

M. Gourion / Ch. Lixi / J. Chevallet

MATHÉMATIQUES

Term. CE

nouveau programmes

exercices et
problèmes résolus

tome 2

FERNAND
NATHAN

MARC GOURION

*Professeur agrégé
Lycée A. Calmette, Nice*

Alpha

CHRISTIAN LIXI

*Professeur
Lycée Henri IV, Paris*

JACQUES CHEVALLET

*Professeur agrégé
Lycée Henri IV, Paris*

MATHÉMATIQUES

exercices et problèmes résolus

Terminales C et E

Tome 2

Nouveaux programmes

FERNAND NATHAN

o - C
o - 2
Geo } - BA
o pure } - C
o - C
o - 6

© Éditions Fernand Nathan 1983

Toute reproduction, même partielle, de cet ouvrage est interdite. Une copie ou reproduction par quelque procédé que ce soit, photographie, photocopie, microfilm, bande magnétique, disque ou autre, constitue une contrefaçon passible des peines prévues par la loi du 11 mars 1957 sur la protection des droits d'auteur.

1 | Nombres complexes

□ Structure de corps

L'ensemble \mathbb{R}^2 muni des deux lois :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$(a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$$

PAR

est un corps commutatif appelé **corps des nombres complexes** et noté \mathbb{C} . L'ensemble des couples $(a, 0)$ forme un sous-corps de \mathbb{C} isomorphe à \mathbb{R} . On identifie a et $(a, 0)$. Ainsi, \mathbb{R} est un sous-corps de \mathbb{C} . \mathbb{C} contient un élément i tel que $i^2 = -1$ et tout élément de \mathbb{C} s'écrit de façon unique sous la forme $a + ib$ où a et b sont réels. Cette écriture est la **forme algébrique** ou **cartésienne** du nombre complexe.

$$a = \operatorname{Re}(z) \text{ est la partie réelle de } z = a + ib$$

$$b = \operatorname{Im}(z) \text{ est la partie imaginaire de } z = a + ib.$$

Les nombres complexes de partie réelle nulle sont dits **imaginaires purs**.

□ Structure d'espace vectoriel

\mathbb{C} est un **espace vectoriel de dimension 2 sur \mathbb{R}** avec l'addition de \mathbb{C} et la loi :

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R})(\forall z = a + ib \in \mathbb{C}) \quad \lambda(a + ib) = \lambda a + i\lambda b.$$

Le couple $(1, i)$ forme une base de \mathbb{C} sur \mathbb{R} .

□ Nombres conjugués

Les nombres complexes $z = a + ib$ et $\bar{z} = a - ib$ sont dits **conjugués**.

L'application $z \mapsto \bar{z}$ est un automorphisme du corps \mathbb{C} laissant invariants les éléments de \mathbb{R} , c'est aussi un automorphisme de \mathbb{R} -espace vectoriel :

$$(\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2) \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'.$$

□ Représentation géométrique

Soit P un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

L'application ϕ de \mathbb{C} dans P :

$$z = a + ib \mapsto M \quad \text{tel que} \quad \overline{OM} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$$

est une bijection. $\phi(z)$ s'appelle **image** de z et $\phi^{-1}(M)$ s'appelle **affixe** de M .

□ Module d'un nombre complexe

$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ est le **module** de $z = a + ib$.

Quels que soient z et z' dans \mathbb{C} , on a :

$$\begin{cases} |z| = 0 \iff z = 0 \\ |zz'| = |z||z'| \\ |z+z'| \leq |z| + |z'| \end{cases}$$

On a aussi, si $z' \neq 0$, $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

Interprétation géométrique : si $M = \phi(z)$, on a $|z| = \|\overline{OM}\|$.

L'ensemble \mathbb{T} des nombres complexes de module 1, muni de la multiplication des nombres complexes, est un sous-groupe du groupe commutatif (\mathbb{C}^*, \times) .

□ **Argument d'un nombre complexe non nul**

Tout nombre complexe non nul $z = a + ib$ peut s'écrire :

$$z = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Tout réel φ vérifiant $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ est appelé

argument de z . On a alors :

$$(1) \quad z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}$$

en posant $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Cette formule définit le symbole $e^{i\varphi}$. L'écriture de z sous la forme (1) est appelée **forme trigonométrique** de z . Les arguments de z sont définis modulo 2π . Plus précisément si φ est l'un d'entre eux, l'ensemble des arguments est $\varphi + 2\pi\mathbb{Z}$. On note :

$$\arg z \equiv \varphi [2\pi].$$

Quels que soient z et z' non nuls dans \mathbb{C} , on a :

$$\begin{cases} \arg(zz') = \arg z + \arg z' [2\pi] \\ \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' [2\pi]. \end{cases}$$

En particulier :

$$\begin{cases} e^{i\varphi} \cdot e^{i\varphi'} = e^{i(\varphi + \varphi')} \\ e^{i\varphi} = e^{i(\varphi - \varphi')} \\ e^{i\varphi} = e^{i(\varphi + 2\pi)} \end{cases}$$

Interprétation géométrique : Si $M = \phi(z)$, on a :

$$\arg z \equiv (\vec{e}_1, \overline{OM}) [2\pi].$$

□ **Applications à la trigonométrie**

Les transformations trigonométriques utilisent les **formules d'Euler** :

$$(\forall \varphi \in \mathbb{R}) \quad \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

et la **formule de Moivre** :

$$(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall \varphi \in \mathbb{R})(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

qui s'écrit aussi : $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$.

□ **Équation du second degré**

Soit l'équation :

$$(2)$$

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

où a, b, c sont des nombres réels ou complexes ($a \neq 0$) et où x représente l'inconnue complexe.

Les solutions de (2) sont :

$$x' = \frac{-b + z_1}{2a}, \quad x'' = \frac{-b - z_1}{2a}$$

où z_1 est une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac$.

En particulier si a, b, c sont réels, on a la discussion suivante :

$$\begin{cases} b^2 - 4ac > 0, & \text{l'équation (2) a deux racines réelles;} \\ b^2 - 4ac = 0, & \text{l'équation (2) a une racine double réelle;} \\ b^2 - 4ac < 0, & \text{l'équation (2) a deux solutions non réelles, complexes conjuguées.} \end{cases}$$

□ **Racines n -ièmes d'un nombre complexe**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z = r e^{i\varphi}$ un nombre complexe non nul. L'équation :

$$z^n = r e^{i\varphi}$$

admet n racines distinctes, chacune d'entre elles est appelée racine n -ième de $r e^{i\varphi}$. Ces racines n -ièmes sont :

$$\sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)} \quad \text{avec } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

On les obtient en multipliant l'une d'entre elles par les n racines n -ièmes de 1. L'ensemble des n racines n -ièmes de 1, muni de la multiplication des nombres complexes, est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) et de (\mathbb{T}, \times) .

ÉNONCÉS DES EXERCICES ET PROBLÈMES

Forme algébrique d'un nombre complexe

1.1 On considère l'application f de $\mathbb{C} - \{3\}$ dans \mathbb{C} :

$$z \mapsto \frac{1 - 3z}{3 - z}$$

On pose $z = x + iy$ et $f(z) = z' = x' + iy'$, avec x, y, x', y' réels.

a) Calculer x' et y' en fonction de x et de y .

b) A quelles conditions, nécessaires et suffisantes, le nombre $f(z)$ est-il réel? imaginaire pur?

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère l'image $M(z)$ du nombre z . Quel est l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels $f(z)$ est réel, imaginaire pur?

1.2 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 + 2i\bar{z} - 6 = 0$.

1.3 On considère la fonction f :

$$z \mapsto \frac{z}{z + \bar{z} - 1}$$

- a) Quel est l'ensemble de définition D de f ? Quel est l'ensemble $f(D)$?
- b) Montrer que f est involutive. Quels sont les antécédents de 1, de i ?
- c) Déterminer les nombres z invariants par f (c'est-à-dire tels que $f(z) = z$).

(D'après Bac. E. Aix-en-Provence 1978.)

1.4 Démontrer par récurrence que, quel que soit l'entier naturel n non nul,

$$1 + 2i + 3i^2 + \dots + ni^{n-1} = \frac{-(n+1)i^{n+1} - ni^n + i}{2}$$

En déduire :

$$1 - 3 + 5 - 7 \dots + (-1)^k(2k+1) = (-1)^k(k+1)$$

$$\text{et : } 2 - 4 + 6 - \dots + (-1)^k 2k = \frac{1 - (-1)^k(2k+1)}{2}$$

1.5 Soit a_1, b_1, a_2, b_2 des entiers relatifs. Montrer qu'il existe deux entiers relatifs x et y tels que :

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = x^2 + y^2$$

Plus généralement, soit $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ des entiers relatifs. Montrer qu'il existe deux entiers relatifs X et Y tels que :

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \dots (a_n^2 + b_n^2) = X^2 + Y^2$$

(On ne demande pas une forme explicite de X et Y .)

Forme trigonométrique. Module et argument

1.6 Calculer $\Lambda = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} \right)^{30}$.

1.7 Comment faut-il choisir l'entier relatif n pour que $(\sqrt{3} + i)^n$ soit réel? réel positif? imaginaire pur?

1.8 Soit z et z' deux nombres complexes et u une racine carrée de zz' . Montrer que :

$$\left| \frac{z + z'}{2} - u \right| + \left| \frac{z + z'}{2} + u \right| = |z| + |z'|$$

On pourra introduire des nombres complexes t et t' tels que $t^2 = z, t'^2 = z'$.

1.9 Le plan (P) est rapporté au repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère l'application f de (P) dans (P) qui au point m d'affixe z associe le point M

d'affixe Z , où :

$$Z = \left(2 + \frac{3}{2}i \right) z - \frac{5}{2}i\bar{z}$$

- a) Calculer les coordonnées X et Y de M en fonction des coordonnées x et y de m . Quel est l'ensemble des points M ?
- b) Calculer le module de Z en fonction de x et de y . Trouver et dessiner l'ensemble des points m tels que $|Z| = \sqrt{5}$.
- c) Trouver et dessiner l'ensemble des points m tels que O, m et M soient alignés.

(Exercice Bac. C. Limoges 1978.)

1.10 On donne le nombre complexe u

$$u = \sqrt{2} - \sqrt{2} - i\sqrt{2} + \sqrt{2} \quad (i^2 = -1)$$

- a) Calculer u^2 et u^4 . Calculer le module et un argument de u^4 . En déduire le module et un argument de u .
- b) On considère un plan P muni d'un repère orthonormé. A tout point M de coordonnées (x, y) dans P , on associe son affixe $z = x + iy$. Déterminer l'ensemble des points M de P pour lesquels le module du produit uz est égal à 8.

(Exercice Bac. C. Alger 1980.)

1.11 On considère un plan P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Soit A le point d'affixe 1. Soit φ l'application de $\mathbb{C} - \{1\}$ dans \mathbb{C} définie par :

$$\varphi(z) = \frac{1+z}{1-\bar{z}}$$

On appelle m le point de P d'affixe $z = x + iy$ et M le point de P d'affixe $Z = \varphi(z) = X + iY$ avec x, y, X, Y réels.

- 1° a) Exprimer X et Y en fonction de x et y .
- b) Déterminer l'ensemble des points m tels que Z soit réel.
- c) Déterminer l'ensemble des points m tels que Z soit imaginaire pur.
- 2° a) Quelles distances représentent $|1 - z|$ et $|1 + z|$? Déterminer l'ensemble des points m tels que $|Z| = 1$.
- b) Démontrer que l'ensemble C_k des points m tels que $|Z| = k$ où k est un réel strictement positif et différent de 1, est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
- 3° Retrouver géométriquement les résultats des questions 1° b) et 1° c).

(D'après Bac. C. Rouen 1979.)

1.12 Soit P un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les images de z, i, iz soient alignées.

1.13 On appelle S l'ensemble des suites de nombres complexes dont le terme général u_n vérifie pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \frac{1}{5} u_{n+1} - \frac{1}{10} u_n.$$

- 1° Trouver les deux valeurs non nulles z_1 et z_2 du nombre complexe z telles que la suite géométrique de terme général $u_n = z^n$ et la suite géométrique de terme général $u_n = z_2^n$ soient des éléments de S.
 2° Soit θ le nombre réel compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ tel que : $\operatorname{tg} \theta = 3$.
 Calculer $u_n = z_1^n + z_2^n$ en fonction de θ . Quelle est la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Applications trigonométriques

1.14 Linéariser :
 a) $\cos^6 x$ b) $\sin^3 x \cos^3 x$.

1.15 Calculer $\cos 5\varphi$ en fonction de $\cos \varphi$. En déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{10}$.
 Montrer que $\sin 5\varphi = \sin \varphi P(\cos \varphi)$ où P est un polynôme de degré 4 que l'on déterminera.
 Calculer $\operatorname{tg} 5\varphi$ en fonction de $\operatorname{tg} \varphi$ (quand ces quantités sont définies).

1.16 Calculer :
 $1 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5}$.

1.17 Soit n un entier strictement positif, θ un réel appartenant à $]0, \pi[$. On considère :

$$S_n = \cos^2 \theta + \cos^2 \theta \cos 2\theta + \dots + \cos^2 \theta \cos p\theta + \dots + \cos^n \theta \cos n\theta$$

$$S'_n = \cos \theta \sin \theta + \cos^2 \theta \sin 2\theta + \dots + \cos^p \theta \sin p\theta + \dots + \cos^n \theta \sin n\theta.$$

$\Sigma_n = S_n + iS'_n$.
 Montrer que Σ_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique complexe dont on donnera le premier terme et la raison. En déduire la valeur de Σ_n puis de S_n en fonction de n et θ . (On montrera que : $S_n = \frac{\cos^{n+1} \theta \sin n\theta}{\sin \theta}$.)

(Exercice Bac. C. Grenoble 1980.)

Racines $n^{\text{èmes}}$

1.18 On donne : $z = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$. Calculer : z^n ($n \in \mathbb{N}^*$). Calculer les racines $n^{\text{èmes}}$ de z .

1.19 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $\bar{z} = z^7$.

1.20 Soit C le corps des nombres complexes et i un nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

- 1° Calculer : $(\frac{1}{2} + i\sqrt{3})^4$.
 2° Déterminer les nombres réels a et b tels que :
- $$(a + ib)^6 = \frac{73}{16} - \left(\frac{11}{2}\sqrt{3}\right)i.$$

(Exercice Bac. C. Bordeaux 1981.)

1.21 En appliquant la formule du binôme à $(1+x)^n$ et en remplaçant successivement x par 1, $j = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$, calculer la somme :

$$\sum_{0 \leq 3k \leq n} C_n^{3k} - \sum_{0 \leq 3k+1 \leq n} C_n^{3k+1} + \sum_{0 \leq 3k+2 \leq n} C_n^{3k+2}$$

1.22 Résoudre dans le corps des nombres complexes l'équation $z^{12} = 1$. Donner les solutions sous forme trigonométrique.
 2° u désignant un nombre complexe différent de 1, calculer au moyen des seuls nombres u^{n+1} et u
 $1 + u + u^2 + \dots + u^n$.
 3° Donner les solutions de l'équation $z^8 + z^4 + 1 = 0$, par exemple en utilisant les questions précédentes.
 (Exercice Bac. C. Rouen 1980.)

1.23 Soit j le nombre complexe $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

- 1° Montrer que tout nombre complexe z s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme $x + jy$ avec x et y réels. Calculer $|z|$ en fonction de x et de y .
 2° Soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$
 et $\Omega = \{z \in \mathbb{U}; \exists(x, y) \in \mathbb{Z}^2, z = x + jy\}$.
 Montrer que $z = x + jy \in \Omega$ implique $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$. En déduire que Ω contient 6 éléments.
 3° Montrer que Ω est un sous-groupe multiplicatif de \mathbb{C}^* .
 (D'après Bac. C. Orléans-Tours 1979.)

Équations

1.24 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $(z+1)^5 - (z-1)^5 = 0$.
 Comment aurait-on pu prévoir que les solutions seraient imaginaires pures ?

1.25 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :
 $1 + 2z + 2z^2 + \dots + 2z^{n-1} + z^n = 0$ $n \in \mathbb{N}^*$.

1.26 1° Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0$ sachant qu'elle admet une solution réelle.
 2° On construira les images des trois solutions dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Prouver que le triangle ainsi obtenu est rectangle isocèle et trouver les coordonnées de son isobarycentre.
 (Exercice Bac. E. Besançon 1981.)

1.27 \mathbb{C} étant l'ensemble des nombres complexes, on considère la fonction polynôme P de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par :
 $P(z) = (z^2 + 3z)^2 + (3z + 5)^2$.

1° Factoriser $P(z)$ en deux polynômes du second degré à coefficients complexes.
 2° Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :
 $z^2 + 3(1+i)z + 5i = 0$.

En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $P(z) = 0$, puis montrer que $P(z)$ est le produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.
 (D'après Exercice Bac. C. Amérique Centrale 1981.)

*1.28 Soit la famille d'équations :
 $(E_\theta) \quad z^2 - (1 + i \sin 2\theta)z + \frac{i}{2} \sin 2\theta = 0$

dans laquelle θ désigne un réel appartenant à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$.

Soit \mathcal{F} un plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) ; à tout complexe $z = x + iy$, (x, y) étant un élément de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on associe le point M de coordonnées (x, y) dans \mathcal{F} .

1° Résoudre l'équation (E_θ) dans l'ensemble des nombres complexes. Préciser les cas de racines doubles.

2° Soit $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ les points de \mathcal{F} associés aux solutions $z'(\theta)$ et $z''(\theta)$ de l'équation (E_θ) et soit $I(\theta)$ le milieu du segment $[M'(\theta), M''(\theta)]$.

a) Déterminer l'ensemble des points $I(\theta)$ quand θ décrit $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$.

b) Montrer que l'ensemble des points $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ est un cercle C que l'on précisera.

c) Démontrer, lorsque $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ sont distincts, que la droite contenant ces deux points a une direction indépendante de θ .

(D'après Bac. C. Paris 1980.)

1.29 Étant donné une équation du quatrième degré à coefficients réels, montrer que si elle admet z_0 pour solution, elle admet aussi pour solution le conjugué de z_0 .
 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation
 $2z^4 + 3z^2 + 3\sqrt{3}z + 9 = 0$

sachant qu'elle admet une solution de la forme $a(1+i)$; $a \in \mathbb{R}$.
 Déterminer le module et un argument de chacune des solutions.
 (Exercice Bac. C. Aix-en-Provence 1978.)

1.30 Résoudre dans \mathbb{C} :

(1) $z^4 - 4z^3 \cos a \cos b + 2z^2(1 + \cos 2a + \cos 2b) - 4z \cos a \cos b + 1 = 0$
 où a et b sont des nombres réels donnés et l'inconnue complexe z . (On divisera les deux membres de (1) par z^2 et on posera $Z = z + \frac{1}{z}$.)

1.31* Soit l'équation (1) $x^3 + px + q = 0$ (p et q réels donnés, x inconnue complexe).

1° Si x est racine de (1), on pose :

$$\begin{cases} u + v = x \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$$

montrer que u^3 et v^3 sont les racines de (2) $X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$.

2° Réciproquement soit X' et X'' les racines de (2). Montrer que l'on peut trouver une racine cubique u de X' et une racine cubique v de X'' telles que

$$uv = -\frac{p}{3}$$

En déduire les racines de (1) en fonction de u et v .

3° Discuter, suivant les valeurs de p et q , le nombre de racines réelles de (1).

4° Application. Résoudre l'équation :

$$x^3 - 12x - 65 = 0.$$

+ 27/27 = les deux racines
 + 1/27 de l'équation

RÉSOLUTION DES EXERCICES ET PROBLÈMES

1.1 a) Pour $z \neq 3$, on a :

$$f(z) = \frac{1 - 3x - 3iy}{3 - x - iy} = \frac{(1 - 3x - 3iy)(3 - x + iy)}{(3 - x - iy)(3 - x + iy)} = \frac{3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 - 8iy}{(3 - x)^2 + y^2}$$

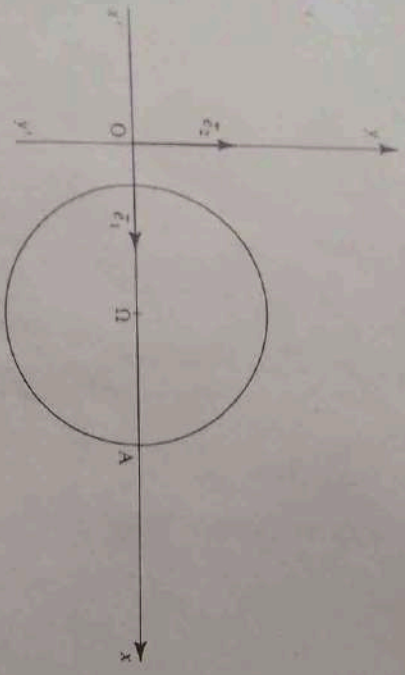
$$\begin{cases} x' = \frac{3x^2 + 3y^2 - 10x + 3}{(3 - x)^2 + y^2} \\ y' = \frac{-8y}{(3 - x)^2 + y^2} \end{cases}$$

d'où :
 b) $f(z)$ est réel si et seulement si $z \neq 3$ et $y = 0$.

$f(z)$ est imaginaire pur si et seulement si $z \neq 3$ et $3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0$.
L'ensemble des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit réel est donc la droite $x'Ox$ privée du point A d'abscisse 3.
D'autre part, l'équation $3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0$ est équivalente à :

$$x^2 + y^2 - \frac{10}{3}x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$$

L'ensemble des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit imaginaire pur est donc le cercle de centre $\Omega\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ et de rayon $R = \frac{4}{3}$ privé du point A .



1.2 Posons $z = x + iy$ avec x et y réels

$$z^2 + 2i\bar{z} - 6 = (x + iy)^2 + 2i(x - iy) - 6 = x^2 - y^2 + 2iy - 6 + 2ix(y + 1) = 0$$

Donc z est solution de l'équation donnée si, et seulement si :

$$(1) \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + 2iy - 6 = 0 \\ 2x(y + 1) = 0 \end{cases}$$

Les solutions de (1) sont les solutions de l'un ou l'autre des deux systèmes suivants :

$$(2) \quad \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 2y + 6 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (3) \quad \begin{cases} y = -1 \\ x^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

Le système (2) n'a pas de solution. Le système (3) a pour solutions $(3, -1)$ et $(-3, -1)$. Les solutions de l'équation proposée sont donc les deux nombres complexes

$$3 - i \quad \text{et} \quad -3 - i$$

1.3 a) Posons $z = x + iy$ avec x et y réels.

$$f(z) = \frac{x + iy}{2x - 1}$$

L'ensemble de définition, D est donc $\mathbb{C} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Un élément $Z = X + iY$, X et Y réels, de \mathbb{C} appartient à l'image $f(D)$ si, et seulement si, il existe x et y réels tels que :

$$\begin{cases} X = \frac{x}{2x-1} \\ Y = \frac{y}{2x-1} \end{cases}$$

La première équation équivaut à $x(1 - 2X) = -X$ et a une solution (unique) si et seulement si $X \neq \frac{1}{2}$. La deuxième équation détermine alors

$y = (2x - 1)Y$. On a donc $f(D) = D$. La démonstration prouve aussi que f , considérée comme application de D dans D est une bijection.

b) Calculons $f \circ f$:

$$(f \circ f)(z) = f(f(z)) = \frac{\frac{z}{2x-1}}{\frac{z}{2x-1} - 1} = \frac{z}{z + \bar{z} - z - \bar{z} + 1} = \frac{z}{1} = z$$

On a bien $f \circ f = \text{Id}_D$, ce qui prouve que f est involutive

$$f(z) = 1 \iff f(f(z)) = f(1) \iff z = f(1) = 1$$

$$f(z) = i \iff f(f(z)) = f(i) \iff z = f(i) = -i$$

c) Le nombre z est invariant par f si, et seulement si $f(z) = z$, c'est-à-dire :

$$\frac{z}{z + \bar{z} - 1} = z \iff z = z^2 + z\bar{z} - z$$

$$z^2 + z\bar{z} - 2z = z(z + \bar{z} - 2) = 0$$

ou encore :
Les nombres invariants sont donc $z = 0$ et tous les nombres dont la partie réelle est égale à 1.

1.4 Pour $n = 1$, on a bien

$$\frac{-(2)^{1^2} - 1 + i}{2} = 1$$

Supposons la formule vraie pour un rang $n \geq 1$. On a alors :

$$1 + 2i + 3i^2 + \dots + ni^{n-1} + (n+1)i^n = \frac{-(n+1)i^n - ni^n + i}{2} + (n+1)i^n$$

$$= \frac{-(n+1)i^n + (n+2)i^n + i}{2}$$

$$= \frac{-(n+2)i^{n+2} - (n+1)i^n + i}{2}$$

(en remarquant que $i^{n+2} = i^n \times i^2 = -i^n$).

La formule est donc vraie au rang $n+1$.
En donnant à n la valeur $2k+1$ dans la formule démontrée on obtient :

$$1 + 2i - 3 + \dots + (-1)^k(2k+1) = \frac{-(2k+2)i^{2k+2} - (2k+1)i^{2k+1} + i}{2}$$

$$= \frac{(-1)^k(2k+2) + i(1 - (-1)^k(2k+1))}{2}$$

En égalant les parties réelles et imaginaires des deux membres, on trouve :

$$1 - 3 + 5 - \dots + (-1)^k(2k + 1) = (-1)^k(k + 1)$$

$$2 - 4 + 6 - \dots + (-1)^k(2k) = \frac{1 - (-1)^k(2k + 1)}{2}$$

1.5 Dans le corps \mathbb{C} , on a :

$$a_1^2 + b_1^2 = (a_1 + ib_1)(a_1 - ib_1)$$

$$a_2^2 + b_2^2 = (a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)$$

de sorte que :

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = [(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)][(a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2)]$$

$$= [(a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)] [(a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + b_1 a_2)]$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)^2$$

Comme $x = a_1 a_2 - b_1 b_2$ et $y = a_1 b_2 + b_1 a_2$ sont des entiers relatifs, la propriété est prouvée.

La propriété générale peut se démontrer par récurrence. Cette propriété est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$ (démonstration précédente). Si elle est vraie pour un rang $n \geq 2$, on a :

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \dots (a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2)$$

$$= [(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)](a_3^2 + b_3^2) \dots (a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2)$$

$$= (x^2 + y^2)(a_3^2 + b_3^2) \dots (a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2)$$

Comme ce produit comporte n termes, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et conclure.

1.6 Nous mettons le nombre complexe $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ sous forme trigonométrique :

$$1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

d'où : $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

puis : $A = (\sqrt{2})^{30} e^{i\frac{30\pi}{12}} = 2^{15} e^{i\frac{5\pi}{2}} = 2^{15} i$
 $A = 2^{15} i$

1.7 $\sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

Un argument de $\sqrt{3} + i$ étant $\frac{\pi}{6}$, un argument de $(\sqrt{3} + i)^n$ sera $\frac{n\pi}{6}$. D'où :

$$(\sqrt{3} + i)^n \text{ est réel} \iff \arg(\sqrt{3} + i)^n \equiv 0[2\pi]$$

$$\iff (\exists k \in \mathbb{Z}) \frac{n\pi}{6} = k\pi$$

$$\iff n \text{ est un multiple de } 6.$$

$$(\sqrt{3} + i)^n \text{ est réel positif} \iff \arg(\sqrt{3} + i)^n \equiv 0[2\pi]$$

$$\iff (\exists k \in \mathbb{Z}) \frac{n\pi}{6} = 2k\pi$$

$$\iff n \text{ est un multiple de } 12.$$

$(\sqrt{3} + i)^n$ est imaginaire pur $\iff \arg(\sqrt{3} + i)^n \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

$$\iff (\exists k \in \mathbb{Z}) \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\iff n - 3 \text{ est un multiple de } 6.$$

1.8 Ayant posé $r^2 = z$ et $r'^2 = z'$, on a $zz' = (rr')^2 = r^2 d'$ ou $u = rr'$ ou $u = -rr'$. Dans l'un ou l'autre cas,

$$\left| \frac{z+z'}{2} - u \right| + \left| \frac{z+z'}{2} + u \right| = \left| \frac{r^2+r'^2}{2} - rr' \right| + \left| \frac{r^2+r'^2}{2} + rr' \right|$$

$$= \left| \frac{r^2+r'^2-2rr'}{2} \right| + \left| \frac{r^2+r'^2+2rr'}{2} \right|$$

$$= \frac{1}{2} [|(r-r')|^2 + |(r+r')|^2]$$

$$= \frac{1}{2} [|r-r'|^2 + |r+r'|^2]$$

Or, $|r-r'|^2 + |r+r'|^2 = (r-r')(r'-r) + (r+r')(r+r)$

$$= rr' - r'r' - r'r + r'r + rr + rr + r'r + r'r$$

$$= 2(|r|^2 + |r'|^2) = 2(|z| + |z'|)$$

On a donc bien : $\left| \frac{z+z'}{2} - u \right| + \left| \frac{z+z'}{2} + u \right| = |z| + |z'|$

1.9 a) On a :

$$Z = \left(2 + \frac{3}{2}i \right) (x + iy) - \frac{5}{2}i(x - iy)$$

$$= 2x + 2iy + \frac{3}{2}ix - \frac{3}{2}y - \frac{5}{2}ix + \frac{5}{2}y$$

$$= 2x - 4y + i(-x + 2y)$$

$$= (x - 2y)(2 - i)$$

d'où : $\begin{cases} X = 2(x - 2y) \\ Y = -(x - 2y) \end{cases}$

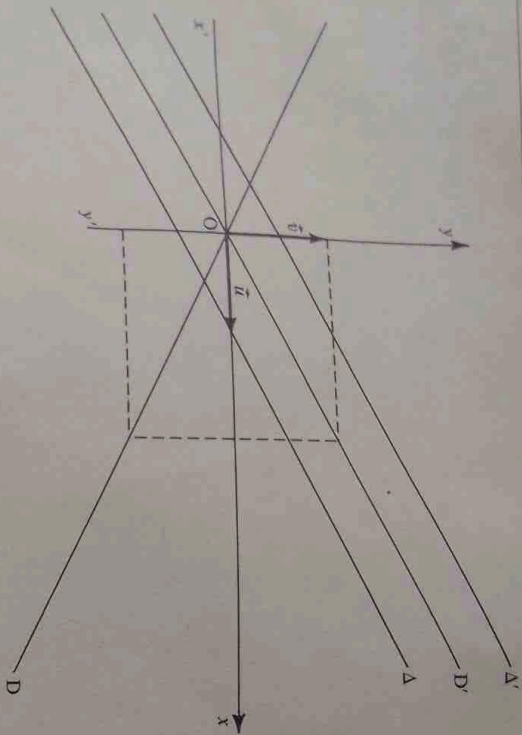
L'ensemble des points M est donc la droite D passant par O et par le point d'abscisse $2 - i$ (droite d'équation $X + 2Y = 0$) (voir figure page suivante).

b) $|Z|^2 = (x - 2y)^2 \times 5$ d'où : $|Z| = \sqrt{5}|x - 2y|$

Par suite : $|Z| = \sqrt{5} \iff |Z|^2 = 5 \iff (x - 2y)^2 = 1$
 $\iff (x - 2y - 1)(x - 2y + 1) = 0$

L'ensemble des points m tels que $|Z| = \sqrt{5}$ est donc la réunion des deux droites Δ et Δ' d'équations respectives $x - 2y - 1 = 0$ et $x - 2y + 1 = 0$. (Voir figure page suivante.)

c) Si Z est nul (c'est-à-dire si $x - 2y = 0$), M est en O et les trois points O, m, M sont alignés. Si Z n'est pas nul, les deux points O et M sont distincts et déterminent la droite D. Pour que O, m, M soient alignés il est alors nécessaire et suffisant que m appartienne à $D - \{O\}$.



Enfinement l'ensemble cherché est la réunion de la droite D et de la droite D' d'équation $x - 2y = 0$. (Voir fig.)

Remarque

Si $m \in D'$, on a $Z = 0$. Si $m \in D$, on a $Z = 4z$; en effet z est de la forme $z = \lambda(2 - i)$ avec λ réel d'où $Z = 4\lambda(2 - i) = 4z$.

1.10 a) On a : $u^2 = (2 - \sqrt{2}) - (2 + \sqrt{2}) - 2i\sqrt{4 - 2} = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$
 $= -2\sqrt{2}(1 + i)$
 $u^4 = 8(1 - 1 + 2i) = 16i.$

On a donc : $|u^4| = 16$ et $\arg u^4 \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On en déduit : $|u|^4 = |u^4| = 16$ et $|u| = \sqrt[4]{16} = 2$.

Appelons φ un argument de u , on a :

$$4\varphi \equiv \arg u^4 \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad \varphi = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}.$$

Cela nous donne quatre valeurs éventuelles (modulo 2π) pour φ . Mais, comme $\cos \varphi > 0$ et $\sin \varphi < 0$, la valeur à retenir est :

$$\varphi = -\frac{3\pi}{8} [2\pi].$$

Remarque

On déduit du calcul précédent

$$\cos \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

puis :

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{8} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} \right) = \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} \\ \sin \frac{\pi}{8} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} \right) = \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}. \end{cases}$$

b) On a les équivalences suivantes :

$$|uz| = 8 \Leftrightarrow |u||z| = 8 \Leftrightarrow |z| = 4.$$

L'ensemble des points M du plan P pour lesquels $|uz| = 8$ est donc le cercle de centre l'origine du repère et de rayon 4.

1.11 1° a) On a :

$$Z = \varphi(z) = \frac{1+z}{1-z} = \frac{1+x+iy}{1-x-iy} = \frac{(1+x+iy)(1-x+iy)}{(1-x-iy)(1-x+iy)}$$

$$Z = \frac{(1-x^2-y^2) + 2iy}{(1-x)^2 + y^2}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} X = \frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2 + y^2} \\ Y = \frac{2y}{(1-x)^2 + y^2} \end{cases}$$

b) Le nombre Z est réel si et seulement si $Y = 0$ ce qui équivaut à :
 $y = 0$ et $x \neq 1$.

L'ensemble des points m tels que Z soit réel est donc la droite $x'Ox$ privée du point A.

c) Le nombre Z est imaginaire pur si et seulement si $X = 0$ ce qui équivaut à :

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{et} \quad x \neq 1.$$

L'ensemble de point m tels que Z soit imaginaire pur est donc le cercle de centre O et de rayon 1, privé de A.

2° a) Introduisons le point A' d'affixe -1.

Le nombre $1 - \bar{z}$ est l'affixe du vecteur $m\bar{A}$ et le nombre $1 + z$ est l'affixe du vecteur $A'm$. (On sait en effet que l'affixe d'un vecteur est égale à l'affixe de son extrémité diminuée de l'affixe de son origine.) On a donc :

$$|1 - \bar{z}| = m \cdot A \quad \text{et} \quad |1 + z| = m \cdot A'.$$

Le nombre Z est de module égal à 1 si, et seulement si $m \cdot A = m \cdot A'$, c'est-à-dire si et seulement si m appartient à la médiatrice de [A, A'], qui est la droite $y'Oy$.

b) On a les équivalences suivantes :

$$|Z| = k \Leftrightarrow |Z|^2 = k^2 \Leftrightarrow \left| \frac{1+x+iy}{1-x-iy} \right|^2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{|1+x+iy|^2}{|1-x-iy|^2} = k^2$$

$$\Leftrightarrow |1+x+iy|^2 = k^2 |1-x-iy|^2$$

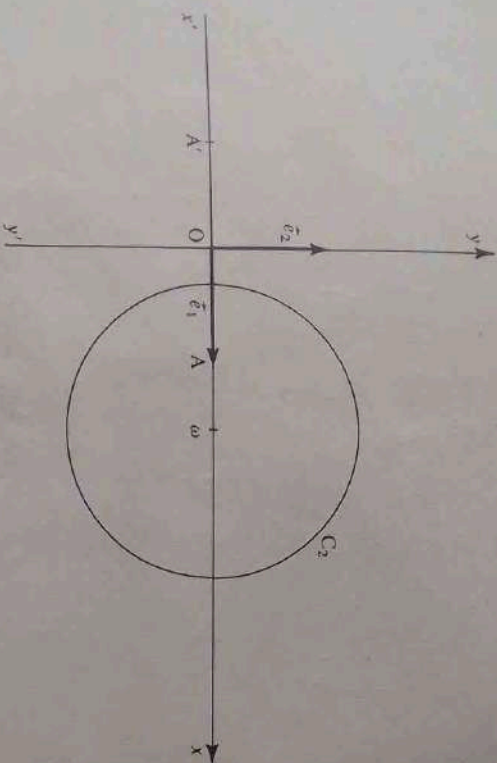
$$\Leftrightarrow (1+x)^2 + y^2 = k^2 [(1-x)^2 + y^2]$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)(1 - k^2) + 2(1 + k^2)x + 1 - k^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2 \left(\frac{1+k^2}{1-k^2} \right) x + 1 = 0 \quad (\text{on a supposé } k \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1+k^2}{1-k^2} \right)^2 + y^2 = \frac{4k^2}{(1-k^2)^2}$$

On reconnaît un cercle centré au point ω de $x'Ox$ d'abscisse $\frac{1+k^2}{k^2-1}$ et de rayon $\frac{2k}{|1-k^2|}$. Voir figure (tracée avec $k=2$).



3^e Reprétons l'interprétation donnée au 2^o : $1+z$ et l'affixe du vecteur $\overrightarrow{A'm}$ et $1-z$ est celle du vecteur $m\overline{A}$. On a donc, pour $z \neq 1$ et $z \neq -1$:

$$\arg(1+z) = (\vec{e}_1, \overrightarrow{A'm}) [2\pi] \quad \text{et} \quad \arg(1-z) = (\vec{e}_1, \overrightarrow{m\overline{A}}) [2\pi].$$

Pour $Z \neq 0$ (c'est-à-dire $z \neq 1$ et $z \neq -1$), on a :

$$\begin{aligned} \arg Z = \arg \frac{1+z}{1-z} &\equiv \arg(1+z) - \arg(1-z) [2\pi] \\ &\equiv (\vec{e}_1, \overrightarrow{A'm}) - (\vec{e}_1, \overrightarrow{m\overline{A}}) [2\pi] \\ &\equiv (\overrightarrow{m\overline{A}}, \overrightarrow{A'm}) [2\pi] \\ &\equiv (m\overline{A}, m\overline{A}) + \pi [2\pi]. \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$Z \text{ réel non nul} \iff \arg Z \equiv 0 [\pi] \iff (\overrightarrow{m\overline{A}}, \overrightarrow{m\overline{A}}) \equiv 0 [\pi].$$

Cette propriété caractérise les points de $x'Ox$ distincts de A et de A' . De même :

$$Z \text{ imaginaire pur non nul} \iff \arg Z \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\iff (\overrightarrow{m\overline{A}}, \overrightarrow{m\overline{A}}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi].$$

Cette propriété caractérise les points du cercle de centre O et de rayon 1 distincts de A et de A' .

1.12

Nous orientons le plan P de telle sorte que $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ soit un repère direct. Soit I, M', A , les points d'affixes respectives i, iz et 1 . Si $z = i$ ou $z = 1$, les trois points I, M, M' sont alignés. Supposons maintenant $z \neq i$ et $z \neq 1$. Les deux vecteurs non nuls \overrightarrow{IM} et $\overrightarrow{IM'}$ ont pour affixes respectives $z-i$ et $iz-i = i(z-1)$. On a donc :

$$\begin{aligned} I, M, M' \text{ alignés} &\iff (\vec{e}_1, \overrightarrow{IM}) \equiv (\vec{e}_1, \overrightarrow{IM'}) [\pi] \\ &\iff (\vec{e}_1, \overrightarrow{IM}) \equiv \arg i(z-1) [\pi] \end{aligned}$$

or :

$$\arg i(z-1) \equiv \arg i + \arg(z-1) \equiv \frac{\pi}{2} + \arg(z-1) \equiv \frac{\pi}{2} + (\vec{e}_1, \overrightarrow{AM}) [2\pi]$$

d'où : I, M, M' alignés

$$\iff (\vec{e}_1, \overrightarrow{IM}) \equiv \frac{\pi}{2} + (\vec{e}_1, \overrightarrow{AM}) [\pi]$$

$$\iff (\vec{e}_1, \overrightarrow{IM}) - (\vec{e}_1, \overrightarrow{AM}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\iff (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{IM}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi].$$

L'ensemble des points M cherché est donc le cercle de diamètre $[I, A]$.

1.13

1^o La suite (z^n) appartient à S si, et seulement si, pour tout entier naturel n :

$$z^{n+2} = \frac{1}{5} z^{n+1} - \frac{1}{10} z^n,$$

si l'on suppose $z \neq 0$, cette équation est équivalente successivement à :

$$z^2 - \frac{1}{5}z + \frac{1}{10} = 0$$

(1)

$$10z^2 - 2z + 1 = 0.$$

Comme $\Delta' = 1 - 10 = (3i)^2$, les racines de l'équation (1) sont :

$$z_1 = \frac{1+3i}{10} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1-3i}{10}.$$

Les suites cherchées ont pour terme général respectivement :

$$\left(\frac{1+3i}{10}\right)^n \quad \text{et} \quad \left(\frac{1-3i}{10}\right)^n.$$

2^o On a : $|1-3i| = |1+3i| = \sqrt{10}$.

Le nombre réel θ , compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, tel que $\operatorname{tg} \theta = 3$ vérifie :

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

θ est donc un argument du nombre $1+3i$:

$$1+3i = \sqrt{10} e^{i\theta}.$$

On a donc :

$$1-3i = \sqrt{10} e^{-i\theta}.$$

$$\text{Puis : } v_n = z_1^n + z_2^n = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^n e^{in\theta} + \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^n e^{-in\theta} = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^n \cos n\theta.$$

La suite (u_n) est une suite de nombres réels et : $0 \leq |u_n| \leq 2 \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^n$.

Puisque : $0 < \frac{1}{\sqrt{10}} < 1$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

1.14 a) $\cos^6 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^6$

$$= \frac{1}{2^6} (e^{6ix} + 6e^{4ix} + 15e^{2ix} + 20 + 15e^{-2ix} + 6e^{-4ix} + e^{-6ix})$$

$$= \frac{1}{2^6} \left(\frac{e^{6ix} + e^{-6ix}}{2} + 6 \frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} + 15 \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + 10 \right)$$

$$= \frac{1}{32} (\cos 6x + 6 \cos 4x + 15 \cos 2x + 10).$$

b) On peut procéder de façon analogue :

$$\sin^3 x \cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{-1}{64i} [(e^{ix} - e^{-ix})(e^{ix} + e^{-ix})]^3$$

$$= \frac{-1}{64i} (e^{2ix} - e^{-2ix})^3 = \frac{-1}{64i} (e^{6ix} - 3e^{2ix} + 3e^{-2ix} - e^{-6ix})$$

$$= \frac{-1}{32} \left(\frac{e^{6ix} - e^{-6ix}}{2i} - 3 \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i} \right)$$

$$= \frac{-1}{32} (\sin 6x - 3 \sin 2x).$$

On peut aussi procéder ainsi :

$$\sin^3 x \cos^3 x = (\sin x \cos x)^3 = \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^3 = \frac{\sin 2x \sin^2 2x}{8}$$

$$= \frac{\sin 2x (1 - \cos 4x)}{16} = \frac{\sin 2x - \sin 2x \cos 4x}{16}$$

$$= \frac{\sin 2x - \frac{1}{2} (\sin 6x - \sin 2x)}{16}$$

$$= \frac{1}{32} \sin 6x + \frac{3}{32} \sin 2x.$$

1.15 Appliquons la formule de Moivre :

(1) $\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^5$.

La formule du binôme donne

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^5 = \cos^5 \varphi + 5i \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi$$

$$- 10i \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi + i \sin^5 \varphi.$$

En égalant les parties réelles des deux membres de (1), on obtient :

(2) $\cos 5\varphi = \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi$
 $\cos 5\varphi = \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) + 5 \cos \varphi (1 - \cos^2 \varphi)^2$
 $= 16 \cos^5 \varphi - 20 \cos^3 \varphi + 5 \cos \varphi.$

Calcul de $\cos \frac{\pi}{10}$.

Nous remarquons que $\cos\left(5 \cdot \frac{\pi}{10}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ donc d'après (2) :

$$\cos \frac{5\pi}{10} = 0 = 16 \cos^5 \frac{\pi}{10} - 20 \cos^3 \frac{\pi}{10} + 5 \cos \frac{\pi}{10}$$

comme on peut mettre $\cos \frac{\pi}{10} \neq 0$ en facteur, on peut écrire

$$16 \cos^4 \frac{\pi}{10} - 20 \cos^2 \frac{\pi}{10} + 5 = 0$$

ce qui montre que $\cos^2 \frac{\pi}{10}$ est une racine de l'équation :

$$16x^2 - 20x + 5 = 0$$

ces racines sont $\frac{5 - \sqrt{5}}{8}$ et $\frac{5 + \sqrt{5}}{8}$.

Comme $0 < \frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{4}$, on a $\cos \frac{\pi}{10} > \cos \frac{\pi}{4} > 0$, d'où $\cos^2 \frac{\pi}{10} > \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$.

Or, $\frac{5 + \sqrt{5}}{8} > 1$, tandis que $\frac{5 - \sqrt{5}}{8} < \frac{1}{2}$, donc $\cos^2 \frac{\pi}{10} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$ et $\cos \frac{\pi}{10}$ étant positif :

$$\cos \frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

En égalant les parties imaginaires des deux membres de (1), on obtient

$$\sin 5\varphi = 5 \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + \sin^5 \varphi$$

$$= \sin \varphi (5 \cos^4 \varphi - 10 \cos^2 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) + (1 - \cos^2 \varphi)^2)$$

$$= \sin \varphi (16 \cos^4 \varphi - 12 \cos^2 \varphi + 1).$$

Enfin, pour $\cos 5\varphi \neq 0$ (ce qui impose $\cos \varphi \neq 0$), on a, d'après (1) :

$$\operatorname{tg} 5\varphi = \frac{\sin 5\varphi}{\cos 5\varphi} = \frac{5 \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + \sin^5 \varphi}{\cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi}$$

En divisant numérateur et dénominateur par $\cos^5 \varphi$, on obtient :

$$\operatorname{tg} 5\varphi = \frac{5 \operatorname{tg} \varphi - 10 \operatorname{tg}^3 \varphi + \operatorname{tg}^5 \varphi}{1 - 10 \operatorname{tg}^2 \varphi + 5 \operatorname{tg}^4 \varphi}$$

1.16 Posons $S = 1 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5}$.

Introduisons : $S' = \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{6\pi}{5} + \sin \frac{8\pi}{5}$

$$S + iS' = 1 + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{6\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}}$$

Posons : $z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, z est différent de 1, donc :

$$S + iS' = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{1 - z^5}{1 - z} = 0.$$

Par suite S est nulle.

Remarque La nullité de $S + iS'$ s'interprète ainsi : la somme des cinq racines 5èmes de 1 est nulle.

1.17

On a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos \theta e^{i n \theta} + \cos^2 \theta e^{2 i n \theta} + \dots + \cos^n \theta e^{i n n \theta} + \dots + \cos^n \theta e^{i n n \theta}$$

$$= \cos \theta e^{i \theta} + (\cos \theta e^{i \theta})^2 + \dots + (\cos \theta e^{i \theta})^n + \dots + (\cos \theta e^{i \theta})^n$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \cos^n \theta e^{i n n \theta}$ apparaît donc comme la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $\cos \theta e^{i \theta}$ et de raison $q = \cos \theta e^{i \theta}$.

La raison q ne peut être égale à 1 (en effet, $\theta \in]0, \pi[$ implique $|q| = |\cos \theta| < 1$). On a donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos^n \theta e^{i n n \theta} = q(1 + q + \dots + q^{n-1}) = q \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos^n \theta e^{i n n \theta} = \frac{1 - (\cos \theta e^{i \theta})^n}{1 - \cos \theta e^{i \theta}}$$

Or, $1 - \cos \theta e^{i \theta} = 1 - \cos^2 \theta - i \sin \theta \cos \theta = \sin^2 \theta - i \sin \theta \cos \theta = -i \sin \theta e^{i \theta}$.

D'où $\sum_{n=0}^{\infty} \cos^n \theta e^{i n n \theta} = \frac{\cos \theta}{i \sin \theta} (1 - \cos^n \theta e^{i n n \theta})$

$$= \frac{i \cos \theta}{\sin \theta} (1 - \cos^n \theta \cos n \theta - i \cos^n \theta \sin n \theta)$$

En égalant les parties réelles des deux membres, on obtient :

$$S_n = \frac{\cos^{n+1} \theta \sin n \theta}{\sin \theta}$$

1.18 On a, (avec la notation classique $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{2\pi i/3}$) :

$$z = \frac{-4}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{-4(1 - i\sqrt{3})}{(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})} = -1 + i\sqrt{3} = 2j = 2e^{2\pi i/3}$$

De sorte que $z^n = 2^n e^{2\pi i n/3}$. Plus précisément :

- $z^n = 2^n$ si n est un multiple de 3
 - $z^n = 2^n j$ si $n - 1$ est un multiple de 3
 - $z^n = 2^n j^2$ si $n - 2$ est un multiple de 3.
- Les racines n -ièmes de z sont les n nombres complexes $\sqrt[n]{2} e^{i(2\pi k + 2\pi n)/n}$ avec $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

1.19

L'équation possède la solution $z = 0$.

Supposons maintenant $z \neq 0$, l'égalité $z^7 = \bar{z}$ implique $|z^7| = |\bar{z}|$ soit $|z|^7 = |z|$ et, comme $|z| > 0$ on en déduit $|z| = 1$. Tout nombre de module 1 a pour conjugué son inverse, puisque $z\bar{z} = 1$ entraîne $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

Par suite :

$$\begin{cases} \bar{z} = z^7 \\ z \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{z} = z^7 \\ z \neq 0 \end{cases} \iff z^8 = 1.$$

Les solutions sont donc 0 et les huit nombres $e^{2\pi i k/8}$ avec $k \in \{0, 1, \dots, 7\}$.
Soit :

$$0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), i, \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i), -1, \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i), -i, \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

1.20

1° En appliquant la formule du binôme, on obtient :

$$\left(\frac{1}{2} + i\sqrt{3}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 \sqrt{3}i - 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 (\sqrt{3})^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right) (\sqrt{3})^3 i + (\sqrt{3})^4$$

$$= \frac{73}{16} - \left(\frac{11}{2}\sqrt{3}\right)i$$

2° On a les équivalences suivantes :

$$(a + ib)^4 = \frac{73}{16} - \frac{11\sqrt{3}}{2}i \iff (a + ib)^4 = \left(\frac{1}{2} + i\sqrt{3}\right)^4$$

$$\iff \left(\frac{a + ib}{\frac{1}{2} + i\sqrt{3}}\right)^4 = 1$$

$$\iff \exists k \in \{0, 1, 2, 3\} \frac{a + ib}{\frac{1}{2} + i\sqrt{3}} = e^{2\pi i k/4}$$

Finalement les quatre nombres complexes solutions sont :

$$\frac{1}{2} + i\sqrt{3}, -\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2} - i\sqrt{3}, \sqrt{3} - \frac{1}{2}i$$

1.21

La formule du binôme s'écrit :

$$(1 + x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^n x^n$$

En remplaçant successivement x par 1, j , j^2 , on obtient :

$$(1 + 1)^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n \quad (1)$$

$$(1 + j)^n = 1 + C_n^1 j + C_n^2 j^2 + C_n^3 j^3 + \dots + C_n^n j^n \quad (2)$$

$$(1 + j^2)^n = 1 + C_n^1 j^2 + C_n^2 j^4 + C_n^3 j^6 + \dots + C_n^n j^{2n} \quad (3)$$

En ajoutant ces trois égalités, on obtient, compte tenu de la relation $1 + j + j^2 = 0$:

$$2^n + (1 + j)^n + (1 + j^2)^n = 3(1 + C_n^3 + C_n^6 + \dots) = 3 \sum_{0 \leq 3k \leq n} C_n^{3k}$$

Or : $1 + j = -j^2$ et $1 + j^2 = -j = e^{-2\pi i/3}$. On a donc :

$$2^n + (1 + j)^n + (1 + j^2)^n = 2^n + e^{2\pi i n/3} + e^{-2\pi i n/3} = 2^n + 2 \cos \frac{2\pi n}{3}$$

Puis : $\sum_{0 \leq 3k \leq n} C_n^{3k} = \frac{1}{3} (2^n + 2 \cos \frac{2\pi n}{3})$.

Pour obtenir la seconde somme, on multiplie l'égalité (2) par j^2 et l'égalité (3) par j avant d'ajouter :

$$2^n + j^2(1 + j)^n + j(1 + j^2)^n = 3 \sum_{0 \leq 3k \leq n} C_n^{3k+1}$$

Or : $2^n + j^2(1+j)^n + j(1+j^2)^n = 2^n + e^{-3n} e^{9n} + e^{2jn} e^{-9jn}$
 $= 2^n + 2 \cos\left(\frac{n\pi - 2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$

donc $\sum_{0 \leq k \leq n-1} e^{j^{k+2} \cdot 2} = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos\left(\frac{n\pi - 2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) \right)$.

En procédant de façon analogue, on obtient :
 $\sum_{0 \leq k \leq n-1} e^{j^{k+2} \cdot 2} = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos\left(\frac{n\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \right)$.

1.22 1° Les racines 12-ièmes de 1 sont les nombres $z_k = e^{2jk\pi/12} = e^{jk\pi/6}$ avec $k \in \{0, 1, \dots, 11\}$.

Sous forme algébrique :

$z_0 = 1,$	$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{j}{2},$	$z_2 = \frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2}$
$z_3 = e^j,$	$z_4 = -\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2} = j,$	$z_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{j}{2}$
$z_6 = -1,$	$z_7 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{j}{2},$	$z_8 = -\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{2}$
$z_9 = -j,$	$z_{10} = \frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{2},$	$z_{11} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{j}{2}.$

$2^\circ 1 + n + n^2 + \dots + n^n = \frac{1 - n^{n+1}}{1 - n}$.

3° $1 + z^4 + z^8 = 1 + z^4 + (z^4)^2$ est la somme des trois premiers termes d'une progression géométrique de raison z^4 . Aucune racine 4-ième de 1 n'est solution de l'équation proposée, par suite :

$$1 + z^4 + z^8 = 0 \iff \frac{1 - (z^4)^3}{1 - z^4} = 0 \iff \begin{cases} z^{12} = 1 \\ z^4 \neq 1 \end{cases}$$

Les solutions de l'équation donnée sont donc les huit racines 12-ièmes de 1 qui ne sont pas racines 4-ièmes de 1, à savoir

$z_1, z_2, z_4, z_5, z_7, z_8, z_{10}, z_{11}.$

Remarque

On peut aussi résoudre l'équation donnée en posant $z^4 = Z$; le nombre Z est solution de $Z^3 + Z + 1 = 0$. Cette équation a pour solutions :

$Z_1 = j = e^{j\pi/2}$ et $Z_2 = j^2 = e^{j\pi}$.

On cherche ensuite les racines 4-ièmes de Z_1 et de Z_2 :

$\left\{ \begin{array}{l} \text{racines 4-ièmes de } Z_1 : e^{j\pi/4}, e^{3j\pi/4} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, 3\} \\ \text{racines 4-ièmes de } Z_2 : e^{k\pi/2} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, 3\}. \end{array} \right.$

1.23

1° Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec a et b réels. On a $z = x + jy$ avec x et y réels si, et seulement si,

$a + ib = x + jy \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x - \frac{y}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}y \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} a = x - \frac{y}{2} \\ b = \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$

Ce système possède une solution et une seule : $\left(a + \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{2b}{\sqrt{3}} \right)$.
 On a $|z|^2 = z\bar{z} = (x + jy)(x + jy) = x^2 + y^2 + jy(1 + j^2)$. On sait que $1 + j + j^2 = 0$. On a donc :

$|z| = \sqrt{x^2 - xy + y^2}.$

2° Écrivons $x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}$.

Soit $z = x + jy$ un élément de Ω :

$\frac{3y^2}{4} \leq \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} = 1$

$y^2 \leq \frac{4}{3}$

d'où :

Comme y^2 est un entier, on en déduit $y^2 \leq 1$ donc $|y| \leq 1$.

D'autre part :

$\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 \leq \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1$

d'où : $-1 \leq x - \frac{y}{2} \leq 1$

$-1 - \frac{y}{2} \leq x \leq 1 + \frac{y}{2}$.

Mais, comme on sait que $|y| \leq 1$, on en déduit

$-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$

et, comme x est un entier :

$-1 \leq x \leq 1$.

Les entiers x et y ne peuvent donc prendre que trois valeurs : $-1, 0$ et 1 . Réciproquement, six des neuf nombres $x + jy$ avec x et y dans $\{-1, 0, 1\}$ ont un module égal à 1 et appartiennent donc à Ω . Ce sont :

$-1 - j = j^2, -1, -j, j, 1, 1 + j = -j^2.$

3° Il est facile de vérifier que Ω est un groupe commutatif (Ω est stable pour la multiplication des nombres complexes qui est donc associative et commutative dans \mathbb{C} , l'élément neutre $1 \in \Omega$, tout élément de Ω admet un inverse dans Ω).

Mais il est plus simple de constater que Ω est l'ensemble des racines 6-ièmes de 1, c'est donc, d'après le cours, un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) .

1.24

Comme $z = 1$ n'est pas racine de l'équation, on a :

$(z + 1)^5 - (z - 1)^5 = 0 \iff \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^5 = 1$

$\Leftrightarrow \frac{z+1}{z-1} = e^{2ik\pi}$ avec $k \in \{1, 2, 3, 4\}$
 $\Leftrightarrow z(1 - e^{2ik\pi}) = (1 + e^{2ik\pi})$
 Comme $1 - e^{2ik\pi} \neq 0$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, l'équation donnée va posséder les quatre solutions suivantes :

$$z = \frac{e^{2ik\pi} + 1}{e^{2ik\pi} - 1} = \frac{2 \cos \frac{k\pi}{2}}{2i \sin \frac{k\pi}{2}} = -i \cotg \frac{k\pi}{2}$$

avec $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

On pourrait prévoir que les solutions seraient imaginaires pures de la façon suivante : soit z une solution, on a en particulier $|z-1|^2 = |z+1|^2$, d'où $|z-1| = |z+1|$. Cela s'interprète géométriquement ainsi dans un plan complexe : le point M d'affixe z est équidistant des deux points A et A' d'affixes 1 et -1 . Le point M appartient donc à la médiatrice de $[A, A']$ qui est l'axe des imaginaires pures.

1.25 Écrivons :

$$\begin{aligned}
 1 + 2z + \dots + 2z^{n-1} + z^n &= (1+z) + (z+z^2) + \dots + (z^{n-2} + z^{n-1}) + (z^{n-1} + z^n) \\
 &= (1+z) + z(1+z) + \dots + z^{n-2}(1+z) + z^{n-1}(1+z) \\
 &= (1+z)(1 + z + \dots + z^{n-2} + z^{n-1}) \\
 &= (1+z) \left(\frac{1-z^n}{1-z} \right) \text{ (car } z=1 \text{ n'est pas solution).}
 \end{aligned}$$

Les solutions sont donc les nombres -1 et $e^{2ik\pi}$ avec $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Remarque

Si n est pair, l'équation possède $n-1$ solutions distinctes (car $e^{2i(\frac{n}{2})\pi} = -1$). Si n est impair, l'équation possède n solutions distinctes.

1.26 1° Soit x un nombre réel

$$x^3 - 2x^2 - ix + 3 - i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2x^2 + 3 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$$

Le nombre -1 est solution de ce système.

Nous allons donc pouvoir mettre en facteur $z+1$:

$$z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = (z+1)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

Les nombres α et β sont déterminés en égalant les termes constants et les coefficients de z dans les deux membres :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \beta = 3 - i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = 3 - i \end{cases}$$

Il reste à résoudre l'équation du second degré $z^2 - 3z + 3 - i = 0$.

Cherchons les racines carrées de $-3+4i$:

$$(a+bi)^2 = -3+4i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \sqrt{9+16} = 5 \\ a^2 - b^2 = -3 \\ ab > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \\ ab > 0 \end{cases}$$

On a donc $\Delta = (1+2i)^2$. D'où les solutions de l'équation donnée :

$$z_1 = -1; \quad z_2 = \frac{3+(1+2i)}{2} = 2+i; \quad z_3 = \frac{3-(1+2i)}{2} = 1-i.$$

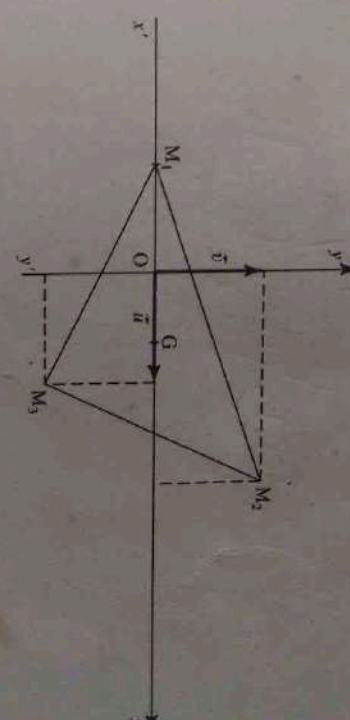
Remarque

On aurait pu justifier la factorisation de $z+1$ ainsi :

$$\begin{aligned}
 z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i &= (z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i) - ((-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 3 - i) \\
 &= z^3 + 1 - 2(z^2 - 1) - i(z + 1) \\
 &= (z+1) [(z^2 - z + 1) - 2(z-1) - i] \\
 &= (z+1)(z^2 - 3z + 3 - i).
 \end{aligned}$$

On aurait pu aussi poser la division euclidienne de $z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i$ par $z+1$.

2° Soit M_1, M_2, M_3 les points d'affixes respectives $-1, z_2, z_3$.



Le vecteur $\overrightarrow{M_3M_1}$ a pour affixe $z_1 - z_3 = -1 - 1 + i = -2 + i$.
 Le vecteur $\overrightarrow{M_3M_2}$ a pour affixe $z_2 - z_3 = 2 + i - 1 + i = 1 + 2i$.
 On vérifie $\|\overrightarrow{M_3M_1}\| = |-2+i| = \sqrt{5} = |1+2i| = \|\overrightarrow{M_3M_2}\|$ et $\overrightarrow{M_3M_1} \cdot \overrightarrow{M_3M_2} = -2 + 2 = 0$.

Le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle isocèle, le sommet de l'angle droit étant M_3 .

L'isobarycentre G des trois points M_1, M_2, M_3 a pour affixe :

$$\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = \frac{2}{3}$$

1.27 1° On peut écrire :

$$\begin{aligned}
 P(z) &= (z^2 + 3z)^2 - i^2(3z + 5)^2 \\
 &= [z^2 + 3z + i(3z + 5)][z^2 + 3z - i(3z + 5)] \\
 &= [z^2 + 3(1+i)z + 5i][z^2 + 3(1-i)z - 5i].
 \end{aligned}$$

2° Résolution de : $z^2 + 3(1+i)z + 5i = 0$
 $\Delta = 9(1+i)^2 - 20i = -2i = (1-i)^2$
 d'où les solutions :

$$z_1 = \frac{-3(1+i) + (1-i)}{2} = -(1+2i)$$

$$z_2 = \frac{-3(1+i) - (1-i)}{2} = -(2+i).$$

On remarque que :
 $z^2 + 3(1+i)z + 5i = (\frac{z}{2})^2 + 3(1-i)\frac{z}{2} - 5i$.
 Les racines du polynôme $z^2 + 3(1-i)z - 5i$ sont donc \bar{z}_1 et \bar{z}_2 .
 On peut donc écrire :

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - \bar{z}_1)(z - \bar{z}_2)$$

$$= [(z - z_1)(z - \bar{z}_1)][(z - z_2)(z - \bar{z}_2)]$$

$$= (z^2 - 2z \operatorname{Re}(z_1) + |z_1|^2)(z^2 - 2z \operatorname{Re}(z_2) + |z_2|^2)$$

$$= (z^2 + 2z + 5)(z^2 + 4z + 5).$$

1.28 1° $\Delta = (1+i \sin 2\theta)^2 - 2i \sin 2\theta = 1 - \sin^2 2\theta = \cos^2 2\theta$.

Les racines sont donc :

$$z(\theta) = \frac{1+i \sin 2\theta + \cos 2\theta}{2} \text{ et } z''(\theta) = \frac{1+i \sin 2\theta - \cos 2\theta}{2}$$

Il y a une racine double si, et seulement si, $\Delta = 0$ soit $\theta = -\frac{\pi}{4}$ ou $\theta = +\frac{\pi}{4}$.

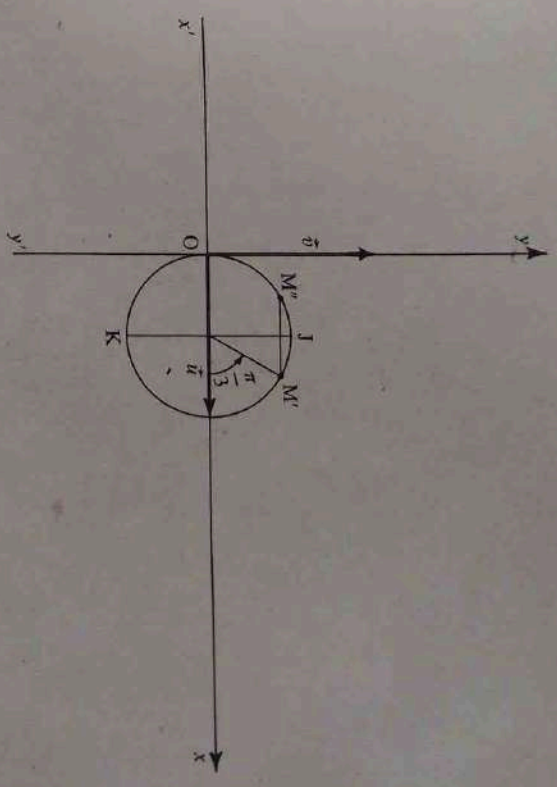
2° a) $l(\theta)$ a pour affixe $\frac{z'(\theta) + z''(\theta)}{2} = \frac{1+i \sin 2\theta}{2}$. Le point I décrit donc le segment dont les extrémités sont les deux points J et K d'affixes $\frac{1+i}{2}$ et $\frac{1-i}{2}$.

b) En mettant $z'(\theta)$ et $z''(\theta)$ sous la forme :

$$z'(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{e^{2i\theta}}{2}; \quad z''(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2i\theta}}{2}$$

on voit que l'ensemble des points $M''(\theta)$ est le cercle C de centre $(\frac{1}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$. Il en est de même de l'ensemble des points $M'(\theta)$.

c) Le vecteur $\overline{M'M''}$ a pour affixe $z''(\theta) - z'(\theta) = -\cos 2\theta$ qui est un nombre réel. Cela signifie, lorsque les deux points $M'(\theta)$ et $M''(\theta)$ sont distincts ($\theta \neq \mp \frac{\pi}{4}$), que la droite $(M'(\theta), M''(\theta))$ est parallèle à $x'Ox$. La figure suivante est faite dans le cas $\theta = \frac{\pi}{6}$.



1.29 Soit $az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$ une équation du quatrième degré à coefficients réels. ($a \neq 0$). On a :

$$\overline{az_0^4 + bz_0^3 + cz_0^2 + dz_0 + e} = a(\bar{z}_0)^4 + b(\bar{z}_0)^3 + c(\bar{z}_0)^2 + d(\bar{z}_0) + e$$

ce qui prouve que si z_0 est solution, \bar{z}_0 est également solution. Cherchons maintenant une solution de l'équation proposée de la forme $a(1+i)$ avec a réel :

$$2a^4(1+i)^4 + 3a^2(1+i)^2 + 3\sqrt{3}a(1+i) + 9 = 0$$

$$\iff -8a^4 + 6a^2i + 3\sqrt{3}a + 3\sqrt{3}ai + 9 = 0$$

$$\iff \begin{cases} -8a^4 + 3\sqrt{3}a + 9 = 0 \\ 6a^2 + 3\sqrt{3}a = 0. \end{cases}$$

Ce système admet la solution : $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le nombre $-\frac{\sqrt{3}}{2}(1+i)$ est donc solution de l'équation proposée. D'après le résultat préliminaire, il en est de même de son conjugué $-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-i)$.

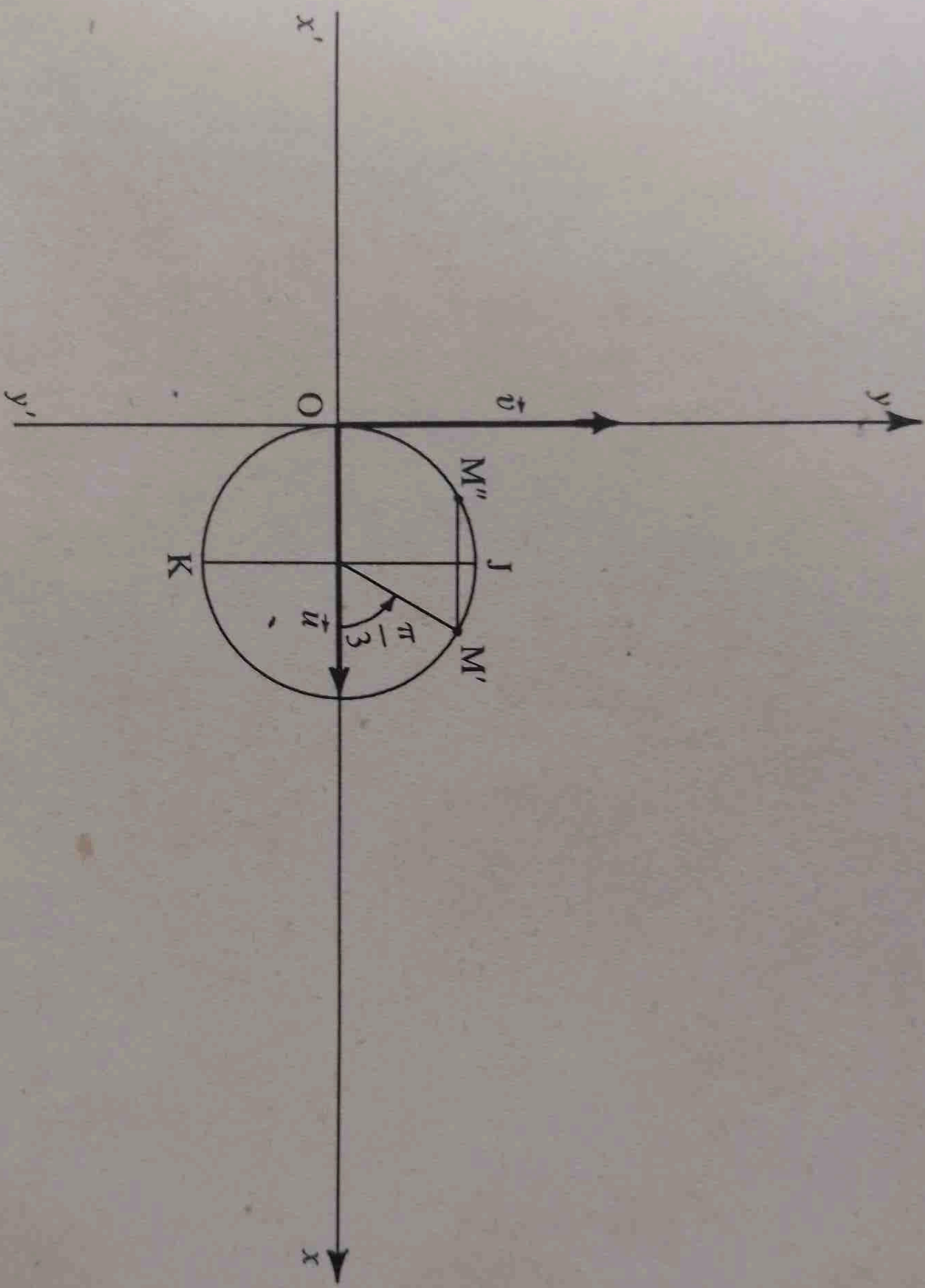
Le polynôme $2z^4 + 3z^2 + 3\sqrt{3}z + 9$ doit donc être divisible par

$$\left[z + \frac{\sqrt{3}}{2}(1+i) \right] \left[z + \frac{\sqrt{3}}{2}(1-i) \right] = \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} = z^2 + \sqrt{3}z + \frac{3}{2}$$

Ce que nous allons vérifier en cherchant α et β tels que :

$$2z^4 + 3z^2 + 3\sqrt{3}z + 9 = (z^2 + \sqrt{3}z + \frac{3}{2})(2z^2 + \alpha z + \beta).$$

En effectuant et en comparant les coefficients des polynômes au premier et



1.29 Soit $az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$ une équation du quatrième degré à

au second membre, on voit que cette égalité aura lieu si :

$$\begin{cases} \alpha + 2\sqrt{3} = 0 \\ \beta + \sqrt{3}\alpha + 3 = 3 \\ \beta\sqrt{3} + \frac{3}{2}\alpha = 3\sqrt{3} \\ \frac{3}{2}\beta = 9. \end{cases}$$

Ce système possède l'unique solution $\alpha = -2\sqrt{3}$, $\beta = 6$, d'où :

$$\begin{aligned} z^2 + 3z^2 + 3\sqrt{3}z + 9 &= \left(z^2 + \sqrt{3}z + \frac{3}{2}\right)(2z^2 - 2\sqrt{3}z + 6) \\ &= (2z^2 + 2\sqrt{3}z + 3)(z^2 - \sqrt{3}z + 3). \end{aligned}$$

Il reste à trouver les racines du trinôme $z^2 - \sqrt{3}z + 3$

$$\Delta = 3 - 12 = -9 = (3i)^2.$$

Ces racines sont donc : $\frac{\sqrt{3} + 3i}{2}$ et $\frac{\sqrt{3} - 3i}{2}$.

Finalement les quatre solutions de l'équation proposée sont :

$$\begin{cases} z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}} \\ z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-i) = \frac{\sqrt{6}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} \\ z_3 = \frac{\sqrt{3} + 3i}{2} = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}} \\ z_4 = z_3 = \frac{\sqrt{3} - 3i}{2} = \sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}}. \end{cases}$$

1.30 Comme $z = 0$ n'est pas solution de (1),

$$(1) \Leftrightarrow z^2 - 4z \cos a \cos b + 2(1 + \cos 2a + \cos 2b) - 4\frac{1}{z} \cos a \cos b + \frac{1}{z^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} - 4 \cos a \cos b \left(z + \frac{1}{z}\right) + 2(1 + \cos 2a + \cos 2b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Z = z + \frac{1}{z} \\ Z^2 - 2 - 4 \cos a \cos b Z + 2(1 + \cos 2a + \cos 2b) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - zZ + 1 = 0 \\ Z^2 - 4 \cos a \cos b Z + 2(\cos 2a + \cos 2b) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Résolution de (3) :

$$\Delta' = 4 \cos^2 a \cos^2 b - 2 \cos 2a - 2 \cos 2b$$

$$= 4 \cos^2 a \cos^2 b - 2(2 \cos^2 a - 1) - 2(2 \cos^2 b - 1)$$

$$= 4(\cos^2 a \cos^2 b - \cos^2 a - \cos^2 b + 1)$$

$$= 4(1 - \cos^2 a)(1 - \cos^2 b) = 4 \sin^2 a \sin^2 b.$$

On trouve pour racines de (3) :

$$Z = 2 \cos(a + b) \text{ et } Z'' = 2 \cos(a - b).$$

On résout ensuite (2) ou l'on remplace successivement Z par Z' et Z'' ; les racines de (1) sont :

$$\cos(a + \epsilon b) + i\epsilon' \sin(a + \epsilon b) \text{ avec } \epsilon \in \{-1, +1\} \text{ et } \epsilon' \in \{-1, +1\}.$$

1.31*

1°

(1)

$$x^2 + px + q = 0.$$

si x est racine de (1), en posant $u + v = x$ et $uv = -\frac{p}{3}$, alors :

$$(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v),$$

$$u^3 + v^3 = x^3 + px = -q$$

$$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

d'où :

$$(2) \quad \begin{cases} X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0. \\ 2^\circ \text{ Réciproquement soit } X' \text{ et } X'' \text{ les racines de (2):} \end{cases}$$

$$\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} = \frac{4p^3 + 27q^2}{27},$$

si $\Delta \geq 0$, X' et X'' sont réelles et il existe une racine cubique réelle u de X' et une racine cubique réelle v de X'' donc uv est réel ;

si $\Delta < 0$, X' et X'' sont conjuguées et il existe une racine cubique u de X' et une racine cubique v de X'' telles que u et v soient conjuguées donc uv est encore réel.

Quel que soit le signe de Δ , $(uv)^3 = u^3v^3 = X'X'' = -\frac{p^3}{27} = \left(-\frac{p}{3}\right)^3$ et comme

$$uv \text{ est réel on peut écrire } uv = -\frac{p}{3}.$$

Remarque

Il serait faux de dire, sans précision, que si $(uv)^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3$ alors $uv = -\frac{p}{3}$. Par exemple soit la

racine cubique de l'unité $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, on a bien $j^3 = j^3$ mais on n'a pas $j = 1$. C'est parce

que uv est réel que l'on a $uv = -\frac{p}{3}$.

Montrons que $u + v$ est racine de (1) :

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u + v) + q$$

$$\text{or : } \begin{cases} u^3 + v^3 = X' + X'' = -q \\ 3u^2v + 3uv^2 = 3uv(u + v) = -p(u + v), \end{cases}$$

donc : $(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$ et $u + v$ est bien racine de (1).

Les racines cubiques de X' sont u, ju, j^2u (on les obtient en multipliant l'une d'elles u par les racines cubiques 1, j, j^2 de l'unité). [Voir rappels de cours.]

Les racines cubiques de X'' sont v, jv, j^2v .

Le nombre $ju \times j^2v = uv$ est réel et on vérifie encore que $ju + j^2v$ est racine de (1).

2 | Espaces vectoriels

Le nombre $j^2u \times jv = uv$ est réel et on vérifie de même que $j^2u + jv$ est racine de (1).

Conclusion :

Les racines de (1) sont $u + v$, $ju + j^2v$, $j^2u + jv$.

3° On a vu que le discriminant de (2) est $\Delta = \frac{4p^3 + 27q^2}{27}$.

• Si $4p^3 + 27q^2 > 0$, X' et X'' sont réelles et distinctes et (1) admet une seule racine réelle $u + v$ (u et v sont les racines cubiques réelles de X' et X'') et deux racines complexes conjuguées $ju + j^2v$ et $j^2u + jv$ (elles ne sont pas réelles car on aurait, dans ce cas, $ju + j^2v = j^2u + jv$, c'est-à-dire $(j - j^2)(u - v) = 0$ donc $u = v$ et $X' = X''$, ce qui est contraire à l'hypothèse).

• Si $4p^3 + 27q^2 = 0$, X' est réelle et (1) admet une racine simple réelle $u + v = 2u$ (u étant la racine cubique réelle de $X' = X''$) et une racine double réelle $ju + j^2v = (j + j^2)u = -u$ car $1 + j + j^2 = 0$. Remarquons encore que ces 3 racines sont confondues si, et seulement si, $2u = -u$, c'est-à-dire $u = 0$ donc $X' = X'' = 0$ et $p = q = 0$.

• Si $4p^3 + 27q^2 < 0$, soit u et v deux racines cubiques respectivement de X' et de X'' , ces deux racines étant conjuguées. La somme de deux nombres complexes conjugués est un nombre réel donc $u + v$ est réel. Il en est de même de $ju + j^2v$ et de $j^2u + jv$. Donc l'équation (1) admet 3 racines réelles distinctes.

4° Application

$$(1) \quad x^3 - 12x - 65 = 0$$

on trouve

$$(2) \quad X^2 - 65X + 64 = 0$$

$$X' = 1; \quad X'' = 64.$$

Les racines cubiques de 1 sont $1, j, j^2$.

Les racines cubiques de 64 sont $4, 4j, 4j^2$.

Les racines de (1) sont :

$$\begin{cases} u + v = 1 + 4 = 5 \\ ju + j^2v = j + 4j^2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} + 4\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{5}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ j^2u + jv = -\frac{5}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

□ Définition d'un espace vectoriel

Soit un ensemble \mathcal{V} muni d'une loi de composition interne notée $+$ appelée addition et d'une loi de composition externe notée \cdot appelée multiplication par un réel, associant à tout couple (λ, \vec{v}) de $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$ un élément de \mathcal{V} noté $\lambda \cdot \vec{v}$.

On dit que $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel (on dit aussi espace vectoriel sur \mathbb{R}) si et seulement si

- $(\mathcal{V}, +)$ est un groupe commutatif.
- Quels que soient les réels λ et μ et les éléments \vec{u} et \vec{v} de \mathcal{V} , on a :

$$\begin{aligned} 1 \cdot \vec{v} &= \vec{v} \\ \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) &= (\lambda\mu) \cdot \vec{v} \\ (\lambda + \mu) \cdot \vec{v} &= \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{v} \\ \lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) &= \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Exemples

- L'ensemble \mathbb{R}^n des n -uplets de réels, muni de l'addition définie quels que soient :

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

et de la multiplication externe définie quels que soient λ de \mathbb{R} et X de \mathbb{R}^n par :

$$\lambda X = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

- L'ensemble $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ des fonctions numériques définies sur un ensemble D , muni de l'addition. Quelles que soient f et g de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, $f + g$ est définie par :

$$(\forall x \in D) \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

et de la multiplication par un nombre réel : quels que soient λ de \mathbb{R} et f de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, λf est définie par :

$$(\forall x \in D) \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Comme nous ne considérons que des \mathbb{R} -espaces vectoriels, nous dirons désormais « espace vectoriel » au lieu de « \mathbb{R} -espace vectoriel ».

□ Sous-espace vectoriel

Définition

On dit qu'une partie \mathcal{V}' d'un espace vectoriel \mathcal{V} est un sous-espace vectoriel de \mathcal{V} si et seulement si \mathcal{V}' est un espace vectoriel pour les deux opérations de \mathcal{V} .

2 | Espaces vectoriels

Le nombre $j^2u \times ju = nu$ est réel et on vérifie de même que $j^2u + ju$ est racine de (1).

Conclusion :

Les racines de (1) sont $u + n$, $ju + j^2v$, $j^2u + ju$.

3° On a vu que le discriminant de (2) est $\Delta = \frac{4p^3 + 27q^2}{27}$.

• Si $4p^3 + 27q^2 > 0$, X' et X'' sont réelles et distinctes et (1) admet une seule racine réelle $u + v$ (u et v sont les racines cubiques réelles de X' et X'') et deux racines complexes conjuguées $ju + j^2v$ et $j^2u + ju$ (elles ne sont pas réelles car on aurait, dans ce cas, $ju + j^2v = j^2u + ju$, c'est-à-dire $(j - j^2)(u - v) = 0$ donc $u = v$ et $X' = X''$, ce qui est contraire à l'hypothèse).

• Si $4p^3 + 27q^2 = 0$, $X' = X''$ est réelle et (1) admet une racine simple réelle $u + v = 2u$ (u étant la racine cubique réelle de $X' = X''$) et une racine double réelle $ju + j^2u = (j + j^2)u = -u$ car $1 + j + j^2 = 0$. Remarquons encore que ces 3 racines sont confondues si, et seulement si, $2u = -u$, c'est-à-dire $u = 0$ donc $X' = X'' = 0$ et $p = q = 0$.

• Si $4p^3 + 27q^2 < 0$, soit u et v deux racines cubiques respectivement de X' et de X'' , ces deux racines étant conjuguées. La somme de deux nombres complexes conjugués est un nombre réel donc $u + v$ est réel. Il en est de même de $ju + j^2v$ et de $j^2u + ju$. Donc l'équation (1) admet 3 racines réelles distinctes.

4° Application

$$(1) \quad x^3 - 12x - 65 = 0$$

on trouve

$$(2) \quad X^2 - 65X + 64 = 0$$

$$X' = 1; \quad X'' = 64.$$

Les racines cubiques de 1 sont $1, j, j^2$.

Les racines cubiques de 64 sont $4, 4j, 4j^2$.

Les racines de (1) sont :

$$\begin{cases} u + v = 1 + 4 = 5 \\ ju + j^2v = j + 4j^2 = -\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2} + 4\left(-\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{5}{2} - j\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ j^2u + ju = -\frac{5}{2} + j\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

□ Définition d'un espace vectoriel

Soit un ensemble \mathcal{V} muni d'une loi de composition interne notée $+$ appelée addition et d'une loi de composition externe notée \cdot appelée multiplication par un réel, associant à tout couple (λ, \vec{v}) de $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$ un élément de \mathcal{V} noté $\lambda \cdot \vec{v}$.

On dit que $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ est un **R-espace vectoriel** (on dit aussi **espace vectoriel sur \mathbb{R}**) si et seulement si

- $(\mathcal{V}, +)$ est un groupe commutatif.
- Quels que soient les réels λ et μ et les éléments \vec{u} et \vec{v} de \mathcal{V} , on a :

$$\begin{aligned} 1 \cdot \vec{v} &= \vec{v} \\ \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) &= (\lambda\mu) \cdot \vec{v} \\ (\lambda + \mu) \cdot \vec{v} &= \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{v} \\ \lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) &= \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$

Exemples

- L'ensemble \mathbb{R}^n des n -uplets de réels, muni de l'addition définie quels que soient :

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

et de la multiplication externe définie quels que soient λ de \mathbb{R} et X de \mathbb{R}^n par :

$$\lambda X = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

- L'ensemble $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ des fonctions numériques définies sur un ensemble D , muni de l'addition. Quelles que soient f et g de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, $f + g$ est définie par :

$$(\forall x \in D) \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

et de la multiplication par un nombre réel : quels que soient λ de \mathbb{R} et f de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, λf est définie par :

$$(\forall x \in D) \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Comme nous ne considérons que des **R-espaces vectoriels**, nous dirons désormais « **espace vectoriel** » au lieu de « **R-espace vectoriel** ».

□ Sous-espace vectoriel

Définition

On dit qu'une partie \mathcal{V}' d'un espace vectoriel \mathcal{V} est un **sous-espace vectoriel** de \mathcal{V} si et seulement si \mathcal{V}' est un espace vectoriel pour les deux opérations de \mathcal{V} .

□ Étude de \mathbb{R}^n

Transformation, par la méthode du pivot de Gauss, de la matrice canonique

Par des échanges de lignes ou de colonnes ou des opérations élémentaires $L_i \mapsto L_i + \lambda L_j$ (obtenus par des changements de base), on transforme, si possible, A en l'une des formes :

$$(I) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & b & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & c & 0 \end{pmatrix} \quad (II) \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & b & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & c & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d \end{pmatrix}$$

$$(III) \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & a & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & b & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & c & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

où a, b, c, d sont non nuls. Les réels a, b, c, d sont appelés des pivots. On démontre que (I) représente une famille libre, (II) une base de \mathbb{R}^n , (III) une famille génératrice de \mathbb{R}^n .

Applications

1. Toute famille libre de \mathbb{R}^n possède au plus n vecteurs.
2. Toute famille libre de n vecteurs de \mathbb{R}^n est une base de \mathbb{R}^n .
3. Toute famille libre de p vecteurs ($p < n$) de \mathbb{R}^n peut être complétée en une base de \mathbb{R}^n .
4. Toute famille génératrice de \mathbb{R}^n possède au moins n vecteurs.
5. Toute famille génératrice de n vecteurs de \mathbb{R}^n est une base de \mathbb{R}^n .
6. De toute famille génératrice de p vecteurs ($p > n$) de \mathbb{R}^n , on peut extraire une base de \mathbb{R}^n .
7. Toute base de \mathbb{R}^n possède exactement n vecteurs. L'entier naturel n est appelé la dimension de \mathbb{R}^n .

ÉNONCÉS DES EXERCICES ET PROBLÈMES

Sous-espaces vectoriels. Bases

2.1. Soit E l'ensemble des fonctions numériques f définies sur \mathbb{R} et telles que :

$$[\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2] \quad f(x_1) + f(x_2) = 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

Démontrer que E, muni de l'addition des fonctions numériques et de la multiplication des fonctions numériques par un nombre réel, est un espace vectoriel.

2° Démontrer que l'ensemble E_1 des fonctions affines est un sous-espace vectoriel de E.

2.2. Soit $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ muni de l'addition interne et de la multiplication externe définies quels que soient (x, y, z) et (x', y', z') de \mathbb{R}^3 et quel que soit α réel par :

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

$$\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

1° Montrer que l'ensemble E_1 des triplets de la forme $(\alpha + \beta, \alpha, \alpha + 2\beta)$, α et β étant des réels quelconques, est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 et trouver une base de E_1 .

2° Mêmes questions avec l'ensemble E_2 des triplets (x, y, z) de \mathbb{R}^3 tels que :

$$2x + y - z = 0.$$

3° Mêmes questions avec l'ensemble E_3 des triplets (x, y, z) de \mathbb{R}^3 tels que :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ y = 2z \end{cases}$$

2.3. Soit, dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , l'ensemble F_1 des triplets de la forme $(a - b, a, 2a + b)$ où a et b sont des réels quelconques, et l'ensemble F_2 des triplets (x, y, z) tels que $x = y = z$.

1° Démontrer que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 et indiquer une base pour chacun d'eux.

2° On appelle somme $F_1 + F_2$ des sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 l'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^3 de la forme $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ avec $\vec{v}_1 \in F_1$ et $\vec{v}_2 \in F_2$. Déterminer $F_1 + F_2$.

2.4. Mêmes questions avec :

$$F_1 \text{ ensemble des triplets } (a - b, a, 2a + b)$$

$$F_2 \text{ ensemble des triplets } (0, c, 3c)$$

a, b, c étant des réels quelconques.

2.5 Mêmes questions avec :

E_1 ensemble des triplets $(a, 2a, 3a)$
 E_2 ensemble des triplets $(-b, 0, 5b)$

a, b étant des réels quelconques.

2.6 Soit E l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur l'ensemble des dix nombres $\{0, 1, 2, 3, \dots, 7, 8, 9\}$ et soit E_1 et E_2 les sous-ensembles de E définis respectivement par les conditions :

$$f(0) = f(1) \quad 3f(0) + 7f(1) = -2.$$

E_1, E_2 et E_3 sont-ils des sous-espaces vectoriels sur \mathbb{R} ? Dans l'affirmative, déterminer des bases de ces sous-espaces vectoriels.

Coordonnées

2.7 1° Montrer que l'ensemble \mathcal{P}_3 des polynômes de degré 3 au plus et du polynôme nul, muni de l'addition des polynômes et de la multiplication des polynômes par un réel, est un espace vectoriel.

2° Montrer que la famille (f_0, f_1, f_2, f_3) définie par

$$f_0 : x \mapsto 1$$

$$f_1 : x \mapsto x$$

$$f_2 : x \mapsto x(x-1)$$

$$f_3 : x \mapsto x(x-1)(x-2)$$

est une base de \mathcal{P}_3 et calculer les coordonnées de

$$f : x \mapsto x^3 + 2x^2 - x + 1$$

dans cette base.

2.8 Soit la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ de vecteurs de \mathbb{R}^4 définie par sa matrice canonique :

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que cette famille est une base de \mathbb{R}^4 et calculer les coordonnées du vecteur $\vec{v} = (1, 1, 1, 1)$ dans cette base.

2.9 Soit S l'ensemble des suites u définies sur \mathbb{N} telles que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+2} = \frac{5}{6} u_{n+1} - \frac{1}{6} u_n.$$

1° Démontrer que S , muni de l'addition des suites et de la multiplication des suites par un réel, est un espace vectoriel.

2° Démontrer qu'il existe deux suites géométriques non nulles formant une base de S et calculer les coordonnées, dans cette base, de la suite solution telle que : $u_0 = u_1 = 1$.

3° Quelle est la limite de la dernière suite précédente quand n tend vers $+\infty$?

Méthode du pivot

2.10 Soit la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ de vecteurs de \mathbb{R}^3 de matrice canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 17 & 3 \\ -4 & -3 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

Transformer la matrice par la méthode du pivot de Gauss et en déduire si la famille est libre ou non, génératrice ou non, une base ou non. Trouver éventuellement une relation linéaire non triviale entre $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ (c'est-à-dire autre que $0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 + 0\vec{v}_4 = \vec{0}$).

