[$ par $f(0) = 0$ et $\forall x \in]0, 1[, f(x) := x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$. On a $\forall x \in]0, 1[, f(x) = 0 + x\varepsilon(x)$ avec $|\varepsilon(x)| \leq x$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ d'après le théorème d'encadrement du cours de première (théorème 7 page 108). D'après la définition 1 page 131 du cours de première, f est dérivable en zéro et $f'(0) = 0$. D'après les opérations sur les dérivées, f est dérivable sur $]0, 1[$ et

$$\forall x \in]0, 1[, f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - x^2 \times \frac{2}{x^3} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

La fonction g définie sur $]0, 1[$ par $g(0) = 0$ et $\forall x \in]0, 1[, g(x) := 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ est continue sur $]0, 1[$ puisque $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ donc bornée.

La fonction h définie sur $]0, 1[$ par $\forall x \in]0, 1[, h(x) := -\frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ n'est pas bornée. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n := h\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = -4n\pi$ est une suite qui tend vers $-\infty$. La fonction f somme d'une fonction bornée et d'une fonction qui ne l'est pas n'est pas bornée. Elle n'est donc pas intégrable au sens de Riemann (contraposée du théorème 2).

5. VRAI. C'est le cas de la fonction f' vue à la réponse précédente. Plus simplement c'est le cas de la fonction de l'exemple 7.

6. VRAI. Mais cela demande de revenir à la définition 4 pour démontrer que $\int_0^1 f = 0$.

On se donne $\varepsilon > 0$. On choisit alors une fonction de jauge δ définie par

$$\forall x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \delta(x) := 1 \text{ et } \forall q \in \mathbb{N}^*, \forall p \in [0, q], (p \wedge q = 1) \implies \delta\left(\frac{p}{q}\right) := \frac{\varepsilon}{2^{p+q+1}}.$$

Ce n'est pas forcément ce qui vient en premier à l'esprit, mais ça marche. Si on considère que la valeur de f la plus fréquente c'est zéro (obtenue aux irrationnels), on va resserrer la jauge autour des rationnels puisque c'est en ces points que les oscillations se produisent.

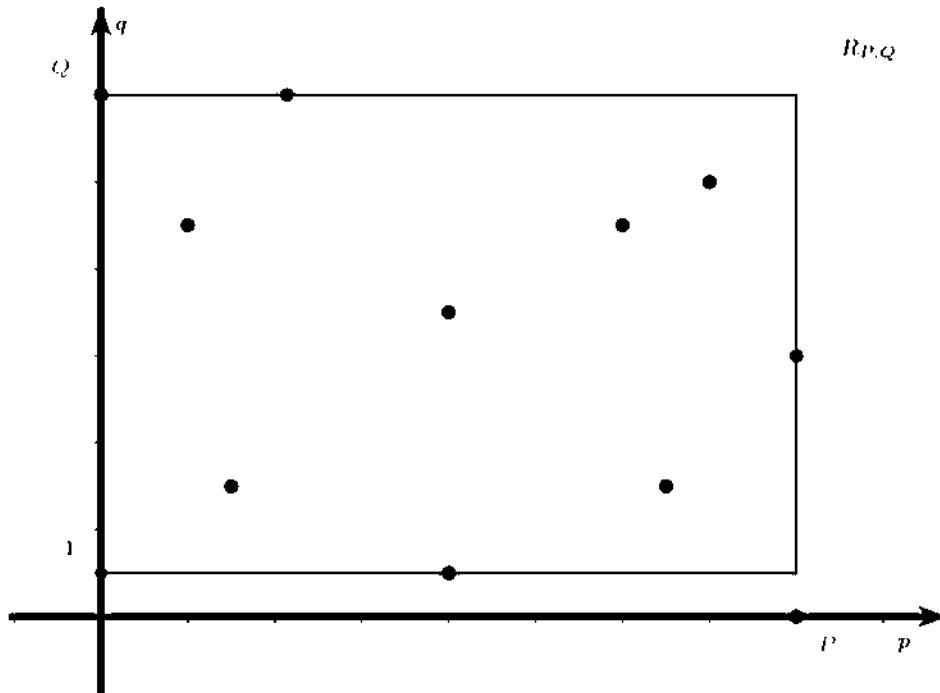
Soit $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j)\}_{0 \leq j \leq N-1}$ une subdivision marquée δ -fine de $[0, 1]$,

$$|S_D(f)| = \left| \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)(a_{j+1} - a_j) \right| = \left| \sum_{k=0}^m f(x_{j_k})(a_{j_{k+1}} - a_{j_k}) \right| \leq \left| \sum_{k=0}^m 1 \times \delta(x_{j_k}) \right|,$$

où j_0, \dots, j_m sont les indices des $(x_j)_{0 \leq j \leq N-1}$ qui sont rationnels. Pour les autres indices j , on a $f(x_j) = 0$ donc la contribution à la somme est nulle.

Maintenant, on pose pour $k \in [0, m]$, $x_{j_k} := \frac{p_k}{q_k}$ avec $q_k \in \mathbb{N}^*$ et $p_k \wedge q_k = 1$.

Soit $P := \max_{k \in [0, m]} p_k$ et $Q := \max_{k \in [0, m]} q_k$.



En remplaçant tous les points à coordonnées $(p_k, q_k)_{k \in [0, m]}$ par tous les points à coordonnées entières de la plaque rectangulaire $R_{P,Q} := \{(p, q) \mid p \in [0, P]; q \in [1, Q]\}$ on majore la somme puisqu'on ne rajoute que des termes positifs $\frac{\varepsilon}{2^{p+q+1}}$. Donc

$$|S_D(f)| \leq \sum_{(p, q) \in R_{P,Q}} \frac{\varepsilon}{2^{p+q+1}} = \sum_{p=0}^P \sum_{q=1}^Q \frac{\varepsilon}{2^{p+q+1}},$$

d'après le principe de Fubini vu dans le cours de première (lemme 5 page 580). Or la somme des premiers termes de la suite géométrique $\left(\frac{\varepsilon}{2^{p+q+1}}\right)_{q \in \mathbb{N}^*}$ est

$$\frac{\varepsilon}{2^{p+1}} \sum_{q=1}^Q \frac{1}{2^q} = \frac{\varepsilon}{2^{p+1}} \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^Q}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2^{p+1}} \left(1 - \frac{1}{2^Q}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2^{p+1}},$$

et la somme des premiers termes de la suite géométrique $\left(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\right)_{p \in \mathbb{N}}$ est

$$\frac{\varepsilon}{2} \sum_{p=0}^P \frac{1}{2^p} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^{P+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2^{P+1}}\right) \leq \varepsilon.$$

Donc $|S_D(f)| \leq \varepsilon$ et ce pour toute subdivision marquée D qui soit δ -fine de $[0, 1]$.

C'est bien dire que f est intégrable sur $[0, 1]$ et que $\int_0^1 f = 0$.

7. FAUX. Supposons par l'absurde que f est intégrable au sens de Riemann sur $[0, 1]$. On a nécessairement d'après la question précédente et le théorème 4 $A := \int_0^1 f = 0$. On spécifie $\varepsilon := 0,5 > 0$. Pour tout $\delta > 0$, on choisit une subdivision pointée $D = \{([a_j, a_{j+1}], x_j) \mid j \in [0, N-1]\}$ de $[0, 1]$ avec $a_j = \frac{j}{N}$ donc $a_{j+1} - a_j = \frac{1}{N} < \delta$ et $\forall j \in [0, N-1]$, $x_j \in \mathbb{Q}$ et par conséquent $f(x_j) = 0$. De ce

fait $S_D(f) = \sum_{j=0}^{N-1} (a_{j+1} - a_j) = a_N - a_0 = 1$. Donc $|S_D(f) - \Lambda| > \varepsilon$. La subdivision pointée D est donc un contreexemple.

8. VRAI. C'est inclus dans le théorème 6 en spécifiant $\lambda := 1$ et $\mu := 1$.
9. FAUX. Reprenons la fonction de l'exemple 7 : Soit f définie sur $]0, 1]$ par $f(0) = 0$ et $\forall x \in]0, 1]$, $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$. On sait que f est intégrable sur $]0, 1]$. On pourra vérifier au chapitre 6 page 4 que f^2 n'est pas intégrable. Dans ces conditions, le couple (f, f) constituera un contreexemple. En attendant on va démontrer que f^3 n'est pas intégrable. En effet, en supposant le contraire, on aurait

$$\forall B \in]0, 1], \int_0^1 f^3 = \int_0^B f^3 + \int_B^1 f^3 \geq \int_B^1 f^3 \geq \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$$

Or en posant $\forall x \in]0, 1]$, $g(x) := -\frac{2}{\sqrt{x}}$, la fonction g est dérivable et

$$\forall x \in]0, 1], g'(x) = -2 \times \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = f(x).$$

Donc d'après le théorème 11,

$$\int_0^1 f^3 \geq \left[-\frac{2}{\sqrt{x}} \right]_B^1 = \frac{2}{\sqrt{B}} - 1.$$

Comme $\lim_{B \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{B}} = +\infty$ le nombre $\int_0^1 f^3$ serait plus grand que tout réel, ce qui est impossible.

En fin de compte :

- soit f^2 n'est pas intégrable et le couple (f, f) constitue un contreexemple ;
- soit f^2 est intégrable et le couple (f, f^2) constitue un contreexemple.

Remarque 5.

Le lecteur acharné pourra démontrer que le produit de deux fonctions intégrables au sens de Riemann est intégrable au sens de Riemann. L'idée centrale est de dire que l'une des deux est bornée.

De ce fait, l'inégalité de Cauchy-Schwarz (théorème 19) est vraie pour toutes fonctions f et g Riemann-intégrables seulement.

10. FAUX. Le théorème 12 est formel. Les fonctions u' et v' n'ont aucun besoin d'être continues. Ce qui importe, c'est que l'une des deux fonctions uv' ou $u'v$ soit intégrable.

Toutefois le candidat face à sa copie d'écrit, qui souhaite s'affranchir de cette condition de continuité majoritairement vérifiée dans les exemples sera bien inspiré de signaler qu'il se place dans le cadre de la théorie de Henstock-Kurzweil.

À l'oral, c'est encore plus radical, le candidat doit pouvoir convaincre l'examinateur qu'il maîtrise ce chapitre.

Notre conseil : Éviter les ennuis et signaler dans la rédaction que u' et v' sont continues. Dans ces conditions, on est assuré que uv' et $u'v$ sont intégrables au sens de Riemann en tant que fonctions continues. Elles sont donc intégrables au sens de Henstock-Kurzweil via le théorème 4.

11. (a) FAUX On a $\sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n} = \frac{2n(2n+1)}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

(b) VRAI $\sum_{i=1}^{2n} \frac{i}{n^2} = \frac{2-0}{2n} \sum_{i=1}^{2n} f\left(\frac{2i}{2n}\right)$ C'est une somme de Riemann obtenue en divisant I en $2n$ parties égales et en prenant à chaque fois le point extrême à droite.

(c) FAUX On a $\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2i}{n^2} = \frac{2}{n} \frac{n(n+1)}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

(d) VRAI $\sum_{i=1}^n \frac{4i}{n^2} = \frac{2-0}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{2i}{n}\right)$ C'est une somme de Riemann obtenue en divisant I en $2n$ parties égales et en prenant à chaque fois le point extrême à droite.

3.9 Exercices : Primitives

Exercice 1.

Calculer les primitives suivantes

1. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

2. $\int x\sqrt{1-x} dx$

3. $\int \cos^3 x dx$

4. $\int x \sin x dx$

5. $\int \sqrt{x}(x-1) dx$

6. $\int \sin^2 x dx$

7. $\int \sin 2x \cos 3x dx$

8. $\int \sin\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) dx$

9. $\int \frac{1}{1+\sin x} dx$

10. $\int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx$

11. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$

12. $\int \frac{1-x^2}{1+x^2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \quad \left(x + \frac{1}{x} = t\right)$

Exercice 2.

Calculer les primitives suivantes

1. $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^3} dx$

2. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$

3. $\int \sqrt{\frac{1-\sin t}{4 \sin t}} dt$

Exercice 3.

1. Calculer $\int \frac{(x^4 + 1) dx}{x^6 + 1}$.

2. Démontrer que $\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{3x(1-x^2)}{x^4 - 4x^2 + 1}\right)$ est une primitive de $\frac{(x^4 + 1)}{x^6 + 1}$.

Exercice 4.

Calculer $I := \int \frac{1}{1-x} \left(\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} \right) dx$.

Exercice 5.

Calculer $I := \int \frac{x-1}{(x+1)\sqrt{x^3+x^2+x}} dx$.

3.10 Solutions**Solution 1**

1. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 + \cos x}{2} dx = \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + C$.

2.
$$\begin{aligned} \int x\sqrt{1-x} dx &= \frac{2}{3} \int \frac{3}{2} x\sqrt{1-x} - (1-x)^{\frac{3}{2}} + (1-x)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{2}{3} \int \left[-x(1-x)^{\frac{3}{2}} \right]' + (1-x)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{3} \left[-x(1-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} \right] + C. \end{aligned}$$

3. $\int \cos^3 x dx = \int \cos x(1 - \sin^2 x) dx$. En posant $t = \sin x$ on a $dt = \cos x dx$, et
 $\int \cos^3 x dx = \int (1 - t^2) dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

4. $\int x \sin x dx = \int \cos x - \cos x + x \sin x dx = \int \cos x - (x \cos x)' dx = \sin x - x \cos x + C$.

5. $\int \sqrt{x}(x-1) dx = \int x^{3/2} - x^{1/2} dx = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} - \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C$.

6. $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$.

7.
$$\begin{aligned} \int \sin 2x \cos 3x dx &= \int 2 \sin x \cos x (4 \cos^3 x - 3 \cos x) dx = \int 2 \sin x (4 \cos^4 x - 3 \cos^2 x) dx \\ &= -2 \left(\frac{4}{5} \cos^5 x - \cos^3 x \right) + C. \end{aligned}$$

$$8. \int \sin\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) dx = 2 \cos\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + C.$$

$$9. \int \frac{1}{1 + \sin x} dx = \int \frac{1}{1 + \sin x} \times \frac{1 - \sin x}{1 - \sin x} dx = \int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} dx = \tan x - \frac{1}{\cos x} + C.$$

$$10. \int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx = \int \frac{x^2 \cos x}{(x \sin x + \cos x)^2 \cos x} dx. \quad \text{Or } (x \sin x + \cos x)' = x \cos x$$

$$\text{En posant } u = \frac{x}{\cos x}, v' = \frac{x \cos x}{(x \sin x + \cos x)^2} \quad \text{par exemple, } v = \frac{-1}{(x \sin x + \cos x)}$$

En intégrant par parties on obtient $\frac{-x}{(\cos x)(x \sin x + \cos x)} + \tan x + C.$

$$11. \frac{\text{Arctan}\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}} + \frac{\text{Arctan}\left(\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}} + C.$$

12. En posant $t = x + \frac{1}{x}$ on obtient $dt = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$ et $t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ donc

$$\int \frac{1-x^2}{1+x^2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = - \int \frac{1-x^2}{x^2} \frac{x}{1+x^2} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}} = - \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-2}}.$$

On pose cette fois $u = \sqrt{t^2-2}$. On a $t^2 = u^2 + 2$ et $du = \frac{2tdt}{2\sqrt{t^2-2}}$. Donc

$$\begin{aligned} \int \frac{1-x^2}{1+x^2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} &= - \int \frac{du}{u^2+2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{Arctan}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{t^2-2}}{\sqrt{2}}\right) + C = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}}{\sqrt{2}}\right) + C. \end{aligned}$$

Solution 2

1. La présence d'une puissance impaire de x au numérateur et d'une puissance paire de x au dénominateur invite à effectuer le changement de variable $u := x^2$ d'où $du = 2x dx$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(x^2+1)^3} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{u}{(u+1)^3} du = \frac{1}{2} \int \frac{u+1-1}{(u+1)^3} du \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{(u+1)^2} - \frac{1}{(u+1)^3} \right) du = -\frac{1}{2(u+1)} + \frac{1}{4(u+1)^2} + C \\ &= -\frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{4(x^2+1)^2} + C \end{aligned}$$

2. On pose $x - \frac{1}{x} = t$, d'où $dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx &= \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} dx \\ &= \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \int \sqrt{\frac{1 - \sin t}{4 \sin t}} dt &= \int \sqrt{\frac{1 - \frac{2 \tan t/2}{1 + \tan^2 t/2}}{\frac{8 \tan t/2}{1 + \tan^2 t/2}}} dt = \frac{1}{\sqrt{8}} \int \left(\sqrt{\tan t/2} - \frac{1}{\sqrt{\tan t/2}} \right) dt \\
&= \frac{1}{8} \int \left(u + \frac{1}{u} \right) du \cdot 4 \sqrt{\tan t/2} \cos^2 t/2 = \frac{1}{8} \int \left(u + \frac{1}{u} \right) \frac{4u}{1+u^4} du \\
&= \frac{4}{\sqrt{8}} \int \frac{u^2 + 1}{u^4 + 1} du = \sqrt{2} \int \frac{u^2 + 1}{u^4 + 1} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{u^2 - 1}{u\sqrt{2}} \right) + C.
\end{aligned}$$

Solution 3

$$\begin{aligned}
\text{On a } \int \frac{(x^4 + 1) dx}{x^6 + 1} &= \int \frac{((x^4 - x^2 + 1) + (x^2 + 1) - 1) dx}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} \\
&= \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \int \frac{dx}{x^4 - x^2 + 1} - \int \frac{dx}{1 + x^6} \\
&= \int \frac{dx}{1 + x^2} + \int \frac{dx}{x^4 - x^2 + 1} - \int \frac{x^2 + 1 - x^2 dx}{x^6 + 1} \\
&= \arctan x + \int \frac{dx}{x^4 - x^2 + 1} - \int \frac{x^2 + 1 dx}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} + \int \frac{x^2 dx}{1 + x^6} \\
&= \arctan x + \int \frac{dx}{x^4 - x^2 + 1} - \int \frac{dx}{x^4 - x^2 + 1} + \frac{1}{3} \arctan x^3 \\
&= \arctan x + \frac{1}{3} \arctan x^3 + C.
\end{aligned}$$

Vérification en dérivant :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 + x^2} + \frac{x^2}{1 + x^6} &= \frac{1}{1 + x^2} + \frac{x^2}{(1 + x^2)(1 - x^2 + x^4)} \\
&= \frac{1 - x^2 + x^4 + x^2}{1 + x^6} \\
&= \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1}.
\end{aligned}$$

Maintenant.

$$\begin{aligned}
\arctan x + \frac{1}{3} \arctan x^3 &= \frac{1}{3} \arctan \frac{x^3 - 3x}{3x^2 - 1} + \frac{1}{3} \arctan x^3 \\
&= \frac{1}{3} \arctan \frac{\frac{x^3 - 3x}{3x^2 - 1} + x^3}{1 - \left(\frac{x^3 - 3x}{3x^2 - 1} \right) (x^3)} \\
&= \frac{1}{3} \arctan \frac{3x(1 - x^2)}{x^4 - 4x^2 + 1}.
\end{aligned}$$

Solution 4

1. En posant $t = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$ on a $x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ et $\frac{1}{1-x} = \frac{t^2 + 1}{2}$.

On obtient ainsi $2 \int \frac{t^2}{t^2 + 1} dt = 2t - 2 \arctan t = 2\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} - 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} \right) + C$.

2. En posant $x = \sin \theta$,

$$I = \int \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \left(\sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{(1 - \sin \theta)^2}} \right) d\theta = \int \frac{\cos^2 \theta}{(1 - \sin \theta)^2} d\theta = \int \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} d\theta$$

D'où

$$I = \int \left(\frac{2}{1 - \sin \theta} - 1 \right) d\theta.$$

Or

$$I_1 = \int \frac{d\theta}{1 - \sin \theta} = \int \frac{\sec^2 \frac{\theta}{2} d\theta}{(1 - \tan \frac{\theta}{2})^2} = \frac{2}{1 - \tan \frac{\theta}{2}} + k$$

Donc

$$I = -\theta + \frac{4}{1 - \tan \frac{\theta}{2}} + C.$$

Solution 5

On a

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(x^2 - 1)}{(x+1)^2 \cdot x \cdot \sqrt{x + \frac{1}{x} + 1}} dx \\ &= \int \frac{(x^2 - 1)}{x^2 \cdot (x + \frac{1}{x} + 2) \cdot \sqrt{x + \frac{1}{x} + 1}} dx \\ &= \int \frac{(1 - \frac{1}{x^2})}{(x + \frac{1}{x} + 2) \cdot \sqrt{x + \frac{1}{x} + 1}} dx \end{aligned}$$

On pose $(x + \frac{1}{x} + 1) = t^2$ d'où $(1 - \frac{1}{x^2}) dx = 2t dt$. D'où

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2t}{(1+t^2) \cdot t} dt \\ &= 2 \int \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \operatorname{Arctan}(t) + C \\ &= 2 \operatorname{Arctan} \left(x + \frac{1}{x} + 1 \right) + C \end{aligned}$$

3.11 Exercices : Intégrales

Exercice 6.

Soit f une fonction continue et décroissante sur $]0, +\infty[$. On pose

$$\forall x \in]0, +\infty[, F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

Démontrer que F est une fonction décroissante sur $]0, +\infty[$.

Exercice 7.

Soit $p \in \mathbb{R}$ et $N < n$ deux entiers.
En dérivant par rapport à p , démontrer que

$$\sum_{k=0}^N C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^{N+1} \int_p^1 t^N (1-t)^{n-N-1} dt.$$

Exercice 8.

On se propose de démontrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(x) \geq x \frac{15-x^2}{16-6x^2}$.

On pose pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) := x \frac{15-x^2}{16-6x^2}$.

1. Démontrer que $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(t) - 1 - (f(t))^2 = \frac{-t^6 + 9t^2 - 16}{(16-6t^2)^2}$.
2. En déduire que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\text{Arctan}(f(x)) \leq x$.
3. Conclure.

Exercice 9.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I_n := \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$.

1. Démontrer que la suite (I_n) est convergente.
2. Déterminer la limite de la suite (I_n) .

Exercice 10.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$.

Démontrer que $\int_0^1 x f(x) f(1-x) dx \leq \frac{1}{4} \int_0^1 \{f(x)^2 + f(1-x)^2\} dx$.

Exercice 11.

Calculer $\frac{\int_0^1 (1-x^{50})^{100} dx}{\int_0^1 (1-x^{50})^{101} dx}$

Exercice 12.

Calculer l'intégrale :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x \, dx}{\left[(2x+1)\sqrt{x^2-x+1} + (2x-1)\sqrt{x^2+x+1} \right] \sqrt{x^4+x^2+1}} .$$

Exercice 13.Calculer l'intégrale : $\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} \, dx$.**Exercice 14.**

Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx$$

Exercice 15.

Montrer que :

$$\forall x > \pi, F(x) = \int_{\pi}^x f(t) \, dt \neq 0$$

$$\text{où } f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t} + \sin t}$$

Exercice 16.Calculer $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^4 t}{\sin^6 t} \, dt$ **Exercice 17.**Calculer $\int_1^4 \frac{6x + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} \, dx$.

Exercice 18.

Calculer $\int_1^{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x^2}} \right) dx$

Exercice 19.

Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1 + \cos x)^2} dx$.

Exercice 20.

Calculer

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x} \sqrt[6]{\frac{1 + \sin(x)}{1 - \sin(x)}} dx.$$

Exercice 21.

Soit f et g deux fonctions continues de $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$. On suppose de plus que f est croissante.

Démontrer que

$$\int_0^1 f(g(x)) dx \leq \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx.$$

Exercice 22.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx \text{ et } J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx.$$

En calculant $I_{n+1} - I_n$ et $J_{n+1} - J_n$, calculer I_n et J_n .

Exercice 23.

Soit f une fonction de classe $C^5([-a, a])$ c'est-à-dire cinq fois dérivable et dont la dérivée cinquième est continue avec $a < 0$ et f impaire.

En utilisant la fonction $g(t) = f(t) - \frac{t}{3}(f'(t) + 2f'(0)) - \frac{At^5}{180}$ où A est choisi pour que $g(a) = 0$, montrer qu'il existe un $c \in [0, a]$ tel que

$$f(a) = \frac{a}{3}(f'(a) + 2f'(0)) - \frac{a^5}{180}f^{(5)}(c).$$

Exercice 24.

Soit $f : [0, 1]$ dans \mathbb{R} dérivable, de dérivée continue, telle que $f(1) = 0$.

Montrer que

$$\int_0^1 f^2(t) dt \leq 4 \int_0^1 t^2 f'^2(t) dt.$$

Indication 1.

Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz (théorème 19) à $\int_0^1 (-t)f(t)f'(t) dt$ et utiliser une intégration par parties.

Exercice 25.

1. Calculer $I(x) = \int_0^1 \frac{\sin x dt}{t^2 - 2t \cos x + 1}$.

2. Démontrer que pour tous x et t réels et tout entier n ,

$$\sin x = (\sin x + t \sin(2x) + \dots + t^{n-1} \sin(nx))(t^2 - 2t \cos x + 1) + t^n [\sin((n+1)x) - t \sin(nx)].$$

3. Soit $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$.

Exercice 26.

Soit $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_1^2 f(x) dx = 0$.
Démontrer qu'il existe $c \in [1, 2]$, $cf(c) = \int_c^2 f(x) dx$.

Exercice 27.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

3.12 Solutions

Solution 6

Soit $x_2 > x_1 > 0$. On a

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(x_2) &= \frac{1}{x_1} \int_0^{x_1} f(t) dt - \frac{1}{x_2} \int_0^{x_2} f(t) dt \\ &= \frac{1}{x_1} \int_0^{x_1} f(t) dt - \frac{1}{x_2} \int_0^{x_1} f(t) dt - \frac{1}{x_2} \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \\ &= \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) \int_0^{x_1} f(t) dt - \frac{1}{x_2} \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \\ &\geq \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) f(x_1) - \frac{1}{x_2} (x_2 - x_1) f(x_1) \\ &\geq f(x_1) - \frac{x_1}{x_2} f(x_1) - f(x_1) + \frac{x_1}{x_2} f(x_1) \geq 0. \end{aligned}$$

Remarque 6.

L'hypothèse de continuité n'était pas nécessaire. On aurait pu se contenter de l'intégrabilité de f sur tout segment de $[0, +\infty[$.

Solution 7

Soit $D(p) := C_n^{N+1} \int_p^1 t^N (1-t)^{n-N-1} dt$. On a $D'(p) = -C_n^{N+1} p^N (1-p)^{n-N-1}$.

Soit $G(p) := \sum_{k=0}^N C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. On a

$$\begin{aligned} G'(p) &= \sum_{k=0}^N C_n^k k p^{k-1} (1-p)^{n-k} - \sum_{k=0}^N C_n^k (n-k) p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^N C_n^k k p^{k-1} (1-p)^{n-k} - \sum_{k=0}^N C_n^k (n-k) p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{h=0}^{N-1} C_n^{h+1} (h+1) p^h (1-p)^{n-h-1} - \sum_{h=0}^N C_n^h (n-h) p^h (1-p)^{n-h-1} \\ &= -C_n^N (n-N) p^N (1-p)^{n-N-1} + \sum_{h=0}^{N-1} (C_n^{h+1} (h+1) - C_n^h (n-h)) p^h (1-p)^{n-h-1}. \end{aligned}$$

Or pour $h \in \{0, \dots, N\}$, on a

$$C_n^h (n-h) = (n-h) \frac{n!}{h!(n-h)!} = \frac{n!}{h!(n-h-1)!} = \frac{n!}{(h+1)!(n-h-1)!} (h+1) = C_n^{h+1} (h+1).$$

Donc tous les termes de la deuxième somme sont nuls et

$$G'(p) = -C_n^N (n-N) p^N (1-p)^{n-N-1} = -C_n^{N+1} p^N (1-p)^{n-N-1} = D'(p).$$

De plus on a clairement $G(1) = 0$ et $D(1) = 0$ puisqu'on a choisi $N < n$.

La fonction $D - G$ a une dérivée nulle sur l'intervalle R et s'annule en 1. C'est donc la fonction nulle, ce qu'il fallait démontrer.

Solution 8

1. Félicitations si vous avez effectué le calcul à la main !

Xcas en ligne. Tapez une instruction dans cette console (assistant avec la bouée).

```
f(t):=t*(15-t^2)/(16-6*t^2)
(t)->t*(15-t^2)/(16-6*t^2)
simplify(derive(f(t),t)-f(t)^2-1)
      -t^4 + 9t^2 - 16
      36t^4 - 192t^2 + 256
```

2. Soit $t \geq 0$. On a $16 - 6t^2 > 0$ pour $0 \leq t < \sqrt{\frac{8}{3}}$. Or $\frac{\pi}{2} < 1,58 < 1,63 < \sqrt{\frac{8}{3}}$.

Donc $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $16 - 6t^2 > 0$.

L'étude des variations de $N(u) := u^3 - 9u + 16$ sur $[0, +\infty[$ montre que N présente un minimum en $u = \sqrt{3}$ et que ce minimum égale $8 - 3\sqrt{3} > 0$ puisque $64 > 27$.

On en déduit que $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(t) - 1 - (f(t))^2 = -\frac{N(t^2)}{(16 - 6t^2)^2} < 0$.

On en déduit que $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(t) < 1 + (f(t))^2$ puis $\frac{f'(t)}{1 + (f(t))^2} < 1$.

Or $t \mapsto \frac{f'(t)}{1 + (f(t))^2}$ est la dérivée de la fonction $t \mapsto \text{Arctan}(f(t))$. Donc l'inégalité vraie pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\int_0^x \frac{f'(t)}{1 + (f(t))^2} dt \leq \int_0^x 1 dt$$

se traduit par $\text{Arctan}(f(x)) - \text{Arctan}(f(0)) \leq x$. Comme $f(0) = 0$ on a $\text{Arctan}(f(0)) = 0$ et le résultat demandé s'en déduit.

3. La fonction tangente est croissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, $\forall u \in \mathbb{R}, \tan(\text{Arctan}(u)) = u$.
Le résultat demandé s'en déduit.

Solution 9

1. Soient $p, q \in \mathbb{N}$ vérifiant $p \leq q$. On a, $\forall x \in [0, 1], x^q \leq x^p$ donc $\frac{1}{1+x^p} \leq \frac{1}{1+x^q}$. En intégrant ces inégalités entre des bornes croissantes (0 et 1), on obtient $I_p \leq I_q$. Donc la suite (I_n) est croissante.
De plus $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{1+x^n} \leq 1$ donc $I_n \leq \int_0^1 dx = 1$. Donc la suite (I_n) est majorée.
La suite (I_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente.
2. On a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x^n} = 1 - \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x^n}.$$

Soit $\varepsilon_n := \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x^n}$, on a

$$0 \leq \varepsilon_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

D'après le théorème d'encadrement, la suite (ε_n) tend vers zéro et par conséquent, la suite (I_n) tend vers 1.

Remarque 7.

Cette solution répondait aux deux questions à la fois. Une suite à cette exercice sera donnée à l'exercice 18 page 237.

Solution 10

On a $\forall x \in [0, 1], 0 \leq [f(x) - f(1-x)]^2 = f(x)^2 - 2f(x)f(1-x) + f(1-x)^2$.

Par changement de variable $t := 1-x$, $\int_0^1 xf(x)f(1-x) dx = \int_0^1 (1-x)f(x)f(1-x) dx$ d'où :

$$\int_0^1 f(x)f(1-x) dx = \int_0^1 (x + (1-x))f(x)f(1-x) dx = 2 \int_0^1 xf(x)f(1-x) dx.$$

Ainsi $\int_0^1 f(x)^2 + f(1-x)^2 dx \geq 2 \int_0^1 f(x)f(1-x) dx = 4 \int_0^1 xf(x)f(1-x) dx$.

Solution 11

$$\begin{aligned} I_m &= \int_0^1 (1-x^n)^m dx \\ &= [(1-x^n)^m \cdot x]_0^1 + \int_0^1 mn x^{n-1} (1-x^n)^{m-1} \cdot x dx \\ &= mn \int_0^1 x^n \cdot (1-x^n)^{m-1} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{m-1} - \frac{1}{mn} I_m &= \int_0^1 (1-x^n)^{m-1} dx - \int_0^1 x^n \cdot (1-x^n)^{m-1} dx \\ &= \int_0^1 (1-x^n)^m dx = I_m \end{aligned}$$

D'où $I_{m-1} = \frac{mn+1}{mn} I_m$. Pour $n=50$ et $m=100$, $\frac{\int_0^1 (1-x^{50})^{100} dx}{\int_0^1 (1-x^{50})^{101} dx} = \frac{5051}{5050}$.

Solution 12

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{(2x+1)(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1} + (2x-1)(x^2+x+1)\sqrt{x^2-x+1}} \\ &= \frac{x[(2x+1)(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1} - (2x-1)(x^2+x+1)\sqrt{x^2-x+1}]}{6x(x^4+x^2+1)} \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} \right) \end{aligned}$$

D'où

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{1}{3} \left[\left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} \right) \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{3}.$$

Solution 13

Nous proposons plusieurs solutions, plus ou moins acrobatiques :

1. On a $x^4 + x^2 + 2 = (x^2 + 1)^2 - (x^2 - 1)$. D'où

$$\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} dx = 2 - \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

$$\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx = \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \left[\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{2}{(x^2 + 1)^2} \right] dx.$$

En remarquant que $\frac{1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} \right] - \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dx} \text{Arctan}(x) + \frac{d}{dx} \frac{x}{x^2 + 1} \right]$,

on obtient : $\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \left[\text{Arctan}(x) + \frac{x}{x^2 + 1} \right]_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} = \frac{\pi}{8}$.

Maintenant $\text{Arctan}(\sqrt{2} + 1) = \frac{3\pi}{8}$ et $\text{Arctan}(\sqrt{2} - 1) = \frac{\pi}{8}$.

On a donc $\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx = 0$.

Finalement $\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} dx = 2$.

2. Une fois que la bataille est terminée, il est facile d'être astucieux : on effectue le changement de variable $u := \frac{1}{x}$. En remarquant que $\sqrt{2} - 1$ et $\sqrt{2} + 1$ sont inverses l'un de l'autre, on obtient

$$\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx = \int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}-1} \frac{\frac{1}{u^2} - 1}{\left(\frac{1}{u^2} + 1\right)^2} \left(-\frac{du}{u^2}\right) = \int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}-1} \frac{1 - u^2}{(1 + u^2)^2} du.$$

L'intégrale $\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx$ est égale à son opposé. Elle est donc nulle.

3. $\frac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} = 1 - \frac{(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = 1 - \frac{x^2 + 1 - 2}{(x^2 + 1)^2} = 1 - \frac{1}{1 + x^2} + \frac{2}{(x^2 + 1)^2}$. Dans le dernier terme, on effectue $x := \tan(y)$ pour obtenir $\int 2 \cos^2(y) dy$ ainsi de suite.

4. $1 - \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$ Sous la forme de gauche, on voit que le terme de droite est $\left(x + \frac{1}{x}\right)'$. D'où $\int_{\sqrt{2-1}}^{\sqrt{2+1}} \frac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} dx = \left[x + \frac{1}{x}\right]_{\sqrt{2-1}}^{\sqrt{2+1}} = 2$

Solution 14

On pose $t = \pi - x$ donc $dt = -dx$.

On a :

$$I = \int_0^\pi \frac{x \cdot \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = - \int_\pi^0 \frac{(\pi - t) \cdot \sin(\pi - t)}{1 + \cos^2(\pi - t)} dt = \int_0^\pi \frac{(\pi - t) \cdot \sin(t)}{1 + \cos^2(t)} dt$$

car $\sin(\pi - t) = \sin(t)$ et $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$:

Mé زالor, on a :

$$2 \int_0^\pi \frac{x \cdot \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = \pi \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1 + \cos^2(t)} dt$$

$$\text{soit } \int_0^\pi \frac{x \cdot \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1 + \cos^2(t)} dt.$$

$$\text{Calculons } \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1 + \cos^2(t)} dt.$$

Par le changement de variable $u = -\cos(t)$ donc $du = \sin(t)dt$, on obtient :

$$\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1 + \cos^2(t)} dt = \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + u^2} du = [\text{Arctan}(u)]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Par suite, on a :

$$I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

Solution 15

On a $\forall x > \pi$, $F'(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x + \sin x}}$. Donc la fonction F' s'annule aux multiples entiers de π .

Les maximums locaux sont les $(2k+1)\pi$ $k \in \mathbb{N}$. Il s'agit de démontrer que $F((2k+1)\pi) < 0$.

$$\begin{aligned}
 F((2k+1)\pi) &= \sum_{m=1}^k \int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi} \frac{\sin t \, dt}{\sqrt{t} + \sin t} \\
 &= \sum_{m=1}^k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin u \, du}{\sqrt{2m\pi + u} + \sin u} \\
 &= \sum_{m=1}^k \left(\int_{-\pi}^0 \frac{\sin u \, du}{\sqrt{2m\pi + u} + \sin u} + \int_0^{\pi} \frac{\sin u \, du}{\sqrt{2m\pi + u} + \sin u} \right) \\
 &= \sum_{m=1}^k \left(- \int_0^{\pi} \frac{\sin v \, dv}{\sqrt{2m\pi - v} - \sin v} + \int_0^{\pi} \frac{\sin u \, du}{\sqrt{2m\pi + u} + \sin u} \right) \\
 &= \sum_{m=1}^k \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin u}{\sqrt{2m\pi + u} + \sin u} - \frac{\sin u}{\sqrt{2m\pi - u} - \sin u} \right) du \\
 &= \sum_{m=1}^k \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{2m\pi - u} - \sin u - \sqrt{2m\pi + u} - \sin u}{(\sqrt{2m\pi + u} + \sin u)(\sqrt{2m\pi - u} - \sin u)} du \\
 &= \sum_{m=1}^k \int_0^{\pi} \frac{-2 \sin u + \sqrt{2m\pi - u} - \sqrt{2m\pi + u}}{(\sqrt{2m\pi + u} + \sin u)(\sqrt{2m\pi - u} - \sin u)} du
 \end{aligned}$$

Le numérateur $-2 \sin u + \sqrt{2m\pi - u} - \sqrt{2m\pi + u}$ est négatif.

Le dénominateur $(\sqrt{2m\pi + u} + \sin u)(\sqrt{2m\pi - u} - \sin u)$ est positif. Reste à démontrer que c'est strictement négatif, ce qui n'est pas trop difficile. $F((2k+1)\pi) < 0$.

Solution 16

1. On remarque que

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^4 t}{\sin^6 t} dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^4 t \frac{dt}{\sin^2 t} = \int_0^1 u^4 du = \frac{1}{5},$$

avec le changement de variable $u = \cot t$.

2. On peut commencer par effectuer le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$, puis le changement de variable en $u = \tan x$:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^4 t}{\sin^6 t} dt = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx = \int_0^{\pi/4} \tan^4 x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^1 u^4 du = \frac{1}{5}.$$

3. Avec le changement de variable $u = \tan(\frac{t}{2})$, d'où $dt = \frac{2du}{u^2 + 1}$. On a $t = 2 \arctan(x)$ puis $\cos(2a) =$

$2 \cos^2 a - 1$ et $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$ pour arranger la fraction et en notant $a = \tan(\pi/8)$,

$$\begin{aligned} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^4 t}{\sin^6 t} dt &= \int_a^1 \frac{(1-u^2)^4(1+u^2)}{32u^6} du \\ &= \int_a^1 \frac{u^{10} - 3u^8 + 2u^6 + 2u^4 - 3u^2 + 1}{32u^6} du \\ &= \frac{1}{32} \left[\frac{u^5}{5} - u^3 + 2u - \frac{2}{u} + \frac{1}{u^3} - \frac{1}{5u^5} \right]_a^1 \\ &= \frac{1}{32} \left(-\frac{a^5}{5} + a^3 - 2a + \frac{2}{a} - \frac{1}{a^3} + \frac{1}{5a^5} \right) \end{aligned}$$

On note $b = a - \frac{1}{a}$, alors

$$\begin{aligned} b^3 &= a^3 - 3a + \frac{3}{a} - \frac{1}{a^3} \\ b^3 &= a^3 - \frac{1}{a^3} - 3b \\ a^3 - \frac{1}{a^3} &= b^3 + 3b \\ b^5 &= a^5 - 5a^3 + 10a - \frac{10}{a} + \frac{5}{a^3} - \frac{1}{a^5} \\ b^5 &= a^5 - \frac{1}{a^5} - 5(b^3 + 3b) + 10b \\ a^5 - \frac{1}{a^5} &= b^5 + 5b^3 + 5b \end{aligned}$$

D'où la valeur de l'intégrale :

$$I = \frac{1}{32} \left(-\frac{1}{5}(b^5 + 5b^3 + 5b) + (b^3 + 3b) - 2b \right) = \frac{1}{32} \left(-\frac{b^5}{5} \right)$$

Le calcul de b conduit à reconnaître les expressions des lignes de $\pi/4$ en fonction de la tangente a de l'arc moitié,

$$b = \frac{a^2 - 1}{a} = -2 \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \cdot \frac{1 + a^2}{2a} = -2 \frac{\cos(\pi/4)}{\sin(\pi/4)} = -2,$$

$$\text{donc } I = \frac{1}{32} \left(-\frac{-32}{5} \right) = \frac{1}{5}.$$

Solution 17

En posant $u = \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}$,

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{6x + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} dx &= \int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{4 + 20u^2}{(u^2 - 1)^4} du \\ &= \int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{2(u-1)^4} - \frac{1}{2(u-1)^3} + \frac{3}{2(1+u)^4} + \frac{1}{2(1+u)^3} \right) du \\ &= 4(4\sqrt{6} - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Solution 18

En posant $\sqrt[3]{x^2} = \tan^2 u$.

$$\begin{aligned} \int_1^{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x^2}} \right) dx &= \int_1^{3\sqrt{3}} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 (1 + (\sqrt[3]{x})^2)} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3 du = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Solution 19

En posant $u = \tan(\frac{x}{2})$: $dx = \frac{2 du}{1 + u^2}$, $\cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$; $\cos x = 1 + \frac{1 - u^2}{1 + u^2} = \frac{2}{1 + u^2}$. D'où

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1 + \cos x)^2} dx &= \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2}{1+u^2}\right)^2} \cdot \frac{2 du}{1+u^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + u^2) du \\ &= \left[\frac{u}{2} + \frac{u^3}{6} \right]_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Solution 20

Soit $u = \frac{1}{1 - \sin x}$ d'où $du = \frac{\cos x dx}{(1 - \sin x)^2}$.

On obtient une primitive :

$$I = \int \frac{du}{(2u - 1)^{5/6}} = 3(2u - 1)^{1/6} + C = 3\sqrt[6]{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} + C. \text{ Ainsi,}$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x} \sqrt[6]{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} dx = \left[3\sqrt[6]{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 3 \left[\sqrt[6]{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}} - \sqrt[6]{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}} \right].$$

Solution 21

On a $\forall t \in [0, 1]$, $\int_0^1 f(x) dx \geq \int_t^1 f(x) dx \geq (1 - t)f(t)$. Comme $f(t) \leq 1$, on a $(1 - t)f(t) \geq f(t) - t$. On prend cette inégalité pour $t = g(y) \in [0, 1]$, donc

$$\forall y \in [0, 1], \int_0^1 f(x) dx \geq f(g(y)) - g(y).$$

On intègre cette inégalité pour y entre 0 et 1.

$$\int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 (f(g(y)) - g(y)) dy.$$

d'où le résultat.

Solution 22

On a pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+3)x - \sin(2n+1)x}{\sin x} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} 2 \cos(2n+2)x dx \end{aligned}$$

En utilisant la formule (6.1) du théorème 13 page 224 du cours de première et en simplifiant par $\sin x$. On en déduit que

$$I_{n+1} - I_n = \frac{2}{2n+2} [\sin(2n+2)x]_0^{\pi/2} = 0.$$

On en déduit que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et que cette constante égale

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

De même pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} J_{n+1} - J_n &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+2)x - \sin(2n)x}{\sin x} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} 2 \cos(2n+1)x dx \\ &= \left[\frac{2}{2n+1} \sin(2n+1)x \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2}{2n+1} \sin(2n+1) \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{2(-1)^n}{2n+1}. \end{aligned}$$

Puisque $J_0 = 0$, on en déduit que

$$J_n = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Solution 23

$$\begin{aligned} f(a) &= f'(0)a + \frac{f^{(3)}(0)}{6}a^3 + \int_0^a \frac{(a-t)^4}{24} f^{(5)}(t) dt \\ f'(a) &= f'(0) + \frac{f^{(3)}(0)}{2}a^2 + \int_0^a \frac{(a-t)^3}{6} f^{(5)}(t) dt \\ 3f(a) - af'(a) &= 2f'(0)a + \int_0^a \frac{3(a-t)^4 - 4a(a-t)^3}{24} f^{(5)}(t) dt \\ 3f(a) - af'(a) &= 2f'(0)a + f^{(5)}(c) \int_0^a \frac{-(a+3t)(a-t)^3}{24} dt \end{aligned}$$

car l'intégrande est de signe constant sur $[0, a]$, $a > 0$. Ensuite (et par exemple) on détermine la valeur $J(a)$ de l'intégrale en prenant $f(a) = a^5$. Donc $3a^5 - 5a^5 = 120J(a)$, $J(a) = -\frac{a^5}{60}$ et finalement

$$f(a) = \frac{a}{3}(f'(a) + 2f'(0)) - \frac{a^5}{180}f^{(5)}(c)$$

Solution 24

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left(\int_0^1 f(t) \times (-t)f'(t) dt \right)^2 \leq \int_0^1 f(t)^2 dt \times \int_0^1 t^2 f'^2(t) dt.$$

On pose $\begin{cases} u(t) := f(t)f'(t) & u'(x) = f(t)^2 \\ v'(t) := -t & v(x) = -1 \end{cases}$ Les fonctions u et v sont dérivables, de dérivée continue sur $[0, 1]$. D'après le théorème d'intégration par parties,

$$\int_0^1 f(t)tf'(t) dt = [-tf(t)^2]_0^1 + \int_0^1 f(t)^2 dt = \int_0^1 f(t)^2 dt,$$

le terme tout intégré étant nul puisque $f(1) = 0$. On a donc

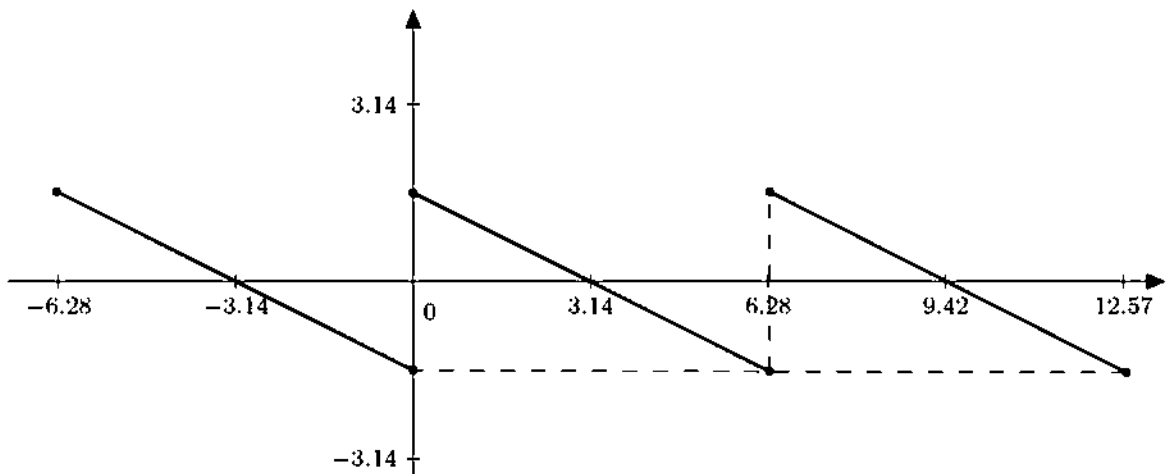
$$\left(\int_0^1 f(t)^2 dt \right)^2 \leq \int_0^1 f(t)^2 dt \times \int_0^1 t^2 f'^2(t) dt. \quad (3.1)$$

Maintenant, si $\int_0^1 f^2(t) dt = 0$, alors l'inégalité à établir est évidente puisque le membre de droite est clairement positif. Sinon on l'obtient en divisant les deux membres de (3.1) par le nombre strictement positif $\int_0^1 f^2(t) dt$.

Solution 25

1. On remarque que $I(2k\pi) = 0$ pour k entier. La fonction I est impaire et 2π -périodique. On peut l'étudier sur l'intervalle $]0, \pi[$. On a alors $\sin x \neq 0$ et

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^1 \frac{\sin x dt}{(t - \cos x)^2 + \sin^2 x} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sin x} \frac{dt}{\left(\frac{t - \cos x}{\sin x}\right)^2 + 1} \\ &= \left[\arctan \left(\frac{t - \cos x}{\sin x} \right) \right]_0^1 \\ &= \arctan \left(\frac{1 - \cos x}{\sin x} \right) - \arctan \left(\frac{-\cos x}{\sin x} \right) \\ &= \arctan \left(\tan \left(\frac{x}{2} \right) \right) + \arctan \left(\tan \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right) \\ &= \frac{\pi - x}{2}. \end{aligned}$$



2. Soient x et t deux réels. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant

$$S_n := (\sin x + t \sin(2x) + \dots + t^{n-1} \sin(nx))(t^2 - 2t \cos x + 1) + t^n [\sin((n+1)x) - t \sin(nx)],$$

on a

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + t^n \sin((n+1)x)(t^2 - 2t \cos x + 1) + t^{n+1} [\sin((n+2)x) - t \sin((n+1)x)] \\ &\quad - t^n [\sin((n+1)x) - t \sin(nx)] \\ &= S_n + t^{n+2} (\sin((n+1)x) - \sin((n+1)x)) + t^{n+1} (-2 \sin((n+1)x) \cos x + \sin((n+2)x) \\ &\quad - \sin(nx)) + t^n (\sin((n+1)x) - \sin((n+1)x)) \\ &= S_n, \end{aligned}$$

puisque $\sin((n+2)x) - \sin(nx) = 2 \sin((n+1)x) \cos x$. (Voir le théorème 13 page 224 du cours de première)

La suite S_n est donc constante et

$$\begin{aligned} S_1 &= (\sin x)(t^2 - 2t \cos x + 1) + t [\sin(2x) - t \sin x] \\ &= t^2 (\sin x - \sin x) + t (-2 \sin x \cos x + \sin(2x) + \sin x) = \sin x. \end{aligned}$$

3. D'après l'égalité précédente, on a pour $x \neq 2k\pi$,

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^1 (\sin x + t \sin(2x) + \dots + t^{n-1} \sin(nx)) dt + \int_0^1 \frac{t^n [\sin((n+1)x) - t \sin(nx)]}{t^2 - 2t \cos x + 1} dt \\ &= S_n(x) + R_n(x) \end{aligned}$$

$$\text{avec } R_n(x) := \int_0^1 \frac{t^n [\sin((n+1)x) - t \sin(nx)]}{t^2 - 2t \cos x + 1} dt.$$

Or $t^2 - 2t \cos x + 1 = (t - \cos x)^2 + \sin^2 x \geq \sin^2 x$,

et $|t^n [\sin((n+1)x) - t \sin(nx)]| \leq t^n [|\sin((n+1)x)| + t |\sin(nx)|] \leq 2t^n$.

Donc $|R_n(x)| \leq \int_0^1 \frac{2t^n}{\sin^2 x} dt = \frac{2}{(n+1) \sin^2 x}$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ pour $x \neq 2k\pi$. Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = I(x).$$

Solution 26

Soit $F(t) = t \int_t^2 f(x) dx$. La fonction F est continue sur $[1, 2]$, dérivable sur $]1, 2[$ et vérifie $F(1) = F(2) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]1, 2[$. $F'(c) = 0$. Or $F'(c) = \int_c^2 f(x) dx - cf(c)$ ce qui donne le résultat.

Solution 27

On reconnaît des sommes de Riemann. De ce fait $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \int_0^1 x^2 \sin(\pi x) dx$.

On intègre deux fois par parties : On pose $\begin{cases} u(x) &:= x^2 & u'(x) &= 2x \\ v'(x) &:= \sin(\pi x) & v(x) &= -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \end{cases}$

On a alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \sin(\pi x) dx &= \left[-\frac{x^2}{\pi} \cos(\pi x) \right]_0^1 + \frac{2}{\pi} \int_0^1 x \cos(\pi x) dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \cos \pi - 0 + \frac{2}{\pi} \int_0^1 x \cos(\pi x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \cos \pi + \frac{2}{\pi} \int_0^1 x \cos(\pi x) dx. \end{aligned}$$

On pose maintenant $\begin{cases} u(x) := x & u'(x) = 1 \\ v'(x) := \cos(\pi x) & v(x) = \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \end{cases}$

On a alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cos(\pi x) dx &= \left[\frac{x}{\pi} \sin(\pi x) \right]_0^1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin(\pi x) dx \\ &= 0 - \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\pi^2} (\cos \pi - \cos 0) = -\frac{2}{\pi^2}. \end{aligned}$$

Finalement on a $\int_0^1 x^2 \sin(\pi x) dx = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}$.

3.13 Problèmes

Problème 1 (Bac Tunisie 1980)

1. Soit f une primitive, sur \mathbb{R} , de l'application φ qui, à tout réel t , associe

$$\varphi(t) := \frac{1}{2t^2 - 2t + 1}.$$

(a) Soit g l'application de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans \mathbb{R} définie par $g(u) := f\left(\frac{1+\tan u}{2}\right)$. Prouver que g est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, puis que g est une fonction affine.

(b) Montrer que $\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{1}{2t^2 - 2t + 1} dt$.

2. On considère l'application I de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans \mathbb{R} définie par

$$I(p, q) := \int_0^1 t^p (1-t)^q dt.$$

(a) En majorant convenablement $t(1-t)$ pour $t \in [0, 1]$, trouver la limite de la suite u telle que $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n := I(n, n)$.

(b) Montrer que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad I(p+1, q+1) = \frac{q+1}{p+2} I(p+2, q)$$

(on pourra utiliser une intégration par parties),

puis que $(\forall n \in \mathbb{N}), \quad I(n, n) = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

3. (a) Après avoir remarqué que $2t^2 - 2t + 1 = 1 - 2t(1-t)$, simplifier $\frac{1}{2t^2 - 2t + 1} - \sum_{k=0}^n 2^k t^k (1-t)^k$.
- (b) On considère la suite v telle que

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad v_n := \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Quelle est la limite de la suite w telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n := \sum_{k=0}^n v_k ?$$

4. (Question rajoutée)

Écrire un programme `Python` qui calcule $\frac{\pi}{2}$ avec quinze décimales.

Correction 1 (Bac Tunisie 1980)

1. (a) La fonction g est dérivable comme composée de fonctions dérivables. Soit $h(u) := \frac{1+\tan u}{2}$. On a $\forall u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $h'(u) = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 u)$. Comme par ailleurs, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \varphi(t)$, on obtient, $\forall u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$\begin{aligned} g'(u) &= f'(h(u)) \times h'(u) \\ &= \varphi\left(\frac{1+\tan u}{2}\right) \times \frac{1}{2}(1 + \tan^2 u) \\ &= \frac{\frac{1}{2}(1 + \tan^2 u)}{2\left(\frac{1+\tan u}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1+\tan u}{2}\right) + 1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 + \tan^2 u}{\frac{1+2\tan u + \tan^2 u}{2} - 1 - \tan u + 1} \\ &= \frac{1 + \tan^2 u}{1 + 2\tan u + \tan^2 u - 2\tan u} = 1. \end{aligned}$$

La fonction g a une dérivée constante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, c'est donc une fonction affine.

- (b) D'après le théorème fondamental de l'analyse (théorème 9) on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{2t^2 - 2t + 1} dt &= \int_0^1 f'(t) dt \\ &= f(1) - f(0) \\ &= f\left(\frac{1 + \tan(\frac{\pi}{4})}{2}\right) - f\left(\frac{1 + \tan(-\frac{\pi}{4})}{2}\right) \\ &= h\left(\frac{\pi}{4}\right) - h\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} h'(u) du \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} du = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait vérifier.

2. (a) On a clairement pour tout réel t appartenant à $[0, 1]$, $0 \leq t(1-t) \leq \frac{1}{4}$. De ce fait, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \int_0^1 t^n(1-t)^n dt \leq \int_0^1 \frac{1}{4^n} dt$, soit $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4^n}$.

(b) Soit $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. En posant :

$$\begin{cases} u'(t) = t^{p+1} & u(t) = \frac{1}{p+2} t^{p+2} \\ v(t) = (1-t)^{q+1} & v'(t) = -(q+1)(1-t)^q \end{cases} \quad \text{les fonctions } u' \text{ et } v' \text{ sont continues.}$$

donc

$$\begin{aligned} I(p+1, q+1) &= \int_0^1 u'(t)v(t) dt \\ &= \left[\frac{1}{p+2} t^{p+2}(1-t)^{q+1} \right]_0^1 + \frac{q+1}{p+2} \int_0^1 t^{p+2}(1-t)^q dt \\ &= 0 + \frac{q+1}{p+2} I(p+2, q), \end{aligned}$$

le terme tout intégré est nul car les exposants $q+1$ et $p+2$ sont strictement positifs. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} I(n, n) &= \frac{n}{n+1} I(n+1, n-1) \\ &= \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n+2} I(n+2, n-2) \\ &= \vdots \\ &= \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n+2} \cdots \frac{1}{2n} \cdots I(2n, 0) \\ &= \frac{n!}{(n+1)(n+2) \cdots (2n)} I(2n, 0). \end{aligned}$$

$$\text{Or } (n+1)(n+2) \cdots (2n) = \frac{(2n)!}{n!} \text{ et } I(2n, 0) = \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{1}{2n+1}.$$

$$\text{Donc } \boxed{I(n, n) = \frac{(n!)^2}{(2n)!(2n+1)} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}}.$$

3. (a) On commence par remarquer que pour tout réel t , $t(1-t) \leq \frac{1}{4}$ donc $2t(1-t) \leq \frac{1}{2}$. En particulier $2t(1-t) \neq 1$ et la somme des $n+1$ termes d'une suite géométrique de raison $2t(1-t)$ et de premier terme 1 est

$$\sum_{k=0}^n 2^k t^k (1-t)^k = \frac{2^{n+1} t^{n+1} (1-t)^{n+1} - 1}{2t(1-t) - 1} = \frac{2^{n+1} t^{n+1} (1-t)^{n+1}}{-(2t^2 - 2t + 1)} + \frac{1}{2t^2 - 2t + 1}.$$

Donc

$$\frac{1}{2t^2 - 2t + 1} - \sum_{k=0}^n 2^k t^k (1-t)^k = \frac{2^{n+1} t^{n+1} (1-t)^{n+1}}{2t^2 - 2t + 1}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente,

$$\int_0^1 \left(f(t) - \sum_{k=0}^n 2^k t^k (1-t)^k \right) dt = \int_0^1 \frac{2^{n+1} t^{n+1} (1-t)^{n+1}}{2t^2 - 2t + 1} dt.$$

Or, toujours grâce à la majoration $t(1-t) \leq \frac{1}{4}$,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{2^{n+1} t^{n+1} (1-t)^{n+1}}{2t^2 - 2t + 1} dt \leq \frac{2^{n+1}}{4^{n+1}} \times 1,$$

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{2^{n+1} t^{n+1} (1-t)^{n+1}}{2t^2 - 2t + 1} dt = 0$ d'après le théorème d'encadrement.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(f(t) - \sum_{k=0}^n 2^k t^k (1-t)^k \right) dt &= \int_0^1 f(t) dt - \sum_{k=0}^n \int_0^1 2^k t^k (1-t)^k dt \\ &= \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^n I(k, k) \\ &= \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^n \frac{2^k (k!)^2}{(2k+1)!} \\ &= \frac{\pi}{2} - w_n \end{aligned}$$

La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers $\frac{\pi}{2}$.

4. D'après la question précédente, en prenant w_n comme valeur approchée de $\frac{\pi}{2}$, on commet une erreur inférieure à $\frac{1}{2^n}$.

Dans le programme ci-contre, on accumule les u_k dans une variable w jusqu'à ce que $\frac{1}{2^n} \leq \varepsilon = 10^{-15}$.

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{n}{2n+1} u_{n-1}.$$

On affiche en fin de programme le nombre de passages dans la boucle et une valeur approchée de $\frac{\pi}{2}$ avec quinze décimales exactes.

```
epsilon = 1e-15
w=1 ; n=0 ; u=1 ; puiss2=1
while puiss2>epsilon:
    n=n+1
    u=u*n/(2*n+1)
    w=w+u
    puiss2=.5*puiss2
print(n,w)
```

Problème 2 (Irrationalité de π)

On se propose ici de démontrer que le nombre π est un nombre irrationnel. Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe a et b , entiers naturels non nuls, tels que $\pi = \frac{a}{b}$ et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction.

Étant donné un entier naturel n et un réel x , on pose :

$$P_n(x) = \frac{x^n (a - bx)^n}{n!}.$$

Étant donné un entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin x dx.$$

1. (a) Pour un entier naturel n non nul, exprimer la dérivée de P_n en fonction de P_{n-1} .

- (b) Calculer $\max_{x \in [0, \pi]} |P_n(x)|$ en fonction de a, b et n .
- (c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n > 0$.
- (d) Après avoir justifié que la suite de terme général $\frac{\pi}{n!} \left(\frac{a^2}{4b}\right)$ tend vers 0, démontrer la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.
2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n , I_n est un entier relatif. On pourra procéder par intégrations par parties successives.
- (b) Conclure quant à l'hypothèse $\pi = \frac{a}{b}$.

Correction 2 (Irrationalité de π)

1. (a) Soit $n \geq 1$. On a pour tout x réel.

$$\begin{aligned} P'_n(x) &= \frac{x^{n-1}(a-bx)^n - bx^n(a-bx)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= P_{n-1}(x)(a-bx-bx) = (a-2bx)P_{n-1}(x). \end{aligned}$$

- (b) Sur l'intervalle $[0, \pi]$, toutes les fonctions P_n ne prennent que des valeurs positives. En particulier $P'_n(x)$ est du signe de $a-2bx$ sur l'intervalle $[0, \pi]$, c'est-à-dire positif sur $[0, \frac{a}{2b}]$ et négatif sur $[\frac{a}{2b}, \frac{a}{b}]$. Puisque $\frac{a}{2b} = \frac{\pi}{2}$, on a le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{a}{2b}$	$\frac{a}{b}$	
$P'_n(x)$		+	0	-
$P_n(x)$	0	$P_n(\frac{\pi}{2})$		0

On en déduit que $\max_{x \in [0, \pi]} |P_n(x)| = P_n(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{n!} \left(\frac{a^2}{4b}\right)^n$.

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Sur l'intervalle $[0, \pi]$ on a $\sin x \geq 0$ et $P_n(x) \geq 0$, donc la fonction $x \mapsto P_n(x) \sin x$
- est continue sur $[0, \pi]$
 - est positive sur $[0, \pi]$
 - prend au moins une valeur strictement positive sur $[0, \pi]$
- } donc d'après le théorème 17

page 122, on a $\int_0^\pi P_n(x) \sin x \, dx > 0$. Ce qu'il fallait démontrer.

- (d) On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n!} \left(\frac{a^2}{4b}\right)$ en spécifiant $x := \frac{a^2}{4b}$ dans l'exercice 12 page 74 du cours de première.

Par ailleurs on a pour $n \in \mathbb{N}$, $0 < I_n \leq \int_0^\pi \sup_{x \in [0, \pi]} |P_n(x)| \, dx$ soit $0 < I_n \leq \pi \frac{1}{n!} \left(\frac{a^2}{4b}\right)^n$.

D'après le théorème d'encadrement, on a donc la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de plus $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

2. (a) On prend $n = 0$. On a

$$I_0 = \int_0^\pi \sin x \, dx = [-\cos x]_0^\pi = 2 \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^* \text{ et soit } \begin{cases} u(x) &= x^n(a - bx)^n & u'(x) &= n(a - 2bx)x^{n-1}(a - bx)^{n-1} \\ v'(x) &= \sin x & v(x) &= -\cos x \end{cases}.$$

Les fonctions u' et v' sont continues² sur $[0, \pi]$. En intégrant par parties une première fois, on a

$$I_n = \left[-\frac{x^n}{n!}(a - bx)^n \cos x \right]_0^\pi + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\pi x^{n-1}(a - bx)^{n-1}(a - bx - bx) \cos x \, dx.$$

Le terme tout intégré $\left[-\frac{x^n}{n!}(a - bx)^n \cos x \right]_0^\pi$ est nul car en $x = \pi$, on a $a - b\pi = 0$ et on obtient :

$$I_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\pi x^{n-1}(a - bx)^{n-1}(a - 2bx) \cos x \, dx.$$

On intègre une deuxième fois par parties :

$$\begin{cases} u(x) &= (a - 2bx)x^{n-1}(a - bx)^{n-1} & u'(x) &= (n-1)(a - 2bx)^2x^{n-2}(a - bx)^{n-2} \\ & & & - 2bx \cdot x^{n-1}(a - bx)^{n-1} \\ v'(x) &= \cos x & v(x) &= \sin x \end{cases}$$

Si $n = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi (a - 2bx) \cos x \, dx \\ &= [(a - 2bx) \sin x]_0^\pi + 2b \int_0^\pi \sin x \, dx \\ &= 0 + 4b \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Sinon, on écrit $(a - 2bx)^2 = a^2 - 4bx(a - bx)$ et ainsi

$$\begin{aligned} I_n &= [x^{n-1}(a - bx)^{n-1}(a - 2bx) \sin x]_0^\pi + 2bI_{n-1} \\ &\quad - \frac{1}{(n-2)!} \int_0^\pi x^{n-2}(a - bx)^{n-2}(a^2 - 4bx(a - bx)) \sin x \, dx \\ &= 0 + 2bI_{n-1} - \frac{a^2}{(n-2)!} \int_0^\pi x^{n-2}(a - bx)^{n-2} \sin x \, dx \\ &\quad + \frac{4b}{(n-2)!} \int_0^\pi x^{n-1}(a - bx)^{n-1} \sin x \, dx \\ &= 2bI_{n-1} - a^2I_{n-2} + 4b(n-1)I_{n-1} \\ &= (4n-2)bI_{n-1} - a^2I_{n-2}. \end{aligned}$$

Par une récurrence immédiate, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, I_n \in \mathbb{Z}}$$

(b) D'après la question précédente, la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers. D'après la question 1d cette suite converge vers zéro. Donc pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ il existe un entier N tel que pour tous $n \geq N$ on ait $|I_n| < \frac{1}{2}$ ce qui entraîne que l'entier I_N est nul ce qui contredit $I_N > 0$ de la question 1c. L'hypothèse $\pi = \frac{a}{b}$ est absurde.

2. Cette précaution est inutile lorsque le lecteur travaille dans le cadre de l'intégrale de Henstock-Kurzweil.

3.14 Travaux dirigés

Travaux dirigés 1 (Distance moyenne et polygone régulier)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

On considère un polygone régulier à n côtés ($n \geq 3$) sur le cercle trigonométrique comportant le point $M_0 (1, 0)$. On considère un point $A (a, 0)$ de l'axe des abscisses.

1. Écrire une fonction `Python` qui calcule la moyenne $f_0(n, a)$ des distances de A aux n sommets du polygone régulier.
2. On prend $a := 5$.

En utilisant la fonction `quad` de la bibliothèque `scipy.integrate` calculer une valeur approchée de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{(5 - \cos \vartheta)^2 + \sin^2 \vartheta} d\vartheta.$$

Correction 1

1. Les n sommets du polygone régulier sont les $M_k (\cos(2k\pi/n), \sin(2k\pi/n))$ pour k variant de 0 à $n - 1$. On en déduit que $f_0(n, a) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - a\right)^2 + \sin^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$.

```
import numpy as np
```

```
def f(n,a):
    S=0
    for k in range(n):
        S = S + np.sqrt((np.cos(k*2*np.pi/n)-a)**2+np.sin(k*2*np.pi/n)**2)
    return S/n
```

2.

```
import numpy as np
```

```
from scipy.integrate import quad
```

```
def k(x):
    return(np.sqrt((5.-np.cos(x))*(5.-np.cos(x))+np.sin(x)*np.sin(x)))
```

```
p=quad(k,0,2*np.pi)
```

```
print(p[0]/(2*np.pi))
```

Chapitre 4

Fonctions convexes

Sommaire

4.1	Définition	158
4.2	Inégalités de convexité	159
4.3	Fonctions convexes dérivables	163
4.4	Exemple	165
4.5	Quiz	165
4.6	Exercices	166
4.7	Solutions	168
4.8	Problèmes	172
4.9	Corrections	174

4.1 Définition

Définition 1 (Fonction convexe).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit que f est **convexe** lorsque

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Remarque 1.

Cela signifie géométriquement que le graphe de f est situé en dessous de toutes les cordes joignant deux points de ce graphe.

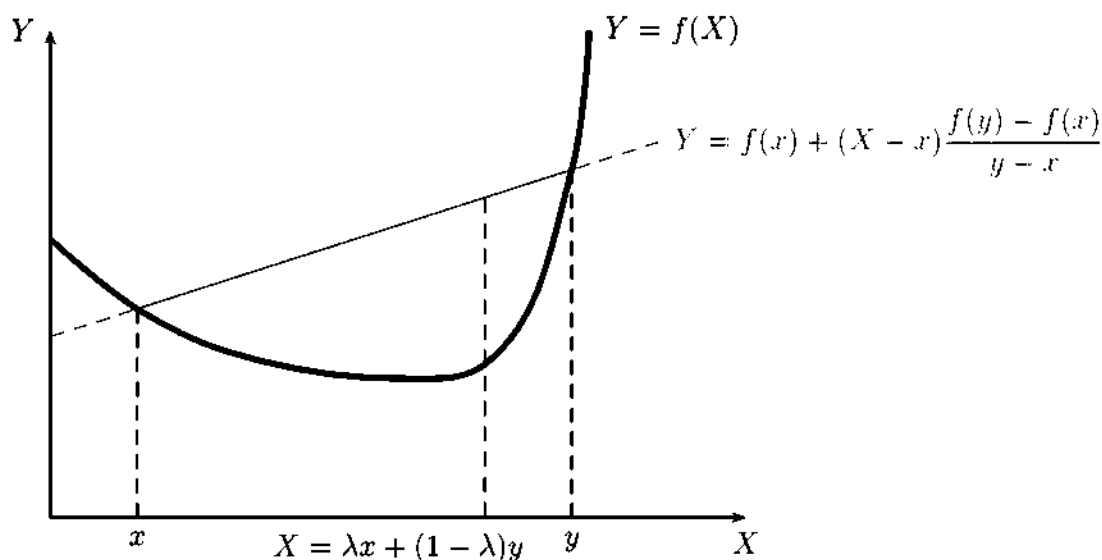


FIGURE 4.1 Fonctions convexes

Remarque 2.

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I est **concave** lorsque

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

La fonction f est concave si et seulement si la fonction $-f$ est convexe. Dans la suite, on n'étudiera que les propriétés des fonctions convexes.

Exercice 1.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Soit \tilde{I} l'intervalle défini par $\forall x \in \mathbb{R}, (x \in \tilde{I}) \iff (-x \in I)$. Démontrer que la fonction $\tilde{f} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \tilde{I}, \tilde{f}(x) = f(-x)$, est une fonction convexe sur \tilde{I} .

Solution 1

Soit $(x, y) \in \tilde{I}^2$, soit $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= f(\lambda(-x) + (1 - \lambda)(-y)) \\ &\leq \lambda f(-x) + (1 - \lambda)f(-y) \\ &\leq \lambda \tilde{f}(x) + (1 - \lambda)\tilde{f}(y). \end{aligned}$$

C'est bien dire que la fonction \tilde{f} est convexe sur \tilde{I} .

Remarque 3.

Les fonctions qui sont à la fois convexes et concaves sont les fonctions affines.

Définition 2 (Fonction strictement convexe).

On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **strictement convexe** lorsque $\forall (x, y) \in I^2, x \neq y$,

$$\forall \lambda \in]0, 1[, \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

4.2 Inégalités de convexité

Théorème 1 (Inégalité de convexité généralisée)

Soit une fonction f convexe sur un intervalle I . Alors

$$\forall n \geq 2, \forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n \text{ tels que } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

Démonstration 1

Par récurrence sur n . Pour $n = 2$, c'est la définition d'une fonction convexe. Montrons $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$.

Soient $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in [0, 1]$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. On peut supposer que tous les λ_i sont

strictement positifs, sinon on se ramène à la propriété $\mathcal{P}(n)$. Posons $y = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$ et pour $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mu_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} : \sum_{i=1}^n \mu_i = 1. \text{ Puisque } f \text{ est convexe,}$$

$$f(\lambda_{n+1}x_{n+1} + (1 - \lambda_{n+1})y) \leq \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) + (1 - \lambda_{n+1})f(y)$$

et d'après $\mathcal{P}(n)$,

$$f(y) = f(\mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n) \leq \mu_1 f(x_1) + \dots + \mu_n f(x_n)$$

En utilisant $1 - \lambda_{n+1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, on obtient

$$(1 - \lambda_{n+1})f(y) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n),$$

d'où l'inégalité souhaitée. □

Le résultat suivant est à la base de toutes les démonstrations et est souvent utilisé dans les exercices théoriques sur les fonctions convexes. Il est facile à retenir, il suffit de faire le schéma suivant :

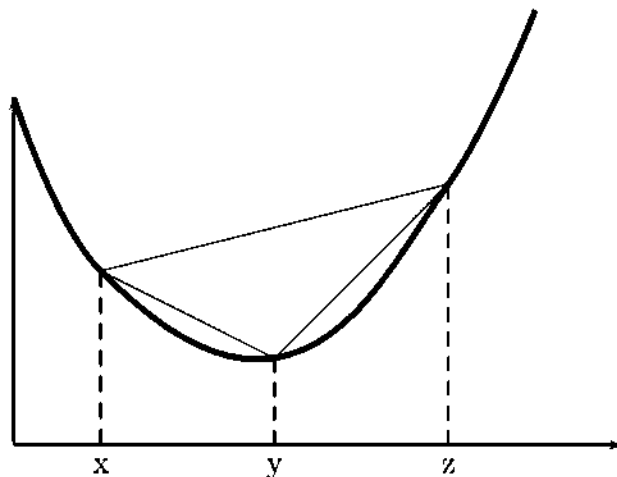


FIGURE 4.2 Lemme des trois pentes

Lemme 2 (Lemme des trois pentes)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe :

$$\forall (x, y, z) \in I^3, x < y < z, \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Démonstration 2

Puisque $x < y < z$, y peut s'écrire comme barycentre de x et z : il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $y = \lambda x + (1 - \lambda)z$. Après calculs, on trouve

$$\lambda = \frac{z - y}{z - x}.$$

Puisque f est convexe,

$$f(y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(z)$$

On en tire que

$$f(y) - f(x) \leq (1 - \lambda)(f(z) - f(x))$$

et comme $1 - \lambda = \frac{y-x}{z-x}$, que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

De même,

$$f(y) - f(z) \leq \lambda(f(x) - f(z))$$

d'où

$$\lambda(f(z) - f(x)) \leq f(z) - f(y)$$

et donc

$$\frac{z-y}{z-x}(f(z) - f(x)) \leq f(z) - f(y)$$

d'où l'on tire

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Théorème 3 (Continuité des fonctions convexes)

Soit une fonction f convexe sur un intervalle ouvert I .

- La fonction f est dérivable à gauche et à droite en tout point de I et $\forall x \in I$, $f'_g(x) \leq f'_d(x)$.
- La fonction f est continue sur I .

Démonstration 3

- Soit $a \in I$. On considère un $z > a$ qui appartient à I . On sait qu'il en existe car I est un intervalle ouvert. D'après le lemme des trois pentes appliqué à $x < a < z$, on a en particulier

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(z) - f(a)}{z - a},$$

et ce pour tout $x \in I \cap]-\infty, a[$. On en déduit que la fonction

$$\tau_a : x \in I \cap]-\infty, a[\mapsto \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$$

est majorée sur $I \cap]-\infty, a[$. Toujours d'après le lemme des trois pentes appliqué cette fois à $x < x' < a$, on a en particulier

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(a) - f(x')}{a - x'},$$

ce qui signifie que la fonction τ_a est croissante sur l'intervalle $I \cap]-\infty, a[$. Elle admet donc en a une limite à gauche qui n'est autre que $f'_g(a)$.

De même par exemple en appliquant le résultat précédent à la fonction \tilde{f} la fonction

$$\tau_a : x \in I \cap]a, +\infty[\mapsto \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$$

admet donc en a une limite à gauche qui n'est autre que $f'_d(a)$.

Toujours d'après le lemme des trois pentes appliqué cette fois à $x < a < z$, on a pour tout $x \in I \cap]-\infty, a[$ et pour tout $z \in I \cap a, +\infty[$

$$\tau_a(x) < \tau_a(z).$$

En faisant tendre x vers a , par conservation des inégalités larges par passage à la limite, on a

$$f'_g(a) \leq \tau_a(z).$$

De même, en faisant tendre x vers a , on obtient bien

$$f'_g(a) \leq f'_d(a).$$

- On sait que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(a) - f(x)}{a - x} = f'_g(a),$$

ce qui peut s'écrire

$$f(x) = f(a) + f'_g(a)(x - a) + \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \varepsilon(x) = 0.$$

En faisant tendre x vers a à gauche, on obtient

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a),$$

et de même à droite.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a).$$

D'après le théorème 5 page 106 du cours de première (deuxième cas), la fonction f est continue en a . □

Exemples 1

1. La fonction valeur absolue est convexe sur l'intervalle ouvert \mathbb{R} . Elle y est continue, dérivable à droite et à gauche en tout point.
2. La fonction f définie sur $]0, 1]$ par $f(x) = 0$ si $x \neq 1$ et $f(1) = 1$ est convexe sur l'intervalle $]0, 1]$ mais n'est pas continue en 1. Il faut dire que l'intervalle $]0, 1]$ n'est pas un intervalle ouvert.

Le théorème suivant fournit un moyen très pratique de montrer qu'une fonction est convexe : il suffit de montrer que sa dérivée seconde est positive sur I .

4.3 Fonctions convexes dérivables

Théorème 4 (Caractérisation des fonctions convexes dérivables)

1. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable,

$$(f \text{ convexe}) \iff (f' \text{ croissante})$$

2. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois dérivable,

$$(f \text{ convexe}) \iff (f'' \geq 0 \text{ sur } I)$$

où f'' désigne la dérivée seconde de f , c'est-à-dire la dérivée de la dérivée de f .

Démonstration 4

1. Si f est convexe et dérivable, soient $x < y$ deux points de I . Montrons que $f'(x) \leq f'(y)$. Soit $z \in]x, y[$, d'après le lemme des trois pentes,

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

En passant à la limite dans l'inégalité lorsque z tend vers x^+ , on trouve que $f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$.

On a également

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

et en passant à la limite dans l'inégalité lorsque z tend vers y^- , $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$. Finalement,

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$$

2. Supposons réciproquement f dérivable et f' croissante. Soient $x < y$ deux points de I et $\lambda \in [0, 1]$. Posons $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$. D'après le théorème des accroissements finis (théorème 11 page 141 du cours de première) entre x et z , il existe $c_1 \in]x, z[$ tel que

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(c_1)$$

De même, le théorème des accroissements finis entre z et y garantit l'existence de $c_2 \in]z, y[$ tel que

$$\frac{f(y) - f(z)}{y - z} = f'(c_2)$$

Puisque f' est croissante, $f'(c_1) \leq f'(c_2)$ d'où l'on tire

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

En remplaçant z par sa valeur, on aboutit alors à l'inégalité de convexité

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

3. Si f est deux fois dérivable, on sait que la fonction f' est croissante si et seulement si la fonction f'' est positive. \square

Théorème 5 (Le graphe d'une fonction convexe est situé au dessus de ses tangentes)

Soit une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et dérivable.

$$\forall x_0 \in I, \forall x \in I, \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Démonstration 5

1. Si $x_0 < x$, prenons $z \in]x_0, x[$ et utilisons le lemme des trois pentes :

$$\frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

En passant à la limite dans l'inégalité lorsque z tend vers x_0 , on en tire que

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

d'où $f(x) \geq (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$.

2. Si $x < x_0$, on prend $z \in]x, x_0[$ et avec le lemme des trois pentes,

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq \frac{f(x_0) - f(z)}{x_0 - z}$$

En passant à la limite dans l'inégalité lorsque z tend vers x_0 , on trouve

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq f'(x_0)$$

et l'on retrouve que $f(x) \geq f(x_0) - (x_0 - x)f'(x_0)$. \square

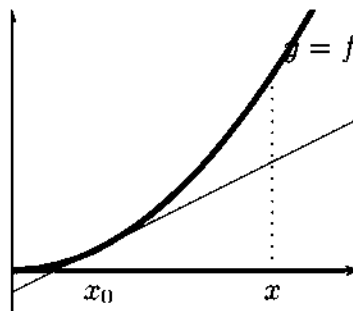


FIGURE 4.3 Le graphe d'une fonction convexe est situé au-dessus de ses tangentes

Méthode 1 (Inégalités de convexité).

On obtient des inégalités de convexité de la façon suivante :

1. On se donne une fonction f .
2. On vérifie qu'elle est convexe sur I en vérifiant que $f'' \geq 0$.
3. On écrit l'inégalité de convexité (éventuellement généralisée).

4.4 Exemple

Théorème 6 (Exemples d'inégalités de convexité)

1. Si $\alpha \geq 1$ et $x, y > 0$, $(x + y)^\alpha \leq 2^{\alpha-1}(x^\alpha + y^\alpha)$.
2. Pour n réels x_1, \dots, x_n , $(x_1 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \dots + x_n^2)$.

Démonstration 6

1. Considérons la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$. Elle est deux fois dérivable sur $I =]0, +\infty[$ et $\forall x > 0$, $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} \geq 0$. C'est donc une fonction convexe. En prenant $\lambda = 1/2$, on en déduit que $\forall x, y > 0$, $\left(\frac{x+y}{2}\right)^\alpha \leq \frac{x^\alpha + y^\alpha}{2}$ d'où la première inégalité.
2. La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur \mathbb{R} et il suffit d'utiliser l'inégalité de convexité généralisée avec $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1/n$:

$$\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n},$$

d'où la deuxième inégalité. □

4.5 Quiz

4.5.1 Énoncé

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse :

1. Soit f une fonction convexe sur un intervalle I et $a \in \mathbb{R}$.

L'ensemble I_a des solutions de l'inéquation

$$[f(x) \leq a; \text{ inconnue } x \in I]$$

est un intervalle. (voir la définition d'un intervalle dans le cours de seconde à la définition 4 page 65).

2. Soient I un intervalle et f une fonction définie sur I .

Si $\forall a \in \mathbb{R}$, l'ensemble I_a des solutions de l'inéquation

$$[f(x) \leq a; \text{ inconnue } x \in I]$$

est un intervalle, alors f est convexe.

3. La composée de deux fonctions convexes est convexe.

4.5.2 Solution

1. VRAI. Soient x et y deux réels de I_a . Soit z compris entre x et y : z est un barycentre de x et y à coefficients positifs : $\exists t \in [0, 1], z = tx + (1-t)y$ et $t \in I$. Puisque f est une fonction convexe,

$$f(z) = f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \leq ta + (1-t)a,$$

puisque $t \geq 0$ et $1-t \geq 0$.

Donc $z \in I_a$.

C'est bien dire que I_a est un intervalle d'après la définition 4 page 65).

2. FAUX. On prend $I := [0, 1]$ et $f : x \in I \mapsto -x^2$. On a :

- Si $a \geq 0$ alors $I_a = [0, 1]$.
- Si $a \in [-1, 0[$ alors $I_a = [\sqrt{-a}, 1]$.
- Si $a < -1$ alors $I_a = \emptyset$.

Dans tous les cas, I_a est un intervalle. Pour autant f est deux fois dérivable et $\forall x \in I, f''(x) = -2$ donc f n'est pas convexe : c'est un contreexemple.

3. FAUX. On considère $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ et $f : u \in \mathbb{R} \mapsto -u$. Les fonctions f et g sont convexes sur \mathbb{R} . Pour autant $f \circ g : x \in \mathbb{R} \mapsto -x^2$ n'est pas convexe.

En revanche, si on impose de plus que f est croissante, alors $g \circ f$ est convexe. Soient

- $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe sur un intervalle I .
- $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et croissante sur un intervalle J .
- $\forall x \in I, g(x) \in J$.

Soient x et $y \in I$. Soit $t \in [0, 1]$. D'après la convexité de g , on a

$$g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y).$$

Comme $g(x)$ et $g(y) \in J$ et J est un intervalle, donc le barycentre à coefficients positifs $tg(x) + (1-t)g(y) \in J$.

Puisque f est croissante sur J , on a

$$f(g(tx + (1-t)y)) \leq f(tg(x) + (1-t)g(y)).$$

Maintenant, la fonction f est convexe sur J , on a :

$$\forall (u, v) \in J^2, \forall t \in [0, 1], f(tu + (1-t)v) \leq tf(u) + (1-t)f(v).$$

En spécifiant $u := g(x)$ et $v := g(y)$, on a bien

$$f(g(tx + (1-t)y)) \leq f(tg(x) + (1-t)g(y)) \leq tf(g(x)) + (1-t)f(g(y)).$$

C'est bien dire que $f \circ g$ est convexe sur I .

4.6 Exercices

Exercice 2.

Soit $f : I \rightarrow I$, continue et I un intervalle de \mathbb{R}_+^* . Montrer que $x \in I \mapsto xf(x)$ est convexe si et seulement si $x \in I \mapsto f(\frac{1}{x})$ est convexe.

Exercice 3.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R} , bornée et non constante. Montrer qu'il existe deux réels x et y tels que $f''(x)f''(y) < 0$.

Exercice 4.

Soit $h \in \mathbb{R}^*$.

1. Démontrer que la fonction $f_h : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{x^2 + h^2}$ est convexe sur \mathbb{R} .
2. Démontrer que pour tout réel $a \in \mathbb{R}$, la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto f_h(a - x)$ est strictement convexe sur \mathbb{R} .

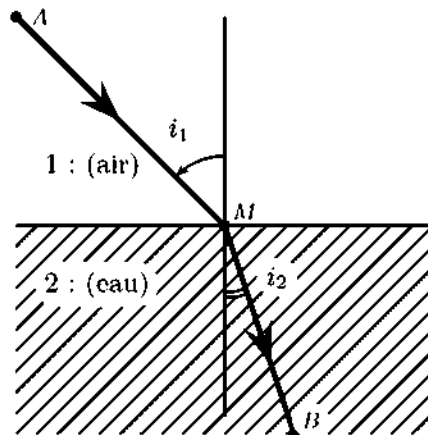
Exercice 5 (Loi de Snell-Descartes).

On rappelle que, dans un milieu homogène et isotrope, la lumière se propage en ligne droite et à une vitesse constante qui dépend du milieu.

De plus la lumière entre deux points suit le trajet qui prend le moins de temps. (**Principe de Fermat**)

Un rayon lumineux se propage d'un point $A(0, h)$ à un point $B(a, -k)$ en traversant la séparation entre les deux milieux (d'équation $y = 0$) au point $M(x, 0)$.

On désigne par v_1 (resp. v_2) la vitesse de propagation de la lumière dans le premier (resp. second) milieu et $n_k = \frac{c}{v_k}$ l'indice du milieu $k \in \{1, 2\}$. Bien entendu c désigne la célérité de la vitesse dans le vide.



Démontrer la loi de Snell-Descartes sur la réfraction de la lumière :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

avec les notations de la figure.

Exercice 6.

Soient $k > 0$, $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et f une fonction deux fois dérivable sur $[a, b]$, vérifiant $f'' + pf' - kf = 0$ et telle que $f(a) = f(b) = 0$.
Montrer que f est nulle.

Exercice 7.

1. Soit f une fonction convexe de classe C^2 . Démontrer que $\int_0^{2\pi} f(x) \cos x \, dx \geq 0$.
2. Soit f une fonction convexe sur $[0, 2\pi]$. Démontrer que la fonction définie par :
 $\forall x \in [0, \pi], g(x) = f(x) - f(x + \pi)$ est une fonction décroissante sur $[0, \pi]$.
3. Soit g une fonction continue décroissante sur $[0, \pi]$. Démontrer que $\int_0^\pi g(x) \cos x \, dx \geq 0$.
4. Soit f une fonction continue convexe sur $[0, 2\pi]$. Démontrer que $\int_0^{2\pi} f(x) \cos x \, dx \geq 0$.

Exercice 8.

Soit f une fonction convexe sur \mathbb{R} , soit $h \neq 0$. Étudier la convexité de la fonction

$$F : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2h} \int_{x-2h}^{x+2h} f(t) \, dt.$$

Exercice 9 (Inégalité de Pompeiu).

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et x, y, z trois réels. Montrer que

$$\frac{2}{3} \left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right) \right) \leq \frac{1}{3} (f(x) + f(y) + f(z)) + f\left(\frac{x+y+z}{3}\right).$$

4.7 Solutions

Solution 2

Par contraposée. Soit f une fonction convexe dérivable sur \mathbb{R} , non constante. Démontrons que f n'est pas bornée.

Il existe deux réels $a < b$ tels que $f(a) \neq f(b)$.

Supposons pour fixer les idées que $f(a) < f(b)$. On a alors $f'(b) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$.

D'après le théorème 5, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq f(b) + f'(b)(x - b),$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et par conséquent f n'est pas bornée.

Si $f(a) > f(b)$. On a alors $f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0$. D'après le théorème 5, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a),$$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et par conséquent f n'est pas bornée.

De même, si f une fonction convexe dérivable sur \mathbb{R} , non constante, alors f n'est pas bornée. Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la fonction $-f$.

Maintenant, soit f une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R} , bornée et non constante. D'après la question précédente, elle n'est ni convexe, ni concave, donc sa dérivée seconde n'est pas de signe constant, ce qu'il fallait démontrer.

Solution 3

Pour simplifier, on pose

$$\forall x \in I, \quad F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ et } G(x) = xf(x) = xF\left(\frac{1}{x}\right).$$

Comme $\forall x \in I, \quad xG\left(\frac{1}{x}\right) = x\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$, les fonctions F et G jouent des rôles symétriques, si bien qu'il suffit de vérifier que G est convexe quand F l'est.

Soit $0 < x < y$ et $0 < t < 1$; posons $\frac{1}{(1-t)x + ty} = (1-s)\frac{1}{x} + s\frac{1}{y}$, soit : $s = \frac{ty}{(1-t)x + ty}$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} G((1-t)x + ty) &= [(1-t)x + ty]F\left(\frac{1}{(1-t)x + ty}\right) \\ &= [(1-t)x + ty]F\left((1-s)\frac{1}{x} + s\frac{1}{y}\right) \\ &\leq \underset{\text{Convexité de } F}{[(1-t)x + ty] \left((1-s)F\left(\frac{1}{x}\right) + sF\left(\frac{1}{y}\right) \right)} \\ &= (1-t)xF\left(\frac{1}{x}\right) + tyF\left(\frac{1}{y}\right) = (1-t)G(x) + tG(y). \end{aligned}$$

La comparaison des deux membres extrêmes, prouve la convexité de G .

Solution 4

1. La fonction f_h est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'_h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}.$$

La fonction f'_h est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''_h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + h^2}} - \frac{x^2}{(\sqrt{x^2 + h^2})^3} = \frac{x^2 + h^2}{(\sqrt{x^2 + h^2})^3} - \frac{x^2}{(\sqrt{x^2 + h^2})^3} = \frac{h^2}{(\sqrt{x^2 + h^2})^3} \geq 0.$$

D'après le théorème 4.2, la fonction f_h est strictement convexe sur \mathbb{R} .

2. En posant pour tout réel x , $g(x) := f_h(a - x)$. La fonction g est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) = f''_h(a - x) > 0$. Donc g est strictement convexe, ce qu'il fallait vérifier.

Solution 5 (Loi de Snell-Descartes)

La durée du trajet $A \rightarrow M$ est $t_1 = \frac{AM}{v_1} = \frac{1}{v_1} f_h(x)$ avec les notations de l'exercice 4. De même, la durée du trajet $M \rightarrow B$ est $t_2 = \frac{BM}{v_2} = \frac{1}{v_2} f_h(a-x)$.

La durée totale est $D(x) := t_1 + t_2 = \frac{1}{v_1} f_h(x) + \frac{1}{v_2} f_h(a-x)$ définit une fonction somme de deux fonctions convexes sur \mathbb{R} . Donc D est convexe sur \mathbb{R} . De plus

$$\forall x \in [0, a], D'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + h^2}} - \frac{a-x}{v_2 \sqrt{(a-x)^2 + h^2}}.$$

On a $D'(x) = 0$ pour $\frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + h^2}} = \frac{a-x}{v_2 \sqrt{(a-x)^2 + h^2}}$. Or $\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} = \sin i_1$ et $\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + h^2}} = \sin i_2$.

Comme la fonction D est strictement convexe sur $[0, a]$, la valeur de x qui annule D' est unique et $D(x)$ réalise le minimum de D . D'après le principe de Fermat, le trajet lumineux passe par $M(x, 0)$ vérifiant $\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}$ d'où la loi de Snell-Descartes en multipliant les deux membres par c .

Solution 6

Supposons f non nulle. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que f prend des valeurs strictement positives. La fonction f est continue sur un segment, donc est majorée et atteint son maximum $M > 0$ en un point $c \in]a, b[$. On en déduit que $f'(c) = 0$ d'après le théorème 9 page 139 du cours de première. Comme $f(c) = M$, on en déduit que $f''(c) = kM > 0$.

Attention : la fonction f'' est continue sur $[a, b]$ puisque $f'' = kf - pf'$ est la somme de fonctions continues. Donc il existe un intervalle $[c - \alpha, c + \alpha]$ inclus dans $[a, b]$ pour lequel on a

$$\forall x \in [c - \alpha, c + \alpha], f''(x) > 0.$$

De ce fait, la restriction de f à l'intervalle $[c - \alpha, c + \alpha]$ est **strictement** convexe. En étudiant les variations de f' et de f'' sur l'intervalle $[c, c + \alpha]$, on obtient :

$$\forall x \in [c, c + \alpha], f(x) > M,$$

ce qui contredit le fait que M est le maximum de f sur $[a, b]$.

Moralité, f est nulle sur $[a, b]$

Solution 7

1. On pose $\begin{cases} u(x) = f(x) & u'(x) = f'(x) \\ v'(x) = \cos x & v(x) = \sin x \end{cases}$ On intègre par parties :

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos x \, dx = [f(x) \sin x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(x) \sin x \, dx = - \int_0^{2\pi} f'(x) \sin x \, dx.$$

On intègre une deuxième fois par parties : $\begin{cases} u(x) = f'(x) & u'(x) = f''(x) \\ v'(x) = \sin x & v(x) = 1 - \cos x \end{cases}$ D'où

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos x \, dx = [-f'(x)(1 - \cos x)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} f''(x)(1 - \cos x) \, dx = \int_0^{2\pi} f''(x)(1 - \cos x) \, dx \geq 0.$$

2. Soit $x < y$. D'après l'inégalité des pentes, on a $\frac{f(y + \pi) - f(x + \pi)}{y - x} \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$. On en déduit que $f(y + \pi) - f(x + \pi) \geq f(y) - f(x)$ soit $g(x) \geq g(y)$. Ce qu'il fallait démontrer.

3. Par changement de variable affine,

$$I = \int_0^\pi g(x) \cos x \, dx = \int_0^{\pi/2} [g(\pi/2 - x) \cos(\pi/2 - x) + g(\pi/2 + x) \cos(\pi/2 + x)] \, dx.$$

Or $\cos(\pi/2 + x) = -\cos(\pi/2 - x)$, donc

$$I = \int_0^{\pi/2} [g(\pi/2 - x) - g(\pi/2 + x)] \cos(\pi/2 - x) \, dx.$$

Comme g est décroissante sur $[0, \pi]$, avec $x \geq 0$, on a $\pi/2 - x \leq \pi/2 + x$ et par suite $g(\pi/2 - x) - g(\pi/2 + x) \geq 0$. Le cosinus est positif sur $[0, \pi/2]$, ce qui donne le résultat.

4. À nouveau par changement de variable affine,

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos x \, dx = \int_0^\pi [f(x) - f(x + \pi)] \cos x \, dx.$$

Comme $x \mapsto f(x) - f(x + \pi)$ est décroissante d'après la question 2, l'intégrale est positive d'après la question 3.

Solution 8

La fonction f est convexe sur l'intervalle ouvert \mathbb{R} , donc continue sur \mathbb{R} , d'après le théorème 3. Donc F est dérivable sur \mathbb{R} , et de dérivée $x \mapsto \frac{f(x+2h) - f(x-2h)}{2h}$.

Remarquons (cela sera utilisé plus loin pour diviser des inégalités par h), que quitte à remplacer h par $-h$, on peut supposer $h > 0$.

$$\text{Soit } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } x < y. \text{ Alors : } \begin{cases} x + 2h = t(x - 2h) + (1 - t)(y + 2h) & \text{où } t = \frac{y - x}{y - x + 4h} \in]0, 1[\\ y - 2h = t'(x - 2h) + (1 - t')(y + 2h) & \text{où } t' = \frac{4h}{y - x + 4h} \in]0, 1[\end{cases}$$

$$\text{Comme } f \text{ est convexe, } \begin{cases} f(x + 2h) \leq t f(x - 2h) + (1 - t) f(y + 2h) \\ f(y - 2h) \leq t' f(x - 2h) + (1 - t') f(y + 2h) \end{cases}$$

D'où en additionnant ces deux inégalités, comme $t + t' = 1$: $f(x + 2h) + f(y - 2h) \leq f(x - 2h) + f(y + 2h)$

Soit $\frac{f(x + 2h) - f(x - 2h)}{2h} \leq \frac{f(y + 2h) - f(y - 2h)}{2h}$ car $h > 0$:

La dérivée de la fonction F est croissante, donc F est convexe.

Solution 9 (Inégalité de Pompeiu)

Pour fixer les idées, on prend $x \leq y \leq z$.

- Si $y \leq \frac{x+z}{2}$, alors $y \leq \frac{x+y+z}{3} \leq z$ et $\frac{x+y+z}{3} \leq \frac{y+z}{2} \leq z$.

De ce fait, il existe deux réels t et u tels que

$$\frac{y+z}{2} = t \frac{x+y+z}{3} + (1-t)z \tag{4.1}$$

$$\frac{x+z}{2} = u \frac{x+y+z}{3} + (1-u)z \tag{4.2}$$

En additionnant ces deux égalités, on obtient

$$\frac{x+y+2z}{2} = (t+u) \left(\frac{x+y+z}{3} - z \right) + 2z$$

soit

$$\frac{x+y-2z}{2} = (t+u) \left(\frac{x+y-2z}{3} \right).$$

On en déduit que $t + u = \frac{3}{2}$.

On écrit les trois inégalités de convexité :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{y+z}{2}\right) &\leq t f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + (1-t)f(z) \\ f\left(\frac{x+z}{2}\right) &\leq u f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + (1-u)f(z) \\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y), \end{aligned}$$

que l'on additionne membre à membre pour obtenir :

$$f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{x+z}{2}\right) + f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{3}{2} f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + \frac{1}{2} (f(x) + f(y) + f(z))$$

et on obtient bien le résultat demandé en divisant par $\frac{3}{2}$.

- Si $y \geq \frac{x+z}{2}$, la méthode du jaguar casqué nous indique que $-y \leq \frac{(-x) + (-z)}{2}$ et on peut appliquer le résultat précédent à la fonction convexe $\tilde{f} : x \mapsto f(-x)$.

4.8 Problèmes

Avant de continuer les aventures de notre suite, on rappelle l'existence du théorème 3 page 161.

Problème 1 (De la suite dans les idées 5)

Ce problème est conçu pour servir de suite aux problèmes 2 page 130 (cours de seconde), 5 page 163 et 6 page 163 (cours de première). Il reprend les notations et résultats de ces trois problèmes.

1. Démontrer que la fonction λ est croissante sur l'intervalle $[0, 1]$.
2. Démontrer que la fonction λ est convexe sur l'intervalle $[0, 1]$.
3. Démontrer que la fonction λ est continue sur l'intervalle $[0, 1]$.

Avant d'attaquer les choses sérieuses, on va poser pour simplifier

$$\beta = \lambda\left(\frac{1}{x_0}\right) \quad \alpha = x_0\beta \quad \text{et} \quad q = 1 + \frac{1}{x_0}.$$

On pose aussi pour tout réel $x \in [0, 1]$, $g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x}$.

4. Dans cette question, on prend $a_0 = x = \frac{1}{x_0}$ et toujours $b_0 = 1$, $c_0 = 1$, $d_0 = 1$. Calculer pour tout entier naturel n , a_n et c_n .

En déduire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{q^n} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{q^n}.$$

5. Dans cette question, on prend $a_0 = x \in [0, 1]$ et toujours $b_0 = 1$, $c_0 = 1$, $d_0 = 1$. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{q^n} = \alpha\lambda(x) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{q^n} = \beta\lambda(x).$$

6. Démontrer que pour tout réel $x \in [0, 1]$,

$$q\lambda(x) = (1+x)\lambda\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x}\right). \quad (4.3)$$

7. Calculer $\lambda(0)$. Démontrer que λ est dérivable en zéro et calculer $\lambda'(0)$.

8. Calculer $\lambda\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

9. Soit $x \in [0, 1]$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = g(u_n)$.

Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

10. On prend $x \in [0, 1]$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie comme ci-dessus.

Démontrer que $\lambda(x) = \beta \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n \frac{1 + u_k}{q}$.

Problème 2 (De la suite dans les idées 6)

Ce problème est conçu pour servir de suite aux problèmes 2 page 130 (cours de seconde), 5 page 163, 6 page 163 (cours de première) et 1 page 172. Il reprend les notations et résultats de ces quatre problèmes.

1. Démontrer que pour tout réel $x \in]0, 1[$,

$$q\lambda'_g(x) = \lambda\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right) + \frac{x-1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\lambda'_d\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right) \quad (4.4)$$

et

$$q\lambda'_d(x) = \lambda\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right) + \frac{x-1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\lambda'_g\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right) \quad (4.5)$$

2. En déduire que λ est dérivable sur l'intervalle fermé $[0, 1]$.

3. Démontrer que pour tout nombre x appartenant à $[0, 1]$.

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{1}{x+1} + g'(x) \frac{\lambda'(g(x))}{\lambda(g(x))}. \quad (4.6)$$

Soit x appartenant à $[0, 1]$, on pose $g_0(x) = x$ et pour tout entier n ,

$$g_{n+1}(x) = g(g_n(x)).$$

Autrement dit, $g_n(x)$ est ce qui avait été noté u_n à la question 9 du problème 1.

On pose aussi $h(x) = -g'(x)$ puis $\alpha_n = h(g_n(x)) = h(u_n)$.

et enfin $\beta_n = \alpha_0 \times \alpha_1 \times \dots \times \alpha_{n-1} = \prod_{k=0}^{n-1} \alpha_k$.

4. Démontrer que pour tout réel $x \in [0, 1]$ et pour tout entier n strictement positif,

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{1}{x+1} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\beta_k}{1+g_{k-1}(x)} + (-1)^{n+1} \beta_{n+1} \frac{\lambda'(g_n(x))}{\lambda(g_n(x))}.$$

5. Démontrer que pour tout réel $x \in [0, 1]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \beta_{n+1} \frac{\lambda'(g_n(x))}{\lambda(g_n(x))} = 0.$$

6. Calculer $\lambda'\left(\frac{1}{x_0}\right)$ en fonction de $\beta = \lambda\left(\frac{1}{x_0}\right)$ et de x_0 .

7. Démontrer que pour tout réel $x \in [0, 1]$, et pour tout entier n positif, $|g'_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$.

4.9 Corrections

Correction 1 (De la suite dans les idées 5)

1. En posant $a_n = a_n(x)$ et $c_n = c_n(x)$, les fonctions $x \mapsto a_n(x)$ et $x \mapsto c_n(x)$ sont croissantes sur l'intervalle $]0, 1]$ par une récurrence immédiate. Il en résulte que les fonctions $x \mapsto \frac{a_n(x)}{b_n}$ et $x \mapsto \frac{c_n(x)}{d_n}$ sont croissantes sur l'intervalle $[0, 1]$. La fonction λ est donc elle aussi croissante sur l'intervalle $[0, 1]$ comme limite simple de fonctions croissantes.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit \mathcal{H}_n la propriété : Les fonctions $x \mapsto a_n(x)$ et $x \mapsto c_n(x)$ sont deux fois dérivables et convexes sur l'intervalle $[0, 1]$. Les fonctions $a_0(x) = x$ et $c_0(x) = 1$ sont bien deux fois dérivables et convexes sur l'intervalle $[0, 1]$. On a donc \mathcal{H}_0 . Soit maintenant a et c deux fonctions deux fois dérivables, convexes et à valeurs strictement positives sur l'intervalle $]0, 1]$. Il en est clairement de même pour $\gamma = a + c$. Soit maintenant $\alpha = \sqrt{a^2 + c^2}$. La fonction α est dérivable et

$$\alpha' = \frac{aa' + cc'}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

De même,

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \frac{aa'' + a'^2 + cc'' + c'^2}{\sqrt{a^2 + c^2}} - \frac{(aa' + cc')^2}{(\sqrt{a^2 + c^2})^3} \\ &= \frac{a^3a'' + a^2a'^2 + a^2cc'' + a^2c'^2 + ac^2a'' + c^2a'^2 + c^3c'' + c^2c'^2 - a^2a'^2 - c^2c'^2 - 2aa'cc'}{(\sqrt{a^2 + c^2})^3} \\ &= \frac{a^3a'' + a^2cc'' + a^2c'^2 + ac^2a'' + c^2a'^2 + c^3c'' - 2aa'cc'}{(\sqrt{a^2 + c^2})^3} \\ &= \frac{(ac' - ca')^2 + a^3a'' + a^2cc'' + ac^2a'' + c^3c''}{(\sqrt{a^2 + c^2})^3} \end{aligned}$$

Donc α'' est positive et α est convexe sur l'intervalle $[0, 1]$.

Désormais, la propriété \mathcal{H}_n se démontre facilement par récurrence.

Par suite les fonctions $x \mapsto u_n(x)$ sont toutes convexes sur l'intervalle $[0, 1]$. Autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, y) \in [0, 1]^2, \forall t \in [0, 1], u_n(tx + (1-t)y) \leq tu_n(x) + (1-t)u_n(y).$$

Les deux membres de l'inégalité ont une limite quand $n \rightarrow \infty$. Par conservation des inégalités larges par passage à la limite,

$$\lambda(tx + (1-t)y) \leq t\lambda(x) + (1-t)\lambda(y).$$

C'est dire que la fonction λ est convexe sur l'intervalle $[0, 1]$.

3. La fonction λ est convexe sur l'intervalle $[0, 1]$ donc elle est continue sur l'intervalle $]0, 1[$ [d'après le théorème 3 page 161. De plus elle est dérivable en 1. Enfin, comme elle est croissante et convexe sur l'intervalle $[0, 1]$, elle est continue en 0.
4. On va démontrer par récurrence sur l'entier naturel n la propriété

$$\mathcal{K}_n : c_n = \left(1 + \frac{1}{x_0}\right)^n \quad \text{et} \quad a_n = \frac{1}{x_0} \left(1 + \frac{1}{x_0}\right)^n.$$

Puisque $c_0 = 1$ et $a_0 = \frac{1}{x_0}$, la propriété \mathcal{K}_0 est claire.

Soit n un entier naturel pour lequel on a \mathcal{K}_n .

On a

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 &= a_n^2 + c_n^2 \\ &= \left(\frac{1}{x_0^2} + 1\right) c_n^2 \\ &= \frac{1}{x_0^2} (x_0^2 + 1) \left(1 + \frac{1}{x_0}\right)^{2n} \end{aligned}$$

Or $x_0^4 = 2x_0 + 1$ donc en divisant par $x_0^2 \neq 0$, on a $x_0^2 = \frac{2}{x_0} + \frac{1}{x_0^2}$ donc $x_0^2 + 1 = 1 + \frac{2}{x_0} + \frac{1}{x_0^2} = \left(1 + \frac{1}{x_0}\right)^2$. Par suite $a_{n+1}^2 = \frac{1}{x_0^2} \left(1 + \frac{1}{x_0}\right)^{2n+2}$ et $a_{n+1} = \frac{1}{x_0} \left(1 + \frac{1}{x_0}\right)^{n+1}$, ce qu'il fallait vérifier. De même,

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= a_n + c_n \\ &= \left(\frac{1}{x_0} + 1\right) c_n \\ &= \left(\frac{1}{x_0} + 1\right) \left(1 + \frac{1}{x_0}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{x_0}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

là encore, c'est ce qu'il fallait vérifier. On a donc bien \mathcal{K}_{n+1} .

En résumé on a $\begin{cases} \mathcal{K}_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{K}_n \implies \mathcal{K}_{n+1} \end{cases}$ Donc d'après le théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{K}_n$.

Maintenant, comme on sait que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \left(\frac{1}{x_0}\right)$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_0 b_n}{\left(1 + \frac{1}{x_0}\right)^n} = \frac{1}{\lambda \left(\frac{1}{x_0}\right)}$

donc que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\left(1 + \frac{1}{x_0}\right)^n} = \frac{1}{x_0 \lambda \left(\frac{1}{x_0}\right)}$.

De même $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{d_n} = \lambda \left(\frac{1}{x_0}\right)$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{\left(1 + \frac{1}{x_0}\right)^n} = \frac{1}{\lambda \left(\frac{1}{x_0}\right)}$.

Dans le langage des équivalents, $b_n \sim \alpha q^n$ et $d_n \sim \beta q^n$.

5. L'idée est que les suites $(a_n)_n$ et $(c_n)_n$ n'interfèrent pas avec les suites $(b_n)_n$ et $(d_n)_n$. En particulier les suites $(b_n)_n$ et $(d_n)_n$ sont identiques dans cette question et dans la question précédente.

Donc on a encore $b_n \sim \alpha q^n$ et $d_n \sim \beta q^n$.

Comme $a_n \sim \lambda(x)b_n$ et $c_n \sim \lambda(x)d_n$, on en déduit que $a_n \sim \lambda(x)\alpha q^n$ et $c_n \sim \lambda(x)\beta q^n$.

6. On a donc $a_{n+1} \sim \lambda(x)\alpha q^{n+1}$. Or le $(n+1)$ -ième terme de la suite $(a_n)_n$ est le n -ième terme de la suite $(a_n)_n$ définie par $a_0 = \sqrt{x^2 + 1}$ et $c_0 = x + 1$.

En divisant les deux premiers termes par $1 + x$ on voit par une récurrence immédiate que tous les termes des suites $(a_n)_n$ et $(c_n)_n$ sont divisés par $1 + x$.

Donc en prenant $a'_0 = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ et $b'_0 = 1$, $c'_0 = 1$, $d'_0 = 1$ on retrouve tous les termes de la suite $(a_n)_n$ mais décalés d'un indice, à savoir $a'_n = \frac{a_{n+1}}{1+x}$ pour tout entier naturel n . D'après la question précédente, on a $a'_n \sim \lambda\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right) \alpha q^n$. On en déduit que

$$\lambda\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right) \alpha q^n \sim \frac{1}{x+1} \lambda(x) \alpha q^{n+1}.$$

En divisant les deux membres par αq^n on obtient $\lambda\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right) \sim \frac{1}{x+1} \lambda(x) q$, c'est-à-dire l'égalité entre les limites de $\frac{a'_n}{\alpha q^n}$ et $\frac{a_{n+1}}{(1+x)\alpha q^n}$:

$$\lambda\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right) \sim \frac{1}{x+1} \lambda(x) q.$$

Après multiplication par $1+x$, l'égalité (4.3) est claire.

7. En prenant $x=0$ dans l'égalité précédente, on trouve $q\lambda(0) = 1 \times \lambda(1) = 1$.

Il est tentant de dériver les deux membres de l'égalité (4.3) pour obtenir

$$q\lambda'(x) = \lambda\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right) + \frac{x-1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} \lambda'\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right)$$

et de remplacer x par zéro. Cela nous donnerait $q\lambda'(0) = \lambda(1) - \lambda'(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ d'où $\lambda'(0) = \frac{1}{2q}$.

Pour autant, cela ne peut être fait que si l'on sait que la fonction λ est dérivable en des nombres différents de 1, ce que nous ne savons pas. Il faut donc revenir à la définition du nombre dérivé, tout en gardant en tête le résultat ci-dessus qui, s'il n'est pas justifié, n'a aucune raison non plus d'être faux ...

En utilisant la caractérisation de la dérivabilité de la fonction λ en 1 à l'aide d'une approximation affine (théorème 1 page 132 du cours de première), on écrit

$$\lambda(1+h) = 1 + \frac{h}{2} + h\varepsilon_1(h),$$

où $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1(h) = 0$, avec en particulier

$$\lambda(1+h) = 1 + \varepsilon_2(h),$$

où $\varepsilon_2(h) = \frac{h}{2} + h\varepsilon_1(h)$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_2(h) = 0$.

L'égalité (4.3) s'écrit alors

$$q\lambda(x) = \lambda(1+h) + x(1 + \varepsilon(x))$$

en posant $h = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 1 = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x+1} - \frac{x}{x+1}$. On se souvient que $\lambda(0) = \frac{1}{q}$, donc

$$\lambda(x) = \frac{1}{q} + \frac{x}{2q} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+1} + \varepsilon_1(h) \right) + \frac{x + x\varepsilon(x)}{q}.$$

Soit en retranchant $\frac{1}{q} = \lambda(0)$ et en divisant par x .

$$\frac{\lambda(x) - \lambda(0)}{x} = \frac{1}{2q} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+1} + \varepsilon_1(h) \right) + \frac{1}{q} + \frac{1}{q} \varepsilon(x) \quad (4.7)$$

Maintenant $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ existe. C'est le nombre dérivé de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ en zéro. C'est donc aussi la valeur en zéro de $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ c'est-à-dire zéro.