2.11 Mêmes questions qu'à l'exercice précédent avec (dans \mathbb{R}^2) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.12 Mêmes questions qu'à l'exercice 2.10 avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ -6m & m-1 \\ 2m-1 & 1 \end{pmatrix}$$

(discuter suivant les valeurs du paramètre réel m).

2.13 Mêmes questions qu'à l'exercice 2.10 avec :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & m \\ 3 & 9 & -2m \end{pmatrix}$$

(discuter suivant les valeurs du paramètre réel m).

2.14 Soit la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5)$ de vecteurs de \mathbb{R}^3 de matrice canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer, par la méthode du pivot, que cette famille est génératrice de \mathbb{R}^3 . Trouver des relations entre $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5$.

2.1

1° On sait que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ensemble des fonctions numériques définies sur \mathbb{R} , muni de l'addition des fonctions numériques et de la multiplication des fonctions numériques par un réel, est un espace vectoriel (cf. rappels de cours).
 E est une partie non vide de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car, par exemple, la fonction nulle f_0 définie sur \mathbb{R} répond à la question puisque, quels que soient x_1 et x_2 réels,

$$f_0(x_1) = f_0(x_2) = f_0\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = 0$$

donc : $f_0(x_1) + f_0(x_2) = 2f_0\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

E est stable par combinaisons linéaires car quels que soient f et g de E et quels que soient λ et μ réels, on peut écrire, x_1 et x_2 étant des réels quelconques :

$$f(x_1) + f(x_2) = 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

$$g(x_1) + g(x_2) = 2g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

par suite :

$$\lambda[f(x_1) + f(x_2)] + \mu[g(x_1) + g(x_2)] = 2\left[\lambda f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \mu g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right]$$

$$(\lambda f + \mu g)(x_1) + (\lambda f + \mu g)(x_2) = 2(\lambda f + \mu g)\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

ce qui montre que $\lambda f + \mu g \in E$.

Donc E , étant une partie non vide de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, stable par combinaisons linéaires, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2° • On a $E_1 \subset E$, car soit $f : x \mapsto ax + b$ définie sur \mathbb{R} . Quels que soient x_1 et x_2 réels :

$$f(x_1) = ax_1 + b$$

$$f(x_2) = ax_2 + b$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + b$$

$$f(x_1) + f(x_2) = a(x_1 + x_2) + 2b$$

$$f(x_1) + f(x_2) = 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

donc :

• $E_1 \neq \emptyset$ (par exemple $f_0 : x \mapsto 0$ appartient à E_1).

• E_1 est stable par combinaisons linéaires.

($x \mapsto \lambda(ax + b) + \mu(a'x + b') = (\lambda a + \mu a')x + \lambda b + \mu b'$ est une fonction affine).

Remarque

On démontre que les fonctions affines sont les seules fonctions continues possédant la propriété de l'énoncé.

2.2

1° On pourrait démontrer que E_1 est une partie non vide de \mathbb{R}^3 , stable par combinaisons linéaires. Il est plus simple de raisonner de la façon suivante (on trouvera, en même temps, une base). Quels que soient α, β réels, on peut écrire :

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta, \alpha, \alpha + 2\beta) &= (\alpha, \alpha, \alpha) + (\beta, \beta, 2\beta) \\ &= \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 0, 2) \end{aligned}$$

donc E_1 est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $(1, 1, 1)$ et $(1, 0, 2)$ de l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , donc E_1 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 (on sait que l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs d'un espace vectoriel sur \mathbb{R} est un sous-espace vectoriel de cet espace vectoriel). La famille $(1, 1, 1), (1, 0, 2)$ est génératrice de E_1 . Est-elle libre? Quels que soient α et β réels, on a :

$$\alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 0, 2) = (0, 0, 0) \iff$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \beta, \alpha, \alpha + 2\beta = (0, 0, 0) \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha = \beta = 0 \end{cases}$$

donc la famille $((1, 1, 1), (1, 0, 2))$ est libre. C'est une base de E_1 .

2° E_2 est l'ensemble des triplets (x, y, z) de \mathbb{R}^3 tels que $z = 2x + y$. E_2 est donc l'ensemble des triplets de \mathbb{R}^3 de la forme :

$$\begin{aligned} (x, y, 2x + y) &= (x, 0, 2x) + (0, y, y) \\ &= x(1, 0, 2) + y(0, 1, 1). \end{aligned}$$

On vérifiera comme précédemment que $((1, 0, 2), (0, 1, 1))$ est une base de E_2 .

Remarque

Nous avons calculé z en fonction de x et y , on aurait pu calculer y en fonction de x et z ou calculer x en fonction de y et z . On aurait trouvé d'autres bases de E_2 .

3° En calculant, par exemple, y et z en fonction de x , on trouve que E_2 est l'ensemble des triplets $(x, -4x, -2x) = x(1, -4, -2)$. E_2 est le sous-espace vectoriel engendré par $(1, -4, -2)$.

2.3

1° Quels que soient a et b réels, on peut écrire :

$$\begin{aligned} (a - b, a, 2a + b) &= (a, a, 2a) + (-b, 0, b) \\ &= a(1, 1, 2) + b(-1, 0, 1). \end{aligned}$$

Posons : $\vec{f} = (1, 1, 2)$, $\vec{f}' = (-1, 0, 1)$.

F_1 est l'ensemble des combinaisons linéaires de \vec{f} et \vec{f}' , c'est donc un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . La famille (\vec{f}, \vec{f}') est génératrice de F_1 . Est-elle libre? Quels que soient a, b réels on a :

$$a\vec{f} + b\vec{f}' = 0 \iff a(1, 1, 2) + b(-1, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\iff (a - b, a, 2a + b) = (0, 0, 0)$$

$$\iff (a = b = 0)$$

donc (\vec{f}, \vec{f}') est une famille libre. Par suite (\vec{f}, \vec{f}') est une base de F_1 .
 Si l'on pose $x = y = z = c$, F_2 est l'ensemble des vecteurs

$$(c, c, c) = c(1, 1, 1)$$

donc F_2 est le sous-espace vectoriel engendré par $\vec{k} = (1, 1, 1)$.

2° F_1 est l'ensemble des vecteurs $\vec{v}_1 = a\vec{f} + b\vec{f}'$, a et b décrivant \mathbb{R} .
 F_2 est l'ensemble des vecteurs $\vec{v}_2 = c\vec{k}$, c décrivant \mathbb{R} donc $F_1 + F_2$ est

l'ensemble des vecteurs $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, a, b, c décrivant \mathbb{R} . La famille $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est génératrice de $F_1 + F_2$.

Est-elle libre? Quels que soient a, b, c réels on a :

$$a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = \vec{0} \iff \begin{cases} a - b + c = 0 \\ a - b + c = 0 \\ 2a + b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + c = 0 \\ 2a + b + c = 0 \\ a = b = c = 0 \end{cases}$$

Donc $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une famille libre, par suite e est une base de $F_1 + F_2$. Mais $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est aussi une famille libre dont le nombre de vecteurs est égal à la dimension 3 de \mathbb{R}^3 . Donc $\mathbb{R}^3 = F_1 + F_2$.

2.4

Rappelons que le sous-espace vectoriel engendré par $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$ se note $\text{Vect}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$.

1° $F_1 = \text{Vect}(\vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = (1, 1, 2)$, $\vec{j} = (-1, 0, 1)$
 $F_2 = \text{Vect}(\vec{k})$ avec $\vec{k} = (0, 1, 3)$.

2° $F_1 + F_2$ est encore l'ensemble des vecteurs $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, la famille $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est génératrice de $F_1 + F_2$ mais elle n'est pas libre car $\vec{k} = \vec{i} + \vec{j}$, donc $F_2 \subset F_1$ et

$$a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = a\vec{i} + b\vec{j} + c(\vec{i} + \vec{j}) = (a+c)\vec{i} + (b+c)\vec{j}$$

donc : $F_1 + F_2 = F_1$.

2.5

1° $(a, 2a, 3a) = a(1, 2, 3)$ donc : F_1 est le sous-espace vectoriel engendré par $\vec{f} = (1, 2, 3)$.

$(-b, 0, 5b) = b(-1, 0, 5)$ donc : F_2 est le sous-espace vectoriel engendré par $\vec{f} = (-1, 0, 5)$.

2° $F_1 + F_2$ est engendré par (\vec{f}_1, \vec{f}_2) qui est une base de $F_1 + F_2$ (famille libre et génératrice de $F_1 + F_2$).

2.6

• On sait (cf. rappels de cours) que $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, ensemble des fonctions numériques définies sur un ensemble D , muni de l'addition de ces fonctions et de la multiplication par un réel, est un espace vectoriel. En prenant $D = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, on a $\mathcal{F}(D, \mathbb{R}) = E$ qui est bien un espace vectoriel. Considérons les applications f_0, f_1, \dots, f_9 définies par, i et j étant des entiers compris entre 0 et 9 :

$$\begin{cases} f_i(i) = 0 \text{ pour } i \neq j \\ f_i(i) = 1 \text{ pour } i = j \end{cases}$$

(exemple : $f_3(i) = 0$ pour $i \neq 3$ et $f_3(3) = 1$).

Montrons que cette famille de dix applications est libre; déterminons $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_9)$ de \mathbb{R}^{10} tel que :

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_9 f_9 = \omega.$$

ω désigne l'application nulle c'est-à-dire que quel que soit x entier compris entre 0 et 9

$$\omega(x) = 0$$

d'où pour tout i entier compris entre 0 et 9 $(\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_9 f_9)(i) = 0$ d'où d'après les définitions des opérations sur l'ensemble E .

$$\lambda_0 f_0(i) + \lambda_1 f_1(i) + \dots + \lambda_9 f_9(i) = 0$$

mais d'après la définition des f_i :
 $\lambda_0 f_0(i) + \lambda_1 f_1(i) + \dots + \lambda_9 f_9(i) = \lambda_i = 0$
 donc pour tout i entier compris entre 0 et 9, λ_i est nul, la famille (f_0, \dots, f_9) est donc libre.

Montrons que la famille (f_0, f_1, \dots, f_9) est génératrice. Soit f une application quelconque de $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ dans \mathbb{R} , déterminons $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_9)$ de \mathbb{R}^{10} tel que :

$$f = \lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_9 f_9.$$

Pour tout i entier compris entre 0 et 9 on obtient :

$$f(i) = \lambda_0 f_0(i) + \lambda_1 f_1(i) + \dots + \lambda_9 f_9(i) = \lambda_i.$$

Donc toute application f de $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ dans \mathbb{R} est combinaison linéaire de la famille (f_0, f_1, \dots, f_9) et on a :

$$f = f(0)f_0 + f(1)f_1 + \dots + f(9)f_9.$$

Donc (f_0, f_1, \dots, f_9) est une base de E .

• Montrons que E_1 est un sous-espace vectoriel de E : E_1 est non vide, stable par combinaisons linéaires car si $f \in E_1$, et $g \in E_1$, et si α et β sont deux réels quelconques :

$$(\alpha f + \beta g)(0) = \alpha f(0) + \beta g(0) = \alpha f(1) + \beta g(1) = (\alpha f + \beta g)(1).$$

Or inverse, comme à la 1^{re} question, que la famille $(g_0, f_2, f_3, \dots, f_9)$ avec :

$$\begin{cases} g_0(0) = g_0(1) = 1 \\ g_0(i) = 0 \end{cases}$$

pour i entier compris entre 2 et 9, est une base de E_1 .

• Montrons que E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de E . Soit f et g deux éléments de E_2

$$\begin{aligned} 3f(0) + 7f(1) &= -2 \\ 3g(0) + 7g(1) &= -2 \end{aligned}$$

on a :

$$3(f + g)(0) + 7(f + g)(1) = -4$$

donc $(f + g)$ n'appartient pas à E_2 .

2.7

1° f_3 est une partie non vide de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, stable par combinaisons linéaires (la somme de deux polynômes de degré 3 au plus, le produit d'un polynôme de degré 3 au plus par une constante, sont des polynômes de degré 3 au plus).

2° Il existe bien des façons de démontrer que $B = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ est une base. Comme on demande de calculer les coordonnées de f :

$$x \mapsto x^3 + 2x^2 - x + 1 \text{ dans } B, \text{ montrons que, d'une façon générale, tout élément } f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ s'écrit, de façon unique,}$$

$$f = \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3.$$

On aura alors montré que B est une base de \mathcal{F}_3 . En prenant ensuite $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$, $d = 1$ et en calculant $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, nous aurons les coordonnées de f dans la base B .

Pour tout x réel :

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x(x-1) + \alpha_3 x(x-1)(x-2) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2(x^2 - x) + \alpha_3(x^3 - 3x^2 + 2x) = 0 \end{aligned}$$

d'où le système d'inconnue $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$:

$$\begin{cases} \alpha_0 = d \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = c \\ \alpha_2 - 3\alpha_3 = b \\ \alpha_3 = a \end{cases}$$

Quel que soit (a, b, c, d) donné, on trouve $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ unique :

$$\begin{cases} \alpha_0 = d \\ \alpha_1 = a + b + c \\ \alpha_2 = 3a + b \\ \alpha_3 = a \end{cases}$$

donc (f_0, f_1, f_2, f_3) est une base de \mathcal{F}_3 .

Les coordonnées $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ de $f : x \mapsto x^3 + 2x^2 - x + 1$ dans cette base sont :

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = 1 + 2 - 1 = 2 \\ \alpha_2 = 3 \times 1 + 2 = 5 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

ce qui veut dire que, pour tout x réel :

$$x^3 + 2x^2 - x + 1 = 1 + 2x + 5x(x-1) + x(x-1)(x-2).$$

Remarque

On verra, au chapitre 3, d'autres façons de reconnaître qu'une famille de vecteurs est une base à l'aide de la dimension de l'espace vectoriel.

Pour le moment (voir rappels de cours) nous n'avons défini que la dimension n de \mathbb{R}^n . Nous définirons, au chapitre 3, ce qu'on appelle dimension d'un espace vectoriel quelconque possédant au moins une base.

2.8

Procédons comme à l'exercice précédent.

Soit (x, y, z, t) un vecteur quelconque de \mathbb{R}^4 :

$$(x, y, z, t) = \alpha(1, 0, 0, 0) + \beta(-5, 1, 0, 0) + \gamma(0, -3, 1, 0) + \delta(0, 0, -1, 1)$$

$$\begin{cases} \alpha - 5\beta = x \\ \beta - 3\gamma = y \\ \gamma - \delta = z \\ \delta = t \end{cases}$$

Quel que soit le quadruplet donné (x, y, z, t) , on trouve $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ unique défini par :

$$\begin{cases} \alpha = x + 5\beta = x + 5(y + 3z + t) = x + 5y + 15z + 5t \\ \beta = y + 3\gamma = y + 3(z + t) = y + 3z + t \\ \gamma = z + t \\ \delta = t \end{cases}$$

Donc $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ est une base de \mathbb{R}^4 .

les coordonnées du vecteur $\vec{v} = (1, 1, 1, 1)$ dans cette base sont :

$$\begin{cases} \alpha = 1 + 5 + 15 + 5 = 26 \\ \beta = 1 + 3 + 1 = 5 \\ \gamma = 1 + 1 = 2 \\ \delta = 1 \end{cases}$$

2.9

1° S est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ car :

- $S \subset \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et $S \neq \emptyset$ (S contient la suite nulle).
- S est stable par combinaisons linéaires car, quels que soient n de \mathbb{N} et λ de \mathbb{R} , si

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{5}{6}u_{n+1} - \frac{1}{6}u_n \\ v_{n+2} &= \frac{5}{6}v_{n+1} - \frac{1}{6}v_n \end{aligned}$$

alors :

$$u_{n+2} + \lambda v_{n+2} = \frac{5}{6}(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) - \frac{1}{6}(u_n + \lambda v_n)$$

$$\lambda u_{n+2} = \frac{5}{6}(\lambda u_{n+1}) - \frac{1}{6}(\lambda u_n)$$

les suites $(u_n + v_n)$ et (λu_n) appartiennent à S.

2° Une suite géométrique non nulle (x^n) appartient à S si et seulement si :

$$\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}) & x^{n+2} = \frac{5}{6}x^{n+1} - \frac{1}{6}x^n \\ x \neq 0 \end{cases}$$

La raison x de cette suite est racine de :

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{5}{6}x - \frac{1}{6} \\ 6x^2 - 5x + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Ces racines sont $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{3}$. Les deux suites géométriques cherchées v et w sont définies sur \mathbb{N} par :

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{et} \quad w_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Pour montrer que (v, w) est une base de S, montrons que tout élément u de S s'écrit, de façon unique, $u = \lambda v + \mu w$ ce qui signifie :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = \lambda \left(\frac{1}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

S'il en est ainsi, nécessairement :

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu \\ u_1 = \lambda \left(\frac{1}{2}\right) + \mu \left(\frac{1}{3}\right). \end{cases}$$

Connaissant u_0, u_1 , le couple (λ, μ) est unique, on trouve :

$$\begin{cases} \lambda = -2u_0 + 6u_1 \\ \mu = 3u_0 - 6u_1 \end{cases}$$

Réciproquement la suite u et la suite :

$$n \mapsto (-2u_0 + 6u_1) \left(\frac{1}{2}\right)^n + (3u_0 - 6u_1) \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

définie sur \mathbb{N} , commencent par les mêmes termes u_0 et u_1 et vérifient toutes deux la relation de récurrence de l'énoncé dont les autres termes sont égaux deux à deux. Les deux suites sont égales.

d'où le système d'inconnue $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$:

$$\begin{cases} \alpha_0 = d \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = c \\ \alpha_2 - 3\alpha_3 = b \\ \alpha_3 = a \end{cases}$$

Quel que soit (a, b, c, d) donné, on trouve $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ unique :

$$\begin{cases} \alpha_0 = d \\ \alpha_1 = a + b + c \\ \alpha_2 = 3a + b \\ \alpha_3 = a \end{cases}$$

donc (f_0, f_1, f_2, f_3) est une base de \mathcal{F}_3 .

Les coordonnées $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ de $f : x \mapsto x^3 + 2x^2 - x + 1$ dans cette base sont :

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = 1 + 2 - 1 = 2 \\ \alpha_2 = 3 \times 1 + 2 = 5 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

ce qui veut dire que, pour tout x réel :

$$x^3 + 2x^2 - x + 1 = 1 + 2x + 5x(x-1) + x(x-1)(x-2).$$

Remarque

On verra, au chapitre 3, d'autres façons de reconnaître qu'une famille de vecteurs est une base à l'aide de la *dimension* de l'espace vectoriel.

Pour le moment (voir rappels de cours) nous n'avons défini que la dimension n de \mathbb{R}^n . Nous définissons, au chapitre 3, ce qu'on appelle dimension d'un espace vectoriel quelconque possédant au moins une base.

2.8

Procédons comme à l'exercice précédent.

Soit (x, y, z, t) un vecteur quelconque de \mathbb{R}^4 :

$$(x, y, z, t) = \alpha(1, 0, 0, 0) + \beta(-5, 1, 0, 0) + \gamma(0, -3, 1, 0) + \delta(0, 0, -1, 1)$$

$$\begin{cases} \alpha - 5\beta = x \\ \beta - 3\gamma = y \\ \gamma - \delta = z \\ \delta = t \end{cases}$$

Quel que soit le quadruplet donné (x, y, z, t) , on trouve $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ unique défini par :

$$\begin{cases} \alpha = x + 5\beta = x + 5(\gamma + 3z + t) = x + 5\gamma + 15z + 5t \\ \beta = y + 3\gamma = y + 3(z + t) = y + 3z + t \\ \gamma = z + t \\ \delta = t \end{cases}$$

Donc $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ est une base de \mathbb{R}^4 .

les coordonnées du vecteur $\vec{v} = (1, 1, 1, 1)$ dans cette base sont :

$$\begin{cases} \alpha = 1 + 5 + 15 + 5 = 26 \\ \beta = 1 + 3 + 1 = 5 \\ \gamma = 1 + 1 = 2 \\ \delta = 1 \end{cases}$$

2.9

1° S est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ car :

- $S \subset \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et $S \neq \emptyset$ (S contient la suite nulle).
- S est stable par combinaisons linéaires car, quels que soient n de \mathbb{N} et λ de \mathbb{R} , si

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{5}{6}u_{n+1} - \frac{1}{6}u_n \\ v_{n+2} &= \frac{5}{6}v_{n+1} - \frac{1}{6}v_n \end{aligned}$$

alors :

$$v_{n+2} + u_{n+2} = \frac{5}{6}(u_{n+1} + v_{n+1}) - \frac{1}{6}(u_n + v_n)$$

$$\lambda u_{n+2} = \frac{5}{6}(\lambda u_{n+1}) - \frac{1}{6}(\lambda u_n)$$

les suites $(u_n + v_n)$ et (λu_n) appartiennent à S .

2° Une suite géométrique non nulle (x^n) appartient à S si et seulement si :

$$\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}) \quad x^{n+2} = \frac{5}{6}x^{n+1} - \frac{1}{6}x^n \\ x \neq 0 \end{cases}$$

La raison x de cette suite est racine de :

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{5}{6}x - \frac{1}{6} \\ 6x^2 - 5x + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Ces racines sont $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{3}$. Les deux suites géométriques cherchées v et w sont définies sur \mathbb{N} par :

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{et} \quad w_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Pour montrer que (v, w) est une base de S , montrons que *tout* élément u de S s'écrit, de façon unique, $u = \lambda v + \mu w$ ce qui signifie :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = \lambda \left(\frac{1}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

S'il en est ainsi, nécessairement :

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu \\ u_1 = \lambda \left(\frac{1}{2}\right) + \mu \left(\frac{1}{3}\right). \end{cases}$$

Connaissant u_0, u_1 , le couple (λ, μ) est unique, on trouve :

$$\begin{cases} \lambda = -2u_0 + 6u_1 \\ \mu = 3u_0 - 6u_1 \end{cases}$$

Réciproquement la suite u et la suite :

$$n \mapsto (-2u_0 + 6u_1) \left(\frac{1}{2}\right)^n + (3u_0 - 6u_1) \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

définie sur \mathbb{N} , commencent par les mêmes termes u_0 et u_1 , et vérifient toutes deux la relation de récurrence de l'énoncé dont les autres termes sont égaux deux à deux. Les deux suites sont égales.

Si $u_0 = u_1 = 1$, les coordonnées de la suite u dans la base (v, w) sont :

$$\begin{cases} \lambda = -2 + 6 = 4 \\ \mu = 3 - 6 = -3 \end{cases}$$

$$3^\circ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \vec{0}.$$

2.10 Nous appellerons A, A', A'' les matrices successives de la famille de vecteurs et

$$\begin{matrix} L_1, & L_2, & L_3 \\ L'_1, & L'_2, & L'_3 \\ L''_1, & L''_2, & L''_3 \end{matrix}$$

les lignes respectivement de A, A', A'' .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 17 & 3 \\ -4 & -3 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

Faisons l'échange $L_1 \leftrightarrow L_3$ (pour éviter des fractions) :

$$A' = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -7 & -3 \\ 2 & 5 & 17 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Faisons les substitutions $L'_1 \mapsto L'_1 + 3L'_3, L'_2 \mapsto L'_2 - 3L'_3$:

$$A'' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 11 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Faisons la substitution $L''_1 \mapsto L''_1 + 11L''_2$:

$$\begin{pmatrix} -12 & -8 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Sous cette forme simple de la matrice, on a $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 + \lambda_4 \vec{v}_4 = \vec{0}$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} -12\lambda_1 - 8\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 6\lambda_3 + \lambda_4 = 0. \end{cases}$$

En prenant $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -3$, on trouve $\lambda_3 = 1$ et $\lambda_4 = -2$. La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ est liée, une relation linéaire non triviale étant :

$$2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 + \vec{v}_3 - 2\vec{v}_4 = \vec{0}.$$

2.11

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Faisons la substitution $L_4 \mapsto L_4 + L_3$:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Faisons la substitution $L'_3 \mapsto L'_3 + L'_4$:

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Faisons la substitution $L''_2 \mapsto L''_2 + L''_3$:

$$A''' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Faisons la substitution $L'''_1 \mapsto L'''_1 + L'''_2$:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice est du type (II) [cf. rappels de cours]. Elle représente donc une base de \mathbb{R}^5 .

2.12

Faisons les substitutions $L_1 \mapsto L_1 - mL_3$ et $L_2 \mapsto L_2 - (m-1)L_3$:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 - m(2m - 1) & 0 & 0 \\ -6m - (m - 1)(2m - 1) & 0 & -2m^2 + m + 1 \\ 2m - 1 & 1 & -2m^2 - 3m - 1 \end{pmatrix}$$

Les racines de $-2m^2 + m + 1 = 0$ sont 1 et $-\frac{1}{2}$.

• Si $m \neq 1$ et $m \neq -\frac{1}{2}$, on a $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} (-2m^2 + m + 1)\lambda_1 = 0 \\ (-2m^2 - 3m - 1)\lambda_1 = 0 \\ (2m - 1)\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Les deux vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 sont linéairement indépendants.

• Si $m = 1$,

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -6\lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Les deux vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 sont encore linéairement indépendants.

• Si $m = -\frac{1}{2}$,

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

La famille (\vec{v}_1, \vec{v}_2) est liée, la relation étant : $\vec{v}_1 = -2\vec{v}_2$.

2.13

$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & m \\ 3 & 9 & -2m \end{pmatrix}$ est la matrice canonique de la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

Pour simplifier la discussion, échangeons la 1^{re} et 3^e colonne. La matrice canonique de la famille $(\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1)$ est :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ m & -2 & 1 \\ -2m & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Faisons les substitutions $L_1' \mapsto L_1' + \frac{1}{3}L_3'$ et $L_2' \mapsto L_2' - \frac{1}{3}L_3'$:

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{3}m & 8 & 0 \\ \frac{5}{3}m & -5 & 0 \\ -2m & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Faisons la substitution $L_1'' \mapsto L_1'' + \frac{8}{5}L_2''$:

$$A''' = \begin{pmatrix} 1 + 2m & 0 & 0 \\ \frac{5}{3}m & -5 & 0 \\ -2m & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

• Si $m \neq -\frac{1}{2}$, A''' est du type (II) [cf. rappels de cours]. La famille $(\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1)$ et, par conséquent, la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

• Si $m = -\frac{1}{2}$, la matrice de $(\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1)$ dans la nouvelle base est :

$$A''' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{6} & -5 & 0 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

On a $\lambda_3 \vec{v}_3 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_1 \vec{v}_1 = \vec{0}$ si, et seulement si

$$\begin{cases} \lambda_3 \left(-\frac{5}{6}\right) - \lambda_2(-5) = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_2 \times 9 + \lambda_1 \times 3 = 0. \end{cases}$$

En prenant $\lambda_3 = 6$ et $\lambda_2 = -1$, on trouve $\lambda_1 = 1$ et :

$$6\vec{v}_3 - \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = \vec{0}.$$

2.14

Faisons les substitutions $L_1 \mapsto L_1 - L_3$ et $L_2 \mapsto L_2 + L_3$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & -2 & 0 \\ 8 & 6 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Faisons la substitution $L_1' \mapsto L_1' + L_2'$:

$$A'' = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est une matrice du type (III) (cf. rappels de cours). La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5)$ est donc une famille génératrice de \mathbb{R}^5 .

Plus précisément :

$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est du type (II) donc $(\vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Il en résulte que \vec{v}_1 et \vec{v}_2 sont des combinaisons linéaires de $\vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5$:

$$(6, 8, 5) = \alpha(2, 2, 1) + \beta(0, 2, 1) + \gamma(0, 0, 1)$$

si, et seulement si,

$$\begin{cases} 2\alpha = 6 \\ 2\alpha + 2\beta = 8 \\ \alpha + \beta + \gamma = 5 \end{cases}$$

on trouve $\alpha = 3, \beta = 1, \gamma = 1$ donc $\vec{v}_1 = 3\vec{v}_3 + \vec{v}_4 + \vec{v}_5$.

On a $(2, 6, 2) = \alpha(2, 2, 1) + \beta(0, 2, 1) + \gamma(0, 0, 1)$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} 2\alpha = 2 \\ 2\alpha + 2\beta = 6 \\ \alpha + \beta + \gamma = 2 \end{cases}$$

on trouve : $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = -1$ donc $\vec{v}_2 = \vec{v}_3 + 2\vec{v}_4 - \vec{v}_5$.

3 | Applications linéaires

□ Définitions. Exemples. Propriétés

Définitions

Soit \mathcal{V} et \mathcal{W} des espaces vectoriels (sur \mathbb{R}). On appelle **application linéaire** de \mathcal{V} dans \mathcal{W} (ou vers \mathcal{W}) toute application φ de \mathcal{V} dans \mathcal{W} telle que :

$$\begin{aligned} (\forall \vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}^2 & \quad \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}) \\ (\forall \lambda \in \mathbb{R})(\forall \vec{v} \in \mathcal{V}) & \quad \varphi(\lambda \vec{v}) = \lambda \varphi(\vec{v}). \end{aligned}$$

Ces deux propriétés sont équivalentes à :

$$(\forall \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 (\forall \vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}^2 \quad \varphi(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda \varphi(\vec{u}) + \mu \varphi(\vec{v}).$$

Une application linéaire de \mathcal{V} dans \mathcal{V} est appelée **endomorphisme** de \mathcal{V} .

Exemples

- Si k est un réel non nul, l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} & \longrightarrow \mathcal{V} \\ \vec{v} & \longmapsto k\vec{v} \end{aligned}$$

est une application linéaire appelée **homothétie vectorielle** de rapport k .

- Une application linéaire d'un \mathbb{R} -espace vectoriel dans l'espace vectoriel \mathbb{R} est appelée **forme linéaire**.

Image d'une application linéaire

L'image de \mathcal{V} par une application linéaire φ de \mathcal{V} dans \mathcal{W} est un sous-espace vectoriel de \mathcal{W} appelé **image** de φ et noté $\text{Im } \varphi$.

Noyau d'une application linéaire

L'ensemble des vecteurs de \mathcal{V} ayant pour image le vecteur nul de \mathcal{W} est un sous-espace vectoriel de \mathcal{V} appelé **noyau** de l'application linéaire φ et noté $\text{Ker } \varphi$.

Une application linéaire φ est injective si, et seulement si, $\text{Ker } \varphi = \{\vec{0}\}$.

Image de familles de vecteurs

- L'image de toute famille liée de \mathcal{V} est une famille liée de \mathcal{W} , la relation linéaire étant la même pour les deux familles.
- L'image de toute famille génératrice de \mathcal{V} est une famille génératrice de $\text{Im } \varphi$.
- L'image de toute famille libre de \mathcal{V} est une famille libre de \mathcal{W} si, et seulement si, φ est injective.
- Si φ est une application linéaire injective, l'image de toute base de \mathcal{V} (quand il y en a) est une base de $\text{Im } \varphi$.

Réciproquement, s'il existe une base de \mathcal{V} qui a pour image une base de $\text{Im } \varphi$, alors φ est injective.

- Si φ est une application linéaire bijective, l'image de toute base de \mathcal{V} (quand il y en a) est une base de \mathcal{W} .

Réciproquement, s'il existe une base de \mathcal{V} qui a pour image une base de \mathcal{W} , alors φ est bijective.

□ Isomorphisme d'espaces vectoriels

Théorème et définitions

L'application réciproque d'une application linéaire bijective de \mathcal{V} sur \mathcal{W} est une application linéaire bijective de \mathcal{W} sur \mathcal{V} .

Une application linéaire bijective de \mathcal{V} sur \mathcal{W} est appelée un **isomorphisme** de \mathcal{V} sur \mathcal{W} . On dit, dans ce cas, que \mathcal{V} et \mathcal{W} sont isomorphes.

Lorsque $\mathcal{V} = \mathcal{W}$, un isomorphisme de \mathcal{V} sur lui-même est appelé un **automorphisme** de \mathcal{V} .

Théorème fondamental

Tout espace vectoriel ayant une base de n vecteurs est isomorphe à \mathbb{R}^n .

Conséquences

Soit \mathcal{V} un espace vectoriel ayant une base de n vecteurs.

1. Toute famille libre de \mathcal{V} possède au plus n vecteurs.
2. Toute famille libre de n vecteurs de \mathcal{V} est une base de \mathcal{V} .
3. Toute famille libre de p vecteurs ($p < n$) de \mathcal{V} peut être complétée en une base de \mathcal{V} .
4. Toute famille génératrice de \mathcal{V} possède au moins n vecteurs.
5. Toute famille génératrice de n vecteurs de \mathcal{V} est une base de \mathcal{V} .
6. De toute famille génératrice de p vecteurs ($p > n$) de \mathcal{V} , on peut extraire une base de \mathcal{V} .
7. Toute base de \mathcal{V} possède exactement n vecteurs. L'entier naturel n ($n \in \mathbb{N}^*$) est appelé la **dimension** de \mathcal{V} et se note $\dim \mathcal{V}$.

Définitions

On dit que la dimension de l'espace vectoriel $\{\vec{0}\}$ est nulle.

Tout espace vectoriel de dimension 1 est appelé **droite vectorielle**.

Tout espace vectoriel de dimension 2 est appelé **plan vectoriel**.

Théorème

Pour tout endomorphisme φ d'un espace vectoriel de dimension finie, les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) φ est injectif
- (2) φ est surjectif
- (3) φ est bijectif.

□ **Détermination d'une application linéaire**

- Pour toute base $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ de \mathcal{Q} et toute famille $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$ de \mathcal{W} , il existe une application linéaire et une seule φ de \mathcal{Q} dans \mathcal{W} telle que :

$$\varphi(\vec{a}_1) = \vec{b}_1, \quad \varphi(\vec{a}_2) = \vec{b}_2, \quad \dots, \quad \varphi(\vec{a}_n) = \vec{b}_n.$$
- Si, de plus, \mathcal{W} possède une base $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$, on peut représenter la famille $(\varphi(\vec{a}_1), \varphi(\vec{a}_2), \dots, \varphi(\vec{a}_n))$ par une matrice dans la base (b_1, b_2, \dots, b_n) .

□ **Composition des applications linéaires**

- La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.
- L'ensemble des automorphismes de \mathcal{Q} , muni de la composition des applications, est un groupe appelé le **groupe linéaire** de \mathcal{Q} et noté : $(GL(\mathcal{Q}), \circ)$.
- L'ensemble des homothéties vectorielles de \mathcal{Q} , muni de la composition des applications, est un sous-groupe commutatif du groupe linéaire de \mathcal{Q} , isomorphe au groupe (\mathbb{R}^*, \times) .

□ **Sous-espaces vectoriels supplémentaires**

Théorème et définition

Soit \mathcal{Q}' et \mathcal{Q}'' deux sous-espaces vectoriels de \mathcal{Q} . Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Q}' \cap \mathcal{Q}'' = \{\vec{0}\} \\ \text{tout vecteur } \vec{b} \text{ de } \mathcal{Q} \text{ s'écrit d'au moins une façon :} \\ \vec{b} = \vec{b}' + \vec{b}'' \text{ avec } \vec{b}' \in \mathcal{Q}' \text{ et } \vec{b}'' \in \mathcal{Q}'' \end{array} \right.$
- (2) Tout vecteur \vec{b} de \mathcal{Q} s'écrit d'une façon unique :
- $$\vec{b} = \vec{b}' + \vec{b}'' \text{ avec } \vec{b}' \in \mathcal{Q}' \text{ et } \vec{b}'' \in \mathcal{Q}''.$$

Les sous-espaces vectoriels \mathcal{Q}' et \mathcal{Q}'' sont dits **supplémentaires** si, et seulement si, l'une ou l'autre des propositions (1) ou (2) est vraie. On écrit, dans ce cas, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}' \oplus \mathcal{Q}''$.

Théorème

Soit \mathcal{Q} un espace vectoriel de dimension n .

Si \mathcal{Q}' et \mathcal{Q}'' sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de \mathcal{Q} , on a :

$$\dim \mathcal{Q}' + \dim \mathcal{Q}'' = \dim \mathcal{Q}.$$

Si \mathcal{Q}' et \mathcal{Q}'' sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires propres (autres que \mathcal{Q} ou $\{\vec{0}\}$), on obtient une base de \mathcal{Q} en réunissant une base de \mathcal{Q}' et une base de \mathcal{Q}'' .

Si \mathcal{Q}' est un sous-espace vectoriel de \mathcal{Q} , de dimension p , on peut trouver un sous-espace vectoriel supplémentaire de \mathcal{Q}' , de dimension $n - p$.

Théorème

Pour toute application linéaire φ d'un espace vectoriel \mathcal{Q} de dimension finie dans un espace vectoriel, on a :

$$\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim \mathcal{Q}.$$

□ **Projection vectorielle**

Définition

Soit \mathcal{Q}' et \mathcal{Q}'' deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de \mathcal{Q} . Tout vecteur \vec{b} de \mathcal{Q} s'écrit d'une façon unique $\vec{b} = \vec{b}' + \vec{b}''$ avec $\vec{b}' \in \mathcal{Q}'$ et $\vec{b}'' \in \mathcal{Q}''$.

On appelle **projection** (ou **projecteur**) de \mathcal{Q} sur \mathcal{Q}' de direction \mathcal{Q}'' (ou parallèlement à \mathcal{Q}'') l'application :

$$\begin{array}{ccc} \varpi : & \mathcal{Q} & \longrightarrow \mathcal{Q}' \\ & \vec{b} = \vec{b}' + \vec{b}'' & \longmapsto \vec{b}' \end{array}$$

Propriétés

- ϖ est un endomorphisme de \mathcal{Q} tel que $\varpi^2 = \varpi$.
- $\text{Ker } \varpi = \mathcal{Q}''$.
- $\text{Im } \varpi = \mathcal{Q}'$.
- L'ensemble des vecteurs invariants par ϖ est \mathcal{Q}' .

Réciproque

Tout endomorphisme ϖ de \mathcal{Q} tel que $\varpi^2 = \varpi$ est la projection de \mathcal{Q} sur $\text{Im } \varpi$, de direction $\text{Ker } \varpi$.

□ **Symétrie vectorielle**

Définition

Soit \mathcal{Q}' et \mathcal{Q}'' deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de \mathcal{Q} . Tout vecteur \vec{b} de \mathcal{Q} s'écrit d'une façon unique $\vec{b} = \vec{b}' + \vec{b}''$ avec $\vec{b}' \in \mathcal{Q}'$ et $\vec{b}'' \in \mathcal{Q}''$.

On appelle **symétrie vectorielle** par rapport à \mathcal{Q}' de direction \mathcal{Q}'' (ou parallèlement à \mathcal{Q}'') l'application

$$\begin{array}{ccc} \sigma : & \mathcal{Q} & \longrightarrow \mathcal{Q} \\ & \vec{b} = \vec{b}' + \vec{b}'' & \longmapsto \vec{b}' - \vec{b}'' \end{array}$$

Propriétés

- σ est l'endomorphisme de \mathcal{Q} défini par $\sigma(\vec{b}) = 2\varpi(\vec{b}) - \vec{b}$.
- ϖ étant la projection de \mathcal{Q} sur \mathcal{Q}' de direction \mathcal{Q}'' .

- σ est un automorphisme involutif de \mathcal{V} ($\sigma^2 = \text{id}_{\mathcal{V}}$), ou encore σ est bijectif et $\sigma = \sigma^{-1}$.
- L'ensemble des vecteurs invariants par σ est \mathcal{V}' .
- L'ensemble des vecteurs \vec{v} tels que $\sigma(\vec{v}) = -\vec{v}$ est \mathcal{V}'' .

Réciproque

Tout automorphisme involutif σ de \mathcal{V} est la symétrie par rapport à \mathcal{V}' de direction \mathcal{V}'' , \mathcal{V}' étant l'ensemble des vecteurs invariants par σ , \mathcal{V}'' étant l'ensemble des vecteurs \vec{v} de \mathcal{V} tels que $\sigma(\vec{v}) = -\vec{v}$.

Remarque

Lorsque \mathcal{V}' et \mathcal{V}'' sont orthogonaux (c'est-à-dire tout vecteur de \mathcal{V}' est orthogonal à tout vecteur de \mathcal{V}''), on dit que σ et σ^{-1} sont respectivement une projection vectorielle orthogonale et une symétrie vectorielle orthogonale.

ÉNONCÉS DES EXERCICES ET PROBLÈMES

Dimension d'un espace vectoriel

3.1 Dans l'espace vectoriel \mathcal{P}_2 des polynômes du second degré au plus et du polynôme nul, soit les fonctions

$$\begin{aligned} f_1 : x &\mapsto x + 1 \\ f_2 : x &\mapsto x^2 + 1 \\ f_3 : x &\mapsto mx^2 + x + 2. \end{aligned}$$

- 1° Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de \mathcal{P}_2 si, et seulement si, $m \neq 1$. Quel est l'espace vectoriel engendré par (f_1, f_2, f_3) lorsque $m = 1$?
- 2° Si $m = 3$, calculer les coordonnées de $f : x \mapsto 2x^2 - x + 3$ dans la base (f_1, f_2, f_3) .

3.2 On donne un entier naturel $n \geq 2$. On appelle \mathcal{P}_n l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à n et du polynôme nul, E_1 le sous-ensemble de \mathcal{P}_n tel que tout polynôme de E_1 a pour racine 1, E_2 le sous-ensemble de \mathcal{P}_n tel que tout polynôme de E_2 a pour racine 2.

- 1° Montrer que \mathcal{P}_n est un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Quelle est sa dimension?
- 2° Montrer que la famille $(f_0, f_1, f_2, \dots, f_n)$ formée de :

$$\begin{aligned} f_0 : x &\mapsto 1 \\ f_1 : x &\mapsto x - 1 \\ f_2 : x &\mapsto x(x - 1) \\ &\dots \\ f_n : x &\mapsto x^{n-1}(x - 1) \end{aligned}$$

est une base de \mathcal{P}_n .

3° Montrer que $E_1, E_2, E_1 \cap E_2$ sont des sous-espaces vectoriels de \mathcal{P}_n et déterminer leurs dimensions.

3.3 Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on considère les fonctions

$$\begin{aligned} f_0 : x &\mapsto 1 \\ f_1 : x &\mapsto \sin 2x \\ f_2 : x &\mapsto \cos 2x. \end{aligned}$$

- 1° Montrer que la famille (f_0, f_1, f_2) est libre.
- 2° Montrer que l'ensemble des fonctions

$$f : x \mapsto a \cos^2 x + 2b \sin x \cos x + c \sin^2 x + d,$$

muni de l'addition des fonctions numériques et de la multiplication par un réel, est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension?

Sous-espaces vectoriels supplémentaires

3.4

Dans \mathbb{R}^3 , soit E l'ensemble des triplets de la forme $(a + 2b, a - b, a + b)$ et F l'ensemble des triplets de la forme $(0, 2c, 3c)$ où a, b, c sont des réels quelconques.

Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires. Donner une base de E , de F . En déduire une base de \mathbb{R}^3 .

3.5

Dans \mathbb{C} considéré comme espace vectoriel sur \mathbb{R} , soit E l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + ia$ et F l'ensemble des nombres complexes de la forme $b - ib$ où a et b sont des réels quelconques. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires. Donner une base de E , de F . En déduire une base de \mathbb{C} .

3.6

1° Soit φ un endomorphisme d'un espace vectoriel \mathcal{V} tel que $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \varphi^2$. Démontrer que :

$$\text{Ker } \varphi \cap \text{Im } \varphi = \{0\}.$$

2° On suppose toujours $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \varphi^2$ et \mathcal{V} de dimension finie. Démontrer que l'on a :

$$\text{Im } \varphi = \text{Im } \varphi^2$$

$$\text{Ker } \varphi \oplus \text{Im } \varphi = \mathcal{V}.$$

Applications linéaires

3.7 Soit \mathcal{P}_2 l'espace vectoriel des polynômes du second degré au plus et du polynôme nul. On considère l'application :

$$\varphi_{\alpha, \beta} : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$$

$$P \mapsto Q$$

où Q est défini sur \mathbb{R} par :

$$Q(x) = (x^2 + \alpha)P'(x) + (\beta x + 1)P(x),$$

P' et P'' étant les dérivées première et seconde de P et α et β étant des réels donnés.

1° Montrer que $\varphi_{\alpha, \beta}$ est une application linéaire.

2° On suppose f_2 rapporté à la base canonique (f_0, f_1, f_2) avec

$$f_0 : x \mapsto 1, \quad f_1 : x \mapsto x, \quad f_2 : x \mapsto x^2.$$

Déterminer, dans cette base, la matrice de $\varphi_{\alpha, \beta}$.

3° Déterminer le noyau de $\varphi_{\alpha, \beta}$ (on en donnera une base; discuter suivant les valeurs de α et β).

3.8 Un espace vectoriel \mathcal{V} de dimension 3 est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'endomorphisme φ de \mathcal{V} défini par

$$\varphi(\vec{i}) = \vec{i} + \vec{j}, \quad \varphi(\vec{j}) = \vec{i} + 2\vec{j}, \quad \varphi(\vec{k}) = \vec{i} - \vec{j}.$$

1° Déterminer le noyau $\text{Ker } \varphi$ et en donner une base.

Déterminer $\text{Im } \varphi$ et démontrer que (\vec{i}, \vec{j}) en est une base.

2° Soit φ_1 la restriction de φ à $\text{Im } \varphi$. Donner la matrice A de φ_1 dans la base (\vec{i}, \vec{j}) . Montrer que φ_1 est bijective et déterminer l'application réciproque φ_1^{-1} .

3° Déterminer l'unique endomorphisme ψ de \mathcal{V} ayant les propriétés suivantes : la restriction de ψ à $\text{Im } \varphi$ est φ_1^{-1} et le noyau de ψ est $\text{Ker } \varphi$.

(Exercice Bac. C. Limoges 1978.)

3.9 Soit φ l'endomorphisme de \mathcal{V} de matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathcal{V} :

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}.$$

Échanger les 1° et 3° lignes, puis transformer A par la méthode du pivot et déterminer $\text{Im } \varphi$ et $\text{Ker } \varphi$ (discuter suivant les valeurs du paramètre réel m).

Formes linéaires

3.10 Trouver une forme linéaire φ définie sur \mathbb{R}^3 telle que :

$$\varphi((1, 0, 0)) = 2, \quad \varphi((0, 1, 0)) = -1, \quad \varphi((0, 0, 1)) = 3.$$

Déterminer son noyau et son image.

*3.11 1° Montrer que l'ensemble des formes linéaires définies sur un plan vectoriel \bar{P} a une structure d'espace vectoriel.

2° Soit φ_1 et φ_2 deux formes linéaires définies sur \bar{P} et telles qu'il existe un vecteur non nul \vec{a} pour lequel :

$$\varphi_1(\vec{a}) = \varphi_2(\vec{a}) = \vec{0}.$$

Montrer que (φ_1, φ_2) est liée.

(On prendra une base (\vec{a}, \vec{b}) dans \bar{P} .)

Projections et symétries vectorielles

3.12 Soit \mathcal{V} un espace vectoriel de dimension 3, muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On

considère l'endomorphisme φ de \mathcal{V} défini par sa matrice :

$$M_{\mathcal{B}} = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1° Déterminer $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$.

2° Déterminer la matrice de φ et les éléments qui le caractérisent.

*3.13 Mêmes questions qu'à l'exercice précédent avec l'endomorphisme φ défini par

$$\varphi(\vec{i}) = -\vec{i}, \quad \varphi(\vec{j}) = 2\vec{i} + \vec{j}, \quad \varphi(\vec{k}) = -\vec{k}.$$

3.14 Soit \mathcal{V} un espace vectoriel de dimension 3, muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la droite vectorielle \bar{D} d'équations $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ et le plan vectoriel \bar{P} d'équation :

$$x + y + z = 0.$$

1° Montrer que \bar{D} et \bar{P} sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

2° La projection ϖ de \mathcal{V} sur \bar{D} parallèlement à \bar{P} associe à tout vecteur $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ de \mathcal{V} le vecteur $\varpi(\vec{v}) = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$. Calculer x', y', z' en fonction de x, y, z .

3° a) La projection ϖ' de \mathcal{V} sur \bar{P} parallèlement à \bar{D} associe à \vec{v} le vecteur $\varpi'(\vec{v}) = x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k}$. Calculer x'', y'', z'' en fonction de x, y, z .

b) Que peut-on dire de $\varpi' \circ \varpi$?

4° a) Définir analytiquement les systèmes σ et σ' par rapport à \bar{D} parallèlement à \bar{P} et par rapport à \bar{P} parallèlement à \bar{D} .

b) Que peut-on dire de $\sigma' \circ \sigma$?

*3.15 \bar{E} est un espace vectoriel réel euclidien de dimension 3, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de \bar{E} , F l'endomorphisme de \bar{E} tel que

$$F(\vec{i}) = \frac{1}{3}(\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}), \quad F(\vec{j}) = \frac{1}{3}(-2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}),$$

$$F(\vec{k}) = \frac{1}{3}(5\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}).$$

1° Démontrer que l'image de F est un plan vectoriel \bar{P} orthogonal au noyau de F .

2° Démontrer que le couple $\mathcal{B} = (\vec{i} + \vec{k}, \vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$ est une base orthogonale de \bar{P} , f désignant la restriction de F à \bar{P} , déterminer la matrice de f relative à la base \mathcal{B} et reconnaître $\frac{1}{2}f$.

3° Montrer que F peut être considéré comme composé de trois applications simples que l'on déterminera.

(Exercice Bac. C. Montpellier 1981.)

3.16 Soit φ l'endomorphisme de \mathbb{P}^3 de matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1° Déterminer $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$.
 2° En prenant pour nouvelle base de \mathbb{P}^3 une famille $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ avec \vec{I} et \vec{J} appartenant à $\text{Im } \varphi$ et \vec{K} appartenant à $\text{Ker } \varphi$, déterminer la matrice de φ .
 En déduire que $\varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^n = \varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi$ sont des composées d'applications simples.

Systèmes d'équations linéaires.

3.17 En utilisant la méthode du pivot, résoudre dans \mathbb{P}^4 :

$$\begin{cases} -2x - y + 4z = 2 \\ 2x + 3y + 3z + 2t = 14 \\ x + 2y + z + t = 7 \\ -x - z + t = -1. \end{cases}$$

3.18 En utilisant la méthode du pivot, résoudre dans \mathbb{P}^3 :

$$\begin{cases} a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \\ ax + by + cz = d \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

(a, b, c, d réels donnés; a, b, c distincts).

3.19 En utilisant la méthode du pivot, résoudre dans \mathbb{P}^3 :

$$\begin{cases} x + ay + a^2z + a^3 = 0 \\ x + by + b^2z + b^3 = 0 \\ x + cy + c^2z + c^3 = 0 \end{cases}$$

(a, b, c réels donnés distincts).

RÉSOLUTION DES EXERCICES ET PROBLÈMES

3.1

1° Étudions si la famille (f_1, f_2, f_3) est libre. Pour tout x réel :
 est équivalent à :

$$\lambda_1(x+1) + \lambda_2(x^2+1) + \lambda_3(mx^2+x+2) = 0$$

$$\begin{cases} (\lambda_2 + \lambda_3 m)x^2 + (\lambda_1 + \lambda_3)x + \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 m = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Cette égalité est vérifiée pour tout x réel si, et seulement si :

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 m = 0 \\ \lambda_3 = -\lambda_1 \\ \lambda_2 = \lambda_1 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \lambda_1(m-1) = 0 \\ \lambda_3 = -\lambda_1 \\ \lambda_2 = \lambda_1 \end{cases}$$

• Si $m \neq 1$, la seule solution est $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille (f_1, f_2, f_3) est donc libre. Le nombre de ses vecteurs est égal à la dimension de \mathcal{P}_2 qui est 3 (la base canonique de \mathcal{P}_2 est formée de $x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2$). Voir les rappels de cours du chapitre 2). Donc (f_1, f_2, f_3) est une base de \mathcal{P}_2 .

• Si $m = 1$, une solution est $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$ ce qui signifie que $f_1 + f_2 - f_3 = 0$

c'est-à-dire $f_3 = f_1 + f_2$ donc $\text{Vect}(f_1, f_2, f_3) = \text{Vect}(f_1, f_2)$ qui est de dimension 2 puisque (f_1, f_2) est libre car

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}) \lambda_1(x+1) + \lambda_2(x^2+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x + \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

3.2

1° \mathcal{P}_n est une partie non vide de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{P})$, stable par combinaisons linéaires donc $(\mathcal{P}_n, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{P}), +, \cdot)$. La base canonique de \mathcal{P}_n est formée de :

$$x \mapsto 1, x \mapsto x, \dots, x \mapsto x^n$$

donc $\dim \mathcal{P}_n = n + 1$.

2° La famille $(f_0, f_1, f_2, \dots, f_n)$ avec

$$f_0 : x \mapsto 1, f_1 : x \mapsto x-1, f_2 : x \mapsto x(x-1), \dots, f_n : x \mapsto x^{n-1}(x-1),$$

est libre car si

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \lambda_n x^{n-1}(x-1) + \lambda_{n-1} x^{n-2}(x-1) + \dots + \lambda_1(x-1) + \lambda_0 = 0,$$

le terme de plus haut degré est $\lambda_n x^n = 0$ donc $\lambda_n = 0$
 le terme de degré $n-1$ est alors $\lambda_{n-1} x^{n-1} = 0$ donc $\lambda_{n-1} = 0$
 le terme de degré $n-2$ est alors $\lambda_{n-2} x^{n-2} = 0$ donc $\lambda_{n-2} = 0$
 on en déduit ainsi, par récurrence, que si $\lambda_n = \dots = \lambda_p = 0$, alors $\lambda_{p-1} = 0$ donc

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} = \dots = \lambda_0 = 0.$$

Le nombre de vecteurs de la famille est $n+1 = \dim \mathcal{P}_n$, donc cette famille est une base de \mathcal{P}_n .

Remarque
 f_0, f_1, \dots, f_n sont de degrés deux à deux distincts. D'une façon générale, on démontre que toute famille de polynômes de degrés deux à deux distincts est une famille libre.

3.16 Soit φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1° Déterminer $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$.
 2° En prenant pour nouvelle base de \mathbb{R}^3 une famille $(\bar{I}, \bar{J}, \bar{K})$ avec \bar{I} et \bar{J} appartenant à $\text{Im } \varphi$ et \bar{K} appartenant à $\text{Ker } \varphi$, déterminer la matrice de φ .
 En déduire que $\varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^n = \varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi$ sont des compositions d'applications simples.

Systèmes d'équations linéaires.

3.17 En utilisant la méthode du pivot, résoudre dans \mathbb{R}^4 :

$$\begin{cases} -2x - y + 4t = 2 \\ 2x + 3y + 3z + 2t = 14 \\ x + 2y + z + t = 7 \\ -x - z + t = -1. \end{cases}$$

3.18 En utilisant la méthode du pivot, résoudre dans \mathbb{R}^3 :

$$\begin{cases} a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \\ ax + by + cz = d \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

(a, b, c, d réels donnés; a, b, c distincts).

3.19 En utilisant la méthode du pivot, résoudre dans \mathbb{R}^3 :

$$\begin{cases} x + ay + a^2z + a^3 = 0 \\ x + by + b^2z + b^3 = 0 \\ x + cy + c^2z + c^3 = 0 \end{cases}$$

(a, b, c réels donnés distincts).

RÉSOLUTION DES EXERCICES ET PROBLÈMES

3.1 1° Étudions si la famille (f_1, f_2, f_3) est libre. Pour tout x réel :

$$\lambda_1(x+1) + \lambda_2(x^2+1) + \lambda_3(mx^2+x+2) = 0$$

est équivalent à :

$$(\lambda_2 + \lambda_3 m)x^2 + (\lambda_1 + \lambda_3)x + \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0.$$

Cette égalité est vérifiée pour tout x réel si, et seulement si :

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 m = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 m = 0 \\ \lambda_3 = -\lambda_1 \\ \lambda_2 = \lambda_1 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \lambda_1(m-1) = 0 \\ \lambda_3 = -\lambda_1 \\ \lambda_2 = \lambda_1 \end{cases}$$

- Si $m \neq 1$, la seule solution est $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille (f_1, f_2, f_3) est donc libre. Le nombre de ses vecteurs est égal à la dimension de \mathcal{B}_2 qui est 3 (la base canonique de \mathcal{B}_2 est formée de $x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2$). Voir les rappels de cours du chapitre 2). Donc (f_1, f_2, f_3) est une base de \mathcal{B}_2 .
- Si $m = 1$, une solution est $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$ ce qui signifie que $f_1 + f_2 - f_3 = 0$

c'est-à-dire $f_3 = f_1 + f_2$ donc $\text{Vect}(f_1, f_2, f_3) = \text{Vect}(f_1, f_2)$ qui est de dimension 2 puisque (f_1, f_2) est libre car

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \lambda_1(x+1) + \lambda_2(x^2+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

3.2

1° \mathcal{B}_n est une partie non vide de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, stable par combinaisons linéaires donc $(\mathcal{B}_n, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$. La base canonique de \mathcal{B}_n est formée de :

$$x \mapsto 1, x \mapsto x, \dots, x \mapsto x^n$$

donc $\dim \mathcal{B}_n = n + 1$.

2° La famille $(f_0, f_1, f_2, \dots, f_n)$ avec

$$f_0 : x \mapsto 1, f_1 : x \mapsto x-1, f_2 : x \mapsto x(x-1), \dots, f_n : x \mapsto x^{n-1}(x-1),$$

est libre car si

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \lambda_n x^{n-1}(x-1) + \lambda_{n-1} x^{n-2}(x-1) + \dots + \lambda_1(x-1) + \lambda_0 = 0,$$

le terme de plus haut degré est $\lambda_n x^n = 0$ donc $\lambda_n = 0$
 le terme de degré $n-1$ est alors $\lambda_{n-1} x^{n-1} = 0$ donc $\lambda_{n-1} = 0$
 le terme de degré $n-2$ est alors $\lambda_{n-2} x^{n-2} = 0$ donc $\lambda_{n-2} = 0$
 on en déduit ainsi, par récurrence, que si $\lambda_n = \dots = \lambda_p = 0$, alors $\lambda_{p-1} = 0$ donc

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} = \dots = \lambda_0 = 0.$$

Le nombre de vecteurs de la famille est $n+1 = \dim \mathcal{B}_n$, donc cette famille est une base de \mathcal{B}_n .

Remarque

f_0, f_1, \dots, f_n sont de degrés deux à deux distincts. D'une façon générale, on démontre que toute famille de polynômes de degrés deux à deux distincts est une famille libre.

3° E_1 et E_2 sont des parties non vides de \mathcal{P}_n stables par combinaisons linéaires (la somme de deux polynômes ayant pour racine 1 (resp. 2) est un polynôme ayant pour racine 1 (resp. 2), le produit d'un polynôme ayant pour racine 1 (resp. 2) par une constante également) donc E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de \mathcal{P}_n .

L'intersection $E_1 \cap E_2$ de deux sous-espaces vectoriels de \mathcal{P}_n est un sous-espace vectoriel de \mathcal{P}_n (cf. rappels de cours du chapitre 2).

Tout élément de E_1 est de la forme :
 $f : x \mapsto (x-1)(a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0) = a_0(x+1) + \dots + a_{n-1}x^{n-1}(x-1)$
 donc $f = a_0f_1 + \dots + a_{n-1}f_n$ ce qui montre que la famille (f_1, f_2, \dots, f_n) est génératrice de E_1 . Cette famille est libre (car toute sous-famille de la famille libre (f_0, f_1, \dots, f_n) est libre) donc la famille (f_1, f_2, \dots, f_n) est une base de E_1 qui est de dimension n .

Vous verrez, de même, que (g_1, g_2, \dots, g_n) avec :

$$g_1 : x \mapsto x-2, g_2 : x \mapsto x(x-2), \dots, g_n : x \mapsto x^{n-1}(x-2),$$

est une base de E_2 qui est donc de dimension n .

Tout élément de $E_1 \cap E_2$ est de la forme :

$$f : x \mapsto (x-1)(a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0) = a_0(x-1)(x-2) + \dots + a_{n-2}x^{n-2}(x-1)(x-2).$$

La famille (h_2, h_3, \dots, h_n) avec

$$h_2 : x \mapsto (x-1)(x-2)$$

$$h_3 : x \mapsto x(x-1)(x-2)$$

$$\dots$$

$$h_n : x \mapsto x^{n-2}(x-1)(x-2),$$

est génératrice de $E_1 \cap E_2$. On vérifiera qu'elle est libre (raisonner comme à la 2° question), C'est donc une base de $E_1 \cap E_2$ qui est, par conséquent, de dimension $n-1$.

3.3

1° $f_0 : x \mapsto 1$
 $f_1 : x \mapsto \sin 2x$
 $f_2 : x \mapsto \cos 2x$

Si, pour tout x réel, $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ étant des scalaires donnés,
 $\lambda_0 + \lambda_1 \sin 2x + \lambda_2 \cos 2x = 0$,
 en particulier pour $x = 0 : \lambda_0 + \lambda_2 = 0$

pour $x = \frac{\pi}{4} : \lambda_0 + \lambda_1 = 0$
 pour $x = \frac{\pi}{2} : \lambda_0 - \lambda_2 = 0$

d'où $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. La famille (f_0, f_1, f_2) est libre.

2° Soit E l'ensemble des fonctions définies sur \mathbb{R}

$$f : x \mapsto a \cos^2 x + 2b \sin x \cos x + c \sin^2 x + d.$$

On peut écrire pour tout x réel :

$$f(x) = a \frac{1 + \cos 2x}{2} + b \sin 2x + c \frac{1 - \cos 2x}{2} + d$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{c}{2} + d + b \sin 2x + \frac{a-c}{2} \cos 2x$$

donc tout élément de E est combinaison linéaire de f_0, f_1, f_2 .
 Réciproquement soit une combinaison linéaire de f_0, f_1, f_2
 $g : x \mapsto \lambda_0 + \lambda_1 \sin 2x + \lambda_2 \cos 2x$.

Pour tout x réel, on a :

$$g(x) = \lambda_0 + 2\lambda_1 \sin x \cos x + \lambda_2(2 \cos^2 x - 1)$$

$$= 2\lambda_2 \cos^2 x + 2\lambda_1 \sin x \cos x + \lambda_0 - \lambda_2$$

qui est de la forme $a \cos^2 x + 2b \sin x \cos x + c \sin^2 x + d$ avec

$$a = 2\lambda_2, \quad b = \lambda_1, \quad c = 0, \quad d = \lambda_0 - \lambda_2.$$

Donc E est l'ensemble des combinaisons linéaires de f_0, f_1, f_2 . Cela signifie que E est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par (f_0, f_1, f_2) :

$$E = \text{Vect}(f_0, f_1, f_2).$$

On a vu que (f_0, f_1, f_2) est libre donc $\dim E = 3$.

Montrons que tout élément (x, y, z) de \mathbb{R}^3 s'écrit d'une façon unique :

$$(x, y, z) = (a + 2b, a - b + 2c, a + b + 3c)$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} x = a + 2b \\ y = a - b + 2c \\ z = a + b + 3c \end{cases} \iff \begin{cases} x = a + 2b \\ 3y - 2z = a - 5b \\ c = \frac{y}{2} - \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = \frac{x - 3y + 2z}{7} \\ a = x - \frac{2(x - 3y + 2z)}{7} \\ c = \frac{y}{2} - \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \end{cases}$$

on trouve la solution unique :

$$a = \frac{5x + 6y - 4z}{7}, \quad b = \frac{x - 3y + 2z}{7}, \quad c = \frac{-2x - y + 3z}{7}$$

donc $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
 • $(a + 2b, a - b, a + b) = a(1, 1, 1) + b(2, -1, 1)$
 ce qui montre que la famille $((1, 1, 1), (2, -1, 1))$ est génératrice de E . Elle est libre car

$$a(1, 1, 1) + b(2, -1, 1) = (0, 0, 0) \iff a = b = 0$$

(faire $x = y = z = 0$ dans le système précédent).

C'est donc une base de E .

• $(0, 2c, 3c) = c(0, 2, 3)$ ce qui montre que F est engendré par le vecteur $(0, 2, 3)$ qui constitue une base de F .

• On obtient une base de \mathbb{R}^3 en réunissant une base de E et une base de F .
 Donc une base de \mathbb{R}^3 est :

$$((1, 1, 1), (2, -1, 1), (0, 2, 3)).$$

On peut identifier \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 qui est un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension 2.

3.5

Montrons que tout nombre complexe $z = x + iy$ (x et y réels) s'écrit d'une façon unique :

$$\begin{aligned} x + iy &= a + ia + b - ib \\ &= a + b + i(a - b) \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} x = a + b \\ y = a - b \end{cases}$$

Le couple unique (a, b) est tel que :

$$\begin{cases} a = \frac{x+y}{2} \\ b = \frac{x-y}{2} \end{cases}$$

donc : $E \oplus F = \mathbb{C}$.

• On peut écrire $a + ia = a(1+i)$ donc E est engendré par $1+i$ qui constitue une base de E .

De même $b - ib = b(1-i)$ donc F est engendré par $1-i$ qui constitue une base de F .

Une base de \mathbb{C} est $(1+i, 1-i)$.

3.6

1° On suppose $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \varphi^2$. Soit \vec{v} un vecteur de $\text{Ker } \varphi \cap \text{Im } \varphi$. Puisque $\vec{v} \in \text{Ker } \varphi$, on a $\varphi(\vec{v}) = \vec{0}$.

Puisque $\vec{v} \in \text{Im } \varphi$, il existe \vec{u} de \mathcal{V} tel que $\varphi(\vec{u}) = \vec{v}$ d'où :

$$\begin{aligned} \varphi^2(\vec{u}) &= \varphi(\vec{v}) = \vec{0} \\ \vec{u} &\in \text{Ker } \varphi^2 \\ \vec{u} &\in \text{Ker } \varphi \\ \varphi(\vec{u}) &= \vec{0} \\ \vec{v} &= \vec{0} \end{aligned}$$

donc $\text{Ker } \varphi \cap \text{Im } \varphi = \{\vec{0}\}$.

2° On suppose $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \varphi^2$ et \mathcal{V} de dimension finie. On sait que :

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi &= \dim \mathcal{V} \\ \dim \text{Ker } \varphi^2 + \dim \text{Im } \varphi^2 &= \dim \mathcal{V} \end{aligned}$$

comme $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \varphi^2$, on en déduit : $\dim \text{Im } \varphi = \dim \text{Im } \varphi^2$. Mais $\text{Im } \varphi^2 \subset \text{Im } \varphi$ (si $\vec{v} \in \text{Im } \varphi^2$, il existe \vec{u} de \mathcal{V} tel que $\varphi^2(\vec{u}) = \vec{v}$ donc $\varphi(\varphi(\vec{u})) = \vec{v}$ donc $\vec{v} \in \text{Im } \varphi$). Il en résulte que :

$$\text{Im } \varphi = \text{Im } \varphi^2.$$

Pour montrer que $\text{Ker } \varphi \oplus \text{Im } \varphi = \mathcal{V}$, montrons que :

• $\text{Ker } \varphi \cap \text{Im } \varphi = \{\vec{0}\}$ (vu à la 1^{re} question).

• Tout vecteur \vec{v} de \mathcal{V} s'écrit d'au moins une façon :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}'' \text{ avec } \vec{v}' \in \text{Im } \varphi \text{ et } \vec{v}'' \in \text{Ker } \varphi.$$

En effet, $\varphi(\vec{v}) \in \text{Im } \varphi$ donc $\varphi(\vec{v}) \in \text{Im } \varphi^2$ puisque $\text{Im } \varphi = \text{Im } \varphi^2$. Donc il existe \vec{u} de \mathcal{V} tel que :

$$\begin{aligned} \varphi^2(\vec{u}) &= \varphi(\vec{v}) \\ \varphi(\vec{v}) - \varphi^2(\vec{u}) &= \vec{0} \\ \varphi(\vec{v} - \varphi(\vec{u})) &= \vec{0} \\ \vec{v} - \varphi(\vec{u}) &\in \text{Ker } \varphi. \end{aligned}$$

On peut écrire : $\vec{v} = \varphi(\vec{u}) + \vec{v} - \varphi(\vec{u})$.

On a $\varphi(\vec{u}) \in \text{Im } \varphi$ et $\vec{v} - \varphi(\vec{u}) \in \text{Ker } \varphi$.

3.7

1° Quels que soient P_1 et P_2 de \mathcal{P}_2 et λ réels :

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha, \beta}(P_1 + P_2)(x) &= (\lambda x^2 + \alpha \lambda P_1'(x) + \beta \lambda P_2'(x)) + (\beta x + 1) \lambda (P_1 + P_2)(x) \\ &= (\lambda x^2 + \alpha) P_1'(x) + (\beta x + 1) P_1'(x) + (\lambda x^2 + \alpha) P_2'(x) \\ &\quad + (\beta x + 1) P_2'(x) \\ &= \varphi_{\alpha, \beta}(P_1)(x) + \varphi_{\alpha, \beta}(P_2)(x) \end{aligned}$$

donc : $\varphi_{\alpha, \beta}(P_1 + P_2) = \varphi_{\alpha, \beta}(P_1) + \varphi_{\alpha, \beta}(P_2)$.

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha, \beta}(\lambda P_1)(x) &= (\lambda x^2 + \alpha) \lambda P_1'(x) + (\beta x + 1) \lambda P_1(x) \\ &= \lambda [(\lambda x^2 + \alpha) P_1'(x) + (\beta x + 1) P_1(x)] \\ &= \lambda \varphi_{\alpha, \beta}(P_1)(x) \end{aligned}$$

donc : $\varphi_{\alpha, \beta}(\lambda P_1) = \lambda \varphi_{\alpha, \beta}(P_1)$.

2° La matrice de $\varphi_{\alpha, \beta}$ est la matrice de la famille $(\varphi_{\alpha, \beta}(f_0), \varphi_{\alpha, \beta}(f_1), \varphi_{\alpha, \beta}(f_2))$ dans la base canonique.

$$f_0(x) = 1, f_0'(x) = f_0''(x) = 0$$

$$\text{donc } \varphi_{\alpha, \beta}(f_0)(x) = 0$$

$$f_1(x) = x, f_1'(x) = 1, f_1''(x) = 0$$

$$\text{donc } \varphi_{\alpha, \beta}(f_1)(x) = \beta x + 1$$

$$f_2(x) = x^2, f_2'(x) = 2x, f_2''(x) = 2$$

$$\text{donc } \varphi_{\alpha, \beta}(f_2)(x) = 2(\lambda x^2 + \alpha) + (\beta x + 1) 2x = 2(\lambda + \beta)x^2 + 2\alpha + 2\beta x + 2$$

La matrice de $\varphi_{\alpha, \beta}$ dans la base canonique (f_0, f_1, f_2) est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\alpha \\ 0 & \beta & 2 \\ 0 & 0 & 2(\lambda + \beta) \end{pmatrix}$$

3° Le noyau de $\varphi_{\alpha, \beta}$ est l'ensemble des polynômes

$$P : x \mapsto ax^2 + bx + c$$

tels que $\varphi_{\alpha, \beta}(P)$ est le polynôme nul. Les coordonnées de $\varphi_{\alpha, \beta}(P)$ dans la base canonique, sont :

$$\begin{cases} c' = 0 \times c + 1 \times b + 2\alpha a \\ b' = 0 \times c + \beta b + 2a \\ a' = 0 \times c + 0b + 2(\lambda + \beta)a \end{cases}$$

$P \in \text{Ker } \varphi_{\alpha, \beta}$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} b + 2\alpha a = 0 \\ \beta b + 2a = 0 \\ 2(\lambda + \beta)a = 0. \end{cases}$$

• Si $\beta \neq -1$, $a = 0$, $b = 0$ et c est arbitraire donc $P(x) = c$ et $\text{Ker } \varphi_{\alpha, \beta}$ est la droite vectorielle de vecteur directeur $f_0 : x \mapsto 1$.

• Si $\beta = -1$, le système est équivalent à :

$$\begin{cases} b + 2\alpha a = 0 \\ -b + 2a = 0 \end{cases}$$

Par addition, $2(1 + \alpha)a = 0$ donc :

— si $\alpha \neq -1$, $a = b = 0$ et c arbitraire donc $P(x) = c$ et $\text{Ker } \varphi_{\alpha, \beta}$ est encore la droite vectorielle de vecteur directeur f_0 ;

— si $\alpha = -1$, $b = 2a$ et c arbitraire donc

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^2 + 2ax + c \\ &= a(x^2 + 2x) + c. \end{aligned}$$

$\text{Ker } \varphi_{\alpha, \beta}$ est le plan vectoriel de \mathcal{P}_2 dont une base est formée de

$$f_0 : x \mapsto 1 \text{ et } g : x \mapsto x^2 + 2x$$

1° Quel que soit $\vec{b} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ de \mathcal{V} ,

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{b}) &= x\varphi(\vec{i}) + y\varphi(\vec{j}) + z\varphi(\vec{k}) \\ &= x(\vec{i} + \vec{j}) + y(\vec{i} + 2\vec{j}) + z(\vec{i} - \vec{j}) \\ &= (x + y + z)\vec{i} + (x + 2y - z)\vec{j}. \end{aligned}$$

Ker φ est l'ensemble des vecteurs $\vec{b}(x, y, z)$ tels que :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x \\ z = -\frac{1}{3}x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3t \\ y = -2t \\ z = -t \end{cases}$$

Ker φ est la droite vectorielle de vecteur directeur $3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$.
Im φ est l'ensemble décrit par :

$$\varphi(\vec{b}) = (x + y + z)\vec{i} + (x + 2y - z)\vec{j}$$

de la forme :

$$\varphi(\vec{b}) = \lambda\vec{i} + \mu\vec{j}$$

où λ et μ sont des réels qui peuvent être arbitraires quand $x + y + z$ et $x + 2y - z$ varient. Donc Im φ est le plan vectoriel de base (\vec{i}, \vec{j}) .

Remarque

On vérifie que : $\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = 1 + 2 = 3 = \dim \mathcal{V}$.

2° La matrice A de φ_1 dans la base (\vec{i}, \vec{j}) est la matrice de $(\varphi_1(\vec{i}), \varphi_1(\vec{j}))$ avec $\varphi_1(\vec{i}) = \vec{i} + \vec{j}$, $\varphi_1(\vec{j}) = \vec{i} + 2\vec{j}$ donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées (x', y') de l'image de $\vec{b}_1 = x\vec{i} + y\vec{j}$ sont :

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

on en déduit :

$$\begin{cases} x = 2x' - y' \\ y = -x' + y' \end{cases}$$

Quel que soit (x', y') donné, le couple (x, y) trouvé est unique donc φ_1 est bijective et φ_1^{-1} est définie analytiquement par le dernier système. La matrice de φ_1^{-1} dans la base (\vec{i}, \vec{j}) est :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque

On peut aussi montrer que φ_1 est bijective en calculant le déterminant de $(\varphi_1(\vec{i}), \varphi_1(\vec{j}))$ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1.$$

Ce déterminant est non nul donc $(\varphi_1(\vec{i}), \varphi_1(\vec{j}))$ est une famille libre. Le nombre des vecteurs est égal à la dimension 2 de Im φ . C'est donc une base de Im φ . Puisque l'image de la base (\vec{i}, \vec{j}) est une base, φ_1 est bijective (cf. rappels de cours).

3° Les colonnes de la matrice B sont formées des coordonnées de $\varphi_1^{-1}(\vec{i})$ et $\varphi_1^{-1}(\vec{j})$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{i}) &= \varphi_1^{-1}(\vec{i}) = 2\vec{i} - \vec{j} \\ \varphi(\vec{j}) &= \varphi_1^{-1}(\vec{j}) = -\vec{i} + \vec{j}. \end{aligned}$$

Un vecteur directeur de Ker $\varphi = \text{Ker } \psi$ est $3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ donc

$$\begin{aligned} \psi(3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}) &= 0 \\ 3\psi(\vec{i}) - 2\psi(\vec{j}) - \psi(\vec{k}) &= 0 \\ 3(2\vec{i} - \vec{j}) - 2(-\vec{i} + \vec{j}) - \psi(\vec{k}) &= \psi(\vec{k}) \end{aligned}$$

$$\psi(\vec{k}) = 8\vec{i} - 5\vec{j}.$$

La matrice de ψ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donc :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 \\ -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Analytiquement ψ est déterminée par :

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 8z \\ y' = -x + y - 5z \\ z' = 0. \end{cases}$$

Remarque

Nous avons déterminé ψ de 3 façons :

- par l'image de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;
- par sa matrice;
- par ses expressions analytiques.

Bien entendu, une seule des 3 façons suffit pour répondre à la question posée.

Échangeons L_1 et L_3 (comme nous le demande l'énoncé) :

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Faisons les substitutions $L_1' \mapsto L_1 - mL_3$, $L_2' \mapsto L_2 - L_3$:

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 - m^2 & 1 - m & 0 \\ 1 - m & m - 1 & 0 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Faisons la substitution $L_1'' \mapsto L_1'' + L_2''$:

$$A''' = \begin{pmatrix} 2 - m - m^2 & 0 & 0 \\ 1 - m & m - 1 & 0 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les racines de $-m^2 - m + 2 = 0$ sont 1 et -2.

- Si $m \neq 1$ et $m \neq -2$, A''' est la matrice d'une base. Puisque $(\varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{j}), \varphi(\vec{k}))$ est une base, φ est bijective donc Im $\varphi = \mathcal{V}$ et Ker $\varphi = \{0\}$.

• Si $m = 1$,

matrice de $(\varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{j}), \varphi(\vec{k}))$ dans la nouvelle base,

$$A^m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\varphi(\vec{i}) = \varphi(\vec{j}) = \varphi(\vec{k}) = \vec{0}$. Il en résulte que :

$$\text{Im } \varphi = \text{Vect}(\varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{j}), \varphi(\vec{k})) = \text{Vect}(\varphi(\vec{i})).$$

Im φ est la droite vectorielle de vecteur directeur $\varphi(\vec{i})$. La matrice initiale

A s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donc les expressions analytiques de φ sont :

$$\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = x + y + z \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

Ce qui montre que Im φ est la droite vectorielle d'équations : $x' = y' = z'$,
Ker φ est le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$.

• Si $m = -2$,

matrice de $(\varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{j}), \varphi(\vec{k}))$ dans la nouvelle base,

$$A^m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $\varphi(\vec{i}) + \varphi(\vec{j}) + \varphi(\vec{k}) = \vec{0}$ donc

$$\text{Im } \varphi = \text{Vect}(\varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{j}), \varphi(\vec{k})) = \text{Vect}(\varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{j}))$$

qui est un plan ayant pour base $(\varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{j}))$.

La formule de la dimension :

$$\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim \mathcal{V}$$

permet de trouver : $\dim \text{Ker } \varphi = 3 - 2 = 1$ donc Ker φ est une droite vectorielle.

Puisque $\varphi(\vec{i}) + \varphi(\vec{j}) + \varphi(\vec{k}) = \vec{0}$, on déduit $\varphi(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = \vec{0}$, donc

Ker φ a pour vecteur directeur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

On peut trouver des équations cartésiennes de Im φ et Ker φ : la matrice initiale A s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

les expressions analytiques de φ sont :

$$\begin{cases} x' = -2x + y + z \\ y' = x - 2y + z \\ z' = x + y - 2z \end{cases}$$

Une équation cartésienne de Im φ est $x' + y' + z' = 0$. Le vecteur $\vec{v}(x, y, z)$ appartient au noyau si, et seulement si :

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

On trouve $x = y = z$.

3.10

Tout élément (x, y, z) de \mathbb{R}^3 s'écrit :

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

d'où :

$$\varphi((x, y, z)) = x\varphi((1, 0, 0)) + y\varphi((0, 1, 0)) + z\varphi((0, 0, 1)) \\ = 2x - y + 3z.$$

Ker φ est l'ensemble des triplets tels que $2x - y + 3z = 0$ c'est-à-dire, par exemple, $y = 2x + 3z$. Donc Ker φ est l'ensemble des triplets :

$$(x, 2x + 3z, z) = x(1, 2, 0) + z(0, 3, 1).$$

Ker φ est le plan vectoriel dont une base est $((1, 2, 0), (0, 3, 1))$ car cette famille est libre et génératrice de Ker φ .

Im φ est l'ensemble des réels $2x - y + 3z$ c'est-à-dire \mathbb{R} .

Remarque

On vérifie qu'on a : $\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

3.11

1° On définit l'addition par :

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(\vec{v}) = \varphi_1(\vec{v}) + \varphi_2(\vec{v})$$

et la multiplication externe par un réel λ par :

$$(\lambda\varphi)(\vec{v}) = \lambda\varphi(\vec{v}).$$

On vérifiera alors que l'ensemble des formes linéaires définies sur \mathbb{P} , munis des opérations précédentes, possède les propriétés de définition d'un espace vectoriel sur \mathbb{R} structure de groupe commutatif pour l'addition.

$$1^\circ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 : \lambda(\mu\varphi) = (\lambda\mu)\varphi, (\lambda + \mu)\varphi = \lambda\varphi + \mu\varphi,$$

$$\lambda(\varphi_1 + \varphi_2) = (\lambda\varphi_1 + \lambda\varphi_2).$$

2° • Si $\varphi_1(\vec{b}) = 0$ ou $\varphi_2(\vec{b}) = 0$, φ_1 ou φ_2 est la forme linéaire nulle donc la famille (φ_1, φ_2) est liée.

• Si $\varphi_1(\vec{b}) \neq 0$ et $\varphi_2(\vec{b}) \neq 0$, soit $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$ un vecteur quelconque de \mathbb{P} :

$$\begin{aligned} \varphi_1(\vec{v}) &= x\varphi_1(\vec{a}) + y\varphi_1(\vec{b}) = y\varphi_1(\vec{b}) \\ \varphi_2(\vec{v}) &= x\varphi_2(\vec{a}) + y\varphi_2(\vec{b}) = y\varphi_2(\vec{b}). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\varphi_1(\vec{v}) = \frac{\varphi_2(\vec{v})}{\varphi_2(\vec{b})} \varphi_1(\vec{b})$$

c'est-à-dire :

$$\varphi_2(\vec{b})\varphi_1(\vec{v}) - \varphi_1(\vec{b})\varphi_2(\vec{v}) = 0$$

donc on a une relation linéaire non triviale :

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 = 0$$

avec : $\lambda_1 = \varphi_2(\vec{b})$ et $\lambda_2 = -\varphi_1(\vec{b})$.

3.12

1° L'image de $\vec{v}(x, y, z)$ est le vecteur $\varphi(\vec{v})$ de coordonnées :

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \\ y' = -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \\ z' = z \end{cases}$$

D'où les coordonnées de l'image de $\vec{f}(x, y, z)$:

$$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases}$$

$\vec{f}(x, y, z)$ est invariant par φ si, et seulement si :

$$\begin{cases} x = -x + 2y \\ y = y \\ z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

donc \mathcal{Q}' est la droite vectorielle \vec{D} de vecteur directeur $\vec{d}(1, 1, 0)$, c'est-à-dire $\vec{f} + \vec{f}$.

On a $\varphi(\vec{v}) = -\vec{v}$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} -x + 2y = -x \\ y = -y \\ -z = -z \end{cases} \iff y = 0$$

donc \mathcal{Q}'' est le plan vectoriel \vec{P} d'équation $y = 0$, φ est la symétrie vectorielle par rapport à \vec{D} parallèlement au plan \vec{P} .

3.14

1° Le vecteur $\vec{a}(1, 2, 3)$ est un vecteur directeur de \vec{D} , il n'appartient pas au plan \vec{P} d'équation $x + y + z = 0$. Donc si (\vec{b}, \vec{c}) est une base de \vec{P} , la famille $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est une base de \mathcal{U} .

Tout vecteur \vec{v} de \mathcal{U} s'écrit d'une façon unique :

$$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \text{ avec } \alpha\vec{a} \in \vec{D} \text{ et } \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \in \vec{P}$$

donc \vec{D} et \vec{P} sont supplémentaires.

2° $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{v}' + \vec{v}''$ avec :

$$\vec{v}' = x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c} \in \vec{D}$$

$$\vec{v}'' = x''\vec{a} + y''\vec{b} + z''\vec{c} \in \vec{P}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{y'}{2} = \frac{z''}{3} & (1) \\ x'' + y'' + z'' = 0 & (2) \\ x = x' + x'' & (3) \\ y = y' + y'' & (4) \\ z = z' + z'' & (5) \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} x'' = x - x' \\ y'' = y - y' \\ z'' = z - z' = z - 3x' \end{cases}$$

Nous voulons calculer x', y', z' en fonction de x, y, z .

D'après (1), $y' = 2x'$ et $z' = 3x'$.
D'après (3), (4), (5),

$$(x - x') + (y - 2x') + (z - 3x') = 0$$

$$x' = \frac{1}{6}(x + y + z)$$

$$y' = 2x' = \frac{1}{3}(x + y + z)$$

$$z' = 3x' = \frac{1}{2}(x + y + z)$$

d'où :

$$\varphi^2(\vec{v}) \text{ a pour coordonnées : } \begin{cases} x'' = \frac{x'}{2} - \frac{y'}{2} + \frac{z'}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{z}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}\right) + \frac{z}{2} = \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \\ y'' = -\frac{x'}{2} + \frac{y'}{2} + \frac{z'}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{z}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}\right) + \frac{z}{2} = -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \\ z'' = z' = z \end{cases}$$

Nous avons $(\forall \vec{v} \in \mathcal{Q}') \varphi^2(\vec{v}) = \varphi(\vec{v})$ donc $\varphi^2 = \varphi$.

2° φ est une projection de \mathcal{U} sur $\text{Im } \varphi$, de direction $\text{Ker } \varphi$, $\vec{v} \in \text{Ker } \varphi$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0 \\ -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

$\text{Ker } \varphi$ est l'ensemble des vecteurs \vec{v} de coordonnées $(x, x, 0) = x(1, 1, 0)$

c'est la droite vectorielle de vecteur directeur $\vec{f} + \vec{f}$.

Nous remarquons que $x' + y' - z' = 0$ donc $\text{Im } \varphi$ est incluse dans le plan vectoriel \vec{P} d'équation $x' + y' - z' = 0$. On sait que

$$\dim \text{Im } \varphi = \dim \mathcal{U} - \dim \text{Ker } \varphi = 3 - 1 = 2$$

donc $\text{Im } \varphi = \vec{P}$.

Remarque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les colonnes de A sont formées des coordonnées de $\varphi(\vec{f}), \varphi(\vec{f}), \varphi(\vec{f}), \varphi(\vec{f}), \varphi(\vec{f})$.
On remarque que $\varphi(\vec{f}) = -\varphi(\vec{f})$ donc :

$\text{Im } \varphi = \text{Vect}(\varphi(\vec{f}), \varphi(\vec{f}), \varphi(\vec{f}), \varphi(\vec{f}), \varphi(\vec{f})) = \text{Vect}(\varphi(\vec{f}), \varphi(\vec{f}), \varphi(\vec{f}))$
qui est le plan vectoriel de base $(\varphi(\vec{f}), \varphi(\vec{f}), \varphi(\vec{f}))$.

3.13 1° Au lieu de raisonner avec les expressions analytiques de φ comme à l'exercice précédent, on peut raisonner « vectoriellement » :

$$\varphi(\vec{f}) = -\vec{f}, \quad \varphi(\vec{f}) = 2\vec{f} + \vec{f}, \quad \varphi(\vec{k}) = -\vec{k}$$

$$\varphi^2(\vec{f}) = \varphi(-\vec{f}) = \vec{f}$$

$$\varphi^2(\vec{f}) = \varphi(2\vec{f} + \vec{f}) = 2\varphi(\vec{f}) + \varphi(\vec{f}) = -2\vec{f} + 2\vec{f} + \vec{f} = \vec{f}$$

$$\varphi^2(\vec{k}) = \varphi(-\vec{k}) = \vec{k}$$

Donc $\varphi^2 = \text{id}_{\mathcal{U}}$. L'endomorphisme φ est la symétrie vectorielle par rapport à l'ensemble \mathcal{Q}' des vecteurs invariants, de direction l'ensemble \mathcal{Q}'' des vecteurs \vec{v} tels que $\varphi(\vec{v}) = -\vec{v}$.

2° Déterminons \mathcal{Q}' et \mathcal{Q}'' analytiquement. La matrice de φ dans la base $(\vec{f}, \vec{f}, \vec{k})$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3° a) $\sigma'(\vec{v}) = \vec{v}''$ qui a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x'' = x - x' = x - \frac{1}{6}(x+y+z) = \frac{5}{6}(x-y-z) \\ y'' = y - y' = y - \frac{1}{3}(x+y+z) = \frac{1}{3}(-x+2y-z) \\ z'' = z - z' = z - \frac{1}{2}(x+y+z) = \frac{1}{2}(-x-y+z). \end{cases}$$

b) $\sigma' \circ \sigma(\vec{v}) = \sigma'(\vec{v}') = \vec{0}$
donc $\sigma' \circ \sigma$ est l'application nulle.

4° a) $\sigma(\vec{v}) = \vec{v}' - \vec{v}''$ a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{6}(x+y+z) - \frac{1}{6}(5x-y-z) = \frac{1}{6}(-4x+2y+2z) \\ = \frac{1}{3}(-2x+y+z) \\ y_1 = \frac{1}{3}(x+y+z) - \frac{1}{3}(-x+2y-z) = \frac{1}{3}(2x-y+2z) \\ z_1 = \frac{1}{2}(x+y+z) - \frac{1}{2}(-x-y+z) = \frac{1}{2}(2x+2y) = x+y. \end{cases}$$

$$\sigma'(\vec{v}) = \vec{v}'' - \vec{v}' = -\sigma(\vec{v})$$

les coordonnées de $\sigma'(\vec{v})$ sont donc les opposées des précédentes.

Remarque

On aurait pu calculer x_1, y_1, z_1 en utilisant la formule :

$$\sigma(\vec{v}) = 2\sigma(\vec{v}) - \vec{v} \quad (\text{cf. rappels de cours}).$$

$$\begin{aligned} b) \sigma' \circ \sigma(\vec{v}) &= \sigma'(\vec{v}' - \vec{v}'') = \sigma'(\vec{v}') - \sigma'(\vec{v}'') \\ &= -\vec{v}'' - \vec{v}' = -\vec{v} \end{aligned}$$

donc $\sigma' \circ \sigma = -\text{id}_V$, c'est l'homothétie vectorielle de rapport -1 .

3.15

1° Première méthode.

• $\text{Im } F = \text{Vect}(F(\vec{f}_1), F(\vec{f}_2), F(\vec{k})).$

$$\text{Or } F(\vec{k}) = F(\vec{f}_1) - 2F(\vec{f}_2)$$

donc $\text{Im } F = \text{Vect}(F(\vec{f}_1), F(\vec{f}_2)).$

Montrons que la famille $(F(\vec{f}_1), F(\vec{f}_2))$ est libre :

$\alpha F(\vec{f}_1) + \beta F(\vec{f}_2) = \vec{0}$ est équivalente à :

$$\begin{cases} \alpha(\vec{f}_1 - 2\vec{f}_2 + 5\vec{k}) + \beta(-2\vec{f}_1 - 2\vec{f}_2 + 2\vec{k}) = \vec{0} \\ \alpha - 2\beta = 0 \\ -2\alpha - 2\beta = 0 \\ 5\alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = 0.$$

Donc $\text{Im } F$ est le plan vectoriel \bar{P} de base $(F(\vec{f}_1), F(\vec{f}_2)).$

• Puisque $F(\vec{k}) = F(\vec{f}_1) - 2F(\vec{f}_2)$, on en déduit :

$$F(\vec{f}_1 - 2\vec{f}_2 - \vec{k}) = \vec{0}$$

donc $\vec{f}_1 - 2\vec{f}_2 - \vec{k}$ est un vecteur du noyau. On sait que

$$\dim \text{Ker } F = \dim \bar{E} - \dim \text{Im } F = 3 - 2 = 1$$

donc $\text{Ker } F$ est la droite vectorielle \bar{D} de base $(\vec{f}_1 - 2\vec{f}_2 - \vec{k})$. Ce vecteur est orthogonal à \bar{P} car il est orthogonal aux deux vecteurs de la base de \bar{P} : $F(\vec{f}_1)$ et $F(\vec{f}_2)$.