Par ailleurs $\varepsilon_1(h) = \varepsilon_1 \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 1 \right)$ tend vers zéro quand x tend vers zéro par composition des limites. Donc le second membre de (4.7) tend vers $\frac{1}{2q}(0 \times 1 - 1 + 0) + \frac{1}{q} + \frac{1}{q} \times 0 = -\frac{1}{2q} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2q}$.

Le taux d'accroissement $\frac{\lambda(x) - \lambda(0)}{x}$ tend vers $\frac{1}{2q}$ quand x tend vers zéro. C'est bien dire que la fonction λ est dérivable en zéro et que $\lambda'(0) = \frac{1}{2q}$.

On retrouve le résultat trouvé plus haut, mais cette fois avec une méthode rigoureuse.

8. On prend cette fois $x = 1$ dans l'égalité (4.3). On obtient alors $q\lambda'(1) = \lambda\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Lorsqu'on se souvient que $\lambda'(1) = \frac{1}{2}$ on trouve $\lambda\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2q}$.
9. On commence par remarquer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = g(u_n)$ appartient à l'intervalle $[0, 1]$. On peut le voir grâce aux variations de la fonction φ étudiée à la question 2 du problème 5 page 163 dans le cours de première, puisque pour tout réel x , $g(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$.

Ensuite, si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, alors sa limite ℓ de cette suite, qui est aussi celle de la suite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, vérifie $\ell = g(\ell)$ puisque pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = g(u_n)$ et que la fonction g est continue sur l'intervalle $[0, 1]$. Donc ℓ est une solution positive de $\sqrt{1+x^2} = x(1+x)$ donc de $1+x^2 = x^2 + 2x^3 + x^4$ donc de $1 = 2x^3 + x^4$ donc en divisant les deux membres par x^4 puisque $\ell \neq 0$, le nombre $\frac{1}{\ell}$ est une solution positive de $u^4 = 2u + 1$. Cette équation déjà vue à la question 3 du problème 5 page 163 du cours de première, n'admet qu'une solution positive : x_0 . Par suite on a nécessairement $\ell = \frac{1}{x_0}$.

On reprend la méthode utilisée au problème 5 page 163 du cours de première. On a déjà calculé la dérivée de g à la question précédente :

$$\forall x \in [0, 1], g'(x) = -\frac{1-x}{(1+x)^2 \sqrt{1+x^2}} \leq 0.$$

x	0	$\frac{1}{x_0}$	1
$g'(x)$	-1	-	-
$g(x)$	1	$\frac{1}{x_0}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

On voit grâce au tableau de variation que si $x \in [0, \frac{1}{x_0}]$ alors $g(x) \in [\frac{1}{x_0}, 1]$ et inversement, si $x \in [\frac{1}{x_0}, 1]$ alors $g(x) \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{x_0}]$.

En particulier, qu'on ait $u_0 \in [\frac{1}{x_0}, 1]$ ou $u_0 \in [0, \frac{1}{x_0}]$, on a dans les deux cas $u_2 \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ et par une récurrence facile $\forall n \geq 2, u_n \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Maintenant $\forall x \in [0, 1], -g'(x) = \frac{1-x}{x+1} \times \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}$.

D'un côté $\frac{1-x}{x+1} = \frac{2}{x+1} - 1$ est une fonction positive et décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$. de

l'autre $\frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}$ est clairement une fonction positive et décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$.

Leur produit, $-g'(x)$ est donc une fonction (positive et) décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{x_0}$	1
$g'(x)$				

En particulier, on en déduit que $\forall x \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1], g'(\frac{\sqrt{2}}{2}) \leq g'(x) \leq 0$. On pose $k = -g'(\frac{\sqrt{2}}{2})$.

En reprenant la méthode du problème 5 page 163 du manuel de première, on démontre que $\forall n \geq 2, |u_n - \frac{1}{x_0}| \leq k^{n-2}$.

On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{x_0}$.

Puisque les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ passent alternativement d'un côté et de l'autre de $\frac{1}{x_0}$ on peut suivre le cheminement suivant :

Pour tout entier $n, u_{n+2} = g(g(u_n))$ se trouve du même côté de $\frac{1}{x_0}$ que u_n . Les variations des deux suites obtenues en prenant les termes de deux en deux, à savoir $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, sont données par le signe de $h(u_n)$ où $h(x) = g(g(x)) - x$. On va poser $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$

On a $\forall x \in [0, 1], h'(x) = g'(g(x)) \times g'(x) - 1$, à partir de $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq g(x) \leq 1$ et la croissance de g' on a $g'(\frac{\sqrt{2}}{2}) \leq g'(g(x)) \leq g'(1) = 0$, soit $0 \leq -g'(g(x)) \leq k$. Comme $0 \leq -g'(x) \leq 1$, on en déduit $0 \leq g'(g(x)) \times g'(x) \leq k$ et $-1 \leq h'(x) \leq k - 1 < 0$.

x	0	$\frac{1}{x_0}$	1
$h'(x)$	-		
$h(x)$			

On en déduit que $h(x)$ est positif pour $x \in [0, \frac{1}{x_0}]$ et négatif pour $x \in [\frac{1}{x_0}, 1]$.

Par suite, si $u_0 \in [0, \frac{1}{x_0}]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in [0, \frac{1}{x_0}]$ et donc $h(u_{2n}) \geq 0$ soit $u_{2n+2} - u_{2n} \geq 0$ soit encore $v_{n+1} \geq v_n$. Autrement dit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Comme elle est majorée (par 1), elle converge. Sa limite L vérifie nécessairement $h(L) = 0$, donc $L = \frac{1}{x_0}$ d'après le tableau de variations ci-dessus.

De même on a $u_1 \in [\frac{1}{x_0}, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} \in [\frac{1}{x_0}, 1]$ et donc $h(u_{2n+1}) \leq 0$ soit $u_{2n+3} - u_{2n+1} \leq 0$ soit encore $w_{n+1} \leq w_n$. Autrement dit la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elle est minorée (par 0), elle converge. Sa limite L vérifie nécessairement $h(L) = 0$, donc $L = \frac{1}{x_0}$ d'après le tableau de variations ci-dessus. Les deux suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers cette même limite, à savoir $\frac{1}{x_0}$.

Si $u_0 \in [\frac{1}{x_0}, 1]$, on a $u_1 \in [0, \frac{1}{x_0}]$ et on obtient des résultats identiques à la situation précédente avec un décalage d'indices.

10. Une récurrence sans malice montre que pour tout entier n ,

$\lambda(x) = \lambda(u_{n+1}) \prod_{k=0}^n \frac{1+u_k}{q}$, lorsque n tend vers l'infini, u_{n+1} tend vers $\frac{1}{x_0}$ d'après la question précédente. $\lambda(u_{n+1})$ tend vers $\lambda(\frac{1}{x_0}) = \beta \neq 0$ d'après la continuité de la fonction λ vue à la question 3.

Donc $\prod_{k=0}^n \frac{1+u_k}{q}$ converge vers $\frac{\lambda(x)}{\beta}$. Le résultat en découle.

Correction 2 (De la suite dans les idées 6)

1. On calcule pour $x \in]0, 1[$ la dérivée à gauche des deux membres de (4.3). Il faut faire attention à ce que comme la fonction g est décroissante sur $]0, 1[$ lorsqu'on tend vers x par la gauche, on tend vers $g(x)$ par la droite! Sinon le calcul s'effectue comme un calcul de dérivée classique. La dérivée, à droite comme à gauche de g , c'est g' . On a, d'après (4.3), $\forall x \in]0, 1[$, $q\lambda(x) = (1+x)\lambda(g(x))$, donc

$$\begin{aligned} q\lambda'_g(x) &= 1 \times \lambda(g(x)) + (1+x) \times g'(x) \times \lambda'_d(g(x)) \\ &= \lambda\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right) + (1+x) \times \frac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}} \times \lambda'_d\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right) \\ &= \lambda\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right) + \frac{x-1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} \times \lambda'_d\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right). \end{aligned}$$

L'autre égalité se calcule de la même façon en échangeant la droite et la gauche.

2. En posant $p(x) = \frac{1-x}{q(x+1)\sqrt{x^2+1}}$, on a pour tout $x \in]0, 1[$, $p(x) \geq 0$.

On écrit l'égalité (4.4) sous la forme

$$\lambda'_g(x) + p(x)\lambda'_d(g(x)) = \frac{1}{q} \lambda(g(x)).$$

On écrit de la même façon l'égalité (4.5)

$$\lambda'_d(x) + p(x)\lambda'_g(g(x)) = \frac{1}{q} \lambda(g(x)).$$

Le défaut de dérivabilité en x est mesuré par $\delta(x) = \lambda'_d(x) - \lambda'_g(x)$. En soustrayant les deux égalités ci-dessus, on obtient

$$-\delta(x) + p(x)\delta(g(x)) = 0 \tag{4.8}$$

Maintenant, puisque la fonction λ est croissante donc $\lambda'_g(x) \geq 0$. De l'autre côté, λ'_d est croissante donc $\lambda'_d(x) \leq \frac{1}{2} = \lambda'(1)$. Donc $\delta(x) \leq \frac{1}{2}$. Enfin, puisque λ est convexe, $\delta(x) \geq 0$.

On a déjà vu que $\frac{1-x}{x+1} = \frac{2}{x+1} - 1$ était une fonction positive et décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$, et que $\frac{1}{q\sqrt{1+x^2}}$ était positive et décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$. Leur produit, $p(x)$ est donc une fonction strictement positive et décroissante sur l'intervalle $[0, 1[$. Comme $p(1) = \frac{1}{q\sqrt{2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

On en déduit que $\forall x \in [0, 1[$, $0 < p(x) \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$.

On déduit de (4.8) que $\delta(g(x)) \geq \sqrt{2}\delta(x)$.

3. Soit $x \in]0, 1[$ pour lequel $\delta(x) > 0$. En remplaçant x par u_n , on obtient, en reprenant les notations de la question 8.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \delta(u_{n+1}) \geq \sqrt{2}\delta(u_n).$$

On obtient par une récurrence immédiate.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \delta(u_n) \geq (\sqrt{2})^n \delta(x),$$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta(u_n) = +\infty$, ce qui contredit $\delta(u) \leq \frac{1}{2}$. La proposition $\exists x \in]0, 1[$, $\delta(x) > 0$ est donc fautive. Donc pour tout réel $x \in]0, 1[$, $\delta(x) = 0$, ce qui veut bien dire que λ est dérivable sur $]0, 1[$. La dérivabilité en 1 a été vue à la question 11, et en 0 à la question 20.

4. À partir de (4.3), puisque tous les facteurs sont positifs, on prend les logarithmes des deux membres :

$$\ln(q) + \ln(\lambda(x)) = \ln(1+x) + \lambda(g(x)).$$

En dérivant les deux membres par rapport à x , le résultat demandé en résulte.

5. Soit $x \in [0, 1]$. On démontre, par récurrence sur l'entier $n \geq 1$, la propriété Q_n :

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{1}{x+1} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\beta_k}{1+g_k(x)} + (-1)^{n+1} \beta_n \alpha_n \frac{\lambda'(g_{n+1}(x))}{\lambda(g_{n+1}(x))}.$$

On écrit (4.6) :

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{1}{x+1} + g'(x) \frac{\lambda'(g(x))}{\lambda(g(x))}.$$

On écrit (4.6) en remplaçant x par $u_n = g(x)$ qui appartient bien à l'intervalle $[0, 1]$, ce qui donne

$$\frac{\lambda'(g(x))}{\lambda(g(x))} = \frac{1}{g(x)+1} + g'(g(x)) \frac{\lambda'(g(g(x)))}{\lambda(g(g(x)))}.$$

Or $g(g(x)) = g_2(x)$ donc en remplaçant $\frac{\lambda'(g(x))}{\lambda(g(x))}$ dans la première égalité, on trouve

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{1}{x+1} + g'(x) \left[\frac{1}{g(x)+1} + g'(g(x)) \frac{\lambda'(g_2(x))}{\lambda(g_2(x))} \right]$$

Maintenant $(-1)^1 \beta_1 = -\alpha_0 = -h(g_0(x)) = g'(x)$ donc $\sum_{k=1}^1 (-1)^k \frac{\beta_k}{1+g_k(x)} = \frac{g'(x)}{1+g(x)}$. D'autre part $\alpha_1 = h(g_1(x)) = -g'(g(x))$, donc $(-1)^2 \beta_1 \alpha_1 = g'(x)g'(g(x))$. On a bien Q_1 .

Soit n un entier pour lequel \mathcal{Q}_n . On a donc

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{1}{x+1} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\beta_k}{1+g_{k-1}(x)} + (-1)^{n+1} \beta_n \alpha_n \frac{\lambda'(g_n(x))}{\lambda(g_n(x))}.$$

On écrit (4.6) en remplaçant x par $u_n = g_n(x)$ qui appartient bien à l'intervalle $[0, 1]$, ce qui donne

$$\frac{\lambda'(g_n(x))}{\lambda(g_n(x))} = \frac{1}{g_n(x)+1} + g'(g_{n+1}(x)) \frac{\lambda'(g_{n+1}(x))}{\lambda(g_{n+1}(x))}.$$

En remplaçant $\frac{\lambda'(g_n(x))}{\lambda(g_n(x))}$ dans l'égalité plus haut on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} &= \frac{1}{x+1} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\beta_k}{1+g_{k-1}(x)} \\ &\quad + (-1)^{n+1} \beta_{n+1} \left[\frac{1}{g_n(x)+1} + g'(g_{n+1}(x)) \frac{\lambda'(g_{n+1}(x))}{\lambda(g_{n+1}(x))} \right] \end{aligned}$$

Or $\beta_n \alpha_n = \beta_{n+1}$ donc

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\beta_k}{1+g_{k-1}(x)} + (-1)^{n+1} \frac{\beta_n \alpha_n}{g_n(x)+1} = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \frac{\beta_k}{1+g_{k-1}(x)},$$

$$\begin{aligned} \text{et } (-1)^{n+1} \beta_{n+1} g'(g_{n+1}(x)) &= (-1)^{n+1} \beta_{n+1} \times (-\alpha_{n+1}) \\ &= (-1)^{n+2} \beta_{n+2}. \end{aligned}$$

On a bien \mathcal{Q}_{n+1} .

En résumé on a $\begin{cases} \mathcal{Q}_1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{Q}_n \implies \mathcal{Q}_{n+1} \end{cases}$ Donc d'après le théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{Q}_n$.

6. On pourrait être tenté d'écrire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda'(g_n(x))}{\lambda(g_n(x))} = \frac{\lambda'(\frac{1}{x_0})}{\lambda(\frac{1}{x_0})},$$

ce qui est vrai, mais on ne peut pas l'affirmer tant qu'on ne sait pas que λ' est continue au moins en $\frac{1}{x_0}$. On va se contenter de démontrer que cette suite est bornée. Puisque λ est croissante sur $[0, 1]$, on a $\frac{1}{q} = \lambda(0) \leq \lambda(x) \leq \lambda(1) = 1$. Puisque λ est convexe sur $[0, 1]$, on a $\frac{1}{2q} = \lambda'(0) \leq \lambda'(x) \leq \lambda'(1) = \frac{1}{2}$. En divisant sans se tromper de sens on obtient

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} \leq \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{q}} = \frac{q}{2},$$

pour tout réel $x \in [0, 1]$. En particulier

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\lambda'(g_n(x))}{\lambda(g_n(x))} \leq \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{q}} = \frac{q}{2},$$

ce qu'on se proposait de démontrer.

On se souvient que $-g'(x) = \frac{1-x}{x+1} \times \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}$, que $h = -g'$ est positive et décroissante sur $[0, 1]$, donc pour tout réel x de $[0, 1]$, $|g'(x)| = h(x) \in [0, \frac{1}{2}]$ sachant que $h(0) = \frac{1}{2}$.

On a donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha_k \leq \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \beta_n \leq \frac{1}{2^n}$.

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \beta_n \frac{\lambda'(g_n(x))}{\lambda(g_n(x))} \leq \frac{q}{2} \times \frac{1}{2^n}$.

D'après le théorème d'encadrement, on a bien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \beta_{n+1} \frac{\lambda'(g_n(x))}{\lambda(g_n(x))} = 0.$$

7. On démontre pour tout entier n la propriété \mathcal{R}_n :

$$\forall x \in [0, 1], |g'_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

On a déjà vu \mathcal{R}_1 à la question 6. Par ailleurs, \mathcal{R}_0 est claire.

Soit n un entier pour lequel on a \mathcal{R}_n .

En écrivant $g_{n+1}(x) = g_n(g(x))$ on obtient $g'_{n+1}(x) = g'_n(g(x)) \times g'(x)$.

Puisque $g(x) \in [0, 1]$, on a $|g'_n(g(x))| \leq \frac{1}{2^n}$, et on a $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ d'après \mathcal{R}_n .

Donc $|g'_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ et ce pour tout réel $x \in [0, 1]$. Autrement dit, on a \mathcal{R}_{n+1} .

En résumé on a $\begin{cases} \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{R}_n \implies \mathcal{R}_{n+1} \end{cases}$ Donc d'après le théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, \mathcal{R}_n , ce qu'il fallait démontrer.

Chapitre 5

Courbes et limites complexes

Sommaire

5.1	Limites des suites à termes complexes	183
5.2	Limites de fonctions à valeurs complexes	186
5.3	Dérivées de fonctions à valeurs complexes	187
5.4	Courbes planes	189
5.5	Travaux dirigés	193
5.6	Exercices	195
5.7	Solutions	196

On va chercher à définir – rapidement – et à utiliser des limites de suites à termes complexes, des limites de fonctions à valeurs complexes, des dérivées de fonctions à valeurs complexes.

5.1 Limites des suites à termes complexes

On rappelle une définition des suites à termes réels qui convergent vers un réel :

La suite $(u_n)_{n \in I}$ a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in I, \forall n \geq p, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Définition 1.

Soit $\ell \in \mathbb{C}$ et $(u_n)_{n \in I}$ une suite de nombres complexes. On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ a pour limite ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in I, \forall n \geq p, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

La seule différence avec les suites réelles est que dans le premier cas $|\cdot|$ désigne la valeur absolue et dans le second cas, $|\cdot|$ désigne le module.

Dire que la suite complexe $(u_n)_{n \in I}$ a pour limite ℓ , c'est dire que la suite réelle $(|u_n - \ell|)_{n \in I}$ a pour limite 0.

Définition 2.

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite de nombres complexes. On dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ est convergente s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $(u_n)_{n \in I}$ a pour limite ℓ .

Théorème 1

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in I}$ une suite de nombres complexes.

Si la suite $(u_n)_{n \in I}$ a pour limite ℓ , alors la suite $(|u_n|)_{n \in I}$ a pour limite $|\ell|$.

Démonstration 1

En effet puisque $||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell|$, pour avoir $||u_n| - |\ell|| < \varepsilon$ il suffit d'avoir $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

Se rapporter au théorème 8 page 499 du cours de première pour se rafraîchir la mémoire. □

Théorème 2

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in I}$ une suite de nombres complexes.

Si la suite $(u_n)_{n \in I}$ a pour limite ℓ , alors la suite $(\bar{u}_n)_{n \in I}$ a pour limite $\bar{\ell}$.

Démonstration 2

En effet $|u_n - \ell| = |\bar{u}_n - \bar{\ell}|$ puisqu'un complexe a le même module que son conjugué. □

Théorème 3

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite de nombres complexes. On écrit $\forall n \in I, u_n := x_n + iy_n$ avec x_n et y_n réels.

Pour que la suite $(u_n)_{n \in I}$ converge, il faut et il suffit que les deux suites réelles $(x_n)_{n \in I}$ et $(y_n)_{n \in I}$ convergent.

Démonstration 3

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On a

$$|x| \leq |z| \quad \text{et} \quad |y| \leq |z|.$$

Supposons que la suite $(u_n)_{n \in I}$ converge vers $\ell = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $p \in I, \forall n \geq p, |u_n - \ell| < \varepsilon$. On en déduit, en prenant les parties réelles que $\forall n \geq p, |x_n - a| \leq |u_n - \ell| < \varepsilon$. On peut conclure que la suite $(x_n)_{n \in I}$ converge vers a .

De même, en prenant les parties imaginaires que $\forall n \geq p, |y_n - b| \leq |u_n - \ell| < \varepsilon$. On peut conclure que la suite $(y_n)_{n \in I}$ converge vers b .

De plus, d'après l'inégalité triangulaire, toujours pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

$$|z| \leq |x| + |iy| = |x| + |y|.$$

Supposons que la suite $(x_n)_{n \in I}$ converge vers a et que la suite $(y_n)_{n \in I}$ converge vers b .

On se donne $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $p \in I$, $\forall n \geq p$, $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. On sait aussi qu'il existe $q \in I$, $\forall n \geq q$, $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

On pose $\ell := a + ib$. On a alors pour $n \geq \max(p, q)$,

$$|u_n - \ell| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

On peut conclure que la suite $(u_n)_{n \in I}$ converge vers ℓ . □

On en déduit l'unicité de la limite, ce qui permet de noter $\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, ainsi que les opérations sur les limites :

Théorème 4

Soit $\ell \in \mathbb{C}$ et (u_n) une suite qui converge vers ℓ .

Soit $\ell' \in \mathbb{C}$ et (v_n) une suite qui converge vers ℓ' .

On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell',$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = \ell - \ell',$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \times v_n) = \ell \times \ell',$$

et si de plus $\forall n \in I$, $v_n \neq 0$ et si $\ell' \neq 0$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{\ell'}.$$

Démonstration 4

On pose, pour tout $n \in I$, $u_n = x_n + iy_n$ et $v_n = r_n + is_n$ avec x_n, y_n, r_n et s_n réels. On pose aussi $\ell = a + bi$ et $\ell' = a' + b'i$ avec a, b, a' et b' réels.

D'après le théorème 3, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = a'$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = b'$.

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + r_n) = a + a'$: $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n + s_n) = b + b'$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = (a + a') + i(b + b') = \ell + \ell'$.

Même travail pour $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = (a - a') + i(b - b') = \ell - \ell'$.

On a aussi $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot r_n - y_n \cdot s_n) = a \cdot a' - b b'$: $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot s_n + y_n \cdot r_n) = a \cdot b' + b \cdot a'$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \cdot v_n) = (a \cdot a' - b b') + i(a \cdot b' + b \cdot a') = \ell \cdot \ell'$.

De même $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n \cdot r_n + y_n \cdot s_n}{r_n^2 + s_n^2} = \frac{a \cdot a' + b \cdot b'}{a'^2 + b'^2}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n \cdot s_n - y_n \cdot r_n}{r_n^2 + s_n^2} = \frac{a \cdot b' - b \cdot a'}{a'^2 + b'^2}$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \cdot v_n) = \frac{(a \cdot a' + b b') + i(a \cdot b' - b \cdot a')}{a'^2 + b'^2} = \frac{\ell}{\ell'}$. □

Remarque 1.

Bien entendu, on n'a plus de suites croissantes dans \mathbb{C} ni de théorèmes d'encadrement, majoration, etc. Il faut alors revenir aux suites coordonnées.

5.2 Limites de fonctions à valeurs complexes

On rappelle aussi une définition des fonctions qui convergent vers un réel :

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles, a un réel **adhérent** à D (voir la définition 5 page 101 du cours de première), $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles.

Dire que la fonction f a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (|x - a| < \alpha) \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Définition 3.

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles, a un réel **adhérent** à D , $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes.

Dire que la fonction f a pour limite $\ell \in \mathbb{C}$ en a signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, (|x - a| < \alpha) \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Théorème 5

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles, a un réel adhérent à D , $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes.

On écrit $\forall x \in D, f(x) := g(x) + ih(x)$ avec $g(x)$ et $h(x)$ réels.

Pour que la fonction f admette une limite en a , il faut et il suffit que les deux fonctions à valeurs réelles g et h admettent une limite en a .

Dans ce cas on a $\lim_a f = \lim_a g + i \lim_a h$.

Démonstration 5

Démonstration identique à la démonstration 3. □

Théorème 6

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles, a un réel adhérent à D , $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes.

Soit $\ell \in \mathbb{C}$ et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction qui a pour limite $\ell \in \mathbb{C}$ en a .

Soit $\ell' \in \mathbb{C}$ et $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction qui a pour limite $\ell' \in \mathbb{C}$ en a .

On a

$$\lim_a (f + g) = \ell + \ell',$$

$$\lim_a (f - g) = \ell - \ell',$$

$$\lim_a (f \times g) = \ell \times \ell',$$

et si de plus $\forall x \in D, g(x) \neq 0$ et si $\ell' \neq 0$, alors

$$\lim_a \frac{f}{g} = \frac{\ell}{\ell'}.$$

Démonstration 6

Démonstrations identiques à la démonstration 4. □

Remarque 2.

On peut en ne modifiant que peu de signes énoncer et démontrer des théorèmes semblables pour les limites à droite ou à gauche.

Remarque 3.

À nouveau, on n'a plus de fonctions croissantes à valeurs dans \mathbb{C} ni de théorèmes d'encadrement, majoration, etc. Il faut alors revenir aux fonctions coordonnées.

5.3 Dérivées de fonctions à valeurs complexes**Définition 4.**

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles. $a \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes.

On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe deux complexes α et β et une fonction ε définie sur D tels que

$$\forall x \in D, f(x) = \alpha + \beta(x - a) + (x - a)\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

Théorème 7

Les nombres complexes α et β définis plus haut sont uniques.

De plus $\alpha = f(a)$ et $\beta = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Démonstration 7

L'égalité $f(x) = \alpha + \beta(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$ valide pour tout $x \in D$ donne pour $x = a$:

$f(a) = \alpha + \beta \times 0 + 0 \times \varepsilon(a)$, donc $f(a) = \alpha$, ce qui assure l'unicité de α .

On en déduit pour $x \in D \setminus \{a\}$, $f(x) - f(a) = \beta(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$ donc $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \beta + \varepsilon(x)$.
Le second membre a pour limite β quand x tend vers a . Cela assure aussi l'unicité de β . \square

Définition 5.

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles, $a \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes, dérivable en a .

On appelle nombre dérivé de f le nombre complexe

$$f'(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Comme conséquence du théorème 5, on a le théorème suivant :

Théorème 8

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles, a un réel adhérent à D , $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes.

On écrit $\forall x \in D$, $f(x) := g(x) + ih(x)$ avec $g(x)$ et $h(x)$ réels et $\bar{f}(x) := g(x) - ih(x)$.

Pour que la fonction f soit dérivable en a , il faut et il suffit que les deux fonctions à valeurs réelles g et h soient dérivables en a .

Dans ce cas on a $f'(a) = g'(a) + ih'(a)$ et $\bar{f}'(a) = g'(a) - ih'(a) = \overline{f'(a)}$.

On a les mêmes théorèmes sur les opérations avec des fonctions dérivables que pour les fonctions réelles, avec des démonstrations identiques. Voir pour cela le paragraphe 4.2 page 134 du cours de première.

Théorème 9

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles, $a \in D$. $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ et

$g : D \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions à valeurs complexes, dérivables en a .

Les fonctions $f + g$, $f - g$ et $f \times g$ sont dérivables en a et

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a), \quad (f - g)'(a) = f'(a) - g'(a), \quad (f \times g)'(a) = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a).$$

Si de plus la fonction g ne s'annule pas sur D , alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \times g(a) - f(a) \times g'(a)}{g(a)^2}.$$

5.4 Courbes planes

5.4.1 Définitions

Définition 6.

On appelle **courbe plane** toute fonction à valeurs complexes

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto f(t) \end{aligned}$$

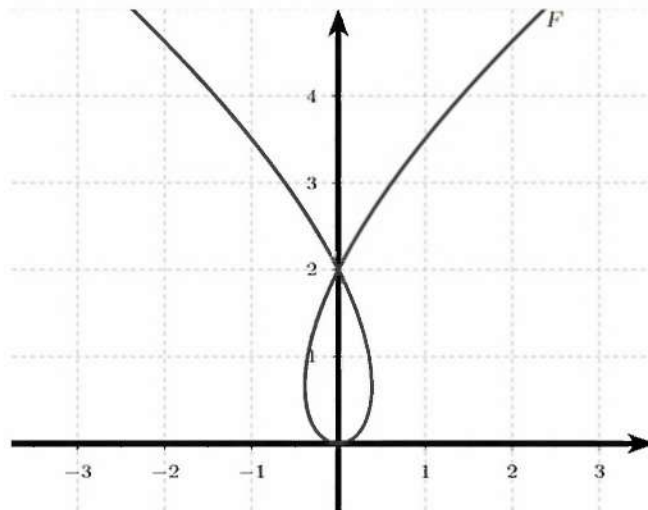
où D est un intervalle ou une réunion d'intervalles.

Soit $t \in D$, on appelle point de la courbe f de paramètre t , le point M_t du plan complexe d'affixe $f(t)$.

Du point de vue cinématique, le point M_t est la position du point sur la courbe à l'instant t .

Exemple 1

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$
 $t \longmapsto t(1+it)^2$



Il est indifférent de se donner la courbe f ou ses parties réelles et imaginaires, soit

$$\begin{aligned} F : D &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t)) \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(t) &:= \Re(f(t)) \\ y(t) &:= \Im(f(t)) \end{cases}$$

Exemple 2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 $t \mapsto (t(1-t^2), 2t^2)$.

La fonction x est impaire, la fonction y est paire. Donc la courbe F est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

t	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$	
$x'(t)$	1	+	0	-
$x(t)$	0	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$-\infty$	
$y'(t)$	0	+	4	+
$y(t)$	0	2	$+\infty$	

5.4.2 Tangentes**Définition 7.**

On appelle **point régulier** d'une courbe plane

$$f : D \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto f(t)$$

tout réel $t \in D$ tel que $f'(t)$ existe et soit non nul.

Version réelle : On appelle point régulier d'une courbe plane

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto (x(t), y(t))$$

tout réel $t \in D$ tel que le vecteur de coordonnées $(x'(t), y'(t))$ existe et soit différent du vecteur nul.

Définition 8.

On appelle **tangente** d'une courbe plane

$$\begin{aligned} F : D &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

en un point régulier $t \in D$ la droite passant par $M_t(x(t), y(t))$ de vecteur directeur de coordonnées $(x'(t), y'(t))$.

Du point de vue cinématique, le vecteur de coordonnées $(x'(t), y'(t))$ est le **vecteur vitesse**. Sa norme s'appelle la **vitesse**.

Exemple 3

Soit g la fonction numérique d'une variable réelle

$$\begin{aligned} g : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) \end{aligned}$$

où D est un intervalle. On suppose de plus que g est dérivable en $a \in D$.

La tangente à la courbe représentative au point d'abscisse a passe par le point de coordonnées $(a, g(a))$ et a pour coefficient directeur $g'(a)$. Autrement dit elle admet le vecteur de coordonnées $(1, g'(a))$ comme vecteur directeur.

Maintenant, on considère la courbe plane

$$\begin{aligned} F : D &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, g(t)) \end{aligned}$$

La fonction F est dérivable en a et de plus $F'(a) = (1, g'(a)) \neq (0, 0)$, donc a est un point régulier.

De plus la tangente en a passe par le point de coordonnées $(a, g(a))$ et admet le vecteur de coordonnées $(1, g'(a))$ comme vecteur directeur.

Les deux notions de tangentes coïncident. On peut conserver le même mot pour les deux.

5.4.3 Changement de paramétrage

Soit la courbe plane, dérivable sur D ,

$$\begin{aligned} F : D &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \phi : D' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \phi(t) \end{aligned}$$

une fonction dérivable sur un intervalle D' . On suppose de plus que $\forall t \in D', \phi(t) \in D$.

La fonction

$$G = F \circ \phi : D' \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto (x(\phi(t)), y(\phi(t)))$$

est dérivable sur D' .

De plus $\forall t \in D'$, $G'(t) = (\phi'(t).x'(\phi(t)), \phi'(t).y'(\phi(t))) = \phi'(t).(x'(\phi(t)), y'(\phi(t))) = \phi'(t).F'(t)$.

De ce fait si t est un point régulier de F et si $\phi'(t) \neq 0$ alors $\phi(t)$ est un point régulier de G . De plus la tangente à F en $\phi(t)$ est la tangente à G en t .

Remarque 4.

Un changement de paramétrage sur une courbe se traduit en cinématique par un changement de loi horaire : On peut effectuer un même trajet (sur une même courbe) à différentes vitesses et dans deux sens différents. Dans ce dernier cas, le changement de paramétrage ϕ est une fonction décroissante de t .

5.4.4 Asymptotes

Définition 9.

Soit la courbe plane, définie sur D ,

$$F : D \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto (x(t), y(t))$$

Soit a un point adhérent à D . La lettre a peut désigner un nombre réel, $-\infty$ ou $+\infty$. Si

1. $\lim_{t \rightarrow a} (x(t)^2 + y(t)^2) = +\infty$.
2. $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)}$ existe et est finie. Soit m cette limite.
3. $\lim_{t \rightarrow a} y(t) - mx(t)$ existe et est finie. Soit p cette limite.

alors on dit que la courbe F présente une asymptote d'équation $y = mx + p$ quand t tend vers a .

Cas particulier important : Soit

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto f(t)$$

On considère la courbe plane, définie sur D .

$$F : D \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto (t, f(t))$$

Dire que la courbe F présente une asymptote d'équation $y = mx + p$ quand t tend vers a (adhérent à D) c'est dire que $\lim_{t \rightarrow a} |f(t)| = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow a} f(t) - mx - p = 0$.

5.5 Travaux dirigés

Travaux dirigés 1 (Plaisir des yeux (?))

Ouvrir une session **Geogebra**.

- Définir un curseur entier n entre -7 et 7 .
- Définir la fonction $f(x) = x/(1 + \text{abs}(x))$, puis masquer cette fonction.
- Définir la courbe $\text{courbe}(f(2^n * \cos(t))/f(2^n), f(2^n * \sin(t))/f(2^n), t, -\pi, \pi)$.
- Animer le curseur (clic droit sur le curseur et Animer)
- Redéfinir la fonction f avec cette fois $f(x) = \arctan(x)$.
- Vérifier que les deux fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$ et $x \in \mathbb{R} \mapsto \arctan(x)$ sont toutes les deux paires et croissantes sur \mathbb{R} .
- Démontrer que si la fonction f est croissante et impaire, alors la courbe tracée reste dans le carré $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$.
- Tracer avec **Geogebra**, l'astroïde $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$
- Redéfinir la fonction f avec cette fois $f(x) = x^3/(1 + x^2)$ puis $f(x) = x^3/(1 + x^2 * \text{abs}(x))$. Que se passe-t-il pour la courbe ?
- Redéfinir la fonction f avec une fonction f impaire mais qui n'est plus monotone. Que se passe-t-il pour la courbe ?

Travaux dirigés 2 (Le pentagramme de Vénus)

On suppose que les trajectoires de la Terre et de Vénus autour du Soleil sont des cercles situés dans un même plan.

On prend comme unité de longueur l'unité astronomique, c'est-à-dire la distance Terre-Soleil.

On prend comme distance Vénus-Soleil $v := 0,723$. On suppose que Vénus effectue 13 révolutions pendant que la Terre en effectue 8.

Tracer dans le plan la position de Vénus par rapport à une Terre fixe à l'origine du repère.

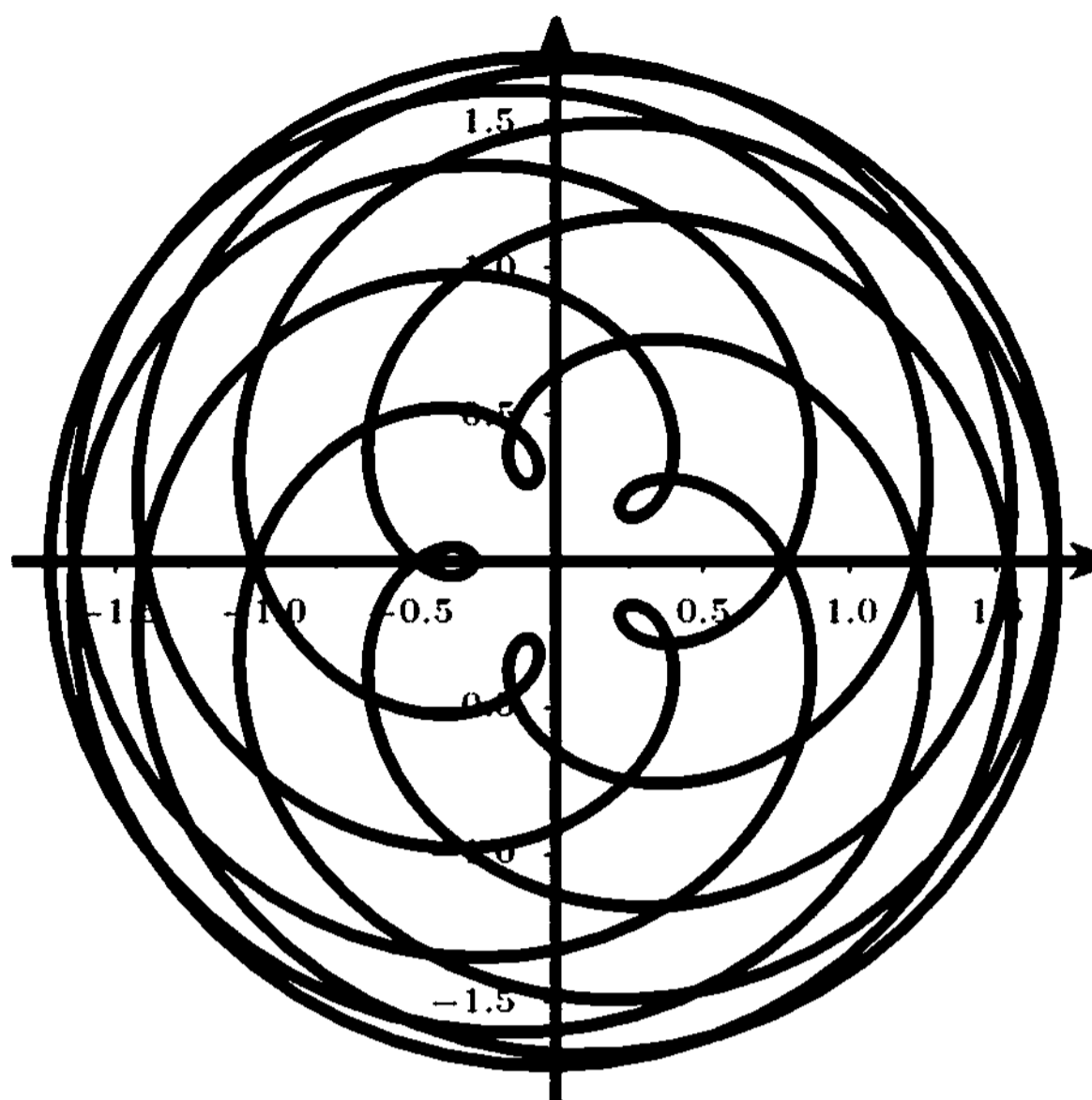
L'observation va se dérouler sur 13 ans.

Dans un repère lié au Soleil où la position de la Terre est donnée par $T(\cos(t), \sin(t))$, la position de Vénus est donnée par $V(v \cos(\frac{13}{8}t), v \sin(\frac{13}{8}t))$. Dans ce modèle, l'unité est $\frac{1}{2\pi}$ d'année, c'est-à-dire $\frac{1}{2\pi}$ de révolution de la Terre autour du Soleil.

On a donc $\overrightarrow{TV} \left(v \cos(\frac{13}{8}t) - \cos(t), v \sin(\frac{13}{8}t) - \sin(t) \right)$ et la courbe cherchée est donc

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = v \cos(\frac{13}{8}t) - \cos(t) \\ y(t) = v \sin(\frac{13}{8}t) - \sin(t) \end{cases} \quad (t \in [0, 16\pi]),$$

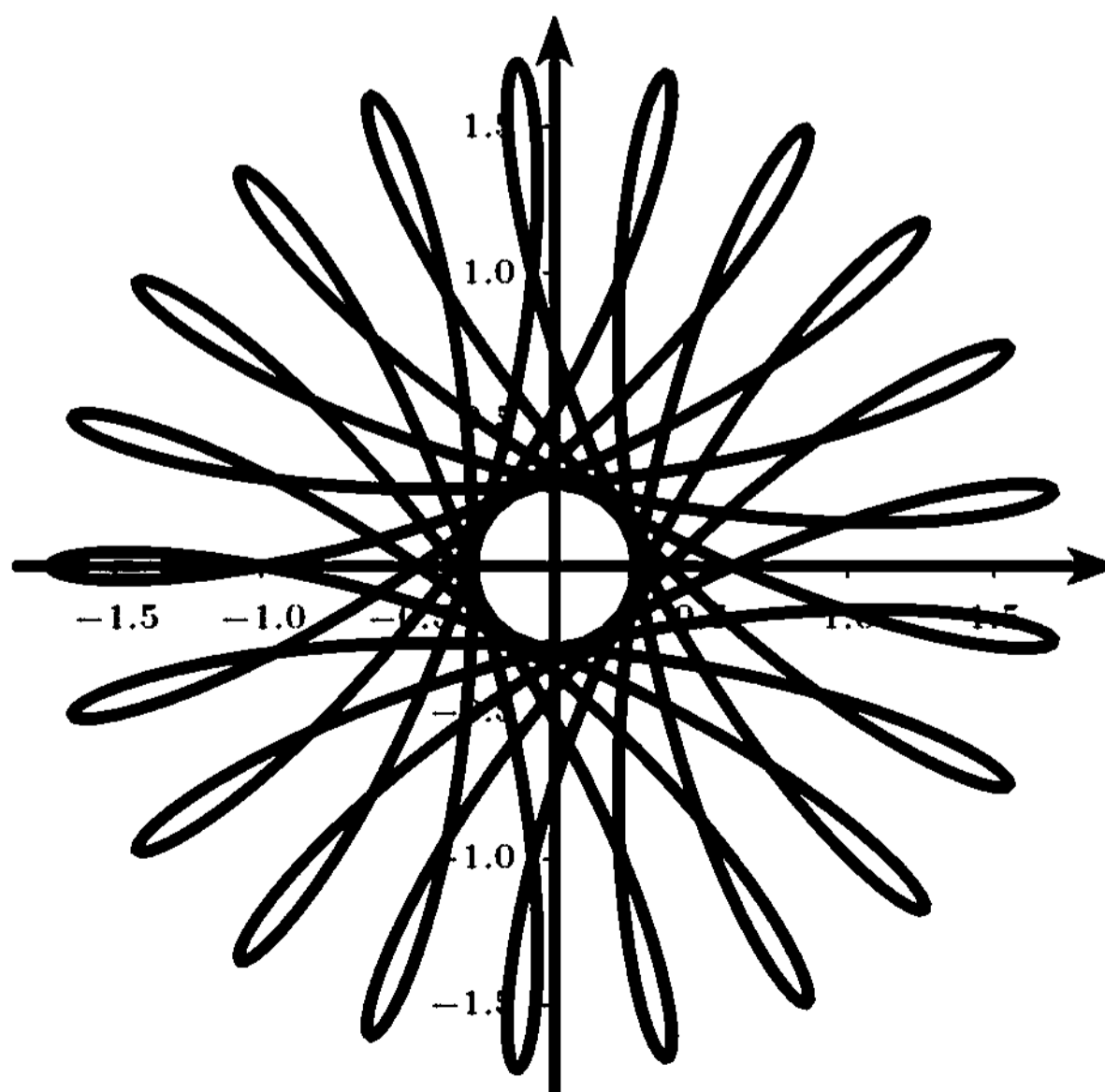
puisqu'on attend 8 ans pour que Vénus reprenne sa position dans le ciel.

**Remarque 5.**

Ce n'était pas dans l'énoncé, mais on a choisi dans la solution que Vénus tournerait dans le même sens que la Terre. C'est conforme à ce qu'on peut observer. Si on avait choisi le sens contraire – ce qui revient à changer t en $-t$ pour Vénus – on aurait obtenu la courbe

$$\Lambda : \begin{cases} x(t) = v \cos(\frac{13}{8}t) - \cos(t) \\ y(t) = -v \sin(\frac{13}{8}t) - \sin(t) \end{cases} \quad (t \in [0, 16\pi]),$$

ce qui n'est pas du tout la même chose :

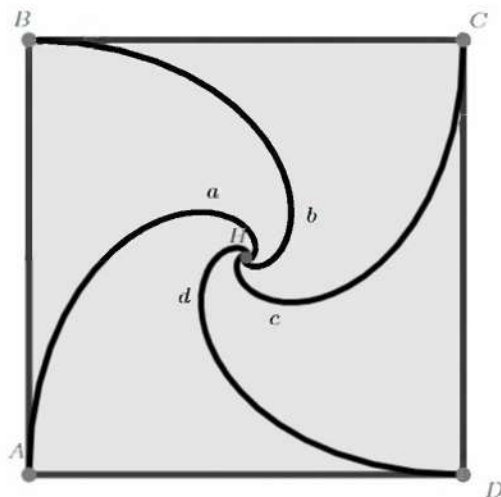


5.6 Exercices

Exercice 1 (Les chiens de Steinhaus).

Hugo a quatre chiens : Agnieszka, Bartosz, Czesława et Dawid.

Il les dispose aux quatre sommets d'un carré de 100 m de côté. À son signal de départ, Agnieszka court dans la direction de Bartosz, Bartosz dans celle de Czesława, Czesława dans celle de Dawid et Dawid dans celle de Agnieszka. Tous les chiens de Hugo courent à la vitesse de 10 m/s. Au bout de combien de temps vont-ils se retrouver au centre du carré ?

**Exercice 2.**

On considère la courbe définie par
$$\begin{cases} x(t) = \sin^2(t) \\ y(t) = (1 + \cos(t)) \sin(t) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Soit $M(t) (x(t), y(t))$ et $M_1(t) (x(t + \pi), y(t + \pi))$.

1. Étudier et tracer la courbe Γ .
2. Démontrer que $\overrightarrow{OM(t)}$ et $\overrightarrow{OM_1(t)}$ sont orthogonaux.
3. Soit $I(t)$ le milieu de $[M(t)M_1(t)]$ et $J \left(\frac{1}{2}, 0 \right)$.

Démontrer que $I(t)$ appartient au cercle de centre J passant par O .

Exercice 3.

Étudier la courbe définie par
$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 2t + 2 \\ y(t) = \frac{t^3 - t + 2}{t + 2} \end{cases} \quad t \neq -2.$$

Exercice 4.

Étudier la courbe définie par $\begin{cases} x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases} \quad t \neq -1$. Calculer $x\left(\frac{1}{t}\right)$ et $y\left(\frac{1}{t}\right)$.

Exercice 5.

Tracer la parabole d'équation $y = x^2 + 2$.

Étudier la courbe Γ définie par $\begin{cases} x(t) = t + \frac{1}{t+1} \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2+1} \end{cases} \quad t \neq -1$.

Exercice 6.

Tracer la droite d'équation $y = x$ ainsi que la parabole d'équation $x = y^2 + 3y + 3$.

Étudier la courbe Γ définie par $\begin{cases} x(t) = t^2 + t - 1 - \frac{1}{t} \\ y(t) = t - 1 - \frac{1}{t} \end{cases} \quad t \neq 0$.

Tracer les tangentes au point de paramètre $t = 1$ et au point de paramètre $t = -1$

5.7 Solutions

Solution 1 (Les chiens de Steinhaus)

On se place dans le référentiel lié à Agnieszka. Elle voit Bartosz droit devant elle à une distance qui diminue à la vitesse de 10 m/s. Au bout de 10 s elle aura rejoint Bartosz. Même chose pour les trois autres chiens.

Solution 2

1. Les fonctions $x \mapsto x(t)$ et $y \mapsto y(t)$ sont 2π -périodiques, donc on peut restreindre leur étude à un intervalle de longueur 2π par exemple $[-\pi, \pi]$. La fonction x est paire et y est impaire, donc $M(-t)$ est obtenu comme symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe des abscisses. Donc on peut restreindre l'étude à l'intervalle $[0, \pi]$.

On a $\forall t \in \mathbb{R}$. $x'(t) = 2 \sin(t) \cos(t)$

et $y'(t) = \cos(t) + \cos(2t) = \cos(t) + 2 \cos^2(t) - 1 = 2 \left(\cos(t) - \frac{1}{2} \right) (\cos(t) + 1)$.

On en déduit le tableau de variations conjoint :

t	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π		
$x'(t)$	0	+	+	0	-	()
$x(t)$	0	$\frac{3}{4}$	1	0		
$y'(t)$	0	+	0	-	-	()
$y(t)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	1	0		

On constate que la seule valeur de $t \in [0, \pi]$ pour laquelle $\frac{d\vec{M}}{dt} (x'(t), y'(t))$ est nul est $t = \pi$. En dehors de cette valeur, la tangente est dirigée par ce vecteur. En $t = \pi$:

$$\frac{y(t+\pi) - y(\pi)}{x(t+\pi) - x(\pi)} = \frac{y(t+\pi)}{x(t+\pi)} = -\frac{1 - \cos(t)}{\sin(t)} = -\frac{2 \sin(\frac{t}{2}) \sin(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2}) \cos(\frac{t}{2})} = -\frac{\sin(\frac{t}{2})}{\cos(\frac{t}{2})}.$$

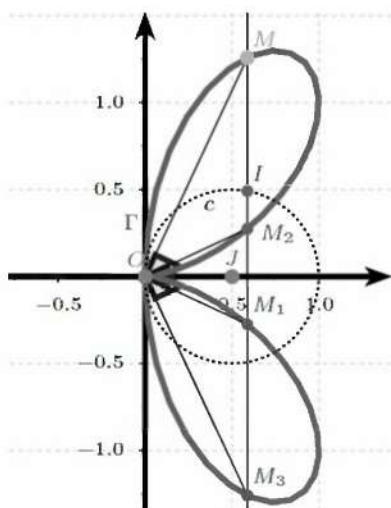
Donc $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t+\pi) - y(\pi)}{x(t+\pi) - x(\pi)} = 0$ et on obtient une tangente horizontale au point de paramètre π .

2. On a $M_1(t) (\sin^2(t), -\sin(t)(1 - \cos(t)))$. Donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM}(t) \cdot \overrightarrow{OM_1}(t) &= \sin^4(t) - \sin(t)(1 - \cos(t)) \sin(t)(1 + \cos(t)) \\ &= \sin^4(t) - \sin^2(t)(1 - \cos^2(t)) \\ &= \sin^4(t) - \sin^2(t) \sin^2(t) = 0. \end{aligned}$$

C'est bien dire que $\overrightarrow{OM}(t)$ et $\overrightarrow{OM_1}(t)$ sont orthogonaux.

3.



On pose $I(t) (X(t), Y(t))$. On a

$$\begin{aligned} X(t) &= \frac{1}{2} (\sin^2(t) + \sin^2(t)) \\ &= \sin^2(t) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2t)). \\ Y(t) &= \frac{1}{2} ((1 + \cos(t)) \sin(t) - (1 - \cos(t)) \sin(t)) \\ &= \frac{1}{2} (2 \cos(t) \sin(t)) = \frac{1}{2} \sin(2t). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{1}{4} \cos^2(2t) + \frac{1}{4} \sin^2(2t) = \frac{1}{4}.$$

C'est bien dire que $I(t)$ appartient au cercle de centre J et de rayon $\frac{1}{2}$. Ce cercle passe par O .

Solution 3

Étude des branches infinies :

$$\text{On a } \frac{x(t)}{y(t)} = \frac{t^3 - t + 2}{(t+2)(t^2 - 2t + 2)} \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} a = 1.$$

De plus

$$\begin{aligned} y(t) - ax(t) &= y(t) - x(t) = \frac{t^3 - t + 2 - (t+2)(t^2 - 2t + 2)}{t+2} \\ &= \frac{t^3 - t + 2 - (t^3 - 2t^2 + 2t + 2t^2 - 4t + 4)}{t+2} \\ &= \frac{-t + 2 + 2t - 4}{t+2} = \frac{t-2}{t+2} \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} b = 1. \end{aligned}$$

Donc la droite d'équation $y = ax + b$ c'est-à-dire $y = x + 1$ est asymptote à la courbe.

De plus $y(t) - x(t) - 1 = \frac{t-2}{t+2} - 1 = -\frac{4}{t+2}$. Donc la courbe est au-dessus de l'asymptote pour $t < -2$ et au-dessous de l'asymptote pour $t > -2$.

On a $\forall t \neq -2$, $x'(t) = 2t - 2$ et

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{(3t^2 - 1)(t+2) - t^3 + t - 2}{(t+2)^2} \\ &= \frac{3t^3 + 6t^2 - t - 2 - t^3 + t - 2}{(t+2)^2} \\ &= \frac{2t^3 + 6t^2 - 4}{(t+2)^2} \\ &= \frac{2(t+1)(t^2 + 2t - 2)}{(t+2)^2}. \end{aligned}$$

Les racines de $t^2 + 2t - 2$ sont $t_1 = -1 - \sqrt{3}$ et $t_2 = -1 + \sqrt{3}$.On en déduit les tableaux de variations de x et de y :

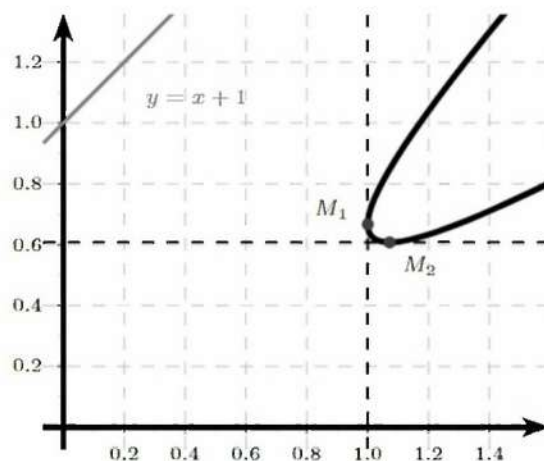
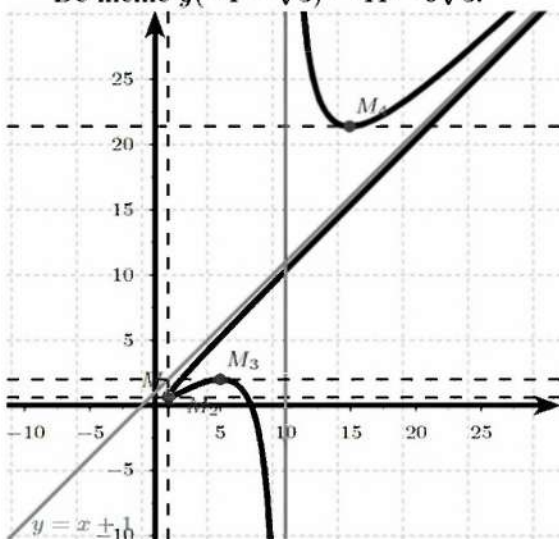
t	$-\infty$	$-\sqrt{3} - 1$	-2	-1	$\sqrt{3} - 1$	1	$+\infty$								
$x'(t)$		-	-	-	-	-	0	+							
$x(t)$	$+\infty$	\searrow	$4(2 + \sqrt{3})$	\searrow	10	\searrow	5	\searrow	$4(2 - \sqrt{3})$	\searrow	1	\nearrow	$+\infty$		
t	$-\infty$	$-\sqrt{3} - 1$	-2	-1	$\sqrt{3} - 1$	1	$+\infty$								
$y'(t)$		-	+		+	0	-	0	+	+					
$y(t)$	$+\infty$	\searrow	$11 + 6\sqrt{3}$	\nearrow	$+\infty$		$-\infty$	\nearrow	2	\searrow	$11 - 6\sqrt{3}$	\nearrow	$\frac{2}{3}$	\nearrow	$+\infty$

Pour calculer les valeurs de x et de y en $-1 \pm \sqrt{3}$ on écrit :

$x(t) = t^2 - 2t + 2 = \underbrace{t^2 + 2t - 2}_{\text{s'annule en } -1 \pm \sqrt{3}} - 4t + 4$ donc $x(-1 - \sqrt{3}) = 4 + 4 \pm \sqrt{3} + 4 = 8 + 4\sqrt{3}$ et de même $x(-1 + \sqrt{3}) = 8 - 4\sqrt{3}$.

De la même façon, $t^3 - t + 2 = (t - 2)(t^2 + 2t - 2) + 5t - 2$. Donc $y(-1 - \sqrt{3}) = \frac{-5 - 5\sqrt{3} - 2}{1 - \sqrt{3}} = \frac{(-7 - 5\sqrt{3})(1 + \sqrt{3})}{-2} = \frac{(7 + 5\sqrt{3})(1 + \sqrt{3})}{2} = \frac{7 + 7\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 15}{2} = \frac{22 + 12\sqrt{3}}{2} = 11 + 6\sqrt{3}$.

De même $y(-1 - \sqrt{3}) = 11 - 6\sqrt{3}$.



Solution 4

Les deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. $\forall t \neq -1$, $x'(t) = \frac{3(1+t^3) - 3t^2 \times 3t}{(1+t^3)^2} = \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$,

qui s'annule lorsque $t^3 = \frac{1}{2}$, soit $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Pour ce point, on a $x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{\frac{3}{\sqrt[3]{2}}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4}$, et

$$y\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{2}{2^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{2}.$$

Deuxième coordonnée : $y'(t) = \frac{6t(1+t^3) - 3t^2 \times 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$ s'annule pour $t = 0$ (on est alors à

l'origine), et pour $t = \sqrt[3]{2}$, valeur pour laquelle $x(\sqrt[3]{2}) = \frac{3\sqrt[3]{2}}{1+2} = \sqrt[3]{2}$, et $y(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{4}$ (autrement dit, ce point est symétrique par rapport à la première bissectrice de celui trouvé pour l'annulation de x'). Il n'y a pas de point stationnaire.

t	$-\infty$	-1	0	$1/\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$+\infty$
$x'(t)$	+		+	+	0	-
x	0 \nearrow $+\infty$		$-\infty \nearrow 0 \nearrow \sqrt[3]{4} \searrow \sqrt[3]{2} \searrow 0$			
$y'(t)$	-		-	0	+	-
y	0 \searrow $-\infty$		$+\infty \searrow 0 \searrow \sqrt[3]{2} \nearrow \sqrt[3]{4} \nearrow 0$			

Pas d'asymptote en $\pm\infty$ puisqu'on se rapproche alors simplement de l'origine. En revanche, on peut étudier ce qui se passe en -1 : $\frac{y(t)}{x(t)} = t$ a évidemment pour limite -1 . on calcule donc $y(t) + x(t) = \frac{3(t+t^2)}{1+t^3} = \frac{3t(1+t)}{(1+t)(t^2-t+1)} = \frac{3t}{t^2-t+1}$, qui a pour limite $\frac{-3}{3} = -1$ quand t tend vers -1 . Il y a donc à cet endroit une asymptote oblique d'équation $y = -x - 1$.

On a $\forall t \neq -1, x(\frac{1}{t}) = y(t)$ et $y(\frac{1}{t}) = x(t)$. La courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Cette courbe s'appelle le **folium de Descartes**.

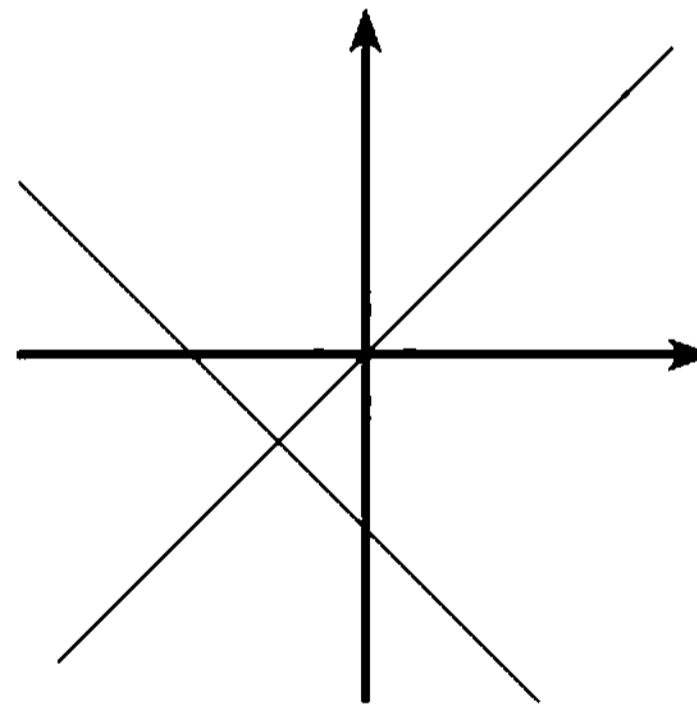


FIGURE 5.1 – Folium de Descartes

Solution 5

On a pour $t \neq -1, x'(t) = 1 - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{t^2+2t}{(1+t)^2} = \frac{t(t+2)}{(1+t)^2}$ et $y'(t) = 2t - \frac{2t}{(1+t^2)^2} = 2t \frac{t^4+2t^2}{(1+t^2)^2}$.

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$x'(t)$	+		0	-	+
$x(t)$	$-\infty \nearrow -3 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 1 \nearrow +\infty$		

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-3,84$	$-$	$-1,5$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\rightarrow 4,2$		$\rightarrow 1,5$		$\rightarrow 1$		$\rightarrow +\infty$	

On a successivement pour tout $t \neq -1$, $x(t)^2 = t^2 + \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{2t}{1+t}$,

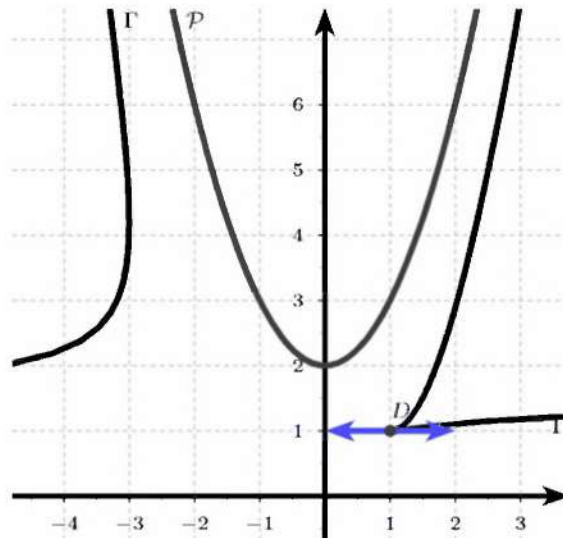
puis $y(t) - x(t)^2 = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{2t}{1+t}$,

et enfin $y(t) - x(t)^2 - 2 = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{2}{1+t}$. Donc $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) - x(t)^2 - 2 = 0$.

Cela signifie que la parabole \mathcal{P} d'équation $y = x^2 + 2$ est asymptote à Γ .

En regardant le tableau conjoint, on constate que Γ a un unique point singulier : le point $D(1, 1)$ de paramètre $t = 0$. Pour obtenir la tangente en ce point on calcule :

$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{t^2 + \frac{1}{1+t^2}}{t + \frac{1}{1+t}} = t \frac{1 + \frac{1}{1+t^2}}{1 + \frac{1}{1+t}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$. C'est dire que Γ admet en D une tangente horizontale.



Solution 6

On a, pour $t \neq 0$, $x'(t) = 2t + 1 + \frac{1}{t^2} = \frac{2t^3 + t^2 + 1}{t^2} = \frac{(2t^2 - t + 1)(t + 1)}{t^2}$. On a pour tout t , $2t^2 - t + 1 > 0$ (discriminant négatif). Donc $x'(t)$ est du signe de $t + 1$.

Pour $t \neq 0$, $y'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0$.

On en déduit le tableau conjoint.

t	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$	$+$
$x(t)$	$+\infty$		0	$+\infty$	

t	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$	$+$
$x(t)$	$+\infty$		0	$+\infty$	

t	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	2	$+$	$+$
$y(t)$	$-\infty$		-1	$+\infty$	

t	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	2	$+$	$+$
$y(t)$	$-\infty$		-1	$+\infty$	

On a $\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = -\infty$, $\lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) = +\infty$, et $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) - x(t) = 0$. Donc la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe.

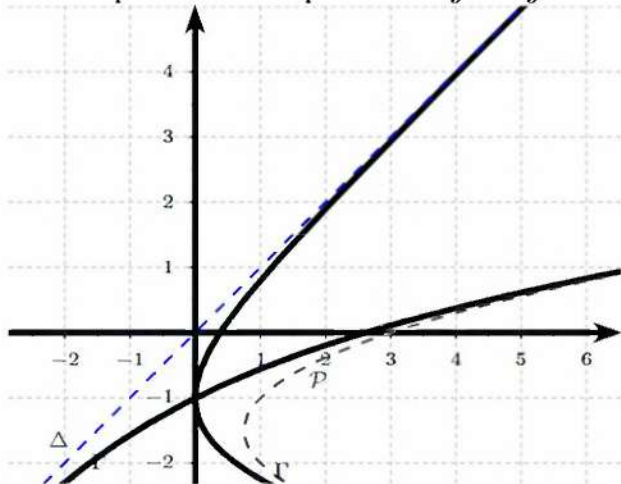
On a $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = +\infty$ et $\forall t \neq 0$, on trouve successivement :

$$x - y^2 = t^2 + t - 1 - \frac{1}{t} - \left(t^2 - 2t + 1 - 2 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} \right) = 3t - \frac{3}{t} - \frac{1}{t^2},$$

$$x - y^2 - 3y = 3 - \frac{1}{t^2} \text{ et}$$

$$x - y^2 - 3y - 3 = \frac{1}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0.$$

Donc la parabole \mathcal{P} d'équation $x - y^2 - 3y - 3 = 0$ est asymptote à la courbe Γ .



Le point $M(0, -1)$ est obtenu pour $t = -1$ et pour $t = 1$.

La tangente au point de paramètre -1 est dirigé par $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Elle est donc verticale et c'est l'axe des ordonnées. La tangente au point de paramètre 1 est dirigé par $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Elle a donc pour équation $4(y - 1) = 2x$.

Chapitre 6

Exponentielle et logarithme

Sommaire

6.1	Une nouvelle fonction	204
6.2	Propriétés	207
6.3	Logarithme népérien	211
6.4	Retour vers l'intégration	215
6.5	Les autres fonctions exponentielles	219
6.6	Exponentielle complexe	223
6.7	Vrai ou Faux ?	231
6.8	Exercices	233
6.9	Solutions	245
6.10	Travaux dirigés	273
6.11	Problèmes	278

Une aventure ancestrale

De tout temps les mathématiciens ont essayé de remplacer les multiplications par des additions et surtout les divisions par des soustractions : moins coûteuses en temps de calcul et plus faciles à effectuer sans erreur, surtout à l'époque. Nous avons déjà croisé les tables de quarts de carré page 125 au détour du cours de seconde.

D'autres tables numériques ont été essayées avec des fortunes diverses.

Au XVII^e siècle, les tables de Napier et Briggs constituent une avancée considérable. Non seulement elles tabulent une fonction logarithme f qui vérifie $f(xy) = f(x) + f(y)$ pour tous nombres positifs, mais de plus elle résout le problème des primitives de la fonction inverse.

Cette fonction est un télescope qui permet de faire venir à portée de main des nombres astronomiques.

Enfin, sa fonction réciproque, une fonction exponentielle, a des propriétés fascinantes. Pour commencer, elle est – à un facteur près – sa propre dérivée. Elle ouvre la voie à la résolution des équations différentielles qui seront abordées au chapitre 9.

Une fois de plus le lecteur est invité à prendre connaissance de cette aventure dans les ouvrages d'histoire des mathématiques.

Les mathématiques sont une épopée dont les éblouissants faits d'armes tiennent sur une feuille de papier.

Nous avons choisi – à rebours de la chronologie – de commencer par l'étude de l'exponentielle. L'approche historique est tout aussi intéressante et développée dans de nombreux manuels.

6.1 Une nouvelle fonction

Soit x un nombre réel. On considère les suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ définies par

$$\forall n > |x|, u_n(x) := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n(x) := \frac{1}{u_n(-x)} = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

On a pour tout $n > |x|$, $n > |x| > x$ donc $n > 0$, $1 > \frac{x}{n}$ et $1 - \frac{x}{n} > 0$. De ce fait, la suite $(v_n(x))_{n>|x|}$ est bien définie.

On rappelle l'inégalité de Bernoulli (théorème 18 page 59 du cours de première) :

$$\forall a > -1, \forall n \in \mathbb{N}, (1 + a)^n \geq 1 + na.$$

On va maintenant démontrer que la suite $(u_n(x))_{n>|x|}$ est croissante.

Puisque tous les termes de la suite $(u_n(x))_{n>|x|}$ sont strictement positifs, on peut utiliser le théorème 11 page 326 du cours de seconde.

On a pour tout $n > |x|$,

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} &= \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \\ &= \left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \times \left(1 + \frac{x}{n}\right) \end{aligned}$$

en multipliant le numérateur et le dénominateur par $1 + \frac{x}{n}$. Or,

$$\begin{aligned} \frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}} - 1 &= \frac{1 + \frac{x}{n+1} - 1 - \frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}} \\ &= \frac{\frac{x}{n+1} - \frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}} \\ &= -\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1 + \frac{x}{n}}. \end{aligned}$$

En posant $a := -\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1 + \frac{x}{n}}$ on a donc $\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}} = 1 + a > 0$ et par conséquent, $a > -1$.

D'après l'inégalité de Bernoulli, on a

$$\begin{aligned} (1 + a)^{n+1} &\geq 1 + (n+1)a \\ &\geq 1 - \frac{\frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}} \\ &\geq \frac{1 + \frac{x}{n} - \frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}} \\ &\geq \frac{1}{1 + \frac{x}{n}}. \end{aligned}$$

Donc $\left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \geq \frac{1}{1 + \frac{x}{n}}$, soit encore $\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \geq 1$ d'après le calcul de $\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}$ effectué plus haut.

La suite $(u_n(x))_{n > |x|}$ est donc croissante en vertu du théorème 11 page 326 du cours de seconde, et ce pour tout réel x .

On en déduit que la suite $\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}\right)_{n > |x|}$ est décroissante, et ce pour tout réel x . De ce fait – en changeant x en $-x$ – on déduit que $(v_n(x))_{n > |x|}$ est décroissante, et ce pour tout réel x .

Maintenant – afin de démontrer que les suites $(u_n(x))_{n > |x|}$ et $(v_n(x))_{n > |x|}$ sont adjacentes – on va démontrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n(x) - u_n(x)) = 0$.

Pour cela on fixe à nouveau $x \in \mathbb{R}$. On a, $\forall n > |x|$,

$$\begin{aligned} v_n(x) - u_n(x) &= \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} \left(1 - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right) \\ &= \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} \left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n\right). \end{aligned}$$

Puisque $0 \leq x^2 < n^2$, on a $0 < 1 - \frac{x^2}{n^2} \leq 1$ puis $0 < \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq 1$ et enfin $v_n(x) - u_n(x) \geq 0$.

De plus en posant cette fois $a := -\frac{x^2}{n^2}$, on a $-1 < a$ et d'après l'inégalité de Bernoulli,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n &\geq 1 + na \\ &\geq 1 - \frac{x^2}{n}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$v_n(x) - u_n(x) \leq v_n(x) \frac{x^2}{n}.$$

Or on sait que la suite $(v_n(x))_{n>|x|}$ est décroissante. Donc en posant $n_0 := [|x|] + 1$ le plus petit indice pour lequel les suites $(v_n(x))_{n>|x|}$ et $(u_n(x))_{n>|x|}$ sont définies, on a $\forall n > |x|$,

$$0 \leq v_n(x) - u_n(x) \leq v_{n_0}(x) \frac{x^2}{n}.$$

D'après le théorème d'encadrement 9 page 52 du cours de première, on peut dire que $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n(x) - u_n(x)) = 0$.

D'après le théorème 22 page 61 du cours de première, les deux suites adjacentes $(v_n(x))_{n>|x|}$ et $(u_n(x))_{n>|x|}$ convergent vers la même limite. On a donc justifié la

Définition 1.

Soit x un nombre réel. On note

$$\exp(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

Ce nombre $\exp(x)$ est appelé **exponentielle** de x . La fonction

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \exp(x) \end{aligned}$$

s'appelle la **fonction exponentielle**.

On note aussi $e := \exp(1)$.

Théorème 1

$$\forall x \in]-1, 1[, 1 + x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1-x}.$$

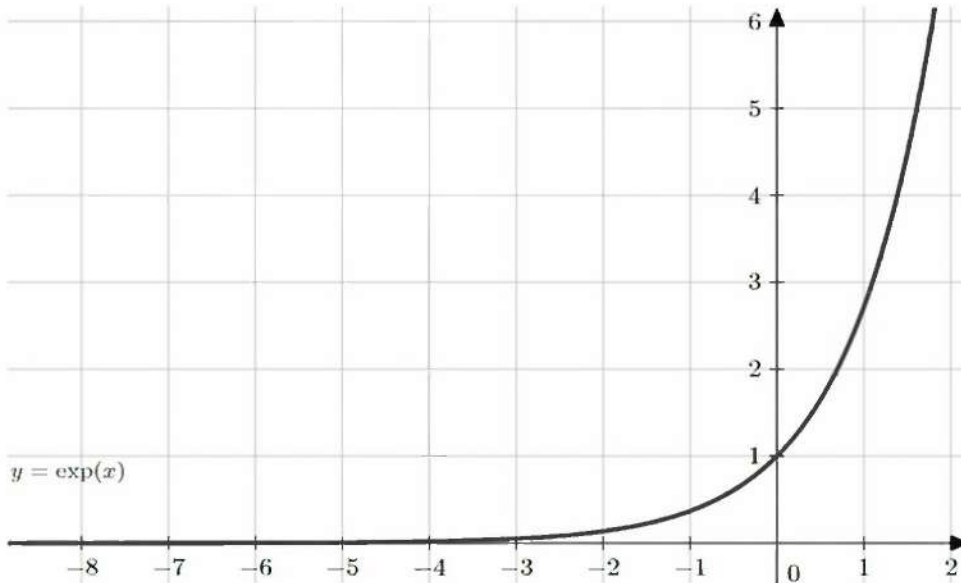
Démonstration 1

Pour $x \in]-1, 1[$, la suite $(u_n(x))_{n>0}$ est croissante et converge vers $\exp(x)$. D'après le théorème 20 page 60 du cours de première, on a $u_1(x) = 1 + x \leq \exp(x)$.

La suite $(v_n(x))_{n>0}$ est décroissante et converge vers $\exp(x)$. D'après le théorème 20 page 60 du cours de première, on a $v_1(x) = \frac{1}{1-x} \geq \exp(x)$. □

6.2 Propriétés

6.2.1 Représentation graphique



6.2.2 L'équation fonctionnelle

Théorème 2

$$\exp(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \times \exp(-x) = 1.$$

Démonstration 2

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n > |x|$ un entier, on a, avec les notations vues plus haut :

$$u_n(x) \times v_n(-x) = 1.$$

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \exp(x)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(-x) = \exp(-x)$ d'après la définition 1 page 206. Par unicité de la limite des suites on a bien $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}^* u_n(0) = 1$, donc en passant à la limite, on a bien $\exp(0) = 1$. □

Observons déjà que pour tout $x \geq 0$ les minoration et majoration de l'exponentielle du théorème 1 appliquées à $x' = \frac{x}{n}$ donnent

$$1 \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x'}{n}\right)^n = u_n(x') \leq \exp(x') \leq \frac{1}{1 - x'} = \frac{1}{1 - \frac{x}{n}},$$

si l'on suppose $x' < 1$, c'est-à-dire $n > x$ pour la majoration et $n > x'$ pour la minoration. Ceci montre en particulier que

$$(\dagger) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1.$$

Pour deux réels $x, y \geq 0$ quelconques, on voit d'autre part que

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{y}{n}\right) = 1 + \frac{x}{n} + \frac{y}{n} + \frac{xy}{n^2},$$

ce qui donne les inégalités

$$1 + \frac{x+y}{n} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{y}{n}\right) = 1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2} \leq \left(1 + \frac{x+y}{n}\right) \left(1 + \frac{xy}{n^2}\right).$$

En élevant à la puissance n , on obtient l'encadrement

$$u_n(x+y) \leq u_n(x)u_n(y) \leq u_n(x+y) \left(1 + \frac{xy}{n^2}\right)^n.$$

Mais d'après (†) appliqué à xy , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{xy}{n^2}\right)^n = 1$, et d'autre part

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x+y) = \exp(x+y) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x)u_n(y) = \exp(x)\exp(y)$$

par définition de l'exponentielle, donc à la limite l'encadrement ci-dessus entraîne la relation $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$. On tire de là l'équation fonctionnelle fondamentale :

Théorème 3

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y).$$

Démonstration 3

La relation a été démontrée pour $x, y \geq 0$. Pour la démontrer avec des réels non tous deux positifs ou nuls, il suffit de démontrer les trois égalités

$$\begin{aligned} \exp(x-y) &= \exp(x)\exp(-y), \\ \exp(-x+y) &= \exp(-x)\exp(y), \\ \exp(-x-y) &= \exp(-x)\exp(-y) \end{aligned}$$

pour $x, y \geq 0$. Comme $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$ pour $z = x, y$ ou $x+y$, la troisième égalité se déduit de l'égalité déjà démontrée en passant aux inverses. La première et la deuxième égalité sont équivalentes en échangeant les rôles de x et y . En définitive, il nous reste seulement à démontrer que

$$\exp(x-y) = \exp(x)\exp(-y)$$

pour tous $x, y \geq 0$. Si $x \geq y$, l'égalité $x = (x-y) + y$ dont les deux termes de droite sont positifs ou nuls nous donne

$$\exp(x) = \exp(x-y)\exp(y) \implies \exp(x) \frac{1}{\exp(y)} = \exp(x-y),$$

donc on a bien $\exp(x-y) = \exp(x)\exp(-y)$. Si au contraire $x < y$, l'égalité analogue $y = (y-x) + x$ implique $\exp(y) = \exp(y-x)\exp(x)$ et on a bien encore

$$\exp(x-y) = \exp(-(y-x)) = \frac{1}{\exp(y-x)} = \exp(x) \frac{1}{\exp(y)} = \exp(x)\exp(-y).$$

Théorème 4

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}.$$

Démonstration 4

On écrit : $\exp(a - b) = \exp(a + (-b)) = \exp(a) \times \exp(-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$. □

Moralité : L'exponentielle transforme les sommes en produits et les différences en quotients.

Comme conséquence on a le théorème suivant :

Théorème 5

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \exp(nx) = (\exp(x))^n.$$

Démonstration 5

On démontre

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \exp(nx) = (\exp(x))^n,$$

par une récurrence sans malice sur n . puis. pour n négatif. on pose $m = -n$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(nx) = \exp(-(mx)) = \frac{1}{\exp(mx)} = \frac{1}{(\exp(x))^m} = (\exp(x))^{-m} = (\exp(x))^n.$$

6.2.3 Dérivée

Pour $|x| < 1$, nous avons vu au théorème 1 que l'on a l'encadrement

$$1 + x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1 - x}.$$

En soustrayant 1 et en divisant par x . on obtient pour $x > 0$

$$1 \leq \frac{\exp(x) - 1}{x} \leq \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1 - x} - 1 \right) = \frac{1}{x} \frac{1 - (1 - x)}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

Pour $x < 0$, les inégalités se renversent et il vient

$$1 \geq \frac{\exp(x) - 1}{x} \geq \frac{1}{1 - x}.$$

Ceci donne aussitôt par encadrement

$$\exp'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1.$$

En un point $x \in \mathbb{R}$ quelconque, nous avons

$$\frac{\exp(x + h) - \exp(x)}{h} = \frac{\exp(x) \exp(h) - \exp(x)}{h} = \exp(x) \frac{\exp(h) - 1}{h}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\exp'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} \\ &= \exp(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x) \exp'(0) = \exp(x)\end{aligned}$$

Nous pouvons donc énoncer :

Théorème 6

La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et de plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x).$$

6.2.4 Variations, limites

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x)$		+	+
$\exp(x)$			

Pour déterminer la limite en $+\infty$, on remarque que pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$ à nouveau d'après l'inégalité de Bernoulli (théorème 18 page 59) du cours de première.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x = +\infty$ on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$.

De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$, puisque $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$. On peut alors compléter le premier tableau de variations.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x)$		+	+
$\exp(x)$			

6.2.5 Croissance comparée

Théorème 7

Soit $n \in \mathbb{N}$. on a $\forall x \in [0, +\infty[$, $\exp(x) \geq \frac{x^n}{n!}$.

Démonstration 7

On démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}_n : \forall x \in [0, +\infty[$, $g_n(x) := \exp(x) - \frac{x^n}{n!} \geq 0$.

On a déjà vu \mathcal{P}_0 et \mathcal{P}_1 . Soit n un entier pour lequel \mathcal{P}_n . On a alors $g'_{n+1} = g_n$. Donc la fonction g'_{n+1} est croissante sur $[0, +\infty[$. Comme $g_{n+1}(0) = 1$, on a $\forall x \in [0, +\infty[$, $g_{n+1}(x) \geq 1 \geq 0$. Autrement dit on a bien \mathcal{P}_{n+1} .

En résumé, on a $\left. \begin{array}{l} \mathcal{P}_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1} \end{array} \right\}$ donc d'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, \mathcal{P}_n ce qu'il fallait démontrer. \square

Théorème 8 (Croissance comparée 1)

Soit $n \in \mathbb{N}$. on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$.

Démonstration 8

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la proposition \mathcal{P}_{n+1} de la démonstration précédente, on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \frac{\exp(x)}{x^n} \geq \frac{x}{n!}.$$

Or on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{n!} = +\infty$. On en déduit bien $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$. \square

Théorème 9 (Croissance comparée 2)

Soit $n \in \mathbb{N}$. on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \exp(x) = 0$.

Démonstration 9

De $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$ on déduit par passage à l'inverse que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = 0$ puis en multipliant par $(-1)^n$ que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x)^n \exp(-x) = 0$.

En changeant x en $-x$ on déduit par composition que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \exp(x) = 0$. \square

6.3 Logarithme népérien

6.3.1 Définition

La fonction exponentielle $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ est continue} \\ \bullet \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ \bullet \text{ vérifie } \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty \end{array} \right.$

Donc la fonction exponentielle réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R}_+^* . Cela justifie la définition suivante :

Définition 2.

On appelle **logarithme népérien** et on note \ln la fonction réciproque de la fonction exponentielle :

$$\begin{aligned} \ln :] 0 , +\infty [&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(x) \end{aligned}$$

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 10

- $\ln(e) = 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\exp(x)) = x$.
- $\forall t \in] 0 , +\infty [, \exp(\ln(t)) = t$.

On va calculer la dérivée du logarithme :

Théorème 11

La fonction \ln est dérivable et sa dérivée sur l'intervalle $] 0 , +\infty [$ est la fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$.

Démonstration 11

La fonction \ln est la fonction réciproque d'une fonction dérivable dont la dérivée ne s'annule pas. Elle est donc dérivable. De plus, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ln'(\exp(t)) = \frac{1}{\exp(t)}.$$

Or pour tout $x \in] 0 , +\infty [$, il existe au moins un $t \in \mathbb{R}$ tel que $t = \exp(x)$. On a bien alors

$$\forall x \in] 0 , +\infty [, \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

On a comme conséquence la limite remarquable, qui permet de lever certaines formes indéterminées :

Théorème 12

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Démonstration 12

En effet, pour $x > -1$, non nul, $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x}$ est le taux d'accroissement de la fonction logarithme entre 1 et $1+x$. Sa limite en zéro est donc le nombre dérivé de la fonction logarithme en 1, à savoir $\frac{1}{1} = 1$. \square

Comme conséquence du théorème de dérivation des fonctions composées 8 page 138 du cours de première,

Théorème 13

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . On suppose que u ne s'annule pas sur I .

Alors $f : x \in I \mapsto \ln |u(x)|$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Démonstration 13

En effet, la fonction u est continue sur l'intervalle I et elle ne s'annule pas. D'après le théorème des valeurs intermédiaires 17 page 113 du cours de première, elle garde un signe constant.

- Si ce signe constant est positif, alors $\forall x \in I, |u(x)| = u(x)$ donc la fonction f est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

- Sinon $\forall x \in I, |u(x)| = -u(x)$ donc la fonction f est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, f'(x) = \frac{-u'(x)}{-u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Dans les deux cas, on a bien le résultat annoncé. □

6.3.2 L'équation fonctionnelle**Théorème 14**

Pour tous nombres x et y appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$.

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

Démonstration 14

Puisque l'exponentielle réalise une bijection entre \mathbb{R} et $]0, +\infty[$, il existe $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, tel que $x = \exp(u)$ et $y = \exp(v)$. On a $xy = \exp(u) \cdot \exp(v) = \exp(u+v)$ d'après le théorème 3. On a donc l'égalité entre les logarithmes des deux membres : $\ln(xy) = \ln(\exp(u+v)) = u+v$ d'après le théorème 10. Or $\ln(x) = \ln(\exp(u)) = u$ et $\ln(y) = \ln(\exp(v)) = v$, toujours d'après 10. En fin de compte, on a bien $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

La deuxième égalité se démontre de la même façon. □

On en déduit le théorème suivant :

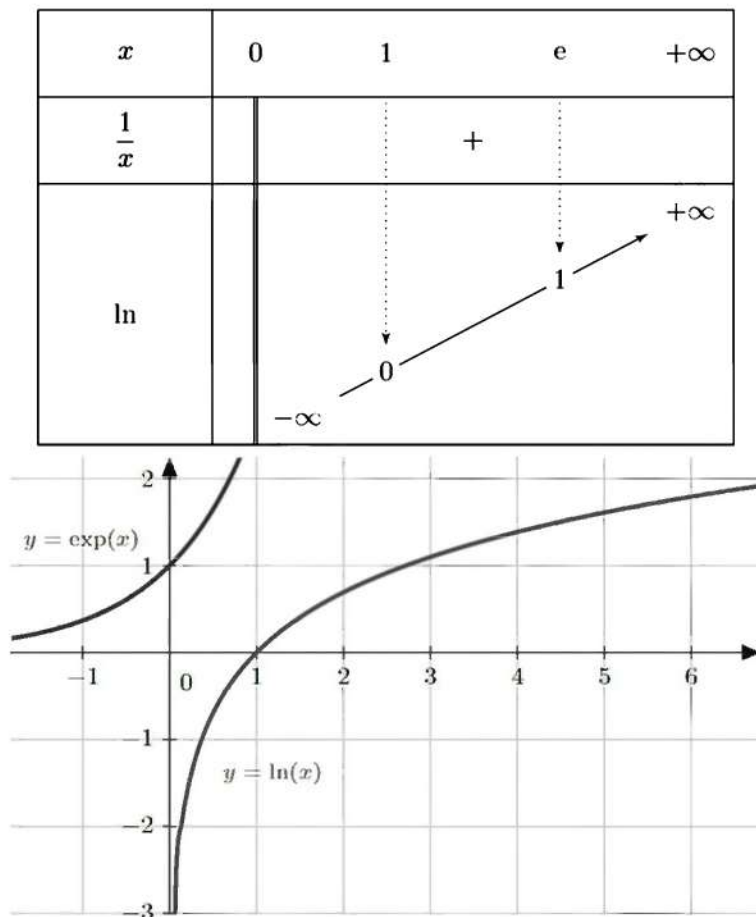
Théorème 15

Pour tout nombre x appartenant à $]0, +\infty[$.

- $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$,
- pour tout entier relatif n , $\ln(x^n) = n \ln(x)$.

6.3.3 Représentation graphique

Les fonctions exponentielle et logarithme sont réciproques l'une de l'autre. On en déduit le tableau de variation et la courbe représentative.



En composant les deux limites $\lim_{t \rightarrow -\infty} t \exp(t) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) \exp(\ln(x)) = 0.$$

Or d'après le théorème 10, $\forall x > 0$, $\exp(\ln(x)) = x$. En fin de compte, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0.$$

En composant les deux limites $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{\exp(t)} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\exp(\ln(x))} = 0$.
Or d'après le théorème 10, $\forall x > 0$, $\exp(\ln(x)) = x$. En fin de compte, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Remarque 1.

A fortiori, on a pour tout entier $n > 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0.$$

Nous reviendrons sur la croissance comparée avec le théorème 6.5.3 page 222.

6.3.4 Concavité**Théorème 16 (Concavité du logarithme)**

1. *Comparaison entre moyenne géométrique et arithmétique.* Pour tous réels $x_1, \dots, x_n > 0$:

$$(x_1 \dots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

2. *Inégalité de Young* : pour deux réels $a, b > 0$ et deux réels $p, q > 0$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Démonstration 16

En notant $f : x \mapsto \ln x$, $f''(x) = -1/x^2 \leq 0$ donc la fonction logarithme est concave sur $]0, +\infty[$.

1. En utilisant l'inégalité de convexité généralisée avec $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1/n$,

$$\ln\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{\ln x_1 + \dots + \ln x_n}{n} = \ln((x_1 \dots x_n)^{1/n}).$$

En prenant l'exponentielle (qui est une fonction croissante), on en déduit l'inégalité souhaitée.

2. Pour $\lambda \in [0, 1]$ et $x, y > 0$,

$$\ln(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda \ln x + (1 - \lambda) \ln y = \ln(x^\lambda y^{1-\lambda})$$

d'où en prenant l'exponentielle,

$$x^\lambda y^{1-\lambda} \leq \lambda x + (1 - \lambda)y$$

Il suffit alors de prendre $x = a^p$, $y = b^q$ et $\lambda = 1/p$ pour trouver l'inégalité de Young. \square

6.4 Retour vers l'intégration

Puisque nous disposons de nouvelles fonctions, nous avons de nouvelles primitives à notre disposition, ce qui ouvre de nouvelles possibilités pour le calcul d'intégrales. Ce paragraphe fait suite au paragraphe 3.5 page 114.

6.4.1 Retour vers l'intégration par parties

De nouveaux exemples avec nos nouvelles fonctions.

Exemple 1

Soit $n \geq 1$ un entier naturel, on cherche à calculer une primitive F_n de $f_n(x) = x^n e^{-x}$. La fonction f_n est déjà écrite comme produit de deux fonctions, que l'on sait intégrer. Intégrons par parties en prenant $u(x) = x^n$ et $v'(x) = e^{-x}$ d'où, par exemple, $v(x) = -e^{-x}$:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int x^n e^{-x} dx = [x^n(-e^{-x})] - \int n x^{n-1}(-e^{-x}) dx \\ &= -x^n e^{-x} - n \int x^{n-1} e^{-x} dx = -x^n e^{-x} + n F_{n-1}(x) \quad (+ C). \end{aligned}$$

Comme $F_0(x) = -e^{-x}$, cette relation de récurrence permet de calculer F_n pour tout entier $n \geq 1$:

$$F_n(x) = -\left(\sum_{p=0}^n n(n-1)\dots(p+1)x^p\right)e^{-x} \quad (+ C).$$

Exemple 2

De même, pour $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, en posant $u'(x) = x^a$ et $v(x) = (\ln x)^n$, on trouve

$$\begin{aligned} \int x^a (\ln x)^n dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} (\ln x)^n - \int \frac{x^{a+1}}{a+1} \frac{n}{x} (\ln x)^{n-1} dx \\ &= \frac{x^{a+1}}{a+1} (\ln x)^n - \frac{n}{a+1} \int x^a (\ln x)^{n-1} dx \\ &= \frac{x^{a+1}}{a+1} (\ln x)^n - \frac{n}{a+1} \frac{x^{a+1}}{a+1} (\ln x)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(a+1)^2} \int x^a (\ln x)^{n-2} dx. \end{aligned}$$

Par récurrence, ceci donne

$$\int x^a (\ln x)^n dx = x^{a+1} \sum_{p=0}^n (-1)^p \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{(a+1)^{p+1}} (\ln x)^{n-p}.$$

On obtient alors le résultat voulu.

Exemple 3

Déterminer $\int x^2 e^x dx$

On pose $u'(x) = x^2$ et $v(x) = e^x$
 ce qui donne $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$. Le calcul de la primitive obtenue s'obtient en faisant de nouveau une intégration par parties, on obtient finalement

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + k$$

6.4.2 Retour vers le changement de variable

On rappelle le

Théorème 17 (changement de variable)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive F . Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ dérivable telle que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$ On a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_\alpha^\beta f \circ \varphi d\varphi.$$

(voir le paragraphe 3.5.2)

Exemple 4

Le cas particulier $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \ln|x|$ implique

$$\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = \ln|\varphi(t)| + C.$$

Exemple 5

Calculer $\int x \tan x^2 dx$.

On pose $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$. Nous obtenons alors :

$$\int x \tan x^2 dx = \frac{1}{2} \int 2x \tan x^2 dx = \frac{1}{2} \int \tan t dt = \frac{1}{2} (-\ln|\cos t|) + Cste$$

Finalement :

$$\int x \tan x^2 dx = -\frac{1}{2} (\ln|\cos x^2|) + Cste$$

Exemple 6Déterminer $\int \tan x dx$

On a $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$. On pose $u = \cos x$ ainsi $du = -\sin x dx$
 ce qui donne $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + k = -\ln(|\cos x|) + k$.

6.4.3 Intégration des fractions rationnelles

Une fraction rationnelle est une fonction définie comme le quotient P/Q de deux polynômes P et Q à coefficients réels ou complexes. La division euclidienne de P par Q s'écrit $P = EQ + R$ avec un quotient E et un reste R qui sont des polynômes tels que $\deg R < \deg Q$. On a alors

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q}.$$

Le quotient E s'appelle aussi *la partie entière* de la fraction rationnelle, et R/Q la *partie polaire*. Elle est telle que $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x)/Q(x) = 0$.

(5.4 a) **Cas où $Q(x) = (x - \alpha)^m$.** En écrivant R comme un polynôme en $X = x - \alpha$, soit $R(x) = \sum_{0 \leq j < m} c_j (x - \alpha)^j$, on voit que P/Q admet une écriture de la forme

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{(x - \alpha)^j}.$$

Si α est réel, la primitive se calcule sans peine puisque

$$\int \frac{1}{x - \alpha} dx = \ln|x - \alpha| + C, \quad \int \frac{1}{(x - \alpha)^j} dx = -\frac{1}{j-1} \frac{1}{(x - \alpha)^{j-1}} + C \quad \text{si } j > 1.$$

(5.4 b) **Cas où Q est un trinôme du second degré.** Si $Q(x) = ax^2 + bx + c$, le calcul des racines réelles ou complexes donne une factorisation $Q(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$. Si les racines α, β sont réelles et distinctes, on écrit

$$\frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{x - \beta} \right),$$

ce qui donne aussitôt

$$\int \frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)} dx = \frac{1}{\alpha - \beta} \ln \left| \frac{x - \alpha}{x - \beta} \right| + C.$$

Dans le cas d'un trinôme réel $ax^2 + bx + c$ de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, les racines sont complexes et on procède différemment. On a en effet

$$Q(x) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) = a((x - \gamma)^2 + \delta^2)$$

avec $\gamma = -b/2a$ et $\delta = \sqrt{|\Delta|}/2|a|$, les racines complexes étant $\alpha = \gamma + i\delta$, $\bar{\alpha} = \gamma - i\delta$. Après division euclidienne de P par Q , on est ramené à intégrer des expressions de la forme

$$\int \frac{\lambda x + \mu}{(x - \gamma)^2 + \delta^2} dx.$$

Dans ce cas on écrit $\lambda x + \mu = \lambda(x - \gamma) + (\lambda\gamma + \mu)$ et on observe que $(x - \gamma)$ est la moitié de la dérivée du dénominateur, ce qui donne

$$\begin{aligned} \int \frac{\lambda x + \mu}{(x - \gamma)^2 + \delta^2} dx &= \int \frac{\lambda(x - \gamma)}{(x - \gamma)^2 + \delta^2} dx + \int \frac{\lambda\gamma + \mu}{(x - \gamma)^2 + \delta^2} dx \\ &= \frac{1}{2}\lambda \ln((x - \gamma)^2 + \delta^2) + (\lambda\gamma + \mu) \int \frac{1}{(x - \gamma)^2 + \delta^2} dx \\ &= \frac{1}{2}\lambda \ln((x - \gamma)^2 + \delta^2) + \frac{\lambda\gamma + \mu}{\delta} \arctan \frac{x - \gamma}{\delta} + C. \end{aligned}$$

Exemple 7.

Calculer : $\int \frac{x - 2}{x^2 + x} dx$

Nous pouvons écrire $x^2 + x = x(x + 1)$, les racines 0 et -1 sont simples. Ceci nous donne

$$\frac{x - 2}{x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1}$$

En identifiant les coefficients, nous obtenons $A = -2$ et $B = 3$ ainsi :

$$\int \frac{x - 2}{x^2 + x} dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{3}{x + 1} \right) dx = -2 \ln |x| + 3 \ln |x + 1| + k$$

6.5 Les autres fonctions exponentielles

6.5.1 Définition

Pour tout réel **strictement positif** x , pour tout entier relatif n on a

$$x^n = \exp(\ln(x^n)) = \exp(n \ln(x)).$$

On va généraliser cette notation à l'aide de la

Définition 3.

Soit $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ on pose

$$x^y := \exp(y \ln(x)).$$

Remarque 2.

L'écriture x^y se rencontre dans trois situations.

1. $f_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, n) \mapsto f_1(x, n) = x^n$ où $f_1(x, n)$ est défini par récurrence par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} f_1(x, 0) = 1 \\ f_1(x, n+1) = x f_1(x, n) \end{cases}$$

2. $f_2 : \mathbb{R}^* \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, n) \mapsto f_2(x, n) = x^n$ où $f_2(x, n)$ est défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & f_2(x, n) = f_1(x, n) \\ \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, & f_2(x, n) = \frac{1}{f_1(x, -n)} \end{cases}$$

3. $f_3 :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto f_3(x, y) = x^y$ où $f_3(x, y)$ est défini par

$$\forall x \in]0, +\infty[, \forall y \in \mathbb{R}, f_3(x, y) = \exp(y \ln(x)).$$

4. À quoi on ajoute une quatrième situation, $\forall y \in]0, +\infty[, 0^y := \lim_{x \rightarrow 0} x^y = 0$.

Le lecteur est invité à vérifier que chaque fois que deux de ces quatre écritures ont un sens pour un couple (x, y) , alors elles sont égales.

Remarque 3.

Parmi les quatre ensembles $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^* \times \mathbb{Z}$, $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et $\{0\} \times]0, +\infty[$, le couple $(0, 0)$ n'appartient qu'au premier. De ce fait, $0^0 = f_1(0, 0) = 1$ sans aucune ambiguïté.

Remarque 4.

On a $\forall y \in \mathbb{R}, e^y = \exp(y \ln(e)) = \exp(y)$. On peut donc écrire indifféremment $\exp(x)$ ou e^x pour tout nombre réel x .

Définition 4.

Soit $a > 0$. On appelle exponentielle de base a la fonction

$$f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto a^x = \exp(x \ln(a)) = e^{x \ln(a)}$$

Le théorème suivant s'en déduit sans difficulté :

Théorème 18

1. La fonction f_a définie ci-dessus est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_a(x) = \ln(a)e^{x \ln(a)} = \ln(a)a^x.$$

2. • Si $a > 1$ alors la fonction f_a est strictement croissante sur l'intervalle \mathbb{R} .
 • Si $0 < a < 1$ alors la fonction f_a est strictement décroissante sur l'intervalle \mathbb{R} .
 • Si $a = 1$ alors la fonction f_1 est constante sur l'intervalle \mathbb{R} .

Les équations fonctionnelles de l'exponentielle et du logarithme permettent d'établir sans difficulté :

Théorème 19

Soit a, b deux nombres strictement positifs, x, y deux nombres réels. On a

1. $a^x \times a^y = a^{x+y}$.
2. $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$.
3. $a^x \times b^x = (ab)^x$.

6.5.2 Logarithmes

Soit a un nombre strictement positif différent de 1. La fonction f_a est strictement croissante et réalise une bijection de \mathbb{R} sur $]0, +\infty[$. De plus, l'équation

$$[a^y = x; \quad \text{inconnue } x \in]0, +\infty[]$$

équivalent à

$$\begin{aligned} \exp(y \ln(a)) &= x \\ \text{soit } y \ln(a) &= \ln(x) \\ \text{soit } y &= \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{aligned}$$

Tout cela justifie la définition suivante :

Définition 5.

Soit a un nombre strictement positif différent de 1. On appelle **logarithme de base a** la fonction \log_a réciproque de l'exponentielle de base a :

$$\begin{aligned} \log_a :]0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{aligned}$$

Remarque 5.

Le logarithme népérien se trouve être le logarithme de base e .

Théorème 20

Soit a un nombre strictement positif différent de 1.

$$\forall x, y \in]0, +\infty[, \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y).$$

Démonstration 20

Hakuna Matata. □

6.5.3 Croissance comparée

Où l'on prolonge la remarque 1.

Théorème 21

On a pour tout réel $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0.$$

Démonstration 21

En effet,

$$\forall x > 0, x^\alpha \ln(x) = \exp(\alpha \ln(x)) \ln(x) = \frac{1}{\alpha} \exp(\alpha \ln(x)) (\alpha \ln(x)).$$

Or $\lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{1}{\alpha} u \exp(u) = 0$ d'après le théorème 9 et $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha \ln(x) = -\infty$. D'après le théorème de composition des limites 9 page 109 du cours de première, on a bien $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln(x) = 0$.

De même,

$$\forall x > 0, \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \ln(x) \exp(-\alpha \ln(x)) = \frac{1}{\alpha} (\alpha \ln(x)) \exp(-\alpha \ln(x)).$$

Or $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} u \exp(-u) = 0$ toujours d'après le théorème 9 et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha \ln(x) = +\infty$. D'après le théorème de composition des limites, on a bien $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$. □

6.5.4 Logarithme décimal

Le logarithme décimal se rencontre dans un certain nombre de situations à commencer par le *pH* des solutions en chimie.

On prend $a = 10$.

Définition 6.

On appelle **logarithme décimal** la fonction \log_{10} réciproque de l'exponentielle de base 10 :

$$\begin{aligned} \log :] 0, +\infty [&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \end{aligned}$$

La fonction logarithme décimal est strictement croissante sur l'intervalle $] 0, +\infty [$. Soit m un nombre entier naturel vérifiant $10^n \leq m < 10^{n+1}$ pour un certain entier n . On a donc $n \leq \log(m) < n + 1$. Autrement dit, on a $n = \lfloor \log(m) \rfloor$. Or un tel entier m a $n + 1$ chiffres dans son écriture décimale. On en déduit le théorème suivant :

Théorème 22

Le nombre de chiffres d'un entier naturel m est $1 + \lfloor \log(m) \rfloor = 1 + \left\lfloor \frac{\ln(m)}{\ln(10)} \right\rfloor$.

Remarque 6.

Le nombre de bits nécessaires pour écrire un entier naturel m est $1 + \lfloor \log_2(m) \rfloor = 1 + \left\lfloor \frac{\ln(m)}{\ln(2)} \right\rfloor$.

6.6 Exponentielle complexe

L'exponentielle complexe est une écriture qui permet de rassembler de façon élégante les résultats concernant les nombres complexes.

6.6.1 Définition

Définition 7.

Soit a et b deux nombres réels et $z = a + ib$. On appelle **exponentielle** de z le nombre complexe

$$\exp(z) := \exp(a) \cdot (\cos(b) + i \sin(b)).$$

Remarques 7.

1. On peut aussi noter e^z le nombre $\exp(z)$.
2. Pour z réel, on a $b = 0$, $z = a$ et $\exp(z) = \exp(a) \cdot (\cos(0) + i \sin(0)) = \exp(a) = \exp(z)$, où l'exponentielle de gauche est l'exponentielle complexe et celle de droite est l'exponentielle réelle. Autrement dit les deux notations sont cohérentes et l'exponentielle complexe prolonge l'exponentielle réelle.
3. L'écriture $\exp(a) \cdot (\cos(b) + i \sin(b))$ de $\exp(z)$ est une écriture sous forme trigonométrique. On a $|\exp(z)| = \exp(a)$ et $\arg(\exp(z)) \equiv b \pmod{2\pi}$.

6.6.2 L'équation fonctionnelle**Théorème 23**

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \exp(z + z') = \exp(z) \times \exp(z').$$

Démonstration 23

On pose $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, a', b, b' réels. On a donc

$$\begin{aligned} \exp(z + z') &= \exp(a + a' + i(b + b')) \\ &= \exp(a + a') \cdot (\cos(b + b') + i \sin(b + b')) \\ &= \exp(a) \cdot \exp(a') \cdot (\cos(b) \cos(b') - \sin(b) \sin(b') + i(\sin(b) \cos(b') + \cos(b) \sin(b'))) \end{aligned}$$

d'après les théorèmes 3 page 208 et 9 page 221 du cours de première. Donc

$$\begin{aligned} \exp(z + z') &= \exp(a) \cdot \exp(a') \cdot (\cos(b) + i \sin(b)) \cdot (\cos(b') + i \sin(b')) \\ &= \exp(a) \cdot (\cos(b) + i \sin(b)) \cdot \exp(a') \cdot (\cos(b') + i \sin(b')) \\ &= \exp(z) \times \exp(z'). \end{aligned}$$

6.6.3 Caractérisation par une équation différentielle

On se propose ici de trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dérivables sur \mathbb{R} et vérifiant $f' = af$ où $a \in \mathbb{C}^*$.

Remarque 8.

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $f_a : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{at}$. La fonction f_a vérifie :

- $f_a(0) = 1$,
- f_a est dérivable sur \mathbb{R} et $f'_a = af_a$.

En effet, on pose $a := r + i\omega$ avec r et ω réels. On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, at = rt + i\omega t \text{ et } f_a(t) = e^{rt} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)).$$

La fonction f est clairement dérivable sur \mathbb{R} d'après les théorèmes généraux et $\forall t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'_a(t) - af_a(t) &= re^{rt} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) + e^{rt} (-\omega \sin(\omega t) + i\omega \cos(\omega t)) - (r + i\omega)e^{rt} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \\ &= e^{rt} [(r + i\omega) - (r + i\omega)] \cos(\omega t) + [(ri - \omega) - i(r + i\omega)] \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait vérifier.

Théorème 24 (Caractérisation différentielle de la fonction exponentielle)

Soit f une fonction dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{C} et pour laquelle il existe $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $f' = af$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \lambda e^{at}$.

Autrement dit, f vérifie : $f = \lambda f_a$. Si, de plus, $f(0) = 1$ alors $f = f_a$.

Démonstration 24

Introduisons la fonction $\theta : t \in \mathbb{R} \mapsto f(t)e^{-at} \in \mathbb{C}$. Il est clair que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\theta'(t) = f'(t)e^{-at} - af'(t)e^{-at} = af(t)e^{-at} - af'(t)e^{-at} = 0.$$

Donc θ est une fonction constante sur l'intervalle \mathbb{R} . En regardant les parties réelles et imaginaires de θ , il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t)e^{-at} = \lambda$. Le résultat est établi. On vérifie aussi facilement que si $f(0) = 1$ alors $\lambda = 1$ et $f = f_a$. \square

Remarques 9.

- On aurait pu remplacer l'intervalle de départ \mathbb{R} par un intervalle plus petit.
- Ce théorème sera crucial au chapitre 9.

6.6.4 Retour vers la trigonométrie

On s'intéresse à la fonction $t \mapsto \exp(it)$ définie sur \mathbb{R} . On vérifie que l'on a :

Théorème 25

$\forall t \in \mathbb{R}$,

1. $\cos(t) = \operatorname{Re}(e^{it}) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$.
2. $\sin(t) = \operatorname{Im}(e^{it}) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$.

En utilisant le théorème 23 dans une récurrence sans malice on obtient le théorème suivant :

Théorème 26 (Formule de Moivre)Soit $t \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$

$$(\cos(t) + i \sin(t))^n = \exp(it)^n = \exp(int) = \cos(nt) + i \sin(nt).$$

Cette formule est non seulement particulièrement élégante, elle est surtout très utile.

Définition 8.

Tout complexe z non nul, de module r et d'argument θ admet une écriture de la forme $r \cdot e^{i\theta}$. Cette écriture est une **forme exponentielle** ou **écriture exponentielle** de z .

Théorème 27 (Écriture complexe d'une rotation)

Soit f une transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' .

Soit Ω un point d'affixe ω et θ un réel.

Pour que f soit la rotation de centre Ω et d'angle θ , il faut et il suffit que $z' - \omega = e^{i\theta} \times (z - \omega)$

On peut aussi donner l'écriture complexe d'une symétrie axiale.

On a déjà vu que lorsque la droite (d) est l'axe des abscisses, la transformation $z \mapsto z' = \bar{z}$ était la symétrie (orthogonale) par rapport à (d) .

Lorsque (d) passe par l'origine avec un angle polaire $\theta \in [0, \pi[$, on commence par ramener la droite (d) sur l'axe des abscisses par la rotation d'angle $-\theta$, puis on conjugue, puis on remet la droite (d) en place par la rotation d'angle θ . Le nombre complexe z est alors transformé successivement en

$$z \exp(-i\theta) \quad \text{puis} \quad \overline{z \exp(-i\theta)} = \bar{z} \exp(i\theta) \quad \text{puis} \quad \bar{z} \exp(i\theta) \times \exp(i\theta) = \bar{z} \exp(2i\theta).$$

Enfin, si la droite d passe par le point d'affixe a , on commence par ramener ce point en a par translation – ce qui ne change pas l'angle polaire de d – puis on effectue la transformation ci-dessus, puis on revient par translation en a . Ce qui donne

$$z \mapsto z - a \quad \text{puis} \quad \overline{z - a} \exp(2i\theta) \quad \text{puis} \quad \overline{z - a} \exp(2i\theta) + a.$$

Théorème 28 (Écriture complexe d'une symétrie axiale)

Soit f une transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' .

Soit A un point d'affixe a et θ un réel non nul.

Pour que f soit la symétrie orthogonale par rapport à droite passant par A et d'angle polaire θ , il faut et il suffit que $z' - a = e^{2i\theta} \times \overline{(z - a)}$.

6.6.5 Retour vers la géométrie

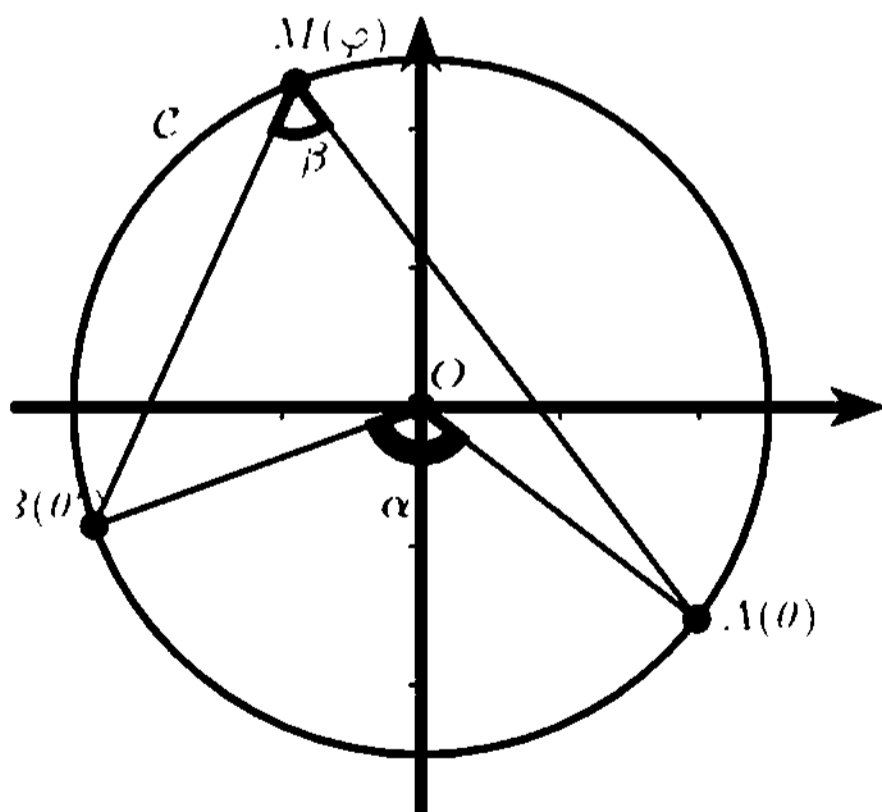
Un petit retour vers l'angle inscrit et l'angle au centre déjà vus dans le cours de seconde au théorème 24 page 154. Maintenant que nous sommes un peu plus savants, nous pouvons nous permettre d'être plus précis.

Théorème 29

Soit A, B et M trois points non alignés et O le centre de leur cercle circonscrit.

On a

$$\overline{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} = 2\widehat{AMB} \pmod{2\pi} \quad \text{soit} \quad \widehat{AMB} = \frac{1}{2} \overline{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} \pmod{\pi}.$$

Démonstration 29

On choisit pour simplifier O à l'origine du plan complexe et le rayon du cercle circonscrit, C , égal à 1. On appelle alors $\exp(i\theta)$, $\exp(i\theta')$ et $\exp(i\varphi)$ les affixes respectives de A , B et M .

On a $\overline{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} \equiv \theta' - \theta \pmod{2\pi}$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \frac{\exp(i\varphi) - \exp(i\theta')}{\exp(i\varphi) - \exp(i\theta)} &= \frac{\exp\left(i\frac{\varphi+\theta'}{2}\right)}{\exp\left(i\frac{\varphi+\theta}{2}\right)} \times \frac{\exp\left(i\frac{\varphi-\theta'}{2}\right) - \exp\left(i\frac{\theta'-\varphi}{2}\right)}{\exp\left(i\frac{\varphi-\theta}{2}\right) - \exp\left(i\frac{\theta-\varphi}{2}\right)} \\ &= \exp\left(i\frac{\theta' - \theta}{2}\right) \times \frac{2i \sin\left(\frac{\varphi-\theta'}{2}\right)}{2i \sin\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right)} \\ &= \exp\left(i\frac{\theta' - \theta}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{\varphi-\theta'}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

On a $\arg\left(\frac{\sin\left(\frac{\varphi-\theta'}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right)}\right) \equiv 0 \text{ ou } \pi \pmod{2\pi}$ suivant le signe du réel $\frac{\sin\left(\frac{\varphi-\theta'}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right)}$.