En effet :

$$(\vec{f}_1 - 2\vec{f}_2 - \vec{k}) \cdot F(\vec{f}_1) = \frac{1}{3}(\vec{f}_1 - 2\vec{f}_2 - \vec{k}) \cdot (\vec{f}_1 - 2\vec{f}_2 + 5\vec{k}) = \frac{1}{3}(1 + 4 - 5) = 0$$

$$\begin{aligned} (\vec{f}_1 - 2\vec{f}_2 - \vec{k}) \cdot F(\vec{f}_2) &= \frac{1}{3}(\vec{f}_1 - 2\vec{f}_2 - \vec{k}) \cdot (-2\vec{f}_1 - 2\vec{f}_2 + 2\vec{k}) \\ &= \frac{1}{3}(-2 + 4 - 2) = 0. \end{aligned}$$

Donc \bar{D} est orthogonal à \bar{P} .

Deuxième méthode.

• La matrice de F dans la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{k})$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Les expressions analytiques de F sont :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x - 2y + 5z) \\ y' = \frac{2}{3}(-x - y + z) \\ z' = \frac{1}{3}(5x + 2y + z) \end{cases}$$

$\vec{v}(x, y, z)$ appartient à $\text{Ker } F$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ 5x + 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x \\ y = -2x \end{cases}$$

$\text{Ker } F$ est la droite \bar{D} , ensemble des vecteurs de coordonnées $(x, -2x, -x) = x(1, -2, -1)$, un vecteur directeur est le vecteur de coordonnées $(1, -2, -1)$ c'est-à-dire $\vec{f}_1 - 2\vec{f}_2 - \vec{k}$.

• D'après la formule de la dimension :

$$\dim \text{Im } F = \dim \bar{E} - \dim \text{Ker } F = 3 - 1 = 2$$

donc $\text{Im } F$ est un plan vectoriel \bar{P} . On a :

$$z' = x' - 2y' \quad \text{c'est-à-dire } x' - 2y' - z' = 0.$$

C'est l'équation de $\text{Im } F$ qu'on écrit $x - 2y - z = 0$.

Rappelons que le vecteur de coordonnées (a, b, c) est orthogonal au plan d'équation $ax + by + cz = 0$. Donc le vecteur de $\text{Ker } F$ de coordonnées $(1, -2, -1)$ est orthogonal au plan \bar{P} d'équation $x - 2y - z = 0$. Donc $\text{Ker } F$ est orthogonal à \bar{P} .

2° Les coordonnées de $\vec{f}_1 + \vec{k}$ et $\vec{f}_2 + \vec{k}$ vérifient l'équation de \bar{P} donc $\vec{f}_1 + \vec{k}$ et $\vec{f}_2 + \vec{k}$ appartiennent à \bar{P} . D'autre part $(\vec{f}_1 + \vec{k}) \cdot (\vec{f}_2 + \vec{k}) = 1 - 1 = 0$ donc $\vec{f}_1 + \vec{k}$ et $\vec{f}_2 + \vec{k}$ sont

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut définir analytiquement φ par :

$$\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = x + y + z \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

$\vec{v}(x, y, z)$ appartient à $\text{Ker } \varphi$ si et seulement si :

$$x + y + z = 0$$

c'est une équation cartésienne d'un plan \bar{D} .
On a : $x' = y' = z'$ qui représente une droite $\bar{D} \subset \text{Im } \varphi$ mais
 $\dim \text{Im } \varphi = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker } \varphi = 3 - 2 = 1$
 $\bar{D} = \text{Im } \varphi$.

2° Prenons une base (\bar{I}, \bar{J}) dans \bar{P} et $\bar{K} \in \bar{D}$, par exemple $\bar{K} = (1, 1, 1)$.

$\varphi(\bar{I}) = \varphi(\bar{J}) = \vec{0}$ car $\bar{P} = \text{Ker } \varphi$,
 $\varphi(\bar{K})$ a pour coordonnées $(3, 3, 3)$ donc $\varphi(\bar{K}) = 3\bar{K}$ et la matrice de φ dans la base $(\bar{I}, \bar{J}, \bar{K})$ est :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit (X, Y, Z) les coordonnées d'un vecteur quelconque dans la base $(\bar{I}, \bar{J}, \bar{K})$ et (X', Y', Z') les coordonnées de son image :

$$X' = 0, \quad Y' = 0, \quad Z' = 3Z.$$

Donc $\varphi = \varpi \circ h_3 = h_3 \circ \varpi$,
 ϖ étant la projection de \mathbb{R}^3 sur \bar{D} parallèlement à \bar{P} et h_3 l'homothétie vectorielle de rapport 3.

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= \varpi \circ h_3 \circ \varpi \circ h_3 = h_3 \circ \varpi \circ \varpi \circ h_3 \\ &= h_3 \circ \varpi \circ h_3 = h_3 \circ h_3 \circ \varpi \\ &= h_9 \circ \varpi = \varpi \circ h_9, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi^n &= (\varpi \circ h_3) \circ (\varpi \circ h_3) \circ \dots \circ (\varpi \circ h_3) \\ &= (h_3 \circ h_3 \circ \dots \circ h_3) \circ (\varpi \circ \varpi \circ \dots \circ \varpi) \\ &= h_{3^n} \circ \varpi = \varpi \circ h_{3^n}, \end{aligned}$$

h_9 étant l'homothétie vectorielle de rapport 9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

h_{3^n} étant l'homothétie vectorielle de rapport 3^n .

Si l'une des équations est $L_1 = \beta_1$, on obtient un système équivalent au système proposé en faisant la substitution $L_1 \rightarrow L_1 + \lambda L_1$ et la même substitution $\beta_1 \rightarrow \beta_1 + \lambda \beta_1$.

$$(S) \begin{cases} -2x - y & + 4t = 2 \\ 2x + 3y + 3z + 2t = 14 \\ x + 2y + z + t = 7 \\ -x & - z + t = -1. \end{cases}$$

orthogonaux, ils sont non nuls, donc ils forment une base orthogonale de \bar{P} . La matrice de la restriction f de F à \bar{P} dans la base $\mathcal{B} = (\bar{i}, \bar{k}, \bar{i} + \bar{j} - \bar{k})$ s'obtient en calculant les coordonnées de $F(\bar{i} + \bar{j})$ et $F(\bar{i} + \bar{j} - \bar{k})$ dans la base \mathcal{B} :

$$\begin{aligned} f(\bar{i} + \bar{k}) &= F(\bar{i} + \bar{k}) = F(\bar{i}) + F(\bar{k}) = \frac{1}{3}(\bar{i} - 2\bar{j} + 5\bar{k}) + \frac{1}{3}(5\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}) \\ &= 2(\bar{i} + \bar{k}) \\ f(\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}) &= F(\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}) = F(\bar{i}) + F(\bar{j}) - F(\bar{k}) \\ &= \frac{1}{3}(\bar{i} - 2\bar{j} + 5\bar{k}) + \frac{1}{3}(-2\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}) - \frac{1}{3}(5\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}) \\ &= -2(\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}). \end{aligned}$$

D'où la matrice de f :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} f(\bar{i} + \bar{k}) = \bar{i} + \bar{k}$$

$$\frac{1}{2} f(\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}) = -(\bar{i} + \bar{j} - \bar{k})$$

la matrice de $\frac{1}{2} f$ dans la base \mathcal{B} est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} \left(\frac{1}{2} f \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Posons $\bar{I} = \bar{i} + \bar{k}$ et $\bar{J} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$. Appelons (X, Y) les coordonnées d'un vecteur \vec{v} du plan vectoriel \bar{P} et (X', Y') ses coordonnées de $\frac{1}{2} f(\vec{v}) = \frac{1}{2} F(\vec{v})$. On a :

$$\begin{cases} X' = X \\ Y' = -Y \end{cases}$$

donc $\frac{1}{2} f$ est la symétrie vectorielle s par rapport à la droite vectorielle de vecteur directeur $\bar{I} = \bar{i} + \bar{k}$, parallèlement à la droite vectorielle de vecteur directeur $\bar{J} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$. C'est une symétrie vectorielle orthogonale puisque \bar{I} et \bar{J} sont orthogonaux.

3° Pour tout vecteur \vec{v} de \bar{E} :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}'' \quad \text{avec} \quad \vec{v}' \in \bar{P} \quad \text{et} \quad \vec{v}'' \in \bar{D},$$

\bar{P} et \bar{D} étant respectivement l'image et le noyau de F ,

$$\begin{aligned} F(\vec{v}) &= F(\vec{v}') + F(\vec{v}'') = F(\vec{v}') = 2s(\vec{v}') \\ &= h_2 \circ s(\vec{v}') = s \circ h_2(\vec{v}'), \end{aligned}$$

en appelant h_2 l'homothétie vectorielle de rapport 2.

Appelons p la projection vectorielle de \bar{E} sur \bar{P} parallèlement à \bar{D} c'est-à-dire la projection orthogonale de \bar{E} sur \bar{P} . On a pour tout vecteur \vec{v} de \bar{E} :

$$\vec{v}' = p(\vec{v})$$

$$F(\vec{v}) = h_2 \circ s \circ p(\vec{v}) = s \circ h_2 \circ p(\vec{v})$$

$$F = h_2 \circ s \circ p = s \circ h_2 \circ p.$$

donc

Faisons les substitutions $L_1 \mapsto L_1 - 4L_3, L_2 \mapsto L_2 - 2L_3,$
 $L_3 \mapsto L_3 - L_4 :$

$$(S) \begin{cases} 2x - y + 4z & = 6 \\ 4x + 3y + 5z & = 16 \\ 2x + 2y + 2z & = 8 \\ -x & = -1. \end{cases}$$

Faisons les substitutions $L_1' \mapsto L_1' - 2L_3', L_2' \mapsto L_2' - \frac{5}{2}L_3' :$

$$(S'') \begin{cases} -2x - 5y & = -10 \\ -x - 2y & = -4 \\ 2x + 2y + 2z & = 8 \\ -x & = -1. \end{cases}$$

Faisons la substitution $L_1'' \mapsto L_1'' - \frac{5}{2}L_2'' :$

$$(S''') \begin{cases} -x & = 0 \\ -x - 2y & = -4 \\ 2x + 2y + 2z & = 8 \\ -x & = -z + t = -1. \end{cases}$$

On obtient un système triangulaire dont la solution est : $(0, 2, 2, 1)$.

3.18

$$(S) \begin{cases} a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \\ ax + by + cz = d \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Faisons les substitutions $L_1 \mapsto L_1 - c^2L_3, L_2 \mapsto L_2 - cL_3 :$

$$(S') \begin{cases} (a^2 - c^2)x + (b^2 - c^2)y & = d^2 - c^2 \\ (a - c)x + (b - c)y & = d - c \\ x + y + z & = 1. \end{cases}$$

Faisons la substitution $L_1' \mapsto L_1' - (b + c)L_2' :$

$$(S'') \begin{cases} [a^2 - c^2 - (a - c)(b + c)]x & = d^2 - c^2 - (d - c)(b + c) \\ (a - c)x + (b - c)y & = d - c \\ x + y + z & = 1. \end{cases}$$

Système triangulaire (rappelons que a, b, c sont distincts). On trouve :

$$x = \frac{(d - c)(d - b)}{(a - c)(a - b)}$$

et par permutation circulaire sur $a, b, c :$

$$y = \frac{(d - a)(d - c)}{(b - a)(b - c)}$$

$$z = \frac{(d - b)(d - a)}{(c - b)(c - a)}$$

3.19

$$(S) \begin{cases} x + ay + a^2z + a^3 = 0 \\ x + by + b^2z + b^3 = 0 \\ x + cy + c^2z + c^3 = 0. \end{cases}$$

Faisons les substitutions $L_1 \mapsto L_1 - L_3, L_2 \mapsto L_2 - L_3 :$

$$(S') \begin{cases} (a - c)y + (a^2 - c^2)z + a^3 - b^3 = 0 \\ (b - c)y + (b^2 - c^2)z + b^3 - c^3 = 0 \\ x + cy + c^2z + c^3 = 0 \end{cases}$$

$$(S'') \begin{cases} y + (a + c)z + a^2 + ac + c^2 = 0 \\ y + (b + c)z + b^2 + bc + c^2 = 0 \\ x + cy + c^2z + c^3 = 0. \end{cases}$$

Faisons la substitution $L_1' \mapsto L_1' - L_2' :$

$$(S''') \begin{cases} (a - b)z + a^2 - b^2 + (a - b)c = 0 \\ y + (b + c)z + b^2 + bc + c^2 = 0 \\ x + cy + c^2z + c^3 = 0. \end{cases}$$

Système triangulaire. On trouve :

$$z = -(a + b + c)$$

$$\text{par suite : } y = ab + bc + ca$$

$$\text{par suite : } x = -abc.$$

4 | Calcul barycentrique

□ Barycentre

X désigne la droite, le plan ou l'espace.
L'espace vectoriel associé est noté \vec{X} .
Y désigne un point, une droite ou un plan de X.
La direction de Y est notée \vec{Y} .

Définition

Soit $((A_i, \alpha_i))_{i \in \{1, \dots, n\}}$ une famille finie de points pondérés.

- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, le vecteur $\vec{V} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ est indépendant de M.
- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, il existe un unique point G caractérisé par

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

Le point G est appelé **barycentre** de la famille $((A_i, \alpha_i))_{i \in \{1, \dots, n\}}$.

On note $G = \text{Bar}((A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n))$ ou $G = \text{Bar}((A_i, \alpha_i))_{i \in \{1, \dots, n\}}$.

Soit O un point quelconque de X, le barycentre est également caractérisé par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$$

Quand les α_i sont tous égaux (et non nuls) le barycentre est appelé **isobarycentre** des A_i .

Propriétés

- Le barycentre ne change pas si l'on change l'ordre des couples (A_i, α_i) .
- Le barycentre ne change pas si on multiplie tous les coefficients par un même réel λ non nul :
 $\text{Bar}((A_i, \alpha_i))_{i \in \{1, \dots, n\}} = \text{Bar}((A_i, \lambda \alpha_i))_{i \in \{1, \dots, n\}}$.
- Le barycentre ne change pas si on remplace plusieurs points A_i , dont la somme des coefficients est non nulle, par leur barycentre affecté de la somme de ces coefficients (propriété « d'associativité » du barycentre).

- Coordonnées du barycentre. X est ici l'espace rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les coordonnées de A_i sont x_i, y_i, z_i . Alors, les coordonnées du barycentre sont :

$$x = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i; \quad y = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i; \quad z = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i$$

□ Ensemble des barycentres de n points donnés

Soit Y l'ensemble des barycentres des n points donnés A_i affectés de coefficients variables α_i (tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$).

- Si tous les A_i sont confondus, $Y = \{A_i\}$.
- Si les A_i sont tous sur une droite D, sans être tous confondus, $Y = D$.
- Si les A_i sont tous dans un plan P, sans être tous alignés, $Y = P$.
- Si les A_i ne sont pas coplanaires, Y est l'espace entier.

On dit que deux points distincts A_1, A_2 (resp. trois points non alignés A_1, A_2, A_3 , quatre points non coplanaires A_1, A_2, A_3, A_4) forment un **repère affine** de la droite $(A_1, A_2) = D$ (resp. du plan $(A_1, A_2, A_3) = P$, de l'espace E).

On appelle système de **coordonnées barycentriques** d'un point M de D (resp. P, E) par rapport au repère affine (A_1, A_2) (resp. (A_1, A_2, A_3) , (A_1, A_2, A_3, A_4)) tout couple (α_1, α_2) (resp. tout triplet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, tout quadruplet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$) tel que $M = \text{Bar}((A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2))$ (resp. $M = \text{Bar}((A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), (A_3, \alpha_3))$, $M = \text{Bar}((A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), (A_3, \alpha_3), (A_4, \alpha_4))$).

Les coordonnées barycentriques d'un point M ne sont pas uniques mais déterminées à un coefficient multiplicatif non nul près.

Considérons un plan P, par exemple, muni d'un repère affine (A_1, A_2, A_3) .

Alors $(A_1, \overline{A_1 A_2}, \overline{A_1 A_3})$ est un repère cartésien de P. Si le point M du plan P admet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ comme système de coordonnées barycentriques, il admet $\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$ et $\frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$ comme coordonnées cartésiennes.

Réciproquement, si (A_1, \vec{u}, \vec{v}) est un repère cartésien de P, les trois points A_1, A_2, A_3 tels que $\overline{A_1 A_2} = \vec{u}$ et $\overline{A_1 A_3} = \vec{v}$ forment un repère affine de P. Si le point M du plan P admet (x, y) comme couple de coordonnées cartésiennes, il admet comme système de coordonnées barycentriques tous les triplets $(\lambda(1-x-y), \lambda x, \lambda y)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Résultats analogues dans le cas de la droite ou de l'espace.

4 | Calcul barycentrique

□ Barycentre

X désigne la droite, le plan ou l'espace.
 L'espace vectoriel associé est noté \vec{X} .
 Y désigne un point, une droite ou un plan de X.
 La direction de Y est notée \vec{Y} .

Définition

Soit $((A_i, \alpha_i))_{i \in \{1, \dots, n\}}$ une famille finie de points pondérés.

- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, le vecteur $\vec{V} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA}_i$ est indépendant de M.
- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, il existe un unique point G caractérisé par

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA}_i = \vec{0}$$

Le point G est appelé **barycentre** de la famille $((A_i, \alpha_i))_{i \in \{1, \dots, n\}}$.

On note $G = \text{Bar}((A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n))$ ou $G = \text{Bar}((A_i, \alpha_i))_{i \in \{1, \dots, n\}}$.

Soit O un point quelconque de X, le barycentre est également caractérisé par :

$$\vec{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OA}_i$$

Quand les α_i sont tous égaux (et non nuls) le barycentre est appelé **isobarycentre** des A_i .

Propriétés

- Le barycentre ne change pas si l'on change l'ordre des couples (A_i, α_i) .
- Le barycentre ne change pas si on multiplie tous les coefficients par un même réel λ non nul :

$$\text{Bar}((A_i, \alpha_i))_{i \in \{1, \dots, n\}} = \text{Bar}((A_i, \lambda \alpha_i))_{i \in \{1, \dots, n\}}$$

- Le barycentre ne change pas si on remplace plusieurs points A_i , dont la somme des coefficients est non nulle, par leur barycentre affecté de la somme de ces coefficients (propriété « d'associativité » du barycentre).

- Coordonnées du barycentre. X est ici l'espace rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les coordonnées de A_i sont x_i, y_i, z_i . Alors, les coordonnées du barycentre sont :

$$x = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i; \quad y = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i; \quad z = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i$$

□ Ensemble des barycentres de n points donnés

Soit Y l'ensemble des barycentres des n points donnés A_i affectés de coefficients variables α_i (tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$).

- Si tous les A_i sont confondus, $Y = \{A_i\}$.
- Si les A_i sont tous sur une droite D, sans être tous confondus, $Y = D$.
- Si les A_i sont tous dans un plan P, sans être tous alignés, $Y = P$.
- Si les A_i ne sont pas coplanaires, Y est l'espace entier.

On dit que deux points distincts A_1, A_2 (resp. trois points non alignés A_1, A_2, A_3 , quatre points non coplanaires A_1, A_2, A_3, A_4) forment un **repère affine** de la droite $(A_1, A_2) = D$ (resp. du plan $(A_1, A_2, A_3) = P$, de l'espace E).

On appelle système de **coordonnées barycentriques** d'un point M de D (resp. P, E) par rapport au repère affine (A_1, A_2) (resp. (A_1, A_2, A_3) , (A_1, A_2, A_3, A_4)) tout couple (α_1, α_2) (resp. tout triplet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, tout quadruplet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$) tel que $M = \text{Bar}((A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2))$ (resp. $M = \text{Bar}((A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), (A_3, \alpha_3))$, $M = \text{Bar}((A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), (A_3, \alpha_3), (A_4, \alpha_4))$).

Les coordonnées barycentriques d'un point M ne sont pas uniques mais déterminées à un coefficient multiplicatif non nul près.

Considérons un plan P, par exemple, muni d'un repère affine (A_1, A_2, A_3) . Alors (A_1, A_2, A_3) est un repère cartésien de P. Si le point M du plan P admet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ comme système de coordonnées barycentriques, il admet $\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$ et $\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$ comme coordonnées cartésiennes.

Réciproquement, si (A_1, \vec{u}, \vec{v}) est un repère cartésien de P, les trois points A_1, A_2, A_3 tels que $\vec{A_1 A_2} = \vec{u}$ et $\vec{A_1 A_3} = \vec{v}$ forment un repère affine de P. Si le point M du plan P admet (x, y) comme couple de coordonnées cartésiennes, il admet comme système de coordonnées barycentriques tous les triplets $(\lambda(1-x-y), \lambda x, \lambda y)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Résultats analogues dans le cas de la droite ou de l'espace.

□ **Fonction scalaire de Leibniz**

Soit $(A_i, \alpha_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ une famille de points pondérés. La fonction scalaire de Leibniz associée est :

$$g : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$M \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i M \overline{A_i}^2$$

- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, quels que soient les points M et M' de X, on a :

$$(1) \quad g(M) = g(M') + 2M \overline{M'} \cdot \vec{v}$$

où \vec{v} est le vecteur (indépendant de M) : $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i M \overline{A_i}$.

- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$. Soit $G = \text{Bar}((A_i, \alpha_i)_{i \in \{1, \dots, n\}})$. On a :

$$(2) \quad g(M) = g(G) + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) M \overline{G}^2$$

Les formules (1) et (2) s'appellent **formules de Leibniz**.

Application

Soit A et B deux points de X, I leur milieu :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\overline{MI}^2 + \frac{\overline{AB}^2}{2}$$

$$\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = 2\overline{IM} \cdot \overline{AB}$$

(théorème « de la médiane »)

□ **Ensemble \mathcal{E} des points M tels que $g(M) = k$ ($k \in \mathbb{R}$).**

- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$, soit \vec{v} le vecteur indépendant de M : $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i M \overline{A_i}$.

Si $\vec{v} = \vec{0}$, la fonction g est constante donc \mathcal{E} est vide ou égal à X.

Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, \mathcal{E} est une droite D (resp. un plan P) si X est le plan (resp. l'espace). La droite D ou le plan P est orthogonal à \vec{v} .

- Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, soit $G = \text{Bar}((A_i, \alpha_i)_{i \in \{1, \dots, n\}})$.

$$\begin{cases} \text{Si } \frac{k - g(G)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} < 0, \text{ l'ensemble } \mathcal{E} \text{ est vide.} \\ \text{Si } k = g(G), \quad \mathcal{E} = \{G\}. \\ \text{Si } \frac{k - g(G)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} > 0, \quad \mathcal{E} \text{ est le cercle (resp. la sphère) de centre } G \text{ et de rayon} \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{k - g(G)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}} \text{ si X est le plan (resp. l'espace).}$$

ÉNONCÉS DES EXERCICES ET PROBLÈMES

Barycentre

4.1

Dans le plan P, on considère trois points A, B, C non alignés. Soit M un point quelconque de P. On appelle A', B', C' les symétriques de M par rapport aux milieux respectifs des côtés opposés à A, B, C.

1° Montrer que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes en un point qu'on notera M'. Montrer que M' est le milieu commun des segments [A, A'], [B, B'], [C, C'].

2° Que peut-on dire de l'application f de P dans P : $M \mapsto M'$?

4.2

Dans l'espace E, on donne deux points distincts A et B. Soit f l'application de E dans E qui à tout point M de E associe le point M' barycentre des trois points pondérés (A, a), (B, b), (M, m) où a, b, m sont trois nombres réels donnés vérifiant $a + b + m \neq 0$.

Montrer que si $a + b = 0$, f est une translation et si $a + b \neq 0$, f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

4.3

Soit n un entier naturel non nul, q un réel distinct de 0, de 1 et de -1. On considère dans le plan complexe, n points A_0, A_1, \dots, A_{n-1} d'affixes respectives z_0, z_1, \dots, z_{n-1} .

1° Démontrer que le système de points pondérés $\{(A_i, q^i), 0 \leq i \leq n-1\}$

admet un barycentre G_n .

2° On donne :

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \\ \forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\} \quad z_k = z_1^k \end{cases}$$

a) Déterminer l'affixe Z_n de G_n à l'aide de q et z_1 .
 b) Calculer la partie réelle X_n et la partie imaginaire Y_n de Z_n . (On rappelle que $X_n = \frac{Z_n + \bar{Z}_n}{2}$, $Y_n = \frac{Z_n - \bar{Z}_n}{2i}$.)

3° a) Comment faut-il choisir n pour que Z_n soit réel?

b) Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n$.

(Exercice Bac. C. Dijon. Session de remplacement 1980.)

4.4 On considère un plan P rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . On appelle E l'ensemble des points M du plan P dont les coordonnées (x, y) vérifient $y \geq x^2$.

1° A_1 de coordonnées (a_1, b_1) et A_2 de coordonnées (a_2, b_2) étant deux points de E, on considère le barycentre G de ces points affectés des coefficients λ et $1-\lambda$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$. Calculer les coordonnées (X, Y) de G et montrer que $G \in E$.

2° a) Établir par récurrence, sans nouveau calcul, que, si n points A_1, A_2, \dots, A_n appartiennent à E, leur isobarycentre appartient à E.

b) On considère le cas où les points A_1, A_2, \dots, A_n d'abscisses a_1, a_2, \dots, a_n sont sur la courbe d'équation $y = x^2$. Dédurre de a) l'inégalité suivante :

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2).$$

(D'après Exercice Bac. Paris. Session de remplacement, 1978.)

4.5* Dans un plan P, on considère trois points A, B, C non alignés. La hauteur du triangle ABC issue de A coupe le côté (BC) en A'.

1° Déterminer un couple $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$A' = \text{Bar}((B, \beta), (C, \gamma)).$$

2° On suppose que le triangle ABC n'est pas rectangle. Montrer que : $\text{tg } \hat{A} + \text{tg } \hat{B} + \text{tg } \hat{C} \neq 0$.

Montrer que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes en un point H barycentre des trois points pondérés $(A, \text{tg } \hat{A}), (B, \text{tg } \hat{B}), (C, \text{tg } \hat{C})$.

Fonction scalaire de Leibniz. Applications

4.6 Soit P un plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , soit A, B, C les points de coordonnées respectives $(3, 1), (-2, 3)$ et $(1, 0)$.

1° Soit G le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients 2, 1, -1. Trouver les coordonnées de G.
 Trouver suivant les valeurs du nombre réel k, l'ensemble des points M tels que :

$$2\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 - \overline{MC}^2 = k$$

2° Trouver l'ensemble des points M tels que :

$$2\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 - \overline{MC}^2 = 8.$$

3° Trouver l'ensemble des points M tels que :

$$\|2\overline{MA} + \overline{MB} - \overline{MC}\| = \|2\overline{MA} - \overline{MB} - \overline{MC}\|.$$

(D'après Bac. E. Lille 1981.)

4.7* Dans un plan P, on considère trois points A, B, C tels que

$$\|\overline{AB}\| = 4a, \|\overline{AC}\| = 3a, \|\overline{BC}\| = 5a$$

(a est un réel positif donné).

Trouver l'ensemble des points M de P vérifiant :

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 - 3\overline{MC}^2 = 5a^2.$$

4.8 Soit A, B, C trois points non alignés d'un plan \mathcal{P} . On pose $d(B, C) = a$, $d(C, A) = b$, $d(A, B) = c$. On désigne par I le milieu du segment [B, C]. Quels que soient les points P et Q du plan, on notera PQ la distance de ces points.

1° Établir l'égalité : $b^2 + c^2 = 2AI^2 + \frac{a^2}{2}$.

2° A tout point M du plan \mathcal{P} on associe le réel :

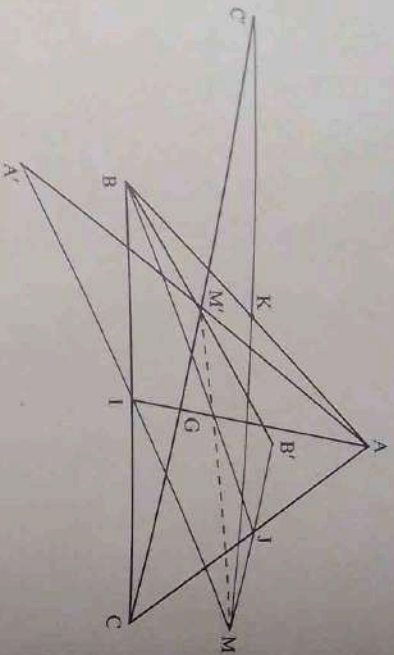
$$\varphi(M) = MB^2 + MC^2 - MA^2.$$

a) Soit G le barycentre des points B, C et A affectés respectivement des coefficients 1, 1 et -1. Donner une détermination simple de G et placer ce point sur la figure.

b) Exprimer $\varphi(M)$ à l'aide de MG, a, b, c. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b, c pour qu'il existe un point M au moins vérifiant $\varphi(M) = 0$.

(Exercice Bac. C. Paris. Créteil, Versailles 1980.)

4.1 1^o Appelons I, J, K les milieux respectifs des segments [B, C], [C, A], [A, B].



Considérons les points pondérés (A, 1), (B, 1), (C, 1), (M, -1). Puisque la somme des coefficients est non nulle, il existe un barycentre, notons-le M'. Par associativité du barycentre, on obtient successivement :

$$M' = \text{Bar}((A, 1), (L, 2), (M, -1))$$

$$M' = \text{Bar}((A, 1), (A', 1)).$$

En effet, le barycentre de (B, 1) et (C, 1) est I et le barycentre de (1, 2) et (M, -1) est A'.

Le point M' se trouve donc sur la droite (AA'), plus précisément au milieu du segment [A, A']. Une démonstration analogue montre que M' se trouve au milieu du segment [B, B'] et au milieu du segment [C, C'].

2^o Pour construire M' on peut également associer les trois premiers points (A, 1), (B, 1), (C, 1) ce qui nous donne, en appelant G le centre de gravité du triangle ABC :

$$M' = \text{Bar}((G, 3), (M, -1))$$

c'est-à-dire :
$$\overrightarrow{GM'} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{GM}.$$

L'application $f : M \mapsto M'$ est donc l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.

4.2 M' est le barycentre de (A, a), (B, b) et (M, m), on a donc :

$$(1) \quad a\overrightarrow{M'A} + b\overrightarrow{M'B} + m\overrightarrow{M'M} = \vec{0}.$$

1^{er} cas : $a + b = 0$.

L'égalité (1) devient $a(\overrightarrow{M'A} - \overrightarrow{M'B}) + m\overrightarrow{M'M} = \vec{0}$

d'où : $m\overrightarrow{M'M} = a\overrightarrow{AB}$

comme $a + b + m = m \neq 0$, on en déduit :

$$\overrightarrow{M'M} = \frac{a}{m} \overrightarrow{AB}.$$

L'application f est donc la translation de vecteur $\frac{a}{m} \overrightarrow{AB}$.

2^e cas : $a + b \neq 0$.

Soit I le barycentre des points (A, a) et (B, b). On a, pour tout point P de E :

$$a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} = (a + b)\overrightarrow{PI}$$

d'où, d'après (1) :

$$a\overrightarrow{M'A} + b\overrightarrow{M'B} + m\overrightarrow{M'M} = (a + b)\overrightarrow{MI} + m\overrightarrow{M'M} = \vec{0}$$

ou encore :

$$(a + b)\overrightarrow{MI} + m\overrightarrow{M'I} + m\overrightarrow{M'M} = \vec{0}$$

et, comme $a + b + m \neq 0$: $\overrightarrow{M'I} = \frac{m}{a + b + m} \overrightarrow{IM}$.

L'application f est donc, dans ce cas, l'homothétie de centre I et de rapport

$$\frac{m}{a + b + m}.$$

4.3 1^o La somme des coefficients des points pondérés (A_k, q^k) est :

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{car } q \neq 1.$$

Or, $q^n \neq 1$ puisque $q \neq 1$ et $q \neq -1$. La somme des coefficients est donc non nulle et le barycentre existe.

2^o L'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{OG_n} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} q^k \overrightarrow{OA_k}}{\sum_{k=0}^{n-1} q^k}$$

donne, en prenant les affixes des vecteurs :

$$Z_n = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} q^k z_k}{\sum_{k=0}^{n-1} q^k}.$$

Comme $q \neq 1$ et $qz_1 \neq 1$, on peut écrire Z_n sous la forme :

$$Z_n = \frac{1 - (qz_1)^n}{1 - qz_1} \times \frac{1 - q}{1 - q^n}$$

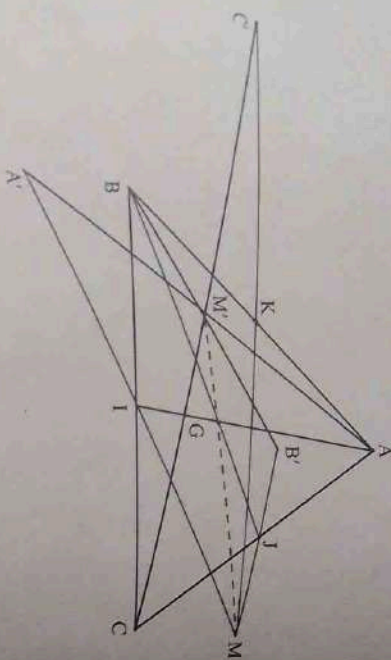
or, $z_1 = e^{2\pi i/n}$, d'où $z_1^n = 1$ et $1 - (qz_1)^n = 1 - q^n$. Finalement, on obtient :

$$Z_n = \frac{1 - q}{1 - qz_1}.$$

b) On a :

$$X_n = \frac{Z_n + \overline{Z_n}}{2} = \frac{1 - q}{2} \left(\frac{1}{1 - qz_1} + \frac{1}{1 - q\overline{z_1}} \right) = \frac{1 - q}{2} \left(\frac{2 - q(z_1 + \overline{z_1})}{1 - q(z_1 + \overline{z_1}) + q^2 z_1 \overline{z_1}} \right)$$

4.1 1^o Appelons I, J, K les milieux respectifs des segments [B, C], [C, A], [A, B].



Considérons les points pondérés (A, 1), (B, 1), (C, 1), (M, -1). Puisque la somme des coefficients est non nulle, il existe un barycentre, notons-le M'. Par associativité du barycentre, on obtient successivement :

$$M' = \text{Bar}((A, 1), (I, 2)), (M, -1)$$

$$M' = \text{Bar}((A, 1), (A', 1))$$

En effet, le barycentre de (B, 1) et (C, 1) est I et le barycentre de (I, 2) et (M, -1) est A'.
Le point M' se trouve donc sur la droite (AA'), plus précisément au milieu du segment [A, A']. Une démonstration analogue montre que M' se trouve au milieu du segment [B, B'] et au milieu du segment [C, C'].
2^o Pour construire M' on peut également associer les trois premiers points (A, 1), (B, 1), (C, 1) ce qui nous donne, en appelant G le centre de gravité du triangle ABC :

$$M' = \text{Bar}((G, 3), (M, -1))$$

c'est-à-dire : $\overline{GM'} = -\frac{1}{2} \overline{GM}$.

L'application $f : M \mapsto M'$ est donc l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.

4.2 M' est le barycentre de (A, a), (B, b) et (M, m), on a donc :

$$(1) \quad a\overline{M'A} + b\overline{M'B} + m\overline{M'M} = \vec{0}$$

1^{er} cas : $a + b = 0$.

L'égalité (1) devient $a(\overline{M'A} - \overline{M'B}) + m\overline{M'M} = \vec{0}$

d'où : $m\overline{M'M} = a\overline{AB}$

comme $a + b + m = m \neq 0$, on en déduit :

$$\overline{M'M} = \frac{a}{m} \overline{AB}$$

L'application f est donc la translation de vecteur $\frac{a}{m} \overline{AB}$.

2^e cas : $a + b \neq 0$.

Soit I le barycentre des points (A, a) et (B, b). On a, pour tout point P de E :

$$a\overline{PA} + b\overline{PB} = (a + b) \overline{PI}$$

d'où, d'après (1) :

$$a\overline{M'A} + b\overline{M'B} + m\overline{M'M} = (a + b) \overline{MI} + m\overline{M'M} = \vec{0}$$

ou encore :

$$(a + b) \overline{MI} + m\overline{MI} + m\overline{M'M} = \vec{0}$$

$$(a + b + m) \overline{MI} = -m\overline{M'M}$$

et, comme $a + b + m \neq 0$: $\overline{MI} = \frac{m}{a + b + m} \overline{M'M}$.

L'application f est donc, dans ce cas, l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{m}{a + b + m}$.

4.3

1^o La somme des coefficients des points pondérés (A_k, q^k) est :

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{car } q \neq 1.$$

Or, $q^n \neq 1$ puisque $q \neq 1$ et $q \neq -1$. La somme des coefficients est donc non nulle et le barycentre existe.

2^o L'égalité vectorielle

$$\overline{OG_n} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} q^k \overline{OA_k}}{\sum_{k=0}^{n-1} q^k}$$

donne, en prenant les affixes des vecteurs :

$$Z_n = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} q^k z_k}{\sum_{k=0}^{n-1} q^k}$$

Comme $q \neq 1$ et $qz_1 \neq 1$, on peut écrire Z_n sous la forme :

$$Z_n = \frac{1 - (qz_1)^n}{1 - qz_1} \times \frac{1 - q}{1 - q^n}$$

or, $z_1 = e^{2\pi i/n}$, d'où $z_1^n = 1$ et $1 - (qz_1)^n = 1 - q^n$. Finalement, on obtient :

$$Z_n = \frac{1 - q}{1 - qz_1}$$

b) On a :

$$Z_n = \frac{Z_n + \overline{Z_n}}{2} = \frac{1 - q}{2} \left(\frac{1}{1 - qz_1} + \frac{1}{1 - q\overline{z_1}} \right) = \frac{1 - q}{2} \left(\frac{2 - q(z_1 + \overline{z_1})}{1 - q(z_1 + \overline{z_1}) + q^2 z_1 \overline{z_1}} \right)$$

et, comme $z_1 + \bar{z}_1 = 2 \cos \frac{2\pi}{n}$, $z_1 \bar{z}_1 = 1$:

$$X_n = \frac{(1-q) \left(1 - q \cos \frac{2\pi}{n} \right)}{1 - 2q \cos \frac{2\pi}{n} + q^2}$$

De façon analogue :

$$Y_n = \frac{Z_n - \bar{Z}_n}{2i} = \frac{1-q}{2i} \left(\frac{1}{1-qz_1} - \frac{1}{1-q\bar{z}_1} \right) = \frac{1-q}{2i} \left(\frac{q(z_1 - \bar{z}_1)}{(1-q(z_1 + \bar{z}_1) + q^2 z_1 \bar{z}_1)} \right)$$

et, comme $z_1 - \bar{z}_1 = 2i \sin \frac{2\pi}{n}$:

$$Y_n = \frac{(1-q)q \sin \frac{2\pi}{n}}{1 - 2q \cos \frac{2\pi}{n} + q^2}$$

2° a) On a les équivalences suivantes :

$$Z_n \text{ réel} \iff Y_n = 0 \iff n = 2.$$

b) Quand n tend vers l'infini, $\frac{2\pi}{n}$ tend vers 0, donc $\cos \frac{2\pi}{n}$ tend vers 1 et $\sin \frac{2\pi}{n}$ vers 0, en utilisant la continuité des fonctions sinus et cosinus en 0.

$$\text{D'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = \frac{(1-q)^2}{1-2q+q^2} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n = 0.$$

4.4 1° L'égalité $\overline{OG} = \lambda \overline{OA_1} + (1-\lambda) \overline{OA_2}$ montre que :

$$\begin{cases} X = \lambda a_1 + (1-\lambda) a_2 \\ Y = \lambda b_1 + (1-\lambda) b_2. \end{cases}$$

Formons la quantité : $Y - X^2$:

$$Y - X^2 = \lambda b_1 + (1-\lambda) b_2 - \lambda^2 a_1^2 - (1-\lambda)^2 a_2^2 - 2\lambda(1-\lambda) a_1 a_2$$

on sait que : $b_1 \geq a_1^2$ et $b_2 \geq a_2^2$, $\lambda \geq 0$ et $1-\lambda \geq 0$, d'où :

$$Y - X^2 \geq (\lambda - \lambda^2) a_1^2 + [(1-\lambda) - (1-\lambda)^2] a_2^2 - 2\lambda(1-\lambda) a_1 a_2$$

$$Y - X^2 \geq \lambda(1-\lambda) [a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2] = \lambda(1-\lambda) (a_1 - a_2)^2 \geq 0.$$

Il apparaît donc bien que : $G \in E$.

2° a) Pour $n=1$, la propriété souhaitée est évidente. Pour $n=2$ elle résulte de la question précédente (avec $\lambda = \frac{1}{2}$).

Supposons la propriété vraie au rang n ($n \geq 1$). Soit $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+1}$ points de E , G leur isobarycentre et G' l'isobarycentre des n premiers points. On sait (= associativité du barycentre) que

$$G = \text{Bar}((G', n), (A_{n+1}, 1))$$

or, en posant $\lambda = \frac{n}{n+1}$ qui est bien un réel de $[0, 1]$, on a aussi :

$$G = \text{Bar}((G', \lambda), (A_{n+1}, 1-\lambda)).$$

Le point G' appartient à E d'après l'hypothèse de récurrence, le point A_{n+1} appartient à E par définition. D'après la première question, on a donc $G \in E$.

b) L'isobarycentre des n points A_1, \dots, A_n appartenant à la courbe d'équation $y = x^2$ (donc appartenant aussi à E) a pour coordonnées :

$$\begin{cases} X = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \\ Y = \frac{b_1 + \dots + b_n}{n} = \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}. \end{cases}$$

En écrivant que ce point appartient à E , on obtient :

$$X^2 = \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^2 \leq Y = \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}$$

ou encore : $(a_1 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \dots + a_n^2)$.

Remarque

Cette inégalité est la meilleure possible, puisqu'elle devient une égalité si $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

4.5 1° On a, avec les notations usuelles dans un triangle :

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = ca \cos B$$

$$\text{et } \overline{BA} \cdot \overline{BC} = (\overline{BA'} + \overline{A'A}) \cdot \overline{BC} = \overline{BA'} \cdot \overline{BC}.$$

$$\text{De même : } \overline{CA} \cdot \overline{CB} = ba \cos C = \overline{CA'} \cdot \overline{CB}.$$

Par suite :

$$(b \cos C \overline{BA'} + c \cos B \overline{CA'}) \cdot \overline{BC} = bca \cos B - cba \cos B = 0.$$

Les deux vecteurs $b \cos C \overline{BA'} + c \cos B \overline{CA'}$ et \overline{BC} sont colinéaires et \overline{BC} n'est pas nul. La nullité de leur produit scalaire entraîne donc :

$$b \cos C \overline{BA'} + c \cos B \overline{CA'} = \vec{0}.$$

On sait que l'on a (dans tout triangle) :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

On en déduit : $\sin B \cos C \overline{BA'} + \sin C \cos B \overline{CA'} = \vec{0}$. (1)

Les deux réels $\beta = \sin B \cos C$ et $\gamma = \sin C \cos B$ sont de somme non nulle car $\beta + \gamma = \sin(\widehat{B} + \widehat{C}) = \sin \widehat{A} \neq 0$. L'égalité (1) exprime donc que A' est le barycentre de (B, β) et (C, γ) .

2° Le triangle ABC n'étant pas rectangle, $\cos B$ et $\cos C$ sont non nuls, d'où

$$A' = \text{Bar}((B, \sin B \cos C), (C, \sin C \cos B))$$

$$= \text{Bar} \left(\left(B, \frac{\sin B \cos C}{\cos B \cos C} \right), \left(C, \frac{\sin C \cos B}{\cos C \cos B} \right) \right)$$

$$= \text{Bar}(B, \text{tg } B), (C, \text{tg } C).$$

et, comme $z_1 + \bar{z}_1 = 2 \cos \frac{2\pi}{n}$, $z_1 \bar{z}_1 = 1$:

$$X_n = \frac{(1-q) \left(1 - q \cos \frac{2\pi}{n}\right)}{1 - 2q \cos \frac{2\pi}{n} + q^2}$$

De façon analogue :

$$Y_n = \frac{Z_n - \bar{Z}_n}{2i} = \frac{1-q}{2i} \left(\frac{1}{1 - qz_1} - \frac{1}{1 - q\bar{z}_1} \right) = \frac{1-q}{2i} \left(\frac{q(z_1 - \bar{z}_1)}{1 - q(z_1 + \bar{z}_1) + q^2 z_1 \bar{z}_1} \right)$$

et, comme $z_1 - \bar{z}_1 = 2i \sin \frac{2\pi}{n}$:

$$Y_n = \frac{(1-q)q \sin \frac{2\pi}{n}}{1 - 2q \cos \frac{2\pi}{n} + q^2}$$

2° a) On a les équivalences suivantes :

$$Z_n \text{ réel} \iff Y_n = 0 \iff n = 2.$$

b) Quand n tend vers l'infini, $\frac{2\pi}{n}$ tend vers 0, donc $\cos \frac{2\pi}{n}$ tend vers 1 et $\sin \frac{2\pi}{n}$ vers 0, en utilisant la continuité des fonctions sinus et cosinus en 0.

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = \frac{(1-q)^2}{1 - 2q + q^2} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n = 0.$$

4.4 1° L'égalité $\overline{OG} = \lambda \overline{OA_1} + (1-\lambda) \overline{OA_2}$ montre que :

$$\begin{cases} X = \lambda a_1 + (1-\lambda) a_2 \\ Y = \lambda b_1 + (1-\lambda) b_2. \end{cases}$$

Formons la quantité : $Y - X^2$:

$$Y - X^2 = \lambda b_1 + (1-\lambda) b_2 - \lambda^2 a_1^2 - (1-\lambda)^2 a_2^2 - 2\lambda(1-\lambda) a_1 a_2$$

on sait que : $b_1 \geq a_1^2$ et $b_2 \geq a_2^2$, $\lambda \geq 0$ et $1-\lambda \geq 0$, d'où :

$$Y - X^2 \geq (\lambda - \lambda^2) a_1^2 + [(1-\lambda) - (1-\lambda)^2] a_2^2 - 2\lambda(1-\lambda) a_1 a_2$$

$$Y - X^2 \geq \lambda(1-\lambda) [a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2] = \lambda(1-\lambda) (a_1 - a_2)^2 \geq 0.$$

Il apparaît donc bien que : $G \in E$.

2° a) Pour $n=1$, la propriété souhaitée est évidente. Pour $n=2$ elle résulte de la question précédente (avec $\lambda = \frac{1}{2}$).

Supposons la propriété vraie au rang n ($n \geq 1$). Soit $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+1}$ points de E , G leur isobarycentre et G' l'isobarycentre des n premiers points. On sait (« associativité » du barycentre) que

$$G = \text{Bar}((G', n), (A_{n+1}, 1))$$

or, en posant $\lambda = \frac{n}{n+1}$ qui est bien un réel de $[0, 1]$, on a aussi :

$$G = \text{Bar}((G', \lambda), (A_{n+1}, 1 - \lambda)).$$

Le point G' appartient à E , d'après l'hypothèse de récurrence, le point A_{n+1} appartient à E par définition. D'après la première question, on a donc $G \in E$.

b) L'isobarycentre des n points A_1, \dots, A_n appartenant à la courbe d'équation $y = x^2$ (donc appartenant aussi à E) a pour coordonnées :

$$\begin{cases} X = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \\ Y = \frac{b_1 + \dots + b_n}{n} = \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n} \end{cases}$$

En écrivant que ce point appartient à E , on obtient :

$$X^2 = \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^2 \leq Y = \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}$$

ou encore :

$$(a_1 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \dots + a_n^2).$$

Remarque

Cette inégalité est la meilleure possible, puisqu'elle devient une égalité si $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

4.5 1° On a, avec les notations usuelles dans un triangle :

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = ca \cos \widehat{B}$$

et $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = (\overline{BA'} + \overline{A'A}) \cdot \overline{BC} = \overline{BA'} \cdot \overline{BC}.$

De même : $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = ba \cos \widehat{C} = \overline{CA'} \cdot \overline{CB}.$

Par suite :

$$(b \cos \widehat{C} \overline{BA'} + c \cos \widehat{B} \overline{CA'}) \cdot \overline{BC} = bca \cos \widehat{B} - cba \cos \widehat{B} = 0.$$

Les deux vecteurs $b \cos \widehat{C} \overline{BA'} + c \cos \widehat{B} \overline{CA'}$ et \overline{BC} sont colinéaires et \overline{BC} n'est pas nul. La nullité de leur produit scalaire entraîne donc :

$$b \cos \widehat{C} \overline{BA'} + c \cos \widehat{B} \overline{CA'} = \vec{0}.$$

On sait que l'on a (dans tout triangle) :

$$\frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{C}}{c} \quad (1)$$

On en déduit : $\sin \widehat{B} \cos \widehat{C} \overline{BA'} + \sin \widehat{C} \cos \widehat{B} \overline{CA'} = \vec{0}.$

Les deux réels $\beta = \sin \widehat{B} \cos \widehat{C}$ et $\gamma = \sin \widehat{C} \cos \widehat{B}$ sont de somme non nulle car $\beta + \gamma = \sin(\widehat{B} + \widehat{C}) = \sin \widehat{A} \neq 0$. L'égalité (1) exprime donc que A' est le barycentre de (B, β) et (C, γ) .

2° Le triangle ABC n'étant pas rectangle, $\cos \widehat{B}$ et $\cos \widehat{C}$ sont non nuls, d'où

$$\begin{aligned} A' &= \text{Bar}((B, \sin \widehat{B} \cos \widehat{C}), (C, \sin \widehat{C} \cos \widehat{B})) \\ &= \text{Bar} \left(\left(B, \frac{\sin \widehat{B} \cos \widehat{C}}{\cos \widehat{B} \cos \widehat{C}} \right), \left(C, \frac{\sin \widehat{C} \cos \widehat{B}}{\cos \widehat{C} \cos \widehat{B}} \right) \right) \\ &= \text{Bar}(B, \text{tg } \widehat{B}), (C, \text{tg } \widehat{C})). \end{aligned}$$

Cross-produit des trois points pondérés (A, tg A), (B, tg B), (C, tg C).
Si la somme $tg A + tg B + tg C$ était nulle, le vecteur

$$\vec{V} = tg A \vec{MA} + tg B \vec{MB} + tg C \vec{MC}$$

serait indépendant de M. En plaçant M en A, on aurait

$$\vec{V} = tg B \vec{AB} + tg C \vec{AC} = (tg B + tg C) \vec{AA}$$

d'où $\vec{V} \neq \vec{0}$ et \vec{V} orthogonal à \vec{BC} , on verrait de même que \vec{V} est orthogonal à \vec{BA} par exemple, ce qui est absurde.

Les trois points pondérés (A, tg A), (B, tg B), (C, tg C) ont donc un barycentre H, par associativité, on a :

$$H = \text{Bar}(A, tg A, B, tg B + tg C)$$

ce qui prouve que H appartient à la hauteur (AA'). On voit de même que H appartient aux deux autres hauteurs.

4.6 1° On sait que les coordonnées du barycentre sont :

$$\begin{cases} x = \frac{2 \times 3 + 1 \times (-2) - 1 \times 1}{2 + 1 - 1} = \frac{3}{2} \\ y = \frac{2 \times 1 + 1 \times 3 - 1 \times 0}{2 + 1 - 1} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

L'étude de la fonction scalaire de Leibniz a montré que

$$2M\bar{A}^2 + M\bar{B}^2 - M\bar{C}^2 = (2 + 1 - 1)M\bar{G}^2 + 2G\bar{A}^2 + G\bar{B}^2 - G\bar{C}^2$$

ce qu'on peut retrouver immédiatement en écrivant :

$$\begin{aligned} 2M\bar{A}^2 + M\bar{B}^2 - M\bar{C}^2 &= 2(M\bar{G} + G\bar{A})^2 + (M\bar{G} + G\bar{B})^2 - (M\bar{G} + G\bar{C})^2 \\ &= 2M\bar{G}^2 + 2G\bar{A}^2 + G\bar{B}^2 - G\bar{C}^2 + 2M\bar{G} \cdot (2G\bar{A} + G\bar{B} - G\bar{C}) \\ &= 2M\bar{G}^2 + 2G\bar{A}^2 + G\bar{B}^2 - G\bar{C}^2 \end{aligned}$$

or :

$$\begin{aligned} G\bar{A}^2 &= \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2} \\ G\bar{B}^2 &= \left(-2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} + \frac{1}{4} = \frac{25}{2} \\ G\bar{C}^2 &= \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{25}{4} = \frac{13}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } 2M\bar{A}^2 + M\bar{B}^2 - M\bar{C}^2 = k \iff 2MG^2 + 9 + \frac{25}{2} - \frac{13}{2} = k$$

$$\iff MG^2 = \frac{k - 15}{2}$$

Si $k < 15$ l'ensemble cherché est vide.
Si $k = 15$ l'ensemble cherché est le singleton {G}.
Si $k > 15$ l'ensemble cherché est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{\frac{k-15}{2}}$.

Solution analytique

$$\begin{aligned} 2M\bar{A}^2 + M\bar{B}^2 - M\bar{C}^2 &= 2[(x-3)^2 + (y-1)^2] + [(x+2)^2 + (y-3)^2] - [(x-1)^2 + y^2] \\ &= 2x^2 + 2y^2 - 6x - 10y + 32 \end{aligned}$$

donc : $2M\bar{A}^2 + M\bar{B}^2 - M\bar{C}^2 = k \iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{k-15}{2}$

La discussion est la même.

2° La somme des coefficients des points pondérés (A, 2), (B, -1) et (C, -1) étant nulle, on sait que le vecteur :

$$\vec{V} = 2M\bar{A} - M\bar{B} - M\bar{C}$$

est indépendant de M. Appelons I le milieu du segment [B, C]. On a :

$$\vec{V} = -\vec{AB} - \vec{AC} = -2\vec{AI}$$

On sait que, pour tous les points M et M' du plan :

$$2M\bar{A}^2 - M\bar{B}^2 - M\bar{C}^2 = 2M'\bar{A}^2 - M'\bar{B}^2 - M'\bar{C}^2 + 2M\bar{M}' \cdot \vec{V}$$

ce qu'on peut retrouver ainsi :

$$\begin{aligned} 2M\bar{A}^2 - M\bar{B}^2 - M\bar{C}^2 &= 2(M\bar{M}' + M'\bar{A})^2 - (M\bar{M}' + M'\bar{B})^2 - (M\bar{M}' + M'\bar{C})^2 \\ &= 2M'\bar{A}^2 - M'\bar{B}^2 - M'\bar{C}^2 + 2M\bar{M}' \cdot (2M'\bar{A} - M'\bar{B} - M'\bar{C}) \\ &= 2M'\bar{A}^2 - M'\bar{B}^2 - M'\bar{C}^2 + 2M\bar{M}' \cdot \vec{V} \end{aligned}$$

En mettant M' en A, on obtient :

$$2M\bar{A}^2 - M\bar{B}^2 - M\bar{C}^2 = 8 \iff -\vec{AB} - \vec{AC}^2 + 2M\bar{A} \cdot \vec{V} = 8$$

$$\begin{aligned} \iff 4\vec{AM} \cdot \vec{AI} &= 42 \\ \iff \vec{AM} \cdot \vec{AI} &= \frac{21}{2} \end{aligned}$$

(car $\vec{AB}^2 = 29$ et $\vec{AC}^2 = 5$).

L'ensemble des points M est donc une droite orthogonale à (AI). On peut remarquer que cette droite passe par le point D(0, 1) car :

$$\begin{aligned} \vec{DA}^2 &= 9, \quad \vec{DB}^2 = 8, \quad \vec{DC}^2 = 2 \\ 2\vec{DA}^2 - \vec{DB}^2 - \vec{DC}^2 &= 18 - 8 - 2 = 8. \end{aligned}$$

Solution analytique

$$\begin{aligned} 2M\bar{A}^2 - M\bar{B}^2 - M\bar{C}^2 &= 2[(x-3)^2 + (y-1)^2] - [(x+2)^2 + (y-3)^2] - [(x-1)^2 + y^2] \\ &= -14x + 2y + 6 \end{aligned}$$

$$\text{donc : } 2M\bar{A}^2 - M\bar{B}^2 - M\bar{C}^2 = 8 \iff 7x - y + 1 = 0.$$

On reconnaît l'équation d'une droite passant par le point D(0, 1) et orthogonale à (AI).

3° On a vu que :

$$\vec{V} = 2M\bar{A} - M\bar{B} - M\bar{C} = 2M\vec{G}$$

d'où :

$$\|2M\bar{A} + M\bar{B} - M\bar{C}\| = \|2M\bar{A} - M\bar{B} - M\bar{C}\| \iff \|M\vec{G}\| = \|\vec{AI}\|$$

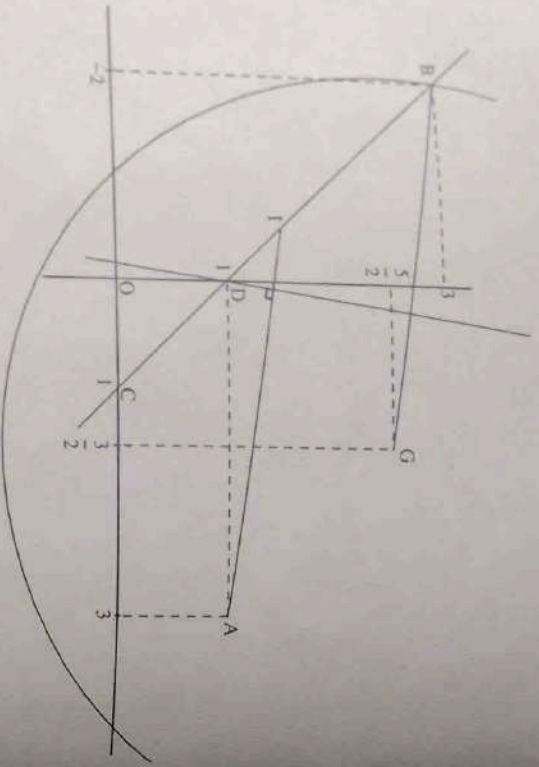
L'ensemble cherché est donc le cercle de centre G et de rayon $\|\vec{AI}\| = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$.

On peut remarquer que ce cercle passe par B, en effet :

$$\vec{V} = -2\vec{AI} = (2\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}) - 2\vec{MB} = 2\vec{MG} - 2\vec{MB} = 2\vec{BG}$$

d'où :

$$\vec{AI} = \vec{GB}.$$



4.7 Les trois points pondérés (A, 1), (B, 1), (C, -3) admettent un barycentre G puisque $1 + 1 - 3 \neq 0$.

On sait alors que, pour tout point M du plan P :

$$(1) \quad \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 - 3\vec{MC}^2 = -\vec{MG}^2 + \vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 - 3\vec{GC}^2.$$

D'où :

$$\vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 - 3\vec{MC}^2 = 5a^2 \iff \vec{MG}^2 = \vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 - 3\vec{GC}^2 - 5a^2.$$

Il reste à calculer maintenant $\vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 - 3\vec{GC}^2$ en fonction de a . Or, on peut appliquer successivement la formule (1) avec $M = A$, $M = B$, $M = C$, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{AB}^2 - 3\vec{AC}^2 &= -\vec{AG}^2 + \vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 - 3\vec{GC}^2 = \vec{GB}^2 - 3\vec{GC}^2 \\ \vec{BA}^2 - 3\vec{BC}^2 &= -\vec{BG}^2 + \vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 - 3\vec{GC}^2 = \vec{GA}^2 - 3\vec{GC}^2 \\ -3(\vec{CA}^2 + \vec{CB}^2) &= 3\vec{CG}^2 - 3(\vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 - 3\vec{GC}^2). \end{aligned}$$

En sommant ces trois égalités, on obtient :

$$\begin{aligned} 2\vec{AB}^2 - 6\vec{AC}^2 - 6\vec{BC}^2 &= -2\vec{GA}^2 - 2\vec{GB}^2 + 6\vec{GC}^2 \\ \vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 - 3\vec{GC}^2 &= -\vec{AB}^2 + 3\vec{AC}^2 + 3\vec{BC}^2 \\ \vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 - 3\vec{GC}^2 &= -16a^2 + 3 \times 9a^2 + 3 \times 25a^2 = 86a^2 \end{aligned}$$

de sorte que :

$$\vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 - 3\vec{MC}^2 = 5a^2 \iff \vec{MG}^2 = 81a^2 \iff \|\vec{MG}\| = 9a.$$

L'ensemble cherché est donc le cercle de centre G et de rayon $9a$.

4.8

1° On peut écrire :

$$\begin{aligned} \vec{AC}^2 &= (\vec{AI} + \vec{IC})^2 = \vec{AI}^2 + \vec{IC}^2 + 2\vec{AI} \cdot \vec{IC} \\ \vec{AB}^2 &= (\vec{AI} + \vec{IB})^2 = \vec{AI}^2 + \vec{IB}^2 + 2\vec{AI} \cdot \vec{IB}. \end{aligned}$$

En ajoutant, on obtient :

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= 2\vec{AI}^2 + \vec{IC}^2 + \vec{IB}^2 + 2\vec{AI} \cdot (\vec{IC} + \vec{IB}) \\ &= 2\vec{AI}^2 + \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

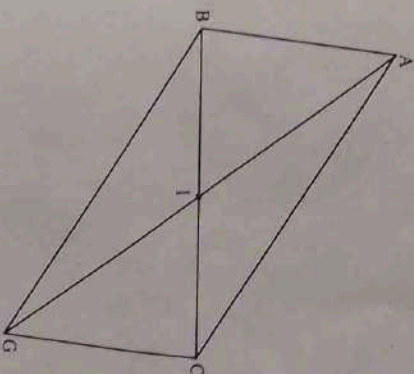
2° a) On sait que, pour tout point M du plan \mathcal{P} , on a :

$$\vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MA} = \vec{MG}$$

en plaçant le point M en A, on obtient :

$$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AG}$$

autrement dit, G est le quatrième sommet du parallélogramme construit sur A, B et C.



b) On a :

$$\begin{aligned} \varphi(M) &= (\vec{MG} + \vec{GB})^2 + (\vec{MG} + \vec{GC})^2 - (\vec{MG} + \vec{GA})^2 \\ &= \vec{MG}^2 + \vec{GB}^2 + \vec{GC}^2 - \vec{GA}^2 + \vec{MG} \cdot (\vec{GB} + \vec{GC} - \vec{GA}) \\ &= \vec{MG}^2 + \varphi(G) \end{aligned}$$

or :

$$\vec{GB}^2 = \vec{AC}^2 = b^2, \quad \vec{GC}^2 = \vec{AB}^2 = c^2, \quad \vec{GA}^2 = 4\vec{AI}^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$

d'où :

$$\varphi(M) = \vec{MG}^2 + a^2 - b^2 - c^2.$$

On a donc :

$$(\exists M \in \mathcal{P}) \varphi(M) = 0 \iff (\exists M \in \mathcal{P}) \quad \vec{MG}^2 = b^2 + c^2 - a^2$$

un tel point M existe si et seulement si $b^2 + c^2 - a^2 \geq 0$.

Remarque

On sait que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$. La condition $b^2 + c^2 - a^2 \geq 0$ est donc équivalente à $\cos \hat{A} \geq 0$, c'est-à-dire au fait que l'angle en A du triangle ABC est aigu ou droit.

5 | Applications affines

Mêmes notations qu'au chapitre 4.

□ Applications affines

Définition

On dit qu'une application f de \bar{X} dans \bar{X} est **affine** si et seulement s'il existe un endomorphisme φ de \bar{X} et un vecteur b tels que :

$$(1) \quad \begin{aligned} (\forall \vec{v} \in \bar{X}) \quad f(\vec{v}) &= \varphi(\vec{v}) + \vec{b}. \\ f(\vec{v}) &= \varphi(\vec{v}) + b. \end{aligned}$$

Exemples

- Tout endomorphisme de \bar{X} est une application affine ($\vec{b} = \vec{0}$).
- Toute application constante de \bar{X} dans \bar{X} est affine (φ est l'endomorphisme nul).
- Toute application $f : \vec{v} \mapsto \vec{v} + \vec{b}$, où \vec{b} est donné, est affine ($\varphi = \text{id}_{\bar{X}}$).

Définition

On dit qu'une application : $M \mapsto M'$ de X dans X est affine si et seulement s'il existe un point O de X tel que l'application : $\overline{OM} \mapsto \overline{OM'}$ de \bar{X} dans \bar{X} soit affine.

Théorème 1

Une application de X dans X est **affine** si et seulement s'il existe un couple de points homologues (O, O') et un endomorphisme φ de \bar{X} tels que, quel que soit le couple de points homologues (M, M') :

$$(2) \quad \overline{OM'} = \varphi(\overline{OM}).$$

Théorème 2

Une application de X dans X est affine si et seulement s'il existe un endomorphisme φ de \bar{X} tel que, quels que soient les couples de points homologues (M, M') et (N, N') :

$$(3) \quad \overline{M'N'} = \varphi(\overline{MN}).$$

Définition

L'endomorphisme intervenant dans les théorèmes précédents est unique, on l'appelle **endomorphisme associé à f** ou encore **partie linéaire de f** .

□ Détermination d'une application affine

Théorème

Soit O et O' deux points de X et φ un endomorphisme de \bar{X} . Il existe une application affine f unique de X dans X telle que $O' = f(O)$ et d'endomorphisme associé φ .

Théorème

Soit (A_1, A_2, \dots, A_n) un repère affine de X et des points A'_1, A'_2, \dots, A'_n de X .

Il existe une application affine f unique de X dans X telle que les images par f des points A_1, A_2, \dots, A_n soient respectivement les points A'_1, A'_2, \dots, A'_n .

Détermination analytique (cas où X est l'espace E , par exemple)

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace E . L'application f de E dans E qui au point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ est affine si et seulement s'il existe des réels $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, x_0, y_0, z_0$ tels que :

$$\begin{cases} x' = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + x_0 \\ y' = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + y_0 \\ z' = \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + z_0. \end{cases}$$

L'image de O par f est alors $O'(x_0, y_0, z_0)$ et l'endomorphisme associé à f a pour matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

□ Propriétés des applications affines

- On dit qu'une application f de X dans X **conservé le barycentre** si, pour toute famille $((A_i, \alpha_i))_{i \in \{1, \dots, n\}}$ de points pondérés de barycentre G , $(\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0)$, la famille $((A'_i, \alpha_i))_{i \in \{1, \dots, n\}}$ a pour barycentre G' .

Théorème

- Une application f de X dans X est affine si, et seulement si, elle **conservé le barycentre**.
- Une **application affine conserve l'alignement** (trois points alignés ont des images alignées ou confondues).
- Une **application affine conserve la coplanarité** (quatre points coplanaires ont des images coplanaires ou alignées ou confondues).
- Une **application affine conserve le parallélisme**.
- Une partie C de X est dite **convexe** si, et seulement si, $(\forall (M, N) \in C^2) [M, N] \subset C$.

L'image d'une partie convexe par une application affine est convexe.

□ Applications affines injectives, surjectives, bijectives

Théorème

Soit f une application affine de X dans X et φ son endomorphisme associé :

- Les 6 propositions suivantes sont équivalentes :
- (1) f est injective
 - (2) f est surjective
 - (3) f est bijective
 - (4) φ est injective
 - (5) φ est surjective
 - (6) φ est bijective.

□ Composition des applications affines

Théorème

Soit f et g deux applications affines de X dans X , d'endomorphismes associés φ et ψ .
La composée $g \circ f$ est une application affine de X dans X d'endomorphisme associé $\psi \circ \varphi$.

Théorème

L'ensemble des bijections affines d'un espace affine X , muni de la composition des applications, est un groupe.
Ce groupe est appelé le *groupe affine* de X .

□ Translations affines

Définition

Soit \vec{u} un vecteur donné de \vec{X} . On appelle **translation affine** $t_{\vec{u}}$ de vecteur \vec{u} l'application de X dans X qui à tout point M de X associe le point M' de X tel que :

$$\overline{MM'} = \vec{u}.$$

Théorème

Soit f une application de X dans X . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) f est une translation affine.
- (2) f est affine et d'endomorphisme associé $\text{id}_{\vec{X}}$.
- (3) Quels que soient les points M et N d'images M' et N' ,
 $\overline{M'N'} = \overline{MN}$.

Points invariants

- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, $t_{\vec{u}}$ n'a aucun point invariant.
- Si $\vec{u} = \vec{0}$, $t_{\vec{0}} = \text{id}_X$: tous les points de X sont invariants.

Détermination analytique

Soit $X = E$, rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. L'application

$$f : M(x, y, z) \mapsto M'(x', y', z')$$

est une translation si, et seulement s'il existe $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \\ z' = z + z_0. \end{cases}$$

Le groupe des translations

L'ensemble \vec{G} des translations muni de la composition des applications est un groupe commutatif. C'est un sous-groupe du groupe affine de X .

□ Homothéties affines

Définition

Soit I un point donné de X et k un nombre réel donné *non nul*.

On appelle **homothétie affine** de centre I et de rapport k l'application de X dans X qui à tout point M de X associe le point M' de X tel que :

$$\overline{IM'} = k\overline{IM}.$$

Théorème

Soit f une application de X dans X et k un réel différent de 0 et de 1. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1. f est une homothétie affine.
- 2. f est affine et d'endomorphisme associé l'homothétie vectorielle de rapport k .
- 3. Quels que soient les points M et N d'images M' et N'
 $\overline{M'N'} = k\overline{MN}$.

Points invariants

Si $k \neq 1$, I est le seul point invariant.

Si $k = 1$, $H(I, k) = \text{id}_X$: tous les points de X sont invariants.

Détermination analytique

Soit $X = E$, rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. L'application

$$f : M(x, y, z) \mapsto M'(x', y', z')$$

est une homothétie affine si, et seulement s'il existe $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ et k non nul tels que :

$$\begin{cases} x' = kx + x_0 \\ y' = ky + y_0 \\ z' = kz + z_0. \end{cases}$$

Le groupe des homothéties de centre donné

L'ensemble \mathcal{H}_I des homothéties de centre I muni de la composition des applications est un groupe commutatif. C'est un sous-groupe du groupe affine de X .

Le groupe des homothéties et translations

L'ensemble des homothéties et translations de X muni de la composition des applications est un groupe. C'est un sous-groupe du groupe affine de X .

□ Projections affines

Pour l'étude des projections, symétries et affinités, nous introduisons les notations suivantes. Y désigne un point ou une droite ou un plan de X , ou encore X entier. Soit \vec{Y} la direction de Y et \vec{Z} un *supplémentaire* de \vec{Y} dans \vec{X} . Étant donné un point M de X , on appelle Z_M le point, la droite, le plan ou l'espace passant par M et de direction \vec{Z} . On sait que $Y \cap Z_M$ est un singleton.

Définition

On appelle **projection affine** de X sur Y de direction \vec{Z} (ou parallèlement à \vec{Z}) l'application de X dans X qui à tout point M de X associe le point d'intersection M' de Y avec Z_M . Le point M' est encore caractérisé par les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} M' \in Y \\ \overline{MM'} \in \vec{Z}. \end{cases}$$

On dit que M' est le *projeté* de M sur Y parallèlement à \vec{Z} . Y s'appelle *base* de la projection.

Lorsque \vec{Y} et \vec{Z} sont orthogonaux, on dit que la projection est *orthogonale*.

Théorème

1. La projection affine p de X sur Y parallèlement à \vec{Z} est une application affine dont l'endomorphisme associé est la projection vectorielle de \vec{X} sur \vec{Y} parallèlement à \vec{Z} .
2. p est une application affine de X dans X vérifiant $p^2 = p$.
3. L'ensemble des points invariants par p est Y .

Théorème

Toute application affine p de X dans X vérifiant $p^2 = p$ est une projection affine.

Classification des diverses projections affines

Si X est la droite :

$Y = X$	$\vec{Z} = \{\vec{0}\}$	$p = \text{id}_X$
$Y = \{A\}$	$\vec{Z} = \vec{X}$	p est l'application constante : $M \mapsto A$

Si X est le plan :

$Y = X$	$\vec{Z} = \{\vec{0}\}$	$p = \text{id}_X$
Y est une droite D	\vec{Z} est une droite vectorielle ($\vec{Z} \neq \vec{D}$)	p est la projection de X sur D parallèlement à \vec{Z}
$Y = \{A\}$	$\vec{Z} = \vec{X}$	p est l'application constante $M \mapsto A$

Si X est l'espace :

$Y = X$	$\vec{Z} = \{\vec{0}\}$	$p = \text{id}_X$
Y est un plan P	\vec{Z} est une droite vectorielle ($\vec{Z} \notin \vec{P}$)	p est la projection de X sur P parallèlement à \vec{Z}
Y est une droite D	\vec{Z} est un plan vectoriel ($\vec{D} \subset \vec{Z}$)	p est la projection de X sur D parallèlement à \vec{Z}
$Y = \{A\}$	$\vec{Z} = \vec{X}$	p est l'application constante $M \mapsto A$

□ Symétries affines

Définition

On appelle **symétrie affine** par rapport à Y de direction \vec{Z} (ou parallèlement à \vec{Z}), l'application de X dans X qui à tout point M associe le point M' tel que $I = p(M)$ soit le milieu du bipoïnt (M, M') .

On dit que M' est le *symétrique* de M par rapport à Y parallèlement à \vec{Z} .

Si Y est une droite, Y s'appelle l'*axe* de la symétrie. Dans le cas général Y est appelé *base* de la symétrie.

Si $Y = \{A\}$ et $\vec{Z} = \vec{X}$, la symétrie est appelée **symétrie centrale** de centre A ou encore **symétrie par rapport au point A** . C'est aussi l'homothétie de centre A et de rapport -1 .

Si \vec{Y} et \vec{Z} sont orthogonaux, on dit que la symétrie est **orthogonale**.

Si Y est une droite et \vec{Y} et \vec{Z} orthogonaux, la symétrie est dite **axiale**.

Théorème

1. La symétrie affine s par rapport à Y parallèlement à \vec{Z} est une application affine dont l'endomorphisme associé est la symétrie vectorielle par rapport à Y parallèlement à \vec{Z} .
2. s est une application affine involutive de X , donc une bijection affine.
3. L'ensemble des points invariants par s est Y .

Théorème

Toute application affine involutive de X est une symétrie affine.

Classification des diverses symétries affines

Si X est la droite :

$Y = X$	$\vec{Z} = \{\vec{0}\}$	$s = \text{id}_X$
$Y = \{A\}$	$\vec{Z} = \vec{X}$	s est la symétrie par rapport à A

Si X est le plan :

$Y = X$	$\vec{Z} = \{\vec{0}\}$	$s = \text{id}_X$
Y est une droite D	\vec{Z} est une droite vectorielle ($\vec{Z} \neq \vec{D}$)	s est la symétrie par rapport à D parallèlement à \vec{Z}
$Y = \{A\}$	$\vec{Z} = \vec{X}$	s est la symétrie par rapport à A .

Si X est l'espace :

$Y = X$	$\vec{Z} = \{\vec{0}\}$	$s = \text{id}_X$
Y est un plan P	\vec{Z} est une droite vectorielle ($\vec{Z} \notin P$)	s est la symétrie par rapport à P parallèlement à \vec{Z}
Y est une droite D	\vec{Z} est un plan vectoriel ($\vec{D} \notin \vec{Z}$)	s est la symétrie par rapport à D parallèlement à \vec{Z}
$Y = \{A\}$	$\vec{Z} = \vec{X}$	s est la symétrie par rapport à A

□ **Affinities**

Définition

Soit k un réel donné.
On appelle **affinité** par rapport à Y de direction \vec{Z} (ou parallèlement à \vec{Z}) et de rapport k l'application de X dans X qui à tout point M associe le point M' tel que :

$$\vec{MM'} = k\vec{IM}$$
 où $I = p(M)$.

Si Y est une droite, Y s'appelle l'axe d'affinité. Dans le cas général, Y est la base de l'affinité. Si \vec{Y} et \vec{Z} sont orthogonaux, on dit que l'affinité est orthogonale.

Si $k = 0$, on retrouve la projection de X sur Y parallèlement à \vec{Z} .

Si $k = -1$, on retrouve la symétrie par rapport à Y parallèlement à \vec{Z} .

Si $k \neq 0$ et $Y = \{A\}$, on retrouve l'homothétie de centre A et de rapport k .

Théorème

Toute affinité est une application affine.

Points invariants

Si $k \neq 1$, l'ensemble des points invariants est Y .

Si $k = 1$, tous les points de X sont invariants.

ÉNONCÉS DES EXERCICES ET PROBLÈMES

Applications affines

5.1 Soit, dans l'espace E rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points :

- $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$, $D(1, 1, 1)$
 $A'(2, 4, 1)$, $B'(2, 2, 1)$, $C'(1, 1, 1)$, $D'(3, 3, 3)$.

1° Montrer qu'il existe une application affine f unique de E dans E telle que :

$$f(A) = A', \quad f(B) = B', \quad f(C) = C', \quad f(D) = D'.$$

2° Calculer les coordonnées x', y', z' du point M' image de $M(x, y, z)$ par l'application affine f .

5.2 Soit P un plan rapporté à un repère cartésien (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère l'application f de P dans P qui associe à tout point $M(x, y)$ le point $M'(x', y')$ tel que :

$$(1) \begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = x - y + 2. \end{cases}$$

- 1° Montrer que f est une application affine bijective. Quelle est la matrice de l'endomorphisme associé à f dans la base (\vec{i}, \vec{j}) ?
- 2° Chercher les points invariants par f .
- 3° Soit D la droite d'équation $ax + by + c = 0$ ($(a, b) \neq (0, 0)$). Déterminer $D' = f(D)$.
- 4° Quelles sont les droites D parallèles à leurs images? les droites D invariantes par f (c'est-à-dire telles que $f(D) = D$)?

5.3 On considère le plan P rapporté au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit $f_{a,b}$ l'application de P dans P qui transforme le point $M(x, y)$ en le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{a+b}{2}x + \frac{a-b}{2}y \\ y' = \frac{a-b}{2}x + \frac{a+b}{2}y \end{cases}$$

où a et b sont des constantes réelles données. Soit $\mathcal{F} = \{f_{a,b}; (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

- 1° Pour quelles valeurs de a et de b , $f_{a,b}$ est-elle bijective?
- 2° Montrer que la composée de deux éléments de \mathcal{F} est encore dans \mathcal{F} . Lorsque $f_{a,b}$ est bijective, vérifier que $f_{a,b}^{-1}$ appartient à \mathcal{F} .
- 3° Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que les points O, M, M' soient alignés.
- 4° On suppose $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$. Quelles sont les droites D du plan qui sont parallèles à leurs images? Quelles sont les droites D globalement invariantes?

5.4 On considère l'espace E rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit f l'application affine de E dans E telle que $f(O) = O$ et d'endomorphisme associé φ défini par :

$$\varphi(\vec{i}) = \vec{j}, \quad \varphi(\vec{j}) = \vec{k}, \quad \varphi(\vec{k}) = \vec{i}.$$

- 1° Calculer les coordonnées x', y', z' du point M' image de $M(x, y, z)$ par f .
- 2° Montrer que f est bijective.
- 3° Déterminer l'ensemble des points invariants par f .
- 4° Déterminer les plans invariants par f .
- 5° Déterminer les droites parallèles à leurs images, les droites invariantes par f .

5.5 (O, \vec{i}, \vec{j}) est un repère cartésien du plan P , Γ est la courbe d'équation :

$$x^2 - y^2 - 2xy - x + y = 0 \quad \text{dans } (O, \vec{i}, \vec{j}).$$

1° On définit la transformation f de P qui à tout point M de coordonnées x et y dans (O, \vec{i}, \vec{j}) associe le point M' de coordonnées (x', y') dans ce même repère où :

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y - 2 \\ y' = 2x + y - 1 \end{cases}$$

Montrer que f est une bijection affine laissant Γ globalement invariante.

- 2° M_0 est le point de coordonnées 3 et 1 dans (O, \vec{i}, \vec{j}) . On définit la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$(M_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad M_{n+1} = f(M_n),$$
- par :

$$(M_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad M_n \in \Gamma.$$

Montrer : On note (x_n, y_n) le couple de coordonnées de M_n . Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites strictement croissantes d'entiers naturels et que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty.$$

(D'après Bac. E. Bordeaux. Session de remplacement 1980.)

Convexité

5.6 On dit qu'une partie S de l'espace E est étoilée par rapport à un point A de S si :

$$(\forall M \in S) \quad [A, M] \subset S.$$

- 1° Montrer qu'une partie convexe est étoilée. Donner un exemple montrant que la réciproque est fautive.
- 2° Soit S une partie étoilée et C l'ensemble des points par rapport auxquels S est étoilée, c'est-à-dire :

$$C = \{A \in S; \forall M \in S [A, M] \subset S\}.$$

Montrer que C est convexe.

5.7 Soit C_1 et C_2 deux parties convexes du plan ou de l'espace, λ un réel donné, $\lambda \in [0, 1]$. Montrer que l'ensemble

$$C = \{\text{Bar}(M_1, \lambda), (M_2, 1 - \lambda); M_1 \in C_1, M_2 \in C_2\}$$

est convexe.

Translations, Homothéties

5.8 On sait qu'une translation, ou une homothétie transforme toute droite en une droite parallèle. On se propose de démontrer la réciproque. Soit f une application affine de X dans X (X est le plan ou l'espace) transformant toute droite D en une droite parallèle $f(D) = D'$.

- 1° Démontrer qu'il existe au moins deux points distincts A et B ayant pour images respectives deux points distincts A' et B' .
- 2° Démontrer qu'il existe une homothétie ou une translation g telle que A et B ont pour images respectivement A' et B' .
- 3° Démontrer que, pour tout point M n'appartenant pas à la droite (AB) :

$$f(M) = g(M).$$
- 4° Démontrer que, pour tout point M de la droite (AB) : $f(M) = g(M)$. Par suite $f = g$.

5.9

Soit E l'espace, $H(L, k)$ une homothétie de centre L et de rapport $k \neq 1$, $t_{\vec{a}}$ la translation de vecteur \vec{a} .

1° Démontrer que l'application de E dans E :

$$f = t_{\vec{a}} \circ H(L, k) \circ t_{\vec{a}}$$

est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

2° Démontrer que l'application de E dans E :

$$g = H\left(1, \frac{1}{k}\right) \circ t_{\vec{a}} \circ H(L, k)$$

est une translation dont on calculera le vecteur en fonction de \vec{a} et k .

Projections affines

5.10

Dans l'espace E rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit le plan P d'équation : $x - 3y + z - 1 = 0$, la droite D contenant le point $A(1, 0, 1)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{d}(-2, 1, 1)$.

Définir analytiquement la projection p de E sur P parallèlement à D et la projection q de E sur D parallèlement à P .

5.11

Soit E l'espace rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application f de E dans E qui associe à tout point $M(x, y, z)$ le point $M'(x', y', z')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = -x - y + 2z - 1 \\ y' = -2x + 2z - 1 \\ z' = -2x - y + 3z - 1 \end{cases}$$

1° Quelle est la nature de f ? Donner les éléments qui la caractérisent.

2° Quelle est l'image de la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

3° Quelle est l'image de la droite d'équations :

$$x - 1 = y - 2 = z - 3.$$

4° Quelle est l'image du plan d'équation :

$$3x - y - 2z + 2 = 0.$$

5.12

Un plan P étant rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , soit f l'application de P dans P définie analytiquement par :

$$(1) \quad \begin{cases} x' = 8x - 4y - 2 \\ y' = 8x - 4y - 1 \end{cases}$$

1° Démontrer que f est une application affine et déterminer la matrice de son endomorphisme φ associé dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

2° Démontrer qu'il existe un point invariant I unique par f .

3° Démontrer que l'image de P par f est une droite D .

4° Définir analytiquement la projection p de P sur D , de direction le noyau de φ .

5° Démontrer que l'on calculera.

de rapport que l'on calculera.

de rapport que l'on calculera.

Symétries affines

5.13 Les notations sont les mêmes qu'à l'exercice 5.10. Définir analytiquement la symétrie s_1 par rapport à P parallèlement à D et la symétrie s_2 par rapport à D parallèlement à P .

5.14

Soit E l'espace rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application f de E dans E qui au point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = 2x - y + z + 2 \\ y' = 2x - y + 2z + 4 \\ z' = -x + y - 2 \end{cases}$$

1° Nature de f ? Donner ses éléments caractéristiques.

2° Quelle est l'image de la droite passant par le point $A(1, 0, 1)$ et de vecteur-directeur $\vec{d}(2, 1, 3)$?

3° Quelle est l'image du plan d'équation $x + y - 3z + 1 = 0$?

5.15

Soit E l'espace rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit f l'application affine de E dans E qui, à tout point M de coordonnées (x, y, z) associe le point M' dont les coordonnées (x', y', z') sont :

$$\begin{cases} x' = -x + z \\ y' = -2x + y + z + 2 \\ z' = z + 4 \end{cases}$$

1° Démontrer que l'endomorphisme φ associé à f est involutif; le déterminer.

2° Quel est l'ensemble des points invariants par f ?

3° Soit g la symétrie affine d'endomorphisme associé φ qui laisse invariant le point $A(0, 1, 2)$. Soit t la translation de vecteur $2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$. Vérifier que $f = t \circ g = g \circ t$.

(D'après Bac. C. Dijon 1980.)

Affinités

5.16

Les notations sont les mêmes qu'à l'exercice 5.10. Définir analytiquement l'affinité f de base P , de direction \bar{D} et de rapport k donné. Vérifier les formules trouvées dans les exercices 5.10 et 5.13.

5.17

Soit E l'espace rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application affine f de E dans E transformant le point $M(x, y, z)$ en

5.9

Soit E l'espace, $H(L, k)$ une homothétie de centre I et de rapport $k \neq 1$, t_a la translation de vecteur \vec{a} .

1° Démontrer que l'application de E dans E :

$$f = t_{-a} \circ H(L, k) \circ t_a$$

est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

2° Démontrer que l'application de E dans E :

$$g = H\left(1, \frac{1}{k}\right) \circ t_a \circ H(L, k)$$

est une translation dont on calculera le vecteur en fonction de \vec{a} et k .

Projections affines

5.10

Dans l'espace E rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit le plan P d'équation : $x - 3y + z - 1 = 0$, la droite D contenant le point $A(1, 0, 1)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{d}(-2, 1, 1)$.

Définir analytiquement la projection p de E sur P parallèlement à D et la projection q de E sur D parallèlement à P.

5.11

Soit E l'espace rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application f de E dans E qui associe à tout point $M(x, y, z)$ le point $M'(x', y', z')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = -x - y + 2z - 1 \\ y' = -2x + 2z - 1 \\ z' = -2x - y + 3z - 1 \end{cases}$$

1° Quelle est la nature de f ? Donner les éléments qui la caractérisent.

2° Quelle est l'image de la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

3° Quelle est l'image de la droite d'équations :

$$x - 1 = y - 2 = z - 3.$$

4° Quelle est l'image du plan d'équation :

$$3x - y - 2z + 2 = 0.$$

5.12

Un plan P étant rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , soit f l'application de P dans P définie analytiquement par :

$$(1) \quad \begin{cases} x' = 8x - 4y - 2 \\ y' = 8x - 4y - 1 \end{cases}$$

1° Démontrer que f est une application affine et déterminer la matrice de son endomorphisme φ associé dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

2° Démontrer qu'il existe un point invariant I unique par f .

3° Démontrer que l'image de P par f est une droite D.

4° Définir analytiquement la projection p de P sur D, de direction le noyau de φ .

5° Démontrer que $f = p \circ H = H \circ p$, H étant une homothétie de centre I et de rapport que l'on calculera.

6° Démontrer que l'on calculera.

Symétries affines

5.13

Les notations sont les mêmes qu'à l'exercice 5.10. Définir analytiquement la symétrie s_1 par rapport à P parallèlement à D et la symétrie s_2 par rapport à D parallèlement à P.

5.14

Soit E l'espace rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application f de E dans E qui au point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = 2x - y + z + 2 \\ y' = 2x - y + 2z + 4 \\ z' = -x + y - 2z \end{cases}$$

1° Nature de f ? Donner ses éléments caractéristiques.

2° Quelle est l'image de la droite passant par le point $A(1, 0, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{d}(2, 1, 3)$?

3° Quelle est l'image du plan d'équation $x + y - 3z + 1 = 0$?

5.15

Soit E l'espace rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit f l'application affine de E dans E qui, à tout point M de coordonnées (x, y, z) associe le point M' dont les coordonnées (x', y', z') sont :

$$\begin{cases} x' = -x + z \\ y' = -2x + y + z + 2 \\ z' = z + 4 \end{cases}$$

1° Démontrer que l'endomorphisme φ associé à f est involutif; le déterminer.

2° Quel est l'ensemble des points invariants par f ?

3° Soit g la symétrie affine d'endomorphisme associé φ qui laisse invariant le point $A(0, 1, 2)$. Soit t la translation de vecteur $2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$. Vérifier que $f = t \circ g = g \circ t$.

(D'après Bac. C. Dijon 1980.)

Affinités

5.16

Les notations sont les mêmes qu'à l'exercice 5.10. Définir analytiquement l'affinité f de base P, de direction \vec{D} et de rapport k donné. Vérifier les formules trouvées dans les exercices 5.10 et 5.13.

5.17

Soit E l'espace rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application affine f de E dans E transformant le point $M(x, y, z)$ en

$M(x', y', z')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y + 2z - 2 \\ y' = 4x - 7y + 4z - 4 \\ z' = -x + 2y + 1. \end{cases}$$

- 1° Déterminer l'ensemble P des points invariants.
- 2° Montrer que le vecteur $\overline{MM'}$ appartient à une direction fixe $\vec{\Delta}$.
- 3° Soit l'intersection de P et de la droite passant par M et dirigée par $\vec{\Delta}$. Comparer les vecteurs \overline{IM} et $\overline{IM'}$. En déduire que f est une affinité.

5.18* Soit E l'espace et \vec{E} sa direction.

1° Soit φ un endomorphisme de \vec{E} vérifiant :

$$\forall \vec{u} \in \vec{E} \quad \varphi^2(\vec{u}) + \varphi(\vec{u}) - 2\vec{u} = \vec{0}.$$

On pose : $\vec{E}_1 = \{\vec{u} \in \vec{E}; \varphi(\vec{u}) = \vec{u}\}$ et $\vec{E}_2 = \{\vec{u} \in \vec{E}; \varphi(\vec{u}) = -2\vec{u}\}$.

Montrer que \vec{E}_1 et \vec{E}_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de \vec{E} .

2° On se propose de déterminer toutes les applications affines f de E dans E telles que, pour tout M de E, M soit le milieu de $(f(M), f^2(M))$. Soit f une telle application.

- a) Soit $M_0 \in E$ et $I_0 = \text{Bar}((M_0, 2), (f(M_0), 1))$. Que peut-on dire de $f(I_0)$?
- b) Que peut-on dire de l'endomorphisme φ de \vec{E} associé à f?
- c) Montrer que f est une affinité.
- d) Conclure.

Révision

5.19 Le plan (P) est muni d'un repère cartésien (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère l'application affine $f_{a,b}$ qui laisse O invariant et dont l'endomorphisme associé a pour matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a+b & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$$

dans la base (\vec{i}, \vec{j}) . Tout point M de coordonnées (x, y) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) a pour image $M' = f_{a,b}(M)$ de coordonnées (x', y') .

1° a) Calculer x' et y' à l'aide de x et y; $f_{a,b}$ peut-elle être une translation; une homothétie?

b) Pour cette question on pose $a=0, b=\frac{1}{4}$. Soit M_0 le point de coordonnées $(1, 0)$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_{n+1} = f_{0, \frac{1}{4}}(M_n).$$

On appelle (x_n, y_n) les coordonnées de M_n . On pose :

$$u_n = x_n - ky_n \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Montrer qu'il existe deux valeurs de k (notées k' et k'') telles que la suite $(u_n), n \in \mathbb{N}$, soit géométrique.

Calculer $x_n - k'y_n$ et $x_n - k''y_n$ à l'aide de n. En déduire x_n et y_n . Calculer les limites de x_n et y_n quand n tend vers $+\infty$. Calculer la limite de y_n quand n tend vers $+\infty$ (on vérifiera $x_n \neq 0$).

On appelle G_n l'isobarycentre de M_0, M_1, \dots, M_n . Calculer les coordonnées de G_n . Quelle est leur limite quand n tend vers $+\infty$?

2° a) a et b sont à nouveau quelconques.