Le résultat en découle. □

Remarque 10.

On peut choisir θ et θ' dans un intervalle de longueur π .

Si le point M appartient au petit arc \widehat{AB} , alors on peut choisir φ avec $\theta' < \varphi < \theta$ et on a alors $\sin\left(\frac{\varphi-\theta'}{2}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right) < 0$. Donc l'angle $\overrightarrow{(\overline{AM}, \overline{BM})} \equiv \frac{1}{2} \overrightarrow{(\overline{OA}, \overline{OB})} + \pi \pmod{2\pi}$ et si

M appartient au grand arc \widehat{AB} , alors $\overrightarrow{(\overline{AM}, \overline{BM})} \equiv \frac{1}{2} \overrightarrow{(\overline{OA}, \overline{OB})} \pmod{2\pi}$.

En conclusion, tous les points M d'un même arc \widehat{AB} donnent des mesures de $\overrightarrow{(\overline{AM}, \overline{BM})}$ égales à 2π près.

Une autre formulation.

Théorème 30 (Arc capable)

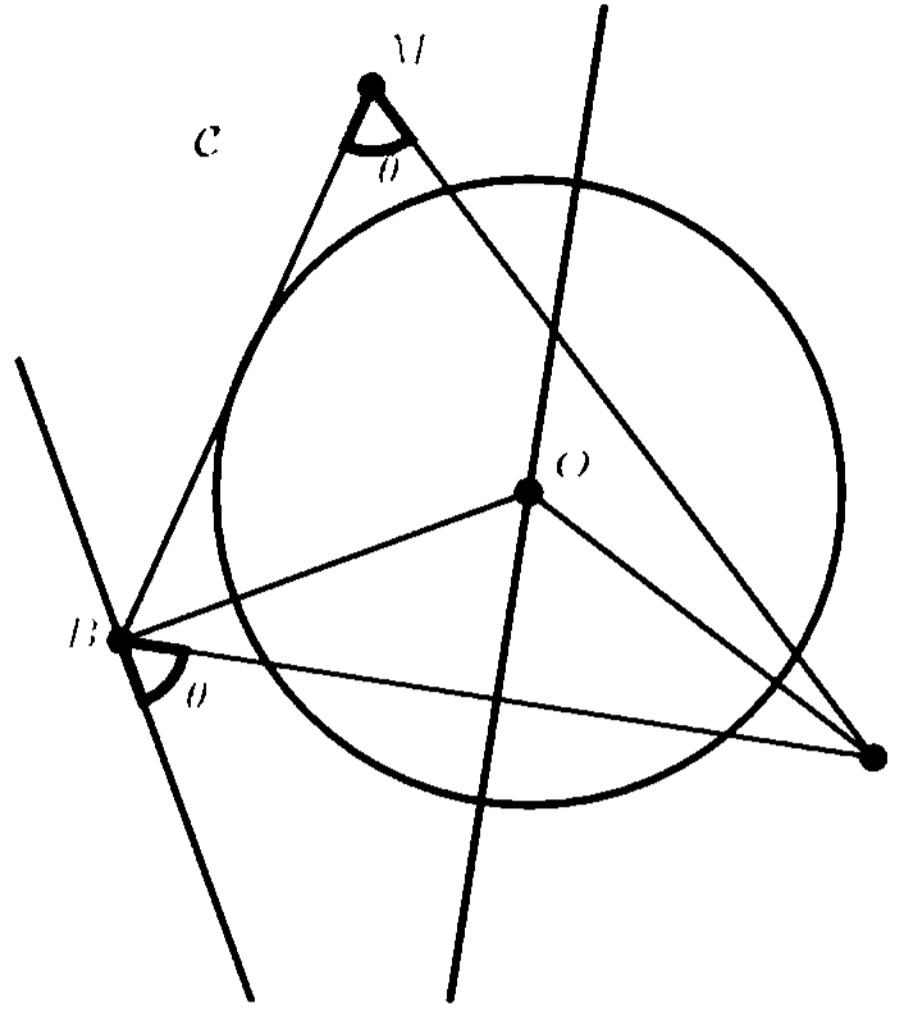
Soit A et B deux points distincts du plan et $\theta \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$.

► L'ensemble des points M du plan différents de A et B tels que $\overrightarrow{(\overline{OA}, \overline{OB})} = \theta \pmod{\pi}$ est un cercle passant par A et B et privé des points A et B .

► L'ensemble des points M du plan différents de A et B tels que $\overrightarrow{(\overline{OA}, \overline{OB})} = \theta \pmod{2\pi}$ est un arc de cercle d'extrémités A et B et privé des points A et B .

Démonstration 30

On commence par construire le centre O . Pour cela on trace le segment $[AB]$ puis la droite T passant par B faisant un angle θ avec (AB) . Ensuite on trace la perpendiculaire à T passant par B . Le point O à l'intersection de cette dernière droite et de la médiatrice de $[AB]$ convient. En effet, l'angle $\widehat{AOB} = 2\theta$. On remarque que la droite T est la tangente au cercle en B , c'est-à-dire la position limite de M lorsque M se rapproche de B .



Il reste à démontrer que tous les points M qui vérifient $\overline{(\vec{OA}, \vec{OB})} = \theta \pmod{2\pi}$ appartiennent à un cercle contenant A et B . Pour cela, on va changer de repère, attention, ça va tourner.

On se place dans un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ tel que O soit le point décrit plus haut, A et B les points du cercle trigonométrique d'affixes respectives $\exp(i\theta)$ et $\exp(-i\theta)$. On va démontrer que tous les points M du plan vérifiant $\overline{(\vec{OA}, \vec{OB})} = \theta \pmod{2\pi}$ ont une affixe dans \mathbb{U} . Soit M d'affixe $r \exp(i\alpha)$ (avec $r \geq 0$) vérifiant $\overline{(\vec{OA}, \vec{OB})} = \theta \pmod{2\pi}$. On a alors $\frac{r \exp(i\alpha) - \exp(i\theta)}{r \exp(i\alpha) - \exp(-i\theta)} = \lambda \exp(i\theta)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Autrement dit $\frac{r \exp(i(\alpha - \theta)) - 1}{r \exp(i\alpha) - \exp(-i\theta)} = \lambda \in \mathbb{R}$. Autrement dit, $\frac{r \exp(i(\alpha - \theta)) - 1}{r \exp(i\alpha) - \exp(-i\theta)}$ égale son conjugué, soit :

$$\begin{aligned} \frac{r \exp(i(\alpha - \theta)) - 1}{r \exp(i\alpha) - \exp(-i\theta)} &= \frac{r \exp(-i(\alpha - \theta)) - 1}{r \exp(-i\alpha) - \exp(i\theta)} \\ \text{soit } (r \exp(i\alpha - i\theta))(r \exp(-i\alpha) - \exp(i\theta)) &= (r \exp(-i\alpha + i\theta))(r \exp(i\alpha) - \exp(-i\theta)) \\ \text{soit } r^2 \exp(-i\theta) - r \exp(i\alpha) - r \exp(-i\alpha) + \exp(i\theta) &= r^2 \exp(i\theta) - r \exp(-i\alpha) - r \exp(i\alpha) + \exp(-i\theta) \\ \text{soit } (r^2 - 1) \sin \theta &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $r = 1$ dans la mesure où $\sin \theta \neq 0$.

On a bien vérifié que tous les points M appartiennent au cercle unité. □

Remarque 11.

Soit A et B deux points distincts du plan.

- ▶ L'ensemble des points M du plan différents de A et B tels que $\overline{(\vec{OA}, \vec{OB})} \equiv 0 \pmod{\pi}$ est la droite (AB) privée des points A et B .
- ▶ L'ensemble des points M du plan différents de A et B tels que $\overline{(\vec{OA}, \vec{OB})} \equiv \pi \pmod{2\pi}$ est le segment $[AB]$ privé des points A et B .
- ▶ L'ensemble des points M du plan différents de A et B tels que $\overline{(\vec{OA}, \vec{OB})} \equiv 0 \pmod{2\pi}$ est la réunion des deux demi-droites portées par la droite (AB) , d'extrémités A et B et privées des points A et B .

Définition 9 (birapport).

Soit M_1, M_2, M_3 et M_4 quatre points distincts d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 et z_4 .

On appelle birapport (ou rapport anharmonique) de (M_1, M_2, M_3, M_4) le nombre complexe

$$(z_1 : z_2 : z_3 : z_4) := \left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \right) \times \left(\frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} \right).$$

On déduit du théorème 30 (et du théorème 18 page 503 du cours de première) le théorème suivant :

Théorème 31

Pour que quatre points distincts soient cocycliques ou alignés, il faut et il suffit que leur birapport soit réel.

6.6.6 Intégration des polynômes trigonométriques

Pour calculer l'intégrale d'un polynôme trigonométrique $\int P(\cos x, \sin x) dx$ on utilise ce qu'on appelle la *méthode de linéarisation*, qui consiste à trouver une combinaison linéaire de la forme

$$P(\cos x, \sin x) = a_0 + \sum_{1 \leq n \leq N} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Pour cela on remplace $\cos x$ et $\sin x$ en fonction de l'exponentielle complexe (formules d'Euler)

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

ce qui permet d'exprimer $P(\cos(x), \sin(x))$ comme combinaison linéaire des fonctions e^{inx} et e^{-inx} . On remplace finalement ces fonctions par $e^{\pm inx} = \cos nx \pm i \sin nx$ (ou bien, si P est réel, on prend la partie réelle du résultat).

Exemple 8

$$\begin{aligned}
\cos^2 x \sin^3 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 \\
&= \frac{i}{2^5} (e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}) (e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) \\
&= \frac{i}{32} (e^{5ix} - e^{3ix} - 2e^{ix} + 2e^{-ix} + e^{-3ix} - e^{-5ix}) \\
&= \frac{1}{16} (-\sin 5x + \sin 3x + 2\sin x).
\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\int \cos^2 x \sin^3 x dx = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{3} \cos 3x - 2 \cos x \right) + C.$$

Remarque 12.

Puisque l'exposant du sinus est impair, on peut procéder autrement :

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 x \sin^3 x dx &= \int \cos^2 x (1 - \cos^2 x) \sin x dx \\
&= - \int (\cos^2 x - \cos^4 x) (-\sin x) dx \\
&= - \left(\frac{1}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x \right) + C.
\end{aligned}$$

6.7 Vrai ou Faux ?**6.7.1 Énoncé**

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier.

1. $\ln(1 + 2 + 3) = \ln(1) + \ln(2) + \ln(3)$.
2. $\ln \left(\frac{4711 + 3\sqrt{7}}{1736} \right) = 1$.
3. L'équation

$$[5e^{2x} - 4e^x - 1 = 0, \text{ inconnue } x \in \mathbb{R}]$$

admet deux solutions de signes opposés.

4. La fonction f définie par $\forall x \in]0, 1]$, $f(x) := \frac{1}{x}$ et $f(0) := 0$ est intégrable sur $[0, 1]$.

6.7.2 Corrigé

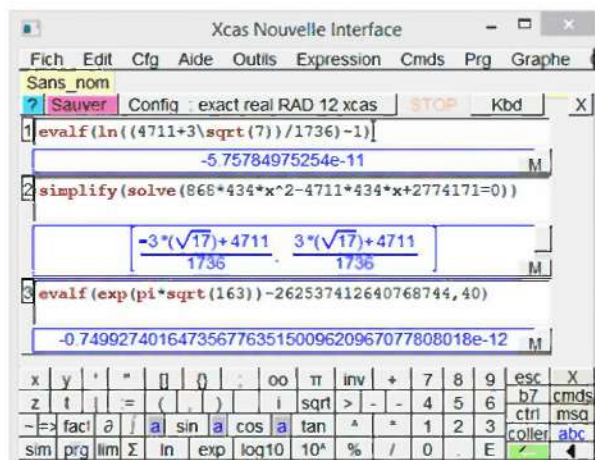
1. VRAI. Les deux membres sont égaux à $\ln(6)$.
2. FAUX. C'est du moins ce que dit **Xcas**.

Une réponse plus savante consiste à dire que si c'était vrai, alors on aurait $e = \frac{4711 + 3\sqrt{7}}{1736}$ et par conséquent e serait solution de l'équation

$$376712x^2 - 2044574x - 2774171 = 0.$$

à coefficients entiers. Or on peut démontrer que e n'est solution d'aucune équation du second degré à coefficients entiers.

Dans le même ordre d'idée, $\exp(\pi\sqrt{163})$ est presque égal à l'entier 262537412640768744. Il suffit de demander à **Xcas** en l'obligeant de travailler avec suffisamment de chiffres toutefois.



3. FAUX. L'équation $[5t^2 - 4t - 1 = 0, \text{ inconnue } t \in \mathbb{R}]$ admet bien deux solutions de signes opposés, à savoir 1 et $-\frac{1}{5}$, mais seule la solution positive est une exponentielle. Donc $\mathcal{S} = \{0\}$.
4. FAUX. Il en a été question à la question 9 du quiz page 128. Par l'absurde : la fonction f est positive, on aurait $\forall x \in]0, 1], \int_0^1 f(t) dt \geq \int_x^1 f(t) dt = -\ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$ ce qui est absurde.

6.8 Exercices

6.8.1 Calculs de primitives

Exercice 1.

Calculer les primitives suivantes :

1. $\int \frac{x^2 + 1}{x} dx$

2. $\int \frac{xe^x - 2}{x} dx$

3. $\int xe^{-x^2} dx$

4. $\int x \ln x dx$

5. $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$

6. $\int \frac{1}{x(x-2)} dx$

7. $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

8. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x} \right) dx$

9. $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

10. $\int \frac{2x^3 - 4x^2 + x - 3}{x^2} dx$

Exercice 2.

Calculer les primitives suivantes :

1. $\int \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx$

2. $\int \frac{x}{(2x-3)^2} dx$

3. $\int \frac{1}{e^x + 1} dx$

4. $\int e^{2x+3} dx$

5. $\int x^2 e^{-x} dx$

6. $\int e^x \sin x dx$

7. $\int \frac{1}{x(x^2-1)} dx$

8. $\int \frac{1}{x^2(x-1)} dx$

9. $\int \frac{1}{x^2 - x - 2} dx$

10. $\int \sqrt{1+x^2} dx$
en posant $\sqrt{1+x^2} + x = t$.

Exercice 3.

Calculer les primitives suivantes :

$$1. \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 + 2 \sin x \cos x} dx$$

$$2. \int \frac{\sin x}{1 + \sin 2x} dx$$

$$3. \int \frac{\cos x}{(2 + \sin x)(3 + \sin x)^3} dx$$

$$4. \int x^3 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$$

$$5. \int \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x+3}} \right) dx$$

$$6. \int \frac{dx}{\cos 3x - \cos 7x}$$

$$7. \int \frac{\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}}{4 + 3 \sin 2x} dx$$

$$8. \int \frac{e^{2x} - e^x}{(e^x + 1)\sqrt{e^{3x} + e^{2x} + e^x}} dx$$

$$9. \int \frac{3x^2 + x + 4}{x^3 + x^2 + 2x + 2} dx$$

Exercice 4.

Déterminer les primitives suivantes :

$$1. H := \int \sin 2x \ln(\cos x) dx$$

$$2. I := \int (\cos 2x + \sin 2x) \ln(\cos x + \sin x) dx$$

$$3. K := \int \cos 2x \ln(\cos x) dx$$

Exercice 5.

Soit $f(x) = (x-a)^n e^{bx} \sqrt{1+x^2}$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ sont des constantes.

Montrer que

$$\frac{df}{dx} = \frac{(x-a)^{n-1} e^{bx} q(x)}{\sqrt{1+x^2}},$$

où q est un polynôme de degré 3. En déduire :

$$1. \int \frac{(x-1)^{14} e^{4x} (4x^3 - 1)}{\sqrt{1+x^2}} dx :$$

$$2. \int \frac{(x-1)^{21} e^{12x} (12x^4 - x^2 - 11)}{\sqrt{1+x^2}} dx :$$

$$3. \int \frac{(x-2)^6 e^{4x} (4x^4 + x^3 - 2)}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Exercice 6.

1. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Traduire le résultat en termes de primitives.
2. Mêmes questions avec les fonctions $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ et $x \mapsto \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$. Quelle relation peut-on établir entre ces deux fonctions ?
3. Calculer $\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + e^x + 1} dx$.

Exercice 7.

Déterminer $\int \frac{\cos x + \sin x}{e^x + 3 \cos x} dx$.

Indication 1.

On pourra écrire $\frac{\cos x + \sin x}{e^x + 3 \cos x} = \frac{\cos x + \sin x}{e^x(1 + 3e^{-x} \cos x)}$.

Exercice 8.

Calculer $\int \frac{1}{x^7 - x} dx$.

6.8.2 Calculs d'intégrales**Exercice 9.**

Calculer l'intégrale :

$$\int_1^e \frac{\log(1 + \log x) dx}{x}$$

Exercice 10.

Calculer l'intégrale :

$$\int_1^e \frac{dx}{\sqrt{x^2 \ln x + (x \ln x)^2}}$$

Exercice 11.

Soit $a > 0$. Calculer $\int_{-a}^a \frac{x^2 \cos x + e^x}{e^x + 1} dx$.

Exercice 12.

Calculer $\int_1^e \frac{1 - x(e^x - 1)}{x(1 + xe^x \ln x)} dx$.

Exercice 13.

Calculer l'intégrale : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^2}{(1 + x \tan x)(x - \tan x) \cos^2 x} dx$.

Exercice 14.

Calculer

$$T = \int_{-1}^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) dx.$$

Exercice 15.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u_n = \frac{1}{n!} \int_0^n e^{-t} t^n dt$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 16.

Soit $x > 0$ et $y > 0$. On définit

$$A(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(x \sin^2 \theta + y \cos^2 \theta) d\theta.$$

Démontrer que $A(x, y) = \frac{1}{2} A \left(\frac{(x+y)^2}{4}, xy \right)$. En déduire la valeur de $A(x, y)$.

Exercice 17 (Où ça des intégrales ?).

Soient a et b deux réels strictement positifs, (u_n) la suite arithmétique définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n := a + bn$, et les suites (A_n) et (G_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \text{ et } G_n := \left(\prod_{k=0}^{n-1} u_k \right)^{\frac{1}{n}},$$

les moyennes arithmétiques et géométriques des $(u_k)_{0 \leq k \leq n}$.

Déterminer la limite de $\left(\frac{G_n}{A_n}\right)$.

Exercice 18.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n := \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x^n}$.

Démontrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} n\varepsilon_n = \ln(2)$.

Exercice 19.

Calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{\cos x}}{(\cos x)^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}} dx.$$

Exercice 20.

Trouver la valeur minimum de $f(x) = \int_x^{2x} (t \ln t - t) dt$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 21.

Calculer l'intégrale :

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx.$$

Exercice 22 (Inégalité arithmético-géométrique).

Soit $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n$. On pose $A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n}{n}$ et $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n}$. On se propose de démontrer que $A \geq G$.

1. Démontrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{G} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{G} \right) dt = \frac{A}{G} - 1$.

2. Démontrer que $a_1 \leq G \leq a_n$.

3. En choisissant $m \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que $a_m \leq G \leq a_{m+1}$, et en écrivant

$$\frac{A}{G} - 1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m \int_{a_k}^{G} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{G} \right) dt + \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^n \int_G^{a_k} \left(\frac{1}{G} - \frac{1}{t} \right) dt$$

démontrer que $A \geq G$.

6.8.3 Étude de fonctions

Exercice 23.

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x}{e^x - x}$

1. Étudier les variations sur \mathbb{R} de la fonction g définie par : $x \mapsto e^x - x - 1$.

(a) En déduire que g est positive ou nulle.

(b) En conclure que f est définie sur \mathbb{R} .

2. Justifier que f est une fonction continue.

3. Étudier les variations sur \mathbb{R} de la fonction f :

(a) Démontrer que l'équation :

$$\left[f(x) = \frac{1}{2}; \text{ inconnue } x \in \mathbb{R}, \right]$$

admet une unique solution, notée α , sur \mathbb{R} .

(b) Déterminer un encadrement entier de α en expliquant le moyen utilisé.

(c) Calculer une valeur arrondie au millième de α .

Exercice 24.

1. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur \mathbb{R} et telles que $f(0) = 1$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) \leq f(x) \times f(y).$$

2. Existe-t-il des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur \mathbb{R} , mais pas dérivables sur \mathbb{R} et vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) \leq f(x) \times f(y)?$$

Exercice 25.

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2(2 \exp(x-1) - 1).$$

1. Tracer la courbe représentative Γ de la fonction f .
2. Conjecturer les variations de f .
3. Étudier les variations de f .

Exercice 26.

1. Démontrer que $\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x}}$.
2. En déduire que $\forall t \geq 0, 1 + \frac{t^2 + t\sqrt{t^2+4}}{2} \leq \exp(t)$.
3. Démontrer que $\forall x \geq 0, 3 \ln(x) \leq \frac{(x^3-1)(x+1)}{x^3+x}$.

Indication 2.

XCas sait dériver les fonctions et factoriser les dérivées.

Exercice 27 (Questions vaches).

Les vaches laitières sont atteintes par une maladie M avec la probabilité $p = 0,15$. Pour dépister la maladie M dans une étable de n vaches, on fait procéder à une analyse de lait. Deux méthodes sont possibles :

- Première méthode : On fait une analyse sur un échantillon de lait de chaque vache.
- Deuxième méthode : On effectue d'abord une analyse sur un échantillon de lait provenant du mélange des n vaches. Si le résultat est positif, on effectue une nouvelle analyse, cette fois pour chaque vache.

On voudrait connaître la méthode la plus économique (=celle qui nécessite en moyenne le moins d'analyse). Pour cela, on note X_n la variable aléatoire du nombre d'analyses réalisées dans la deuxième étape. On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

1. Déterminer la loi de Y_n , et montrer que son espérance vaut : $1 + \frac{1}{n} - (0,85)^n$.
2. Étudier la fonction $f(x) = ax + \ln x$, pour $a = \ln(0,85)$. Donner la liste des entiers n tels que $f(n) > 0$.
3. Montrer que $f(n) > 0$ équivaut à $E(Y_n) < 1$. En déduire la réponse (en fonction de n) à la question posée.

Exercice 28 (Entropie d'une variable aléatoire).

Soit X une variable aléatoire discrète finie prenant la valeur x_i avec probabilité p_i , pour $i = 1, \dots, n$. On définit l'entropie de X par :

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i)$$

avec la convention $x \ln x := 0$ si $x = 0$ (ce qui traduit le prolongement par continuité en 0 de la fonction $x \mapsto x \ln x$).

1. Démontrer que $H(X) \geq 0$.
2. Démontrer que $H(X) = 0$ si et seulement si X est presque sûrement constante, c'est-à-dire s'il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $p_i = 1$.
3. Vérifier que, pour tout $k = 1, \dots, n$, on a

$$(-np_k) \ln(np_k) \leq 1 - np_k$$

avec égalité si et seulement si $np_k = 1$.

4. En déduire que $H(X) \leq \ln n$.
5. Démontrer que $H(X) = \ln n$ si et seulement si X est équadistribuée, ie si $p_i = 1/n$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Exercice 29 (Amérique du Nord 2019).**Partie A : établir une inégalité**

On définit la fonction f par $f(x) = x - \ln(x+1)$, pour tout réel x de l'intervalle $[0, +\infty[$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
2. En déduire que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\ln(x+1) \leq x$.

Partie B : application à l'étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n)$. On admet que la suite de terme général u_n est bien définie.

1. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de u_2 .
2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.
(b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 1$.
(c) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3. On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que $\ell = f(\ell)$, où f est la fonction définie dans la **partie A**. En déduire la valeur de ℓ .
4. (a) Écrire un algorithme qui, pour un entier naturel p donné, permet de déterminer le plus petit rang N à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-p} .
(b) Déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-15} .^a

a. La plupart des calculatrices et même des tableurs sont incapables de traiter cette question donnant même des résultats faux.

Exercice 30.

Démontrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Exercice 31.

Démontrer qu'il existe $x \notin \mathbb{Q}$ tel que $x^x \in \mathbb{Q}$.

Exercice 32 (Complexité de l'algorithme d'Euclide).

On rappelle que la suite de Fibonacci $(F_n)_n$ est l'unique suite vérifiant $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout entier naturel n , $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ et on pose $\phi := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

- Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n \geq \phi^{n-2}$.
- Soit maintenant l'algorithme d'Euclide possédant $n \geq 2$ étapes, en posant $r_0 := a$ et $r_1 := b$:

$$\begin{array}{rcl} r_0 & = & r_1 q_1 + r_2 & 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 & = & r_2 q_2 + r_3 & 0 < r_3 < r_2 \\ & & \vdots & \vdots \\ r_{n-2} & = & r_{n-1} q_{n-1} + r_n & 0 < r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} & = & r_n q_n & \end{array}$$

Démontrer par récurrence que : $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $r_{n-k} \geq F_{k+2}$.

- Démontrer le théorème suivant :

Théorème 32 (Gabriel Lamé)

Soient a et b deux entiers tels que $0 < b < a$.

Le nombre de divisions euclidiennes à effectuer pour déterminer le *pgcd* de a et b par

l'algorithme d'Euclide est inférieur ou égal à $\left\lfloor \frac{\ln b}{\ln \phi} \right\rfloor + 1$.

6.8.4 Convexité**Exercice 33.**

- Montrer que la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln(1 + e^x)$ est convexe.
- En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n, \quad 1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n} \leq \prod_{k=1}^n (1 + x_k)^{1/n}.$$

Exercice 34.

Soient $a, b > 1$. Montrer que

$$\ln \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{\ln a \ln b}.$$

Exercice 35.

Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^x$ pour $x > 0$ et $g(0) = 1$.

1. Montrer que g est continue en 0.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$. Montrer que

$$\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}} \leq \frac{x_1^{x_1} + \dots + x_n^{x_n}}{n}.$$

6.8.5 Exponentielle complexe**Exercice 36.**

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

a. $z^2 - 2z \cos a + 1 = 0$;

b. $z^2 - 2z \sin a + 1 = 0$.

où a est réel. Donner les solutions sous forme exponentielle.

Exercice 37.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, \pi[$. Calculer

$$C_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos(kx).$$

Exercice 38.

Soit $J_n = \int_0^\pi \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2(t)} dt$. Trouver une relation entre J_n et J_{n+1} . Calculer J_n .

Exercice 39.

Soit a, b et c trois nombres complexes de module 1 tels que $ab \neq -1$. Démontrer que $\frac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}$.

Exercice 40.

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^\pi (1 - 2a \cos(x) + a^2)^n dx = \pi \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 a^{2k}$.

Exercice 41 (*Eadem Mutata Resurgit*).

Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la courbe, appelée spirale logarithmique :

$$\Gamma_m : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp((m + i)t).$$

1. Démontrer que Γ_m est invariante par les homothéties de centre O et de rapport $\exp(2k\pi)$ pour tout réel $k \in \mathbb{Z}$.

Pour cette raison on étudie Γ_m sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ et on se propose d'approcher la longueur de la courbe Γ_m entre les points de paramètres 0 et 2π .

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $t_k := \frac{2k\pi}{n}$ et $z_k := \Gamma_m(t_k)$ pour $k \in [0, n]$. Calculer $L_n := \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|$.

longueur de la ligne polygonale de sommets d'affixes $(z_k)_{0 \leq k \leq n}$.

3. Calculer $L = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n$.

4. Déterminer la limite de L lorsqu'on fait tendre m vers zéro.

Exercice 42.

On considère n nombres complexes z_1, z_2, \dots, z_n .

Démontrer qu'il existe une partie \mathcal{S} de $\{1, \dots, n\}$ telle que : $\left| \sum_{j \in \mathcal{S}} z_j \right| \geq \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{j \in \mathcal{S}} |z_j|$.

Indication 3.

Pour cela, soit $\vartheta \in \mathbb{R}$, on introduira $\mathcal{S}_\vartheta = \left\{ j / \vartheta - \frac{\pi}{2} \leq \text{Arg } z_j \leq \vartheta + \frac{\pi}{2} \right\}$:

$f(\vartheta) = \left| \sum_{j \in \mathcal{S}_\vartheta} z_j \right|$; on notera que $f(\vartheta) \geq \sum_{j \in \mathcal{S}_\vartheta} |\cos(\vartheta - \arg z_j)|$ et on intégrera cette relation entre 0 et 2π .

6.9 Solutions

6.9.1 Calculs de primitives

Solution 1

$$1. \int \frac{x^2 + 1}{x} dx = \int x + \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + C.$$

$$2. \int \frac{xe^x - 2}{x} dx = \int e^x - \frac{2}{x} dx = e^x - 2 \ln|x| + C.$$

$$3. \int xe^{-x^2} dx = \int -\frac{1}{2}(-2x)(e^{-x^2}) dx = \frac{-1}{2}e^{-x^2} + C.$$

$$4. \int x \ln x dx = \int \frac{1}{2}(2x \ln x + x - x) dx = \int \frac{1}{2}(x^2 \ln x)' - x dx = \frac{x^2 \ln|x| - \frac{1}{2}x^2}{2} + C$$

$$5. \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \int \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right) = \int \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

$$6. \text{ En posant } x = t - 1, \int \frac{1}{(t-1)(t+1)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(t+1) - (t-1)}{(t-1)(t+1)} dx \\ = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(t+1)} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(t-1)} dx = \frac{1}{2} [\ln|t-1| - \ln|t+1|] + C \\ = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| + C.$$

$$7. \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \ln(e^x + 1) + C$$

$$8. \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3} - \ln|x| + C.$$

$$9. \int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int x^{1/3} - x^{-2/3} dx = \frac{3}{4}x^{4/3} - 3x^{1/3} + C.$$

$$10. \int \frac{2x^3 - 4x^2 + x - 3}{x^2} dx = \int 2x - 4 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} dx = x^2 - 4x + \ln|x| + \frac{3}{x} + C.$$

Solution 2

$$1. \int \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx = \ln(x^3 + 1) + C.$$

$$2. \int \frac{x}{(2x-3)^2} dx = \int \frac{x - \frac{3}{2}}{(2x-3)^2} dx + \frac{3}{2} \int \frac{x}{(2x-3)^2} dx = \frac{1}{4} \ln|x| - \frac{3}{4} \frac{1}{2x-3} + C.$$

$$3. \int \frac{1}{e^x + 1} dx = \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x + 1}\right) dx = x - \ln(e^x + 1) + C.$$

$$\text{Ou bien } \int \frac{1}{e^x + 1} dx = \int \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = -\ln(1 + e^{-x}) + C_1.$$

Remarque 13.

On obtient ainsi deux primitives d'une même fonction. Cela signifie que ces deux fonctions diffèrent d'une constante sur tout intervalle de \mathbb{R} . En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$x - \ln(e^x + 1) + \ln(1 + e^{-x}) = x - \ln\left(\frac{e^x + 1}{1 + e^{-x}}\right) = x - \ln(e^x) = 0.$$

4. $\int e^{2x+3} dx = \frac{1}{2}e^{2x+3} + C.$

5. Par parties : $\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - e^{-x} + C.$

Si on peut partir à la pêche avec $(ax^2 + bx + c)e^{-x}$ que l'on dérive en $(2ax + b - ax^2 - bx - c)e^{-x}$. Il suffit alors de choisir $a = -1$, $c = 0$ et $2a - b = 0$ ce qui donne bien $b = 2$.

6. On peut intégrer par parties, mais ce n'est pas obligatoire : $\int e^{(1+i)x} dx = \frac{1}{1+i} e^{(1+i)x} + C = \frac{1-i}{2} e^{(1+i)x} + C$. En prenant la partie imaginaire on trouve $\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$

7. $\int \frac{1}{x(x^2-1)} dx = \int \left(\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| - \ln|x| + C_k$ où C_k pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ est une constante dans $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 0[$, $I_3 =]0, 1[$ ou $I_4 =]1, +\infty[$.

8. $\int \frac{1}{x^2(x-1)} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx = \ln|x-1| + \frac{1}{x} - \ln|x| + C_k.$

9. $\int \frac{1}{x^2-x-2} dx = \int \frac{1}{3} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{3} \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{3} \ln|x-2| - \frac{1}{3} \ln|x+1| + C$

10. En posant $\sqrt{1+x^2} + x = t$, on a $\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 1 \right) dx = (\sqrt{1+x^2} + x) \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = dt.$

De plus, $(x-t)^2 = 1+x^2$ donc $2xt = t^2 - 1$ d'où $x = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)$ et $1+x^2 = \frac{3}{2} + \frac{t^2}{4} + \frac{1}{4t^2}.$

Finalement, $\int \sqrt{1+x^2} dx = \int \left(\frac{3}{2} + \frac{t^2}{4} + \frac{1}{4t^2} \right) \frac{dt}{t} = \frac{3}{2} \ln|t| + \frac{t^2}{8} - \frac{1}{12t^2} + C.$

Il ne reste plus qu'à remplacer t par $\sqrt{1+x^2} + x \dots$

Solution 3

1. $\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 + 2 \sin x \cos x} dx = \int \frac{\cos(2x)}{1 + 2 \sin(2x)} dx = \frac{1}{2} \ln|1 + \sin(2x)| + C.$

2.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{1 + \sin 2x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{(\cos x + \sin x) - (\cos x - \sin x)}{\sin 2x + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(\cos x + \sin x)}{\sin 2x + 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{(\cos x - \sin x)}{\sin 2x + 1} dx \end{aligned}$$

Dans la première, on pose $\cos x - \sin x = v$ et dans la seconde $\cos x + \sin x = u$ et

$$\int \frac{\sin x}{1 + \sin 2x} dx = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} - \sin x + \cos x}{\sqrt{2} + \sin x - \cos x} \right| + \frac{1}{2(\sin x + \cos x)} + C.$$

6.9. SOLUTIONS

3. En posant $3 + \sin x = t$, on a $\cos x \, dx = dt$, et on cherche alors $\int \frac{1}{(t-1)t^3} dt$.

En posant $t = \frac{1}{u}$, on a $dt = -\frac{1}{u^2} du$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{u^2}{u-1} du &= \int \frac{(u^2-1)+1}{u-1} du = \int (u+1) du + \int \frac{1}{u-1} du \\ &= \frac{1}{2}u^2 + u + \ln |u-1| + C \\ &= \frac{1}{2t} + \frac{1}{t} + \ln \left| \frac{1-t}{t} \right| + C \\ &= \frac{1}{2(3+\sin x)^2} + \frac{1}{3+\sin x} + \ln \left| \frac{1-\sin x}{\sin x} \right| + C \end{aligned}$$

4. On pose $u = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$; $x = \frac{u^3+1}{u^3-1} = 1 - \frac{2}{u^3-1}$; $dx = \frac{6u^2 du}{(u^3-1)^2}$.

$$\int x \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx = 6 \int \frac{(u^6+u^3) du}{(u^3-1)^3} \text{ avec } \frac{u^6+u^3}{(u^3-1)^3} = \frac{1}{(u^3-1)^2} + \frac{2}{(u^3-1)^3}.$$

On pose $F_n(u) = \int \frac{du}{(u^3-1)^n}$. Une IPP donne $F_n(u) = \frac{u}{(u^3-1)^n} + 3n(F_{n+1} + F_n)$.

$$\text{Soit } F_{n+1} = \frac{1-3n}{3n} F_n - \frac{u}{3n(u^3-1)^n}$$

$$\text{Ce qui donne : } F_2 = -\frac{2}{3} F_1 - \frac{u}{3(u^3-1)}$$

$$\text{et } F_2 = -\frac{5}{6} F_2 - \frac{u}{6(u^3-1)^2}$$

$$F_1(u) = \int \frac{du}{(u^3-1)} \text{ avec } \frac{1}{(u^3-1)} = \frac{1}{3} \frac{1}{u-1} - \frac{1}{3} \frac{u+2}{u^2+u+1}$$

$$\text{et } F_1(u) = \frac{1}{3} \ln |u-1| - \frac{1}{6} \ln(u^2+u+1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \text{Arctan} \left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}} \right) + C.$$

$$\begin{aligned} \frac{u^6+u^3}{(u^3-1)^3} &= F_2 + 2F_3 \\ &= -\frac{5}{3} F_2 + F_2 - \frac{u}{3(u^3-1)^2} \\ &= -\frac{2}{3} F_2 - \frac{u}{3(u^3-1)^2} \\ &= \frac{4}{9} F_1 + \frac{2u}{9(u^3-1)} - \frac{u}{3(u^3-1)^2} \\ &= \frac{4}{27} \ln |u-1| - \frac{2}{27} \ln(u^2+u+1) + \frac{4\sqrt{3}}{27} \text{Arctan} \left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{2u}{9(u^3-1)} \\ &\quad - \frac{u}{3(u^3-1)^2} + C. \end{aligned}$$

5. On pose $u = \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}$, $x = \frac{3u^2-1}{1-u^2} = -3 + \frac{2}{1-u^2}$ $dx = \frac{2u du}{(1-u^2)^2}$.

Donc $\int \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x+3}} \right) dx = \int \operatorname{Arctan} u \frac{2u du}{(1-u^2)^2}$. En intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{2\operatorname{Arctan} u}{1-u^2} - \int \frac{2u du}{(1-u^2)(1+u^2)} &= \frac{2\operatorname{Arctan} u}{1-u^2} - \int \frac{du}{1-u^2} - \int \frac{du}{1+u^2} \\ &= \frac{2\operatorname{Arctan} u}{1-u^2} - \operatorname{Arctan} u - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C. \end{aligned}$$

On remplace u par $\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}$ en remarquant que $\frac{2u^2+1}{1-u^2} = \frac{3x+5}{2}$.

$$\text{on a } \int \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x+3}} \right) dx = \frac{3x+5}{2} \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x+3}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}}{1 - \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}} \right| + C.$$

6. On a pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} \cos 3x - \cos 7x &= 2 \sin 5x \cdot \sin 2x \\ &= (5 \sin x \cos^4 x - 10 \sin^3 x \cos^2 x + \sin^5 x) 2 \sin x \cos^4 x \\ &= 4 \sin^2 x \cos x (5(1 - \sin^2 x)^2 - 10 \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 + \sin^4 x). \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $t = \sin x$ pour obtenir

$$\int \frac{dt}{4t^2(1-t^2)(5(1-t^2)^2 - 10t^2(1-t^2) + t^4)} = \int \frac{dt}{4t^2(1-t^2)(16t^4 - 20t^2 + 5)}.$$

On factorise $16t^4 - 20t^2 + 5 = (4t^2 + at + \sqrt{5})(4t^2 - at + \sqrt{5}) = 16t^4 + 8\sqrt{5}t + 5 - a^2t^2$ d'où $a^2 = 20 + 8\sqrt{5}$ d'où (par exemple) $a = \sqrt{20 + 8\sqrt{5}} \dots$

7. On pose $t = \sqrt{\tan x}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}}{4 + 3 \sin 2x} dx &= \int \frac{(t^2 + 1)^2}{(5t^2 + 2)(1 + t^4)} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{14}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{\sqrt{14} \tan x}{2(1 - \tan x)} \right) + C \end{aligned}$$

8. On pose $u = e^x + \frac{1}{e^x} + 1$ soit $du = (e^x - \frac{1}{e^x}) dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x} - e^x}{(e^x + 1)\sqrt{e^{3x} + e^{2x} + e^x}} dx &= \int \frac{(e^x - \frac{1}{e^x})dx}{(e^x + 2 + \frac{1}{e^x})\sqrt{e^x + \frac{1}{e^x} + 1}} \\ &= \int \frac{du}{(u+1)\sqrt{u}} \\ &= 2 \arctan \sqrt{u} + C \\ &= 2 \arctan \left(\sqrt{e^x + \frac{1}{e^x} + 1} \right) + C \end{aligned}$$

9. On écrit $\frac{3x^2 + x + 4}{x^3 + x^2 + 2x + 2} = \frac{3x^2 + x + 4}{(x+1)(x^2+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$.

En multipliant les deux membres par $x + 1$ on obtient nécessairement

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{3x^2 + x + 4}{x^2 + 2} = A + \frac{(Bx + C)(x + 1)}{x^2 + 2}.$$

En spécifiant $x = -1$ dans les deux membres on obtient $\frac{6}{3} = 2 = A$.

On revient à l'égalité de départ et on multiplie les deux membres cette fois par $x^2 + 2$ on obtient nécessairement

$$\forall x \neq -1, \frac{3x^2 + x + 4}{x + 1} = \frac{A(x^2 + 2)}{x + 1} + Bx + C.$$

En spécifiant $x = i\sqrt{2}$ dans les deux membres on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{-6 + i\sqrt{2} + 4}{i\sqrt{2} + 1} = iB\sqrt{2} + C \\ \text{Soit} & \frac{-2 + i\sqrt{2}}{i\sqrt{2} + 1} = iB\sqrt{2} + C \\ \text{Soit} & \frac{(-2 + i\sqrt{2})(1 - i\sqrt{2})}{(i\sqrt{2} + 1)(1 - i\sqrt{2})} = iB\sqrt{2} + C \\ \text{Soit} & \frac{(-2 + i\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} + 2)}{3} = iB\sqrt{2} + C \\ \text{Soit} & i\sqrt{2} = iB\sqrt{2} + C \end{aligned}$$

Donc nécessairement $B = 1$ et $C = 0$.

Inversement, on vérifie que

$$\forall x \neq -1, \frac{3x^2 + x + 4}{x^3 + x^2 + 2x + 2} = \frac{2}{x + 1} + \frac{x}{x^2 + 2}.$$

$$\text{Donc } \int \frac{3x^2 + x + 4}{x^3 + x^2 + 2x + 2} dx = 2 \ln |x + 1| + \frac{1}{2} \ln (x^2 + 2) + C.$$

Solution 4

$$1. \text{ Soit } H := \int \sin 2x \ln \cos x dx = -2 \cdot \int \cos x \ln \cos x (\cos x)' dx$$

donc $G = \int t \ln t dt$. En intégrant par parties

$$\begin{cases} u(x) = \ln t & : & u'(x) = \frac{1}{t} \\ v'(x) = t & : & v(x) = \frac{t^2}{2} \end{cases} \text{ on obtient } G = \frac{1}{2} \cdot t^2 \ln t - \frac{1}{4} \cdot t^2 + C.$$

$$\text{En conclusion, } \boxed{\int \sin 2x \ln \cos x dx = \frac{1}{2} \cdot \cos^2 x \ln \cos x - \frac{1}{4} \cdot \cos^2 x + C}.$$

$$2. \text{ Soit } I := \int (\cos 2x + \sin 2x) \ln(\cos x + \sin x) dx. \text{ En intégrant par parties}$$

$$\begin{cases} u(x) = \ln(\cos x + \sin x) & : & u'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \\ v'(x) = \cos 2x + \sin 2x & : & v(x) = \frac{1}{2} \cdot (\sin 2x - \cos 2x) \end{cases}$$

on obtient $I = \frac{1}{2} \cdot (\sin 2x - \cos 2x) \ln(\cos x + \sin x) + \frac{1}{2} \cdot J$, avec

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos 2x - \sin 2x)}{\cos x + \sin x} dx \\ &= \int \frac{(\cos x - \sin x) [(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - (\cos x + \sin x)^2 + 1]}{\cos x + \sin x} dx \\ &= \int \left[(\cos x - \sin x)^2 - \cos 2x + \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right] dx \\ &= \int \left[1 - \sin 2x - \cos 2x + \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right] dx \\ &= x + \frac{1}{2} \cdot (\cos 2x - \sin 2x) + \ln(\cos x + \sin x) + C. \end{aligned}$$

En conclusion, $I = \frac{1}{2}(\sin 2x + 1 - \cos 2x) \ln(\cos x + \sin x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \cdot (\cos 2x - \sin 2x) + C$ d'où

$$\int (\cos 2x + \sin 2x) \ln(\cos x + \sin x) dx = \sin x(\sin x + \cos x) \ln(\cos x + \sin x) + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}(\cos 2x - \sin 2x) + C$$

3. Soit $K := \int \cos 2x \ln \cos x dx$. En intégrant par parties $\begin{cases} u(x) = \ln \cos x & ; & u'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} \\ v'(x) = \cos 2x & ; & v(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x \end{cases}$
on obtient $K = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x \ln \cos x + \int \sin^2 x dx$. En conclusion,

$$\int \cos 2x \ln \cos x dx = \frac{1}{2} \sin 2x \ln \cos x + \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C.$$

Solution 5

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= n(x-a)^{n-1} (e^{bx} \sqrt{1+x^2}) + (x-a)^n e^{bx} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + b\sqrt{1+x^2} \right) \\ &= \frac{(x-a)^{n-1} e^{bx}}{\sqrt{1+x^2}} [(x^2+1)(b(x-a)+n) + x(x-a)] \\ &= \frac{(x-a)^{n-1} e^{bx}}{\sqrt{1+x^2}} q(x), \end{aligned}$$

avec $q(x) = (x^2+1)(b(x-a)+n) + x(x-a)$.

- $\int \frac{(x-4)^{14} e^{4x} (4x^3-1)}{\sqrt{1+x^2}} dx = (x-4)^{15} e^{4x} \sqrt{1+x^2} + C$
- $\int \frac{(x-1)^{21} e^{12x} (12x^4 - x^2 - 11)}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{(x-1)^{22} e^{12x} (12x^3 + 11x + 12x^2 + 11)}{\sqrt{1+x^2}} dx$
 $= (x-1)^{23} e^{12x} \sqrt{1+x^2} + C$

3.

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-2)^6 e^{4x}(4x^4 + x^3 - 2)}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int \frac{(x-2)^7 e^{4x}(4x^3 + 2x + x^2)}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &\quad + 2 \int \frac{(x-2)^6 e^{4x}(4x^3 + 2x - 1)}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= (x-2)^8 e^{4x} \sqrt{1+x^2} + 2(x-2)^7 e^{4x} \sqrt{1+x^2} + C \\ &= (x-2)^7 e^{4x} \sqrt{1+x^2}(x) + C \end{aligned}$$

Solution 61. On obtient pour tout réel x :

$$\frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

2. On obtient pour tout réel $x > 1$:

$$\frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

pour la première fonction que l'on notera par la suite : argch (comme argument cosinus hyperbolique pour des raisons que nous n'approfondirons pas). Pour la seconde :

$$\frac{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x - \sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Ces deux fonctions ont des dérivées opposées donc leur somme est constante sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
Vérification

$$\forall x > 1, \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + \ln(x - \sqrt{x^2-1}) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})(x - \sqrt{x^2-1}) = \ln(1) = 0.$$

3. Avec le changement de variable $u = e^x$ soit $\frac{du}{u} = dx$. d'où

$$\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + e^x + 1} dx = \int \frac{u + 1}{(u^2 + u + 1)u} du = A \ln u + B \ln(u^2 + u + 1) + C \operatorname{arctan} \frac{2u + 1}{\sqrt{3}}.$$

On a $\int \frac{x}{\sqrt{6x^2 - x - 1}} dx = p(x) \sqrt{6x^2 - x - 1} + \int \frac{B}{\sqrt{6x^2 - x - 1}} dx$,

avec $\deg p(x) < \deg x \Rightarrow p(x) = A$: A et B sont constants.

En dérivant les deux membres : $A = \frac{1}{6}$ et $B = \frac{1}{12}$.

Il reste à calculer $\int \frac{1}{\sqrt{6x^2 - x - 1}} dx$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{6x^2 - x - 1}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{x^2 - \frac{x}{6} - \frac{1}{6}}} dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{(x - \frac{1}{12})^2 - \frac{25}{144}}} dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{6}\frac{5}{12}\sqrt{(\frac{12}{5}(x - \frac{1}{12}))^2 - 1}} dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{t^2 - 1}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{argcht} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{argch} \frac{12}{5} \left(x - \frac{1}{12}\right) \end{aligned}$$

avec le changement de variable $t = \frac{12}{5}(x - \frac{1}{12})$.

Finalement : $\int \frac{x}{\sqrt{6x^2 - x - 1}} dx = \frac{1}{6}\sqrt{6x^2 - x - 1} + \frac{1}{12\sqrt{6}} \operatorname{argch} \frac{12}{5} \left(x - \frac{1}{12}\right)$

Solution 7

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos(x) + \sin(x)}{e^x + 3\cos(x)} dx &= \int \frac{\cos(x) + \sin(x)}{e^x(1 + 3e^{-x}\cos(x))} dx \\ u = 1 + 3e^{-x}\cos(x) : \quad du &= -3e^{-x}\cos(x) - 3e^{-x}\sin(x) dx \\ \int \frac{\cos(x) + \sin(x)}{e^x + 3\cos(x)} dx &= \int \frac{\cos(x) + \sin(x)}{e^x(u)} \cdot \left(\frac{e^x}{-3(\cos(x) + \sin(x))}\right) du \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{1}{u} du \\ &= -\frac{1}{3} \ln(1 + 3e^{-x}\cos(x)) + C \\ &= \frac{1}{3}(x - \ln(e^x + 3\cos(x))) + C. \end{aligned}$$

Solution 8

1.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^7 - x} dx &= \int \left(\frac{x^5}{x^6 - 1} - \frac{1}{x}\right) dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{6}(x^6 - 1)'}{x^6 - 1} dx - \int \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{6} \ln|x^6 - 1| - \ln|x| + C. \end{aligned}$$

2. $\frac{1}{x^7 - x} = \frac{1}{x^4(x^3 - \frac{1}{x^3})}$.

6.9. SOLUTIONS

Avec $\frac{1}{x^3} = u$ d'où $du = -\frac{3}{x^4} dx$, $\frac{1}{x^4} dx = -\frac{du}{3}$. L'intégrale devient :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^7 - x} dx &= -\frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{1}{u} - u\right)} du \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{u}{1 - u^2} du \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{-2u}{1 - u^2} du \\ &= \frac{1}{6} \ln |1 - u^2| + C \\ &= \frac{1}{6} (\ln |x^6 - 1| - 6 \ln |x|) + C \\ &= \frac{1}{6} \ln |x^6 - 1| - \ln |x| + C\end{aligned}$$

6.9.2 Calculs d'intégrales

Solution 9

En posant $t = \ln x$,

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{dx}{\sqrt{x^2 \ln x + (x \ln x)^2}} &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t + t^2}} dt \\ &= \left[\ln(t + 1/2 + \sqrt{(t + 1/2)^2 - (1/2)^2}) \right]_0^1 \\ &= \ln 3 - 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Solution 10

On pose $y = 1 + \ln x$ d'où $dy = \frac{dx}{x}$ ce qui donne

$$I = \int_1^2 \ln y dy = [y(\ln y - 1)]_1^2 = 2.(\ln 2 - 1) + 1 = 2. \ln 2 - 1.$$

Solution 11

$$\begin{aligned}I &= \int_0^a \frac{x^2 \cos(x) + e^x}{e^x + 1} dx + \frac{x^2 \cos(x) + e^{-x}}{e^{-x} + 1} dx \\ &= \int_0^a \frac{x^2 \cos(x) + e^x}{e^x + 1} dx + \frac{e^x x^2 \cos(x) + 1}{1 + e^x} dx \\ &= \int_0^a \frac{(e^x + 1)x^2 \cos(x) + (1 + e^x)}{1 + e^x} dx \\ &= \int_0^a (x^2 \cos(x) + 1) dx \\ &= 2a \cos(a) + a + (a^2 - 2) \sin(a)\end{aligned}$$

Solution 12

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{1 - x(e^x - 1)}{x(1 + xe^x \ln x)} dx &= \int_1^e \frac{x + 1}{x} - \frac{e^x(\ln(x)(x + 1) + 1)}{1 + xe^x \ln x} dx \\ &= e - \ln(e^{e+1} + 1). \end{aligned}$$

Solution 13

1.

$$\begin{aligned} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x^2}{(1 + x \tan x)(x - \tan x) \cos^2 x} dx &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x^2 \sec^2 x}{(1 + x \tan x)(x - \tan x)} dx \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left(\frac{\tan x + x \sec^2 x}{1 + x \tan x} - \frac{1 - \sec^2 x}{x - \tan x} \right) dx \\ &= \left[\ln \left(\frac{1 + x \tan x}{x - \tan x} \right) \right]_{\pi/4}^{\pi/3} \\ &= \ln \frac{(3 + \pi\sqrt{3})(4 - \pi)}{(3\sqrt{3} - \pi)(4 + \pi)} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)(x \cos x - \sin x)} &= \frac{x^2 \cos^2 x - x \sin x \cos x + x^2 \sin^2 x + x \sin x \cos x}{(x \sin x + \cos x)(x \cos x - \sin x)} \\ &= \frac{x \cos x}{x \sin x + \cos x} + \frac{x \sin x}{x \cos x - \sin x} \\ &= \frac{x \cos x}{x \sin x + \cos x} - \frac{-x \sin x}{x \cos x - \sin x} \end{aligned}$$

donc $\int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)(x \cos x - \sin x)} dx = \ln(x \sin x + \cos x) - \ln(x \cos x - \sin x) + C$ donc

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x^2}{(1 + x \tan x)(x - \tan x) \cos^2 x} dx = \ln \frac{(\pi\sqrt{3} + 3)(\pi - 4)}{(\pi - 3\sqrt{3})(\pi + 4)}$$

Solution 14

On intègre par parties en prenant : $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}$. D'où

$$T = \left[\left(-\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} \right) \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} \right) \frac{2}{(1-x^2)} dx.$$

Soit

$$T = 0 + 2 \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} \right) dx.$$

Par changement de variable : $x = \sin t$,

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1}{\cos t} - \frac{1}{3} \cos t \right) \cos t dt = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 - \frac{1}{3} \cos^2 t \right) dt \\ &= 2 \left[t - \frac{1}{6}(t + \sin t \cos t) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{3} [5t - \sin t \cos t]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{5\pi}{3} \end{aligned}$$

Solution 15

En intégrant par parties,

$$\int_0^{n+1} e^{-t} t^{n+1} dt = [-e^{-t} t^{n+1}]_0^{n+1} + (n+1) \int_0^{n+1} e^{-t} t^n dt.$$

Soit

$$\int_0^{n+1} e^{-t} t^{n+1} dt = -\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} + (n+1) \int_0^{n+1} e^{-t} t^n dt.$$

On a donc en divisant par $(n+1)!$.

$$u_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} + u_n + \frac{1}{n!} \int_n^{n+1} e^{-t} t^n dt$$

Soit

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} + \frac{1}{n!} \int_n^{n+1} e^{-t} t^n dt$$

La fonction $f(t) = e^{-t} t^n$ se dérive en $f'(t) = e^{-t} (-t^n + nt^{n-1}) = e^{-t} t^{n-1} (n-t) < 0$ sur $[n, n+1]$.

Donc $\int_n^{n+1} e^{-t} t^n dt > \frac{(n+1)^n}{e^{n+1}}$ donc

$$u_{n+1} - u_n > -\frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} + \frac{(n+1)^n}{n! e^{n+1}}$$

donc

$$u_{n+1} - u_n > \frac{(n+1)^n}{e^{n+1} n!} \left(1 - \frac{n+1}{n+1}\right)$$

donc

$$u_{n+1} - u_n > 0.$$

Solution 16

Par changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - \theta$ on a $\Lambda(x, y) = \Lambda(y, x)$.

De ce fait et puisque $1 = (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2 = \cos^4 \theta + \sin^4 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$,

$$\begin{aligned}
 2\Lambda(x, y) &= \Lambda(x, y) + \Lambda(y, x) \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(x \sin^2 \theta + y \cos^2 \theta)(y \sin^2 \theta + x \cos^2 \theta) d\theta \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log((x^2 + y^2) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + xy(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)) d\theta \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log((x^2 + y^2) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + xy(1 - 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta)) d\theta \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log((x^2 + y^2) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + xy(1 - 4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 2xy \cos^2 \theta \sin^2 \theta)) d\theta \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log((x^2 + y^2 + 2xy) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + xy \cos^2(2\theta)) d\theta \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\left(\frac{(x+y)^2}{4}\right) \sin^2(2\theta) + xy \cos^2(2\theta)\right) d\theta \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log\left(\left(\frac{(x+y)^2}{4}\right) \sin^2 \varphi + xy \cos^2 \varphi\right) d\varphi \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\left(\frac{(x+y)^2}{4}\right) \sin^2 \varphi + xy \cos^2 \varphi\right) d\varphi
 \end{aligned}$$

En profitant du fait que $\left(\frac{(x+y)^2}{4}\right) \sin^2 \varphi + xy \cos^2 \varphi$ est invariant lorsqu'on change φ en $\pi - \varphi$.

Pour $x > 0$ et $y > 0$ on pose $u_0 = x, v_0 = y, u_{n+1} = \left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2$ et $v_{n+1} = u_n v_n$.

On en déduit $\forall n \in \mathbb{N}, \Lambda(u_n, v_n) = \Lambda(x, y)$.

On a $\forall n \geq 1, u_n \geq v_n$ et par suite. $\Lambda(v_n, v_n) \leq \Lambda(u_n, v_n) \leq \Lambda(u_n, u_n)$ soit $\log(v_n) \leq \Lambda(u_n, v_n) \leq \log(u_n)$. En posant $s_n = \sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}$ et $d_n = \sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}$ on a $s_{n+1} = \frac{s_n^2}{2}$ et $d_{n+1} = \frac{d_n^2}{2}$. Donc $s_n = 2 \left(\frac{s_0}{2}\right)^{2^n}$.
 $d_n = 2 \left(\frac{d_0}{2}\right)^{2^n}$. $\sqrt{u_n} = \left(\frac{s_0}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{d_0}{2}\right)^{2^n}$ et $\sqrt{v_n} = \left(\frac{s_0}{2}\right)^{2^n} - \left(\frac{d_0}{2}\right)^{2^n}$. Puis

$$\frac{1}{2^n} \log(u_n) = \frac{2}{2^n} \log \left[\left(\frac{s_0}{2}\right)^{2^n} \left(1 + \left(\frac{d_0}{s_0}\right)^{2^n}\right) \right] = 2 \log(s_0) + \frac{1}{2^{n-1}} \log \left(1 + \left(\frac{d_0}{s_0}\right)^{2^n}\right).$$

Or $\left|\frac{d_0}{s_0}\right| = \left|\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right| < 1$ donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \log(u_n) = 2 \log \frac{s_0}{2} = 2 \log \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2}.$$

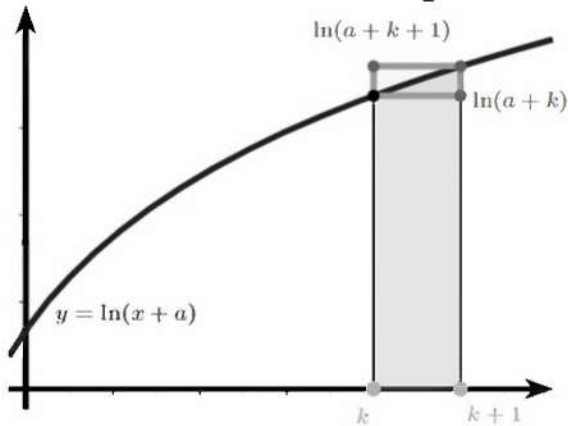
De même $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \log(v_n) = 2 \log \frac{s_0}{2}$ donc d'après le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\Lambda(x, y) = 2 \log \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2}}$$

Solution 17 (Où ça des intégrales?)

On commence par traiter le cas où $b = 1$.

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Lambda_n = a + \frac{n-1}{2}$ donc $\ln(\Lambda_n) = \ln\left(a + \frac{n-1}{2}\right)$.



On a $\ln(G_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(k+a)$.

La fonction logarithme est **croissante** sur $]0, +\infty[$. Donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [k, k+1]$, :

$$\ln(a+k) \leq \ln(a+x) \leq \ln(a+k+1).$$

On intègre cet encadrement entre k et $k+1$:

$$\int_k^{k+1} \ln(a+k) dx \leq \int_k^{k+1} \ln(a+x) dx \leq \int_k^{k+1} \ln(a+k+1) dx,$$

soit

$$\ln(a+k) \leq \int_k^{k+1} \ln(a+x) dx \leq \ln(a+k+1).$$

On somme ces inégalités pour k variant de 0 à $n-1$. D'après la relation de Chasles :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(a+k) \leq \int_0^n \ln(a+x) dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} \ln(a+k+1),$$

Soit après division par n ,

$$\ln(G_n) \leq \int_0^n \ln(a+x) dx \leq \ln(G_n) + \frac{\ln(a+n) - \ln(a)}{n}.$$

$$\text{Or, } I_n := \int_0^n \ln(a+x) dx = [(a+x) \ln(a+x) - x]_0^n = \frac{a+n}{n} \ln(a+n) - 1 - \frac{a \ln(a)}{n}.$$

En prenant l'inégalité de gauche, on obtient

$$\begin{aligned} \ln(G_n) - \ln(\Lambda_n) &\leq \frac{a+n}{n} \ln(a+n) - 1 - \frac{a \ln(a)}{n} - \ln\left(a + \frac{n-1}{2}\right) \\ &\leq \ln\left(\frac{a+n}{a + \frac{n-1}{2}}\right) - 1 + \frac{a}{n} \ln(a+n) - \frac{a \ln(a)}{n} \\ &\leq \ln\left(\frac{\frac{a}{n} + 1}{\frac{a-1}{2n} + \frac{1}{2}}\right) - 1 + \frac{a}{n} \ln(a+n) - \frac{a \ln(a)}{n}. \end{aligned}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{\frac{a}{n} + 1}{\frac{a-1}{2n} + \frac{1}{2}}\right) = \ln 2 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} \ln(a+n) - \frac{a \ln(a)}{n} = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} I_n - \ln(\Lambda_n) = \ln 2 - 1.$$

En prenant l'inégalité de droite, on obtient

$$I_n - \ln(\Lambda_n) - \frac{\ln(a+n) - \ln(a)}{n} \leq \ln(G_n) - \ln(\Lambda_n).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n - \ln(\Lambda_n) - \frac{\ln(a+n) - \ln(a)}{n} = \ln 2 - 1 + 0$, d'après le théorème d'encadrement, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(G_n) - \ln(\Lambda_n) = \ln 2 - 1$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n}{\Lambda_n} = \frac{2}{e}$.

Lorsque $b \neq 1$, on se ramène - grâce à notre animal fétiche - au cas précédent en divisant tous les termes de la suite par b , ce qui a pour effet de diviser les deux moyennes par b et de remplacer a par $a' := \frac{a}{b}$. La limite est inchangée.

Remarque 14.

Cette technique - très visuelle - s'applique naturellement lorsqu'on a affaire à des suites $u_n = f(n)$ où f est une fonction monotone sur $[0, +\infty[$. À retenir.

Solution 18

En écrivant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_n := \int_0^1 x \frac{x^{n-1} dx}{1+x^n}$ une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \left[\frac{x}{n} \ln(1+x^n) \right]_0^1 - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \\ &= \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx. \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité - désormais classique - $0 \leq \ln(1+u) \leq u$ valable pour $u \geq 0$. En faisant jouer à x^n le rôle de u , on obtient,

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit que

$$n\varepsilon_n = \ln(2) - \alpha_n,$$

avec $0 \leq \alpha_n \leq \frac{1}{n+1}$ soit $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. Le résultat demandé en découle.

Solution 19

Par changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$ on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{\cos x}}{(\cos x)^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos t)^{\sin t}}{(\sin t)^{\cos t} + (\cos t)^{\sin t}} dt$$

$$\text{Donc } 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{\cos x}}{(\cos x)^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}}{(\cos x)^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{D'où } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{\cos x}}{(\cos x)^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Solution 20

On a $\frac{d}{dx} f(x) = 2(2x \ln 2x - 2x) - (x \ln x - x) = 3x(\ln x + \frac{4}{3} \ln 2 - 1)$ Au minimum, on a $x = \frac{e}{2^{\frac{4}{3}}}$. Donc

$\int t \ln t - t dt = \frac{1}{2} \int \ln t dt^2 - \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2} t^2 \ln t - \frac{3}{4} t^2$ d'où $f(x) = \frac{3}{2} x^2 \ln x + (\ln 4 - \frac{9}{4}) x^2$ En posant $x = \frac{e}{2^{\frac{4}{3}}}$, on

a $f(x)_{\min} = -3(2)^{-\frac{14}{3}} e^2$.

Solution 21

Dans le cas où a est un réel différent de -1 et de 1 :

On pose S_n la somme de Riemann de cette intégrale (en découpant l'intervalle $[0; \pi]$ en n intervalles de même longueur) :

$$S_n = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(a^2 - 2a \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 \right)$$

On a alors $S_n = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln((a - e^{ik\pi/n})(a - e^{-ik\pi/n}))$, et donc :

$$S_n = \frac{\pi}{n} \ln \left(\prod_{k=0}^{n-1} (a - e^{ik\pi/n})(a - e^{-ik\pi/n}) \right)$$

Or, $\prod_{k=0}^{n-1} (a - e^{ik\pi/n})(a - e^{-ik\pi/n}) = \frac{(a^{2n} - 1)(a - 1)}{a + 1}$.

Donc $S_n = \frac{\pi}{n} \ln \left(\frac{(a^{2n} - 1)(a - 1)}{a + 1} \right)$. On conclut en regardant la limite quand n tend vers $+\infty$ suivant les valeurs de a :

Si $|a| < 1$, on trouve 0, si $|a| > 1$, on trouve $2\pi \ln |a|$.

Solution 22 (Inégalité arithmético-géométrique)

- $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^G \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{G} \right) dt = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\ln G - \ln a_k - \frac{1}{G}(G - a_k) \right) = \ln G - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln a_k - 1 + \frac{1}{nG} \sum_{k=1}^n a_k = \ln G - \ln G - 1 + \frac{\Lambda}{G} = \frac{\Lambda}{G} - 1$.
- On a très simplement $a_1^n \leq a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n \leq a_n^n$ et en prenant les racines n -ièmes, $a_1 \leq G \leq a_n$.
- Une fois l'existence de m établie, on a : $\frac{\Lambda}{G} - 1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m \int_{a_k}^G \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{G} \right) dt + \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^n \int_G^{a_k} \left(\frac{1}{G} - \frac{1}{t} \right) dt$.

Les termes de la première somme sont positifs. Ceux de la deuxième somme aussi, donc $\frac{\Lambda}{G} - 1 \geq 0$, d'où le résultat.

6.9.3 Étude de fonctions

Solution 23

- La fonction g est dérivable comme somme de fonctions dérivables. De plus pour tout réel x , $g'(x) = e^x - 1$. D'après la croissance de la fonction exponentielle, on a donc :

$$\forall x < 0, g'(x) < 0 \text{ et } \forall x > 0, g'(x) > 0.$$

On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de g	$+\infty$	0	$+\infty$

(a) La lecture du tableau de variations de g est éloquent. Si on veut détailler :

- La fonction g est décroissante sur l'intervalle $] -\infty, 0]$ donc pour tout $x \in] -\infty, 0]$, $g(x) \geq g(0) = 0$.
- La fonction g est croissante sur l'intervalle $[0, +\infty [$ donc pour tout $x \in [0, +\infty [$, $g(x) \geq g(0) = 0$.

C'est bien dire que la fonction g est positive ou nulle.

(b) Le dénominateur de la fraction $\frac{e^x}{e^x - x}$ est supérieur ou égal à 1 d'après la question précédente. Il est nécessairement non nul. C'est dire que $f(x)$ est défini pour tout réel x .

2. La fonction f est continue en tant que quotient de deux fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas.
3. La fonction f est dérivable en tant que quotient de deux fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas. De plus, pour tout réel x ,

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - x) - e^x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{(1 - x)e^x}{(e^x - x)^2},$$

qui est du signe de $1 - x$. On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variations de f			

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = -1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(1 - xe^{-x})} = \frac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - xe^{-x} = 0$ par croissance comparée, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

- (a) Par lecture du tableau de variations de f , on constate que l'équation :

$$\left[f(x) = \frac{1}{2} ; \text{ inconnue } x \in \mathbb{R} \right]$$

n'admet aucune solution dans l'intervalle $[1, +\infty[$ puisque

$$\forall x \in [1, +\infty[, f(x) > 1 > \frac{1}{2}.$$

En revanche l'équation :

$$\left[f(x) = \frac{1}{2} ; \text{ inconnue } x \in]-\infty, 0] \right]$$

admet une unique solution. En effet,

- La fonction f est continue sur l'intervalle $] -\infty, 1]$.
- On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \frac{e}{e-1}$.
- On a $0 < \frac{1}{2} \leq 1 < \frac{e}{e-1}$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\frac{1}{2}$ admet au moins un antécédent par f dans l'intervalle $] -\infty, 1]$.

Comme de plus la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $] -\infty, 1]$, cet antécédent est unique, ce qu'il fallait démontrer.

- (b) En tabulant la fonction f à partir de 1 avec un pas $\Delta Tbl = -1$ on trouve $f(0) = 1$ et $f(-1) = 0,2689$, donc $-1 \leq \alpha \leq 0$.
- (c) Une méthode de Newton donne $\alpha = -0.568$ à 10^{-3} près par défaut.

```
from math import exp
from math import floor

def f(x):
    return exp(x)/(exp(x)-x)

def fp(x):
    return f(x)*(1-x)/(exp(x)-x)
```

```
u=-1
n=0
go=True
while go:
    n=n+1
    u=u-(f(u)-0.5)/fp(u)
    f1=floor(1000*u)
    umin=f1*0.001
    umax=(f1+1)*0.001
    if (f(umin)-0.5)*(f(umax)-0.5)<0:
        go=False
    print (umin,n)
```

La fonction `fp` retourne $f'(x)$.

À chaque passage de la boucle on calcule $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n) - \frac{1}{2}}{f'(u_n)}$. `umin` calcule l'approximation décimale au millième de u_{n+1} par défaut, `umax` celle par excès. On calcule les images de ces nombres. Si leurs différences avec 0,5 n'ont pas le même signe, on arrête le programme.

Solution 24

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}_+^*$. On a $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq f(x) \frac{f(h) - 1}{h}$. Donc, en passant à la limite (à droite) on a $f'(x) \leq f(x) \times f'(0)$. En posant $k := f'(0)$ et $g(x) := f(x) \exp(-kx)$ on définit une fonction g dérivable sur \mathbb{R} telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = (f'(x) - kf(x)) \exp(-kx) \leq 0$. Donc g est décroissante sur l'intervalle \mathbb{R} . Par conséquent

- $\forall x \geq 0$, $g(x) \leq g(0) = 1$ et $f(x) \leq \exp(kx)$.
- $\forall x \leq 0$, $g(x) \geq g(0) = 1$ et $f(x) \geq \exp(kx)$.

Soit \check{f} définie sur \mathbb{R} par $\forall x \in \mathbb{R}$, $\check{f}(x) = f(-x)$. On a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(-x-y) \leq f(-x) \times f(-y)$ soit $\check{f}(x+y) \leq \check{f}(x) \times \check{f}(y)$. De plus $\check{f}(0) = f(0) = 1$ et $\check{f}'(0) = -f'(0) = -k$. D'après ce qui précède, $\forall x \geq 0$, $\check{f}(x) = f(-x) \leq \exp(-kx)$, donc $\forall x \leq 0$, $f(x) \leq \exp(kx)$.

De même $\forall x \leq 0$, $\check{f}(x) = f(-x) \geq \exp(-kx)$, donc $\forall x \geq 0$, $f(x) \geq \exp(kx)$.

En rassemblant ces quatre inégalités, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(kx) = \exp(f'(0)x)$.

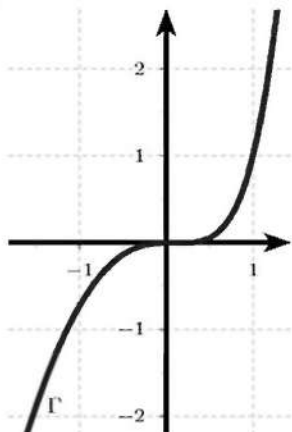
2. Dans la question précédente, on ne s'est servi que de la dérivabilité en zéro. Ce qui suggère le contreexemple suivant.

Soit f définie sur \mathbb{R} par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \exp(|x|)$. On a bien

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = \exp(|x + y|) \leq \exp(|x| + |y|) = \exp(|x|) \times \exp(|y|) = f(x) \times f(y).$$

Solution 25

1.



- 2. Il semblerait que la fonction f soit croissante sur l'intervalle \mathbb{R} .
- 3. On a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(2 \exp(x - 1) - 1) + 2x^2 \exp(x - 1) \\ &= 2x \left((x + 2) \exp(x - 1) - \frac{1}{2} \right) \\ &= 2xg(x), \end{aligned}$$

en posant $g(x) := (x + 2) \exp(x - 1) - \frac{1}{2}$.
On trouve $g'(x) = (x + 3) \exp(x - 1)$.

x	$-\infty$	-3	α	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	+
$g(x)$	-1	$g(-3) < 0$		0

\nearrow \searrow \nearrow

Le théorème des valeurs intermédiaires (17 page 113 du cours de première) assure l'existence d'un unique réel $\alpha \in [-3, +\infty[$, tel que $g(\alpha) = 0$.

On en déduit les variations de f :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$f(\alpha) < 0$	$+\infty$

\nearrow \searrow \nearrow

La conjecture émise à la question 2 est donc invalidée.

Solution 26

1. Soit, pour $x \geq 0$, $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{\sqrt{1+x}}$. La fonction f est dérivable et $\forall x \geq 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{x}{2(1+x)\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{2\sqrt{1+x} - 2x + x}{2(1+x)\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{2\sqrt{1+x} - x}{2(1+x)\sqrt{1+x}} \end{aligned}$$

du signe de $g(x) := 2\sqrt{1+x} - x$.

La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \geq 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 \leq 0.$$

La fonction g est décroissante sur $]0, +\infty[$ et, puisque $g(0) = 0$ on a $\forall x \geq 0$, $g(x) \leq 0$ ainsi que $f'(x) \leq 0$.

La fonction f est décroissante sur $]0, +\infty[$ et, puisque $f(0) = 0$ on a $\forall x \geq 0$, $f(x) \leq 0$ soit $\ln(1+x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x}}$.

2. On résout, pour $t \geq 0$, l'équation

$$\left[\frac{x}{\sqrt{1+x}} = t : \text{inconnue } x \in]0, +\infty[\right]$$

On a $t^2 = \frac{x^2}{1+x}$ donc x est racine positive de l'équation du second degré $x^2 - t^2x - t^2 = 0$. On pose

$$\Delta := t^4 + 4t^2 \geq 0. \text{ La racine positive est } x = \frac{t^2 + t\sqrt{t^2 + 4}}{2}.$$

D'après la question précédente, on a $\ln(1+x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ soit $\ln\left(1 + \frac{t^2 + t\sqrt{t^2 + 4}}{2}\right) \leq t$.

En prenant l'exponentielle des deux membres, le résultat demandé s'en déduit.

3. L'héroïsme a ses limites.

Xcas en ligne. Tapez une instruction dans cette console (assistant avec la bouée).

```
f(x):=3*ln(x)-(x^3-1)*(x+1)/(x^3+x)
(x):>3*ln(x)-(x^3-1)*(x+1)/(x^3+x)
```

```
g:=unapply((f(x)),x)
(x):>-3*x^2*(1+x)/(x^3+x)-(x^3-1)/(x^3+x)-(x^3-1)*(1+x)*(-3*x^2-1)/(x^3+x)^2+3/x
```

```
factor(g(x))
```

$$-\frac{(x-1)^4(x^2+x+1)}{x^2(x^2+1)^2}$$

La fonction $f : x \mapsto 3 \ln(x) - \frac{(x^3-1)(x+1)}{x^3+x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée :

$$f'(x) = -\frac{(x-1)^4(x^2+x+1)}{x^2(x^2+1)^2} < 0.$$

Elle est décroissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Comme $f(1) = 0$, on a bien

$$\forall x \geq 1, 3 \ln(x) - \frac{(x^3-1)(x+1)}{x^3+x} \leq 0.$$

Solution 27 (Questions vaches)

1. Y_n ne prend que deux valeurs, $1/n$ et $1 + 1/n$. On a en outre :

$$(Y_n = 1/n) \iff \text{aucune vache n'est malade}$$

d'où $P(Y_n = 1/n) = 0,85^n$. On en déduit la loi de Y est une loi de probabilité $P(Y = 1 + 1/n) = 1 - (0,85)^n$. Le calcul de l'espérance donne :

$$E(Y_n) = \frac{0,85^n}{n} + \frac{n+1}{n}(1 - 0,85^n) = 1 + \frac{1}{n} - 0,85^n.$$

2. f est dérivable sur $]0, +\infty[$, et $f'(x) = \frac{1+ax}{x}$. $f'(x)$ est donc du signe de $1+ax$, ce qui permet de dire que f est croissante sur $]0, -1/a[$, et décroissante ensuite. La limite de f en $+\infty$ est $-\infty$, il en est de même en 0. En calculant les valeurs successives de $f(n)$, on a $f(17) > 0,07$ et $f(18) < -0,03$. 17 est donc la plus grande valeur entière pour laquelle $f(n)$ est positive. En outre, $f(1) < 0$ alors que $f(2) > 0$. L'ensemble d'entiers recherché est donc $\{2, \dots, 17\}$.
3. On a :

$$\begin{aligned} E(Y_n) < 1 &\iff 1 + \frac{1}{n} - 0,85^n < 1 \\ &\iff 0,85^n > \frac{1}{n} \\ &\iff n \ln(0,85) > -\ln n. \end{aligned}$$

Par suite, $E(Y_n) < 1 \iff f(n) > 0$. L'étude précédente montre que les entiers n pour lesquels $f(n) > 0$ est $\{2, \dots, 17\}$. On a intérêt à choisir la deuxième méthode si, et seulement si, il y a de 2 à 17 vaches dans l'étable !

Solution 28 (Entropie d'une variable aléatoire)

1. On remarque que $x \ln(x) \leq 0$ si $x \in [0, 1[$ ce qui assure que $H(X) \geq 0$.
2. Si X est presque sûrement constante, on a $p_i = 1$ pour un i et $p_j = 0$ pour $j \neq i$. On en déduit que $H(X) = -1 \times \ln(1) = 0$. Réciproquement, si $H(X) = 0$, alors la preuve de la question précédente implique que, pour tout $i = 1, \dots, n$, on doit avoir $p_i \ln(p_i) = 0$. Ceci implique $p_i = 0$ ou $p_i = 1$. Puisque la somme des p_i doit être égale à 1, un des p_i est donc égal à 1, et tous les autres p_j sont nuls : X est presque sûrement constante.
3. Posons pour $x \in]0, +\infty[$, $g(x) = -x \ln x - (1-x)$. g est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $g'(x) = -\ln x - 1 + 1 = -\ln x$. Ainsi, g est strictement croissante sur $]0, 1[$ et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$. Puisque $g(1) = 0$, on en déduit que $g(x) \leq 0$ si $x > 0$ avec égalité si et seulement si $x = 1$, et donc $-x \ln x \leq 1-x$, avec égalité si et seulement si $x = 1$. On en déduit que, pour tout $k = 1, \dots, n$,

$$(-np_k) \ln(np_k) = -np_k \ln(n) - np_k \ln(p_k) \leq 1 - np_k$$

avec égalité si et seulement si $np_k = 1$.

4. On somme les inégalités précédentes, pour k allant de 1 à n :

$$-n \ln n + nH(X) \leq n - n = 0.$$

Ceci prouve le résultat voulu.

5. Si $H(X) = \ln n$, toutes les inégalités précédentes doivent être des égalités. On en déduit que $(-np_k) \ln(np_k) = 1 - np_k$ pour tout $k = 1, \dots, n$, c'est-à-dire, $p_k = 1/n$. Ainsi, si $H(X) = \ln n$, X est équirépartie. Réciproquement, si X est équirépartie, on a $p_i = 1/n$ pour tout i . On en déduit

$$H(X) = \sum_{i=1}^n -\frac{\ln(1/n)}{n} = -\ln(1/n) = \ln(n).$$

$H(X)$ mesure le désordre engendré par X . Lorsque X est presque sûrement constante, son entropie est nulle (pas de désordre). Lorsque la variable est équadistribuée, le désordre est maximal et l'entropie aussi.

Solution 29 (Amérique du Nord 2019)

Partie A : établir une inégalité

1.

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par opérations sur les fonctions dérivables. De plus, pour tout réel x de l'intervalle $[0, +\infty[$,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	1
$f(x)$	0	$\nearrow +\infty$	

Remarque 15.

On a $\forall x > 0$, $f(x) = x \left(1 - \frac{\ln(x+1)}{x} \right)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$ par croissance comparée. Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. On déduit de la croissance de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$:

$$\forall x \geq 0, f(x) \geq f(0), \quad \text{soit } x - \ln(x+1) \geq 0,$$

soit $\ln(x+1) \leq x$.

Partie B : application à l'étude d'une suite

1. Un programme, semblable au programme qui suit permet à la calculatrice de trouver $u_2 = 0,039$ à 10^{-3} près.
2. (a) Soit \mathcal{P}_n la proposition qui dépend de l'entier naturel n : $u_n \geq 0$.

La propriété \mathcal{P}_0 est clairement VRAIE.

Soit n un entier naturel pour lequel on a \mathcal{P}_n , soit $u_n \geq 0$. On en déduit $u_{n+1} = f(u_n) \geq 0$ d'après le tableau de variations de f . On a donc bien \mathcal{P}_{n+1} .

En résumé on a \mathcal{P}_0 et $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$.

D'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$ ce qu'il s'agissait d'établir.

(b) On a $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -\ln(1 + u_n)$. Or, d'après la question précédente, on a $u_n \geq 0$ donc $\ln(1 + u_n)$ a un sens et $\ln(1 + u_n) \geq \ln(1) = 0$. Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et ce pour tout entier naturel n . C'est bien dire que la suite (u_n) est décroissante.

En particulier $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_0 = 1$. Ce qu'il fallait démontrer.

(c) La suite (u_n) est décroissante, nous venons de le voir à l'instant et elle est minorée par zéro d'après la question 2a. Elle est donc convergente.

3. Par conservation des inégalités larges par passage à la limite on a $\ell \geq 0$. La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ donc en $\ell \in [0, +\infty[$. On a donc bien $\ell = f(\ell)$.

4. (a) PROGRAM AMNORD:

```
:-15 → P
:0 → N
:1 → U
:While U ≥ 10-17(P)
:U-ln(1+U) → U
:N+1 → N
Disp(N,U)
:end
```

(b) Ce programme affiche $-4.35222e - 17$ pour u_5 et par conséquent, $N = 5$.

Il est clair qu'une valeur négative pour u_5 contredit 2a. Une fois de plus la calculette donne un résultat faux : en effet en additionnant des nombres très différents comme 1 et u_4 elle commet une erreur de calcul suffisamment grande pour donner un résultat faux.

Le programme Python :

```
import math
u=1
p=-15
n=0
while u>=10**p:
    u=u-math.log(1+u)
    n=n+1
    print(n, 'u', u)
```

Donne lui aussi un résultat faux pour u_6 . Il donne $u_5 = 4 \times 10^{-14}$ et $u_6 = 5 \times 10^{-17}$. Nous allons voir que ces résultats sont incompatibles.

Pour $x \in [0, +\infty[$, on a $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ ce qui peut se vérifier à l'aide d'une étude de fonction. On en déduit $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq \frac{u_n^2}{2}$. **En supposant** que la valeur affichée pour u_5 est correcte, on en déduit que $u_6 \leq \frac{u_5^2}{2} \leq 8 \times 10^{-28}$, ce qui prouve que la valeur $-4.35222e - 17$ affichée pour u_6 est fautive.

Pour être (un peu plus) sûr de la valeur de N on procède comme suit :

On démontre par une étude de fonction que

$$\forall x \in [0, +\infty[, \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7} \leq x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2}.$$

On définit les deux suites (m_n) et (M_n) par $m_0 = M_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, m_{n+1} = \frac{m_n^2}{2} - \frac{m_n^3}{3} + \frac{m_n^4}{4} - \frac{m_n^5}{5} + \frac{m_n^6}{6} - \frac{m_n^7}{7} \text{ et } M_{n+1} = \frac{M_n^2}{2}.$$

D'après la croissance de la fonction f sur $[0, +\infty[$ on en déduit via une récurrence sans difficulté que

$$\forall n \in \mathbb{N}, m_n \leq u_n \leq M_n.$$

Le programme Python :

```
import math
u=1
p=-15
n=0
m=1
M=1
while u>=10**p:
    u=u-math.log(1+u)
    m=m*m*(0.5-m*(1/3-m*(0.25-m*(0.2-m*(1/6-m/7))))
    M=0.5*M*M
    n=n+1
    print(n, 'u', m, 'u', u, 'M', M)
```

Donne

1	0.2404761904761905	0.3068528194400547	0.5
2	0.02497970779858347	0.03923100059562018	0.125
3	0.00030689267383662367	0.0007499834542035178	0.0078125
4	4.708192414188088e - 08	2.8109705414345546e - 07	3.0517578125e - 05
5	1.1083537556619613e - 15	3.9573363731490506e - 14	4.656612873077393e - 10
6	6.142240238449868e - 31	4.9424054835715754e - 17	1.0842021724855044e - 19

ce qui montre que $N = 6$.

Solution 30

Par l'absurde. Supposons $\frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. On aurait alors $\ln(3^p) = \ln(2^q)$ soit $3^p = 2^q$ ce qui contredit le théorème fondamental de l'arithmétique.

Solution 31

La fonction $f : x \in [1, 2] \mapsto x^x = \exp(x \ln x)$ est continue sur l'intervalle $[1, 2]$. On a $f(1) = 1$ et $f(2) = 4$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [1, 2]$, $f(x) = 2$. On va démontrer qu'un tel réel x n'est pas rationnel.

Par l'absurde, supposons $x = \frac{p}{q}$. On a donc $\left(\frac{p}{q}\right)^{p/q} = 2$ donc $\left(\frac{p}{q}\right)^p = 2^q$ donc $p^p = 2^q q^p$. On a $p > q \geq 1$. De ce fait q divise $2^q q^p$ donc q divise p^p . Or q est premier avec p donc d'après le théorème 12.5 page 36 on a q est premier avec p^p . D'après le théorème de Gauss (théorème 9 page 33) on a q divise 1. Donc $x = p$ est un entier de l'intervalle $]1, 2]$. Contradiction.

Donc x est un irrationnel tel que $x^x = 2 \in \mathbb{Q}$.

Solution 32 (Complexité de l'algorithme d'Euclide)

1. Par une récurrence à deux pas on démontre la proposition $\mathcal{P}_n : F_n \geq \phi^{n-2}$. On a clairement \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier pour lequel on a \mathcal{P}_n et \mathcal{P}_{n+1} . On a alors

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \geq \phi^{n-1} + \phi^{n-2} = \phi^{n-1} (1 + \phi) = \phi^{n+1}$$

puisque $\phi^2 = 1 + \phi$. On a bien \mathcal{P}_{n+1} .

On conclut grâce au théorème de récurrence.

2. On démontre par récurrence sur $k \in \{1, \dots, n\}$ la proposition $\mathcal{H}_k : r_{n-k} \geq F_{k+2}$.

Pour $k = 1$, on a $r_{n-1} = r_n q_n$ et $r_n < r_{n-1}$. On en déduit que $q_n \geq 2$. Ainsi $r_{n-1} = r_n q_n \geq q_n \geq 2 = F_3$. On a bien \mathcal{H}_1 .

Pour $k = 2$, on a $r_{n-2} > r_{n-1} \geq 2$ donc $r_{n-2} \geq 3 = F_4$. On a bien \mathcal{H}_2 .

Soit $k \in \{1, \dots, n-2\}$ un entier pour lequel on a \mathcal{H}_k et \mathcal{H}_{k+1} . On a alors

$$r_{n-k-2} = r_{n-k-1} q_{n-k-1} + r_{n-k} \geq \underbrace{r_{n-k-1}}_{\geq q_n} + r_{n-k} \geq \underbrace{F_{k+3}}_{\text{d'après } \mathcal{H}_{k+1}} + \underbrace{F_{k+2}}_{\text{d'après } \mathcal{H}_k} \geq F_{k+4}$$

on a donc \mathcal{H}_{k+2} .

D'après le théorème de récurrence, on a

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, r_{n-k} \geq F_{k+2}.$$

3. D'après \mathcal{H}_{n-1} , on a $r_1 \geq F_{n+1}$. Or $r_1 = b$ donc $b \geq F_{n+1} \geq \phi^{n-1}$. Donc $\ln b \geq (n-1) \ln \phi$. Puisque $\phi > 1$ on a $\ln \phi > 0$ et $n-1 \leq \frac{\ln b}{\ln \phi}$, le résultat en découle.

6.9.4 Convexité

Solution 33

1. La fonction f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{1}{1+e^x} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \geq 0,$$

Donc la fonction f est convexe sur \mathbb{R} .

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n$. Définissons $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, par $y_i = \ln(x_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ (d'où $e^{y_i} = x_i$). En écrivant l'inégalité de convexité généralisée 1 page 159,

$$f\left(\frac{y_1 + \dots + y_n}{n}\right) \leq \frac{f(y_1) + \dots + f(y_n)}{n}$$

on trouve

$$\ln\left(1 + \exp\left(\frac{y_1 + \dots + y_n}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{n} \ln(1 + e^{y_1}) + \dots + \frac{1}{n} \ln(1 + e^{y_n}).$$

En prenant l'exponentielle, qui est croissante sur \mathbb{R} , on trouve l'inégalité souhaitée.

Solution 34

La fonction logarithme est concave sur $]1, +\infty[$ donc

$$\ln \frac{a+b}{2} \geq \frac{1}{2} (\ln a + \ln b).$$

Comme $\ln a$ et $\ln b$ sont positifs, on a $\frac{1}{2} (\ln a + \ln b) \geq \sqrt{\ln a \ln b}$. (Inégalité arithmético-géométrique pour deux réels positifs)

Solution 35

1. On a $\forall x > 0$, $g(x) = \exp(x \ln(x))$. Par croissance comparée, on a $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1 = g(0)$. C'est bien dire que g est continue en zéro. La continuité aux autres points résulte des théorèmes généraux.
2. On a $\forall x > 0$, $g'(x) = (\ln(x) + 1) \exp(x \ln(x))$ et $g''(x) = \left[(\ln(x) + 1)^2 + \frac{1}{x} \right] \exp(x \ln(x)) > 0$. On en déduit que g' est strictement croissante sur $[0, 1]$ et donc que g est convexe sur $[0, 1]$. L'inégalité recherchée n'est autre que l'inégalité de convexité généralisée 1 page 159 avec $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1/n$.

6.9.5 Exponentielle complexe**Solution 36**

- a. $z^2 - 2z \cos a + 1 = (z - e^{ia})(z - e^{-ia})$; $\mathcal{L} = \{e^{ia}, e^{-ia}\}$.
- b. $z^2 - 2z \sin a + 1 = 0$. $\mathcal{L} = \{ie^{ia}, -ie^{-ia}\}$.

Solution 37

1. On écrit $C_n(x)$ comme la partie réelle de $\sum_{k=1}^n e^{ikx}$. Or $\sum_{k=1}^n e^{ikx}$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $q = e^{ix}$. On a $q \neq 1$ puisque x n'est pas un multiple entier de 2π . De ce fait,

$$\begin{aligned} C_n(x) &= \operatorname{Re} \left(e^{ix} \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1} \right) = \operatorname{Re} \left(e^{ix} \frac{e^{inx/2} e^{inx/2} - e^{-inx/2} e^{-inx/2}}{e^{ix/2} e^{ix/2} - e^{-ix/2} e^{-ix/2}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{i(n+1)x/2} \frac{2i \sin \left(\frac{nx}{2} \right)}{2i \sin \left(\frac{x}{2} \right)} \right) = \cos \left((n+1) \frac{x}{2} \right) \frac{\sin \left(\frac{nx}{2} \right)}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait vérifier.

2. Une idée assez proche, d'une efficacité redoutable : On pose

$$G := \sum_{k=1}^n \exp(ikx) = \exp(ix) + \exp(i2x) + \dots + \exp(inx)$$

et on calcule $\exp(ix/2)S - \exp(-ix/2)S$. Tous les termes se simplifient deux à deux, sauf deux :

$$\begin{aligned} \exp(ix/2)S - \exp(-ix/2)S &= \exp \left(\frac{i(2n+1)x}{2} \right) - \exp \left(\frac{ix}{2} \right) \\ &= \exp \left(\frac{i(n+1)x}{2} \right) \left(\exp \left(\frac{inx}{2} \right) - \exp \left(\frac{-inx}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

où on a mis en facteur $\exp \left(\frac{a+b}{2} \right)$ avec $a := \frac{i(2n+1)x}{2}$ et $b := \frac{ix}{2}$ pour pouvoir écrire

$$\exp(a) - \exp(b) = \exp \left(\frac{a+b}{2} \right) \times \left(\exp \left(\frac{a-b}{2} \right) - \exp \left(\frac{b-a}{2} \right) \right).$$

L'intérêt est que l'on voit apparaître un sinus dans la dernière parenthèse de droite. Comme il en apparaît aussi un dans le membre de gauche, tout va bien :

$$2i \sin(x/2)S = \exp \left(\frac{i(n+1)x}{2} \right) \times 2i \sin(nx/2),$$

et puisque $\sin(x/2) \neq 0$,

$$S = \exp\left(\frac{i(n+1)x}{2}\right) \times \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}.$$

Un dernier effort car $C_n(x)$ est la partie réelle de S . Les sinus sont réels, donc

$$C_n(x) = \cos\left(\frac{i(n+1)x}{2}\right) \times \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}.$$

voir aussi le problème 9 page 262 dans le cours de première.

3. Une autre idée exponentielle serait de calculer $S = \frac{G-1}{2}$ où G est la somme de termes d'une suite géométrique, à savoir

$$G := \sum_{k=-n}^n \exp(ikx)$$

dont la raison $\exp(ikx)$ est différente de 1. On a alors

$$\begin{aligned} G &= \frac{\exp(i(n+1)x) - \exp(ix)}{\exp(ix) - 1} \\ &= \frac{\exp(ix/2) (\exp(i(2n+1)x/2) - \exp(-i(2n+1)x/2))}{\exp(ix/2) (\exp(ix/2) - \exp(-ix/2))} \\ &= \frac{2i \sin((2n+1)x/2)}{2i \sin(x/2)} \\ &= \frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} S &= \frac{G-1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin((2n+1)x/2) - \sin(x/2)}{\sin(x/2)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 \sin(nx/2) \cos((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \\ &= \frac{\sin(nx/2) \cos((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}. \end{aligned}$$

Solution 38

On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)} = n^2$ et par symétrie $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)} = n^2$.

De plus,

$$\begin{aligned} \sin^2((n+1)t) - \sin^2(nt) &= (\sin((n+1)t) - \sin(nt)) (\sin((n+1)t) + \sin(nt)) \\ &= 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) 2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) \\ &= \sin(t) \sin((2n+1)t) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{\sin^2((n+1)t)}{\sin^2(t)} - \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2(t)} = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}.$$

Or pour $t \not\equiv 0 \pmod{\pi}$,

$$\begin{aligned} 1 + 2 \cos(2t) + \dots + 2 \cos(2nt) &= \sum_{k=-n}^n e^{2ikt} \\ &= e^{-2int} \frac{e^{2i(2n+1)t} - 1}{e^{2it} - 1} \\ &= \frac{e^{-(2n+1)it}}{e^{-(2n+1)it}} \frac{e^{2i(2n+1)t} - 1}{e^{2it} - 1} \\ &= \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}. \end{aligned}$$

Comme pour $k > 0$ on a $\int_0^\pi \cos(2kt) dt = 0$, on en déduit que $\int_0^\pi \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt = \pi$ et par suite que $J_{n+1} - J_n = \pi$.

Comme $J_0 = 0$, $J_1 = \pi$, on obtient, $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n = n\pi$.

Solution 39

On pose $a := \exp(i\alpha)$ et $b := \exp(i\beta)$. On a

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{1+ab} &= \frac{\exp(i\alpha) + \exp(i\beta)}{1 + \exp(i(\alpha + \beta))} \\ &= \frac{\exp(i(\alpha + \beta)/2)(\exp(i(\alpha - \beta)/2) + \exp(-i(\alpha - \beta)/2))}{\exp(i(\alpha + \beta)/2)(\exp(i(\alpha + \beta)/2) + \exp(-i(\alpha + \beta)/2))} \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Voir aussi la solution de l'exercice 16 page 518 du cours de première.

Solution 40

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (1 - 2a \cos(x) + a^2)^n dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - 2a \cos(x) + a^2)^n dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - ae^{ix})^n (1 - ae^{-ix})^n dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sum_{p=0}^n (-1)^p a^p \binom{n}{p} e^{ipx} \sum_{q=0}^n (-1)^q a^q \binom{n}{q} e^{-iqx} dx \end{aligned}$$

Or $\forall k \in \mathbb{Z}^*$, $\int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = 0$, donc toutes les intégrales sont nulles, sauf celles pour lesquelles $p = q = k$.

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (1 - 2a \cos(x) + a^2)^n dx &= \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^n (-1)^p a^p \binom{n}{p} (-1)^q a^q \binom{n}{q} \int_0^{2\pi} e^{i(p-q)x} dx \\ &= \pi \sum_{k=0}^n (-1)^k a^k \binom{n}{k} (-1)^k a^k \binom{n}{k} \\ &= \pi \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 a^{2k} \end{aligned}$$

Solution 41 (*Eadem Mutata Resurgit*)

1. L'homothétie de centre O et de rapport $\exp(2k\pi)$ s'écrit $h_k : z \in \mathbb{C} \mapsto \exp(2k\pi)z$. On a clairement $\forall t \in \mathbb{R}, h_k(\Gamma_m(t)) = \Gamma_m(t + 2k\pi)$ appartient bien à la courbe Γ_m .
2. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $z_{k+1} = \exp\left((m+i)\left(t_k + \frac{2\pi}{n}\right)\right) = z_k \exp\left((m+i)\frac{2\pi}{n}\right)$, donc $|z_{k+1} - z_k| = |z_k| \left|\exp\left((m+i)\frac{2\pi}{n}\right) - 1\right|$. Or $|z_k| = \left|\exp\left((m+i)\frac{2k\pi}{n}\right)\right| = \exp\left(m\frac{2k\pi}{n}\right) q^k$ en posant $q := \exp\left(\frac{2m\pi}{n}\right)$. Finalement,

$$|z_{k+1} - z_k| = q^k \left|\exp\left((m+i)\frac{2\pi}{n}\right) - 1\right|.$$

Ainsi L_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$, donc

$$L_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \left|\exp\left((m+i)\frac{2\pi}{n}\right) - 1\right|.$$

3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} L_n &= (\exp(2\pi m) - 1) \frac{\left|\exp\left((m+i)\frac{2\pi}{n}\right) - 1\right|}{\exp\left(\frac{2m\pi}{n}\right) - 1} \\ &= (\exp(2\pi m) - 1) \frac{\left|\exp\left((m+i)\frac{2\pi}{n}\right) - 1\right|}{\frac{2\pi}{n} - 0} \frac{\frac{2\pi}{n} - 0}{\exp\left(\frac{2m\pi}{n}\right) - 1}. \end{aligned}$$

La fonction $\phi : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp((m+i)t)$ est dérivable en zéro de dérivée $\phi'(0) = m+i$ donc $|\phi'(0)| = \sqrt{m^2+1}$. De même, la fonction $\psi : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(mt)$ est dérivable en zéro de dérivée $\psi'(0) = m$.

On en déduit, $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = (\exp(2\pi m) - 1) \frac{\sqrt{m^2+1}}{m} = L := L(m)$.

Remarque 16.

On a obtenu une approximation de la longueur d'une spire de la spirale logarithmique. La méthode suivie n'est pas entièrement correcte pour obtenir cette longueur. Pour autant la valeur trouvée est la valeur correcte.

4. On a, toujours grâce à une dérivée, $\lim_{m \rightarrow 0} \frac{\exp(2\pi m) - 1}{m} = 2\pi$ et $\lim_{m \rightarrow 0} \sqrt{m^2+1} = 1$, donc $\lim_{m \rightarrow 0} L(m) = 2\pi$, c'est-à-dire la longueur d'un cercle.

Solution 42

Soit $j \in \mathcal{S}_\vartheta$, $|z_j| \cdot \cos(\vartheta - \arg z_j) = \operatorname{Re}(z_j \cdot e^{-i\vartheta})$. Comme $j \in \mathcal{S}_\vartheta$, $\cos(\vartheta - \arg z_j) \geq 0$. Donc :

$$\sum_{j \in \mathcal{S}_\vartheta} |\cos(\vartheta - \arg z_j)| = \operatorname{Re} \left\{ \left(\sum_{j \in \mathcal{S}_\vartheta} z_j \right) e^{-i\vartheta} \right\} \leq \left| \sum_{j \in \mathcal{S}_\vartheta} z_j \right| \cdot |e^{-i\vartheta}| \leq \left| \sum_{j \in \mathcal{S}_\vartheta} z_j \right|.$$

On a donc bien

$$f(\vartheta) \geq \sum_{j \in \mathcal{S}_\vartheta} |\cos(\vartheta - \arg z_j)|.$$

On intègre entre 0 et 2π : lorsque ϑ tourne entre 0 et 2π , tous les j de 1 à n appartiennent à un moment à un \mathcal{S}_ϑ .

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sum_{j \in \mathcal{S}_\vartheta} |z_j| \cdot \cos(\vartheta - \arg_j z) d\vartheta &= \sum_{j=1}^n \int_{\arg z_j - \frac{\pi}{2}}^{\arg z_j + \frac{\pi}{2}} |z_j| \cdot \cos(\vartheta - \arg z_j) d\vartheta \\ &= \sum_{j=1}^n |z_j| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = 2 \sum_{j=1}^n |z_j|. \end{aligned}$$

D'autre part $2\pi \cdot f(\vartheta_{\min}) \leq \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \cdot d\vartheta \leq 2\pi \cdot f(\vartheta_{\max})$. Donc $2 \sum_{j=1}^n |z_j| \leq 2\pi \cdot f(\vartheta_{\max})$

ou $f(\vartheta_{\max}) \geq \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{j=1}^n |z_j|$. Donc en prenant $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\vartheta_{\max}}$ on obtient :

$$\left| \sum_{j \in \mathcal{S}} z_j \right| \geq \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{j=1}^n |z_j| \geq \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{j \in \mathcal{S}} |z_j|.$$

6.10 Travaux dirigés

Travaux dirigés 1 (Une deuxième table de logs)

- Qu'est-ce qu'une table de logarithmes ?
- ▶ C'est une table qui permet d'effectuer des multiplications en n'effectuant que des additions, comme le font les logarithmes.
- Pourquoi une deuxième ?
- ▶ Parce que la première a été vue au TD 1 page 125 du cours de seconde.
- Pourquoi ne pas tout simplement tabuler la fonction logarithme népérien ?
- ▶ C'est effectivement ce qui s'est fait après les travaux de Briggs et Napier, jusqu'à l'avènement des calculatrices. Mais avant Napier, il fallait se débrouiller. Ce qui existait étaient des tabulations de la fonction cosinus en degrés.

d	$\cos(d)$	d	$\cos(d)$	d	$\cos(d)$
1	0.9998476951563913	31	0.8571673007021123	61	0.48480962024633710
2	0.9993908270190958	32	0.8480480961564260	62	0.46947156278589086
3	0.9986295347545738	33	0.8386705679454240	63	0.45399049973954686
4	0.9975640502598242	34	0.8290375725550416	64	0.43837114678907746
5	0.9961946980917455	35	0.8191520442889918	65	0.42261826174069944
6	0.9945218953682733	36	0.8090169943749475	66	0.40673664307580020
7	0.9925461516413220	37	0.7986355100472928	67	0.39073112848927370
8	0.9902680687415704	38	0.7880107536067219	68	0.37460659341591196
9	0.9876883405951378	39	0.7771459614569709	69	0.35836794954530040
10	0.9848077530122080	40	0.7660444431189780	70	0.34202014332566880
11	0.9816271834476640	41	0.7547095802227720	71	0.32556815445715676
12	0.9781476007338057	42	0.7431448254773942	72	0.30901699437494745
13	0.9743700647852352	43	0.7313537016191705	73	0.29237170472273677
14	0.9702957262759965	44	0.7193398003386512	74	0.27563735581699916
15	0.9659258262890683	45	0.7071067811865476	75	0.25881904510252074
16	0.9612616959383189	46	0.6946583704589973	76	0.24192189559966767
17	0.9563047559630354	47	0.6819983600624985	77	0.22495105434386492
18	0.9510565162951535	48	0.6691306063588582	78	0.20791169081775945
19	0.9455185755993168	49	0.6560590289905073	79	0.19080899537654492
20	0.9396926207859084	50	0.6427876096865394	80	0.17364817766693041
21	0.9335804264972017	51	0.6293203910498375	81	0.15643446504023092
22	0.9271838545667874	52	0.6156614753256583	82	0.13917310096006547
23	0.9205048534524404	53	0.6018150231520484	83	0.12186934340514749
24	0.9135454576426009	54	0.5877852522924731	84	0.10452846326765346
25	0.9063077870366499	55	0.5735764363510462	85	0.08715574274765814
26	0.8987940462991670	56	0.5591929034707468	86	0.06975647374412523
27	0.8910065241883679	57	0.5446390350150271	87	0.05233595624294397
28	0.8829475928589270	58	0.5299192642332049	88	0.03489949670250108
29	0.8746197071393957	59	0.5150380749100542	89	0.01745240643728360
30	0.8660254037844387	60	0.5000000000000000	90	0.0000000000000000

Les tables publiées ne comportaient pas quinze décimales (ici gracieusement fournies par un programme Python, la seizième n'étant pas entièrement fiable). Il faut se souvenir que les calculs d'antan étaient faits à la main ...

Question : Avec cette table, calculer $174524 \times 51503807491$.

Bien entendu, on a le principe. Ensuite dans la pratique, il fallait étendre ces tables trigonométriques au dixième, au centième de de degré etc. Dans les faits, on travaillait plutôt à la minute voire à la seconde d'angle près.

On a, aux erreurs d'arrondi près, $174524 = 10^7 \cos(89^\circ)$ et $51503807491 = 10^{11} \cos(59^\circ)$. Donc $174524 \times 51503807491 = 10^{18} \cos(89^\circ) \times \cos(59^\circ) = 10^{18} \frac{1}{2} (\cos(148^\circ) + \cos(30^\circ))$. Or $\cos(148^\circ) = -\cos(32^\circ)$.

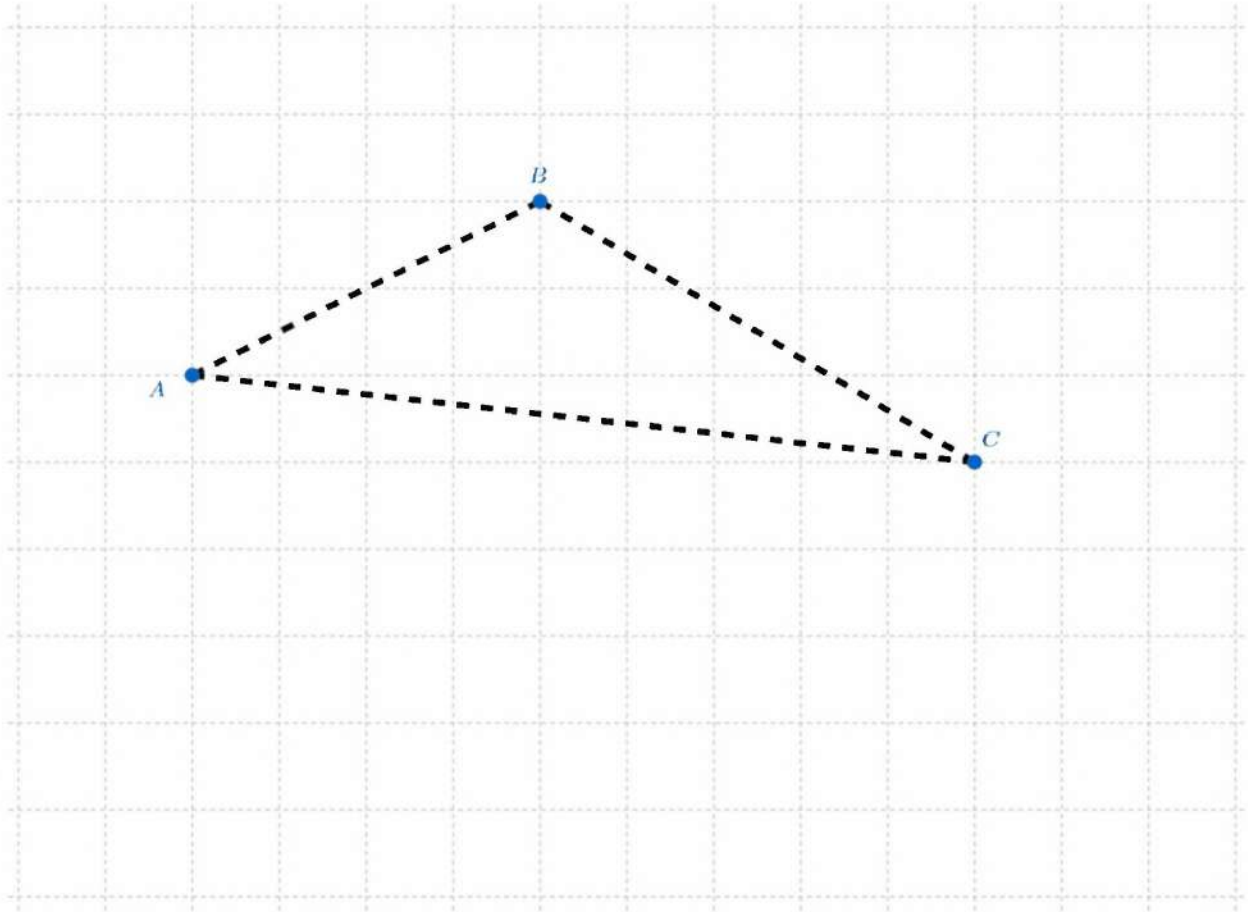
$$\begin{array}{r} 0.8660254037844387 \\ - 0.8480480961564260 \\ \hline 0.0179773076280127 \end{array}$$

En divisant par 2, on trouve $174524 \times 51503807491 = 0.008988653814006375 \times 10^{18} = 8988653814006375$ toujours aux erreurs d'arrondis près. À comparer avec le résultat donné par XCas : $174524 \times 51503807491 =$

8988650498559284. Les six premiers chiffres significatifs sont corrects.

Travaux dirigés 2 (Les trois amers)

Un bateau en navigation côtière voit trois amers, repérés sur une carte par trois points A , B et C .

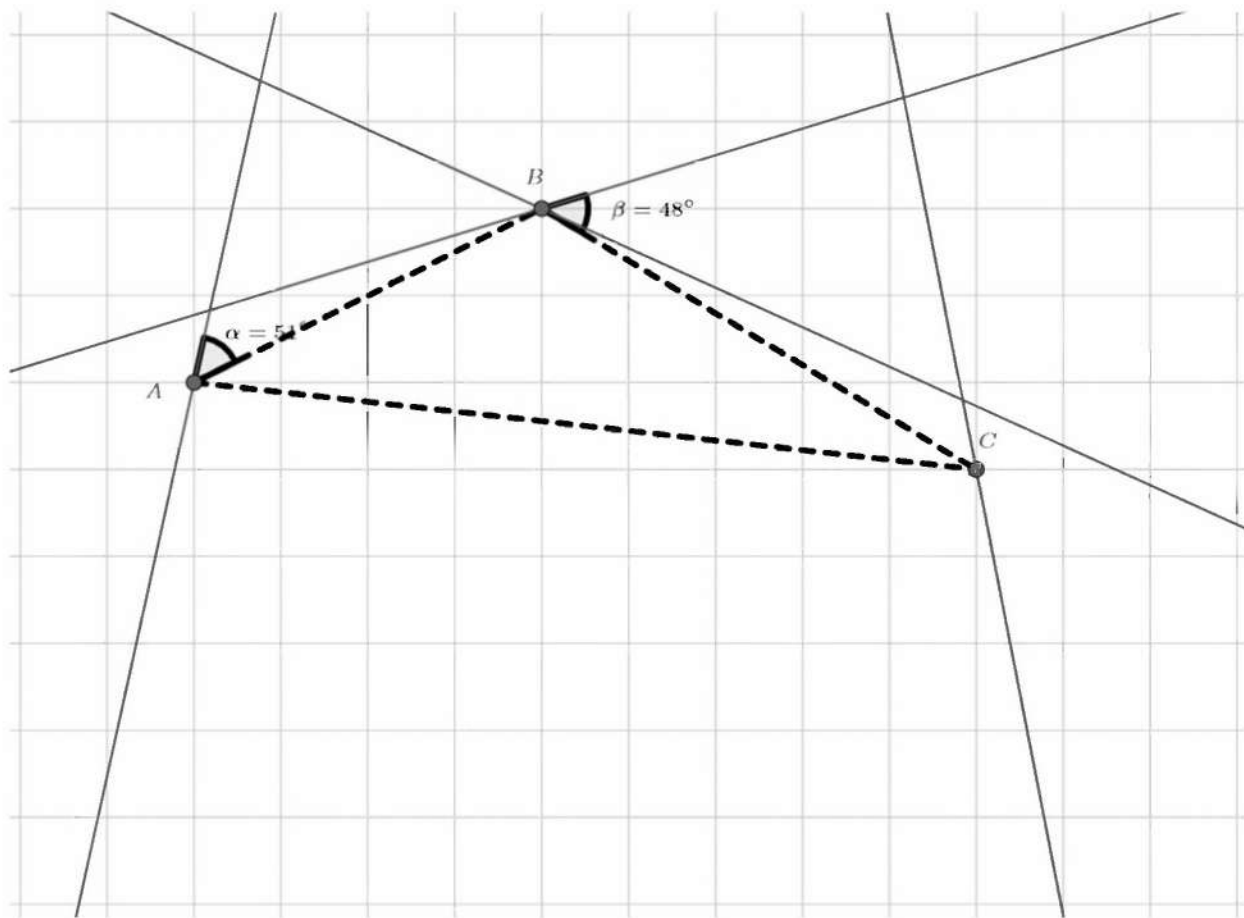


Le bateau est repéré sur la carte par un point F . Il voit le segment $[AB]$ sous un angle de 51° et le segment $[BC]$ sous un angle de 48° .

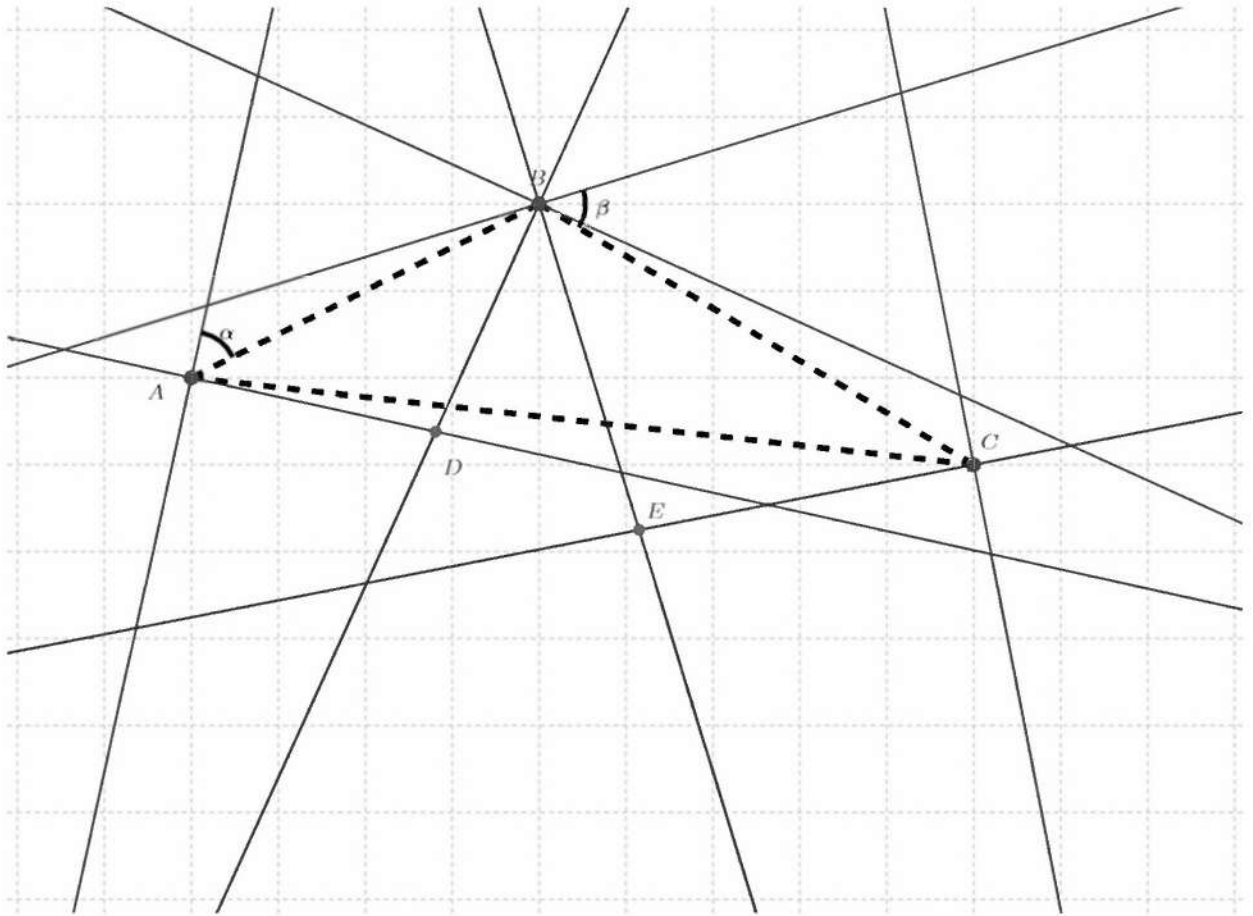
On se propose de construire le point F ... sans GPS.

1. Construire la tangente à l'arc capable à 51° en A puis la tangente à l'arc capable en B .
Construire la tangente à l'arc capable à 48° en C puis la tangente à l'arc capable en B .
2. Construire la perpendiculaire à la tangente passant par A . Construire la perpendiculaire à la tangente passant par B . Construire l'intersection D de ces deux dernières droites.
Construire la perpendiculaire à la tangente passant par C . Construire la perpendiculaire à la tangente passant par B . Construire l'intersection E de ces deux dernières droites.
3. Construire le cercle C_1 de centre D passant par A . Construire le cercle C_2 de centre E passant par A .
Ces deux cercles se coupent en F outre le point B .

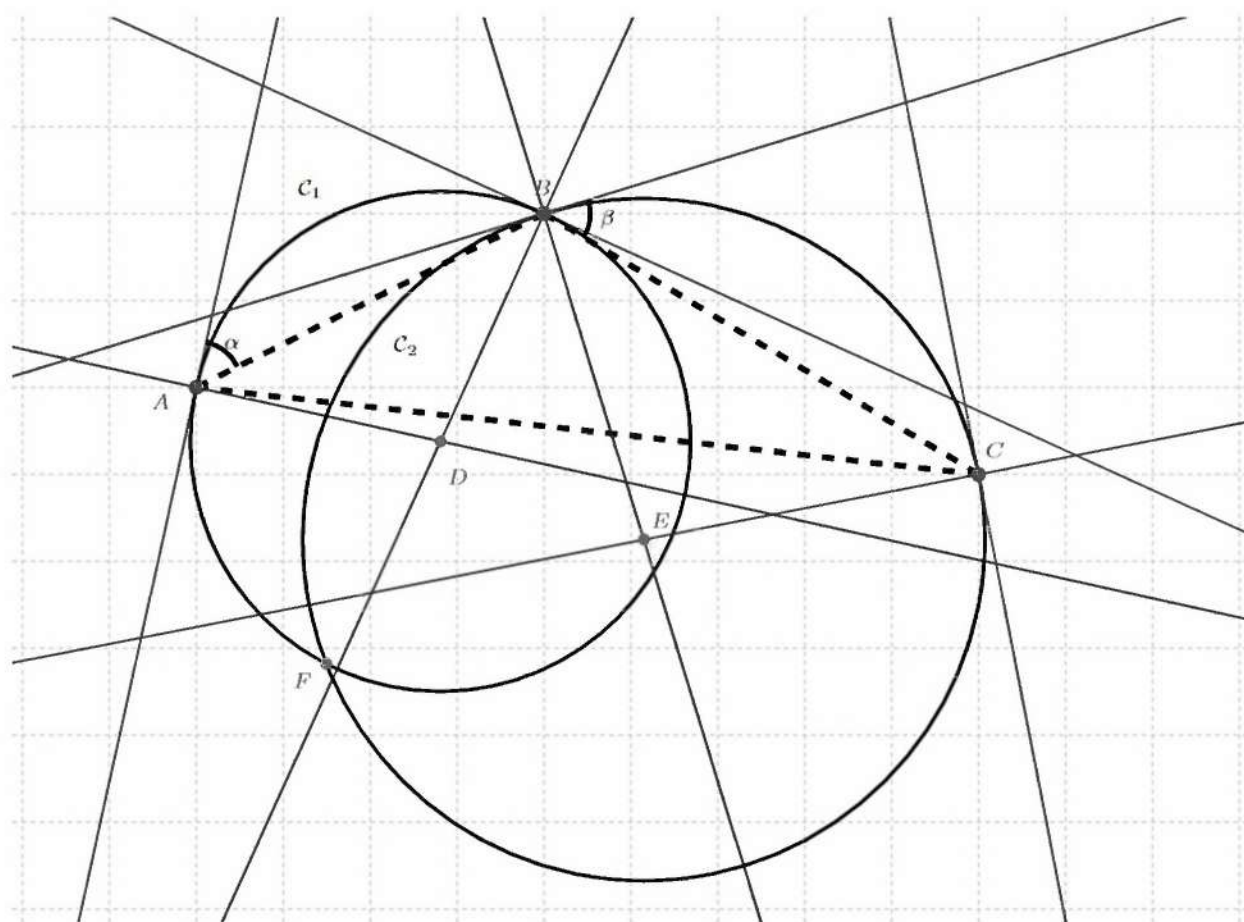
1.



2.



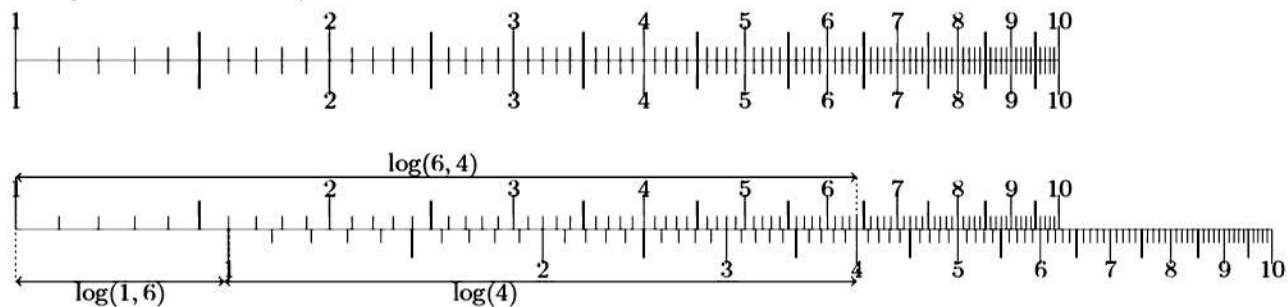
3.



Travaux dirigés 3 (La règle à calcul)

Une règle à calcul est graduée avec une échelle logarithmique. Une partie coulissante permet d'additionner (ou de soustraire) des segments. Ceci permet de multiplier (ou quotienter) des nombres.

Exemple : On effectue $1,6 \times 4$:



6.11 Problèmes

Problème 1

Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(x) := \frac{x^n}{n!}$ et $e_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x)$.

1. (a) Démontrer que pour $x \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = 0$.

(b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) = 0$.

2. Soit $a > 0$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, a]$.

$$e_n(x) \leq \exp(x) \leq e_n(x) + (\exp(a) - 1) a_n(x).$$

3. En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(a) = \exp(a)$.

4. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-a, 0]$,

$$e_{2n+1}(-x) \leq \exp(-x) \leq e_{2n}(-x).$$

5. Écrire un programme Python qui calcule e à 10^{-10} près.

Correction 1

1. (a) On a, pour $x \neq 0$, $\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{x^n} = \frac{x^{n+1}}{x^n} \times \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{x}{n+1}$. De ce fait, on a bien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = 0.$$

(b) D'après la définition 3 page 49 de la limite d'une suite vue dans le cours de première, pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe un entier N (qui dépend de x) tel que $\forall n \geq N, \left| \frac{x}{n+1} \right| < \frac{1}{2}$. Par une récurrence

sans malice, on a alors, $\forall n \geq N, |a_n(x)| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} |a_N(x)|$. On a donc bien $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) = 0$, et ce pour tout $x \neq 0$. Bien entendu pour $x = 0$ la suite est nulle à partir de l'indice 1 et a donc une limite nulle.

2. Soit $a > 0$. On va démontrer par récurrence la proposition \mathcal{P}_n :

$$\forall x \in [0, a], e_n(x) \leq \exp(x) \leq e_n(x) + (\exp(a) - 1) a_n(x).$$

On a $a_0(x) = 1 = e_0(x)$ pour tout $x \in [0, a]$. D'après la croissance de l'exponentielle sur $[0, a]$, on a bien $1 = e_0(x) \leq \exp(x) \leq \exp(a) = e_0(x) + (\exp(a) - 1) a_0(x)$, pour tout $x \in [0, a]$. Autrement dit, on a bien \mathcal{P}_0 .

Soit n un entier pour lequel \mathcal{P}_n . On pose pour tout $x \in [0, a]$, $f_n(x) := \exp(x) - e_n(x)$ et $g_n(x) := e_n(x) + (\exp(a) - 1) a_n(x) - \exp(x)$. Les fonctions f_n et g_n sont dérivables sur $[0, a]$ et on a pour tout $x \in [0, a]$, $a'_{n+1}(x) = a_n(x)$, $e'_{n+1}(x) = e_n(x)$. On en déduit que $f'_{n+1}(x) = f_n(x) \geq 0$ et $g'_{n+1}(x) = g_n(x) \geq 0$ d'après \mathcal{P}_n . Les fonctions f_n et g_n sont donc croissantes sur $[0, a]$. Comme $f_n(0) = 0 = g_n(0)$. Donc $\forall x \in [0, a]$, $f_{n+1}(x) \geq 0$ et $g_{n+1}(x) \geq 0$, c'est-à-dire \mathcal{P}_{n+1} .

En résumé, on a \mathcal{P}_0 et $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$, donc, d'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$, ce qu'il fallait démontrer.

3. Pour $x = a$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \exp(a) - e_n(a) \leq (\exp(a) - 1) a_n(a).$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(a) = 0$, d'après le théorème d'encadrement 9 page 52 du cours de première, on a bien $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(a) - e_n(a) = 0$ soit $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(a) = \exp(a)$.

4. On va démontrer par récurrence la proposition \mathcal{H}_n :

$$\forall x \in [0, +\infty[, e_{2n+1}(-x) \leq \exp(-x) \leq e_{2n}(-x).$$

Lorsque $n = 0$, on a $e_{2n}(-x) = e_0(-x) = 1$ et $e_{2n+1}(-x) = e_1(-x) = 1 - x$. La proposition \mathcal{H}_n s'écrit :

$$\forall x \in [0, +\infty[, 1 - x \leq \exp(-x) \leq 1.$$

Pour l'inégalité de gauche, pour $m > x$, $u_m(-x) = \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m \geq 1 - x$ d'après l'inégalité de Bernoulli (théorème 18 page 59 du cours de première). On en déduit, par passage à la limite, que $\exp(-x) \geq 1 - x$. On a donc bien \mathcal{H}_0 .

Soit $n > 1$ un entier pour lequel \mathcal{H}_{n-1} . On pourrait travailler comme plus haut en dérivant (deux fois) la fonction $x \mapsto e_{2n+1}(-x)$. Cette fois, on va intégrer pour changer. Soit $x \geq 0$, $\forall t \in [0, x]$,

$$\begin{array}{ll} & e_{2n-1}(-t) \leq \exp(-t) \quad \text{d'après } \mathcal{H}_{n-1} \\ \text{donc} & \int_0^x e_{2n-1}(-t) dt \leq \int_0^x \exp(-t) dt \\ \text{soit} & [-e_{2n}(-t)]_0^x \leq [-\exp(-t)]_0^x \\ \text{soit} & 1 - e_{2n}(-x) \leq 1 - \exp(-x) \\ \text{soit} & \exp(-x) \leq e_{2n}(-x) \end{array}$$

et ce pour tout $x \geq 0$. On intègre une seconde fois : $\forall t \in [0, x]$,

$$\begin{array}{ll} & e_{2n}(-t) \leq \exp(-t) \\ \text{donc} & \int_0^x e_{2n}(-t) dt \leq \int_0^x \exp(-t) dt \\ \text{soit} & [-e_{2n+1}(-t)]_0^x \leq [-\exp(-t)]_0^x \\ \text{soit} & 1 - e_{2n+1}(-x) \leq 1 - \exp(-x) \\ \text{soit} & \exp(-x) \leq e_{2n+1}(-x) \end{array}$$

et ce pour tout $x \geq 0$. On a donc bien \mathcal{H}_n .

En résumé, on a \mathcal{H}_0 et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}_{n-1} \implies \mathcal{H}_n$. donc, d'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, \mathcal{H}_n . ce qu'il fallait démontrer.

5.

```

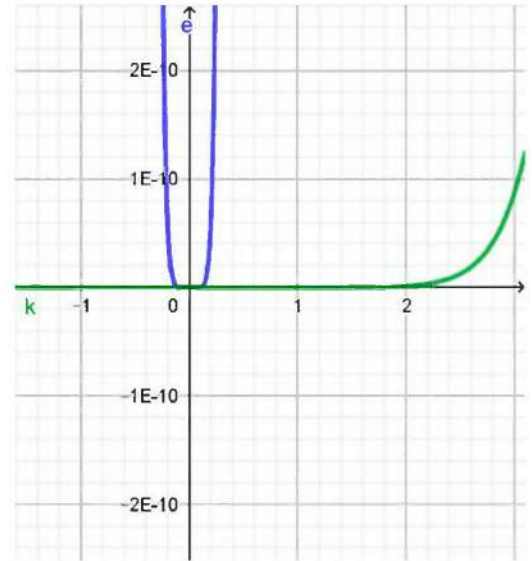
def ex(x):
    eps = 0.3E-15
    k=1
    a=1
    s=1
    while a>eps:
        a=a*x/k
        s=s+a
        k=k+1
    return s

m=5
u=1
for r in range(m):
    u=.5*u
    ep = ex(u)
for r in range(m):
    ep = ep**2
print(ep)

```

La fonction `ex` suffit en elle-même pour calculer une valeur approchée de l'exponentielle de n'importe quel nombre. Cependant, on se rend compte que plus $|x|$ est petit, plus vite la suite converge. De ce fait, une idée naturelle est d'utiliser l'équation fonctionnelle, c'est-à-dire de diviser x par 2 puis d'élever le résultat au carré. Ici cette opération est effectuée $m := 5$ fois.

On a la fonction $e : x \mapsto \exp(x) - e_7(x)$, et la fonction $k : x \mapsto \exp(x/32) - e_7(x/32)^{32}$. L'erreur est bien moindre dans le second cas.



Problème 2

1. Programmer les vingt-cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 - \frac{1}{e}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (n+1)u_n - \frac{1}{e}.$$

Que peut-on conjecturer ?

2. On considère pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n := \int_0^1 \exp(-t)t^n dt.$$

- (a) Calculer I_0 .
 - (b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$.
 - (c) Démontrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 - (d) Trouver une relation entre I_{n+1} et I_n .
3. Comment concilier les résultats des questions 1 et 2 ?
 4. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

Correction 2

```

1. import math

r=math.exp(-1)
u=1-r
for k in range(25):
    u = (k+1)*u-r
    print(k+1,u)

```

On peut raisonnablement conjecturer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

2. (a) On a

$$I_0 = \int_0^1 \exp(-t) dt = [-\exp(-t)]_0^1 = -\exp(-1) + 1.$$

(b) On a I_n , intégrale d'une fonction positive les bornes étant dans le « bon » ordre qui est un réel positif ou nul.

(c) On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \exp(-t)(t^{n+1} - t^n) dt = \int_0^1 \exp(-t)t^n(t-1) dt \leq 0,$$

puisque $I_{n+1} - I_n$ est l'intégrale d'une fonction négative, les bornes étant dans le « bon » ordre. Finalement, la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On intègre par parties On pose
$$\begin{cases} u(t) & := t^{n+1} & u'(t) & = (n+1)t^n \\ v'(t) & := \exp(-t) & v(t) & = -\exp(-t)x \end{cases}$$

Les fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle $[0, 1]$. D'après le théorème d'intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 u(t)v'(t) dt \\ &= [-t^{n+1} \exp(-t)]_0^1 + (n+1) \int_0^1 \exp(-t)t^n dt \\ &= -\frac{1}{e} + (n+1)I_n. \end{aligned}$$

3. Les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont le même premier terme $u_0 = I_0 = 1 - \frac{1}{e}$ et vérifient la même relation de récurrence. Par une récurrence immédiate, ces deux suites sont égales.

Or la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par zéro, donc est convergente vers une limite positive ou nulle. Il est donc de même pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Le fait que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du programme Python tende vers $-\infty$ est un **artefact** de calcul dû une fois de plus aux erreurs d'arrondi. Rapidement (le lecteur complètera les détails) :

a) (classique). Les suites

$$x_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } y_n = \frac{1}{n \cdot n!} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

sont adjacentes :

La suite (x_n) est croissante car $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$.

La suite (y_n) est décroissante car :

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= x_{n+1} - x_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n(n!)} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n(n!)} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0 \end{aligned}$$

Enfin : $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n - x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n(n!)} = 0$. Ce qui précède prouve que (x_n) et (y_n) sont adjacentes. Elles ont donc une limite commune. De plus, d'après le problème 1, cette limite commune est e . On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e < \frac{1}{n \cdot n!} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad (6.1)$$

Remarque 17.

Pour tout entier n , on a $x_n < e < y_n$. On en déduit : $n(n!)x_n < n(n!)e < n(n!)y_n$. Mais $N = n(n!)u_n$ est un entier et $n(n!)y_n = N + 1$. Ainsi $n(n!)e$ n'est jamais un entier, quel que soit n . Il en découle que e est irrationnel.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = n! - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{e \cdot k!}$. C'est vrai pour $n = 0$, et si on a $I_n = n! - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{e \cdot k!}$, alors

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= (n+1) \left(n! - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{e \cdot k!} \right) - \frac{1}{e} = (n+1)! - \left(\sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{e \cdot k!} + \frac{(n+1)!}{e \cdot (n+1)!} \right) = (n+1)! - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{e \cdot k!} \text{ ce qu'il fallait vérifier.} \end{aligned}$$

c) En multipliant (6.1) par $\frac{n!}{e}$, on a

$$\sum_{k=0}^n \frac{n!}{e \cdot k!} < \frac{n!}{e} < \frac{1}{e \cdot n} + \sum_{k=0}^n \frac{n!}{e \cdot k!} \quad (6.2)$$

d'où $0 < n! - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{e \cdot k!} < \frac{1}{e \cdot n}$. Soit $0 < I_n < \frac{1}{e \cdot n}$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

De plus, $I_{n+1} - I_n = n \cdot I_n - \frac{1}{e} < \frac{n}{ne} - \frac{1}{e} < 0$. Donc la suite (I_n) est décroissante.

Remarque 18.

I_n est la partie fractionnaire de $\frac{n!}{e}$, d'après (6.2).

d) On considère les suites (w_n) vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = (n+1) \cdot w_n - \frac{1}{e},$$

et soit (u_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n := w_n + I_n$.

La suite (u_n) vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (n+1) \cdot u_n$. Par une récurrence immédiate, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \cdot n!$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_0 \cdot n! + I_n,$$

avec $u_0 = w_0 - I_0 = w_0 - 1 + \frac{1}{e}$

Lorsqu'on programme la suite I_n (calculatrice, tableur, etc.) on commet une erreur λ sur le premier terme $1 - \frac{1}{e}$. Autrement dit on ajoute un terme $\lambda \cdot n!$ qui va faire tendre la suite vers $+\infty$ ou $-\infty$ suivant le signe de l'erreur λ .

4. En majorant $\exp(-t)$ par 1, on a

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 t^n dt \leq \frac{1}{n+1}.$$

D'après le théorème d'encadrement, on a bien $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

Problème 3 (Intégrale de Gauss)

1. Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(-\frac{x}{\cos^2 t}\right) dt.$$

Montrer que, $\forall x \geq 0$, $f(x) \leq \exp(-x)$.

Quelle est la limite de f quand x tend vers $+\infty$?

2. (a) Montrer que, pour tout réel b strictement positif, et tout réel x ,

$$\left[x \leq b \Rightarrow \exp(x) - 1 - x \leq \frac{1}{2} \exp(b) x^2 \right] \text{ et } \left[x \geq -b \Rightarrow \exp(x) - 1 - x \geq \frac{1}{2} \exp(-b) x^2 \right].$$

(b) Montrer que, pour tout réel a , il existe une application φ_a , de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , continue en a , telle que $\varphi_a(a) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - f(a) = (x-a) \left[- \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\exp\left(-\frac{a}{\cos^2 t}\right)}{\cos^2 t} dt + \varphi_a(x) \right].$$

En déduire que f est dérivable. Préciser la dérivée f' de f .

3. Soit P une primitive (sur \mathbb{R}) de f de l'application $u \mapsto \exp(-u^2)$.

À tout réel x , on associe l'application Q_x , de $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans \mathbb{R} , telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q_x(t) = P(x \tan t).$$

Montrer que Q_x est dérivable sur I ; expliciter sa dérivée.

Prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x \exp(-u^2) du = x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\exp(-x^2 \tan^2 t)}{\cos^2 t} dt.$$

4. Soit g l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x^2).$$

Soit g' sa dérivée.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -2 \exp(-x^2) \int_0^x \exp(-t^2) dt$.

Que peut-on dire de la fonction h telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = g(x) + \left(\int_0^x \exp(-t^2) dt \right)^2 ?$$

Quelle est la limite de $\int_0^x \exp(-t^2) dt$ quand x tend vers $+\infty$?

Correction 3 (Intégrale de Gauss)

1. Soit $x \geq 0$. On a $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos^2 t \leq 1$ donc $\frac{x}{\cos^2 t} \geq x$ puis $-\frac{x}{\cos^2 t} \leq -x$ et $\exp(-\frac{x}{\cos^2 t}) \leq \exp(-x)$. On en déduit que

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(-\frac{x}{\cos^2 t}\right) dt \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp(-x) dt \\ &\leq \exp(-x) \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt \\ &\leq \frac{\pi}{4} \exp(-x) \\ &\leq \exp(-x), \end{aligned}$$

puisque $\pi \leq 4$.

On a clairement $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(-x) = 0$, on en déduit, *via* le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

2. (a) Soit Φ la fonction définie sur l'intervalle $] -\infty-, b]$ par

$$\Phi(x) = \exp(x) - 1 - x - \frac{1}{2} \exp(b) x^2.$$

La fonction Φ est (deux fois) dérivable et

$$\forall x \in]-\infty, b], \Phi'(x) = \exp(x) - 1 - \exp(b)x, \quad \text{et} \quad \Phi''(x) = \exp(x) - \exp(b).$$

On a $\forall x \in]-\infty, b], \Phi''(x) \leq 0$. $\Phi'(0) = 0$ et $\Phi'(b) < 0$. On en déduit les tableaux de variations

x	$-\infty$	0	b
$\Phi''(x)$	$+\infty$	$-$	$-$
$\Phi'(x)$	$+\infty$	0	$\Phi'(b) < 0$

On en déduit que $\forall x \in]-\infty, 0], \Phi'(x) \geq 0$ et $\forall x \in]0, b], \Phi'(x) \leq 0$ d'où le tableau de variations pour Φ sur l'intervalle $] -\infty, b]$.

x	$-\infty$	0	b		
$\Phi'(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$\Phi'(b)$
$\Phi(x)$	$-\infty$	0	$\Phi(b)$		

On en déduit que $\forall x \in]-\infty, b], \Phi(x) \leq 0$, ce qu'il fallait démontrer. Soit Ψ la fonction définie sur l'intervalle $] -b, +\infty]$ par

$$\Psi(x) = \exp(x) - 1 - x - \frac{1}{2} \exp(-b)x^2.$$

La fonction Ψ est (deux fois) dérivable et

$$\forall x \in]-\infty, b], \Psi'(x) = \exp(x) - 1 - \exp(-b)x, \quad \text{et} \quad \Psi''(x) = \exp(x) - \exp(-b).$$

On a $\forall x \in]-b, +\infty], \Psi''(x) \geq 0$ puis $\Psi(0) = \Psi'(0) = 0$.

L'étude des variations de Ψ sur l'intervalle $] -b, +\infty]$ conduit – comme précédemment – à

$$\forall x \in]-\infty, b], \exp(x) - 1 - x \geq \frac{1}{2} \exp(-b)x^2.$$

(b) Soit $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\exp\left(-\frac{x}{\cos^2 t}\right) - \exp\left(-\frac{a}{\cos^2 t}\right) \right] dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(-\frac{a}{\cos^2 t}\right) \left[\exp\left(-\frac{x-a}{\cos^2 t}\right) - 1 \right] dt. \end{aligned}$$

Soit maintenant $b > 0$. Lorsqu'on prend $x \in [a-b, a+b]$ on a à la fois $x-a \leq b$ et $x-a \geq -b$ et par conséquent, $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $-\frac{x-a}{\cos^2 t} \geq -b$ et $-\frac{x-a}{\cos^2 t} \leq b$. On a donc d'une part

$$\exp\left(-\frac{x-a}{\cos^2 t}\right) - 1 + \frac{x-a}{\cos^2 t} \leq \frac{1}{2} \exp(b) \frac{(x-a)^2}{\cos^4 t}$$

$$\text{et } \exp\left(-\frac{x-a}{\cos^2 t}\right) - 1 + \frac{x-a}{\cos^2 t} \geq \frac{1}{2} \exp(-b) \frac{(x-a)^2}{\cos^4 t}.$$

En multipliant par $\exp\left(-\frac{a}{\cos^2 t}\right)$ et en intégrant ces deux inégalités pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\frac{(x-a)^2}{2} \Lambda \exp(-b) \leq f(x) - f(a) + (x-a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\exp\left(-\frac{a}{\cos^2 t}\right)}{\cos^2 t} dt \leq \frac{(x-a)^2}{2} \Lambda \exp(b),$$

$$\text{en posant } \Lambda = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\exp\left(-\frac{a}{\cos^2 t}\right)}{\cos^4 t} dt.$$

En particulier, on a pour $0 < |x-a| < b$, $\frac{x-a}{2} \Lambda \exp(-b) \leq \varphi_a(x) \leq \frac{x-a}{2} \Lambda \exp(b)$. On a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{2} \Lambda \exp(-b) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{2} \Lambda \exp(b) = 0$ et par conséquent, d'après le théorème d'encadrement, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi_a(x) = 0 = \varphi_a(0)$.

Autrement dit, la fonction φ_a est continue en a .

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, \quad \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \left[- \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\exp\left(-\frac{a}{\cos^2 t}\right)}{\cos^2 t} dt + \varphi_a(x) \right],$$

donc $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$ existe et vaut $- \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\exp\left(-\frac{a}{\cos^2 t}\right)}{\cos^2 t} dt + 0$. C'est bien dire que f est dérivable en a et ce pour tout réel a . De plus

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad f'(a) = - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\exp\left(-\frac{a}{\cos^2 t}\right)}{\cos^2 t} dt.$$

3. La fonction Q_x est dérivable sur I comme composée de fonctions dérivables sur I . De plus,

$$\forall t \in I, \quad Q'_x(t) = \frac{x}{\cos^2 t} P'(x \tan t) = \frac{x}{\cos^2 t} \exp(-x^2 \tan^2 t).$$

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\exp(-x^2 \tan^2 t)}{\cos^2 t} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} Q'_x(t) dt \\ &= [Q_x(t)]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= Q_x\left(\frac{\pi}{4}\right) - Q_x(0) \\ &= P\left(x \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - P(x \tan(0)) \\ &= P(x) - P(0) \\ &= \int_0^x \exp(-u^2) du. \end{aligned}$$

4. D'après les opérations sur les dérivées de fonctions composées, on a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2xf'(x^2) \\ &= -2x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{\cos^2 t}\right)}{\cos^2 t} dt && \text{d'après la question 2b} \\ &= -2x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\exp(-x^2(1 + \tan^2 t))}{\cos^2 t} dt && \text{puisque } \frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t \\ &= -2x \exp(-x^2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\exp(-x^2(1 + \tan^2 t))}{\cos^2 t} dt \\ &= -2 \exp(-x^2) \int_0^x \exp(-t^2) dt && \text{d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

D'après les théorèmes sur les sommes et produits de fonctions dérivables, on peut dire que la fonction h est dérivable sur \mathbb{R} et que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(x) + 2 \exp(-x^2) \int_0^x \exp(-t^2) dt \\ &= -2 \exp(-x^2) \int_0^x \exp(-t^2) dt + 2 \exp(-x^2) \int_0^x \exp(-t^2) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

La fonction h est donc constante sur l'intervalle \mathbb{R} . De plus

$$\begin{aligned} h(0) &= g(0) + \left(\int_0^0 \exp(-t^2) dt \right)^2 \\ &= f(0) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(-\frac{0}{\cos^2 t}\right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

D'après la première question, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = h(0) = \frac{\pi}{4}$.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x \exp(-t^2) dt \right)^2 = \frac{\pi}{4}$.

La fonction $F : x \mapsto \int_0^x \exp(-t^2) dt$ est croissante sur \mathbb{R} . Elle est majorée (sinon au n'aurait pas $\lim_{x \rightarrow +\infty} F^2(x) = \frac{\pi}{4}$). Donc la fonction F admet une limite finie $\ell \geq 0$ en $+\infty$ vérifiant de plus $\ell^2 = \frac{\pi}{4}$.
Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \exp(-t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Problème 4 (Intégrale de Gauss 2)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ et soit $x \in [0, \sqrt{n}]$. Démontrer que

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq \exp(-x^2) \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$

En déduire que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} \exp(-x^2) dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx.$$

2. Démontrer que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n} \int_0^1 (1 - u^2)^n du.$$

3. En effectuant le changement de variable $x = \sqrt{n} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$, démontrer que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx = \sqrt{n} \int_0^{1/\sqrt{2}} (1 - u^2)^{n-3/2} du.$$

On pose pour tout entier $m \in \mathbb{N}$,

$$I_m := \int_0^1 (1 - u^2)^{m/2} du.$$

4. Démontrer que $\forall n \geq 2$,

$$\sqrt{n} I_{2n} \leq \int_0^{\sqrt{n}} \exp(-x^2) dx \leq \sqrt{n} I_{2n-3}.$$

5. Calculer I_0 et I_1 .

6. En intégrant par parties, démontrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}, I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} I_m. \quad (6.3)$$

7. On considère la suite définie pour $m \in \mathbb{N}$ par $G_m := (m+2)I_{m+1}I_m$. Calculer G_0 et G_1 . Démontrer que la suite $(G_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est constante. Calculer cette constante.

8. Démontrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall T \in \mathbb{R}, T^2 I_m + 2T I_{m+1} + I_{m+2} \geq 0.$$

9. En déduire que

$$\forall m \in \mathbb{N}, I_{m+1}^2 \leq I_m I_{m+2}. \quad (6.4)$$

10. Démontrer à l'aide de (6.3) et de (6.4) que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \frac{m}{m+2} \sqrt{\frac{m+3}{m+2}} G_m \leq m I_m^2 \leq \frac{m}{m+2} \sqrt{\frac{m+1}{m}}.$$

En déduire la limite de la suite $(m I_m^2)_{m \in \mathbb{N}}$.

11. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{n}} \exp(-x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

12. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \exp(-t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Correction 4 (Intégrale de Gauss 2)

1. D'après l'étude du paragraphe 6.1, la suite $(u_n)_{n > x^2}$ définie par

$$\forall n > x^2, u_n = u_n(-x^2) := \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n(x) := \frac{1}{u_n(-x)} = \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$

est croissante et converge vers $\exp(-x^2)$, et la suite $(v_n)_{n > x^2}$ définie par

$$\forall n > x^2, v_n = v_n(-x^2) := \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$

est décroissante et converge vers $\exp(-x^2)$. L'encadrement demandé en résulte.

En intégrant cette double inégalité entre 0 et \sqrt{n} , on a le deuxième encadrement.

2. On effectue le changement de variable $x = u\sqrt{n}$. Le résultat en découle sans difficulté.

3. On a $dx = \sqrt{n} \cdot \left(\frac{1}{(1-u^2)^{1/2}} + \frac{u^2}{(1-u^2)^{3/2}}\right) du = \sqrt{n} \cdot \frac{1-u^2+u^2}{(1-u^2)^{3/2}} du = \sqrt{n} \cdot \frac{1}{(1-u^2)^{3/2}} du$, et $1 + \frac{x^2}{n} = 1 + \frac{u^2}{1-u^2} = \frac{1}{1-u^2}$. Enfin on a $(1-u^2)x^2 = nu^2$ soit $u^2 = \frac{x^2}{n+x^2}$. Pour $x = 0$ on a $u = 0$ et pour $x = \sqrt{n}$ on a $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Le théorème de changement de variables assure l'égalité des deux intégrales.

4. Cela résulte des deux questions précédentes et de la majoration

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} (1-u^2)^{n-3/2} du \leq \int_0^1 (1-u^2)^{n-3/2} du,$$

l'intégrande étant positive (et les bornes dans le bon ordre).

5. On a $I_0 = 1$ et $I_1 = \frac{\pi}{4}$. (Aire d'un quart de disque ou changement de variable $u = \sin t$).

6. Soit $m \in \mathbb{N}$. On a $I_{m+2} = \int_0^1 (1-t^2)^{m/2} (1-t^2) dt = I_m - \int_0^1 t^2 (1-t^2)^{m/2} dt$.

On pose $\begin{cases} u(t) := t & u'(t) = 1 \\ v'(t) := t(1-t^2)^{m/2} & v(t) = -\frac{1}{m+2}(1-t^2)^{1+m/2} \end{cases}$ Les fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle $[0, 1]$. D'après le théorème d'intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} I_{m+2} &= I_m + \frac{2}{m+2} \underbrace{\left[t(1-t^2)^{1+m/2} \right]_0^1}_{=0} - \frac{2}{m+2} I_{m+2} \\ &= I_m - \frac{1}{m+2} I_{m+2}, \end{aligned}$$

$$\text{soit } I_{m+2} \left(1 + \frac{1}{m+2}\right) = I_m$$

$$\text{soit } I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} I_m.$$

7. On a $G_0 = 2I_1I_0 = 2 \times \frac{\pi}{4} \times 1 = \frac{\pi}{2}$ et $G_1 = 3I_2I_1 = 3 \times \left(\frac{2}{3}I_0\right) \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Soit $m \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a

$$I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} I_m, \quad \text{donc } I_{m+3} = \frac{m+3}{m+4} I_{m+1}.$$

En multipliant ces deux égalités entre elles on obtient

$$I_{m+3}I_{m+2} = \frac{m+2}{m+4}I_{m+1}I_m,$$

soit $G_{m+2} = G_m$. Les termes de la suite $(G_m)_{m \in \mathbb{N}}$ sont égaux de deux en deux. Comme les deux premiers sont égaux, ils sont tous égaux.

8. Soit $T \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} T^2 I_m + 2T I_{m+1} + I_{m+2} &= \int_0^1 (1-u^2)^{m/2} \left(T^2 + 2T\sqrt{1-u^2} + (1-u^2) \right) du \\ &= \int_0^1 (1-u^2)^{m/2} \left(T + \sqrt{1-u^2} \right)^2 du \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

l'intégrande étant positive.

9. Le trinôme du second degré de la question précédente ne prenant que des valeurs positives, son discriminant Δ est négatif :

$$\Delta = 4I_{m+1}^2 - 4I_m I_{m+2} \leq 0,$$

ce qui donne le résultat annoncé.

10. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

► On part de

$$\begin{aligned} I_{m+1} &\leq \frac{\sqrt{I_{m+2}I_m}}{m} && \text{d'après (6.4)} \\ \text{donc } I_{m+1} &\leq \frac{\sqrt{m+2}}{\sqrt{m+3}} I_m I_m && \text{d'après (6.3)} \\ \text{donc } I_{m+1} \sqrt{\frac{m+3}{m+2}} &\leq I_m \\ \text{donc } m I_m I_{m+1} \sqrt{\frac{m+3}{m+2}} &\leq m I_m^2 && \text{en multipliant par } m I_m, \\ \text{donc } \frac{m}{m+2} G_m \sqrt{\frac{m+3}{m+2}} &\leq m I_m^2 && \text{en utilisant } G_m = (m+2)I_{m+1}I_m. \end{aligned}$$

► On part de

$$\begin{aligned} I_m &\leq \frac{\sqrt{I_{m+1}I_{m-1}}}{m} && \text{d'après (6.4) pour } m-1 \\ \text{donc } I_m &\leq \frac{\sqrt{m+1}}{m} I_{m+1} I_{m+1} && \text{d'après (6.3) pour } m-1 \\ \text{donc } I_m &\leq I_{m+1} \sqrt{\frac{m+1}{m}} \\ \text{donc } m I_m^2 &\leq m I_m I_{m+1} \sqrt{\frac{m+1}{m}} && \text{en multipliant par } m I_m, \\ \text{donc } m I_m^2 &\leq \frac{m}{m+2} G_m \sqrt{\frac{m+1}{m}} && \text{en utilisant } G_m = (m+2)I_{m+1}I_m. \end{aligned}$$

On a bien l'encadrement souhaité.

À gauche, on a $G_m = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{m+2} G_m \sqrt{\frac{m+3}{m+2}} = \frac{\pi}{2}$.

À droite, on a $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{m+2} G_m \sqrt{\frac{m+1}{m}} = \frac{\pi}{2}$.

D'après le théorème d'encadrement, on a $\lim_{m \rightarrow \infty} m I_m^2 = \frac{\pi}{2}$.

11. On pose pour $m \in \mathbb{N}$, $J_m := \sqrt{m} I_m \geq 0$. La question précédente dit que $\lim_{m \rightarrow \infty} m I_m^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Nous savons que, pour $n \geq 2$,

$$\sqrt{n} I_{2n} \leq \int_0^{\sqrt{n}} \exp(-x^2) dx \leq \sqrt{n} I_{2n-3}$$

depuis la question 4, soit

$$\frac{1}{\sqrt{2}} J_{2n} \leq \int_0^{\sqrt{n}} \exp(-x^2) dx \leq \sqrt{\frac{n}{2n-3}} J_{2n-3}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{2n-3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc d'après le théorème d'encadrement, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{n}} \exp(-x^2) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

12. La suite $w_n := \int_0^{\sqrt{n}} \exp(-x^2) dx$ converge vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Donc d'après la définition de la limite d'une suite,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{N}, \forall n \geq A, \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \varepsilon < w_n < \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. La fonction $f : x \mapsto \int_0^x \exp(-t^2) dt$ est croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Soit $x \in [0, +\infty[$ et soit $n := \lfloor x^2 \rfloor$. On a $w_n \leq f(x) \leq w_{n+1}$. Donc $\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \varepsilon < f(x) < \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \varepsilon$ pourvu que $x^2 \geq A$. C'est bien dire que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Problème 5 (Formule de Stirling)

- Étudier les variations de la fonction définie par $f(x) := (x + \frac{1}{2}) \cdot \ln(1 + \frac{1}{x})$ pour $x > 0$.
- Étudier la fonction définie par $g(x) := (x + \frac{1}{2}) \cdot \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{12x(x+1)}$ pour $x \geq 1$. (On pourra, pour étudier le signe de la dérivée seconde, introduire $t = (x+1)x$)
- Démontrer que les deux suites $u_n = \frac{n^{n+1/2}}{e^n n!}$ et $v_n = u_n \cdot \exp(\frac{1}{12n})$ sont adjacentes. On appelle ℓ la limite commune.

- On pose $w_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$. Démontrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Trouver une relation entre w_n et w_{n+2} . Calculer w_n .

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{(2.4 \dots 2n)^2}{(3.5 \dots (2n-1))^2 (2n+1)} \leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2.4 \dots (2n-2))^2 2n}{(3.5 \dots (2n-1))^2}$. En déduire l'existence de $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{n [(2n)!]^2}$, et calculer L .

- Calculer ℓ .
- En déduire un encadrement de $n!$ pour $n \geq 1$.
- On pose pour $n \geq 1$, $z_n := \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{z_n} = 1$. Donner des valeurs approchées pour $1000!$ et pour z_{1000} .

Correction 5 (Formule de Stirling)

$$1. \text{ Pour } x > 0, f'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \left(x + \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x + \frac{1}{2}}{x(x+1)} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x+1)}.$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2(x+1)^2} = \frac{-2x(x+1) + (x+1)^2 + x^2}{2x^2(x+1)^2} = \frac{(x+1-x)^2}{2x^2(x+1)^2} = \frac{1}{2x^2(x+1)^2} > 0.$$

On en déduit que f' est croissante sur $]0, +\infty[$. Comme $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$, on en déduit que $\forall x > 0, f'(x) < 0$ et par suite que f est décroissante sur $]0, +\infty[$.

De plus, on a en $+\infty f(x) \sim \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{x} \sim 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$. En particulier, $\forall x > 0, f(x) > 1$.

$$2. \text{ On a } \forall x > 0, g'(x) = f'(x) + \frac{2x+1}{12x^2(x+1)^2} = f'(x) + \frac{1}{12x(x+1)^2} + \frac{1}{12x^2(x+1)}.$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= f''(x) - \frac{1}{12x^2(x+1)^2} - \frac{2}{12x(x+1)^3} - \frac{1}{12x^2(x+1)^2} - \frac{2}{12x^3(x+1)} \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{2}{x^2(x+1)^2} - \frac{1}{x(x+1)^3} - \frac{1}{x^3(x+1)} \right) \\ &= \frac{1}{6} \frac{2x(x+1) - (x+1)^2 - x^2}{x^3(x+1)^3} = -\frac{1}{6x^3(x+1)^3} < 0. \end{aligned}$$

On en déduit que g' est décroissante sur $]0, +\infty[$. Comme $\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0$, on en déduit que $\forall x > 0, g'(x) > 0$ et par suite que g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Comme on a $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1$, en particulier on a $\forall x > 0, g(x) < 1$.

$$3. \text{ On a, pour } n \geq 1, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+3/2}}{e^{n+1}(n+1)!} \frac{e^n n!}{n^{n+1/2}} = \frac{(n+1)^{n+1/2}}{e}. \text{ Donc } \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = f(n) - 1 > 0.$$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

$$\text{On a, pour } n \geq 1, \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^{n+3/2}}{e^{n+1}(n+1)!} \frac{e^n n!}{n^{n+1/2}} \frac{\exp\left(\frac{1}{12(n+1)}\right)}{\exp\left(\frac{1}{12n}\right)} = \frac{(n+1)^{n+1/2}}{e} \exp\left(\frac{1}{12(n+1)} - \frac{1}{12n}\right).$$

Donc $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = f(n) - 1 - \frac{1}{12n(n+1)} = g(n) - 1 < 0$. Donc $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$ et donc la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Soit enfin $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$, puisque $u_n = v_n \cdot \exp\left(-\frac{1}{12n}\right)$, on en déduit que $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers la même limite.

$$4. \text{ Intégrales de Wallis. On a } w_{n+1} - w_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x (\cos x - 1) dx. \text{ Comme } \cos^n x (\cos x - 1) \leq 0$$

on en déduit $w_{n+1} - w_n \leq 0$ ce qu'il fallait vérifier.

$$w_n - w_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^n x (1 - \cos^2 x) dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin^2 x dx.$$

$$\text{On intègre par parties : } \begin{cases} u'(x) = \sin x \cos^n x & u(x) = -\frac{1}{n+1} \cos^{n+1} x \\ v(x) = \sin x & v'(x) = \cos x \end{cases}$$

$$\text{D'où } w_n - w_{n+2} = \left[-\frac{1}{n+1} \cos^{n+1} x \sin x \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{n+1} \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} x dx = 0 + \frac{1}{n+1} w_{n+2}.$$

D'où $w_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) w_{n+2}$ soit $w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n$.

On peut ainsi calculer les w_n de deux en deux, en partant de $w_0 = \frac{\pi}{2}$ ou $w_1 = 1$.

Donc $w_{2n} = \frac{2n-1}{2n} w_{2n-2} = \dots = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \dots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}$.

et $w_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} w_{2n-1} = \dots = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \dots \frac{2}{3} 1$.

En écrivant $w_{2n+1} \leq w_{2n} \leq w_{2n-1}$ on obtient

$$\frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \dots \frac{2}{3} \leq \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \dots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \leq \frac{2n-2}{2n-1} \dots \frac{2}{3}$$

Soit en multipliant chaque expression par $\frac{2n}{2n-1} \frac{2n-2}{2n-3} \dots 2$ on trouve bien le résultat annoncé.

Maintenant on multiplie en haut et en bas par les facteurs pairs $2, 4, \dots, 2n$ (au carré) pour reconstituer les factorielles de $2n$ au dénominateur. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{(2.4 \dots 2n)^4}{(2.3.4.5 \dots (2n-1)(2n))^2 (2n+1)} \leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2.4 \dots (2n-2))^4 (2n)^3}{((2.3.4.5 \dots (2n-1)(2n))^2)}$$

On extrait ensuite les facteurs 2 pour obtenir les factorielles de n au numérateur. On obtient alors :

$$\frac{(n!)^4}{[(2n)!]^2 (2n+1)} \leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{(n!)^4}{[(2n)!]^2 (2n)}$$

En posant $W_n = \frac{2^{4n} (n!)^4}{n [(2n)!]^2}$, la première inégalité s'écrit $W_n \leq \frac{\pi}{2} \frac{2n+1}{n}$ et la deuxième $2 \frac{\pi}{2} \leq W_n$ d'après le théorème d'encadrement. L existe et vaut π .

Remarque 19.

Les intégrales de Wallis ont été vues dans le problème précédent. Plus précisément, le changement de variable $u = \sin x$ montre que

$$I_m := \int_0^1 (1-u^2)^{m/2} du = \int_0^{\pi/2} \cos^{m+1} x dx = w_{m+1}.$$

5. On sait que $n! \sim \frac{1}{\ell} \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$ d'où $(2n)! \sim \frac{1}{\ell} \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{e^{2n}}$, donc, d'après la question précédente, $\pi \sim \frac{2^{4n} (n!)^4}{n [(2n)!]^2} \sim 2^{4n} \frac{1}{\ell^4} \frac{n^{4n+2}}{e^{4n}} \frac{1}{n} \frac{\ell^2 e^{4n}}{(2n)^{4n+1}} \sim \frac{2^{4n}}{2^{4n+1}} \frac{n^{4n+2}}{n^{4n+1} n} \frac{e^{4n}}{e^{4n}} \frac{1}{\ell^2} \sim \frac{1}{2\ell^2}$. Puisque $\ell > 0$, $\ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
6. Puisque les suites u_n et v_n sont adjacentes, on a $u_n \leq \ell \leq v_n$, on a

$$\frac{n^{n+1/2}}{e^n n!} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \leq \frac{n^{n+1/2}}{e^n n!} \exp\left(\frac{1}{12n}\right).$$

Soit

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12n}\right).$$

7. On en déduit que $z_n = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ est un équivalent (simple) de $n!$. On a $\log_{10}(z_{1000}) = 2567,60461$ à 10^{-5} près. Donc $z_{1000} = 10^{2567} \times 10^{0,6046} = 4,0235 \times 10^{2567}$. De même on calcule $\sum_{k=2}^{1000} \log_{10} k = 2567,60464$ à 10^{-5} près. puis $1000! = 4,0239 \times 10^{2567}$. Le facteur correctif vaut $\exp\left(\frac{1}{12000}\right) = 1 + \varepsilon$ avec ε à peu près égal à $\frac{1}{12000}$ de l'ordre de 10^{-4} . On est donc (largement) dans les clous.

Problème 6 (Bac C, Lille 1981)**Partie A**

On appelle F l'ensemble des applications f continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2 \quad (6.5)$$

$$\text{et } f(0) \geq 0.$$

- Vérifier que la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 2^{-x^2}$ appartient à F .
- Écrire ce que devient la relation (6.5) dans chacun des cas suivants :

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = y.$$

Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?

- Montrer que $f(0) = 0$ si, et seulement si f est l'application identiquement nulle notée $\tilde{0}$.
- On suppose que f s'annule pour une valeur $a \neq 0$.

(a) On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{a}{2^n}.$$

Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

(b) Montrer par récurrence sur l'entier n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(U_n) = 0$ (utiliser la question 2).
En déduire alors que $f(0) = 0$.

- On suppose $f \neq \tilde{0}$. Calculer $f(0)$. Montrer que f ne s'annule jamais et que, pour tout x réel, $f(x) > 0$. Montrer que f est une fonction paire.

Partie B

Soit G l'ensemble des fonctions g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies par

$$\exists f \in F - \tilde{0}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \ln[f(x)].$$

- Montrer à l'aide de la relation (6.5) vérifiée par f , que tout élément g de G vérifie la relation

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x+y) + g(x-y) = 2[g(x) + g(y)]. \quad (6.6)$$

- Déterminer $g(0)$ et montrer que g est une fonction paire.

3. Montrer à l'aide de la relation (2) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(nx) = n^2 g(x). \quad (6.7)$$

Montrer que la relation (6.7) reste vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$.

4. Montrer que

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(rx) = r^2 g(x).$$

(on pourra poser $r := \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$).

On pose $g(1) = \lambda$. En déduire que $\forall r \in \mathbb{Q}$, $g(r) = \lambda r^2$. En déduire $f(r)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

Partie C

On admet dans toute la suite que les fonctions de F distinctes de $\bar{0}$ sont les fonctions de la forme f_λ , où λ est un paramètre réel quelconque, définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad f_\lambda(x) = e^{\lambda x^2}.$$

On note \mathcal{C}_λ la courbe représentative de f_λ dans un repère orthonormé $(O: \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier les variations de f_λ suivant les valeurs de λ . Pour quelles valeurs de λ la courbe \mathcal{C}_λ a-t-elle une asymptote ?
2. Montrer que si $\lambda > 0$, il existe sur \mathcal{C}_λ deux points A_λ et B_λ en lesquels la tangente passe par l'origine. Exprimer les coordonnées de A_λ et B_λ en fonction de $\lambda > 0$. Quel est l'ensemble formé par les points A_λ et B_λ lorsque λ varie ?

Correction 6 (Bac C, Lille 1981)

Partie A

1. On a pour tout réel x , $\ln_2(f(x)) = -x^2$. On a donc pour tous réels x et y ,

$$\begin{aligned} \ln_2(f(x+y)f(x-y)) &= \ln_2(f(x+y)) + \ln_2(f(x-y)) \\ &= -(x+y)^2 - (x-y)^2 \\ &= -2(x^2 + y^2) \\ &= 2\ln_2(f(x)) + 2\ln_2(f(y)) \\ &= \ln_2(f(x)^2 f(y)^2) \end{aligned}$$

Donc $f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2$.

2. En spécifiant $x := 0$, on obtient

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f(y)f(-y) = f(0)^2 f(y)^2. \quad (6.8)$$

En spécifiant $y := 0$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(x) = f(x)^2 f(0)^2. \quad (6.9)$$

En spécifiant $x := y$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x)f(0) = f(x)^4. \quad (6.10)$$

3. Si $f = \tilde{0}$ alors on a clairement $f(0) = 0$.

Inversement, si $f \neq \tilde{0}$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$. On a alors $f(x)^2 = f(x)^2 f(0)^2$. On en déduit $f(0)^2 = 1$ et $f(0) \neq 0$.

4. (a) La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Elle est donc convergente et de limite nulle.

(b) Soit \mathcal{P}_n la proposition qui dépend de l'entier $n \in \mathbb{N}$: $f(U_n) = 0$.

Puisque $U_0 = a$, on a $f(U_0) = f(a) = 0$ donc on a bien \mathcal{P}_0 .

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier pour lequel \mathcal{P}_n . On spécifie $x := U_{n+1}$, on a $2x = U_n$. Dans 6.10 on obtient $f(U_{n+1})^4 = f(U_n)f(0) = 0$, d'après \mathcal{P}_n . Donc $f(U_{n+1}) = 0$, donc on a bien \mathcal{P}_{n+1} .

En conclusion, on a $\left. \begin{array}{l} \mathcal{P}_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1} \end{array} \right\}$ donc, d'après le théorème de récurrence (théorème 1 page 3 du cours de première), on a $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$, ce qu'il fallait démontrer.

5. On a vu à la question 2 que $f(0) \in \{-1; 0; 1\}$. On doit écarter ici $f(0) = 0$ puisque $f \neq \tilde{0}$ et $f(0) = -1$ puisque $f(0) \geq 0$. Reste $f(0) \in \{-1; 1\}$.

Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$, tel que $f(a) = 0$. La suite $(f(U_n))_n$ converge vers zéro puisqu'elle est constante. D'autre part f est continue en zéro et $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$. Donc d'après le théorème de composition (12 page 111 du cours de première) on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(U_n) = f(0)$. D'après le théorème d'unicité de la limite (8 page 51 toujours dans le cours de première), on a $f(0) = 0$ donc $f = \tilde{0}$ d'après la question 3.

Par contraposée, si $f \neq \tilde{0}$ alors $\forall a \in \mathbb{R}, f(a) \neq 0$.

Maintenant, supposons par l'absurde qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) \leq 0$. Comme la fonction f est continue sur $I := [0, b]$ (ou $I := [b, 0]$ si $b < 0$), d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in I$ tel que $f(a) = 0$ et par conséquent, $f = \tilde{0}$ d'après la question 3 ce qui est exclu.

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, d'après (6.8) en spécifiant $y := x$, on a $f(x)f(-x) = f(0)^2 f(x)^2$ et puisque $f(0) = 1$ et $f(x) \neq 0$, on a $f(-x) = f(x)$, et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc f est une fonction paire.

Partie B

1. Vérification immédiate.

2. Soit $f \in F - \tilde{0}$, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \ln[f(x)]$. Puisque $f \neq \tilde{0}$, on a $f(0) = 1$ donc $g(0) = \ln(1) = 0$.

3. Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit \mathcal{H}_n la proposition qui dépend de l'entier $n \in \mathbb{N}$: $g(nt) = n^2 g(t)$.

On a clairement \mathcal{H}_1 . D'autre part \mathcal{H}_0 a été vérifié plus haut.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier pour lequel on a \mathcal{H}_n et \mathcal{H}_{n-1} . En spécifiant $x := nt$ et $y := t$ dans (6.6), on a

$$g(nt + t) + g(nt - t) = 2[g(nt) + g(t)].$$

On en déduit

$$\begin{aligned} g((n+1)t) &= 2n^2 g(t) + 2g(t) - (n-1)^2 g(t) \\ &= (2n^2 + 2 - n^2 + 2n - 1)g(t) \\ &= (n^2 + 2n + 1)g(t) \\ &= (n+1)^2 g(t). \end{aligned}$$

On a donc \mathcal{H}_{n+1} .

En résumé, on a $\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1} \\ \mathcal{P}_0 \end{array} \right\}$ donc, d'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$, ce qu'il fallait démontrer.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $r := \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On pose $t := \frac{x}{q}$.

D'après la question précédente, on a $g(rx) = g(qt) = q^2 g(t)$, donc $g(t) = \frac{1}{q^2} g(x)$. Puis

$$g(rx) = g(pt) = p^2 g(t) = p^2 \times \frac{1}{q^2} g(x) = r^2 g(x).$$

En spécifiant $x := 1$, on a

$$\forall r \in \mathbb{Q}, g(r) = g(rx) = r^2 g(1) = \lambda r^2.$$

On en déduit en prenant l'exponentielle des deux membres,

$$\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = \exp(g(x)) = \exp(\lambda r^2),$$

en posant $\lambda = \ln(f(1))$. (On rappelle à cet effet que $f(1) > 0$).

Partie C

Remarque 20.

Pour démontrer le résultat admis, on considère pour tout réel x et tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n := 10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor \text{ et } v_n := u_n + 10^{-n}.$$

(On a u_n la valeur décimale approchée par défaut de x à 10^{-n} près, voir travaux dirigés 1 page 90 dans le cours de première).

On a par définition de la partie entière (définition 3 page 64 du cours de seconde),

$$\begin{array}{l} \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1 \\ \text{donc } u_n \leq 10^n x < \underbrace{u_n + 10^{-n}}_{=v_n} \end{array}$$

et $10 \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^{n+1} x$. Donc $10 \lfloor 10^n x \rfloor$ est un entier inférieur ou égal à $10^{n+1} x$. Il est donc inférieur ou égal à $\lfloor 10^{n+1} x \rfloor$. En multipliant les deux membres par $10^{-(n+1)} > 0$ on obtient $u_n \leq u_{n+1}$.

La suite $(u_n)_n$ est donc croissante, majorée par x . Elle est donc convergente (théorème 19 page 59 du cours de première). Soit $\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. D'après la conservation des inégalités larges par passage à la limite (théorème 10 page 53 du cours de première) on a donc $\ell \leq x$.

On a aussi $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \ell$. Toujours par conservation des inégalités larges, on a $x \leq \ell$.

Moralité : On a une suite $(u_n)_n$ de nombres rationnels qui converge vers x .

D'après la **Partie B**, on a $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = \exp(\lambda u_n^2)$. Comme la fonction exponentielle est continue en λx^2 , on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(\lambda u_n^2) = \exp(\lambda x^2)$. Par ailleurs, d'après la continuité de la fonction f en x , on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(x)$. D'après l'unicité de la limite, on a $f(x) = \exp(\lambda x^2)$ avec $\lambda = \ln(f(1))$ et ce pour tout réel x .

1. On étudie les variations de f_λ sur $[0, +\infty[$ avant de compléter par parité.
 - Si $\lambda := 0$ alors la fonction f_λ est constante, et \mathcal{C}_λ admet une asymptote d'équation $y = 1$.
 - Si $\lambda > 0$ alors la fonction f_λ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\lambda = +\infty$, donc \mathcal{C}_λ n'admet pas d'asymptote. Si $\lambda < 0$ alors la fonction f_λ est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\lambda = 0$, donc \mathcal{C}_λ admet une asymptote d'équation $y = 0$.
2. D'après les théorèmes généraux, la fonction f_λ est dérivable sur \mathbb{R} . On a $\forall a \in \mathbb{R}, f'_\lambda(a) = 2\lambda a \exp(\lambda a^2)$. La tangente à \mathcal{C}_λ admet au point d'abscisse a une équation

$$y - f(a) = f'_\lambda(a)(x - a).$$

Pour que l'origine appartienne à cette tangente, il faut et il suffit que $f(a) = -af'_\lambda(a)$, soit, après simplification par $\exp(\lambda a^2)$, $1 = 2\lambda a^2$ soit encore $\lambda = \pm \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}$.

Donc on a par exemple $A_\lambda \left(\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}, \sqrt{e} \right)$ et $B_\lambda \left(-\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}, \sqrt{e} \right)$.

Tous les points A_λ et B_λ appartiennent à la droite d'équation $y = \sqrt{e}$.

Comme la fonction $\lambda \in]0, +\infty[\mapsto \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}$ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur lui-même, l'ensemble formé par les points A_λ et B_λ est donc la droite d'équation $y = \sqrt{e}$ privée du point de coordonnées $(0, \sqrt{e})$.

Chapitre 7

Triangles semblables

Sommaire

7.1	Similitudes directes	302
7.2	Similitudes indirectes	307
7.3	Caractérisation des similitudes	311
7.4	Cas de similitude des triangles	313
7.5	Cas d'égalité des triangles	315
7.6	Exercices	317
7.7	Solutions	333

L'idée de ce chapitre est d'établir les propriétés des triangles semblables et des triangles égaux, afin d'accéder aux problèmes de géométrie de (grand-)papa.

Accessoirement, la connaissance des triangles semblables permet de résoudre des problèmes d'optique géométrique.

Dans tout le chapitre, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

7.1 Similitudes directes

Définition 1.

On appelle **similitude directe** toute transformation du plan f pour laquelle il existe $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ et telle que pour tout point M du plan d'affixe z on ait son image $M' := f(M)$ d'affixe z' avec $z' = az + b$.

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. On notera dans tout ce chapitre, $f_{a,b}$ la fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, f_{a,b}(z) = az + b.$$

Exemples 1

1. Si $a = 1$, alors f est une translation. C'est le vecteur d'affixe b . Inversement toutes les translations sont des similitudes directes.
2. Si $a = k \in \mathbb{R}^*$ et $b = 0$, alors f est une homothétie de centre O . Inversement toutes les homothéties sont des similitudes directes.
3. Si $a = \exp(i\theta)$ et $b = 0$, avec $\theta \in \mathbb{R}$, alors f est une rotation de centre O et d'angle θ . Inversement toutes les rotations sont des similitudes directes.

Théorème 1

La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.

Démonstration 1

Soit $a, a' \in \mathbb{C}^*$ et $b, b' \in \mathbb{C}$. On a

$$\forall z \in \mathbb{C}, (f_{a,b} \circ f_{a',b'})(z) = a(a'z + b') + b = aa'z + ab' + b.$$

D'où $f_{a,b} \circ f_{a',b'} = f_{aa',ab'+b}$. □

7.1.1 Des matrices

Remarque 1.

On sait depuis le paragraphe 13.3 page 586 du cours de première qu'on peut associer à la fonction $f_{a,b}$ la matrice $M_{a,b} := \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut vérifier que le produit des matrices $M_{a,b} \cdot M_{a',b'}$ est alors associé à la composée $f_{a,b} \circ f_{a',b'} = f_{aa',ab'+b}$.

Théorème 2

Toute similitude directe est une bijection du plan, et sa bijection réciproque est une similitude directe.

Démonstration 2

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. On a $M_{a,b}$ de déterminant $a \neq 0$ donc $M_{a,b}$ est inversible et

$$M_{a,b}^{-1} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}}.$$

On vérifie alors que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \left(f_{a,b} \circ f_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}} \right) (z) = z = \left(f_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}} \circ f_{a,b} \right) (z).$$

D'où $f_{a,b}^{-1} = f_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}}$.

Remarque 2.

Objectivement, il y avait plus simple et plus direct ! □

Théorème 3

Toute similitude directe est une composée de rotation d'homothétie et de translation.

Démonstration 3

En effet, pour tout $k \in \mathbb{R}^*$ tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{C}$, on a

$$f_{k \exp(i\theta), b} = \underbrace{f_{1,b}}_{\text{translation}} \circ \underbrace{f_{k,0}}_{\text{homothétie}} \circ \underbrace{f_{\exp(i\theta),0}}_{\text{rotation}}.$$

Ce théorème donne une démonstration immédiate du théorème précédent !

7.1.2 Point fixe

Théorème 4

Toute similitude directe, qui n'est pas une translation, admet un unique point fixe.

Démonstration 4

En effet, si $a \neq 1$, l'équation du premier degré $az + b = z$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ admet une unique solution $\omega := \frac{b}{1-a}$. De ce fait, $f_{a,b}$ n'est pas associée à une translation. \square

Remarque 3.

L'identité du plan est à la fois une translation (le vecteur nul), une rotation (d'angle nul) et une homothétie (de rapport 1). Dans les deux derniers cas, n'importe quel point du plan peut être choisi comme centre.

Théorème 5

Toute similitude directe, qui n'est pas une translation, est la composée commutative d'une rotation et d'une homothétie.

Démonstration 5

En effet, si $a := k \exp(i\theta) \neq 1$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors, en posant $\omega := \frac{b}{1-a}$ on a

$$\begin{array}{rcl} f_{a,b}(z) & = & az + b \\ \omega & = & a\omega + b \\ \hline f_{a,b}(z) - \omega & = & k \exp(i\theta)(z - \omega) \end{array}$$

On voit ainsi que la similitude directe associée à $f_{k \exp(i\theta), b}$ est la composée commutative de la rotation de centre d'affixe ω et d'angle θ et de l'homothétie de centre d'affixe ω et de rapport k . \square

7.1.3 Propriétés géométriques

Théorème 6

Toute similitude directe associée à $f_{a,b}$ multiplie les distances par $|a|$.

Définition 2 (Rapport de similitude).

Le nombre $|a|$ s'appelle le **rapport** de la similitude associée à $f_{a,b}$.

Démonstration 6

Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B ainsi que leurs images A' et B' d'affixes respectives z'_A et z'_B . On a

$$A'B' = |z'_B - z'_A| = |az_B + b - (az_A + b)| = |a(z_B - z_A)| = |a| \times |z_B - z_A| = |a|AB.$$

Théorème 7

Toute similitude directe conserve les angles orientés et les rapports de distances.

Démonstration 7

En effet, c'est le cas des translations, des rotations et des homothéties, et par suite de leurs composées. \square

Si on peut calculer directement. Soit A, B et C trois points distincts d'affixes respectives z_A, z_B et z_C ainsi que leurs images A', B' et C' d'affixes respectives z'_A, z'_B et z'_C . On a

$$\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'} \right) = \arg \left(\frac{z'_B - z'_A}{z'_C - z'_A} \right) = \arg \left(\frac{a(z_B - z_A)}{a(z_C - z_A)} \right) = \arg \left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right) = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \right).$$

Un petit lemme bien utile :

Lemme 8

Soit A et B deux points distincts du plan. Il existe une similitude directe qui transforme A en O et B en I d'affixe 1.

Démonstration 8

En effet, en appelant z_A et z_B les affixes respectives de A et B , et f définie par $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = (z_B - z_A)z + z_A$, on a $f(0) = z_A$ et $f(1) = z_B$. Donc la similitude directe associée à f^{-1} convient. \square

Avec comme conséquence le

Théorème 9

Soit A et B deux points distincts du plan. Soit C et D deux points distincts du plan. Il existe une similitude directe qui transforme A en C et B en D .

Démonstration 9

En effet, en appelant f une similitude directe qui transforme A en O et B en I et g une similitude directe qui transforme C en O et D en I .

Alors $h := g^{-1} \circ f$ est une similitude directe. De plus $h(A) = g^{-1}(f(A)) = g^{-1}(O) = C$ et de même, $h(B) = g^{-1}(f(B)) = g^{-1}(I) = D$. \square

Théorème 10

Les similitudes directes conservent les barycentres.

Démonstration 10

Soit z_1, z_2, \dots, z_n les affixes respectives des points A_1, A_2, \dots, A_n . L'affixe z_G du barycentre G du système pondéré $\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$ avec $\alpha_i \neq 0$ est

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}.$$

Donc

$$\begin{aligned} f_{a,b}(z_G) &= az_G + b \\ &= a \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} + b \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n a \alpha_i z_i + b \sum_{i=1}^n \alpha_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n a \alpha_i z_i + \sum_{i=1}^n b \alpha_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i (a z_i + b)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i f_{a,b}(z_i)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \end{aligned}$$

C'est bien dire que $f(G)$ est le barycentre du système pondéré $\{(f(A_1), \alpha_1), (f(A_2), \alpha_2), \dots, (f(A_n), \alpha_n)\}$, toujours en appelant f la similitude directe associée à $f_{a,b}$. \square

7.1.4 En coordonnées homogènes

La similitude directe associée à $f_{k \exp(i\theta), \alpha + i\beta}$ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & \alpha \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où k, θ, α, β sont réels et $k \neq 0$.

7.2 Similitudes indirectes

Définition 3.

On appelle **similitude indirecte** ou **similitude inverse** toute transformation du plan g pour laquelle il existe $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ et telle que pour tout point M du plan d'affixe z on ait son image $M' := f(M)$ d'affixe z' avec $z' = a\bar{z} + b$.

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. On notera dans tout ce chapitre, $g_{a,b}$ la fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par $\forall z \in \mathbb{C}, g_{a,b}(z) = a\bar{z} + b$.

Exemple 2

Si $a = \exp(i\theta)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $b = 0$, alors g est la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle polaire θ passant par O .

Théorème 11

La composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe.

Démonstration 11

Soit $a, a' \in \mathbb{C}^*$ et $b, b' \in \mathbb{C}$. On a

$$\forall z \in \mathbb{C}, (g_{a',b'} \circ g_{a,b})(z) = a'(\overline{a\bar{z} + b}) + b' = a'\bar{a}z + a'\bar{b} + b'.$$

D'où $g_{a',b'} \circ g_{a,b} = f_{a'\bar{a}, a'\bar{b} + b'}$. □

Théorème 12

Toute similitude indirecte est une bijection du plan, et sa bijection réciproque est une similitude indirecte.

Démonstration 12

Pour déterminer l'inverse de $g_{a,b}$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, on résout, pour tout $u \in \mathbb{C}$, l'équation

$$\begin{aligned} [g_{a,b}(z) &= u; \text{ inconnue } z \in \mathbb{C}] \\ \text{soit } a\bar{z} + b &= u \\ \text{soit } \bar{z} &= \frac{u-b}{a} \\ \text{soit } z &= \overline{\frac{u-b}{a}} \\ \text{soit } z &= g_{\frac{1}{\bar{a}}, \frac{\bar{b}}{a}}(u) \end{aligned}$$

Donc $g_{a,b}$ est inversible et de plus $g_{a,b}^{-1} = g_{\frac{1}{\bar{a}}, \frac{\bar{b}}{a}}$. □

7.2.1 Points fixes**Théorème 13**

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. On considère la similitude indirecte associée à $g_{a,b}$.

- ▶ Si $|a| \neq 1$ alors la similitude admet un unique point fixe.
- ▶ Si $|a| = 1$ et $b + a\bar{b} = 0$ alors la similitude est une symétrie axiale.
- ▶ Si $|a| = 1$ et $b + a\bar{b} \neq 0$ alors la similitude n'a pas de point fixe et est la composée commutative d'une symétrie et d'une translation.

Démonstration 13

Les points fixes de cette similitude indirecte ont pour affixes les solutions de l'équation $g_{a,b}(z) = z$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, soit

$$z - a\bar{z} = b. \quad (7.1)$$

En conjuguant cette égalité, on obtient

$$-\bar{a}z + \bar{z} = \bar{b}. \quad (7.2)$$

En multipliant (7.2) par a et en lui ajoutant (7.1), on obtient

$$(1 - |a|^2)z = a\bar{b} + b \quad (7.3)$$

- ▶ Si $|a| \neq 1$ alors la similitude admet au plus un point fixe d'affixe $\frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}$. On vérifie que c'est effectivement un point fixe.
- ▶ Si $|a| = 1$ et $b + a\bar{b} = 0$ alors on pose $a = \exp(i\theta)$. De ce fait $b \exp(-i\theta/2) + \exp(i\theta/2)\bar{b} = 0$. Donc $b \exp(-i\theta/2)$ est imaginaire pur. Par ailleurs le point d'affixe $b/2$ est un point fixe. De plus

$$g_{a,b}(z) - b/2 = a(\bar{z} - \bar{b}/2) + b + a\bar{b}/2 - b/2 = a(\bar{z} - \bar{b}/2) + a\bar{b}/2 + b/2 = a(\bar{z} - \bar{b}/2).$$

Donc la similitude est la symétrie axiale par rapport à la droite d'angle polaire $\theta/2$ passant par le point d'affixe $b/2$. (voir le théorème 28 page 226).

- Si $|a| = 1$ et $b + a\bar{b} \neq 0$ alors (7.3) devient $0 = a\bar{b} + b$. Nécessairement l'équation n'a pas de solution. Pour la composée commutative d'une symétrie s et d'une translation t . Supposons le problème résolu. On aurait

$$g_{a,b}(z) = s \circ t = t \circ s$$

done

$$g_{a,b} \circ g_{a,b} = (t \circ s) \circ (s \circ t) = t \circ (s \circ s) \circ t = t \circ t.$$

D'autre part,

$$\forall z \in \mathbb{C}, g_{a,b}(g_{a,b}(z)) = a(\overline{a\bar{z} + b}) + b = a\bar{a}z + a\bar{b} + b = z + a\bar{b} + b.$$

Donc $g_{a,b} \circ g_{a,b}$ est la translation (le vecteur) d'affixe $a\bar{b} + b$. Donc t est nécessairement la translation d'affixe $a\bar{b}/2 + b/2$. Essayons :

En « retranchant » le vecteur d'affixe $a\bar{b}/2 + b/2$, on obtient

$$\forall z \in \mathbb{C}, a\bar{z} + b - (a\bar{b}/2 + b/2) = a\bar{z} + \underbrace{b/2 - a\bar{b}/2}_{=b'}.$$

La fonction $g_{a,b'}$ est associée à une symétrie axiale puisque

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}, b' + a\bar{b}' &= \frac{b}{2} - \frac{a\bar{b}}{2} + a\left(\frac{\bar{b}}{2} - \frac{\bar{a}b}{2}\right) \\ &= \frac{b}{2} - \frac{a\bar{b}}{2} + \frac{a\bar{b}}{2} - a\bar{a}\frac{b}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs en composant la translation et la symétrie dans l'autre sens on obtient bien

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}, a\left(\bar{z} + \frac{a\bar{b}}{2} + \frac{b}{2}\right) + b' &= a\bar{z} + a\bar{a}\frac{b}{2} + \frac{a\bar{b}}{2} + \underbrace{\frac{b}{2} - \frac{a\bar{b}}{2}}_{=b'} \\ &= az + b = g_{a,b}(z). \end{aligned}$$

7.2.2 Propriétés géométriques

Théorème 14

Toute similitude indirecte associée à $g_{a,b}$ multiplie les distances par $|a|$.

Définition 4 (Rapport de similitude).

Le nombre $|a|$ s'appelle le **rapport** de la similitude associée à $g_{a,b}$.

Démonstration 14

Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B ainsi que leurs images A' et B' d'affixes respectives z'_A et z'_B . On a

$$A'B' = |z'_B - z'_A| = |a\bar{z}_B + b - (a\bar{z}_A + b)| = |a(\bar{z}_B - \bar{z}_A)| = |a| \times |z_B - z_A| = |a|AB.$$

Théorème 15

Toute similitude indirecte conserve les rapports de distances et inverse les angles orientés.

Démonstration 15

Pour les angles, soit A, B et C trois points distincts d'affixes respectives z_A, z_B et z_C ainsi que leurs images A', B' et C' d'affixes respectives z'_A, z'_B et z'_C . On a

$$\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \arg\left(\frac{z'_B - z'_A}{z'_C - z'_A}\right) = \arg\left(\frac{a(z_B - z_A)}{a(z_C - z_A)}\right) = \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = -\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right).$$

Théorème 16

Les similitudes indirectes conservent les barycentres.

Démonstration 16

Comme le théorème est démontré pour les similitudes directes, il suffit de le démontrer pour la symétrie par rapport à l'axe des abscisses associée à la conjugaison $g_{1,0}$. Soit z_1, z_2, \dots, z_n les affixes respectives des points A_1, A_2, \dots, A_n . L'affixe z_G du barycentre G du système pondéré $\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$ avec $\alpha_i \neq 0$ est :

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
 g_{1,0}(z_G) &= \overline{z_G} \\
 &= \overline{\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i}{n}} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{z_i}}{n} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{z_i}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i g_{1,0}(z_i)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i},
 \end{aligned}$$

puisque les nombres α_i sont réels.

C'est bien dire que $g(G)$ est le barycentre du système pondéré $\{(g(A_1), \alpha_1), (g(A_2), \alpha_2), \dots, (g(A_n), \alpha_n)\}$, en appelant g la similitude indirecte associée à $g_{1,0}$. \square

7.3 Caractérisation des similitudes

On a vu que les similitudes étaient des transformations du plan qui conservaient les rapports de distances et les angles géométriques. Il est temps de s'intéresser à la réciproque.

On va noter \mathcal{S} l'ensemble des transformations du plan qui conservent les rapports de distances et les angles géométriques.

Un lemme pour commencer.

Lemme 17

Soit A et B deux points distincts du plan et $\varphi \in \mathcal{S}$.

Si A et B sont deux points fixes de φ , alors tous les points de la droite (AB) sont des points fixes de φ .

Démonstration 17

- On peut toujours supposer que $A = O$ et $B = I$. En effet, si f est une similitude directe telle que $f(A) = O$ et $f(B) = I$ voir le petit lemme bien utile 8 alors $g = f \circ \varphi \circ f^{-1} \in \mathcal{S}$ et $g(O) = O$ et $g(I) = I$.
- Maintenant, on appelle x l'abscisse d'un point $M \in (OI)$ et $\Phi(x)$ l'abscisse de $\varphi(M)$. On a $\Phi(0) = 0$ et $\Phi(1) = 1$. On se propose donc de démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = x$.
- La fonction Φ est continue sur \mathbb{R} . Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $h \in \mathbb{R}^*$. $M(x, 0)$ et $N(x+h, 0)$. On a par conservation des rapports de distances.

$$\frac{\varphi(M)\varphi(N)}{\varphi(O)\varphi(I)} = \frac{MN}{OI} \quad \text{soit} \quad \frac{|\Phi(x+h) - \Phi(x)|}{1} = \frac{|x+h-x|}{1},$$

soit $|\Phi(x+h) - \Phi(x)| = |h|$. On en déduit que $\lim_{h \rightarrow 0} (\Phi(x+h) - \Phi(x)) = 0$ donc que Φ est continue en x et ce pour tout réel x .

- La fonction φ est bijective, donc la fonction Φ est injective. Comme elle est continue sur \mathbb{R} , elle est strictement monotone d'après le théorème 14 page 144 du cours de première. De plus $\Phi(0) < \Phi(1)$ donc la fonction Φ est strictement croissante.
- Soit $x > 0$ et $M(x, 0)$. On a $\Phi(x) > 0$ et par conservation des rapports de distances,

$$\frac{\varphi(M)\varphi(O)}{\varphi(O)\varphi(I)} = \frac{MO}{OI} \quad \text{soit} \quad \frac{|\Phi(x) - \Phi(0)|}{1} = \frac{|x - 0|}{1},$$

soit $\Phi(x) = x$.

De même, soit $x < 0$ et $M(x, 0)$. On a $\Phi(x) < 0$ et par conservation des rapports de distances,

$$\frac{\varphi(M)\varphi(O)}{\varphi(O)\varphi(I)} = \frac{MO}{OI} \quad \text{soit} \quad \frac{|\Phi(x) - \Phi(0)|}{1} = \frac{|x - 0|}{1},$$

soit $-\Phi(x) = -x$. Ce qui clôt la démonstration. □

On en déduit le

Théorème 18

Soit A, B et C trois points non alignés du plan et $\varphi \in \mathcal{S}$.

Si A, B et C sont trois points fixes de φ , alors φ est l'identité du plan.

Démonstration 18

En appliquant le lemme ci-dessus, tous les points M de la droite (AB) sont des points fixes de φ . Donc tous les points de toutes les droites (CM) sont des points fixes de φ . Ce qui nous donne au moins tous les points du plan sauf peut-être les points de la parallèle à (AB) passant par C .

En échangeant les rôles de A, B et C , on finit par obtenir tous les points du plan comme points fixes de φ . □

Passons au résultat important.

Théorème 19

Soit $\varphi \in \mathcal{S}$.

La transformation φ est une similitude (directe ou inverse).

Démonstration 19

On considère le triangle équilatéral direct OIJ où O, I et J ont pour affixes respectives $0, 1$ et i .

On considère la similitude directe f telle que $f(\varphi(O)) = O$ et $f(\varphi(I)) = I$ (toujours le petit lemme bien utile 8). On pose $J' := f(\varphi(J))$.

Comme $f \circ \varphi$ conserve les angles géométriques, on a $\widehat{IOJ'} = \widehat{IOJ}$, donc J' a pour affixe un nombre imaginaire pur.

Comme $f \circ \varphi$ conserve les rapports de distances, on a $\frac{OJ'}{OI} = \frac{OJ}{OI} = 1$. Donc $OJ' = 1$ et J' a pour affixe i ou $-i$.

- ▶ Si J' a pour affixe i , alors $f \circ \varphi \in \mathcal{S}$ admet les trois points non alignés O , I et J comme points fixes. Donc, d'après le théorème 18, $f \circ \varphi$ est l'identité du plan. En composant à gauche par la similitude directe f^{-1} on obtient $f^{-1} \circ (f \circ \varphi) = f^{-1}$ soit $f^{-1} = \varphi$. Donc φ est une similitude directe.
- ▶ Si J' a pour affixe $-i$, on considère la symétrie s par rapport à l'axe des abscisses, associée à $z \mapsto \bar{z}$. La symétrie s est une similitude inverse. De ce fait $s \circ f \circ \varphi$ admet les trois points non alignés O , I et J comme points fixes. C'est donc l'identité du plan. On en déduit que $\varphi = (s \circ f)^{-1}$. Donc φ est une similitude inverse. \square

Théorème 20

Soit f une similitude de rapport k .

L'application f transforme un segment de longueur ℓ en un segment de longueur $k.\ell$.

L'application f transforme un triangle d'aire \mathcal{A} en un triangle d'aire $k^2 \mathcal{A}$.

Démonstration 20

Soit $[AB]$ un segment de longueur ℓ . C'est l'ensemble des points M tels que $\widehat{AMB} = \pi \pmod{2\pi}$. Par conservation des angles géométriques, $f(M)$ appartient au segment $[f(A)f(B)]$ qui est de longueur $k.\ell$. Inversement, tout point M' de ce segment $[f(A)f(B)]$ est l'image par f du point $M := f^{-1}(M')$ qui appartient au segment $[AB]$ puisque f^{-1} est aussi une similitude et $A = f^{-1}(f(A))$ ainsi que $B = f^{-1}(f(B))$.

L'aire d'un triangle est la moitié du produit de deux côtés par le sinus de l'angle entre les deux. Les côtés sont multipliés par k et le sinus de l'angle est inchangé. \square

7.4 Cas de similitude des triangles

On se donne deux triangles ABC et $A'B'C'$. On note $\alpha := \widehat{BAC}$, $\beta := \widehat{ABC}$ et $\gamma := \widehat{ACB}$ ainsi que $\alpha' := \widehat{B'A'C'}$, $\beta' := \widehat{A'B'C'}$ et $\gamma' := \widehat{A'C'B'}$ les angles géométriques. Enfin on note $a := BC$, $b := CA$ et $c := AB$ ainsi que $a' := B'C'$, $b' := C'A'$ et $c' := A'B'$.

Définition 5.

On dit que deux triangles sont **semblables** s'il existe une similitude qui transforme les sommets de l'un en les sommets de l'autre.

Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles semblables et f une similitude telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$. On dit que les points A et A' sont des **sommets homologues**. On dit que les angles α et α' sont des **angles homologues**.

Théorème 21 (Premier cas de similitude des triangles)

1. Si $\gamma = \gamma'$.
2. S'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a' = ka$ et $b' = kb$.

Alors ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles semblables et les points A, B et C d'une part et A', B' et C' d'autre part sont respectivement homologues.

Démonstration 21

Soit f la similitude directe telle que $f(C) = O$ et $f(B) = I$ (petit lemme bien utile 8). On pose $K := f(A)$ et on appelle r le rapport de la similitude f .

Soit f' la similitude directe telle que $f'(C') = O$ et $f'(B') = I$. On pose $K' := f'(A')$ et on appelle r' le rapport de la similitude f' .

$$\text{On a } \underbrace{\begin{cases} B'C' = k BC \\ A'C' = k AC \end{cases}}_{\text{par hypothèse}} \quad \text{ainsi que} \quad \underbrace{\begin{cases} OK = r AC \\ OI = r BC \end{cases}}_{f \text{ est une similitude de rapport } r} \quad \text{et} \quad \underbrace{\begin{cases} OK' = r' A'C' \\ OI = r' B'C' \end{cases}}_{f' \text{ est une similitude de rapport } r'}$$

On en déduit que

$$\frac{OK'}{OK} = \frac{r' A'C'}{r AC} = \frac{r' k AC}{r AC} = \frac{r' k BC}{r BC} = \frac{r' B'C'}{r BC} = \frac{OI}{OI} = 1.$$

Donc $OK = OK'$.

De plus on a, d'après la conservation des angles par les similitudes f et f' .

$$\widehat{IOK} = \gamma = \gamma' = \widehat{IOK'}.$$

Quitte à effectuer une symétrie s par rapport à l'axe des abscisses (OI), les angles polaires de K et K' sont égaux, disons à γ modulo 2π . Les affixes de K et K' ont donc même module et même argument modulo 2π donc égales. Donc $f^{-1} \circ f'$ (ou $f^{-1} \circ s \circ f'$) transforme le triangle $A'B'C'$ en le triangle ABC . \square

Théorème 22 (Deuxième cas de similitude des triangles)

S'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a' = ka$, $b' = kb$ et $c' = kc$. Alors ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles semblables et les points A, B et C d'une part et A', B' et C' d'autre part sont respectivement homologues.

Démonstration 22

D'après la loi des cosinus 18 page 281 du cours de première, on a

$$\cos(\gamma) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(kb)^2 + (kc)^2 - (ka)^2}{2(kb) \cdot (kc)} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b'c'} = \cos(\gamma').$$

De ce fait les angles géométriques γ et γ' sont égaux et on se ramène au cas précédent. \square

Théorème 23 (Troisième cas de similitude des triangles)

Si $\gamma = \gamma'$ et $\beta = \beta'$.

Alors ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles semblables et les points A, B et C d'une part et A', B' et C' d'autre part sont respectivement homologues.

Démonstration 23

On a bien entendu $\alpha = \pi - \beta - \gamma = \pi - \beta' - \gamma' = \alpha'$. Ainsi $\sin(\alpha') = \sin(\alpha)$, $\sin(\beta') = \sin(\beta)$ et $\sin(\gamma') = \sin(\gamma)$. D'après la loi des sinus 6.3.1 page 220 dans le cours de première, on a

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \quad \text{et} \quad \frac{a'}{\sin(\alpha')} = \frac{b'}{\sin(\beta')} = \frac{c'}{\sin(\gamma')}$$

Donc

$$\frac{a'}{a} = \frac{a'}{\sin(\alpha')} \times \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{b'}{\sin(\beta')} \times \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{b'}{b} = \dots = \frac{c'}{c}.$$

De ce fait les côtés a, b, c et a', b', c' forment un tableau de proportionnalité et on peut à nouveau utiliser la méthode du jaguar casqué. \square

7.5 Cas d'égalité des triangles

On se donne deux triangles ABC et $A'B'C'$. On garde les notations du paragraphe précédent.

Définition 6.

On appelle **isométrie** (plane) toute transformation du plan qui conserve les distances.

D'après la loi des cosinus, les isométries conservent les angles géométriques. De ce fait, les isométries sont des similitudes. Leur rapport de similitude égale 1. Tous les théorèmes concernant les similitudes sont aussi des théorèmes concernant les isométries :

- ▶ Les isométries qui conservent les angles orientés sont des similitudes directes. On les appelle **isométries directes** ou **isométries positives**.
- ▶ Les translations, les rotations sont des isométries directes.
- ▶ Les isométries qui inversent les angles orientés sont des similitudes indirectes. On les appelle **isométries indirectes** ou **isométries négatives**.
- ▶ Les symétries orthogonales, les **symétries glissées** – c'est-à-dire les composées commutatives d'une symétrie orthogonale et d'une translation – sont des isométries directes.
- ▶ Une relecture attentive de l'étude des similitudes faite plus haut convaincra le lecteur qu'il n'existe pas d'autres isométries.
- ▶ La composée de deux isométries est une isométrie. La composée de deux isométries directes est une isométrie directe. La composée de deux isométries indirectes est une isométrie directe.
- ▶ La bijection réciproque d'une isométrie est une isométrie. La bijection réciproque d'une isométrie directe est une isométrie directe. La bijection réciproque d'une isométrie indirecte est une isométrie indirecte.

Définition 7.

On dit que deux triangles sont **isométriques** s'il existe une isométrie qui transforme les sommets de l'un en les sommets de l'autre.

On utilise aussi – survivance du passé – l'expression « **triangles égaux** » pour désigner des triangles isométriques.

Les trois cas de similitudes des triangles se transcrivent en prenant un rapport de similitude k égal à 1 :

Théorème 24 (Premier cas d'isométrie)

Si deux triangles ont un côté de même longueur, adjacent à deux angles respectivement de même mesure, alors les deux triangles sont isométriques.

Théorème 25 (Deuxième cas d'isométrie)

Si deux triangles ont un angle de même mesure compris entre deux côtés respectivement de même longueur, alors les deux triangles sont isométriques.

Théorème 26 (Troisième cas d'isométrie)

Si deux triangles ont leurs trois côtés respectivement de même longueur, alors les deux triangles sont isométriques.

7.5.1 Cas particulier du triangle rectangle**Théorème 27**

Si deux triangles rectangles ont des hypoténuses de même longueur et ont, de plus, un angle aigu égal ou un côté de l'angle droit de même longueur, alors les deux triangles sont isométriques.

Démonstration 27

- Un angle aigu de même mesure :
Les angles aigus d'un triangle rectangle étant complémentaires, si deux triangles rectangles ont un angle aigu égal, il en est de même de l'autre. Dès lors, si les hypoténuses sont de même longueur, le premier cas d'isométrie s'applique : les triangles sont isométriques.
- Un côté de même longueur :
Le théorème de Pythagore nous permet de conclure que les troisièmes côtés sont de même longueur, et on peut alors appliquer le troisième cas d'isométrie. □

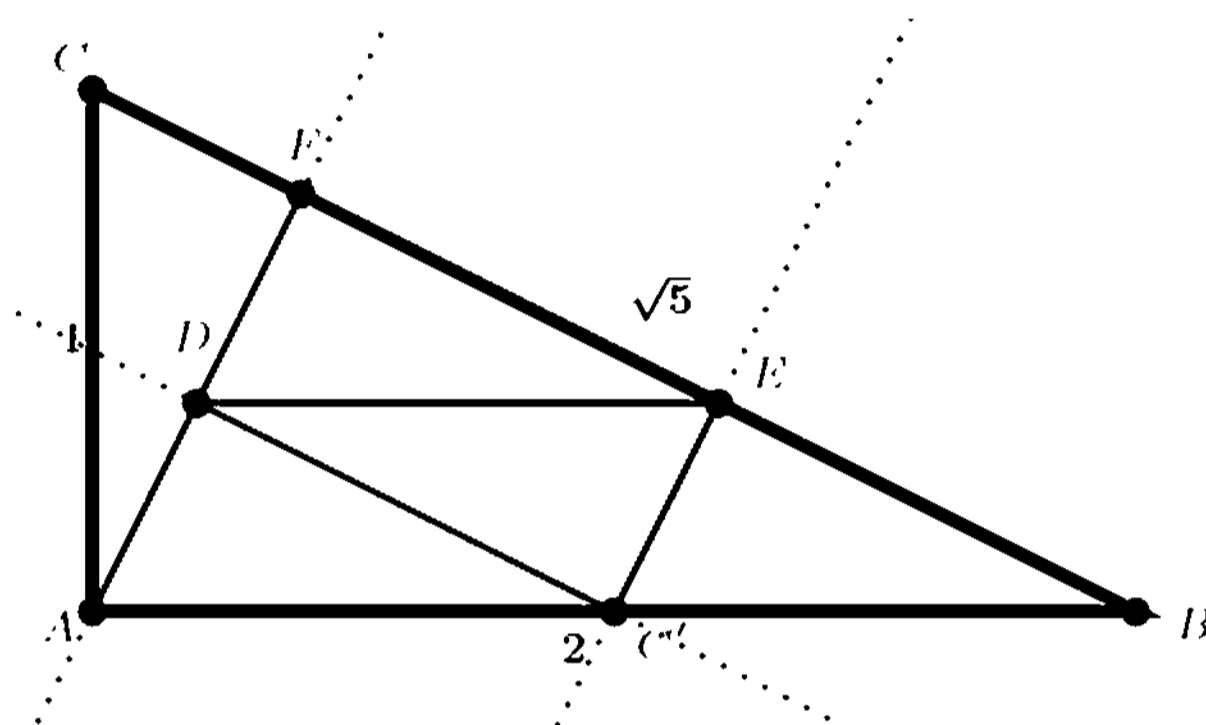
Exemple 3 (Conway)

Le triangle ABC ci-dessous de côtés 1, 2 et $\sqrt{5}$ est décomposable en cinq triangles isométriques entre eux et semblables à ABC . Le point F est le pied de la hauteur de ABC issue de A . Les triangles ABC et AFC sont rectangles et ont un angle aigu de même mesure, donc ils sont semblables. Le point C' est le milieu de $[AB]$ et (EC') est parallèle à (AF) . Les triangles ABC et $AC'E$ sont rectangles et ont un angle aigu de même mesure, donc ils sont semblables. Le point D est le milieu de $[AF]$.

D'après le théorème de la droite des milieux, E est le milieu de $[BF]$, les droites $(C'D)$ et (BC) sont parallèles, les droites (AB) et (DE) sont parallèles, et $AB = 2AC' = 2DE$.

Le quadrilatère $DC'EF$ est un parallélogramme avec un angle droit donc un rectangle coupé en deux triangles isométriques $C'DE$ et FED , ce dernier étant isométrique à $DC'A$. Les cinq petits triangles rectangles ont une hypoténuse égale à 1, donc ils sont isométriques entre eux et semblables à ABC , le rapport de similitude étant le quotient des hypoténuses, à savoir $\sqrt{5}$.

Une autre façon de le voir est de dire que l'aire de ABC est cinq fois l'aire d'un petit triangle, donc le rapport de similitude est $\sqrt{5}$.



7.6 Exercices

Exercice 1 (Une coquille d'escargot).

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , on note A_0 le point d'affixe 6 et S la similitude de centre O , de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$. On pose $A_{n+1} = S(A_n)$ pour $n \geq 1$.

1. Déterminer, en fonction de n , l'affixe du point A_n . En déduire que A_{12} est sur la demi-droite (O, \vec{i}) .
2. Établir que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1} .
3. Calculer la longueur du segment $[A_0A_1]$. En déduire la longueur ℓ de la ligne polygonale $A_0A_1A_2 \dots A_{12}$.

Exercice 2.

Soit ABC un triangle isocèle tel que $AB = AC = 2BC$. Les points C' et B' sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$.

Démontrer que les triangles suivants sont isométriques :

1. $AB'B$ et $AC'C$
2. $BB'C$ et $CC'B$

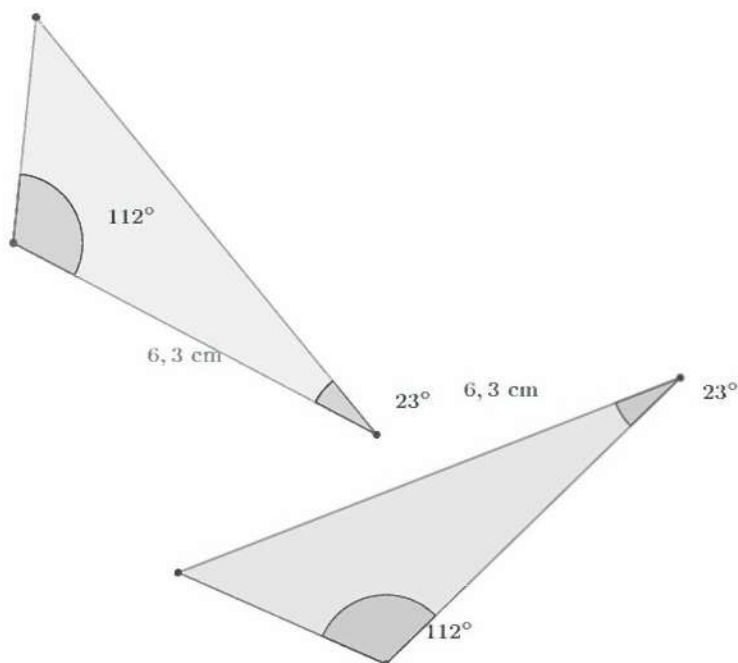
Exercice 3.

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $\widehat{B} = 72^\circ$. La bissectrice de l'angle \widehat{C} coupe $[AB]$ en D .

Démontrer que les triangles ABC et BDC sont semblables.

Exercice 4.

Expliquer pourquoi les deux triangles ci-dessous sont isométriques :



Exercice 5.

ABC est un triangle tel que $AB = 42$ mm, $AC = 28$ mm et $BC = 36$ mm.
 I est le milieu de $[AC]$, D est le point de $[AB]$ tel que $\widehat{AID} = \widehat{ABC}$.
 Calculer les distances AD et ID .

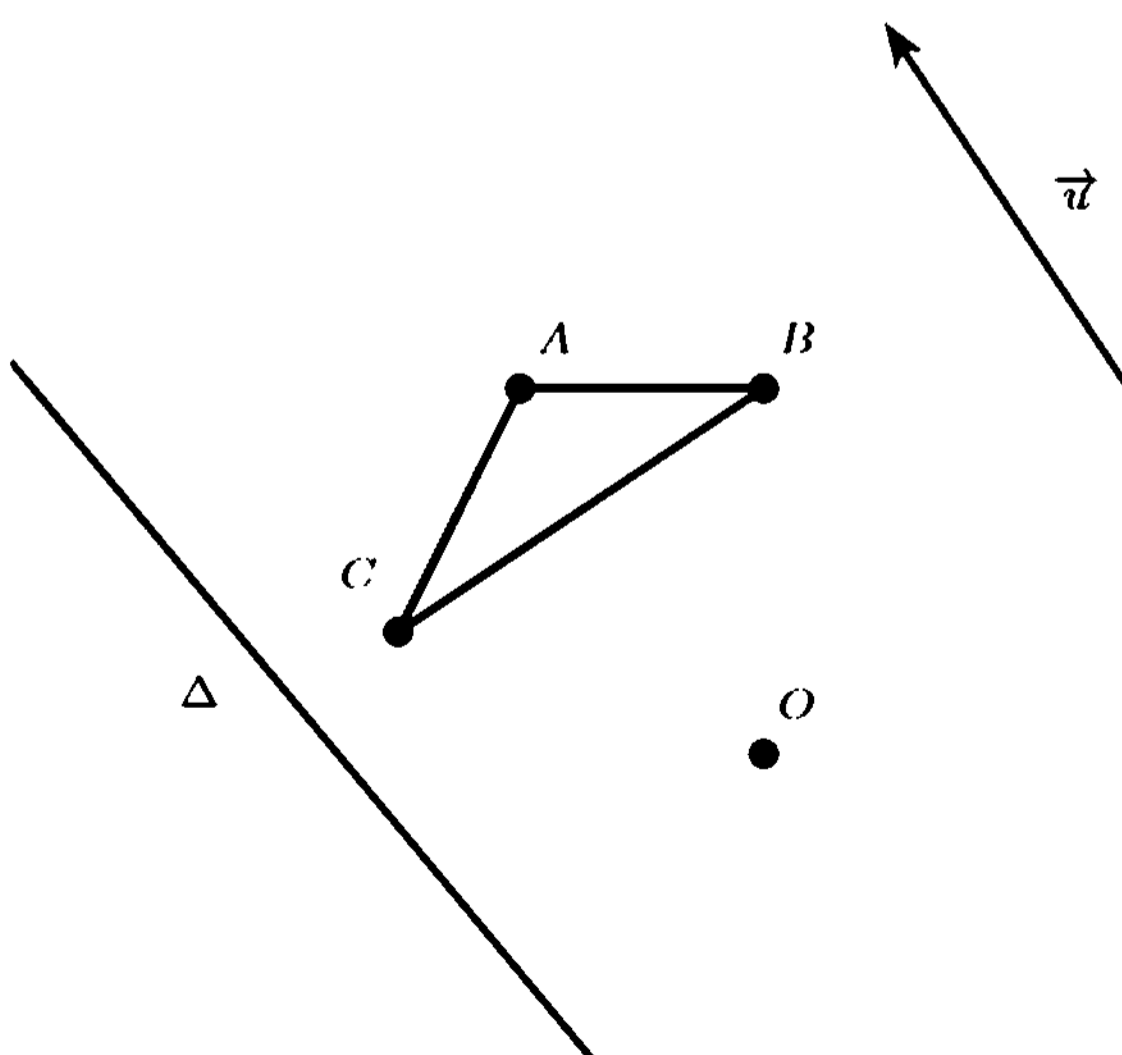
Exercice 6.

Soit un triangle ABC rectangle en B . La bissectrice de \widehat{BAC} coupe (BC) en D . Sur le segment $[AD]$, on place le point E tel que $AE = AB$. La perpendiculaire à (AD) en E coupe (AC) en F .

1. Réaliser cette figure.
2. Montrer que les triangles ABD et AEF sont isométriques.
3. Citer deux triangles isocèles de la figure.

Exercice 7.

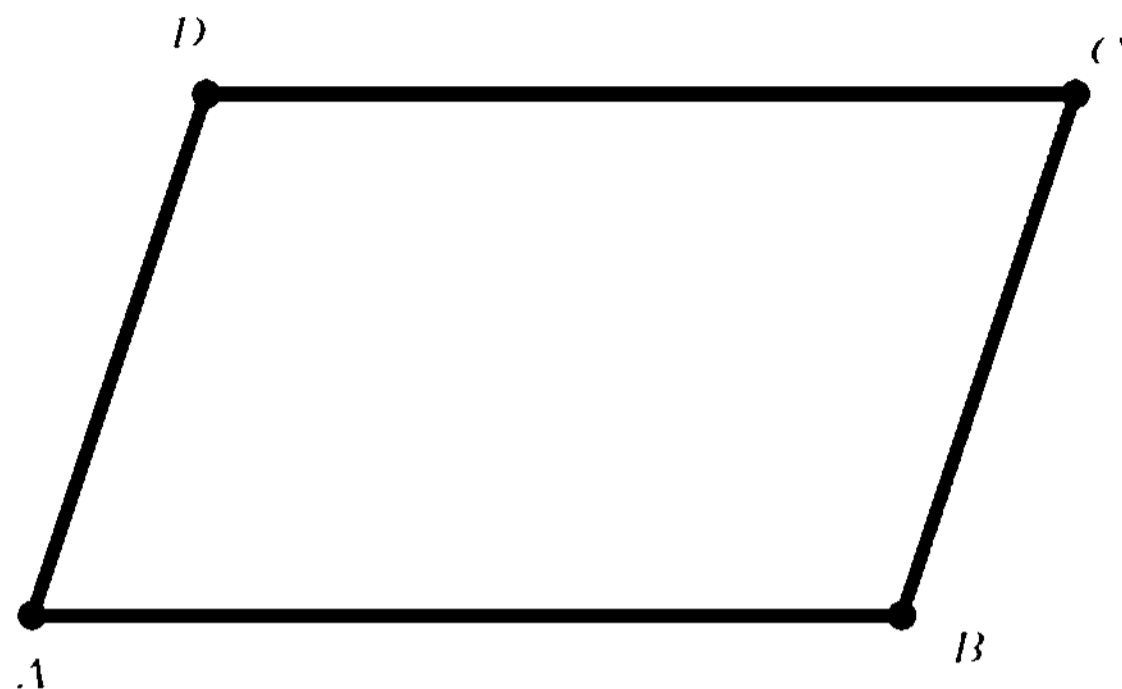
Dans la figure ci-dessous ABC est un triangle quelconque, O un point du plan, Δ une droite et \vec{u} un vecteur.



1. Construire les points suivants :
 - A_1, B_1, C_1 , images respectives de A, B, C par la symétrie de centre O ;
 - A_2, B_2, C_2 , images respectives de A, B, C par la réflexion d'axe Δ ;
 - A_3, B_3, C_3 , images respectives de A, B, C par la translation de vecteur \vec{u} ;
 - A_4, B_4, C_4 , images respectives de A, B, C par la rotation de centre O et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.
2. Dire pourquoi les triangles $ABC, A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3$ et $A_4B_4C_4$ sont isométriques.

Exercice 8.

Soit $ABCD$ un parallélogramme.



1. Reproduire ce parallélogramme. Tracer les bissectrices des quatre angles de $ABCD$, puis placer les points suivants :
 - E , intersection des bissectrices issues de A et de B ;
 - F , intersection des bissectrices issues de B et de C ;
 - G , intersection des bissectrices issues de C et de D ;
 - H , intersection des bissectrices issues de D et de A ;
 - P , intersection de la bissectrice issue de A et de (CD) ;
 - Q , intersection de la bissectrice issue de B et de (CD) ;
 - R , intersection de la bissectrice issue de C et de (AB) ;
 - S , intersection de la bissectrice issue de D et de (AB) .
2. Démontrer que les triangles AHD et CFB sont isométriques.
3. Donner la liste de tous les triangles présents sur la figure et isométriques au triangle AHD .
4. Démontrer que les triangles ABE et CGD sont isométriques.
5. Démontrer que les triangles AHD et ABE sont semblables.
6. Quelle est la nature du quadrilatère $EFGH$?

Exercice 9.

Soit ABC un triangle. Soient D et E les points tels que $ABCD$ et $ABEC$ sont deux parallélogrammes.

Démontrer que les triangles BCE et ACD sont isométriques.

Exercice 10.

Soit ABC un triangle. On appelle D le point de la demi-droite $[AC)$, à l'extérieur du segment $[AC]$, vérifiant $CD = AB$.

Les médiatrices de $[BD]$ et $[AC]$ se coupent en un point O .

1. Démontrer que les triangles OAB et OCD sont isométriques.

Soit M un point du segment $[AB]$. On appelle N le point de la demi-droite $[AC)$, à l'extérieur du segment $[AC]$, vérifiant $CN = AM$.

2. Démontrer que les triangles OAM et OCN sont isométriques.
3. En déduire que $OM = ON$.
4. En déduire que la médiatrice de $[MN]$ passe par O .

Exercice 11.

Sur deux côtés consécutifs d'un carré $ABCD$, on construit extérieurement à celui-ci deux triangles équilatéraux ABE et BCF .

1. Démontrer que les triangles DAE et EBF sont isométriques.
2. Démontrer que le triangle DEF est équilatéral.

Exercice 12.

Soit ABC un triangle isocèle en A . La hauteur issue de C coupe $[AB]$ en K . La hauteur issue de B coupe $[AC]$ en L .

Démontrer que $CK = BL$.

Exercice 13.

Soit ABC un triangle isocèle en A avec un angle \widehat{BAC} inférieur à $\frac{\pi}{3}$. La médiatrice de $[AC]$ coupe (BC) en D .

On note E le point de (AD) qui n'appartient pas à $[AD)$ et vérifiant $AE = DB$.

1. Démontrer que le triangle CDA est isocèle.
2. Démontrer que les triangles ABD et AEC sont isométriques.
3. Quelle est la nature du triangle CDE ?

Exercice 14.

Soit $ABCD$ un carré de centre O et soit M un point de $[AB]$.

La perpendiculaire à (CM) passant par B coupe $[AD]$ en P .

1. Démontrer que $\widehat{BCM} = \widehat{ABP}$.
2. En déduire que les triangles MCB et ABP sont isométriques.
3. Démontrer que les triangles OMB et OPA sont isométriques.
4. En déduire que le triangle POM est rectangle et isocèle.

Exercice 15.

Soit $ABCD$ un carré, O le milieu de $[AB]$, \mathcal{C} le cercle de diamètre $[AB]$.

La tangente à \mathcal{C} passant par D est tangente au point M à l'intérieur du carré.

E est le point d'intersection de (OM) avec (BC) .

1. Faire une figure. Comment construit-on le point M ?
2. Démontrer que les triangles OAD et OMD sont isométriques.
3. Démontrer que les triangles DME et DCE sont isométriques.
4. Quelle est la nature du triangle CME ?

Exercice 16.

Soit ABC un triangle équilatéral. M , N et P sont les points appartenant respectivement aux segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ tels que :

$$BM = CN = AP.$$

1. Démontrer que les triangles BMP , CNM et NAP sont isométriques deux à deux.
2. En déduire que le triangle MNP est équilatéral.

Exercice 17.

Soit ABC un triangle qui n'est pas isocèle ni rectangle. La bissectrice de \widehat{BAC} coupe la médiane de $[BC]$ en P . M et N sont les projetés orthogonaux du point P respectivement sur les droites (AB) et (AC) .

1. Démontrer que $AM = AN$.
2. Démontrer que les triangles PBM et PCN sont isométriques.
3. Démontrer que $2AM = AB + AC$.

Exercice 18.

Soit ABC un triangle. ACF et AEB sont deux triangles équilatéraux construits à l'extérieur de ABC . BDC est un triangle équilatéral construit à l'intérieur de ABC .

1. Démontrer que les triangles CDF et DEB sont isométriques.
2. Quelle est la nature de $AEDF$?

Exercice 19 (Descendu du grenier).

Démontrer que dans un triangle ABC les points B et C sont équidistants de la médiane issue de A .

Exercice 20.

Soient ABC un triangle rectangle en A et H le pied de sa hauteur en A .

1. Prouver que ABC et ABH sont semblables et préciser la correspondance entre les sommets.
2. En déduire les égalités

$$\begin{aligned} AB^2 &= BC \times BH : \\ AB \times AC &= BC \times AH. \end{aligned}$$

3. Prouver que ABC et ACH sont semblables.
4. En déduire que $AH^2 = HB \times HC$.

Exercice 21.

Soit ABC un triangle tel que $AC = \frac{3}{2}AB$. On note I le milieu de $[AB]$ et D le point de $[AC]$ tel que $\widehat{AID} = \widehat{ACB}$.

1. Effectuer une construction précise.
2. Prouver que les triangles ABC et AID sont semblables. Préciser la correspondance entre les sommets et le rapport de similitude.
3. En déduire que $\mathcal{A}_{AID} = \frac{1}{9}\mathcal{A}_{ABC}$.

Exercice 22.

Deux cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' de centres O et O' et de rayons r et r' se coupent en A et B . Une droite passant par B coupe \mathcal{C} en M et \mathcal{C}' en M' .

1. Démontrer que (OO') est la médiatrice de $[AB]$.
2. En déduire que $\widehat{AMB} = \widehat{AOO'}$.
3. Démontrer que les triangles OAO' et MAM' sont des triangles semblables.
4. En déduire que

$$\frac{AM}{AM'} = \frac{r}{r'}.$$

Exercice 23.

ABC est un triangle quelconque. $CBFG$ et $ABDE$ sont deux carrés construits à l'extérieur du triangle BAC .

1. Montrer que $\widehat{CBD} = \widehat{ABF}$.
2. Montrer que BCD et ABF sont isométriques.
3. En déduire que $AF = DC$.

Exercice 24.

ABC est un triangle quelconque. I est le milieu de $[BC]$. B' et C' sont les projetés orthogonaux de B et C sur la médiane (AI) du triangle. Montrer que IBB' et ICC' sont isométriques. En déduire la nature de $BB'CC'$.

Exercice 25.

$ABCD$ est un carré de centre O , M un point de $[AB]$. On mène par B la perpendiculaire à (CM) qui coupe (AD) en P et (CM) en Q .

1. (a) Démontrer que $\widehat{BCM} = \widehat{ABP}$.
(b) En déduire que les triangles MCB et ABP sont isométriques et que $MB = AP$.
2. (a) Démontrer que les triangles OMB et OPA sont isométriques.
(b) En déduire que le triangle POM est rectangle et isocèle.

Exercice 26.

\mathcal{C} est un cercle de centre O . ABC est un triangle inscrit dans \mathcal{C} . D est un point de l'arc \widehat{BC} ne contenant pas A . La droite (AD) coupe $[BC]$ en E . Montrer que DBE et ACE sont semblables.

Exercice 27.