Déterminer l'ensemble des points M tels que O, M et M' soient alignés. Montrer que, pour $b \neq 0$, cet ensemble est la réunion de deux droites D_1 et D_2 sécantes en O, D_1 étant dirigée par $\vec{e}_1 = \vec{i} - \vec{j}$ et D_2 par $\vec{e}_2 = 2\vec{i} + \vec{j}$. Quelle est la restriction de $f_{a,b}$ à D_1 ? à D_2 ?

b) On prend le nouveau repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Montrer que, dans ce repère, l'expression analytique de $f_{a,b}$ est :

$$\begin{cases} X' = (a-b)X \\ Y' = (a+2b)Y. \end{cases}$$

3° Pour quelles valeurs de a et b, $f_{a,b}$ est-elle involutive? Dans chaque cas trouvé, indiquer la nature de $f_{a,b}$ et préciser ses éléments caractéristiques.

(Bac. C. Lille. Session de remplacement 1979, partiel.)

5.20 Soit P un plan rapporté au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . On note \vec{P} la direction de P.

A. Soit f l'application affine de P dans P qui au point $M(x, y)$ fait correspondre le point $M'(x', y')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = 3x + 5y \\ y' = -2x - 3y - 2. \end{cases}$$

1° a) Démontrer que f admet un seul point invariant.

b) Quelle est la matrice, dans la base (\vec{i}, \vec{j}) , de l'endomorphisme φ associé à f?

2° Quelle est la nature géométrique de l'application $f^2 = f \circ f$?

Caractériser $f^4 = f \circ f \circ f \circ f$.

3° Soit M un point quelconque de P; on note :

$$M_1 = f(M); \quad M_2 = f(M_1); \quad M_3 = f(M_2).$$

Démontrer que l'isobarycentre des quatre points M, M_1, M_2, M_3 est indépendant de M. Quel est ce point?

Que peut-on dire du quadrilatère de sommets M, M_1, M_2, M_3 ?

Faire une figure en partant de $M(-4, 2)$.

B. Soit G l'ensemble des applications affines g de P dans P telles que $g^4 = \text{id}_P$. On note ψ l'endomorphisme associé à g.

1° Soit M un point quelconque de P. On note :

$$M_1 = g(M); \quad M_2 = g(M_1); \quad M_3 = g(M_2).$$

Démontrer que le point Ω , isobarycentre des quatre points M, M_1, M_2, M_3 est invariant par g.

$M(x', y', z')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y + 2z - 2 \\ y' = 4x - 7y + 4z - 4 \\ z' = -x + 2y + 1. \end{cases}$$

- 1° Déterminer l'ensemble P des points invariants.
- 2° Montrer que le vecteur MM' appartient à une direction fixe $\vec{\Delta}$.
- 3° Soit l'intersection de P et de la droite passant par M et dirigée par $\vec{\Delta}$. Comparer les vecteurs \overline{MM} et $\overline{MM'}$. En déduire que f est une affinité.

5.18* Soit E l'espace et \vec{E} sa direction.

1° Soit φ un endomorphisme de \vec{E} vérifiant :

$$\forall \vec{u} \in \vec{E} \quad \varphi^2(\vec{u}) + \varphi(\vec{u}) - 2\vec{u} = \vec{0}.$$

On pose : $\vec{E}_1 = \{\vec{u} \in \vec{E}; \varphi(\vec{u}) = \vec{u}\}$ et $\vec{E}_2 = \{\vec{u} \in \vec{E}; \varphi(\vec{u}) = -2\vec{u}\}$.

Montrer que \vec{E}_1 et \vec{E}_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de \vec{E} .
 2° On se propose de déterminer toutes les applications affines f de E dans E telles que, pour tout M de E, M soit le milieu de $(f(M), f^2(M))$. Soit f une telle application.

- a) Soit $M_0 \in E$ et $I_0 = \text{Bar}((M_0, 2), (f(M_0), 1))$. Que peut-on dire de $f(I_0)$?
- b) Que peut-on dire de l'endomorphisme φ de \vec{E} associé à f?
- c) Montrer que f est une affinité.
- d) Conclure.

Révision

5.19 Le plan (P) est muni d'un repère cartésien (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère l'application affine $f_{a,b}$ qui laisse O invariant et dont l'endomorphisme associé à pour matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a + b & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$$

dans la base (\vec{i}, \vec{j}) . Tout point M de coordonnées (x, y) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) a pour image $M' = f_{a,b}(M)$ de coordonnées (x', y') .

- 1° a) Calculer x' et y' à l'aide de x et y; $f_{a,b}$ peut-elle être une translation; une homothétie?
- b) Pour cette question on pose $a = 0, b = \frac{1}{4}$. Soit M_0 le point de coordonnées $(1, 0)$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_{n+1} = f_{a,b}(M_n).$$

On appelle (x_n, y_n) les coordonnées de M_n . On pose :

$$u_n = x_n - ky_n, \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Montrer qu'il existe deux valeurs de k (notées k' et k'') telles que la suite $(u_n), n \in \mathbb{N}$, soit géométrique.

Calculer $x_n - k'y_n$ et $x_n - k''y_n$ à l'aide de n. En déduire x_n et y_n . Calculer les limites de x_n et y_n quand n tend vers $+\infty$. Calculer la limite de $\frac{y_n}{x_n}$ quand n tend vers $+\infty$ (on vérifiera $x_n \neq 0$).

On appelle G_n l'isobarycentre de M_0, M_1, \dots, M_n . Calculer les coordonnées de G_n . Quelle est leur limite quand n tend vers $+\infty$?

2° a) a et b sont à nouveau quelconques. Déterminer l'ensemble des points M tels que O, M et M' soient alignés. Montrer que, pour $b \neq 0$, cet ensemble est la réunion de deux droites D_1 et D_2 sécantes en O, D_1 étant dirigée par $\vec{e}_1 = \vec{i} - \vec{j}$ et D_2 par $\vec{e}_2 = 2\vec{i} + \vec{j}$. Quelle est la restriction de $f_{a,b}$ à D_1 ? à D_2 ?

b) On prend le nouveau repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Montrer que, dans ce repère, l'expression analytique de $f_{a,b}$ est :

$$\begin{cases} X' = (a - b)X \\ Y' = (a + 2b)Y. \end{cases}$$

3° Pour quelles valeurs de a et b, $f_{a,b}$ est-elle involutive? Dans chaque cas trouvé, indiquer la nature de $f_{a,b}$ et préciser ses éléments caractéristiques.

(Bac. C. Lille. Session de remplacement 1979, partiel.)

5.20

Soit P un plan rapporté au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . On note P la direction de P.

A. Soit f l'application affine de P dans P qui au point $M(x, y)$ fait correspondre le point $M'(x', y')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = 3x + 5y \\ y' = -2x - 3y - 2. \end{cases}$$

- 1° a) Démontrer que f admet un seul point invariant.
- b) Quelle est la matrice, dans la base (\vec{i}, \vec{j}) , de l'endomorphisme φ associé à f?

2° Quelle est la nature géométrique de l'application $f^2 = f \circ f$?

Caractériser $f^4 = f \circ f \circ f \circ f$.

3° Soit M un point quelconque de P; on note :

$$M_1 = f(M); \quad M_2 = f(M_1); \quad M_3 = f(M_2).$$

Démontrer que l'isobarycentre des quatre points M, M_1, M_2, M_3 est indépendant de M. Quel est ce point?

Que peut-on dire du quadrilatère de sommets M, M_1, M_2, M_3 ? Faire une figure en partant de $M(-4, 2)$.

B. Soit G l'ensemble des applications affines g de P dans P telles que $g^4 = \text{Id}_P$. On note ψ l'endomorphisme associé à g.

1° Soit M un point quelconque de P. On note :

$$M_1 = g(M); \quad M_2 = g(M_1); \quad M_3 = g(M_2).$$

Démontrer que le point Ω , isobarycentre des quatre points M, M_1, M_2, M_3 est invariant par g.

2° Quelle propriété remarquable possède l'endomorphisme ψ^2 ? Quelle peut être la nature de ψ^2 ?

3° On suppose que ψ^2 est la symétrie vectorielle par rapport à la droite vectorielle D_1 de base \vec{e}_1 , de direction la droite vectorielle D_2 de base \vec{e}_2 .

a) Quelle est la matrice de ψ^2 dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) ?
b) On not :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

la matrice de ψ dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) . Exprimer la matrice de ψ^2 dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. En conclure à une contradiction.

4° Démontrer que G est la réunion de deux ensembles disjoints G_1 et G_2 correspondant aux deux valeurs possibles de ψ^2 dont on déterminera parfaitement l'un et dont on montrera que l'autre est non vide et constitué d'éléments admettant un seul point invariant.

Utilisation des applications affines

5.21

Un parallélogramme est tel que A et B sont fixes et D décrit un cercle Γ . Quels sont les ensembles décrits par :

- a) le quatrième sommet C ,
- b) le centre I du parallélogramme.

5.22

Soit A, B, C trois points non alignés d'un plan P , A' (resp. B', C'), le milieu de (B, C) (resp. (C, A) , (A, B)). Soit M un point quelconque du plan, distinct de A, B, C . Montrer que la parallèle à (MA) passant par A' , la parallèle à (MB) passant par B' , la parallèle à (MC) passant par C' sont concourantes en un point M' . Étudier l'application $M \mapsto M'$.

5.23

Soit A, B, C trois points non alignés d'un plan P . Soit p_1 la projection sur (AB) parallèlement à (AC) , p_2 la projection sur (AC) parallèlement à (BC) , p_3 la projection sur (BC) parallèlement à (AB) . On pose $f = p_3 \circ p_2 \circ p_1$.

- 1° Étudier la restriction \bar{f} de f à la droite (BC) .
- 2° Que peut-on dire de \bar{f}^2 ?
- 3° Que peut-on dire de \bar{f}^3 ?

5.24

Soit D et D' deux droites concourantes en I d'un plan P . On suppose que D et D' ne sont pas orthogonales. Soit A un point de P , distinct de I . Construire le ou les cercles centrés sur D , tangents à D' et passant par A .

5.25

Dans un plan P , on considère quatre points distincts A, B, A', B' . On suppose les droites (AA') et (BB') parallèles et les droites (AB) et $(A'B')$ concourantes en un point U . Soit D et D' deux droites de P concourantes en V telles que :

$$A \in D, B \notin D; \quad A' \in D', B' \notin D'.$$

Deux points M et M' varient respectivement sur D et D' de telle sorte que M soit égal à M' ou (MM') parallèle à (AA') . Déterminer l'ensemble des points d'intersection des droites (BM) et $(B'M')$.

RÉSOLUTION DES EXERCICES ET PROBLÈMES

5.1

1° L'existence et l'unicité de f est un résultat rappelé dans le résumé de cours. Ce résultat repose sur les deux théorèmes importants suivants :

- Soit A et A' deux points donnés de E , φ un endomorphisme donné de \bar{E} . Il existe une application affine et une seule transformant A en A' et d'endomorphisme associé φ .
- Étant donné une base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de \bar{E} et trois vecteurs quelconques $\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'$ de \bar{E} , il existe un endomorphisme φ de \bar{E} et un seul tel que

$$\varphi(\vec{u}) = \vec{u}', \quad \varphi(\vec{v}) = \vec{v}', \quad \varphi(\vec{w}) = \vec{w}'.$$

En effet, on a l'équivalence suivante, pour une application affine f d'endomorphisme associé φ :

$$\begin{cases} f(A) = A' \\ f(B) = B' \\ f(C) = C' \\ f(D) = D' \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi(\overline{AB}) = \overline{A'B'} \\ \varphi(\overline{AC}) = \overline{A'C'} \\ \varphi(\overline{AD}) = \overline{A'D'} \end{cases}$$

2° Première méthode

Soit φ l'endomorphisme associé à f et

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}$$

sa matrice par rapport à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$\begin{aligned} \varphi(\overline{AB}) = \overline{A'B'} &\iff \begin{cases} -\alpha + \beta = 0 \\ -\alpha' + \beta' = -2 \\ -\alpha'' + \beta'' = 0 \end{cases} & (1) \\ \varphi(\overline{AC}) = \overline{A'C'} &\iff \begin{cases} -\alpha + \gamma = -1 \\ -\alpha' + \gamma' = -3 \\ -\alpha'' + \gamma'' = 0 \end{cases} & (2) \\ \varphi(\overline{AD}) = \overline{A'D'} &\iff \begin{cases} \beta + \gamma = 1 \\ \beta' + \gamma' = -1 \\ \beta'' + \gamma'' = 2 \end{cases} & (3) \end{aligned}$$

Le système formé par (1), (4), (7) équivaut successivement à :

$$\begin{cases} \beta = \alpha \\ \gamma = \alpha - 1 \\ \alpha + (\alpha - 1) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \beta = 1 \\ \gamma = 0. \end{cases}$$

Le système formé par (2), (5), (8) équivaut successivement à :

$$\begin{cases} \beta' = \alpha' - 2 \\ \gamma' = \alpha' - 3 \\ (\alpha' - 2) + (\alpha' - 3) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha' = 2 \\ \beta' = 0 \\ \gamma' = -1. \end{cases}$$

Le système formé par (3), (6), (9) équivaut successivement à :

$$\begin{cases} \beta'' = \alpha'' \\ \gamma'' = \alpha'' \\ \alpha'' + \alpha'' = 2 \end{cases} \iff \alpha'' = \beta'' = \gamma'' = 1.$$

Il reste ensuite à déterminer $f(O) = O'$. Or :

$$\varphi(\overline{OA}) = \overline{O'A'} = \overline{O'O} + \overline{OA'} \iff \overline{O'O} = \overline{O'A'} - \varphi(\overline{OA})$$

d'où : $\overline{O'O} = 2\vec{f} + 4\vec{f} + \vec{k} - (\vec{f} + 2\vec{f} + \vec{k}) = \vec{f} + 2\vec{f}.$

L'égalité $\overline{OM'} = \overline{O'O} + \overline{O'M'} = \overline{O'O} + \varphi(\overline{OM})$ montre alors que :

$$\begin{cases} x' = 1 + x + y \\ y' = 2 + 2x - z \\ z' = x + y + z. \end{cases}$$

Deuxième méthode

Déterminons d'abord O' . On remarque que :

$$O = \text{Bar}(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, -1),$$

une application affine conservant le barycentre, on a :

$$O' = \text{Bar}(A', 1), (B', 1), (C', 1), (D', -1)$$

d'où, immédiatement les coordonnées : 1, 2 et 0 du point O' .

On a ensuite :

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{f}) &= \varphi(\overline{OA}) = \overline{O'A'} = \overline{O'O} + \overline{OA'} \\ &= (-\vec{f} - 2\vec{f}) + (2\vec{f} + 4\vec{f} + \vec{k}) = \vec{f} + 2\vec{f} + \vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{f}') &= \varphi(\overline{OB}) = \overline{O'B'} = \overline{O'O} + \overline{OB'} \\ &= (-\vec{f} - 2\vec{f}) + (2\vec{f} + 2\vec{f} + \vec{k}) = \vec{f} + \vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{k}) &= \varphi(\overline{OC}) = \overline{O'C'} = \overline{O'O} + \overline{OC'} \\ &= (-\vec{f} - 2\vec{f}) + (\vec{f} + \vec{f} + \vec{k}) = -\vec{f} + \vec{k}. \end{aligned}$$

Ce qui détermine la matrice de φ dans la base $(\vec{f}, \vec{f}', \vec{k})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et, partant, l'expression analytique de f .

1° La forme de l'expression analytique de f est caractéristique des applications affines. On peut le retrouver ainsi :
soit φ l'endomorphisme de \mathbb{P} , dont la matrice dans la base (\vec{f}, \vec{f}') est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et O' le point de coordonnées -1 et 2 dans le repère (O, \vec{f}, \vec{f}') . On a alors :

$$M' = f(M) \iff \overline{O'M'} = \varphi(\overline{OM}).$$

Par définition, l'application f est donc affine, d'endomorphisme associé φ . On peut démontrer que f est bijective en résolvant le système qui donne x' et y' en fonction de x et de y :

$$(1) \begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = x - y + 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x' + y' = 2x + 1 \\ x' - y' = 2y - 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{x' + y' - 1}{2} \\ y = \frac{x' - y' + 3}{2} \end{cases} \quad (2)$$

ceci prouve que tout point de \mathbb{P} admet un antécédent et un seul : f est bijective.

On aurait pu également montrer que φ est bijective (on sait que f bijective équivaut à φ bijective) en calculant le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

2° Un point M de \mathbb{P} est invariant par f si, et seulement si $f(M) = M$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = x + y - 1 \\ y = x - y + 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 1. \end{cases}$$

Il existe donc un point invariant et un seul.

3° Soit M' un point quelconque du plan. Nous avons les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} M' \in f(D) &\iff f^{-1}(M') \in D \iff a \left(\frac{x' + y'}{2} - \frac{1}{2} \right) + b \left(\frac{x' - y'}{2} + \frac{3}{2} \right) + c = 0 \\ &\iff (a + b)x' + (a - b)y' - a + 3b + 2c = 0. \end{aligned}$$

(En effet, les coordonnées de $f^{-1}(M')$ sont données par le système (2)).

4° Rappel. Soit D et D' deux droites d'équations respectives

$$ax + by + w = 0 \quad \text{et} \quad a'x + b'y + w' = 0$$

dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . On sait que D est parallèle à D' si, et seulement si,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0 \iff au' - a'v = 0.$$

Dans notre problème, D sera donc parallèle à $f(D)$ si, et seulement si,

$$\begin{aligned} a(a - b) - b(a + b) &= 0 &\iff a^2 - 2ab - b^2 = 0 \\ &\iff (a - b)^2 = 2b^2 &\iff a - b = \varepsilon\sqrt{2}b \quad \text{avec } \varepsilon \in \{-1, +1\}. \end{aligned}$$

Finalement $f(D)$ est parallèle à D si, et seulement si,

$$a = (1 + \varepsilon\sqrt{2})b \quad \text{avec } \varepsilon \in \{-1, +1\} \quad \text{et} \quad b \neq 0.$$

On obtient ainsi l'ensemble des droites parallèles à l'une ou l'autre des droites d'équations $(1 + \varepsilon\sqrt{2})x + y = 0$.

Pour que D soit invariante par f il est nécessaire que D et f(D) soient parallèles, c'est-à-dire que l'équation de D soit de la forme :

$$f(D) \text{ a alors pour équation : } b(1 + \epsilon\sqrt{2})x + by + c = 0$$

ou encore, en divisant par $\epsilon\sqrt{2}$:

$$b(1 + \epsilon\sqrt{2})x + by + b(\epsilon\sqrt{2} - 1) + \epsilon\sqrt{2}c = 0$$

On a donc $f(D) = D$ si, et seulement si, $b(\epsilon\sqrt{2} - 1) + \epsilon\sqrt{2}c = 0$.

Il y a deux droites invariantes, les deux droites d'équation :

$$(1 + \epsilon\sqrt{2})x + y - 1 = 0 \text{ avec } \epsilon \in \{-1, +1\}$$

1° $f_{a,b}$ est une application affine dont l'endomorphisme $\varphi_{a,b}$ associé a pour matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} & \frac{a-b}{2} \\ \frac{a-b}{2} & \frac{a+b}{2} \end{pmatrix}$$

dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .
On sait que $f_{a,b}$ est bijective si, et seulement si, $\varphi_{a,b}$ est bijective, c'est-à-dire

$$ab = \begin{vmatrix} \frac{a+b}{2} & \frac{a-b}{2} \\ \frac{a-b}{2} & \frac{a+b}{2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Donc $f_{a,b}$ est bijective si, et seulement si, $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Remarque
Pour $a = 0$, on a :

$$\begin{cases} x' = \frac{b}{2}(x-y) \\ y' = \frac{b}{2}(-x+y) \end{cases}$$

donc, si $b \neq 0$, $f_{a,b}(P)$ est la droite d'équation $y + x = 0$ et si $b = 0$, $f_{a,b}(P) = \{O\}$. Résultats analogues pour $b = 0$.

2° Calculons $f_{a',b'} \circ f_{a,b}$. Posons $M' = f_{a',b'}(M)$, $M'' = f_{a,b}(M')$. On a, en désignant par x'' et y'' les coordonnées de M'' :

$$\begin{cases} x'' = \frac{a'+b'}{2}x' + \frac{a'-b'}{2}y' \\ = \frac{(a'+b')}{2} \left[\frac{a+b}{2}x + \frac{a-b}{2}y \right] + \frac{(a'-b')}{2} \left[\frac{a-b}{2}x + \frac{a+b}{2}y \right] \\ y'' = \frac{a'-b'}{2}x' + \frac{a'+b'}{2}y' \\ = \frac{(a'-b')}{2} \left[\frac{a+b}{2}x + \frac{a-b}{2}y \right] + \frac{(a'+b')}{2} \left[\frac{a-b}{2}x + \frac{a+b}{2}y \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = \frac{aa'+bb'}{2}x + \frac{aa'-bb'}{2}y \\ y'' = \frac{aa'-bb'}{2}x + \frac{aa'+bb'}{2}y \end{cases}$$

On a donc prouvé que : $f_{a',b'} \circ f_{a,b} = f_{aa',bb'}$ commutent entre elles. Remarquons que les applications $f_{a,b}$ commutent entre elles, si $a \neq 0$ et $b \neq 0$. La formule de composition trouvée montre que, si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, $f_{\frac{a}{h}, \frac{b}{h}} \circ f_{a,b} = f_{a,b} \circ f_{\frac{a}{h}, \frac{b}{h}} = \text{id}_P$.

On a donc : $(f_{a,b})^{-1} = f_{\frac{a}{h}, \frac{b}{h}} \in \mathcal{F}$.

On a donc :
3° Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan P. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \text{la famille } (\overline{OM}, \overline{OM'}) \text{ est liée} \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow xy' - yx' = 0 \\ &\Leftrightarrow x \left(\frac{a-b}{2}x + \frac{a+b}{2}y \right) - y \left(\frac{a+b}{2}x + \frac{a-b}{2}y \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a-b}{2}(x^2 - y^2) = 0. \end{aligned}$$

• Si $a = b$, cette condition est satisfaite pour tous les points M du plan. C'est évident, puisqu'alors $f_{a,a}$ est l'homothétie affine de centre O et de rapport a (si $a \neq 0$).

• Si $a \neq b$, l'ensemble des points M cherché est la réunion des deux droites D_1 et D_2 d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$.

4° Soit D une droite du plan, $\vec{n}(\alpha, \beta)$ un vecteur-directeur de D. On sait que $f_{a,b}(D)$ est une droite (en effet, les conditions $a \neq 0$ et $b \neq 0$ assurent que $f_{a,b}$ est bijective) dirigée par $\varphi_{a,b}(\vec{n})$. Par suite, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} D \text{ est parallèle à } f_{a,b}(D) &\Leftrightarrow \text{la famille } (\vec{n}, \varphi_{a,b}(\vec{n})) \text{ est liée} \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \frac{a+b}{2}\alpha + \frac{a-b}{2}\beta \\ \beta & \frac{a-b}{2}\alpha + \frac{a+b}{2}\beta \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a-b}{2}(\alpha^2 - \beta^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 = 0 \quad (\text{car } a \neq b). \end{aligned}$$

Donc, D est parallèle à son image par $f_{a,b}$ si et seulement si D est parallèle à D_1 ou D_2 .

Pour que $D = f_{a,b}(D)$ il est nécessaire que D et $f_{a,b}(D)$ soient parallèles une constante réelle.

Réciproquement :
• $y - x = h$ implique $y' - x' = b(y - x) = bh$
□ si $b = 1$, on a $f_{a,b}(D) \subset D$ d'où $f_{a,b}(D) = D$ car $f_{a,b}$ étant bijective

transforme une droite en une droite : toutes les droites parallèles à D_1 sont invariantes;

- si $b \neq 1$, seule D_1 est invariante.
- $y + x = h$ implique $y' + x' = ah$
- si $a = 1$, toutes les droites parallèles à D_2 sont invariantes;
- si $a \neq 1$, seule D_2 est invariante.

Remarque
On peut chercher les points invariants de $f_{a,b}$. (Le point O est toujours invariant). Soit $M(x, y)$ un point

$$M = f_{a,b}(M) \iff \begin{cases} x = \frac{a+b}{2}x + \frac{a-b}{2}y \\ y = \frac{a-b}{2}x + \frac{a+b}{2}y \end{cases} \iff \begin{cases} \left(\frac{a+b}{2}-1\right)x + \frac{a-b}{2}y = 0 \\ \frac{a-b}{2}x + \left(\frac{a+b}{2}-1\right)y = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Or :
$$\begin{vmatrix} \frac{a+b}{2}-1 & \frac{a-b}{2} \\ \frac{a-b}{2} & \frac{a+b}{2}-1 \end{vmatrix} = \left(\frac{a+b}{2}-1\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = (a-1)(b-1).$$

- Si $a \neq 1, b \neq 1$, le système (1) n'a de solution que $(0, 0)$: seul le point O est invariant.
- Si $a = 1$, le système équivaut à $\left(\frac{b-1}{2}\right)(x-y) = 0$.
- si $b = 1$, tous les points sont invariants ($f_{a,b} = \text{id}_P$);
- si $b \neq 1$, l'ensemble des points invariants est D_1 .
- Si $b = 1$, le système équivaut à $\left(\frac{a-1}{2}\right)(x+y) = 0$
- si $a = 1$, tous les points sont invariants;
- si $a \neq 1$, l'ensemble des points invariants est D_2 .

5.4 1° La matrice de l'endomorphisme φ , dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc, d'après les formules prouvées en cours :

$$\begin{cases} x' = z \\ y' = x \\ z' = y. \end{cases}$$

(On aurait pu également écrire

$$\overline{OM'} = \varphi(\overline{OM}) = \varphi(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = x\vec{j} + y\vec{k} + z\vec{i}$$

et en déduire $x' = z, y' = x$ et $z' = y$.)

2° L'endomorphisme φ transforme une base de \bar{E} en une base de \bar{E} , φ est donc bijectif. Par suite, f est bijectif.

3° Un point M de E est invariant par f si et seulement si :

$$x' = x; \quad y' = y; \quad z' = z.$$

ce qui est équivalent à $x = y = z$.
L'ensemble des points invariants est donc l'ensemble des points de la droite D_1 , d'équations $x = y = z$.

4° Soit P un plan de E , d'équation $ux + vy + wz + h = 0$. Comme f est bijective, on sait que $f(P)$ est un plan, cherchons son équation :

$M' \in f(P) \iff f^{-1}(M') \in P \iff uy' + vz' + wx' + h = 0$.

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} u & v \\ w & u \end{vmatrix} = u^2 - vw = 0 \\ \begin{vmatrix} u & w \\ w & v \end{vmatrix} = uv - w^2 = 0 \\ \begin{vmatrix} v & w \\ w & v \end{vmatrix} = v^2 - uw = 0. \end{cases}$$

On en déduit $u^3 = uvw = v^2 = w^3$ et, comme u, v, w sont réels, $u = v = w$.

Réciproquement, soit P un plan d'équation $u(x + y + z) + h = 0$. On a vu que $f(P)$ a pour équation $u(y + z + x) + h = 0$, c'est-à-dire la même équation que P, d'où $f(P) = P$.

Les plans invariants par f sont les plans d'équation $u(x + y + z) + h = 0$ avec $u \in \mathbb{R}^*$ et $h \in \mathbb{R}$ ou, ce qui revient au même, d'équation

$$x + y + z + k = 0 \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

5° Soit D une droite de E dirigée par le vecteur $\vec{d}(\alpha, \beta, \gamma)$. On a les équivalences suivantes :

$$D \text{ parallèle à } f(D) \iff (\vec{d}, \varphi(\vec{d})) \text{ liée} \iff \begin{cases} \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - \beta\gamma = 0 \\ \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{vmatrix} = \alpha\beta - \gamma^2 = 0 \\ \begin{vmatrix} \beta & \alpha \\ \gamma & \beta \end{vmatrix} = \beta^2 - \alpha\gamma = 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système a déjà été vue : $\alpha^3 = \alpha\beta\gamma = \beta^3 = \gamma^3$ d'où, dans \mathbb{R} , $\alpha = \beta = \gamma$. Réciproque évidente.

Les droites D dont l'image $f(D)$ est parallèle à D sont les droites parallèles à D_1 .

Soit maintenant D une droite invariante. Elle est, en particulier parallèle à son image, donc parallèle à D_1 . Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de D. La droite D admet pour équations :

$$x - x_0 = y - y_0 = z - z_0.$$

Or $f(M_0)$ a pour coordonnées z_0, x_0, y_0 . En écrivant que $f(M_0)$ appartient à D, on obtient :

$$\begin{cases} 2x_0 - x_0 = x_0 - y_0 = y_0 - z_0 \\ 2x_0 = y_0 + z_0 \\ 2y_0 = x_0 + z_0 \\ 2z_0 = x_0 + y_0. \end{cases}$$

ou :

On en déduit : $3x_0 = x_0 + y_0 + z_0 = 3y_0 = 3z_0$, d'où : $x_0 = y_0 = z_0$. Réciproque évidente. Il en résulte que M_0 appartient à D_1 .
Finalement toute droite invariante est nécessairement égale à D_1 .
Réciproquement, D_1 est bien invariante. En fait, plus précisément, tous les points de D_1 sont invariants.

5.5 1° L'application f est l'application affine qui transforme le point O en $O'(-2, -1)$ et dont l'endomorphisme associé φ a pour matrice dans la base (\vec{f}, \vec{f}) :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut montrer que f (ou φ) est bijective en constatant que

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

On peut aussi noter que

$$(1) \quad \begin{cases} x' = 5x + 2y - 2 \\ y' = 2x + y - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x' - 2y' \\ y = -2x' + 5y' + 1 \end{cases} \quad (2)$$

ce qui prouve que tout point de P a un antécédent et un seul.

2° Montrons maintenant que Γ est globalement invariante par f , c'est-à-dire que $f(\Gamma) = \Gamma$. Soit $M(x, y)$ un point quelconque de P et $M'(x', y')$ son image. On a :

$$\begin{aligned} x'^2 - y'^2 - 2x'y' - x' + y' &= (5x + 2y - 2)^2 - (2x + y - 1)^2 - 2(5x + 2y - 2)(2x + y - 1) - 5x - 2y \\ &= 25x^2 + 4y^2 + 4 + 20xy - 20x - 8y - 4x^2 - y^2 - 1 - 4xy + 4x + 2y - 4y^2 \\ &\quad - 20x^2 - 18xy + 18x + 8y - 4 - 5x - 2y + 2 + 2x + y - 1 \\ &= x^2 - y^2 - 2xy - x + y. \end{aligned}$$

De sorte que : $M \in \Gamma \iff f(M) \in \Gamma$. C'est bien dire que : $\Gamma = f(\Gamma)$.

3° Le point M_0 appartient à Γ puisque

$$3^2 - 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 3 + 1 = 0.$$

On en déduit $M_1 = f(M_0) \in \Gamma$ et, par une récurrence immédiate, $M_n \in \Gamma$ pour tout n de \mathbb{N} .

Montrons par récurrence que les deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont croissantes. On a :

$$\begin{cases} x_1 = 15 > 3 = x_0 \\ y_1 = 6 > 1 = y_0 \end{cases}$$

Supposons les deux suites strictement croissantes jusqu'au rang $n \geq 1$, c'est-à-dire : $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ et $y_0 < y_1 < \dots < y_n$. On a alors :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 5x_n + 2y_n - 2 > x_n + 4x_n + 2y_n - 2 > x_n + 4x_0 + 2y_0 - 2 > x_n \\ y_{n+1} = 2x_n + y_n - 1 > 2x_0 - 1 + y_n > y_n \end{cases}$$

La suite (x_n) étant strictement croissante, les x_n sont deux à deux distincts. L'ensemble des x_n est donc infini. Il en résulte que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non majorée (en effet, tout ensemble majoré d'entiers naturels est fini). On sait

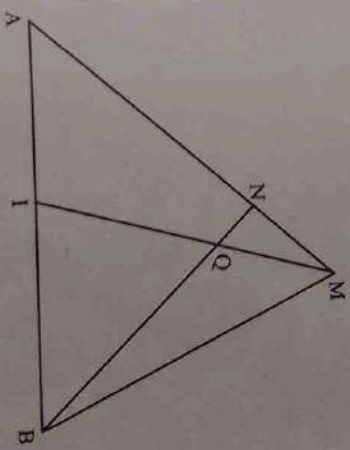
d'autre part qu'une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$. Le raisonnement est le même pour la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Remarque
Nous avons en particulier prouvé que l'ensemble des points de Γ dont les coordonnées sont entières est infini.

5.6 1° Par définition d'une partie convexe C
 $\forall A \in C \quad \forall M \in C \quad [A, M] \subset C$.

Ceci implique que C est étoilée. La réunion de deux droites affines distinctes et concourantes est étoilée par rapport au point de concours des deux droites, sans être convexe.

2° Soit A et B deux points de C , I un point quelconque de $[A, B]$. Il s'agit de prouver que S est étoilée par rapport à I . Autrement dit que, pour tout point M de S , on a : $I = \text{Bar}(A, \lambda), (B, 1 - \lambda)$, Q un point de $[I, M]$ et soit $\lambda \in [0, 1]$ tel que : $I = \text{Bar}(A, \lambda), (M, 1 - \mu)$.
Soit $\lambda \in [0, 1]$ tel que : $Q = \text{Bar}(I, \mu), (M, 1 - \mu)$.



Par définition du barycentre, on a :

$$\mu \vec{QI} + (1 - \mu) \vec{QM} = \vec{0}$$

$$\vec{QI} = \lambda \vec{QA} + (1 - \lambda) \vec{QB}$$

$$\text{d'où :} \quad \mu \lambda \vec{QA} + \mu(1 - \lambda) \vec{QB} + (1 - \mu) \vec{QM} = \vec{0}$$

ce qui prouve que : $Q = \text{Bar}((A, \mu\lambda), (B, \mu(1 - \lambda)), (M, 1 - \mu))$.

Si $\mu = 1$ et $\lambda = 0$, on a $I = Q = B$ et $Q \in S$. Sinon, $\mu\lambda \geq 0, 1 - \mu \geq 0$ et $\mu\lambda + 1 - \mu > 0$. On peut donc considérer $N = \text{Bar}((A, \mu\lambda), (M, 1 - \mu))$, c'est un point du segment $[A, M]$ puisque les coefficients de A et M sont positifs ou nuls. On en déduit que $N \in S$.

La propriété d'associativité du barycentre montre que :

$$Q = \text{Bar}((N, \mu\lambda + 1 - \mu), (B, \mu(1 - \lambda)))$$

or les deux coefficients $\mu\lambda + 1 - \mu$ et $\mu(1 - \lambda)$ sont positifs ou nuls (et de somme égale à 1), Q est donc un point du segment $[B, N]$.
Comme $N \in S$, on en déduit $Q \in S$: c'est ce qu'il fallait prouver.

On en déduit : $3x_0 = x_0 + y_0 + z_0 = 3y_0 = 3z_0$, d'où : $x_0 = y_0 = z_0$. Réciproquement évidente. Il en résulte que M_0 appartient à D_1 .
Finalement toute droite invariante est nécessairement égale à D_1 .
Réciproquement, D_1 est bien invariante. En fait, plus précisément, tous les points de D_1 sont invariants.

5.5 1° L'application f est l'application affine qui transforme le point O en $O'(-2, -1)$ et dont l'endomorphisme associé φ a pour matrice dans la base (f, f') :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut montrer que f (ou φ) est bijective en constatant que

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

On peut aussi noter que

$$(1) \quad \begin{cases} x' = 5x + 2y - 2 \\ y' = 2x + y - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x' - 2y' \\ y = -2x' + 5y' + 1 \end{cases} \quad (2)$$

ce qui prouve que tout point de P a un antécédent et un seul.

2° Montrons maintenant que Γ est globalement invariante par f , c'est-à-dire que $f(\Gamma) = \Gamma$. Soit $M(x, y)$ un point quelconque de P et $M'(x', y')$ son image. On a :

$$\begin{aligned} x'^2 - y'^2 - 2x'y' - x' + y' &= (5x + 2y - 2)^2 - (2x + y - 1)^2 - 2(5x + 2y - 2)(2x + y - 1) - 5x - 2y \\ &= 25x^2 + 4y^2 + 4 + 20xy - 20x - 8y - 4x^2 - y^2 - 1 - 4xy + 4x + 2y - 4y^2 \\ &\quad - 20x^2 - 18xy + 18x + 8y - 4 - 5x - 2y + 2 + 2x + y - 1 \\ &= x^2 - y^2 - 2xy - x + y. \end{aligned}$$

De sorte que : $M \in \Gamma \iff f(M) \in \Gamma$. C'est bien dire que : $\Gamma = f(\Gamma)$.

3° Le point M_0 appartient à Γ puisque

$$3^2 - 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 3 + 1 = 0.$$

On en déduit $M_1 = f(M_0) \in f(\Gamma) = \Gamma$ et, par une récurrence immédiate, $M_n \in \Gamma$ pour tout n de \mathbb{N} .

Montrons par récurrence que les deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont croissantes. On a :

$$\begin{cases} x_1 = 15 > 3 = x_0 \\ y_1 = 6 > 1 = y_0 \end{cases}$$

Supposons les deux suites strictement croissantes jusqu'au rang $n \geq 1$, c'est-à-dire : $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ et $y_0 < y_1 < \dots < y_n$. On a alors :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 5x_n + 2y_n - 2 = x_n + 4x_n + 2y_n - 2 > x_n + 4x_0 + 2y_0 - 2 > x_n \\ y_{n+1} = 2x_n + y_n - 1 > 2x_0 - 1 + y_n > y_n \end{cases}$$

La suite (x_n) étant strictement croissante, les x_n sont deux à deux distincts. L'ensemble des x_n est donc infini. Il en résulte que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non majorée (en effet, tout ensemble majoré d'entiers naturels est fini). On sait

d'autre part qu'une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$. Le raisonnement est le même pour la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

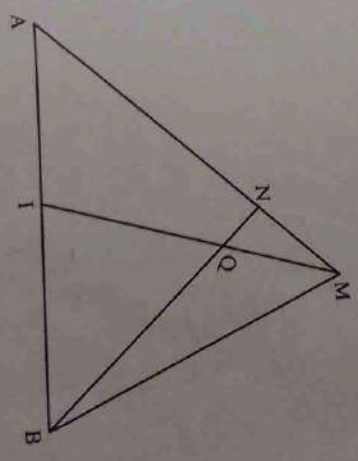
remarque
Nous avons en particulier prouvé que l'ensemble des points de Γ dont les coordonnées sont entières est infini.

5.6 1° Par définition d'une partie convexe C
 $\forall A \in C \quad \forall M \in C \quad [A, M] \subset C.$

Ceci implique que C est étoilée.
La réunion de deux droites affines distinctes et concourantes est étoilée par rapport au point de concours des deux droites, sans être convexe.

2° Soit A et B deux points de C , I un point quelconque de $[A, B]$. Il s'agit de prouver que S est étoilée par rapport à I . Autrement dit que, pour tout point M de S , on a : $[I, M] \subset S$.

Soit $\lambda \in [0, 1]$ tel que : $I = \text{Bar}((A, \lambda), (B, 1 - \lambda))$, Q un point de $[I, M]$ et $\mu \in [0, 1]$ tel que : $Q = \text{Bar}((I, \mu), (M, 1 - \mu))$.



Par définition du barycentre, on a :

$$\mu \overline{QI} + (1 - \mu) \overline{QM} = \vec{0}$$

$$\text{et} \quad \overline{QI} = \lambda \overline{QA} + (1 - \lambda) \overline{QB}$$

$$\text{d'où :} \quad \mu \lambda \overline{QA} + \mu(1 - \lambda) \overline{QB} + (1 - \mu) \overline{QM} = \vec{0}$$

ce qui prouve que : $Q = \text{Bar}((A, \mu\lambda), (B, \mu(1 - \lambda)), (M, 1 - \mu))$.

Si $\mu = 1$ et $\lambda = 0$, on a $I = Q = B$ et $Q \in S$. Sinon, $\mu\lambda \geq 0$, $1 - \mu \geq 0$ et $\mu\lambda + 1 - \mu > 0$. On peut donc considérer $N = \text{Bar}((A, \mu\lambda), (M, 1 - \mu))$, c'est un point du segment $[A, M]$ puisque les coefficients de A et M sont positifs ou nuls. On en déduit que $N \in S$.

La propriété d'associativité du barycentre montre que :

$$Q = \text{Bar}((N, \mu\lambda + 1 - \mu), (B, \mu(1 - \lambda)))$$

or les deux coefficients $\mu\lambda + 1 - \mu$ et $\mu(1 - \lambda)$ sont positifs ou nuls (et de somme égale à 1). Q est donc un point du segment $[N, B]$. Comme $N \in S$, on en déduit $Q \in S$: c'est ce qu'il fallait prouver.

On en déduit : $3x_0 = x_0 + y_0 + z_0 = 3y_0 = 3z_0$, d'où : $x_0 = y_0 = z_0$. Réciproquement évidente. Il en résulte que M_0 appartient à D_1 .
Finalement toute droite invariante est nécessairement égale à D_1 .
Réciproquement, D_1 est bien invariante. En fait, plus précisément, tous les points de D_1 sont invariants.

5.5 1° L'application f est l'application affine qui transforme le point O en $O'(-2, -1)$ et dont l'endomorphisme associé φ a pour matrice dans la base (\vec{i}, \vec{j}) :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut montrer que f (ou φ) est bijective en constatant que

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

On peut aussi noter que

$$(1) \quad \begin{cases} x' = 5x + 2y - 2 \\ y' = 2x + y - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x' - 2y' \\ y = -2x' + 5y' + 1 \end{cases} \quad (2)$$

ce qui prouve que tout point de P a un antécédent et un seul.

2° Montrons maintenant que Γ est globalement invariante par f , c'est-à-dire que $f(\Gamma) = \Gamma$. Soit $M(x, y)$ un point quelconque de P et $M'(x', y')$ son image. On a :

$$\begin{aligned} x'^2 - y'^2 - 2x'y' - x' + y' &= (5x + 2y - 2)^2 - (2x + y - 1)^2 - 2(5x + 2y - 2)(2x + y - 1) - 5x - 2y \\ &= 25x^2 + 4y^2 + 4 + 20xy - 20x - 8y - 4x^2 - y^2 - 1 - 4xy + 4x + 2y - 4y^2 \\ &\quad - 20x^2 - 18xy + 18x + 8y - 4 - 5x - 2y + 2 + 2x + y - 1 \\ &= x^2 - y^2 - 2xy - x + y. \end{aligned}$$

De sorte que : $M \in \Gamma \iff f(M) \in \Gamma$. C'est bien dire que : $\Gamma = f(\Gamma)$.

3° Le point M_0 appartient à Γ puisque

$$3^2 - 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 3 + 1 = 0.$$

On en déduit $M_1 = f(M_0) \in f(\Gamma) = \Gamma$ et, par une récurrence immédiate, $M_n \in \Gamma$ pour tout n de \mathbb{N} .

Montrons par récurrence que les deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont croissantes. On a :

$$\begin{cases} x_1 = 15 > 3 = x_0 \\ y_1 = 6 > 1 = y_0. \end{cases}$$

Supposons les deux suites strictement croissantes jusqu'au rang $n \geq 1$, c'est-à-dire : $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ et $y_0 < y_1 < \dots < y_n$. On a alors :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 5x_n + 2y_n - 2 = x_n + 4x_n + 2y_n - 2 > x_n + 4x_0 + 2y_0 - 2 > x_n \\ y_{n+1} = 2x_n + y_n - 1 > 2x_0 - 1 + y_n > y_n \end{cases}$$

La suite (x_n) étant strictement croissante, les x_n sont deux à deux distincts. L'ensemble des x_n est donc infini. Il en résulte que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non majorée (en effet, tout ensemble majoré d'entiers naturels est fini). On sait

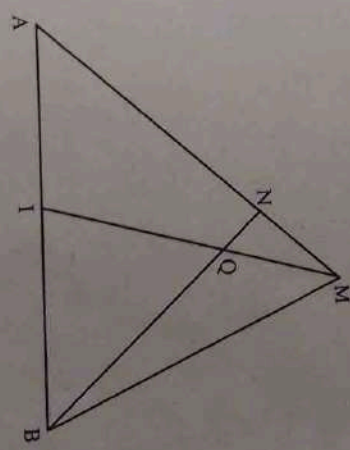
d'autre part qu'une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$. Le raisonnement est le même pour la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Remarque
Nous avons en particulier prouvé que l'ensemble des points de Γ dont les coordonnées sont entières est infini.

5.6 1° Par définition d'une partie convexe C
 $\forall A \in C \quad \forall M \in C \quad [A, M] \subset C$.

Ceci implique que C est étoilée.
La réunion de deux droites affines distinctes et concourantes est étoilée par rapport au point de concours des deux droites, sans être convexe.

2° Soit A et B deux points de C , I un point quelconque de $[A, B]$. Il s'agit de prouver que S est étoilée par rapport à I . Autrement dit que, pour tout point M de S , on a : $[I, M] \subset S$.
Soit $\lambda \in [0, 1]$ tel que : $I = \text{Bar}((A, \lambda), (B, 1 - \lambda))$, Q un point de $[I, M]$ et $\mu \in [0, 1]$ tel que : $Q = \text{Bar}((I, \mu), (M, 1 - \mu))$.



Par définition du barycentre, on a :

$$\mu \overline{QI} + (1 - \mu) \overline{QM} = \vec{0}$$

$$\text{et} \quad \overline{QI} = \lambda \overline{QA} + (1 - \lambda) \overline{QB}$$

$$\text{d'où :} \quad \mu \lambda \overline{QA} + \mu(1 - \lambda) \overline{QB} + (1 - \mu) \overline{QM} = \vec{0}$$

ce qui prouve que : $Q = \text{Bar}((A, \mu\lambda), (B, \mu(1 - \lambda)), (M, 1 - \mu))$.
Si $\mu = 1$ et $\lambda = 0$, on a $I = Q = B$ et $Q \in S$. Sinon, $\mu\lambda \geq 0$, $1 - \mu \geq 0$ et $\mu\lambda + 1 - \mu > 0$. On peut donc considérer $N = \text{Bar}((A, \mu\lambda), (M, 1 - \mu))$, c'est un point du segment $[A, M]$ puisque les coefficients de A et M sont positifs ou nuls. On en déduit que $N \in S$.

La propriété d'associativité du barycentre montre que :

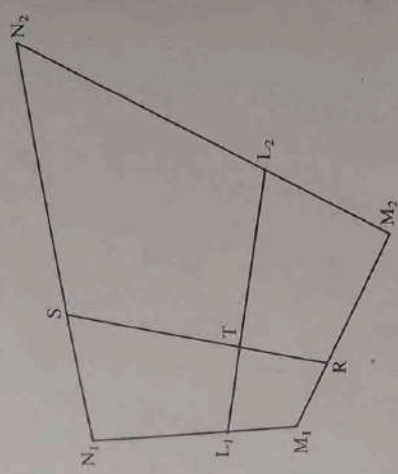
$$Q = \text{Bar}((N, \mu\lambda + 1 - \mu), (B, \mu(1 - \lambda)))$$

or les deux coefficients $\mu\lambda + 1 - \mu$ et $\mu(1 - \lambda)$ sont positifs ou nuls (et de somme égale à 1). Q est donc un point du segment $[B, N]$.
Comme $N \in S$, on en déduit $Q \in S$: c'est ce qu'il fallait prouver.

5.7 Soit R et S deux points de C. Par hypothèse, il existe $M_1 \in C_1, M_2 \in C_2, N_1 \in C_1, N_2 \in C_2$ tels que :
 $R = \text{Bar}((M_1, \lambda), (M_2, 1 - \lambda))$ et $S = \text{Bar}((N_1, \lambda), (N_2, 1 - \lambda))$.

Il s'agit de prouver que le segment [R, S] est contenu dans C. Soit donc $T \in [R, S]$. Il existe $\mu \in [0, 1]$ tel que $T = \text{Bar}((R, \mu), (S, 1 - \mu))$. Introduisons alors

$L_1 = \text{Bar}((M_1, \mu), (N_1, 1 - \mu))$ et $L_2 = \text{Bar}((M_2, \mu), (N_2, 1 - \mu))$. Comme $\mu \in [0, 1]$ et que C_1 et C_2 sont convexes, L_1 appartient à C_1 et L_2 à C_2 .



Supposons maintenant $\lambda \neq 0, \lambda \neq 1, \mu \neq 0, \mu \neq 1$ et cherchons le barycentre G des quatre points pondérés :

$$(M_1, \lambda\mu); (M_2, (1 - \lambda)\mu); (N_1, \lambda(1 - \mu)); (N_2, (1 - \lambda)(1 - \mu)).$$

Pour la recherche de G nous pouvons remplacer M_1 et M_2 par leur barycentre R (car $\lambda\mu + (1 - \lambda)\mu = \mu \neq 0$) et N_1 et N_2 par leur barycentre S (car $\lambda(1 - \mu) + (1 - \lambda)(1 - \mu) = 1 - \mu \neq 0$). D'où :

$$G = \text{Bar}((R, \mu), (S, 1 - \mu)) = T.$$

On peut aussi associer M_1 et N_1 (car $\lambda\mu + \lambda(1 - \mu) = \lambda \neq 0$) et M_2 et N_2 (car $(1 - \lambda)\mu + (1 - \lambda)(1 - \mu) = 1 - \lambda \neq 0$). D'où :

$$G = \text{Bar}((L_1, \lambda), (L_2, 1 - \lambda)).$$

Comme on sait que $L_1 \in C_1$ et $L_2 \in C_2$, par définition, le point T appartient donc à C.

Si $\lambda = 0$ (resp. $\lambda = 1$) on a $C = C_2$ (resp. $C = C_1$) qui est bien convexe. Si $\mu = 0$, on a $T = S \in C$ et si $\mu = 1$, on a $T = R \in C$.

5.8 1° Si l'application f était constante, elle transformerait toute droite en un point et non en une autre droite. L'application f n'étant pas constante, il existe deux points A et B de X tels que $A' = f(A) \neq B' = f(B)$. Les deux points A et B ayant des images distinctes sont nécessairement distincts.

2° L'image par f de la droite (AB) est la droite (A'B'). Par définition, les deux droites (AB) et (A'B') sont parallèles et il existe donc $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $A'B' = kAB$.

• Si $k \neq 1$. Introduisons le point $I = \text{Bar}((A, -k), (A', 1))$:
 $\overline{IA'} = k\overline{IA}$.

L'homothétie $H(I, k)$ transforme A en A' et B en B' tel que $\overline{A'B'} = k\overline{AB}$.

Par suite, $B' = B''$.
 • Si $k = 1$. La translation de vecteur $\overline{AA'}$ transforme A en A' et B en B'' tel que $\overline{AB} = \overline{A'B''}$. Par suite $B' = B''$.

3° Soit M un point n'appartenant pas à (AB). Soit $D_1 = (AM)$ et $D_2 = (BM)$. Les deux applications f et g transforment toutes deux la droite D_1 en une droite passant par A' et parallèle à D_1 . On a donc $f(D_1) = g(D_1)$ et, de même, $f(D_2) = g(D_2)$. Les droites D_1 et D_2 étant concourantes, il en est de même de leurs parallèles $f(D_1)$ et $f(D_2)$, d'où :

$$\{f(M)\} = f(D_1) \cap f(D_2) = g(D_1) \cap g(D_2) = \{g(M)\}.$$

4° Soit M un point de (AB). Puisque X est le plan ou l'espace, on peut choisir deux points distincts A_1 et B_1 tels que :

$$A_1 \notin (AB) \quad B_1 \notin (AB) \quad M \notin (A_1B_1).$$

Puisque ni A_1 , ni B_1 ne sont sur la droite (AB), on a $g(A_1) = f(A_1)$ et $g(B_1) = f(B_1)$. Le raisonnement du 3° peut maintenant s'appliquer en remplaçant A par A_1 et B par B_1 , puisque $M \notin (A_1B_1)$. On a donc $f(M) = g(M)$. Finalement, on a prouvé que $f = g$, autrement dit f est une translation ou une homothétie.

1° L'endomorphisme associé à f est le composé des endomorphismes associés, c'est-à-dire :

$$\text{id}_E \circ h_k \circ \text{id}_E = h_k$$

où h_k est l'homothétie vectorielle de rapport $k \neq 1$. On sait que cela caractérise les homothéties affines de rapport k.

Il reste à déterminer le point invariant de f : ce sera le centre de l'homothétie. On peut, par exemple, procéder ainsi : soit M un point de E, $M_1 = t_{\vec{u}}(M)$, $M_2 = H(I, k)(M_1)$ et $M_3 = t_{-\vec{u}}(M_2)$. On a successivement :

$$\begin{aligned} \overline{IM_1} &= \overline{IM} + \vec{u} \\ \overline{IM_2} &= k\overline{IM} + k\vec{u} \\ \overline{IM_3} &= k\overline{IM} + k\vec{u} - \vec{u}. \end{aligned}$$

D'où les équivalences :

$$f(M) = M \iff \overline{IM} = k\overline{IM} + (k - 1)\vec{u} \iff \overline{IM} = -\vec{u}.$$

Le centre de l'homothétie f est donc le point $t_{-\vec{u}}(I)$. Il était d'ailleurs facile de vérifier directement que ce point est invariant par f.

2° L'endomorphisme associé à g est :

$$h_k \circ \text{id}_E \circ h_k = \text{id}_E.$$

On sait que cela caractérise les translations affines. Soit \vec{v} le vecteur de g. Soit $I_1 = t_{\vec{v}}(I)$ et $I_2 = H(I, \frac{1}{k})(I_1)$. On a :

$$g(I) = \left[H\left(I, \frac{1}{k}\right) \circ t_{\vec{v}} \circ H(I, k) \right](I)$$

$$g(1) = \left[H \left(1, \frac{1}{k} \right) \circ f_2 \right] (1) = H \left(1, \frac{1}{k} \right) (1_1) = 1_2.$$

Or $\vec{\Pi}_1 = \vec{u}$ et $\vec{\Pi}_2 = \frac{1}{k} \vec{\Pi}_1 = \frac{1}{k} \vec{u}$. Par suite :

$$\vec{v} = \frac{1}{k} \vec{u}.$$

5.10

Détermination analytique de p . Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de E . La droite D_M parallèle à D passant par M a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} X = x - 2\lambda \\ Y = y + \lambda \\ Z = z + \lambda. \end{cases}$$

Elle coupe le plan P au point $M' = p(M)$. Le paramètre λ' du point M' est obtenu en écrivant que $M' \in P$:

$$(x - 2\lambda') - 3(y + \lambda') + (z + \lambda') - 1 = 0$$

d'où :

$$\lambda' = \frac{1}{4}(x - 3y + z - 1).$$

On en déduit les coordonnées x', y', z' de M' :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x + 3y - z + 1) \\ y' = \frac{1}{4}(x + y + z - 1) \\ z' = \frac{1}{4}(x - 3y + 5z - 1). \end{cases}$$

Détermination analytique de q . Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de E . Le plan P_M parallèle à P passant par M a pour équation :

$$X - 3Y + Z = x - 3y + z.$$

La droite D a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} X = 1 - 2\lambda \\ Y = \lambda \\ Z = 1 + \lambda. \end{cases}$$

Le plan P_M coupe D au point $M'' = q(M)$ dont le paramètre λ'' est donc obtenu en écrivant :

$$(1 - 2\lambda'') - 3\lambda'' + (1 + \lambda'') = x - 3y + z$$

d'où :

$$\lambda'' = \frac{1}{4}(-x + 3y - z + 2).$$

On en déduit les coordonnées x'', y'', z'' de M'' :

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{2}(x - 3y + z) \\ y'' = \frac{1}{4}(-x + 3y - z + 2) \\ z'' = \frac{1}{4}(-x + 3y - z + 6). \end{cases}$$

5.11 On cherche d'abord les points invariants par f en résolvant le système :

$$\begin{cases} x = -x - y + 2z - 1 \\ y = -2x + 2z - 1 \\ z = -2x - y + 3z - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - y + 2z - 1 = 0 \\ -2x - y + 2z - 1 = 0 \\ -2x - y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des points invariants est le plan P d'équation

$$2x + y - 2z + 1 = 0.$$

Soit φ l'endomorphisme associé à l'application affine f . Cherchons le noyau de φ . Soit $\vec{v}(\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur de \vec{E} . On a les équivalences suivantes :

$$\vec{v} \in \text{Ker } \varphi \iff \begin{cases} -\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ -2\alpha + 2\gamma = 0 \\ -2\alpha - \beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma.$$

Le noyau de φ est donc la droite vectorielle $\vec{\Delta}$ engendrée par le vecteur $\vec{u}(1, 1, 1)$. Comme $\vec{u} \notin \vec{P}$, $\vec{\Delta}$ et \vec{P} sont supplémentaires dans \vec{E} .

L'application f est alors la projection affine p de E sur P parallèlement à $\vec{\Delta}$. En effet, si $M \in E$, $M' = f(M)$ et $M'' = p(M)$, on a, en appelant A un point quelconque de P :

$$\overline{AM} = \overline{AM'} + \overline{M'M} \text{ avec } \overline{AM'} \in \vec{P} \text{ et } \overline{M'M} \in \vec{\Delta}$$

d'où :

$$\overline{AM'} = \overline{AM} = \varphi(\overline{AM}) = \varphi(\overline{AM'}) + \varphi(\overline{M'M}) = \overline{AM''}$$

ce qui prouve que $f(M) = p(M)$ pour tout M de E , d'où $f = p$.

2° La droite donnée passe par le point $B(1, 2, 3)$ et est dirigée par le vecteur $\vec{v}(2, 1, 2)$.

Le point $B' = f(B)$ a pour coordonnées 2, 3 et 4. Le vecteur $\varphi(\vec{v})$ a pour composantes 1, 0 et 1. Comme $\varphi(\vec{v})$ n'est pas nul, l'image est la droite passant par B' et dirigée par $\varphi(\vec{v})$.

3° La droite donnée passe par le point $B(1, 2, 3)$ et est dirigée par le vecteur $\vec{u}(1, 1, 1)$. Comme $\varphi(\vec{u}) = \vec{0}$, l'image de cette droite est $\{B'\}$.

4° Le plan donné passe par le point $C(0, 0, 1)$ et est dirigé par le plan vectoriel π engendré par les deux vecteurs \vec{u} et $\vec{w}(1, 3, 0)$. On a $\varphi(\vec{u}) = \vec{0}$ et $\varphi(\vec{w}) = -4\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k} \neq \vec{0}$. Par suite, $\varphi(\pi)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\varphi(\vec{w})$. L'image du plan donné est donc la droite passant par le point $C'(1, 1, 2)$ et dirigée par $\varphi(\vec{w})$.

5.12

1° Soit O' le point de coordonnées -2 et -1. Soit φ l'endomorphisme de \vec{P} dont la matrice, dans la base (\vec{i}, \vec{j}) est :

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Le système (1) équivaut à :

$$\overline{OM'} = \varphi(\overline{OM})$$

si M (resp. M') a pour coordonnées x et y (resp. x' et y'). Ceci prouve que f est une application affine, d'endomorphisme associé φ .

$$g(1) = \left[H \left(1, \frac{1}{k} \right) \circ t_{\vec{u}} \right] (1) = H \left(1, \frac{1}{k} \right) (1_1) = 1_2.$$

Or $\vec{\Pi}_1 = \vec{u}$ et $\vec{\Pi}_2 = \frac{1}{k} \vec{u}$. Par suite :

$$\vec{v} = \frac{1}{k} \vec{u}.$$

5.10

Détermination analytique de p . Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de E . La droite D_M parallèle à D passant par M a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} X = x - 2\lambda \\ Y = y + \lambda \\ Z = z + \lambda. \end{cases}$$

Elle coupe le plan P au point $M' = p(M)$. Le paramètre λ' du point M' est obtenu en écrivant que $M' \in P$:

$$(x - 2\lambda') - 3(y + \lambda') + (z + \lambda') - 1 = 0$$

d'où :

$$\lambda' = \frac{1}{4}(x - 3y + z - 1).$$

On en déduit les coordonnées x', y', z' de M' :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x + 3y - z + 1) \\ y' = \frac{1}{4}(x + y + z - 1) \\ z' = \frac{1}{4}(x - 3y + 5z - 1). \end{cases}$$

Détermination analytique de q . Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de E .

Le plan P_M parallèle à P passant par M a pour équation :

$$X - 3Y + Z = x - 3y + z.$$

La droite D a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} X = 1 - 2\lambda \\ Y = \lambda \\ Z = 1 + \lambda. \end{cases}$$

Le plan P_M coupe D au point $M'' = q(M)$ dont le paramètre λ'' est donc obtenu en écrivant :

$$(1 - 2\lambda'') - 3\lambda'' + (1 + \lambda'') = x - 3y + z$$

d'où :

$$\lambda'' = \frac{1}{4}(-x + 3y - z + 2).$$

On en déduit les coordonnées x'', y'', z'' de M'' :

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{2}(x - 3y + z) \\ y'' = \frac{1}{4}(-x + 3y - z + 2) \\ z'' = \frac{1}{4}(-x + 3y - z + 6). \end{cases}$$

1° On cherche d'abord les points invariants par f en résolvant le système :

$$\begin{cases} x = -x - y + 2z - 1 \\ y = -2x + 2z - 1 \\ z = -2x - y + 3z - 1 \end{cases} \iff -2x - y + 2z - 1 = 0.$$

L'ensemble des points invariants est le plan P d'équation

$$2x + y - 2z + 1 = 0.$$

Soit φ l'endomorphisme associé à l'application affine f . Cherchons le noyau de φ . Soit $\vec{v}(\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur de \vec{E} . On a les équivalences suivantes :

$$\vec{v} \in \text{Ker } \varphi \iff \begin{cases} -\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ -2\alpha + 2\gamma = 0 \\ -2\alpha - \beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma.$$

Le noyau de φ est donc la droite vectorielle $\vec{\Delta}$ engendrée par le vecteur $\vec{u}(1, 1, 1)$. Comme $\vec{u} \notin \vec{P}$, $\vec{\Delta}$ et \vec{P} sont supplémentaires dans \vec{E} .

L'application f est alors la projection affine p de E sur P parallèlement à $\vec{\Delta}$.

En effet, si $M \in E$, $M' = f(M)$ et $M'' = p(M)$, on a, en appelant A un point quelconque de P :

$$\vec{AM} = \vec{AM}'' + \vec{M''M} \text{ avec } \vec{AM}'' \in \vec{P} \text{ et } \vec{M''M} \in \vec{\Delta}$$

d'où :

$$\vec{AM}' = \vec{AM}'' = \varphi(\vec{AM}) = \varphi(\vec{AM}'') + \varphi(\vec{M''M}) = \vec{AM}''$$

ce qui prouve que $f(M) = p(M)$ pour tout M de E , d'où $f = p$.

2° La droite donnée passe par le point $B(1, 2, 3)$ et est dirigée par le vecteur $\vec{v}(2, 1, 2)$.

Le point $B' = f(B)$ a pour coordonnées 2, 3 et 4. Le vecteur $\varphi(\vec{v})$ a pour composantes 1, 0 et 1. Comme $\varphi(\vec{v})$ n'est pas nul, l'image est la droite passant par B' et dirigée par $\varphi(\vec{v})$.

3° La droite donnée passe par le point $C(0, 0, 1)$ et est dirigée par le vecteur $\vec{w}(1, 1, 1)$. Comme $\varphi(\vec{w}) = \vec{0}$, l'image de cette droite est $\{B'\}$.

4° Le plan donné passe par le point $C(0, 0, 1)$ et est dirigé par le plan vectoriel π engendré par les deux vecteurs \vec{u} et $\vec{w}(1, 3, 0)$. On a $\varphi(\vec{u}) = \vec{0}$ et $\varphi(\vec{w}) = -4\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k} \neq \vec{0}$. Par suite, $\varphi(\pi)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\varphi(\vec{w})$. L'image du plan donné est donc la droite passant par le point $C'(1, 1, 2)$ et dirigée par $\varphi(\vec{w})$.

5.12

1° Soit O' le point de coordonnées -2 et -1 . Soit φ l'endomorphisme de \vec{P} dont la matrice, dans la base (\vec{i}, \vec{j}) est :

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Le système (1) équivaut à :

$$\vec{O'M}' = \varphi(\vec{OM})$$

si M (resp. M') a pour coordonnées x et y (resp. x' et y').

Ceci prouve que f est une application affine, d'endomorphisme associé φ .

2° Soit $I(x, y)$ un point de P . Nous avons les équivalences suivantes.
 $I = f(I) \iff \begin{cases} x = 8x - 4y - 2 \\ y = 8x - 4y - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 7x - 4y - 2 = 0 \\ 8x - 5y - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$
 Il existe donc un point invariant par f et un seul.

3° Soit $M \in P$ et $M' = f(M)$, on voit que $y' = x' + 1$. Réciproquement, soit M' un point de P dont les coordonnées x' et y' vérifient $y' = x' + 1$. Il existe x et y tels que

$$\begin{cases} 8x - 4y - 2 = x' \\ 8x - 4y - 1 = y' \end{cases}$$

(par exemple $x = \frac{x'+2}{8}$, $y = 0$), donc $M' \in f(P)$.

En résumé, l'image de P par f est la droite D d'équation $y = x + 1$.

4° Déterminons le noyau de φ . Soit $\vec{u}(\alpha, \beta)$ un vecteur de \vec{P} , on a :

$$\vec{u} \in \text{Ker } \varphi \iff \begin{cases} 8\alpha - 4\beta = 0 \\ 8\alpha - 4\beta = 0 \end{cases} \iff 2\alpha = \beta.$$

$\text{Ker } \varphi$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u}_0(1, 2)$.

Soit $M(x, y)$ un point du plan et $M'' = p(M)$. La droite passant par M et dirigée par \vec{u}_0 a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} X = x + \lambda \\ Y = y + 2\lambda \end{cases}$$

elle coupe D au point M'' , dont le paramètre λ vérifie :

$$y + 2\lambda = x + \lambda + 1 \iff \lambda = x - y + 1.$$

Les coordonnées x'' et y'' de M'' sont donc :

$$\begin{cases} x'' = 2x - y + 1 \\ y'' = 2x - y + 2 \end{cases}$$

5° Soit H l'homothétie de centre I et de rapport 4. Soit $M \in P$ et $M''' = H(M)$. Si x''' et y''' sont les coordonnées de M''' , on a :

$$\begin{cases} x''' - 2 = 4(x - 2) \\ y''' - 3 = 4(y - 3) \end{cases} \iff \begin{cases} x''' = 4x - 6 \\ y''' = 4y - 9 \end{cases}$$

On vérifie alors analytiquement que : $H \circ p = p \circ H = f$. En effet :

$$(x, y) \xrightarrow{p} (2x - y + 1, 2x - y + 2) \xrightarrow{H} (8x - 4y - 2, 8x - 4y + 1)$$

$$(x, y) \xrightarrow{H} (4x - 6, 4x - 9) \xrightarrow{p} (8x - 4y - 2, 8x - 4y + 1).$$

Détermination analytique de s_1 . Le début du calcul est le même qu'à l'exercice 5.10. Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de E , la droite D_M passant par M et parallèle à D a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} X = x - 2\lambda \\ Y = y + \lambda \\ Z = z + \lambda \end{cases}$$

Cette droite D_M coupe le plan P au point M' de paramètre λ' tel que :

$$(x - 2\lambda') - 3(y + \lambda') + z + \lambda' - 1 = 0$$

$\lambda' = \frac{1}{4}(x - 3y + z - 1)$.

d'où :
 P' où les coordonnées x', y', z' de M' en fonction de λ' :

$$\begin{cases} x' = x - 2\lambda' \\ y' = y + \lambda' \\ z' = z + \lambda' \end{cases}$$

Or, M' est le milieu de (M, M_1) où $M_1(x_1, y_1, z_1)$ est le point $s_1(M)$:

$$\begin{cases} \frac{x' + x_1}{2} = \frac{x + x_1}{2} \\ \frac{y' + y_1}{2} = \frac{y + y_1}{2} \\ \frac{z' + z_1}{2} = \frac{z + z_1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 2x' - x = x - 4\lambda' \\ y_1 = 2y' - y = y + 2\lambda' \\ z_1 = 2z' - z = z + \lambda' \end{cases}$$

et finalement :

$$\begin{cases} x_1 = 3y - z + 1 \\ y_1 = \frac{1}{2}(x - y + z - 1) \\ z_1 = \frac{1}{2}(x - 3y + 3z - 1). \end{cases}$$

Détermination analytique de s_2 . Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de E et $M_2(x_2, y_2, z_2)$ son image par s_2 . Le plan P_M passant par M et parallèle à P a pour équation :

$$X - 3Y + Z = x - 3y + z.$$

La droite D a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} X = 1 - 2\lambda \\ Y = \lambda \\ Z = 1 + \lambda \end{cases}$$

le plan P_M coupe D au point M'' dont le paramètre λ'' vérifie :

$$\begin{aligned} (1 - 2\lambda'') - 3\lambda'' + (1 + \lambda'') &= x - 3y + z \\ \lambda'' &= \frac{1}{4}(-x + 3y - z + 2). \end{aligned}$$

Les coordonnées x'', y'', z'' de M'' en fonction de λ'' sont :

$$\begin{cases} x'' = 1 - 2\lambda'' \\ y'' = \lambda'' \\ z'' = 1 + \lambda'' \end{cases}$$

Or, M'' est le milieu de (M, M_2) où $M_2(x_2, y_2, z_2)$ est le point $s_2(M)$:

$$\begin{cases} \frac{x'' + x_2}{2} = \frac{x + x_2}{2} \\ \frac{y'' + y_2}{2} = \frac{y + y_2}{2} \\ \frac{z'' + z_2}{2} = \frac{z + z_2}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 2x'' - x = 2 - 4\lambda'' - x \\ y_2 = 2y'' - y = 2\lambda'' - y \\ z_2 = 2z'' - z = 2 + 2\lambda'' - z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1° L'endomorphisme φ a pour matrice par rapport a la base (f, f, k) de la direction E de E :

Une equation de P_1 est donc $7x - 5y + 3z + 13 = 0$.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 7x - 5y + 3z + 13 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x - y + z + 2) + (2x - y + 2z + 4) - 3(-x + y - 2) + 1 = 0 \end{aligned}$$

(car $f^2 = \text{id}_E$ entraine $f = f^{-1}$)
 $M \in f(P_1) \Leftrightarrow f^{-1}(M) \in P_1 \Leftrightarrow f(M) \in P_1$

3° Soit P_1 le plan d'equation $x + y - 3z + 1 = 0$. Soit $M(x, y, z)$ un point de E . On a les equivalences suivantes:

Le point $A' = f(A)$ a pour coordonnees $-5, 8$ et -3 . Le vecteur $f' = \varphi(\vec{a})$ a pour composantes $7, 13$ et -3 . L'image de la droite donnee est la droite passant par A' et dirigee par f' .

2° L'application f est donc la symetrie par rapport au plan P parallelement a la droite vectorielle Δ engendree par le vecteur $\vec{u}(1, 2, -1)$.

$$\varphi(\vec{u}) = -\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta + \gamma = -\alpha \\ 2\alpha - \beta + 2\gamma = -\beta \\ -\alpha + \beta = -\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\gamma \\ \beta = 2\alpha \end{cases}$$

On sait qu'un vecteur $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ appartient a la direction de la symetrie f , si, et seulement si $\varphi(\vec{u}) = -\vec{u}$. Or:

Cherchons maintenant la direction de la symetrie. Soit φ l'endomorphisme associe a f .

L'ensemble des points invariants est le plan d'equation $x - y + z + 2 = 0$.

$$M = f(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x - y + z + 2 \\ y = 2x - y + 2z + 4 \\ z = -x + y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + 2 = 0 \\ x - y + z + 2 = 0 \\ x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

On a donc bien $f^2 = \text{Id}_E$. On sait que cela caracterise les symetries. Precisons cette symetrie en cherchant les points invariants:

$$\begin{cases} x^0 = 2(2x - y + z + 2) - (2x - y + 2z + 4) - 2z \\ y^0 = 2(2x - y + z + 2) - (2x - y + 2z + 4) + 2(-x + y - 2) + 4 = y \\ z^0 = -(2x - y + z + 2) + (2x - y + 2z + 4) - 2z \end{cases}$$

1° L'application f est evidemment affine. Montrons que f est involutive. Soit $M(x, y, z)$ un point de E . $M'(x', y', z')$ l'image de M et $M''(x'', y'', z'')$ l'image de M' . On a:

$$\begin{cases} x'' = -3y + z \\ y'' = \frac{1}{2}(-x + y - z) + 1 \\ z'' = \frac{1}{2}(-x + 3y - 3z) + 3 \end{cases}$$

et finalement:

S.14

1° L'application f est evidemment affine. Montrons que f est involutive. Soit $M(x, y, z)$ un point de E . $M'(x', y', z')$ l'image de M et $M''(x'', y'', z'')$ l'image de M' . On a:

$$\begin{cases} x'' = -3y + z \\ y'' = \frac{1}{2}(-x + y - z) + 1 \\ z'' = \frac{1}{2}(-x + 3y - 3z) + 3 \end{cases}$$

On a donc bien $f^2 = \text{Id}_E$. On sait que cela caracterise les symetries. Precisons cette symetrie en cherchant les points invariants:

$$\begin{cases} x^0 = 2(2x - y + z + 2) - (2x - y + 2z + 4) - 2z \\ y^0 = 2(2x - y + z + 2) - (2x - y + 2z + 4) + 2(-x + y - 2) + 4 = y \\ z^0 = -(2x - y + z + 2) + (2x - y + 2z + 4) - 2z \end{cases}$$

1° L'application f est evidemment affine. Montrons que f est involutive. Soit $M(x, y, z)$ un point de E . $M'(x', y', z')$ l'image de M et $M''(x'', y'', z'')$ l'image de M' . On a:

$$\begin{cases} x'' = -3y + z \\ y'' = \frac{1}{2}(-x + y - z) + 1 \\ z'' = \frac{1}{2}(-x + 3y - 3z) + 3 \end{cases}$$

On a donc bien $f^2 = \text{Id}_E$. On sait que cela caracterise les symetries. Precisons cette symetrie en cherchant les points invariants:

$$\begin{cases} x^0 = 2(2x - y + z + 2) - (2x - y + 2z + 4) - 2z \\ y^0 = 2(2x - y + z + 2) - (2x - y + 2z + 4) + 2(-x + y - 2) + 4 = y \\ z^0 = -(2x - y + z + 2) + (2x - y + 2z + 4) - 2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = -x + z - 2 \\ y'' = -2x + y + z - 2 \\ z'' = z \end{cases}$$

et, en reportant dans (1):

$$2\left(x + \frac{z}{2}\right) - z + 2 = 0 \Leftrightarrow x'' = -2x + z - 2$$

et le milieu de (M, M') appartient a P_1 :

$$(1) \quad \begin{cases} x'' = x + \lambda'' \\ y'' = y + \lambda'' \\ z'' = z \end{cases} \Leftrightarrow \exists \lambda'' \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \text{MKR} \in \Delta$$

quelconque de E et $M'(x'', y'', z'')$ son image par g . On a:

Cherchons l'expression analytique de g . Soit $M(x, y, z)$ un point de E . L'application g est donc la symetrie par rapport a P parallelement a Δ cartésienne de P s'obtient ainsi $M(x, y, z)$ etant un point quelconque de E :

$$M \in P \Leftrightarrow \text{AM} \in P \Leftrightarrow 2(x - 0) - (z - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - z + 2 = 0$$

Appelons P le plan passant par A et dirige par P . Une equation cartésienne de P s'obtient ainsi $M(x, y, z)$ etant un point quelconque de E :

Notons que f ne peut donc être une symetrie affine (bien que l'endomorphisme φ soit une symetrie vectorielle).

L'ensemble des points invariants par f est vide. ce qui n'a pas de solution: l'ensemble des points invariants par f est vide.

2° Si un point $M(x, y, z)$ est invariant par f , on a, en particulier, l'egalite des cotes de M et $f(M)$ soit:

$$z = z + 4$$

3° Appelons P le plan passant par A et dirige par P . Une equation cartésienne de P s'obtient ainsi $M(x, y, z)$ etant un point quelconque de E :

Appelons P le plan passant par A et dirige par P . Une equation cartésienne de P s'obtient ainsi $M(x, y, z)$ etant un point quelconque de E :

$$\varphi(\vec{u}) = -\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \gamma = -\alpha \\ -2\alpha + \beta + \gamma = -\beta \\ \gamma = -\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

D'autre part,

L'ensemble $\{\vec{u} \in E; \varphi(\vec{u}) = \vec{u}\}$ est donc le plan vectoriel π d'equation $2\alpha - \gamma = 0$.

Donc $\varphi^2 = \text{id}_E$ et φ est involutive. On sait que φ est une symetrie vectorielle. Cherchons l'ensemble des vecteurs de E invariants par φ :

$$\varphi(\vec{u}) = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \gamma = \alpha \\ -2\alpha + \beta + \gamma = \beta \\ \gamma = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(-\alpha + \gamma) + \gamma = \alpha \\ -2(-\alpha + \gamma) + (-2\alpha + \beta + \gamma) + \gamma = \beta \end{cases}$$

Soit $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur de E . Le vecteur $\varphi^2(\vec{u})$ a pour composantes:

$$\begin{cases} -2(-\alpha + \gamma) + \gamma = \alpha \\ -2(-\alpha + \gamma) + (-2\alpha + \beta + \gamma) + \gamma = \beta \end{cases}$$

Donc $\varphi^2 = \text{id}_E$ et φ est involutive. On sait que φ est une symetrie vectorielle. Cherchons l'ensemble des vecteurs de E invariants par φ :

$$\varphi(\vec{u}) = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \gamma = \alpha \\ -2\alpha + \beta + \gamma = \beta \\ \gamma = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(-\alpha + \gamma) + \gamma = \alpha \\ -2(-\alpha + \gamma) + (-2\alpha + \beta + \gamma) + \gamma = \beta \end{cases}$$

Soit $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur de E . Le vecteur $\varphi^2(\vec{u})$ a pour composantes:

On vérifie alors que $f \circ g = f$ (ce qui est évident) et que $g \circ f = f$. En effet :

$$\begin{cases} -(x+2) + (z+4) - 2 = -x + z \\ -2(x+2) + (y+4) + (z+4) - 2 = -2x + y + z + 4 \\ z + 4 = z + 4 \end{cases}$$

Remarque

Le fait que f et g commutent est dû à ce que le vecteur de la translation est dans la direction \vec{P} du plan P . En général, une translation et une symétrie affine ne commutent pas.

5.16 Soit $M(x, y)$ un point de E , $M'(x', y')$ le projeté de M sur P parallèlement à D et $M''(x'', y'')$ le point $f(M)$.

Par définition, on a $\vec{MM}'' = k\vec{MM}'$, d'où :

$$\begin{cases} x'' - x' = k(x - x') \\ y'' - y' = k(y - y') \\ z'' - z' = k(z - z') \end{cases} \iff \begin{cases} x'' = kx + (1-k)x' \\ y'' = ky + (1-k)y' \\ z'' = kz + (1-k)z' \end{cases}$$

Les coordonnées de M' ont été trouvées dans l'exercice 5.10. On en déduit :

$$\begin{cases} x'' = \frac{1+k}{2}x + \frac{1-k}{2}(3y - z + 1) \\ y'' = \frac{1+3k}{4}y + \frac{1-k}{4}(x + z - 1) \\ z'' = \frac{5-k}{4}z + \frac{1-k}{4}(x - 3y - 1) \end{cases}$$

On peut vérifier que l'on obtient, en faisant $k = -1$, (cas où f est la symétrie affine par rapport à P de direction \vec{D}) les formules trouvées dans l'exercice 5.13.

5.17 1° Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de E .

$$f(M) = M \iff \begin{cases} 3x - 4y + 2z - 2 = x \\ 4x - 7y + 4z - 4 = y \\ -x + 2y + 1 = z \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des points invariants est donc le plan P d'équation $x - 2y + z - 1 = 0$.

2° Le vecteur \vec{MM}' a pour composantes :

$$\begin{cases} 2(x - 2y + z - 1) \\ 4(x - 2y + z - 1) \\ -(x - 2y + z - 1) \end{cases}$$

il a donc la direction du vecteur $\vec{u}(2, 4, -1)$.

3° Les coordonnées de I sont de la forme :

$$x + 2\lambda, \quad y + 4\lambda, \quad z - \lambda$$

où λ est déterminé par l'appartenance de I à P :

$$(x + 2\lambda) - 2(y + 4\lambda) + (z - \lambda) - 1 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{7}(x - 2y + z - 1).$$

D'où les composantes de \vec{IM} :

$$\begin{cases} x - (x + 2\lambda) = -2\lambda \\ y - (y + 4\lambda) = -4\lambda \\ z - (z - \lambda) = \lambda \end{cases}$$

et celles de \vec{IM}'

$$\begin{cases} x' - (x + 2\lambda) = 2(x - 2y + z - 1) - 2\lambda = 14\lambda - 2\lambda = 12\lambda \\ y' - (y + 4\lambda) = 4(x - 2y + z - 1) - 4\lambda = 28\lambda - 4\lambda = 24\lambda \\ z' - (z - \lambda) = -(x - 2y + z - 1) + \lambda = -7\lambda + \lambda = -6\lambda \end{cases}$$

On constate donc que $\vec{IM}' = -6\vec{IM}$.

L'application f est donc l'affinité de base P , de direction \vec{u} et de rapport -6 .

5.18

1° Nous allons prouver que tout vecteur \vec{u} de E s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{v} \in \vec{E}_1$ et $\vec{w} \in \vec{E}_2$.

Unicité. Si $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{v} \in \vec{E}_1$ et $\vec{w} \in \vec{E}_2$, on a :

$$\varphi(\vec{u}) = \varphi(\vec{v}) + \varphi(\vec{w}) = \vec{v} - 2\vec{w}$$

On en déduit : $2\vec{u} + \varphi(\vec{u}) = 3\vec{v}$ et $\vec{u} - \varphi(\vec{u}) = 3\vec{w}$, c'est-à-dire :

$$\vec{v} = \frac{1}{3}(2\vec{u} + \varphi(\vec{u})) \quad \text{et} \quad \vec{w} = \frac{1}{3}(\vec{u} - \varphi(\vec{u})).$$

On a ainsi prouvé l'unicité de la décomposition.

Existence. Considérons les deux vecteurs

$$\vec{v} = \frac{1}{3}(2\vec{u} + \varphi(\vec{u})) \quad \text{et} \quad \vec{w} = \frac{1}{3}(\vec{u} - \varphi(\vec{u})).$$

Le vecteur \vec{v} vérifie :

$$\varphi(\vec{v}) = \frac{1}{3}(2\varphi(\vec{u}) + \varphi^2(\vec{u})) = \frac{1}{3}(2\varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{u}) + 2\vec{u}) = \frac{1}{3}(\varphi(\vec{u}) + 2\vec{u}) + \vec{u}.$$

Le vecteur \vec{w} vérifie :

$$\varphi(\vec{w}) = \frac{1}{3}(\varphi(\vec{u}) - \varphi^2(\vec{u})) = \frac{1}{3}(\varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{u}) - 2\vec{u}) = \frac{2}{3}(\varphi(\vec{u}) - \vec{u}) = -2\vec{w}.$$

D'autre part, $\vec{v} + \vec{w} = \frac{1}{3}(2\vec{u} + \varphi(\vec{u})) + \frac{1}{3}(\vec{u} - \varphi(\vec{u})) = \vec{u}$.

On a ainsi prouvé l'existence de la décomposition.

2° a) L'application f étant affine conserve le barycentre :

$$f(I_0) = \text{Bar}((f(M_0), 2), (f^2(M_0), 1)).$$

Or, par hypothèse, M_0 est le milieu de $(f(M_0), f^2(M_0))$ ce qui peut s'écrire :

$$f^2(M_0) = \text{Bar}((M_0, 2), (f(M_0), -1)).$$

Par associativité du barycentre, on en déduit :

$$\begin{aligned} f(I_0) &= \text{Bar}((f(M_0), 2), (M_0, 2), (f(M_0), -1)) \\ &= \text{Bar}((M_0, 2), (f(M_0), 1)) = I_0. \end{aligned}$$

Le point I_0 est donc invariant par f .

b) Nous venons donc de prouver que f admettait au moins un point fixe.

Soit O l'un de ces points invariants. Par hypothèse, on a :

$$\forall M \in E \quad \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{Of(M)} + \vec{Of^2(M)})$$

et, comme O est invariant :

$$\forall M \in E \quad \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{f(O)f(M)} + \vec{f^2(O)f^2(M)})$$

soit, par définition de l'endomorphisme associé :

$$\forall M \in E \quad \overline{OM} = \frac{1}{2}(\varphi(\overline{OM}) + \varphi^2(\overline{OM})).$$

Comme $M \mapsto \overline{OM}$ est une bijection de E sur \overline{E} . On en déduit :

$$\forall \vec{u} \in \overline{E} \quad \vec{u} = \frac{1}{2}(\varphi(\vec{u}) + \varphi^2(\vec{u}))$$

ou encore :

$$\forall \vec{u} \in \overline{E} \quad \varphi^2(\vec{u}) + \varphi(\vec{u}) - 2\vec{u} = \vec{0}.$$

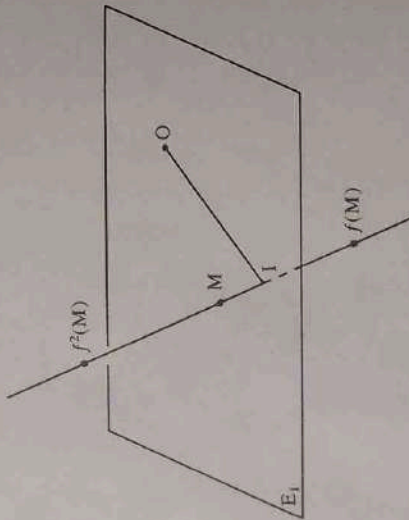
c) Soit maintenant E_1 le point, la droite, le plan ou l'espace passant par O et dirigé par \vec{E}_1 . Soit M un point de E . On peut écrire :

$$\overline{OM} = \overline{OI} + \overline{IM} \quad \text{avec} \quad \overline{OI} \in \vec{E}_1 \quad \text{et} \quad \overline{IM} \in \vec{E}_2.$$

$$\varphi(\overline{OM}) = \varphi(\overline{OI}) + \varphi(\overline{IM}) = \overline{OI} - 2\overline{IM}$$

$$O\varphi(\overline{M}) = \overline{OI} - 2\overline{IM}$$

on reconnaît la définition de l'affinité de base E_1 , de direction \vec{E}_2 et de rapport -2 .



d) Réciproquement, toute affinité de rapport -2 est solution du problème posé. La vérification est immédiate.

5.19

On notera $\varphi_{a,b}$ l'endomorphisme associé à $f_{a,b}$.

1° a) Comme $\overline{OM'} = \overline{f_{a,b}(O)}\overline{f_{a,b}(M)} = \varphi_{a,b}(\overline{OM})$, on a :

$$\begin{cases} x' = (a+b)x + 2by \\ y' = bx + ay \end{cases}$$

L'application $f_{a,b}$ est une translation si et seulement si $a = 1$ et $b = 0$. (C'est alors l'identité de \mathcal{F} .)

L'application $f_{a,b}$ est une homothétie si, et seulement si $a + b = a$ et $b = 0$, c'est-à-dire $b = 0$. L'application $f_{a,0}$ est alors l'homothétie de centre O et de rapport a .

b) • L'application $f_{0,1}$ est définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y \\ y' = \frac{1}{4}x. \end{cases}$$

On a $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{4}(1-k)$, $u_2 = \frac{1}{16}(3-k)$, ...

Si $k = 1$, u_1 est nul et u_2 non nul. La suite (u_n) ne peut donc être géométrique.

Si $k \neq 1$, une condition nécessaire pour que (u_n) soit géométrique est que

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1}$$

ce qui équivaut successivement à :

$$\frac{1}{4}(1-k) = \frac{4(3-k)}{16(1-k)} \iff (1-k)^2 = 3-k \iff k^2 - k - 2 = 0$$

$$\iff k = 2 \text{ ou } k = -1.$$

Montrons, réciproquement, que pour ces valeurs : $k' = 2$ et $k'' = -1$, les suites (u_n) sont géométriques de raisons respectives $-\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$.

On a, pour $k' = 2$ et tout n de \mathbb{N} :

$$u_{n+1} = x_{n+1} - k'y_{n+1} = x_{n+1} - 2y_{n+1} = \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{2}y_n - \frac{1}{2}x_n$$

$$= -\frac{1}{4}(x_n - 2y_n) = -\frac{1}{4}u_n$$

et, pour $k'' = -1$ et tout n de \mathbb{N} :

$$u_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} = \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{2}y_n = \frac{1}{2}(x_n + y_n) = \frac{1}{2}u_n$$

• On en déduit :

$$\begin{cases} x_n - 2y_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n (x_0 - 2y_0) = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \\ x_n + y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (x_0 + y_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{cases}$$

Puis

$$\begin{cases} x_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \\ y_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n. \end{cases}$$

• Comme les deux suites $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ tendent vers 0, on voit que x_n et y_n tendent aussi vers 0.

• x_n peut s'écrire

$$x_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n [2^{n+1} + (-1)^n]$$

et $2^{n+1} \geq 1$ pour tout n , donc $x_n > 0$ pour tout n .

On a

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{4}\right)^n}{2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

Donc $\frac{y_n}{x_n}$ tend vers $\frac{1}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.

• L'isobarycentre G_n de M_0, M_1, \dots, M_n a pour coordonnées :

$$\begin{cases} X_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k = \frac{1}{3(n+1)} \left[2 \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{4}\right)^k \right] \\ Y_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n y_k = \frac{1}{3(n+1)} \left[\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{4}\right)^k \right]. \end{cases}$$

Or :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{4}\right)^k &= \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{cases} X_n = \frac{1}{3(n+1)} \left[\frac{24}{5} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right] \\ Y_n = \frac{1}{3(n+1)} \left[\frac{6}{5} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right]. \end{cases}$$

Les deux suites X_n et Y_n tendent donc vers 0.

2° Les points O, M, M' sont alignés si, et seulement si les vecteurs \overline{OM} et $\overline{OM'}$ sont liés, ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} xy' - x'y &= 0 \\ x(bx + ay) - [(a+b)x + 2by]y &= 0 \end{aligned}$$

$$b(x^2 - xy - 2y^2) = 0.$$

Si $b = 0$, cet ensemble est le plan entier, ce qui était prévisible puisque $f_{a,0}$ est une homothétie.

Si $b \neq 0$, cet ensemble a pour équation :

$$x^2 - xy - 2y^2 = (x+y)(x-2y) = 0$$

il est donc formé par la réunion des deux droites D_1 et D_2 d'équations respectives :

$$x + y = 0 \quad \text{et} \quad x - 2y = 0.$$

D_1 est dirigée par $\vec{e}_1 = \vec{i} - \vec{j}$ et D_2 est dirigée par $\vec{e}_2 = 2\vec{i} + \vec{j}$.

Soit $M(x, -x)$ un point de D_1, M' a pour coordonnées

$$\begin{cases} x' = (a+b)x - 2bx = (a-b)x \\ y' = (b-a)x \end{cases}$$

ce qui prouve que $\overline{OM'} = (a-b)\overline{OM}$. La restriction de $f_{a,b}$ à D_1 est donc l'homothétie de rapport $b-a$ et de centre O lorsque $b \neq a$ et l'application qui envoie tout point sur O quand $b = a$. On voit de façon analogue que la restriction de $f_{a,b}$ à D_2 est l'homothétie de rapport $a+2b$ et de centre O quand $a+2b \neq 0$ et l'application qui envoie tout point sur O quand $a+2b = 0$.

b) On a donc $\varphi_{a,b}(\vec{e}_1) = (a-b)\vec{e}_1$ et $\varphi_{a,b}(\vec{e}_2) = (a+2b)\vec{e}_2$. Comme O est point invariant de $f_{a,b}$, l'expression analytique de $f_{a,b}$ est donc :

$$\begin{cases} X' = (a-b)X \\ Y' = (a+2b)Y. \end{cases}$$

3° L'expression analytique de $f_{a,b}^2$, dans le nouveau repère est :

$$\begin{cases} X'' = (a-b)^2 X \\ Y'' = (a+2b)^2 Y. \end{cases}$$

(On a noté $M''(X'', Y'')$ le point $f_{a,b}^2(M)$.)

$f_{a,b}$ est donc involutive ($f_{a,b}^2 = \text{id}_D$) si, et seulement si

$$(a-b)^2 = 1 \quad \text{et} \quad (a+2b)^2 = 1.$$

Il y a donc quatre possibilités :

- $a-b=1$ et $a+2b=1 \iff a=1$ et $b=0$. On a alors $f_{a,b} = \text{id}_D$.
- $a-b=-1$ et $a+2b=-1 \iff a=-1$ et $b=0$. On a alors

$$X' = -X \quad \text{et} \quad Y' = -Y$$

$f_{a,b}$ est donc la symétrie centrale par rapport à O .

- $a-b=1$ et $a+2b=-1 \iff a = \frac{1}{3}$ et $b = -\frac{2}{3}$. On a alors

$$X' = X \quad \text{et} \quad Y' = -Y$$

$f_{a,b}$ est donc la symétrie par rapport à D_1 parallèlement à D_2 .

- $a-b=-1$ et $a+2b=1 \iff a = -\frac{1}{3}$ et $b = \frac{2}{3}$. On a alors

$$X' = -X \quad \text{et} \quad Y' = Y$$

$f_{a,b}$ est donc la symétrie par rapport à D_2 parallèlement à D_1 .

5.20

A. 1° a) On a les équivalences suivantes :

$$M = f(M) \iff \begin{cases} x = 3x + 5y \\ y = -2x - 3y - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ -2x - 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -5 \\ y = 2. \end{cases}$$

Il y a donc un seul point invariant, que nous noterons Ω .

b) La matrice de φ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) est :

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

or $2^{n+1} \geq 1$ pour tout n , donc $x_n > 0$ pour tout n .
On a

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{4}\right)^n}{2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

Donc $\frac{y_n}{x_n}$ tend vers $\frac{1}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.

• L'isobarycentre G_n de M_0, M_1, \dots, M_n a pour coordonnées :

$$\begin{cases} X_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k = \frac{1}{3(n+1)} \left[2 \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{4}\right)^k \right] \\ Y_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n y_k = \frac{1}{3(n+1)} \left[\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{4}\right)^k \right] \end{cases}$$

Or :

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

D'où :

$$\begin{cases} X_n = \frac{1}{3(n+1)} \left[\frac{24}{5} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{4}{5} - \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right] \\ Y_n = \frac{1}{3(n+1)} \left[\frac{6}{5} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right] \end{cases}$$

Les deux suites X_n et Y_n tendent donc vers 0.

2° Les points O, M, M' sont alignés si, et seulement si les vecteurs \overline{OM} et $\overline{OM'}$ sont liés, ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} xy' - x'y &= 0 \\ x(bx + ay) - [(a+b)x + 2by]y &= 0 \\ b(x^2 - xy - 2y^2) &= 0 \end{aligned}$$

Si $b = 0$, cet ensemble est le plan entier, ce qui était prévisible puisque $f_{a,0}$ est une homothétie.

Si $b \neq 0$, cet ensemble a pour équation :

$$x^2 - xy - 2y^2 = (x+y)(x-2y) = 0$$

il est donc formé par la réunion des deux droites D_1 et D_2 d'équations respectives :

$$x + y = 0 \quad \text{et} \quad x - 2y = 0.$$

D_1 est dirigée par $\vec{e}_1 = \vec{i} - \vec{j}$ et D_2 est dirigée par $\vec{e}_2 = 2\vec{i} + \vec{j}$.

Soit $M(x, -x)$ un point de D_1, M' a pour coordonnées

$$\begin{cases} x' = (a+b)x - 2bx = (a-b)x \\ y' = (b-a)x \end{cases}$$

ce qui prouve que $\overline{OM'} = (a-b)\overline{OM}$. La restriction de $f_{a,b}$ à D_1 est donc l'homothétie de rapport $b-a$ et de centre O lorsque $b \neq a$ et l'application qui envoie tout point sur O quand $b = a$. On voit de façon analogue que la restriction de $f_{a,b}$ à D_2 est l'homothétie de rapport $a+2b$ et de centre O quand $a+2b \neq 0$ et l'application qui envoie tout point sur O quand $a+2b = 0$.

b) On a donc $\varphi_{a,b}(\vec{e}_1) = (a-b)\vec{e}_1$ et $\varphi_{a,b}(\vec{e}_2) = (a+2b)\vec{e}_2$. Comme O est point invariant de $f_{a,b}$, l'expression analytique de $f_{a,b}$ est donc :

$$\begin{cases} X' = (a-b)X \\ Y' = (a+2b)Y \end{cases}$$

3° L'expression analytique de $f_{a,b}^2$, dans le nouveau repère est :

$$\begin{cases} X'' = (a-b)^2 X \\ Y'' = (a+2b)^2 Y \end{cases}$$

(On a noté $M''(X'', Y'')$ le point $f_{a,b}^2(M)$.)

$f_{a,b}$ est donc involutive ($f_{a,b}^2 = \text{id}_D$) si, et seulement si

$$(a-b)^2 = 1 \quad \text{et} \quad (a+2b)^2 = 1.$$

Il y a donc quatre possibilités :

- $a-b=1$ et $a+2b=1 \iff a=1$ et $b=0$. On a alors $f_{a,b} = \text{id}_D$.
- $a-b=-1$ et $a+2b=-1 \iff a=-1$ et $b=0$. On a alors

$$X' = -X \quad \text{et} \quad Y' = -Y$$

$f_{a,b}$ est donc la symétrie centrale par rapport à O .

- $a-b=1$ et $a+2b=-1 \iff a = \frac{1}{3}$ et $b = -\frac{2}{3}$. On a alors

$$X' = X \quad \text{et} \quad Y' = -Y$$

$f_{a,b}$ est donc la symétrie par rapport à D_1 parallèlement à D_2 .

- $a-b=-1$ et $a+2b=1 \iff a = -\frac{1}{3}$ et $b = \frac{2}{3}$. On a alors

$$X' = -X \quad \text{et} \quad Y' = Y$$

$f_{a,b}$ est donc la symétrie par rapport à D_2 parallèlement à D_1 .

5.20

A. 1° a) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M = f(M) &\iff \begin{cases} x = 3x + 5y \\ y = -2x - 3y - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ -2x - 4y - 2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a donc un seul point invariant, que nous noterons Ω .

b) La matrice de φ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) est :

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

or $2^{n-1} > 1$ pour tout n , donc $x_n > 0$ pour tout n .
On a

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{4}\right)^n}{2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

Donc $\frac{y_n}{x_n}$ tend vers $\frac{1}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.

• L'isobarycentre G_n de M_0, M_1, \dots, M_n a pour coordonnées :

$$\begin{cases} X_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k = \frac{1}{3(n+1)} \left[2 \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{4}\right)^k \right] \\ Y_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n y_k = \frac{1}{3(n+1)} \left[\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{4}\right)^k \right] \end{cases}$$

Or :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{4}\right)^k &= \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{cases} X_n = \frac{1}{3(n+1)} \left[\frac{24}{5} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \right] \\ Y_n = \frac{1}{3(n+1)} \left[\frac{6}{5} - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \right] \end{cases}$$

Les deux suites X_n et Y_n tendent donc vers 0.

2° Les points O, M, M' sont alignés si, et seulement si les vecteurs \overline{OM} et $\overline{OM'}$ sont liés, ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} xy' - x'y &= 0 \\ x(bx + ay) - [(a+b)x + 2by]y &= 0 \end{aligned}$$

$$b(x^2 - xy - 2y^2) = 0$$

Si $b = 0$, cet ensemble est le plan entier, ce qui était prévisible puisque $f_{a,0}$ est une homothétie.

Si $b \neq 0$, cet ensemble a pour équation :

$$x^2 - xy - 2y^2 = (x+y)(x-2y) = 0$$

il est donc formé par la réunion des deux droites D_1 et D_2 d'équations respectives :

$$x+y=0 \quad \text{et} \quad x-2y=0$$

D_1 est dirigée par $\vec{e}_1 = \vec{i} - \vec{j}$ et D_2 est dirigée par $\vec{e}_2 = 2\vec{i} + \vec{j}$.

Soit $M(x, -x)$ un point de D_1 , M' a pour coordonnées

$$\begin{cases} x' = (a+b)x - 2bx = (a-b)x \\ y' = (b-a)x \end{cases}$$

ce qui prouve que $\overline{OM'} = (a-b)\overline{OM}$. La restriction de $f_{a,b}$ à D_1 est donc l'homothétie de rapport $b-a$ et de centre O lorsque $b \neq a$ et l'application qui envoie tout point sur O quand $b = a$. On voit de façon analogue que la restriction de $f_{a,b}$ à D_2 est l'homothétie de rapport $a+2b$ et de centre O quand $a+2b \neq 0$ et l'application qui envoie tout point sur O quand $a+2b = 0$.

b) On a donc $\varphi_{a,b}(\vec{e}_1) = (a-b)\vec{e}_1$ et $\varphi_{a,b}(\vec{e}_2) = (a+2b)\vec{e}_2$. Comme O est point invariant de $f_{a,b}$, l'expression analytique de $f_{a,b}$ est donc :

$$\begin{cases} X' = (a-b)X \\ Y' = (a+2b)Y \end{cases}$$

3° L'expression analytique de $f_{a,b}^2$, dans le nouveau repère est :

$$\begin{cases} X'' = (a-b)^2 X \\ Y'' = (a+2b)^2 Y \end{cases}$$

(On a noté $M''(X'', Y'')$ le point $f_{a,b}^2(M)$.)

$f_{a,b}$ est donc involutive ($f_{a,b}^2 = \text{id}_D$) si, et seulement si

$$(a-b)^2 = 1 \quad \text{et} \quad (a+2b)^2 = 1$$

Il y a donc quatre possibilités :

- $a-b = 1$ et $a+2b = 1 \iff a = 1$ et $b = 0$. On a alors $f_{a,b} = \text{id}_D$.
- $a-b = -1$ et $a+2b = -1 \iff a = -1$ et $b = 0$. On a alors

$$X' = -X \quad \text{et} \quad Y' = -Y$$

$f_{a,b}$ est donc la symétrie centrale par rapport à O .

- $a-b = 1$ et $a+2b = -1 \iff a = \frac{1}{3}$ et $b = -\frac{2}{3}$. On a alors

$$X' = X \quad \text{et} \quad Y' = -Y$$

$f_{a,b}$ est donc la symétrie par rapport à D_1 , parallèlement à D_2 .

- $a-b = -1$ et $a+2b = 1 \iff a = -\frac{1}{3}$ et $b = \frac{2}{3}$. On a alors

$$X' = -X \quad \text{et} \quad Y' = Y$$

$f_{a,b}$ est donc la symétrie par rapport à D_2 , parallèlement à D_1 .

5.20

A. 1° a) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M = f(M) &\iff \begin{cases} x = 3x + 5y \\ y = -2x - 3y - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ -2x - 4y - 2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a donc un seul point invariant, que nous noterons Ω .

b) La matrice de φ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) est :

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

2° Déterminons analytiquement f^2 . On pose $M_2(x_2, y_2) = f^2(M)$.

$$\begin{cases} x_2 = 3(3x + 5y) + 5(-2x - 3y - 2) = -x - 10 \\ y_2 = -2(3x + 5y) - 3(-2x - 3y - 2) = -y + 4 \end{cases}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\begin{cases} x_2 + 5 = -(x + 5) \\ y_2 - 2 = -(z - 2) \end{cases}$$

ou encore :

$$\overline{\Omega M_2} = -\overline{\Omega M}$$

L'application f^2 est donc la symétrie centrale par rapport à Ω .

Il en résulte que $f^4 = (f^2)^2 = \text{id}_P$.

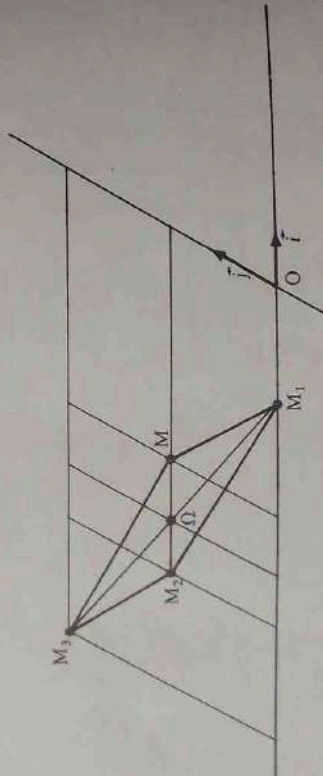
3° On peut démontrer analytiquement que l'isobarycentre de M, M_1, M_2, M_3 est le point Ω . Il est plus rapide de raisonner ainsi : l'application f conservant le barycentre (car f est affine) on a, (en appelant provisoirement N l'isobarycentre) :

$$f(N) = \text{Bar}((f(M), 1), (f(M_1), 1), (f(M_2), 1), (f(M_3), 1))).$$

Or $f(M) = M_1, f(M_1) = M_2, f(M_2) = M_3$ et $f(M_3) = f^4(M) = M$. D'où $f(N) = \text{Bar}((M, 1), (M_2, 1), (M_3, 1), (M, 1)) = N$.

Le point N est donc invariant par f : $N = \Omega$.

Les points M et $M_2 = f^2(M)$ sont symétriques par rapport à Ω . Il en est de même des points M_1 et $M_3 = f^2(M_1)$. Le quadrilatère de sommets M, M_1, M_2, M_3 est donc un parallélogramme.



B. 1° Le raisonnement de la question précédente montre que le point Ω est invariant par f .

2° On a $(\psi^2)^2 = \psi \circ g \circ 4 = \text{id}_P$. L'endomorphisme ψ^2 est donc une symétrie vectorielle. A priori, ψ^2 peut donc être égal à $\text{id}_P, -\text{id}_P$ ou à une symétrie par rapport à une droite vectorielle. C'est cette dernière éventualité que nous allons éliminer.

3° a) La matrice de ψ^2 dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) On a : $\psi(\vec{e}_1) = \alpha\vec{e}_1 + \gamma\vec{e}_2$ et $\psi(\vec{e}_2) = \beta\vec{e}_1 + \delta\vec{e}_2$. D'où :

$$\begin{cases} \psi^2(\vec{e}_1) = \alpha\psi(\vec{e}_1) + \gamma\psi(\vec{e}_2) = (\alpha^2 + \gamma\beta)\vec{e}_1 + (\gamma\alpha + \gamma\delta)\vec{e}_2 \\ \psi^2(\vec{e}_2) = \beta\psi(\vec{e}_1) + \delta\psi(\vec{e}_2) = (\beta\alpha + \beta\delta)\vec{e}_1 + (\gamma\beta + \delta^2)\vec{e}_2 \end{cases}$$

La matrice de ψ^2 dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est donc :

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 + \gamma\beta & \beta(\alpha + \delta) \\ \gamma(\alpha + \delta) & \gamma\beta + \delta^2 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \alpha^2 + \gamma\beta = 1 & (1) \\ \beta(\alpha + \delta) = 0 & (2) \\ \gamma(\alpha + \delta) = 0 & (3) \\ \gamma\beta + \delta^2 = -1 & (4) \end{cases}$$

$\beta = 0$ ou $\gamma = 0$ est en contradiction avec (4);

$\alpha + \delta = 0$ implique d'après (1) $\delta^2 + \gamma\beta = 1$, en contradiction avec (4).

Ce système n'a donc pas de solution : ψ^2 ne peut être une symétrie vectorielle par rapport à une droite.

4° L'endomorphisme ψ^2 est donc égal à id_P ou à $-\text{id}_P$.

• Si $\psi^2 = \text{id}_P$, l'application affine f^2 est une translation, mais, f^2 ayant un point invariant, f^2 est l'identité. Il en résulte que f est une symétrie affine. Il est clair que, réciproquement, toute symétrie affine est dans G . On notera G_1 l'ensemble des symétries affines.

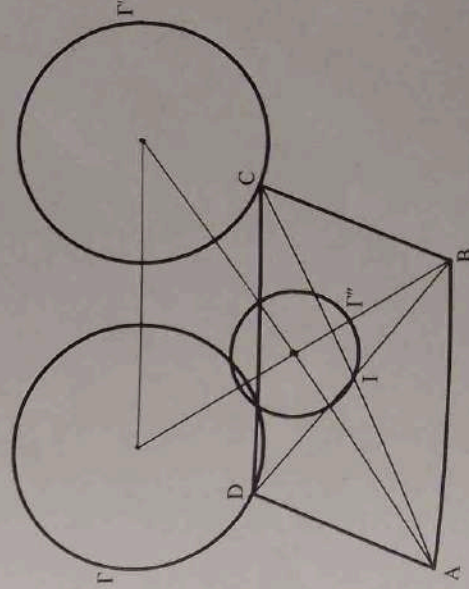
• $G_2 = G - G_1$ n'est pas vide. L'application étudiée dans le A est un élément de G_2 . Soit g un élément de G_2 , on a vu que g possédait au moins un point invariant. Soit Ω' un autre point invariant. On a

$$\overline{\Omega\Omega'} = g(\overline{\Omega\Omega'}) = \psi(\overline{\Omega\Omega'})$$

d'où $\psi^2(\overline{\Omega\Omega'}) = \overline{\Omega\Omega'}$. Or $\psi^2 = -\text{id}_P$ (puisque $g \notin G_1$) d'où $\psi^2(\overline{\Omega\Omega'}) = -\overline{\Omega\Omega'}$ et, finalement, $\Omega = \Omega'$: les éléments de G_2 ont un point invariant et un seul.

5.21

a) Appelons t la translation définie par le vecteur fixe \overline{AB} . Comme $t(D) = C$, l'ensemble décrit par le point C est le transformé par t de l'ensemble décrit par le point D . Il s'agit donc du cercle $\Gamma' = t(\Gamma)$.



2° Déterminons analytiquement f^2 . On pose $M_2(x_2, y_2) = f^2(M)$,

$$\begin{cases} x_2 = 3(3x + 5y) + 5(-2x - 3y - 2) = -x - 10 \\ y_2 = -2(3x + 5y) - 3(-2x - 3y - 2) = -y + 4 \end{cases}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\begin{cases} x_2 + 5 = -(x + 5) \\ y_2 - 2 = -(z - 2) \end{cases}$$

ou encore :

$$\Omega M_2 = -\Omega M.$$

L'application f^2 est donc la symétrie centrale par rapport à Ω .

Il en résulte que $f^4 = (f^2)^2 = \text{id}_P$.

3° On peut démontrer analytiquement que l'isobarycentre de M, M_1, M_2, M_3 est le point Ω . Il est plus rapide de raisonner ainsi : l'application f conservant le barycentre (car f est affine) on a, (en appelant provisoirement N l'isobarycentre) :

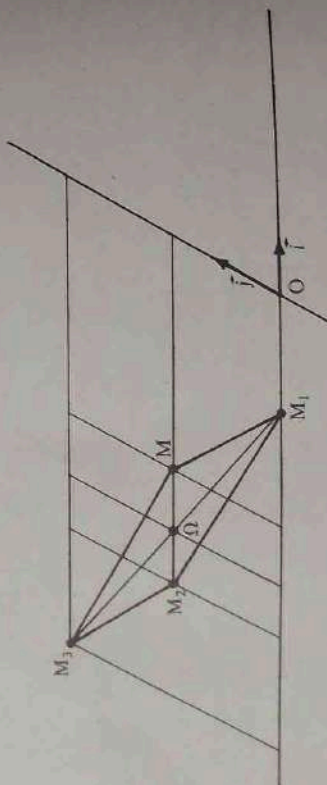
$$f(N) = \text{Bar}((f(M), 1), (f(M_1), 1), (f(M_2), 1), (f(M_3), 1)),$$

Or $f(M) = M_1, f(M_1) = M_2, f(M_2) = M_3$ et $f(M_3) = f^4(M) = M$. D'où

$$f(N) = \text{Bar}((M_1, 1), (M_2, 1), (M_3, 1), (M, 1)) = N.$$

Le point N est donc invariant par f : $N = \Omega$.

Les points M et $M_2 = f^2(M)$ sont symétriques par rapport à Ω . Il en est de même des points M_1 et $M_3 = f^2(M_1)$. Le quadrilatère de sommets M, M_1, M_2, M_3 est donc un parallélogramme.



B. 1° Le raisonnement de la question précédente montre que le point Ω est invariant par g .

2° On a $(\psi^2)^2 = \psi g 4 = \text{id}_P$. L'endomorphisme ψ^2 est donc une symétrie vectorielle. A priori, ψ^2 peut donc être égal à $\text{id}_P, -\text{id}_P$ ou à une symétrie par rapport à une droite vectorielle. C'est cette dernière éventualité que nous allons éliminer.

3° a) La matrice de ψ^2 dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) On a : $\psi(\vec{e}_1) = \alpha\vec{e}_1 + \gamma\vec{e}_2$ et $\psi(\vec{e}_2) = \beta\vec{e}_1 + \delta\vec{e}_2$. D'où :

$$\begin{cases} \psi^2(\vec{e}_1) = \alpha\psi(\vec{e}_1) + \gamma\psi(\vec{e}_2) = (\alpha^2 + \gamma\beta)\vec{e}_1 + (\gamma\alpha + \gamma\delta)\vec{e}_2 \\ \psi^2(\vec{e}_2) = \beta\psi(\vec{e}_1) + \delta\psi(\vec{e}_2) = (\beta\alpha + \beta\delta)\vec{e}_1 + (\gamma\beta + \delta^2)\vec{e}_2 \end{cases}$$

La matrice de ψ^2 dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est donc :

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 + \gamma\beta & \beta(\alpha + \delta) \\ \gamma(\alpha + \delta) & \gamma\beta + \delta^2 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \alpha^2 + \gamma\beta = 1 & (1) \\ \beta(\alpha + \delta) = 0 & (2) \\ \gamma(\alpha + \delta) = 0 & (3) \\ \gamma\beta + \delta^2 = -1 & (4) \end{cases}$$

$\beta = 0$ ou $\gamma = 0$ est en contradiction avec (4);

$\alpha + \delta = 0$ implique d'après (1) $\delta^2 + \gamma\beta = 1$, en contradiction avec (4).

Ce système n'a donc pas de solution : ψ^2 ne peut être une symétrie vectorielle par rapport à une droite.

4° L'endomorphisme ψ^2 est donc égal à id_P ou à $-\text{id}_P$.

• Si $\psi^2 = \text{id}_P$, l'application affine f^2 est une translation, mais, f^2 ayant un point invariant, f^2 est l'identité. Il en résulte que f est une symétrie affine. Il est clair que, réciproquement, toute symétrie affine est dans G . On notera G_1 l'ensemble des symétries affines.

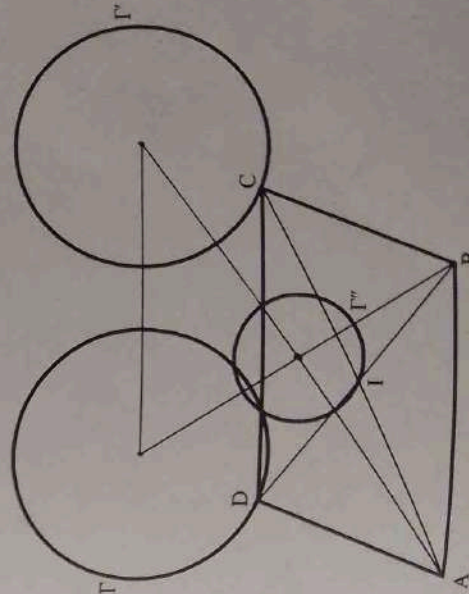
• $G_2 = G - G_1$ n'est pas vide. L'application étudiée dans le A est un élément de G_2 . Soit g un élément de G_2 , on a vu que g possédait au moins un point invariant. Soit Ω' un autre point invariant. On a

$$\overline{\Omega\Omega'} = g(\Omega)g(\Omega') = \psi(\overline{\Omega\Omega'})$$

d'où $\psi^2(\overline{\Omega\Omega'}) = \overline{\Omega\Omega'}$. Or $\psi^2 = -\text{id}_P$ (puisque $g \notin G_1$) d'où $\psi^2(\overline{\Omega\Omega'}) = -\overline{\Omega\Omega'}$ et, finalement, $\Omega = \Omega'$: les éléments de G_2 ont un point invariant et un seul.

5.21

a) Appelons t la translation définie par le vecteur fixe \overline{AB} . Comme $t(D) = C$, l'ensemble décrit par le point C est le transformé par t de l'ensemble décrit par le point D . Il s'agit donc du cercle $\Gamma' = t(\Gamma)$.



2° Déterminons analytiquement f^2 . On pose $M_2(x_2, y_2) = f^2(M)$,

$$\begin{cases} x_2 = 3(3x + 5y) + 5(-2x - 3y - 2) = -x - 10 \\ y_2 = -2(3x + 5y) - 3(-2x - 3y - 2) = -y + 4 \end{cases}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\begin{cases} x_2 + 5 = -(x + 5) \\ y_2 - 2 = -(z - 2) \end{cases}$$

$$\overline{\Omega M_2} = -\overline{\Omega M}$$

ou encore :
L'application f^2 est donc la symétrie centrale par rapport à Ω .
Il en résulte que $f^4 = (f^2)^2 = \text{id}_P$.

3° On peut démontrer analytiquement que l'isobarycentre de M, M_1, M_2, M_3 est le point Ω . Il est plus rapide de raisonner ainsi : l'application f conservant le barycentre (car f est affine) on a, (en appelant provisoirement N l'isobarycentre) :

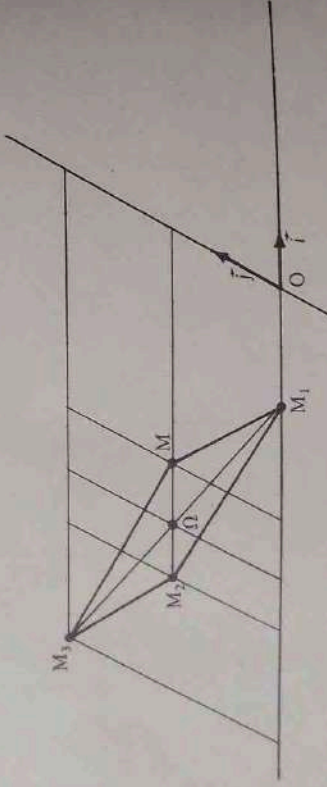
$$f(N) = \text{Bar}((f(M), 1), (f(M_1), 1), (f(M_2), 1), (f(M_3), 1)),$$

$$\text{Or } f(M) = M_1, f(M_1) = M_2, f(M_2) = M_3 \text{ et } f(M_3) = f^4(M) = M. \text{ D'où}$$

$$f(N) = \text{Bar}(M, 1), (M_2, 1), (M_3, 1), (M, 1) = N.$$

Le point N est donc invariant par $f : N = \Omega$.

Les points M et $M_2 = f^2(M)$ sont symétriques par rapport à Ω . Il en est de même des points M_1 et $M_3 = f^2(M_1)$. Le quadrilatère de sommets M, M_1, M_2, M_3 est donc un parallélogramme.



B. 1° Le raisonnement de la question précédente montre que le point Ω est invariant par g .

2° On a $(\psi^2)^2 = \psi g 4 = \text{id}_P$. L'endomorphisme ψ^2 est donc une symétrie vectorielle. A priori, ψ^2 peut donc être égal à $\text{id}_P, -\text{id}_P$ ou à une symétrie par rapport à une droite vectorielle. C'est cette dernière éventualité que nous allons éliminer.

3° a) La matrice de ψ^2 dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) On a : $\psi(\vec{e}_1) = \alpha\vec{e}_1 + \gamma\vec{e}_2$ et $\psi(\vec{e}_2) = \beta\vec{e}_1 + \delta\vec{e}_2$. D'où :

$$\begin{cases} \psi^2(\vec{e}_1) = \alpha\psi(\vec{e}_1) + \gamma\psi(\vec{e}_2) = (\alpha^2 + \gamma\beta)\vec{e}_1 + (\gamma\alpha + \gamma\delta)\vec{e}_2 \\ \psi^2(\vec{e}_2) = \beta\psi(\vec{e}_1) + \delta\psi(\vec{e}_2) = (\beta\alpha + \beta\delta)\vec{e}_1 + (\gamma\beta + \delta^2)\vec{e}_2 \end{cases}$$

La matrice de ψ^2 dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est donc :

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 + \gamma\beta & \beta(\alpha + \delta) \\ \gamma(\alpha + \delta) & \gamma\beta + \delta^2 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \alpha^2 + \gamma\beta = 1 & (1) \\ \beta(\alpha + \delta) = 0 & (2) \\ \gamma(\alpha + \delta) = 0 & (3) \\ \gamma\beta + \delta^2 = -1 & (4) \end{cases}$$

$\beta = 0$ ou $\gamma = 0$ est en contradiction avec (4);

$\alpha + \delta = 0$ implique d'après (1) $\delta^2 + \gamma\beta = 1$, en contradiction avec (4).

Ce système n'a donc pas de solution : ψ^2 ne peut être une symétrie vectorielle par rapport à une droite.

4° L'endomorphisme ψ^2 est donc égal à id_P ou à $-\text{id}_P$.

• Si $\psi^2 = \text{id}_P$, l'application affine f^2 est une translation, mais, f^2 ayant un point invariant, f^2 est l'identité. Il en résulte que f est une symétrie affine. Il est clair que, réciproquement, toute symétrie affine est dans G . On notera G_1 l'ensemble des symétries affines.

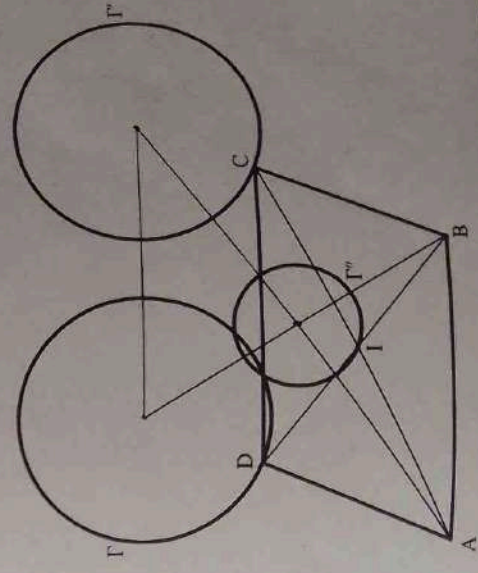
• $G_2 = G - G_1$ n'est pas vide. L'application étudiée dans le A est un élément de G_2 . Soit g un élément de G_2 , on a vu que g possédait au moins un point invariant. Soit Ω' un autre point invariant. On a

$$\overline{\Omega\Omega'} = g(\overline{\Omega'}) = \overline{\psi(\Omega')}$$

d'où $\psi^2(\overline{\Omega\Omega'}) = \overline{\Omega\Omega'}$. Or $\psi^2 = -\text{id}_P$ (puisque $g \notin G_1$) d'où $\psi^2(\overline{\Omega\Omega'}) = -\overline{\Omega\Omega'}$ et, finalement, $\Omega = \Omega'$: les éléments de G_2 ont un point invariant et un seul.

5.21

a) Appelons t la translation définie par le vecteur fixe \overline{AB} . Comme $t(D) = C$, l'ensemble décrit par le point C est le transformé par t de l'ensemble décrit par le point D . Il s'agit donc du cercle $\Gamma' = t(\Gamma)$.

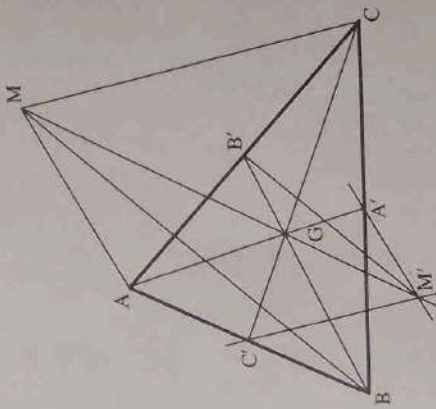


Remarque
Le parallélogramme ABCD peut éventuellement être aplati.

h) Appelons h l'homothétie (fixe) de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$. Comme $h(D) = I$, l'ensemble décrit par le point I est le transformé par h de l'ensemble décrit par le point D. Il s'agit donc du cercle $\Gamma^w = h(\Gamma)$. Remarque. Γ^w est également le cercle déduit de Γ par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

Remarque
Cet exercice illustre une méthode de recherche d'un ensemble de points. Supposons avoir à déterminer un ensemble \mathcal{E}' de points M' . Si on connaît une transformation $f : M \mapsto M'$ ainsi que l'ensemble \mathcal{E} des points M, l'ensemble \mathcal{E}' cherché est égal à $f(\mathcal{E})$.

5.22 Soit G l'isobarycentre du triangle ABC et h l'homothétie de centre G et de rapport $\frac{1}{2}$.



L'homothétie h transforme A en A' et la droite (AM) en la droite parallèle à (AM) passant par A'. De même h transforme la droite (BM) (resp. (CM)) en la droite passant par B' (resp. C') et parallèle à (BM) (resp. (CM)). Par suite, les trois droites considérées dans l'énoncé sont concourantes en $M' = h(M)$.

L'application $M \mapsto M'$, définie sur $P^* = P - \{A, B, C\}$ est la restriction à P^* de l'homothétie h . Son image est $P - \{A', B', C'\}$.

5.23 1° Soit M un point de (BC). Ce point peut être considéré comme le barycentre de (B, λ) et de (C, $1 - \lambda$) où $\lambda \in \mathbb{R}$.

La projection p_1 est une application affine et, par conséquent, « conserve le barycentre ». Comme $p_1(B) = B$ et $p_1(C) = A$, on a donc

$$p_1(M) = \text{Bar}((B, \lambda), (A, 1 - \lambda)).$$

De même, p_2 et p_3 conservant aussi le barycentre, on a successivement :

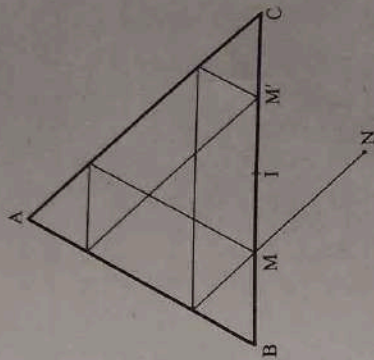
$$\begin{aligned} (p_2 \circ p_1)(M) &= \text{Bar}((C, \lambda), (A, 1 - \lambda)) \\ \tilde{f}(M) &= (p_3 \circ p_2 \circ p_1)(M) = \text{Bar}((C, \lambda), (B, 1 - \lambda)). \end{aligned}$$

Appelons M' le point $\tilde{f}(M)$. Soit I le milieu de (B, C). On a :

$$\begin{aligned} \vec{IM} &= \lambda \vec{IB} + (1 - \lambda) \vec{IC} = (2\lambda - 1) \vec{IB} \\ \vec{IM'} &= (1 - \lambda) \vec{IB} + \lambda \vec{IC} = (1 - 2\lambda) \vec{IB} \\ \vec{IM'} &= -\vec{IM}. \end{aligned}$$

L'application \tilde{f} est donc la symétrie par rapport au milieu I de (B, C).

2° L'application \tilde{f}^2 est donc l'identité de (BC).



3° Soit N un point quelconque du plan. La parallèle à (AC) menée par N coupe (BC) en M. On a $p_1(N) = p_1(M)$, de sorte que,

$$\begin{aligned} f^2(N) &= (p_3 \circ p_2 \circ p_1 \circ p_3 \circ p_2)(p_1(N)) = (p_3 \circ p_2 \circ p_1 \circ p_3 \circ p_2)(p_1(M)) \\ &= f^2(M) = \tilde{f}^2(M) = M. \end{aligned}$$

L'application f^2 est donc la projection sur (BC) parallèlement à (AC).

5.24 Considérons un cercle Γ_1 quelconque centré en un point Ω_1 de D et tangent à D'.

Supposons d'abord qu'un cercle Γ , de centre Ω , soit solution du problème posé. L'homothétie H de centre I et de rapport $\frac{I\Omega}{I\Omega_1}$ laisse globalement

invariante la droite D' et transforme le cercle Γ_1 en un cercle centré en Ω et tangent à D'. On a donc $H(\Gamma_1) = \Gamma$. Le point $h^{-1}(A)$ appartient à Γ_1 et à la droite (IA).

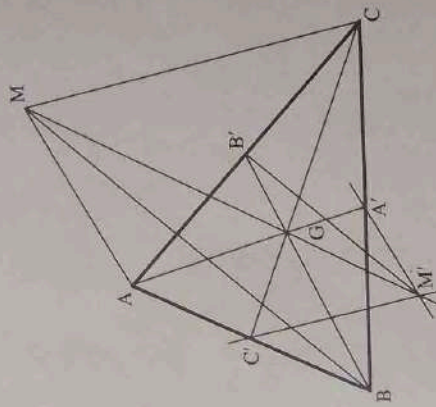
Réciproquement, soit A_1 un point commun à (IA) et à Γ_1 . L'homothétie H de centre I et de rapport $\frac{IA}{IA_1}$ transforme Γ_1 en un cercle Γ passant par A, centré sur D et tangent à D', c'est-à-dire en un cercle solution du problème.

Remarque
Le parallélogramme ABCD peut éventuellement être aplati.

b) Appelons h l'homothétie (fixe) de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$. Comme $h(D) = I$, l'ensemble décrit par le point I est le transformé par h de l'ensemble décrit par le point D . Il s'agit donc du cercle $\Gamma' = h(\Gamma)$. Remarque. Γ' est également le cercle déduit de Γ par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

Remarque
Cet exercice illustre une méthode de recherche d'un ensemble de points. Supposons avoir à déterminer un ensemble \mathcal{E}' de points M' . Si on connaît une transformation $f : M \rightarrow M'$ ainsi que l'ensemble \mathcal{E} des points M , l'ensemble \mathcal{E}' cherché est égal à $f(\mathcal{E})$.

5.22 Soit G l'isobarycentre du triangle ABC et h l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.



L'homothétie h transforme A en A' et la droite (AM) en la droite parallèle à (AM) passant par A' . De même h transforme la droite (BM) (resp. (CM)) en la droite passant par B' (resp. C') et parallèle à (BM) (resp. (CM)). Par suite, les trois droites considérées dans l'énoncé sont concourantes en $M' = h(M)$.

L'application $M \rightarrow M'$, définie sur $P^* = P - \{A, B, C\}$ est la restriction à P^* de l'homothétie h . Son image est $P - \{A', B', C'\}$.

5.23 1° Soit M un point de (BC) . Ce point peut être considéré comme le barycentre de (B, λ) et de $(C, 1 - \lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

La projection p_1 est une application affine et, par conséquent, « conserve le barycentre ». Comme $p_1(B) = B$ et $p_1(C) = A$, on a donc

$$p_1(M) = \text{Bar}((B, \lambda), (A, 1 - \lambda)).$$

De même, p_2 et p_3 conservant aussi le barycentre, on a successivement :

$$(p_2 \circ p_1)(M) = \text{Bar}((C, \lambda), (A, 1 - \lambda))$$

$$\tilde{f}(M) = (p_3 \circ p_2 \circ p_1)(M) = \text{Bar}((C, \lambda), (B, 1 - \lambda)).$$

Appelons M' le point $\tilde{f}(M)$. Soit I le milieu de (B, C) . On a :

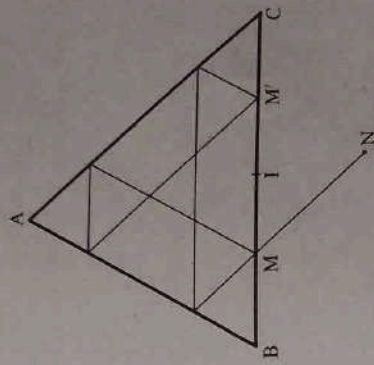
$$\vec{IM} = \lambda \vec{IB} + (1 - \lambda) \vec{IC} = (2\lambda - 1) \vec{IB}$$

$$\vec{IM}' = (1 - \lambda) \vec{IB} + \lambda \vec{IC} = (1 - 2\lambda) \vec{IB}$$

$$\vec{IM}' = -\vec{IM}.$$

L'application \tilde{f} est donc la symétrie par rapport au milieu I de (B, C) .

2° L'application \tilde{f}^2 est donc l'identité de (BC) .



3° Soit N un point quelconque du plan. La parallèle à (AC) menée par N coupe (BC) en M . On a $p_1(N) = p_1(M)$, de sorte que,

$$\begin{aligned} f^2(N) &= (p_3 \circ p_2 \circ p_1 \circ p_3 \circ p_2)(p_1(N)) = (p_3 \circ p_2 \circ p_1 \circ p_3 \circ p_2)(p_1(M)) \\ &= f^2(M) = \tilde{f}^2(M) = M. \end{aligned}$$

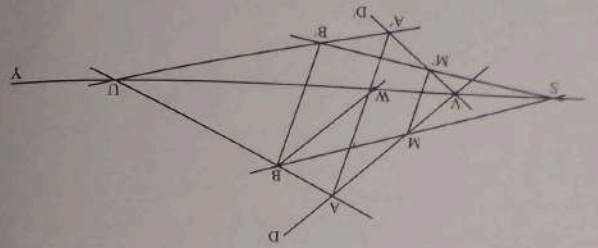
L'application f^2 est donc la projection sur (BC) parallèlement à (AC) .

5.24 Considérons un cercle Γ_1 quelconque centré en un point Ω , de D et tangent à D' .

Supposons d'abord qu'un cercle Γ , de centre Ω , soit solution du problème posé. L'homothétie H de centre I et de rapport $\frac{I\Omega}{I\Omega_1}$ laisse globalement

invariante la droite D' et transforme le cercle Γ_1 en un cercle centré en Ω et tangent à D' . On a donc $H(\Gamma_1) = \Gamma$. Le point $h^{-1}(A)$ appartient à Γ_1 et à la droite (IA) .

Réciproquement, soit A_1 un point commun à (IA) et à Γ_1 . L'homothétie H de centre I et de rapport $\frac{IA}{IA_1}$ transforme Γ_1 en un cercle Γ passant par A , centré sur D et tangent à D' , c'est-à-dire en un cercle solution du problème.



5.25 Les points U et V sont nécessairement distincts. Appelons Y la droite (UV) et Z la direction commune de (AA') et (BB').

3° En anticipant sur l'étude des intersections de la parabole de foyer A et de directrice D' avec la droite D.

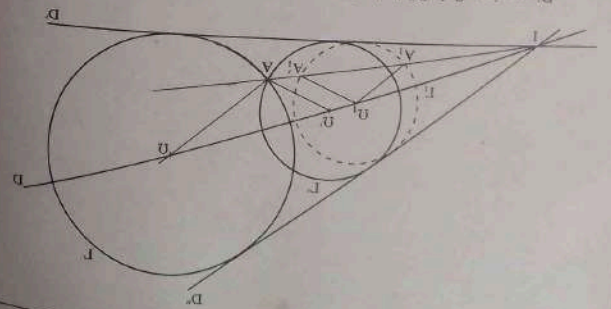
2° Le lecteur étudiera facilement le problème analogue dans le cas où les droites D et D' sont orthogonales ou parallèles. (Dans ce dernier cas, on remplace les homothéties du raisonnement précédent par des translations.)

1° La famille des cercles centrés sur D et tangents à D' est une famille de cercles homothétiques. Celui (ou ceux) que l'on cherche peut donc se construire à partir de l'un quelconque d'entre eux par une homothétie. Ceci illustre une méthode intéressante de construction : ayant à construire une figure assujétie à plusieurs conditions, il est souvent intéressant d'entre eux par une homothétie.

Remarques

- Dans les autres cas, le problème n'a pas de solution.
- Si A appartient à D' ou à D'', la droite (TA) est tangente à T, en un point A'. Le problème a une solution. (L'étude directe est d'ailleurs immédiate dans ce cas.)
- Si A appartient à D ou à D'', la droite (TA) coupe T en deux points A₁ et A₂. Le problème a dans ce cas deux solutions (figure).
- Si A appartient aux deux régions du plan limitées à D' et D'' et contenant D (sans appartenir à D ou D''), la droite (TA) coupe T en deux points A₁ et A₂.

Discussion. Soit D' la droite symétrique de D par rapport à D.



1° Si les droites D et D' étaient parallèles, le raisonnement serait analogue, Y étant définie comme la droite passant par U et parallèle à (A'B').

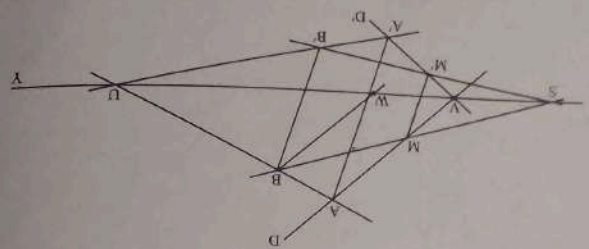
2° On peut également résoudre le problème, posé sous sa forme initiale, en composant deux homothéties : $g = H(V, \frac{VA}{VM}) \circ H(U, \frac{UA}{UM})$ transforme B en M et B' en M'. Quand g est une homothétie (c'est-à-dire (BM) non parallèle à Y), son centre est aligné avec U et V. Or, le centre de g se trouve sur (BM) et sur (B'M') qui, de ce fait, concourent sur Y. Il reste à faire la réciproque.

Remarques

Soit f l'affinité d'axe Y de direction Z et transformant A en A'. L'application f transforme U en U' donc (AB) en (A'B') et, comme (BB') est parallèle à (AA'), f(B) est égal à B'. On voit de la même façon que f(D) = D' et f(M) = M'. Par suite, f transforme la droite (BM) en la droite (B'M'), ces deux droites sont donc toutes deux parallèles à Y ou se coupent sur Y, en un point que nous noterons S. Remarquons que S est distinct du point W d'intersection de D avec la parallèle à D passant par B (car (BM) n'est pas parallèle à D).

Réciproquement, soit S un point de Y distinct de W. Comme B est distinct de B', B ne peut être sur Y. La droite (SB) est donc définie et coupe D en M. L'application f transforme la droite (SB) en (S'B') et D en D'. Donc (S'B') coupe D' en f(M) = M', et on a M = M' ou (MM') de direction Z.

Nous avons ainsi prouvé que l'ensemble cherché est la droite Y privée du point W.



5.25 Les points U et V sont nécessairement distincts. Appelons Y la droite (UV) et Z la direction commune de (AA') et (BB').

1^o La famille des cercles centrés sur D et tangents à D' est une famille de cercles homothétiques. C'est (ou ceux) que l'on cherche pour donc se construire à partir de l'un quelconque d'entre eux par une homothétie. Ceci illustre une méthode intéressante de construction : ayant à construire une figure assujettie à plusieurs conditions, il est souvent intéressant d'étudier la famille des figures obtenues en « oubliant » l'une de ces conditions.

2^o Le lecteur étudiera facilement le problème analogue dans le cas où les droites D et D' sont orthogonales ou parallèles. (Dans ce dernier cas, on remplace les homothéties du raisonnement précédent par des translations.)

3^o En attendant sur l'étude des coniques (chap. 10) on peut interpréter le problème étudié ici de cette façon : trouver les intersections de la parabole de foyer A et de directrice D' avec la droite D.

- Remarques
- Dans les autres cas, le problème n'a pas de solution.
 - Si A appartient à D' ou à D'', la droite (IA) est tangente à I, en un point A'. Le problème a une solution. (L'étude directe est d'ailleurs immédiate dans ce cas.)
 - Si A appartient à D' ou D'', la droite (IA) coupe I, en deux points A₁ et A₂. Le problème a dans ce cas deux solutions (figure).
 - Si A appartient aux deux régions du plan limitées à D' et D'' et contenant D (sans appartenir à D' ou D''), la droite (IA) coupe I, en deux points A₁ et A₂.



Discussion. Soit D' la droite symétrique de D' par rapport à D.

Remarques

1^o Si les droites D et D' étaient parallèles, le raisonnement serait analogue, Y étant définie comme la droite passant par U et parallèle à D et D'. De même, si D et D' étaient concourantes, (AB) était parallèle à (A'B').

2^o On peut également résoudre le problème, posé sous sa forme initiale, en composant deux homothéties : $g = H \left(V, \frac{VA}{VM} \right) \circ H \left(U, \frac{UB}{UA} \right)$ transforme B en M et B' en M'. Quand g est une homothétie (c'est-à-dire (BM) non parallèle à Y), son centre est aligné avec U et V. Or, le centre de g se trouve sur (BM) et sur (B'M'), qui, de ce fait, concourent sur Y. Il reste à faire la réciproque.

Soit f l'affinité d'axe Y de direction Z et transformant A en A'. L'application f transforme U en U' donc (AB) en (A'B') et, comme (BB') est parallèle à (AA'), f(B) est égal à B'. On voit de la même façon que f(D) = D' et f(M) = M'. Par suite, f transforme la droite (BM) en la droite (B'M'), ces deux droites sont donc toutes deux parallèles à Y ou se coupent sur Y, en un point que nous noterons S. Remarquons que S est distinct du point W d'intersection de D avec la parallèle à D passant par B (car (BM) n'est pas parallèle à D).

Réciproquement, soit S un point de Y distinct de W. Comme B est distinct de B', B ne peut être sur Y. La droite (SB) est donc définie et coupe D en M. L'application f transforme la droite (SB) en (S'B') et D en D'. Donc (S'B') coupe D' en f(M) = M'. et on a M = M' ou (MM') de direction Z.

Nous avons ainsi prouvé que l'ensemble cherché est la droite Y privée du point W.

Ce chapitre figure au programme de Terminale C et ne figure pas au programme de Terminale E.

□ **Angle orienté d'un couple de vecteurs non nuls**

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , soit (\vec{u}, \vec{v}) un couple de vecteurs non nuls du plan.

Définitions

1. On appelle cosinus du couple (\vec{u}, \vec{v}) le nombre : $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$.
2. On appelle sinus du couple (\vec{u}, \vec{v}) le nombre $\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\det(\vec{i}, \vec{j}, \vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$.
3. L'ensemble des couples de vecteurs non nuls ayant même cosinus et même sinus que le couple de vecteurs non nuls (\vec{u}, \vec{v}) est appelé angle orienté du couple (\vec{u}, \vec{v}) .

□ **Angle orienté d'un couple de demi-droites de même origine**

Définition

L'ensemble des couples de demi-droites de même origine, cette origine décrivant le plan, ayant même cosinus et même sinus que le couple de demi-droites (Ox, Oy) est appelé angle orienté du couple (Ox, Oy) .

□ **Mesures d'un angle orienté de vecteurs ou de demi-droites**

Le plan étant orienté, on peut associer à tout angle orienté de couples de vecteurs non nuls ou de demi-droites de même origine une infinité de nombres réels $\alpha + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). L'un quelconque de ces nombres est appelé une mesure du couple de vecteurs ou de demi-droites ou encore une mesure de l'angle orienté associé.

Une mesure se notera : $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ ou $\widehat{(Ox, Oy)}$. Si α est une mesure du couple (Ox, Oy) on note :

$$\widehat{(Ox, Oy)} \equiv \alpha \pmod{2\pi} \text{ ou } \widehat{(Ox, Oy)} \equiv \alpha [2\pi].$$

Relation de Chasles

Quelles que soient les demi-droites Ox, Oy, Oz du plan orienté :

$$\widehat{(Ox, Oy)} + \widehat{(Oy, Oz)} \equiv \widehat{(Ox, Oz)} [2\pi].$$

Théorème

Soit Ox une demi-droite du plan orienté et α un nombre réel. Il existe une unique demi-droite Oy telle que :

$$\widehat{(Ox, Oy)} \equiv \alpha [2\pi].$$

Théorème et définition

Soit Ox et Oy deux demi-droites de même origine O du plan orienté. Il existe deux demi-droites opposées Oz_1 et Oz_2 d'origine O telles que :

$$\widehat{(Ox, Oz_1)} \equiv \widehat{(Oz_1, Oy)} [2\pi] \text{ et } \widehat{(Ox, Oz_2)} \equiv \widehat{(Oz_2, Oy)} [2\pi].$$

Oz_1 et Oz_2 sont appelées les demi-droites bissectrices du couple (Ox, Oy) . La droite $z_1z_2 = Oz_1 \cup Oz_2$ est appelée la droite bissectrice du couple (Ox, Oy) .

□ **Angle orienté d'un couple de droites ou d'un couple de droites vectorielles**

Le plan est supposé rapporté à un repère orthonormé.

Définitions

1. L'ensemble des couples de droites (D, D') tels que l'on peut trouver un couple (\vec{u}, \vec{v}) , où \vec{u} est un vecteur directeur de D et \vec{v} un vecteur directeur de D' , ayant même cosinus et même sinus est appelé angle orienté du couple (D, D') .
2. L'ensemble des couples de droites vectorielles (\bar{D}, \bar{D}') tels que l'on peut trouver un couple (\vec{u}, \vec{v}) , où \vec{u} est un vecteur non nul de \bar{D} et \vec{v} un vecteur non nul de \bar{D}' , ayant même cosinus et même sinus est appelé angle orienté du couple (\bar{D}, \bar{D}') .

□ **Mesure d'un angle orienté d'un couple de droites ou de droites vectorielles**

Soit deux droites D et D' du plan supposé orienté, \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs directeurs respectivement de D et D' , α une mesure du couple (\vec{u}, \vec{v}) . On peut associer au couple (D, D') une infinité de nombres réels $\alpha + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). L'un quelconque de ces nombres est appelé une mesure du couple de droites (D, D') ou (\bar{D}, \bar{D}') ou encore une mesure de l'angle orienté associé.

Ce chapitre figure au programme de Terminale C et ne figure pas au programme de Terminale E.

□ **Angle orienté d'un couple de vecteurs non nuls**

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , soit (\vec{u}, \vec{v}) un couple de vecteurs non nuls du plan.

Définitions

1. On appelle cosinus du couple (\vec{u}, \vec{v}) le nombre : $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$.

2. On appelle sinus du couple (\vec{u}, \vec{v}) le nombre $\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\det_{\vec{i}, \vec{j}}(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$.

3. L'ensemble des couples de vecteurs non nuls ayant même cosinus et même sinus que le couple de vecteurs non nuls (\vec{u}, \vec{v}) est appelé angle orienté du couple (\vec{u}, \vec{v}) .

□ **Angle orienté d'un couple de demi-droites de même origine**

Définition

L'ensemble des couples de demi-droites de même origine, cette origine décrivant le plan, ayant même cosinus et même sinus que le couple de demi-droites (Ox, Oy) est appelé angle orienté du couple (Ox, Oy) .

□ **Mesures d'un angle orienté de vecteurs ou de demi-droites**

Le plan étant orienté, on peut associer à tout angle orienté de couples de vecteurs non nuls ou de demi-droites de même origine une infinité de nombres réels $\alpha + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). L'un quelconque de ces nombres est appelé une mesure du couple de vecteurs ou de demi-droites ou encore une mesure de l'angle orienté associé.

Une mesure se notera : (\vec{u}, \vec{v}) ou (Ox, Oy) . Si α est une mesure du couple (Ox, Oy) on note :

$$(Ox, Oy) \equiv \alpha \pmod{2\pi} \text{ ou } (Ox, Oy) \equiv \alpha [2\pi].$$

Relation de Chasles

Quelles que soient les demi-droites Ox, Oy, Oz du plan orienté :

$$(Ox, Oy) + (Oy, Oz) \equiv (Ox, Oz) [2\pi].$$

Théorème

Soit Ox une demi-droite du plan orienté et α un nombre réel. Il existe une unique demi-droite Oy telle que :

$$(Ox, Oy) \equiv \alpha [2\pi].$$

Théorème et définition

Soit Ox et Oy deux demi-droites de même origine O du plan orienté. Il existe deux demi-droites opposées Oz_1 et Oz_2 d'origine O telles que :

$$(Ox, Oz_1) \equiv (Oz_1, Oy) [2\pi] \text{ et } (Ox, Oz_2) \equiv (Oz_2, Oy) [2\pi].$$

Oz_1 et Oz_2 sont appelées les demi-droites bissectrices du couple (Ox, Oy) . La droite $z_1z_2 = Oz_1 \cup Oz_2$ est appelée la droite bissectrice du couple (Ox, Oy) .

□ **Angle orienté d'un couple de droites ou d'un couple de droites vectorielles**

Le plan est supposé rapporté à un repère orthonormé.

Définitions

1. L'ensemble des couples de droites (D, D') tels que l'on peut trouver un couple (\vec{u}, \vec{v}) , où \vec{u} est un vecteur directeur de D et \vec{v} un vecteur directeur de D' , ayant même cosinus et même sinus est appelé angle orienté du couple (D, D') .

2. L'ensemble des couples de droites vectorielles (\vec{D}, \vec{D}') tels que l'on peut trouver un couple (\vec{u}, \vec{v}) , où \vec{u} est un vecteur non nul de \vec{D} et \vec{v} un vecteur non nul de \vec{D}' , ayant même cosinus et même sinus est appelé angle orienté du couple (\vec{D}, \vec{D}') .

□ **Mesure d'un angle orienté d'un couple de droites ou de droites vectorielles**

Soit deux droites D et D' du plan supposé orienté, \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs directeurs respectivement de D et D' , α une mesure du couple (\vec{u}, \vec{v}) . On $(k \in \mathbb{Z})$. L'un quelconque de ces nombres est appelé une mesure du couple de droites (D, D') ou (\vec{D}, \vec{D}') ou encore une mesure de l'angle orienté associé.

6 | Angles orientés

27 (6)

Ce chapitre figure au programme de Terminale C et ne figure pas au programme de Terminale E.

□ Angle orienté d'un couple de vecteurs non nuls

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , soit (\vec{u}, \vec{v}) un couple de vecteurs non nuls du plan.

Définitions

1. On appelle cosinus du couple (\vec{u}, \vec{v}) le nombre : $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$.
2. On appelle sinus du couple (\vec{u}, \vec{v}) le nombre $\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\det_{\vec{i}, \vec{j}}(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$.
3. L'ensemble des couples de vecteurs non nuls ayant même cosinus et même sinus que le couple de vecteurs non nuls (\vec{u}, \vec{v}) est appelé angle orienté du couple (\vec{u}, \vec{v}) .

□ Angle orienté d'un couple de demi-droites de même origine

Définition

L'ensemble des couples de demi-droites de même origine, cette origine décrivant le plan, ayant même cosinus et même sinus que le couple de demi-droites (Ox, Oy) est appelé angle orienté du couple (Ox, Oy) .

□ Mesures d'un angle orienté de vecteurs ou de demi-droites

Le plan étant orienté, on peut associer à tout angle orienté de couples de vecteurs non nuls ou de demi-droites de même origine une infinité de nombres réels $\alpha + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). L'un quelconque de ces nombres est appelé une mesure du couple de vecteurs ou de demi-droites ou encore une mesure de l'angle orienté associé.

Une mesure se notera : $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ ou $\widehat{(Ox, Oy)}$. Si α est une mesure du couple (Ox, Oy) on note :

$$\widehat{(Ox, Oy)} \equiv \alpha \pmod{2\pi} \text{ ou } \widehat{(Ox, Oy)} \equiv \alpha [2\pi].$$

Relation de Chasles

Quelles que soient les demi-droites Ox, Oy, Oz du plan orienté :

$$\widehat{(Ox, Oy)} + \widehat{(Oy, Oz)} \equiv \widehat{(Ox, Oz)} [2\pi].$$

Théorème

Soit Ox une demi-droite du plan orienté et α un nombre réel. Il existe une unique demi-droite Oy telle que :

$$\widehat{(Ox, Oy)} \equiv \alpha [2\pi].$$

Théorème et définition

Soit Ox et Oy deux demi-droites de même origine O du plan orienté. Il existe deux demi-droites opposées Oz_1 et Oz_2 d'origine O telles que :

$$\widehat{(Ox, Oz_1)} \equiv \widehat{(Ox, Oy)} [2\pi] \text{ et } \widehat{(Ox, Oz_2)} \equiv \widehat{(Oz_2, Oy)} [2\pi].$$

Oz_1 et Oz_2 sont appelées les demi-droites bissectrices du couple (Ox, Oy) . La droite $z_1z_2 = Oz_1 \cup Oz_2$ est appelée la droite bissectrice du couple (Ox, Oy) .

□ Angle orienté d'un couple de droites ou d'un couple de droites vectorielles

Le plan est supposé rapporté à un repère orthonormé.

Définitions

1. L'ensemble des couples de droites (D, D') tels que l'on peut trouver un couple (\vec{u}, \vec{v}) , où \vec{u} est un vecteur directeur de D et \vec{v} un vecteur directeur de D' , ayant même cosinus et même sinus est appelé angle orienté du couple (D, D') .
2. L'ensemble des couples de droites vectorielles (\vec{D}, \vec{D}') tels que l'on peut trouver un couple (\vec{u}, \vec{v}) , où \vec{u} est un vecteur non nul de \vec{D} et \vec{v} un vecteur non nul de \vec{D}' , ayant même cosinus et même sinus est appelé angle orienté du couple (\vec{D}, \vec{D}') .

□ Mesure d'un angle orienté d'un couple de droites ou de droites vectorielles

Soit deux droites D et D' du plan supposé orienté, \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs directeurs respectivement de D et D' , α une mesure du couple (\vec{u}, \vec{v}) . On peut associer au couple (D, D') une infinité de nombres réels $\alpha + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). L'un quelconque de ces nombres est appelé une mesure du couple de droites (D, D') ou (\vec{D}, \vec{D}') ou encore une mesure de l'angle orienté associé.

Ce chapitre figure au programme de Terminale C et ne figure pas au programme de Terminale E.

□ **Angle orienté d'un couple de vecteurs non nuls**

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , soit (\vec{u}, \vec{v}) un couple de vecteurs non nuls du plan.

Définitions

1. On appelle cosinus du couple (\vec{u}, \vec{v}) le nombre : $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$.

2. On appelle sinus du couple (\vec{u}, \vec{v}) le nombre $\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\det_{\mathbb{R}, \mathbb{R}}(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$.

3. L'ensemble des couples de vecteurs non nuls ayant même cosinus et même sinus que le couple de vecteurs non nuls (\vec{u}, \vec{v}) est appelé angle orienté du couple (\vec{u}, \vec{v}) .

□ **Angle orienté d'un couple de demi-droites de même origine**

Définition

L'ensemble des couples de demi-droites de même origine, cette origine décrivant le plan, ayant même cosinus et même sinus que le couple de demi-droites (Ox, Oy) est appelé angle orienté du couple (Ox, Oy) .

□ **Mesures d'un angle orienté de vecteurs ou de demi-droites**

Le plan étant orienté, on peut associer à tout angle orienté de couples de vecteurs non nuls ou de demi-droites de même origine une infinité de nombres réels $\alpha + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). L'un quelconque de ces nombres est appelé une mesure du couple de vecteurs ou de demi-droites ou encore une mesure de l'angle orienté associé.

Une mesure se notera : $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ ou $\widehat{(Ox, Oy)}$. Si α est une mesure du couple (Ox, Oy) on note :

$$\widehat{(Ox, Oy)} \equiv \alpha \pmod{2\pi} \text{ ou } \widehat{(Ox, Oy)} \equiv \alpha [2\pi].$$

Relation de Chasles

Quelles que soient les demi-droites Ox, Oy, Oz du plan orienté :

$$\widehat{(Ox, Oy)} + \widehat{(Oy, Oz)} \equiv \widehat{(Ox, Oz)} [2\pi].$$

Théorème

Soit Ox une demi-droite du plan orienté et α un nombre réel. Il existe une unique demi-droite Oy telle que :

$$\widehat{(Ox, Oy)} \equiv \alpha [2\pi].$$

Théorème et définition

Soit Ox et Oy deux demi-droites de même origine O du plan orienté. Il existe deux demi-droites opposées Oz_1 et Oz_2 d'origine O telles que :

$$\widehat{(Ox, Oz_1)} \equiv (Oz_1, Oy) [2\pi] \text{ et } \widehat{(Ox, Oz_2)} \equiv (Oz_2, Oy) [2\pi].$$

Oz_1 et Oz_2 sont appelées les demi-droites bissectrices du couple (Ox, Oy) . La droite $z_1z_2 = Oz_1 \cup Oz_2$ est appelée la droite bissectrice du couple (Ox, Oy) .

□ **Angle orienté d'un couple de droites ou d'un couple de droites vectorielles**

Le plan est supposé rapporté à un repère orthonormé.

Définitions

1. L'ensemble des couples de droites (D, D') tels que l'on peut trouver un couple (\vec{u}, \vec{v}) , où \vec{u} est un vecteur directeur de D et \vec{v} un vecteur directeur de D' , ayant même cosinus et même sinus est appelé angle orienté du couple (D, D') .

2. L'ensemble des couples de droites vectorielles (\vec{D}, \vec{D}') tels que l'on peut trouver un couple (\vec{u}, \vec{v}) , où \vec{u} est un vecteur non nul de \vec{D} et \vec{v} un vecteur non nul de \vec{D}' , ayant même cosinus et même sinus est appelé angle orienté du couple (\vec{D}, \vec{D}') .

□ **Mesure d'un angle orienté d'un couple de droites ou de droites vectorielles**

Soit deux droites D et D' du plan supposé orienté, \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs directeurs respectivement de D et D' , α une mesure du couple (\vec{u}, \vec{v}) . On peut associer au couple (D, D') une infinité de nombres réels $\alpha + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). L'un quelconque de ces nombres est appelé une mesure du couple de droites (D, D') ou (\vec{D}, \vec{D}') ou encore une mesure de l'angle orienté associé.

$$(\overline{CA}, \overline{CB}) = (\overline{DA}, \overline{DB}) [\pi]$$

Soit A, B, C, D quatre points distincts d'un plan orienté P . Ces points sont alignés ou cocycliques si et seulement si on a :

Théorème

- si $\alpha \neq 0 [2\pi]$ et $\alpha \neq \pi [2\pi]$, un arc de cercle d'extrémités A et B privé des points A et B ,
 - si $\alpha = \pi [2\pi]$, le segment ouvert $]A, B[$,
 - si $\alpha = 0 [2\pi]$, la droite (AB) privée du segment $]A, B[$.
- L'ensemble des points M de P tels que $(\overline{MA}, \overline{MB}) = \alpha [2\pi]$ est :

Théorème

- si $\alpha \neq 0 [\pi]$, un cercle contenant les points A et B privé des points A et B ,
 - si $\alpha = 0 [\pi]$, la droite (AB) privée des points A et B .
- L'ensemble des points M du plan tels que $(\overline{MA}, \overline{MB}) = \alpha [\pi]$ est :

Théorème

□ Problèmes d'angles

Les droites Δ_1 et Δ_2 sont appelées les bissectrices du couple (D, D') .

$$(\overline{D}, \overline{\Delta_1}) = (\overline{\Delta_1}, \overline{D}) [\pi] \text{ et } (\overline{D}, \overline{\Delta_2}) = (\overline{\Delta_2}, \overline{D}) [\pi]$$

Soit un couple de droites (D, D') du plan orienté, passant par un point O . Il existe deux droites Δ_1 et Δ_2 passant par O telles que :

Théorème et définition

Soit D une droite du plan orienté, O un point de D et α un nombre réel. Il existe une unique droite D' passant par O telle que : $(D, D') = \alpha [\pi]$.

Théorème

$$(\overline{D}, \overline{D'}) + (\overline{D'}, \overline{D}) = (\overline{D}, \overline{D}) [\pi]$$

Quelles que soient les droites D, D', D'' du plan orienté

Relation de Chasles

$$(\overline{D}, \overline{D'}) = \alpha [\pi] ; (\overline{D}, \overline{D''}) = \alpha [\pi]$$

Une telle mesure se notera $(\overline{D}, \overline{D'})$ ou $(\overline{D}, \overline{D'})$ on note :

Si α est une mesure du couple de droites (D, D') ou $(\overline{D}, \overline{D'})$ on note :

Dans le plan P supposé orienté on donne deux droites D et D' sécantes en O , A et A' deux points respectivement de D et D' , C et C' deux cercles sécants en M et N et respectivement tangents à D et à D' en A et A' .

Angle orienté d'un couple de droites

6.3

Montrer que : $(\overline{u}, \overline{v}) = (-\overline{u}, -\overline{v}) [2\pi]$.

6.2 Le plan supposé orienté étant rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , on donne les vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} .

3° Déterminer $(\overline{u}, \overline{v})$.

2° Montrer que : $\text{angle}(\overline{u}, \overline{v}) = \text{angle}(\overline{u_1}, \overline{v_1})$.

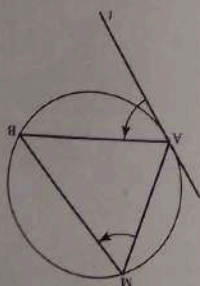
1° Déterminer $\cos(\overline{u}, \overline{v})$, $\sin(\overline{u}, \overline{v})$, $\cos(\overline{u_1}, \overline{v_1})$, $\sin(\overline{u_1}, \overline{v_1})$ on donne les vecteurs $\vec{u}(1, 1, \sqrt{3})$, $\vec{v}(1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}, 1)$, $\vec{u}_1(0, 1, \sqrt{3})$, $\vec{v}_1(1, -\sqrt{3}, 1)$.

6.1

Angle orienté d'un couple de vecteurs

Dans tout le chapitre le plan est supposé orienté.

ENONCÉS DES EXERCICES



Propriété de la tangente à un cercle
Si (At) est la tangente en A au cercle (AMB) :

$$(\overline{MA}, \overline{MB}) = (\overline{At}, \overline{AB}) [\pi]$$

Soit (M) et (M') les tangentes respectivement à \mathcal{C} et \mathcal{C}' en M .
Montrer que : $2(\widehat{MA, MA'}) \equiv (\widehat{OA, OA'}) + (\widehat{M, M'})$ [π].

Problèmes d'angles

6.4 Soit A, B, C trois points non alignés du plan; A', B', C' trois points des droites $(BC), (CA), (AB)$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles $(A', C, B), (B', A, C')$ et (C', B, A') passent par un même point.

6.5 Soit A, B, C trois points non alignés du plan; A', B', C' trois points respectivement des droites $(BC), (CA), (AB)$ et M un point du plan n'appartenant pas à ces trois droites, α un nombre réel. On suppose que :

$$\begin{aligned} (\widehat{MA, BC}) &\equiv \alpha \quad [\pi] \\ (\widehat{MB, CA}) &\equiv \alpha \quad [\pi] \\ (\widehat{MC, AB}) &\equiv \alpha \quad [\pi]. \end{aligned}$$

1° Montrer que les quatre points M, A, B', C' sont cocycliques ainsi que : M, B, A', C' et M, C, A', B' .

2° En déduire que : $(\widehat{A'B', A'C'}) + (\widehat{AB, AC}) \equiv (\widehat{MB, MC})$ [π].

3° Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que les points A', B', C' soient alignés.

6.6 Soit \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux cercles sécants en A et B , M et N deux points du cercle \mathcal{C} .

Les droites (AM) et (BN) coupent respectivement \mathcal{C}' en M' et N' . Montrer que les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles.

6.7 Soit A, B, C, D quatre points d'un cercle \mathcal{C} tels que les droites (AB) et (CD) soient orthogonales, M le point d'intersection des droites (AB) et (CD) . Montrer que la médiane relative à M du triangle (M, B, C) est hauteur relative à M du triangle (M, A, D) .

6.8 Soit O et O' deux points distincts du plan, α un nombre réel et r la rotation de centre O et d'angle α .

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que les points $M' = r(M)$, M et O' soient alignés.

6.9 Soit \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux cercles sécants en A et B , M un point de \mathcal{C} distinct de A et de B , la droite (AM) recoupe le cercle \mathcal{C}' en N .

Les tangentes respectivement aux cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' en M et N se coupent en T . Montrer que les quatre points M, T, N, B sont cocycliques.

Problèmes d'angles et nombres complexes

6.10 Le plan supposé orienté étant rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) on donne les quatre points A, B, C, D d'affixes respectives $-9 + 3i, 17 + 3i, 16 + 8i, 9 - 9i$.

1° Calculer $(\widehat{BC, BD})$ et $(\widehat{AC, AD})$.

2° En déduire que les points A, B, C, D sont cocycliques.

6.11 1° Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$(z-1)^2 = (z+1)^3$$

2° Dans un plan rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , déterminer :

a) L'ensemble des points M d'affixe z tels que : $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| = 1$.

b) L'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0 \quad [2\pi].$$

3° Quels sont les affixes des points d'intersection des deux ensembles précédents.

RÉSOLUTION DES EXERCICES ET DES PROBLÈMES

6.1 1° $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{1 - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} \times \sqrt{8}} = \frac{1}{2}$

$$\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - \sqrt{3} \\ 1 & 1 + \sqrt{3} \end{vmatrix}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

de même : $\cos(\vec{u}_1, \vec{v}_1) = \frac{1}{2}$ $\sin(\vec{u}_1, \vec{v}_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2° Les couples (\vec{u}, \vec{v}) et (\vec{u}_1, \vec{v}_1) ayant même cosinus et même sinus, ils sont deux représentants d'un même angle.

On a : $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\vec{u}_1, \vec{v}_1)$ [2π].

3° On sait que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d'où : $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{\pi}{3}$ [2π].

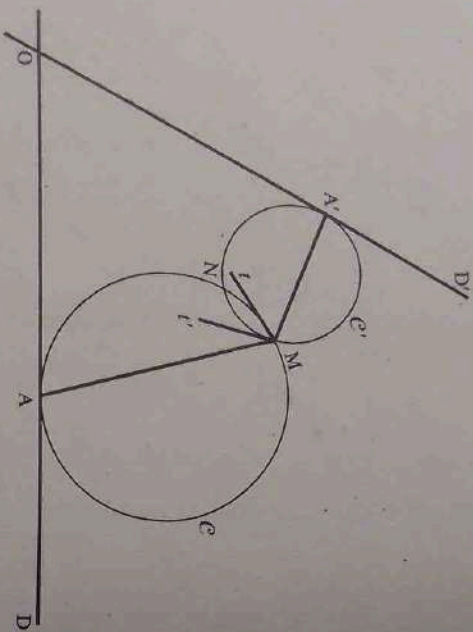
6.2 $\cos(-\vec{u}, -\vec{v}) = \frac{(-\vec{u}) \cdot (-\vec{v})}{\|-\vec{u}\| \times \|-\vec{v}\|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \cos(\vec{u}, \vec{v})$

$$\sin(-\vec{u}, -\vec{v}) = \frac{\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(-\vec{u}, -\vec{v})}{\|-\vec{u}\| \times \|-\vec{v}\|} = \frac{\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

Mais : $\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(-\vec{u}, -\vec{v}) = \det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}, \vec{v})$
d'où : $\sin(-\vec{u}, -\vec{v}) = \sin(\vec{u}, \vec{v})$
donc : $\text{angle}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{angle}(-\vec{u}, -\vec{v})$
et $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv (-\vec{u}, -\vec{v})$ [2π].

En utilisant la relation de Chasles, on a :

$$(\widehat{MA}, \widehat{MA'}) = (\widehat{MA}, \widehat{MI}) + (\widehat{MI}, \widehat{M'I'}) + (\widehat{M'I'}, \widehat{MA'}) \quad [\pi]. \quad (1)$$



Les droites (MI) et (OA) sont symétriques par rapport à la médiatrice de (A, M) donc :

$$\begin{aligned} (\widehat{MA}, \widehat{MI}) &= -(\widehat{MA}, \widehat{OA}) \quad [\pi] \\ &= (\widehat{OA}, \widehat{MA}) \quad [\pi]. \end{aligned}$$

De même on montre que :

$$\begin{aligned} (\widehat{M'I'}, \widehat{M'A'}) &= -(\widehat{O'A'}, \widehat{M'A'}) \quad [\pi] \\ &= (\widehat{M'A'}, \widehat{O'A'}) \quad [\pi] \\ &= (\widehat{M'A'}, \widehat{OA'}) + (\widehat{OA'}, \widehat{O'A'}) \quad [\pi] \end{aligned}$$

d'où en remplaçant dans (1)

$$\begin{aligned} (\widehat{MA}, \widehat{MA'}) &= (\widehat{OA}, \widehat{MA}) + (\widehat{MI}, \widehat{M'I'}) + (\widehat{M'A'}, \widehat{OA'}) + (\widehat{OA'}, \widehat{O'A'}) \quad [\pi] \\ &= (\widehat{OA}, \widehat{OA'}) + (\widehat{M'A'}, \widehat{MA}) + (\widehat{MI}, \widehat{M'I'}) \quad [\pi] \\ \text{d'où :} \quad 2(\widehat{MA}, \widehat{MA'}) &= (\widehat{OA}, \widehat{OA'}) + (\widehat{MI}, \widehat{M'I'}) \quad [\pi]. \end{aligned}$$

6.4 Les cercles circonscrits aux triangles (A', C, B') et (B', A, C') ayant le point B' en commun sont soit sécants en un autre point M soit tangents en B' .

1^{er} cas. Les deux cercles sont sécants.

$$\begin{aligned} (\widehat{M, A'}, C, B') \text{ étant cocycliques : } & (\widehat{MA'}, \widehat{MB'}) = (\widehat{CA'}, \widehat{CB'}) \quad [\pi] \\ (\widehat{M, B', A, C'}) \text{ étant cocycliques : } & (\widehat{MB'}, \widehat{MC'}) = (\widehat{AB'}, \widehat{AC'}) \quad [\pi] \end{aligned}$$

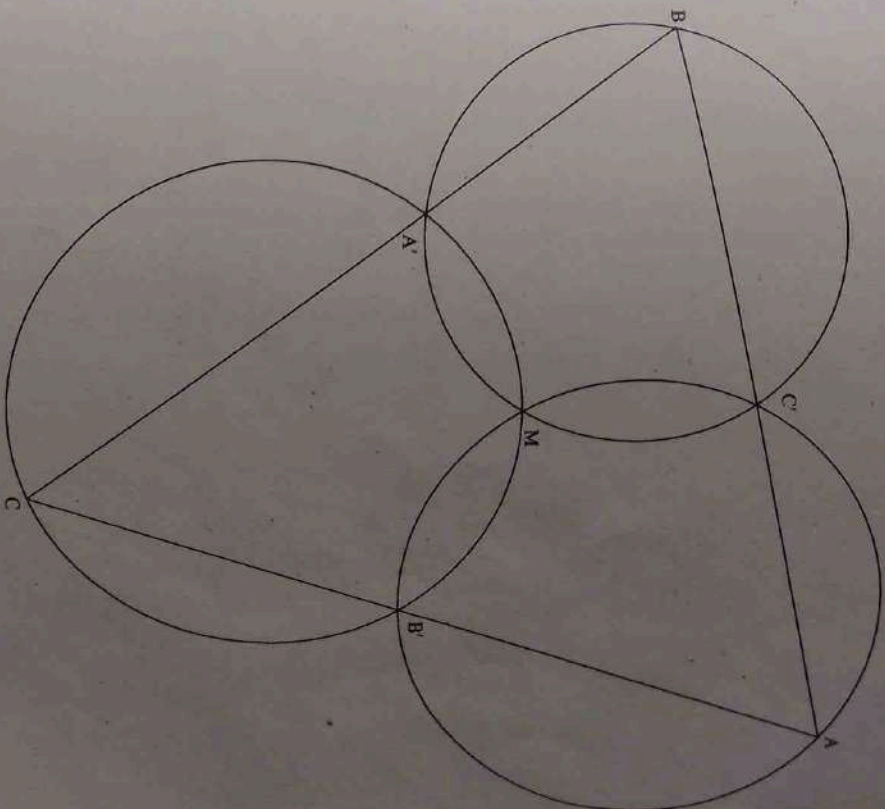
$$\begin{aligned} (\widehat{MA'}, \widehat{MC'}) &= (\widehat{MA'}, \widehat{MB'}) + (\widehat{MB'}, \widehat{MC'}) \quad [\pi] \quad (\text{Relation de Chasles}) \\ &= (\widehat{CA'}, \widehat{CB'}) + (\widehat{AB'}, \widehat{AC'}) \quad [\pi] \\ &= (\widehat{CA'}, \widehat{AC'}) + (\widehat{AC'}, \widehat{AC'}) \quad [\pi] \end{aligned}$$

$$\text{car : } (\widehat{CB'}) = (\widehat{AC'}) \text{ et } (\widehat{AB'}) = (\widehat{AC'})$$

d'où :

$$\begin{aligned} (\widehat{MA'}, \widehat{MC'}) &= (\widehat{CA'}, \widehat{AC'}) \quad [\pi] \\ &= (\widehat{BA'}, \widehat{BC'}) \quad [\pi] \end{aligned}$$

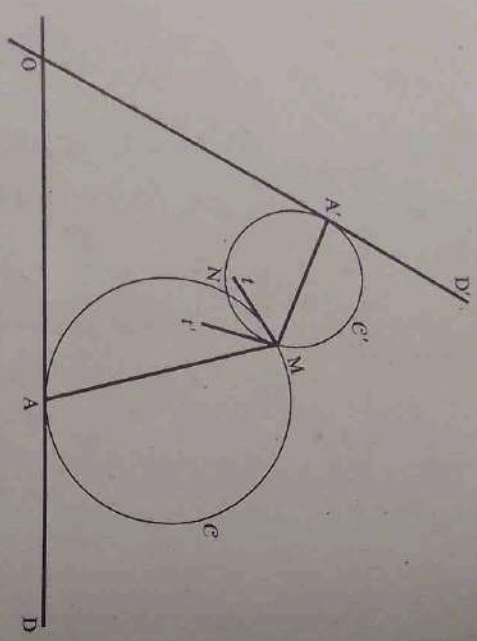
$$\text{(car } (\widehat{CA'}) = (\widehat{BA'}) \text{ et } (\widehat{AC'}) = (\widehat{BC'})).$$



Les points (M, A', B, C') sont cocycliques ou alignés, ils ne sont pas alignés car les trois points (A, B, C) ne sont pas alignés. Le point M appartient donc au cercle circonscrit au triangle (C', B, A') .

6.3 En utilisant la relation de Chasles, on a :

$$(MA, MA') \equiv (MA, MI) + (MI, M') + (M', MA') \quad [\pi] \quad (1)$$



Les droites (MI) et (OA) sont symétriques par rapport à la médiatrice de (A, M) donc :

$$(MA, MI) \equiv -(MA, OA) \quad [\pi]$$

$$\equiv (OA, MA) \quad [\pi]$$

De même on montre que :

$$(M', MA') \equiv -(OA', MA') \quad [\pi]$$

$$\equiv (MA', OA') \quad [\pi]$$

$$\equiv (MA', OA) + (OA, OA') \quad [\pi]$$

d'où en remplaçant dans (1)

$$(MA, MA') \equiv (OA, MA) + (MI, M') + (MA', OA) + (OA, OA') \quad [\pi]$$

$$\equiv (OA, OA') + (MA', MA) + (MI, M') \quad [\pi]$$

$$2(MA, MA') \equiv (OA, OA') + (MI, M') \quad [\pi]$$

6.4 Les cercles circonscrits aux triangles (A', C, B') et (B', A, C') ayant le point B' en commun sont soit sécants en un autre point M soit tangents en B'.

1^{er} cas. Les deux cercles sont sécants.

$$(M, A', C, B') \text{ étant cocycliques : } (MA', MB') \equiv (CA', CB') \quad [\pi]$$

$$(M, B', A, C') \text{ étant cocycliques : } (MB', MC') \equiv (AB', AC') \quad [\pi]$$

$$(MA', MC') \equiv (MA', MB') + (MB', MC') \quad [\pi] \text{ (Relation de Chasles)}$$

$$\equiv (CA', CB') + (AB', AC') \quad [\pi]$$

$$\equiv (CA', AC) + (AC, AC') \quad [\pi]$$

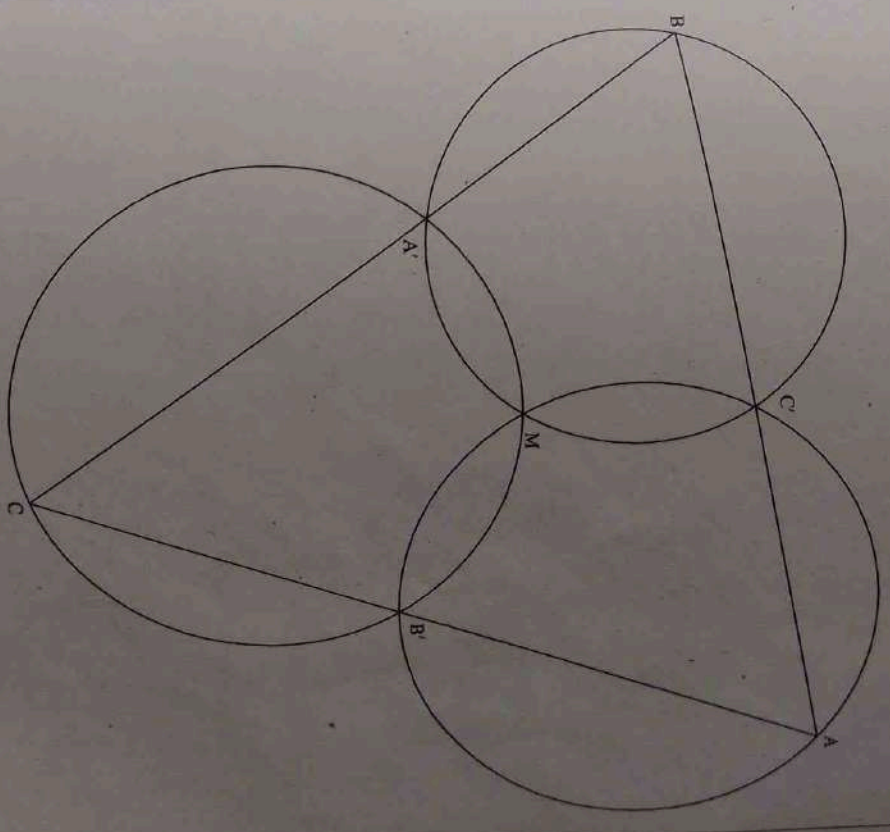
car : (CB') = (AC) et (AB') = (AC)

d'où :

$$(MA', MC') \equiv (CA', AC') \quad [\pi]$$

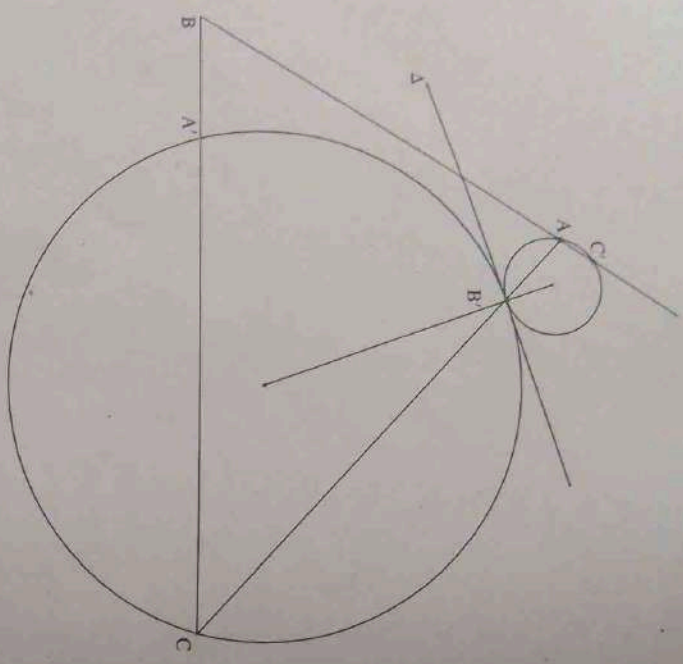
$$\equiv (BA', BC') \quad [\pi]$$

car (CA') = (BA') et (AC') = (BC')



Les points (M, A', B, C') sont cocycliques ou alignés, ils ne sont pas alignés car les trois points (A, B, C) ne sont pas alignés. Le point M appartient donc au cercle circonscrit au triangle (C', B, A')

2^e cas: Les deux cercles sont tangents en B'.



Soit Δ la tangente commune en B' aux deux cercles on a successivement :

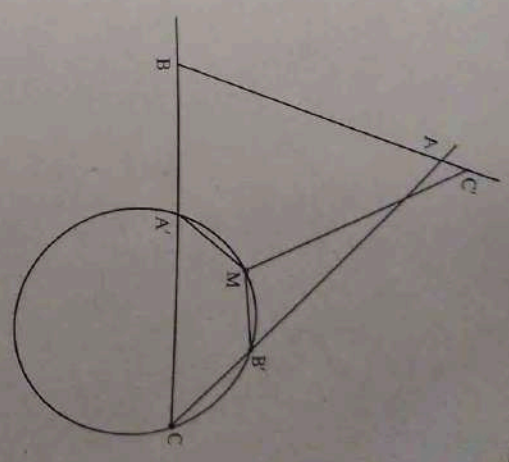
$$\begin{aligned} (C'B', C'B') &= (C'A, C'B) [\pi] \text{ car } (C'B) = (C'A) \\ &= (B'A, \Delta) [\pi] \text{ (propriété de la tangente)} \\ &= (CB', \Delta) [\pi] \text{ car } (CB') = (B'A) \\ &= (A'C, A'B') [\pi] \text{ (propriété de la tangente)} \\ &= (A'B, A'B') [\pi]. \end{aligned}$$

Les quatre points A', B, B', C' sont cocycliques ou alignés, les quatre points n'étant pas alignés, ils sont cocycliques. Le cercle circonscrit au triangle (A', B, C') passe par B'.

1^o $(MB', CA) = (MC', AB) = \alpha [\pi]$
d'où, en ajoutant (CA, MC') :

$$\begin{aligned} (MB', CA) + (CA, MC') &= (CA, MC') + (MC', AB) [\pi] \\ (MB', MC') &= (CA, AB) [\pi] \\ &= (A'B', AC') [\pi]. \end{aligned}$$

Donc les quatre points M, A, B', C' sont cocycliques ou alignés, ils ne peuvent être alignés car M n'appartient pas à la droite (AC) dans l'énoncé. On démontre de même que M, B, A', C' et M, C, A', B' sont cocycliques.



2^o En utilisant la relation de Chasles :

$$(A'B', AC') = (A'B', AM) + (AM, AC') [\pi]$$

Mais M, C, A', B' sont cocycliques donc :

$$(A'B', AM) = (CB', CM) = (AC, MC) [\pi] \text{ (car } (CB') = (AC))$$

de même on montre que :

$$(A'M, AC') = (BM, BC') = (MB, AB) [\pi]$$

d'où :

$$\begin{aligned} (A'B', AC') &= (AC, MC) + (MB, AB) [\pi] \\ &= (AC, MC) + (MB, MC) + (MC, AB) > [\pi] \\ &= (AC, AB) + (MB, MC) [\pi] \end{aligned}$$

d'où la relation demandée en faisant passer (AC, AB) au 1^{er} membre.

3^o A', B', C' sont alignés si et seulement si $(A'B', AC') = 0 [\pi]$ d'où d'après la relation précédente :

$$\begin{aligned} (AC, AB) + (MB, MC) &= 0 [\pi] \\ \text{ou : } (MB, MC) &= (AB, AC) [\pi] \end{aligned}$$

L'ensemble des points M est le cercle circonscrit au triangle (A, B, C) privé des trois points A, B, C.

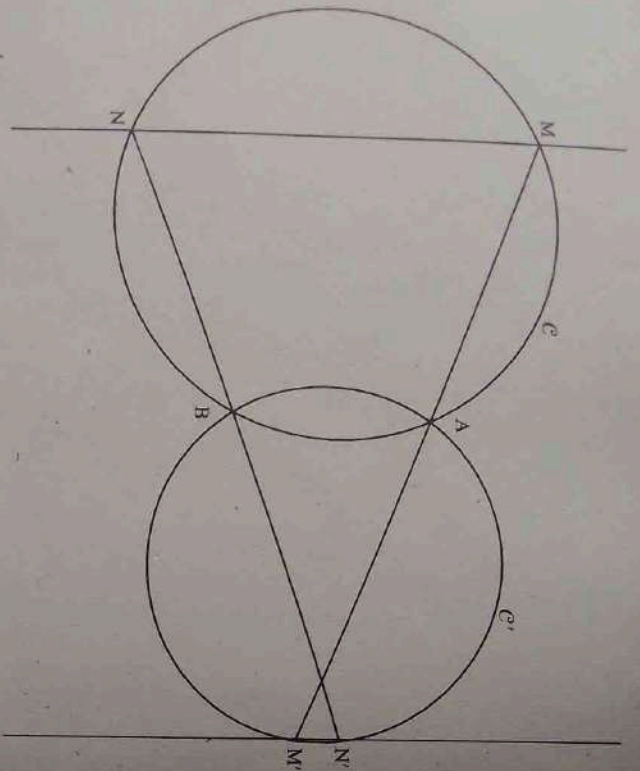
6.6

Les points (M, N, A, B) sont cocycliques donc :

$$(MN, MA) = (BN, BA) [\pi]$$

de même les points (M', N', A, B) étant cocycliques

$$(M'N', M'A) = (BN', BA) [\pi].$$



Mais $(\widehat{BN}, \widehat{BA}) \equiv (\widehat{B'N'}, \widehat{B'A}) [\pi]$ car $(BN) = (B'N')$
 d'où : $(\widehat{MN}, \widehat{MA}) \equiv (\widehat{M'N'}, \widehat{M'A}) [\pi]$
 ou encore :

$$(\widehat{MN}, \widehat{M'N'}) \equiv 0 [\pi] \text{ car } (MA) = (M'A).$$

Les droites : (MN) et $(M'N')$ sont parallèles.