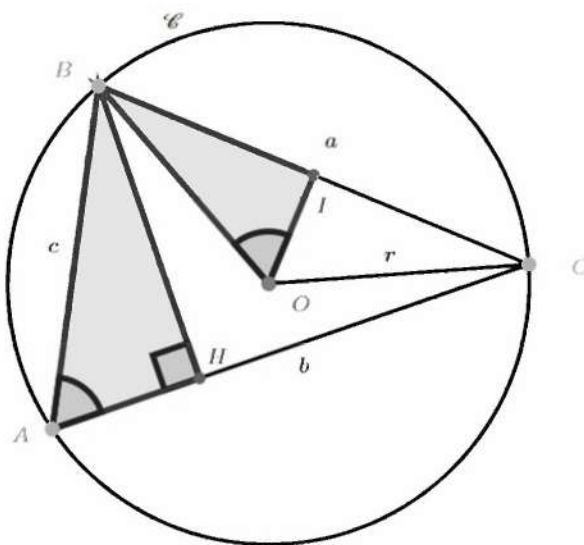
Démontrer que

$$\mathcal{A} = \frac{abc}{4r},$$

où \mathcal{A} désigne l'aire du triangle ABC , $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ et r désigne le rayon du cercle \mathcal{C} de centre O , circonscrit à ABC .

On appelle I le milieu de $[BC]$.

Voir aussi l'exercice 38 pages 180 (solution 202) dans le cours de seconde.

**Exercice 28.**

$ABCD$ est un parallélogramme, N un point du segment $[DC]$ distinct de D et C . La droite (AN) coupe (BC) en M .

1. Démontrer que les triangles ADN et ABM sont des triangles semblables.
2. En déduire que $DN \times BM = AB \times AD$.

Exercice 29.

ABC est un triangle isocèle en A tel que $AB = 5$ cm et $BC = 3$ cm. Le cercle de centre B et de rayon BC coupe $[AC]$ en E .

Calculer le rapport entre les aires des triangles BEC et ABC .

Exercice 30.

Deux cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' de centres respectifs O et O' et de même rayon se coupent en A et B . Une droite passant par A coupe \mathcal{C} en M et \mathcal{C}' en N . I est le milieu de $[AB]$ et S_I est la symétrie de centre I .

1. Quelle est la nature du quadrilatère $OAO'B$?
2. Où se situe $N' = S_I(N)$?
3. Quelle est l'image de $[BN]$ par S_I ?
4. Déterminer l'image de N' par la symétrie d'axe la médiatrice de $[AM]$.
5. En déduire la nature de BMN .

Exercice 31.

Deux cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' de centres O et O' et de rayons r et r' se coupent en A et B . Trois droites Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 passent par A .

Δ_1 recoupe \mathcal{C} en M_1 et \mathcal{C}' en M'_1 .

Δ_2 recoupe \mathcal{C} en M_2 et \mathcal{C}' en M'_2 .

Δ_3 recoupe \mathcal{C} en M_3 et \mathcal{C}' en M'_3 .

1. Démontrer que $M_1M_2M_3$ et $M'_1M'_2M'_3$ sont des triangles semblables.
2. Démontrer que le rapport de similitude égale le rapport entre les rayons des cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' .

Indication 1.

On pourra construire le point de \mathcal{C} diamétralement opposé à A .

Exercice 32.

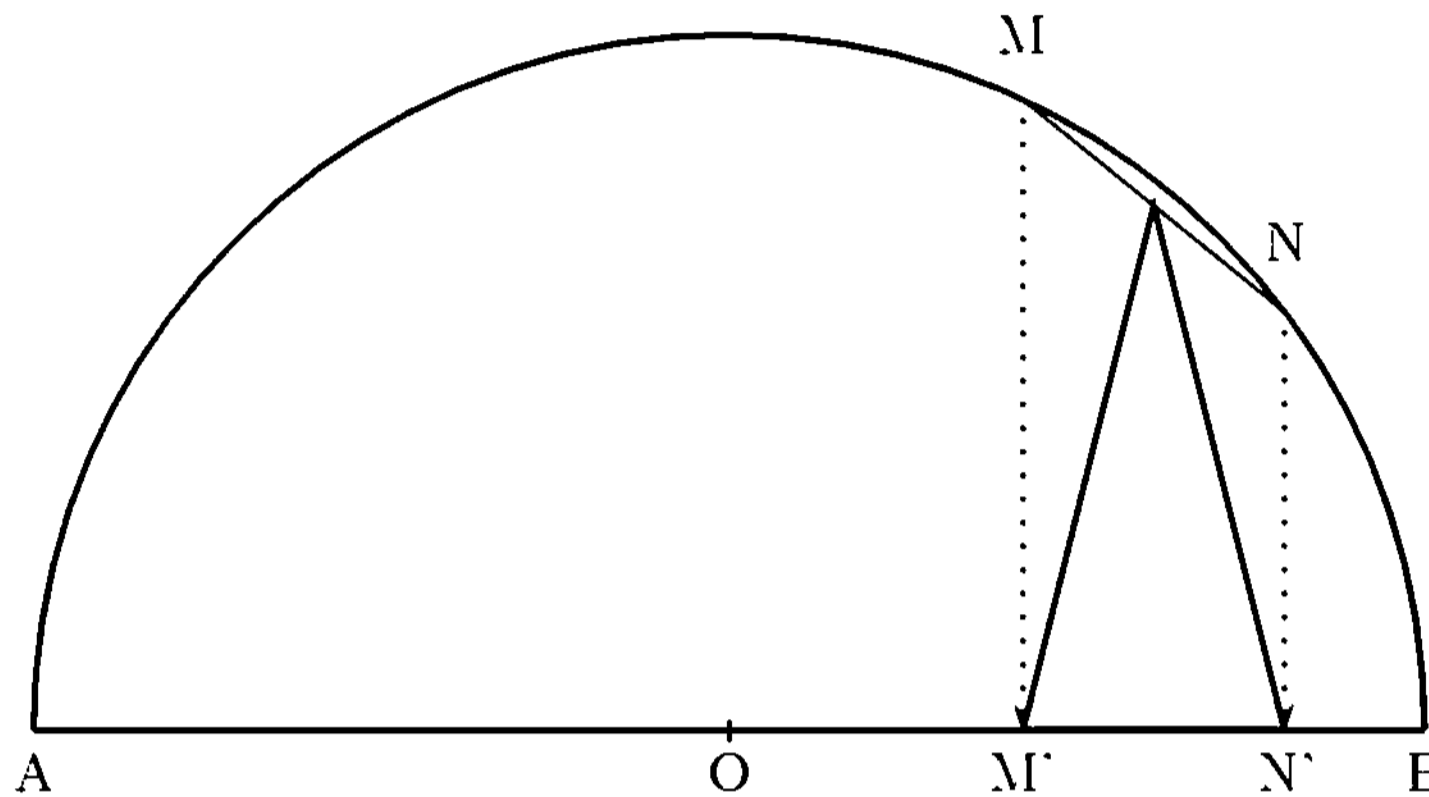
Démontrer que dans un cercle donné, deux angles inscrits qui interceptent deux arcs de même longueur ont même mesure.

Indication 2.

On pourra utiliser une rotation.

Exercice 33.

Soit \mathcal{D} un demi-cercle. Une corde MN de longueur fixée tourne autour de ce demi-cercle. On appelle M' et N' les projetés orthogonaux respectifs de M et N sur le diamètre $[AB]$ de \mathcal{D} et I le milieu de $[MN]$.



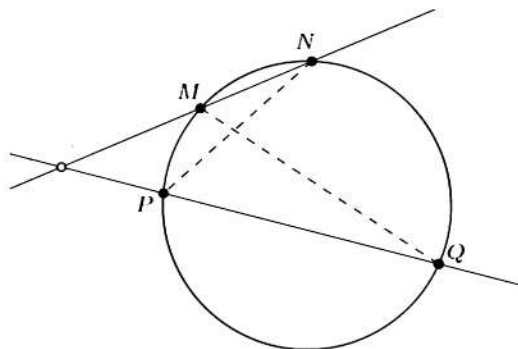
1. Démontrer que le triangle $M'IN'$ est isocèle en I .
2. On trace le cercle \mathcal{C} de diamètre $[AB]$. On note O son centre. La droite (MM') recoupe \mathcal{C} en P . Démontrer que $(M'I)$ est parallèle à (PN) .
3. Démontrer que le triangle $M'IN'$ reste semblable à lui-même au cours du déplacement de MN autour du demi-cercle.

Exercice 34.

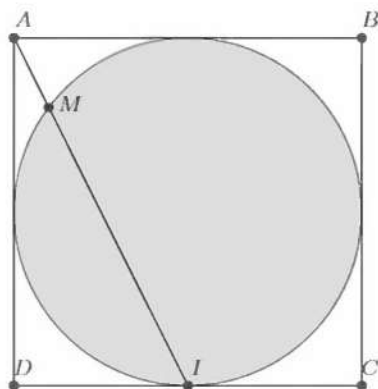
Tracer un triangle ABC tel que $AB < AC$. La bissectrice de \widehat{BAC} coupe (BC) en un point D . Le cercle de centre A et de rayon AB coupe $[AC]$ en E .

1. Montrer que les triangles ABD et ADE sont isométriques.
2. Quelle est la nature du triangle BDE ?

Exercice 35.



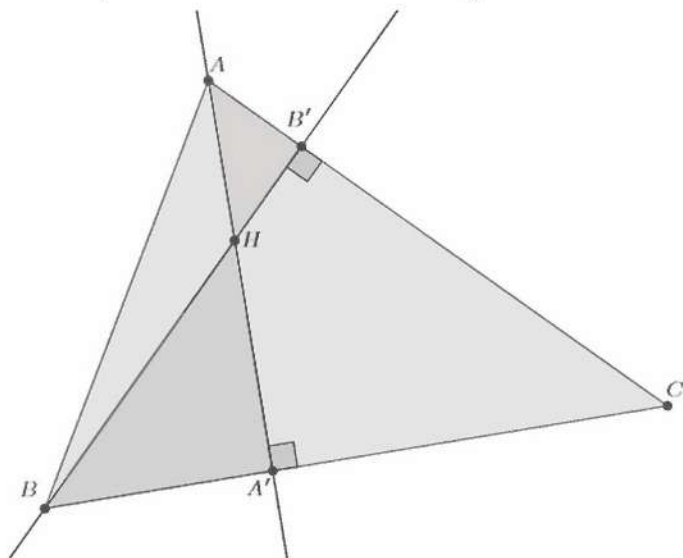
1. Démontrer que dans la figure ci-dessus les triangles AMQ et APN sont semblables.
2. En déduire que $AM \times AN = AP \times AQ$.
3. (a) Refaire la figure dans le cas où la sécante (AP) passe par le centre O du cercle.
Démontrer que $AM \times AN = AO^2 - R^2$, où R désigne le centre du cercle.
- (b) *Application* : Dans la figure ci-dessous, calculer AM sachant que I est le milieu de $[DC]$ et que le carré $ABCD$ a pour côté 6 cm.



Exercice 36.

Le point H est l'orthocentre du triangle ABC .

- Démontrer que les triangles $HA'B$ et $HB'A$ sont semblables.
En déduire que $HA \times HA' = HB \times HB'$.
- Quel est l'orthocentre du triangle HBC ? En déduire que $HA \times AA' = AB' \times AC$.

**Exercice 37.**

Soit ABC un triangle et I l'intersection des bissectrices des angles \widehat{ABC} et \widehat{BCA} . La parallèle à (BC) passant par I coupe (AB) en D et (AC) en E .
Démontrer que les triangles BDI et EIC sont isocèles.

Exercice 38.

Le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans le cercle \mathcal{C} de diamètre $[AC]$. O est le milieu de $[AC]$. La bissectrice de l'angle \widehat{CAD} coupe \mathcal{C} en P et la bissectrice de l'angle \widehat{CAB} coupe \mathcal{C} en Q .

- Démontrer que $\widehat{DAP} = \widehat{DCP}$ et que $\widehat{PAC} = \widehat{PDC}$.
- En déduire la nature du triangle PDC .
- Démontrer de même que le triangle QCB est isocèle en Q .
- Démontrer que la droite (OP) est la médiatrice du segment $[CD]$ et que la droite (OQ) est la médiatrice du segment $[BC]$.
- Soit M et N les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[CD]$. Démontrer que les quatre points C, M, N, O appartiennent à un même cercle que l'on définira.

Exercice 39.

Soit $ABCD$ un rectangle. On note $AB = L$ et $BC = l$. Soit I le milieu de $[AB]$ et K le point d'intersection droites (DI) et (AC) .

1. Que représente K dans le triangle ABD ?
2. En déduire que

$$AK = \frac{1}{3}\sqrt{L^2 + l^2} \text{ et } DK = \frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + l^2}.$$

3. Démontrer que

$$AK^2 + DK^2 - AD^2 = \frac{2}{9}(L^2 - 2l^2).$$

4. Démontrer que le triangle DKA est rectangle en K uniquement lorsque

$$\frac{L}{l} = \sqrt{2}.$$

5. En prenant pour rectangle $ABCD$ cette feuille de papier (avec $L > l$), obtient-on par pliage un triangle DKA rectangle par la construction précédente?

Exercice 40 (Descendu du grenier (Excuse my dust)).

Soit ABC un triangle. On appelle H le pied de la hauteur issue de A et K le pied de la hauteur issue de B .

On donne $AC = 65$ cm, $BC = 52$ cm et $AH + BK = 90$ cm.

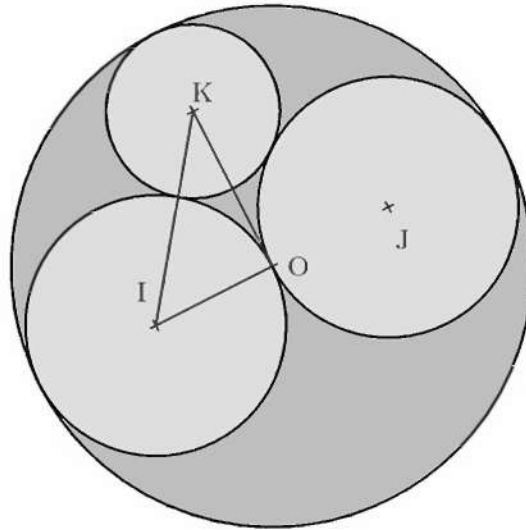
1. Calculer AH et BK .
2. Construire le triangle ABC .

Exercice 41 (Le théorème de Ptolémée).

$ABCD$ est un quadrilatère inscrit dans un cercle, les points étant placés dans cet ordre. On construit le point E sur $[BD]$ tel que $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$.

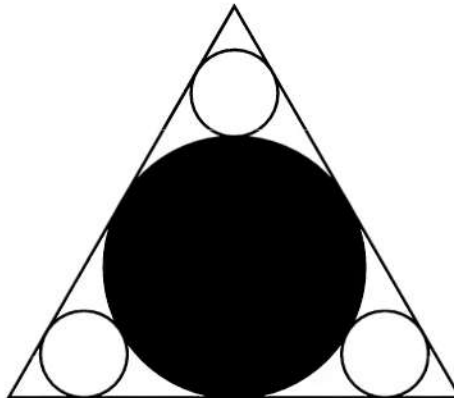
1. Démontrer que les triangles BEA et CDA sont semblables.
2. En déduire que $AC \times BE = AB \times CD$.
3. Démontrer de même que $AC \times ED = AD \times BC$.
4. En utilisant les deux résultats trouvés que peut-on dire, pour un quadrilatère inscrit dans un cercle, de la somme des produits des côtés opposés?

Voir aussi le problème 13 page 310 dans le cours de première.

Exercice 42.

Tous les cercles de la figure sont tangents deux à deux. O , I , J et K sont les centres des cercles. Le plus grand cercle a pour rayon 4 cm et le plus petit cercle a pour rayon r (en cm).

1. Démontrer que le triangle IOK est rectangle.
2. Justifier que : $(2 + r)^2 - (4 - r)^2 = 4$.
3. En déduire la valeur exacte du rayon r .
4. Quelle est la valeur exacte de l'aire du domaine colorié en gris foncé ?

Exercice 43 (Une sangaku).

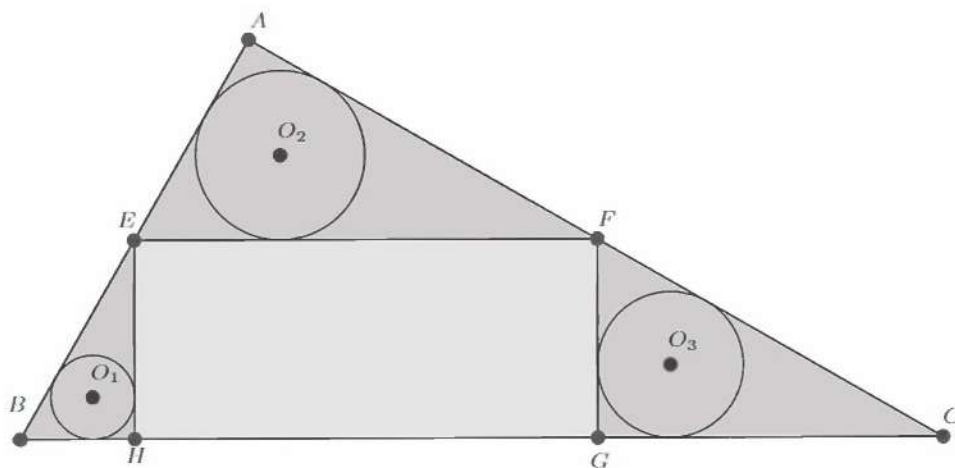
Le triangle est équilatéral. Calculer le rapport entre l'aire en gris et celle en blanc.

Exercice 44 (Sangaku).**Remarque 4.**

Si deux triangles sont semblables alors les rayons des cercles inscrits sont dans le même rapport que le rapport de similitude.

ABC est un triangle rectangle en A , E et F sont les milieux des côtés $[AB]$ et $[AC]$. On a inscrit le rectangle $EFGH$ dans le triangle ABC . Les cercles inscrits des triangles EBH , AEF et FGC ont pour centres respectifs O_1 , O_2 et O_3 et ont pour rayons respectifs R_1 , R_2 et R_3 .

1. Démontrer que les triangles EBH , AEF et FGC sont semblables.
2. En déduire que $\frac{R_1}{R_2} = \frac{AB}{BC}$ et $\frac{R_3}{R_2} = \frac{AC}{BC}$.
3. Démontrer que $R_1^2 + R_3^2 = R_2^2$.

**Exercice 45 (isométriques).**

ABC est un triangle isocèle tel que $AB = AC = 2BC$. Les points C' et B' sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$ respectivement.

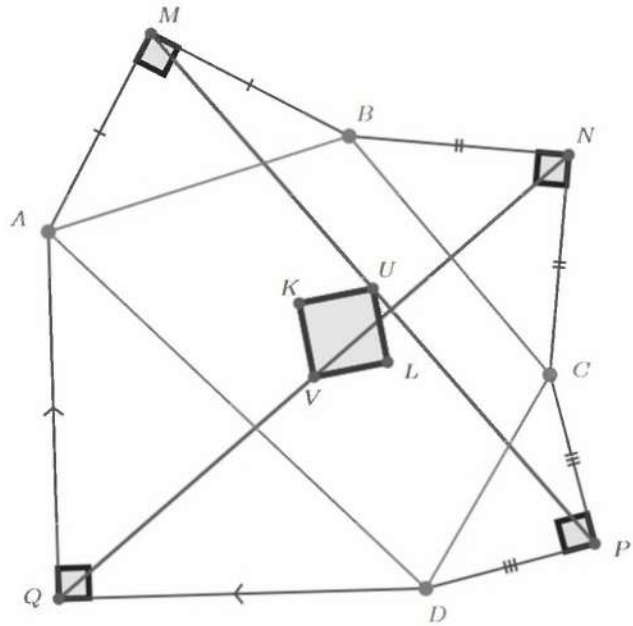
Démontrer que les triangles $AB'B$ et $AC'C$ sont isométriques.

Démontrer de même que $BB'C$ et $CC'B$ sont isométriques.

Exercice 46.

Dans la configuration ci-contre, les triangles MAB , NBC , PCD et QDA sont directs et isocèles rectangles en M , N , P et Q respectivement.

- Exprimer les affixes respectives m , n , p et q des points M , N , P et Q en fonction des affixes respectives a , b , c et d des points A , B , C et D .
- Démontrer que $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NQ}$ et que les vecteurs \overrightarrow{MP} et \overrightarrow{NQ} sont orthogonaux.
- Soit K , L , U et V les milieux respectifs de $[AC]$, $[BD]$, $[MP]$ et $[NQ]$ et soit k , ℓ , u et v leurs affixes respectives.
 - Exprimer $m + p$ et $n + q$ en fonction de k et ℓ .
 - En déduire que pour que $MNPQ$ soit un parallélogramme, il faut et il suffit que $ABCD$ soit un parallélogramme.
 - Comparer $k + \ell$ et $u + v$ ainsi que $u - v$ et $i(\ell - k)$. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ULVK$?



7.7 Solutions

Solution 1 (Une coquille d'escargot)

- On va commencer par donner l'écriture complexe de la transformation. On a ainsi

$$S(z) = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6} z.$$

Autrement dit, si on note z_n l'affixe du point A_n , on a

$$z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6} z_n.$$

On reconnaît une suite géométrique (de raison $r = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6}$ qui est un nombre complexe!). D'après le théorème 6 page 322 du cours de seconde – étendu sans trop d'efforts aux nombres complexes –

on en déduit que

$$z_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6} \right)^n z_0 = \frac{3^{n/2}}{2^n} e^{in\pi/6} z_0.$$

En particulier, $z_{12} = \frac{3^6}{2^{12}} e^{i2\pi} \times 6 = \frac{3^7}{2^{11}}$. Le point A_{12} est bien situé sur la demi-droite (O, \vec{i}) .

2. Le vecteur $\overrightarrow{OA_n}$ est d'affixe z_n , le vecteur $\overrightarrow{OA_{n+1}}$ est d'affixe $z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6} z_n$, et le vecteur $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$ est d'affixe $z_{n+1} - z_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6} - 1 \right) z_n$. Pour démontrer que le triangle $OA_n A_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1} , on peut utiliser la réciproque du théorème de Pythagore. Or,

$$OA_n^2 = |z_n|^2,$$

$$OA_{n+1}^2 = \frac{3}{4} |z_n|^2,$$

et

$$\frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6} - 1 = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4},$$

ce qui donne

$$A_n A_{n+1}^2 = \frac{1}{4} |z_n|^2.$$

On a bien

$$OA_n^2 = OA_{n+1}^2 + A_n A_{n+1}^2.$$

Une autre méthode possible est de vérifier que $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_n}$ est un imaginaire pur, ce qui prouve l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$ et $\overrightarrow{OA_{n+1}}$.

3. On sait que $OA_0 = 6$ et que $OA_1 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$. Par le théorème de Pythagore,

$$A_0 A_1 = 6 \sqrt{12 - \frac{3}{4}} = 3.$$

Notons alors d_n la longueur du segment $[A_n A_{n+1}]$, de sorte que $d_0 = 3$. Puisqu'une similitude de rapport r multiplie les longueurs par r , on a

$$d_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} d_n.$$

La quantité recherchée est $d_0 + \dots + d_{11}$. Par la formule de la somme d'une suite géométrique (théorème 7 page 322 du cours de seconde), on trouve

$$d_0 + \dots + d_{11} = 3 \frac{1 - \frac{3^6}{2^{12}}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

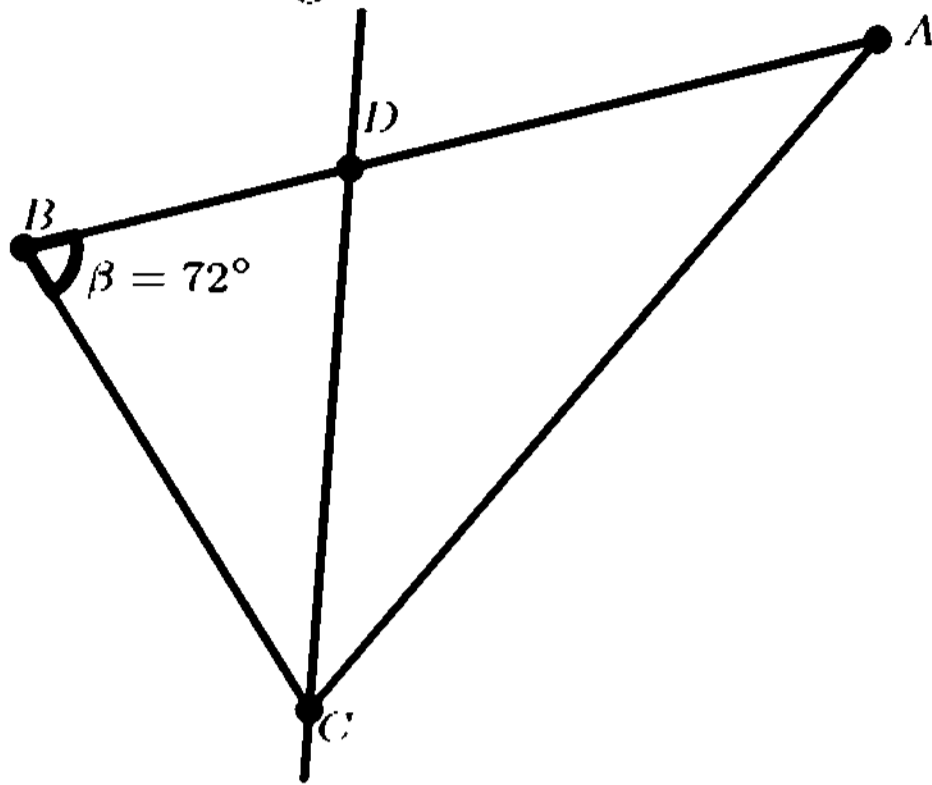
Solution 2

On appelle A' le milieu de $[BC]$. La symétrie orthogonale s par rapport à (AA') transforme B en C puisque dans un triangle isocèle la médiane est médiatrice. Comme s conserve les milieux, $s(C') = B'$.

Les résultats en découlent.

Solution 3

Puisque ABC est isocèle en A , on a $\widehat{BCA} = 72^\circ$ d'après le théorème 4 page 140 du cours de seconde. D'après le théorème 10 page 146 du cours de seconde, on a $\widehat{BAC} = 36^\circ$. La bissectrice de \widehat{ACB} coupe cet angle en deux angles de 36° . Donc les triangles ABC et BDC sont semblables d'après le théorème 23.

**Solution 4**

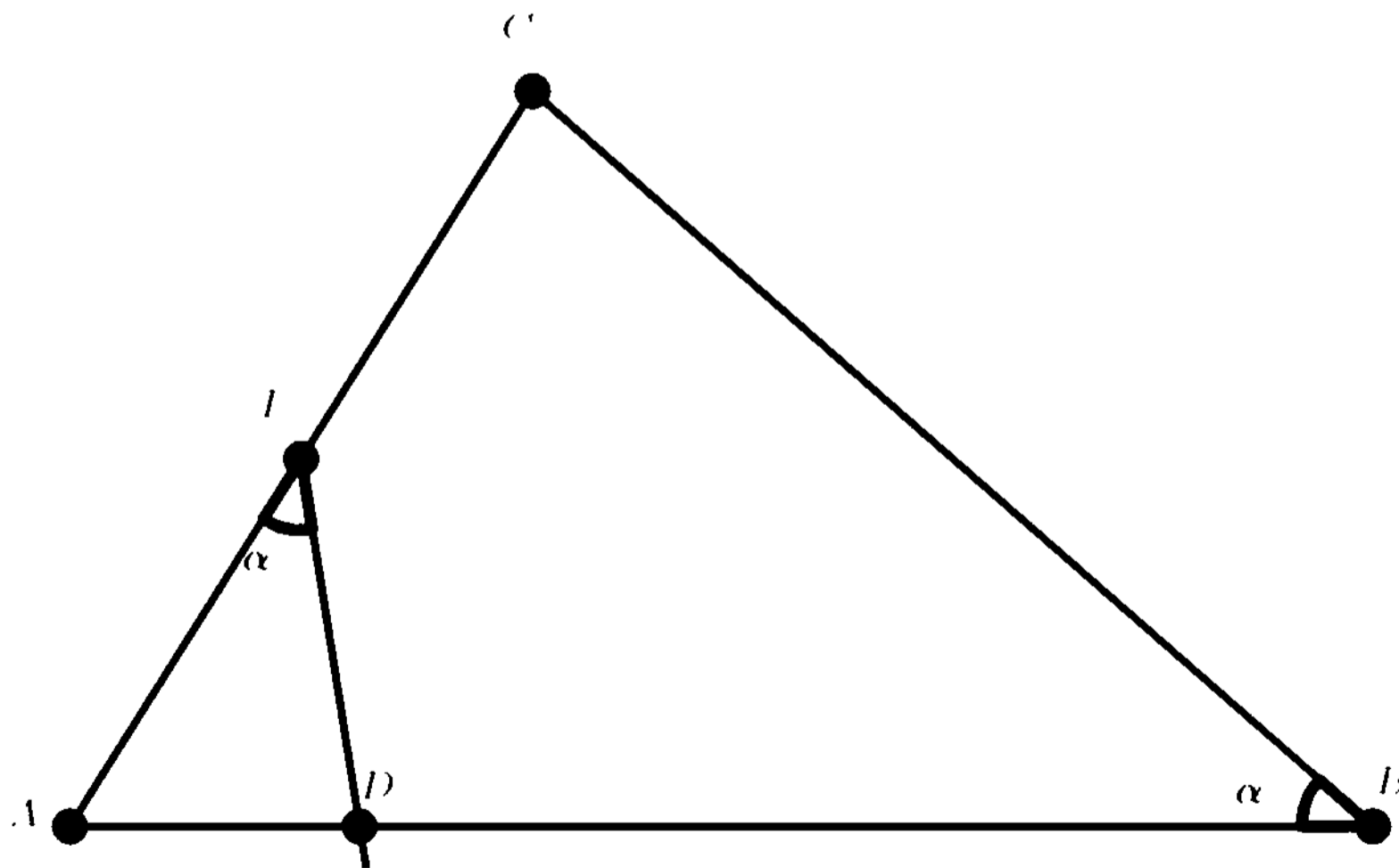
Les deux triangles sont isométriques car ils ont chacun des côtés de même longueur (6,3 cm) entre deux angles de même mesure (112° et 23°).

Solution 5

Les triangles ABC et AID ont l'angle \widehat{BAC} en commun. De plus les angles \widehat{AID} et \widehat{ABC} sont égaux. Donc les triangles ABC et AID sont semblables d'après le théorème 23. Les points A, I, D d'une part et A, B, C d'autre part sont homologues. On en déduit que

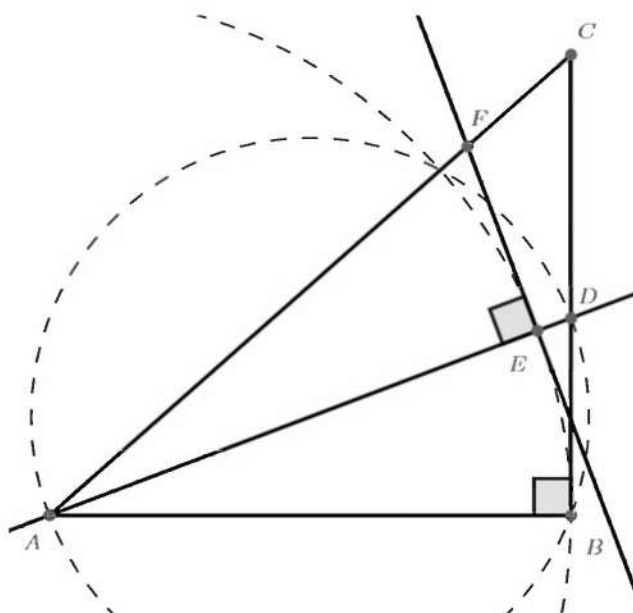
$$\frac{1}{3} = \frac{AI}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{ID}{BC}.$$

On en tire $AD = \frac{AC}{3} = \frac{28}{3}$ et $ID = \frac{BC}{3} = 12$ mm.



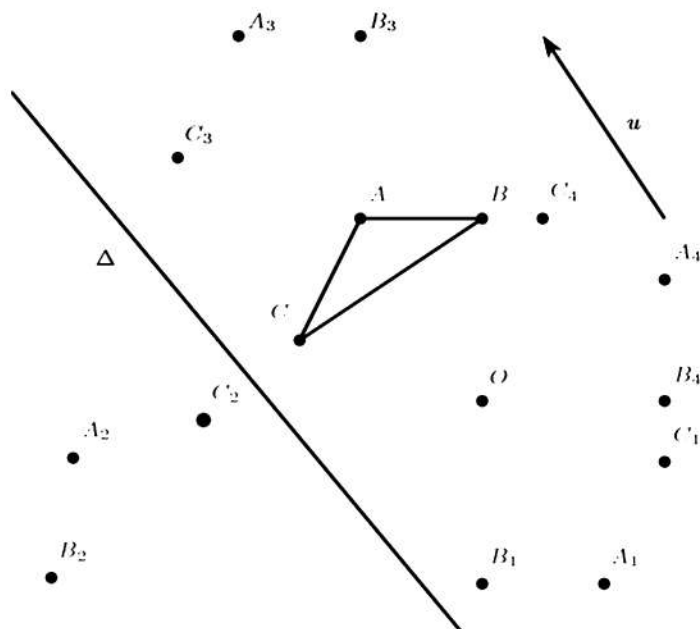
Solution 6

1.



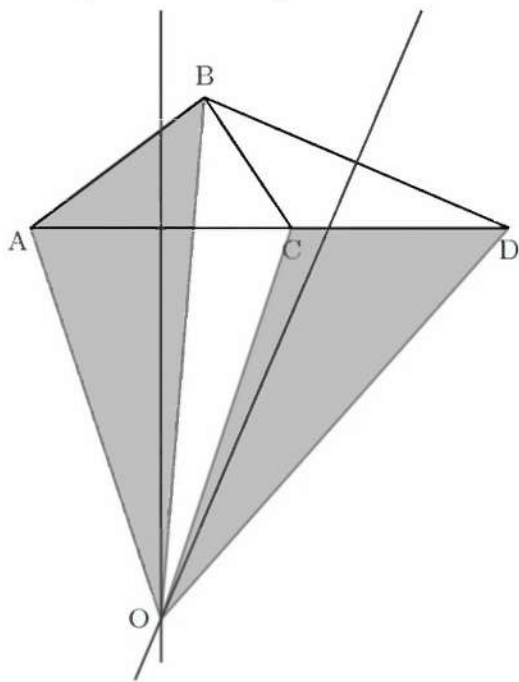
2. Les deux triangles ABD et AEF ont chacun des côtés $[AB]$ et $[AE]$ qui ont la même longueur et sont entre des angles de même mesure. ABD et AEF sont des triangles isométriques.
3. Comme ABD et AEF sont des triangles isométriques, on a $BD = EF$ ce qui ne nous est pas utile ici et $AD = EF$ ce qui démontre que ADF est isocèle en A .

Solution 7



Solution 10

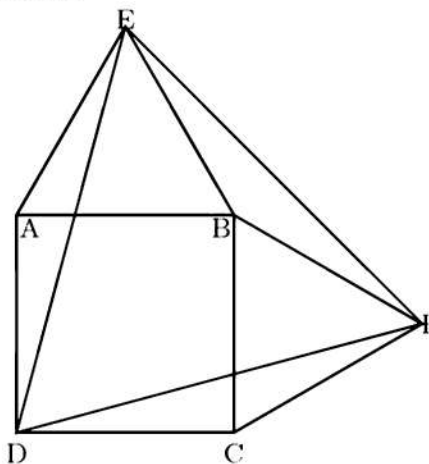
- Le point O appartient à la médiatrice de $[AC]$ donc $OA = OC$.
Le point O appartient à la médiatrice de $[BD]$ donc $OB = OD$.
De plus $CD = AB$ par construction du point D . Les triangles OAB et OCD sont donc isométriques.



- On a toujours $OA = OC$ puisque O appartient à la médiatrice de $[AC]$. De plus $CN = AM$ par construction du point D . Enfin $\widehat{OAB} = \widehat{OCN}$ d'après la question précédente. Les deux triangles OAM et OCN ont chacun un angle de même mesure encadré par deux côtés de même longueur. Donc les triangles OAM et OCN sont isométriques.
- Les troisièmes côtés des deux triangles OAM et OCN isométriques sont égaux. Donc $OM = ON$.
- Cette dernière égalité traduit le fait que O appartient à la médiatrice de $[MN]$.

Solution 11

- Les côtés $[AD]$, $[AE]$, $[BE]$ et $[BF]$ ont tous la même longueur, à savoir la longueur d'un côté du carré $ABCD$.



On va calculer les mesures des angles \widehat{DAE} et \widehat{EBF} :

$$\widehat{DAE} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}.$$

Autour du point B , on a un angle de mesure

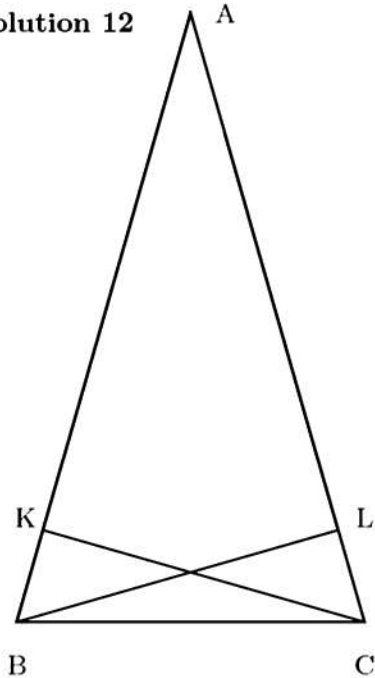
$$2\pi = \widehat{EBF} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \widehat{EBF} + \frac{7\pi}{6}.$$

$$\text{Donc } \widehat{EBF} = 2\pi - \frac{7\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

On a donc deux angles homologues de même mesure encadré par des côtés homologues de même longueur : Les triangles DAE et EBF sont donc isométriques.

- Pour les mêmes raisons les triangles DCF et EBF sont isométriques. Donc les côtés homologues DF et EF ont la même longueur. Depuis la question 1 on sait que les côtés homologues DE et EF ont la même longueur. Le triangle DEF est donc équilatéral.

Solution 12

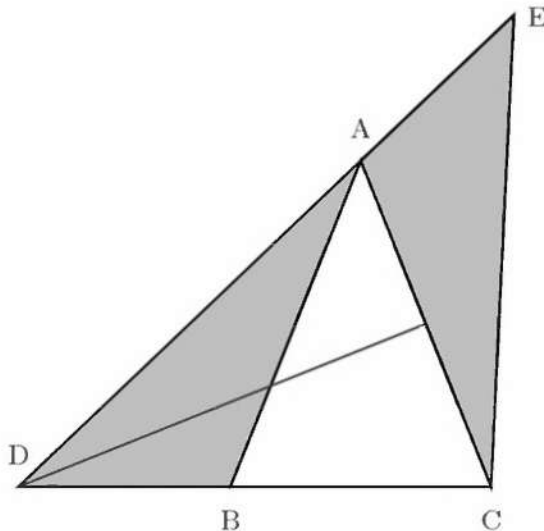


Première solution : Les triangles AKC et ABL ont un angle en commun, l'angle \widehat{CAB} et un angle droit. Donc ils ont leurs trois angles égaux. Les côtés homologues $[AC]$ et $[AB]$ sont égaux puisque ABC est un triangle isocèle en A . Donc les triangles AKC et ABL sont bien isométriques. Les côtés homologues CK et BL sont donc égaux.

Deuxième solution : Δ , la hauteur issue de A est médiatrice de $[BC]$. Par la symétrie par rapport à Δ , B est transformé en C , A est transformé en A donc $[AC]$ est transformé en $[AB]$, (CK) est transformée en la perpendiculaire à (AB) passant par B c'est-à-dire en (BL) , donc K est transformé en L donc $CK = BL$.

Solution 13

1. Le point D appartient à la médiatrice $[AC]$, il est donc équidistant de A et C , donc $DA = DC$ et le triangle CDA est donc isocèle.



2. Les côtés homologues $[AC]$ et $[AB]$ sont égaux puisque le triangle ABC est isocèle en A .

Les côtés homologues $[AE]$ et $[DB]$ sont égaux par construction de E .

Comme ABC est un triangle isocèle en A , on a $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Comme ADC est un triangle isocèle en D , on a $\widehat{DAC} = \widehat{ACB}$.

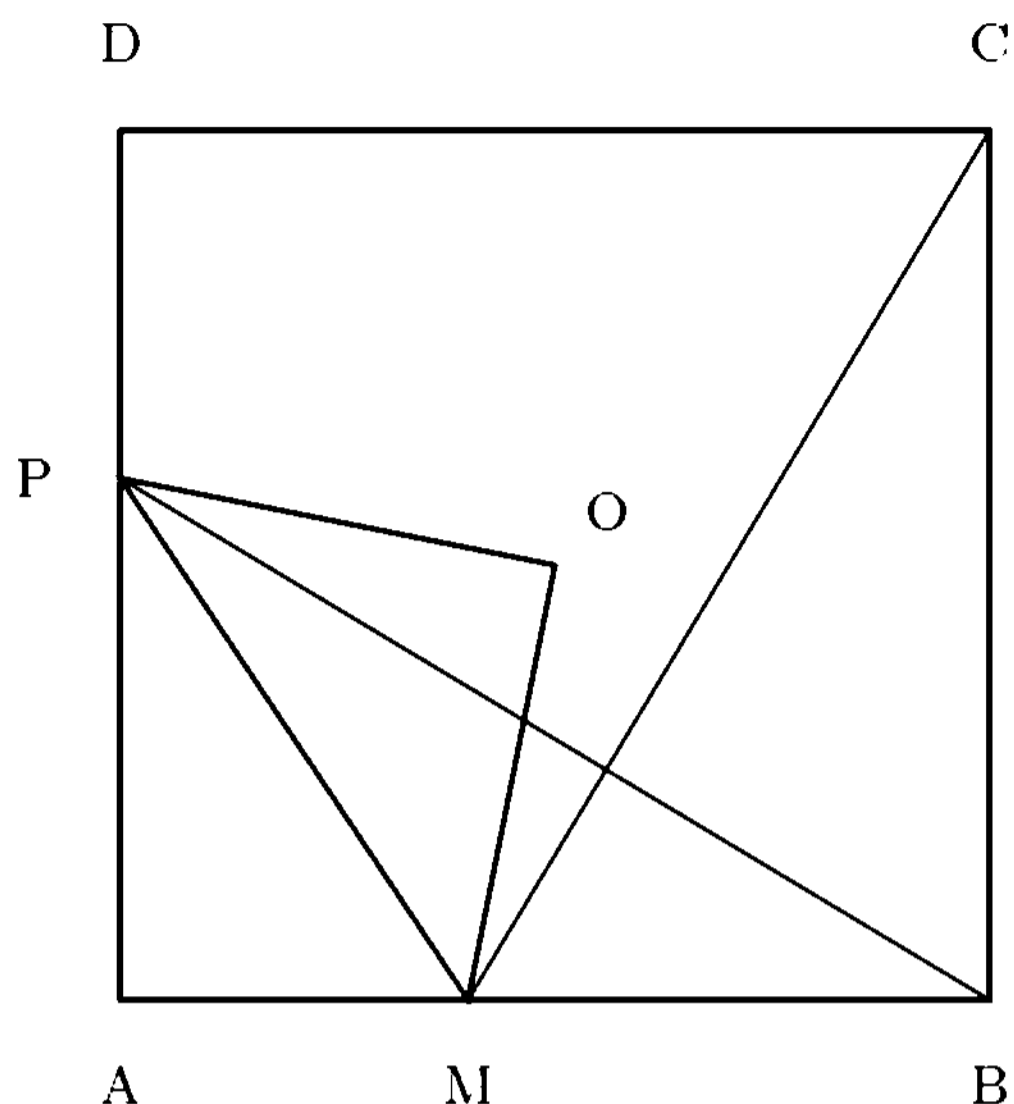
On a donc $\widehat{DAC} = \widehat{ACB}$, donc leurs supplémentaires respectifs \widehat{DBA} et \widehat{CAE} sont égaux.

Les triangles ABD et AEC sont donc isométriques.

3. D'après la question précédente les côtés homologues $[DE]$ et $[CE]$ sont égaux. Le triangle CDE est donc isocèle en E .

Solution 14

1. Soit I le point d'intersection de (BP) et (MC) . La droite (BP) coupe les droites parallèles (BC) et (AD) suivant des angles alternes-internes égaux. Donc $\widehat{CBP} = \widehat{BPA}$.



Dans un triangle rectangle les angles aigus sont complémentaires. Dans le triangle BCI rectangle en I , donc \widehat{BCM} est le complémentaire de \widehat{CBP} . Dans le triangle BPA rectangle en A , \widehat{ABP} est le complémentaire de \widehat{BPA} . Les deux angles \widehat{BCM} et \widehat{ABP} sont donc égaux.

2. Les côtés homologues $[BC]$ et $[AB]$ sont égaux puisque ce sont des côtés du carré. Les angles droits \widehat{MBC} et \widehat{PAB} sont bien sûr égaux. Les deux angles \widehat{BCM} et \widehat{ABP} sont égaux d'après la question précédente. On a donc égalité d'un côté encadré par deux angles égaux. Les triangles MCB et ABP sont donc isométriques.

3. Par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$,

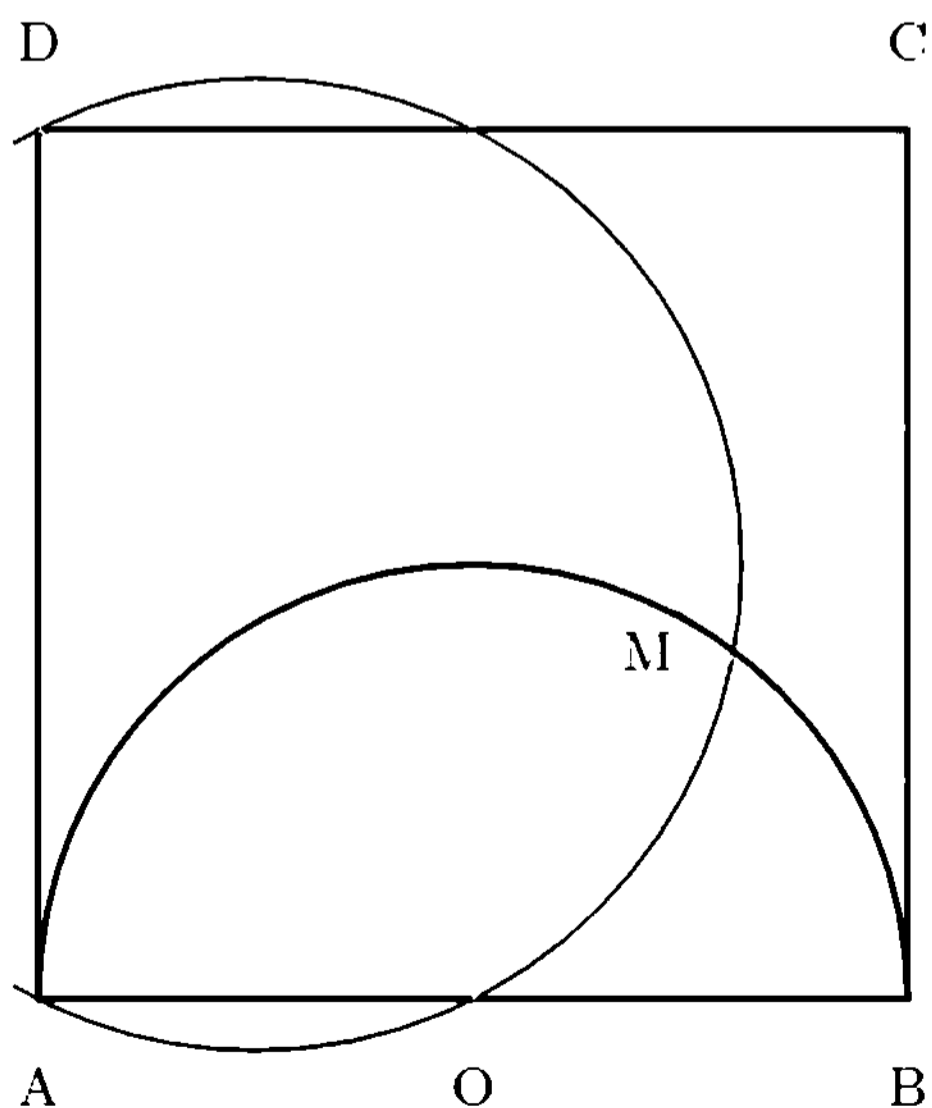
- O est transformé en O .
- C est transformé en B .
- B est transformé en A .
- M est transformé en P' .

où M' est un point de $[AD]$ avec $MCB = ABP'$. Donc $P' = P$. Donc les triangles OMB et OPA sont isométriques.

4. D'après la question précédente, comme P est l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, $OM = OP$ (conservation des distances par une rotation) et $\widehat{MOP} = \frac{\pi}{2}$ (angle de la rotation). C'est bien dire que le triangle POM est rectangle et isocèle.

Solution 15

1. On trace le cercle de centre D passant par O . Il recoupe \mathcal{C} en M .



2. Les triangles OAD et OMD ont deux côtés homologues $[AO]$ et $[OM]$ égaux au rayon du cercle \mathcal{C} . Le côté $[OD]$ commun aux deux triangles est homologue à lui-même. Le triangle OAD est rectangle en A , OMD est rectangle en M les troisièmes côtés homologues sont donc égaux d'après le théorème de Pythagore. Les triangles OAD et OMD sont donc isométriques.

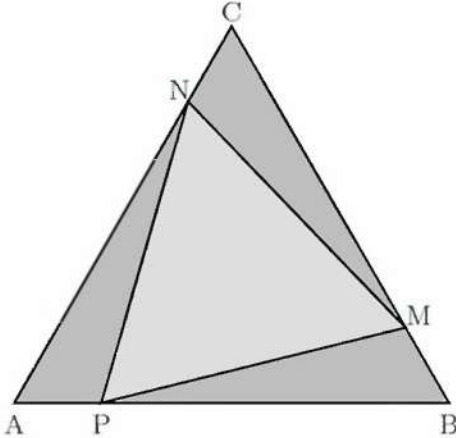
3. De même les triangles DME et DCE ont deux côtés homologues $[DM]$ et $[DC]$ égaux d'après la question précédente. Le côté $[DE]$ commun aux deux triangles est homologue à lui-même.

Le triangle DAC est rectangle en C , DME est rectangle en M les troisièmes côtés homologues sont donc égaux d'après le théorème de Pythagore. Les triangles DME et DCE sont donc isométriques.

4. D'après la question précédente, $CE = ME$. C'est dire que le triangle CME est isocèle en M .

Solution 16

On pose $c := AB$, $a := AP$ et $b := AN = c - a$.



1. Les triangles BMP, CNM et NAP ont chacun un côté (BM, CN et AP) de longueur a , un côté de longueur b (BP, CM et AN) entourant un angle qui mesure $\frac{\pi}{3}$. D'après le deuxième cas d'isométrie (théorème 25) appliqué trois fois, BMP, CNM et NAP sont isométriques deux à deux.
2. Les troisièmes côtés (MP, NM et NP) sont images les uns des autres par isométries. Ils ont donc la même longueur. C'est bien dire que MNP est équilatéral.

Remarque 5.

On aurait pu aussi calculer directement $d := MP$ par la formule d'Al Kashi (18 page 281 du cours de première) :

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \frac{\pi}{6}} = \sqrt{a^2 + b^2 - \sqrt{3}ab}.$$

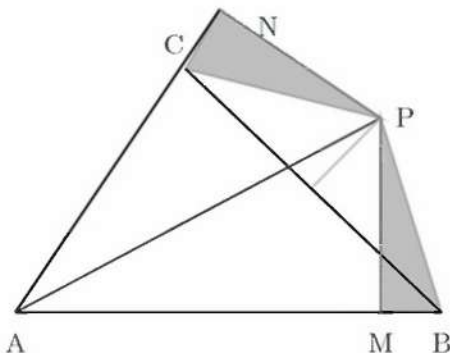
Idem pour NM et NP .

Solution 17

1. Dans le triangle APN rectangle en N ,

$AN = AP \cos \frac{\widehat{BAC}}{2}$ et $PN = AP \sin \frac{\widehat{BAC}}{2}$. De même, dans le triangle APM rectangle en M ,

$AM = AP \cos \frac{\widehat{BAC}}{2}$ et $PM = AP \sin \frac{\widehat{BAC}}{2}$. Donc $AM = AN$ et $PN = PM$.



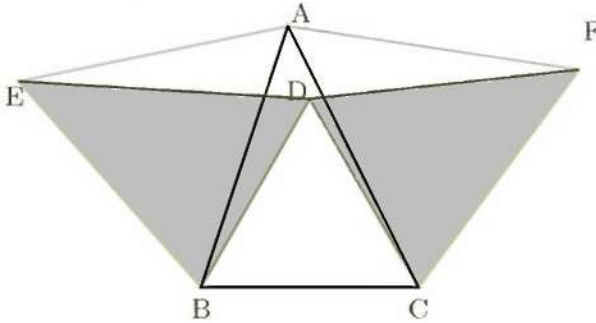
2. Comme P appartient à la médiatrice de $[BC]$, on a $PC = BP$. On a d'autre part $PN = PM$ d'après la question précédente. Comme les triangles PBM et PCN sont rectangles en M et N respectivement, les troisièmes côtés homologues, à savoir BM et CN ont donc la même longueur d'après le théorème de Pythagore. Les triangles PBM et PCN sont donc isométriques.

3. On sait depuis 1 que AMN est isocèle en A . Maintenant parmi N et M il y en a un et un seul à l'intérieur du triangle ABC . En effet sinon ABC serait isocèle ce qui est exclu. Pour fixer les idées supposons que ce soit M à l'intérieur du triangle ABC . On a alors $2AM = AM + AN = AB - BM + AB + AN = AB + AC$, puisque $AN = BM$ d'après 2.

Solution 18

1. Pour fixer les idées, ABC est un triangle dont les sommets sont nommés en suivant le sens trigonométrique.

Le triangle BDC est équilatéral, donc les côtés homologues $[BD]$ et $[DC]$ sont égaux.



Par la rotation de centre C et d'angle $+\frac{\pi}{3}$,
 F est transformé en A
 D est transformé en B
 donc $DF = AB$.

Comme le triangle AEB est équilatéral, on a aussi $AB = BE$, donc les côtés homologues $[BE]$ et $[DF]$ sont égaux.

Par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$,

E est transformé en A

D est transformé en C

donc $ED = AC$.

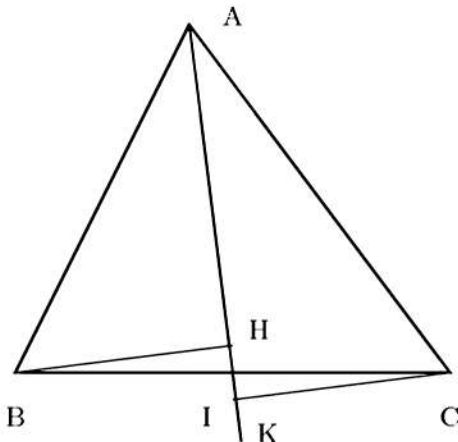
Comme le triangle AFC est équilatéral, on a aussi $AC = CF$, donc les côtés homologues DE et CF sont égaux.

Les triangles CDF et DEB sont donc isométriques.

2. $AEDF$ est un parallélogramme puisque ses côtés opposés ont même longueur.

Solution 19 (Descendu du grenier)

On appelle I le milieu de $[BC]$, H le projeté orthogonal de B sur (AI) , K le projeté orthogonal de C sur (AI) .



Les deux triangles BIH et CIK sont rectangles en H et K respectivement. Les angles \widehat{BIH} et \widehat{CIK} sont égaux car opposés par le sommet. Donc les angles homologues \widehat{IBH} et \widehat{ICK} sont donc égaux.

Les côtés homologues BI et CI sont égaux. Les triangles BIH et CIK ont des côtés homologues égaux encadrés par des angles égaux. Ils sont donc isométriques. Donc $BH = CK$. Comme BH désigne la distance de B à la droite (AI) et que CK désigne la distance de C à la droite (AI) , on peut bien dire que les points B et C sont équidistants de la médiane issue de A .

Solution 20

On se souvient que dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires. Soient $\beta := \widehat{ABC}$ et $\gamma := \widehat{ACB}$, on a donc $\beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

1. Les angles du triangle ABH sont $\widehat{ABH} = \beta$, $\widehat{AHB} = \frac{\pi}{2}$ et \widehat{HAB} est donc complémentaire de β , donc $\widehat{HAB} = \gamma$. Les triangles ABH et ABC sont donc semblables.
2. On en déduit le tableau de correspondance entre les sommets :

ABC	A	B	C
ABH	H	B	A

Soit k le rapport de la similitude qui transforme ABH en ABC . On a

$$k = \frac{AB}{BH} = \frac{BC}{BA} = \frac{AC}{HA}.$$

On en déduit l'égalité des produits en croix :

$$AB \times BA = BH \times BC \text{ et } BC \times HA = BA \times AC,$$

ce qu'il fallait vérifier.

3. Le triangle ACH a les mêmes angles que ABC : β , γ et $\frac{\pi}{2}$. Donc les triangles ABC et ACH sont semblables.
4. Les triangles ABH et ACH sont semblables. On a

ABH	H	B	A
ACH	H	A	C

Soit k le rapport de la similitude qui transforme ABH en ACH . On a

$$k = \frac{HB}{HA} = \frac{HA}{HC} \left(= \frac{AC}{HA} \right).$$

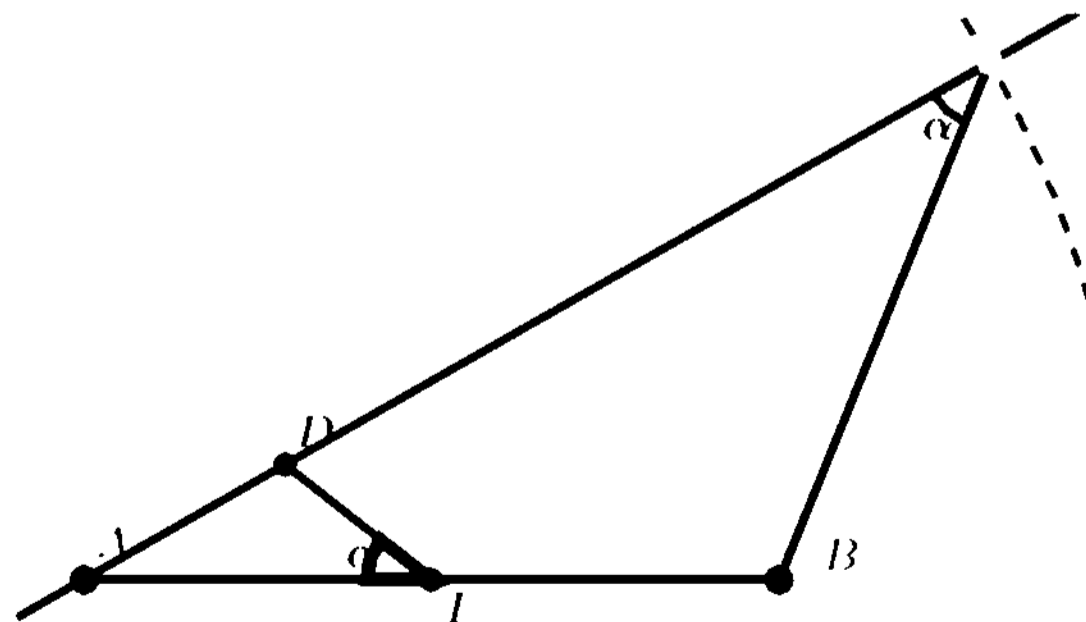
On en déduit l'égalité des produits en croix :

$$HB \times HC = HA \times HA,$$

ce qu'il fallait vérifier.

Solution 21

- 1.



2. Les triangles ABC et AID ont l'angle \widehat{BAC} en commun, ainsi que $\alpha := \widehat{BCA}$. Les triangles ABC et AID sont donc semblables.

3. On écrit le tableau de correspondance entre les sommets :

ABC	A	B	C
AID	A	D	I

Soit k le rapport de la similitude qui transforme AID en ABC . On a

$$k = \frac{AC}{AI} = \frac{3}{2} \frac{AB}{AI} = \frac{3}{2} \times 2 = 3.$$

On en déduit que l'aire de ABC égale $k^2 = 9$ fois l'aire de AID , ce qu'il fallait démontrer.

Solution 22

1. On a $OA = r = OB$ donc O appartient à la médiatrice de $[AB]$. De même, $O'A = r' = O'B$ donc O' appartient à la médiatrice de $[AB]$. Donc la droite (OO') est la médiatrice de $[AB]$.
2. Dans le cercle \mathcal{C} , d'après le théorème de l'angle au centre, (24 page 154 du cours de seconde), on a $\widehat{AOB} = \widehat{AMB}$. Dans le triangle AOB isocèle en O , la médiatrice de $[AB]$ est aussi bissectrice. Donc $\widehat{AOB} = 2\widehat{AOO'}$, ce qui permet de conclure.
3. *Mutatis mutandis* on a $\widehat{AM'B} = \widehat{AO'O}$.

Les triangles OAO' et MAM' ont donc les mêmes angles et sont donc des triangles semblables.

4. On écrit le tableau de correspondance entre les sommets :

MAM'	M	A	M'
OAO'	O	A	O'

Soit k le rapport de la similitude qui transforme OAO' en MAM' . On a

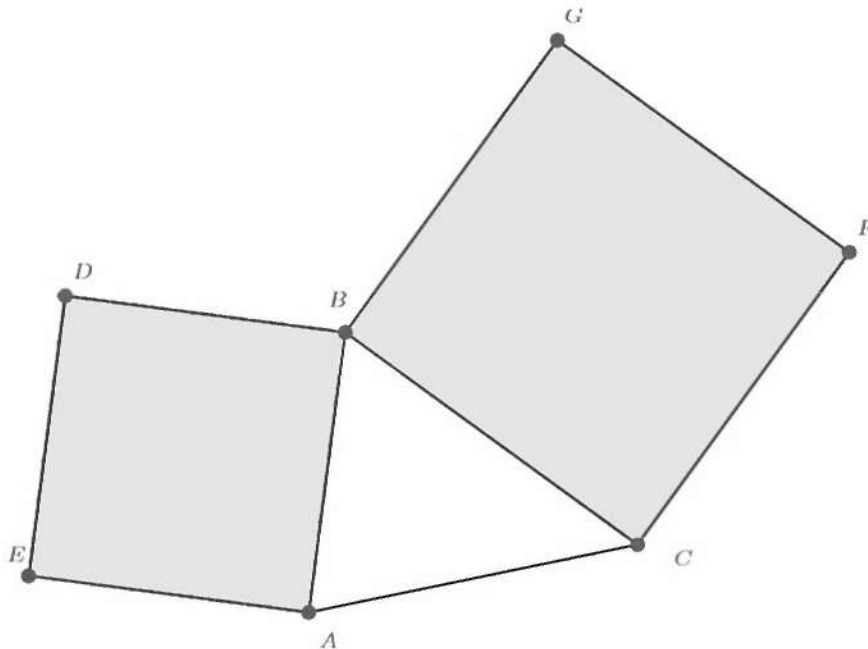
$$k = \frac{MA}{OA} = \frac{AM'}{AO'} \left(= \frac{MM'}{OO'} \right).$$

L'égalité des produits en croix donne $MA \times AO' = OA \times AM'$. Or $AO = r$ et $AO' = r'$, donc

$$\frac{AM}{AM'} = \frac{r}{r'}$$

Solution 23

1. On a $\widehat{CBD} = \widehat{CBA} + \widehat{ABD} = \widehat{CBA} + \frac{\pi}{2}$. De même $\widehat{ABF} = \widehat{ABC} + \widehat{CBF} = \widehat{ABC} + \frac{\pi}{2}$. On a donc bien $\widehat{CBD} = \widehat{ABF}$.
2. Les triangles BCD et ABF ont des côtés homologues égaux qui encadrent des angles égaux. D'après le deuxième cas d'isométrie (théorème 25) BCD et ABF sont isométriques.
3. On conclut que les troisièmes côtés sont de même longueur, soit $AF = DC$.

**Remarque 6.**

La rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$ permet d'aller plus vite. On a :

$$r(C) = F, r(D) = A \text{ et } r(B) = B.$$

Donc les triangles CDB et FAB sont isométriques, on a les égalités $\widehat{CBD} = \widehat{FBA}$ et $CD = FA$. On peut même ajouter que les droites (CD) et (FA) font entre elles un angle égal à l'angle de la rotation, c'est-à-dire qu'elles sont perpendiculaires.

Solution 24

Les angles $\widehat{BIB'}$ et $\widehat{CIC'}$ sont opposés par le sommet, donc égaux. Les angles $\widehat{BB'I}$ et $\widehat{CC'I}$ sont droits donc égaux. Donc les triangles IBB' et ICC' sont semblables.

Comme les côtés homologues $[IB]$ et $[IB]$ ont même longueur, IBB' et ICC' sont isométriques.

Pour démontrer que $BB'CC'$ est un parallélogramme, on a tout, sauf montrer que $BB'CC'$ n'est pas croisé, ce qui est toujours un peu délicat. On va oublier tout ce qui précède et repartir à zéro et tout faire d'un coup.

Soit s la symétrie par rapport à I . On a $s(B) = C$ puisque I est le milieu de $[BC]$. Le point $s(B')$ appartient à la droite (BI) . L'image par s de la droite (BB') est une droite parallèle à (BB') passant par C . C'est donc d'une part la droite perpendiculaire à $(B'I)$ passant par C et d'autre part la droite $(s(B)s(B'))$. On en déduit que $s(B') = C'$ puis que IBB' et ICC' sont isométriques comme images l'une de l'autre par l'isométrie s .

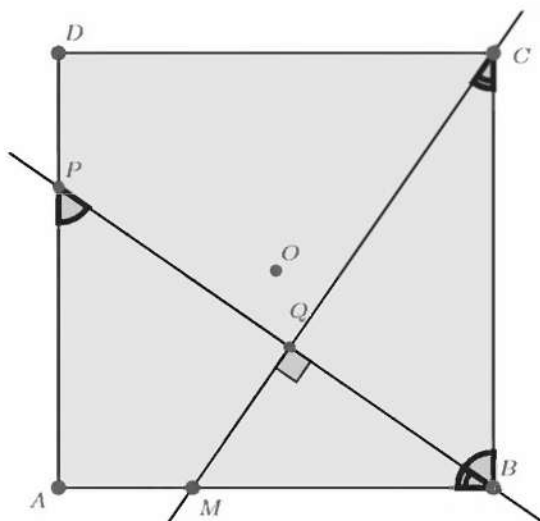
Enfin I est le milieu de $[B'C']$ donc $BB'CC'$ est un parallélogramme.

Solution 25

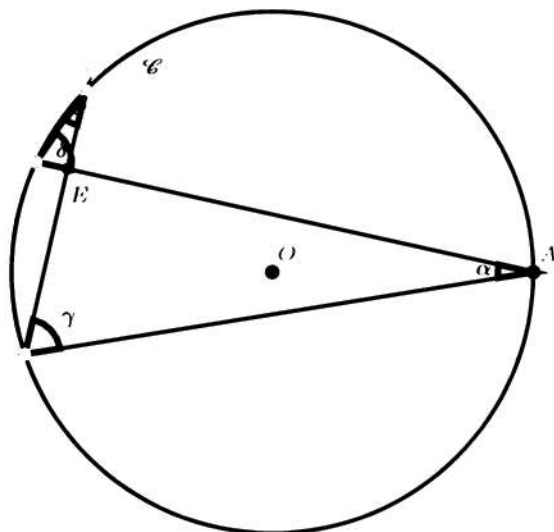
- (a) Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires. Donc $\widehat{BCM} + \widehat{CBP} = \frac{\pi}{2}$.
En regardant au point B , on a $\widehat{ABP} + \widehat{CBP} = \frac{\pi}{2}$.

On en déduit que $\widehat{BCM} = \widehat{ABP}$.

- (b) Les triangles MCB et ABP ont les mêmes angles, dont un droit et $\widehat{BCM} = \widehat{ABP}$. Ils sont donc semblables. De plus les côtés homologues $[BC]$ et $[AB]$ ont la même longueur (le côté du carré). Donc MCB et ABP sont isométriques.
- 2. (a) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (dans le sens direct si $ABCD$ est un carré dans le sens direct). On a alors $r(O) = O$ et $r(A) = B$. On aussi $r(D) = A$. Par conservation des alignements et des barycentres par l'isométrie r . Le point $r(P)$ appartient au segment $[AB]$. Comme on a égalités entre les distances AP et $Br(P)$, et $AP = BM$ puisque MCB et ABP sont isométriques. On en déduit $M = r(P)$. Donc les triangles OMB et OPA sont isométriques via l'isométrie r .
- (b) On a $\widehat{POM} = \frac{\pi}{2}$ (angle de la rotation, et $OP = OM$ par conservation des distances par l'isométrie r).



Solution 26



Dans le cercle \mathcal{C} , l'angle \widehat{DBC} intercepte le même arc \widehat{DC} que l'angle \widehat{DAC} . D'après le théorème de l'angle inscrit (théorème 25 page 155 du cours de seconde) on a $\widehat{DBC} = \widehat{DAC}$.

Par ailleurs les angles \widehat{DEB} et \widehat{AEC} , opposés par le sommet, sont égaux (théorème 5 page 141 du cours de seconde).

Les triangles DBE et ACE ayant les mêmes angles, sont semblables.

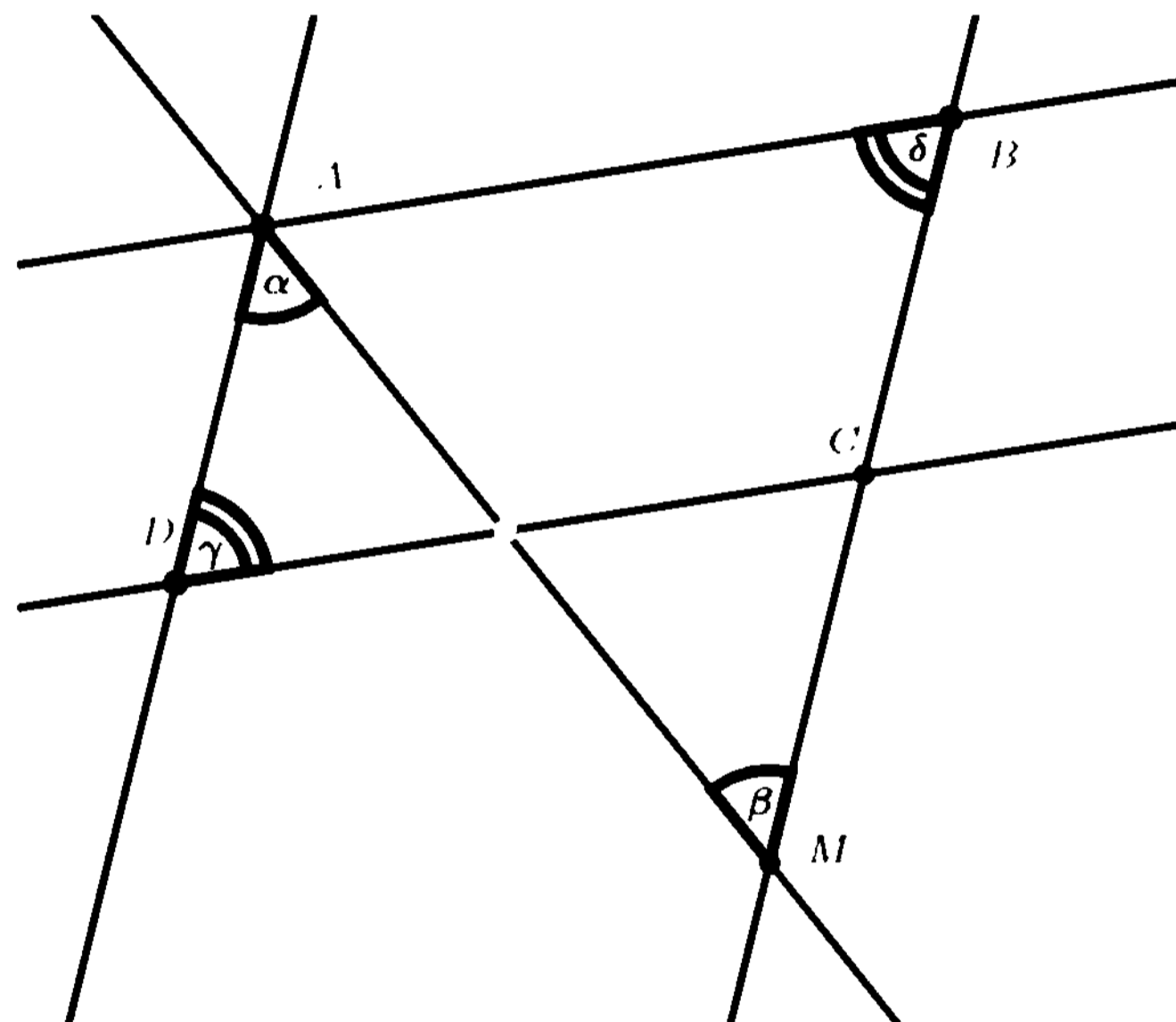
Solution 27

D'après le théorème de l'angle inscrit, les angles \widehat{IOB} et \widehat{CAB} sont égaux.

De ce fait, les triangles rectangles IOB et HAB sont semblables.

On a donc en particulier $\frac{OB}{AB} = \frac{IB}{HB}$ soit $\frac{r}{c} = \frac{a/2}{h}$ ce qui donne $\mathcal{A} = \frac{bh}{2} = \frac{abc}{4r}$.

Solution 28



1. Les angles opposés $\gamma := \widehat{ADC}$ et $\delta := \widehat{ABC}$ du parallélogramme $ABCD$ sont égaux.
La droite (AN) coupe les droites parallèles (AD) et (BC) suivant des angles alternes-internes égaux.
Donc $\widehat{DAN} = \widehat{AMB}$.
Les triangles ADN et ABM ont les mêmes angles. Ce sont donc des triangles semblables.
2. Le tableau suivant donne les points homologues, déterminés grâce aux angles égaux :

ABM	M	B	A
ADN	A	D	N

Soit k le rapport de la similitude qui transforme ADN en ABM . On a

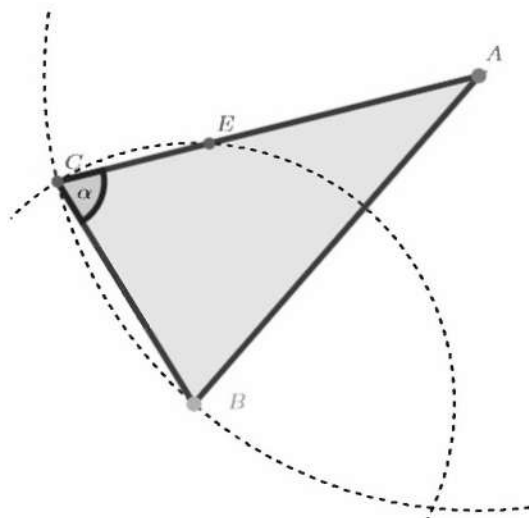
$$k = \frac{AB}{ND} = \frac{MB}{AD} \left(= \frac{AM}{NA} \right).$$

On en déduit l'égalité des produits en croix :

$$ND \times MB = AB \times AD,$$

ce qu'il fallait vérifier.

Solution 29



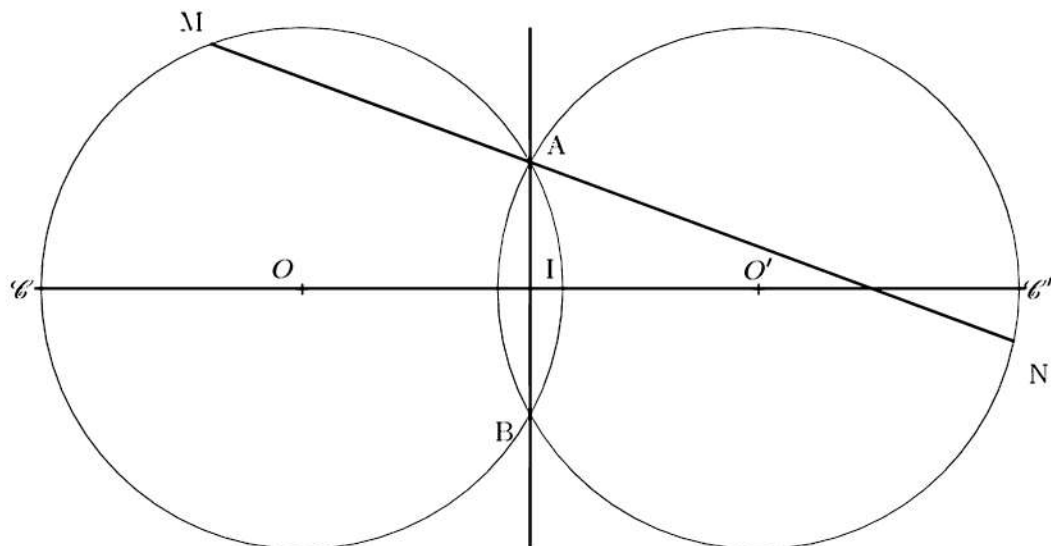
Les triangles isocèles ABC et BEC sont semblables car ils ont deux fois l'angle α en commun. Soit k le rapport de similitude. On a

$$k = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}.$$

Le rapport entre les aires des triangles BEC et ABC est donc

$$k^2 = \frac{\mathcal{A}_{BEC}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{9}{25}.$$

Solution 30



1. On a $OA = OB = O'A = O'B$. Donc $OAO'B$ est un losange donc un parallélogramme.

1. On a $OA = OB = O'A = O'B$. Donc $OAO'B$ est un losange donc un parallélogramme.
2. I est le milieu de $[AB]$, c'est donc le milieu de $[O'O]$. Donc $O' = S_I(O)$. Comme une symétrie centrale conserve les distances. $O'N' = ON = r$, où r désigne le rayon des cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' . Donc N' appartient à \mathcal{C}' . N' appartient donc à l'intersection de \mathcal{C}' et de la droite (IN) .
3. Comme I est le milieu de $[AB]$. $S_I(B) = A$. Donc l'image de $[BN]$ par S_I est le segment $[AN']$.
4. On a $OA = OM = r$ donc O est équidistant de A et de M donc O appartient à la médiatrice de $[AM]$. Donc O est sa propre image par la symétrie d'axe la médiatrice de $[AM]$.
Ainsi, par la symétrie d'axe la médiatrice de $[AM]$, le point N' du cercle \mathcal{C} est transformé en un point N'' du cercle \mathcal{C} puisque $ON' = ON''$ par conservation des longueurs.
D'autre part. (AN) est transformée en (BN') par S_I . Comme une symétrie centrale transforme une droite en une droite parallèle. (AN) est parallèle à (BN') , donc (BN') est perpendiculaire à la médiatrice de $[AM]$. Les points N'' et B sont deux points du cercle \mathcal{C} situés sur la même droite, la perpendiculaire à la médiatrice de $[AM]$ passant par N' . Donc N'' et B sont confondus car l'intersection d'une droite et d'un cercle comporte au maximum deux points.
L'image de N' par la symétrie d'axe la médiatrice de $[AM]$ est donc le point B .
5. Par la symétrie S_I , N est transformé en N' et B est transformé en A donc $NB = N'A$.
Par la symétrie d'axe la médiatrice de $[AM]$, N' est transformé en B et A est transformé en M , donc $N'A = BM$.

Donc

$$NB = N'A = BM.$$

Donc le triangle BMN est isocèle en B .

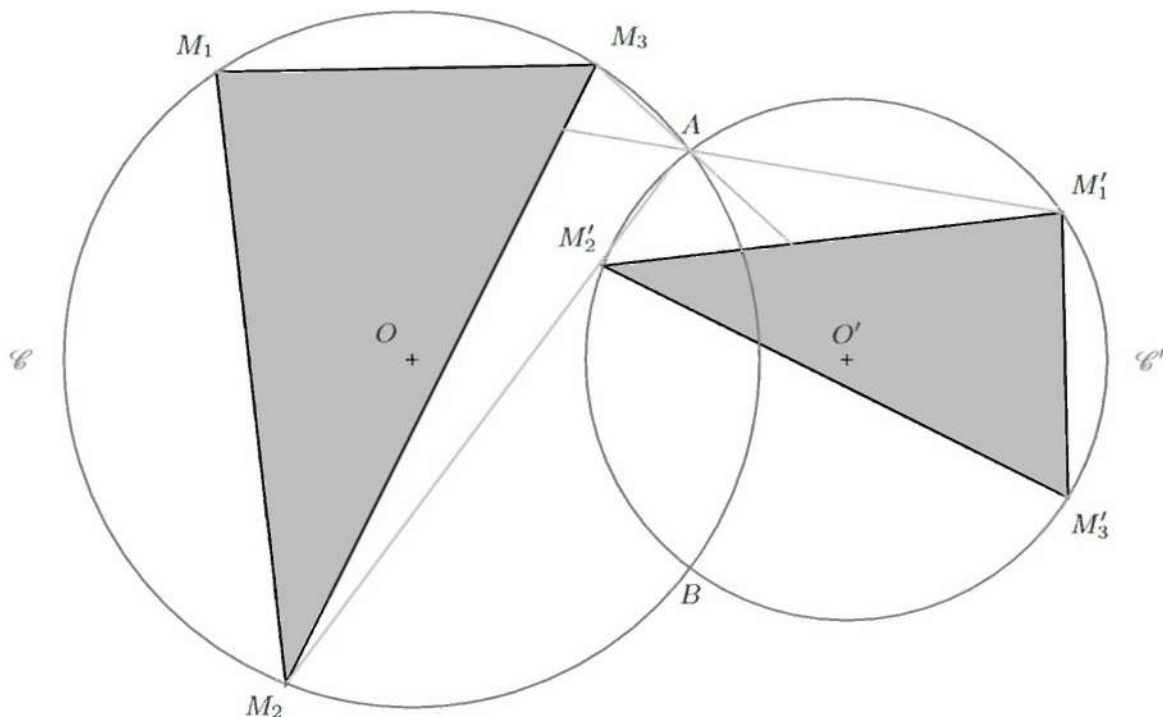
Remarque 7.

On peut supprimer les questions 3. et 4. et répondre directement à la dernière question :
Les angles \widehat{BMA} et $\widehat{BN'A}$ sont deux angles inscrits dans le cercle \mathcal{C} qui interceptent le même arc \widehat{BA} . Ils ont donc la même mesure.

Par la symétrie S_I l'angle $\widehat{BN'A}$ est transformé en angle de même mesure \widehat{ANB} .

Donc $\widehat{BMN} = \widehat{MNB}$. C'est bien dire que le triangle BMN est isocèle en B .

Solution 31



1. Les angles $\widehat{M_1M_2M_3}$ et $\widehat{M_1AM_3}$ sont inscrits dans le même cercle \mathcal{C} et interceptent le même arc $\widehat{M_1M_3}$. Ils sont donc égaux : $\widehat{M_1M_2M_3} = \widehat{M_1AM_3}$.
 Les angles $\widehat{M_1AM_3}$ et $\widehat{M'_1AM'_3}$ sont opposés par le sommet, ils sont donc égaux.
 Les angles $\widehat{M'_1AM'_3}$ et $\widehat{M'_1M'_2M'_3}$ sont inscrits dans le même cercle \mathcal{C}' et interceptent le même arc $\widehat{M'_1M'_3}$. Ils sont donc égaux : $\widehat{M'_1AM'_3} = \widehat{M'_1M'_2M'_3}$.
 En écrivant la chaîne des égalités on obtient

$$\widehat{M_1M_2M_3} = \widehat{M_1AM_3} = \widehat{M'_1AM'_3} = \widehat{M'_1M'_2M'_3}.$$

Donc $\widehat{M_1M_2M_3} = \widehat{M'_1M'_2M'_3}$.

De même on a successivement : $\widehat{M_1M_3M_2} = \widehat{M_1AM_2}$ (interceptent le même arc). $\widehat{M_1AM_2} = \widehat{M'_1AM'_2}$ (opposés par le sommet). $\widehat{M'_1AM'_2} = \widehat{M_1M_3M_2}$ (interceptent le même arc). D'où $\widehat{M_1AM_2} = \widehat{M_1M_3M_2}$.

On en déduit que les triangles $M_1M_2M_3$ et $M'_1M'_2M'_3$ sont semblables. De plus les points M'_1 , M'_2 et M'_3 sont respectivement homologues à M_1 , M_2 et M_3 .

2. Donc on a

$$\frac{M'_1M'_2}{M_1M_2} = \frac{M'_1M'_3}{M_1M_3} = \frac{M'_3M'_2}{M_3M_2} = k.$$

où k désigne le rapport de similitude.

Soit M le point diamétralement opposé à M_1 la droite (AM) recoupe \mathcal{C}' en M' . D'après la question précédente, les triangles M_1M_2M et $M'_1M'_2M'$ sont semblables, et on a

$$\frac{M'_1M'_2}{M_1M_2} = \frac{M'_1M'}{M_1M} = \frac{M'M'_2}{MM_2} = k'.$$

où k' désigne le nouveau rapport de similitude.

$$\text{Mais } k = k' = \frac{M_1 M_2'}{M_1 M_2}.$$

D'autre part $M_1 M = 2r$ et $\widehat{M_1 M_2' M}$ est un angle droit. Donc l'angle homologue $\widehat{M_1' M_2' M'}$ est aussi un angle droit. Donc $[M_1' M']$ est un diamètre de \mathcal{C}' et donc $M_1' M' = 2r'$.

Finalement $k = k' = \frac{2r'}{2r} = \frac{r'}{r}$. Ce qu'il fallait démontrer.

Remarque 8.

On peut utiliser la relation démontrée dans l'exercice 27.

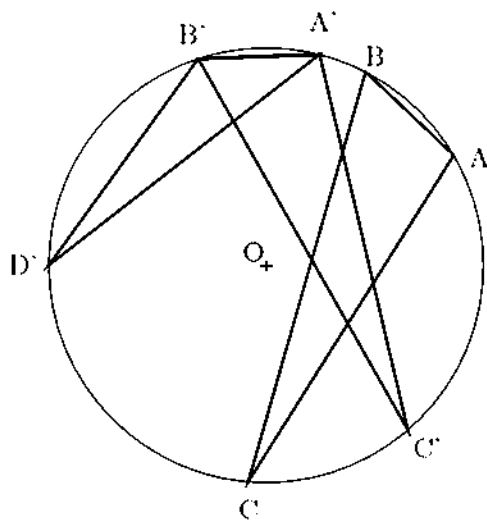
$$\mathcal{A} = \frac{abc}{4r}$$

où a, b, c désignent les côtés du triangle, \mathcal{A} son aire et r le rayon de son cercle circonscrit. Soit k le rapport de similitude, on a $a' = ka, b' = kb, c' = kc$ et $\mathcal{A}' = k^2 \mathcal{A}$.

$$\text{D'où } r' = \frac{a'b'c'}{4\mathcal{A}'} = \frac{kakbkc}{4k^2\mathcal{A}} = \frac{k^3 abc}{k^2 4\mathcal{A}} = k \frac{abc}{4\mathcal{A}} = kr.$$

D'où $k = \frac{r'}{r}$. Ce qu'il fallait démontrer.

Solution 32

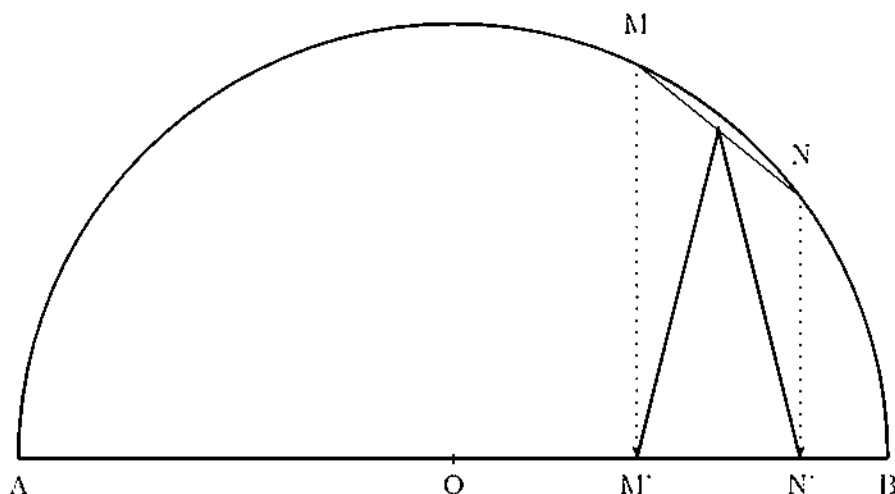


Les arcs \widehat{AB} et $\widehat{A'B'}$ ont même longueur. On considère la rotation R de centre O et d'angle $\widehat{AOA'}$. Elle transforme A en A' , B en B' car les arcs ont même mesure. On note $C' = R(C)$.

On veut démontrer que les angles \widehat{ACB} et $\widehat{A'D'B'}$ qui interceptent deux arcs de même longueur ont même mesure.

Comme la rotation R conserve la mesure des angles, $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$. Comme les angles $\widehat{A'C'B'}$ et $\widehat{A'D'B'}$ interceptent le même arc, ils ont même mesure. Donc $\widehat{ACB} = \widehat{A'D'B'}$. Ce qu'il fallait démontrer.

Solution 33



1. Soit I' le projeté orthogonal de I sur $[AB]$. $[I'I]$ est la hauteur issue de I dans le triangle $M'IN'$. Comme I' est le milieu de $[M'N']$, $[I'I]$ est aussi la médiatrice de $[M'N']$. Donc le triangle $M'IN'$ est isocèle en I .
2. Dans le triangle MNP la droite (IM') passe par I , milieu de $[MN]$ et par M' , milieu de $[MP]$. Donc d'après la propriété de la droite des milieux, (IM') est parallèle à (NP) .
3. D'après l'exercice 32 tous les angles \widehat{MPN} interceptent des arcs de même longueur et sont donc égaux entre eux. Donc tous les angles $\widehat{MM'I}$ sont égaux entre eux. Donc leurs complémentaires $\widehat{N'M'I}$ sont égaux entre eux. Ils sont aussi égaux aux angles $\widehat{M'N'I}$. Donc tous les triangles $M'IN'$ restent semblables à eux-mêmes au cours du déplacement de MN autour du demi-cercle.

Remarque 9.

On se place dans le cercle trigonométrique. On appelle θ la mesure (variable) de l'angle \widehat{NOB} et α la mesure (fixe) de l'angle \widehat{MON} . On a $N(\cos \theta; \sin \theta)$ et $M(\cos(\theta + \alpha); \sin(\theta + \alpha))$

donc $I \left(\frac{\cos(\theta + \alpha) + \cos \theta}{2}; \frac{\sin(\theta + \alpha) + \sin \theta}{2} \right)$.

On vient de démontrer que $\tan \widehat{N'M'I} = \frac{M'I'}{I'I'} = \frac{\cos \theta - \cos(\theta + \alpha)}{\sin \theta + \sin(\theta + \alpha)}$ ne dépend pas de θ , un résultat qui est loin d'être évident. (Souvenez-vous de la solution 25 page 259 du cours de première)

Solution 34

1. Les triangles ABD et ADE ont le côté $[AD]$ en commun. Il est homologue à lui-même. Comme AB et AD sont deux rayons du même cercle, les côtés $[AB]$ et $[AD]$ ont même longueur et sont homologues. Comme (AD) est bissectrice de \widehat{BAE} , les angles \widehat{BAD} et \widehat{DAE} sont égaux. Les triangles ABD et ADE ont chacun deux côtés homologues respectivement de même longueur encadrant des angles de même mesure. ABD et ADE sont donc isométriques.
2. Comme les triangles ABD et ADE sont isométriques, on a l'égalité des longueurs des côtés homologues $[BD]$ et $[DE]$, soit $BD = DE$. Autrement dit le triangle BDE est isocèle en D .

Solution 35

1. Les triangles AMQ et APN ont l'angle en A en commun, de plus angles \widehat{MQP} et \widehat{MNP} sont inscrits dans le même cercle et interceptent le même arc \widehat{MP} . Ils sont donc égaux.

Les deux triangles AMQ et APN ont chacun deux angles homologues égaux, donc trois angles homologues égaux. Ils sont donc semblables.

2. • Les points N et Q sont homologues.
 • Les points P et M sont homologues.
 • Le point A est homologue à lui-même.
 On a donc l'égalité des trois quotients

$$\frac{AN}{AQ} = \frac{AP}{AM} = \frac{NP}{MQ}.$$

De la première égalité on obtient bien

$$AN \times AM = AP \times AQ.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Remarque 10.

On a redémontré le théorème 21 page 286 du cours de première (puissance d'un point par rapport à un cercle)

3. (a) Dans le cas où la droite (AP) passe par O on a (lorsque A est à l'extérieur du cercle) $AP = AO - R$ et $AQ = AO + R$, d'où $AP \times AQ = (AO - R)(AO + R) = AO^2 - R^2$.

(b) On a $AC = 6\sqrt{2}$ d'où $AO = 3\sqrt{2}$. On a $R = 3$. Enfin on appelle I le milieu de $[DC]$, $AI^2 = AD^2 + DI^2 = 6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45$, d'où $AI = 3\sqrt{5}$.

D'après la question précédente, $AM \times AI = AO^2 - R^2 = 18 - 9 = 9$. Donc $AM = \frac{9}{AI} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Solution 36

1. Les triangles $HA'B$ et $HB'A$ ont chacun un angle droit et les angles $\widehat{AIB'}$ et $\widehat{BIA'}$ qui sont égaux car opposés par le sommet. Les triangles $HA'B$ et $HB'A$ ont chacun deux angles homologues égaux, donc trois angles homologues égaux. Ils sont donc semblables.

- Les points A et B sont homologues.
- Les points B' et A' sont homologues.
- Le point H est homologue à lui-même.

On a donc l'égalité des trois quotients

$$\frac{HA}{HB} = \frac{HB'}{HA'} = \frac{AB'}{BA'}.$$

De la première égalité on obtient bien

$$HA \times HA' = HB \times HB'.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

2. • La droite (AA') est la hauteur issue de H du triangle HBC .

• La droite (AB') est la hauteur issue de B du triangle HBC .

Ces deux hauteurs se coupent en A : A est l'orthocentre du triangle HBC .

A' est le pied de la hauteur issue de H du triangle HBC . B' est le pied de la hauteur issue de C du triangle HBC . D'après le résultat de la question 1, appliqué au triangle HBC , A et H échangent leurs rôles, A' et B' conservent leurs rôles de pieds des hauteurs. B et C échangent leurs rôles, donc on a

$$AH \times AA' = AC \times AB'.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Solution 37

La droite (BI) est bissectrice de l'angle \widehat{ABC} donc $\widehat{CBI} = \widehat{IBD}$.

La sécante (BI) coupe les deux droites parallèles (BC) et (DE) suivant des angles alternes-internes égaux. Donc $\widehat{CBI} = \widehat{BID}$.

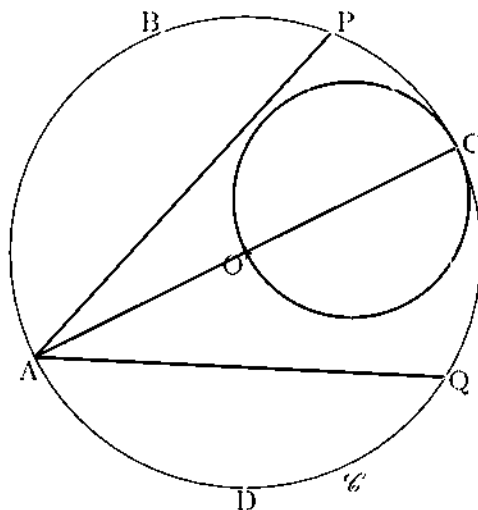
En suivant la chaîne des égalités, on obtient $\widehat{IBD} = \widehat{BID}$. C'est bien dire que le triangle BDI est isocèle en D .

De même la droite (CI) est bissectrice de l'angle \widehat{ACB} donc $\widehat{BCI} = \widehat{ICE}$.

La sécante (CI) coupe les deux droites parallèles (BC) et (DE) suivant des angles alternes-internes égaux. Donc $\widehat{BCI} = \widehat{CIE}$.

En suivant la chaîne des égalités, on obtient $\widehat{ICE} = \widehat{CIE}$. C'est bien dire que le triangle CIE est isocèle en E .

Solution 38



1. Les deux angles \widehat{DAP} et \widehat{DCP} sont deux angles inscrits dans le cercle \mathcal{C} qui interceptent le même arc \widehat{DP} . Ils ont donc la même mesure.

De même, les deux angles \widehat{PAC} et \widehat{PDC} sont deux angles inscrits dans le cercle \mathcal{C} qui interceptent le même arc \widehat{PC} . Ils ont donc la même mesure.

2. Maintenant on utilise le fait que (AP) est la bissectrice de l'angle \widehat{CAD} . Les angles \widehat{DAP} et \widehat{PAC} sont donc égaux. D'après la question précédente, les quatre angles \widehat{DAP} , \widehat{DCP} , \widehat{PAC} et \widehat{PDC} sont égaux. De l'égalité $\widehat{DCP} = \widehat{PDC}$ on déduit que le triangle PDC est isocèle en P .

3. Les deux angles \widehat{CAQ} et \widehat{CBQ} sont deux angles inscrits dans le cercle \mathcal{C} qui interceptent le même arc \widehat{CQ} . Ils ont donc la même mesure.

De même, les deux angles \widehat{QAB} et \widehat{QCB} sont deux angles inscrits dans le cercle \mathcal{C} qui interceptent le même arc BQ . Ils ont donc la même mesure.

Maintenant on utilise le fait que (AQ) est la bissectrice de l'angle \widehat{CAB} . Les angles \widehat{CAQ} et \widehat{QAB} sont donc égaux. D'après la question précédente, les quatre angles \widehat{CAQ} , \widehat{CBQ} , \widehat{QAB} et \widehat{QCB} sont égaux. De l'égalité $\widehat{CBQ} = \widehat{QCB}$ on déduit que le triangle QCB est isocèle en Q .

4. Dans le triangle PDC est isocèle en P . $DP = CP$, donc P appartient à la médiatrice de $[CD]$. O étant le centre du cercle \mathcal{C} , on en déduit que $DO = CO$, donc O appartient à la médiatrice de $[CD]$. La médiatrice de $[CD]$ est une droite passant par O et P , c'est donc la droite (OP) . De même comme QCB est isocèle en Q , Q appartient à la médiatrice de $[BC]$, O étant le centre du cercle \mathcal{C} , O appartient à la médiatrice de $[BC]$. Donc (OQ) est la médiatrice de $[BC]$.
5. L'angle \widehat{OMC} est droit puisque M est le milieu de $[BC]$ et que O appartient à la médiatrice de $[BC]$. En particulier M appartient au cercle de diamètre $[BC]$. De même l'angle \widehat{ONC} est droit et N appartient donc aussi au cercle de diamètre $[BC]$. Les quatre points C, M, N, O appartiennent donc au cercle de diamètre $[BC]$.

Solution 39

1. Dans le triangle ABD , la droite (AC) est la médiane issue de A (les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu). La droite (DI) est la médiane issue de D . Les droites (DI) et (AC) se coupent en K qui est donc l'intersection de deux médianes de ABD . K est donc le centre de gravité de ABD .
2. Le centre de gravité d'un triangle se trouve sur chaque médiane aux deux tiers à partir du sommet. Donc $AK = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3}AC$ en appelant O le centre du rectangle $ABCD$. Dans le triangle ABC rectangle en B , d'après la propriété directe de Pythagore, $AC^2 + BC^2 = AC^2$ donc $AC^2 = L^2 + l^2$ donc $AC = \sqrt{L^2 + l^2}$ et enfin $AK = \frac{1}{3}\sqrt{L^2 + l^2}$. De même $DK = \frac{2}{3}DI$. Dans le triangle ADI rectangle en A , d'après la propriété directe de Pythagore, $AI^2 + AD^2 = DI^2$ donc $DI^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + l^2$ donc $DI = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + l^2}$ et enfin $DK = \frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + l^2}$.
3. En remplaçant les distances par les valeurs littérales,

$$\begin{aligned} AK^2 + DK^2 - AD^2 &= \frac{1}{9}(L^2 + l^2) + \frac{4}{9}\left(\left(\frac{L}{2}\right)^2 + l^2\right) - l^2 \\ &= \frac{1}{9}L^2 + \frac{1}{9}l^2 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{4}L^2 + \frac{4}{9}l^2 - l^2 \\ &= \frac{1}{9}L^2 + \frac{1}{9}l^2 \frac{1}{9}L^2 + \frac{4}{9}l^2 - \frac{9}{9}l^2 \\ &= \frac{2}{9}L^2 - \frac{4}{9}l^2 \\ &= \frac{2}{9}(L^2 - 2l^2). \end{aligned}$$
4. D'après la réciproque de Pythagore, le triangle DKA est rectangle en K lorsque $AK^2 + DK^2 - AD^2 = 0$, soit d'après la question précédente lorsque $\frac{2}{9}(L^2 - 2l^2) = 0$ soit $L^2 - 2l^2 = 0$ soit $L^2 = 2l^2$ soit $\left(\frac{L}{l}\right)^2 = 2$ soit enfin $\frac{L}{l} = \sqrt{2}$ puisqu'un quotient de longueurs est positif.
5. La réponse est non, car $L = 297$ mm et $l = 210$ mm. Le quotient $\frac{L}{l}$ vaut donc 1.41428 à 10^{-5} près

par défaut alors que $\sqrt{2} = 1.41422$ à 10^{-5} près par excès.

Remarque 11.

Le théorème d'Al Kashi page 281 dans le cours de première permet de calculer le cosinus de l'angle en K et on trouve $\cos \widehat{K} = 4,81 \times 10^{-5}$ (à 10^{-8} près) ce qui donne $\widehat{K} = 89,997^\circ$ à 10^{-3} près ce qui donne une différence de l'ordre de $10''$ avec l'angle droit.

La réponse est oui, car par définition du format A4 le rapport $\frac{L}{l}$ (qui s'appelle format en papeterie) est exactement $\sqrt{2}$. Les valeurs 297 et 210 ne sont que des valeurs approchées des valeurs théoriques.

La réponse est non, car pour des raisons de fabrication, les valeurs théoriques ne sont pas obtenues exactement et d'ailleurs les bords de la feuille ne sont pas un rectangle non plus si l'on va par là ...

Solution 40 (Descendu du grenier (Excuse my dust))

1. Les triangles ACH et BCK sont semblables car ils ont un angle commun \widehat{ACB} et un angle droit chacun.

De ce fait leurs longueurs homologues sont proportionnelles :

triangle	angle droit	\widehat{ACB}	
ACH	$AC = 65$	AH	CH
BCK	$BC = 52$	BK	CK
Somme	$65 + 52 = 117$	90	

On obtient la colonne de AH et CK en multipliant la colonne de AC et BC par $\frac{90}{117} = \frac{10}{13}$.

Soit $AH = 65 \times \frac{10}{13} = 50$ cm et $BK = 52 \times \frac{10}{13} = 40$ cm.

2. • Tracer $[AC]$ (6.5 cm, 65 cm si vous avez la place).
 • Tracer le cercle de diamètre $[AC]$.
 • Tracer le cercle de centre A et de rayon 5 cm). Il recoupe le précédent en deux points. On nomme H l'un d'entre eux.
 • Placer B sur (CH) à 5,2 cm de C .

Solution 41 (Le théorème de Ptolémée)

1. Les angles \widehat{BAE} et \widehat{CAD} sont égaux par construction. Les angles inscrits $\widehat{ABE} = \widehat{ADE}$ et $\widehat{ACD} = \widehat{ADE}$ interceptent le même arc \widehat{AD} . Ils sont donc égaux. Ayant deux paires d'angles égaux, les triangles BEA et CDA sont semblables.
 2. On peut dresser le tableau des sommets homologues :

BEA	A	B	E
CDA	A	C	D

On en déduit l'égalité des rapports première ligne/deuxième ligne : $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}$.
 On en déduit l'égalité des produits en croix : $AB \times CD = AC \times BE$.

3. Les angles inscrits $\widehat{ADB} = \widehat{ADE}$ et \widehat{ACB} interceptent le même arc \widehat{AB} . Ils sont donc égaux.
 Les angles $\widehat{DAE} = \widehat{DAC} + \widehat{CAE}$ et $\widehat{CAB} = \widehat{EAB} + \widehat{CAE}$ sont égaux par construction de E . Ayant deux paires d'angles égaux, les triangles AED et ABC sont semblables.

On peut dresser le tableau des sommets homologues :

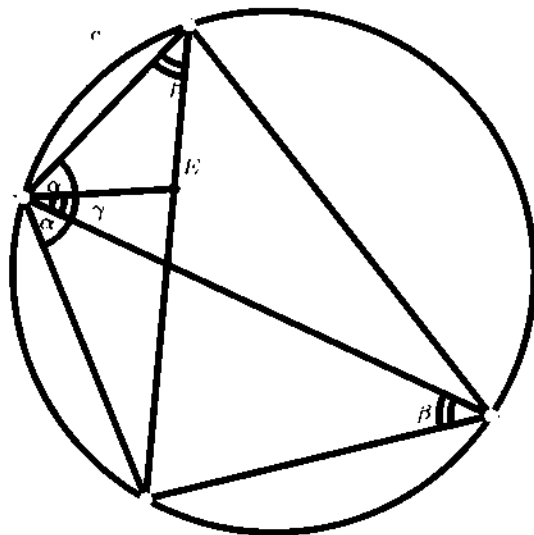
AED	A	D	E
ABC	A	C	B

On en déduit l'égalité des rapports première ligne/deuxième ligne : $\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CB}$.

On en déduit l'égalité des produits en croix : $AD \times CB = AC \times DE$.

4. En additionnant les deux égalités on trouve $AC \times (BE + DE) = AB \times CD + AD \times CB$. En remarquant que $BE + DE = BD$ on obtient en fin de compte :

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times CB.$$



Solution 42

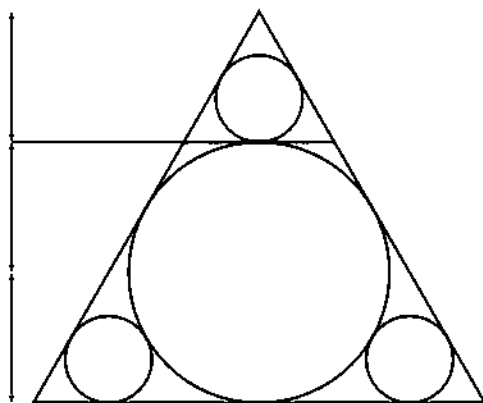
- On a (cas d'égalité de l'inégalité triangulaire) $IK = 2 + r$. De même, $JK = 2 + r$. De ce fait, le triangle IJK est isocèle en K . De ce fait, la médiane (OK) est aussi médiatrice. Donc le triangle IOK est rectangle en O .
- On a $OK = 4 - r$ et $OI = 2$. Dans le triangle IOK est rectangle en O , d'après le théorème de Pythagore on a $IK^2 = OI^2 + OK^2$. Le résultat demandé en découle simplement.
- En factorisant, on obtient $(2 + r + 4 - r)(2 + r - 4 + r) = 4$ soit $6(2r - 2) = 4$ soit $3(r - 1) = 1$ soit $r = \frac{4}{3}$.
- L'aire du grand disque est 16π , les disques de centres I et J mesurent 4π chacun et celui de centre K mesure $\pi r^2 = \frac{16\pi}{9}$. Ainsi l'aire du domaine colorié en gris foncé mesure

$$16\pi - 8\pi - \frac{16\pi}{9} = \frac{56\pi}{9}.$$

Solution 43 (Une sangaku)

Pour fixer les idées, on prend la hauteur du triangle équilatéral égale à 1.

Dans un triangle équilatéral les bissectrices sont aussi des médiatrices. Donc le centre du cercle inscrit est aussi le centre de gravité. Il est situé à $\frac{2}{3}$ du sommet donc à $\frac{1}{3}$ de la base et le rayon du cercle inscrit, c'est-à-dire le rayon du disque gris.



En traçant une horizontale à l'ordonnée $\frac{2}{3}$ on obtient un deuxième triangle équilatéral de hauteur $\frac{1}{3}$. Le disque vert du haut a un rayon dans le même rapport, donc égal à $\frac{1}{9}$. Le rapport entre l'aire du disque rouge et celle d'un disque vert est donc $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$. Comme il y a trois disques verts, le rapport entre l'aire en rouge et celle en vert égale donc $3 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$.

Remarque 12.

Le mot « sangaku » n'est pas dans notre dictionnaire. Les mots japonais utilisés dans la langue française sont, à notre connaissance, du masculin (il n'y a pas de genre en japonais). Comme « sangaku » apparaît au féminin sur les sites en français, nous leur avons gardé ce genre.

Solution 44 (Sangaku)

1. Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires.

La droite (AB) coupe les droites parallèles suivant des angles correspondants égaux : $\widehat{HBE} = \widehat{FEA}$.
Donc les trois triangles rectangles ABC , HBE et FEA sont semblables.

La droite (AC) coupe les droites parallèles suivant des angles correspondants égaux : $\widehat{GCF} = \widehat{EFA}$.
Donc les trois triangles rectangles ABC , FGC et FEA sont semblables.

Les quatre triangles ABC , HBE , FGC et FEA sont donc semblables.

2. Les cercles inscrits étant dans le même rapport que les rapports de similitude, on a un tableau de proportionnalité :

triangle	ABC	BHE	EAF	FGC
hypoténuse	AC	BE	EF	FC
rayon du cercle inscrit		R_1	R_2	R_3

On en déduit que $\frac{R_1}{R_2} = \frac{BE}{EF} = \frac{\frac{AB}{2}}{\frac{BC}{2}} = \frac{AB}{BC}$.

et que $\frac{R_3}{R_2} = \frac{FC}{EF} = \frac{\frac{AC}{2}}{\frac{BC}{2}} = \frac{AC}{BC}$.

3. On en déduit.

$$\begin{aligned} \frac{R_1^2 + R_3^2}{R_2^2} &= \frac{R_1^2}{R_2^2} + \frac{R_3^2}{R_2^2} \\ &= \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{R_3}{R_2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \\ &= \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} \\ &= \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} \\ &= \frac{BC^2}{BC^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

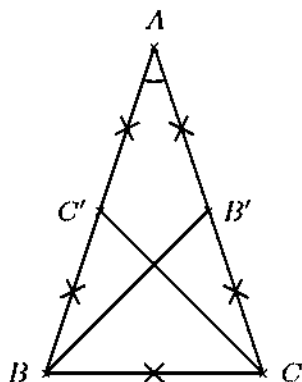
D'où

$$R_1^2 + R_3^2 = R_2^2.$$

Solution 45 (isométriques)

- $\widehat{B'AB} = \widehat{C'AC}$ (angle commun au deux triangles)
- $AB = AC$ (ABC triangle isocèle en A)
- $AB' = AC'$ (car $AB' = AB/2 = AC/2 = AC'$)

Les triangles $AB'B$ et $AC'C$ ont un angle de même mesure compris entre deux côtés respectivement de même longueur. Ils sont donc isométriques.



Solution 46

1. Le point M est l'image de B par la similitude directe de centre A , de rapport $\sqrt{2}/2$ et d'angle $\pi/4$.

L'expression analytique complexe de cette similitude est $z' - a = \frac{1+i}{2}(z - a)$.

donc $m = \frac{1+i}{2}(b - a) + a = \frac{1+i}{2}b + \frac{1-i}{2}a$. *Mutatis mutandis*, on obtient $n = \frac{1+i}{2}c + \frac{1-i}{2}b$.

$p = \frac{1+i}{2}d + \frac{1-i}{2}c$ et $q = \frac{1+i}{2}a + \frac{1-i}{2}d$.

2. D'après la question précédente,

$$p - m = \frac{1+i}{2}(d - b) + \frac{1-i}{2}(c - a) \text{ et } q - n = \frac{1+i}{2}(a - c) + \frac{1-i}{2}(d - b)$$

Or $\frac{1+i}{1-i} = -i$ et $\frac{1-i}{1+i} = i$. Donc

$$p - m = i \frac{1-i}{2}(d - b) - i \frac{1+i}{2}(c - a) = i \left(\frac{1-i}{2}(d - b) + \frac{1+i}{2}(a - c) \right) = i(q - n).$$

Traduction géométrique : $MP = NQ$ et que les vecteurs \overrightarrow{MP} et \overrightarrow{NQ} sont orthogonaux.

3. (a) On a $k = \frac{a+c}{2}$ et $\ell = \frac{b+d}{2}$. Par ailleurs, $m+p = \frac{1+i}{2}(b+d) + \frac{1-i}{2}(a+c) = (1+i)\ell + (1-i)k$.
De même, $n+q = (1+i)k + (1-i)\ell$.

(b) Dire que $MNPQ$ est un parallélogramme, c'est dire que U et V sont confondus, c'est-à-dire que $m+p = n+q$ soit $(1+i)\ell + (1-i)k = (1+i)k + (1-i)\ell$ soit $2i\ell = 2ik$ soit $k = \ell$ soit $K = L$ c'est-à-dire $ABCD$ est un parallélogramme.

(c) On a $u = \frac{m+p}{2}$ et $v = \frac{n+q}{2}$.

Donc $u+v = \frac{m+n+p+q}{2} = \frac{1}{2}((1+i)\ell + (1-i)k + (1+i)k + (1-i)\ell) = k + \ell$. De ce fait, le quadrilatère $ULVK$ est un parallélogramme (réduit à un point si $ABCD$ est un parallélogramme).

De même, $u-v = \frac{m-n+p-q}{2} = \frac{1}{2}((1+i)\ell + (1-i)k - (1+i)k - (1-i)\ell) = -ik + i\ell = i(\ell - k)$. La traduction géométrique est : $UV = LK$ (les diagonales ont même longueur, donc $ULVK$ est un rectangle), et se coupent à angle droit. De ce fait $ULVK$ est un carré (réduit à un point si $ABCD$ est un parallélogramme).