6.7

Soit M' le milieu de (B, C) , le triangle (M, B, C) étant rectangle, le triangle (M, M', C) est isocèle, on a :

$$(\widehat{CM}, \widehat{CM'}) \equiv -(\widehat{MC}, \widehat{MM'}) [\pi].$$

En utilisant la relation de Chasles, on a :

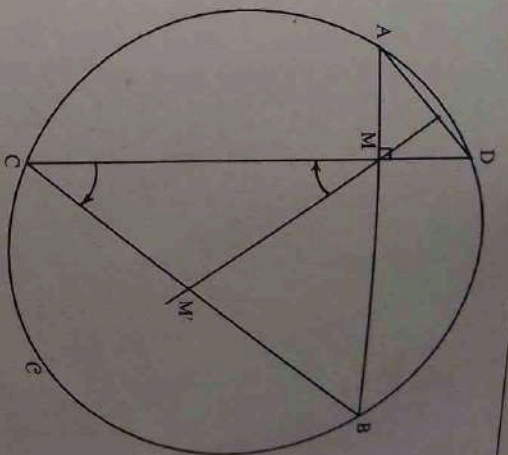
$$(\widehat{MM'}, \widehat{AD}) \equiv (\widehat{MM'}, \widehat{MC}) + (\widehat{MC}, \widehat{AD}) [\pi]. \quad (1)$$

Les quatre points A, B, C, D étant cocycliques, on a :

$$(\widehat{DC}, \widehat{DA}) \equiv (\widehat{BC}, \widehat{BA}) [\pi].$$

Mais $(\widehat{DC}) = (\widehat{MC})$ d'où $(\widehat{MC}, \widehat{DA}) \equiv (\widehat{BC}, \widehat{BA}) [\pi]$.
 D'où en utilisant la relation (1)

$$\begin{aligned} (\widehat{MM'}, \widehat{AD}) &\equiv (\widehat{CM}, \widehat{CM'}) + (\widehat{BC}, \widehat{BA}) [\pi] \\ &\equiv (\widehat{CM}, \widehat{CB}) + (\widehat{BC}, \widehat{BA}) [\pi] \\ &\equiv (\widehat{CM}, \widehat{BA}) [\pi] \\ &\equiv (\widehat{CD}, \widehat{AB}) [\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]. \end{aligned}$$



Les droites (MM') et (AD) sont orthogonales, la droite (MM') est la hauteur relative à M du triangle (M, A, D) .

6.8

Les points O', M, M' sont alignés si et seulement si

$$\begin{cases} M = O' \text{ ou } M' = O' \\ \text{ou} \\ (\widehat{MO}, \widehat{MO'}) \equiv 0 [\pi]. \end{cases}$$

Soit O_1 l'antécédent de O' par r : $r(O_1) = O'$ on a

$$\begin{cases} r(O_1) = O' \\ r(M) = M' \end{cases} \implies (\widehat{O_1M}, \widehat{O_1M'}) \equiv \alpha [2\alpha]$$

donc : $(\widehat{O_1M}, \widehat{O_1M'}) \equiv \alpha [\pi]$
 d'où en utilisant la relation de Chasles :

$$(\widehat{O_1M}, \widehat{O_1M}) + (\widehat{O_1M}, \widehat{O_1M'}) \equiv \alpha [\pi]$$

$$\text{donc : } (\widehat{MO}, \widehat{MO'}) \equiv 0 [\pi] \iff (\widehat{MO_1}, \widehat{MO'}) \equiv \alpha [\pi]$$

$$\iff (\widehat{MO_1}, \widehat{MO'}) \equiv (\widehat{OO_1}, \widehat{OO'}) [\pi].$$

L'ensemble des points M est le cercle circonscrit au triangle (O, O_1, O') .

6.9

La droite (MT) est tangente au cercle \mathcal{C} en M donc

$$(\widehat{BM}, \widehat{BA}) \equiv (\widehat{MT}, \widehat{MA}) [\pi]$$

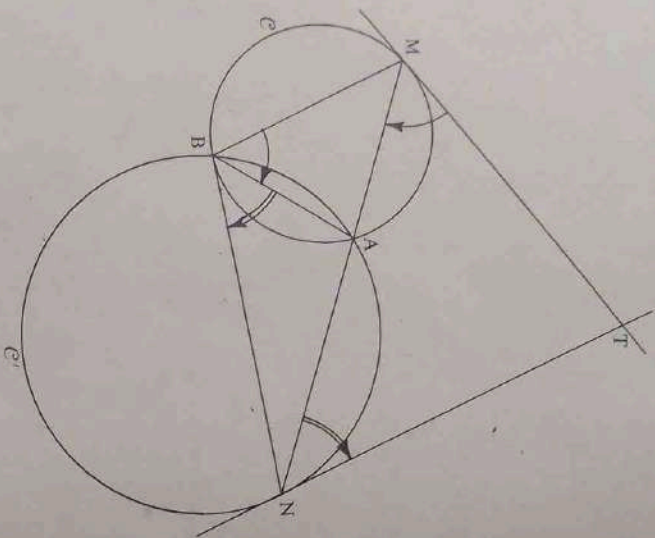
(propriété de la tangente. Voir rappels de cours)

de même $(\widehat{BA}, \widehat{BN}) \equiv (\widehat{NA}, \widehat{NT}) [\pi]$

d'où en utilisant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} (\widehat{BM}, \widehat{BN}) &\equiv (\widehat{BM}, \widehat{BA}) + (\widehat{BA}, \widehat{BN}) [\pi] \\ &\equiv (\widehat{MT}, \widehat{MA}) + (\widehat{NA}, \widehat{NT}) [\pi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } (\widehat{BM, BN}) &= (\widehat{MT, NT}) [\pi] \text{ car } (MA) = (NA) \\ &= (\widehat{TM, TN}) [\pi]. \end{aligned}$$



Les quatre points M, N, B, T sont cocycliques ou alignés, ils ne sont pas alignés car B n'appartient pas à la droite (MN).

6.10 1° Les affixes des vecteurs \overline{BC} , \overline{BD} , \overline{AC} , \overline{AD} sont respectivement

$$\overline{BC}(-1+5i) \quad \overline{BD}(-8-12i) \quad \overline{AC}(25+5i) \quad \overline{AD}(18-12i).$$

On a :

$$\arg\left(\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}\right) = \arg\left(\frac{z_{BD}}{z_{BC}}\right) [2\pi],$$

si $z_{\overline{BD}}$ est l'affixe du vecteur \overline{BD} et $z_{\overline{BC}}$ l'affixe du vecteur \overline{BC} :

$$\frac{z_{\overline{BD}}}{z_{\overline{BC}}} = \frac{-8-12i}{-1+5i} = -2+2i = 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right).$$

On a donc :

$$\arg\left(\frac{z_{\overline{BD}}}{z_{\overline{BC}}}\right) \equiv \pi - \frac{\pi}{4} [2\pi].$$

De même :

$$\arg\left(\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_{AD}}{z_{AC}}\right) [2\pi].$$

$$\frac{z_{\overline{AD}}}{z_{\overline{AC}}} = \frac{18-12i}{25+5i} = \frac{3}{5}(1-i) = \frac{3\sqrt{2}}{5} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

$$\arg\left(\frac{z_{\overline{AD}}}{z_{\overline{AC}}}\right) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

donc :

$$(\widehat{BC, BD}) \equiv \pi - \frac{\pi}{4} [2\pi] \quad \text{et} \quad (\widehat{AC, AD}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi].$$

2° On déduit :

$$(\widehat{BC, BD}) \equiv -\frac{\pi}{4} [\pi] \quad \text{et} \quad (\widehat{AC, AD}) \equiv -\frac{\pi}{4} [\pi]$$

les quatre points A, B, C, D sont cocycliques car

$$(\widehat{BC, BD}) \equiv (\widehat{AC, AD}) [\pi] \quad \text{et} \quad (\widehat{BC, BD}) \neq 0 [\pi].$$

6.11

1° On peut résoudre cette équation de deux manières.

a) ($\forall z \in \mathbb{C}$) $(z-1)^3 = (z+1)^3$

$$\Leftrightarrow z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = z^3 + 3z^2 + 3z + 1$$

$$\Leftrightarrow 6z^2 = -2$$

$$\Leftrightarrow z^2 = -\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow z = i\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ou} \quad z = -i\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\Leftrightarrow z = i\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ou} \quad z = -i\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

b) $z = -1$ n'est pas solution de l'équation proposée d'où :

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad (z-1)^3 = (z+1)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1} \text{ est une racine cubique de } 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{z-1}{z+1} = j$$

$$\text{ou} \quad \frac{z-1}{z+1} = j^2$$

sachant que $1, j, j^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont les racines cubiques de 1.

• L'équation $\frac{z-1}{z+1} = 1$ n'a pas de solution.

$$\bullet (\forall z \in \mathbb{C} - \{-1\}) \quad \frac{z-1}{z+1} = j \Leftrightarrow z = \frac{j^2}{j-1} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\bullet (\forall z \in \mathbb{C} - \{-1\}) \quad \frac{z-1}{z+1} = j^2 \Leftrightarrow z = \frac{j}{j^2-1} = -i\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2° a) Soit M, A, B les points du plan d'affixes respectives $z, -1, 1$ on a

$$\left| \frac{z-1}{z+1} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{\|BM\|}{\|AM\|} = 1$$

$$\Leftrightarrow \|BM\| = \|AM\|.$$

Les points A et B étant distincts, l'ensemble des points M est la médiatrice du bipoint (A, B).

7 | Isométries du plan

b) En reprenant les notations de la question précédente on a :

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = (\widehat{AM}, \widehat{BM}) \quad [2\pi].$$

On a : $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 3 \arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \quad [2\pi].$

L'équation proposée est équivalente successivement à :

$$3(\widehat{AM}, \widehat{BM}) \equiv 0 \quad [2\pi]$$

$$(\widehat{AM}, \widehat{BM}) = 2k \frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$(\widehat{MA}, \widehat{MB}) \equiv 0 \quad [2\pi] \quad \text{ou} \quad (\widehat{MA}, \widehat{MB}) \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$$

$$\text{ou} \quad (\widehat{MA}, \widehat{MB}) \equiv \frac{4\pi}{3} \quad [2\pi].$$

L'ensemble des points M tels que $(\widehat{MA}, \widehat{MB}) \equiv 0 \quad [2\pi]$ est la droite (AB) privée du segment [A, B].

L'ensemble des points M tels que $(\widehat{MA}, \widehat{MB}) \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$ est un arc de cercle d'extrémité A et B privé des points A et B.

L'ensemble des points M tels que $(\widehat{MA}, \widehat{MB}) \equiv \frac{4\pi}{3} \quad [2\pi]$ est l'arc de cercle symétrique du précédent par rapport à la droite (AB).

L'ensemble cherché est donc la réunion des trois ensembles précédents.

3° On a :

$$(Az \in \mathbb{C} - \{-1\}) \quad \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 1 \iff \begin{cases} \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0 \quad [2\pi]. \end{cases}$$

L'intersection des ensembles des questions 2° a) et 2° b) sont donc les points d'affixes les solutions de l'équation de la 1° question donc $i\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $-i\frac{\sqrt{3}}{3}$.

On se place dans un plan P, de direction \vec{P} .

2- M

□ Isométries vectorielles

Théorème et définition

On appelle **isométrie vectorielle** de \vec{P} toute application φ de \vec{P} dans \vec{P} vérifiant l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :

- (1) φ est un endomorphisme conservant la norme.
- (2) φ est une application conservant le produit scalaire.
- (3) φ est un endomorphisme tel qu'il existe une base orthonormée ayant pour image une base orthornormée.

□ Isométries affines

Théorème et définition

On appelle **isométrie affine** de P (ou isométrie de P) toute application f de P dans P vérifiant l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

- (1) f est une application conservant les distances.
- (2) f est une application affine dont l'endomorphisme associé est une isométrie vectorielle de \vec{P} .

Propriétés

- Les isométries possèdent toutes les propriétés des applications affines; en particulier
 - une isométrie est déterminée par la donnée d'un couple de points homologues et de l'isométrie vectorielle associée;
 - une isométrie conserve le barycentre, la convexité, l'alignement des points, le parallélisme.
- Les isométries conservent l'orthogonalité.

Groupe des isométries

L'ensemble \mathcal{I} des isométries du plan P, muni de la composition des applications, est un groupe non commutatif. C'est un sous-groupe du groupe affine de P.

□ **Rappels de Première**

Isométries de P laissant invariant un point donné

- L'ensemble \tilde{J}_I des isométries de P laissant invariant un point donné I est un groupe non commutatif pour la composition des applications; c'est un sous-groupe de (J, \circ) .
- \tilde{J}_I est formé de :
 - l'ensemble \tilde{J}_I^- des symétries orthogonales (ou axiales) d'axes passant par I;
 - l'ensemble \tilde{J}_I^+ des rotations de centre I, composées de deux symétries orthogonales d'axes passant par I.

(\tilde{J}_I^+, \circ) est un sous-groupe commutatif de (J, \circ) .
 $\{\tilde{J}_I^-, \tilde{J}_I^+\}$ est une partition de \tilde{J}_I , c'est-à-dire que :

$$\tilde{J}_I^- \cup \tilde{J}_I^+ = \tilde{J}_I \quad \text{et} \quad \tilde{J}_I^- \cap \tilde{J}_I^+ = \emptyset.$$

Isométries vectorielles associées

- L'isométrie vectorielle associée à la symétrie orthogonale d'axe D passant par I est la **symétrie orthogonale d'axe \bar{D}** qui associe à tout vecteur $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$ ($\vec{v}' \in \bar{D}$, \vec{v}'' orthogonal à \bar{D}) le vecteur $\vec{v}' - \vec{v}''$. **Elle transforme un angle orienté de vecteurs en son opposé.**

- L'isométrie vectorielle associée à la rotation de centre I et d'angle θ (nous dirons « angle θ » pour « angle orienté de mesure θ », le plan étant supposé orienté) est la **rotation vectorielle d'angle θ** qui associe à tout vecteur \vec{v} le vecteur \vec{v}' tel que :

$$\begin{cases} \|\vec{v}'\| = \|\vec{v}\| \\ \text{si } \vec{v} \neq \vec{0}, \widehat{(\vec{v}, \vec{v}')} \equiv \theta \pmod{2\pi}. \end{cases}$$

Elle conserve les angles orientés de vecteurs.

□ **Ensemble des isométries vectorielles de \bar{P}**

Théorème

L'ensemble des isométries vectorielles de \bar{P} est l'ensemble des symétries vectorielles orthogonales et des rotations vectorielles de \bar{P} .

□ **Déplacements**

Définitions

On appelle **déplacement** de P toute isométrie de P dont l'endomorphisme associé est une rotation vectorielle.
 L'angle d'un déplacement est l'angle de la rotation vectorielle associée.

Groupe des déplacements

L'ensemble J^+ des déplacements du plan P, muni de la composition des applications, est un groupe. C'est un sous-groupe du groupe J des isométries de P.

Composition de deux symétries orthogonales d'axes parallèles

La composée $s_{D'} \circ s_D$ de deux symétries orthogonales s_D et $s_{D'}$ d'axes parallèles D et D' est la translation $t_{\vec{a}}$ où \vec{a} est le vecteur orthogonal à la direction de D et D' et tel que $t_{\vec{a}}(D) = D'$.

Toute translation de P est la composée, d'une infinité de manières, de deux symétries orthogonales d'axes parallèles. Le choix de l'un des axes étant arbitraire.

Composition de deux symétries orthogonales d'axes sécants

La composée $s_{D'} \circ s_D$ de deux symétries orthogonales s_D et $s_{D'}$ d'axes D et D' sécants en I est la rotation de centre I et d'angle de mesure $2(\widehat{D, D'})$, dans le plan P orienté.

Toute rotation de P de centre I est la composée, d'une infinité de manières, de deux symétries orthogonales d'axes sécants en I.

Composition de deux rotations

Soit r_1 et r_2 deux rotations d'angles θ_1 et θ_2 dans le plan P orienté.

— Si $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0 \pmod{2\pi}$, $r_2 \circ r_1$ et $r_1 \circ r_2$ sont des translations.

— Si $\theta_1 + \theta_2 \neq 0 \pmod{2\pi}$, $r_2 \circ r_1$ et $r_1 \circ r_2$ sont des rotations d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

Composition d'une translation et d'une rotation

Soit r une rotation d'angle θ dans le plan P orienté et t une translation. Les composées $r \circ t$ et $t \circ r$ sont des rotations d'angle θ .

Théorème

L'ensemble des déplacements du plan P est l'ensemble des translations et des rotations de ce plan.

Détermination analytique d'un déplacement

Soit P, orienté, rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit f l'application affine de P dans P qui à $M(x, y)$ associe $M'(x', y')$. Pour que f soit un déplacement de P, il faut et il suffit qu'il existe $(a, b, x_0, y_0) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a^2 + b^2 = 1$ et,

$$\begin{cases} x' = ax - by + x_0 \\ y' = bx + ay + y_0 \end{cases}$$

L'angle θ du déplacement est déterminé, modulo 2π , par $\cos \theta = a$, $\sin \theta = b$.

□ Rappels de Première

Isométries de P laissant invariant un point donné

• L'ensemble J_1 des isométries de P laissant invariant un point donné I est un groupe non commutatif pour la composition des applications; c'est un sous-groupe de (J, \circ) .

• J_1 est formé de :

— l'ensemble J_I des symétries orthogonales (ou axiales) d'axes passant par I;

— l'ensemble J_I^+ des rotations de centre I, composées de deux symétries orthogonales d'axes passant par I.

(J_I^+, \circ) est un sous-groupe commutatif de (J_1, \circ) .

$\{J_I^-, J_I^+\}$ est une partition de J_1 c'est-à-dire que :

$$J_I^- \cup J_I^+ = J_1 \quad \text{et} \quad J_I^- \cap J_I^+ = \emptyset.$$

Isométries vectorielles associées

• L'isométrie vectorielle associée à la symétrie orthogonale d'axe D passant par I est la symétrie orthogonale d'axe \bar{D} qui associe à tout vecteur $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$ ($\vec{v}' \in \bar{D}$, \vec{v}'' orthogonal à \bar{D}) le vecteur $\vec{v}' - \vec{v}''$. Elle transforme un angle orienté de vecteurs en son opposé.

• L'isométrie vectorielle associée à la rotation de centre I et d'angle θ (nous dirons « angle θ » pour « angle orienté de mesure θ », le plan étant supposé orienté) est la rotation vectorielle d'angle θ qui associe à tout vecteur \vec{v} le vecteur \vec{v}' tel que :

$$\begin{cases} \|\vec{v}'\| = \|\vec{v}\| \\ \text{si } \vec{v} \neq \vec{0}, \widehat{(\vec{v}, \vec{v}')} \equiv \theta [2\pi]. \end{cases}$$

Elle conserve les angles orientés de vecteurs.

□ Ensemble des isométries vectorielles de \bar{P}

Théorème

L'ensemble des isométries vectorielles de \bar{P} est l'ensemble des symétries vectorielles orthogonales et des rotations vectorielles de \bar{P} .

□ Déplacements

Définitions

On appelle déplacement de P toute isométrie de P dont l'endomorphisme associé est une rotation vectorielle.

L'angle d'un déplacement est l'angle de la rotation vectorielle associée.

Groupe des déplacements

L'ensemble J^+ des déplacements du plan P, muni de la composition des applications, est un groupe. C'est un sous-groupe du groupe J des isométries de P.

Composition de deux symétries orthogonales d'axes parallèles

La composée $s_D \circ s_D$ de deux symétries orthogonales s_D et s_D d'axes parallèles D et D' est la translation $t_{2\vec{a}}$ où \vec{a} est le vecteur orthogonal à la direction de D et D' et tel que $t_{\vec{a}}(D) = D'$.

Toute translation de P est la composée, d'une infinité de manières, de deux symétries orthogonales d'axes parallèles. Le choix de l'un des axes étant arbitraire.

Composition de deux symétries orthogonales d'axes sécants

La composée $s_D \circ s_D$ de deux symétries orthogonales s_D et s_D d'axes D et D' sécants en I est la rotation de centre I et d'angle de mesure $2(\widehat{D, D'})$, dans le plan P orienté.

Toute rotation de P de centre I est la composée, d'une infinité de manières, de deux symétries orthogonales d'axes sécants en I.

Composition de deux rotations

Soit r_1 et r_2 deux rotations d'angles θ_1 et θ_2 dans le plan P orienté.

— Si $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0 [2\pi]$, $r_2 \circ r_1$ et $r_1 \circ r_2$ sont des translations.

— Si $\theta_1 + \theta_2 \neq 0 [2\pi]$, $r_2 \circ r_1$ et $r_1 \circ r_2$ sont des rotations d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

Composition d'une translation et d'une rotation

Soit r une rotation d'angle θ dans le plan P orienté et t une translation. Les composées $r \circ t$ et $t \circ r$ sont des rotations d'angle θ .

Théorème

L'ensemble des déplacements du plan P est l'ensemble des translations et des rotations de ce plan.

Détermination analytique d'un déplacement

Soit P , orienté, rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit f l'application affine de P dans P qui à $M(x, y)$ associe $M'(x', y')$. Pour que f soit un déplacement de P, il faut et il suffit qu'il existe $(a, b, x_0, y_0) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a^2 + b^2 = 1$ et,

$$\begin{cases} x' = ax - by + x_0 \\ y' = bx + ay + y_0 \end{cases}$$

L'angle θ du déplacement est déterminé, modulo 2π , par

$$\cos \theta = a, \quad \sin \theta = b.$$

□ Antidéplacements

Définition

On appelle antidéplacement de P toute isométrie de P dont l'endomorphisme associé est une symétrie vectorielle orthogonale.

Propriétés

1. L'ensemble J^- des antidéplacements du plan P n'est pas stable par composition. Plus précisément, la composée d'un nombre pair (resp. impair) d'antidéplacements est un déplacement (resp. un antidéplacement).
2. $\{J^-, J^+\}$ est une partition de J :

$$J^+ \cup J^- = J, \quad J^+ \cap J^- = \emptyset.$$

Théorème

L'ensemble des antidéplacements de P est l'ensemble :

- des symétries orthogonales;
- des composées d'une translation et d'une symétrie orthogonale, le vecteur de la translation appartenant à la direction de l'axe de la symétrie orthogonale (les deux applications commutent).

Détermination analytique d'un antidéplacement

Soit P, orienté, rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit f l'application affine de P dans P qui à $M(x, y)$ associe $M'(x', y')$. Pour que f soit un antidéplacement de P, il faut et il suffit qu'il existe $(a, b, x_0, y_0) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a^2 + b^2 = 1$ et,

$$\begin{cases} x' = ax + by + x_0 \\ y' = bx - ay + y_0 \end{cases}$$

L'endomorphisme associé à f est alors la symétrie orthogonale d'axe \vec{D} de vecteur directeur \vec{u} tel que $(\vec{i}, \vec{u}) \equiv \alpha \pmod{2\pi}$, le réel 2α étant déterminé,

$$\cos 2\alpha = a, \quad \sin 2\alpha = b.$$

□ Classification des isométries

Soit E l'ensemble des points invariants par une isométrie de P.

	déplacement	antidéplacement
$E = P$	id_P	
E est une droite D		symétrie orthogonale par rapport à D

	déplacement	antidéplacement
$E = \{I\}$	rotation de centre I et d'angle non nul	
$E = \emptyset$	translation de vecteur non nul	composée d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite D et d'une translation de vecteur non nul appartenant à la direction de D (les deux applications commutent)

□ Groupe des isométries laissant invariante une partie du plan

Soit F une partie non vide du plan, J_F l'ensemble des isométries laissant globalement invariante la partie F. On pose $J_F^+ = J_F \cap J^+$, $J_F^- = J_F \cap J^-$.

Propriétés

1. (J_F, \circ) est un groupe, sous-groupe de (J, \circ) .
2. (J_F^+, \circ) est un groupe, sous-groupe de (J_F, \circ) .
3. Si J_F^- n'est pas vide et si J_F^- fini, on a $\text{card } J_F^+ = \text{card } J_F^-$.
4. Si F est une partie finie, l'isobarycentre O des points de F est invariant par tout élément de J_F . Les éléments de J_F^+ sont des rotations de centre O et les éléments de J_F^- sont des symétries axiales dont l'axe passe par O.
5. Si F est finie ($\text{card } F = n$) et si F contient au moins trois points non alignés, J_F est fini et on a $\text{card } J_F \leq n!$

ENONCÉS DES EXERCICES ET PROBLÈMES

Isométries vectorielles

7.1

Soit φ une isométrie vectorielle du plan vectoriel \vec{P} .

- 1° Soit \vec{u} un vecteur de \vec{P} tel que $(\vec{u}, \varphi(\vec{u}))$ soit lié. Montrer que $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}$ ou $\varphi(\vec{u}) = -\vec{u}$.

- 2° Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de \vec{P} tels que $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}$ et $\varphi(\vec{v}) = -\vec{v}$. Montrer que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

- 3° Déterminer tous les vecteurs \vec{u} de \vec{P} tels que $(\vec{u}, \varphi(\vec{u}))$ soit lié :
- a) lorsque φ est une rotation;
- b) lorsque φ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite $\vec{\Delta}$.

7.2 Soit φ une isométrie vectorielle du plan vectoriel \vec{P} . On définit une application ψ de \vec{P} en posant :

$$\forall \vec{u} \in \vec{P} \quad \psi(\vec{u}) = -\varphi(\vec{u}).$$

- 1° Montrer que ψ est une isométrie vectorielle.
- 2° Si φ est une rotation d'angle θ , qu'est-ce que ψ ?
- 3° Si φ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite $\vec{\Delta}$, qu'est-ce que ψ ?

7.3 Soit \vec{P} un plan vectoriel orienté rapporté à une base orthonormée directe (\vec{i}, \vec{j}) . On considère l'endomorphisme ρ de \vec{P} dont la matrice par rapport à la base (\vec{i}, \vec{j}) est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \sqrt{3} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- 1° Montrer que ρ est une rotation vectorielle dont on déterminera l'angle θ .
- 2° Soit σ la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\vec{\Delta}$ de vecteur directeur \vec{i} . Vérifier qu'il existe des symétries orthogonales φ_1 et φ_2 uniques telles que :

$$\rho = \varphi_2 \circ \sigma = \sigma \circ \varphi_1.$$

On pourra déterminer les matrices de φ_1 et φ_2 dans la base (\vec{i}, \vec{j}) . Préciser les axes des symétries φ_1 et φ_2 .

7.4 Soit (\vec{i}, \vec{j}) une base orthonormée du plan vectoriel \vec{P} et φ l'endomorphisme de \vec{P} dont la matrice dans la base (\vec{i}, \vec{j}) est :

$$\begin{pmatrix} 7 & 24 \\ -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ 24 & 7 \\ \frac{25}{25} & \frac{25}{25} \end{pmatrix}.$$

- 1° Quel est l'ensemble des vecteurs de \vec{P} invariants par φ ? Déterminer un vecteur \vec{u} unitaire et invariant par φ et un vecteur \vec{v} unitaire et orthogonal à \vec{u} .
- 2° Écrire la matrice de φ dans la base (\vec{u}, \vec{v}) . En déduire que φ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle que l'on précisera.

7.5 Soit \vec{P} un plan vectoriel, σ une symétrie orthogonale de \vec{P} , d'axe $\vec{\Delta}$.
 1° Montrer que l'ensemble G des isométries vectorielles φ qui commutent avec σ (c'est-à-dire telles que $\varphi \circ \sigma = \sigma \circ \varphi$) est un groupe pour la composition des applications.
 2° Déterminer explicitement ce groupe. Écrire sa table.

Isométries affines

7.6 Soit P un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère l'application f de P dans P qui au point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) + 2 - 3\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

- 1° Trouver la nature de f et les éléments qui la caractérisent.
- 2° Quelle est l'image par f de la droite D d'équation $y = x$?

7.7 Soit P un plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère l'application f de P dans P qui au point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + a \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + b \end{cases}$$

où a et b sont des paramètres réels.
 A quelle condition nécessaire et suffisante, sur a et b , l'application f est-elle une symétrie axiale? Cette condition étant satisfaite, quel est l'axe de f ?

7.8 Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère l'application f qui au point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{13}{5} \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{6}{5} \end{cases}$$

- 1° Montrer que f est une isométrie affine, f est-elle un déplacement ou un antidéplacement?
- 2° Quel est l'ensemble des points invariants par f ?
- 3° Déterminer $f \circ f$.
- 4° Déterminer le vecteur \vec{t} et la droite D de vecteur directeur \vec{t} tels que $f = s \circ t = t \circ s$, t étant la translation de vecteur \vec{t} et s la symétrie orthogonale par rapport à D .

(Exercice Bac E. Lille 1982.)

7.9 Le plan orienté P est rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit h un paramètre réel, supposé non nul. On considère les points $A(2, 0)$, $B(2+h, 0)$, $A'(2, 2)$ et le point B' tel que :

$$\overrightarrow{AB'} = \frac{h\sqrt{2}}{4} \overrightarrow{OA'}.$$

Montrer qu'il existe une rotation affine r unique telle que :
 $A' = r(A)$ et $B' = r(B)$.
 Déterminer son angle et les coordonnées de son centre.

7.10 Soit P un plan orienté rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit I et J les points de P tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$. On désigne par r_1 et r_2 les rotations de centres respectifs I et J et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et par t la translation de vecteur \vec{IJ} . Soit f la transformation :

$$f = r_1 \circ t \circ r_2.$$

Donner la nature de f et les éléments qui la caractérisent. On demande
 a) une solution analytique,
 b) une solution géométrique.

7.11 Soit P un plan orienté, ABC un triangle équilatéral direct de P , c'est-à-dire tel que

$$\widehat{(AB, AC)} \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi].$$

1° On désigne par r_A, r_B, r_C les rotations de centres respectifs A, B, C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

- a) Étudier l'application : $f = r_A \circ r_B$.
- b) Étudier l'application : $g = r_C \circ r_B \circ r_A$.
- 2° On désigne par s_{BC}, s_{AB}, s_{CA} les symétries axiales par rapport aux droites $(BC), (CA), (AB)$. Soit $h = s_{CA} \circ s_{AB} \circ s_{BC}$.
- a) Montrer que h est un antidéplacement.
- b) Soit D' la droite parallèle à (AC) et passant par B . Montrer que :
 $s_{AB} \circ s_{BC} = s_{D'} \circ s_{AB}$.
- c) Trouver la forme réduite de h .

7.12 On considère un plan P .

- a) Soit f une application affine de P dans P telle que $f^4 = \text{id}_P$. À partir d'un point quelconque A_0 de P , on définit les points $A_1 = f(A_0), A_2 = f(A_1), A_3 = f(A_2)$.
 Que peut-on dire de l'isobarycentre O des quatre points A_0, A_1, A_2, A_3 ?
- b) Déterminer toutes les isométries affines f de P telles que $f^4 = \text{id}_P$.

Applications des isométries affines

7.13

Dans un plan P , on donne deux droites D et D' et un point A n'appartenant ni à D ni à D' . Construire un triangle rectangle isocèle ABB' ($\| \overrightarrow{AB} \| = \| \overrightarrow{AB'} \|$) tel que $B \in D$ et $B' \in D'$.

7.14

Dans un plan P , on considère deux droites D et D' concourantes en I . On donne aussi un réel f strictement positif.

Un point M du plan P se projette orthogonalement en H sur D et en H' sur D' . Déterminer l'ensemble ℓ des points M de P tels que $\| \overrightarrow{HH'} \| = l$.

7.15 Dans un plan P orienté, on considère un triangle ABC direct. Soit A', B', C' les milieux de $(B, C), (C, A), (A, B)$. Soit U, V, W les points de P définis par :

$$\| \overrightarrow{UB} \| = \| \overrightarrow{UC'} \|, \quad \| \overrightarrow{VC} \| = \| \overrightarrow{VA'} \|, \quad \| \overrightarrow{WB} \| = \| \overrightarrow{WA'} \|$$

$$(\widehat{UC, UB}) \equiv (\widehat{VA, VC}) \equiv (\widehat{WB, WA}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi].$$

- 1° Soit r la rotation de centre C' et d'angle $\frac{\pi}{2}$, t la translation de vecteur $\overrightarrow{C'B'}$. Quel est le transformé par $t \circ r$ du triangle $WC'A'$? Comparer les vecteurs $A'W$ et $A'V$.
- 2° Quel est le transformé du triangle $A'UV$ par la rotation r' de centre A' et d'angle $\frac{\pi}{2}$? Comparer les vecteurs \overrightarrow{CW} et \overrightarrow{UV} .
- 3° Montrer que les droites AU, BV, CW sont concourantes.

Groupe des isométries laissant globalement invariante une partie du plan

7.16 Dans le plan P , on considère un hexagone régulier convexe $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ inscrit dans un cercle Γ de centre O . Soit $F = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ et J_F le groupe des isométries affines de P laissant globalement invariant l'ensemble F .

- 1° Montrer que O est invariant par chaque élément de J_F .
- 2° Décrire le groupe J_F .

7.17

On considère une droite D d'un plan P , un point A_0 sur cette droite et un vecteur unitaire \vec{n} directeur de D . À chaque entier relatif k , on associe le point A_k de D défini par $A_0A_k = k\vec{n}$. Soit $F = \{A_k; k \in \mathbb{Z}\}$.

- 1° Déterminer l'ensemble G des isométries affines de P laissant invariant le point A_0 et globalement invariant l'ensemble F .
- 2° Déterminer le groupe J_F des isométries affines de P laissant l'ensemble F globalement invariant.

Révision

7.18

On considère un plan vectoriel E rapporté à une base orthonormée $B = (\vec{i}, \vec{j})$. On note $L(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans lui-même, $GL(E)$ le groupe linéaire de E et $H_{\beta, \alpha}$ l'ensemble des éléments β de E vérifiant $f(\beta) = \alpha\beta$ avec f élément de $L(E)$, et α réel. Le noyau de f est donc noté $H_{\beta, 0}$ et $H_{\beta, \alpha}$ est donc l'ensemble des vecteurs invariants par f .

A. Soit g_0 l'application linéaire de E dans E dont la matrice dans la base B est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1° Démontrer que g_0 est un élément de $GL(E)$.
 Déterminer la matrice dans B de g_0^{-1} , application réciproque de g_0 .
 2° Soit s_0 la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par le vecteur $f + 2j$.
 Déterminer la matrice de s_0 dans la base B.

3° On considère l'application linéaire $s'_0 = g_0 \circ s_0 \circ g_0^{-1}$.
 Déterminer la nature et les éléments géométriques de s'_0 .

B. Dans cette partie du problème, g désigne un élément de $GL(E)$, g^{-1} son application réciproque et D et Δ deux droites distinctes de E.
 1° Soit s la symétrie par rapport à D parallèlement à Δ . On considère l'application linéaire :

$$s' = g \circ s \circ g^{-1}.$$

Démontrer que s' est la symétrie par rapport à $g(D)$ parallèlement à $g(\Delta)$.
 Retrouver à l'aide de ces résultats ceux de la question A. 3°

2° Soit f un élément de $L(E)$. On considère l'application φ_g de $L(E)$ dans lui-même qui associe à f l'application linéaire $\varphi_g(f) = g \circ f \circ g^{-1}$.

- a) Préciser $\varphi_g(f)$ lorsque f est une homothétie.
- b) Démontrer que φ_g est une bijection de $L(E)$ sur lui-même et que : $\varphi_g(f_1 \circ f_2) = \varphi_g(f_1) \circ \varphi_g(f_2)$.
- c) Démontrer que, quel que soit le réel α , et quel que soit l'élément f de $L(E)$:

$$H_{\varphi_g(f), \alpha} = g(H_{f, \alpha}).$$

d) Déterminer la nature et les éléments remarquables de $\varphi_g(f)$ lorsque f est la projection sur D faite parallèlement à Δ .

- 3° On suppose que g et f sont des isométries vectorielles.
- a) Démontrer que $\varphi_g(f)$ est une isométrie vectorielle.
- b) f étant une rotation vectorielle, déterminer $\varphi_g(f)$ en fonction de f suivant la nature de g .

C. On suppose maintenant que E est orienté et que la base B est directe. Soit P un plan associé à E et soit $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère de P. Si F est une application affine de P dans P, on note Inv_P l'ensemble des points de P invariants par F.
 1° Démontrer que, quelle que soit l'application affine bijective G de P dans P admettant G^{-1} comme application réciproque :

$$\text{Inv}_{G \circ F \circ G^{-1}} = G(\text{Inv}_F).$$

2° On considère la rotation r de centre $A(0, 1)$ et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{2}$.

Soit D et Δ les droites de P d'équations respectives $y = x - 1$ et $y = 0$ dans le repère R. On appelle s_1 la symétrie par rapport à D parallèlement à Δ et s_2 la symétrie orthogonale par rapport à D.
 Déterminer la nature et les éléments remarquables de $r \circ s_1 \circ r^{-1}$ et de $s_2 \circ r \circ s_2$.

7.1

1° Si \vec{n} est nul, on a évidemment $\varphi(\vec{n}) = \vec{n} = -\vec{n}$.
 Si \vec{n} est non nul et $(\vec{n}, \varphi(\vec{n}))$ liée, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(\vec{n}) = \lambda \vec{n}$. On a donc, puisque φ « conserve le produit scalaire » :

$$\vec{n} \cdot \vec{n} = \varphi(\vec{n}) \cdot \varphi(\vec{n}) = (\lambda \vec{n}) \cdot (\lambda \vec{n}) = \lambda^2 (\vec{n} \cdot \vec{n})$$

$$\|\vec{n}\|^2 = \lambda^2 \|\vec{n}\|^2.$$

Comme le vecteur \vec{n} n'est pas nul, ceci implique $\lambda^2 = 1$, d'où $\lambda \in \{-1, +1\}$.

2° Supposons maintenant \vec{n} et \vec{v} tels que $\varphi(\vec{n}) = \vec{n}$ et $\varphi(\vec{v}) = -\vec{v}$. On a :

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = \varphi(\vec{n}) \cdot \varphi(\vec{v}) = \vec{n} \cdot (-\vec{v}) = -\vec{n} \cdot \vec{v}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0.$$

et, finalement :

3° a) Supposons que φ soit une rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$.

- Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ ($\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = 2k\pi$), φ est l'identité de \vec{P} et tous les vecteurs \vec{n} de \vec{P} vérifient $\varphi(\vec{n}) = \vec{n}$.
- Si $\theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, tous les vecteurs \vec{n} de \vec{P} vérifient $\varphi(\vec{n}) = -\vec{n}$.
- Si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, un vecteur \vec{n} non nul de \vec{P} n'est jamais colinéaire à son image, puisque $(\vec{n}, \varphi(\vec{n})) = \theta \notin [2\pi]$. Le seul vecteur \vec{n} de \vec{P} tel que $(\vec{n}, \varphi(\vec{n}))$ soit liée est donc $\vec{n} = 0$.

b) Supposons que φ soit une symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ . Soit $\vec{\Delta}$ la droite vectorielle orthogonale à Δ . On sait (cf. chapitre 3) que $\vec{\Delta}$ est l'ensemble des vecteurs \vec{n} tels que $\varphi(\vec{n}) = \vec{n}$ et que $\vec{\Delta}^c$ est l'ensemble des vecteurs \vec{n} tels que $\varphi(\vec{n}) = -\vec{n}$. D'après 1°, l'ensemble des vecteurs \vec{n} de \vec{P} tels que $(\vec{n}, \varphi(\vec{n}))$ soit liée est donc $\vec{\Delta} \cup \vec{\Delta}^c$.

7.2

1° On vérifie que ψ est un endomorphisme de \vec{P} qui conserve la norme :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{P}^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\psi(\lambda \vec{u} + \vec{v}) = -\varphi(\lambda \vec{u} + \vec{v}) = -\lambda \varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v}) = \lambda \psi(\vec{u}) + \psi(\vec{v}).$$

$$\forall \vec{u} \in \vec{P} \quad \|\psi(\vec{u})\| = \|-\varphi(\vec{u})\| = \|\varphi(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|.$$

2° Soit \vec{n} un vecteur non nul de \vec{P} . On a :

$$(\vec{n}, \psi(\vec{n})) = (\vec{n}, \varphi(\vec{n})) + \{\varphi\{\vec{n}\}, -\varphi\{\vec{n}\}\} = \theta + \pi [2\pi].$$

Par conséquent, ψ est la rotation vectorielle d'angle $\theta + \pi$.

3° Soit $\vec{\Delta}$ la droite orthogonale à $\vec{\Delta}$. Un vecteur \vec{n} donné de \vec{P} se décompose de façon unique sous la forme $\vec{n} = \vec{\delta} + \vec{v}$ avec $\vec{\delta} \in \vec{\Delta}$ et $\vec{v} \in \vec{\Delta}^c$ et on a

$$\varphi(\vec{n}) = \vec{\delta} - \vec{v}$$

$$\psi(\vec{n}) = -\vec{\delta} + \vec{v}.$$

On reconnaît donc que ψ est la symétrie orthogonale par rapport à $\vec{\Delta}$.

7.3

1° On sait que la matrice de la rotation d'angle θ , dans la base orthonormée directe (\vec{i}, \vec{j}) est :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

1° Démontrer que g_0 est un élément de $GL(E)$.
 Déterminer la matrice dans B de g_0^{-1} , application réciproque de g_0 .
 2° Soit s_0 la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par le vecteur $f + 2f$.
 Déterminer la matrice de s_0 dans la base B .

3° On considère l'application linéaire $s'_0 = g_0 \circ s_0 \circ g_0^{-1}$.
 Déterminer la nature et les éléments géométriques de s'_0 .

B. Dans cette partie du problème, g désigne un élément de $GL(E)$, g^{-1} son application réciproque et D et Δ deux droites distinctes de E .
 1° Soit s la symétrie par rapport à D parallèlement à Δ . On considère l'application linéaire :

$$s' = g \circ s \circ g^{-1}.$$

Démontrer que s' est la symétrie par rapport à $g(D)$ parallèlement à $g(\Delta)$.
 Retrouver à l'aide de ces résultats ceux de la question A. 3°.

2° Soit f un élément de $L(E)$. On considère l'application φ_g de $L(E)$, g^{-1} lui-même qui associe à f l'application linéaire $\varphi_g(f) = g \circ f \circ g^{-1}$.
 a) Préciser $\varphi_g(f)$ lorsque f est une homothétie.
 b) Démontrer que φ_g est une bijection de $L(E)$ sur lui-même et que :

$$\varphi_g(f_1 \circ f_2) = \varphi_g(f_1) \circ \varphi_g(f_2).$$

c) Démontrer que, quel que soit le réel α , et quel que soit l'élément f de $L(E)$:

$$H_{\varphi_g(f), \alpha} = g(H_{f, \alpha}).$$

d) Déterminer la nature et les éléments remarquables de $\varphi_g(f)$ lorsque f est la projection sur D faite parallèlement à Δ .

3° On suppose que g et f sont des isométries vectorielles.

a) Démontrer que $\varphi_g(f)$ est une isométrie vectorielle.
 b) f étant une rotation vectorielle, déterminer $\varphi_g(f)$ en fonction de f suivant la nature de g .

C. On suppose maintenant que E est orienté et que la base B est directe. Soit P un plan associé à E et soit $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère de P .
 Si F est une application affine de P dans P , on note Inv_F l'ensemble des points de P invariants par F .

1° Démontrer que, quelle que soit l'application affine bijective G de P dans P admettant G^{-1} comme application réciproque :

$$Inv_{G \circ F \circ G^{-1}} = G(Inv_F).$$

2° On considère la rotation r de centre $A(O, 1)$ et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{2}$.

Soit D et Δ les droites de P d'équations respectives $y = x - 1$ et $y = 0$ dans le repère R . On appelle s_1 la symétrie par rapport à D parallèlement à Δ et s_2 la symétrie orthogonale par rapport à D .
 Déterminer la nature et les éléments remarquables de $r \circ s_1 \circ r^{-1}$ et de $s_2 \circ r \circ s_2$.

7.1

1° Si \vec{n} est nul, on a évidemment $\varphi(\vec{n}) = \vec{n} = -\vec{n}$.
 Si \vec{n} est non nul et $(\vec{n}, \varphi(\vec{n}))$ liée, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(\vec{n}) = \lambda \vec{n}$. On a donc, puisque φ « conserve le produit scalaire » :

$$\vec{n} \cdot \vec{n} = \varphi(\vec{n}) \cdot \varphi(\vec{n}) = (\lambda \vec{n}) \cdot (\lambda \vec{n}) = \lambda^2 (\vec{n} \cdot \vec{n})$$

$$\|\vec{n}\|^2 = \lambda^2 \|\vec{n}\|^2.$$

Comme le vecteur \vec{n} n'est pas nul, ceci implique $\lambda^2 = 1$, d'où $\lambda \in \{-1, +1\}$.
 2° Supposons maintenant \vec{n} et \vec{v} tels que $\varphi(\vec{n}) = \vec{n}$ et $\varphi(\vec{v}) = -\vec{v}$. On a :

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = \varphi(\vec{n}) \cdot \varphi(\vec{v}) = \vec{n} \cdot (-\vec{v}) = -\vec{n} \cdot \vec{v}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0.$$

et, finalement :

3° a) Supposons que φ soit une rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$.

• Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ ($\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = 2k\pi$), φ est l'identité de \vec{P} et tous les vecteurs \vec{n} de \vec{P} vérifient $\varphi(\vec{n}) = \vec{n}$.

• Si $\theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, tous les vecteurs \vec{n} de \vec{P} vérifient $\varphi(\vec{n}) = -\vec{n}$.

• Si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, un vecteur \vec{n} non nul de \vec{P} n'est jamais colinéaire à son image, puisque $(\vec{n}, \varphi(\vec{n})) \equiv \theta [2\pi]$. Le seul vecteur \vec{n} de \vec{P} tel que $(\vec{n}, \varphi(\vec{n}))$ soit liée est donc $\vec{n} = \vec{0}$.

b) Supposons que φ soit une symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ . Soit $\vec{\Delta}$ la droite vectorielle orthogonale à Δ . On sait (cf. chapitre 3) que $\vec{\Delta}$ est l'ensemble des vecteurs \vec{n} tels que $\varphi(\vec{n}) = \vec{n}$ et que $\vec{\Delta}$ est l'ensemble des vecteurs \vec{v} tels que $\varphi(\vec{v}) = -\vec{v}$. D'après 1°, l'ensemble des vecteurs \vec{n} de \vec{P} tels que $(\vec{n}, \varphi(\vec{n}))$ soit liée est donc $\vec{\Delta} \cup \vec{\Delta}$.

7.2

1° On vérifie que ψ est un endomorphisme de \vec{P} qui conserve la norme :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{P}^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\psi(\lambda \vec{u} + \vec{v}) = -\varphi(\lambda \vec{u} + \vec{v}) = -\lambda \varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v}) = \lambda \psi(\vec{u}) + \psi(\vec{v}).$$

$$\forall \vec{u} \in \vec{P} \quad \|\psi(\vec{u})\| = \|\varphi(\vec{u})\| = \|\varphi(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|.$$

2° Soit \vec{n} un vecteur non nul de \vec{P} . On a :

$$(\vec{n}, \psi(\vec{n})) \equiv (\vec{n}, \varphi(\vec{n})) + \{\varphi(\vec{n}), -\varphi(\vec{n})\} = \theta + \pi [2\pi].$$

Par conséquent, ψ est la rotation vectorielle d'angle $\theta + \pi$.

3° Soit $\vec{\Delta}$ la droite orthogonale à $\vec{\Delta}$. Un vecteur \vec{n} donné de \vec{P} se décompose de façon unique sous la forme $\vec{n} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in \vec{\Delta}$ et $\vec{v} \in \vec{\Delta}$ et on a

$$\varphi(\vec{n}) = \vec{u} - \vec{v}$$

$$\psi(\vec{n}) = -\vec{u} + \vec{v}.$$

On reconnaît donc que ψ est la symétrie orthogonale par rapport à $\vec{\Delta}$.

7.3

1° On sait que la matrice de la rotation d'angle θ , dans la base orthonormée directe (\vec{i}, \vec{j}) est :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme ρ est donc la rotation dont l'angle θ est déterminé par :

$$\cos \theta = -\frac{1}{2}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{soit : } \theta = \frac{2\pi}{3} [2\pi].$$

2° On sait que la matrice, dans la base (\vec{i}, \vec{j}) de la symétrie orthogonale φ_1 par rapport à la droite Δ_1 , définie par $(\overline{\mathbb{R}\vec{i}}, \overline{\Delta_1}) = \alpha_1 [\pi]$ est :

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha_1 & \sin 2\alpha_1 \\ \sin 2\alpha_1 & -\cos 2\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

En écrivant $\rho = \sigma \circ \varphi_1$, on obtient :

$$\begin{aligned} \rho(\vec{i}) &= -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} = \sigma(\cos 2\alpha_1 \vec{i} + \sin 2\alpha_1 \vec{j}) \\ &= -\cos 2\alpha_1 \vec{i} + \sin 2\alpha_1 \vec{j}. \end{aligned}$$

On en déduit : $\cos 2\alpha_1 = \frac{1}{2}$ et $\sin 2\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ soit :

$$2\alpha_1 = \frac{\pi}{3} [2\pi], \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{6} [\pi].$$

Ceci prouve déjà l'unicité de φ_1 .

Réciproquement, soit φ , la rotation orthogonale par rapport à la droite Δ_1 , définie par $(\overline{\mathbb{R}\vec{i}}, \overline{\Delta_1}) = \frac{\pi}{6} [\pi]$. La matrice de φ_1 dans la base (\vec{i}, \vec{j}) est

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On vérifie :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (\sigma \circ \varphi_1)(x\vec{i} + y\vec{j}) &= \sigma\left(x\left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right) + y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right)\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\vec{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)\vec{j} \\ &= \rho(x\vec{i} + y\vec{j}). \end{aligned}$$

On a bien : $\rho = \sigma \circ \varphi_1$.

On procède de façon analogue pour déterminer φ_2 . Si φ_2 est la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ_2 définie par $(\overline{\mathbb{R}\vec{i}}, \overline{\Delta_2}) = \alpha_2 [\pi]$, en écrivant $\rho = \varphi_2 \circ \sigma$, on obtient :

$$\begin{aligned} \rho(\vec{i}) &= \varphi_2(\sigma(\vec{i})) = \varphi_2(-\vec{i}) = -\cos 2\alpha_2 \vec{i} - \sin 2\alpha_2 \vec{j} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \cos 2\alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \sin 2\alpha_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2\alpha_2 = -\frac{\pi}{3} [2\pi], \quad \alpha_2 = -\frac{\pi}{6} [\pi].$$

La droite Δ_2 est donc déterminée par $(\overline{\mathbb{R}\vec{i}}, \overline{\Delta_2}) = -\frac{\pi}{6} [\pi]$.

On vérifie comme dans le premier cas que $\rho = \varphi_2 \circ \sigma$.

Remarque

On vérifie que : $2(\overline{\Delta_1}, \overline{\Delta_2}) = 2(\overline{\Delta_1}, \overline{\Delta_2}) = \frac{2\pi}{3} [2\pi] = \frac{2\pi}{3}$ étant précisément l'angle de ρ .

7.4 1° Un vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est invariant par φ si et seulement si :

$$\varphi(\vec{u}) = \vec{u} \iff \begin{cases} -\frac{7}{25}x + \frac{24}{25}y = x \\ \frac{24}{25}x + \frac{7}{25}y = y \end{cases} \iff 4x - 3y = 0.$$

L'ensemble des vecteurs invariants est donc la droite vectorielle Δ d'équation

$$4x - 3y = 0.$$

On peut prendre : $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$ et $\vec{v} = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}$.

2° On sait que $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}$. On vérifie aisément que $\varphi(\vec{v}) = -\vec{v}$. La matrice de φ dans la base (\vec{u}, \vec{v}) est donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et φ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ .

7.5 1° G est stable pour la composition des applications. En effet, si φ et ψ sont dans G, on a :

$$\varphi \circ \psi \circ \sigma = \varphi \circ \sigma \circ \psi = \sigma \circ \varphi \circ \psi.$$

La loi \circ est associative.

G contient un élément neutre : l'identité de \mathbb{P} .

Tout élément de G a un symétrique dans G. En effet, si φ est dans G, on a :

$$\varphi^{-1} \circ \sigma = \varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1} = \sigma \circ \varphi^{-1}.$$

G est donc bien un groupe pour la composition des applications.

2° Soit Δ' la droite orthogonale à Δ . On sait que :

$$\Delta' = \{\vec{u} \in \mathbb{P}; \sigma(\vec{u}) = \vec{u}\} \quad \text{et} \quad \Delta' = \{\vec{u} \in \mathbb{P}; \sigma(\vec{u}) = -\vec{u}\}.$$

Soit \vec{i} un vecteur unitaire de Δ , \vec{j} un vecteur unitaire de Δ' .

Soit φ un élément de G. On a :

$$(\varphi \circ \sigma)(\vec{i}) = \varphi(\vec{i}) = (\sigma \circ \varphi)(\vec{i}) = \sigma(\varphi(\vec{i})).$$

Le vecteur $\varphi(\vec{i})$, invariant par σ , est donc un élément de Δ . Comme ce

vecteur est unitaire, on a $\varphi(\vec{i}) = \vec{i}$ ou $\varphi(\vec{i}) = -\vec{i}$.

En raisonnant de façon analogue, on voit que $\varphi(\vec{j}) = \vec{j}$ ou $\varphi(\vec{j}) = -\vec{j}$.

La matrice de φ dans la base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) est donc nécessairement

l'une des quatre matrices suivantes :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui correspondent respectivement à :

$$\varphi_0 = \text{id}_F; \quad \varphi_1 = -\text{id}_F; \quad \varphi_2 = \sigma; \quad \varphi_3 = \sigma'$$

où $-\text{id}_F$ est l'isométrie $\vec{u} \mapsto -\vec{u}$ et σ' la symétrie orthogonale par rapport à Δ . Réciproquement, il est clair que ces quatre isométries commutent avec σ .

Table de G :

	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
φ_0	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
φ_1	φ_1	φ_0	φ_3	φ_2
φ_2	φ_2	φ_3	φ_0	φ_1
φ_3	φ_3	φ_2	φ_1	φ_0

7.6 1° L'endomorphisme ρ associé à f est une rotation, puisque sa matrice dans la base orthonormée directe (\vec{i}, \vec{j}) est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

De plus, l'angle θ de cette rotation est défini, modulo 2π , par :

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On a donc :

$$\theta = \frac{\pi}{4} [2\pi].$$

L'application affine f est donc une rotation affine d'angle $\frac{\pi}{4}$ dont il reste à déterminer le centre $\Omega(x_0, y_0)$, c'est-à-dire l'unique point invariant.

$$f(\Omega) = \Omega \iff \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} x_0 - \frac{\sqrt{2}}{2} y_0 + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = x_0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} x_0 + \frac{\sqrt{2}}{2} y_0 + 2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} = y_0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (2 - \sqrt{2})x_0 + \sqrt{2}y_0 = 2 + \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}x_0 + (2 - \sqrt{2})y_0 = 4 - 3\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2. \end{cases}$$

2° La droite D a pour image une droite D' telle que $(\vec{D}, \vec{D}') = \frac{\pi}{4} [\pi]$. La droite D' est donc dirigée par \vec{j} . Comme elle passe par le point $O' = f(O)$ de coordonnées $(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 - \frac{3\sqrt{2}}{2})$, son équation est $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

L'endomorphisme σ associé à f a pour matrice dans la base (\vec{i}, \vec{j})

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

cette matrice est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1$$

σ est donc une symétrie vectorielle orthogonale. Par conséquent, f sera une symétrie axiale si, et seulement si, f admet une droite de points invariants. Or, le point $M(x, y)$ est invariant si, et seulement si,

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + a = x \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + b = y \end{cases} \iff \begin{cases} x + (1 - \sqrt{2})y + \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)a = 0 \\ x + (1 - \sqrt{2})y + \sqrt{2}b = 0 \end{cases}$$

f est donc une symétrie axiale si, et seulement si, $b = (\sqrt{2} - 1)a$.

Si cette condition est réalisée, l'axe de f est la droite d'équation :

$$x + (1 - \sqrt{2})y + \sqrt{2}b = 0.$$

7.8 1° L'endomorphisme σ associé à f a une matrice, dans la base (\vec{i}, \vec{j}) , de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1.$$

Par conséquent, σ est une symétrie vectorielle orthogonale et f est une isométrie affine, plus précisément, f est un anti-déplacement.

2° Un point $M(x, y)$ est invariant par f si, et seulement si :

$$\begin{cases} -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{13}{5} = x \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{6}{5} = y \end{cases} \iff \begin{cases} 8x - 4y - 13 = 0 \\ 8x - 4y + 12 = 0. \end{cases}$$

L'ensemble des points invariants de f est donc vide.

3° L'application $f \circ f$ associée au point $M(x, y)$ le point $M''(x'', y'')$ tel que :

$$\begin{cases} x'' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{13}{5} \\ y'' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{6}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{13}{5} = x + 2 \\ \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{6}{5} = y + 4 \end{cases}$$

$f \circ f$ est donc la translation de vecteur $\vec{v}(2, 4)$.

4° On remarque que l'on a, avec les notations de l'énoncé,

$$f \circ f = t_{\text{OSOS}} \circ t = t^2$$

de sorte que t est la translation de vecteur $\vec{v}(1, 2)$.

qui correspondent respectivement à :

$$\varphi_0 = \text{id}_P; \quad \varphi_1 = -\text{id}_P; \quad \varphi_2 = \sigma; \quad \varphi_3 = \sigma'$$

où $-\text{id}_P$ est l'isométrie $\vec{u} \mapsto -\vec{u}$ et σ' la symétrie orthogonale par rapport à $\vec{\Delta}$. Réciproquement, il est clair que ces quatre isométries commutent avec σ .

Table de G :

	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
φ_0	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
φ_1	φ_1	φ_0	φ_3	φ_2
φ_2	φ_2	φ_3	φ_0	φ_1
φ_3	φ_3	φ_2	φ_1	φ_0

7.6 1° L'endomorphisme ρ associé à f est une rotation, puisque sa matrice dans la base orthonormée directe (\vec{i}, \vec{j}) est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

De plus, l'angle θ de cette rotation est défini, modulo 2π , par :

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On a donc :

$$\theta = \frac{\pi}{4} [2\pi].$$

L'application affine f est donc une rotation affine d'angle $\frac{\pi}{4}$ dont il reste à déterminer le centre $\Omega(x_0, y_0)$, c'est-à-dire l'unique point invariant.

$$f(\Omega) = \Omega \iff \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}x_0 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_0 + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = x_0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_0 + 2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} = y_0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} ((2 - \sqrt{2})x_0 + \sqrt{2}y_0 = 2 + \sqrt{2} \\ (-\sqrt{2}x_0 + (2 - \sqrt{2})y_0 = 4 - 3\sqrt{2} \\ \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2. \end{cases} \end{cases}$$

2° La droite D a pour image une droite D' telle que $(\vec{D}, \vec{D}') = \frac{\pi}{4} [\pi]$. La droite D' est donc dirigée par \vec{f} . Comme elle passe par le point $O' = f(O)$ de coordonnées $(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 - \frac{3\sqrt{2}}{2})$, son équation est $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

7.7

L'endomorphisme σ associé à f a pour matrice dans la base (\vec{i}, \vec{j})

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

cette matrice est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a^2 + b^2 = 1$$

σ est donc une symétrie vectorielle orthogonale.

Par conséquent, f sera une symétrie axiale si, et seulement si, f admet une droite de points invariants. Or, le point $M(x, y)$ est invariant si, et seulement si,

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + a = x \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + b = y \end{cases} \iff \begin{cases} x + (1 - \sqrt{2})y + \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)a = 0 \\ x + (1 - \sqrt{2})y + \sqrt{2}b = 0 \end{cases}$$

f est donc une symétrie axiale si, et seulement si, $b = (\sqrt{2} - 1)a$.

Si cette condition est réalisée, l'axe de f est la droite d'équation :

$$x + (1 - \sqrt{2})y + \sqrt{2}b = 0.$$

7.8

1° L'endomorphisme σ associé à f a une matrice, dans la base (\vec{i}, \vec{j}) , de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Par conséquent, σ est une symétrie vectorielle orthogonale et f est une isométrie affine, plus précisément, f est un antidéplacement.

2° Un point $M(x, y)$ est invariant par f si, et seulement si :

$$\begin{cases} -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{13}{5} = x \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{6}{5} = y \end{cases} \iff \begin{cases} 8x - 4y - 13 = 0 \\ 8x - 4y + 12 = 0. \end{cases}$$

L'ensemble des points invariants de f est donc vide.

3° L'application $f \circ f$ associée au point $M(x, y)$ le point $M''(x'', y'')$ tel que :

$$\begin{cases} x'' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{13}{5} \\ y'' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{6}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{6}{5} = x + 2 \\ \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{13}{5} = y + 4 \end{cases}$$

$f \circ f$ est donc la translation de vecteur $\vec{v}(2, 4)$.

4° On remarque que l'on a, avec les notations de l'énoncé,

$$f \circ f = t_{\text{O.S.O.S.}} \circ t = t^2$$

de sorte que t est la translation de vecteur $\vec{v}(1, 2)$.

On sait que la droite D peut être caractérisée comme l'ensemble des milieux I des bipoints (M, M'). Or I a pour coordonnées :

$$\begin{cases} X = \frac{x+x'}{2} = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y + \frac{13}{10} \\ Y = \frac{y+y'}{2} = \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{3}{5} \end{cases}$$

La droite D a donc pour équation $Y = 2(X - 1)$.

7.9 Unicité de r.

On remarque que $(\overline{AB}, \overline{A'B'}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$, que h soit positif ou négatif.

La rotation r est donc nécessairement d'angle $\frac{\pi}{4}$. Par suite, elle transforme le point M(x, y) en M'(x', y') tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) + \alpha \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) + \beta \end{cases}$$

où α et β sont des nombres réels que nous allons déterminer en écrivant $r(A) = A'$:

$$\begin{cases} 2 = \sqrt{2} + \alpha \\ 2 = \sqrt{2} + \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 2 - \sqrt{2} \\ \beta = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Nous avons ainsi prouvé l'unicité de r.

Existence de r.

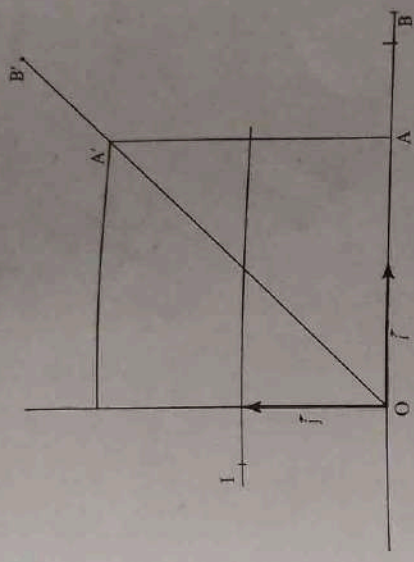
Les formules :

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) + 2 - \sqrt{2} \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) + 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

définissent une rotation r transformant A en A'. Le point B est transformé en le point de coordonnées x' et y' telles que :

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(2+h) + 2 - \sqrt{2} \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(2+h) + 2 - \sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x' = 2 + h \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = 2 + h \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Ce sont précisément les coordonnées du point B'. La rotation r considérée transforme bien A en A' et B en B'.



Centre de r.

C'est l'unique point I invariant de r. Ses coordonnées sont définies par le système :

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) + 2 - \sqrt{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) + 2 - \sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} (\sqrt{2}-1)x + y = 2(\sqrt{2}-1) \\ -x + (\sqrt{2}-1)y = 2(\sqrt{2}-1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Le centre I de r a pour coordonnées $1 - \sqrt{2}$ et 1.

7.10 a) L'endomorphisme associé à la rotation r_1 a pour matrice, dans la base (\vec{i}, \vec{j}) :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La rotation r_1 transforme donc le point M(x, y) en M'(x', y') tel que :

$$\begin{cases} x' = -y + \alpha \\ y' = x + \beta \end{cases}$$

où α et β sont des réels qu'on détermine en écrivant que I est invariant :

$$\alpha = 1, \quad \beta = -1.$$

On trouve en raisonnant de même que r_2 est définie analytiquement par les formules :

$$\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$$

La translation t est définie par les formules :

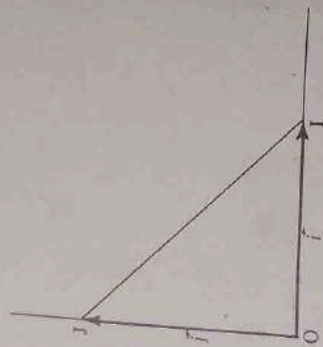
$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

Par suite, $f = r_J \circ t \circ r_I$ est définie par :

$$\begin{cases} x' = -x + 1 \\ y' = -y + 1 \end{cases}$$

on reconnaît la symétrie centrale par rapport au point

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ car } \frac{x+x'}{2} = \frac{y+y'}{2} = \frac{1}{2}$$



b) f est la composée de trois déplacements d'angles respectifs $\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$. c'est donc un déplacement d'angle π , c'est-à-dire une symétrie centrale. Cherchons l'image de I par f :

$$f(I) = (r_J \circ t \circ r_I)(I) = (r_J \circ t)(I) = r_J(J) = J.$$

Le centre de f est donc le milieu de (I, J).

Remarque

Il est évident, dans cet exercice, que la solution géométrique est de loin préférable à la solution analytique.

7.11 1° a) f est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Pour trouver son centre, on peut décomposer r_A et r_B en produit de symétries axiales. Soit O l'isobarycentre de ABC. On a :

$$r_B = s_{AB} \circ s_{OB} \quad \text{et} \quad r_A = s_{OA} \circ s_{AB}.$$

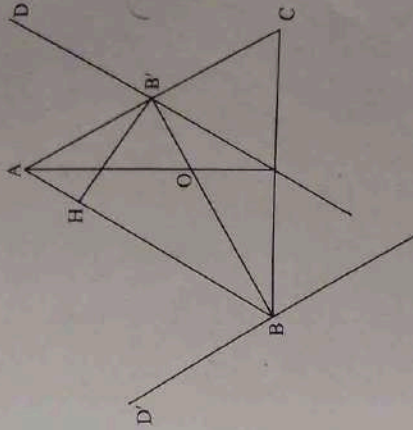
$$f = r_A \circ r_B = s_{OA} \circ s_{AB} \circ s_{AB} \circ s_{OB} = s_{OA} \circ s_{OB}.$$

Le centre de f est donc le point O.

b) g est une rotation d'angle π , c'est-à-dire une symétrie centrale. On note que :

$$g(B) = (r_C \circ r_B \circ r_A)(B) = (r_C \circ r_B)(C) = r_C(A) = B.$$

Le centre de g est donc B.



2° a) On sait que la composée d'un nombre impair d'antidéplacements est un antidéplacement.

b) Les applications $s_{AB} \circ s_{AC}$ et $s_{D'} \circ s_{AB}$ sont toutes deux égales à la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

c) On a donc : $h = s_{CA} \circ s_{D'} \circ s_{AB}$.

Comme les deux droites (AC) et D' sont parallèles, $s_{CA} \circ s_{D'}$ est la translation $t_{2\vec{BB}'}$ où B' désigne le milieu de (A, C). On a donc prouvé $h = t_{2\vec{BB}'} \circ s_{AB}$.

Pour trouver la forme réduite de h , décomposons le vecteur \vec{BB}' en introduisant le point H projeté orthogonal de B' sur (AB) :

$$\vec{BB}' = \vec{BH} + \vec{HB}'.$$

L'application $t_{2\vec{HB}'} \circ s_{AB}$ est la symétrie axiale s_D dont l'axe D est la parallèle à (AB) passant par B'. On a donc :

$$h = t_{2\vec{BH}} \circ t_{2\vec{HB}'} \circ s_{AB} = t_{2\vec{BH}} \circ s_D.$$

Comme $2\vec{BH} \in \vec{D}$, cette décomposition est la forme réduite de h .

Notons que :

$$2\vec{BH} = \frac{3\vec{BA}}{2}.$$

a) Notons que $A_2 = f^2(A_0)$, $A_3 = f^3(A_0)$.

Une application affine conservant le barycentre, $f(O)$ est l'isobarycentre des points $f(A_0) = A_1$, $f(A_1) = A_2$, $f(A_2) = A_3$ et $f(A_3) = f^4(A_0) = A_0$. On a donc $f(O) = O$.

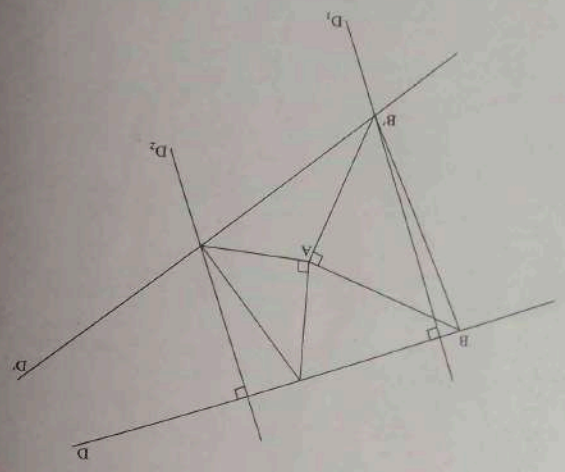
b) D'après ce qui précède, une isométrie affine f telle que $f^4 = \text{id}_F$ admet un point invariant, ce ne peut donc être qu'une rotation ou une symétrie axiale. De plus, si f est une rotation, son angle θ doit vérifier $4\theta = 0 \pmod{2\pi}$, soit $\theta = k \frac{\pi}{2}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

7.12

Réciproquement, il est clair que toutes les rotations d'angle $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ et toutes les symétries axiales sont des isométries affines vérifiant $f^4 = \text{id}_n$.

Supposons qu'un tel triangle ABB' existe. On a $(\overline{AB}, \overline{AB'}) = e^{\frac{2\pi i}{k}} [2\pi]$ avec $k \in \{-1, +1\}$.

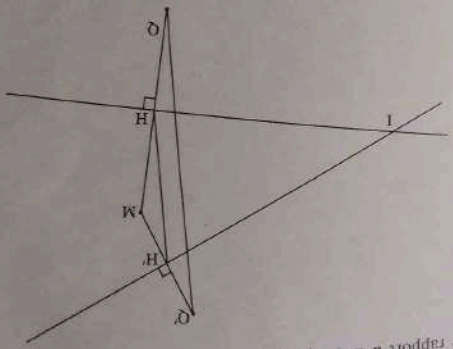
Soit D_1 (resp. D_2) la droite déduite de D par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{k}$ (resp. $-\frac{\pi}{k}$).
 La rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{k}$ transforme B en B' et D en D_1 ou en D_2 . Les droites D' et D_1 ou D' et D_2 ont donc en commun le point B' .
 Réciproquement, si B' est un point commun à D' et D_1 , par exemple, la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{k}$ transforme B' en un point B de D et le triangle ABB' est rectangle isocèle.



Discussion
 Les droites D_1 et D_2 sont parallèles et distinctes.
 • Si D' et D_1 sont sécantes, il en est de même de D' et D_2 : le problème admet deux solutions.
 • Si $D' = D_1$ ou $D' = D_2$, le problème admet une infinité de solutions.
 • Si D', D_1 et D_2 sont parallèles avec $D' \neq D_1$ et $D' \neq D_2$, le problème n'admet pas de solution.

Supposons le plan P orienté. Posons $(D, D') = \alpha \in]\pi]$ en choisissant α dans $]0, \pi[$.

Soit Q (resp. Q') le point déduit de M dans la symétrie axiale s_D (resp. $s_{D'}$) par rapport à D (resp. D').

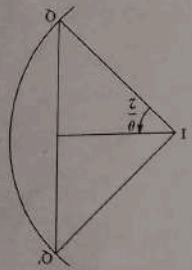


La composée $r = s_{D'} \circ s_D$ est la rotation de centre I et d'angle $\theta = 2\alpha$ et on a :

$$r(Q) = (s_{D'} \circ s_D)(Q) = s_{D'}(M) = Q'$$

Comme $\|QQ'\| = 2 \|HH'\|$, on voit que $\|HH'\| = l$ équivaut à $\|QQ'\| = 2l$. De sorte que le point M appartient à L si, et seulement si, la distance de Q à Q' est égale à $2l$.

Or, dans une rotation de centre I et d'angle $\theta \in]0, 2\pi[$ la distance entre un point Q et son transformé Q' est égale à $2 \sin \frac{\theta}{2} \|IQ\|$.

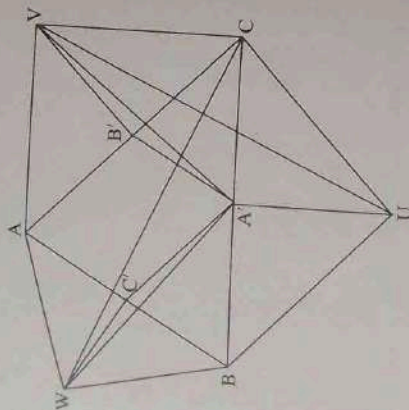


L'ensemble des points Q tels que $\|QQ'\| = 2l$ est donc le cercle Γ de centre I et de rayon $\frac{l}{\sin \frac{\theta}{2}}$.

L'ensemble Γ est le symétrique de L par rapport à D , c'est-à-dire le cercle Γ lui-même.

1° L'endomorphisme associé à $f = f \circ r$ est la rotation vectorielle ρ d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On a évidemment $f(C') = B'$. On a aussi $f(W) = A'$ car $r(W) = B$ et $f(B) = A'$ (puisque $\overline{C'B'} = \overline{BA'} = \frac{1}{2} \overline{BC}$).



D'autre part $\overline{C'A'} = \overline{B'C}$ et la rotation vectorielle ρ transforme $\overline{B'C}$ en $\overline{B'V}$.

On a donc : $B'f(A') = f(C')f(A') = \rho(\overline{C'A'}) = \overline{B'V}$.

On en déduit : $f(A') = V$.

L'application f transforme donc le triangle $WC'A'$ en $A'B'V$. Ceci implique :

$$\rho(\overline{A'W}) = \overline{VA'}$$

Notons que ce résultat peut encore s'écrire : $\rho(\overline{A'V}) = \overline{A'W}$.

2° On a $r'(A') = A'$, $r'(U) = C$ et, compte tenu de la question précédente, $r'(V) = W$.

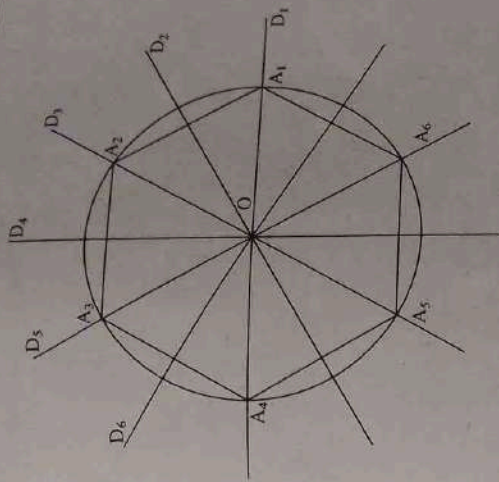
La rotation r' transforme donc le triangle $A'UV$ en $A'CW$.

Il en résulte que $\rho(\overline{UV}) = \overline{CW}$ ce qui implique, en particulier, que les vecteurs \overline{UV} et \overline{CW} sont orthogonaux.

3° La droite CW apparaît ainsi comme la hauteur issue de W dans le triangle UVW . On démontrerait de façon analogue que les droites AU et BV sont les deux autres hauteurs de ce même triangle : les trois droites AU , BV et CW sont donc concourantes.

1° Le point O peut s'interpréter comme l'isobarycentre des points A_1, \dots, A_6 . Comme f conserve le barycentre, $f(O)$ est l'isobarycentre des points $f(A_1), \dots, f(A_6)$ qui ne sont autres que les points A_1, \dots, A_6 (dans un ordre différent). On a donc $f(O) = O$.

2° Un élément f de J_F ne peut donc être qu'une rotation de centre O ou une symétrie axiale par rapport à une droite passant par O .



• Si f est une rotation, elle transforme A_1 en un point A_k , son angle θ est donc de la forme $\frac{k\pi}{3}$ avec $k \in \{0, 1, \dots, 5\}$.

• Si f est une symétrie par rapport à une droite D , D contient A_1 ou est la médiatrice du segment $[A_1, A_4]$, ce qui laisse six possibilités pour D : les droites $D_1 = (A_1A_4)$, $D_3 = (A_2A_5)$, $D_5 = (A_3A_6)$ et les médiatrices D_2 , D_4 , D_6 des bipoints (A_1, A_2) , (A_2, A_3) et (A_3, A_4) . Réciproquement, il est évident que les douze isométries ainsi répertoriées conservent globalement F .

Le groupe J_F contient donc douze éléments, le sous-groupe J_F^+ des déplacements de J_F est formé par les six rotations. Notons que J_F^+ est commutatif, J_F ne l'est pas.

1° Soit g un élément de G . On sait déjà que g est une rotation de centre A_0 ou une symétrie axiale par rapport à une droite passant par A_0 . D'autre part, le point A_1 est transformé par g en un point de F situé à une distance de A_0 égale à 1, autrement dit $g(A_1) = A_1$ ou $g(A_1) = A_{-1}$.

• Si f est une rotation, f est donc l'identité ou la symétrie centrale s_{A_0} .

• Si f est une symétrie axiale, son axe est D ou la droite D' passant par A_0 et perpendiculaire à D .

Réciproquement, il est évident que ces quatre isométries : id_F , s_{A_0} , s_D , $s_{D'}$ sont des éléments de G .

2° F est globalement invariant par toutes les translations de vecteurs $k\vec{u}$ où $k \in \mathbb{Z}$. Posons $f(A_0) = A_k$. L'application $g = t_{-k\vec{u}} \circ f$ est soit f un élément de J_F qui laisse invariant le point A_0 , autrement dit $g \in G$ et un élément de J_F qui laisse invariant de la forme $t_{k\vec{u}} \circ g$, avec $k \in \mathbb{Z}$, $f = t_{k\vec{u}} \circ g$. Réciproquement, toute isométrie de la forme $t_{k\vec{u}} \circ g$, avec $k \in \mathbb{Z}$, $g \in G$, est un élément de J_F .

Pour décrire les éléments de J_{E^2} , nous allons donc considérer quatre cas :

- $g = \text{id}_E$, on obtient toutes les translations de vecteurs $k\vec{u}$ où $k \in \mathbb{Z}$.
- $g = s_{A_0}$, la composée $k\alpha \circ s_{A_0}$ est la symétrie centrale par rapport au point B_k défini par $\overline{A_0 B_k} = \frac{k}{2} \vec{u}$. On obtient ainsi toutes les symétries centrales par rapport aux points A_k et aux milieux des bipoints (A_k, A_{k+1}) .
- $g = s_D$, on obtient ainsi tous les antidéplacements de forme réduite $k\alpha \circ s_D$ où $k \in \mathbb{Z}$.
- $g = s_{D'}$, on obtient ainsi toutes les symétries par rapport aux droites perpendiculaires à D et passant par les points A_k et les milieux des bipoints (A_k, A_{k+1}) .

7.18

A. 1° g_0 est un élément de $GL(E)$ car le déterminant de la matrice de g_0 dans la base B est égal à $-1 \neq 0$.

Nous allons retrouver ce résultat et calculer en même temps la matrice de g_0^{-1} dans la base B en résolvant le système :

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2x + y \end{cases} \iff \begin{cases} x = -x' + y' \\ y = 2x' - y' \end{cases}$$

Ce qui prouve que tout élément de E admet un antécédent et un seul : g_0 est un automorphisme de E et g_0^{-1} a pour matrice dans la base B :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2° Le vecteur $\vec{f} + 2\vec{f}$ engendre la droite D_0 d'équation $2x - y = 0$. Un vecteur orthogonal à D est, par exemple, $2\vec{f} - \vec{f}$, ce vecteur engendre la droite Δ_0 . Soit $\vec{u}(x, y)$ un vecteur de E et $\vec{u}'(x', y')$ son image par s_0 . Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u}' - \vec{u} = \lambda(2\vec{f} - \vec{f})$, ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} x' = x + 2\lambda \\ y' = y - \lambda \end{cases}$$

on détermine λ en écrivant que : $\frac{\vec{u} + \vec{u}'}{2} \in D$:

$$2(x + \lambda) - (y - \lambda) = 0 \iff \lambda = \frac{2}{5}(y - 2x).$$

Finalement :

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases}$$

La matrice de s_0 dans la base B est

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

3° On cherche l'expression analytique de s'_0 par composition :

$$(x, y) \xrightarrow{g_0^{-1}} (-x + y, 2x - y) \xrightarrow{s_0} \left(\frac{11}{5}x - \frac{7}{5}y, \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y\right) \xrightarrow{g_0} \left(\frac{13}{5}x - \frac{6}{5}y, \frac{24}{5}x - \frac{13}{5}y\right)$$

s'_0 est donc définie par :

$$\begin{cases} x' = \frac{13}{5}x - \frac{6}{5}y \\ y' = \frac{24}{5}x - \frac{13}{5}y \end{cases}$$

On remarque que $s'_0 = \text{id}_E$, on sait que cela implique que s'_0 est une symétrie vectorielle. L'axe est l'ensemble des vecteurs \vec{u} tels que $s'_0(\vec{u}) = \vec{u}$, la direction est l'ensemble des vecteurs \vec{u} tels que $s'_0(\vec{u}) = -\vec{u}$. On trouve respectivement les droites d'équations $4x - 3y = 0$ et $3x - y = 0$.

B. 1° On a :

$$s'^2 = (g \circ s \circ g^{-1}) \circ (g \circ s \circ g^{-1}) = g \circ s^2 \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{id}_E$$

s' est donc une symétrie.

Un vecteur $\vec{u} = g(\vec{v})$ est invariant par s' si, et seulement si,

$$s'(\vec{u}) = (g \circ s \circ g^{-1})(g(\vec{v})) = (g \circ s)(\vec{v}) = g(\vec{v})$$

ce qui équivaut, (car g est bijective) à $s(\vec{v}) = \vec{v}$, c'est-à-dire $\vec{v} \in D$.

L'ensemble des vecteurs invariants par s' est donc $g(D)$.

En raisonnant de façon analogue, on voit que l'ensemble des vecteurs \vec{u} tels que $s'(\vec{u}) = -\vec{u}$ est $g(\Delta)$.

s' est donc bien la symétrie par rapport à $g(D)$ parallèlement à $g(\Delta)$.

Dans la question A 3°, la droite D_0 est engendrée par $\vec{f} + 2\vec{f}$, la droite Δ_0 par $2\vec{f} - \vec{f}$. L'application s'_0 est donc la symétrie par rapport à la droite engendrée par le vecteur $g(\vec{f} + 2\vec{f}) = 3\vec{f} + 4\vec{f}$ parallèlement à la droite engendrée par le vecteur $g(2\vec{f} - \vec{f}) = \vec{f} + 3\vec{f}$: c'est bien ce que l'on avait prouvé.

2° a) On sait qu'une homothétie permute avec tout endomorphisme. On a donc :

$$\varphi_g(f) = g \circ f \circ g^{-1} = f \circ g \circ g^{-1} = f.$$

b) Un élément f' de $L(E)$ admet un antécédent et un seul par φ_g à savoir :

$$g^{-1} \circ f' \circ g.$$

(L'application réciproque de φ_g est $\varphi_{g^{-1}}$.)

On a :

$$\varphi_g(f_1) \circ \varphi_g(f_2) = (g \circ f_1 \circ g^{-1}) \circ (g \circ f_2 \circ g^{-1}) = g \circ f_1 \circ f_2 \circ g^{-1} = \varphi_g(f_1 \circ f_2).$$

c) Soit $\vec{u} = g(\vec{v})$ un vecteur de E . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{u} \in H_{\varphi_g(D), \alpha} &\iff \varphi_g(f)(\vec{u}) = \alpha \vec{u} \iff (g \circ f \circ g^{-1})(\vec{u}) = \alpha \vec{u} \\ &\iff (g \circ f)(\vec{v}) = g(\alpha \vec{v}) \iff f(\vec{v}) = \alpha \vec{v} \\ &\iff \vec{v} \in H_{f, \alpha} \iff \vec{u} \in g(H_{f, \alpha}). \end{aligned}$$

d) Si f est la projection sur D parallèlement à Δ , on a :

$$(\varphi_g(f))^2 = \varphi_g(f \circ f) = \varphi_g(f)$$

ce qui prouve que $\varphi_g(f)$ est une projection. De plus, d'après ce qui précède,

8 | Similitudes directes du plan

On se place dans un plan P orienté, de direction P . Tous les repères utilisés sont orthogonaux.

□ Similitude directe

On appelle **similitude directe** de P toute application f de P dans P vérifiant l'une des quatre propriétés équivalentes suivantes :

- (1) Il existe un déplacement g de P et une homothétie H de P tels que $f = H \circ g$.
- (2) Il existe un déplacement g' de P et une homothétie H' de P tels que $f = g' \circ H'$.
- (3) Il existe un déplacement g_1 de P et une homothétie H_1 de P , de rapport strictement positif, tels que $f = H_1 \circ g_1$.
- (4) Il existe un déplacement g_1' de P et une homothétie H_1' de P , de rapport strictement positif, tels que $f = g_1' \circ H_1'$.

Définition

$$k > 0$$

Soit f une application affine de P dans P .
 f est une similitude directe si et seulement si l'endomorphisme associé à f est de la forme $k\rho$ où $k \in \mathbb{R}^+$ et où ρ est une rotation vectorielle.
 De plus, pour une similitude directe donnée f , k et ρ sont uniques : k s'appelle **angle** de f et ρ s'appelle **rapport** de la similitude f .

Exemples

- Les similitudes directes de rapport égal à 1 sont les déplacements.
- Les similitudes directes d'angle nul sont les homothéties de rapport positif et les translations.
- On notera qu'une homothétie de rapport $k < 0$ est une similitude de rapport $|k|$ et d'angle π .

Propriété

Toute similitude directe est une bijection affine.

Exemples

- Déplacement de P .
- Homothétie affine de P .

l'ensemble $H_{\rho, k}$, des vecteurs invariants par $\varphi_g(f)$ est égal à f . En effet, on sait que le noyau de $\varphi_g(f)$ est $g(\Delta)$. Par conséquent, $\varphi_g(f)$ est la projection sur $g(\Delta)$ et parallèlement à $g(\Delta)$.

3° a) La composée de plusieurs isométries vectorielles est une isométrie vectorielle.

b) Si g est une rotation vectorielle, $\varphi_g(f)$ est un groupe commutatif, d'où :

Si g est une symétrie vectorielle, $\varphi_g(f)$ est une rotation vectorielle, plus précisément $\varphi_g(f) = f^{-1}$. En effet $f \circ g$, composé d'une rotation et d'une symétrie, est une symétrie, de sorte que :

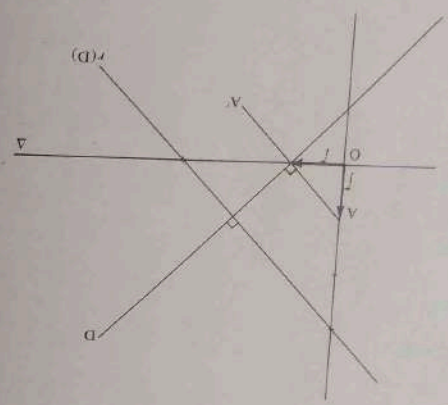
$$f \circ \varphi_g(f) = f \circ g \circ f \circ g = (f \circ g)^2 = \text{id}_E$$

d'où

$$M \in \text{Inv}_{A \circ f \circ g^{-1}} \iff (G \circ F \circ G^{-1})(M) = M \iff (G \circ F)(N) = G(N)$$

C. 1° Soit $M = G(N)$ un point de P . On a les équivalences suivantes :

$$F(N) = N \iff N \in \text{Inv}_F \iff M \in G(\text{Inv}_F)$$



2°

D'après B 1°, l'application $f = r \circ s \circ r^{-1}$ a pour endomorphisme associé la symétrie vectorielle par rapport à $r(\Delta)$, parallèlement à $r(\Delta)$. D'autre part $\text{Inv}_f = r(\text{Inv}_{s'}) = r(D)$.

L'application f est donc la symétrie par rapport à la droite d'équation $r + x = 3$ parallèlement à la droite vectorielle engendrée par le vecteur f .

D'après B 3°, l'application $g = s_2 \circ r \circ s_2$ a pour endomorphisme associé la rotation vectorielle d'angle $-\frac{\pi}{2}$. D'autre part, $\text{Inv}_g = s_2(\text{Inv}_{r'}) = s_2(A)$.

L'application g est donc la rotation de centre $A(2, -1)$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

8 | Similitudes directes du plan

On se place dans un plan P orienté, de direction P . Tous les repères utilisés sont orthonomes.

□ Similitude directe

On appelle **similitude directe** de P toute application f de P dans P vérifiant l'une des quatre propriétés équivalentes suivantes :

- (1) Il existe un déplacement g de P et une homothétie H de P tels que $f = H \circ g$.
- (2) Il existe un déplacement g' de P et une homothétie H' de P tels que $f = g' \circ H'$.
- (3) Il existe un déplacement g_1 de P et une homothétie H_1 de P , de rapport strictement positif, tels que $f = H_1 \circ g_1$.
- (4) Il existe un déplacement g_1' de P et une homothétie H_1' de P , de rapport strictement positif, tels que $f = g_1' \circ H_1'$.

Exemples

- Déplacement de P .
- Homothétie affine de P .

Propriété

Toute similitude directe est une bijection affine.

Théorème et définitions

Soit f une application affine de P dans P .
 f est une similitude directe si et seulement si l'endomorphisme associé à f est de la forme kp ou $k \in \mathbb{R}^+$ et où p est une rotation vectorielle.
 De plus, pour une similitude directe donnée f , k et p sont uniques : k s'appelle **rapport de la similitude** f et l'angle de p s'appelle **angle de la similitude** f .

Exemples

- Les similitudes directes de rapport égal à 1 sont les déplacements.
- Les similitudes directes d'angle nul sont les homothéties de rapport positif et les translations.
- On notera qu'une homothétie de rapport $k < 0$ est une similitude de rapport $|k|$ et d'angle π .

l'ensemble $H_{\alpha, r}$ des vecteurs invariants par $\varphi_\alpha(f)$ est $g(H_{\alpha, r})$ est la projection sur $g(D)$ et parallèlement à $g(\Delta)$.