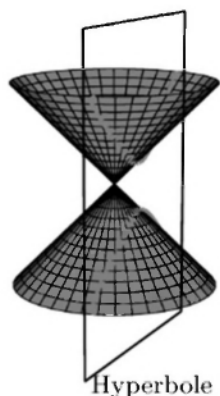
Chapitre 8

Coniques

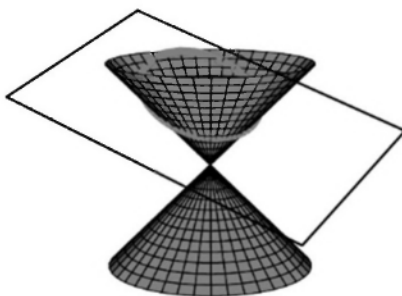
Sommaire

8.1	Définitions et premières propriétés	362
8.2	Étude de la parabole : $e = 1$	364
8.3	Étude de l'ellipse : $0 < e < 1$	367
8.4	Étude de l'hyperbole : $1 < e$	372
8.5	Définition bifocale de l'ellipse et de l'hyperbole	377
8.6	Courbes algébriques dans le plan	379
8.7	Intersection d'un cône et d'un plan	384
8.8	Exercices	386
8.9	Solutions	398

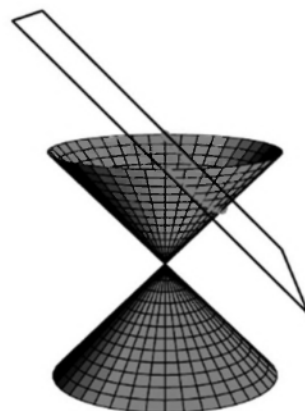
Pour bien aborder ce chapitre



Hyperbole



Ellipse



Parabole

Les coniques sont des courbes du plan connues depuis les Grecs. Elles ont été étudiées par Menechme vers 400 ans avant J.C, puis par Archimède, Apollonius de Perge... Ils les voyaient comme les intersections d'un cône et d'un plan et les avaient baptisées « sections coniques ». Suivant l'angle d'inclinaison de ce plan avec l'axe du cône, on distingue différents cas (voir l'exercice 2 page 387) :

- Si cet angle est inférieur à l'angle d'ouverture du cône, on obtient une hyperbole.
- Si cet angle est supérieur à l'angle d'ouverture du cône, on obtient une ellipse.
- Si cet angle est égal à l'angle d'ouverture du cône, on obtient une parabole.

Mais d'autres situations peuvent se produire, ainsi si le plan contient le sommet du cône, l'intersection du plan et du cône peut être formé de deux droites sécantes, ou d'une seule droite, ou même seulement de ce sommet. Ces coniques sont dites dégénérées tandis que les trois premières obtenues sont dites propres.

Il existe d'autres façons d'introduire les coniques. Celle retenue dans ce cours est appelée « définition monofocale des coniques », ou « définition par foyer-directrice » (voir la définition 1). On verra, avec la « définition bifocale » (voir la définition 17) un autre moyen de définir les coniques propres.

Les coniques possèdent de nombreuses propriétés géométriques remarquables et on en étudiera quelques unes dans les exercices de ce chapitre. On les retrouve en de mains endroits dans la nature. Kepler au XVI^e siècle a compris que que les planètes décrivent des ellipses dont le soleil occupe un des deux foyers. Galilée au XVII^e siècle découvre qu'un obus tiré d'un canon décrit une trajectoire parabolique. La trajectoire d'une comète cyclique est une ellipse et celle d'une comète qui ne revient jamais est une parabole ou une hyperbole. Dans la vie courante, c'est grâce aux propriétés géométriques des paraboles que peuvent fonctionner les télescopes et les antennes paraboliques (voir l'exercice 3 page 387).

8.1 Définitions et premières propriétés

8.1.1 Définition monofocale

Notation 1.

Si A et B sont deux points du plan, on notera $d(A, B)$ la distance de A à B , c'est-à-dire la norme du vecteur \overrightarrow{AB} .

Définition 1 (Conique).

Soient \mathcal{D} une droite du plan, F un point du plan n'appartenant pas à \mathcal{D} et e un réel strictement positif. On appelle **conique de foyer F , de directrice \mathcal{D} et d'excentricité e** la courbe \mathcal{C} formée des points M du plan vérifiant :

$$d(M, F) = e d(M, \mathcal{D})$$

- Si $0 < e < 1$, on dit que \mathcal{C} est une **ellipse**.
- Si $e = 1$, on dit que \mathcal{C} est une **parabole**.
- Si $e > 1$, on dit que \mathcal{C} est une **hyperbole**.

La droite Δ passant par F et orthogonale à \mathcal{D} est appelée l'**axe focal**.

Théorème 1

L'axe focal d'une conique est un axe de symétrie de cette conique.

Démonstration 1

Soit M un point de la conique \mathcal{C} de directrice \mathcal{D} , de foyer F et d'excentricité e . Soit Δ l'axe focal de \mathcal{C} et soit M' l'image de M par la réflexion d'axe Δ . Soit H et H' les projetés orthogonaux respectifs de M et M' sur \mathcal{D} . Les droites \mathcal{D} et Δ sont perpendiculaires donc $d(M', \mathcal{D}) = H'M' = HM = d(M, \mathcal{D})$. Comme Δ est la médiatrice du segment $[MM']$ et que $F \in \Delta$, on a aussi $d(M', F) = d(M, F)$. Par conséquent $d(M', F) = d(M, F) = ed(M, \mathcal{D}) = ed(M', \mathcal{D})$ ce qui prouve que $M' \in \mathcal{C}$. \square

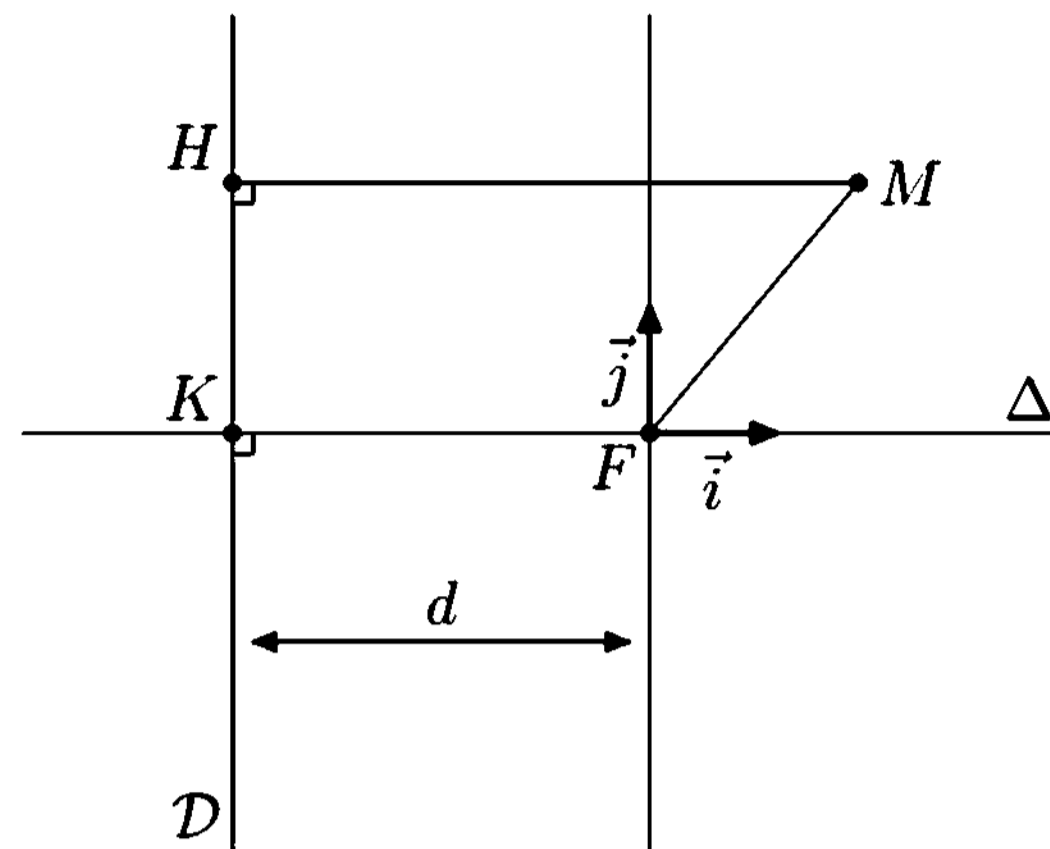
Définition 2 (Paramètre).

Soit \mathcal{C} une conique de directrice \mathcal{D} , de foyer F et d'excentricité e . Soit $d = d(F, \mathcal{D})$. Le réel $p = e d$ est appelé **paramètre** de la conique \mathcal{C} .

Remarque 1.

Le paramètre d'une conique \mathcal{C} est la distance de F à chacun des deux points de \mathcal{C} situés sur la droite passant par F et parallèle à \mathcal{D} .

8.1.2 Équation cartésienne d'une conique



Théorème 2 (Équation cartésienne d'une conique)

Soit \mathcal{C} une conique de directrice \mathcal{D} , de foyer F et d'excentricité e . Soit $d = d(F, \mathcal{D})$. Dans un repère orthonormal (F, \vec{i}, \vec{j}) choisi en sorte que \mathcal{D} ait pour équation $x = -d$ ($\iff \vec{i}$ unitaire normal à \mathcal{D} et \vec{j} unitaire directeur pour \mathcal{D}) \mathcal{C} a pour équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 = e^2(x + d)^2$$

Démonstration 2

Soit K le projeté orthogonal de F sur la directrice \mathcal{D} . On rapporte le plan au repère $\mathcal{R}(F, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{KF}}{\|\overrightarrow{KF}\|}$ et où \vec{j} est directement orthogonal à \vec{i} . Remarquons que \vec{j} dirige la directrice \mathcal{D} . Posons $d = d(F, \mathcal{D})$. La directrice, dans ce repère, admet bien comme équation cartésienne $x = -d$. Soit $M(x, y)$. On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\iff d(M, F) = e d(M, \mathcal{D}) \\ &\iff d^2(M, F) = e^2 d^2(M, \mathcal{D}) \\ &\iff x^2 + y^2 = e^2(x + d)^2 \end{aligned}$$

d'où l'équation cartésienne de la conique dans \mathcal{R} . □

Remarque 2.

L'axe focal de la conique passe par F et est dirigé par \vec{i} . Son équation dans \mathcal{R} est $y = 0$.

8.2 Étude de la parabole : $e = 1$

On s'intéresse dans ce paragraphe à une parabole \mathcal{P} de foyer F , de directrice \mathcal{D} , de paramètre $p > 0$. On considère à nouveau le repère $\mathcal{R}(F, \vec{i}, \vec{j})$ construit dans la proposition 2. Dans ce repère, une équation

de \mathcal{P} est

$$x^2 + y^2 = (x + p)^2.$$

L'axe focal Δ , passe par F , est dirigé par \vec{i} (et admet donc comme équation $y = 0$), coupe \mathcal{P} en un unique point de coordonnées $(-\frac{p}{2}, 0)$, ce qui justifie la définition suivante :

Définition 3 (Sommet d'une parabole).

On appelle **sommet** de la parabole \mathcal{P} l'unique point S d'intersection entre \mathcal{P} et son axe focal Δ . Dans le repère (F, \vec{i}, \vec{j}) , les coordonnées de S sont $(-\frac{p}{2}, 0)$.

Remarque 3.

Si K est le projeté orthogonal de F sur \mathcal{P} , S est le milieu de $[FK]$.

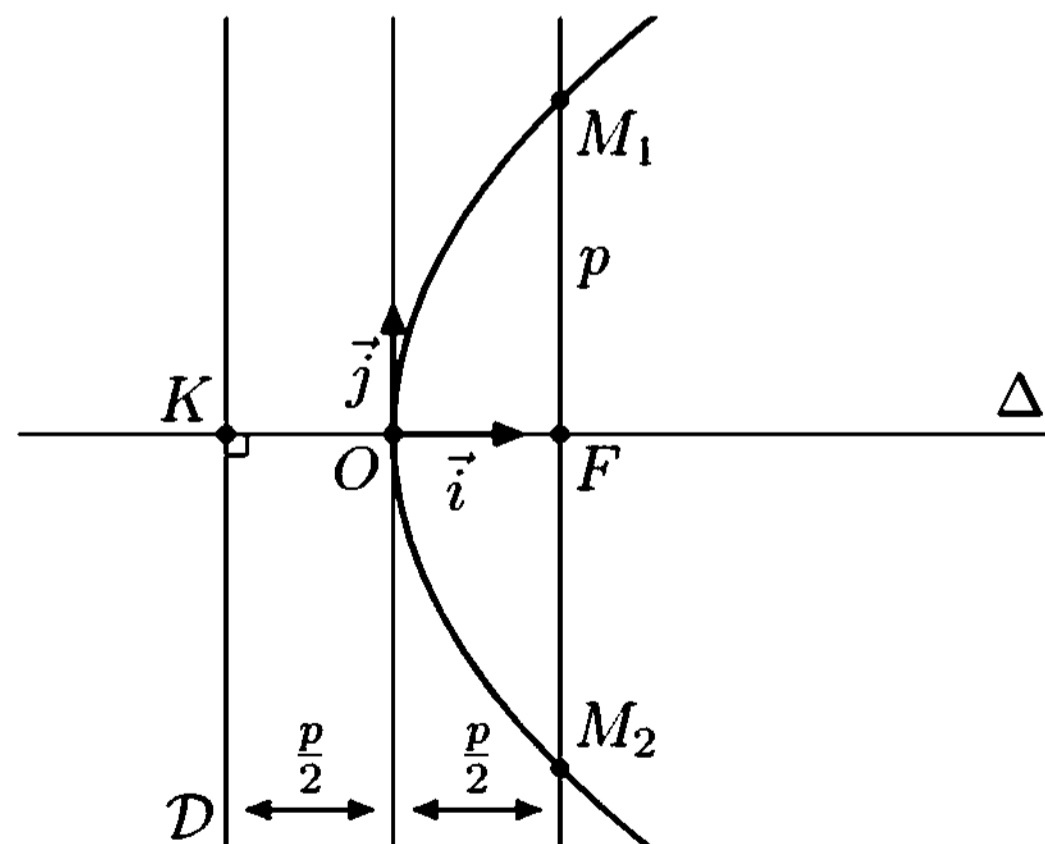
Théorème 3 (Équation réduite d'une parabole)

Il existe un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel la parabole \mathcal{P} de paramètre $p > 0$ admet pour équation caractéristique :

$$Y^2 - 2pX = 0$$

Cette équation est appelée **équation réduite** de la parabole \mathcal{P} .

Réciproquement, une courbe d'équation : $Y^2 - 2pX = 0$ dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) est une parabole de foyer $F(\frac{p}{2}, 0)$ et de directrice d'équation $\mathcal{D} : X = -\frac{p}{2}$.



Démonstration 3

\Rightarrow Soit \mathcal{P} la parabole de paramètre $p > 0$, de foyer F et de directrice \mathcal{D} . Dans le repère $\mathcal{R}(F, \vec{i}, \vec{j})$ construit dans la proposition 2, \mathcal{P} admet comme équation cartésienne $x^2 + y^2 = (x + p)^2$ soit

$$y^2 = 2px + p^2.$$

Considérons le point $O(-\frac{p}{2}, 0)$ et le repère $\mathcal{R}'(O, \vec{i}, \vec{j})$. Calculons les formules de changement de coordonnées du repère \mathcal{R} au repère \mathcal{R}' . Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R} et de coordonnées (X, Y) dans \mathcal{R}' . On a :

$$\overrightarrow{OM} = X\vec{i} + Y\vec{j}.$$

Par ailleurs :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FM} = \frac{p}{2}\vec{i} + x\vec{i} + y\vec{j} = (x + \frac{p}{2})\vec{i} + y\vec{j}.$$

Par identification, on obtient alors :

$$\begin{cases} X = x + \frac{p}{2} \\ Y = y \end{cases}.$$

L'équation de $\mathcal{P} : y^2 = 2px + p^2$ devient dans $\mathcal{R}' : Y^2 = 2pX$. Remarquons que O est le sommet de la parabole.

☐ Soit \mathcal{C} une courbe d'équation $Y^2 - 2pX = 0$ dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . Montrons que \mathcal{C} est une parabole. Soit \mathcal{D} la droite d'équation $X = -\frac{p}{2}$, $F(\frac{p}{2}, 0)$ et $M(X, Y)$ un point du plan. Montrons que $d(M, F) = d(M, \mathcal{D})$ si et seulement si $M \in \mathcal{C}$ ce qui prouvera que \mathcal{C} est une parabole \mathcal{P} de foyer F et de directrice \mathcal{D} . Remarquons que :

$$d^2(M, F) = (X - \frac{p}{2})^2 + Y^2 \text{ et } d^2(M, \mathcal{D}) = (X + \frac{p}{2})^2.$$

On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\iff d(M, F) = d(M, \mathcal{D}) \\ &\iff d^2(M, F) = d^2(M, \mathcal{D}) \\ &\iff (X - \frac{p}{2})^2 + Y^2 = (X + \frac{p}{2})^2 \\ &\iff Y^2 - 2pX = 0 \\ &\iff M \in \mathcal{C}. \end{aligned} \quad \square$$

Théorème 4 (Paramétrage de la parabole)

On peut paramétrer la parabole d'équation $Y^2 - 2pX = 0$ dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{p t^2}{2} \\ y(t) = p t \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$

Démonstration 4

Soit $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ le repère construit dans la proposition précédente. Dans ce repère une équation de \mathcal{P} est $y^2 - 2px = 0$. Soit $M(x, y)$ un point du plan. On a équivalence entre :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\iff y^2 - 2px = 0 \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R}, \quad y = p t \text{ et } x = \frac{p t^2}{2}. \end{aligned} \quad \square$$

Théorème 5 (Tangente à la parabole)

Dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère la parabole \mathcal{P} de paramètre $p > 0$ et paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{p t^2}{2} \\ y(t) = p t \end{cases} : t \in \mathbb{R}.$$

– La tangente \mathcal{T}_{M_0} à \mathcal{P} au point M_0 de \mathcal{P} de paramètre $t_0 \in \mathbb{R}$ a pour équation :

$$x - t_0 y + p \frac{t_0^2}{2} = 0$$

– La tangente \mathcal{T}_{M_0} à \mathcal{P} au point $M_0(x_0, y_0)$ a pour équation

$$y y_0 = p(x + x_0)$$

Démonstration 5

Soit \mathcal{T}_0 la tangente à \mathcal{P} au point de paramètre t_0 . Un vecteur directeur à cette tangente a pour coordonnées (pt_0, p) . Le vecteur de coordonnées $(t_0, 1)$ dirige donc \mathcal{T}_0 . Une équation cartésienne de \mathcal{T}_0 est donc

$$\begin{vmatrix} t_0 & x - x(t_0) \\ 1 & y - y(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

soit $t_0(y - pt_0) - (x - \frac{p t_0^2}{2}) = 0$ ou encore $x - t_0 y + \frac{p t_0^2}{2} = 0$. Par ailleurs, comme $x_0 = \frac{p t_0^2}{2}$ et que $y_0 = p t_0$, cette équation s'écrit encore $px - y_0 y + p x_0 = 0$. \square

Remarque 4.

La tangente à \mathcal{P} au point $M_0(x_0, y_0)$ est la médiatrice de $[FH]$ où H désigne le projeté de M_0 sur la directrice.

En effet on a $\vec{T} \begin{vmatrix} t_0 \\ 1 \end{vmatrix}$ et $\vec{FH} \begin{vmatrix} -p \\ y_0 \end{vmatrix}$. Donc $\vec{T} \cdot \vec{FH} = -pt_0 + y_0 = 0$. Donc \mathcal{T}_0 est perpendiculaire à (FH) . Comme M_0 appartient à la fois à \mathcal{T}_0 et à la médiatrice de $[FH]$, ces deux droites sont confondues.

8.3 Étude de l'ellipse : $0 < e < 1$

On considère dans tout ce paragraphe une ellipse \mathcal{E} de foyer F , de directrice \mathcal{D} et d'excentricité e ($0 < e < 1$).

Théorème 6 (Équation réduite de l'ellipse)

– Il existe un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) dans lequel \mathcal{E} a pour équation

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad 0 < b < a$$

Cette équation est appelée **équation réduite de l'ellipse** \mathcal{E} .

- **Réciproquement** : l'équation $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $0 < b < a$ est l'équation d'une ellipse de foyer

$$\boxed{F(-c, 0)} \text{ avec } \boxed{c = \sqrt{a^2 - b^2}}, \text{ de directrice } \boxed{\mathcal{D} : X = -\frac{a^2}{c}} \text{ et d'excentricité } \boxed{e = \frac{c}{a}}.$$

Démonstration 6

\Rightarrow D'après la proposition 2, il existe un repère orthonormal direct $\mathcal{R}(F, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel une équation cartésienne de \mathcal{E} est

$$x^2 + y^2 = e^2(x + d)^2 \quad (*)$$

où $d = d(F, \mathcal{D})$. On va procéder en mettant sous forme canonique (voir théorème 2 page 173 du cours de première). On a :

$$\begin{aligned} (*) &\iff (1 - e^2)x^2 - 2e^2dx + y^2 - e^2d^2 = 0 \\ &\iff (1 - e^2) \left(x^2 - \frac{2e^2d}{1 - e^2}x \right) + y^2 - e^2d^2 = 0 \\ &\iff (1 - e^2) \left(x - \frac{e^2d}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 - \frac{e^4d^2}{(1 - e^2)^2} - e^2d^2 = 0 \\ &\iff (1 - e^2) \left(x - \frac{e^2d}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 = e^2d^2 \left(1 + \frac{e^2}{1 - e^2} \right) \\ &\iff (1 - e^2) \left(x - \frac{e^2d}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 = \frac{e^2d^2}{1 - e^2} \\ &\iff \left(\frac{1 - e^2}{ed} \right)^2 \left(x - \frac{e^2d}{1 - e^2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{1 - e^2}}{ed} \right)^2 y^2 = 1 \quad (*') \end{aligned}$$

Posons alors

$$a := \frac{ed}{1 - e^2}, \quad b := \frac{ed}{\sqrt{1 - e^2}}, \quad c := \frac{e^2d}{1 - e^2} \quad \text{ct} \quad \begin{cases} X := x - c \\ Y := y \end{cases}.$$

Ces quantités sont bien définies car $0 < e < 1$. Remarquons qu'on a $a > b > 0$. Le couple (x, y) représente les coordonnées dans un repère $\mathcal{R}'(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'un point de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}(F, \vec{i}, \vec{j})$ où O est déduit de F par une translation de vecteur $\vec{u}(c, 0)$. Dans ce nouveau repère, $(*)$ s'écrit alors

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

qui est bien de la forme annoncée. On a par ailleurs bien $a^2 - b^2 = c^2$, $\frac{c}{a} = e$ et $d = \frac{b^2}{c}$. Enfin, une équation de la directrice \mathcal{D} dans \mathcal{R} étant $x = -d$, une équation de \mathcal{D} dans \mathcal{R}' est : $X + c = -d$, soit $X = -d - c$. Mais $-d - c = -\frac{b^2 + c^2}{c} = -\frac{a^2}{c}$. Une équation de \mathcal{D} dans \mathcal{R}' est donc : $X = -\frac{a^2}{c}$.

\Leftarrow Réciproquement, soit \mathcal{E} une courbe d'équation $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ dans un repère $\mathcal{R}'(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $a > b > 0$. Posons

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad e = \frac{c}{a} \text{ et } d = \frac{b^2}{c}.$$

Par identification avec l'équation $(*)'$, on reconnaît l'ellipse de foyer $F(-c, 0)$ de directrice $\mathcal{D} : X = -\frac{a^2}{c}$ et d'excentricité e . □

Théorème 7

Soit $(O: \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal dans lequel \mathcal{E} a pour équation $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $0 < b < a$.

- L'origine O est centre de symétrie de \mathcal{E} . C'est le **centre** de l'ellipse.
- OX et OY sont axes de symétrie de \mathcal{E} . OX est appelé **axe focal** ou **grand axe**. OY est appelé **axe non focal** ou **petit axe**.
- a est appelé **demi-axe focal** ou **demi-grand axe**. b est appelé **demi-axe non focal** ou **demi-petit axe**.
- Soit $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. \mathcal{E} admet deux foyers F et F' de coordonnées dans le repère $(O: \vec{i}, \vec{j})$: $F(-c, 0)$ et $F'(c, 0)$ de directrice associée d'équation, dans ce même repère : $\mathcal{D} : X = -\frac{a^2}{c}$ et $\mathcal{D}' : X = \frac{a^2}{c}$.
- L'ellipse \mathcal{E} coupe les axes du repère $(O: \vec{i}, \vec{j})$ en quatre points A, A', B, B' appelés les **sommets** de \mathcal{E} et on a : $A(-a, 0), A'(a, 0), B(0, -b), B'(0, b)$.

Théorème 8 (Paramétrage de l'ellipse)

On peut paramétrer l'ellipse d'équation $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $0 < b < a$ dans un repère orthonormal $(O: \vec{i}, \vec{j})$ par

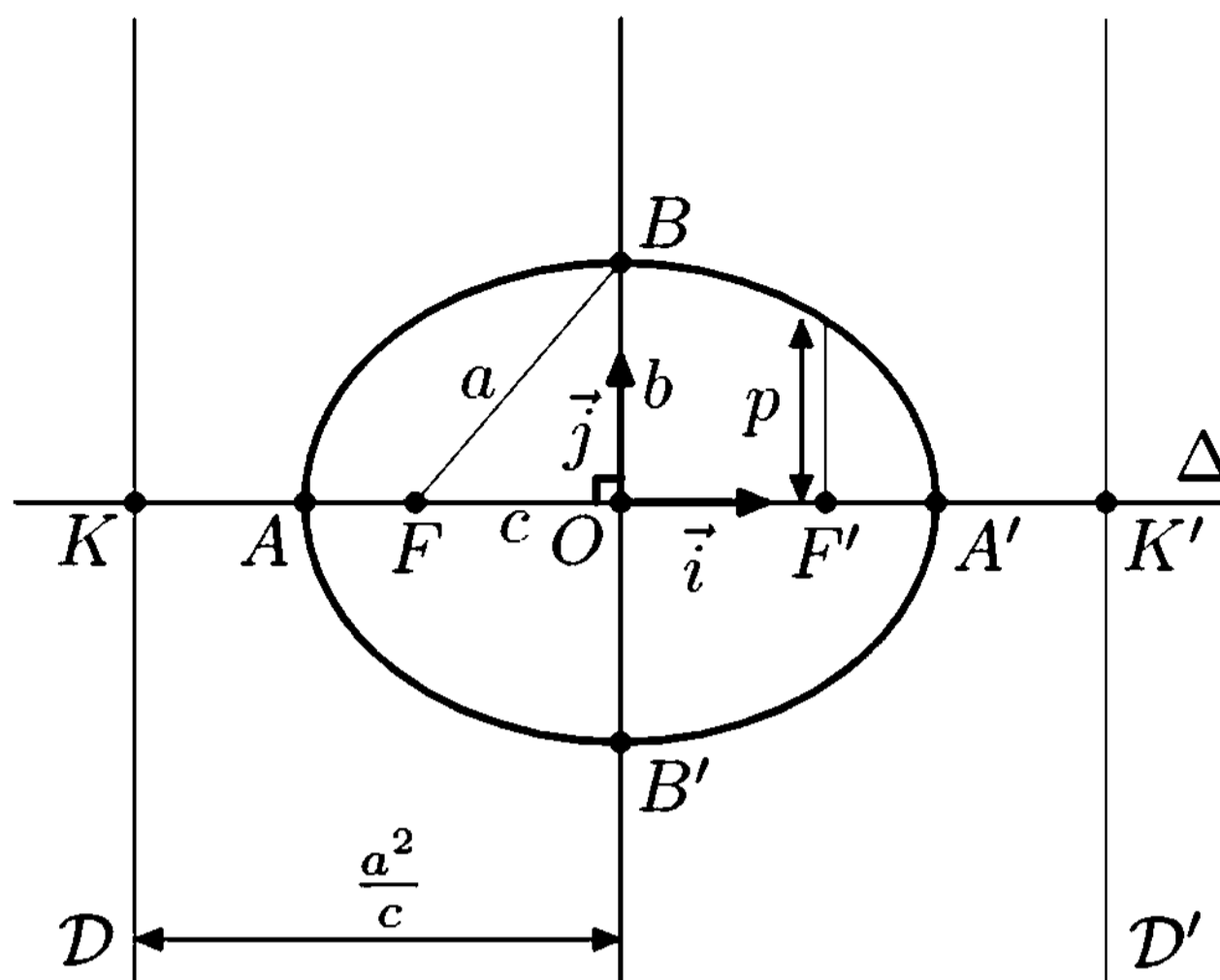
$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases} : t \in [-\pi, \pi]$$

Démonstration 8

Soit $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ le repère construit dans la proposition précédente. Dans ce repère une équation de \mathcal{E} est $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$. Soit $M(X, Y)$ un point du plan. On a équivalence entre :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\iff \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \\ &\iff \exists t \in [-\pi, \pi], \quad X = a \cos t \text{ et } Y = b \sin t \end{aligned}$$

□

**Méthode 1.**

Pour construire une ellipse

1. On trace ses axes focaux et demi-focaux.
2. On place le centre O de l'ellipse puis ses quatre sommets A, A', B, B' .
3. On mesure au compas la longueur OA et on place le compas en B .
4. On trace les deux arcs intersectant l'axe focal. On obtient ainsi les points F et F' .

Remarque 5.

$$\begin{cases} X = a \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ Y = a \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$
 est une paramétrisation de l'ellipse $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ privée du sommet de coordonnées $(-a, 0)$. Ce dernier point est « obtenu » en faisant tendre t vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Définition 4 (Affinité orthogonale).

Soient $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal. L'affinité orthogonale de base (O, \vec{i}) et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ est l'application du plan dans lui-même qui au point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x, ky) .

Théorème 9 (Cercle principal d'une ellipse)

L'ellipse \mathcal{E} d'équation $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $0 < b < a$ dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) est l'image du cercle \mathcal{C} d'équation cartésienne $X^2 + Y^2 = a^2$ par l'affinité orthogonale de base (O, \vec{i}) et de rapport $k = \frac{b}{a}$. Le cercle \mathcal{C} est appelé **cercle principal** de l'ellipse \mathcal{E} .

Démonstration 9

Soit M un point de \mathcal{C} . Il existe $t \in [-\pi, \pi]$ tel que les coordonnées de M soient $(a \cos t, b \sin t)$. Soit T l'affinité orthogonale en question. On a $T(M) (a \cos t, b \sin t)$. Donc $T(M) \in \mathcal{E}$. Réciproquement, tout point de \mathcal{E} est image d'un point de \mathcal{C} par T . \square

Théorème 10 (Équation de la tangente à une ellipse)

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'ellipse \mathcal{E} de demi-grand axe a et de demi-petit axe b ($0 < b < a$) et paramétrée par $\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases} : t \in [-\pi, \pi]$.

- La tangente \mathcal{T}_{M_0} à \mathcal{E} au point M_0 de \mathcal{E} de paramètre $t_0 \in \mathbb{R}$ a pour équation :

$$b x \cos t_0 + a y \sin t_0 - ab = 0$$

- La tangente \mathcal{T}_{M_0} à \mathcal{E} au point $M_0(x_0, y_0)$ a pour équation

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} - 1 = 0.$$

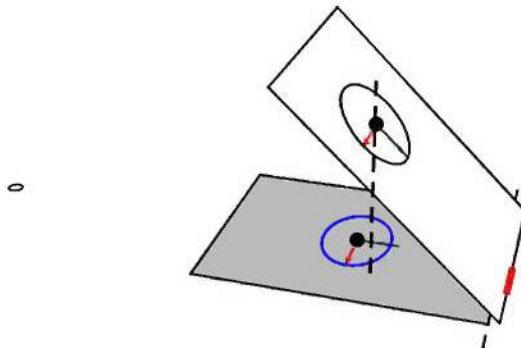
Démonstration 10

- Un vecteur tangent à l'ellipse \mathcal{E} en le point M de paramètre t est celui de coordonnées $(-a \sin t, b \cos t)$. Une équation de la tangente \mathcal{T}_M à \mathcal{E} en M est donc :

$$\begin{vmatrix} -a \sin t & x - a \cos t \\ b \cos t & y - b \sin t \end{vmatrix} = 0$$

ce qui donne : $b x \cos t + a y \sin t - ab = 0$.

- Si (x_0, y_0) sont les coordonnées de M_0 , cette équation devient : $\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} - 1 = 0$. \square



Théorème 11 (Image d'un cercle dans l'espace par une projection orthogonale)

L'image d'un cercle \mathcal{C} de l'espace par une projection orthogonale sur un plan \mathcal{P} non perpendiculaire au plan contenant \mathcal{C} est une ellipse de \mathcal{P} .

Démonstration 11

Nommons \mathcal{P}' le plan contenant le cercle \mathcal{C} , r le rayon de \mathcal{C} , O' son centre et O le projeté orthogonale de O' sur le plan \mathcal{P} .

Si les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont parallèles alors l'image de \mathcal{C} par la projection orthogonale sur \mathcal{P} est le cercle de même rayon et de centre O .

On suppose que \mathcal{P}' est non parallèle à \mathcal{P} . On note alors \mathcal{D} la droite formée par leur intersection et $\alpha \in]0, \pi/2[$ l'angle non orienté entre les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' . Soit \vec{i} un vecteur unitaire dirigeant \mathcal{D} . Soit \vec{j} un vecteur de \mathcal{P} en sorte que $\mathcal{H}(O; \vec{i}, \vec{j})$ soit un repère orthonormal de \mathcal{P} . De la même façon, on considère un vecteur \vec{j}' en sorte que $\mathcal{H}'(O'; \vec{i}, \vec{j}')$ soit un repère orthonormal de \mathcal{P}' . Par la projection orthogonale sur \mathcal{P} , le point $M' \in \mathcal{P}'$ de coordonnées (x, y) dans \mathcal{H}' se transforme en le point $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées $(x, y \cos \alpha)$ dans \mathcal{H} .

Si M' est élément de \mathcal{C} alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ et les coordonnées de M sont alors $(r \cos \theta, r \sin \theta \cos \alpha)$. Donc M est élément de l'ellipse de centre O , de demi grand axe r et de demi petit axe $r \cos \alpha$. Réciproquement, on vérifie que si $M(r \cos \theta, r \sin \theta \cos \alpha)$ est élément de cette ellipse alors c'est le projeté orthogonal sur \mathcal{P} du point $M'(r \cos \theta, r \sin \theta)$ de \mathcal{P}' . \square

8.4 Étude de l'hyperbole : $1 < e$

On considère dans tout ce paragraphe une hyperbole \mathcal{H} de foyer F , de directrice \mathcal{D} et d'excentricité e ($e > 1$).

Théorème 12 (Équation réduite de l'hyperbole)

Il existe un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel \mathcal{H} a pour équation

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad a > 0, b > 0$$

Cette équation est appelée **équation réduite de l'hyperbole \mathcal{H}** .

Réciproquement : l'équation $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0, b > 0$ est l'équation d'une hyperbole de foyer $F(c, 0)$ avec $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, de directrice $\mathcal{D} : X = \frac{a^2}{c}$ et d'excentricité $e = \frac{c}{a}$.

Démonstration 12

\Rightarrow D'après la proposition 2, il existe un repère orthonormal direct $\mathcal{H}(F, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel une équation cartésienne de \mathcal{H} est

$$x^2 + y^2 = e^2(x + d)^2 (*)$$

où $d = d(F, \mathcal{D})$. On a :

$$\begin{aligned}
 (*) &\iff (1 - e^2)x^2 - 2e^2dx + y^2 - c^2d^2 = 0 \\
 &\iff (e^2 - 1)x^2 + 2e^2dx - y^2 + c^2d^2 = 0 \\
 &\iff (e^2 - 1) \left(x^2 + \frac{2e^2d}{e^2 - 1}x \right) - y^2 + c^2d^2 = 0 \\
 &\iff (e^2 - 1) \left(x + \frac{e^2d}{e^2 - 1} \right)^2 - \frac{e^4d^2}{e^2 - 1} - y^2 + c^2d^2 = 0 \\
 &\iff (e^2 - 1) \left(x + \frac{e^2d}{e^2 - 1} \right)^2 - y^2 = c^2d^2 \left(\frac{e^2}{e^2 - 1} - 1 \right) \\
 &\iff (e^2 - 1) \left(x + \frac{e^2d}{1 - e^2} \right)^2 - y^2 = \frac{c^2d^2}{e^2 - 1} \\
 &\iff \left(\frac{e^2 - 1}{ed} \right)^2 \left(x + \frac{e^2d}{1 - e^2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{e^2 - 1}}{ed} \right)^2 y^2 = 1 \quad (*')
 \end{aligned}$$

Posons alors

$$a := \frac{ed}{e^2 - 1}, \quad b := \frac{ed}{\sqrt{e^2 - 1}}, \quad c := \frac{e^2d}{e^2 - 1} \text{ et } \begin{cases} X := x + c \\ Y := y \end{cases}.$$

Ces quantités sont bien définies car $e > 1$. Remarquons que $a > 0$ et $b > 0$. (x, y) sont les coordonnées dans un repère $\mathcal{H}'(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'un point de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{H}(F, \vec{i}, \vec{j})$ où O est déduit de F par une translation de vecteur $\vec{u}(-c, 0)$. Dans ce nouveau repère, $(*)$ s'écrit alors

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

qui est bien de la forme annoncée. On a par ailleurs bien $a^2 + b^2 = c^2$, $\frac{c}{a} = e$ et $d = \frac{b^2}{c}$. Dans \mathcal{H}' , on a $F(c, 0)$. Enfin, une équation de la directrice \mathcal{D} dans \mathcal{H} étant $x = -d$, une équation de \mathcal{D} dans \mathcal{H}' est $X - c = -d$, soit $X = c - d$. Mais $c - d = \frac{c^2 - b^2}{c} = \frac{a^2}{c}$. Une équation de \mathcal{D} dans \mathcal{H}' est donc $X = \frac{a^2}{c}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, soit \mathcal{H} une courbe d'équation $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ dans un repère $\mathcal{H}'(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $a > 0$ et $b > 0$. Posons

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad e = \frac{c}{a} \text{ et } d = \frac{b^2}{c}.$$

Par identification avec l'équation $(*)'$, on reconnaît l'hyperbole de foyer $F(c, 0)$ de directrice $\mathcal{D} : X = \frac{a^2}{c}$ et d'excentricité e . \square

Théorème 13

Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormal dans lequel l'hyperbole \mathcal{H} a pour équation $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0$, $b > 0$.

- L'origine O est centre de symétrie de \mathcal{H} . C'est le **centre** de l'hyperbole.
- OX et OY sont axes de symétrie de \mathcal{H} . OX est appelé **axe focal** ou **grand axe**. OY est appelé **axe non focal** ou **axe non transverse**.

- c) a est appelé **demi-axe focal** ou **demi-grand axe**. b est appelé **demi-axe non focal** ou **demi-petit axe**.
- d) Soit $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. \mathcal{H} admet deux foyers F et F' de coordonnées dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) : $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$ de directrice associée d'équation, dans ce même repère, : $\mathcal{D} : X = \frac{a^2}{c}$ et $\mathcal{D}' : X = -\frac{a^2}{c}$.
- e) L'hyperbole \mathcal{H} coupe le grand axe en deux points A et A' appelés les **sommets** de \mathcal{H} . On a $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$

Théorème 14 (Paramétrage de l'hyperbole)

On peut paramétrer l'hyperbole d'équation $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0$, $b > 0$ dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) par

$$\begin{cases} x(t) = a \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ y(t) = b \frac{2t}{1-t^2} \end{cases} : t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},$$

Le sommet de coordonnées $(-a, 0)$ est « obtenu » en faisant tendre t vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Démonstration 14

On a $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{(x(t))^2}{a^2} - \frac{(y(t))^2}{b^2} = 1$.

Inversement, on a $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $y'(t) = 2b \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2} > 0$ si on a choisi $b > 0$.

t	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$y(t)$	0	$+\infty$	$+\infty$	0
		$-\infty$	$-\infty$	

La fonction y réalise une bijection de $] -\infty, -1 [$ sur $] 0, +\infty [$. De ce fait, tous les points de la demi-branche d'hyperbole située dans le quart de plan $x < 0$ et $y > 0$ sont atteints une fois et une seule.

La fonction y réalise une bijection de $] -1, 1 [$ sur \mathbb{R} . De ce fait, tous les points de la branche d'hyperbole située dans le demi-plan $x > 0$ sont atteints une fois et une seule.

La fonction y réalise une bijection de $] 1, +\infty]$ sur $] -\infty, 0 [$. De ce fait, tous les points de la demi-branche d'hyperbole située dans le quart de plan $x < 0$ et $y < 0$ sont atteints une fois et une seule. \square

Théorème 15 (Asymptotes à l'hyperbole)

Soit \mathcal{H} l'hyperbole d'équation $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0$, $b > 0$ dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

\mathcal{H} admet deux asymptotes : $\delta : bX - aY = 0$ et $\delta' : bX + aY = 0$.

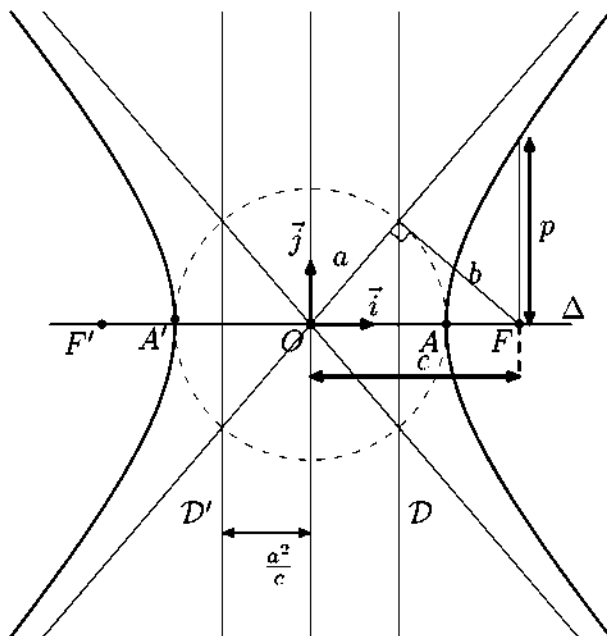
Démonstration 15

Lorsque t tend vers 1, on a $\lim_{t \rightarrow 1} (x(t))^2 + (y(t))^2 = +\infty$, et de plus $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{b}{a} \frac{2t}{1+t^2} = \frac{b}{a}$. Enfin

$$y(t) - \frac{b}{a}x(t) = b \left(\frac{2t}{1-t^2} - \frac{1+t^2}{1-t^2} \right) = b \frac{1-t}{1+t} \xrightarrow{t \rightarrow 1} 0.$$

Pour ces trois raisons, on a une droite asymptote d'équation $y = \frac{b}{a}x$.

Par symétrie, lorsque t tend vers -1 , la droite d'équation $y = -\frac{b}{a}x$ est asymptote. \square

**Théorème 16 (Équation de la tangente à une hyperbole)**

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'ellipse \mathcal{H} de demi-grand axe a et de demi-petit axe b

($0 < b < a$) et paramétrée par $\begin{cases} x(t) = a \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ y(t) = b \frac{2t}{1-t^2} \end{cases} : t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

La tangente \mathcal{T}_{M_0} à \mathcal{H} au point $M_0(x_0, y_0)$ a pour équation

$$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} - 1 = 0.$$

Démonstration 16

Un vecteur tangent à l'hyperbole \mathcal{H} en le point $M_0 (x_0, y_0)$ de paramètre $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ est celui de coordonnées $(x'(t), y'(t))$. Or

$$x'(t) = a \left(\frac{2t(1-t^2) + 2t(1+t^2)}{(1-t^2)^2} \right) = 2a \frac{2t}{(1-t^2)^2},$$

$$y'(t) = b \left(\frac{2(1-t^2) + 2t(2t)}{(1-t^2)^2} \right) = 2b \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}.$$

Ainsi, après division par $\frac{2}{1-t^2} \frac{1}{ab}$ la tangente \mathcal{T}_{M_0} au point M_0 est dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} y_0/b^2 \\ x_0/a^2 \end{pmatrix}$.

De ce fait le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x_0/a^2 \\ -y_0/b^2 \end{pmatrix}$ est normal à \mathcal{T}_{M_0} .

Une équation de \mathcal{T}_{M_0} est donc : $(x - x_0) \frac{x_0}{a^2} - (y - y_0) \frac{y_0}{b^2} = 0$ soit $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. \square

Méthode 2.

Pour construire une hyperbole

1. On trace ses axes focaux et demi-focaux.
2. On place le centre O de l'hyperbole puis ses deux sommets A et A' .
3. On trace le cercle de centre O et de rayon a .
4. On trace les asymptotes.
5. Pour une de ces deux asymptotes, on considère son intersection avec le cercle. Elle est formée de deux points P et P' .
6. On trace les perpendiculaires à l'asymptote passant par chacun de ces deux points.
7. L'intersection de chacune de ces deux perpendiculaires avec l'axe focal est constituée des deux foyers de l'hyperbole.
8. Les directrices de l'hyperbole sont les droites perpendiculaires à l'axe focal et passant par P et P' .

8.5 Définition bifocale de l'ellipse et de l'hyperbole

Théorème 17 (Définition bifocale de l'ellipse et de l'hyperbole)

Soient a et c deux réels strictement positifs, F et F' deux points du plan tels que $\|\overrightarrow{FF'}\| = 2c$.

1. Si $a > c$, l'ensemble des points du plan tels que

$$\|\overrightarrow{MF}\| + \|\overrightarrow{MF'}\| = 2a$$

est l'ellipse de foyers F et F' et de demi-grand axe a

2. Si $a < c$, l'ensemble des points du plan tels que

$$\left| \|\overrightarrow{MF}\| - \|\overrightarrow{MF'}\| \right| = 2a$$

est l'hyperbole de foyers F et F' et de demi-axe focal a .

Démonstration 17

Introduisons le point O milieu de $[FF']$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OF} / \|\overrightarrow{OF}\|$. Soit \vec{j} un vecteur unitaire directement orthogonal à \vec{v} . On forme ainsi un repère orthonormal direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . Dans ce repère, on a $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$. Soit $M(x, y)$ un point de plan. On calcule $MF^2 = (x - c)^2 + y^2$ et $MF'^2 = (x + c)^2 + y^2$ et il s'ensuit que

$$\begin{aligned} MF^2 \cdot MF'^2 &= ((x - c)^2 + y^2)((x + c)^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + c^2 - 2cx)(x^2 + y^2 + c^2 + 2cx) \\ &= (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 \end{aligned}$$

et que

$$MF^2 + MF'^2 = (x - c)^2 + y^2 + (x + c)^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2).$$

1. On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned} MF + MF' &= 2a \\ \Leftrightarrow MF^2 + MF'^2 + 2MF \cdot MF' &= 4a^2 \\ \Leftrightarrow 2MF \cdot MF' &= 4a^2 - (MF^2 + MF'^2) \\ \Leftrightarrow 4MF^2 \cdot MF'^2 &= (4a^2 - (MF^2 + MF'^2))^2 \\ \Leftrightarrow (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 &= (2a^2 - (x^2 + y^2 + c^2))^2 \\ \Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \\ \Leftrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$

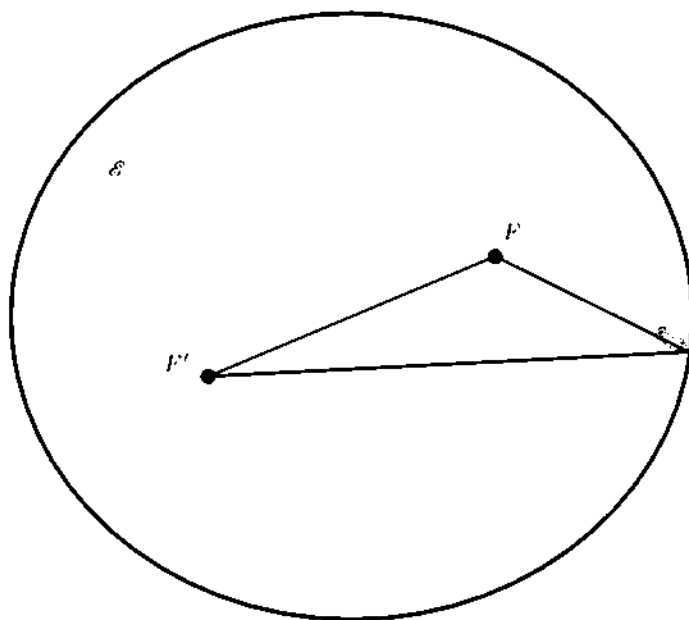
où $b^2 = a^2 - c^2$ est bien défini car $a > c$. Donc on a $MF + MF' = 2a$ si et seulement si M est élément de l'ellipse de centre O , de demi-grand axe a et de demi-petit axe b .

2. On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
 & |MF - MF'| = 2a \\
 \Leftrightarrow & MF^2 + MF'^2 - 2MF.MF' = 4a^2 \\
 \Leftrightarrow & 2MF.MF' = (MF^2 + MF'^2) - 4a^2 \\
 \Leftrightarrow & 4MF^2.MF'^2 = ((MF^2 + MF'^2) - 4a^2)^2 \\
 \Leftrightarrow & (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = ((x^2 + y^2 + c^2) - 2a^2)^2 \\
 \Leftrightarrow & (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \\
 \Leftrightarrow & (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \\
 \Leftrightarrow & b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \\
 \Leftrightarrow & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1
 \end{aligned}$$

où $b^2 = c^2 - a^2$ est bien défini car $a < c$. Donc on a $|MF - MF'| = 2a$ si et seulement si M est élément de l'hyperbole de centre O , de demi-grand axe a et de demi-petit axe b . \square

Méthode 3 (Dessiner une ellipse avec un crayon et une ficelle.).



On plante deux punaises sur la feuille, une à chaque foyer. On fixe une ficelle fermée dont la longueur égale le grand axe. En gardant la ficelle tendue par le crayon on tourne autour des foyers.

Cette méthode est surtout théorique. Le lecteur minutieux pourra risquer quelques feuilles de papier dans l'aventure. Les autres s'abstiendront.

8.6 Courbes algébriques dans le plan

Le plan est rapporté dans tout ce paragraphe à un repère orthonormal direct $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$. On s'intéresse ici à l'ensemble \mathcal{C} des points du plan dont une équation cartésienne est :

$$P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

où $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ et où les réels a, b et c ne sont pas tous nuls (sinon \mathcal{C} est une droite affine du plan).

Définition 5.

On appelle discriminant de la courbe du second degré :

$$\mathcal{C} : ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

le réel, noté Δ et donné par : $\Delta = ac - b^2$.

Lemme 18 (Élimination du terme en xy)

Il existe une rotation de centre O et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ telle que dans le repère $\mathcal{R}'(O, \vec{i}', \vec{j}')$ déduit du repère \mathcal{R} par cette rotation, l'équation de \mathcal{C} devient :

$$\mathcal{C} : AX^2 + CY^2 + DX + EY + F = 0.$$

De plus $\Delta = ac - b^2 = AC$ (et $F = f$).

Démonstration 18

On utilise les formules de changement de repère (c'est-à-dire changement de coordonnées) :

$$\begin{cases} x = \cos \theta X - \sin \theta Y \\ y = \sin \theta X + \cos \theta Y \end{cases}$$

où θ est un réel à déterminer. On a :

$$\begin{aligned} & ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \\ \Leftrightarrow & (a \cos^2 \theta + c \sin^2 \theta + 2b \sin \theta \cos \theta)X^2 + (a \sin^2 \theta + c \cos^2 \theta - 2b \sin \theta \cos \theta)Y^2 \\ & + (2(c - a) \sin \theta \cos \theta + 2b(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta))XY + (d \cos \theta + e \sin \theta)X + (e \cos \theta - d \sin \theta)Y + f = 0 \end{aligned}$$

□

On cherche θ en sorte que $2(c - a) \sin \theta \cos \theta + 2b(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0$ ce qui s'écrit aussi $(c - a) \sin 2\theta + 2b \cos 2\theta = 0$.

Si $a = c$ alors on peut prendre $\theta = \pi/4$.

Si $a \neq c$ alors on peut prendre θ vérifiant

$$\frac{2b}{a - c} = \tan(2\theta).$$

Dans le nouveau repère, l'équation de \mathcal{C} est bien de la forme annoncée avec $A = a \cos^2 \theta + c \sin^2 \theta + 2b \sin \theta \cos \theta$, $C = a \sin^2 \theta + c \cos^2 \theta - 2b \sin \theta \cos \theta$, $D = d \cos \theta + e \sin \theta$, $E = e \cos \theta - d \sin \theta$ et $F = f$.

On remarque que $A + C = a + c$, que $A - C = (a - c) \cos 2\theta + 2b \sin 2\theta$ et que $AC = 1/4((A + C)^2 - (A - C)^2)$.

Si $a = 0$ et donc $\theta = \pi/4$, on vérifie facilement que $ac - b^2 = AC$. Sinon, si $\theta = \frac{1}{2} \arctan(\frac{2b}{a-c})$, alors $\tan 2\theta = 2b/(a - c)$ et

$$\cos^2 2\theta = \frac{1}{1 + \tan^2 2\theta} = \frac{(a - c)^2}{(a - c)^2 + 4b^2}$$

donc

$$A - C = (a - c) \cos 2\theta (1 + \frac{2b}{a - c} \tan 2\theta) = (a - c) \cos 2\theta (1 + \tan^2 \theta) = \frac{a - c}{\cos 2\theta}$$

et $(A - C)^2 = (a - c)^2 + 4b^2$.

Donc

$$AC = \frac{1}{4}((A + C)^2 - (A - C)^2) = \frac{1}{4}((a + c)^2 - (a - c)^2) - b^2 = ac - b^2.$$

Lemme 19 (Élimination des termes linéaires)

Si $\Delta \neq 0$ alors il existe un repère orthonormal $\mathcal{H}''(\Omega, \vec{i}'', \vec{j}'')$ déduit de \mathcal{H}' par une translation dans lequel une équation de \mathcal{C} est :

$$Au^2 + Cv^2 = F'$$

où $F' \in \mathbb{R}$.

Démonstration 19

Le repère \mathcal{H}'' est déduit du repère \mathcal{H}' par une translation de vecteur $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ à déterminer. On a donc les formules de changement de repère :

$$\begin{cases} X &= u + \alpha \\ Y &= v + \beta \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} AX^2 + CY^2 + DX + EY + F &= 0 \\ \iff Au^2 + Cv^2 + (2A\alpha + D)u + (2C\beta + E)v + A\alpha^2 + C\beta^2 + D\alpha + E\beta + F &= 0 \end{aligned}$$

On cherche (α, β) en sorte que

$$\begin{cases} 2A\alpha + D &= 0 \\ 2C\beta + E &= 0 \end{cases}.$$

Comme $\Delta = AC \neq 0$, ce système admet comme solutions $\alpha = -D/(2A)$ et $\beta = -E/(2C)$. On en déduit F'' en remplaçant α et β par ces valeurs dans $A\alpha^2 + C\beta^2 + D\alpha + E\beta + F$. Dans ce nouveau repère, l'équation de \mathcal{C} est bien de la forme annoncée. \square

On en déduit le théorème de classification des courbes du second degré, dû à René Descartes.

Théorème 20 (Classification des courbes du second degré)

On considère une courbe du second degré d'équation :

$$\mathcal{C} : ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

dans un repère orthonormal. On note $\Delta = ac - b^2$ son discriminant.

Si $\Delta > 0$, la courbe \mathcal{C} est une ellipse, un point ou l'ensemble vide.

Si $\Delta < 0$, la courbe \mathcal{C} est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes.

Si $\Delta = 0$, la courbe \mathcal{C} est une parabole, une droite, la réunion de deux droites parallèles ou l'ensemble vide.

Démonstration 20

D'après le lemme 18, on peut trouver un repère dans lequel une équation de \mathcal{C} est $AX^2 + CY^2 + DX + EY + F = 0$ où $A, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ et où $\Delta = ac - b^2 = AC$.

1. Si $\Delta = 0$ alors $A = 0$ ou $C = 0$.

(a) Si $A = 0$ et $C \neq 0$ alors $\mathcal{C} : CY^2 + DX + EY + F = 0$ qui s'écrit aussi $\mathcal{C} : C(Y + E/(2C))^2 + DX + F - E^2/(4C) = 0$.

i. Si $D \neq 0$ alors en posant $Y' = Y + \frac{E}{2C}$ et $X' = -\frac{1}{2C}(X + \frac{E}{D} - \frac{E^2}{4CD})$ on obtient : $\mathcal{C} : Y'^2 - 2DX' = 0$ et on reconnaît une parabole.

ii. Si $D = 0$, alors en effectuant le même travail, on montre qu'une équation de \mathcal{C} dans un repère convenablement choisi est de la forme $Y'^2 + F' = 0$. Si $F' > 0$, \mathcal{C} est l'ensemble vide, si $F' = 0$, \mathcal{C} est la droite d'équation $Y' = 0$ et enfin si $F' < 0$, \mathcal{C} est la réunion des droites parallèles d'équations $Y' = \sqrt{-F'}$ et $Y' = -\sqrt{-F'}$.

(b) Si $A \neq 0$ et $C = 0$ alors $\mathcal{C} : AX^2 + DX + EY + F = 0$, on retrouve les mêmes résultats que dans le cas précédent.

(c) Si $A = 0$ et $C = 0$ alors la courbe n'est plus du second degré.

2. Si $\Delta \neq 0$, on sait d'après le lemme 2 que dans un bon repère, $\mathcal{C} : AX'^2 + CY'^2 = F'$ avec $A, C, F' \in \mathbb{R}$ et $\Delta = AC$.

(a) Si $\Delta > 0$, alors A et C sont de même signe et on peut écrire l'équation de \mathcal{C} sous la forme : $\frac{X'^2}{A'^2} + \frac{Y'^2}{C'^2} = \varepsilon$ avec $\varepsilon = 0, 1$ ou -1 et $A', C' > 0$. Si $\varepsilon = 0$ alors \mathcal{C} est réduit à un point. Si $\varepsilon = -1$ alors \mathcal{C} est vide. Enfin, si $\varepsilon = 1$ alors \mathcal{C} est une ellipse.

(b) Si $\Delta < 0$, alors A et C sont de signe contraire et on peut écrire l'équation de \mathcal{C} sous la forme : $\frac{X'^2}{A'^2} - \frac{Y'^2}{C'^2} = \varepsilon$ avec $\varepsilon = 0, 1$ ou -1 et $A', C' > 0$. Si $\varepsilon = 0$ alors l'équation s'écrit : $(\frac{X'}{A'} - \frac{Y'}{C'}) (\frac{X'}{A'} + \frac{Y'}{C'}) = 0$ et \mathcal{C} est la réunion de deux droites sécantes. Si $\varepsilon = \pm 1$, \mathcal{C} est une hyperbole. \square

Remarque 6.

Ce théorème fournit un algorithme pour déterminer la nature d'une courbe

$$\mathcal{C} : ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

et préciser son équation réduite.

1. Calculer le discriminant $\Delta = ac - b^2$ et $T = a + c$. Selon le signe de Δ , on peut, sans calcul, préciser le type de la courbe.
2. (a) Si $\Delta \neq 0$, par un changement du centre du repère défini par les formules :

$$\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$$

on se débarrasse des termes linéaires en x et y pour aboutir à une équation :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = F$$

Le centre du nouveau repère est, dans \mathcal{R} , $\Omega(\alpha, \beta)$.

- (b) On sait qu'on peut, par rotation des axes, se placer dans un repère orthonormé de même centre Ω où l'équation devient :

$$Ax^2 + Cy^2 = F$$

- (c) On connaît la somme et le produit de A et de C :

$$\begin{cases} A + C = a + c \\ AC = ac - b^2 \end{cases}$$

Ils sont par conséquent racines d'un trinôme du second degré.

- (d) Ayant déterminé A et C , on peut écrire l'équation réduite de la conique et discuter de sa nature en fonction du signe de F .
 - (e) Si l'on veut avoir toutes les informations, il faut déterminer l'angle θ de rotation choisi pour annuler le terme xy .
3. Si $\Delta = 0$, on peut, par rotation des axes, se placer dans un repère orthonormé de même centre où l'équation devient :

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy = F$$

avec $A = 0$ ou $B = 0$. On sait alors qu'après une translation, on peut facilement identifier \mathcal{C} .

Exemple 1

Réduire la conique \mathcal{C} d'équation $x^2 + 6xy + y^2 + 16x - 9 = 0$.

1. Son discriminant vaut -8 donc \mathcal{C} est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes.

2. On effectue le changement de repère $\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$. On obtient :

$$X^2 + 6XY + Y^2 + (6\beta + 2\alpha + 16)X + (2\beta + 6\alpha)Y - 9 + \beta^2 + \alpha^2 + 16\alpha + 6\alpha\beta = 0.$$

On se débarrasse des termes linéaires si

$$\begin{cases} 6\beta + 2\alpha + 16 = 0 \\ 2\beta + 6\alpha = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire si $\alpha = 1$ et $\beta = -3$ ce qui nous donne $\boxed{\Omega(1, -3)}$ Dans ce nouveau repère, l'équation de \mathcal{C} devient : $X^2 + 6XY + Y^2 - 1 = 0$.

3. On sait que par rotation des axes on peut se placer dans un repère orthonormé de même centre Ω où l'équation devient :

$$Ax^2 + Cy^2 = 1.$$

On sait que $AC = \Delta = -8$ et que $A + C = a + c = 2$. Ils sont donc racines du polynôme $X^2 - 2X - 8$ et on trouve $A = 4$ et $C = -2$ ou $A = -2$ et $C = 4$. On obtient alors dans le nouveau repère pour \mathcal{C} une des deux équations $4x^2 - 2y^2 = 1$ ou $-2x^2 + 4y^2 = 1$. Ces deux équations sont obtenues dans deux repères différents, l'un étant déduit de l'autre par une rotation d'angle $\pi/2$. On reconnaît une hyperbole de demi-axes $1/2$ et $\sqrt{2}/2$ et de centre $\Omega(1, -3)$.

Pour mieux faire, il faut déterminer complètement la rotation. En partant de l'équation $X^2 + 6XY + Y^2 - 1 = 0$, on effectue le changement de repère

$$\begin{cases} X = \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ Y = \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{cases}$$

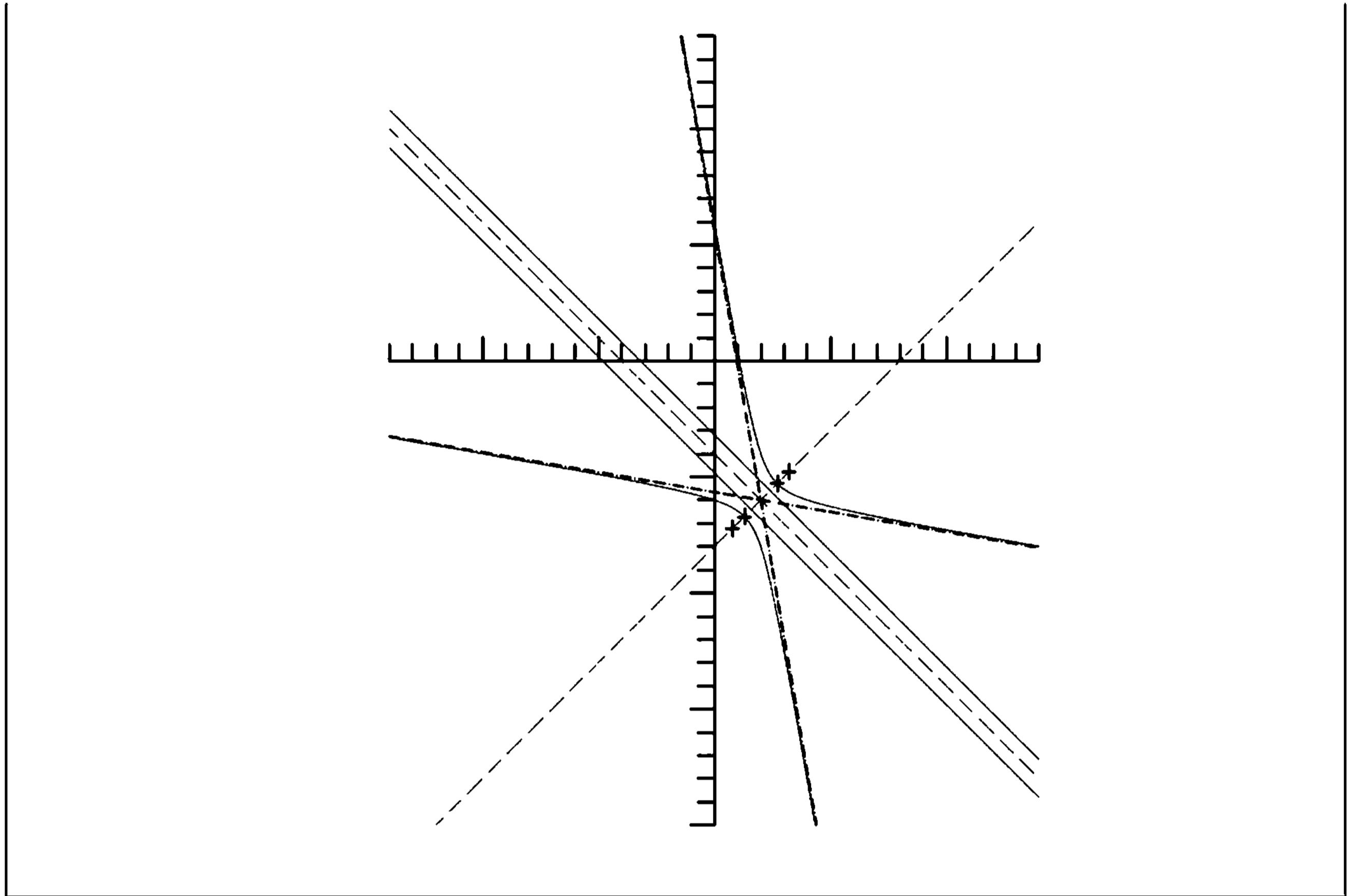
et on obtient :

$$6 \sin(\theta) \cos(\theta) + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))x^2 + 6(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))xy + (\cos^2(\theta) - 6 \sin(\theta) \cos(\theta) + \sin^2(\theta))y^2 = 1$$

ou encore

$$(3 \sin(2\theta) + 1)x^2 + 6 \cos(2\theta)xy + (1 - 3 \sin(2\theta))y^2 = 1.$$

Pour supprimer les termes linéaires, il suffit de prendre $\theta = \pi/4$ et on obtient dans le nouveau repère \mathcal{C} : $4x^2 - 2y^2 = 1$. On sait donc que $a = 1/2$, $b = \sqrt{2}/2$ et $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3}/2$. On en déduit que $e = c/a = \sqrt{3}$. De plus, les équations des directrices dans le repère final sont $x = \sqrt{3}/6$ et $x = -\sqrt{3}/6$. Les coordonnées des foyers sont $(\sqrt{3}/2, 0)$ et $(-\sqrt{3}/2, 0)$. On peut alors facilement représenter \mathcal{C} .

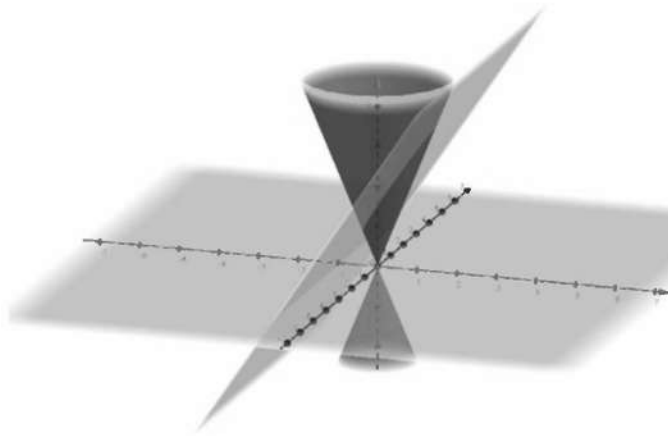


8.7 Intersection d'un cône et d'un plan

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O: \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que

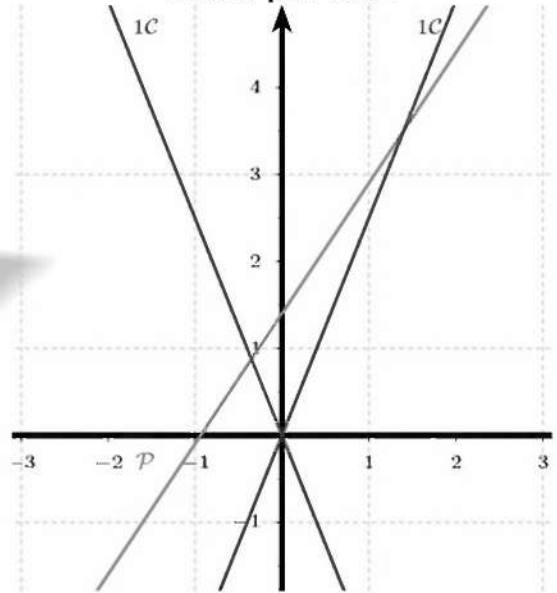
1. Le point O est le sommet du cône.
2. L'axe vertical est l'axe du cône de révolution.
3. Une équation du plan soit $z = mx + p$.

Une équation du cône est $k^2(x^2 + y^2) = z^2$ avec $k > 0$.



On a ici $k := 2,5$, $m := 1,5$ et $p := 1,4$.

Dans le plan zOx :



On considère les coordonnées (x, y) des points d'intersection. Autrement dit, on élimine z entre les deux égalités, soit, dans le cas où $k \neq \pm m$:

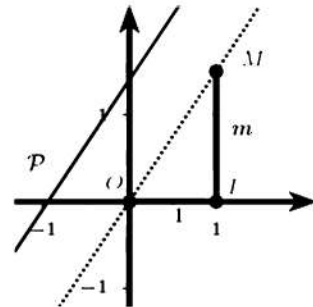
$$\begin{aligned} & k^2(x^2 + y^2) = m^2x^2 + 2mpx + p^2 \\ \text{soit} & (k^2 - m^2) + 2mpx + k^2y^2 + p^2 = 0 \\ \text{soit} & (k^2 - m^2) \left(x^2 + \frac{2mp}{k^2 - m^2} \right) + k^2y^2 + p^2 = 0 \\ \text{soit} & (k^2 - m^2) \left(x + \frac{mp}{k^2 - m^2} \right)^2 + k^2y^2 - \frac{m^2p^2}{k^2 - m^2} + p^2 = 0 \\ \text{soit} & (k^2 - m^2) \left(x + \frac{mp}{k^2 - m^2} \right)^2 + k^2y^2 = \frac{k^2p^2}{k^2 - m^2} \end{aligned}$$

On trouve

- une ellipse si $|m| < k$ ou un cercle si $m = 0$.
- une hyperbole si $|m| > k$.
- une parabole si $k = \pm m$: $2mpx + m^2y^2 + p^2 = 0$. Attention, si on veut calculer l'excentricité, on a besoin d'un repère orthonormé dans le plan de coupe \mathcal{P} .

En effet une distance horizontale en x égale à 1 se traduit par une distance dans le plan \mathcal{P} égale à $\sqrt{1 + m^2}$. Pour avoir des coordonnées dans un repère orthonormé de \mathcal{P} , il convient de choisir $x' := \frac{x}{\sqrt{1 + m^2}}$ et de conserver y . Ce qui donne

$$(k^2 - m^2)(1 + m^2) \left(x' + \frac{mp}{(k^2 - m^2)\sqrt{1 + m^2}} \right)^2 + k^2y^2 = \frac{k^2p^2}{k^2 - m^2}.$$





Un jeune géomètre explique comment obtenir une ellipse avec une lampe torche. Le (demi-)cône de lumière de la lampe est coupé par le plan du mur. En inclinant davantage la lampe par rapport au mur on peut obtenir une branche d'hyperbole et entre les deux pour un angle précis, une parabole.

8.8 Exercices

8.8.1 En général

Exercice 1.

Soit \mathcal{D} une droite du plan \mathcal{P} et F un point du plan non situé sur \mathcal{D} . Montrer que par tout point M du plan non situé sur $\mathcal{D} \cup \{F\}$ passe une et une seule conique \mathcal{C} de foyer F et de directrice \mathcal{D} .

Exercice 2.

On considère un cône de révolution de sommet S , d'axe \mathcal{D} et on note $\alpha \in] 0 , \pi/2 [$ [une mesure de l'angle entre cet axe et une génératrice du cône. On va étudier l'intersection entre ce cône et un plan \mathcal{P} de l'espace.

1. Dans un repère orthonormal direct de l'espace fixé, déterminer une équation cartésienne du cône.
2. En choisit un repère orthonormal direct de l'espace en sorte qu'une équation cartésienne de \mathcal{P} soit $z = 0$. écrire une équation cartésienne de l'intersection \mathcal{S} du cône et du plan et reconnaître l'équation algébrique d'une courbe du plan de degré 2.
3. On note $\beta \in] 0 , \pi/2 [$ [l'angle entre le plan \mathcal{P} et l'axe \mathcal{D} du cône.
Montrer que $\cos^2 \beta = a^2 + b^2$.
4. Conclure en comparant α et β .

8.8.2 Paraboles**Exercice 3.**

On considère une parabole. Montrer que les rayons incidents parallèles à l'axe, réfléchis sur la parabole passent par le foyer.

Application : Le fonctionnement du miroir d'un télescope de Newton^a est basé sur cette propriété de la parabole.

-
- a. Ou d'une antenne parabolique, ou d'un four solaire ou d'un phare de 2CV...

Exercice 4.

Soit \mathcal{P} une parabole de paramètre $p > 0$, de foyer F et de directrice \mathcal{D} . Soient M un point de \mathcal{P} et H son projeté orthogonal sur \mathcal{D} . Montrer que :

1. La tangente \mathcal{T}_M à \mathcal{P} en M coupe la tangente au sommet de \mathcal{P} en I , milieu du segment $[FH]$.
2. La tangente \mathcal{T}_M à \mathcal{P} en M est la bissectrice principale du triangle isocèle FMH .
3. Le projeté orthogonal du foyer de \mathcal{P} sur les tangentes à \mathcal{P} décrit la tangente au sommet.
4. Deux tangentes à \mathcal{P} perpendiculaires se coupent sur la directrice \mathcal{D} de \mathcal{P} .

Exercice 5.

On considère la parabole d'équation $y^2 = 2px$ et un point $A(a^2/2p, a)$ de cette parabole. On considère deux points distincts de la parabole $M(m^2/2p, m)$ et $N(n^2/2p, n)$. On note $\alpha = m + n$ et $\beta = mn$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que les droites (AM) et (AN) soient orthogonales.
2. Montrer que lorsque M, N varient sur la parabole, (avec la condition d'orthogonalité précédente), la droite (MN) passe par un point fixe Q à déterminer.
3. À chaque point A de la parabole on peut donc associer le point Q . Déterminer le lieu de Q lorsque A varie.

Exercice 6.

On considère une parabole d'équation cartésienne

$$\mathcal{P} : 2px = y^2$$

1. Soient deux points distincts $M(t^2/2p, t)$ et $N(t'^2/2p, t')$ de la parabole. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la droite (MN) soit normale à la parabole en M .
2. Déterminer la longueur minimale des cordes (MN) vérifiant cette condition.

8.8.3 Ellipses**Exercice 7.**

On considère une ellipse de grand axe (AA') . Soit M_0 un point de l'ellipse. La tangente en M_0 coupe les tangentes en A et A' aux points P et P' . Montrer que $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{A'P'}$ est constant.

Exercice 8.

On considère un point P d'une ellipse de centre O . On lui associe un point M tel que la tangente en M à l'ellipse soit parallèle à la droite (OP) .

1. Montrer que l'aire du triangle OPM est constante et la calculer.
2. Montrer que $\|\overrightarrow{OM}\|^2 + \|\overrightarrow{OP}\|^2$ est constante.

Exercice 9.

On considère l'ellipse d'équation réduite

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

à un point M de l'ellipse différent des sommets, on fait correspondre le point M' symétrique par rapport à l'axe (Ox) . On note P le point d'intersection de la droite (OM') avec la normale à l'ellipse en M . Déterminer le lieu du point P lorsque M décrit l'ellipse.

Exercice 10.

On considère une ellipse de foyers F et F' et un point M variable sur cette ellipse. On note T_M la tangente à l'ellipse au point M . Montrer que $d(F, T_M) \times d(F', T_M)$ est constante.

Exercice 11.

On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormal, deux ellipses :

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$$

$$\mathcal{E}' : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

1. On considère une droite \mathcal{D} d'équation $ux + vy + w = 0$. Écrire une condition nécessaire et suffisante pour que \mathcal{D} soit tangente à \mathcal{E}' .
2. On décide de paramétrer l'ellipse \mathcal{E} . On considère alors deux points de \mathcal{E} de paramètres $P(\theta)$ et $Q(\alpha)$. Trouver une relation entre θ et α pour que la droite (PQ) soit tangente à l'ellipse \mathcal{E} .

Exercice 12.

Trouver le lieu des centres des cercles tangents à une ellipse \mathcal{E} et passant par son centre.

Exercice 13.

Soit \mathcal{E} une ellipse de foyers F, F' , de centre O , de dimensions A et B .

Soient $M, M' \in \mathcal{E}$ tels que les tangentes à \mathcal{E} sont perpendiculaires en un point T .

Montrer que $TF^2 + TF'^2 = 4a^2$. Quel est le lieu de T quand M et M' varient ?

Exercice 14.

Calculer le maximum de la distance du centre de l'ellipse à une normale.

Exercice 15.

Dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère l'ellipse (\mathcal{E}) d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Soit δ une direction de droites. Lieu des milieux M des cordes $[AB]$ de (\mathcal{E}) parallèles à δ .

Exercice 16.

Démontrer que le cercle passant par les foyers d'une ellipse et un de ses points M recoupe la tangente et la normale en M en des points du petit axe.

Exercice 17 (Tangentes à une ellipse).

Soient $\mathcal{E} : \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$, et $\mathcal{E}' : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1. CNS sur u, v, w pour que la droite d'équation $ux + vy + w = 0$ soit tangente à \mathcal{E}' ?
2. Soient (MP) , (MQ) deux tangentes à \mathcal{E}' avec $M, P, Q \in \mathcal{E}$. Montrer que (PQ) est aussi tangente à \mathcal{E}' .

Exercice 18.

Soit \mathcal{E} une ellipse de foyers F, F' et de centre O .

Montrer que $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow MF \cdot MF' + OM^2 = 2a^2 - c^2$.

Exercice 19.

Soit \mathcal{E} une ellipse de centre O et de dimensions A, B . Soient $M, P \in \mathcal{E}$ tels que OMP soit rectangle en O .

1. Montrer que $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OP^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.
2. En déduire que (MP) reste tangente à un cercle fixe de centre O .

Exercice 20 (Cercle sur une tangente).

Soit \mathcal{E} une ellipse de sommets A, A' , et $M \in \mathcal{E}$. La tangente en M coupe les tangentes en A, A' en P, P' . Montrer que le cercle de diamètre $[P, P']$ passe par les foyers de \mathcal{E} .

8.8.4 Hyperboles

Exercice 21.

Soit \mathcal{H} l'hyperbole d'équation $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0, b > 0$ dans un repère orthonormal $\mathcal{H}(O, \vec{i}, \vec{j})$. Prouver l'équivalence des quatre propriétés suivantes :

1. Les asymptotes de \mathcal{H} sont perpendiculaires.
2. $a = b$
3. \mathcal{H} a pour équation réduite : $X^2 - Y^2 - a^2 = 0$.
4. L'excentricité e est égale à $\sqrt{2}$.

Lorsque \mathcal{H} vérifie une de ces quatre propriétés, on dit qu'elle est **équilatère**.

Exercice 22.

Prouver qu'un ensemble \mathcal{H} du plan est une hyperbole si et seulement si il existe un repère (pas forcément orthonormal) (O, \vec{i}, \vec{j}) dans lequel \mathcal{H} a une équation de la forme $XY = \gamma$ où $\gamma \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 23.

Un point M d'une hyperbole se projette en H et H' sur les deux asymptotes. Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MH'}$ est constant.

Exercice 24.

On considère une hyperbole \mathcal{H} et un point M variable sur cette hyperbole. On note H le projeté orthogonal du foyer F sur la tangente en M . Montrer que le point H se trouve sur le cercle tangent à l'hyperbole aux deux sommets.

Exercice 25.

On considère une hyperbole \mathcal{H} de foyers F et F' .

1. Rappeler la définition bifocale de \mathcal{H} .
2. Dans un repère orthonormal, on suppose l'hyperbole paramétrée par $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $M(t)$ le point de \mathbb{R}^2 tel que $\overrightarrow{OM(t)} = \vec{f}(t)$. Calculer la dérivée de la fonction $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\theta(t) = \left\| \overrightarrow{FM(t)} \right\| - \left\| \overrightarrow{F'M(t)} \right\|$.
3. En déduire que si M est un point de l'hyperbole, la normale en M est la bissectrice extérieure des droites (FM) et $(F'M)$.
4. Que dire de la tangente à \mathcal{H} en M ?

Indication 1.

On pourra s'aider de l'exercice 32 page 294 du cours de première.

8.8.5 Courbes du second degré**Exercice 26.**

On considère la courbe \mathcal{C} d'équation :

$$x^2 + 4y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$$

Déterminer sa nature et préciser ses éléments géométriques.

Exercice 27.

On considère la courbe \mathcal{H} d'équation :

$$-9x^2 + 16y^2 + 18x - 32y - 137 = 0$$

Déterminer la nature de \mathcal{H} et préciser ses éléments géométriques : sommets, foyers, directrice, excentricité, asymptotes.

Exercice 28.

On considère dans le repère canonique la courbe d'équation

$$2x^2 + y^2 + \sqrt{3}xy - 1 = 0$$

Déterminer sa nature, puis tracer cette courbe en précisant le centre et l'excentricité.

Exercice 29.

On considère dans le repère canonique la courbe d'équation

$$x^2 + 6xy + y^2 + 4\sqrt{2}x = 0$$

Déterminer sa nature, puis tracer cette courbe en précisant le centre et l'excentricité.

Exercice 30.

On considère dans le repère canonique la courbe d'équation

$$x^2 + 2xy + y^2 + 4\sqrt{2}(x - y) = 0.$$

Déterminer sa nature (on effectuera une rotation de centre O et d'angle $3\pi/4$), puis tracer cette courbe en précisant son centre et son excentricité.

Exercice 31.

On considère dans le repère canonique la courbe d'équation

$$x^2 - 4y^2 = 0.$$

Déterminer sa nature, puis tracer cette courbe en précisant le centre et l'excentricité.

Exercice 32.

On considère dans le repère canonique la courbe d'équation

$$x^2 + 3x + 4y + 1 = 0.$$

Déterminer sa nature, puis tracer cette courbe en précisant le centre et l'excentricité.

Exercice 33.

On considère dans le repère canonique la courbe d'équation

$$2x^2 - 3x + 2y^2 + 4y - 3 = 0.$$

Déterminer sa nature, puis tracer cette courbe en précisant le centre et l'excentricité.

Exercice 34.

On considère dans le repère canonique la courbe d'équation

$$x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$$

Déterminer sa nature, puis tracer cette courbe en précisant le centre et l'excentricité.

Exercice 35.

On considère dans le repère canonique la courbe d'équation

$$25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$$

Déterminer sa nature, puis tracer cette courbe en précisant le centre et l'excentricité.

Exercice 36.

On considère la courbe d'équation

$$3x^2 + 4xy - 12x + 16 = 0.$$

dans le repère canonique. Montrer (avec le moins de calculs possibles) que cette courbe est une hyperbole dont on précisera les demi-axes ainsi que le centre.

Exercice 37.

On considère un polynôme de degré 3 :

$$P = X^3 + \lambda X^2 + \mu X + \delta$$

et la courbe formée des points $M(x, y)$ d'équation

$$C : P(y) = P(x)$$

Montrer que :

- Si $\lambda^2 - 3\mu < 0$, C est une droite à préciser.
- Si $\lambda^2 - 3\mu > 0$, C est la réunion d'une droite et d'une conique. On montrera que l'excentricité de cette conique est indépendante de P .

8.8.6 Exercices supplémentaires**Exercice 38.**

Soit a un nombre réel. On suppose que l'équation $|z - a^2| + |z - 2a| = 3$ admet des solutions dans \mathbb{C} .

Démontrer que $-1 < a < 3$.

Exercice 39.

Soit A point du plan donné D_1 et D_2 deux droites données. $O = D_1 \cap D_2$. Soit Δ une droite variable passant par A . Soit $P = \Delta \cap D_1$; $Q = \Delta \cap D_2$. Démontrer que lorsque Δ varie, le milieu I de $[PQ]$ décrit une hyperbole.

Exercice 40.

On donne un cercle C de centre O et $A \in C$. Pour $M \in C$, on construit le projeté N sur le diamètre perpendiculaire à (OA) , et I , le point d'intersection de (OM) et (AN) . Quel est le lieu de I ?

Exercice 41.

Démontrer que l'orthocentre du triangle défini par trois tangentes distinctes à une parabole appartient à la directrice.

Exercice 42.

Soit AB une corde d'une parabole. D l'intersection de l'axe de la parabole avec la perpendiculaire à AB en son milieu C . Que peut-on dire de la projection orthogonale du segment $[CD]$ sur l'axe de la parabole ?

Exercice 43.

Soit \mathcal{P} une parabole de foyer F et D une droite passant par F et qui coupe \mathcal{P} en M et N . Que peut-on dire des tangentes en M et N à \mathcal{P} ?

Exercice 44.

Par un point $M_0(x_0, y_0)$, on mène deux tangentes à la parabole \mathcal{P} d'équation $x^2 = 2py$. (condition d'existence?). Calculer l'aire du triangle M_0AB où A et B désignent les points de contact.

Exercice 45.

$\mathcal{P} : y^2 = 2px (p > 0)$. $M(x, y)$; $M'(x', y')$. $(M, M') \in \mathcal{P}$. $M \neq M'$. Condition sur y et y' pour que $F \in (MM')$. calculer alors $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FM'}$.

Exercice 46.

Soit \mathcal{P} : la parabole de sommet S et de foyer F . et \mathcal{P}' : la parabole de sommet S' et de foyer F' , avec $F \in [S, S']$. Ensemble des points d'intersection de \mathcal{P} et \mathcal{P}' lorsque F décrit $[S, S']$.

Exercice 47.

M, F, M' trois points distincts. Quelles sont les directrices des paraboles de foyer F passant par M et M' .

Exercice 48.

Soit P une parabole de foyer F et de directrice D . Soit $M \in P$, et M' le point de P tel que les tangentes en M et M' sont orthogonales.

1. Montrer que ces tangentes se coupent au milieu de $[H, H']$.
2. Montrer que M, F, M' sont alignés.

En déduire dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) donné toutes les paraboles tangentes aux axes de coordonnées.

Exercice 49.

Soit F un point, D une droite ne passant pas par F , et $a > \frac{1}{2}d(F, D)$.
Trouver l'ensemble des points M tels que $MF + d(M, D) = 2a$.

Exercice 50.

Lieu du centre d'une hyperbole équilatère de foyer donné passant par un point donné.

Exercice 51.

Soient F un point, D une droite ne passant pas par F , et $\vec{\Delta}$ une direction ni égale ni perpendiculaire à \vec{D} . Pour $M \in \mathcal{P}$, on note H le projeté de M sur D parallèlement à $\vec{\Delta}$. Quel est l'ensemble des points M tels que $MF = MH$?

Exercice 52.

Démontrer que : pour tous réels (x, y) ,

$$1 < x^2 - xy + y^2 < 2 \implies \frac{2}{9} < x^4 + y^4 < 8.$$

Exercice 53.

Démontrer que

$$\begin{cases} x = \pm a \frac{1}{\cos^2 \varphi} \\ y = \pm b \tan^2 \varphi \end{cases} \quad \varphi \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

fournit une paramétrisation de l'hyperbole (\mathcal{H}) d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

8.9 Solutions

8.9.1 En général

Solution 1

On a $d(M, \mathcal{D}) > 0$ car $M \notin \mathcal{D}$ et $d(M, F) > 0$ car $M \neq F$. Par conséquent $e = \frac{d(M, F)}{d(M, \mathcal{D})}$ est un réel positif non nul. Par construction, la conique de directrice \mathcal{D} , de foyer F et de directrice \mathcal{D} passe par M .

Solution 2

1. On note $\vec{u}(a, b, c)$ un vecteur directeur unitaire de \mathcal{D} . Un point M est élément du cône si et seulement si l'angle non orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{SM})$ est égal à α ou $\pi - \alpha$, c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{SM} \cdot \vec{u} = \pm \|\overrightarrow{SM}\| \cos \alpha$ ce qui amène l'équation cartésienne :

$$(a(x - x_S) + b(y - y_S) + c(z - z_S))^2 = ((x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 + (z - z_S)^2) \cos^2 \alpha$$

où $S(x_S, y_S, z_S)$ et $M(x, y, z)$.

2. Avec $z = 0$, l'équation précédente devient :

$$(a(x - x_S) + b(y - y_S) - cz_S)^2 = ((x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 + z_S^2) \cos^2 \alpha$$

et en développant, on trouve une expression de la forme :

$$(a^2 - \cos^2 \alpha)x^2 + 2abxy + (b^2 - \cos^2 \alpha)y^2 + dx + ey + f = 0$$

où $d, e, f \in \mathbb{R}$. On reconnaît l'équation d'une courbe algébrique du plan de degré 2.

3. Notons \vec{u}_0 le projeté orthogonal du vecteur \vec{u} sur le plan \mathcal{D} . Comme $\vec{u} = (a, b, c)$, les coordonnées de \vec{u}_0 sont $(a, b, 0)$. Mais $\vec{u} \cdot \vec{u}_0 = \|\vec{u}\| \|\vec{u}_0\| \cos \beta$ et il vient $a^2 + b^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \beta$ d'où l'égalité.
4. On calcule le discriminant de cette équation :

$$\Delta = (a^2 - \cos^2 \alpha)(b^2 - \cos^2 \alpha) - a^2 b^2 = \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - (a^2 + b^2)) = \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta).$$

Comme α et β sont compris entre 0 et $\pi/2$, le signe de Δ est donné par $\cos \alpha - \cos \beta$.

- Si $\alpha < \beta$ alors \mathcal{C} est une ellipse, un point ou l'ensemble vide.
- Si $\alpha = \beta$ alors \mathcal{C} est une parabole, une droite, la réunion de deux droites parallèles ou l'ensemble vide.
- Si $\alpha > \beta$ alors \mathcal{C} est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes.

8.9.2 Paraboles

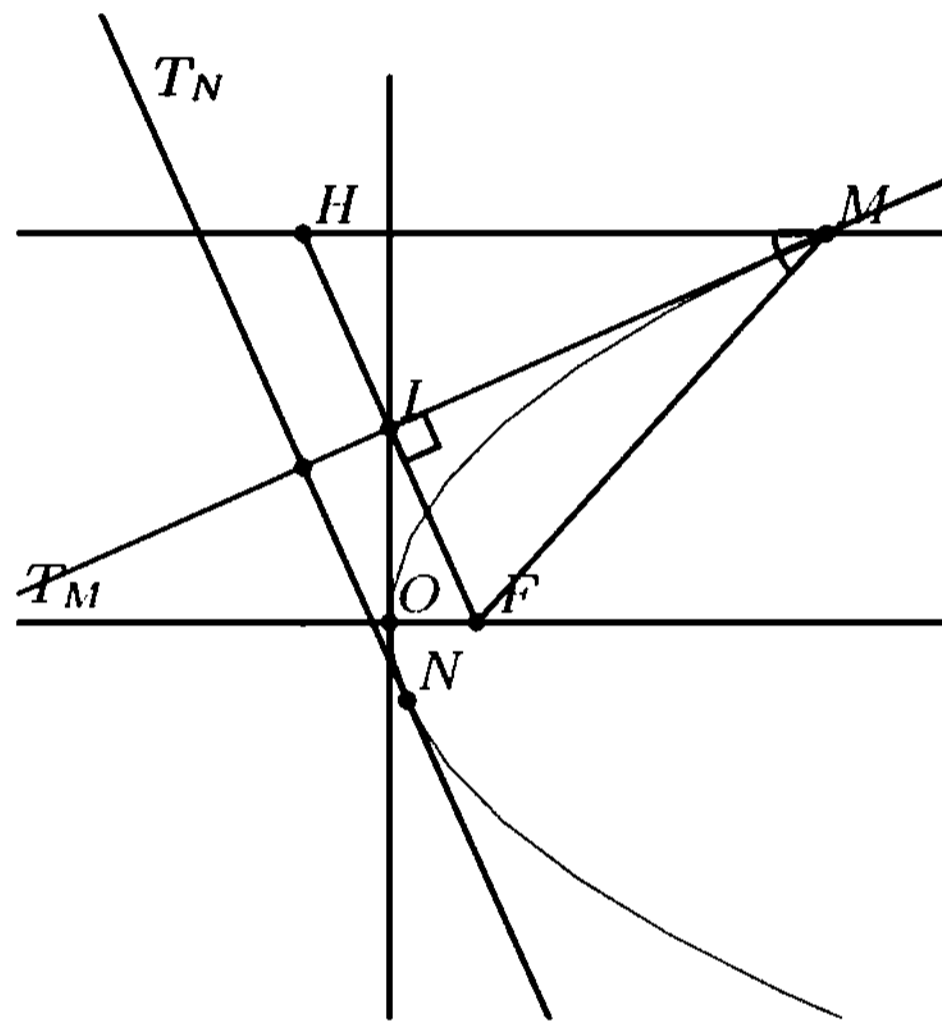
Solution 3

En paramétrant la parabole $M(t)(t^2/2p, t)$, un vecteur normal en $M(t)$ est $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ t/p \end{pmatrix}$.

Calculons $\overrightarrow{FM(t)} \begin{pmatrix} (t^2 - p^2)/2p \\ t \end{pmatrix}$ et $\|\overrightarrow{FM(t)}\| = \frac{t^2 + p^2}{2p}$. On calcule alors $\frac{\overrightarrow{FM(t)}}{\|\overrightarrow{FM(t)}\|} \cdot \vec{n} = 1$ et en

posant $\vec{h} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{h} \cdot \vec{n} = 1$ ce qui montre que la droite (FM) et la droite horizontale passant par M sont symétriques par rapport à la normale en M .

Solution 4



1. D'après le cours, la tangente \mathcal{T}_S à la parabole en son sommet admet pour équation cartésienne : $x = 0$ et $\mathcal{T}_{M_0} : x - t_0 y + p \frac{t_0^2}{2} = 0$. Ces deux droites se coupent en le point de coordonnées $(0, \frac{pt_0}{2})$ qui est bien le milieu I du segment $[FH]$.
2. Comme le triangle FMH est isocèle, la bissectrice principale de l'angle \widehat{HMF} est aussi la médiane issue de M . Or, on vient de prouver que la droite passant par M et par le milieu de $[FK]$ est la tangente en M à \mathcal{P} .
3. La droite (MI) est aussi la hauteur du triangle FMH issue de M . Par conséquent, les droites (FH) et \mathcal{T}_M sont perpendiculaires en I . Le projeté orthogonal de F sur \mathcal{T}_M est donc I . Il est clair que le point I , ses coordonnées étant $(0, \frac{pt_0}{2})$ est élément de la tangente au sommet.
4. Soient $\mathcal{T}_M : x - ty + p \frac{t^2}{2} = 0$ et $\mathcal{T}_{M'} : x - t'y + p \frac{t'^2}{2} = 0$ deux tangentes à \mathcal{T} en les points M de paramètre t et M' de paramètre t' . Ces deux droites se coupent en le point de coordonnées $(\frac{ptt'}{2}, p(t+t')/2)$ et sont orthogonales si et seulement si $1 + tt' = 0$. Si c'est le cas, les coordonnées de leur point d'intersection s'écrivent $(-p/2, p(t - 1/t)/2)$. Ce point est bien un point de la directrice \mathcal{D} car une équation cartésienne de cette dernière est $x = -p/2$.

Solution 5

1. En traduisant $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$, on trouve que $(m+a)(n+a) + 4p^2 = 0$ c'est-à-dire $\boxed{\beta + a\alpha + a^2 + 4p^2 = 0}$.
2. L'équation cartésienne de la droite (MN) est :

$$2px - \alpha y + \beta = 0$$

et en utilisant la condition d'orthogonalité, cette équation devient $\alpha(y+a) - 2px + a^2 + 4p^2 = 0$. on voit donc que cette droite passe par le point fixe $Q \left(\frac{a^2 + 4p^2}{2p}, -a \right)$.

3. En éliminant le paramètre a , on voit que le point Q se déplace sur la parabole d'équation

$$\boxed{y^2 = 2p(x - 2p)}, \text{ c'est-à-dire la parabole initiale translatée du vecteur } 2p\vec{i}.$$

Solution 6

1. Le vecteur $\vec{t} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige la tangente en M . En écrivant $\overrightarrow{MN} \cdot \vec{t} = 0$, on trouve que $\boxed{t(t+t') + 2p^2 = 0}$.

2. On calcule

$$\|\overrightarrow{MN}\|^2 = (t' - t)^2 \left[1 + \frac{(t' + t)^2}{4p^2} \right]$$

Mais en utilisant que

$$t + t' = -\frac{2p^2}{t} \text{ et } t' - t = t' + t - 2t = -\frac{2}{t}(p^2 + t^2)$$

on exprime

$$d(M, N)^2 = \frac{4}{t^4}(p^2 + t^2)^3$$

et en étudiant cette fonction, $f'(t) = \frac{8(p^2 + t^2)^2}{t^5}(t^2 - 2p^2)$, on en déduit ses variations. Elle admet

un minimum en $t = \sqrt{2}p$ et finalement, la distance minimale vaut $\boxed{3\sqrt{3}p}$.

8.9.3 Ellipses

Solution 7

L'ellipse dans un bon repère orthonormé a pour équation réduite

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

et $A(-a, 0)$, $A'(a, 0)$. Si $M_0(x_0, y_0)$, l'équation cartésienne de la tangente en M_0 est

$$T_{M_0} : \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

On trouve alors (il faut que $M_0 \neq A, A'$) $P \left(-a \frac{b^2}{y_0} \left(1 + \frac{x_0}{a} \right) \right)$, $P' \left(a, \frac{b^2}{y_0} \left(1 - \frac{x_0}{a} \right) \right)$ et il s'ensuit

$$\boxed{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{A'P'} = b^2}$$

Solution 8

1. On rapporte le plan à un repère orthonormal dans lequel l'ellipse est paramétrée par : $\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases}$

avec $t \in [0, 2\pi]$ et $0 < b < a$. La tangente à l'ellipse au point M_0 de paramètre $T_0 \in [0, 2\pi]$ admet comme équation cartésienne : $b \cos T_0 x + a \sin T_0 y - ab = 0$. On suppose que P est le point de paramètre $t_0 \in [0, 2\pi]$. Un vecteur tangent \vec{v} à l'ellipse au point M de paramètre $t \in [0, 2\pi]$

est donné par : $\vec{v} \begin{pmatrix} a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}$. Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{OP} sont : $\begin{pmatrix} t_0 \\ b \sin t_0 \end{pmatrix}$. Le vecteur \vec{v} est

colinéaire au vecteur \overrightarrow{OP} si et seulement si : $\det(\overrightarrow{OP}, \vec{v}) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si : $\cos t \cos t_0 + \sin t \sin t_0 = 0$, ce qui s'écrit encore : $\cos(t - t_0) = 0$ et équivaut à $t = t_0 + \frac{\pi}{2}$ ou $t = t_0 - \frac{\pi}{2}$. Les coordonnées du point P sont donc : $\boxed{(-a \sin t_0, b \cos t_0)}$ ou $\boxed{(a \sin t_0, -b \cos t_0)}$. Dans le premier cas, l'aire du triangle OPM est :

$$\left| \frac{\det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM})}{2} \right| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} a \cos t_0 & -a \sin t_0 \\ b \sin t_0 & b \cos t_0 \end{vmatrix} \right\| = \boxed{\frac{ab}{2}}$$

Dans le second cas, l'aire est identique. Cette dernière est donc bien constante.

2. En appliquant les résultats précédents :

$$\|\overrightarrow{OM}\|^2 + \|\overrightarrow{OP}\|^2 = \boxed{a^2 + b^2}$$

Cette somme est bien constante.

Solution 9

En paramétrant l'ellipse, $M(a \cos t, b \sin t)$, le vecteur $\vec{t} \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}$ est tangent en M à l'ellipse et le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} b \cos t \\ a \sin t \end{pmatrix}$ est donc normal. Une équation cartésienne de la droite (OM') est :

$$b \sin tx + a \cos ty = 0$$

Puisque le point P est sur la normale, $P = M + \lambda \vec{n}$ et puisque $P \in (OM')$, on trouve que $\lambda = -\frac{2ab}{a^2 + b^2}$ et enfin

$$\boxed{\begin{cases} x_P = \frac{a(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} \cos t \\ y_P = -\frac{b(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} \sin t \end{cases}}$$

On en déduit que le point P décrit l'ellipse homothétique (privée de ses sommets) de l'ellipse initiale avec un rapport d'homothétie de $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

Solution 10

Dans un bon repère orthonormé, l'équation cartésienne de l'ellipse est :

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec $a > b > 0$. Si $M(x_0, y_0)$, l'équation cartésienne de la tangente en M est :

$$T_M : \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0$$

Puisque $F(-c, 0)$, $F'(c, 0)$ où $c^2 = a^2 - b^2$, on calcule

$$\begin{aligned} d(F, T_M) \times d(F', T_M) &= \frac{|cx_0/a^2 - 1|}{\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}} \times \frac{|cx_0^2/a^2 + 1|}{\sqrt{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4}} \\ &= \frac{|c^2 x_0^2/a^4 - 1|}{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4} \\ &= \frac{|x_0^2/a^2 - b^2 x_0^2/a^4 - 1|}{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4} \quad \text{car } c^2 = a^2 - b^2 \\ &= \frac{b^2 x_0^2/a^4 + y_0^2/b^2}{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4} \quad \text{car } x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2 = 1 \\ &= b^2 \end{aligned}$$

Solution 11

1. Si la droite \mathcal{D} est tangente à l'ellipse, il existe un point $M_0(x_0, y_0)$ de l'ellipse tel que la droite \mathcal{D} soit la droite d'équation

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Les deux équations cartésiennes de droite sont proportionnelles :

$$\frac{a^2 u}{x_0} = \frac{b^2 v}{y_0} = -w.$$

Donc on doit avoir

$$x_0 = -\frac{a^2 u}{w} \quad y_0 = -\frac{b^2 v}{w}.$$

et comme le point M_0 est sur l'ellipse, une condition nécessaire est que

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 = w^2.$$

Réciproquement, si cette condition est vérifiée, il suffit de poser $x_0 = -a^2 u/w$ et $y_0 = -b^2 v/w$, de vérifier que ce point appartient à l'ellipse, et que la tangente à l'ellipse en ce point est la droite \mathcal{D} .

2. Paramétrons l'ellipse :

$$\begin{cases} x = 2a \cos \theta \\ y = 2b \sin \theta \end{cases}$$

Soit $M_0(2a \cos \theta, 2b \sin \theta)$ et $P_\alpha(2a \cos \alpha, 2b \sin \alpha)$ deux points de l'ellipse \mathcal{E} . La droite passant par ces deux points a pour équation cartésienne

$$\begin{vmatrix} X - 2a \cos \theta & 2a(\cos \alpha - \cos \theta) \\ Y - 2b \sin \theta & 2b(\sin \alpha - \sin \theta) \end{vmatrix} = 0$$

Mais en utilisant la trigonométrie, puisque

$$\cos \alpha - \cos \theta = -2 \sin((\alpha + \theta)/2) \sin((\alpha - \theta)/2)$$

et que

$$\sin \alpha - \sin \theta = 2 \sin((\alpha - \theta)/2) \cos((\alpha + \theta)/2)$$

On trouve en développant ce déterminant

$$b \cos((\alpha + \theta)/2)X + a \sin((\alpha + \theta)/2)Y - 2ab \left(\cos((\alpha + \theta)/2) \cos \theta + \sin((\alpha + \theta)/2) \sin \theta \right) = 0$$

La condition pour que cette droite soit tangente à la petite ellipse s'écrit alors

$$a^2 b^2 \cos^2((\alpha + \theta)/2) + a^2 b^2 \sin^2((\alpha + \theta)/2) = 4a^2 b^2 \cos^2((\alpha - \theta)/2)$$

et après simplifications, on trouve que

$$\left| \cos((\alpha - \theta)/2) \right| = 1/2$$

Donc $\alpha = \theta + 2\pi/3 + 2k\pi$ ou alors $\alpha = \theta - 2\pi/3 + 2k\pi$.

Solution 12

Soit $M(x_0, y_0)$ un point de l'ellipse avec $x_0 := a \cos(t)$ et $y_0 := b \sin(t)$. Une équation de la normale à \mathcal{E} en M est :

$$(x - x_0) \frac{y_0}{b^2} - (y - y_0) \frac{x_0}{a^2} = 0.$$

La médiatrice de $[OM]$ a pour équation $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = x^2 + y^2$ soit $2xx_0 + 2yy_0 = x_0^2 + y_0^2$. Le centre du cercle tangent à \mathcal{E} en M et passant par O appartient à l'intersection de ces deux droites. Ses coordonnées (x, y) vérifient

$$\begin{array}{rcl} 2x_0x & + & 2y_0y = x_0^2 + y_0^2 & \left| \times \frac{x_0}{a^2} \right| & \left| \times \frac{y_0}{b^2} \right. \\ \frac{xy_0}{b^2} & - & \frac{yx_0}{a^2} = x_0y_0 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) & \left. \left| \times 2y_0 \right. \right| & \left. \left| \times (-2x_0) \right. \right. \end{array}$$

$$2 \left(\frac{x_0}{a^2} + \frac{y_0}{b^2} \right) x = \frac{x_0^3}{a^2} + \frac{x_0 y_0^2}{a^2} + 2 \frac{x_0 y_0^2}{b^2} - \frac{x_0 y_0^2}{a^2}$$

$$\text{soit } 2x = \frac{x_0^3}{a^2} - \frac{x_0 y_0^2}{a^2} + 2 \frac{x_0 y_0^2}{b^2}$$

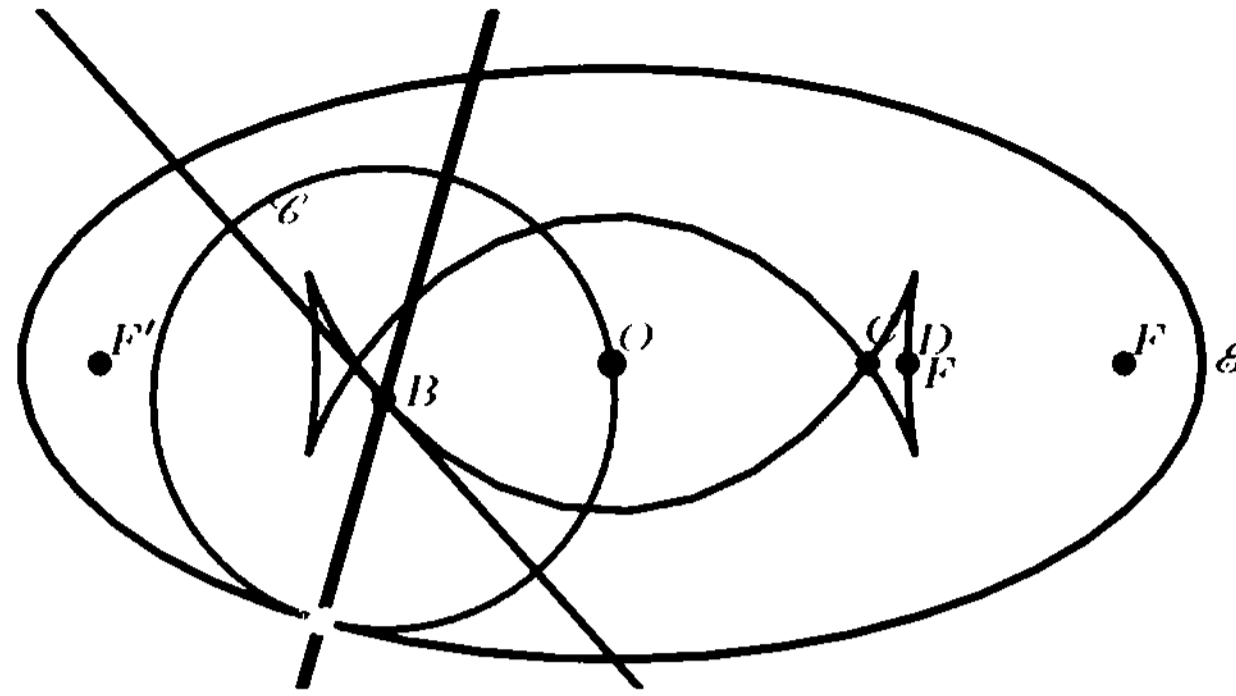
$$\text{soit } 2x = x_0 \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + y_0^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} \text{soit } x &= \frac{a}{2} \cos(t) \left(1 + \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \right) \\ &= \frac{a}{2} \cos(t) \left(1 + \frac{c^2}{a^2} \sin^2(t) \right) \\ &= \frac{a}{2} \cos(t) (1 + e^2 \sin^2(t)) \end{aligned}$$

$$\text{et } -2 \left(\frac{x_0}{a^2} + \frac{y_0}{b^2} \right) y = \frac{x_0^2 y_0}{b^2} + \frac{y_0^3}{b^2} - 2 \frac{x_0^2 y_0}{b^2} - 2 \frac{x_0^2 y_0}{a^2}$$

$$\begin{aligned} \text{soit } 2y &= -\frac{x_0^2 y_0}{b^2} + 2 \frac{x_0^2 y_0}{a^2} + \frac{y_0^3}{b^2} \\ &= y_0 \left(\frac{y_0^2}{b^2} + \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{x_0^2}{b^2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{soit } y = \frac{b}{2} \sin(t) \left(\left(1 - \frac{c^2}{b^2} \right) \cos^2(t) \right)$$



Solution 13

Soient P, P' les symétriques de F par rapport aux tangentes. Donc $F'P = F'P' = 2a$.

Le triangle FPP' est rectangle, donc T est le milieu de $[P, P']$, et $TF = TP = TP'$.

Donc, $TF^2 + TF'^2 = F'P^2 = 4a^2$.

$TF^2 + TF'^2 = 2TO^2 + OF^2 + OF'^2$ donc T appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Solution 14

Le vecteur $\vec{\tau} = (-a \sin \phi, b \cos \phi)$ est tangent au point de paramètre ϕ et une équation de la normale en ce point est $-a \sin \phi(x - a \cos \phi) + b \cos \phi(y - b \sin \phi) = 0$. Le carré de la distance de O à cette normale est donc (en supposant $0 < b < a$)

$$d^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2 \cos^2 \phi \sin^2 \phi}{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}.$$

Son inverse est donc

$$\frac{1}{(a^2 - b^2)^2} \left(\frac{a^2}{\cos^2 \phi} + \frac{b^2}{\sin^2 \phi} \right) = \frac{1}{(a^2 - b^2)^2} f(\phi).$$

La dérivée de F s'annule lorsque les dérivées de $\frac{a^2}{\cos^2 \phi}$ et $\frac{b^2}{\sin^2 \phi}$ sont opposées.

Soit $\frac{2a^2 \cos \phi \sin \phi}{\cos^4 \phi} = \frac{2b^2 \sin \phi \cos \phi}{\sin^4 \phi}$ ou $\frac{\sin^4 \phi}{\cos^4 \phi} = \frac{b^2}{a^2}$,

c'est-à-dire $\tan^2 \phi = \frac{b}{a}$.

On en déduit $\frac{1}{\cos^2 \phi} = 1 + \frac{b}{a} = \frac{a+b}{a}$, $\cos^2 \phi = \frac{a}{a+b}$

et $\sin^2 \phi = \frac{b}{a+b}$.

Donc le minimum de F donne le maximum de d^2 à savoir

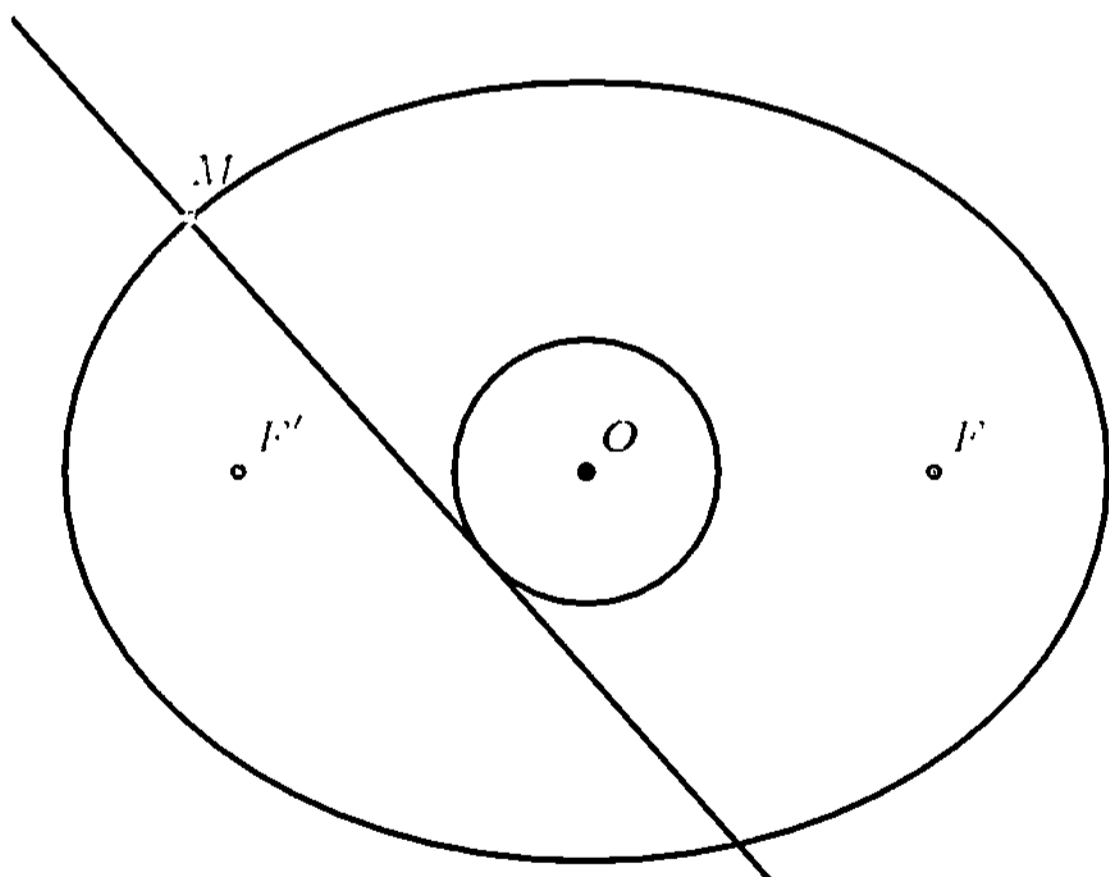
$$d^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2 \frac{ab}{(a+b)^2}}{\frac{a^2b}{a+b} + \frac{ab^2}{a+b}} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{(a+b)^2} = (a-b)^2.$$

Solution 15

Si (\mathcal{E}) est un cercle, alors le lieu est le diamètre perpendiculaire à la direction δ . Sinon on se ramène à ce cas par une affinité. Dans tous les cas on obtient un diamètre de l'ellipse (\mathcal{E}) .

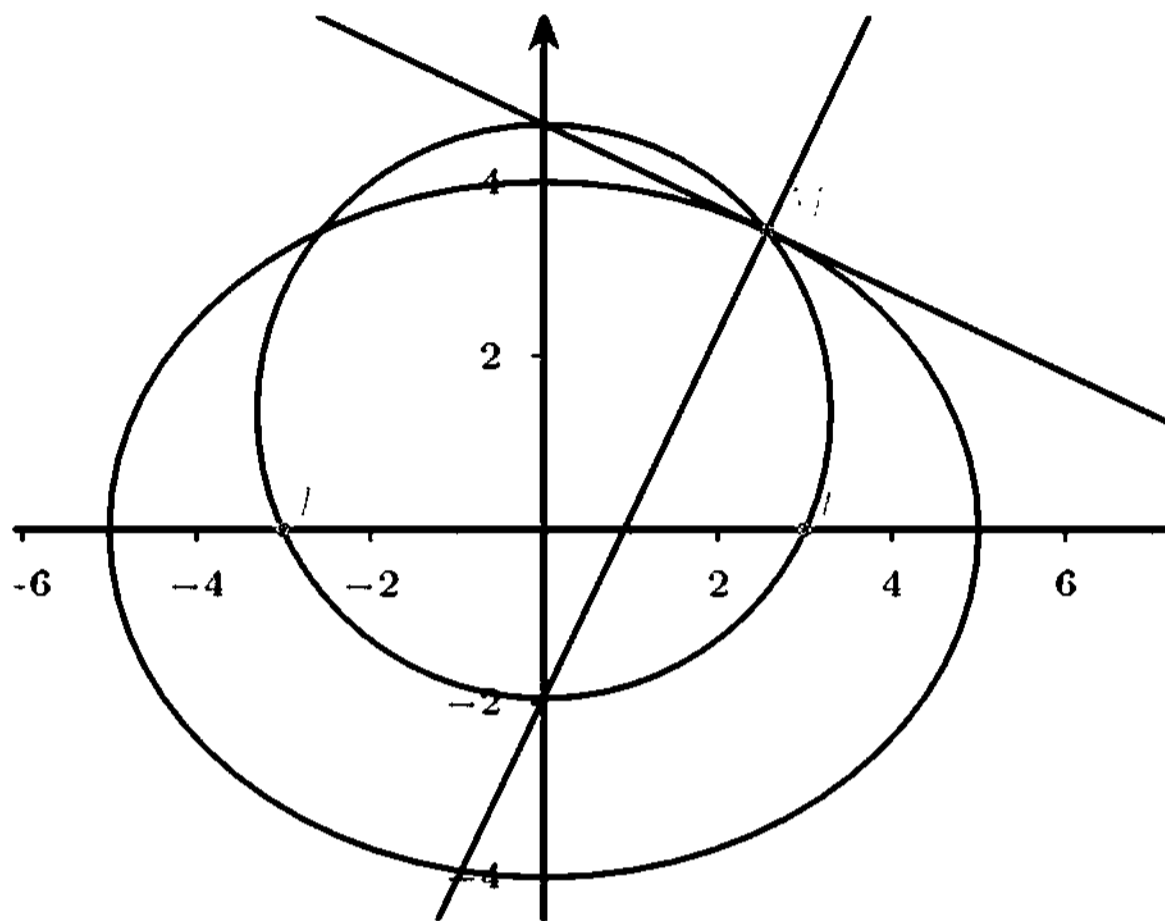
Solution 16

On prend une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $M(x_0, y_0)$ avec $y_0 \neq 0$. Soit $\Omega(0, \omega)$ le centre du cercle



circonscrit à $FF'M$. La tangente en M a pour équation $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$. Elle recoupe l'axe des ordonnées en $N(0, y)$ avec $y = \frac{b^2}{y_0}$. Les coordonnées de Ω vérifient $x_0^2 + (y_0 - \omega)^2 = c^2 + \omega^2$ soit $2\omega y_0 = x_0^2 + y_0^2 - c^2$.

Maintenant,



$$\begin{aligned} \left(\frac{b^2}{y_0} - \omega\right)^2 &= \frac{b^4}{y_0^2} - \frac{2\omega b^2}{y_0} + \omega^2 - c^2 - \omega^2 \\ &= \frac{b^4 - 2\omega y_0 b^2 - c^2 y_0^2}{y_0^2} \\ &= \frac{b^4 - (x_0^2 + y_0^2 - c^2)b^2 - c^2 y_0^2}{y_0^2} \\ &= \frac{b^2(b^2 + c^2) - b^2 x_0^2 - y_0^2(b^2 + c^2)}{y_0^2} \\ &= \frac{b^2 a^2 - b^2 x_0^2 - y_0^2 a^2}{y_0^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque $M(x_0, y_0)$ appartient à l'ellipse.

La normale recoupe le cercle au point diamétralement opposé à N puisque la tangente et la normale sont perpendiculaires.

Solution 17 (Tangentes à une ellipse)

- Une équation de la tangente en (x_0, y_0) est $\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$, donc (u, v, w) est proportionnel à $\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, -1\right)$. Soit $u = -w \frac{x_0}{a^2}$ et $v = -w \frac{y_0}{b^2}$. En utilisant $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, on obtient $a^2 u^2 + b^2 v^2 - w^2 = 0$. Bien entendu on a aussi $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$. Réciproquement, si $a^2 u^2 + b^2 v^2 - w^2 = 0$ avec $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$, alors $w \neq 0$ et en posant $x_0 = -\frac{a^2 u}{w}$ et $y_0 = -\frac{b^2 v}{w}$, on a $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ et donc $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}'$ et $ux + vy + w = 0$ est bien une équation de la tangente à \mathcal{E}' en (x_0, y_0) .

- Soit $M : \begin{pmatrix} 2a \cos \theta \\ 2a \sin \theta \end{pmatrix}$, et $P : \begin{pmatrix} 2a \cos \alpha \\ 2a \sin \alpha \end{pmatrix}$.

Une équation de (MP) est donc $\begin{vmatrix} 2a(\cos \alpha - \cos \theta) & x - 2a \cos \theta \\ 2b(\sin \alpha - \sin \theta) & x - 2b \sin \theta \end{vmatrix}$. On peut donc choisir $u = -2b(\sin \alpha - \sin \theta)$, $v = 2a(\cos \alpha - \cos \theta)$ et $w = -4ab(\cos \alpha \sin \alpha - \sin \theta \cos \theta)$. On a

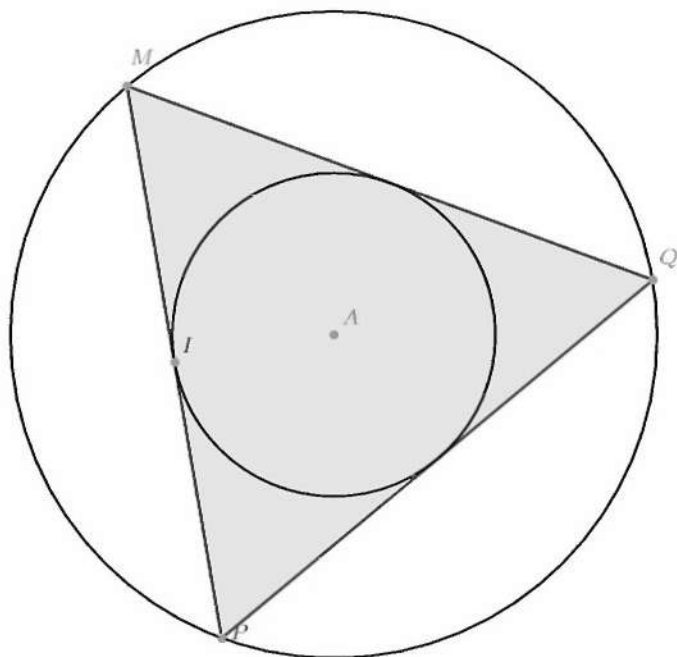
$$\begin{aligned} a^2 u^2 + b^2 v^2 - w^2 &= 4a^2 b^2 (\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \theta + \cos^2 \theta - 4 \sin^2(\alpha - \theta)) \\ &= 8a^2 b^2 (1 - \cos(\alpha - \theta) - 2 + 2 \cos^2(\alpha - \theta)). \end{aligned}$$

D'après la question précédente, (MP) est tangente à \mathcal{E}' lorsque $\cos(\alpha - \theta)$ est racine de $-1 - t - 2t^2 = (t - 1)(2t + 1)$ soit $\cos(\alpha - \theta) = -\frac{1}{2}$ ou encore $\theta \equiv \alpha \pm \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

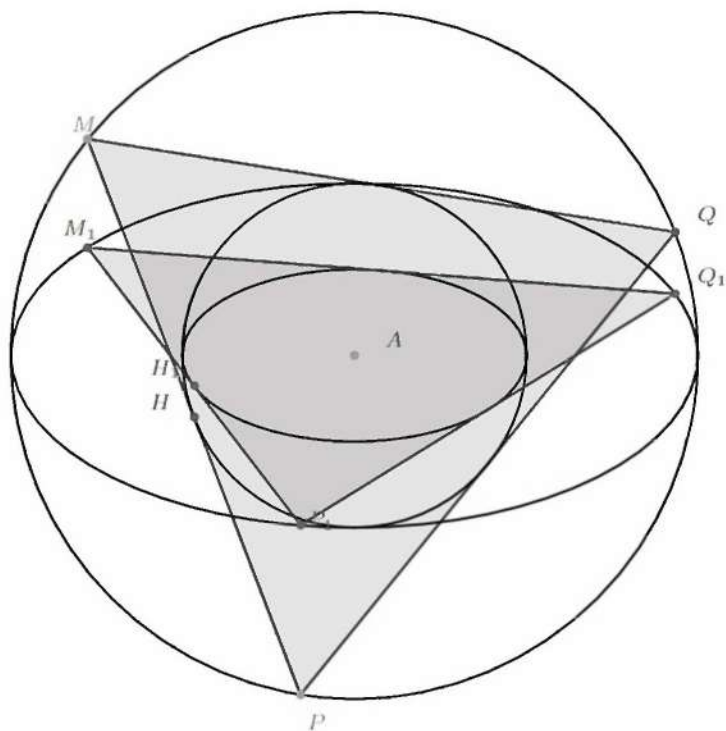
Or si $\theta \equiv \alpha \pm \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ et $\theta \equiv \beta \pm \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ définissent trois points distincts de l'ellipse, on a aussi $\alpha \equiv \beta \pm \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ et donc (PQ) est aussi tangente à \mathcal{E}' .

Autre démonstration :

- On a une démonstration géométrique directe de la propriété lorsque \mathcal{E} et \mathcal{E}' sont deux cercles concentriques. Le rayon de \mathcal{E}' est le double de celui de \mathcal{E} et PMQ est un triangle équilatéral.



- Dans le cas général on utilise une affinité pour transformer les ellipses en cercles. Les points M, P et Q sont transformés en M_1, P_1 et Q_1 respectivement. L'affinité conserve l'alignement et le contact.



Solution 18

On pose $M (a \cos(\phi), b \sin(\phi))$. On a

$$\begin{aligned}
 (MF \cdot MF')^2 &= ((a \cos(\phi) - c)^2 + b^2 \sin^2(\phi)) \cdot ((a \cos(\phi) + c)^2 + b^2 \sin^2(\phi)) \\
 &= (a^2 \cos^2(\phi) + c^2 + b^2 \sin^2(\phi))^2 - (2ac \cos(\phi))^2 \\
 &= a^4 \cos^4(\phi) + c^4 + b^4 \sin^4(\phi) + 2a^2 c^2 \cos^2(\phi) + 2a^2 b^2 \sin^2(\phi) \cos^2(\phi) + 2b^2 c^2 \sin^2(\phi) \\
 &\quad - 4a^2 c^2 \cos^2(\phi) \\
 &= a^4 \cos^4(\phi) + c^4 + b^4 \sin^4(\phi) - 2a^2 c^2 \cos^2(\phi) + 2a^2 b^2 \sin^2(\phi) \cos^2(\phi) + 2b^2 c^2 \sin^2(\phi) \\
 &= (b^2 + c^2)^2 \cos^4(\phi) + b^4 \sin^4(\phi) - 2(b^2 + c^2)c^2 \cos^2(\phi) + 2(b^2 + c^2)b^2 \sin^2(\phi) \cos^2(\phi) \\
 &\quad + 2b^2 c^2 \sin^2(\phi) \\
 &= b^4 (\cos^4(\phi) + \sin^4(\phi) + 2\sin^2(\phi) \cos^2(\phi)) \\
 &\quad + 2b^2 c^2 (\cos^4(\phi) - \cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) \cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) + c^4 (\cos^4(\phi) + 1 - 2\cos^2(\phi)) \\
 &= b^4 (\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi))^2 + 2b^2 c^2 (\cos^2(\phi)(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) - 1) + \sin^2(\phi)) + c^4 (\cos^2(\phi) - 1)^2 \\
 &= b^4 + 2b^2 c^2 \sin^2(\phi) + c^4 \sin^4(\phi) \\
 &= (b^2 + c^2 \sin^2(\phi))^2
 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
 MF \cdot MF' + OM^2 &= b^2 + c^2 \sin^2(\phi) + a^2 \cos^2(\phi) + b^2 \sin^2(\phi) \\
 &= b^2 + c^2 \sin^2(\phi) + b^2 \cos^2(\phi) + c^2 \cos^2(\phi) + b^2 \sin^2(\phi) \\
 &= b^2 + c^2 + b^2 \\
 &= 2a^2 - c^2.
 \end{aligned}$$

Solution 19

1. Soit $M : \begin{pmatrix} a \cos \phi \\ b \sin \phi \end{pmatrix}$ et $N : \begin{pmatrix} a \cos \psi \\ b \sin \psi \end{pmatrix}$. La condition OMP est rectangle en O se traduit par $a^2 \cos \phi \cos \psi + b^2 \sin \phi \sin \psi = 0$.

On a

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{OM^2} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{OP^2} - \frac{1}{b^2} \\
 &= \frac{a^2(1 - \cos^2 \phi) - b^2 \sin^2 \phi}{a^2(a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi)} + \frac{b^2(1 - \sin^2 \psi) - a^2 \cos^2 \psi}{b^2(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)} \\
 &= \frac{(a^2 - b^2) \sin^2 \phi}{a^2(a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi)} - \frac{b^2(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)}{(a^2 - b^2) \cos^2 \psi} \\
 &= \frac{a^2(a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi) - b^2(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)}{(a^2 - b^2)(b^2 \sin^2 \phi(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi) - a^2 \cos^2 \psi(a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi))} \\
 &= \frac{a^2(a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi)b^2(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)}{(a^2 - b^2)(a^2 b^2 \sin^2 \phi \cos^2 \psi + b^4 \sin^2 \phi \sin^2 \psi - a^4 \cos^2 \psi \cos^2 \phi - a^2 b^2 \cos^2 \psi \sin^2 \phi)} \\
 &= \frac{(a^2 - b^2)(b^4 \sin^2 \phi \sin^2 \psi - a^4 \cos^2 \psi \cos^2 \phi)}{a^2(a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi)b^2(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)} \\
 &= \frac{a^2(a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi)b^2(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)}{(a^2 - b^2)(b^2 \sin \phi \sin \psi - a^2 \cos \psi \cos \phi)(b^2 \sin \phi \sin \psi + a^2 \cos \psi \cos \phi)} \\
 &= \frac{a^2(a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi)b^2(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)}{a^2(a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi)b^2(a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

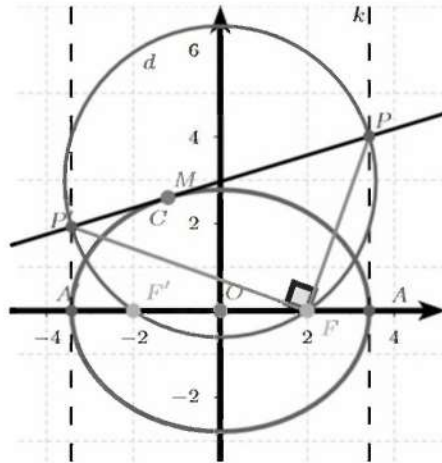
grâce à la relation d'orthogonalité $a^2 \cos \phi \cos \psi + b^2 \sin \phi \sin \psi = 0$.

2. D'après l'inverse de Pythagore (exercice 40 page 181 du cours de seconde) le pied H de la hauteur du triangle OMP rectangle en O vérifie

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OP^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Donc H appartient au cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon $r := \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Comme la droite (MP) est perpendiculaire à (OH) , c'est bien la tangente à \mathcal{C} en H .

Solution 20 (Cercle sur une tangente)



On écrit une équation de la tangente en $M(x_0, y_0)$: $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$. On calcule l'ordonnée du point P d'abscisse a :

$$\begin{aligned} \frac{x_0}{a} + \frac{yy_0}{b^2} &= 1 \\ \text{soit } \frac{yy_0}{b^2} &= 1 - \frac{x_0}{a} \\ \text{soit } y &= \frac{b^2(a - x_0)}{ay_0} \end{aligned}$$

On trouve ainsi $P\left(a, \frac{b^2(a - x_0)}{ay_0}\right)$ et de même, $P'\left(a, \frac{b^2(a + x_0)}{ay_0}\right)$. Enfin $F(c, 0)$. Ainsi :

$$\overrightarrow{FP} \left| \frac{a - c}{b^2(a - x_0)} \right| \quad \text{et} \quad \overrightarrow{FP'} \left| \frac{a + c}{b^2(a + x_0)} \right|. \text{ D'où}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FP'} &= c^2 - a^2 + \frac{b^4(a^2 - x_0^2)}{a^2 y_0^2} \\ &= a^2 - c^2 + b^2 \left(\frac{b^2}{y_0^2} \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2} \right) \right) \\ &= a^2 - c^2 + b^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit que le point F appartient au cercle de diamètre $[P, P']$. Même chose pour le point F' par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

8.9.4 Hyperboles

Solution 21

- $\boxed{1 \iff 2}$ On sait que les asymptotes δ et δ' de \mathcal{H} ont pour équations respectives dans \mathcal{R} $bx - ay = 0$ et $bx + ay = 0$. Leurs vecteurs normaux respectifs sont donc $(b, -a)$ et (b, a) . Elles sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux, ce qui est équivalent, grâce au produit scalaire, à écrire que $b^2 - a^2 = 0$ ou encore, a et b étant positifs, à $a = b$.
- $\boxed{2 \iff 3}$ La condition $a = b$ est clairement équivalente au fait que l'équation réduite de l'ellipse soit $X^2 - Y^2 - a^2 = 0$.
- $\boxed{2 \implies 4}$ Si $a = b$ alors $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$ car $a > 0$ et $e = c/a = \sqrt{2}$.
- $\boxed{4 \implies 2}$ Réciproquement, si $e = \sqrt{2}$ alors $c^2 = 2a^2$. Comme $a^2 + b^2 = c^2$, il s'ensuit que $b^2 = a^2$ et comme a et b sont strictement positifs, on en déduit que $a = b$.

Solution 22

\implies Supposons que \mathcal{H} est une hyperbole. Alors dans un bon repère orthonormal, une équation de \mathcal{H} est $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ où $a, b > 0$. Cette équation s'écrit aussi

$$\mathcal{H} : (bx - ay)(bx + ay) = a^2b^2.$$

On introduit le changement de repère :

$$\begin{cases} X &= bx - ay \\ Y &= bx + ay \end{cases}.$$

Dans ce nouveau repère l'équation de \mathcal{H} est $\mathcal{H} : XY = \gamma$ avec $\gamma = a^2b^2$.

\impliedby Supposons que dans un repère par forcément orthonormal $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ une équation de \mathcal{H} soit $XY = \gamma$. Montrons que \mathcal{H} est une hyperbole. Introduisons les vecteurs : $\vec{u}' = \frac{\vec{i}}{\|\vec{i}\|} + \frac{\vec{j}}{\|\vec{j}\|}$ et $\vec{v}' = \frac{\vec{i}}{\|\vec{i}\|} - \frac{\vec{j}}{\|\vec{j}\|}$ puis les vecteurs $\vec{u} = \vec{u}'/\|\vec{u}'\|$ et $\vec{v} = \vec{v}'/\|\vec{v}'\|$. Le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) est orthonormal. De plus, on a les formules de changement de repère :

$$\begin{cases} X &= \frac{1}{\|\vec{i}\|} \left(\frac{x}{\|\vec{u}'\|} + \frac{y}{\|\vec{v}'\|} \right) \\ Y &= \frac{1}{\|\vec{j}\|} \left(\frac{x}{\|\vec{u}'\|} - \frac{y}{\|\vec{v}'\|} \right) \end{cases}$$

et dans le nouveau repère une équation de \mathcal{H} est :

$$\frac{1}{\|\vec{i}\| \|\vec{j}\|} \left(\frac{x^2}{\|\vec{u}'\|^2} - \frac{y^2}{\|\vec{v}'\|^2} \right) = \gamma$$

qui est de la forme $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ avec $a := \sqrt{\|\vec{i}\| \|\vec{j}\| \gamma \|\vec{u}'\|}$ et $b := \sqrt{\|\vec{i}\| \|\vec{j}\| \gamma \|\vec{v}'\|}$ (On peut supposer $\gamma > 0$ quitte à permuter a et b). Donc \mathcal{H} est bien une hyperbole.

Solution 23

Dans le repère orthonormé adéquat, l'équation de l'hyperbole est $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ et les deux asymptotes ont pour équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$ ou encore :

$$\mathcal{D}_1 : bx + ay = 0 \quad \mathcal{D}_2 : bx - ay = 0$$

et les vecteurs $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ sont normaux à ces droites. Paramétrons un point M de la branche droite de l'hyperbole : $M(a \operatorname{ch} t, b \operatorname{sh} t)$. En écrivant que $H = M + \lambda \vec{n}_1$, on trouve que $\lambda = -\frac{ab}{a^2 + b^2} e^t$ puis

que $\overrightarrow{MH} = -\frac{ab}{a^2 + b^2}e^t(b, a)$. De la même façon, on trouve que $\overrightarrow{MH'} = -\frac{ab}{a^2 + b^2}e^{-t}(b, -a)$ et on calcule finalement

$$\boxed{\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MH'} = \frac{a^2 b^2 (b^2 - a^2)}{(a^2 + b^2)^2}}$$

qui est bien indépendant de t . Par symétrie, on obtient le même résultat si M se trouve sur la branche gauche de l'hyperbole.

Solution 24

Dans un repère orthonormé bien choisi, l'équation de l'hyperbole est

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

En notant $M(x_0, y_0)$, l'équation cartésienne de la tangente en M est :

$$T_M : \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Les coordonnées du foyer sont $F(c, 0)$ avec $c^2 = a^2 + b^2$. Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} x_0/a^2 \\ -y_0/b^2 \end{pmatrix}$ est normal à la tangente donc $H = F + \lambda \vec{n}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque $H \in T_M$, on trouve que $\lambda = (1 - \frac{cx_0}{a^2}) / (\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4})$, puis

$$\begin{cases} x_H &= c + \frac{(1 - cx_0/a^2)x_0/a^2}{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4} \\ y_H &= -\frac{(1 - cx_0/a^2)y_0/b^2}{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4} \end{cases}$$

et l'on calcule ensuite

$$\begin{aligned} x_H^2 + y_H^2 &= c^2 + \frac{(1 - cx_0/a^2)^2 + 2cx_0/a^2(1 - cx_0/a^2)}{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4} \\ &= c^2 + \frac{(1 - cx_0/a^2)(1 + cx_0/a^2)}{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4} \\ &= c^2 + \frac{1 - c^2 x_0^2/a^4}{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4} \\ &= c^2 + \frac{1 - x_0^2/a^2 - b^2 x_0^2/a^4}{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4} \quad \text{car } c^2 = a^2 + b^2 \\ &= c^2 - \frac{b^2(y_0^2/b^4 + x_0^2/a^4)}{x_0^2/a^4 + y_0^2/b^4} \quad \text{car } x_0^2/a^2 - y_0^2/b^2 = 1 \\ &= c^2 - b^2 = a^2 \end{aligned}$$

Solution 25

1. On sait que le point M est élément de l'hyperbole de grand axe a si et seulement si

$$\left| \left\| \overrightarrow{FM(t)} \right\| - \left\| \overrightarrow{F'M(t)} \right\| \right| = 2a.$$

2. Comme pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M(t)$ est distinct de F et F' , la fonction θ est dérivable sur \mathbb{R} . On utilise la formule de dérivation de la norme, on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\theta'(t) = \frac{\overrightarrow{FM(t)} \cdot \vec{f}'(t)}{\left\| \overrightarrow{FM(t)} \right\|} - \frac{\overrightarrow{F'M(t)} \cdot \vec{f}'(t)}{\left\| \overrightarrow{F'M(t)} \right\|} = \vec{u}(t) \cdot \vec{f}'(t)$$

avec $\vec{u}(t) = \frac{\overrightarrow{FM(t)}}{\|\overrightarrow{FM(t)}\|} - \frac{\overrightarrow{F'M(t)}}{\|\overrightarrow{F'M(t)}\|}$. Comme $|\theta|$ est constante, on sait aussi que $\theta' = 0$ et il vient que $\vec{u}(t) \cdot \vec{f}'(t) = 0$.

3. Soit $t \in \mathbb{R}$ et soit M le point de l'hyperbole de paramètre t . Le vecteur $\vec{f}'(t)$ dirige la tangente à l'ellipse en M . On sait d'après la question précédente que $\vec{u}(t)$ est orthogonal à $\vec{f}'(t)$ et donc il dirige la normale en M à l'hyperbole. On sait d'après l'exercice 32 page 294 du cours de première qu'il dirige aussi la bissectrice extérieure des droites (FM) et $(F'M)$.
4. C'est la bissectrice intérieure des droites (FM) et $(F'M)$.

8.9.5 Courbes du second degré

Solution 26

Le discriminant de la courbe vaut 4. La courbe est donc une ellipse ou est réduite à un point ou vide. On effectue un changement d'origine du repère défini par les formules

$$\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$$

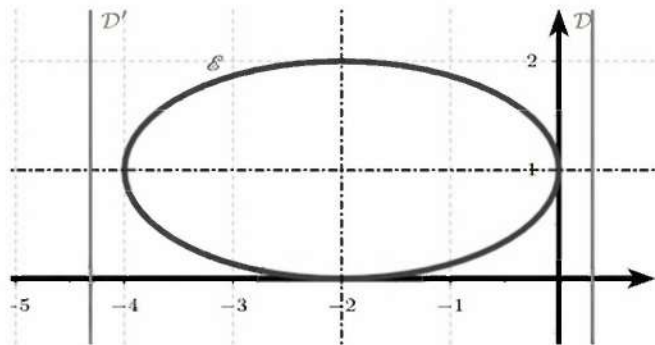
pour éliminer les termes en x et y . On choisit à cette fin α et β avec

$$\begin{cases} 2\alpha + 4 = 0 \\ 8\beta - 8 = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire $\alpha = -2$ et $\beta = 1$. L'origine du nouveau repère est $\Omega(-2, 1)$ et dans ce nouveau repère l'équation devient

$$\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1.$$

On reconnaît l'équation d'une ellipse de centre Ω et de demi axes $a = 2$ et $b = 1$. Dans les nouvelles coordonnées, les foyers sont $F(c, 0)$ et $F(-c, 0)$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Les directrices \mathcal{D} et \mathcal{D}' admettent comme équation respectives : $X = a^2/c$ et $X = -a^2/c$ avec $a^2/c = 4\sqrt{3}/3$. Enfin l'excentricité de l'ellipse est $e = c/a = \sqrt{3}/2$.



Solution 27

Procédant comme dans l'exercice précédent, on supprime les termes linéaires dans l'équation cartésienne

de \mathcal{H} grâce à un changement de variable $\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$ ce qui amène le système $\begin{cases} -18\alpha + 18 = 0 \\ 32\beta - 32 = 0 \end{cases}$ et

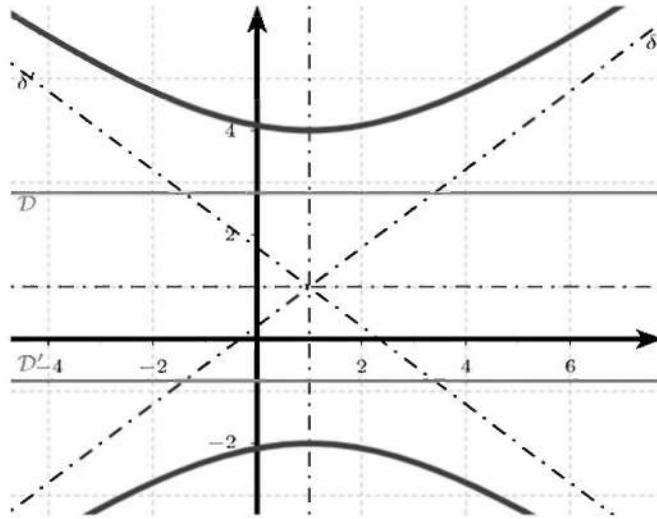
donc $\alpha = \beta = 1$. L'origine du nouveau repère est donc $\Omega(1, 1)$ et l'équation de \mathcal{H} s'écrit :

$$\frac{Y^2}{9} - \frac{X^2}{16} - 1 = 0.$$

On effectue alors une rotation d'angle $\pi/2$: $\begin{cases} u = Y \\ v = -X \end{cases}$ et dans ces dernières coordonnées, l'équation de \mathcal{H} devient :

$$\frac{u^2}{9} - \frac{v^2}{16} - 1 = 0.$$

La courbe \mathcal{H} est donc une hyperbole de demi axes $a = 3$ et $b = 4$. Dans les coordonnées (u, v) , les foyers de \mathcal{H} sont $F(c, 0)$ et $F(-c, 0)$ avec $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$. Les directrices \mathcal{D} et \mathcal{D}' admettent comme équations respectives : $X = a^2/c$ et $X = -a^2/c$ avec $a^2/c = 9/5$. Enfin l'excentricité de l'hyperbole est $e = c/a = 5/3$ et ses asymptotes sont $\delta : y = \frac{b}{a}x$ et $\delta' : y = -\frac{b}{a}x$ avec $b/a = 4/3$.



Solution 28

Le discriminant de cette courbe est $\Delta = 5/4 > 0$. La courbe est une ellipse ou est réduite à un point ou vide. Il n'y a pas de terme linéaire à éliminer. Afin de faire disparaître le terme en xy , on effectue une

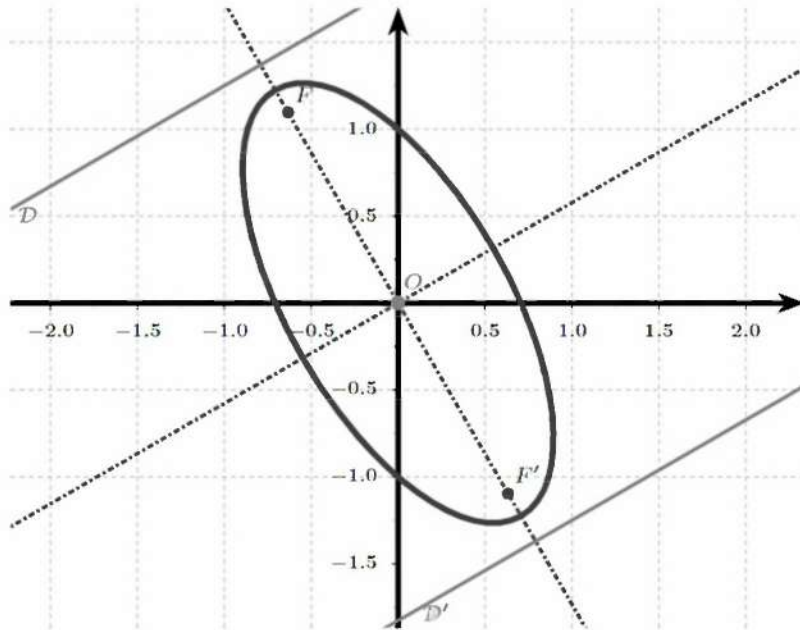
rotation d'angle θ et de centre O : $\begin{cases} x = \cos \theta X - \sin \theta Y \\ y = \sin \theta X + \cos \theta Y \end{cases}$. Le coefficient devant XY est

$$\begin{aligned} \sqrt{3}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 2 \cos \theta \sin \theta &= \sqrt{3} \cos 2\theta - \sin 2\theta \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta\right) \\ &= -2\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

qui s'annule par exemple pour $\theta = -\pi/3$. Pour cette valeur de θ , l'équation de la courbe devient

$$\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{\frac{2}{5}} - 1 = 0.$$

La courbe est une ellipse de centre O , de demi axes $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{(2/5)}$, d'excentricité $e = 2\sqrt{5}/5$. Dans le nouveau repère, l'équation des directrices est $X = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$ et les foyers ont pour coordonnées : $\left(\pm \frac{2}{5}\sqrt{10}, 0\right)$.

**Solution 29**

Le discriminant de cette courbe est $\Delta = -8 < 0$. La courbe est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes. On effectue le changement de variable $\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$ afin de supprimer les termes linéaires, ce

qui amène le système : $\begin{cases} 3\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 3\beta + 2\sqrt{2} = 0 \end{cases}$ qui admet comme solution : $\alpha = \sqrt{2}/4$ et $\beta = -3\sqrt{2}/4$.

L'équation s'écrit alors dans le repère de centre $\Omega(\sqrt{2}/4, -3\sqrt{2}/4)$:

$$X^2 + 6XY + Y^2 + 1 = 0.$$

Afin de faire disparaître le terme en XY , on effectue une rotation d'angle θ et de centre Ω : $\begin{cases} X = \cos \theta u - \sin \theta v \\ Y = \sin \theta u + \cos \theta v \end{cases}$

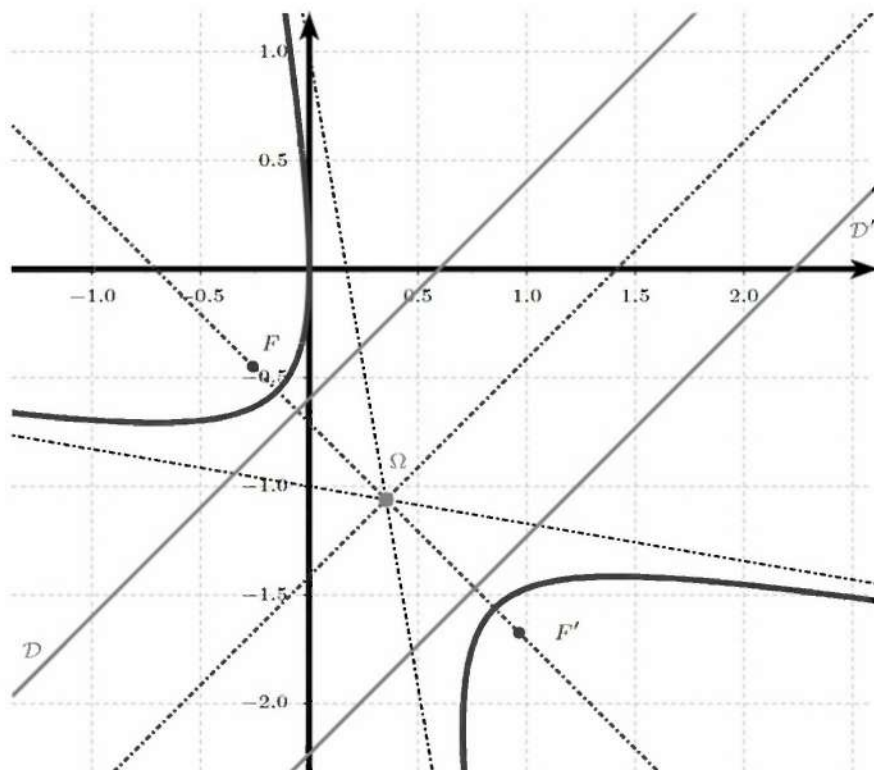
Le coefficient devant uv est

$$6(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 6 \cos(2\theta)$$

qui s'annule par exemple pour $\theta = \pi/4$. Pour cette valeur de θ , l'équation de la courbe devient

$$2u^2 - 4v^2 = 1.$$

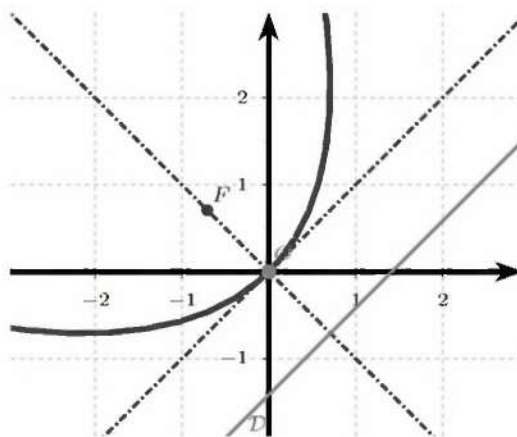
La courbe est une hyperbole de centre Ω , de demi axes $a = \sqrt{2}/2$ et $b = 1/2$, d'excentricité $e = \sqrt{6}/2$. Dans le nouveau repère, l'équation des directrices est $X = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ et les foyers ont pour coordonnées : $\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.

**Solution 30**

On calcule le discriminant $\Delta = 0$. La courbe est une parabole, une droite, la réunion de deux droites parallèles ou l'ensemble vide. Par le changement de coordonnées suggéré, l'équation devient

$$Y^2 - 4X = 0.$$

La courbe est donc une parabole de sommet O , de directrice la droite d'équation est $X = -1$ et de foyer $F(1,0)$.

**Solution 31**

On calcule le discriminant $\Delta = -4 < 0$. La courbe est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes. Remarquons que $x^2 - 4y^2 = (x - 2y)(x + 2y)$ et donc que la courbe est la réunion des deux droites sécantes en O $x - 2y = 0$ et $x + 2y = 0$.

Solution 32

On calcule le discriminant $\Delta = 0$. La courbe est une parabole, une droite, la réunion de deux droites

parallèles ou l'ensemble vide. On réduit l'expression

$$x^2 + 3x + 4y + 1 = 0 \iff \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 4\left(y - \frac{5}{16}\right) = 0$$

ce qui nous amène à effectuer le changement de variable

$$\begin{cases} X &= x + \frac{3}{2} \\ Y &= y - \frac{5}{16} \end{cases}.$$

L'origine du nouveau repère est $\Omega\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{16}\right)$ et dans ce nouveau repère l'équation devient

$$X^2 + 4Y = 0.$$

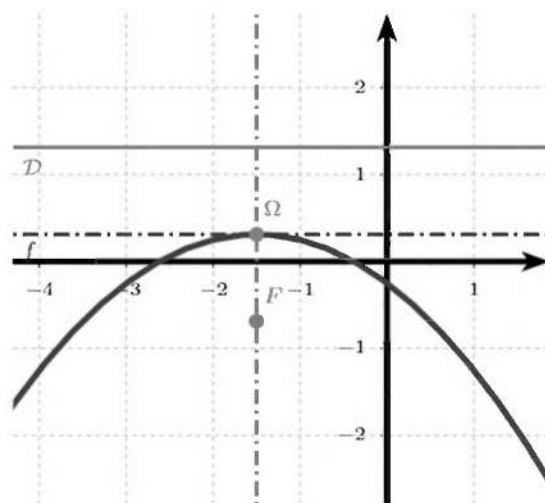
On effectue ensuite une rotation des axes d'angle $-\frac{\pi}{2}$ définie par

$$\begin{cases} x &= -Y \\ y &= X \end{cases}.$$

L'équation devient alors dans ce nouveau repère

$$y^2 - 4x = 0$$

donc c'est une parabole de paramètre $p = 2$ et de centre Ω . Son foyer est $F(1, 0)$ et sa directrice admet comme équation $x = -1$.



Solution 33

On calcule le discriminant $\Delta = 4$. La courbe est une ellipse ou alors réduite à un point ou vide. Par un changement d'origine du repère défini par les formules

$$\begin{cases} x &= X + \alpha \\ y &= Y + \beta \end{cases}$$

pour éliminer les termes en x et y , on choisit α et β avec

$$\begin{cases} 4\alpha - 3 &= 0 \\ \beta + 1 &= 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire $\alpha = \frac{3}{4}$ et $\beta = -1$. L'origine du nouveau repère est $\Omega(\frac{3}{4}, -1)$ et dans ce nouveau repère l'équation devient

$$X^2 + Y^2 - \frac{49}{16} = 0.$$

On reconnaît l'équation d'un cercle de centre Ω et de rayon $\frac{7}{4}$.

Solution 34

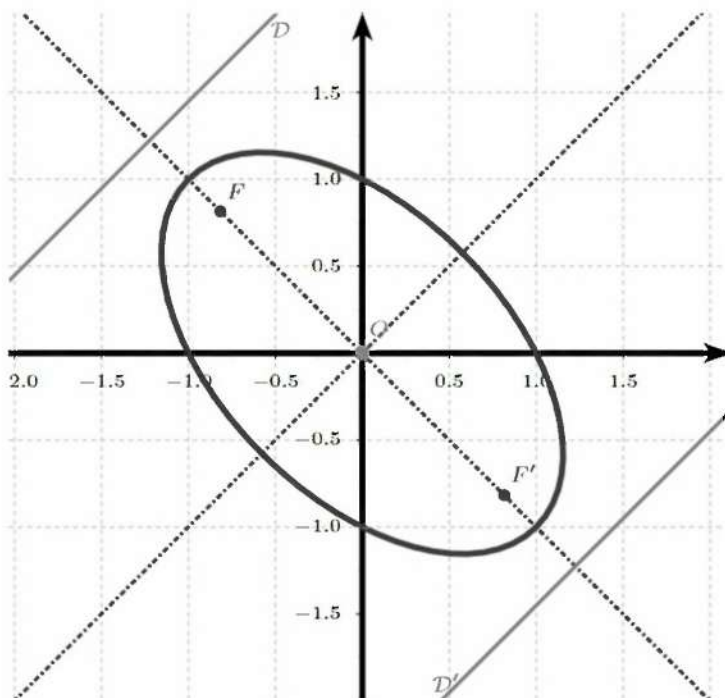
On calcule le discriminant $\Delta = 1^2 - (\frac{1}{2})^2 > 0$. La courbe est une ellipse ou alors réduite à un point ou vide. L'équation ne présente pas de termes en x et y . On effectue une rotation des axes d'angle θ définie par les formules de changement de repère

$$\begin{cases} x = \cos \theta X - \sin \theta Y \\ y = \sin \theta X + \cos \theta Y \end{cases}$$

et pour annuler le terme en xy , on choisit $\cos(2\theta) = 0$, c'est-à-dire $\theta = \pi/4$. L'équation devient alors dans ce nouveau repère

$$\frac{X^2}{\frac{2}{3}} + \frac{Y^2}{2} = 1$$

c'est une ellipse d'excentricité $e = \frac{\sqrt{6}}{2}$ et de centre O . Dans le nouveau repère les directrices ont pour équation : $X = \pm\sqrt{3}$ et les foyers ont pour coordonnées : $(\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)$. On trace sans peine cette ellipse.



Solution 35

On calcule le discriminant $\Delta = 25^2 - 7^2 > 0$. La courbe est une ellipse ou alors réduite à un point ou vide. Par un changement d'origine du repère défini par les formules

$$\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$$

pour éliminer les termes en x et y , on choisit α et β avec

$$\begin{cases} 25\alpha - 7\beta &= -32 \\ -7\alpha + 25\beta &= 32 \end{cases}$$

c'est-à-dire $\alpha = -1$ et $\beta = 1$. L'origine du nouveau repère est $\Omega(-1, 1)$ et dans ce nouveau repère l'équation devient

$$25X^2 - 14XY + 25Y^2 = 288.$$

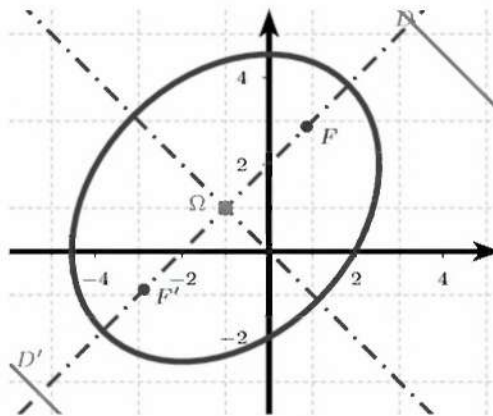
On effectue ensuite une rotation des axes d'angle θ définie par les formules de changement de repère

$$\begin{cases} X &= \cos \theta u - \sin \theta v \\ Y &= \sin \theta u + \cos \theta v \end{cases}$$

et pour annuler le terme en XY , on choisit $\cos(2\theta) = 0$, par exemple, $\theta = \pi/4$. L'équation devient alors dans ce nouveau repère

$$\frac{u^2}{4^2} + \frac{v^2}{3^2} = 1.$$

C'est une ellipse d'excentricité $e = \sqrt{7}/4$ et de centre Ω . On trace sans peine cette ellipse.



Solution 36

Le discriminant vaut $\Delta = -4 < 0$. Cette courbe est soit une hyperbole, soit la réunion de deux droites sécantes. Par un changement d'origine de repère défini par les formules

$$\begin{cases} x &= X + \alpha \\ y &= Y + \beta \end{cases}$$

pour éliminer les termes linéaires, on choisit α et β vérifiant

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta &= 6 \\ \alpha &= 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire $\alpha = 0$ et $\beta = 3$. Le centre du nouveau repère a pour coordonnées $\Omega(0, 3)$. Par un changement de repère orthonormé (rotation des axes), on sait que l'on peut trouver un angle θ tel que dans le nouveau repère, la courbe ait pour équation

$$Ax^2 + Cy^2 = -16$$

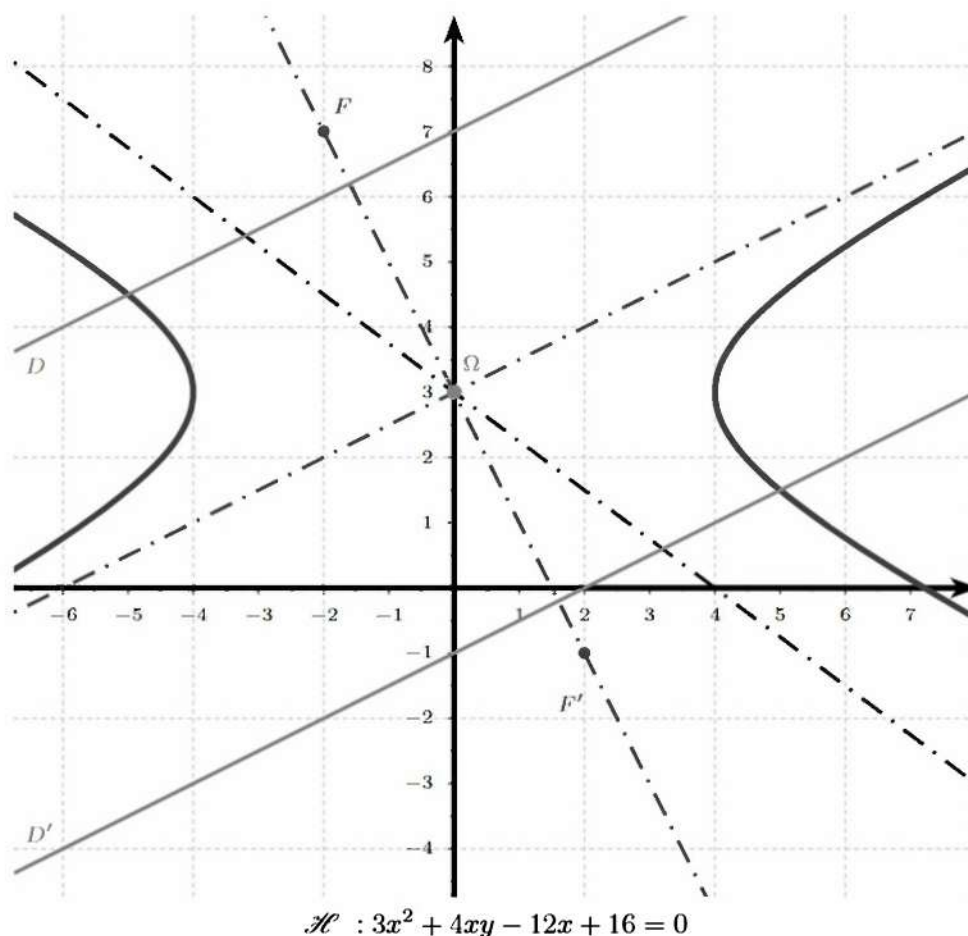
mais puisque

$$\begin{cases} AC &= \Delta = -4 \\ A + C &= 3 \end{cases}$$

A et C sont racines du trinôme $T^2 - 3T - 4 = 0$, c'est-à-dire $\{A, C\} = \{-1, 4\}$. Les deux équations possibles de la courbe sont donc

$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1 \text{ ou } -\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

On reconnaît une hyperbole de demi-axes $\boxed{4}$ et $\boxed{2}$. Le centre est le point $\boxed{\Omega(0, 3)}$.



Solution 37

L'équation de \mathcal{C} s'écrit en factorisant par $(y - x)$:

$$[y - x](x^2 + xy + y^2 + \lambda(x + y) + \mu) = 0$$

La courbe contient la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice). Intéressons-nous à la courbe du second degré. Par un changement de repère défini par les formules

$$\begin{cases} x &= X + \alpha \\ y &= Y + \beta \end{cases}$$

on peut annuler les termes en x et y en choisissant α et β solutions du système

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -\lambda \\ \alpha + 2\beta = -\lambda \end{cases}$$

c'est-à-dire $\alpha = \beta = -\lambda/3$. Dans ce nouveau repère, l'équation devient

$$X^2 + XY + Y^2 = \frac{\lambda^2 - 3\mu}{3}.$$

Si $\lambda^2 - 3\mu < 0$, cette courbe est vide. Sinon, on sait que par une rotation des axes, on peut trouver un nouveau repère dans lequel l'équation devient

$$\Lambda X^2 + BY^2 = \frac{\lambda^2 - 3\mu}{3}$$

avec $\Delta = \Lambda B = 1 - 1/4 = 3/4 > 0$ et $\Lambda + B = 2$. On reconnaît une ellipse. Λ et B sont racines du trinôme $4T^2 - 8T + 3 = 0$, c'est-à-dire $\{3/2, 1/2\}$. L'équation réduite de l'ellipse s'écrit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ avec } \begin{cases} a^2 = \frac{\lambda^2 - 3\mu}{3\Lambda} \\ b^2 = \frac{\lambda^2 - 3\mu}{3B} \end{cases}$$

Pour avoir $a > b$, on prend $\Lambda < B$. Alors l'excentricité vaut $e = c/a = \sqrt{1 - b^2/a^2} = \sqrt{1 - \Lambda/B} =$

$$\boxed{\sqrt{2/3}}.$$

8.9.6 Exercices supplémentaires

Solution 38

L'ensemble des solutions est une ellipse. Les foyers ont pour coordonnées $(a^2, 0)$ et $(2a, 0)$. Le grand axe vaut 3. Il est plus grand que la distance focale.

$|a^2 - 2a| < 3 \implies (a^2 - 2a + 3)(a^2 - 2a - 3) < 0$. Comme on a $a^2 - 2a + 3 > 0$ pour tout réel a , on a $(a - 3)(a + 1) = a^2 - 2a - 3 < 0$, donc $-1 < a < 3$.

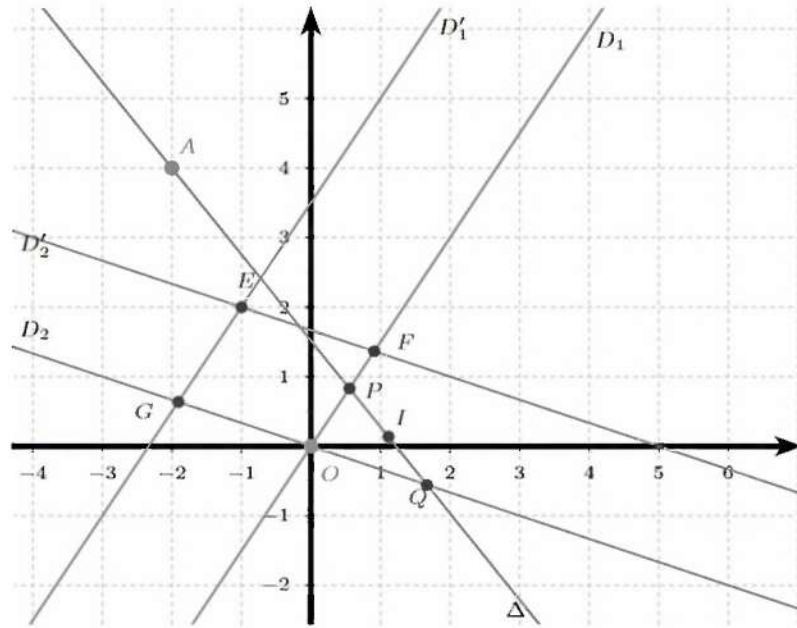
Solution 39

Soit E le milieu de $[OA]$ choisi comme origine. Soit D'_1 la parallèle à D_1 passant par E , choisie comme axe des abscisses. Soit D'_2 la parallèle à D_2 passant par E , choisie comme axe des ordonnées. Soit enfin $F = D'_2 \cap D_1$ et $G = D'_1 \cap D_2$.

Dans le repère $(E; F, G)$, la droite D_1 admet pour équation $x = 1$ et la droite D_2 admet pour équation $y = 1$. on a $O(1, 1)$ et $A(-1, -1)$.

Soit $y = m(x+1) - 1$ l'équation réduite de la droite Δ où $m \in \mathbb{R}$. La droite Δ coupe D_1 en $P(1, 2m-1)$ et D_2 en $P(\frac{2}{m} - 1, 1)$.

Donc $I(\frac{1}{m}, m)$ appartient à l'hyperbole d'équation $xy = 1$ d'asymptotes D'_1 et D'_2 .



Attention, cette hyperbole n'est équilatère que si le repère $(E; F, G)$ est orthonormé.

Inversement le point $I \left(\frac{1}{m}, m \right)$ de l'hyperbole est le milieu de $[PQ]$ avec $P = \Delta \cap D_1$ et $Q = \Delta \cap D_2$, où Δ désigne la droite passant par A , d'équation réduite $y = m(x + 1) - 1$.

Solution 40

On choisit un repère orthonormé direct d'origine O dans lequel $A(1, 0)$. Soit $M(\cos \theta, \sin \theta)$ un point de C . La droite (OM) admet comme équation $x \cos \theta - y \sin \theta = 0$. La droite (OM) admet comme équation $x \cos \theta + y = \sin \theta$. En résolvant ce système on trouve les coordonnées de I :

$$x = \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta}; \quad y = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}.$$

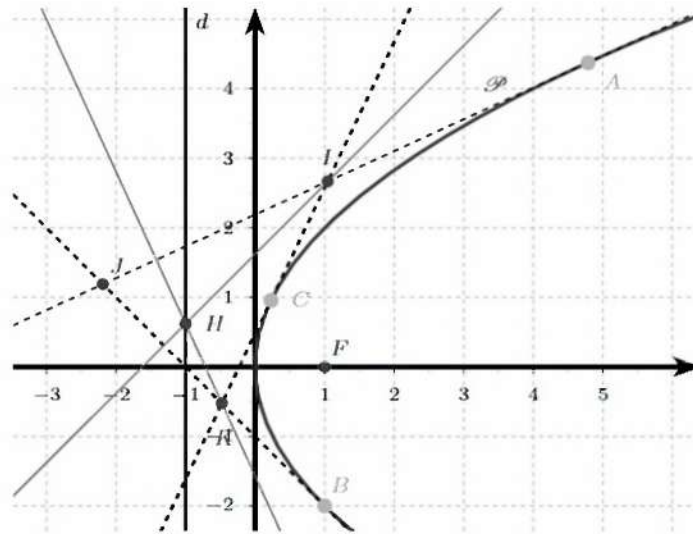
Maintenant on pose $t := \theta/2$, on trouve

$$y = \tan t = \tan(\theta/2) \text{ et } x = \frac{2 \cos^2 t - 1}{2 \cos^2 t} = 1 - \frac{1}{2} (1 + \tan^2(\theta/2)) = \frac{1}{2} (1 - y^2).$$

Donc le lieu du point I est inclus dans la parabole d'équation $x = \frac{1}{2} (1 - y^2)$ de foyer O et de directrice la droite d'équation $x = 1$.

Inversement, la fonction $\theta \mapsto \tan(\theta/2)$ réalise une bijection de $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ sur \mathbb{R} . Donc tout point de la parabole d'ordonnée y est atteint par $M(\cos \theta, \sin \theta)$ tel que $\tan(\theta/2) = y$.

Solution 41



La tangente au point $M(x_0, y_0)$ à la parabole \mathcal{P} d'équation $y^2 = 2px$ est dirigée par $\vec{t} \begin{vmatrix} y_0 \\ p \end{vmatrix}$ donc admet comme équation $y_0(y - y_0) = p(x - x_0)$ soit $yy_0 - px = px_0$. Avec des notations transparentes, les coordonnées de J , intersection de la tangente au point A et de la tangente au point B sont solution du système

$$\begin{cases} yy_A - px = px_A & \times (-1) & \times y_B \\ yy_B - px = px_B & \times 1 & \times (-y_A) \end{cases}$$

$$\text{soit } y(y_B - y_A) = p(x_B - x_A)$$

$$\text{soit } y_J = p \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A},$$

$$\text{et } -px(y_B - y_A) = p(x_A y_B - x_B y_A)$$

$$\text{soit } x_J = \frac{x_B y_A - x_A y_B}{y_B - y_A}.$$

La hauteur issue de J dans le triangle IJK défini par les trois tangentes est parallèle à la normale à \mathcal{P} au point C . Elle admet donc comme équation $y_C(x - x_J) + p(y - y_J) = 0$ soit

$$y_C \left(x - \frac{x_B y_A - x_A y_B}{y_B - y_A} \right) + p \left(y - p \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} \right) = 0.$$

En changeant l'ordre des lettres A, B et C , les coordonnées de l'orthocentre H sont solution du système

$$\begin{cases} y_C x + p y = y_C \frac{x_B y_A - x_A y_B}{y_B - y_A} + p^2 \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} & \times 1 \\ y_A x + p y = y_A \frac{x_C y_B - x_B y_C}{y_C - y_B} + p^2 \frac{x_C - x_B}{y_C - y_B} & \times (-1) \end{cases}$$

$$\text{donc } x_H(y_C - y_A) = y_C \frac{x_B y_A - x_A y_B}{y_B - y_A} - y_A \frac{x_C y_B - x_B y_C}{y_C - y_B} + p^2 \left(\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} - \frac{x_C - x_B}{y_C - y_B} \right)$$

En posant $T := x_H(y_C - y_A)(y_A - y_B)(y_B - y_C)$ on obtient

$$\begin{aligned}
 T &= y_C(x_B y_A - x_A y_B)(y_C - y_B) - y_A(x_C y_B - x_B y_C)(y_B - y_A) \\
 &\quad + p^2((x_B - x_A)(y_C - y_B) - (x_C - x_B)(y_B - y_A)) \\
 &= x_A(-y_B y_C(y_C - y_B)) + x_B(y_A y_C(y_C - y_B) + y_A y_C(y_B - y_A)) + x_C(y_B y_A(y_A - y_B)) \\
 &\quad + p^2(x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_B + y_B - y_A) + x_C(y_A - y_B)) \\
 &= x_A(y_B^2 y_C - y_C^2 y_B) + x_B((y_C^2 y_A - y_A^2 y_C) + x_C(y_A^2 y_B - y_B^2 y_A)) \\
 &\quad + p^2(x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)) \\
 &= 2p[x_A(x_B y_C - x_C y_B) + x_B(x_C y_A - x_A y_C) + x_C(x_A y_B - x_B y_A)] \\
 &\quad + \frac{p}{2}(y_A^2(y_B - y_C) + y_B^2(y_C - y_A) + y_C^2(y_A - y_B)) \\
 &= 2p \left[\underbrace{x_A x_B (y_C - y_C) + x_B x_C (y_A - y_A) + x_C x_A (y_B - y_B)}_{=0} \right] \\
 &\quad + \frac{p}{2}(y_A^2 y_B - y_A^2 y_C + y_B^2 y_C - y_B^2 y_A + y_C^2 y_A - y_C^2 y_B) \\
 &= -\frac{p}{2}(y_C - y_A)(y_A - y_B)(y_B - y_C),
 \end{aligned}$$

car $(y_C - y_A)(y_A - y_B)(y_B - y_C) = \cancel{y_A y_B y_C} - y_C y_B^2 - y_A^2 y_B + y_A y_B^2 - y_A y_C^2 + y_B y_C^2 + y_A^2 y_C - \cancel{y_A y_B y_C}$.

On obtient bien ce qui était demandé, à savoir $x_H = -\frac{p}{2}$.

Solution 42

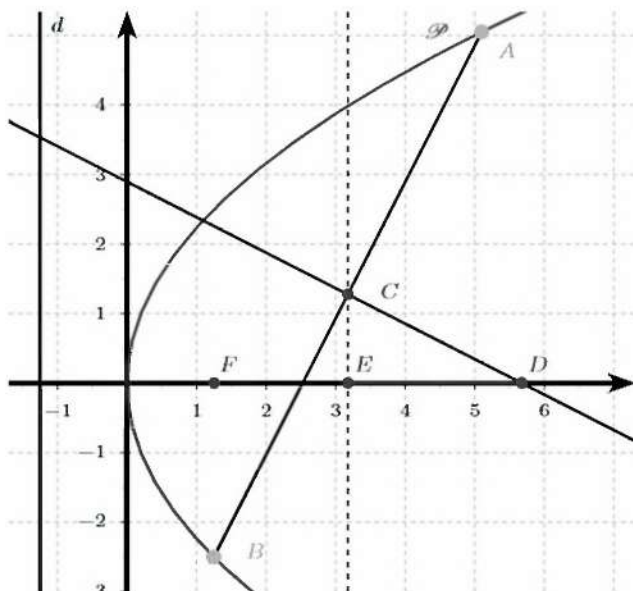
La projection orthogonale du segment $[CD]$ sur l'axe de la parabole a pour longueur p .

En effet, soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ les deux points de la parabole \mathcal{P} d'équation $y^2 = 2px$.

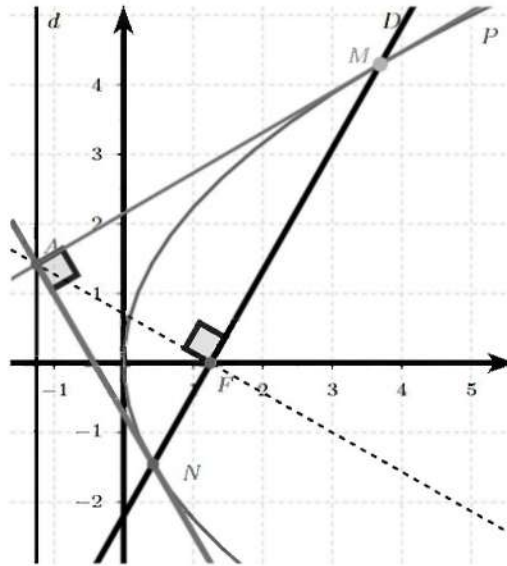
La droite (AB) est dirigée par $\overrightarrow{AB} \begin{cases} x_B - x_A = \frac{y_B^2 - y_A^2}{2p} \\ y_B - y_A \end{cases}$ donc aussi par $\vec{u} \begin{cases} y_B + y_A \\ 2p \end{cases}$ Donc la droite (DC)

admet comme équation $(y_B + y_A)(x - x_C) + 2p(y - y_C) = 0$.

Sur la droite (DC) , le point d'ordonnée $y = 0$ est le point D . D'où $(y_B + y_A)(x_D - x_C) = 2py_C$ soit $2y_C(x_D - x_C) = 2py_C$ et $x_D - x_C = p$ ce qu'il fallait établir.



Solution 43



Soit $M(x_0, y_0)$ un point de la parabole d'équation $y^2 = 2px$ avec $y_0 \neq 0$.

La droite (MF) est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} x_0 - \frac{p}{2} \\ y_0 \end{pmatrix}$ et admet de ce fait pour équation $\begin{vmatrix} y_0^2 - p^2 & x_0 - \frac{p}{2} \\ 2py_0 & y \end{vmatrix} = 0$
soit $y(y_0^2 - p^2) = 2py_0 \left(x_0 - \frac{p}{2}\right) = py_0(2x - p)$.

On cherche un deuxième point $N(x, y)$ vérifiant $y = 2px$ sur cette droite. Il vérifie donc $y^2 + \left(\frac{p^2}{y_0} - y_0\right)y - p^2 = 0$. Sachant que l'une des racines est l'ordonnée de M c'est-à-dire y_0 , l'autre est obtenue par produit des racines : c'est donc $y_N = -\frac{p^2}{y_0}$. Par suite

$$x_N = \frac{1}{2p} \frac{p^4}{y_0^2} = \frac{p^3}{2y_0^2}.$$

Les tangentes en M et en N sont dirigées respectivement par $\vec{u}_M \begin{pmatrix} y_M \\ p \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_N \begin{pmatrix} y_N \\ p \end{pmatrix}$ dont le produit scalaire est

$$\vec{u}_M \cdot \vec{u}_N = y_M y_N + p^2 = -p^2 + p^2 = 0.$$

Ces deux tangentes sont donc perpendiculaires.

Calculons l'abscisse de leur point d'intersection A .

Une équation de la tangente en M est $y_M(y - y_M) = p(x - x_M)$ soit $y_M y - px = px_M$.

Ainsi les coordonnées de A sont solution du système

$$\begin{array}{r|l|l} y_M y - px = px_M & \times y_N & \times 1 \\ y_N y - px = px_N & \times (-y_M) & \times (-1) \end{array}$$

D'où $-px_\Lambda(y_N - y_M) = p(x_M y_N - x_N y_M)$, d'où

$$\begin{aligned} x_\Lambda &= -\frac{x_0 \left(-\frac{p^2}{y_0} \right) - \frac{p^3}{2y_0^2} y_0}{-\frac{p^2}{y_0} - y_0} \\ &= -\frac{p^2}{2y_0} \frac{2x_0 + p}{\frac{p^2}{y_0} + y_0} \\ &= -\frac{p^2}{2} \frac{2x_0 + p}{p^2 + y_0^2} \\ &= -\frac{p^2}{2} \frac{2x_0 + p}{p^2 + 2px_0} \\ &= -\frac{p^2}{2}. \end{aligned}$$

Autrement dit le point d'intersection des deux tangentes est situé sur la directrice.

Maintenant la droite (ΛF) est hauteur du triangle $MN\Lambda$. Pour cela on calcule l'ordonnée de Λ :

$y_\Lambda(y_M - y_N) = p(x_M - x_N)$, d'où

$$\begin{aligned} y_\Lambda &= p \frac{x_0 - \frac{p^3}{2y_0^2}}{y_0 + \frac{p^2}{y_0}} \\ &= \frac{p}{2y_0} \frac{2y_0^2 x_0 - p^3}{y_0^2 + p^2} \\ &= \frac{p}{2y_0} \frac{4px_0^2 - p^3}{2px_0 + p^2} \\ &= \frac{p}{2y_0} \frac{4x_0^2 - p^2}{2x_0 + p} \\ &= \frac{p}{2y_0} (2x_0 - p). \end{aligned}$$

On en déduit $\overrightarrow{F\Lambda} \left(\frac{p}{2y_0} (2x_0 - p) \right)$ et $\overrightarrow{FM} \left(\begin{matrix} x_0 - \frac{p}{2} \\ y_0 \end{matrix} \right)$ dont le produit scalaire est

$$\overrightarrow{F\Lambda} \cdot \overrightarrow{FM} = -\frac{p}{2} (2x_0 - p) + \frac{p}{2y_0} (2x_0 - p) \times y_0 = 0.$$

Ce qu'il fallait vérifier.

Solution 44

Une équation de la tangente au point A est $yy_\Lambda - px = px_\Lambda$ donc (x_0, y_0) est solution du système

$$\begin{cases} yy_\Lambda - px = px_\Lambda \\ yy_B - px = px_B \end{cases}$$

Donc $y_0 = p \frac{x_B - x_\Lambda}{y_B - y_\Lambda} = \frac{1}{2} \frac{y_B^2 - y_\Lambda^2}{y_B - y_\Lambda} = \frac{1}{2} (y_\Lambda + y_B)$ et $x_0 = \frac{x_B y_\Lambda - x_\Lambda y_B}{y_B - y_\Lambda} = \frac{y_B y_\Lambda}{2p}$. On en déduit que M_0 est à l'extérieur de la parabole dans la partie qui ne contient pas le foyer. En effet $y_0^2 - 2px_0 = \frac{1}{4} (y_\Lambda + y_B)^2 - y_B y_\Lambda = \frac{1}{4} (y_\Lambda - y_B)^2 > 0$ (si toutefois on a $\Lambda \neq B$).

Inversement, si $y_0^2 - 2px_0 > 0$ alors l'équation du second degré

$$[y^2 - 2y_0y + 2px_0 = 0; \quad \text{inconnue } y \in \mathbb{R}]$$

a un discriminant égal à $\Delta = 4y_0^2 - 8px_0 > 0$ et admet deux racines distinctes y_A et y_B . On pose alors $x_A := \frac{y_A^2}{2p}$ et $x_B := \frac{y_B^2}{2p}$. On a alors $A(x_A, y_A) \in \mathcal{P}$. $B(x_B, y_B) \in \mathcal{P}$ et

$$\begin{cases} y_0 y_A - px_0 = px_A \\ y_0 y_B - px_0 = px_B \end{cases}$$

donc M_0 est bien le point d'intersection des tangentes à \mathcal{P} aux points A et B .

On calcule l'aire à l'aide d'un déterminant :

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{M_0A}, \overrightarrow{M_0B}) &= \begin{vmatrix} x_A - \frac{y_B y_A}{2p} & x_B - \frac{y_B y_A}{2p} \\ y_A - \frac{1}{2}(y_A + y_B) & y_B - \frac{1}{2}(y_A + y_B) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_A - \frac{y_B y_A}{2p} & x_B - \frac{y_B y_A}{2p} \\ \frac{1}{2}(y_A - y_B) & \frac{1}{2}(y_B - y_A) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(y_B - y_A) \left(x_A - \frac{y_B y_A}{2p} + x_B - \frac{y_B y_A}{2p} \right) \\ &= \frac{1}{2}(y_B - y_A) \frac{1}{2p} (y_A^2 - 2y_B y_A + y_B^2) \\ &= \frac{1}{4p} (y_B - y_A)^3 \end{aligned}$$

Donc l'aire du triangle M_0AB égale $\frac{1}{4p} |y_B - y_A|^3$.

Solution 45

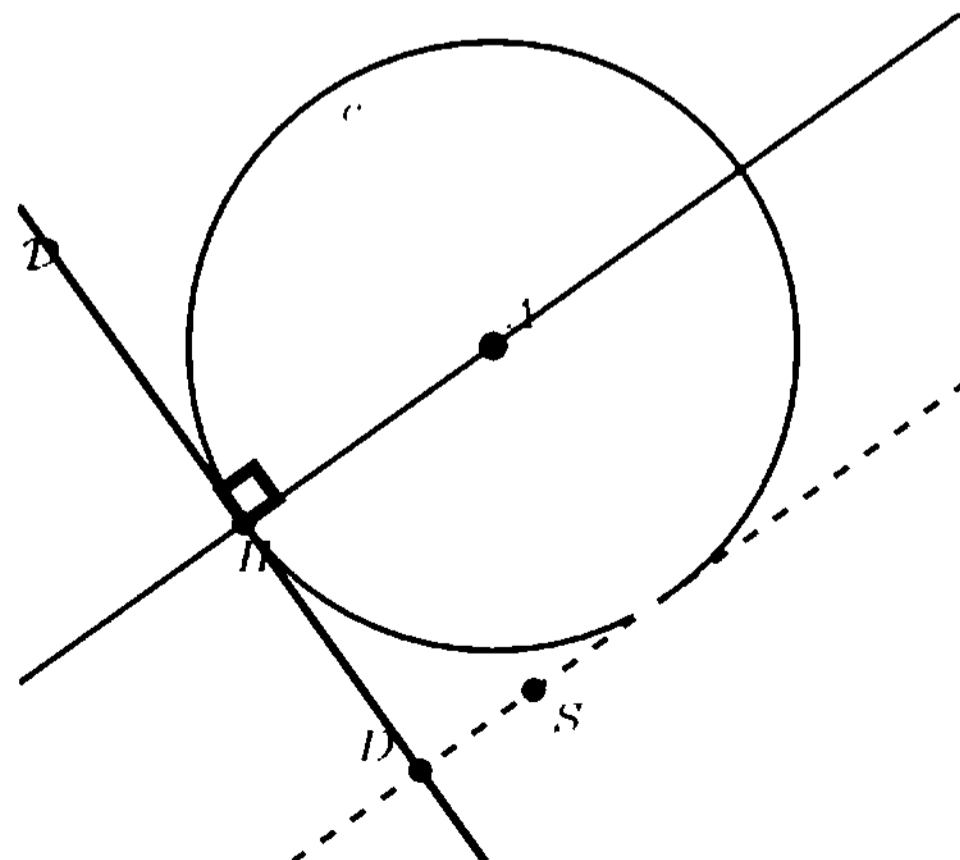
On a $yy' = -p^2$ (voir exercice 43).

On a $FM = HM = x + \frac{p}{2}$ et $FM' = H'M' = x' + \frac{p}{2}$. Or $xx' = \frac{4}{p^2} (yy')^2 = \frac{p^2}{4}$.

Donc $FM' = \frac{p^2}{4x} + \frac{p}{2} = \frac{p}{2x} \left(x + \frac{p}{2} \right)$. Ainsi

$$\frac{1}{FM} + \frac{1}{FM'} = \frac{1}{x + \frac{p}{2}} + \frac{p}{2x} \frac{1}{x + \frac{p}{2}} = \frac{1}{x + \frac{p}{2}} \left(1 + \frac{p}{2x} \right) = \frac{2}{p}.$$

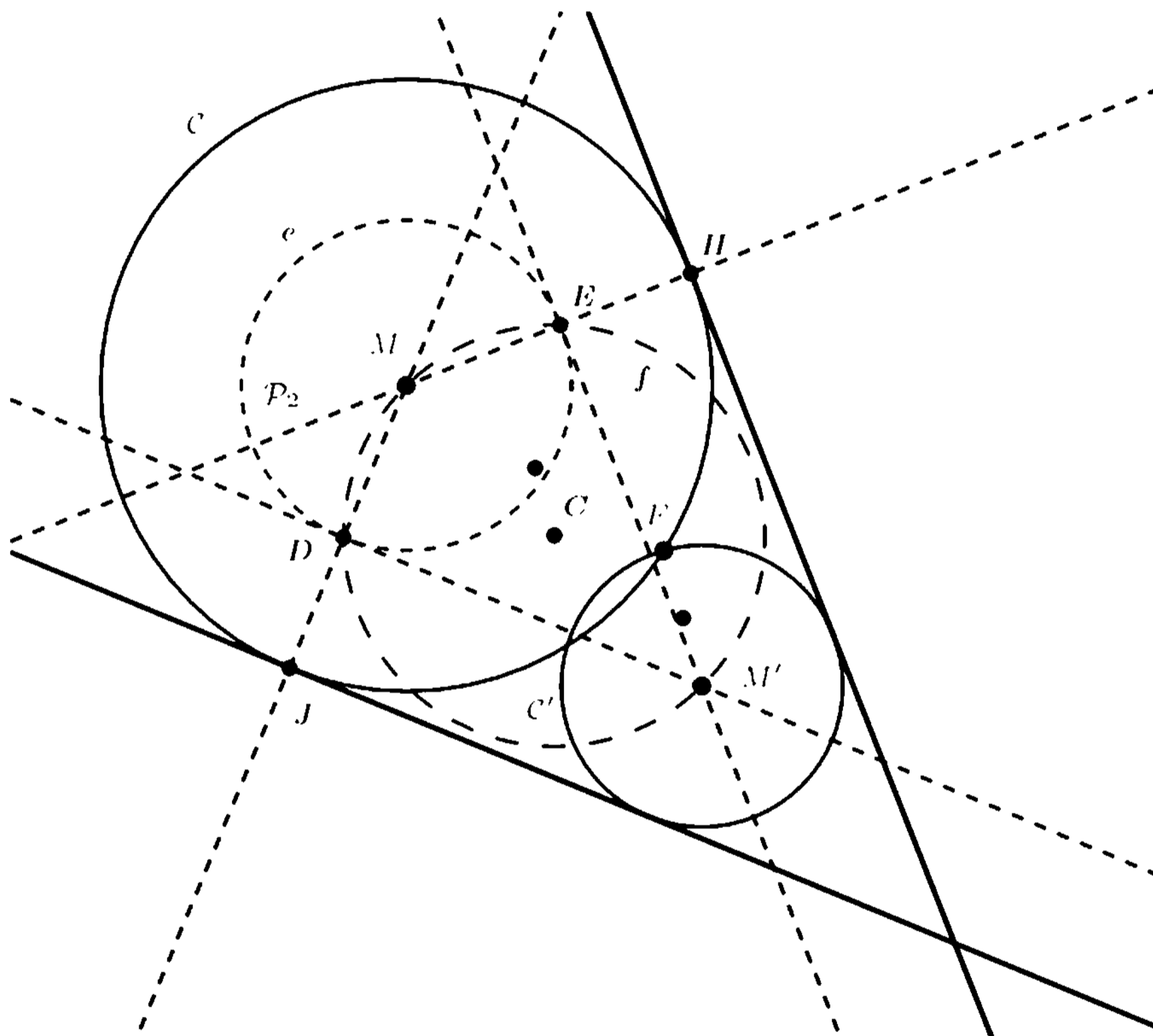
Solution 46



On construit le projeté H de A sur la directrice \mathcal{D} puis le cercle de centre A passant par H . Le foyer F se trouve sur ce cercle privé de H . On se place dans un bon repère avec $A(0, 0)$ et $H(1, 0)$. Soit $F(\cos \theta, \sin \theta)$ un point du cercle. Son projeté sur la directrice \mathcal{D} d'équation $x = 1$ est $D(1, \sin \theta)$. Donc le milieu $S(x, y)$ de $[DF]$ a pour coordonnées $x = \frac{1 + \cos \theta}{2}; y = \sin \theta$. Donc S appartient à l'ellipse \mathcal{E} d'équation $4(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = 1$.

En remontant les calculs, on s'aperçoit que inversement tout point de $\mathcal{E} \setminus \{H\}$ est le sommet d'une parabole de directrice \mathcal{D} passant par A .

Solution 47

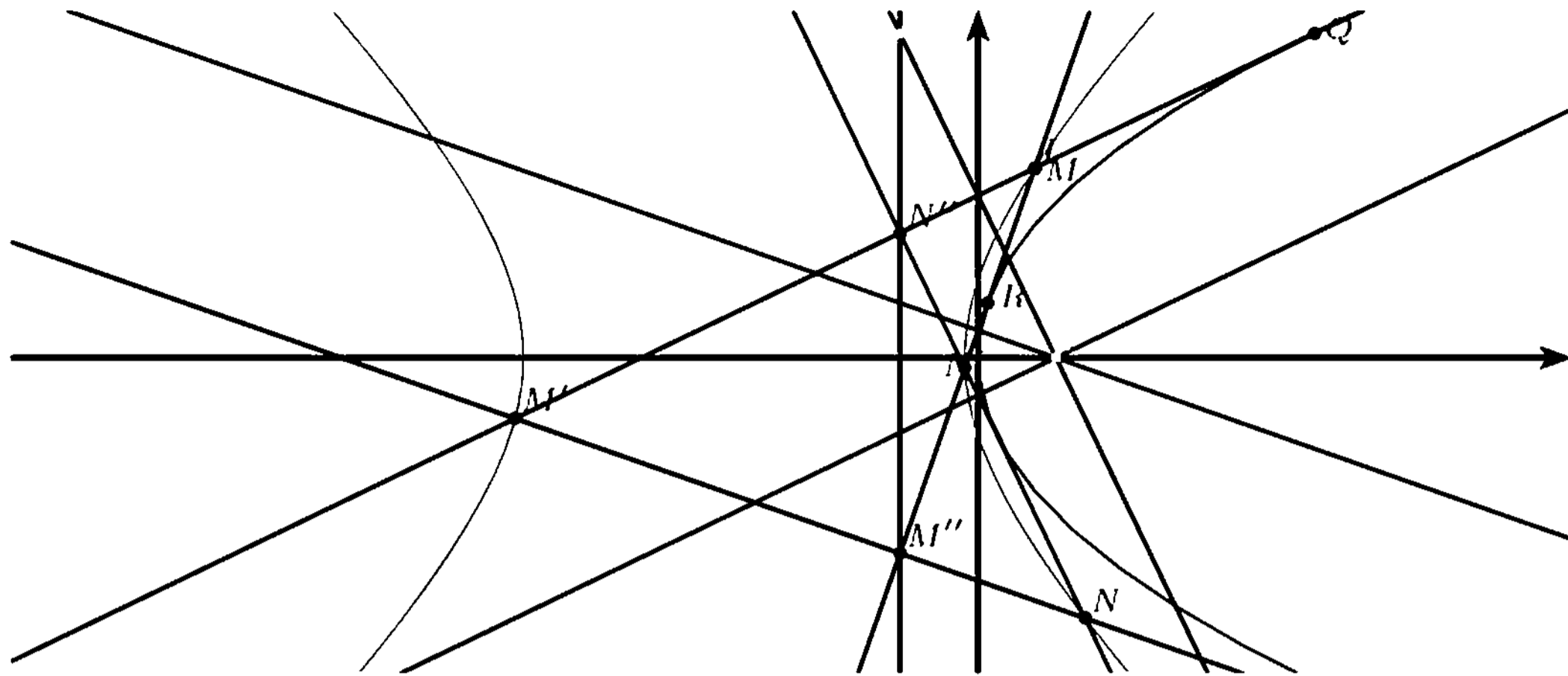


On trace le cercle \mathcal{C} de centre M passant par F et le cercle \mathcal{C}' de centre M' passant par F . Les directrices sont les deux droites tangentes communes à \mathcal{C} et à \mathcal{C}' .

Solution 48

Soit F le foyer et D la directrice de P . Le lieu des points M d'où l'on peut mener à P deux tangentes faisant un angle de droite de $\pi/4$ est une hyperbole équilatère de foyer F et directrice D (et donc d'excentricité $\sqrt{2}$).

Soit D' la tangente au sommet et soit M un point du lieu : les projections Q et R de F sur ces tangentes sont deux points de D' . soit I le milieu de $[FM]$. Le cercle de diamètre $[FM]$ passe par Q et R et l'angle \widehat{QIR} est droit et ses bissectrices ont la direction des axes. On a donc I sur l'hyperbole de foyer F et directrice D' et excentricité $\sqrt{2}$. Le point M qui est homothétique de I dans l'homothétie de centre F et de rapport 2 est donc sur l'hyperbole de foyer F et directrice D , d'excentricité $\sqrt{2}$, donc équilatère.



Si on paramètre la parabole $y^2 = 2px$ par $f : u \mapsto (\frac{u^2}{2p}, u)$, la tangente en $f(u)$ a pour équation

$$px - uy + \frac{u^2}{2} = 0.$$

Comme (u, p) dirige la tangente en $f(u)$, les tangentes en $f(u)$ et $f(v)$ font un angle de $\pi/4$ si, et seulement si, $(uv + p^2)^2 = p^2(u - v)^2$ (*) (via la tangente).

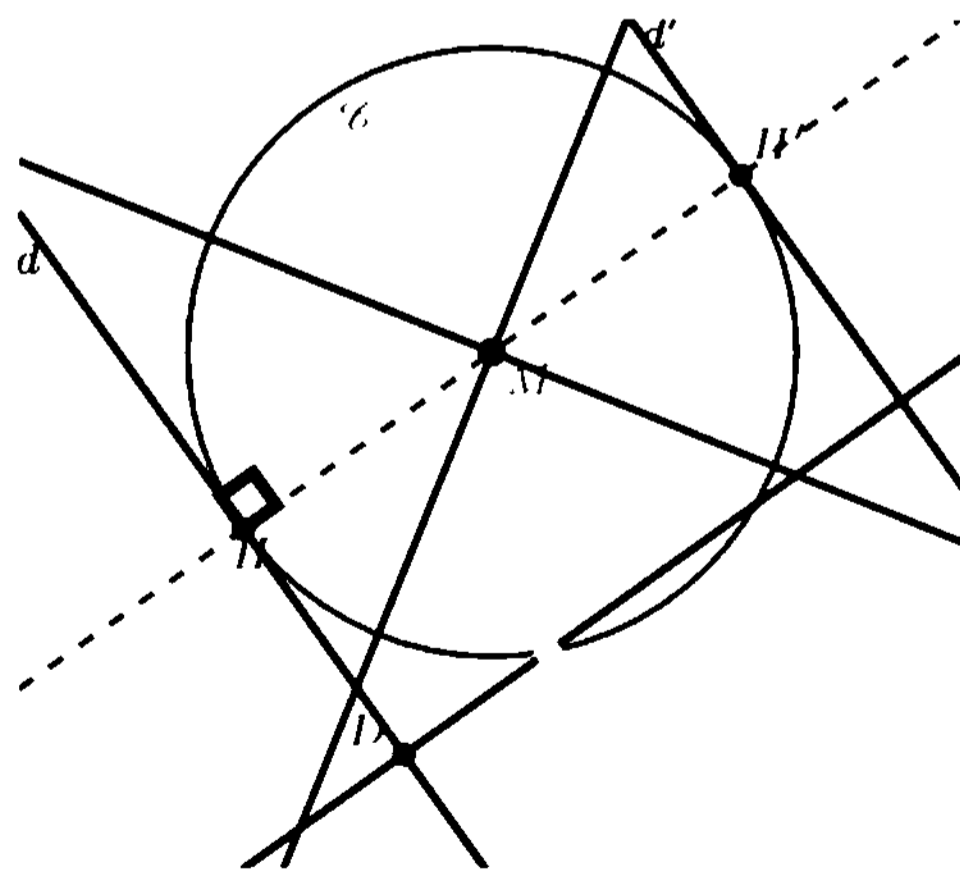
Donc, par $m(x, y)$ passent les tangentes aux paramètres u solutions de $u^2/2 - uy + px = 0$ (pourvu que $y^2 > 2px$). u et v solutions vérifient $u + v = 2y$ et $uv = 2px$. On a aussi $(u - v)^2 = 4(y^2 - 2px)$.

Avec (*), $(2x + p)^2 = 4(y^2 - 2px)$ soit $(x + \frac{3p}{2})^2 - y^2 = 2p^2$. On retrouve bien les éléments géométriques déjà décrits (centre en $(-3p/2, 0)$ et $c = 2p$ d'où un foyer en $(p/2, 0)$).

On a toute l'hyperbole car $y^2 > 2px$ (égalité impossible) donc on reconstitue u et v points de tangence avec (*).

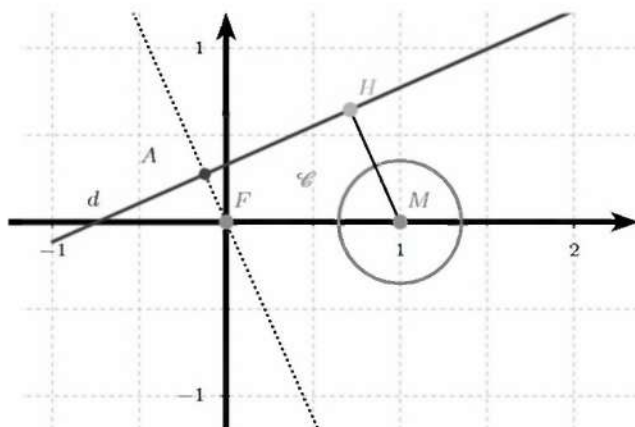
Solution 49

On trace le cercle \mathcal{C} de centre M passant par F . La parallèle à l'axe passant par M coupe \mathcal{C} en deux points H et H' qui sont les projections de M sur les directrices. Les perpendiculaires d et d' à l'axe passant par H et H' respectivement sont donc les deux directrices possibles.



Dans le cercle \mathcal{C} , le triangle HFH' admet le diamètre $[HH']$ comme côté. Il est donc rectangle en F . En appliquant deux fois le théorème de la droite des milieux, la médiatrice de $[FH]$ est perpendiculaire à la médiatrice de $[FH']$. Comme ce sont les tangentes en M aux deux paraboles, ces deux tangentes (d'après la remarque 4) sont orthogonales.

Solution 50



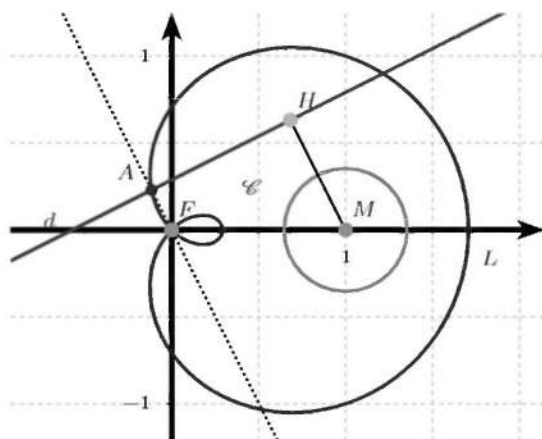
On se place dans un repère orthonormé pour lequel $F(0, 0)$ et $M(1, 0)$. On a $e = \sqrt{2}$ puisque les hyperboles sont équilatères. Leurs directrices d associées à F sont à une distance $\sqrt{2}/2$ de M . Donc le projeté H de M sur d se trouve sur le cercle \mathcal{C} de centre M de rayon $\sqrt{2}/2$.

On paramètre le cercle \mathcal{C} : $H\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t\right)$. Le vecteur $\vec{N} \begin{vmatrix} \cos t \\ \sin t \end{vmatrix}$ est normal à d . On obtient une équation de d : $\cos t \left(x - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t\right) + \sin t \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t\right) = 0$ soit $x \cos t + y \sin t = \cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Par ailleurs $\vec{FA} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ est colinéaire à \vec{N} , donc les coordonnées de A sont solution du système

$$\begin{cases} x \cos t + y \sin t = \cos t + \frac{\sqrt{2}}{2} & \times \cos t & \times \sin t \\ x \sin t - y \cos t = 0 & \times \sin t & \times (-\cos t) \end{cases}$$

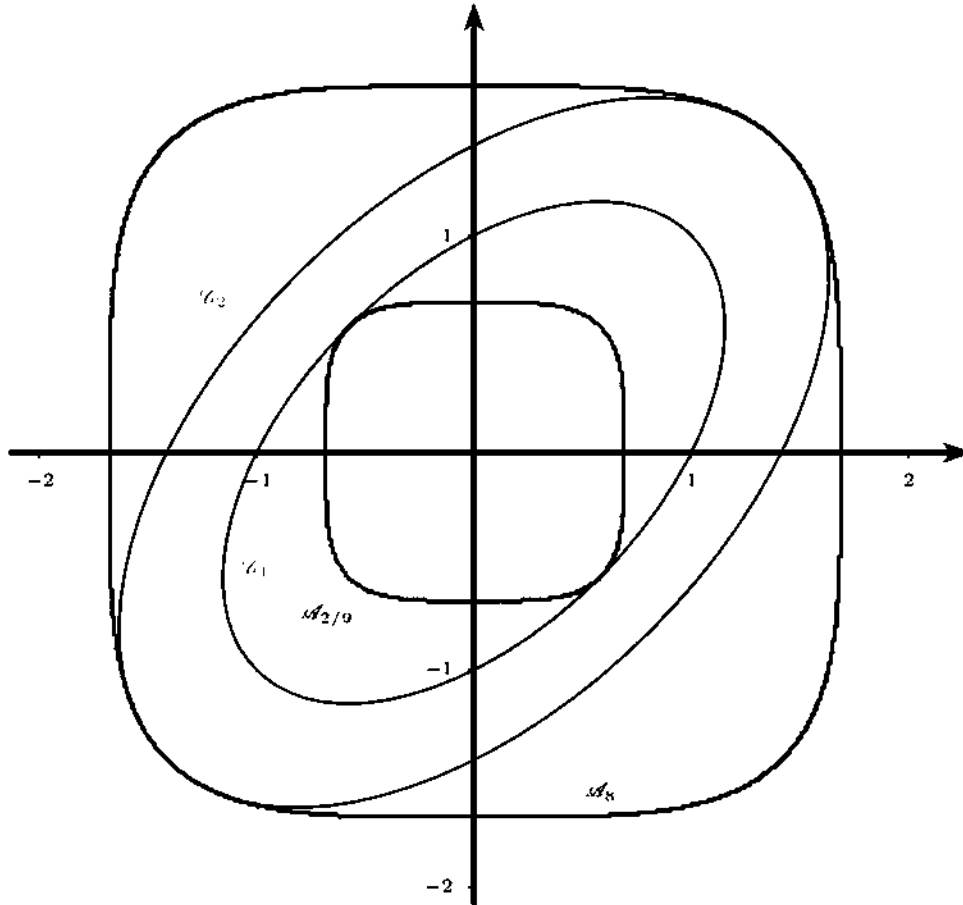
$$\text{D'où } \begin{cases} x = \cos t \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos t\right) \\ y = \sin t \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos t\right) \end{cases}$$



La courbe obtenue s'appelle un limaçon de Pascal.

Solution 51

Exercice identique au précédent. Le centre est obtenu comme l'image de A projeté orthogonal du foyer F sur la directrice associée par une homothétie de rapport $k := OF/FA$ avec $OF = c$ et $AF = c - \frac{a^2}{c} = \frac{c^2 - a^2}{c} = \frac{b^2}{c}$. Donc $k = \frac{c^2}{b^2} = \frac{c^2}{a^2} = e^2 = 2$ puisque l'hyperbole est équilatère.

Solution 52

Le graphique suggère un changement de variables : $x = u + v$ et $y = u - v$. On a alors

$$x^2 - xy + y^2 = 2(u^2 + v^2) - u^2 + v^2 = u^2 + 3v^2 \text{ et } x^4 + y^4 = 2(u^4 + 6u^2v^2 + v^4).$$

On a donc

$$x^4 + y^4 \leq 2(u^4 + 6u^2v^2 + 9v^4) \leq 2(u^2 + 3v^2)^2 < 2 \times 2^2.$$

De même

$$x^4 + y^4 \geq \frac{2}{9}(u^4 + 6u^2v^2 + 9v^4) > \frac{2}{9}2(u^2 + 3v^2)^2 > \frac{2}{9}.$$

Solution 53

$\forall \varphi \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi &= 1 \\ \frac{1}{\cos^2 \varphi} - \tan^2 \varphi &= 1 \end{aligned}$$

Chapitre 9

Équations différentielles

Sommaire

9.1	Définitions et premières propriétés.	432
9.2	Équations différentielles du premier ordre homogènes : $y' - ay = 0$	432
9.3	Équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ avec $a \neq 0$	433
9.4	Exercices	439
9.5	Solutions	441
9.6	Problème	446
9.7	Corrigé	447
9.8	Travaux dirigés	449

9.1 Définitions et premières propriétés.

Dans certains problèmes, en particulier en sciences physiques, on peut être amené à déterminer les fonctions f définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et vérifiant, pour tout x réel des égalités du genre :

$$f'(x) - f(x) = 0$$

$$f'(x) - 3f(x) = \sin x$$

$$f''(x) - 2f'(x) = 0$$

$$f''(x) + 3f'(x) + f(x) = e^x$$

Toutes ces égalités sont appelées *équations différentielles*. Nous avons vu, par exemple, la première égalité lors du chapitre traitant de la fonction exponentielle. La première équation admet donc pour solution particulière $f : x \mapsto e^x$.

Le problème est de déterminer toutes les solutions f .

On exprime, traditionnellement, les équations différentielles à l'aide de y (il faut comprendre $y(x)$) au lieu de f . Ainsi les équations différentielles précédentes deviennent :

$$y' - y = 0$$

$$y' - 3y = \sin x$$

$$y'' - 2y' = 0$$

$$y'' + 3y' + y = e^x$$

On peut constater que les deux premières expressions font intervenir la fonction f et sa dérivée, on les appelle *équations différentielles du premier ordre*, les deux suivantes se nomment *équations différentielles du second ordre*.

9.2 Équations différentielles du premier ordre homogènes :

$$y' - ay = 0$$

Dans ce paragraphe, a désignera un nombre réel.

9.2.1 Résolution

L'expression $y' - ay = 0$ s'appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre ou homogène*. On constate que la fonction $f : x \mapsto e^{ax}$ définie sur \mathbb{R} est une *solution particulière*. En effet, $f'(x) = ae^{ax}$ et donc $f'(x) - af(x) = 0$.

Nous allons maintenant rechercher toutes les solutions.

Il suffit, pour cela, de poser $z = ye^{-ax}$. Nous avons alors $z' = y'e^{-ax} - aye^{-ax} = e^{-ax}(y' - ay)$. On reconnaît alors dans la parenthèse l'équation différentielle ce qui nous donne que $z' = 0$ et donc que z est une constante λ .

Or $y = ze^{ax}$ et donc les solutions sont $y = \lambda e^{ax}$ d'où le résultat suivant :

Théorème 1

L'ensemble des solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto \lambda e^{ax}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

9.2.2 Solution vérifiant une condition initiale $y(x_0) = y_0$

Parmi les solutions, nous cherchons s'il y en a qui vérifient la condition $y(x_0) = y_0$ où x_0 et y_0 sont des réels donnés.

Autrement dit, nous avons $\lambda e^{ax_0} = y_0$ c'est-à-dire $\lambda = y_0 e^{-ax_0}$ donc une seule solution vérifie la condition initiale et c'est $y = y_0 e^{a(x-x_0)}$ ce qui nous donne le théorème suivant :

Théorème 2

L'équation différentielle $y' - ay = 0$ admet une seule solution vérifiant la condition $y(x_0) = y_0$ et c'est $y = y_0 e^{a(x-x_0)}$.

Exemple 1

1. Résoudre l'équation différentielle suivante $y' + 3y = 0$ avec la condition suivante $y(0) = 4$.
2. Soit y le nombre d'atomes de radium d'une substance radioactive. la fonction y varie avec le temps et à tout instant t on a :

$$y' = -k^2 y \text{ avec } k \text{ donné.}$$

Donner y en fonction de t où l'on notera y_0 le nombre d'atomes à $t = 0$.

Le temps t étant exprimé en années, on a pour une substance $k^2 = 5 \times 10^{-4}$.

Au bout de combien d'années le nombre d'atomes aura-t-il diminué de moitié ?

Ce temps s'appelle la *période* du radium.

Réponses :

1. Les solutions sont données par $y = \lambda e^{-3x}$. Cherchons celles qui vérifient $y(0) = 4$, on a $y_0 = \lambda$ donc $\lambda = 4$. Finalement, nous obtenons $y = 4e^{-3x}$.
2. Par le même raisonnement que pour l'exercice précédent, $y = \lambda e^{-k^2 t}$. Or pour $t = 0$, $y = y_0$ ainsi $y_0 = \lambda$ d'où le résultat suivant : $y = y_0 e^{-k^2 t}$.
On a $y = \frac{y_0}{2} \Leftrightarrow y_0 e^{-k^2 t} = \frac{y_0}{2}$, nous obtenons alors $e^{-k^2 t} = \frac{1}{2}$ autrement dit que $k^2 t = \ln 2$ ce qui nous donne $t = \frac{\ln 2}{k^2} = \frac{\ln 2}{5 \times 10^{-4}} \approx 1386$. La période du radium est d'environ 1386 années.

9.3 Équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ avec $a \neq 0$

Recherche des solutions de la forme e^{rx} .

Considérons donc l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ notée (E) .

Soit $y = e^{rx}$ alors $y' = re^{rx}$ et $y'' = r^2 e^{rx}$. Ainsi la fonction $x \mapsto e^{rx}$ est solution de (E) si et seulement si $ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$, c'est-à-dire (en factorisant par e^{rx}) $ar^2 + br + c = 0$ équation que l'on notera E_c .

En conclusion, la fonction $x \mapsto e^{rx}$ est solution de (E) si et seulement si r est solution de (E_c) .

On appelle (E_c) *équation caractéristique* associée à (E) .

Si $\Delta > 0$ alors (E_c) admet deux solutions réelles :

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta = 0$ alors (E_c) admet une solution double $r = \frac{-b}{2a}$

Si $\Delta < 0$ alors (E_c) admet deux solutions imaginaires :

$$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } r_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Recherche de toutes les solutions

Premier cas : le discriminant Δ est strictement positif.

L'équation caractéristique (E_c) admet alors deux solutions $r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Pour toute fonction y on pose $z = ye^{-r_2x}$ ce qui donne $y = ze^{r_2x}$ ainsi $y' = z'e^{r_2x} + r_2ze^{r_2x}$ puis $y'' = z''e^{r_2x} + r_2z'e^{r_2x} + r_2z'e^{r_2x} + r_2^2ze^{r_2x}$.

Donc $ay'' = ae^{r_2x}(z'' + 2r_2z' + r_2^2z)$ puis $by' = be^{r_2x}(z' + r_2z)$ et enfin $cy = cze^{r_2x}$.

Finalement, nous obtenons $ay'' + by' + cy = e^{r_2x}(az'' + (2ar_2 + b)z' + (ar_2^2 + br_2 + c)z) = 0$. Comme $ar_2^2 + br_2 + c = 0$, on a $az'' + (2ar_2 + b)z' = 0$.

Si nous posons $Z = z'$ alors nous sommes ramenés à résoudre l'équation différentielle $aZ' + (2ar_2 + b)Z = 0$ et si nous divisons par a que nous savons être non nul, on obtient $Z' + \frac{(2ar_2 + b)}{a}Z = 0$ autrement dit $Z' + \alpha Z = 0$ que nous connaissons déjà.

On obtient alors $Z = \lambda e^{-\alpha x}$ avec $\alpha = \frac{2ar_2 + b}{a}$ donc $z = -\frac{\lambda}{\alpha}e^{-\alpha x} + B$ que l'on écrit $z = Ae^{-\alpha x} + B$ or $y = ze^{r_2x}$ ce qui nous permet d'écrire

$$y = Ae^{(r_2 - \alpha)x} + Be^{r_2x}.$$

D'autre part, $r_2 - \alpha = r_2 - \frac{2ar_2 + b}{a} = -r_2 - \frac{b}{a} = -r_2 + (r_1 + r_2) = r_1$.

En conclusion, les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$.

Deuxième cas : le discriminant Δ est nul.

La solution de l'équation caractéristique est $r = -\frac{b}{2a}$ et la seule solution de (E) est de la forme e^{rx} .

Par le même raisonnement que précédemment, on obtient :

$$z'' + \frac{2ar + b}{a}z' = 0$$

or comme $r = -\frac{b}{2a}$ alors $2ar + b = 0$ ce qui nous donne que $z'' = 0$. Autrement dit $z' = A$ où A est un réel et $z = Ax + B$ où B est un réel.

Finalement, si $\Delta = 0$ alors les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto (Ax + B)e^{rx}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Troisième cas : le discriminant Δ est strictement négatif.

Nous savons que les racines de l'équation caractéristique de (E) sont des nombres complexes conjugués

$$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } r_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

que l'on notera $r_1 = \alpha - i\beta$ et $r_2 = \alpha + i\beta$.

Dans ce cas, les solutions de l'équation (E) sont les fonctions $x \mapsto e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$.

Une démonstration sans sortir du champ réel sera donnée à l'occasion du problème 9.6.

Théorème 3

On considère l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ notée (E) avec $a \neq 0$.

La résolution de cette équation suivant les différents cas de figure est résumée dans le tableau suivant où A et B sont des réels :

Équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$	Fonctions solutions de (E)
$\Delta > 0$ deux racines réelles r_1 et r_2	$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$
$\Delta = 0$ une racine double réelle r	$y = (Ax + B)e^{rx}$
$\Delta < 0$ deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$	$y = (A \cos \beta x + B \sin \beta x)e^{\alpha x}$

Démonstration 3

Il ne reste plus qu'à démontrer le cas $\Delta < 0$. Pour cela, on va gagner de la hauteur en se plaçant dans les nombres complexes et en recopiant la démonstration du cas $\Delta > 0$.

On commence par se rappeler le théorème 24 page 225. Il est en soi un théorème d'existence et d'unicité d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients **complexes**.

Nous allons à nouveau effectuer un changement de **fonction inconnue**. Soit z une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{C} . Considérons f la fonction définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = z(t)e^{r_1 t}$. La fonction f est elle aussi deux fois dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(t) &= z(t)e^{r_1 t} \\ f'(t) &= (z'(t) + r_1 z(t)) e^{r_1 t} \\ f''(t) &= (z''(t) + 2r_1 z'(t) + r_1^2 z(t)) e^{r_1 t} \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} &af''(t) + bf'(t) + cf(t) \\ &= \left(az''(t) + (2ar_1 + b)z'(t) + \underbrace{(ar_1^2 + br_1 + c)}_{=0} z(t) \right) e^{r_1 t} \\ &= (az''(t) + (2ar_1 + b)z'(t)) e^{r_1 t} \end{aligned}$$

En conclusion, f est solution de (E) si et seulement si la fonction exponentielle ne s'annulant jamais z' est solution de :

$$(\varepsilon_{r_1}) : \quad ay' + (2ar_1 + b)y = 0$$

Puisque $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique possède deux racines distinctes r_1 et $r_2 \in \mathbb{C}$.

Considérons l'ensemble $\mathcal{A} = \{t \rightarrow \alpha_1 e^{r_1 t} + \alpha_2 e^{r_2 t} \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}\}$ et montrons que \mathcal{A} est l'ensemble des solutions complexes de (E) . Pour ce faire, nous allons effectuer un raisonnement par double inclusion :

□ Par application du lemme précédent, il est clair que $t \mapsto e^{r_1 t}$ et $t \mapsto e^{r_2 t}$ sont des solutions complexes de (E) . Par conséquent toute combinaison linéaire $t \mapsto \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t}$ (α et β étant deux complexes donnés) de ces deux fonctions est encore solution complexe de (E) ce qui démontre la première inclusion.

□ Réciproquement, soit f une solution complexe de (E) . Alors, compte tenu de ce qui a été fait précédemment, si z est la fonction donnée par $\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = f(t)e^{-r_1 t}$, z' est solution de (ε_{r_1}) : $ay' + (2ar_1 + b)y = 0$. Mais, comme $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$, il vient $2ar_1 + b = r_1 - r_2$ et (ε_{r_1}) s'écrit : $(\varepsilon_{r_1}) : y' + (r_1 - r_2)y = 0$. Appliquons le théorème 24 page 225. Les solutions sont de la forme : $y_\alpha : t \rightarrow \alpha e^{-(r_1 - r_2)t}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. et donc z est une primitive d'une de ces fonctions :

$$\exists \beta \in \mathbb{C}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = -\frac{\alpha}{r_1 - r_2} e^{-(r_1 - r_2)t} + \beta.$$

Compte tenu de la définition de z , on a bien démontré qu'il existe $\alpha_1 (:= \beta)$ et $\alpha_2 (:= -\frac{\alpha}{r_1 - r_2})$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \alpha_1 e^{r_1 t} + \alpha_2 e^{r_2 t}.$$

En fin de compte, nous avons trouvé toutes les solutions complexes de l'équation (E) dans le cas où $\Delta < 0$. Cette démonstration se généralise d'ailleurs aux équations $ay'' + by' + cy = 0$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $(b, c) \in \mathbb{C}^2$ et $\Delta := b^2 - 4ac \neq 0$.

Il nous reste un peu de travail avant de récupérer les solutions réelles. □

Exercice 1.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' - 4y = 0$
2. $y'' + 4y' + 4y = 0$
3. $y'' + 2y' + 5y = 0$

Solution 1

1. L'équation caractéristique $r^2 - 3r - 4 = 0$ a pour discriminant 25 et comme solutions $r_1 = 4$ et $r_2 = -1$ ce qui donne comme solutions à l'équation différentielle $y = Ae^{4x} + Be^{-x}$ avec A, B réels.
2. L'équation caractéristique $r^2 + 4r + 4 = 0$ a pour discriminant 0 et comme solution $r = -2$ donc $y = (Ax + B)e^{-2x}$.
3. L'équation caractéristique $r^2 + 2r + 5 = 0$ a pour discriminant -16 et comme solutions complexes $r_1 = -1 + 2i$ et $r_2 = -1 - 2i$ ce qui donne $\alpha = -1$ et $\beta = 2$ et ainsi $y = (A \cos 2x + B \sin 2x)e^{-x}$.

Équations différentielles $ay'' + by' + cy = 0$ avec conditions initiales.

Théorème 4

Il existe une solution et une seule de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ vérifiant les conditions initiales suivantes : $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$. Où x_0, y_0 et y'_0 étant des 3 réels donnés.

Exemple 2

Résoudre $y'' + 2y' + y = 0$ avec les conditions initiales $y(1) = 0$ et $y'(0) = 1$.

L'équation caractéristique est : $r^2 + 2r + 1 = 0$. Il y a une seule racine $r = -1$ et les solutions sont les fonctions $f : x \mapsto (Ax + B)e^{-x}$. Pour déterminer les valeurs de A et B nous allons utiliser les conditions initiales.

Tout d'abord le fait que $y(1) = 0$ est équivalent à $A + B = 0$.

En dérivant f , on obtient $f'(x) = Ae^{-x} + (Ax + B)e^{-x}$, le fait que $f'(0) = 1$ nous donne $A - B = 1$.

Finalement les deux conditions sur A et B donnent $A = \frac{1}{2}$ et $B = -\frac{1}{2}$. D'où la solution unique $x \mapsto (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})e^{-x}$.

Démonstration 4

Nous allons considérer plusieurs cas :

- $a \in \mathbb{C}^*$, $(b, c) \in \mathbb{C}^2$ et $\Delta := b^2 - 4ac \neq 0$.

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, y_0 et y'_0 nombres complexes quelconques.

D'après la démonstration 3, il existe nécessairement α et β complexes tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}.$$

On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = \alpha r_1 e^{r_1 x} + \beta r_2 e^{r_2 x}.$$

Donc pour que y soit solution de S :

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

il faut et il suffit que $\begin{cases} \alpha e^{r_1 x_0} + \beta e^{r_2 x_0} = y_0 \\ \alpha r_1 e^{r_1 x_0} + \beta r_2 e^{r_2 x_0} = y'_0 \end{cases}$ Le déterminant de ce système est

$e^{(r_1+r_2)x_0}(r_2 - r_1) \neq 0$ puisque $\Delta \neq 0$. Donc le couple solution (α, β) est unique.

- $a \in \mathbb{R}^*$, $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ et $\Delta := b^2 - 4ac \neq 0$.

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, y_0 et y'_0 nombres réels quelconques.

On a un cas particulier du cas précédent, donc unicité de y grâce au jaguar casqué.

- $a \in \mathbb{R}^*$, $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ et $\Delta := b^2 - 4ac = 0$.

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, y_0 et y'_0 nombres réels quelconques.

On sait qu'il existe deux réels A et B tels que $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = (Ax + B)e^{rx}$ (où r est la racine double de l'équation caractéristique).

On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = (Arx + A + Br)e^{rx}.$$

Donc pour que y soit solution de S :

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

il faut et il suffit que $\begin{cases} Ax_0 e^{rx_0} + B e^{rx_0} = y_0 \\ A(r+1)e^{rx_0} + Br e^{rx_0} = y'_0 \end{cases}$ Le déterminant de ce système est

$e^{2rx_0}(r+1-r) \neq 0$. Donc le couple solution (A, B) est unique.

Dans tous ces cas, on a bien existence et unicité de la solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ avec conditions initiales.

Le cas complexe avec $\Delta := 0$ n'a pas été traité. Il est laissé au lecteur insatiable. \square

Maintenant nous disposons d'un théorème d'existence et surtout d'unicité. De ce fait chaque fois qu'on pêche une solution à notre problème, c'est LA bonne.

Démonstration 3

On se place dans le cas $a \in \mathbb{R}^*$, $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ et $\Delta := b^2 - 4ac < 0$.

Soit f une solution sur \mathbb{R} de $ay'' + by' + cy = 0$. On pose $x_0 := 0$, $y_0 := f(x_0)$ et $y'_0 := f'(x_0)$. On a $(y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^2$.