3° a) La composée de plusieurs isométries vectorielles est une isométrie vectorielle.

b) Si g est une rotation vectorielle, $\varphi_\alpha(f)$ est égale à f . En effet, on sait que l'ensemble des rotations vectorielles est un groupe commutatif, d'où :

$$\varphi_\alpha(f) = g \circ f \circ g^{-1} = f \circ g \circ g^{-1} = f.$$

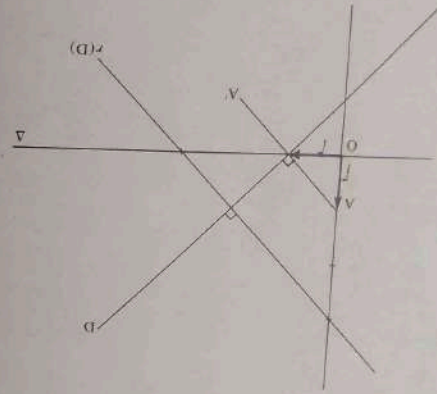
Si g est une symétrie vectorielle, $\varphi_\alpha(f)$ est une rotation vectorielle, plus précisément $\varphi_\alpha(f) = f^{-1}$. En effet $f \circ g$ composée d'une rotation et d'une symétrie, est une symétrie, de sorte que :

$$f \circ \varphi_\alpha(f) = f \circ g \circ f \circ g^{-1} = (f \circ g)^2 = \text{id}_E$$

d'où

$$\begin{aligned} M \in \text{Inv}_{G \circ F \circ G^{-1}} &\Leftrightarrow (G \circ F \circ G^{-1})(M) = M \Leftrightarrow (G \circ F)(N) = G(N) \\ &\Leftrightarrow F(N) = N \Leftrightarrow N \in \text{Inv}_F \Leftrightarrow M \in G(\text{Inv}_F). \end{aligned}$$

c) 1° Soit $M = G(N)$ un point de P . On a les équivalences suivantes :



D'après B 1°, l'application $f = r \circ s_1 \circ r^{-1}$ a pour endomorphisme associé la symétrie vectorielle par rapport à $r(\Delta)$ parallèlement à $r(\Delta)$. D'autre part $\text{Inv}_f = r(\text{Inv}_{s_1}) = r(D)$.
 L'application f est donc la symétrie par rapport à la droite d'équation $y + x = 3$ parallèlement à la droite vectorielle engendrée par le vecteur f .
 D'après B 3°, l'application $g = s_2 \circ r \circ s_2$ a pour endomorphisme associé la rotation vectorielle d'angle $-\frac{\pi}{2}$. D'autre part, $\text{Inv}_g = s_2(\text{Inv}_{s_1}) = s_2(A)$.
 L'application g est donc la rotation de centre $A(2, -1)$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Théorème
 L'ensemble S' des similitudes directes du plan P , muni de la composition des applications, est un groupe.
 Soit f (resp. f') une similitude directe de rapport k et d'angle θ (resp. de rapport k' et d'angle θ').
 $f \circ f'$ est une similitude directe de rapport kk' et d'angle $\theta + \theta'$.
 f^{-1} est une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$.

Propriétés
 Soit f une similitude directe de P , (M, M') , (N, N') , (O, O') , (R, R') des couples de points homologues, k le rapport de f , θ l'angle de f . On a :
 • $\|M'N'\| = k \|MN\|$: une similitude directe de rapport k multiplie les distances par k .
 • Si $Q \neq R$, $\frac{\|Q'R'\|}{\|M'N'\|} = \frac{\|QR\|}{\|MN\|}$: une similitude directe conserve le rapport des distances.
 • Si $M \neq N$ et $M' \neq N'$, $(\overline{MN}, \overline{M'N'}) = (\overline{MN}, \overline{MQ}) = (\overline{M'N'}, \overline{M'Q'})$ [2 π] : une similitude directe conserve les angles orientés de vecteurs (en particulier une similitude directe conserve l'orthogonalité).

Théorème
 Soit $k \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
 Une application f de P dans P est une similitude directe de rapport k et d'angle θ si, et seulement si, quels que soient les points distincts M et N de P , d'images M' et N' , on a :

$$\left\{ \begin{aligned} \|M'N'\| &= k \|MN\| \\ (\overline{MN}, \overline{M'N'}) &= \theta \quad [2\pi] \end{aligned} \right.$$

Théorème et définition
 Toute similitude directe f du plan P , de rapport k différent de 1, admet un point invariant unique. Ce point est appelé **centre de la similitude**.
Théorème (forme réduite d'une similitude directe)
 Toute similitude directe f du plan, de rapport k différent de 1 et d'angle θ , s'écrit sous la forme :
 $f = H \circ g = g \circ H$
 où H est l'homothétie de rapport k et de centre le point invariant I de f , et g la rotation de centre I et d'angle θ .

Utilisation des nombres complexes en géométrie plane
 Soit a et b deux nombres complexes distincts, d'images A et B dans le plan P rapporté à un repère orthonormé direct. Soit $k \in \mathbb{R}^+$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
 • L'ensemble des points $M(z)$ tels que $\frac{z-b}{z-a} = k e^{i\alpha}$ est :
 — la médiatrice de (A, B) si $k = 1$,
 — le cercle de diamètre $[I, J]$ où $I = \text{B}ar((A, 1), (B, k))$ et $J = \text{B}ar((A, 1), (B, -k))$ si $k \neq 1$.
 • L'ensemble des points $M(z)$ tels que $\arg \frac{z-b}{z-a} = \alpha$ [2 π] est :
 — la droite (AB) privée du segment $[A, B]$ si $\alpha = 0$ [2 π],
 — le segment ouvert $[A, B]$ si $\alpha = \pi$ [2 π],
 — un arc de cercle d'extrémités A et B , privé de A et de B , si $\alpha \neq 0$ [2 π].

Théorème
 Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct.
 Une application f de P dans P est une similitude directe si et seulement s'il existe un couple (a, b) de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que, quel que soit le point M d'image M' par f , les affixes respectives z et z' de M et M' vérifient la relation :

$$z' = az + b$$

 Dans les conditions précédentes, le rapport de la similitude directe f est $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{|a|}$ et une mesure de l'angle de f est $\arg a$.

Théorème
 Le plan P est rapporté à un repère orthonormé.
 Une application f de P dans P est une similitude directe si et seulement s'il existe des nombres réels a', b', x_0, y_0 ($(a', b') \neq (0, 0)$) tels que, quel que soit le point $M(x, y)$ d'image $M'(x', y')$ par f , on ait :

$$\begin{cases} x' = a'x - b'y + x_0 \\ y' = b'x + a'y + y_0 \end{cases}$$

Représentations analytique et complexe d'une similitude directe
 • $\|M'N'\| = k \|MN\|$: une similitude directe de rapport k multiplie les distances par k .
 • Si $Q \neq R$, $\frac{\|Q'R'\|}{\|M'N'\|} = \frac{\|QR\|}{\|MN\|}$: une similitude directe conserve le rapport des distances.
 • Si $M \neq N$ et $M' \neq N'$, $(\overline{MN}, \overline{M'N'}) = (\overline{MN}, \overline{MQ}) = (\overline{M'N'}, \overline{M'Q'})$ [2 π] : une similitude directe conserve les angles orientés de vecteurs (en particulier une similitude directe conserve l'orthogonalité).

ou H est l'homothétie de rapport k et de centre le point invariant I de f, et g est la rotation de centre I et d'angle θ .

$$f = H \circ g = g \circ H$$

Tout similitude directe f du plan, de rapport k différent de 1 et d'angle θ , s'écrit sous la forme :

Théorème (forme réduite d'une similitude directe)

Toute similitude directe f du plan P, de rapport k différent de 1, admet un point invariant unique. Ce point est appelé **centre de la similitude**.

Théorème et définition

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\|M'N'\|}{\|MN\|} &= k \\ \arg \frac{z' - z_0}{z - z_0} &= \theta \end{aligned} \right. \quad [2\pi]$$

Une application f de P dans P est une similitude directe de rapport k et d'angle θ si, et seulement si, quels que soient les points distincts M et N de P d'images M' et N', on a :

Soit $k \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Théorème

directe conserve l'orthogonalité).

• Si $M \neq N$ et $M' \neq Q$, $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'Q}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'Q})$: une similitude directe conserve les angles orientés de vecteurs (en particulier une similitude

distances.

• Si $Q \neq R$, $\frac{\|Q'R'\|}{\|QR\|} = \frac{\|M'N'\|}{\|MN\|}$: une similitude directe conserve le rapport des distances par k.

• $\|M'N'\| = k \|MN\|$: une similitude directe de rapport k multiplie les couples de points homologues, k le rapport de f, θ l'angle de f. On a :

Soit f une similitude directe de P, (M, M'), (N, N'), (Q, Q'), (R, R') des couples de points homologues, k le rapport de f, θ l'angle de f. On a :

Soit f (resp. f') une similitude directe de rapport k (resp. k') et d'angle θ (resp. θ'). f' est une similitude directe de rapport $\frac{k}{k'}$ et d'angle $-\theta$.

Soit f (resp. f') une similitude directe de rapport k (resp. k') et d'angle θ (resp. θ'). f' est une similitude directe de rapport $\frac{k}{k'}$ et d'angle $-\theta$.

L'ensemble S^+ des similitudes directes du plan P, muni de la composition des applications, est un groupe.

Théorème

— un arc de cercle d'extrémités A et B, privé de A et de B, si $\alpha \neq 0 [2\pi]$.

— le segment ouvert]A, B[si $\alpha = \pi [2\pi]$.

— la droite (AB) privée du segment [A, B] si $\alpha = 0 [2\pi]$.

• L'ensemble des points M(z) tels que $\arg \frac{z-b}{z-a} = \alpha [2\pi]$ est :

I = Bar((A, I), (B, k)) et J = Bar((A, I), (B, -k)) si $k \neq 1$.

— le cercle de diamètre [I, J] où

— la médiatrice de (A, B) si $k = 1$.

• L'ensemble des points M(z) tels que $\left| \frac{z-b}{z-a} \right| = k$ est :

□ **Utilisation des nombres complexes en géométrie plane**

Soit a et b deux nombres complexes distincts, d'images A et B dans le plan P rapporté à un repère orthonormé direct. Soit $k \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dans les conditions précédentes, le rapport de la similitude directe f est $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}}$ c'est-à-dire |a| et une mesure de l'angle de f est arg a.

Une application f de P dans P est une similitude directe si et seulement s'il existe un couple (a, b) de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que, quel que soit le point M d'image M' par f, les affixes respectives z et z' de M et M' vérifient la relation :

$$z' = az + b$$

Théorème

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct.

Une application f de P dans P est une similitude directe si et seulement s'il existe des nombres réels a, b, x₀, y₀ ((a, b) ≠ (0, 0)) tels que, quel que soit le point M(x, y) d'image M'(x', y') par f, on ait :

$$\begin{cases} x' = ax - by + x_0 \\ y' = bx + ay + y_0 \end{cases}$$

Théorème

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé.

□ **Représentations analytique et complexe d'une similitude directe**

8.6 Soit P un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère les points $I(1, 2), M(\sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe de centre I qui transforme M en M' .

8.7 Soit P un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit H l'homothétie de centre $A(1, 0)$ et de rapport -2 , r la rotation de centre $B(0, 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer les éléments caractéristiques des applications $f = r \circ H$ et $g = H \circ r$.

8.8 Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormé direct d'origine O. On considère les points $A(1, 0), B(0, 1), C(1, 1)$, le centre du carré OBCA, K milieu de (I, C) , J milieu de (I, A) , L milieu de (A, C) . Montrer qu'il existe une similitude directe f et une seule qui transforme le carré OBCA en le carré IKLJ (les points O, B, C et A ayant respectivement pour images I, K, L et J).

8.9 Reprendre la seconde question de l'exercice 8.3 en utilisant les nombres complexes.

8.10 Soit P un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit f l'application de P dans P qui à $M(x, y)$ associe $M'(x', y')$ définie par :

$$\begin{cases} x' = \sqrt{3}x + y - 3 \\ y' = x - \sqrt{3}y + 3 \end{cases}$$

1° Soit z l'affixe de M, z' l'affixe de M' . Trouver une relation simple entre z et z' .
Montrer qu'il existe un réel k tel que soit A et B dans P d'images A' et B' on ait : $\|A'B'\| = k \|AB\|$.
Déterminer k.

2° Montrer que f a un point invariant Ω et un seul que l'on déterminera.
3° Montrer qu'il existe une homothétie H de centre Ω et une droite D passant par Ω telles que : $f = H \circ s_p = s_p \circ H$ où s_p est la symétrie orthogonale par rapport à D.

Utilisation des nombres complexes en géométrie plane

8.11 Soit β' un plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Au point de β' , de coordonnées (x, y) on associe son affixe $x + iy$. On désigne par A le point d'affixe 1.
1° Déterminer, par leurs affixes b et c, deux points B et C de β' vérifiant les deux conditions :
a) O est barycentre de A, B, C affectés de coefficients égaux.

Similitudes directes. Rapport, angle, centre

8.1 Soit G un sous-groupe commutatif de S_n . Montrer que G ne contient que des translations, ou bien qu'il existe un point I tel que G ne contienne que des similitudes de centre I.

8.2 Soit f_0 une similitude directe donnée du plan P, de rapport k et d'angle θ . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer toutes les similitudes directes f telles que $f^n = f_0$. On pourra distinguer successivement les cas suivants :

- a) f_0 est une translation t_a avec $a \neq 0$.
- b) $f_0 = \text{id}_P$.
- c) f_0 a un point invariant unique I.

8.3 On considère un plan orienté P et f une similitude directe de P de centre I. 1° Soit M_0 et M deux points de P distincts de I, M_0 et M' leurs images par f. Montrer qu'il existe une similitude directe de centre I transformant M_0 en M et M'_0 en M' .
2° Étudier l'application g qui à tout point M de P associe l'isobarycentre G des trois points I, M, M' .

8.4 Soit P un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . À tout élément t de \mathbb{R}^* on associe l'application affine f_t de P dans P qui au point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') avec :

$$\begin{cases} x' = t \cos 2t x - t \sin 2t y \\ y' = t \sin 2t x + t \cos 2t y \end{cases}$$

1° Montrer que f_t est une similitude directe dont on donnera le centre, le rapport et l'angle.
2° a) Déterminer l'ensemble des réels t $\in \mathbb{R}^*$ tels que f_t soit une rotation.
b) Déterminer l'ensemble des réels t $\in \mathbb{R}^*$ tels que f_t soit une homothétie.

8.5 Soit f l'application de C dans C qui au nombre complexe z associe le nombre complexe Z défini par :

$$Z = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - i)$$

1° Trouver le nombre complexe ω invariant par f.
2° Soit m, M et Ω les images de z, Z, et ω dans le plan complexe. Quelle est la nature de la transformation f qui à m associe M?
3° Montrer que le triangle $\Omega m M$ est rectanglé.

- 8.6 Soit P un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère les points $I(1, 2)$, $M(2, 3)$, $M'(\sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe de centre I qui transforme M en M' .
- 8.7 Soit H l'homothétie de centre $A(1, 0)$ et de rapport -2 . r la rotation de centre $B(0, 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer les éléments caractéristiques des applications $f = r \circ H$ et $g = H \circ r$.
- 8.8 Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormé direct d'origine O . On considère les points $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$, L centre du carré $OBCA$, K milieu de (A, C) , J milieu de (A, B) , L milieu de (A, C) . Montrez qu'il existe une similitude directe f et une seule qui transforme le carré $OBCA$ en le carré $IKLJ$ (les points O, B, C et A ayant respectivement pour images I, K, L et J).
- 8.9 Reprendre la seconde question de l'exercice 8.3 en utilisant les nombres complexes.
- 8.10 Soit P un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit f l'application de P dans P qui à $M(x, y)$ associe $M'(x', y')$ définie par :
- $$\begin{cases} x' = \sqrt{3}x + y - 3 \\ y' = x - \sqrt{3}y + 3 \end{cases}$$
- 1° Soit z l'affixe de M , z' l'affixe de M' . Trouver une relation simple entre z et z' .
Montrer qu'il existe un réel k tel que, quel que soit A et B dans P , d'images A' et B' on ait : $\|A'B'\| = k \|AB\|$.
Déterminer k .
- 2° Montrer que f a un point invariant Ω et un seul que l'on déterminera.
3° Montrer qu'il existe une homothétie H de centre Ω et une droite D passant par Ω telles que : $f = H \circ s_D = s_D \circ H$ où s_D est la symétrie orthogonale par rapport à D .
- Utilisation des nombres complexes en géométrie plane
- 8.11 Soit f un plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Au point de f , de coordonnées (x, y) on associe son affixe $x + iy$. On désigne par A le point d'affixe 1.
1° Déterminer, par leurs affixes b et c , deux points B et C de f vérifiant les deux conditions :
a) O est barycentre de A, B, C affectés de coefficients égaux.
b) O est barcentre de A, B, C affectés de coefficients égaux.
- 8.1 Soit G un sous-groupe commutatif de S^1 . Montrer que G ne contient que des similitudes de centre I .
- 8.2 Soit f_0 une similitude directe donnée du plan P , de rapport k et d'angle θ . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer toutes les similitudes directes f telles que $f^n = f_0$. On pourra distinguer successivement les cas suivants :
a) f_0 est une translation t_a avec $t_a \neq 0$.
b) $f_0 = \text{id}_P$.
c) f_0 a un point invariant unique I .
- 8.3 On considère un plan orienté P et f une similitude directe de P de centre I .
1° Soit M_0 et M deux points de P distincts de I , M_0' et M' leurs images par f . Montrer qu'il existe une similitude directe de centre I transformant M_0 en M et M_0' en M' .
2° Étudier l'application g qui à tout point M de P associe l'isobarycentre G des trois points I, M, M' .
- Représentation analytique et complexe d'une similitude directe
- 8.4 Soit P un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . A tout élément t de R^2 on associe l'application affine f_t de P dans P qui au point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') avec :
- $$\begin{cases} x' = t \cos 2t x - t \sin 2t y \\ y' = t \sin 2t x + t \cos 2t y \end{cases}$$
- 1° Montrer que f_t est une similitude directe dont on donnera le centre, le rapport et l'angle.
2° a) Déterminer l'ensemble des réels $t \in R^2$ tels que f_t soit une rotation.
b) Déterminer l'ensemble des réels $t \in R^2$ tels que f_t soit une homothétie.
- 8.5 Soit f l'application de C dans C qui au nombre complexe z associe le nombre complexe Z défini par :
- $$Z = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - i)$$
- 1° Trouver le nombre complexe ω invariant par f .
2° Soit m, M et Ω les images de z, Z , et ω dans le plan complexe. Quelle est la nature de la transformation f qui à m associe M ?
3° Montrer que le triangle $\Omega m M$ est rectangle.

- 8.6 Soit P un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère les points $I(1, 2)$, $M(2, 3)$, $M'(\sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe de centre I qui transforme M en M' .
- 8.7 Soit H l'homothétie de centre $A(1, 0)$ et de rapport -2 . r la rotation de centre $B(0, 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer les éléments caractéristiques des applications $f = r \circ H$ et $g = H \circ r$.
- 8.8 Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormé direct d'origine O . On considère les points $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$, L centre du carré $OBCA$, K milieu de (A, C) , J milieu de (A, B) , L milieu de (A, C) . Montrez qu'il existe une similitude directe f et une seule qui transforme le carré $OBCA$ en le carré $IKLJ$ (les points O, B, C et A ayant respectivement pour images I, K, L et J).
- 8.9 Reprendre la seconde question de l'exercice 8.3 en utilisant les nombres complexes.
- 8.10 Soit P un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit f l'application de P dans P qui à $M(x, y)$ associe $M'(x', y')$ définie par :
- $$\begin{cases} x' = \sqrt{3}x + y - 3 \\ y' = x - \sqrt{3}y + 3 \end{cases}$$
- 1° Soit z l'affixe de M , z' l'affixe de M' . Trouver une relation simple entre z et z' .
Montrer qu'il existe un réel k tel que, quel que soit A et B dans P , d'images A' et B' on ait : $\|A'B'\| = k \|AB\|$.
Déterminer k .
- 2° Montrer que f a un point invariant Ω et un seul que l'on déterminera.
3° Montrer qu'il existe une homothétie H de centre Ω et une droite D passant par Ω telles que : $f = H \circ s_D = s_D \circ H$ où s_D est la symétrie orthogonale par rapport à D .
- Utilisation des nombres complexes en géométrie plane
- 8.11 Soit f un plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Au point de f , de coordonnées (x, y) on associe son affixe $x + iy$. On désigne par A le point d'affixe 1.
1° Déterminer, par leurs affixes b et c , deux points B et C de f vérifiant les deux conditions :
a) O est barycentre de A, B, C affectés de coefficients égaux.
b) O est barcentre de A, B, C affectés de coefficients égaux.

8.12 1° Le conjugué d'un élément z de \mathbb{C} est noté \bar{z} . Soit E l'ensemble des éléments $u + \bar{u} + iuu = 0$.

Représenter l'ensemble des images des éléments de E .

2° Dans un plan affine euclidien \mathcal{A} , on considère un triangle équilatéral ABC de centre O ($OA = OB = OC$). Soit S l'ensemble des similitudes directes s de \mathcal{A} telles que :

$s(O) = O$ et $(A, s(B), s(C))$ sont alignés.

Préciser l'ensemble décrit par $s(A)$ lorsque s décrit S .

(Exercice Bac C, Groupe 1, 1980)

8.13 1° Dans le plan complexe, on considère trois points distincts A, B, C d'affixes respectives a, b, c . Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si, et seulement si,

$$a + bj + c^2 = 0.$$

2° Le triangle ABC étant équilatéral direct, soit M un point quelconque du plan, d'affixe z . La rotation de centre M et d'angle $-\frac{3}{\pi}$ transforme le point A en A' . La rotation de centre M et d'angle $\frac{3}{\pi}$ transforme le point B en B' . Calculer les affixes de A' et de B' en fonction de a, b, c, z . Montrer que :

$$MC = MA' + MB'$$

3° Quel est l'ensemble Γ des points M du plan tels que M, A', B' soient alignés ?

Lorsque M appartient à Γ , montrer que l'une des trois distances $\|MA\|, \|MB\|, \|MC\|$ est égale à la somme des trois autres.

8.14 A Soit P un plan orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Soit f l'application de \mathbb{C}^+ dans \mathbb{C}^+ qui à z associe :

$$z' = f(z) = \frac{z^2 + 1}{2z}.$$

Soit P l'application de $P - \{O\}$ dans P qui au point $M \neq O$ d'affixe z associe le point M' d'affixe z' .

1° f est-elle surjective? injective? Montrer que f a deux points invariants. On les notera A et B .

2° Déterminer l'image par f du cercle Γ de centre O et de rayon 1.

8.15 Dans \mathbb{C} , corps des nombres complexes, on considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^2 - 4iz^2 - (6 + i)z + 3i - 1.$$

1° a) Démontrer que P admet une racine imaginaire pure, notée z_0 .
 b) En déduire les deux autres racines de P . On notera z_1 la racine de P ayant une partie réelle négative et l'on notera z_2 l'autre racine.
 2° Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 .

a) Placer M_0, M_1 et M_2 .
 b) Démontrer qu'il existe une similitude directe unique de centre M_0 qui transforme M_1 en M_2 . Donner une mesure de l'angle et le rapport de cette similitude.
 c) Soit C l'ensemble des points M du plan qui sont les centres des similitudes directes transformant M_1 en M_2 dans un rapport $\sqrt{2}$. Déterminer C et le tracer dans le plan complexe.

(Exercice Bac E, Rouen 1982)

8.16 Soit P un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{H} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On rappelle que l'affixe d'un point M de coordonnées (x, y) est le nombre complexe $z = x + iy$.
 On donne des réels r et α avec $r > 0$ et $\alpha = \frac{4}{5\pi}$ et on note n le nombre complexe de module r et d'argument α .

1° On construit les points A_n de P répondant aux conditions :

- A_0 est l'origine du repère;
- A_1 est le point d'affixe r ;
- pour tout entier n supérieur ou égal à 2, le point A_n est image de A_{n-2} par la similitude directe de centre A_{n-1} , de rapport r , dont une mesure de l'angle est α .

On note z_n l'affixe du point A_n .

a) Écrire pour tout entier n supérieur ou égal à 2 une relation entre z_n, z_{n-1} et z_{n-2} .

b) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $z_n - z_{n-1} = (-n)^{n-1} r$.

c) Déterminer l'expression de l'affixe z_n de A_n en fonction de n et de r .

Révision

3° Soit M' un point de P , autre que A ou B . Montrer que M' a deux antécédents M_1 et M_2 tels que :

$$\begin{cases} \|OM_1\| \|OM_2\| = 1 \\ \left(\frac{z_1}{z_2}, OM_1 \right) + \left(\frac{z_2}{z_1}, OM_2 \right) = 0 \quad [2\pi] \end{cases}$$

Ces résultats sont-ils encore valables si $M' = A$ ou $M' = B$? Retrouver le résultat de la question précédente.

2° a) Montrer qu'il existe une similitude directe S, et une seule, telle que :

$$A_1 = S(A_0), \quad \text{et} \quad A_2 = S(A_1).$$

Préciser les éléments caractéristiques de S.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $A_{n+1} = S(A_n)$.
On note S° l'application identique de P, et pour tout entier naturel n, on pose $S^{n+1} = S \circ S^n$. Soit $p \in \mathbb{N}$; montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_{n+p} = S^n(A_p).$$

c) Montrer que S° est une homothétie.

d) En déduire que les points A_n sont éléments d'un ensemble formé par la réunion de quatre droites que l'on précisera.

3° On suppose maintenant $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On appelle Ω le centre de la similitude S.

a) Démontrer que pour tout entier naturel n, les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}$ et $A_n \overrightarrow{A_{n+1}}$ sont orthogonaux.

b) Représenter graphiquement les points $A_0, A_1, A_2, \dots, A_9$ dans le repère orthonormé $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 4 cm).

c) Calculer $\|\overrightarrow{\Omega A_n}\|$ en fonction de n et de $\|\overrightarrow{\Omega A_0}\|$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\overrightarrow{\Omega A_n}\|$.

d) Pour tout entier naturel n, calculer :

$$L_n = \sum_{i=0}^n \|\overrightarrow{A_i A_{i+1}}\|.$$

Étudier la limite de la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$.

4° On suppose toujours que n est de module $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'argument $\alpha = \frac{5\pi}{4}$.

a) Vérifier que la similitude directe S est l'application de P dans P qui au point M d'affixe $x + iy$ associe le point M' d'affixe $x' + iy'$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x - y) \\ y' = \frac{1}{2}(x + y) + 1. \end{cases}$$

b) Soit Γ la courbe du plan P dont une équation dans \mathcal{R} est $xy = -1$. Déterminer une équation de l'image Γ' de Γ par S. Préciser la nature de Γ' .

c) Tracer les courbes Γ et Γ' dans le repère \mathcal{R} (sur le même dessin).

(Problème Bac C. Orléans-Tours. Session de remplacement 1980.)

N.B. La résolution des questions 4° b) et c) suppose quelques connaissances concernant les coniques.

RÉSOLUTION DES EXERCICES ET PROBLÈMES

8.1

Supposons qu'il existe un élément f_0 de G autre qu'une translation. La similitude f_0 admet un point invariant unique I. Si f est un élément quelconque de G, on a :

$$f(I) = f \circ f_0(I) = f_0 \circ f(I).$$

Ce qui prouve que f(I) est invariant par f_0 . Il en résulte que f(I) = I : le sous-groupe G est contenu dans l'ensemble des similitudes de centre I.

8.2

a) Une similitude f telle que $f^n = I_n$ ne peut admettre de point invariant A, (sinon on aurait $f^n(A) = A$, alors que $I_n(A) \neq A$), c'est donc une translation. Il est immédiat que $I_n^2 = I_n$ équivalent à $n = \frac{2\pi}{\theta}$. Le problème a donc dans ce cas une solution et une seule, la translation $t_{\frac{1}{2}\pi}$.

b) Une similitude f telle que $f^n = id_p$ ne peut être une translation de vecteur non nul (sinon f^n n'aurait aucun point invariant); elle admet donc un centre A (au moins). Soit k' et θ' respectivement, le rapport et l'angle de f. La similitude f^n admet A pour centre, k'^n pour rapport et $n\theta'$ pour angle. On a donc :

$$k'^n = 1 \quad \text{et} \quad n\theta' = 0 \quad [2\pi]$$

$$\text{ou} \quad k' = 1 \quad \text{et} \quad \theta' = 0 \quad \left[\frac{2\pi}{n} \right].$$

f est donc une rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi l}{n}$ avec $l \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Réciproquement, toute rotation f de centre quelconque et d'angle $\frac{2\pi l}{n}$ avec

$l \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ vérifie $f^n = id_p$.

Dans ce cas, le problème admet donc une infinité de solutions.
c) Soit I le centre de f_0 . Une similitude f telle que $f^n = f_0$ ne peut être une translation (sinon f^n aurait une infinité de points invariants ou aucun point invariant). Un point invariant par f l'est également par $f^n = f_0$ et ne peut donc être que I : la similitude f admet I comme centre unique. Soit k' le rapport de f et θ' l'angle de f. On a :

$$k'^n = k \quad \text{et} \quad n\theta' = \theta \quad [2\pi]$$

$$\text{ou} \quad k' = \sqrt[n]{k} \quad \text{et} \quad \theta' = \frac{\theta}{n} \quad \left[\frac{2\pi}{n} \right].$$

Réciproquement, toute similitude f de centre I, de rapport $\sqrt[n]{k}$ et d'angle $\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi l}{n}$ avec $l \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ vérifie $f^n = f_0$.

Le problème admet donc, dans ce cas, n solutions.

8.3

1° Soit k le rapport de f et θ son angle. On a :

$$\begin{cases} \frac{\|\overrightarrow{IM'_0}\|}{\|\overrightarrow{IM_0}\|} = \frac{\|\overrightarrow{IM'}\|}{\|\overrightarrow{IM}\|} = k \\ \widehat{(\overrightarrow{IM_0}, \overrightarrow{IM'_0})} = \widehat{(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'})} = \theta \quad [2\pi]. \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \frac{\|IM\|}{\|IM_0\|} = \frac{\|IM'\|}{\|IM'_0\|} = k' \\ (\widehat{IM_0, IM}) = (\widehat{IM'_0, IM'}) = \theta' \quad [2\pi]. \end{cases}$$

La similitude directe de centre I, de rapport k' et d'angle θ' transforme donc M_0 en M et M'_0 en M' .

2° Si f est l'homothétie de centre I et de rapport -1 , g est l'application constante : $M \mapsto I$. Écartons ce cas. Soit M_0 un point fixe de P distinct de I. Soit M un point de P distinct de I.

D'après la question précédente, il existe une similitude directe h qui transforme M_0 en M et M'_0 en M' . Comme h conserve le barycentre, le point G_0 isobarycentre de I, M_0 , M'_0 est transformé par h en l'isobarycentre G de I, M, M' .

La similitude directe h transforme donc M_0 en M et G_0 en G. Appliquant à nouveau le 1°, on en déduit qu'il existe une similitude directe de centre I qui transforme M_0 en G_0 et M en G. Autrement dit, g est la similitude directe de centre I qui transforme M_0 en G_0 .

8.4

1° Les formules qui définissent f_1 sont de la forme :

$$\begin{cases} x' = ax - by \\ y' = bx + ay \end{cases} \quad \text{avec} \quad a^2 + b^2 = r^2 \neq 0.$$

f_1 est donc une similitude directe de rapport $\sqrt{a^2 + b^2} = r$ et d'angle θ défini par :

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos 2t; \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin 2t.$$

On a donc : $\theta \equiv 2t [2\pi]$. D'autre part O est évidemment le centre de f_1 .

Remarque

On peut également voir directement que f_1 est la composée de l'homothétie de centre O et de rapport $r > 0$ par la rotation de centre O et d'angle $2t$.

2° a) f_1 est une rotation si, et seulement si, son rapport r est égal à 1.

b) f_1 est une homothétie si, et seulement si, son angle $2t$ est congru à 0 modulo π . Plus précisément :

- Si $t = k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, f_1 est l'homothétie de rapport $k\pi$.
- Si $t = k\pi + \frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{N}$, f_1 est l'homothétie de rapport $-\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.

8.5

1° ω est invariant par f si, et seulement si :

$$\begin{aligned} \omega &= (1 + i\sqrt{3})\omega + \sqrt{3}(1 - i) \\ -\omega\sqrt{3} &= \sqrt{3}(1 - i) \\ \omega &= 1 + i \end{aligned}$$

2° Comme $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, f est la similitude directe de centre Ω , de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

3° Les affixes des vecteurs \overline{mM} et $\overline{m\Omega}$ sont respectivement :

$$\begin{aligned} Z - z &= i\sqrt{3}z + \sqrt{3}(1 - i) = -i\sqrt{3}(1 + i - z) \\ \omega - z &= 1 + i - z \end{aligned}$$

$$Z - z = -i\sqrt{3}(\omega - z).$$

On a donc :
Ce qui prouve qu'on passe de Ω à M par la similitude de centre m , de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. En particulier les vecteurs \overline{mM} et $\overline{m\Omega}$ sont orthogonaux : le triangle $\Omega m M$ est rectangle en m .

8.6

On peut traiter l'exercice en utilisant les nombres complexes. La similitude cherchée a une représentation complexe de la forme :

$$(z' - 1 - 2i) = (u + iv)(z - 1 - 2i)$$

où $u + iv$ est un nombre complexe que nous allons déterminer en écrivant que $z' = \sqrt{3} + (3 + \sqrt{3})i$ lorsque $z = 2 + 3i$. On obtient :

$$u + iv = \frac{(\sqrt{3} - 1) + (1 + \sqrt{3})i}{1 + i} = \frac{[(\sqrt{3} - 1) + (1 + \sqrt{3})i](1 - i)}{2} = \sqrt{3} + i.$$

Comme $\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, la similitude cherchée a pour rapport

2 et pour angle $\frac{\pi}{6}$.

8.7

L'application H est la similitude directe de rapport 2 et d'angle π . Par suite, f et g sont des similitudes directes de rapport 2 et d'angle $+\frac{\pi}{2}$. Nous allons retrouver ce résultat et déterminer les centres en utilisant les nombres complexes.

L'homothétie H transforme le point M d'affixe z en M' d'affixe z' telle que :

$$z' - 1 = -2(z - 1)$$

$$z' = -2z + 3,$$

ou

$$z' - i = i(z - i)$$

$$z' = iz + 1 + i.$$

ou

La rotation r transforme le point M d'affixe z en M'' d'affixe z'' telle que :

$$z'' - i = i(-2z + 3) + 1 + i = -2iz + 1 + 4i.$$

Par conséquent, f transforme M d'affixe z en M' d'affixe z' telle que :

$$z' = i(-2z + 3) + 1 + i = -2iz + 1 + 4i.$$

Le point invariant de f est donc d'affixe z telle que :

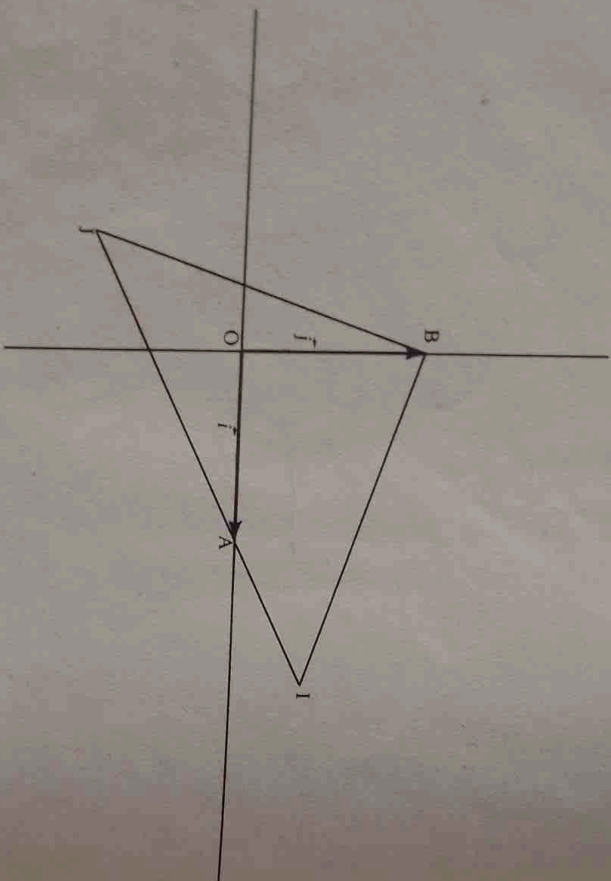
$$z = -2iz + 1 + 4i \quad \text{ou} \quad z = \frac{9 + 2i}{5}.$$

Le centre de f est donc le point I de coordonnées $\left(\frac{9}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

On procède de même pour g :

$$z' = -2(iz + 1 + i) + 3 = -2iz + 1 - 2i$$

Le centre de g est donc le point J de coordonnées $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$.



Remarque

On a $r'(f) = 1$ et $H(f) = J$. En effet,

$$(H \circ r')(H(f)) = H((r' \circ H)(f)) = H(f)$$

ce qui prouve que $H(f)$ est le centre de g .

8.8

Soit f une similitude directe répondant au problème. Le rapport de f est $\frac{\|IK\|}{\|OB\|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et l'angle de f est $(\widehat{OB, IK}) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$.

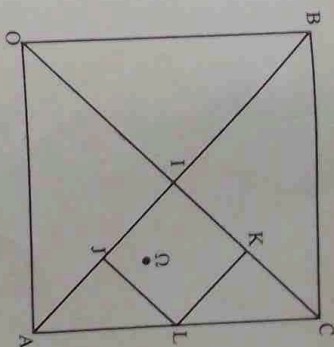
Si on appelle ω l'affixe de son centre Ω on a donc (en appelant z et z' les affixes de M et de $M' = f(M)$) :

$$z' - \omega = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} (z - \omega) = \frac{1}{4} (1 - i)(z - \omega)$$

En écrivant que $f(O) = 1$, on détermine ω :

$$\omega = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$$

Le point Ω a donc pour coordonnées $\frac{4}{5}$ et $\frac{2}{5}$.



Réciproquement, la similitude directe de centre Ω de rapport $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ et d'angle

$$-\frac{\pi}{4} \text{ transforme } O \text{ en } I, B \text{ en } K \text{ et } A \text{ en } J \text{ puisque}$$

$$\frac{\|IJ\|}{\|OA\|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ et } (\widehat{OA, IJ}) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

f transforme donc le quatrième sommet du carré AOBC en quatrième sommet du carré JKLI, c'est-à-dire C en L .

8.9

La similitude f peut être représentée sous la forme $z \mapsto az$ où a est un nombre complexe non nul.

L'isobarycentre G des points $I, M, f(M)$ a une affixe Z vérifiant

$$Z = \frac{z + az^2}{3} = \frac{a+1}{3} z$$

D'où la discussion suivante :

- Si $a = -1$, g est l'application constante $M \mapsto O$.
- Si $a \neq -1$, g est la similitude de centre I associée au nombre complexe non nul $\frac{a+1}{3}$.

8.10

1° On trouve

$$z' = x' + iy' = (\sqrt{3} + i)(x - iy) - 3 + 3i$$

$$z' = (\sqrt{3} + i)z - 3 + 3i$$

Si a, b, a', b' sont les affixes respectives de A, B, A', B' , on a

$$\|A'B'\| = |b' - a'| = |\sqrt{3} + i| |b - a| = 2 \|AB\|$$

La propriété demandée est vérifiée avec $k = 2$.

2° Le point $\Omega(x, y)$ est invariant si, et seulement si :

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + y - 3 = x \\ x - \sqrt{3}y + 3 = y \end{cases} \iff \begin{cases} (\sqrt{3} - 1)x + y = 3 \\ x - (\sqrt{3} + 1)y = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$$

3° L'endomorphisme φ associé à f a pour matrice dans la base (f, f') :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

La matrice :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

est celle d'une symétrie vectorielle orthogonale σ_a par rapport à une droite Δ qui est l'ensemble des vecteurs invariants de σ_a . La droite Δ a donc pour équation :

$$(\sqrt{3}-2)x + y = 0.$$

Si h est l'homothétie de rapport 2, on a $\varphi = h \circ \sigma_a = \sigma_a \circ h$. Soit alors D la droite passant par Ω et de direction Δ . H l'homothétie de rapport 2 et de centre Ω . Les applications affines $f, H \circ \sigma_a, \sigma_a \circ H$ ont toutes trois φ pour endomorphisme associé et Ω pour point fixe. On a donc :

$$f = H \circ \sigma_a = \sigma_a \circ H.$$

Remarque
 f est appelée similitude indirecte ou inverse. Comme une similitude directe, f multiplie les distances par une constante k , mais f change le sens des angles orientés, c'est-à-dire que si A, B, C sont trois points distincts de P d'image A', B', C' par f , on a :

$$(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}) = -(\overline{A'B}, \overline{A'C}) \quad (2\pi).$$

1° Les conditions imposées sont équivalentes à :

$$(S) \begin{cases} b+c+1=0 \\ |b-1|=|c-1|=2|b-c|. \end{cases}$$

Supposons que (b, c) soit solution du système. On a $c = -b-1$, donc ce qui prouve que B est équidistant de A et du point A' d'affixe -2 . La partie réelle de b est donc $-\frac{1}{2}$. Posons $b = -\frac{1}{2} + iy$. On a

$$|b-1| = 2|b-c| = 2|2b+1| \quad \left| -\frac{3}{2} + iy \right|^2 = 4|2iy|^2$$

ou

$$\frac{9}{4} + y^2 = 16y^2$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{15}}{10} \quad \text{avec } \varepsilon \in \{-1, +1\}.$$

On trouve donc : $b = -\frac{1}{2} + \varepsilon \frac{\sqrt{15}}{10} i$ et $c = -\frac{1}{2} - \varepsilon \frac{\sqrt{15}}{10} i$.

Réécrit-on, il est facile de voir que ces nombres vérifient le système

$$(S) \begin{cases} \overline{AB} = |a| \overline{AB} = |a| \overline{AC} = |a| \overline{BC} = 2|a| \overline{BC} = 2 \overline{BC} \\ \overline{AB} = |a| \overline{AB} = |a| \overline{AC} = |a| \overline{BC} = 2|a| \overline{BC} = 2 \overline{BC} \end{cases}$$

De sorte que les points B et C cherchés ont pour affixes :

$$a \left(-\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon \sqrt{15}}{10} i \right) \quad \text{et} \quad a \left(-\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon \sqrt{15}}{10} i \right).$$

1° Posons $u = x + iy$. On a les équivalences successives :

$$\overline{uu} + u + \overline{u} = 0 \iff x^2 + y^2 + 2x = 0 \iff (x+1)^2 + y^2 = 1.$$

L'ensemble des images de E dans le plan complexe est le cercle (Γ) centre en $(-1, 0)$ et de rayon 1.

2° Soit a l'affixe (non nulle) de A . L'énoncé fait jouer le même rôle aux deux points B et C , on peut donc supposer, par exemple, que le triangle ABC est équilatéral direct. L'affixe de B est alors ja et celle de C est $j^2 a$. Une similitude de centre O est représentée par $z \mapsto mz$ où m est un nombre complexe non nul. Les vecteurs $\overline{As(B)}$ et $\overline{As(C)}$ ont respectivement pour affixes $a(mj-1)$ et $a(mj^2-1)$.

- Si $n = j$, le vecteur $\overline{As(C)}$ est nul et $s \in S$.
- Si $n \neq j$, le vecteur $\overline{As(C)}$ est non nul, les points $A, s(B), s(C)$ sont alignés si, et seulement si :

$$\frac{a(mj-1)}{a(mj^2-1)} \in \mathbb{R}$$

ce qui équivaut à :

$$(mj-1)(mj^2-1) - (mj^2-1)(mj-1) = 0$$

soit, en développant :

$$m^2 + n + \overline{n} = 0. \quad (1)$$

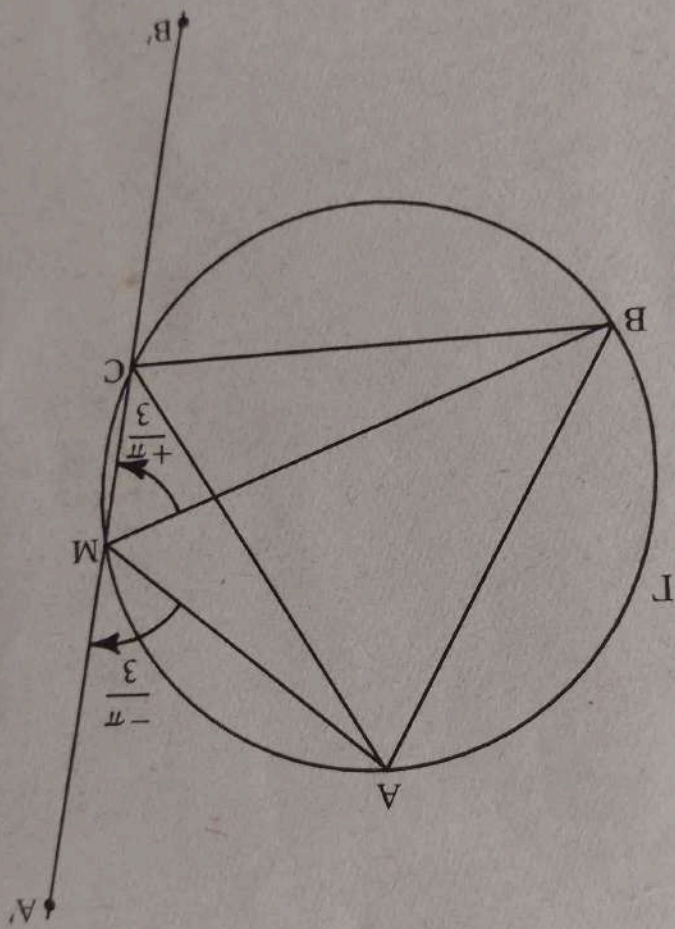
Le nombre complexe f , écarté en début de calcul, vérifie (1). Donc $s \in S$ équivaut à $n \in E$ et $n \neq 0$.

L'ensemble des points $s(A)$ pour affixe ua . Par conséquent, l'ensemble des points $s(A)$ quand s décrit S est le cercle déduit de (Γ) par la similitude $z \mapsto az$, privé du point O .

1° Le triangle ABC est équilatéral direct si, et seulement si, la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ transforme C en A , ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} a-b &= e^{i\frac{2\pi}{3}}(c-b) = -j^2(c-b) \\ a-b(1+j^2) + c^2 &= 0 \\ a+bj+cj^2 &= 0. \end{aligned}$$

8.12



Remarque. Cette égalité équivaut encore à $af + bj^2 + c = 0$ et $af^2 + b + cj = 0$.

2° Le vecteur $\overline{MA'}$ a pour affixe :
 $a' - z = e^{-\frac{\pi}{2}}(a - z) = -j(a - z) = -aj + zj$
 Le vecteur $\overline{MB'}$ a pour affixe :
 $b' - z = e^{\frac{\pi}{2}}(b - z) = j^2(b - z) = -b^2 + zj^2$
 On en déduit que le vecteur $\overline{MA'} + \overline{MB'}$ a pour affixe :
 $-aj + zj - b^2 + zj^2 = -aj - b^2 + z(j + j^2) = c - z$
 d'où :
 $\overline{MA'} + \overline{MB'} = \overline{MC}$
 3° Si M est en A ou en B, les trois points M, A', B' sont alignés, si M ≠ A et M ≠ B, on a :
 $\overline{MA'}, \overline{MA}, \overline{MB}$ alignés $\Leftrightarrow (\overline{MA'}, \overline{MA}) + (\overline{MA}, \overline{MB}) + (\overline{MB}, \overline{MB}) = 0 \quad [2\pi]$
 $\Leftrightarrow (\overline{MA}, \overline{MB}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$
 On sait que cette égalité équivaut au fait que M appartient au cercle Γ passant par A et B et contenant C (car $(\overline{CA}, \overline{CB}) \approx \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$), A et B étant exclus.

8.14

1° Soit M' un point de P d'affixe z' . Un point M d'affixe z ($z \neq 0$) est antécédent de M' par F si, et seulement si :

$$z' = \frac{z^2 + 1}{2z} \Leftrightarrow z^2 - 2z'z + 1 = 0. \quad (1)$$

L'équation (1), du second degré, admet toujours deux racines (distinctes ou non), l'application F est donc surjective.
 Si $z^2 \neq 1$, le discriminant de (1) n'est pas nul : le point M' admet deux antécédents distincts, l'application F n'est donc pas injective.
 Enfin, un point M d'affixe z est invariant si, et seulement si :

$$z = \frac{z^2 + 1}{2z} \Leftrightarrow z^2 = 1.$$

On trouve donc deux points invariants A et B d'affixes respectives 1 et -1.
 2° Lorsque θ décrit R, l'image de $z = e^{i\theta}$ décrit le cercle Γ. On a :

$$f(e^{i\theta}) = \frac{e^{i2\theta} + 1}{2e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos \theta$$

Ce qui prouve que l'image de Γ par F est le segment [A', A].
 3° Reprenons l'équation (1). Appelons z_1 et z_2 les deux racines de cette équation. On sait que :

$$z_1 + z_2 = 2z', \quad z_1 z_2 = 1.$$

L'égalité $\frac{z_1 + z_2}{2} = z'$ montre que M' est le milieu de (M₁, M₂).
 L'égalité $|z_1| |z_2| = 1$ montre que l'on a :

$$\|OM_1\| \|OM_2\| = 1$$

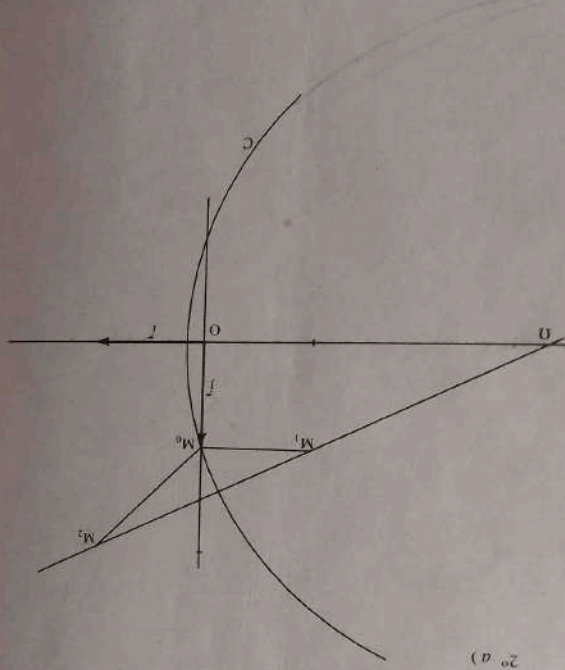
et $\arg z_1 + \arg z_2 = 0 \quad [2\pi] \Leftrightarrow (\overline{z_1}, \overline{OM_1}) + (\overline{z_2}, \overline{OM_2}) = 0 \quad [2\pi]$
 Ces propriétés sont encore vraies lorsque M' = A (on a alors M₁ = M₂ = A) ou M' = B.
 Supposons que le point M₁ décrive Γ. Le point M₂ a pour affixe $z_2 = \frac{1}{z_1} = \overline{z_1}$.
 L'ensemble cherché est le milieu de (M₁, M₂). Il décrit donc le segment [A, A'].
 Le point M' image de M₁ est le milieu de (M₁, M₂). Il décrit donc le segment [A, A'].
 8.15

1° (a) Cherchons une racine imaginaire pure de P en posant $z_0 = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$.

$$P(z_0) = 0 \Leftrightarrow (iy)^2 - 4i(iy)^2 - (6 + i)iy + 3i - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 1 = 0 \\ -y^2 + 4y^2 - 6y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

b) Puisque $\frac{\|M_0 M_2\|}{\|M_0 M_1\|} = \sqrt{2}$ et $(M_0 M_1, M_0 M_2) = -\frac{3\pi}{4}$ [2 π], la similitude directe de centre M_0 , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$ transforme M_1 en M_2 . C'est évidemment la seule.

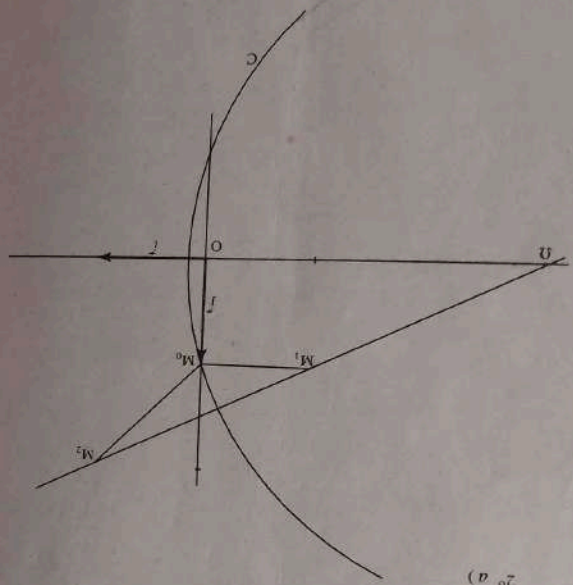


2° a) On constate que $y = 1$ annule à la fois la partie réelle et la partie imaginaire de P. Le nombre $z_0 = i$ est racine de P. On en déduit que P va posséder une factorisation de la forme :
 $P(z) = (z - i)(z^2 + \alpha z + \beta)$
 On détermine α et β par identification :
 $\alpha = -3i; \beta = -3 - i$
 On cherche ensuite les racines du trinôme $z^2 - 3iz - 3 - i$:
 $\Delta = -9 + 12 + 4i = 3 + 4i = (2 + i)^2$
 Les deux autres racines de P sont donc :
 $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = 1 + 2i$.

8.16 1° a) Puisque la similitude de centre A_{n-1} , de rapport r et d'angle α transforme A_{n-2} en A_n , on a :
 $z_n - z_{n-1} = r e^{i\alpha} (z_{n-2} - z_{n-1}) = n(z_{n-2} - z_{n-1})$
 b) Cette égalité peut encore s'écrire :
 $z_n - z_{n-1} = n(z_{n-1} - z_{n-2})$
 On peut alors démontrer la formule demandée par récurrence sur n (en fait pour $n \geq 1$).
 • Pour $n = 1$, on a bien $z_1 - z_0 = i = (-n)^0 i$.
 • Si la formule est vraie au rang $n - 1$, on a
 $z_n - z_{n-1} = -n(z_{n-1} - z_{n-2}) = (-n)(-n)^{n-2} i = (-n)^{n-1} i$.
 c) On en déduit par une récurrence immédiate :
 $\forall n \geq 1, z_n = i(1 + (-n) + \dots + (-n)^{n-1})$
 Comme $-n$ est différent de 1, cette expression est encore égale à
 $z_n = i \frac{1 - (-n)^n}{1 - (-n)} = i \frac{1 + n}{1 + n}$
 2° a) Nous déterminons S par sa représentation complexe, autrement dit, nous cherchons des nombres complexes a et b tels que S soit représentée par $z \mapsto az + b$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est :
 $\begin{cases} f = b \\ i(1-n) = at + b \\ a = -n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f = b \\ a = -n \end{cases}$
 On en déduit l'existence et l'unicité de S, qui est représentée par :
 $z \mapsto -nz + i$
 S a pour rapport $|n| = r$, pour angle de mesure arg $a = \frac{4}{\pi}$ [2 π], pour centre le point Ω d'abscisse ω , telle que :
 $\omega = -n\omega + i \Leftrightarrow \omega = \frac{i}{1+n}$
 b) Pour $n = 0$, et $n = 1$, on a, par définition $A_1 = S(A_0)$ et $A_2 = S(A_1)$.

c) Un point M du plan est centre d'une similitude directe transformant M_1 en M_2 dans le rapport $\sqrt{2}$ si, et seulement si, $\frac{\|M M_2\|}{\|M M_1\|} = \sqrt{2}$.
 En appelant (x, y) les coordonnées de M, ceci est successivement équivalent à :
 $\|M M_2\|^2 = 2 \|M M_1\|^2$
 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2[(x + 1)^2 + (y - 1)^2]$
 $x^2 + y^2 + 6x - 1 = 0$
 $(x + 3)^2 + y^2 = 10$
 C'est donc le cercle de centre $\Omega(-3, 0)$ et de rayon $\sqrt{10}$. Notons que ce cercle est centré sur la droite $(M_1 M_2)$ et passe par M_0 .

b) Puisque $\|M_0 M_2\| = \sqrt{2}$ et $(M_0 M_1, M_0 M_2) = \frac{3\pi}{4}$ [2 π], la similitude directe de centre M_0 , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$ transforme M_1 en M_2 . C'est évidemment la seule.



2° a) On constate que $y = 1$ annule à la fois la partie réelle et la partie imaginaire de P . Le nombre $z_0 = 1$ est racine de P .
 On en déduit que P va posséder une factorisation de la forme :
 $P(z) = (z - 1)(z^2 + \alpha z + \beta)$
 On détermine α et β par identification :
 $\alpha = -3i; \beta = -3 - i$
 On cherche ensuite les racines du trinôme $z^2 - 3iz - 3 - i$:
 $\Delta = -9 + 12 + 4i = 3 + 4i = (2 + i)^2$
 Les deux autres racines de P sont donc :
 $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = 1 + 2i$.

8.16 1° a) Puisque la similitude de centre A_{n-1} , de rapport r e d'angle α transforme A_{n-2} en A_n , on a :
 $z_n - z_{n-1} = r e^{i\alpha} (z_{n-2} - z_{n-1}) = n(z_{n-2} - z_{n-1})$
 b) Cette égalité peut encore s'écrire :
 $z_n - z_{n-1} = n(z_{n-1} - z_{n-2})$
 On peut alors démontrer la formule demandée par récurrence sur n (en fait pour $n \geq 1$).
 • Pour $n = 1$, on a bien $z_1 - z_0 = t = (-n)^0 t$.
 • Si la formule est vraie au rang $n - 1$, on a
 $z_n - z_{n-1} = -n(z_{n-1} - z_{n-2}) = (-n)(-n)^{n-2} t = (-n)^{n-1} t$.
 c) On en déduit par une récurrence immédiate :
 $\forall n \geq 1, z_n = t(1 + (-n) + \dots + (-n)^{n-1})$
 Comme $-n$ est différent de 1, cette expression est encore égale à
 $z_n = t \frac{1 + n}{1 - (-n)^n} = t \frac{1 + n}{1 + (-1)^n n^n}$
 2° a) Nous déterminons S par sa représentation complexe, autrement dit, nous cherchons des nombres complexes a et b tels que S soit représentée par $z \mapsto az + b$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est :
 $\begin{cases} t(1-n) = at + b \\ t = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -n \\ b = t \end{cases}$
 On en déduit l'existence et l'unicité de S , qui est représentée par :
 $z \mapsto -nz + t$
 Sa pour rapport $|n| = r$, pour angle de mesure $\arg a = \frac{4}{\pi} [2\pi]$, pour centre le point Ω d'affixe ω , telle que :
 $\omega = -na + t \Leftrightarrow \omega = \frac{1+n}{1} t$
 b) Pour $n = 0$, et $n = 1$, on a, par définition $A_n = S$.

c) Un point M du plan est centre d'une similitude directe transformant M_1 en M_2 dans le rapport $\sqrt{2}$ si, et seulement si,
 $\frac{\|M M_2\|}{\|M M_1\|} = \sqrt{2}$.
 En appelant (x, y) les coordonnées de M , ceci est successivement équivalent à :
 $\|M M_2\|^2 = 2 \|M M_1\|^2$
 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2[(x + 1)^2 + (y - 1)^2]$
 $x^2 + y^2 + 6x - 1 = 0$
 $(x + 3)^2 + y^2 = 10$
 C est donc le cercle de centre $\Omega(-3, 0)$ et de rayon $\sqrt{10}$. Notons que ce cercle est centré sur la droite $(M_1 M_2)$ et passe par M_0 .

b) L'application réciproque S^{-1} est définie par les formules suivantes :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x+y) \\ y' = \frac{1}{2}(x-y) \end{cases}$$

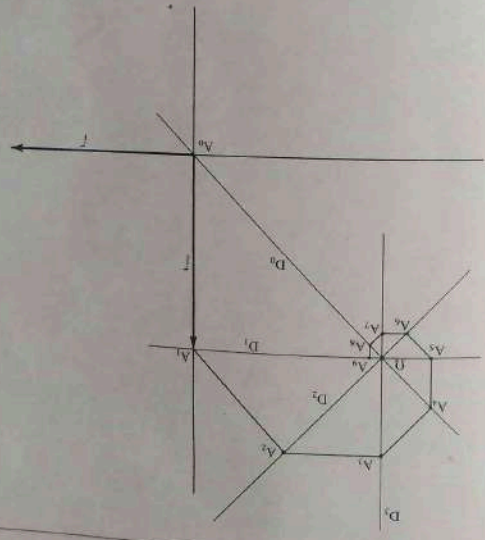
En posant $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, on trouve :

4° a) S est définie par $z \mapsto z' = -uz + t = \frac{1}{2}(1+i)z + \frac{1}{2}(1-i)$

$$L_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \right\| = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1} = 2 + \sqrt{2}$$

On en déduit :



Puisque $0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, la suite $(\| \Omega A_n \|)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
 On a donc :
 $L_n = \sum_{k=0}^{n-1} \| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \| = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$

c) ΩA_n est le transformé de ΩA_0 par la similitude S^n . On a donc :
 $\| \Omega A_n \| = |n| \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \right\|$
 b) Voir figure page suivante.

Il est donc immédiat de vérifier que ΩA_1 et $A_0 A_1$ sont orthogonaux. Comme une similitude conserve l'orthogonalité, les deux vecteurs $S^n(\Omega A_1)$ et $S^n(A_0 A_1) = A_n A_{n+1}$ sont également orthogonaux.

$$\omega = \frac{1+n}{1} = \frac{1}{1} = 1-1$$

3° a) Ω a ici pour affixe :

On voit de même que tous les points $A_1, A_2, \dots, A_{4p+1}, \dots$ sont sur la droite D_1 définie par Ω et A_1 , tous les points $A_2, A_3, \dots, A_{4p+2}, \dots$ sont sur la droite D_2 définie par Ω et A_2 , enfin, tous les points $A_3, A_4, \dots, A_{4p+3}, \dots$ sont sur la droite D_3 définie par Ω et A_3 .

On a ainsi épuisé tous les points A_n qui sont donc tous éléments de $D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3$.

d) D'après ce qui précède, on a :
 $A_4 = H(A_0), A_8 = H^2(A_0), \dots, A_{4p} = H^p(A_0), \dots$
 Ce qui prouve que les points $A_0, A_4, A_8, \dots, A_{4p}, \dots$ sont tous sur la droite D_0 définie par Ω et A_0 .

c) S^r est la similitude de rapport r et d'angle $4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi$, c'est-à-dire l'homothétie de rapport $-r$. Appelons H cette homothétie.

Puis, $A_n = S^n(A_0), A_{n+4p} = S^{n+4p}(A_0) = S^n(S^{4p}(A_0)) = S^n(A_p)$.
 On en déduit, par une récurrence immédiate qui est l'affixe de $A_{n+1} : S(A_n) = A_{n+1}$.

$$-n \left(\frac{1+n}{1+(-1)^{n+1}n} \right) f + i = \left(\frac{1+n}{1+(-1)^{n+2}n} \right) f$$

Pour $n \geq 2, S(A_n)$ a pour affixe :

9 | Isométries de l'espace

On se place dans l'espace E , de direction E , de direction E . Tous les repères utilisés sont orthogonaux.

- Isométries vectorielles et isométries affines

Théorème et définition

On appelle **isométrie vectorielle** de E toute application φ de E dans E vérifiant l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :

- (1) φ est un endomorphisme conservant la norme.
- (2) φ est une application conservant le produit scalaire.
- (3) φ est un endomorphisme tel qu'il existe une base orthonormée ayant pour image une base orthonormée.

Propriété

Une application φ de E dans E est une isométrie vectorielle involutive si, et seulement si, φ est une symétrie vectorielle orthogonale.

Théorème et définition

On appelle **isométrie affine** de E (ou isométrie de E) toute application f de E dans E vérifiant l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

- (1) f est une application conservant les distances.
- (2) f est une application affine dont l'endomorphisme associé est une isométrie vectorielle de E .

Exemples

- Translation.
- Symétrie orthogonale s_p par rapport à un plan.
- Symétrie orthogonale s_D par rapport à une droite, encore appelée demi-tour ou retournement d'axe D .
- Symétrie centrale s_A par rapport au point A .

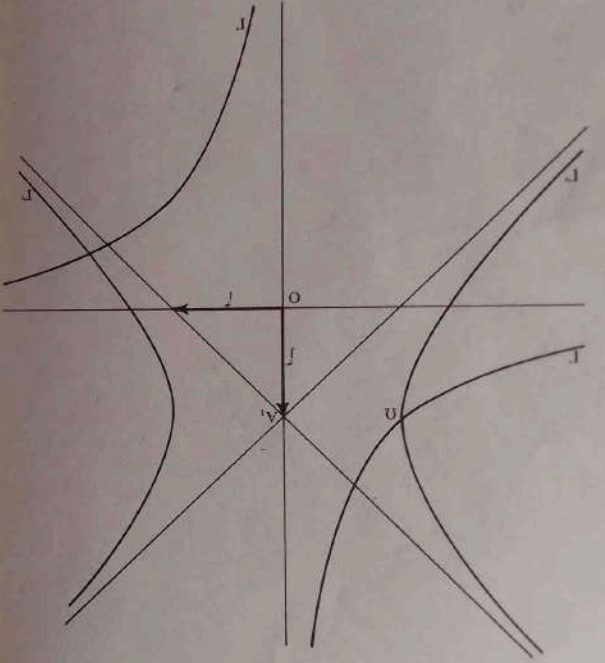
Propriétés

- Les isométries possèdent toutes les propriétés des applications affines.
- Les isométries conservent le produit scalaire, l'orthogonalité.
- L'ensemble I des isométries, muni de la composition des applications, est un groupe non commutatif.

On a alors les équivalences suivantes :

- $M \in T^*$ $\Leftrightarrow M = S^{-1}(M') \in T$
- $\Leftrightarrow y'^2 - x'^2 - 2y' = -2$
- $\Leftrightarrow (y' - 1)^2 - x'^2 = -1$

On reconnaît en T^* une hyperbole équilatère centrée au point $A_1(0, 1)$ et dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices des axes.



c)

Détermination analytique

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de E et f l'application affine : $M(x, y, z) \mapsto M'(x', y', z')$ définie par :

$$\begin{cases} x' = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + x_0 \\ y' = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + y_0 \\ z' = \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + z_0 \end{cases}$$

Pour que f soit une isométrie de E , il faut et il suffit que

$$\begin{cases} \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 = \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2 = \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^2 = 1 \\ \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{32} = \alpha_{11}\alpha_{13} + \alpha_{21}\alpha_{23} + \alpha_{31}\alpha_{33} = 0 \\ \alpha_{12}\alpha_{13} + \alpha_{22}\alpha_{23} + \alpha_{32}\alpha_{33} = 0 \end{cases}$$

□ Isométries de E laissant invariant un point donne

Théorème

Toute isométrie de E ayant un point invariant A est l'identité ou une symétrie orthogonale par rapport à un plan passant par A ou la composée de deux ou trois symétries orthogonales par rapport à des plans passant par A .

Exemples

- Le demi-tour d'axe D est la composée des symétries orthogonales par rapport à deux plans perpendiculaires contenant D . Ces deux symétries commutent.
- La symétrie centrale par rapport au point A est la composée des symétries orthogonales par rapport à trois plans deux à deux perpendiculaires et contenant A . Ces trois symétries commutent entre elles.

□ Rotation de E

Définition

On appelle **rotation** de E la composée de deux symétries orthogonales par rapport à deux plans ayant une droite en commun.

Exemples

L'identité de E , les demi-tours sont des rotations.

Propriété

Supposons E orienté. Une rotation de E conserve le sens des repères. (Une symétrie orthogonale par rapport à un plan change le sens des repères.)

Théorème

Une application affine f de E dans E est une rotation si, et seulement si, il existe une droite D et un plan Q orthogonal à D , coupant D en A , tels que :

- (1) D est stable par f et la restriction de f à D est l'identité de D .
- (2) Q est stable par f et la restriction de f à Q est une rotation de centre A .

Théorème et définition

L'ensemble des points invariants d'une rotation $r = s \circ s'$, autre que l'identité, est la droite $D = P \cap P'$. Cette droite est appelée **axe de la rotation**. Réciproquement, toute isométrie de E dont l'ensemble des points invariants est une droite D est une rotation, autre que l'identité, d'axe D . On convient que toute droite de E est axe de la rotation identité.

Angle d'une rotation

Soit r une rotation, autre que l'identité, d'axe D , et Q un plan orthogonal à D . Le plan Q est stable par r . La restriction r de r à Q est une rotation de Q dont l'endomorphisme associé est noté ρ . L'angle de ρ est appelé **angle de la rotation**. Choisissons une orientation de D (c'est-à-dire un vecteur unitaire \vec{u} de D). Q est alors orienté ainsi : une base orthonormée (\vec{u}, \vec{v}) de Q est directe si, et seulement si, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe de E . On appelle alors **mesures de l'angle de r** , les mesures θ de l'angle de ρ dans le plan orienté Q .

L'orientation de E ou de D . Les mesures de r sont changées en leurs opposées quand on change l'orientation de E ou de D . Si \vec{u} est un vecteur unitaire orthogonal à \vec{w} , les mesures θ de r sont déterminées (modulo 2π) par

$$\vec{u} \cdot \rho(\vec{u}) = \cos \theta \quad \text{et} \quad \vec{v} \wedge \rho(\vec{u}) = \sin \theta \vec{w}.$$

Exemples

Les mesures d'un demi-tour sont les nombres $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (Ce sont les seuls cas particuliers où les mesures sont indépendantes des orientations choisies.)

Décomposition d'une rotation

Toute rotation d'axe D est la composée, d'une infinité de façons, de deux symétries orthogonales par rapport à des plans passant par D . Le choix de l'un de ces plans est arbitraire.

□ Composition d'isométries de E

Composition de deux symétries orthogonales par rapport à des plans parallèles
La composée $s \circ s'$ de deux symétries orthogonales par rapport à deux plans parallèles P et P' est la translation $t_{\vec{p}}$ où \vec{p} est le vecteur orthogonal à la direction de P et P' et tel que $t_{\vec{p}}(P) = P'$. Réciproquement, toute translation de E est la composée, d'une infinité de manières, de deux symétries orthogonales par rapport à des plans parallèles. Le choix de l'un de ces plans est arbitraire.

Le groupe des rotations d'axe donné
L'ensemble des rotations d'axe donné,
applications, est un groupe commutatif,
muni de la composition des

Composition de deux rotations d'axes parallèles distincts
Soit D_1 et D_2 deux droites parallèles de l'espace E . On suppose E orienté
ainsi que $D_1 = \overline{D_2}$. Soit r_1 (resp. r_2) la rotation d'axe D_1 (resp. D_2) et d'angle
 θ_1 (resp. θ_2).

- Si $\theta_1 + \theta_2 = 0 [2\pi]$, $r_2 \circ r_1$ est une translation de vecteur orthogonal à D_1 et D_2 et d'angle $\theta_1 + \theta_2$.
- Si $\theta_1 + \theta_2 \neq 0 [2\pi]$, $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'axe D parallèle à D_1 et D_2 et

Composition de deux rotations d'axes concourants
Soit r_1 et r_2 deux rotations d'axes respectifs D_1 et D_2 se coupant en A . La
composition $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'axe D passant par A .

Composition d'une translation et d'une rotation

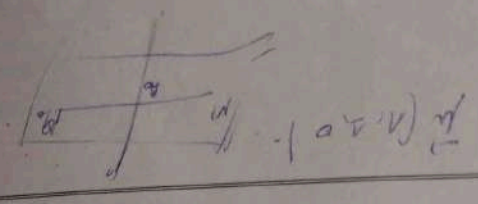
- Cas particulier
La composée d'une translation et d'une rotation est une rotation d'axe D , le vecteur de la
translation étant orthogonal à D , est une rotation de même angle et d'axe
parallèle à D .
- Cas général
La composée d'une translation et d'une rotation se met, d'une façon unique,
sous la forme :

$$r' \circ t' = t' \circ r'$$

le vecteur de la translation t' appartenant à la direction de l'axe de la
rotation r' .

L'application $r' \circ t' = t' \circ r'$ est appelée un **vissage**. L'axe, l'angle, le vecteur
du vissage sont respectivement l'axe de r' , l'angle de r' , le vecteur de t' .

Si le vecteur de t' n'est pas nul, le vissage $r' \circ t'$ n'a aucun point invariant.



9.1. **Isométries affines**
On considère l'espace E rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On
désigne par f l'application affine de E dans E qui au point $M(x, y, z)$
associe le point $M'(x', y', z')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y + \frac{5}{2}z + 2 \\ y' = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}z + 1 \\ z' = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z - 1 \end{cases}$$

1° Montrer que f est une isométrie de E .

2° Montrer que f est involutive.

3° Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

4° Donner la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.

9.2. On considère l'espace E rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Définir analytiquement le demi-tour f d'axe D d'équations :

$$y = x + 1; \quad z = 0$$

Soit P le plan d'équation $y = z$. Soit D_1 la droite d'équations $x = y = z$.
Déterminer $P' = f(P)$ et $D_1' = f(D_1)$.

9.3. **Rotations et vissages**
Dans l'espace E orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
on considère l'application f qui au point $M(x, y, z)$ associe le point
 $M'(x', y', z')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z + 2 \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z \end{cases}$$

1° Montrer que f est une isométrie.

2° Montrer que f est une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle.

9.4. Soit E l'espace orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On définit l'application f de E dans E qui au point $M(x, y, z)$ associe le

On désigne par D la droite vectorielle de E dont \vec{e}_1 est une base et par P le Plan vectoriel de E orthogonal à D.

Soit \vec{e}_1 et \vec{e}_2 les vecteurs de E définis par :

$$\vec{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j}) \quad \text{et} \quad \vec{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j}).$$

Soit \vec{e} l'espace, E l'espace vectoriel orienté associé à \vec{e} . Un repère cartésien orthonormé direct de \vec{e} est $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

9.9 Révision

(D'après problème Bac C, Sport - Étude 1982.)

$F = s_1 \circ s_2$.
 a) R est la symétrie orthogonale par rapport à L (demi-tour d'axe L).
 Montrer qu'il existe une et une seule symétrie orthogonale par rapport à une droite L, à déterminer, telle que

$$\begin{cases} z = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

b) T est la translation de vecteur \vec{u} . Soit $F = T \circ R$. Donner la nature de F et ses éléments caractéristiques.

c) Soit L la droite d'équations

d) R est l'application affine ayant même endomorphisme associé que r et telle que $R(C) = C$. Montrer que R est une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle.

e) Soit C et C' les points de coordonnées respectives (5, 0, 1) et (-3, 2, 1).

2° s_2 est le demi-tour par rapport à la droite passant par O et dirigée par \vec{f} . Caractériser l'application $r = s_2 \circ s_1$.

3° Soit C et C' les points de coordonnées respectives (5, 0, 1) et (-3, 2, 1).

Montrer que $s_3 = s_2 \circ s_1$ est une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle.

4° Soit E l'espace orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. s_1 et s_2 sont les demi-tours par rapport aux droites passant par O et dirigées respectivement par

$$\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{k}$$

Composition de demi-tours

a) Déterminer l'axe et l'angle de R.

b) Montrer qu'il existe une rotation R et une seule transformation Oz en Oy' .

c) Soit O' le point de coordonnées (1, 1, 0) et Oy' la demi-droite : $Oy' = \{M \in E : \exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{OM} = \lambda \vec{f}\}$.

d) Déterminer l'ensemble des axes des rotations r transformant Oz en Oy' .

e) Soit r une rotation transformant Oz en Oy' . Montrer que $r(O) = O$.

9.7 On considère l'espace E orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note Oy, Oz les demi-droites d'origine O et dirigées par \vec{i}, \vec{k} .

$$Oy = \{M \in E : \exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{OM} = \lambda \vec{i}\}$$

$$Oz = \{M \in E : \exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{OM} = \lambda \vec{k}\}$$

En donner les éléments caractéristiques.

3° Montrer qu'il existe un vissage f unique tel que :

$$f(A) = B, f(B) = C, f(C) = A.$$

Déterminer l'ensemble D des points équidistants de A, B et C.

Montrer qu'ils ne dépendent pas du choix de α . Donner une explication géométrique.

$$P_1 = \{M \in E \mid d(M, A) = d(M, B)\}$$

$$P_2 = \{M \in E \mid d(M, B) = d(M, C)\}$$

$$P_3 = \{M \in E \mid d(M, C) = d(M, A)\}$$

2° Soit P_1, P_2, P_3 les trois plans définis par :

Quelle est la nature du triangle ABC? En déduire celle du triangle A'B'C.

$$A' = t_1(A), B' = t_2(B), C' = t_3(C)$$

1° Soit a un réel strictement positif et A, B, C les points de coordonnées respectives dans le repère $\mathcal{R} : (a, 0, 0), (0, a, 0), (0, 0, a)$. On pose

$$\vec{u} = \alpha(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}), \alpha \in \mathbb{R}.$$

translation de vecteur \vec{u} ou

Soit E l'espace orienté rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On appelle d la distance euclidienne de E et t_1 la

2° Que peut-on dire de $g = r \circ t$?

a) par un raisonnement analytique;

b) par un raisonnement géométrique.

éléments caractéristiques :

1° Quelle est la nature de la transformation f = t o r? Préciser ses

le point A(0, -2, 2) et par t la translation de vecteur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

On désigne par r la rotation d'axe D dans laquelle le point O a pour image le point H de coordonnées (0, 0, 2).

Soit D la droite de E dont un vecteur directeur est \vec{f} et qui passe par le point D(1, 1, 1).

L'espace E orienté est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

caractéristiques.

Montrer que f est un vissage dont on déterminera les éléments

$$\begin{cases} x' = -z + 2 \\ y' = -x + 1 \\ z' = y - 1 \end{cases}$$

point $M(x', y', z')$ tel que :

\mathcal{D} et \mathcal{D}' sont la droite et le plan de \mathcal{E} , issus de O et associés respectivement à D et à P .

1° a) Démontrer que \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont des vecteurs unitaires et orthogonaux.

b) Démontrer qu'il existe une rotation de \mathcal{E} qui laisse invariant le point O et dont l'endomorphisme associé transforme (f, f, k) en $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, k)$.

c) Si \mathcal{D} est orientée par \mathcal{E}_1 , \mathcal{D}' se trouve orientée; démontrer que (O, \mathcal{E}_1, k) est un repère orthornorme associé φ qui laisse O invariant et dont l'endomorphisme associé φ est défini par :

$$\begin{cases} \varphi(f) = 3f + f - \sqrt{6}k \\ \varphi(f) = f + 3f + \sqrt{6}k \\ \varphi(k) = \sqrt{6}f - \sqrt{6}f + 2k \end{cases}$$

a) Si M est l'image par f d'un point M de \mathcal{E} , calculer les coordonnées de M dans ce même repère.

b) Préciser le noyau de l'endomorphisme φ ; en déduire que f est bijective.

c) Démontrer que D est globalement invariante par φ . Quelle est la restriction h de f à \mathcal{D} ?

d) Démontrer que P est globalement invariant par φ . Soit σ la restriction de φ à P . Montrer que σ est définie par :

$$\sigma(\mathcal{E}_2) = 2\mathcal{E}_2 + 2\sqrt{3}k \quad \text{et} \quad \sigma(k) = -2\sqrt{3}\mathcal{E}_2 + 2k$$

Montrer que la restriction s de f à \mathcal{D}' est une similitude directe dont on précisera les éléments.

e) Déduire des questions précédentes que f est la composée d'une homothétie (dont le centre est O) et d'une rotation r (dont on précisera les éléments).

3° On désigne par g l'application affine de \mathcal{E} vers \mathcal{E}' laissant O invariant et dont l'endomorphisme associé γ est défini par :

$$\gamma(\mathcal{E}_2) = \frac{8}{1}(\mathcal{E}_2 + \sqrt{3}k) \quad \text{et} \quad \gamma(k) = \frac{8}{1}(\sqrt{3}\mathcal{E}_2 - k)$$

a) L'équation $\gamma(u) = \lambda u$ (où λ est un réel) admet la solution $u = 0$ pour toute valeur de λ ; démontrer qu'il existe deux valeurs particulières de λ , et deux seulement, pour lesquelles cette équation admet d'autres solutions.

En déduire que γ laisse globalement invariantes deux droites vectorielles D_1 et D_2 de P , que l'on précisera.

Démontrer que D_1 et D_2 sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux de P .

b) Utiliser les résultats précédents pour démontrer que g s'écrit comme la composée d'une homothétie a dont le centre est O et d'une symétrie affine orthogonale α dont on précisera l'axe \mathcal{A} .

Démontrer que k et a commutent.

c) Démontrer qu'il existe dans \mathcal{E}' une droite \mathcal{A}' telle que si a' désigne la symétrie orthogonale par rapport à \mathcal{A}' , la similitude s (voir 2° d)) puisse s'écrire :

$$s = k^{-1} \circ a \circ a'$$

Déterminer alors g et s .

d) Démontrer que l'application affine u de \mathcal{E} dont les restrictions à \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont respectivement h^{-1} et g est la composée d'une homothétie (dont le centre est O) et d'une symétrie affine orthogonale par rapport à un plan que l'on précisera.

10

Soit E l'espace rapporté au repère orthornorme (O, f, f, k) .

A. On appelle A, B, C, D les points de E définis respectivement par les triples de coordonnées suivants : $(1, -1, 0), (2, 0, 1), (-1, 1, 0), (-2, 0, 1)$.

Soit λ et μ des nombres réels; on désigne par P le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients $1 - \lambda$ et λ , et par Q le barycentre des points C et D affectés respectivement des coefficients $1 + \lambda$ et $-\lambda$. Enfin, on appelle G le barycentre des points P et Q affectés respectivement des coefficients $\frac{2}{(1+\mu)}$ et $\frac{2}{(1-\mu)}$.

1° Calculer en fonction de λ les coordonnées des points P et Q . Montrer que G a pour triplet de coordonnées $(\lambda + \mu, \lambda - \mu, \lambda\mu)$.

2° a) Le réel λ étant supposé fixé, montrer que l'ensemble des points G obtenus quand μ varie est une droite (D_λ) dont on donnera des équations cartésiennes.

b) Le réel μ étant supposé fixé, montrer que l'ensemble des points G obtenus quand λ varie est une droite (D'_μ) dont on donnera des équations cartésiennes.

3° Montrer que l'ensemble S des points G obtenus quand (λ, μ) décrit P^2 est l'ensemble des points de E dont les coordonnées vérifient $x^2 - y^2 = 4z$.

B. Soit K et K' les points de coordonnées $(0, 0, 1)$ et $(0, 0, -1)$ respectivement. On désigne par (L) la droite passant par K et de vecteur directeur f , et par (L') la droite passant par K' et de vecteur directeur f .

1° Soit M le point de E de coordonnées (x, y, z) ; montrer que la projection orthogonale H de M sur (L) a pour coordonnées $(0, y, 1)$, et que la projection orthogonale H' de M sur (L') a pour coordonnées $(0, y, -1)$. Calculer les carrés des distances de M aux droites (L) et (L') .

2° Montrer que S est l'ensemble des points M de E situés à égale distance de (L) et de (L') .

C. On désigne par V l'espace vectoriel euclidien associé à E . Si φ est un réel vérifiant $-\frac{2}{\sqrt{3}} < \varphi < \frac{2}{\sqrt{3}}$, on désigne par F_φ l'endomorphisme de V défini par :

$$F_\varphi(f) = -f \quad F_\varphi(f) = (-\cos 2\varphi) \cdot f + (\sin 2\varphi) \cdot k \quad F_\varphi(k) = (-\sin 2\varphi) \cdot f + (-\cos 2\varphi) \cdot k$$

1° Montrer que F_φ est un endomorphisme orthogonal de V , et montrer que l'ensemble des vecteurs de V invariants par F_φ est la droite vectorielle dont un vecteur directeur est

$$\vec{i} - \vec{j} + (2\varphi) \cdot \vec{k}$$

2° Soit f_φ l'application affine de E dans E dont l'endomorphisme associé est F_φ et telle que $f_\varphi(K)$ soit le point K , de coordonnées $(2\varphi, 0, -1)$, où K est le point de coordonnées $(0, 0, 1)$.

a) Définir analytiquement f_φ .

b) Montrer qu'il existe des points de E invariants par f_φ (on pourra chercher des points invariants dont la première coordonnée est nulle). En déduire que f_φ est une rotation dont on déterminera l'axe δ_φ .

c) Montrer que δ_φ est inclus dans S et que $f_\varphi(L) = (L')$, où (L) et (L') sont les droites que l'on a définies au B. 2°.

D. Soit r une rotation (affine) telle que $r(L) = L'$. On désigne par (δ) l'axe de r , et par R la rotation vectorielle associée à r . Montrer que la droite (δ) est contenue dans S .

RÉSOLUTION DES EXERCICES ET PROBLÈMES

9.1 1° L'endomorphisme φ associé à f est tel que :

$$\begin{cases} \varphi(\vec{i}) = -\frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k} \\ \varphi(\vec{j}) = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k} \\ \varphi(\vec{k}) = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k} \end{cases}$$

On vérifie que $(\varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{j}), \varphi(\vec{k}))$ est une base orthonormée :

$$\|\varphi(\vec{i})\|^2 = \|\varphi(\vec{j})\|^2 = \|\varphi(\vec{k})\|^2 = 1$$

$$\varphi(\vec{i}) \cdot \varphi(\vec{j}) = \varphi(\vec{j}) \cdot \varphi(\vec{k}) = \varphi(\vec{k}) \cdot \varphi(\vec{i}) = 0.$$

Il en résulte que f est une isométrie.

2° L'application $f \circ f$ transforme $M(x, y, z)$ en $M'(x'', y'', z'')$ tel que :

$$x'' = -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 2 \right) - \frac{2}{3} \left(-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1 \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 \right) + 2 = x$$

$$y'' = -\frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 2 \right) + \frac{2}{3} \left(-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1 \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 \right) + 1 = y$$

$$z'' = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 2 \right) + \frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1 \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 \right) - 1 = z.$$

On a donc bien $f \circ f = \text{id}_E$.

3° Un point $M(x, y, z)$ est invariant par f si, et seulement si :

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 2 = x \\ -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1 = y \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 2x + y - z = 3 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

L'ensemble des points invariants est donc le plan P d'équation $2x + y - z = 3$.

4° On sait que toute isométrie involutive est une symétrie orthogonale. Par conséquent, f est la symétrie orthogonale par rapport au plan P .

9.2 Un vecteur directeur de la droite D est $\vec{u}(1, 1, 0)$.

Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point quelconque de E . L'équation du plan P_0 passant par M_0 et orthogonal à D est

$$(x - x_0) + (y - y_0) = 0.$$

Le plan P_0 coupe D en H_0 de coordonnées :

$$\left(\frac{1}{2}(x_0 + y_0 - 1), \frac{1}{2}(x_0 + y_0 + 1), 0 \right).$$

Le point $M'_0 = f(M_0)$ est le symétrique de M_0 par rapport à H_0 ; ses coordonnées (x'_0, y'_0, z'_0) sont donc données par :

$$\begin{cases} \frac{x_0 + x'_0}{2} = \frac{1}{2}(x_0 + y_0 - 1) \\ \frac{y_0 + y'_0}{2} = \frac{1}{2}(x_0 + y_0 + 1) \\ \frac{z_0 + z'_0}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'_0 = y_0 - 1 \\ y'_0 = x_0 + 1 \\ z'_0 = -z_0 \end{cases}$$

Le plan P a pour vecteur normal $\vec{n}(0, 1, -1)$ et il contient O . Le plan P' contient donc $O' = f(O)$ et a pour vecteur normal $\varphi(\vec{n})$ (où φ est l'endomorphisme associé à f). D'où une équation de P' :

$$1 \cdot (x + 1) + 0 \cdot (y - 1) + 1 \cdot (z - 0) = 0 \Leftrightarrow x + z + 1 = 0.$$

La droite D_1 a pour vecteur directeur $\vec{v}(1, 1, 1)$. La droite D_1 est donc définie par le point $O'(-1, 1, 0)$ et le vecteur directeur $\vec{v}' = \varphi(\vec{v})$ de composantes $(1, 1, -1)$. D_1 peut être également définie, par exemple, par les deux équations

$$x + z + 1 = 0 \quad \text{et} \quad y + z - 1 = 0.$$

9.3 1° On vérifie que f est une isométrie :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

1° Montrer que F_φ est un endomorphisme orthogonal de V , et montrer que l'ensemble des vecteurs de V invariants par F_φ est la droite vectorielle dont un vecteur directeur est

$$\vec{i} - \vec{j} + (\operatorname{tg} \varphi) \cdot \vec{k}.$$

2° Soit f_φ l'application affine de E dans E dont l'endomorphisme associé est F_φ et telle que $f_\varphi(K)$ soit le point K_1 de coordonnées $(2 \operatorname{tg} \varphi, 0, -1)$, où K est le point de coordonnées $(0, 0, 1)$.

a) Définir analytiquement f_φ .

b) Montrer qu'il existe des points de E invariants par f_φ (on pourra chercher des points invariants dont la première coordonnée est nulle). En déduire que f_φ est une rotation dont on déterminera l'axe δ_φ .

c) Montrer que δ_φ est inclus dans S et que $f_\varphi(L) = (L')$, où (L) et (L') sont les droites que l'on a définies au B, 2°.

D. Soit r une rotation (affine) telle que $r(L) = L'$. On désigne par (δ) l'axe de r , et par R la rotation vectorielle associée à r . Montrer que la droite (δ) est contenue dans S .

RÉSOLUTION DES EXERCICES ET PROBLÈMES

9.1 1° L'endomorphisme φ associé à f est tel que :

$$\begin{cases} \varphi(\vec{i}) = -\frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k} \\ \varphi(\vec{j}) = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k} \\ \varphi(\vec{k}) = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k} \end{cases}$$

On vérifie que $(\varphi(\vec{i}), \varphi(\vec{j}), \varphi(\vec{k}))$ est une base orthonormée :

$$\|\varphi(\vec{i})\|^2 = \|\varphi(\vec{j})\|^2 = \|\varphi(\vec{k})\|^2 = 1$$

$$\varphi(\vec{i}) \cdot \varphi(\vec{j}) = \varphi(\vec{j}) \cdot \varphi(\vec{k}) = \varphi(\vec{k}) \cdot \varphi(\vec{i}) = 0.$$

Il en résulte que f est une isométrie.

2° L'application $f \circ f$ transforme $M(x, y, z)$ en $M'(x'', y'', z'')$ tel que :

$$\begin{aligned} x'' &= -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 2 \right) - \frac{2}{3} \left(-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1 \right) \\ &\quad + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 \right) + 2 = x \\ y'' &= -\frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 2 \right) + \frac{2}{3} \left(-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1 \right) \\ &\quad + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 \right) + 1 = y \\ z'' &= \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 2 \right) + \frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1 \right) \\ &\quad + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 \right) - 1 = z. \end{aligned}$$

On a donc bien $f \circ f = \operatorname{id}_E$.

3° Un point $M(x, y, z)$ est invariant par f si, et seulement si :

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 2 = x \\ -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1 = y \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 = z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 2x + y - z = 3 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

L'ensemble des points invariants est donc le plan P d'équation $2x + y - z = 3$.

4° On sait que toute isométrie involutive est une symétrie orthogonale. Par conséquent, f est la symétrie orthogonale par rapport au plan P .

9.2 Un vecteur directeur de la droite D est $\vec{u}(1, 1, 0)$. Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point quelconque de E . L'équation du plan P_0 passant par M_0 et orthogonal à D est

$$(x - x_0) + (y - y_0) = 0.$$

Le plan P_0 coupe D en H_0 de coordonnées :

$$\frac{1}{2}(x_0 + y_0 - 1), \frac{1}{2}(x_0 + y_0 + 1), 0.$$

Le point $M'_0 = f(M_0)$ est la symétrique de M_0 par rapport à H_0 ; ses coordonnées (x'_0, y'_0, z'_0) sont donc données par :

$$\begin{cases} \frac{x_0 + x'_0}{2} = \frac{1}{2}(x_0 + y_0 - 1) \\ \frac{y_0 + y'_0}{2} = \frac{1}{2}(x_0 + y_0 + 1) \\ \frac{z_0 + z'_0}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x'_0 = y_0 - 1 \\ y'_0 = x_0 + 1 \\ z'_0 = -z_0 \end{cases}$$

Le plan P a pour vecteur normal $\vec{n}(0, 1, -1)$ et il contient O . Le plan P' contient donc $O' = f(O)$ et a pour vecteur normal $\varphi(\vec{n})$ (où φ est l'endomorphisme associé à f). D'où une équation de P' :

$$1 \cdot (x + 1) + 0 \cdot (y - 1) + 1 \cdot (z - 0) = 0 \iff x + z + 1 = 0.$$

La droite D_1 a pour vecteur directeur $\vec{v}(1, 1, 1)$. La droite D_1 est donc définie par le point $O'(-1, 1, 0)$ et le vecteur directeur $\vec{v}' = \varphi(\vec{v})$ de composantes $(1, 1, -1)$. D_1 peut être également définie, par exemple, par les deux équations

$$x + z + 1 = 0 \quad \text{et} \quad y + z - 1 = 0.$$

9.3 1° On vérifie que f est une isométrie :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 0 \\ & \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 0. \end{aligned}$$

2° Un point $M(x, y, z)$ est invariant par f si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + 2 = x \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)y + \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z = y \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)y + \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

L'isométrie f admet pour ensemble de points invariants une droite D . On sait que f est donc une rotation d'axe D .