D'après la démonstration 3, il existe nécessairement U et V complexes tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ue^{r_1x} + Ve^{r_2x},$$

où $r_1 := \alpha + i\beta$ et $r_2 := \alpha - i\beta$ sont les racines conjuguées de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$.

$$\text{Donc } f \text{ est solution du problème } \mathcal{S} : \begin{cases} ay'' + by' + cy = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}.$$

$$\text{Maintenant la fonction } \bar{f} : x \in \mathbb{R} \mapsto \overline{f(x)} \text{ est solution de } \bar{\mathcal{S}} : \begin{cases} \bar{a}y'' + \bar{b}y' + \bar{c}y = 0 \\ y(x_0) = \overline{y_0} \\ y'(x_0) = \overline{y'_0} \end{cases} \text{ (vérification}$$

sans problème grâce au théorème 8 page 188). Puisque a, b, c, y_0 et y'_0 sont réels, on a $\mathcal{S} = \bar{\mathcal{S}}$ et $f = \bar{f}$ grâce au théorème d'unicité. Autrement dit, lorsqu'on impose des conditions initiales réelles, on est sûr que la solution au problème est réelle, c'est-à-dire égale à sa partie réelle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{\alpha x} (\Re U \cos(\beta x) - \Im U \sin(\beta x) + \Re V \cos(\beta x) + \Im V \sin(\beta x)),$$

donc il suffit de prendre $A := \Re U + \Re V \in \mathbb{R}$ et $B := -\Im U + \Im V$ pour achever la démonstration du théorème 3. \square

9.3.1 Équation différentielle avec second membre, exemple de résolution

Nous allons considérer l'équation différentielle :

$$2y' + 3y = 6x^2 - 7x + 2 \quad (E).$$

1. On détermine une fonction g solution de (E) . Ici, on donne comme indication "g est un polynôme du second degré". On a alors :

$g(x) = ax^2 + bx + c$, $g'(x) = 2ax + b$ ce qui donne $2g'(x) + 3g(x) = 3ax^2 + (4a + 3b)x + 2b + 3c$. Or g sera solution de (E) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3ax^2 + (4a + 3b)x + 2b + 3c = 6x^2 - 7x + 2$. Ce qui donne après identification, $a = 2$, $b = -5$, $c = 4$.

Finalement, $g(x) = 2x^2 - 5x + 4$ est une solution particulière de (E) .

2. Maintenant, nous recherchons toutes les solutions de (E) .

Soit f une solution de (E) , montrons alors que $f - g$ est aussi solution de $2y' + 3y = 0$.

Le fait que f soit solution de (E) équivaut à $2f'(x) + 3f(x) = 6x^2 - 7x + 2$ pour tout x réel. Or $2g'(x) + 3g(x) = 6x^2 - 7x + 2$ donc f solution de (E) équivaut à $2f'(x) + 3f(x) = 2g'(x) + 3g(x)$ autrement dit $2(f' - g')(x) + 3(f - g)(x) = 0$ ce qui signifie que $f - g$ est solution de $2y' + 3y = 0$.

Finalement, f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation $2y' + 3y = 0$, équation homogène.

Or, les solutions de cette équation sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-\frac{3}{2}x}$ d'où $f(x) = \lambda e^{-\frac{3}{2}x} + g(x) = \lambda e^{-\frac{3}{2}x} + 2x^2 - 5x + 4$.

En résumé, pour résoudre une équation différentielle linéaire :

chercher une solution particulière de (E) c'est-à-dire g

chercher une solution générale de l'équation sans second membre notée ϕ

les solutions sont données par $\phi + g$.

9.4 Exercices

Exercice 2.

On se propose de déterminer les primitives de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-4x} \cos(3x)$.

On pose $r_1 := -4 + 3i$.

1. Calculer $s := r_1 + \bar{r}_1$ et $p := |r_1|^2$.
2. Démontrer que f est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y'' - sy' + py = 0$.
3. En déduire que $\frac{s}{p}f - \frac{1}{p}f'$ est une primitive de f .
4. Achever les calculs pour déterminer les primitives de f .
5. Comparer avec d'autres méthodes.

Exercice 3.

1. Trouver toutes les fonctions u et v dérivables sur \mathbb{R} vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} u'(t) &= 3u(t) &- 4v(t) \\ v'(t) &= u(t) &- v(t) \end{cases} \quad (9.1)$$

2. Trouver les solutions u et v du système précédent vérifiant $u(0) = 1$ et $v(0) = 0$.

Exercice 4.

Résoudre les équations homogènes :

a) $y' + y = 0$ b) $y' - 3y = 0$ c) $y' = 2y$ d) $3y' = y$ e) $y' = \frac{y}{5}$

Exercice 5.

Donner les solutions des équations différentielles :

a) $y' + 2y = 0$

b) $y' + 2y = 6$

c) $y' - 3y = 9$

d) $y' + 2y = 5$

e) $2y' + 3y = -7$

f) $y' = -\frac{y}{4} + 2$

Exercice 6.

Soit (E) l'équation différentielle $2y' + y = 2$.

1. Résoudre (E) .
2. Déterminer la solution de (E) qui vérifie $y(0) = 1$.

Exercice 7.

Résoudre l'équation différentielle $2y' + y = 0$.

Déterminer la solution f de cette équation vérifiant $f(\ln 4) = 1$.

Exercice 8.

Soit (E) l'équation différentielle $y'' + 16y = 0$.

1. Résoudre (E) .
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = \frac{1}{10}$ et $f'(0) = -\frac{2\sqrt{3}}{5}$

Exercice 9.

On considère l'équation différentielle $(E) : 4y'' + \pi^2 y = 0$.

1. Résoudre (E) .
2. On sait de plus que la courbe représentative de la fonction g solution de (E) :
 - (a) passe par le point $A \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$
 - (b) a une tangente en A parallèle à l'axe des abscisses.

Déterminer g .

Exercice 10.

Le taux d'alcoolémie $f(t)$ (en gL^{-1}) d'une personne ayant absorbé, à jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie, sur \mathbb{R}_+ l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = ae^{-t}$$

où t est le temps écoulé après l'ingestion (exprimé en heures), et a une constante qui dépend des conditions expérimentales.

1. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R} : g(t) = f(t)e^t$
Démontrer que g est une fonction affine.
2. Exprimer $f(t)$ en fonction de t et de a .
3. Dans cette question, on suppose que $a = 5$.
 - (a) Étudier les variations de f .
Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il est atteint.
 - (b) Donner une valeur du délai T (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à $0,5gL^{-1}$.

Exercice 11.

Un parachutiste tombe à une vitesse de $55ms^{-1}$ au moment où son parachute s'ouvre.

On fixe l'origine du temps ($t = 0$ en secondes) à ce moment là.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on note $v(t)$ la vitesse en ms^{-1} du parachutiste à l'instant t .

On admet que la résistance de l'air est donnée par $R = \frac{Pv^2}{25}$ où P est le poids du parachutiste avec son équipement. ($P = mg$ avec $m =$ masse et $g = 9,81ms^{-2}$).

1. Démontrer que v est solution, sur \mathbb{R}_+ , de l'équation différentielle :

$$(E) : v' = g\left(1 - \frac{v^2}{25}\right).$$

2. On suppose que $v > 5$ sur \mathbb{R}_+ et on y pose $z = \frac{1}{v-5}$.
Déterminer une équation différentielle satisfaite par z sur \mathbb{R}_+ et la résoudre.
3. En déduire une expression de $v(t)$ en fonction de t et préciser sa limite lorsque t tend vers $+\infty$.

9.5 Solutions

Solution 2

1. On a $s = -8$ et $p = 25$.
2. Les complexes r_1 et $r_2 := \bar{r}_1$ sont les deux racines de l'équation caractéristique de $y'' - sy' + py = 0$. D'après le théorème 3 (dans le cas $\Delta > 0$), f est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle

$$y'' - sy' + py = 0.$$

3. Après division par $s \neq 0$, on a $f = \frac{s}{p} f' - \frac{1}{p} f'' = \left(\frac{s}{p} f - \frac{1}{p} f' \right)'$ donc $\frac{s}{p} f - \frac{1}{p} f'$ est une primitive de f .

4. On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -4e^{-4x} \cos(3x) - 3e^{-4x} \sin(3x)$ donc

$$x \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{8}{25} e^{-4x} \cos(3x) + \frac{4}{25} e^{-4x} \cos(3x) + \frac{3}{25} e^{-4x} \sin(3x) = -\frac{4}{25} e^{-4x} \cos(3x) + \frac{3}{25} e^{-4x} \sin(3x)$$

est une primitive de f .

5. En intégrant par parties, on pose $\begin{cases} u(x) &= e^{-4x} & u'(x) &= -4e^{-4x} \\ v'(x) &= \cos(3x) & v(x) &= \frac{1}{3} \sin(3x) \end{cases}$.

$$\text{Donc } F(x) := \int e^{-4x} \cos(3x) dx = \frac{1}{3} e^{-4x} \sin(3x) + \int \frac{4}{3} e^{-4x} \sin(3x) dx.$$

Deuxième intégration par parties, on pose $\begin{cases} u(x) &= e^{-4x} & u'(x) &= -4e^{-4x} \\ v'(x) &= \sin(3x) & v(x) &= -\frac{1}{3} \cos(3x) \end{cases}$.

$$\text{Donc } \int e^{-4x} \sin(3x) dx = -\frac{1}{3} e^{-4x} \cos(3x) - \int \frac{4}{3} e^{-4x} \cos(3x) dx.$$

En mettant les morceaux bout à bout, on obtient, à une constante près,

$$F(x) = \frac{1}{3} e^{-4x} \sin(3x) + \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{3} e^{-4x} \cos(3x) - \frac{4}{3} F(x) \right)$$

soit $\left(\frac{16}{9} + 1 \right) F(x) = \frac{1}{3} e^{-4x} \sin(3x) - \frac{4}{9} e^{-4x} \cos(3x)$ soit $F(x) = \frac{3}{25} e^{-4x} \sin(3x) - \frac{4}{25} e^{-4x} \cos(3x)$ à une constante près bien entendu.

On peut aussi partir à la pêche (si on connaît les bons coins). On parie que l'on peut trouver une primitive de f égale à $F(x) := Ae^{-4x} \cos(3x) + Be^{-4x} \sin(3x)$, laquelle se dérive en

$$\begin{aligned} F'(x) &= -4Ae^{-4x} \cos(3x) - 3Ae^{-4x} \sin(3x) - 4Be^{-4x} \sin(3x) + 3Be^{-4x} \cos(3x) \\ &= (-4A + 3B)e^{-4x} \cos(3x) + (-3A - 4B)e^{-4x} \sin(3x). \end{aligned}$$

Pour que F soit une primitive de f , il suffit que $\begin{cases} -4A + 3B = 1 \\ -3A - 4B = 0 \end{cases}$ et on retrouve bien

$$A = -\frac{4}{25} \text{ et } B = \frac{3}{25}.$$

Solution 3

1. La fonction u' est dérivable d'après les opérations sur les fonctions dérivables. De plus

$$\forall t \in \mathbb{R}, u''(t) = 3u'(t) - 4v'(t) = 9u(t) - 12v(t) - 4u(t) + 4v(t) = 5u(t) - 8v(t).$$

Or $-8v(t) = 2u'(t) - 6u(t)$ donc

$$u''(t) = 2u'(t) - u(t)$$

et u est solution sur \mathbb{R} de $y'' - 2y' + y = 0$.

L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0 = (r - 1)^2$. Elle admet une racine double égale à 1.

D'après le théorème 3 (dans le cas $\Delta = 0$) il existe deux réels A et B tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, u(t) = (At + B)e^t.$$

En prenant cette fois la deuxième égalité. $v'(t) = -v(t) + (At + B)e^t$.

On résout l'équation homogène $y' = -y$: $\exists C \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = Ce^{-t}$.

On trouve comme solution particulière de l'équation complète sous la forme $v(t) = (\alpha t + \beta)e^t$. Or

$\forall t \in \mathbb{R}, v'(t) + v(t) = (\alpha t + \beta + \alpha)e^t + (\alpha t + \beta)e^t$ donc il suffit de prendre :

$$\alpha = \frac{A}{2} \text{ et } \beta = \frac{B - \alpha}{2} = \frac{B}{2} - \frac{A}{4}. \text{ On a donc } \forall t \in \mathbb{R}, v(t) = Ce^{-t} + \left(\frac{A}{2}t + \frac{B}{2} - \frac{A}{4}\right)e^t.$$

En reprenant la première égalité à partir de $\forall t \in \mathbb{R}, u(t) = (At + B)e^t$, on trouve $u'(t) = (At + B + A)e^t$ donc

$$(At + B + A)e^t = (3At + 3B)e^t - 4Ce^{-t} - (2At + 2B - A)e^t$$

d'où $-4Ce^{-t} = 0$ d'où $C = 0$.

Inversement, pour tous réels A et B les fonctions u et v vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, u(t) = (At + B)e^t \text{ et } v(t) = \left(\frac{A}{2}t + \frac{B}{2} - \frac{A}{4}\right)e^t$$

sont solutions du système.

2. D'après la question précédente, il est nécessaire de prendre des solutions u et v comme plus haut, avec $B = 1$ puis $A = 2$ ce qui donne

$$\forall t \in \mathbb{R}, u(t) = (2t + 1)e^t \text{ et } v(t) = te^t.$$

Ces fonctions sont effectivement solutions du système.

Solution 4

- a) $x \mapsto \lambda e^{-x}$
- b) $x \mapsto \lambda e^{3x}$
- c) $x \mapsto \lambda e^{2x}$
- d) $x \mapsto \lambda e^{\frac{1}{3}x}$
- e) $x \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{5}x}$

Solution 5

- a) $x \mapsto \lambda e^{-2x}$
- b) $x \mapsto \lambda e^{-2x} + 3$
- c) $x \mapsto \lambda e^{3x} - 3$
- d) $x \mapsto \lambda e^{-2x} + \frac{5}{2}$
- e) $x \mapsto \lambda e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{7}{3}$
- f) $x \mapsto \lambda e^{\frac{1}{4}x} - 8$

Solution 6

$$2y' + y = 2 \iff y' + \frac{1}{2}y = 1 \text{ donc}$$

- 1. $x \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{2}x} + 2$

$$2. x \mapsto -e^{-\frac{1}{2}x} + 2$$

Solution 7

Solution générale $x \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{2}x}$ donc solution tenant compte la condition : $x \mapsto e^{-\frac{1}{2}(x - \ln 4)}$

Solution 8

1. Les solutions de (E) sont $f : x \mapsto A \cos(4x) + B \sin(4x)$.

2. Comme $f(0) = \frac{1}{10}$ alors en substituant x par 0 on obtient $A = \frac{1}{10}$.

De plus, $f'(x) = -4 \times \frac{1}{10} \sin(4x) + 4B \cos(4x)$. Comme $f'(0) = -\frac{2\sqrt{3}}{5}$ alors cela donne $4B = -\frac{2\sqrt{3}}{5}$

et donc $B = -\frac{\sqrt{3}}{10}$.

Finalement on obtient : $f(x) = \frac{1}{10} \cos(4x) - \frac{\sqrt{3}}{10} \sin(4x)$.

Solution 9

On peut écrire $4y'' + \pi^2 y = 0$ comme $y'' + (\frac{\pi}{2})^2 y = 0$, ce qui donne comme solutions

$g(x) = A \cos(\frac{\pi}{2}x) + B \sin(\frac{\pi}{2}x)$. Des conditions données par l'énoncé on peut en tirer que $g(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $g'(\frac{1}{2}) = 0$.

Ainsi $g(\frac{1}{2}) = A \cos(\frac{\pi}{4}) + B \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(A + B) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Autrement dit $A + B = 1$.

Nous avons aussi $g'(x) = -\frac{\pi}{2}A \sin(\frac{\pi}{2}x) + \frac{\pi}{2}B \cos(\frac{\pi}{2}x)$ ce qui donne $g'(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}(B - A) = 0$ et donc $B - A = 0$.

Les deux conditions obtenues $A + B = 1$ et $B - A = 0$ impliquent que $A = B = \frac{1}{2}$.

Conclusion : $\frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{2}x) + \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{2}x)$.

Solution 10

1. La fonction g est dérivable sur \mathbb{R}_+ et on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$g'(t) = f'(t)e^t + f(t)e^t = (f'(t) + f(t))e^t.$$

Et comme f est solution de (E) sur \mathbb{R}_+ : $g'(t) = a$ ce qui donne $g(t) = at + b$.

La fonction est bien affine sur \mathbb{R}_+ .

2. On a donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) = (at + b)e^{-t}$.

Or, à l'instant $t = 0$, l'alcool n'est pas encore dans le sang, donc $f(0) = 0$ ce qui donne $be^{-t} = 0$ autrement dit $b = 0$. D'où $f(t) = ate^{-t}$.

3. (a) Étudions les variations de f . Comme f est solution de (E), on a :

$$f'(t) = 5e^{-t} - f(t) = 5e^{-t} - 5te^{-t} = 5e^{-t}(1 - t).$$

D'où $f'(t) \geq 0 \iff 1 - t \geq 0 \iff t \leq 1$.

La fonction est croissante sur $[0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$. Elle admet donc un maximum en 1 et $f(1) = \frac{5}{e} \approx 1,84$ à 10^{-2} près.

Le taux d'alcoolémie maximal est de $1,84 \text{ gL}^{-1}$ atteint au bout d'une heure.

- (b) Nous devons résoudre l'inéquation : $f(t) \leq 0,5$ c'est-à-dire $te^{-t} \leq 0,1$. Comme la fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ et $f(1) > 0,5$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ par le théorème de bijection nous sommes assurés de l'existence d'un unique réel α de $[1; +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0,5$. Avec la calculatrice nous avons $f(3) > 0,5$ et $f(4) < 0,5$ on a donc bien $\alpha \in]3; 4[$. Il faudra attendre 4 heures pour pouvoir, par exemple, reprendre le volant...

Solution 11

1. D'après la relation fondamentale de la dynamique, on a :

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}.$$

En projetant les vecteurs sur un axe vertical, il vient :

$$mg - \frac{mgv^2}{25} = mv'.$$

On s'aperçoit que le problème est indépendant de la masse m du parachutiste avec son équipement.

$$v' = g\left(1 - \frac{v^2}{25}\right) = \frac{g}{25}(25 - v^2).$$

La fonction v est donc bien solution, sur \mathbb{R}_+ , de l'équation différentielle :

$$(E) : v' = g\left(1 - \frac{v^2}{25}\right).$$

2. La fonction z est dérivable sur \mathbb{R}_+ (car v l'est) et on a :

$$z' = -\frac{v'}{(v-5)^2} = \frac{g}{25} \frac{(v^2 - 25)}{(v-5)^2} = \frac{g}{25} \frac{v+5}{v-5} = \frac{gz(v+5)}{25}.$$

Or, $v = \frac{1}{z} + 5$ ce qui donne $v+5 = \frac{1}{z} + 10$. D'où :

$$z' = \frac{gz\left(\frac{1}{z} + 10\right)}{25} = \frac{g}{25}(10z + 1).$$

On en déduit, que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$z(t) = Ce^{\frac{2gt}{5}} - \frac{1}{10}.$$

la condition initiale $z(0) = \frac{1}{50}$ donne $C - \frac{1}{10} = \frac{1}{50}$ ainsi $C = \frac{3}{25}$.

3. D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$v(t) = \frac{1}{\frac{3}{25}e^{\frac{2gt}{5}} - \frac{1}{10}} + 5$$

Comme $g > 0$ on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{2gt}{5}} = +\infty$ ce qui donne $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 5$.

La vitesse du parachutiste se stabilise rapidement vers 5 ms^{-1} .

9.6 Problème

D'après Jean-Louis Friot, citant Arnaud Basson. On se propose de redémontrer le théorème 3 admis page 435 avec moins d'algèbre et plus d'analyse.

Soit b et c deux nombres réels. On considère l'équation différentielle

$$y'' + by' + cy = 0 \quad (9.2)$$

ainsi que son **équation caractéristique** :

$$r^2 + br + c = 0.$$

On note $\Delta = b^2 - 4c$ le discriminant, r_1 et r_2 les racines (réelles ou complexes, distinctes ou confondues) de cette équation.

Soit y une solution de (9.1) sur \mathbb{R} .

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = (y(x))'^2 + (y(x))^2.$$

On rappelle à toutes fins utiles que pour tous réels u et v ,

$$2uv \leq u^2 + v^2. \quad (9.3)$$

1. Démontrer qu'il existe une constante $K \geq 0$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, F'(t) \leq K.F(t) \quad (9.4)$$

2. Étudier les variations sur \mathbb{R} de la fonction G définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, G(t) = F(t) \exp(-Kt).$$

En déduire que si $y(0) = y'(0) = 0$ alors $\forall t \in [0, +\infty[$, $y(t) = 0$.

3. Démontrer que la fonction \tilde{y} définie sur \mathbb{R} par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \tilde{y}(t) = y(-t),$$

est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y'' - by' + cy = 0$.

En déduire que si $y(0) = y'(0) = 0$ alors $\forall t \in]-\infty, 0]$, $y(t) = 0$.

4. Soit y_0, y'_0 deux nombres réels. Démontrer qu'il existe au plus une solution y sur \mathbb{R} de (9.1) vérifiant $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y'_0$.
5. On suppose que $\Delta > 0$ et donc que r_1 et r_2 sont deux réels distincts.

- (a) Démontrer que pour tous réels A et B la fonction $f_{A,B}$ définie sur \mathbb{R} par

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_{A,B} = A \exp(r_1 t) + B \exp(r_2 t)$$

est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (9.1).

- (b) Soit y_0 et y'_0 deux nombres réels. Démontrer qu'il existe deux réels A et B tels que $f_{A,B}(0) = y_0$ et $f'_{A,B}(0) = y'_0$.
- (c) Démontrer que l'ensemble des solutions de (9.1) est $\mathcal{S} = \{f_{A,B}, A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}\}$.

6. On suppose que $\Delta = 0$ et donc que $r = r_1 = r_2$ est réel.

(a) Démontrer que pour tous réels A et B la fonction $g_{A,B}$ définie sur \mathbb{R} par

$$\forall t \in \mathbb{R}, g_{A,B} = (At + B) \exp(rt)$$

est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (9.1).

(b) Soit y_0 et y'_0 deux nombres réels. Démontrer qu'il existe deux réels A et B tels que $g_{A,B}(0) = y_0$ et $g'_{A,B}(0) = y'_0$.

(c) Démontrer que l'ensemble des solutions de (9.1) est $\mathcal{S} = \{g_{A,B}, A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}\}$.

7. On suppose que $\Delta < 0$ et donc que r_1 et r_2 sont deux complexes distincts et conjugués : $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ où $\alpha = -\frac{b}{2}$ et $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$ sont réels.

(a) Démontrer que pour tous réels A et B la fonction $h_{A,B}$ définie sur \mathbb{R} par

$$\forall t \in \mathbb{R}, h_{A,B} = (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)) \exp(\alpha t)$$

est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (9.1).

(b) Soit y_0 et y'_0 deux nombres réels. Démontrer qu'il existe deux réels A et B tels que $h_{A,B}(0) = y_0$ et $h'_{A,B}(0) = y'_0$.

(c) Démontrer que l'ensemble des solutions de (9.1) est $\mathcal{S} = \{h_{A,B}, A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}\}$.

9.7 Corrigé

1. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a $2|y(t)y'(t)| \leq y(t)^2 + (y'(t))^2$ d'après l'inégalité (9.3). Donc

$$\begin{aligned} (y''(t))^2 &= (-by'(t) - cy(t))^2 \\ &= b^2 (y'(t))^2 + 2bcy(t)y'(t) + c^2(y(t))^2 \\ &\leq b^2 (y'(t))^2 + 2|bc| \cdot |y(t)y'(t)| + c^2(y(t))^2 \\ &\leq b^2 (y'(t))^2 + |bc| \left(y(t)^2 + (y'(t))^2 \right) + c^2(y(t))^2 \\ &\leq (b^2 + c^2 + |bc|) (y'(t))^2 \\ &\leq (b^2 + c^2 + |bc|) F(t). \end{aligned}$$

La fonction F est dérivable d'après les théorèmes généraux. De ce fait

$$\begin{aligned} F'(t) &= 2y'(t)y(t) + 2y(t)y''(t) \\ &= 2y'(t)(y(t) + y''(t)) \\ &\leq (y'(t))^2 + (y(t) + y''(t))^2 \quad \text{d'après (9.3)} \\ &\leq (y'(t))^2 + (y(t))^2 + 2y(t)y''(t) + (y''(t))^2 \\ &\leq (y'(t))^2 + (y(t))^2 + (y(t))^2 + (y''(t))^2 + (y''(t))^2 \quad \text{d'après (9.3)} \\ &\leq F(t) + F(t) + 2(y''(t))^2 \\ &\leq 2(1 + b^2 + c^2 + |bc|)F(t). \end{aligned}$$

On peut donc choisir $K := 2(1 + b^2 + c^2 + |bc|)$.

2. La fonction G est dérivable d'après les théorèmes généraux. De plus, pour tout réel t ,

$$G'(t) = F'(t) \exp(-Kt) - KF(t) \exp(-Kt) \leq 0.$$

La fonction G est donc décroissante sur \mathbb{R} . Comme de plus G est à valeurs positives ou nulles, puisque $G(0) = F(0) = 0$, on a $\forall t \in [0, +\infty[$, $G(t) = 0$. À plus forte raison, $y(t) = 0$.

3. La fonction \tilde{y} est dérivable comme composée de fonctions dérivables. De plus

$$\forall t \in \mathbb{R}, \tilde{y}'(t) = -y'(-t) \text{ et } \tilde{y}''(t) = y''(-t).$$

Puisque y est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y'' + by' + cy = 0$, on a :

$\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$, donc en prenant $t := -x$ on a :

$\forall t \in \mathbb{R}, y''(-t) - b(-y'(-t)) + cy(-t) = 0$.

Autrement dit $\tilde{y}''(t) - b(-\tilde{y}'(t)) + c\tilde{y}(t) = 0$. C'est bien dire que \tilde{y} est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y'' - by' + cy = 0$.

De ce fait, puisque $\tilde{y}(0) = \tilde{y}'(0) = 0$ alors on obtient $\forall t \in [0, +\infty[$, $\tilde{y}(t) = 0$ avec la méthode du jaguar casqué en changeant b en son opposé. Autrement dit $\forall t \in]-\infty, 0]$, $y(t) = 0$.

4. En effet, soit y_1 et y_2 deux telles solutions et soit $y = y_1 - y_2$. On a $y(0) = y_1(0) - y_2(0) = y_0 - y_0 = 0$ et $y'(0) = y_1'(0) - y_2'(0) = y_0' - y_0' = 0$. De plus on a pour tout réel t ,

$$\begin{array}{rcccccc} y_1''(t) & + & by_1'(t) & + & cy_1(t) & = & 0 \\ y_2''(t) & + & by_2'(t) & + & cy_2(t) & = & 0 \\ \hline (y_1'' - y_2'')(t) & + & b(y_1' - y_2')(t) & + & c(y_1 - y_2)(t) & = & 0 \end{array}$$

par soustraction, soit $y''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ et ce pour tout réel t . D'après les deux questions précédentes, y est identiquement nulle sur $[0, +\infty[$ et sur $] -\infty, 0]$. De ce fait les fonctions y_1 et y_2 sont égales, ce qu'il fallait démontrer.

5. (a) On a $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcccl} f_{A,B}(t) & = & A \exp(r_1 t) & + & B \exp(r_2 t) & | & \times c \\ f'_{A,B}(t) & = & Ar_1 \exp(r_1 t) & + & Br_2 \exp(r_2 t) & | & \times b \\ f''_{A,B}(t) & = & Ar_1^2 \exp(r_1 t) & + & Br_2^2 \exp(r_2 t) & | & \times 1 \\ \hline f''_{A,B}(t) + bf'_{A,B}(t) + cf_{A,B}(t) & = & A(r_1^2 + br_1 + c) \exp(r_1 t) & + & B(r_2^2 + br_2 + c) \exp(r_2 t) & | & \end{array}$$

Puisque $r_1^2 + br_1 + c = r_2^2 + br_2 + c = 0$ on a bien $f''_{A,B}(t) + bf'_{A,B}(t) + cf_{A,B}(t) = 0$ et ce pour tout réel t .

- (b) On a $f_{A,B}(0) = A + B$ et $f'_{A,B}(0) = Ar_1 + Br_2$. On est amené à résoudre le système $\begin{cases} A + B = y_0 \\ Ar_1 + Br_2 = y_0' \end{cases}$ dont le déterminant $r_2 - r_1 \neq 0$, d'où l'existence (et l'unicité) du couple (A, B) .

- (c) La question 5a dit que \mathcal{S} est inclus dans l'ensemble des solutions. La question précédente combinée à la question 3 dit que ce sont les seules.

6. (a) On a $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcccl} g_{A,B}(t) & = & (At + B) \exp(rt) & | & \times c \\ g'_{A,B}(t) & = & (Art + A + Br) \exp(rt) & | & \times b \\ g''_{A,B}(t) & = & (Ar^2 t + 2Ar + Br^2) \exp(rt) & | & \times 1 \\ \hline g''_{A,B}(t) + bg'_{A,B}(t) + cg_{A,B}(t) & = & (A(r^2 + br + c)t + B(r^2 + br + c) + A(b + 2r)) \exp(rt) & | & \end{array}$$

Puisque $r^2 + br + c = 0$ et que $b + 2r = 0$ on a bien $g''_{A,B}(t) + bg'_{A,B}(t) + cg_{A,B}(t) = 0$ et ce pour tout réel t .

(b) On a $g_{A,B}(0) = B$ et $f'_{A,B}(0) = A + Br$. On est amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} + B = y_0 \\ A + Br = y'_0 \end{cases} \text{ dont le déterminant } -1 \neq 0, \text{ d'où l'existence (et l'unicité) du couple } (A, B).$$

(c) La question 6a dit que \mathcal{S} est inclus dans l'ensemble des solutions. La question précédente combinée à la question 3 dit que ce sont les seules.

7. (a) On a $\forall t \in \mathbb{R}$,

$h_{A,B}(t)$	$=$	$(A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)) \exp(\alpha t)$	$\times c$
$h'_{A,B}(t)$	$=$	$((A\alpha + B\beta) \cos(\beta t) + (B\alpha - A\beta) \sin(\beta t)) \exp(\alpha t)$	$\times b$
$h''_{A,B}(t)$	$=$	$((A\alpha^2 + 2B\alpha\beta - A\beta^2) \cos(\beta t) + (B\alpha^2 - 2A\alpha\beta - B\beta^2) \sin(\beta t)) \exp(\alpha t)$	$\times 1$
$h''_{A,B}(t)$ $+ bh'_{A,B}(t)$ $+ ch_{A,B}(t)$	$=$	$(A(c + b\alpha + \alpha^2 - \beta^2) + B(b\beta + 2\alpha\beta)) \cos(\beta t) \exp(\alpha t)$ $+ (A(-b\beta - 2\alpha\beta) + B(c + b\alpha + \alpha^2 - \beta^2)) \sin(\beta t) \exp(\alpha t)$	

Puisque $(\alpha + i\beta)^2 + b(\alpha + i\beta) + c = 0$ et que b et c sont réels, on a $c + b\alpha + \alpha^2 - \beta^2 = 0$ pour la partie réelle et $b\beta + 2\alpha\beta = 0$ pour la partie imaginaire. En fin de compte, on a bien $h''_{A,B}(t) + bh'_{A,B}(t) + ch_{A,B}(t) = 0$ et ce pour tout réel t .

(b) On a $h_{A,B}(0) = A$ et $h'_{A,B}(0) = A\alpha + B\beta$. On est amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} A = y_0 \\ A\alpha + B\beta = y'_0 \end{cases} \text{ dont le déterminant } \beta \neq 0, \text{ d'où l'existence (et l'unicité) du couple } (A, B).$$

(c) La question 7a dit que \mathcal{S} est inclus dans l'ensemble des solutions. La question précédente combinée à la question 3 dit que ce sont les seules.

9.8 Travaux dirigés

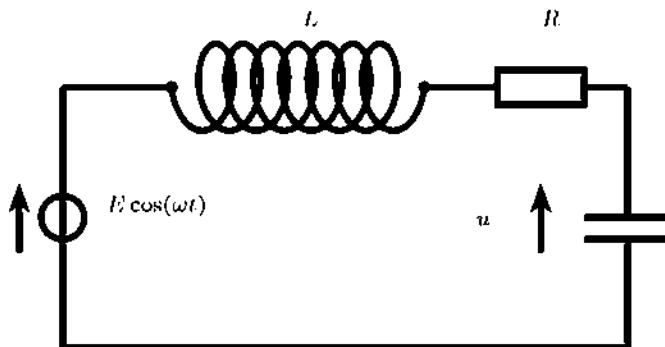
Travaux dirigés 4 (Circuit RLC en série)

Dans un circuit RLC en série, soumis à une tension $e(t)$, on s'intéresse à la différence de potentiel aux bornes du condensateur.

Elle est solution de

$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = e$

(9.5)



Première partie : Étude du régime libre.

Dans le régime libre (appelé aussi régime propre) on a $e := 0$: le condensateur se décharge.

1. Dans cette question on étudie la situation idéale $R := 0$.

Quelles sont les périodes des solutions de (9.5) ? On appellera par la suite ω_0 la plus petite période strictement positive.

Calculer ω_0 en fonction de L et de C .

2. Quelle est la dimension (l'unité) de ω_0 ?

3. On ne suppose plus $R = 0$ et on définit $\lambda := \frac{R}{2L}$. Exprimer (9.5), son équation caractéristique, ainsi que son discriminant Δ , à l'aide de λ et de ω_0 .

Quelle est la dimension de λ ?

4. On définit le coefficient d'amortissement par : $\alpha := \frac{\lambda}{\omega_0}$.

Quelle est la dimension de α ? Calculer Δ en fonction de α et de ω_0 .

5. **Régime aperiodique** : $\alpha > 1$.

Déterminer les racines de l'équation caractéristique. Que peut-on dire de leur signe ?

Déterminer les solutions de (9.5).

Déterminer la solution u_0 de (9.5) vérifiant les conditions $\begin{cases} u(0) = E, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$.

Tracer la fonction u_0 avec les données $E := 1$, $\omega_0 := 1$ pour $\alpha := 2$ puis $\alpha := 1, 1$.

6. **Régime critique** : $\alpha = 1$.

Déterminer les racines de l'équation caractéristique. Que peut-on dire de leur signe ?

Déterminer les solutions de (9.5).

Déterminer la solution u_0 de (9.5) vérifiant les conditions $\begin{cases} u(0) = E, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$.

Tracer la fonction u_0 avec les données $E := 1$, $\omega_0 := 1$

7. **Régime pseudo-périodique** : $\alpha < 1$.

Déterminer les racines de l'équation caractéristique. Que peut-on dire du signe de leur partie réelle ?

Déterminer les solutions de (9.5).

Déterminer la solution u_0 de (9.5) vérifiant les conditions $\begin{cases} u(0) = E, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$.

Tracer la fonction u_0 avec les données $E := 1$, $\omega_0 := 1$ pour $\alpha := 0,9$ puis $\alpha := 0,5$.

Deuxième partie : Étude du régime sinusoïdal forcé.

Dans cette partie on prend $L > 0$ et $C > 0$. On prend $R > 0$ sauf à la question 4. le circuit RLC en série est soumis à une tension $e(t) := E \cos(\omega t)$.

1. Déterminer deux réels A et B tels que la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto u(t) := A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ soit solution de (9.5).

2. Déterminer, en fonction de ω , le maximum $M(\omega)$ de la solution trouvée à la question précédente.

3. Étudier les variations sur $]0, +\infty[$ de $\omega \mapsto M(\omega)$.

On pourra introduire le **facteur de qualité** $Q := \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\alpha}$.

4. On prend $R := 0$ et $e(t) := E \cos(\omega_0 t)$.

Trouver une solution de 9.5 sous la forme $u(t) := t(A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t))$.

5. Donner la solution de 9.5 vérifiant les conditions initiales $\begin{cases} u(t) = 1 \\ u'(t) = 0 \end{cases}$

Première partie : Étude du régime libre.

1. L'équation (9.5) s'écrit $u'' + \frac{1}{LC}u = 0$. D'après le théorème 3 (dans le cas $\Delta = 0$), il existe deux constantes A et B appartenant à \mathbb{R} telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, u(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

en posant $\boxed{\omega_0 := \frac{1}{\sqrt{LC}}}$.

2. Comme l'argument d'un cosinus est sans dimension $\omega_0 t$ est sans dimension, donc ω_0 s'exprime en s^{-1} ou en $rad.s^{-1}$.
3. L'équation (9.5) s'écrit $u'' + 2\lambda u' + \omega_0^2 u = 0$. Son équation caractéristique s'écrit :

$$\boxed{r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0} \quad (9.6)$$

et son discriminant est $\Delta := 4\lambda^2 - 4\omega_0^2$.

De ce fait λ et ω_0 ont la même dimension : l'inverse d'un temps. Il est mesuré en s^{-1} .

4. Le coefficient d'amortissement est sans dimension et $\Delta = 4\omega_0(\alpha^2 - 1)$.

5. **Régime apériodique : $\alpha > 1$.**

On a $\Delta > 0$. L'équation (9.6) admet deux solutions réelles r_1 et r_2 . Le produit $r_1 r_2 = \omega_0^2$ est strictement positif donc r_1 et r_2 sont de même signe. La somme $r_1 + r_2 = -2\lambda$ est strictement négatif donc r_1 et r_2 sont négatifs. De plus,

$$\begin{aligned} r_1 &= -\alpha\omega_0 + \omega_0\sqrt{\alpha^2 - 1} \\ r_2 &= -\alpha\omega_0 - \omega_0\sqrt{\alpha^2 - 1} \end{aligned}$$

D'après le théorème 3 (dans le cas $\Delta > 0$), il existe deux constantes A et B appartenant à \mathbb{R} telles que

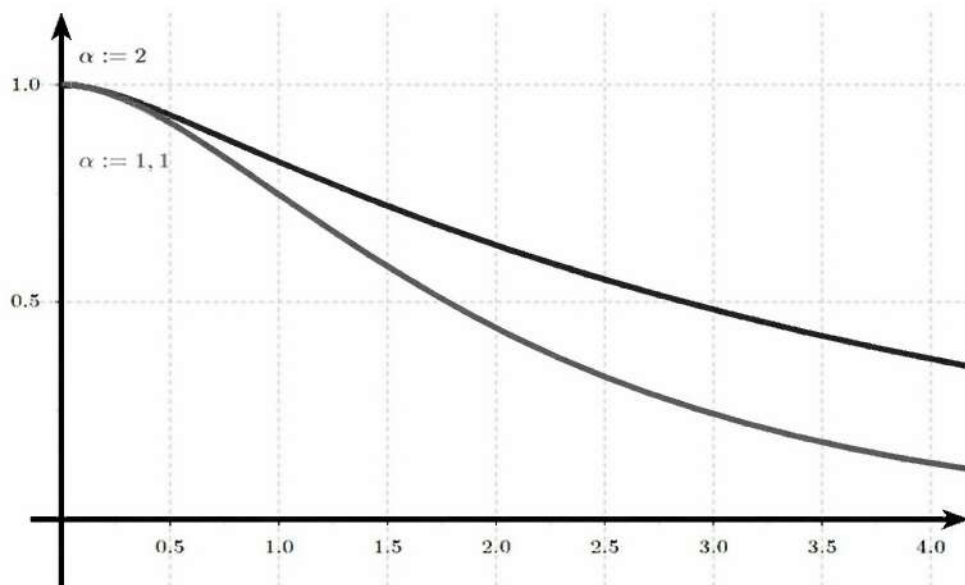
$$\forall t \in \mathbb{R}, u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}.$$

Les conditions initiales $\begin{cases} u(0) = E := 1, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$ entraînent

$$\begin{cases} A + B = E \\ r_1 A + r_2 B = 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$A = \frac{r_2 E}{r_2 - r_1} \text{ et } B = \frac{-r_1 E}{r_2 - r_1}.$$



6. Régime critique : $\alpha = 1$.

On a $\Delta = 0$. L'équation (9.6) admet une racine double r négative.

De plus, $r = -\omega_0$.

D'après le théorème 3 (dans le cas $\Delta = 0$), il existe deux constantes A et B appartenant à \mathbb{R} telles que

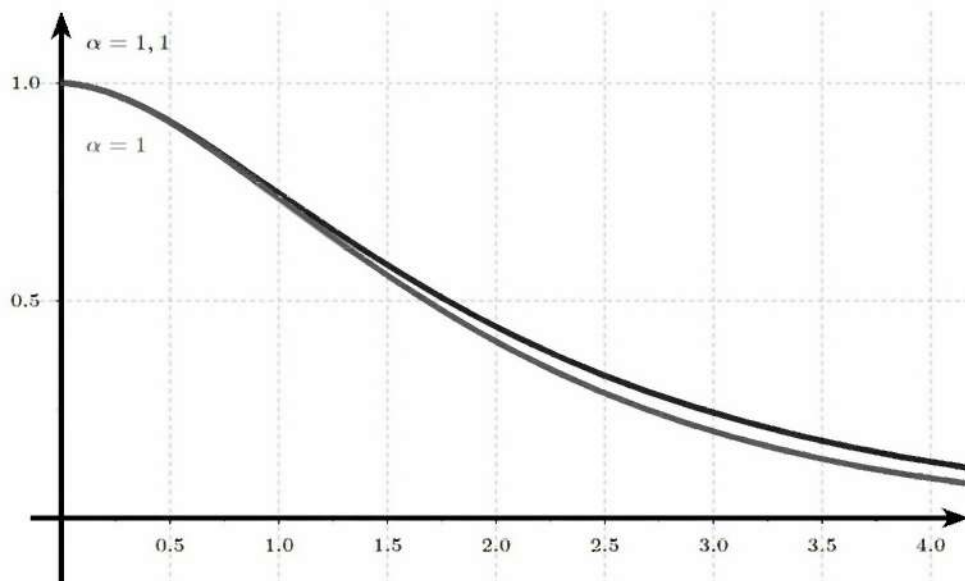
$$\forall t \in \mathbb{R}, u(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}.$$

Les conditions initiales $\begin{cases} u(0) = E, \\ u'(0) = 0 \end{cases}$ entraînent

$$\begin{cases} B = E \\ A - \omega_0 B = 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$A = \omega_0 E \text{ et } B = E.$$



7. Régime pseudo-périodique : $\alpha < 1$.

On a $\Delta < 0$. L'équation (9.6) admet deux solutions complexes conjuguées r_1 et r_2 , avec

$$r_1 = -\alpha\omega_0 + i\omega \qquad r_2 = -\alpha\omega_0 - i\omega,$$

où on pose $\omega = \omega_0\sqrt{1-\alpha^2}$.

Le nombre $\omega < \omega_0$ est appelé **pseudo-période des oscillations**.

D'après le théorème 3 (dans le cas $\Delta > 0$), il existe deux constantes A et B appartenant à \mathbb{R} telles que

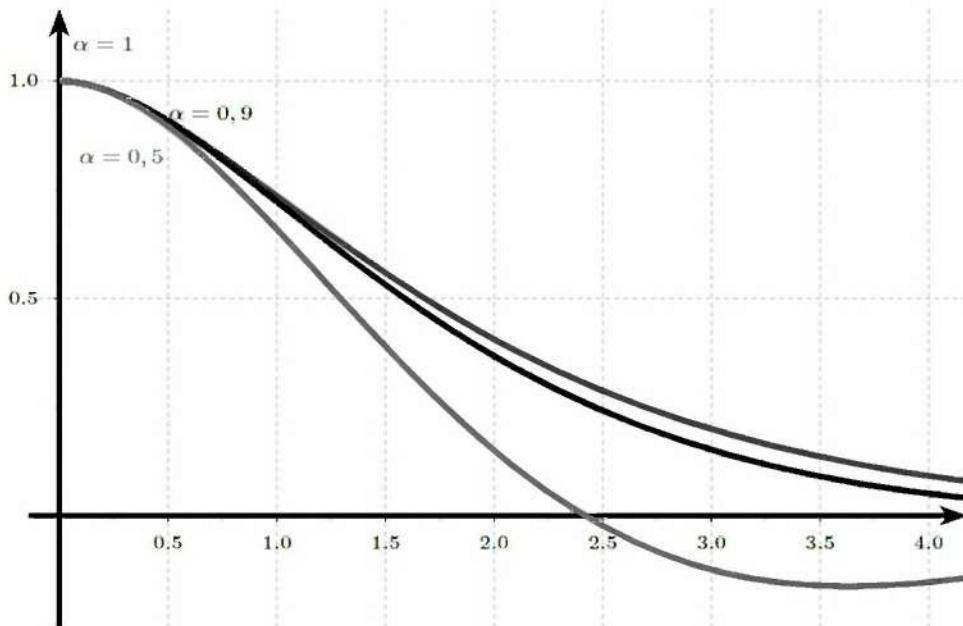
$$\forall t \in \mathbb{R}, u(t) = (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))e^{-\alpha\omega_0 t}.$$

Les conditions initiales $\begin{cases} u(0) = E, \\ u'(0) = 0 \end{cases}$ entraînent

$$\begin{cases} A = E \\ \alpha\omega_0 A + \omega B = 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$A = E \text{ et } B = \alpha \frac{\omega_0}{\omega} E.$$



Deuxième partie : Étude du régime sinusoïdal forcé.

Les physiciens ont l'habitude de résoudre cette question à l'aide de grandeurs complexes. Ce n'est pas obligatoire.

- Déterminer deux réels A et B tels que la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto u(t) := A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ soit solution de (9.5). On a $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{lcl} u(t) & = & A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \\ RC \quad u'(t) & = & -RCB\omega \cos(\omega t) + RCA\omega \sin(\omega t) \\ LC \quad u''(t) & = & -LC A \omega^2 \cos(\omega t) - LC B \omega^2 \sin(\omega t) \end{array}$$

$$\text{d'où} \quad E \cos(\omega t) = (A(1 - LC\omega^2) + BRC\omega) \cos(\omega t) + (-RCA + B(1 - LC\omega^2)) \sin(\omega t).$$

Pour que u soit solution de (9.5), il suffit que
$$\begin{cases} (1 - LC\omega^2)A + RC\omega B = E \\ -RC\omega A + (1 - LC\omega^2)B = 0 \end{cases}$$

Le déterminant du système est $D := (1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2$ qui est non nul, sauf à prendre $R := 0$ et $LC\omega^2 = 1$ soit $\omega = \pm\omega_0$, ce qu'on a exclu.

Par combinaison de lignes (ou autrement), on trouve : $((1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2) A = E(1 - LC\omega^2)$ et $((1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2) B = ERC$ soit

$$A = \frac{E}{D}(1 - LC\omega^2) \text{ et } B = \frac{E}{D}RC.$$

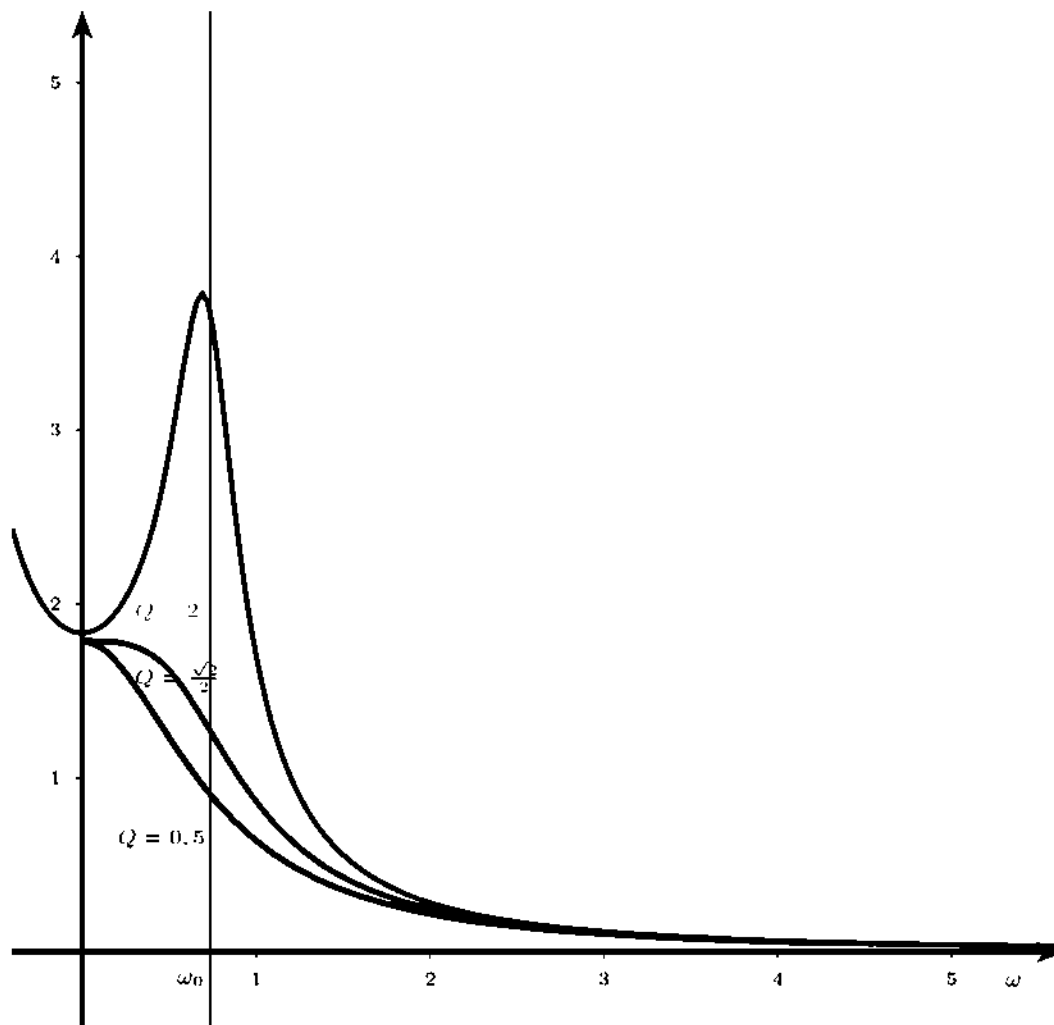
2. En écrivant $u(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t + \phi)$, on voit que la tension maximale aux bornes du condensateur est $\sqrt{A^2 + B^2}$. (voir la méthode 6 page 239 du cours de première).

$$\text{Or } A^2 = \frac{E^2}{D^2}(1 - LC\omega^2)^2 \text{ et } B^2 = \frac{E^2}{D^2}(RC\omega)^2 \text{ d'où } A^2 + B^2 = \frac{E^2}{D^2}((1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2) = \frac{E^2}{D^2}D = \frac{E^2}{D}. \text{ Donc, en supposant } E > 0, \text{ on a } \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{E}{\sqrt{D}} = \frac{E}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}.$$

3. Pour étudier les variations de M on étudie celles de $D(\omega) := (1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2$, et pour cela, celles de $x \mapsto (1 - LCx)^2 + (RC)^2x$. Cette fonction du second degré présente un minimum en $x_0 = \frac{2LC - (RC)^2}{2(LC)^2}$. Ce minimum est négatif si $2LC \leq (RC)^2$ soit $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. La fonction $x \mapsto (1 - LCx)^2 + (RC)^2x$ est donc croissante sur $]0, +\infty[$, donc la fonction M est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Si $2LC > (RC)^2$ alors la fonction $x \mapsto (1 - LCx)^2 + (RC)^2x$ est donc décroissante sur $]0, x_0[$, puis est croissante sur $]x_0, +\infty[$. On en déduit les variations de la fonction M :

x	0	$\sqrt{x_0}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			



Quelques exemples. La fréquence ω_0 est celle de $Q := 2$.

4. On obtient $u'(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + t(-A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t))$ puis

$$u''(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) - A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) \\ + t(-A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) - B\omega_0^2 \sin(\omega_0 t)).$$

Donc $u''(t) + \omega_0^2 u(t) = -2A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + 2B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$.

Pour que u soit solution de 9.5, il suffit que $A = 0$ et $B = \frac{E}{2\omega_0}$.

On a alors $u(0) = 0$ et $u'(0) = A$.

5. Soit u une solution de 9.5. Il existe deux réels A et B tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, u(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{E}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t).$$

On a $u(0) = A = 1$ et $u'(t) = B\omega_0 = 0$. Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, u(t) = \cos(\omega_0 t) + \frac{E}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t).$$

On remarque que la tension aux bornes du condensateur peut prendre des valeurs arbitrairement grandes, synonyme de destruction du condensateur.

Annexe A

Principes des dénombrements

Sommaire

A.1	Cardinaux et bijections	458
A.2	Opérations sur les ensembles finis	463

Ce chapitre a pour but de détailler les démonstrations manquantes du chapitre 11 du cours de première.

Pour être en mesure de le comprendre, il faut être à l'aise avec les notions d'application, d'injection, de surjection et de bijection. Il faut aussi posséder quelques rudiments en théorie des ensembles.

On utilisera plusieurs fois la notion de restriction d'une fonction.

Définition 1.

Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction. On appelle **restriction** de f à $A \subset E$, la fonction

$$f|_A : A \rightarrow F$$

$$x \mapsto f(x)$$

Il est aussi possible sous certaines conditions de définir des doubles restrictions.

Définition 2.

Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction.

Soit $A \subset E$ et $B \subset F$ tels que $f(A) \subset B$. On appelle **double restriction** de f à A et en B , la fonction

$$f|_{A,B} : A \rightarrow B$$

$$x \mapsto f(x)$$

Les démonstrations qui suivent sont plus longues et fastidieuses que difficiles.

A.1 Cardinaux et bijections

On commence par un lemme technique.

Lemme 1

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Si il existe une bijection de $\{1, \dots, m\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ alors $m = n$.

Démonstration 1

Quitte à considérer la bijection réciproque, on peut toujours supposer $n \leq m$.

On démontre par récurrence la proposition

$\mathcal{H}_n : \forall m \in \mathbb{N}, n \leq m$, pour toute bijection de $\{1, \dots, m\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ on a $m = n$.

\mathcal{H}_0 est vraie, c'est immédiat certes lorsqu'on sait travailler avec l'ensemble vide...Formellement, on peut se passer de la vérification de \mathcal{H}_1 qui suit.

\mathcal{H}_1 est vraie. Soit f une bijection de $\{1, \dots, m\}$ dans $\{1\}$. $\forall k \in \{1, \dots, m\}, f(k) = 1$. Supposons l'espace d'un instant que $m > 1$, on aurait alors $f(1) = f(2)$ et f ne serait pas injective. Donc $m = 1$, ce qu'il fallait démontrer.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrons que $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$. Pour cela, supposons \mathcal{H}_n .

Soit f une bijection de $\{1, \dots, m\}$ dans $\{1, \dots, n+1\}$. Premier cas : $f(m) = m+1$.

On considère $f_1 : \{1, \dots, m-1\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ défini par $f_1(k) = f(k)$ pour $k \in \{1, \dots, m-1\}$. C'est la (double) restriction de f à $f_1 : \{1, \dots, m-1\}$ et en $\{1, \dots, n\}$.

- f_1 est bien une application.
- on a bien $\forall k \in \{1, \dots, m-1\}, f_1(k) \in \{1, \dots, n\}$.
- f_1 est bien une surjection.
- f_1 est bien une injection.

Vérifications immédiates. Donc f_1 est une bijection. D'après \mathcal{H}_n , on en déduit que $m-1 = n$ et donc que $m = n+1$. Deuxième cas : $f(m) < n+1$.

Posons $a = f^{-1}(n+1) \in \{1, \dots, m+1\}$ et $b = f(m) \in \{1, \dots, n+1\}$. On définit $f_1 : \{1, \dots, m-1\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ par $f_1(a) = b$ et $f_1(k) = f(k)$ pour $k \in \{1, \dots, m-1\}, k \neq a$.

- f_1 est bien une application.
- on a bien $\forall k \in \{1, \dots, m-1\}, f_1(k) \in \{1, \dots, n\}$.
- f_1 est bien une surjection. Soit $y \in \{1, \dots, n\}$. Si $y = b$, alors $y = f_1(a)$. Sinon, comme f est une surjection de $\{1, \dots, m\}$ sur $\{1, \dots, n+1\}$, $\exists k \in \{1, \dots, m\}$, tel que $f(k) = y$. On ne peut pas avoir $k = a$ puisque $f(a) = n+1 \neq y$ et on ne peut pas avoir $k = m+1$ puisque $f(m+1) = b \neq y$. Donc $f(k) = f_1(k) = b$.
- f_1 est bien une injection. Supposons $f_1(k) = f_1(\ell)$ avec $k, \ell \in \{1, \dots, m-1\}$.
Supposons $k = a$ et donc $f_1(k) = f_1(\ell) = f_1(a) = b$. On a $\ell \neq a$ impossible, car alors $f_1(\ell) = f(\ell) = b$. Comme on a aussi $f(m+1) = b$, f ne serait plus une injection de $\{1, \dots, m\}$ dans $\{1, \dots, n\}$. Contradiction. Donc on a bien $\ell = k = a$.
Prenons le cas qui reste, $k, \ell \in \{1, \dots, m-1\} \setminus \{a\}$. On a donc $f_1(k) = f(k) = f(\ell) = f_1(\ell)$. Comme f est injective, on en déduit que $k = \ell$, ce qu'il fallait démontrer.

Donc f_1 est une bijection. D'après \mathcal{H}_n , on en déduit que $m-1 = n$ et donc que $m = n+1$. On a bien \mathcal{H}_{n+1} . □

A.1.1 Ensembles finis

A.1.2 Définitions

Théorème 2 (Ensemble fini, cardinal)

Soit E un ensemble. On dit que E est un *ensemble fini* si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } E = \emptyset \\ \text{Soit il existe } n \in \mathbb{N} \text{ et une bijection entre } E \text{ et } \{1, \dots, n\} \end{array} \right.$$

Si un tel entier n existe, il est alors le seul à vérifier cette propriété. On l'appelle *cardinal* de E et on le note $\text{Card}(E)$ ou $|E|$ ou encore $\#E$.

Si E est vide, on dit que son cardinal est nul : $\text{Card}(E) = 0$.

Si un ensemble n'est pas fini alors on dit qu'il est *infini*.

Démonstration 2

Supposons que $E \neq \emptyset$ et supposons qu'il existe deux entiers n et m et deux applications bijectives $\varphi : E \rightarrow \{1, \dots, n\}$ et $\psi : E \rightarrow \{1, \dots, m\}$ alors $\varphi \circ \psi^{-1}$ est une bijection de $\{1, \dots, m\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ et d'après le lemme précédent, on a $n = m$. \square

Remarque 1.

Il ne faut pas être décontenancé par le côté abstrait de cette définition. Quand on dénombre un ensemble d'objets, on ne fait rien d'autre que de construire une bijection entre cet ensemble et l'intervalle d'entiers $\{1, \dots, n\}$.

Définition 3 (Ensembles équipotents).

Deux ensembles finis sont dits *équipotents* s'ils ont même cardinal.

A.1.3 Propriétés des cardinaux**Théorème 3 (Deuxième lemme technique)**

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \neq 0$ et soit $a \in E$. L'ensemble $E' = E \setminus \{a\}$ est fini de cardinal $n - 1$.

Démonstration 3

Comme E est de cardinal $n > 0$, il existe une bijection $\varphi : E \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Il y a deux possibilités :

- Si $\varphi(a) = n$ alors $\varphi|_{E'}$ est définie sur E' et à valeurs dans $\{1, \dots, n - 1\}$ et est bijective.
- Si $\varphi(a) = p < n$ alors en considérant l'application $\psi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ qui échange p et n et laisse invariant les autres éléments de $\{1, \dots, n\}$, ψ est bijective et il en est de même de $\psi \circ \varphi : E \rightarrow \{1, \dots, n\}$. De plus, $\psi \circ \varphi(a) = n$ et on est ramené au cas précédent. \square

Théorème 4 (Partie d'un ensemble fini)

Si E est un ensemble fini et F une partie de E alors :

F est un ensemble fini et $\text{Card}(F) \leq \text{Card}(E)$.

$$\text{Card}(F) = \text{Card}(E) \iff F = E$$

Démonstration 4

Démontrons la première proposition par récurrence sur le cardinal de E .

- Si $\text{Card}(E) = 0$ alors E est vide et il en est de même de F . La proposition est donc démontrée au rang 0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la proposition vraie pour un ensemble de cardinal n et montrons là pour un ensemble E de cardinal $n + 1$.
 - Si $F = E$ alors F est fini et $\text{Card}(F) = \text{Card}(E)$

- Sinon, il existe un élément a de E qui n'est pas élément de F . Posons : $E' = E \setminus \{a\}$. E' est non vide. F est inclus dans E' et par application du lemme précédent, E' est de cardinal $\text{Card}(E) - 1 = n + 1 - 1 = n$. On peut alors appliquer à E' l'hypothèse de récurrence : F est un sous ensemble fini de E' , donc de E et $\text{Card}(F) \leq \text{Card}(E') = \text{Card}(E) - 1 < \text{Card}(E)$. La proposition est alors démontrée par application du théorème de récurrence.

Démontrons maintenant la seconde proposition. On sait déjà que si $F = E$ alors $\text{Card}(F) = \text{Card}(E)$. Il s'agit de prouver la réciproque. Par l'absurde, nous supposons que $\text{Card}(F) = \text{Card}(E)$ mais que $F \neq E$. Il existe alors $a \in E$ tel que $F \subset E' = E \setminus \{a\}$. Mais, d'après le lemme précédent, $\text{Card}(E') = \text{Card}(E) - 1$ et d'après la proposition que nous venons de prouver, $\text{Card}(F) \leq \text{Card}(E') = \text{Card}(E) - 1 < \text{Card}(E)$ ce qui contredit notre hypothèse de départ. Par conséquent $E = F$. \square

Théorème 5 (Caractérisation des parties finies de \mathbb{N})

Une partie de \mathbb{N} est finie si et seulement si elle est majorée.

Démonstration 5

\Rightarrow Soit A une partie finie de E . Nous allons effectuer une démonstration par récurrence sur le cardinal n de A pour prouver qu'elle est majorée.

- Si $n = 0$ alors A est vide et donc majorée par n'importe quel entier.
- Fixons $n \in \mathbb{N}$ et supposons la proposition vraie pour un ensemble de A de cardinal n .
- Soient A un ensemble de cardinal $n + 1$ et $a \in A$. Alors $A \setminus \{a\}$ est un sous-ensemble de cardinal n de \mathbb{N} . Il est, par application de l'hypothèse de récurrence, majoré. Soit b un majorant de $A \setminus \{a\}$. Alors $\max(a, b)$ est un majorant de A et A est majoré.
- La proposition est alors prouvée par application du théorème de récurrence.

\Leftarrow Soit A une partie de \mathbb{N} majorée. Soit n un majorant de A . Alors $A \subset \{0, \dots, n\}$ et par conséquent, A est finie de cardinal inférieur ou égal à n . \square

Théorème 6 (Troisième lemme technique)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est une bijection strictement croissante de $\{0, \dots, n\}$ dans \mathbb{N} alors : $\forall p \in \{0, \dots, n\}, f(p) \geq p$.
2. Si f est une application strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} alors : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \geq n$.

Démonstration 6

Nous allons effectuer une récurrence sur n .

- Si $n = 0$ la proposition est trivialement vérifiée.
- Soit $n \in \mathbb{N}$.
- Supposons la proposition vraie au rang n et prouvons là au rang $n + 1$. f est donc une bijection strictement croissante de $\{0, \dots, n + 1\}$ dans \mathbb{N} . Par conséquent, $f|_{\{0, \dots, n\}}$ est une bijection strictement croissante de $\{0, \dots, n\}$ dans \mathbb{N} et appliquant l'hypothèse de récurrence : $\forall p \in \{0, \dots, n\}, f(p) \geq p$. En particulier, $f(n) \geq n$. Mais comme f est strictement croissante : $f(n + 1) > f(n) \geq n$ donc $f(n + 1) \geq n + 1$.
- La proposition est donc prouvée par application du principe de récurrence.

La seconde partie du lemme est une application de la première à $f|_{\{0, \dots, n\}}$. \square

Théorème 7

Si P est une partie finie non vide de \mathbb{N} de cardinal n alors il existe une et une seule bijection strictement croissante de l'intervalle $\{1, \dots, n\}$ dans P .

Démonstration 7

Prouvons par récurrence sur n l'existence de cette bijection. Si $n = 1$ alors P contient un unique élément qu'on note a . L'application ϕ définie sur le singleton $\{1\}$ dans le singleton $P = \{a\}$ qui à 1 associe a est une bijection strictement croissante de $\{1\}$ dans P . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour un ensemble P de cardinal n il existe une bijection strictement croissante de $\{1, \dots, n\}$ dans P . Soit P un ensemble de cardinal $n + 1$. Comme P est une partie finie de \mathbb{N} , d'après la proposition 5, P admet un plus grand élément a . Alors $P' = P \setminus \{a\}$ est un ensemble de cardinal n et d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une bijection strictement croissante $\phi : \{1, \dots, n\} \rightarrow P'$. On prolonge ϕ à P en posant $\phi(n + 1) = a$. Alors ϕ ainsi prolongée est une bijection strictement croissante de $\{1, \dots, n + 1\}$ dans P car a est le plus grand élément de P . La proposition est alors prouvée par application du principe de récurrence.

Prouvons maintenant l'unicité de cette bijection. Supposons que ϕ_1 et ϕ_2 sont deux bijections strictement croissantes de $\{1, \dots, n\}$ dans P . Alors $\phi = \phi_2^{-1} \circ \phi_1$ est une bijection strictement croissante de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même. D'après le lemme précédent, il s'ensuit que $\forall p \in \{1, \dots, n\}$, $\phi(p) \geq p$. Mais $\phi^{-1} = \phi_1^{-1} \circ \phi_2$ est aussi une bijection strictement croissante de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même et on a aussi que $\forall p \in \{1, \dots, n\}$, $\phi^{-1}(p) \geq p$, ce qui s'écrit encore, ϕ étant strictement croissante : $\forall p \in \{1, \dots, n\}$, $p \geq \phi(p)$. En conclusion, $\forall p \in \{1, \dots, n\}$, $\phi(p) = p$ et donc $\phi = Id_{\{1, \dots, n\}}$. On a prouvé alors prouvé que $\phi_1 = \phi_2$. \square

A.1.4 Applications entre ensembles finis**Théorème 8 (Caractérisation des applications injectives entre ensembles finis)**

Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \rightarrow F$. On a :

1. $\text{Card}(f(E)) \leq \text{Card}(E)$
2. f est injective si et seulement si $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E)$

Démonstration 8

1. Pour tout $y \in f(E)$, on choisit un élément $x_y \in E$ tel que $f(x_y) = y$. Soit $F = \{x_y \in E \mid y \in f(E)\}$. $f|_F$ est une bijection de F sur $f(E) = f(F)$. Par conséquent $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(F) \leq \text{Card}(E)$.
2. \Rightarrow Si f est injective alors f réalise une bijection de E sur $f(E)$ et donc : $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E)$.
 \Leftarrow Réciproquement, si $\text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E)$ alors, avec les notations de la preuve précédente, $\text{Card}(F) = \text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E)$ et donc tout élément de $f(E)$ possède un et un seule antécédent. f est donc injective. \square

Théorème 9 (Bijections et ensembles finis)

Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal et $f : E \rightarrow F$. On a équivalence entre :

1. f est injective.
2. f est surjective.
3. f est bijective.

Démonstration 9

On a les équivalences : f est injective $\iff \text{Card}(f(E)) = \text{Card}(E) \iff \text{Card}(f(E)) = \text{Card}F \iff f$ est surjective. D'où l'équivalence des trois propositions. \square

À l'aide des théorèmes plus haut, on démontre sans difficulté le théorème suivant :

Théorème 10 (Trois pour le prix de deux)

Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \rightarrow F$. On considère les trois propositions

1. f est injective.
2. f est surjective.
3. $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$.

Si deux de ces propositions sont vraies, alors la troisième l'est aussi.

Corollaire 11 (Principe des tiroirs)

Soient E et F deux ensembles finis non vides avec $\text{Card}(E) > \text{Card}(F)$ et $f : E \rightarrow F$.

On a : f n'est pas injective. Autrement dit, il existe deux éléments distincts i et j de E pour lesquels $f(i) = f(j)$.

Cette proposition de bon sens dit que si on range des chaussettes dans une commode, on est assuré d'avoir au moins un tiroir qui comporte au moins deux chaussettes. Cette proposition permet de résoudre un grand nombre d'exercices.

Démonstration 10

Par récurrence sur le cardinal de E . Si $\text{Card}(E) = 2$, alors $\text{Card}(F) = 1$ et la proposition est claire.

Si $\text{Card}(E) = n + 1$, alors on ne s'intéresse qu'aux F de cardinal $\leq n$. Si $\text{Card}(F) < n$, alors on applique la proposition de récurrence à la restriction de f à une partie de E à n éléments.

Si $\text{Card}(E) = n$, on considère la restriction \tilde{f} de f à une partie $E \setminus \{i_0\}$ de E à n éléments. Supposons qu'elle soit injective (sinon c'est gagné), d'après la proposition 9, elle est surjective. Donc $f(i_0)$ admet un antécédent i_1 par \tilde{f} , et par suite $f(i_0) = f(i_1)$ et f n'est pas injective. \square

A.2 Opérations sur les ensembles finis

Théorème 12 (Cardinal d'une réunion disjointe)

Soient A et B deux ensembles finis **disjoints**. Alors $A \cup B$ est fini et :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$$

Démonstration 12

Posons $n = \text{Card}(A)$ et $m = \text{Card}(B)$. Soit $\varphi : A \rightarrow \{1, \dots, n\}$ et $\psi_1 : B \rightarrow \{1, \dots, m\}$ deux bijections. Posons

$$\begin{aligned} \psi : B &\longrightarrow \{n+1, \dots, n+m\} \\ x &\longmapsto \psi(x) + n \end{aligned}$$

L'application ψ est encore bijective. Considérons enfin l'application :

$$\begin{aligned} \theta : A \cup B &\longrightarrow \{1, \dots, m+n\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in A \\ \psi(x) & \text{si } x \in B \end{cases} \end{aligned}$$

θ est clairement bien définie car $A \cap B = \emptyset$ et est une bijection de $A \cup B$ sur $\{1, \dots, m+n\}$ ce qui prouve que $\text{Card}(A \cup B) = m+n = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$. \square

On obtient le corollaire suivant :

Théorème 13 (Cardinal du complémentaire)

Soit A une partie d'un ensemble fini E alors

$$\text{Card}(A^c) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$$

où A^c désigne le complémentaire de A dans E .

Démonstration 13

Il suffit d'appliquer la proposition précédente à A et $B = A^c$. \square

On en déduit

Théorème 14 (Cardinal d'une réunion finie disjointe)

Plus généralement, si A_1, \dots, A_n sont n parties d'un ensemble fini E deux à deux disjointes (c'est-à-dire telles que, pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), alors :

$$\text{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \text{Card}(A_1) + \dots + \text{Card}(A_n).$$

Démonstration 14

La preuve est laissée en exercice au lecteur. Elle s'effectue par récurrence et la proposition précédente permet d'initialiser cette récurrence. \square

Avec comme corollaire

Corollaire 15 (Lemme des bergers)

Plus généralement, si A_1, \dots, A_n sont n parties d'un ensemble fini E qui forment une partition de E (voir la définition 12 page 45 dans le cours de seconde). On suppose de plus que tous les $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$

ont le même cardinal à savoir p . Dans ces conditions :

$$\text{Card}(E) = n \times p.$$

Comme autre corollaire

Corollaire 16 (Cardinal d'une union)

Si A et B sont deux parties d'un ensemble fini E alors $A \cup B$ est fini et :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

Démonstration 16

On peut partitionner $A \cup B$ de la façon suivante :

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus (A \cap B)).$$

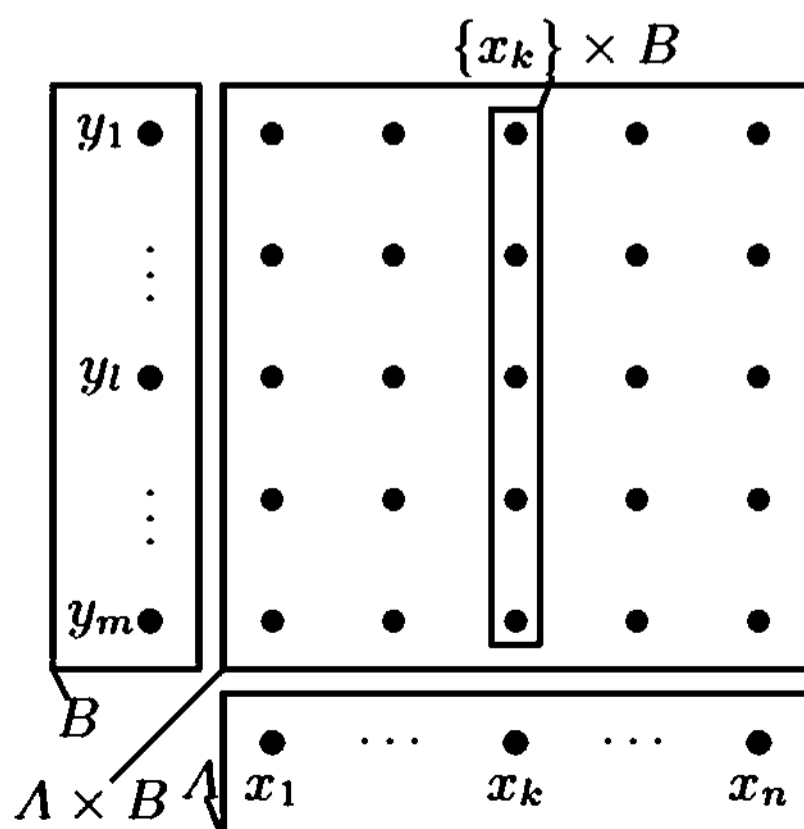
On applique alors la proposition précédente. □

Théorème 17 (Cardinal d'un produit cartésien)

Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F).$$

Démonstration 17



Supposons que $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ où n est le cardinal de A .
On a :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\} = \bigcup_{k=1}^n (\{x_k\} \times B) \quad (*)$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ l'application $\theta_i : \{x_k\} \times B \rightarrow B$ est bijective donc $(x_i, y) \mapsto y$
 $\text{Card}(\{x_k\} \times B) = \text{Card}(B)$. De plus les ensembles de la réunion (*) sont deux à deux disjoints.

D'après la proposition précédente, on a :

$$\begin{aligned} \text{Card}(A \times B) &= \text{Card}(\{x_1\} \times B) + \dots + \text{Card}(\{x_n\} \times B) \\ &= \underbrace{\text{Card}(B) + \dots + \text{Card}(B)}_{n \text{ fois}} \\ &= n \cdot \text{Card}(B) = \text{Card}(A) \text{Card}(B) \end{aligned} \quad \square$$

On obtient comme corollaire le théorème suivant :

Théorème 18 (Cardinal d'un produit fini)

Soient E un ensemble fini et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors E^n est fini et :

$$\text{Card}(E^n) = (\text{Card}(E))^n$$

Démonstration 18

Par une récurrence facile. □

Théorème 19 (Nombre de partie d'un ensemble fini)

Soit E un ensemble de cardinal n . L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E a pour cardinal 2^n et donc :

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$$

Démonstration 19

On fait une démonstration par récurrence sur le cardinal n de E :

1. si $n = 0$ alors $\text{Card}(E) = 0$ et $E = \emptyset$. E ne contient donc que la partie vide et $\text{Card}(E) = 2^0 = 1$. La proposition est donc vraie au rang 0.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

3. Supposons la proposition vraie pour un ensemble de cardinal n . Démontrons que la proposition est vraie pour un ensemble de cardinal $n + 1$. Soient E un ensemble de cardinal $n + 1$ et $a \in E$. Posons $E' = E \setminus \{a\}$. L'ensemble E' est de cardinal n . Il y a deux types de parties dans E :

► Celles qui contiennent a . Ce sont exactement les parties de E' auxquelles on adjoint a . Par application de l'hypothèse de récurrence, il y a 2^n parties dans E' et donc 2^n parties de E qui contiennent a .

► Celles qui ne contiennent pas a . Ce sont exactement les parties de E' . Toujours par application de l'hypothèse de récurrence, on compte 2^n parties dans E' .

Au total, E est donc constitué de $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ parties. La proposition est donc démontrée pour un ensemble de cardinal $n + 1$.

4. Par application du théorème de récurrence, la proposition est démontrée pour tout ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$. □

1. Cette démonstration est parfois attribuée à Clint Eastwood.

Annexe B

Fonctions trigonométriques

Sommaire

B.1	Enroulement complexe	468
B.2	Nouvelles définitions	468
B.3	Équation fonctionnelle	470
B.4	Dérivabilité	472
B.5	Le cercle trigonométrique	473
B.6	Le retour du sinus et du cosinus	474

On se propose de redéfinir les fonctions trigonométriques afin de démontrer les théorèmes admis au chapitre 6 du manuel de première. Pour cela on va abandonner dans un premier temps l'approche géométrique pour privilégier l'approche analytique. Bien entendu, il faut à la fois ne pas se servir des propriétés du chapitre 6 tout en gardant en tête cette vision géométrique.

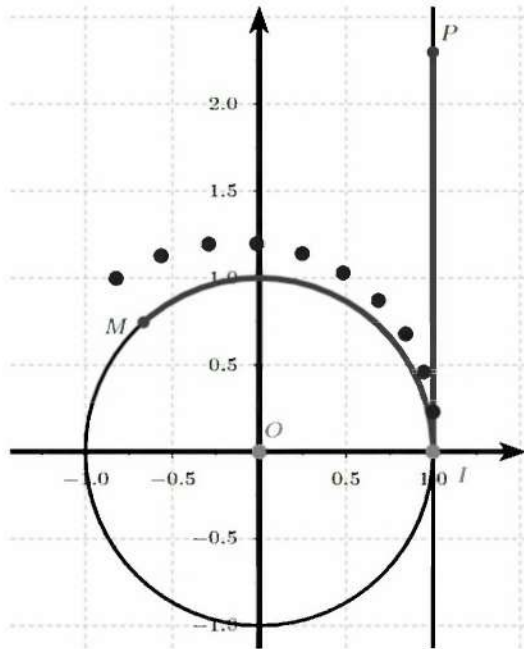
On se souvient qu'au chapitre 6 on avait tout d'abord défini pour tout réel x ,

$$\exp(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

On va reprendre la même démarche en remplaçant x par it où t désigne un réel. En prenant les parties réelles et imaginaires de cette fonction, on obtiendra une nouvelle définition des fonctions cosinus et sinus. Il restera ensuite à retrouver les propriétés attachées à ces fonctions et à les démontrer. Un moment crucial sera la définition du nombre π .

Ce chapitre est difficile, délicat et n'est pas indispensable.

B.1 Enroulement complexe



Un point P d'affixe $1 + it$ est choisi sur la droite verticale d'abscisse 1. On veut l'enrouler sur le cercle trigonométrique. Il a un argument (chut ! nous ne sommes pas censés savoir ce que c'est...) dont la tangente (idem) est t . On divise cette tangente par un entier n , sur le dessin $n = 10$ et on place un premier point d'affixe $1 + i\frac{t}{n}$. Lorsque n est grand, $\frac{t}{n}$ est petit et l'angle de mesure $\frac{t}{n}$ est proche de $\tan\left(\frac{t}{n}\right)$. En élevant $1 + i\frac{t}{n}$ à la puissance n , l'argument choisi est multiplié par n , soit $n \tan\left(\frac{t}{n}\right)$ qui devient proche de t . Sur le dessin les points noirs ont pour affixes les puissances de $1 + i\frac{t}{n}$ toujours avec $n = 10$. Il reste à montrer la convergence effective des suites en présence, puis que le résultat obtenu est bien celui qu'on attendait.

B.2 Nouvelles définitions

Soit t un réel et n un entier naturel non nul. On pose

- $u_n(t) := \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$ déjà vu au chapitre 6.
- $e_n(t) := \left(1 + \frac{it}{n}\right)^n$.
- $c_n(t) := \Re\left(\left(1 + \frac{it}{n}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\left(\left(1 + \frac{it}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{it}{n}\right)^n\right)$.
- $s_n(t) := \Im\left(\left(1 + \frac{it}{n}\right)^n\right) = \frac{1}{2i}\left(\left(1 + \frac{it}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{it}{n}\right)^n\right)$.

Soit $t \geq 0$. D'après la formule du binôme, on a

- $u_n(t) = 1 + t + \binom{n}{2} \frac{t^2}{n^2} + \dots + \frac{t^n}{n^n}$.
- $e_n(t) = 1 + it - \binom{n}{2} \frac{t^2}{n^2} + \dots + \frac{(it)^n}{n^n}$.
- $c_n(t) = 1 - \binom{n}{2} \frac{t^2}{n^2} + \binom{n}{4} \frac{t^4}{n^4} - \dots$
- $s_n(t) = t - \binom{n}{3} \frac{t^3}{n^3} + \binom{n}{5} \frac{t^5}{n^5} - \dots$

On va maintenant séparer ces deux dernières sommes en deux, en ne gardant que les termes positifs d'une part et que les termes négatifs d'autre part. Soit

- $c_n^+(t) = 1 + \binom{n}{4} \frac{t^4}{n^4} + \binom{n}{8} \frac{t^8}{n^8} + \dots$
- $c_n^-(t) = \binom{n}{2} \frac{t^2}{n^2} + \binom{n}{6} \frac{t^6}{n^6} + \dots$
- $s_n^+(t) = t + \binom{n}{5} \frac{t^5}{n^5} + \binom{n}{9} \frac{t^9}{n^9} + \dots$

$$\bullet s_n^-(t) = \binom{n}{3} \frac{t^3}{n^3} + \binom{n}{7} \frac{t^7}{n^7} - \dots$$

On a $\forall t \geq 0, \forall n > t,$

- $0 \leq c_n^+(t) \leq u_n(t) \leq \exp(t)$
- $0 \leq c_n^-(t) \leq u_n(t) \leq \exp(t)$
- $0 \leq s_n^+(t) \leq u_n(t) \leq \exp(t)$
- $0 \leq s_n^-(t) \leq u_n(t) \leq \exp(t)$

Les quatre suites $(c_n^+(t))_{n \in \mathbb{N}^*}, (c_n^-(t))_{n \in \mathbb{N}^*}, (s_n^+(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(s_n^-(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont donc quatre suites réelles, croissantes et majorées. D'après le théorème 19 page 59 du cours de première, elles sont toutes les quatre convergentes.

Comme on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \geq 0, c_n(t) = c_n^+(t) - c_n^-(t)$ et $s_n(t) = s_n^+(t) - s_n^-(t)$, les deux suites $(c_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(s_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont convergentes, et ce pour tout $t \geq 0$.

De même par parité on a $\forall t \leq 0, c_n(t) = c_n(-t)$ et $s_n(t) = -s_n(-t)$, donc les deux suites $(c_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(s_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont convergentes pour tout $t \leq 0$.

Par suite, puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, e_n(t) = c_n(t) + is_n(t)$ la suite $(e_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Définition 1.

Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose

- $e(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{it}{n}\right)^n.$
- $c(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\left(1 + \frac{it}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{it}{n}\right)^n \right).$
- $s(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} \left(\left(1 + \frac{it}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{it}{n}\right)^n \right).$

Remarque 1.

Il s'agit de notations provisoires. On reconnaîtra les fonctions exponentielle (complexe), cosinus et sinus. Elles reprendront leur nom définitif à la fin du chapitre quand il n'y aura plus de risque de confusion et d'utilisation de formules connues mais qu'il s'agit de redémontrer.

Pour tout réel t , les égalités $c_n(t) = c_n(-t)$ et $s_n(t) = -s_n(-t)$ vraies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ se traduisent, par passage à la limite, par :

Théorème 1 (parité)

$$\forall t \in \mathbb{R}, c(-t) = c(t), \quad s(-t) = -s(t), \quad e(-t) = \overline{e(t)}.$$

B.3 Équation fonctionnelle

Théorème 2 (L'équation fonctionnelle)

Pour tous réels t et u ,

$$e(t+u) = e(t) \cdot e(u).$$

Démonstration 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} e_n(t+u) - e_n(t) \cdot e_n(u) &= \left(1 + \frac{i(t+u)}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{it}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{i u}{n}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{i(t+u)}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{i(t+u)}{n} - \frac{tu}{n^2}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{i(t+u)}{n}\right)^n \left[1 - \left(1 - \frac{tu}{n^2 \left(1 + \frac{i(t+u)}{n}\right)}\right)^n\right] \end{aligned}$$

Soit $\alpha_n := 1 - \frac{tu}{n^2 \left(1 + \frac{i(t+u)}{n}\right)}$ et $w_n := 1 - \alpha_n^n = 1 - \left(1 - \frac{tu}{n^2 \left(1 + \frac{i(t+u)}{n}\right)}\right)^n$.

On se propose de démontrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$.

La suite $\left(1 + \frac{i(t+u)}{n}\right)^n$ tend vers 1, il en est de même pour son module (théorème 1 page 184). De ce fait, (pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$), à partir d'un certain rang N , on a

$$\frac{1}{2} < \left|1 + \frac{i(t+u)}{n}\right| < \frac{3}{2}.$$

En particulier pour $n > N$, $\left|\frac{tu}{n^2 \left(1 + \frac{i(t+u)}{n}\right)}\right| < 2 \frac{|tu|}{n^2}$ et $|\alpha_n| < 1 + 2 \frac{|tu|}{n^2}$. Par la suite, pour $0 \leq k < n$, on a $|\alpha_n|^k < \left(1 + 2 \frac{|tu|}{n^2}\right)^n$.

Maintenant, en posant $\beta_n := \left(1 + 2 \frac{|tu|}{n^2}\right)^n$, la suite à termes strictement positifs $(\beta_n)_{n > N}$ tend vers 1. En effet on a

$$\forall n > N, \ln(\beta_n) = n \ln \left(1 + 2 \frac{|tu|}{n^2}\right) = 2 \frac{|tu|}{n} \times \frac{\ln \left(1 + 2 \frac{|tu|}{n^2}\right)}{2 \frac{|tu|}{n^2}}.$$

D'après le théorème 12 page 212, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + 2 \frac{|tu|}{n^2}\right)}{2 \frac{|tu|}{n^2}} = 1,$$

comme $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{|tu|}{n} = 0$, par produit des limites, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(\beta_n) = 0$ et par conséquent, en composant par l'exponentielle, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 1$.

Pour être parfaitement rigoureux, il faudrait mettre à part le cas où $t = 0$ ou $u = 0$. Ce cas est parfaitement évident d'ailleurs.

La suite $(\beta_n)_{n > N}$ est convergente, donc majorée d'après le théorème 7 page 51 du cours de première. Notons M un de ses majorants.

Nous sommes prêts à conclure : On a pour t et u réels, $n > N$ comme défini plus haut.

$$w_n = \frac{tu}{n^2 \left(1 + \frac{i(t+u)}{n}\right)} \left(1 + \alpha_n + \alpha_n^2 + \dots + \alpha_n^{n-1}\right),$$

d'après le théorème 7 page 322 du cours de seconde. Donc

$$\begin{aligned} |w_n| &= \left| \frac{tu}{n^2 \left(1 + \frac{i(t+u)}{n}\right)} \right| \times |1 + \alpha_n + \alpha_n^2 + \dots + \alpha_n^{n-1}| \\ &\leq \left| \frac{tu}{n^2 \left(1 + \frac{i(t+u)}{n}\right)} \right| \times (1 + |\alpha_n| + |\alpha_n^2| + \dots + |\alpha_n^{n-1}|) \\ &\leq \left| \frac{tu}{n^2 \left(1 + \frac{i(t+u)}{n}\right)} \right| \times nM \\ &\leq M \left| \frac{tu}{n + i(t+u)} \right|. \end{aligned}$$

De $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{tu}{n + i(t+u)} = 0$ on déduit bien $\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n| = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$. Comme par ailleurs on a $e_n(t+u) - e_n(t) \cdot e_n(u) = e_n(t+u) \cdot w_n$, les deux membres convergent vers la même limite, soit

$$e(t+u) - e(t) \cdot e(u) = e(t+u) \cdot 0 = 0,$$

ce qu'il s'agissait d'établir. □

Conséquences :

Théorème 3

On a $e(0) = \exp(0) = 1$ et pour tout réel t ,

$$|e(t)| = 1 \quad \text{et} \quad c(t)^2 + s(t)^2.$$

Démonstration 3

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n(0) = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(0) = e(0) = 1$.

De plus pour tout réel t ,

$$|e(t)|^2 = e(t) \cdot \overline{e(t)} = e(t) \cdot e(-t) = e(t + (-t)) = e(0) = 1.$$

En prenant les parties réelles et imaginaires de $e(t)$, à savoir $c(t)$ et $s(t)$, on obtient bien $c(t)^2 + s(t)^2 = 1$. □

Autrement dit, tous les points $M(t) (c(t), s(t))$, ($t \in \mathbb{R}$) appartiennent au cercle trigonométrique. Le point crucial est de démontrer que, réciproquement, pour tout point M du cercle trigonométrique, il existe un réel t tel que $M(c(t), s(t))$, autrement dit le théorème 5 page 218 vu dans le cours de première.

B.4 Dérivabilité

Théorème 4

La fonction e est dérivable en zéro et son nombre dérivé en zéro est $e'(0) = i$.

Autrement dit, $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e(h) - 1}{h} - i \right) = 0$.

Démonstration 4

Soit $h \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \frac{e_n(h) - 1}{h} - i &= \frac{1}{h} \left(\left(1 + \frac{ih}{n}\right)^n - 1 - ih \right) \\ &= \frac{1}{h} \frac{ih}{n} \left(1 + \left(1 + \frac{ih}{n}\right) + \left(1 + \frac{ih}{n}\right)^2 + \dots + \left(1 + \frac{ih}{n}\right)^{n-1} - n \right) \\ &= \frac{i}{n} \left(\left(1 + \frac{ih}{n}\right) - 1 + \left(1 + \frac{ih}{n}\right)^2 - 1 + \dots + \left(1 + \frac{ih}{n}\right)^{n-1} - 1 \right) \\ &= \frac{i}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{ih}{n}\right)^k - 1 \right). \end{aligned}$$

Donc $\left| \frac{e_n(h) - 1}{h} - i \right| \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left| \left(1 + \frac{ih}{n}\right)^k - 1 \right| \right)$.

Soit $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, on a, toujours d'après le théorème 7 page 322 du cours de seconde,

$$\left(1 + \frac{ih}{n}\right)^k - 1 = \frac{ih}{n} \left(1 + \left(1 + \frac{ih}{n}\right) + \left(1 + \frac{ih}{n}\right)^2 + \dots + \left(1 + \frac{ih}{n}\right)^{k-1} \right).$$

Donc

$$\begin{aligned} \left| \left(1 + \frac{ih}{n}\right)^k - 1 \right| &\leq \frac{|h|}{n} \left(1 + \left|1 + \frac{ih}{n}\right| + \left|1 + \frac{ih}{n}\right|^2 + \dots + \left|1 + \frac{ih}{n}\right|^{k-1} \right) \\ &\leq \frac{|h|}{n} \left(1 + \left(1 + \frac{|h|}{n}\right) + \left(1 + \frac{|h|}{n}\right)^2 + \dots + \left(1 + \frac{|h|}{n}\right)^{k-1} \right) \\ &\leq \frac{|h|}{n} k \left(1 + \frac{|h|}{n}\right)^n \\ &\leq \frac{|h|}{n} M k, \end{aligned}$$

Où M désigne un majorant de la suite, convergente donc bornée, $(e_n(|h|))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

En sommant ces inégalités pour k variant de 1 à $n-1$, on obtient

$$\left| \frac{e_n(h) - 1}{h} - i \right| \leq \frac{1}{n} \frac{|h|}{n} M \frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{M|h|}{2}.$$

Par conservation des inégalités par passage à la limite, on a $\left| \frac{e(h) - 1}{h} - i \right| \leq \frac{M|h|}{2}$.

D'après le théorème d'encadrement, on a bien $\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{e(h) - 1}{h} - i \right| = 0$ soit $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e(h) - 1}{h} - i \right) = 0$. \square

Théorème 5

La fonction e est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall t \in \mathbb{R}, e'(t) = i.e(t).$$

Démonstration 5

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$. D'après le théorème 2,

$$\frac{e(t+h) - e(t)}{h} = e(t) \cdot \frac{e(h) - 1}{h},$$

donc d'après le théorème 4 et le produit des limites, on a bien $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e(t+h) - e(t)}{h} = i.e(t)$. \square

En traduisant le théorème précédent en termes de coordonnées, on obtient :

Théorème 6

Les fonctions c et s sont dérivables sur \mathbb{R} et $c' = -s$ et $s' = -c$.

En particulier, les fonctions e , c et s sont continues sur \mathbb{R} .

Il est maintenant temps de régler son sort au théorème 5 page 218 énoncé dans le cours de première.

B.5 Le cercle trigonométrique

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'image de la fonction s est un intervalle contenant $s(0) = 0$: $\sin(\mathbb{R}) := (m_s, M_s)$. La fonction s étant impaire, on a de surcroît $m_s = -M_s$. On ne sait pas si cet intervalle est fermé ou non à chaque extrémité. On sait simplement, via le théorème 3 que $M_s \leq 1$.

Il y a deux éventualités possibles. Soit la fonction s admet au moins un extremum local, soit elle n'en n'admet pas.

Première éventualité : la fonction s n'admet pas d'extremum local. On va voir que cette éventualité n'est pas réalisable.

De ce fait la fonction c ne s'annule pas. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a $\forall t \in \mathbb{R}, c(t) > 0$.

On en déduit le tableau de variation suivant.

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$c(t)$	+	1	+
$s(t)$	$-l_s$	0	l_s

La fonction s est strictement croissante sur \mathbb{R} , donc admet une limite $l_s > 0$. De ce fait il existe $A \in \mathbb{R}$, tel que $\forall t \geq A, s(t) \geq \frac{l_s}{2}$. Donc

$$\forall x \geq A, c(x) = c(A) - \int_A^x s(t) dt \leq c(A) - \frac{l_s}{2}(x - A).$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} c(x) = -\infty$ ce qui est impossible puisque $\forall x \in \mathbb{R}, c(x) \geq -1$.

Il ne reste donc plus que la

Seconde éventualité : la fonction s admet un extremum local.

Soit t_0 un réel pour lequel cet extremum local est réalisé. On a donc $c(t_0) = 0$. De ce fait $s^2(t_0) = 1$. Puisque la fonction s est impaire, elle prend la valeur 1 en t_0 ou $-t_0$ et la valeur -1 en $-t_0$ ou t_0 .

On en déduit que $s(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. Autrement dit, la fonction s est une surjection de \mathbb{R} sur $[-1, 1]$.

Remarque 2.

Il existe un réel t positif tel que $s(t) = 1$. En effet on prend un réel positif qui réalise un extremum de s . Si $s(t) = -1$ alors $c(t) = 0$, $e(t) = -i$ et ainsi $e(3t) = (-i)^3 = i$ donc $s(3t) = 1$.

On est enfin prêt pour le théorème de surjection.

Théorème 7 (surjectivité de l'exponentielle)

Soit $M(x, y)$ un point du cercle trigonométrique. Il existe $t \in \mathbb{R}$, $e(t) = x + iy$, c'est-à-dire tel que $c(t) = x$ et $s(t) = y$.

Démonstration 7

Soit $t_0 \in]0, +\infty[$, $s(t_0) = 1$. On en déduit que $e(t_0) = i$ puis que $e(2t_0) = -1$.

Maintenant, soit $M(x, y)$ un point du cercle trigonométrique. Comme la fonction s est une surjection de \mathbb{R} sur $[-1, 1]$, il existe $t \in \mathbb{R}$, $s(t) = y$. On en déduit que $c(t) = x$ ou $c(t) = -x$. Dans le premier cas, il n'y a rien à faire. Dans le second cas, on remarque que $e(-t) = \overline{e(t)} = -x - iy$ donc $e(2t_0 - t) = x + iy$ ce qui conclut. \square

B.6 Le retour du sinus et du cosinus

Il est temps d'étudier les variations des fonctions c et s . En conservant les notations précédentes, soit $t_0 \in]0, +\infty[$, $s(t_0) = 1$. On en déduit que $e(4t_0) = 1$. Comme $t_0 > 0$, la fonction e admet $4t_0$ comme période. Il en est de même pour les fonctions c et s .

On part de $t = 0$, avec $s(0) = 0$ et $c(0) = 1$. Par continuité de la fonction c , on a $c(t) > 0$ sur un intervalle ouvert contenant zéro. De ce fait, la fonction s est strictement croissante sur ce même intervalle.

Le plus petit réel strictement positif t_0 qui réalise un extremum local pour s réalise donc un maximum local. Ce maximum local est donc 1 et on a $c(t_0) = 0$. On complète alors par parité :

t	$-t_0$		0		t_0	
$c(t)$	0	$+$	1	$+$	0	
$s(t)$	-1	→		0	→	1

Ensuite on complète sur $[t_0, 2t_0]$ et sur $[-2t_0, -t_0]$ en remarquant que $c(t+2t_0) = -c(t) = c(t-2t_0)$:

t	$-2t_0$		$-t_0$		0		t_0		$2t_0$				
$c(t)$	-1	$-$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	-1				
$s(t)$	0	↘		-1	↗		0	↘		1	↗		0

De même pour la fonction c sur le même intervalle.

t	$-2t_0$		$-t_0$		0		t_0		$2t_0$				
$-s(t)$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	0				
$c(t)$	-1	↗		0	↘		1	↗		0	↘		-1

Nous sommes maintenant en mesure de donner les nouvelles notations.

Définition 2.

On note désormais pour tout réel t ,

• $\exp(it) := e(t)$; • $\sin(t) := s(t)$; • $\cos(t) := c(t)$; • $\pi := 2t_0$.

Pour terminer, un système dont la solution est géométriquement évidente.

Théorème 8

Soit $a \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} a = \cos \theta \\ b = \sin \theta \end{cases} \quad \text{inconnue } x \in \mathbb{R}$$

est $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{Z}, x = a + 2k\pi\}$.

Démonstration 8

On sait depuis le paragraphe B.6 que les fonctions sinus et cosinus sont 2π -périodiques. Par conséquent tous les éléments de \mathcal{S} sont solutions.

Inversement, si x est solution, d'après le théorème 20 page 233 du cours de première, il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = a + k \times 2\pi$ ou $x = -a + k \times 2\pi$. Si on est dans le premier cas, c'est gagné.

D'après le théorème 19 page 232 du cours de première, il existe un entier $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $x = a + \ell \times 2\pi$ ou $x = \pi - a + \ell \times 2\pi$. Si on est dans le premier cas, c'est gagné.

Donc le seul cas douteux, est le cas où l'on est deux fois dans le deuxième cas, autrement dit, il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-a + k \times 2\pi$ et il existe un entier $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $\pi - a + \ell \times 2\pi$. On en déduit que $\pi = k \times 2\pi - \ell \times 2\pi$ soit en divisant par 2π , $k - \ell = \frac{1}{2}$. Ce cas ne se produit donc pas. \square

On vient de démontrer le théorème 2 page 215 toujours dans le cours de première.

Ce qui achève cette reconstruction de la trigonométrie. En particulier, les arguments d'un nombre complexe non nul sont rigoureusement définis.

Remarque 3.

Cette construction aboutit à la définition des sinus et cosinus en **radians**. Ce qui confirme que cette unité – avec laquelle le lecteur devrait être familier à ce stade – est d'une certaine façon naturelle.

Table des matières

du cours de seconde

1	De quoi parlons-nous ?	1
1.1	Le vrai et le faux	2
1.2	La négation	2
1.3	La conjonction	3
1.4	La disjonction	3
1.5	Négation de « et » et de « ou »	4
1.6	L'implication	4
1.7	Équivalence	8
1.8	Égalités	8
1.9	Quantification	9
1.10	Raisonnement par l'absurde	11
1.11	Exercices	12
1.12	Solutions	16
2	Programmation	25
2.1	Qu'est-ce qu'un algorithme ?	26
2.2	Types	27
2.3	Entrées/Sorties	30
2.4	Tests	30
2.5	Boucles	30
2.6	Fonctions	31
2.7	Un exemple	32
2.8	Exercices	33
2.9	Solutions	34
3	Ensembles	37
3.1	Le langage des ensembles	38
3.2	Quantification	42
3.3	Représentations graphiques	46
3.4	Exercices	46
3.5	Solutions	47

4 Événements	49
4.1 Les événements, l'univers et le reste	50
4.2 Représentation des événements	52
4.3 « ET » et « OU »	53
4.4 Exercices	56
4.5 Solutions	58
5 Nombres réels	61
5.1 Au commencement était le nombre	62
5.2 Ordre	62
5.3 Intervalles	65
5.4 Propriétés des nombres réels	67
5.5 Valeur absolue	71
5.6 Valeurs approchées	73
5.7 Calcul littéral	74
5.8 Équations	84
5.9 Racine carrée	87
5.10 Quiz	92
5.11 Méthodes pour factoriser	96
5.12 Exercices	104
5.13 Solutions	112
5.14 Travaux dirigés	125
5.15 Problèmes	130
5.16 Corrigés	131
6 Géométrie plane	135
6.1 Aires des figures de référence	136
6.2 Symétries	138
6.3 Angles géométriques	141
6.4 Quadrilatères	144
6.5 Parallélogrammes	144
6.6 Théorèmes fondamentaux	149
6.7 Angles inscrits, angles au centre	154
6.8 Triangles	155
6.9 Repérage dans le plan	163
6.10 Intersection d'une droite et d'un cercle	166
6.11 Quiz	166
6.12 Exercices	168
6.13 Solutions	182
6.14 Problèmes	204
6.15 Corrigés	207
7 Vecteurs	215
7.1 Direction et sens	216
7.2 Vecteurs du plan	217
7.3 Coordonnées cartésiennes dans un repère	225
7.4 Méthodes	230

7.5	Quiz	235
7.6	Exercices	236
7.7	Solutions	248
7.8	Problèmes	267
7.9	Corrigés	270
8	Statistiques	279
8.1	Vocabulaire	280
8.2	Représentations graphiques	281
8.3	Paramètres d'une série statistique	284
8.4	Représentations graphiques, suite	296
8.5	Quiz	301
8.6	Corrigé	302
8.7	Exercices	302
8.8	Solutions	304
8.9	Travaux dirigés	309
9	Suites	313
9.1	Définitions	314
9.2	Suites usuelles	318
9.3	Représentation graphique	323
9.4	Sens de variation	324
9.5	Exercices	327
9.6	Solutions	330
9.7	Problème	333
9.8	Corrigé	333
10	Le langage des fonctions	335
10.1	Approche intuitive	336
10.2	Fonctions numériques	338
10.3	Antécédents	344
10.4	Variations	346
10.5	Extremums	348
10.6	Symétries	349
10.7	Composition	351
10.8	Injection, surjection	352
10.9	Suites récurrentes	355
10.10	Récurtivité	356
10.11	Quiz	358
10.12	Exercices	360
10.13	Solutions	364
10.14	Problèmes	370
10.15	Solutions	371
10.16	Travaux dirigés	373

11 Droites	379
11.1 Vecteurs directeurs	380
11.2 Équations de droites	380
11.3 Équations réduites	382
11.4 Systèmes et intersection de deux droites	385
11.5 Dans un repère orthonormé	387
11.6 Fonctions affines	388
11.7 Méthodes	390
11.8 Quiz	394
11.9 Corrigé	394
11.10 Exercices	395
11.11 Solutions	399
11.12 Travaux dirigés	412
12 Calculs des probabilités	417
12.1 Probabilité sur un ensemble fini	418
12.2 Équiprobabilité	418
12.3 « ET » et « OU »	419
12.4 Notion de probabilité conditionnelle	421
12.5 Méthodes	427
12.6 Quiz	434
12.7 Exercices	435
12.8 Solutions	442
12.9 Travaux dirigés	455

Table des matières

du cours de première

1	Récurrence	1
1.1	La chasse aux petits points	2
1.2	La théorie des dominos	2
1.3	Variantes	7
1.4	Démonstrations	10
1.5	Quelques définitions	13
1.6	Exercices	14
1.7	Solutions	22
1.8	Problème	38
1.9	Correction	39
2	Limites des suites	41
2.1	Notion de limite	42
2.2	Majoration et minoration d'une suite	44
2.3	Limites des suites	45
2.4	Opérations et limites	54
2.5	Théorème de convergence	59
2.6	Exemples	63
2.7	Vrai ou faux ?	68
2.8	QCM	71
2.9	Exercices	71
2.10	Solutions	78
2.11	Travaux dirigés	90
2.12	Problèmes	91
3	Limites, continuité	95
3.1	Approche intuitive	96
3.2	Définitions	98
3.3	Opérations	108
3.4	Compositions	109
3.5	Continuité	111
3.6	Continuité sur une réunion d'intervalles	112
3.7	Suites récurrentes	116

3.8	Exercices	118
3.9	Solutions	120
3.10	Problèmes	125
3.11	Correction	126
4	Dérivation	129
4.1	Définitions	131
4.2	Opérations	134
4.3	Composition	138
4.4	Accroissements finis	139
4.5	Variations des fonctions	142
4.6	Théorème de la bijection	143
4.7	Quiz	147
4.8	Exercices	148
4.9	Solutions	152
4.10	Problèmes	161
4.11	Corrigés	164
5	Second degré	171
5.1	Fonction polynôme du second degré	172
5.2	Résolution d'une équation du second degré	177
5.3	Factorisation et application à l'étude du signe	180
5.4	Programmation	181
5.5	Somme et produit des racines	182
5.6	Fiche cuisine : le second degré	184
5.7	Exercices	185
5.8	Solutions	193
5.9	Problème	206
5.10	Corrigé	207
6	Trigonométrie	211
6.1	Enroulement de la droite des réels	212
6.2	Cosinus et sinus d'un réel t	216
6.3	Lien avec la trigonométrie du triangle	219
6.4	Formules de trigonométrie	221
6.5	Fonctions trigonométriques	224
6.6	Équations trigonométriques	230
6.7	Fonction arctangente	234
6.8	Méthodes	235
6.9	Exercices	240
6.10	Solutions	248
6.11	Problèmes	261
6.12	Corrigés	263

7	Produit scalaire	269
7.1	Activités	271
7.2	Calculs avec le produit scalaire	273
7.3	Un peu de géométrie	275
7.4	Équations cartésiennes de droites et de cercles	277
7.5	Relations métriques dans le triangle	280
7.6	Formules de trigonométrie	282
7.7	Lignes de niveau	283
7.8	Puissance d'un point par rapport à un cercle	285
7.9	Exercices	287
7.10	Solutions	296
7.11	Problèmes	308
7.12	Corrigés	311
8	Géométrie dans l'espace	315
8.1	Solides de référence	315
8.2	Caractérisation des droites et plans de l'espace	318
8.3	Positions relatives dans l'espace	320
8.4	Vecteurs de l'espace	323
8.5	Coordonnées dans l'espace	330
8.6	Produit scalaire	331
8.7	Plans et droites perpendiculaires	336
8.8	Équation de plan	339
8.9	Produit vectoriel	340
8.10	Sphères	347
8.11	Méthodes	350
8.12	Quiz	362
8.13	Vrai ou faux	363
8.14	Exercices	365
8.15	Solutions	379
9	Polynômes	397
9.1	Fonction polynôme	398
9.2	Racines d'un polynôme	402
9.3	Schéma de Horner	404
9.4	Exercices	406
9.5	Solutions	407
9.6	Travaux dirigés	410
9.7	Problèmes	412
10	Loi binomiale	419
10.1	Variable aléatoire réelle	420
10.2	Paramètres d'une variable aléatoire	421
10.3	Épreuve de Bernoulli. Loi binomiale	426
10.4	Fluctuation : prise de décision	435
10.5	Exercices	436
10.6	Solutions	447

10.7	Problèmes	464
11	Dénombrement	469
11.1	Principes de dénombrement	470
11.2	Nombre de combinaisons	470
11.3	Nombre d'arrangements	474
11.4	Exercices	475
11.5	Solutions	478
11.6	Problèmes	482
11.7	Correction	483
12	Nombres complexes	491
12.1	Activité	492
12.2	Définition	492
12.3	Module	496
12.4	Écriture trigonométrique	501
12.5	Dictionnaire bilingue géométrico-complexe	508
12.6	Exercices	518
12.7	Solutions	528
12.8	Exercices supplémentaires	551
12.9	Problème	565
12.10	Corrigé	566
13	Matrices	573
13.1	Définitions	573
13.2	Opérations	576
13.3	Géométrie	586
13.4	Exercices	588
13.5	Solutions	593
13.6	Problème	602
13.7	Corrigé	603

Index

- Adhérent, 186
- Affinité orthogonale, 370
- Aire algébrique, 101
- Algorithme
 - d'Euclide, 29
 - d'Euclide étendu, 32
- Angle
 - au centre, 227
 - inscrit, 227
- Angles homologues, 313
- Arc capable, 228
- Artefact, 282
- Asymptotes de l'hyperbole, 375
- Axe
 - demi-axe focal, 374
 - demi-axe focal de l'ellipse, 369
 - demi-axe non focal, 374
 - demi-axe non focal de l'ellipse, 369
 - demi-grand axe, 374
 - demi-grand axe de l'ellipse, 369
 - demi-petit axe, 374
 - demi-petit axe de l'ellipse, 369
 - focal, 363
 - focal de l'ellipse, 369
 - focal de l'hyperbole, 373
 - grand axe de l'ellipse, 369
 - grand axe de l'hyperbole, 373
 - non focal de l'ellipse, 369
 - non focal de l'hyperbole, 373
 - non transverse de l'hyperbole, 373
 - petit axe de l'ellipse, 369
- Barycentre, 3, 305
- Bergers
 - lemme des, 464
- Bifocale
 - Définition bifocale de l'ellipse, 377
 - Définition bifocale de l'hyperbole, 377
- Birapport, 230
- Caractérisation différentielle de l'exponentielle, 225
- Cardinal, 459
- Centre
 - de l'ellipse, 369
 - de l'hyperbole, 373
- Cercle principal d'une ellipse, 371
- Céviennes, 18
- Chien de Steinhau, 195
- Complémentaire d'une partie, 464
- Composé
 - nombre, 37
- Congruence, 25
- Conique, 363
- Courbe plane, 189
- Décomposition
 - d'un entier en produit de facteurs premiers, 39
 - en facteurs premiers, 39
- Dichotomie, 106
- Directrice, 363
- Divisibilité, 24
- Division euclidienne
 - dans \mathbb{Z} , 28
 - quotient, 28
 - reste, 28
- Droite de Newton, 10
- Écriture exponentielle, 226
- Ellipse, 363
 - définition bifocale, 377
 - paramétrage de l', 369
- Ensemble
 - fini, 459
 - infini, 459
- Ensembles équipotents, 459, 460
- Équation

- caractéristique, 433, 446
- réduite d'une parabole, 365
- réduite de l'ellipse, 367
- réduite de l'hyperbole, 372
- Équation cartésienne
 - d'une conique, 364
- Euler
 - indicatrice, 41
- Excentricité, 363
- Exponentiation
 - rapide, 68, 77
- Exponentielle d'un complexe, 223
- Fermat
 - nombre de, 56
 - petit théorème de, 58
- Folium de Descartes, 200
- Fonction
 - concave, 158
 - convexe, 158
 - exponentielle, 206
 - strictement convexe, 159
- Foyer, 363
- Hyperbole, 363
 - équation réduite de l', 372
 - équilatère, 391
 - centre, 373
 - définition bifocale, 377
 - paramétrage, 374
 - sommet, 374
- Indicatrice d'Euler, 41
- Inégalité
 - arithmético-géométrique, 215, 238
 - de Bernoulli, 204
 - de Cauchy-Schwarz, 123
 - de Pompeiu, 168
 - de Young, 215
- Intégrable
 - au sens de Henstock-Kurzweil, 107
 - au sens de Riemann, 103
- Intégrale
 - d'une fonction, 103, 107
 - indéfinie, 113
- Isobarycentre, 3
- Isométrie, 315
 - directe, 315
 - indirecte, 315
 - négative, 315
 - positive, 315
- Jaguar casqué, 172, 315, 448
- Jauge, 106
- Leibniz
 - fonction scalaire, 7
 - fonction vectorielle, 2
- Lemme
 - de Cousin, 106
 - des trois pentes, 160
- Limaçon de Pascal, 428
- Logarithme
 - décimal, 223
 - de base a , 221
 - népérien, 212
- Loi de Snell-Descartes, 167
- Module de chiffrement, 43
- Niveau
 - ligne de, 7
- Nombre
 - composé, 37
 - de Fermat, 56
 - premier, 37
- Nombres premiers entre eux, 31
- Parabole, 363
 - Paramétrage de la parabole, 366
- Paramètre d'une conique, 363
- Partition, 464
- Pas d'une subdivision, 101
- PGCD, 29
- Point
 - massif, 2
 - pondéré, 2
 - régulier, 190
- PPCM, 29
- Premier
 - nombre, 37
- Preuve par neuf, 27
- Principe
 - de Fermat, 167
 - des tiroirs, 463

- Puissance d'un point par rapport à un cercle. 353
- Pythagore
inverse de. 408
- Rapport
anharmonique. 230
de similitude. 304, 309
- Résidu quadratique, 44
- Reste euclidien, 28
- Restriction, 458
double, 458
- Riemann
intégrable. 103
somme de. 101
- Rotation, 226
- Similitude
directe, 302
indirecte, 307
inverse, 307
- Somme de Riemann, 101
- Sommet
d'une parabole, 365
de l'ellipse, 369
de l'hyperbole, 374
- Sommets homologues, 313
- Subdivision pointée, 101
- Suite de Fibonacci, 56
- Symbole de Legendre, 44
- Symétrie glissée, 315
- Tangente, 191
à la parabole, 367
à une ellipse, 371
à une hyperbole, 375
- Théorème
de Bézout, 31
de Gauss, 33
de Ptolémée, 330
petit théorème de Fermat, 58
- Triangles
égaux, 315
isométriques, 315
semblables, 313
- Valuation, 39
- Vecteur vitesse, 191
- Vitesse, 191
- Wallis
intégrales de, 293