Pour déterminer l'angle de f , nous orientons \vec{D} par le choix du vecteur unitaire $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} + \vec{k})$. Le vecteur unitaire \vec{i} est orthogonal à \vec{w} . Par conséquent, si nous appelons θ une mesure de l'angle de f (relative à cette orientation de D), nous aurons :

$$\cos \theta = \vec{i} \cdot \varphi(\vec{i}), \quad \sin \theta \vec{w} = \vec{i} \wedge \varphi(\vec{i})$$

en appelant φ l'endomorphisme de \vec{E} associé à f .

$$\text{Or : } \varphi(\vec{i}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k},$$

$$\text{d'où : } \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\sqrt{2}}{2}, & \sin \theta \vec{w} &= \frac{1}{2}(\vec{k} + \vec{j}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{w} \\ \sin \theta &= \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Une mesure de l'angle de f est $\theta = \frac{\pi}{4}$.

9.4 L'endomorphisme φ associé à f est tel que

$$\varphi(\vec{i}) = -\vec{i}; \quad \varphi(\vec{j}) = \vec{k}; \quad \varphi(\vec{k}) = -\vec{j}.$$

Par suite, φ transformant une base orthonormée en une autre base orthonormée, f est une isométrie.

Si f est un vissage, la direction de son axe est l'ensemble des vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$ tels que $\vec{u} = \varphi(\vec{u})$, c'est-à-dire tels que :

$$\begin{cases} x = -z \\ y = -x \\ z = y \end{cases} \Leftrightarrow -x = y = z$$

Un vecteur directeur de l'axe est $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.

L'axe D est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\overline{MM'}$ soit colinéaire à \vec{v} .

Le vecteur $\overline{MM'}$ a pour composantes :

$$\begin{cases} x' - x = -z - x + 2 \\ y' - y = -x - y + 1 \\ z' - z = y - z - 1. \end{cases}$$

Ce vecteur $\overline{MM'}$ est colinéaire à \vec{v} si, et seulement si

$$\frac{-z - x + 2}{1} = \frac{-x - y + 1}{-1} = \frac{y - z - 1}{-1}$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = \frac{4}{3} \\ x + y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

ce qui détermine l'axe D du vissage.

Enfin le vecteur du vissage est $\overline{MM'}$ où $M \in D$ c'est-à-dire : $\frac{2}{3}\vec{v}$.

Réciproquement, considérons l'application $g = t_{\frac{2}{3}\vec{v}} \circ f$, qui est définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = -z + \frac{4}{3} \\ y' = -x + \frac{5}{3} \\ z' = y - \frac{1}{3}. \end{cases}$$

g est une isométrie dont l'ensemble des points invariants est D . En effet :

$$\begin{cases} x = -z + \frac{4}{3} \\ y = -x + \frac{5}{3} \\ z = y - \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = \frac{4}{3} \\ x + y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

g est donc une rotation d'axe D et $f = t_{\frac{2}{3}\vec{v}} \circ g$ est donc un vissage d'axe D et de vecteur $\frac{2}{3}\vec{v}$.

Il reste à déterminer l'angle de ce vissage. Orientons la droite D par le choix du vecteur unitaire $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$. Le vecteur $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$ est unitaire et orthogonal à D . On a donc, en désignant par θ une mesure de l'angle de f (relative à cette orientation de D) :

$$\cos \theta = \vec{u} \cdot \varphi(\vec{u}) = -\frac{1}{2};$$

$$\sin \theta \vec{w} = \vec{u} \wedge \varphi(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k});$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

d'où

$$\theta = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 0 \\ &\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 0. \end{aligned}$$

2° Un point $M(x, y, z)$ est invariant par f si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + 2 = x \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)y + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)z = y \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)y + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)z = z. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

L'isométrie f admet pour ensemble de points invariants une droite D . On sait que f est donc une rotation d'axe D .

Pour déterminer l'angle de f , nous orientons \bar{D} par le choix du vecteur unitaire $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} + \vec{k})$. Le vecteur unitaire \vec{i} est orthogonal à \vec{w} . Par

conséquent, si nous appelons θ une mesure de l'angle de f (relative à cette orientation de D), nous aurons :

$$\cos \theta = \vec{i} \cdot \varphi(\vec{i}), \quad \sin \theta \vec{w} = \vec{i} \wedge \varphi(\vec{i})$$

en appelant φ l'endomorphisme de \bar{E} associé à f .

$$\text{Or : } \varphi(\vec{i}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k},$$

$$\text{d'où : } \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \theta \vec{w} = \frac{1}{2}(\vec{k} + \vec{j}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{w} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Une mesure de l'angle de f est $\theta = \frac{\pi}{4}$.

9.4 L'endomorphisme φ associé à f est tel que

$$\varphi(\vec{i}) = -\vec{i}; \quad \varphi(\vec{j}) = \vec{k}; \quad \varphi(\vec{k}) = -\vec{j}.$$

Par suite, φ transformant une base orthonormée en une autre base orthonormée, f est une isométrie.

Si f est un vissage, la direction de son axe est l'ensemble des vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$ tels que $\vec{u} = \varphi(\vec{u})$, c'est-à-dire tels que :

$$\begin{cases} x = -x \\ y = -x \\ z = y. \end{cases} \Leftrightarrow -x = y = z$$

Un vecteur directeur de l'axe est $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.

L'axe D est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\overline{MM'}$ soit colinéaire à \vec{v} .

Le vecteur $\overline{MM'}$ a pour composantes :

$$\begin{cases} x' - x = -z - x + 2 \\ y' - y = -x - y + 1 \\ z' - z = y - z - 1. \end{cases}$$

Ce vecteur $\overline{MM'}$ est colinéaire à \vec{v} si, et seulement si

$$\frac{-z - x + 2}{1} = \frac{-x - y + 1}{-1} = \frac{y - z - 1}{-1}$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = \frac{4}{3} \\ x + y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

ce qui détermine l'axe D du vissage.

Enfin le vecteur du vissage est $\overline{MM'}$ où $M \in D$ c'est-à-dire : $\frac{2}{3}\vec{v}$.

Réciproquement, considérons l'application $g = t_{\frac{2}{3}\vec{v}} \circ f$, qui est définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = -z + \frac{4}{3} \\ y' = -x + \frac{5}{3} \\ z' = y - \frac{1}{3}. \end{cases}$$

g est une isométrie dont l'ensemble des points invariants est D . En effet :

$$\begin{cases} x = -z + \frac{4}{3} \\ y = -x + \frac{5}{3} \\ z = y - \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = \frac{4}{3} \\ x + y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

g est donc une rotation d'axe D et $f = t_{\frac{2}{3}\vec{v}} \circ g$ est donc un vissage d'axe D et de vecteur $\frac{2}{3}\vec{v}$.

Il reste à déterminer l'angle de ce vissage. Orientons la droite D par le choix du vecteur unitaire $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$. Le vecteur $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$ est unitaire et orthogonal à D . On a donc, en désignant par θ une mesure de l'angle de f (relative à cette orientation de D) :

$$\cos \theta = \vec{u} \cdot \varphi(\vec{u}) = -\frac{1}{2};$$

$$\sin \theta \vec{w} = \vec{u} \wedge \varphi(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k});$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

d'où

$$\theta = \frac{2\pi}{3}.$$

1° r est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ autour de la droite D orientée par \vec{f} . L'application f , composée d'une rotation r et d'une translation t est un vissage dont l'axe est parallèle à D et ayant le même angle que r .

a) Si ρ est l'endomorphisme associé à r , on a :

$$\rho(\vec{f}) = \vec{f}, \quad \rho(\vec{j}) = -\vec{k}, \quad \rho(\vec{k}) = \vec{j}$$

et, comme $f(O) = A(1, -1, 3)$, f est définie analytiquement par les formules :

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = z - 1 \\ z' = -y + 3. \end{cases}$$

On sait que f est un vissage d'axe D , parallèle à D , la droite D_1 est donc l'ensemble des points M tels que $\overline{MM'}$ soit colinéaire à \vec{f} , c'est-à-dire :

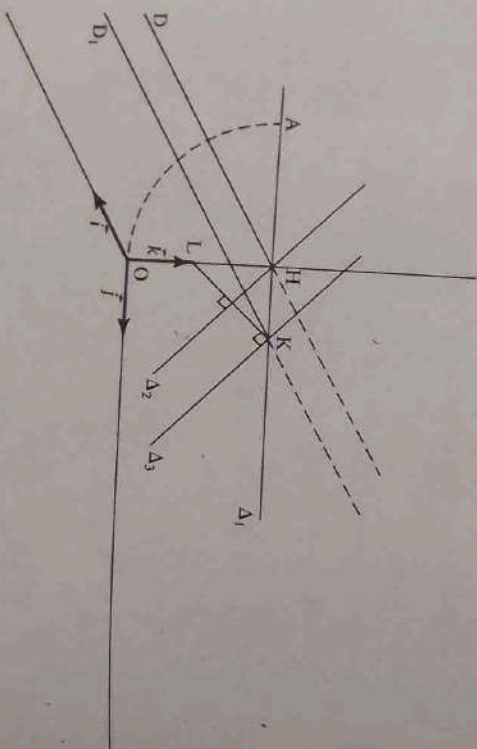
$$\begin{cases} y' - y = 0 = z - y - 1 \\ z' - z = 0 = -y - z + 3 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ z = 2. \end{cases}$$

On notera K le point de coordonnées $(0, 1, 2)$. Le vecteur du vissage est $\overline{MM'}$ lorsque $M \in D_1$, c'est donc \vec{f} .

b) Écrivons $f = t_1 \circ r_1 \circ r = t_1 \circ r_1$. L'application $r_1 = t_1 \circ r_1$ composée de la rotation r et d'une translation de vecteur orthogonal à l'axe de r est une rotation, soit D_1 son axe. Pour préciser D_1 , on peut remarquer que $K(0, 1, 2)$ est invariant par r_1 , ou bien, si on ne fait pas cette remarque, on peut décomposer r et L . Si P_1, P_2, P_3 sont les plans d'équations respectives :

$$\begin{aligned} z = 2, \quad z + y = 2, \quad z + y = 3 \\ \text{on a :} \quad r = s_{P_2} \circ s_{P_1} \quad \text{et} \quad t_1 + r = s_{P_3} \circ s_{P_2} \\ \text{d'où :} \quad r_1 = s_{P_3} \circ s_{P_1} \end{aligned}$$

ce qui montre que D_1 est l'intersection des deux plans P_1 et P_3 . Sur la figure 1, on a représenté les traces $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ des plans P_1, P_2, P_3 sur le plan d'équation $x = 0$.



La décomposition $f = t_1 \circ r_1$ est la forme réduite de f .

2° Écrivons $g = r \circ t_1 + r \circ t_1 = r_2 \circ t_1$. L'application r_2 est une rotation d'axe D_2 parallèle à D , on détermine D_2 sans aucun calcul supplémentaire. En effet :

$$r_2(r(K)) = (r \circ t_1 + r \circ r)(K) = r(K).$$

Ce qui prouve que $r(K) = L$ est invariant par r_2 .

1° On a $d(A, B) = d(B, C) = d(C, A) = a\sqrt{2}$, le triangle ABC est donc équilatéral. Puisque la translation t_2 est une isométrie, le triangle $A'B'C'$ est également équilatéral.

2° Le plan P_1 est le plan médiateur de (A', B') : il passe par le milieu de (A', B') et est orthogonal au vecteur $\overline{A'B'}$. Les points A' et B' ont respectivement pour coordonnées $(a + \alpha, \alpha, \alpha)$ et $(\alpha, a + \alpha, \alpha)$. Les coordonnées du milieu de (A', B') sont donc $(\frac{a}{2} + \alpha, \frac{a}{2} + \alpha, \alpha)$ et les composantes de $\overline{A'B'}$ sont $(-a, a, 0)$. Une équation de P_1 est donc :

$$-a \left(x - \frac{a}{2} - \alpha \right) + a \left(y - \frac{a}{2} - \alpha \right) = 0$$

$$y - x = 0.$$

c'est-à-dire On trouve de même pour P_2 et P_3 les plans d'équations $y = z$ et $z = x$. On peut expliquer le fait que ces plans sont indépendants du choix de α de la façon suivante. Le vecteur \vec{n} étant orthogonal à \overline{AB} , le quadrilatère $ABB'A'$ est un rectangle. Le plan médiateur de (A', B') est donc aussi celui de (A, B) . Même raisonnement pour P_2 et P_3 .

L'ensemble des points équidistants de A', B', C' est l'intersection des trois plans P_1, P_2, P_3 , c'est-à-dire la droite D d'équations $x = y = z$. D est aussi l'ensemble des points équidistants de A, B et C .

3° Appelons I (resp. I') le centre du triangle ABC (resp. $A'B'C'$). Le vissage f d'axe D , de vecteur $\vec{II'}$ = \vec{ii} , d'angle $\frac{2\pi}{3}$, relativement à D orientée par le vecteur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, répond évidemment au problème.

Soit g un autre vissage tel que :

$$g(A) = B'; \quad g(B) = C'; \quad g(C) = A'.$$

L'isométrie $f^{-1} \circ g$ laisse invariants les trois points non alignés A, B, C . Par conséquent, $f^{-1} \circ g$ est l'identité de E ou la symétrie orthogonale s par rapport au plan du triangle ABC . Or, f^{-1} et g , étant des vissages, conservent le sens des repères, il en est de même de $f^{-1} \circ g$. On a donc $f^{-1} \circ g = \text{id}_E$ (car la symétrie s change le sens des repères) et $f = g$.

Remarque

La démonstration précédente prouve qu'il existe deux isométries, et seulement deux, transformant A en B' , B en C' et C en A' . Il s'agit du vissage f et de $f \circ s$. La première conserve le sens des repères, la seconde le change.

a) Posons $r(O) = O_1$. Si $O_1 \neq O$, il existe deux points A' et B' de $O_1 y$ tels que $O' = \text{Bar}((A', A), (B', 1 - A))$ avec $\lambda \in]0, 1[$. Les deux points $A = r^{-1}(A')$ et $B = r^{-1}(B')$ appartiennent à Oz et on a

1° r est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ autour de la droite D orientée par \vec{f} .
 L'application f , composée d'une rotation r et d'une translation t est un vissage dont l'axe est parallèle à D et ayant le même angle que r .
 a) Si ρ est l'endomorphisme associé à r , on a :

$$\rho(\vec{f}) = \vec{f}, \quad \rho(\vec{k}) = -\vec{k}, \quad \rho(\vec{l}) = \vec{l}$$

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = z - 1 \\ z' = -y + 3 \end{cases}$$

et, comme $f(O) = A(1, -1, 3)$, f est définie analytiquement par les formules :

$$\begin{cases} y' - y = 0 = z - y - 1 \\ z' - z = 0 = -y - z + 3 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

On sait que f est un vissage d'axe D_1 parallèle à D , la droite D_1 est donc l'ensemble des points M tels que MM' soit colinéaire à \vec{f} , c'est-à-dire :

On notera K le point de coordonnées $(0, 1, 2)$.
 Le vecteur du vissage est MM' lorsque $M \in D_1$, c'est donc \vec{f} .

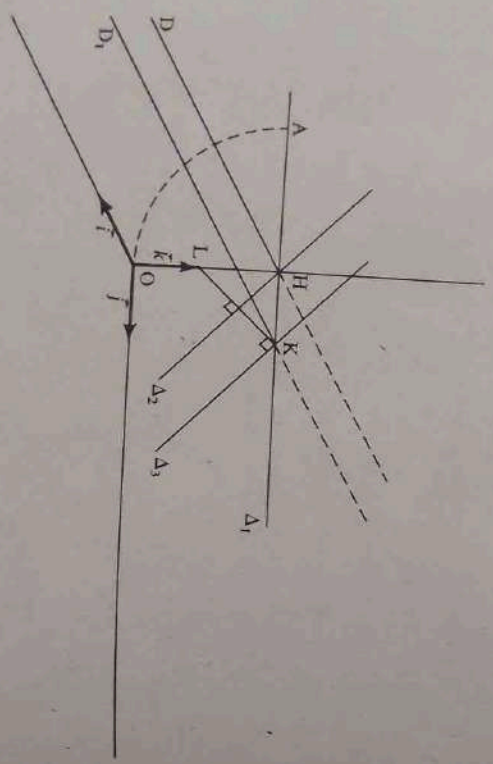
b) Écrivons $f = t_1 \circ f_{1+K} \circ r = t_1 \circ r_1$.
 L'application $r_1 = f_{1+K} \circ r$, composée de la rotation r et d'une translation de vecteur orthogonal à l'axe de r est une rotation, soit D_1 son axe.
 Pour préciser D_1 , on peut remarquer que $K(0, 1, 2)$ est invariant par r_1 , ou bien, si on ne fait pas cette remarque, on peut décomposer r et t_1 . Si P_1, P_2, P_3 sont les plans d'équations respectives :

$$z = 2, \quad z + y = 2, \quad z + y = 3$$

$$r = s_{P_2} \circ s_{P_1} \quad \text{et} \quad t_1 + K = s_{P_3} \circ s_{P_2}$$

$$r_1 = s_{P_3} \circ s_{P_1}$$

ce qui montre que D_1 est l'intersection des deux plans P_1 et P_3 .
 Sur la figure 1, on a représenté les traces $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ des plans P_1, P_2, P_3 sur le plan d'équation $x = 0$.



La décomposition $f = t_1 \circ r_1$ est la forme réduite de f .
 2° Écrivons $g = r \circ t_1 + K \circ t_1 = r_2 \circ t_1$.
 L'application r_2 est une rotation d'axe D_2 parallèle à D , on détermine D_2 sans aucun calcul supplémentaire. En effet :

$$r_2(r(K)) = (r \circ t_1 + K \circ r)(K) = r(K).$$

Ce qui prouve que $r(K) = L$ est invariant par r_2 .

9.6

1° On a $d(A, B) = d(B, C) = d(C, A) = a\sqrt{2}$, le triangle ABC est donc équilatéral.
 Puisque la translation t_2 est une isométrie, le triangle $A'B'C'$ est également équilatéral.

2° Le plan P_1 est le plan médiateur de (A', B') : il passe par le milieu de (A', B') et est orthogonal au vecteur $A'B'$. Les points A' et B' ont respectivement pour coordonnées $(a + \alpha, \alpha, \alpha)$ et $(\alpha, a + \alpha, \alpha)$. Les coordonnées du milieu de (A', B') sont donc $(\frac{a}{2} + \alpha, \frac{a}{2} + \alpha, \alpha)$ et les composantes de $\overline{A'B'}$ sont $(-a, a, 0)$. Une équation de P_1 est donc :

$$-a \left(x - \frac{a}{2} - \alpha \right) + a \left(y - \frac{a}{2} - \alpha \right) = 0$$

$$y - x = 0.$$

c'est-à-dire
 On trouve de même pour P_2 et P_3 les plans d'équations $y = z$ et $z = x$.
 On peut expliquer le fait que ces plans sont indépendants du choix de α de la façon suivante. Le vecteur \vec{n} étant orthogonal à \overline{AB} , le quadrilatère $ABB'A'$ est un rectangle. Le plan médiateur de (A', B') est donc aussi celui de (A, B) . Même raisonnement pour P_2 et P_3 .
 L'ensemble des points équidistants de A', B', C' est l'intersection des trois plans P_1, P_2, P_3 , c'est-à-dire la droite D d'équations $x = y = z$.
 D est aussi l'ensemble des points équidistants de A, B et C .

3° Appelons I (resp. I') le centre du triangle ABC (resp. $A'B'C'$).
 Le vissage f d'axe D , de vecteur $\vec{f} = \vec{n}$, d'angle $\frac{2\pi}{3}$, relativement à D orientée par le vecteur $\vec{f} + \vec{f} + \vec{k}$, répond évidemment au problème.
 Soit g un autre vissage tel que :

$$g(A) = B'; \quad g(B) = C'; \quad g(C) = A'.$$

L'isométrie $f^{-1} \circ g$ laisse invariants les trois points non alignés A, B, C . Par conséquent, $f^{-1} \circ g$ est l'identité de E ou la symétrie orthogonale s par rapport au plan du triangle ABC. Or, f^{-1} et g , étant des vissages, conservent le sens des repères, il en est de même de $f^{-1} \circ g$. On a donc $f^{-1} \circ g = \text{id}_E$ (car la symétrie s change le sens des repères) et $f = g$.

Remarque

La démonstration précédente prouve qu'il existe deux isométries, et seulement deux, transformant A en B' , B en C' et C en A' . Il s'agit du vissage f et de $f \circ s$. La première conserve le sens des repères, la seconde le change.

9.7

a) Posons $r(O) = O'$. Si $O_1 \neq O$, il existe deux points A' et B' de $O'y$ tels que $O' = \text{Bar}(A', \lambda)$, $(B', 1 - \lambda)$ avec $\lambda \in]0, 1[$.
 Les deux points $A = r^{-1}(A')$ et $B = r^{-1}(B')$ appartiennent à Oz et on a

$O = \text{Bar}(A, \lambda), (B, 1 - \lambda))$ (conservation du barycentre par une application affine). Ceci est absurde.

b) Soit r une rotation transformant Oz en Oy . Le point $C(0, 0, 1)$ est donc pour coordonnées $(0, 1, 0)$. L'axe D de r passe par O et appartient à Réciproquement, soit D une droite du plan P d'équation $y = z$. C et C' se projettent orthogonalement en un même point H de D et on a $\|HC\| = \|HC'\|$. Il existe donc une rotation r d'axe D transformant C en C' . Le point O est invariant par r et la demi-droite Oz est donc transformée en la demi-droite Oy par r .

L'ensemble des axes des rotations r transformant Oz en Oy est donc l'ensemble des droites du plan P passant par O . On notera $\vec{u}(\alpha, 1, 1)$ un vecteur directeur d'une telle droite, α est arbitraire.

2° a) Soit R une rotation telle que $R(Oz) = Oy'$. Comme à la première question, on prouve que $R(O) = O'$. Soit t la translation de vecteur $\vec{i} + \vec{j}$. L'isométrie $t^{-1} \circ R$ ayant un point invariant :

$$t^{-1} \circ R(O) = t^{-1}(O) = O$$

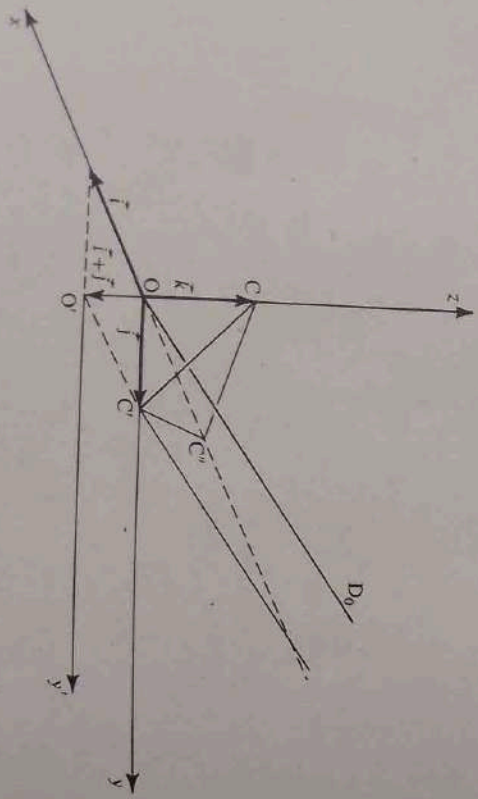
c'est donc une rotation r telle que $r(Oz) = Oy$.

On sait que la composée d'une rotation et d'une translation est une rotation si, et seulement si, le vecteur de la translation est orthogonal à l'axe de la rotation. L'égalité $R = t \circ r$ implique donc

$$\vec{u} \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = 0 = \alpha + 1.$$

La seule rotation r possible est donc la rotation r_0 d'axe dirigé par $\vec{u}_0(-1, 1, 1)$. L'unicité de R en résulte.

Réciproquement, la rotation $t \circ r_0$ transforme évidemment Oz en Oy' .



b) Soit C'' le point de coordonnées $(-1, 0, 0)$. Le triangle $CC''C'$ est équilatéral. L'axe D_0 de r_0 est orthogonal au plan de ce triangle et passe

donc par son centre. La rotation r_0 est donc d'angle $\frac{2\pi}{3}$, relativement à D_0 orientée par \vec{u}_0 . La rotation R est donc aussi d'angle $\frac{2\pi}{3}$. D'autre part, $r_0(C') = C''$ et $R(C') = C''$. L'axe de R est donc la droite passant par C' et dirigée par \vec{u}_0 .

9.8

1° Soit σ_1 et σ_2 les endomorphismes associés à s_1 et s_2 . On a :

$$\begin{aligned} \sigma_1(\vec{i}) &= -\vec{i}; & \sigma_2(\vec{j}) &= -\vec{j}; & \sigma_1(\vec{k}) &= -\vec{k} \\ \sigma_2(\vec{i}) &= -\vec{i}; & \sigma_2(\vec{j}) &= -\vec{j}; & \sigma_2(\vec{k}) &= \vec{k} \end{aligned}$$

d'où, en appelant σ_3 l'endomorphisme associé à s_3 :

$$\sigma_3(\vec{i}) = \vec{i}; \quad \sigma_3(\vec{j}) = \vec{i}; \quad \sigma_3(\vec{k}) = -\vec{k}.$$

On en déduit que $\sigma_3(\vec{i} + \vec{j}) = \vec{i} + \vec{j}$ et $\sigma_3(\vec{i} - \vec{j}) = -(\vec{i} - \vec{j})$.

L'endomorphisme σ_3 est donc la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite vectorielle engendrée par $\vec{i} + \vec{j}$.

Comme O est invariant par s_3 , l'isométrie s_3 est le demi-tour par rapport à la droite passant par O et dirigée par le vecteur $\vec{i} + \vec{j}$.

Remarque

D'une façon générale, si D_1 et D_2 sont deux droites orthogonales se coupant en O , le produit $s_{D_1} \circ s_{D_2}$ des deux demi-tours d'axes D_1 et D_2 est le demi-tour par rapport à la droite D_3 passant par O et orthogonale à la fois à D_1 et D_2 . De plus, on a $s_{D_2} \circ s_{D_1} = s_{D_1} \circ s_{D_2}$.

2° L'endomorphisme σ_4 associé à s_4 est tel que :

$$\sigma_4(\vec{i}) = -\vec{i}; \quad \sigma_4(\vec{j}) = \vec{j}; \quad \sigma_4(\vec{k}) = -\vec{k}.$$

D'où, si ρ est l'endomorphisme associé à r :

$$\rho(\vec{i}) = \vec{j}; \quad \rho(\vec{j}) = -\vec{i}; \quad \rho(\vec{k}) = \vec{k}.$$

Comme O est invariant, la droite D passant par O et dirigée par \vec{k} est une droite de points invariants. La restriction de ρ au plan vectoriel engendré par \vec{i} et \vec{j} est une isométrie qui transforme \vec{i} en \vec{j} et \vec{j} en $-\vec{i}$, c'est donc la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ (en convenant que (\vec{i}, \vec{j}) est une base directe).

Finalement, r est la rotation d'axe D et dont une mesure de l'angle est $+\frac{\pi}{2}$, lorsque D est orientée par le vecteur \vec{k} .

3° a) L'application r transforme $C(5, 0, 1)$ en $C''(0, 5, 1)$. Le vecteur $\overrightarrow{CC''}$ est égal à $-3(\vec{i} + \vec{j})$. L'isométrie $r \circ \overrightarrow{CC''} \circ r$ transforme C en C' et admet ρ pour endomorphisme associé. On a donc :

$$R = r \circ \overrightarrow{CC''} \circ r.$$

Comme le vecteur $\overrightarrow{CC''}$ est orthogonal à l'axe D de r , la composée $r \circ \overrightarrow{CC''} \circ r$ est une rotation d'axe Δ parallèle à D et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Il reste à déterminer complètement Δ . La rotation R est définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = -y - 3 \\ y' = x - 3 \\ z' = z \end{cases}$$

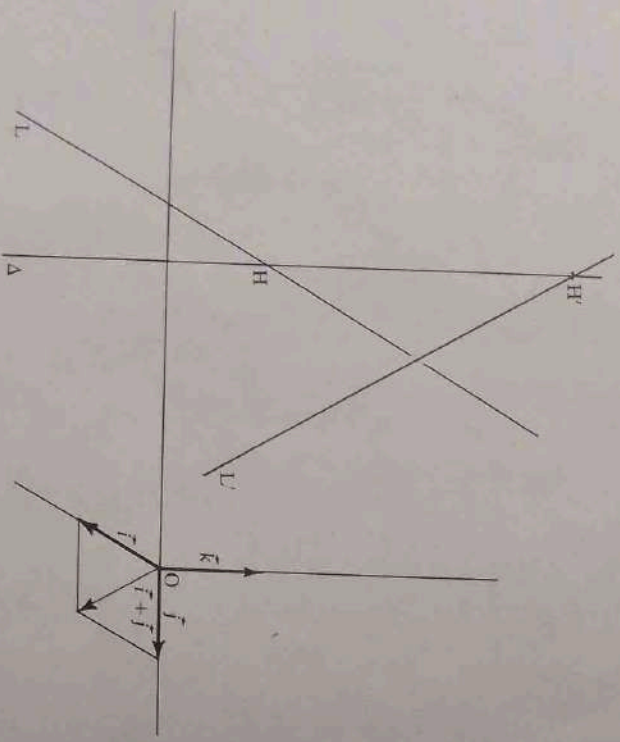
son axe est donc caractérisé par :

$$M(x, y, z) \in \Delta \iff \begin{cases} x = -y - 3 \\ y = x - 3 \\ z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \\ z = z \end{cases}$$

b) Comme le vecteur de T dirige Δ , F est le vissage d'axe Δ , d'angle $+\frac{\pi}{2}$ et de vecteur $6\vec{k}$.

c) Soit H le point d'intersection de L et de Δ .

Supposons qu'une droite L' réponde au problème posé. On a $F = s_{L'} \circ s_{L, \Delta}$, où $F(H) = s_{L'}(H)$. Comme H et $F(H)$ sont deux points distincts de Δ , on en déduit que L' rencontre orthogonalement Δ en un point H' tel que $\overline{HH'} = 3\vec{k}$.



D'autre part, si σ_L et $\sigma_{L'}$ sont les endomorphismes respectivement associés à s_L et $s_{L'}$, on a $\rho = \sigma_{L'} \circ \sigma_L$. En considérant la restriction de ρ au plan vectoriel de base directe (\vec{i}, \vec{j}) , on voit que L' se déduit de L par rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Finalement, L' est nécessairement la droite passant par le point $H'(0, -3, 4)$ et dirigée par le vecteur $\vec{i} + \vec{j}$ (d'où l'unicité de L').

Réciproquement, L' étant cette droite, les deux applications affines F et $s_{L'} \circ s_L$ ont même endomorphisme associé et transforment toutes deux H en $F(H)$. On a donc $F = s_{L'} \circ s_L$.

Remarque

Le lecteur pourra vérifier que les définitions analytiques de $s_{L, \Delta}$ et de $s_{L'}$ sont respectivement $(x, y, z) \mapsto (x, -y-6, -z+2)$ et $(x, y, z) \mapsto (y+3, x-3, -z+8)$.

1° a) On a :

$$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1 \quad \text{et} \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0.$$

b) Appelons $z'Oz$ la droite passant par O et dirigée par \vec{k} . Soit r la rotation d'axe $z'Oz$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$, relativement à $z'Oz$ orientée par \vec{k} .

La rotation r laisse O invariant et son endomorphisme associé transforme \vec{i} en \vec{e}_1 , \vec{j} en \vec{e}_2 et \vec{k} en \vec{k} .

c) $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k})$ est une base directe de E comme image par une rotation de la base directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On oriente \mathcal{D} par \vec{e}_1 , \mathcal{D}' qui est orthogonal à \mathcal{D} se trouve orienté de telle sorte que si (\vec{u}, \vec{v}) est une base directe de P, $(\vec{e}_1, \vec{u}, \vec{v})$ soit une base directe de E; donc (\vec{e}_2, \vec{k}) étant une base de P et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k})$ une base directe de E, (\vec{e}_2, \vec{k}) est une base directe de P. Donc (O, \vec{e}_2, \vec{k}) est un repère orthonormé direct de \mathcal{P} .

2° a) On a :

$$\begin{cases} x' = 3x + y + \sqrt{6}z \\ y' = x + 3y - \sqrt{6}z \\ z' = -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y + 2z \end{cases}$$

Un point $M(x, y, z)$ est invariant par f si, et seulement si :

$$\begin{cases} 3x + y + \sqrt{6}z = x \\ x + 3y - \sqrt{6}z = y \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y + 2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + \sqrt{6}z = 0 \\ x + 2y - \sqrt{6}z = 0 \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y = z = 0 \end{cases}$$

Le seul point invariant par f est donc O.

b) Un vecteur $\vec{u}(x, y, z)$ est dans le noyau de φ si et seulement si $\varphi(\vec{u}) = \vec{0}$.

Ceci équivaut successivement à :

$$\begin{cases} 3x + y + \sqrt{6}z = 0 \\ x + 3y - \sqrt{6}z = 0 \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 6y - 2\sqrt{6}z = 0 \\ -6x + 6y + 2\sqrt{6}z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ -4x + 12y = 0 \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ x = y = z = 0 \end{cases}$$

L'endomorphisme φ est donc injectif. La dimension de E étant finie, cela entraîne que φ est bijectif. Il en est de même pour f.

c) Un vecteur quelconque \vec{w} de \mathcal{D} s'écrit $\vec{w} = \alpha(\vec{i} + \vec{j})$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$\varphi(\vec{w}) = \alpha(\varphi(\vec{i}) + \varphi(\vec{j})) = \alpha(3\vec{i} + \vec{j} - \sqrt{6}\vec{k} + \vec{i} + 3\vec{j} + \sqrt{6}\vec{k}) = 4\vec{w}.$$

La droite vectorielle D est donc globalement invariante par φ . Comme $f(O) = O$, la droite \mathcal{D} est globalement invariante par f , de plus la restriction de f à \mathcal{D} est l'homothétie de centre O et de rapport 4.

d) $\varphi(\vec{e}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi(-\vec{i}) + \varphi(\vec{j})) = 2\vec{e}_2 + 2\sqrt{3}\vec{k}$

$$\varphi(\vec{k}) = \sqrt{6}\vec{i} - \sqrt{6}\vec{j} + 2\vec{k} = -2\sqrt{3}\vec{e}_2 + 2\vec{k}.$$

Ce calcul prouve que P est globalement invariant par φ . On en déduit que \mathcal{P} est globalement invariant par f (car $f(O) = O$).

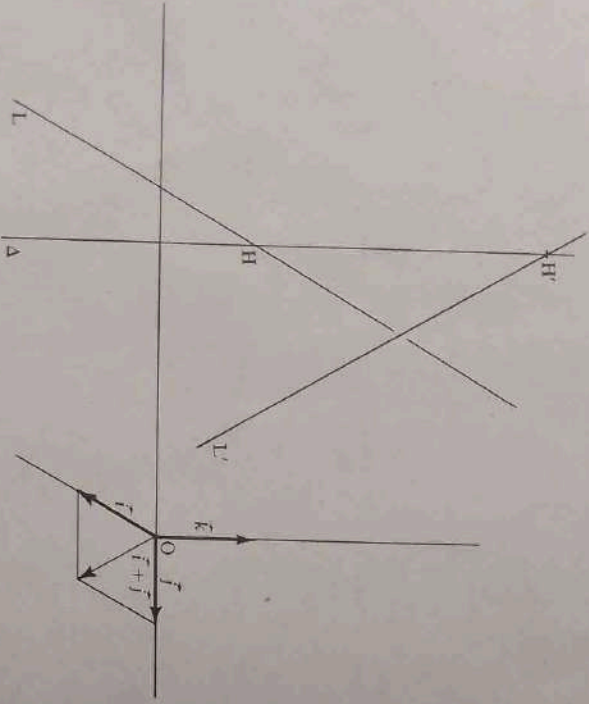
son axe est donc caractérisé par :

$$M(x, y, z) \in \Delta \iff \begin{cases} x = -y - 3 \\ y = x - 3 \\ z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -3. \end{cases}$$

b) Comme le vecteur de T dirige Δ , F est le vissage d'axe Δ , d'angle $+\frac{\pi}{2}$ et de vecteur $6\vec{k}$.

c) Soit H le point d'intersection de L et de Δ .

Supposons qu'une droite L' réponde au problème posé. On a $F = s_{L', O} \circ s_{L, O}$ d'où $F(H) = s_{L', O}(H)$. Comme H et $F(H)$ sont deux points distincts de Δ , on en déduit que L' rencontre orthogonalement Δ en un point H' tel que $HH' = 3\vec{k}$.



D'autre part, si σ_L et $\sigma_{L'}$ sont les endomorphismes respectivement associés à s_L et $s_{L'}$, on a $\rho = \sigma_{L', O} \circ \sigma_{L, O}$. En considérant la restriction de ρ au plan vectoriel de base directe (\vec{i}, \vec{j}) , on voit que L' se déduit de L par rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Finalement, L' est nécessairement la droite passant par le point $H'(0, -3, 4)$ et dirigée par le vecteur $\vec{i} + \vec{j}$ (d'où l'unicité de L').

Réciproquement, L' étant cette droite, les deux applications affines F et $s_{L', O} \circ s_L$ ont même endomorphisme associé et transforment toutes deux H en $F(H)$. On a donc $F = s_{L', O} \circ s_L$.

Remarque

Le lecteur pourra vérifier que les définitions analytiques de s_L et de $s_{L'}$ sont respectivement $(x, y, z) \mapsto (x, -y - 6, -z + 2)$ et $(x, y, z) \mapsto (y + 3, x - 3, -z + 8)$.

1° a) On a :

$$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1 \quad \text{et} \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0.$$

b) Appelons $z'Oz$ la droite passant par O et dirigée par \vec{k} . Soit r la rotation d'axe $z'Oz$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$, relativement à $z'Oz$ orientée par \vec{k} .

La rotation r laisse O invariant et son endomorphisme associé transforme \vec{i} en \vec{e}_1 , \vec{j} en \vec{e}_2 et \vec{k} en \vec{k} .

c) $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k})$ est une base directe de E comme image par une rotation de la base directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On oriente \mathcal{D} par \vec{e}_1, \vec{j} qui est orthogonal à \mathcal{D} se trouve orienté de telle sorte que si (\vec{u}, \vec{v}) est une base directe de P, $(\vec{e}_1, \vec{u}, \vec{v})$ soit une base directe de E; donc (\vec{e}_2, \vec{k}) étant une base de P et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k})$ une base directe de E, (\vec{e}_2, \vec{k}) est une base directe de P. Donc (O, \vec{e}_2, \vec{k}) est un repère orthonormé direct de \mathcal{D} .

2° a) On a :

$$\begin{cases} x' = 3x + y + \sqrt{6}z \\ y' = x + 3y - \sqrt{6}z \\ z' = -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y + 2z. \end{cases}$$

Un point $M(x, y, z)$ est invariant par f si, et seulement si :

$$\begin{cases} 3x + y + \sqrt{6}z = x \\ x + 3y - \sqrt{6}z = y \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y + 2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + \sqrt{6}z = 0 \\ x + 2y - \sqrt{6}z = 0 \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y + z = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} x = y = z = 0 \end{cases}$$

Le seul point invariant par f est donc O.

b) Un vecteur $\vec{u}(x, y, z)$ est dans le noyau de φ si et seulement si $\varphi(\vec{u}) = \vec{0}$.

Ceci équivaut successivement à :

$$\begin{cases} 3x + y + \sqrt{6}z = 0 \\ x + 3y - \sqrt{6}z = 0 \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 6y - 2\sqrt{6}z = 0 \\ -6x + 6y + 2\sqrt{6}z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ -4x + 12y = 0 \\ -\sqrt{6}x + \sqrt{6}y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y = z = 0. \end{cases}$$

L'endomorphisme φ est donc injectif. La dimension de E étant finie, cela entraîne que φ est bijectif. Il en est de même pour f.

c) Un vecteur quelconque \vec{v} de \mathcal{D} s'écrit $\vec{v} = \alpha(\vec{i} + \vec{j})$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$\varphi(\vec{v}) = \alpha(\varphi(\vec{i}) + \varphi(\vec{j})) = \alpha(3\vec{i} + \vec{j} - \sqrt{6}\vec{k} + \vec{i} + 3\vec{j} + \sqrt{6}\vec{k}) = 4\vec{v}.$$

La droite vectorielle D est donc globalement invariante par φ . Comme $f(O) = O$, la droite \mathcal{D} est globalement invariante par f, de plus la restriction de f à \mathcal{D} est l'homothétie de centre O et de rapport 4.

$$d) \varphi(\vec{e}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi(-\vec{i}) + \varphi(\vec{j})) = 2\vec{e}_2 + 2\sqrt{3}\vec{k}$$

$$\varphi(\vec{k}) = \sqrt{6}\vec{i} - \sqrt{6}\vec{j} + 2\vec{k} = -2\sqrt{3}\vec{e}_2 + 2\vec{k}.$$

Ce calcul prouve que P est globalement invariant par φ . On en déduit que \mathcal{D} est globalement invariant par f (car $f(O) = O$).

L'application s est définie analytiquement, dans le repère (O, \vec{e}_2, \vec{k}) par les formules suivantes :

$$\begin{cases} x' = 2x - 2\sqrt{3}y \\ y' = 2\sqrt{3}x + 2y \end{cases}$$

Sous cette forme (ou sous la forme complexe $z' = (2 + 2i\sqrt{3})z$) on reconnaît que s est la similitude directe de centre O , de rapport $\sqrt{2} + (2\sqrt{3})i$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$ (dans le plan orienté par (\vec{e}_2, \vec{k})) puisque :

$$\cos \theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

s) Soit \tilde{h} l'homothétie, de δ , de centre O et de rapport 4. Soit r la rotation, de δ , d'axe \mathcal{D} et d'angle $\frac{\pi}{3}$ (\mathcal{D} étant orientée par \vec{e}_1).

Les applications f et $r \circ \tilde{h}$ ont même restriction à \mathcal{D} : l'homothétie de centre O et de rapport 4, et même restriction à \mathcal{D}^\perp : la similitude de centre O , de rapport 4 et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On a donc $f = r \circ \tilde{h}$.

L'application $\tilde{h} \circ r$ a aussi les mêmes restrictions que f à \mathcal{D} et \mathcal{D}^\perp . On a donc aussi $f = \tilde{h} \circ r$.

$3^\circ a$) Soit \vec{n} un vecteur de coordonnées (x, y) dans la base (\vec{e}_2, \vec{k}) , on a :

$$\gamma(\vec{n}) = \left(\frac{x}{8} + \frac{y\sqrt{3}}{8}\right)\vec{e}_2 + \left(\frac{\sqrt{3}x}{8} - \frac{y}{8}\right)\vec{k}$$

$\gamma(\vec{n}) = \lambda\vec{n}$ est équivalent à :

$$\begin{cases} x\left(\frac{1}{8} - \lambda\right) + y\frac{\sqrt{3}}{8} = 0 \\ x\frac{\sqrt{3}}{8} + \left(-\frac{1}{8} - \lambda\right)y = 0 \end{cases}$$

Ce système admettra une solution non nulle si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{8} - \lambda & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{8} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

donc si et seulement si $\lambda = \frac{1}{4}$ ou $\lambda = -\frac{1}{4}$ (en résolvant l'équation du second degré en λ).

Si $\lambda = \frac{1}{4}$, l'ensemble des vecteurs \vec{n} tels que $\gamma(\vec{n}) = \frac{1}{4}\vec{n}$ est une droite vectorielle \mathcal{D}_1 , d'équation $x - \sqrt{3}y = 0$, une base de \mathcal{D}_1 est le vecteur \vec{n}_1 de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$.

Si $\lambda = -\frac{1}{4}$, l'ensemble des vecteurs \vec{n} tels que $\gamma(\vec{n}) = -\frac{1}{4}\vec{n}$ est une droite vectorielle \mathcal{D}_2 , d'équation $\sqrt{3}x + y = 0$, une base de \mathcal{D}_2 est le vecteur \vec{n}_2 de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Les vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont orthogonaux donc les sous-espaces vectoriels \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 le sont.

b) Les vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 forment une base orthonormée de P . Soit \vec{v} un vecteur de P de coordonnées (X, Y) dans la base (\vec{n}_1, \vec{n}_2) , on a :

$$\gamma(\vec{v}) = X\gamma(\vec{n}_1) + Y\gamma(\vec{n}_2) = X\gamma(\vec{n}_1) + Y\gamma(\vec{n}_2) = \frac{1}{4}(X\vec{n}_1 - Y\vec{n}_2)$$

Donc γ est la composée d'une symétrie vectorielle orthogonale d'axe la droite \mathcal{D}_1 dont une base est \vec{n}_1 et d'une homothétie vectorielle de rapport $\frac{1}{4}$.

Ces deux applications commutent.

Soit k l'homothétie, de \mathcal{F} , de centre O de rapport $\frac{1}{4}$, a la symétrie orthogonale, de \mathcal{F} , par rapport à la droite \mathcal{A} passant par O et dirigée par le vecteur \vec{n}_1 . Les trois applications g , $k \circ a$ et $a \circ k$ ont même endomorphisme associé et prennent la même valeur en O . On a donc :

$$g = k \circ a = a \circ k$$

c) Introduisons la droite \mathcal{A}' du plan \mathcal{F} (orienté par (\vec{e}_2, \vec{k})), passant par O et telle que :

$$(\widehat{\mathcal{A}', \mathcal{A}}) \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{\pi}$$

Soit a' la symétrie orthogonale, de \mathcal{F} , par rapport à la droite \mathcal{A}' . On sait que $a \circ a'$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On a donc bien :

$$s = k^{-1} \circ a \circ a'$$

On en déduit :

$$g \circ s = a \circ k \circ k^{-1} \circ a \circ a' = a \circ a \circ a' = a'$$

d) Soit \mathcal{F}' , le plan de δ contenant les deux droites \mathcal{D} et \mathcal{A} , \tilde{a} la symétrie orthogonale de δ par rapport à \mathcal{F}' , \tilde{k} l'homothétie de δ de centre O et de rapport $\frac{1}{4}$.

Les trois applications affines u , $\tilde{k} \circ \tilde{a}$, $\tilde{a} \circ \tilde{k}$ ont même restriction à \mathcal{D} et à \mathcal{F}' , prennent la même valeur en O , donc sont égales :

$$u = \tilde{k} \circ \tilde{a} = \tilde{a} \circ \tilde{k}$$

9.10

A. 1° Les points P et Q sont définis par :

$$\overline{OP} = (1 - \lambda)\overline{OA} + \lambda\overline{OB} \quad \text{et} \quad \overline{OQ} = (1 + \lambda)\overline{OC} - \lambda\overline{OD}$$

Le point P a donc pour coordonnées $(1 + \lambda, -1 + \lambda, \lambda)$ et le point Q a pour coordonnées $(-1 + \lambda, 1 + \lambda, -\lambda)$.

Le point G vérifie $\overline{OG} = \frac{1 + \mu}{2}\overline{OP} + \frac{1 - \mu}{2}\overline{OQ}$, les coordonnées de G sont donc $(\lambda + \mu, \lambda - \mu, \lambda\mu)$.

$2^\circ a$) Quand μ varie, λ étant fixé, le point G décrit la droite (\mathcal{D}_λ) d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x + y = 2\lambda \\ z = \lambda(x - \lambda) \end{cases}$$

L'application s est définie analytiquement, dans le repère (O, \vec{e}_1, \vec{k}) par les formules suivantes :

$$\begin{cases} x' = 2x - 2\sqrt{3}y \\ y' = 2\sqrt{3}x + 2y. \end{cases}$$

Sous cette forme (ou sous la forme complexe $z' = (2 + 2i\sqrt{3})z$) on reconnaît que s est la similitude directe de centre O , de rapport $\sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$ (dans le plan orienté par (\vec{e}_1, \vec{k}))

puisque :

$$\cos \theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

e) Soit \vec{h} l'homothétie, de δ , de centre O et de rapport 4. Soit r la rotation, de δ , d'axe \mathcal{D} et d'angle $\frac{\pi}{3}$ (\mathcal{D} étant orientée par \vec{e}_1).

Les applications f et $r \circ \vec{h}$ ont même restriction à \mathcal{D} : l'homothétie de centre O et de rapport 4, et même restriction à \mathcal{D}^\perp : la similitude de centre O , de rapport 4 et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On a donc $f = r \circ \vec{h}$.

L'application $\vec{h} \circ r$ a aussi les mêmes restrictions que f à \mathcal{D} et \mathcal{D}^\perp . On a donc aussi $f = \vec{h} \circ r$.

3° a) Soit \vec{u} un vecteur de coordonnées (x, y) dans la base (\vec{e}_2, \vec{k}) , on a :

$$\gamma(\vec{u}) = \left(\frac{x}{8} + \frac{y\sqrt{3}}{8}\right)\vec{e}_2 + \left(\frac{\sqrt{3}x}{8} - \frac{y}{8}\right)\vec{k}.$$

$\gamma(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ est équivalent à :

$$\begin{cases} x\left(\frac{1}{8} - \lambda\right) + y\frac{\sqrt{3}}{8} = 0 \\ x\frac{\sqrt{3}}{8} + \left(-\frac{1}{8} - \lambda\right)y = 0. \end{cases}$$

Ce système admettra une solution non nulle si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{8} - \lambda & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{8} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

donc si et seulement si $\lambda = \frac{1}{4}$ ou $\lambda = -\frac{1}{4}$ (en résolvant l'équation du second degré en λ).

Si $\lambda = \frac{1}{4}$, l'ensemble des vecteurs \vec{u} tels que $\gamma(\vec{u}) = \frac{1}{4}\vec{u}$ est une droite vectorielle D_1 , d'équation $x - \sqrt{3}y = 0$, une base de D_1 est le vecteur \vec{u}_1 , de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Si $\lambda = -\frac{1}{4}$, l'ensemble des vecteurs \vec{u} tels que $\gamma(\vec{u}) = -\frac{1}{4}\vec{u}$ est une droite vectorielle D_2 , d'équation $\sqrt{3}x + y = 0$, une base de D_2 est le vecteur \vec{u}_2 , de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Les vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont orthogonaux donc les sous-espaces vectoriels D_1

et D_2 le sont.

b) Les vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 forment une base orthonormée de P . Soit \vec{t} un vecteur de P de coordonnées (X, Y) dans la base (\vec{u}_1, \vec{u}_2) , on a :

$$\gamma(\vec{t}) = \gamma(X\vec{u}_1 + Y\vec{u}_2) = X\gamma(\vec{u}_1) + Y\gamma(\vec{u}_2) = \frac{1}{4}(X\vec{u}_1 - Y\vec{u}_2).$$

Donc γ est la composée d'une symétrie vectorielle orthogonale d'axe la droite D_1 , dont une base est \vec{u}_1 , et d'une homothétie vectorielle de rapport $\frac{1}{4}$.

Ces deux applications commutent.

Soit k l'homothétie, de \mathcal{D} , de centre O de rapport $\frac{1}{4}$, a la symétrie

orthogonale, de \mathcal{D} , par rapport à la droite \mathcal{A} passant par O et dirigée par le vecteur \vec{u}_1 . Les trois applications g , $k \circ a$ et $a \circ k$ ont même endomorphisme associé et prennent la même valeur en O . On a donc :

$$g = k \circ a = a \circ k.$$

c) Introduisons la droite \mathcal{A}' du plan \mathcal{P} (orienté par (\vec{e}_2, \vec{k})), passant par O et telle que :

$$(\widehat{\mathcal{A}'}, \mathcal{A}) \equiv \frac{\pi}{6} \quad [\pi].$$

Soit a' la symétrie orthogonale, de \mathcal{D} , par rapport à la droite \mathcal{A}' . On sait que $a \circ a'$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On a donc bien :

$$s = k^{-1} \circ a \circ a'.$$

On en déduit :

$$g \circ s = a \circ k \circ k^{-1} \circ a \circ a' = a \circ a \circ a' = a'.$$

d) Soit \mathcal{P}' le plan de \mathcal{E} contenant les deux droites \mathcal{D} et \mathcal{A} , \tilde{a} la symétrie orthogonale de \mathcal{E} par rapport à \mathcal{P}' , \tilde{k} l'homothétie de \mathcal{E} de centre O et de rapport $\frac{1}{4}$.

Les trois applications affines u , $\tilde{k} \circ \tilde{a}$, $\tilde{a} \circ \tilde{k}$ ont même restriction à \mathcal{D} et à \mathcal{P}' , prennent la même valeur en O , donc sont égales :

$$u = \tilde{k} \circ \tilde{a} = \tilde{a} \circ \tilde{k}.$$

9.10

A. 1° Les points P et Q sont définis par :

$$\overline{OP} = (1 - \lambda)\overline{OA} + \lambda\overline{OB} \quad \text{et} \quad \overline{OQ} = (1 + \lambda)\overline{OC} - \lambda\overline{OD}.$$

Le point P a donc pour coordonnées $(1 + \lambda, -1 + \lambda, \lambda)$ et le point Q a pour coordonnées $(-1 + \lambda, 1 + \lambda, -\lambda)$.

Le point G vérifie $\overline{OG} = \frac{1 + \mu}{2}\overline{OP} + \frac{1 - \mu}{2}\overline{OQ}$, les coordonnées de G sont donc $(\lambda + \mu, \lambda - \mu, \lambda\mu)$.

2° a) Quand μ varie, λ étant fixé, le point G décrit la droite (D_λ) d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x + y = 2\lambda, \\ z = \lambda(x - \lambda). \end{cases}$$

b) Quand λ varie, μ étant fixé, le point G décrit la droite (D'_z) d'équations cartésiennes :

$$x - y = 2\mu, \quad z = \mu(x - \mu).$$

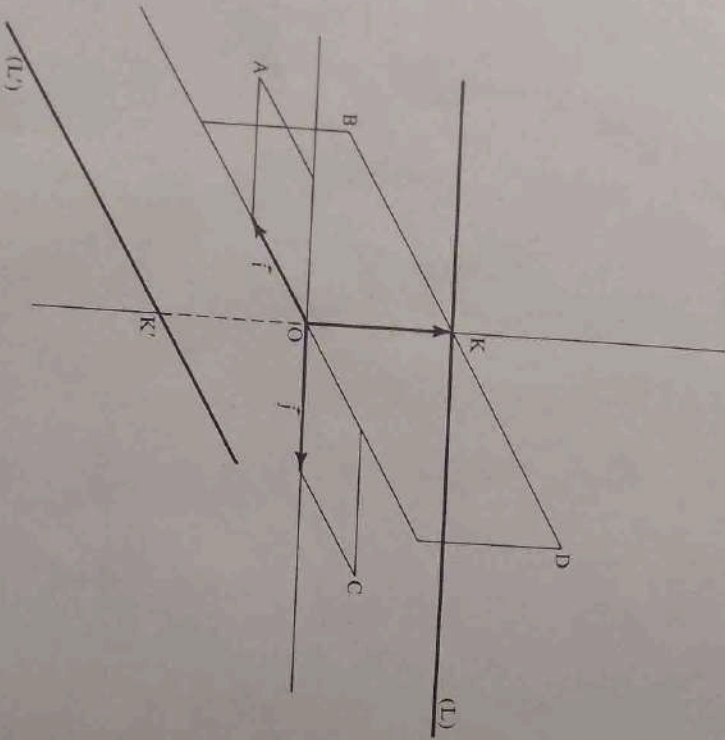
c) Un point G a pour coordonnées $(\lambda + \mu, \lambda - \mu, \lambda\mu)$. On a donc :

$$x^2 - y^2 = (\lambda + \mu)^2 - (\lambda - \mu)^2 = 4\lambda\mu = 4z.$$

Réciproquement, soit M un point de coordonnées (x, y, z) vérifiant $x^2 - y^2 = 4z$. On pose $\lambda = \frac{1}{2}(x + y)$, $\mu = \frac{1}{2}(x - y)$. On a alors :

$$x = \lambda + \mu, \quad y = \lambda - \mu, \quad z = \lambda\mu$$

ce qui prouve que M est l'un des points G.



1° H est l'intersection de (L) et du plan P passant par M et parallèle à xOz . (L) a pour équation $x = 0$ et $z = 1$, P a pour équation $Y = y$. Par suite, H a pour coordonnées $(0, y, 1)$. De même, H' a pour coordonnées $(x, 0, -1)$. La distance de M à (L) (resp. (L')) est $\|\overline{MH}\|^2$ (resp. $\|\overline{MH'}\|^2$)

2° On a les équivalences suivantes :

$$\|\overline{MH}\|^2 = \|\overline{MH'}\|^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = y^2 + (z+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4z$$

$$\Leftrightarrow M \in S.$$

C. 1° F_α transforme une base orthonormée en une autre base orthonormée, c'est donc une isométrie vectorielle de V.

Un vecteur $\vec{v}(x, y, z)$ de V est invariant par F_α si, et seulement si :

$$\begin{cases} -y = x \\ -\cos 2\varphi x - \sin 2\varphi z = y \\ \sin 2\varphi x - \cos 2\varphi z = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ (1 - \cos 2\varphi)x - \sin 2\varphi z = 0 \\ \sin 2\varphi x - (1 + \cos 2\varphi)z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2 \sin \varphi (\sin \varphi x - \cos \varphi z) = 0 \\ 2 \cos \varphi (\sin \varphi z - \cos \varphi z) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ \sin \varphi x - \cos \varphi z = 0. \end{cases}$$

L'ensemble des vecteurs invariants est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur :

$$\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \operatorname{tg} \varphi \vec{k}.$$

2° a) f_α est définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = -y + 2 \operatorname{tg} \varphi \\ y' = -\cos 2\varphi x - \sin 2\varphi z + \sin 2\varphi \\ z' = \sin 2\varphi x - \cos 2\varphi z + \cos 2\varphi - 1. \end{cases}$$

b) Le point $(0, y, z)$ est invariant si, et seulement si :

$$\begin{cases} -y + 2 \operatorname{tg} \varphi = 0 \\ -\sin 2\varphi z + \sin 2\varphi = y \\ -\cos 2\varphi z + \cos 2\varphi - 1 = z. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \operatorname{tg} \varphi \\ z = -\operatorname{tg}^2 \varphi \end{cases}$$

L'ensemble des points invariants est donc la droite δ_α passant par le point de coordonnées $(0, 2 \operatorname{tg} \varphi, -\operatorname{tg}^2 \varphi)$ et dirigée par le vecteur \vec{v} . L'isométrie affine f_α est donc une rotation d'axe δ_α .

c) Les points de δ_α ont des coordonnées de la forme :

$$x = \alpha, \quad y = 2 \operatorname{tg} \varphi - \alpha, \quad z = -\operatorname{tg}^2 \varphi + \alpha \operatorname{tg} \varphi.$$

On vérifie que :

$$x^2 - y^2 = \alpha^2 - 4 \operatorname{tg}^2 \varphi - \alpha^2 + 4\alpha \operatorname{tg} \varphi = 4z$$

ce qui prouve que δ_α est contenue dans S.

(On peut aussi remarquer que $\delta_\alpha = D_{\operatorname{tg} \varphi}$.)

L'isométrie f_α transforme (L) en la droite (L') passant par $f_\alpha(K)$ et dirigée par $F_\alpha(\vec{j})$. Or

$$f_\alpha(K) = K_\alpha(2 \operatorname{tg} \varphi, 0, -1) \in (L')$$

$$F_\alpha(\vec{j}) = -\vec{i} \text{ dirige } (L').$$

Par suite : $f_\alpha(L) = (L')$.

D. Les points de (δ) sont équidistants de (L) et de $r(L) = L'$, ils appartiennent donc à S (d'après B. 2°).

□ Équation cartésienne d'un ensemble de points

Soit un plan P rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On appelle **équation cartésienne** d'un ensemble Γ de points du plan une relation de la forme $f(x, y) = 0$ (f fonction des variables réelles x et y) qui exprime une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point $M(x, y)$ du plan appartienne à Γ .

□ Parabole

Définition

On dit qu'un ensemble Γ de points du plan est une parabole si et seulement s'il existe un repère orthonormé dans lequel une équation cartésienne de Γ est de la forme :

$$y = ax^2 \quad (a \neq 0).$$

La droite (O, \vec{j}) est l'axe de la parabole, le point O le **sommet** et la droite (O, \vec{i}) la **tangente** au sommet.

□ Ellipse

Définition

On dit qu'un ensemble Γ de points du plan est une ellipse si et seulement s'il existe un repère orthonormé dans lequel une équation cartésienne de Γ est de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (a > 0, b > 0).$$

Les points $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(0, b)$, $B'(0, -b)$ sont les **sommets** de l'ellipse. Le point O est le **centre** de l'ellipse.

Si $a > b$ on dit que (O, \vec{i}) est le « **grand axe** » de l'ellipse et (O, \vec{j}) le « **petit axe** » de l'ellipse.

Si $a < b$ les rôles de « **grand axe** » et de « **petit axe** » sont échangés.

Théorème

Soit Γ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ($a > 0, b > 0$) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Γ est l'image des cercles C_1 et C_2 de centre O et de rayon a et b respectivement par les affinités orthogonales d'axes (O, \vec{i}) et (O, \vec{j}) et de rapport $\frac{b}{a}$ et $\frac{a}{b}$.

□ Hyperbole

Définition

On dit qu'un ensemble Γ de points du plan est une hyperbole si et seulement s'il existe un repère orthonormé dans lequel une équation cartésienne de Γ est de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (a > 0, b > 0).$$

Les points $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$ sont appelés les **sommets** de l'hyperbole.

Les droites (O, \vec{i}) et (O, \vec{j}) sont les axes de symétrie de l'hyperbole, la droite (O, \vec{i}) est appelée **axe transverse**. Le point O centre de symétrie de l'hyperbole est appelé **centre** de l'hyperbole.

L'hyperbole admet deux asymptotes d'équations respectives

$$y = \frac{b}{a}x$$

et $y = -\frac{b}{a}x$.

Théorème

Soit Γ une hyperbole de centre O et d'asymptotes les droites D et D' . Soit \vec{u} et \vec{u}' deux vecteurs directeurs respectifs de D et de D' . L'hyperbole Γ a pour équation, dans le repère (O, \vec{u}, \vec{u}') , $XY = k$ où k est un réel non nul.

□ Ensemble des points dont le rapport des distances à un point et à une droite est constant

Théorèmes et définitions

• L'ensemble des points du plan équidistants d'un point F et d'une droite D ne contenant pas F est une parabole.

Il existe pour toute parabole un couple unique (F, D) , le point F n'appartenant pas à la droite D , tel que la parabole soit l'ensemble des points équidistants de F et de D .

Le point F est appelé le **foyer** de la parabole. La droite D est appelée la **directrice** de la parabole.

Le rapport $e = \frac{MF}{MH} = 1$ est l'**excentricité** de la parabole. La distance p du foyer F à la directrice D est appelée le **paramètre** de la parabole.

• L'ensemble des points du plan dont le rapport des distances à un point F et à une droite D ne contenant pas F est égal à e ($e > 0$ donné) est une ellipse si $e < 1$, une hyperbole si $e > 1$.

Pour toute ellipse qui n'est pas un cercle et pour toute hyperbole, il existe deux couples (F, D) et (F', D') tels que la conique soit l'ensemble des points dont le rapport des distances à F et à D (ou à F' et à D') soit constant.

Ce rapport qui est le même pour le couple (F, D) et pour le couple (F', D') est appelé **excentricité** de la conique. Les points F et F' sont appelés les **foyers** de la conique, D et D' sont les **directrices** associées respectivement à F et F' .

La distance $FF' = 2c$ est la **distance focale**. La droite (FF') est appelée **axe focal**.

□ Définition bifocale des coniques à centre

Théorèmes

• Soit F et F' deux points distincts du plan et a un nombre réel tel que $2a > FF'$. L'ensemble des points M du plan tels que :

$$MF + MF' = 2a$$

est l'ellipse de foyers F et F' et dont la distance des sommets de l'axe focal est 2a.

• Soit F et F' deux points distincts du plan et a un nombre réel tel que $0 < 2a < FF'$. L'ensemble des points M du plan tels que :

$$|MF' - MF| = 2a$$

est l'hyperbole de foyers F et F' et dont la distance des sommets est 2a.

□ Représentation paramétrique d'une conique

a) Parabole

Une représentation paramétrique de la parabole P d'équation $y^2 = 2px$ ($p > 0$) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) est :

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

b) Ellipse

Le plan étant orienté et rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) direct, soit E l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Une représentation paramétrique de E est :

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

c) Hyperbole

Le plan étant orienté et rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) direct, soit H l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Une représentation paramétrique de H est :

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\cos t} \\ y = b \operatorname{tg} t \end{cases} \quad (t \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}).$$

□ Tangente à une conique

Théorèmes

1. Si M est un point d'une ellipse de foyers F et F' ($M \notin (FF')$), la tangente en M est la bissectrice extérieure de \widehat{FMP} .
 2. Si M est un point d'une hyperbole de foyers F et F' ($M \notin (FF')$), la tangente en M est la bissectrice intérieure de \widehat{FMP} .
 3. Soit F une conique de foyer F et de directrice associée D, M un point de F n'appartenant pas à l'axe contenant le (ou les) foyer(s), T le point d'intersection de la tangente en M avec la directrice. Les droites (FT) et (FM) sont orthogonales.
- Dans le cas où F est une parabole, en appelant H le projeté orthogonal de M sur D, la tangente en M est, de plus, la bissectrice intérieure de \widehat{FMH} .

ÉNONCÉS DES EXERCICES ET PROBLÈMES

Équation cartésienne d'une conique

10.1

Soit λ un paramètre réel.
1° Discuter suivant les valeurs de λ , la nature de la courbe C qui a pour équation, dans un repère orthonormé,

$$y^2 + \lambda x^2 + (\lambda + 1)x - \frac{\lambda}{4} = 0.$$

2° Donner, le cas échéant, les coordonnées de son centre de symétrie et les équations de ses asymptotes.

10.2

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) on considère la courbe (Γ) d'équation :

$$y = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}.$$

Montrer que (Γ) est la réunion de parties de coniques dont on précisera les éléments caractéristiques.

10.3

Construire, relativement à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'un plan affine, l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$16x|x| + 36y|y| = 576.$$

10.4

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère la courbe Γ d'équation :

$$y^2 = \frac{1}{4}|x^2 + 2x - 3|.$$

Montrer que Γ est la réunion de coniques dont on précisera les éléments remarquables.

10.5 Soit P un plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'axes Ox et Oy.

1° Construire la courbe C d'équation :

$$9x^2 + 16y^2 = 144.$$

On précisera sa nature, son centre et ses sommets.

2° Soit h l'application de P dans P qui, au point M de coordonnées (x, y) fait correspondre le point M_1 de coordonnées :

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = \frac{4}{3}y. \end{cases}$$

Soit C_1 la transformée de C par la transformation h. Montrer que C_1 est un cercle de centre O.

10.6 Soit C la conique ayant pour équation, dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan :

$$4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y - 29 = 0.$$

1° Montrer que C est une hyperbole. Déterminer son centre Ω , ses axes, ses sommets et ses asymptotes. Représenter graphiquement C en prenant comme unité de longueur le centimètre.

2° Soit les vecteurs $\vec{T} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{T}' = 3\vec{i}' - 2\vec{j}'$. Donner l'équation de C dans le repère $(\Omega, \vec{T}, \vec{T}')$.

*10.7 Dans le plan P, rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on étudie la transformation ponctuelle T qui, à un point $M(x, y)$, fait correspondre le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{-x}{1-x} \\ y' = \frac{y}{1-x}. \end{cases}$$

1° Montrer que T établit une bijection d'une partie du plan sur elle-même. Préciser cette partie que l'on notera P_1 . T est-elle involutive?

2° Quels sont les points invariants de T?

N. B. — Dans les questions suivantes, lorsque nous aurons à considérer des parties de P telles que droite, cercle, conique, nous appellerons : « droites », « cercle », « coniques », l'intersection de ces parties avec P_1 .

3° La transformée par T d'une « droite » est-elle une « droite »? La transformée d'une « droite » peut-elle être une « droite » de même direction?

4° Quelle est l'équation de la transformée par T du « cercle » de centre O et de rayon 1? Reconnaître la nature de cette « courbe ».

5° Établir la relation entre les coefficients réels α et β qui traduit que la « courbe » d'équation :

$$x^2 + ky^2 - 2\alpha x - \beta^2 = 0$$

est globalement invariante par T (α, β, k sont des réels).

6° On considère en particulier les « courbes » Γ_k « coniques » ou ensemble

de deux « droites » ayant pour équation :

$$x^2 + ky^2 + 4x - 4 = 0.$$

Vérifier que ces courbes sont globalement invariantes par T, que toutes coupent l'axe des abscisses aux mêmes points, ont le même centre et deux axes de symétrie en commun.

Préciser la nature et tracer dans le repère donné (O, \vec{i}, \vec{j}) les courbes $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_{-1}$ et Γ_4 correspondant aux valeurs 0, 1, -1 et 4 du réel k.

7° Tracer sur un même graphique la courbe (C) d'équation :

$$y = \sqrt{-x^2 + 6x + 7}$$

et sa transformée par T.

10.8 Dans un plan P muni d'un repère orthonormé (O, \vec{n}, \vec{t}) on considère la courbe Γ d'équation $y^2 = 3x^2 - 6x - 1$.

1° Déterminer la nature de la courbe Γ , ses éléments de symétrie, ses asymptotes.

2° On note z le nombre complexe de partie réelle x , de partie imaginaire y . Montrer que Γ est l'ensemble de points M de P dont l'affixe z vérifie :

$$|z + 2z + 1| = \sqrt{3}|z + \bar{z}|.$$

*10.9 Soit E un plan, $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormé de P, f l'application de E dans E qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = z^2 + iz + 1$.

1° Déterminer l'ensemble des points M dont l'image par f est le point A d'affixe $3i$.

2° Soit M un point de E de coordonnées x et y et $M' = f(M)$ de coordonnées x' et y' son image par f . Déterminer x' et y' en fonction de x et y .

3° Soit Γ l'ensemble des points M du plan dont l'image est sur la droite d'équation $x = -1$. Déterminer une équation cartésienne de Γ .

4° Soit \mathcal{C} l'image par f de la droite (O, \vec{e}_1) . Déterminer une équation cartésienne de \mathcal{C} .

5° Montrer que Γ et \mathcal{C} sont des coniques dont on déterminera les éléments remarquables (notamment le centre, les axes, les asymptotes et les sommets lorsqu'ils existent) et que l'on construira.

(Exercice Bac. C. Dijon 1982.)

*10.10

Le plan P est rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . L'unité graphique est le centimètre.

E est la conique d'équation :

$$16x^2 + 25y^2 + 96x - 256 = 0.$$

H est la conique d'équation :

$$16x^2 - 25y^2 + 96x - 256 = 0.$$

1° Déterminer la nature, le centre, les sommets (éventuellement les asymptotes) de chacune des coniques E et H.

2° Tracer E et H.

- 10.5 Soit P un plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'axes Ox et Oy.
 1° Construire la courbe C d'équation :

$$9x^2 + 16y^2 = 144.$$

On précisera sa nature, son centre et ses sommets.

- 2° Soit h l'application de P dans P qui, au point M de coordonnées (x, y) fait correspondre le point M_1 de coordonnées :

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = \frac{4}{3}y. \end{cases}$$

Soit C_1 la transformée de C par la transformation h . Montrer que C_1 est un cercle de centre O.

- 10.6 Soit C la conique ayant pour équation, dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan :

$$4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y - 29 = 0.$$

1° Montrer que C est une hyperbole. Déterminer son centre Ω , ses axes, ses sommets et ses asymptotes. Représenter graphiquement C en prenant comme unité de longueur le centimètre.

- 2° Soit les vecteurs $\vec{I} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{J} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$. Donner l'équation de C dans le repère $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$.

- 10.7 Dans le plan P, rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on étudie la transformation ponctuelle T qui, à un point $M(x, y)$, fait correspondre le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{-x}{1-x} \\ y' = \frac{y}{1-x}. \end{cases}$$

1° Montrer que T établit une bijection d'une partie du plan sur elle-même. Préciser cette partie que l'on notera P_1 . T est-elle involutive?

- 2° Quels sont les points invariants de T?

N. B. — Dans les questions suivantes, lorsque nous aurons à considérer des parties de P telles que droite, cercle, conique, nous appellerons : « droites », « cercle », « coniques », l'intersection de ces parties avec P_1 .

- 3° La transformée par T d'une « droite » est-elle une « droite »? La transformée d'une « droite » peut-elle être une « droite » de même direction?

4° Quelle est l'équation de la transformée par T du « cercle » de centre O et de rayon 1? Reconnaître la nature de cette « courbe ».

- 5° Établir la relation entre les coefficients réels α et β qui traduit que la « courbe » d'équation :

$$x^2 + ky^2 - 2\alpha x - \beta^2 = 0$$

est globalement invariante par T (α, β, k sont des réels).

- 6° On considère en particulier les « courbes » Γ_k « coniques » ou ensemble

de deux « droites » ayant pour équation :

$$x^2 + ky^2 + 4x - 4 = 0.$$

Vérifier que ces courbes sont globalement invariantes par T, que toutes coupent l'axe des abscisses aux mêmes points, ont le même centre et deux axes de symétrie en commun.

Préciser la nature et tracer dans le repère donné (O, \vec{i}, \vec{j}) les courbes $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_{-1}$ et Γ_k correspondant aux valeurs 0, 1, -1 et k du réel k .

- 7° Tracer sur un même graphique la courbe (C) d'équation :
- $$y = \sqrt{-x^2 + 6x + 7}$$
- et sa transformée par T.

- 10.8 Dans un plan P muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) on considère la courbe Γ d'équation $y^2 = 3x^2 - 6x - 1$.

1° Déterminer la nature de la courbe Γ , ses éléments de symétrie, ses asymptotes.

2° On note z le nombre complexe de partie réelle x , de partie imaginaire y . Montrer que Γ est l'ensemble de points M de P dont l'afixe z vérifie :

$$|z + 2\bar{z} + 1| = \sqrt{3}|z + \bar{z}|.$$

- 10.9 Soit E un plan, $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormé de P, f l'application de E dans E qui à tout point M d'afixe z associe le point M' d'afixe $z' = z^2 + iz + 1$.

1° Déterminer l'ensemble des points M dont l'image par f est le point A d'afixe 3i.

2° Soit M un point de E de coordonnées x et y et $M' = f(M)$ de coordonnées x' et y' son image par f . Déterminer x' et y' en fonction de x et y .

3° Soit Γ l'ensemble des points M du plan dont l'image est sur la droite d'équation $x = -1$. Déterminer une équation cartésienne de Γ .

4° Soit C l'image par f de la droite (O, \vec{e}_1) . Déterminer une équation cartésienne de C .

5° Montrer que Γ et C sont des coniques dont on déterminera les éléments remarquables (notamment le centre, les axes, les asymptotes et les sommets lorsqu'ils existent) et que l'on construira.

(Exercice Bac. C. Dijon 1982.)

- 10.10 Le plan P est rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . L'unité graphique est le centimètre.

E est la conique d'équation :

$$16x^2 + 25y^2 + 96x - 256 = 0.$$

H est la conique d'équation :

$$16x^2 - 25y^2 + 96x - 256 = 0.$$

1° Déterminer la nature, le centre, les sommets (éventuellement les asymptotes) de chacune des coniques E et H.

- 2° Tracer E et H.

3° Représenter la courbe C d'équation :
 $16x^2 + 25y^2 + 96x - 256 = 0.$

(Exercice Bac. E. Aix-en-Provence 1982.)

Conique, foyers, directrices

10.11 Le plan E est rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) d'axes $x'Ox, y'Oy$.
 Soit C la courbe d'équation :

$$x^2 - 3y^2 + 8x + 12y + 16 = 0.$$

1° Démontrer que C est une conique dont on précisera les éléments caractéristiques : centre, axes de symétrie, foyers, directrices, asymptotes, excentricité. Tracer C.

2° Soit (D) la droite d'équation $y - 3 = 0$.

On désigne par $d(M, D)$ la distance du point M à la droite (D). Soit P le point de coordonnées $(-4, 6)$; $d(M, P)$ désigne la distance de M à P. Quel est l'ensemble des points M tels que $d(M, P) = 2d(M, D)$?

(Exercice Bac. C. Nice 1982.)

10.12 Dans le plan P muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) on considère la courbe Γ d'équation :

$$9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0.$$

Déterminer la nature de Γ en précisant ses axes, ses sommets, ses foyers et ses directrices.

10.13 Même exercice que 10.12 avec Γ d'équation :

$$36x^2 + 49y^2 - 216x + 196y - 1244 = 0.$$

10.14 Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1° Déterminer la nature de la courbe C, ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que :

$$3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0.$$

Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe (éléments de symétrie, foyers, directrices), la représenter dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

2° Au point M de C, de coordonnées (x, y) , on associe le nombre complexe $z = x + iy$ affixe de M. Calculer le module de z , en fonction uniquement :

a) de l'abscisse x de z ;

b) d'un représentant θ de l'argument de z .

Soit M' et M'' les points de C ayant pour affixes z' et z'' d'arguments représentés respectivement par θ et $\theta + \pi$ ($-\pi < \theta \leq \pi$). Calculer la longueur du segment $[M', M'']$, c'est-à-dire la distance des points M' et M'' en fonction de θ .

10.15 Le plan est rapporté au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Déterminer les coordonnées du foyer et l'équation de la directrice de la parabole d'équation :

$$y^2 + 2y - x - 3 = 0.$$

10.16 Déterminer la nature et l'équation de la conique d'excentricité $\frac{1}{2}$, de foyer le point F de coordonnées $(-1, 3)$ associé à la directrice d'équation $y = 1$ dans un repère orthonormé du plan.

10.17 Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.
 On considère la famille de courbes d'équation :

$$4mx^2 + 4max + 16y^2 - m^2a^2 = 0$$

où m est un paramètre réel et a une longueur donnée ($a > 0$).

1° Étudier suivant les valeurs de m la nature des courbes correspondantes.

2° On désigne par E la courbe obtenue pour $m = 3$.

a) Montrer que E est une conique. Préciser le centre, les foyers et les sommets de E. Calculer son excentricité e .

b) M étant un point de E, calculer en fonction de a et de l'abscisse x de M, l'expression rationnelle de la longueur OM.

On note z l'affixe de M. Calculer la longueur de OM en fonction de a et d'un argument θ de z .

c) Soit z' et z'' les affixes de deux points M' et M'' de E, d'arguments respectivement α et $\alpha + \pi$.

Calculer en fonction de a et de α le nombre complexe $z' - z''$. En déduire la longueur $M'M''$.

d) On considère le point P d'affixe Z définie par : $Z = \frac{2}{z'} + \frac{1}{z''}$. Calculer Z en fonction de a et de α . En déduire l'ensemble des points P quand α varie.

Définition bitocale d'une conique à centre

10.18 Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MF + MF' = 8;$$

F et F' étant deux points de coordonnées F(2, 0) et F'(4, 0).

10.19 Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$|MF - MF'| = 2;$$

F et F' étant deux points de coordonnées F(0, -1) et F'(0, 4).

3° Représenter la courbe C d'équation :

$$16x^2 + 25y^2 |y| + 96x - 256 = 0.$$

(Exercice Bac. E. Aix-en-Provence 1982.)

Conique, foyers, directrices

10.11 Le plan E est rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) d'axes $x'Ox, y'Oy$.

Soit C la courbe d'équation :

$$x^2 - 3y^2 + 8x + 12y + 16 = 0.$$

1° Démontrer que C est une conique dont on précisera les éléments caractéristiques : centre, axes de symétrie, foyers, directrices, asymptotes, excentricité. Tracer C.

2° Soit (D) la droite d'équation $y - 3 = 0$.

On désigne par $d(M, D)$ la distance du point M à la droite (D). Soit P le point de coordonnées $(-4, 6)$; $d(M, P)$ désigne la distance de M à P. Quel est l'ensemble des points M tels que $d(M, P) = 2d(M, D)$?

(Exercice Bac. C. Nice 1982.)

10.12 Dans le plan P muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) on considère la courbe Γ d'équation :

$$9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0.$$

Déterminer la nature de Γ en précisant ses axes, ses sommets, ses foyers et ses directrices.

10.13 Même exercice que 10.12 avec Γ d'équation :

$$36x^2 + 49y^2 - 216x + 196y - 1244 = 0.$$

10.14 Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1° Déterminer la nature de la courbe C, ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que :

$$3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0.$$

Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe (éléments de symétrie, foyers, directrices), la représenter dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
2° Au point M de C, de coordonnées (x, y) , on associe le nombre complexe $z = x + iy$ affixe de M. Calculer le module de z , en fonction uniquement :

a) de l'abscisse x de z ;

b) d'un représentant θ de l'argument de z .

Soit M' et M'' les points de C ayant pour affixes z' et z'' d'arguments représentés respectivement par θ et $\theta + \pi$ ($-\pi < \theta \leq \pi$). Calculer la longueur du segment $[M', M'']$, c'est-à-dire la distance des points M' et M'' en fonction de θ .

10.15

Le plan est rapporté au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Déterminer les coordonnées du foyer et l'équation de la directrice de la parabole d'équation :

$$y^2 + 2y - x - 3 = 0.$$

10.16

Déterminer la nature et l'équation de la conique d'excentricité $\frac{1}{2}$, de foyer le point F de coordonnées $(-1, 3)$ associé à la directrice d'équation $y = 1$ dans un repère orthonormé du plan.

10.17

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.

On considère la famille de courbes d'équation :

$$4mx^2 + 4max + 16y^2 - m^2a^2 = 0$$

où m est un paramètre réel et a une longueur donnée ($a > 0$).

1° Étudier suivant les valeurs de m la nature des courbes correspondantes.

2° On désigne par E la courbe obtenue pour $m = 3$.

a) Montrer que E est une conique. Préciser le centre, les foyers et les sommets de E. Calculer son excentricité e .

b) M étant un point de E, calculer en fonction de a et de l'abscisse x de M, l'expression rationnelle de la longueur OM.

On note z l'affixe de M. Calculer la longueur de OM en fonction de a et d'un argument θ de z .

c) Soit z' et z'' les affixes de deux points M' et M'' de E, d'arguments respectivement α et $\alpha + \pi$. Calculer en fonction de a et de α le nombre complexe $z' - z''$. En déduire la longueur $M'M''$.

d) On considère le point P d'affixe Z définie par : $Z = \frac{2}{z'} + \frac{1}{z''}$. Calculer Z en fonction de a et de α . En déduire l'ensemble des points P quand α varie.

Définition bifocale d'une conique à centre

10.18

Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MF + MF' = 8;$$

F et F' étant deux points de coordonnées F(2, 0) et F'(4, 0).

10.19

Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$|MF - MF'| = 2;$$

F et F' étant deux points de coordonnées F(0, -1) et F'(0, 4).

Représentation paramétrique d'une conique

10.20 Soit E une ellipse de grand axe (A, A') . Soit M un point quelconque de E distinct de A et de A'. La tangente en M à E coupe les tangentes à E en A et A' aux points respectifs P et P'.

1° Montrer que $\overline{AP} \cdot \overline{A'P'}$ est constant quand M varie. (On utilisera une représentation paramétrique de l'ellipse.)

2° Soit F et F' les foyers de l'ellipse. Montrer que les droites (FP) et (F'P') sont orthogonales, ainsi que les droites (F'P) et (FP').

RÉSOLUTIONS DES EXERCICES ET PROBLÈMES

10.1 On étudie les courbes d'équations :

$$y^2 + \lambda x^2 + (\lambda + 1)x - \frac{\lambda}{4} = 0.$$

Si $\lambda = 0$ l'équation devient $y^2 + x = 0$; la courbe est une parabole de sommet O et d'axe Ox.

Si $\lambda \neq 0$ l'équation peut s'écrire :

$$(1) \quad y^2 + \lambda \left(x + \frac{\lambda + 1}{2\lambda}\right)^2 - \frac{2\lambda + 1}{4\lambda} = 0.$$

Si $\lambda = -\frac{1}{2}$ (1) s'écrit $y^2 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$.

La courbe est la réunion de deux droites d'équations respectives :

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ l'équation (1) s'écrit :

$$\frac{y^2}{\frac{2\lambda + 1}{4\lambda}} + \frac{\left(x + \frac{\lambda + 1}{2\lambda}\right)^2}{\frac{2\lambda + 1}{4\lambda^2}} - 1 = 0.$$

Si $\lambda > 0$ les réels $\frac{2\lambda + 1}{4\lambda}$ et $\frac{2\lambda + 1}{4\lambda^2}$ ont le même signe, la courbe C est une ellipse de centre $O' \left(-\frac{\lambda + 1}{2\lambda}, 0\right)$ et d'axes Ox et Oy.

Si $\lambda < 0$ et $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ les nombres $\frac{2\lambda + 1}{4\lambda}$ et $2\lambda + 1$ sont de signe contraire et la

courbe C est une hyperbole de centre $O' \left(-\frac{\lambda + 1}{2\lambda}, 0\right)$ et admettant pour asymptotes les droites d'équation :

$$y = \sqrt{-\lambda} \left(x + \frac{\lambda + 1}{2\lambda}\right) \quad \text{et} \quad y = -\sqrt{-\lambda} \left(x + \frac{\lambda + 1}{2\lambda}\right).$$

10.2

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$$

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 \geq 0 \\ x^2 - 6x + 5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1 \text{ ou } x-5) \\ 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$$y = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x^2 - 6x + 5 \\ y^2 = -(x^2 - 6x + 5) \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{si } \begin{cases} x \leq 1 \text{ ou } x \geq 5 \\ 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

1^{er} cas :

$$\begin{cases} y^2 = -x^2 + 6x - 5 \\ y \geq 0 \\ 1 \leq x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 4 \\ y \geq 0 \\ 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Cette équation est l'équation de l'ensemble des points du cercle de centre I(3, 0) et de rayon 2 d'ordonnée positive.

2^e cas :

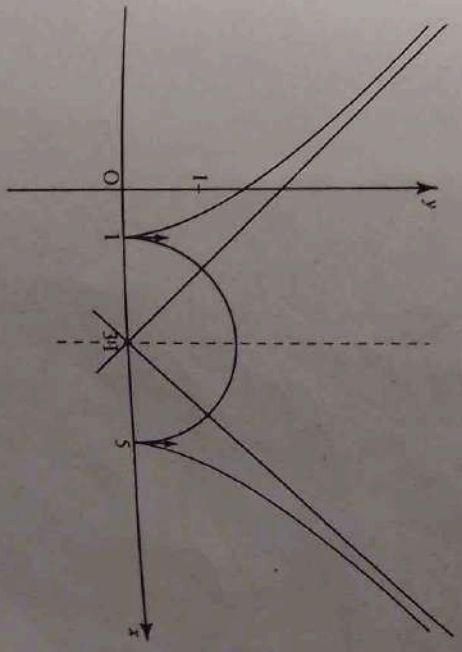
$$\begin{cases} y^2 = x^2 - 6x + 5 \\ y \geq 0 \\ x \leq 1 \text{ ou } x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{y^2}{4} - 1 = 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 1 \text{ ou } x \geq 5 \end{cases}$$

Ces équations sont les équations de l'ensemble des points d'une hyperbole d'équation réduite $\frac{y^2}{4} + \frac{(x-3)^2}{4} = 1$ et d'ordonnée positive.

Le centre de l'hyperbole a pour coordonnées (3, 0), les asymptotes ont pour équations :

$$y = x - 3 \quad \text{et} \quad y = -x + 3$$

d'où :



10.3

Déterminons la forme de l'équation :

$$(1) \quad 16|x| |x| + 36y |y| = 576$$

suivant la position de M(x, y) dans l'un des quatre quadrants.

a) Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$

$$16x^2 + 36y^2 = 576$$

ou :
$$\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{4^2} - 1 = 0.$$

C'est donc la partie de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{4^2} - 1 = 0$ située dans le premier quadrant.

b) Si $x \geq 0$ et $y \leq 0$

(1) devient :

$$16x^2 - 36y^2 = 576$$

ou :

$$\frac{x^2}{6^2} - \frac{y^2}{4^2} - 1 = 0.$$

C'est donc la partie de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{6^2} - \frac{y^2}{4^2} - 1 = 0$ située dans le quatrième quadrant.

Le centre de l'hyperbole est O, les asymptotes ont pour équation :

$$y = \frac{2}{3}x \quad \text{et} \quad y = -\frac{2}{3}x.$$

c) $x \leq 0$ et $y \geq 0$

(1) devient :

$$-16x^2 + 36y^2 = 576$$

ou :

$$-\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{4^2} - 1 = 0.$$

C'est donc la partie de l'hyperbole d'équation $-\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{4^2} - 1 = 0$ située dans le deuxième quadrant.

Le centre de l'hyperbole est O, les asymptotes ont pour équations :

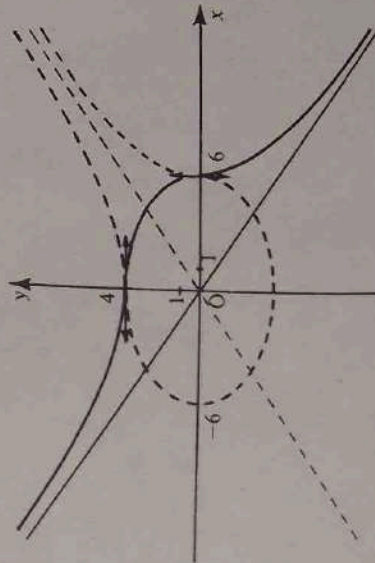
$$y = \frac{2}{3}x \quad \text{et} \quad y = -\frac{2}{3}x.$$

d) $x \leq 0$ et $y \leq 0$

(1) devient :

$$\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{4^2} = -1.$$

L'ensemble des points vérifiant cette équation est vide d'où :



10.4

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}) \quad |x^2 + 2x - 3| &= x^2 + 2x - 3 & \iff x \leq -3 \text{ ou } x \geq 1 \\ (\forall x \in \mathbb{R}) \quad |x^2 + 2x - 3| &= -(x^2 + 2x - 3) & \iff -3 \leq x \leq 1. \\ \forall x \in]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[& \text{ l'équation de } \Gamma \text{ s'écrit :} \end{aligned}$$

$$y^2 = \frac{1}{4}(x^2 + 2x - 3),$$

c'est-à-dire :

$$4y^2 - (x^2 + 2x) + 3 = 0$$

$$4y^2 - (x + 1)^2 + 4 = 0$$

$$(2) \quad y^2 - \frac{(x + 1)^2}{2^2} + 1 = 0.$$

L'équation (2) est l'équation d'une hyperbole H de centre $O'(-1, 0)$ d'axes Ox et Oy et d'asymptotes les droites d'équations respectives :

$$y = \frac{1}{2}(x + 1) \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{2}(x + 1).$$

$$(\forall x \in [-3, 1]) \text{ l'équation de } \Gamma \text{ s'écrit : } y^2 = -\frac{1}{4}(x^2 + 2x - 3).$$

c'est-à-dire :

$$4y^2 + (x^2 + 2x) - 3 = 0$$

ou :

$$4y^2 + (x + 1)^2 - 4 = 0$$

ou encore :

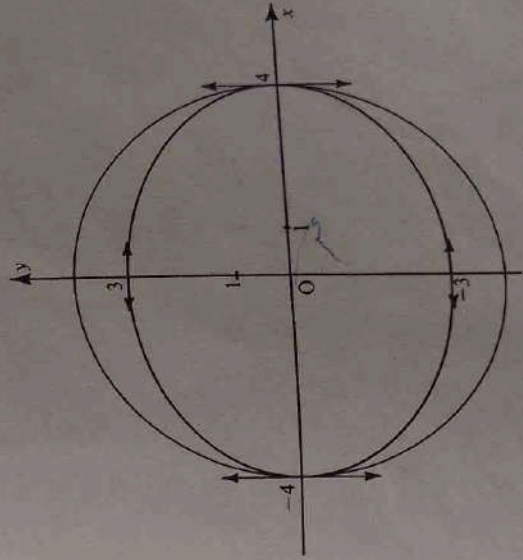
$$y^2 + \frac{(x + 1)^2}{2^2} - 1 = 0. \quad (3)$$

L'équation (3) est l'équation d'une ellipse E de centre $O'(-1, 0)$ et d'axes Ox et Oy.

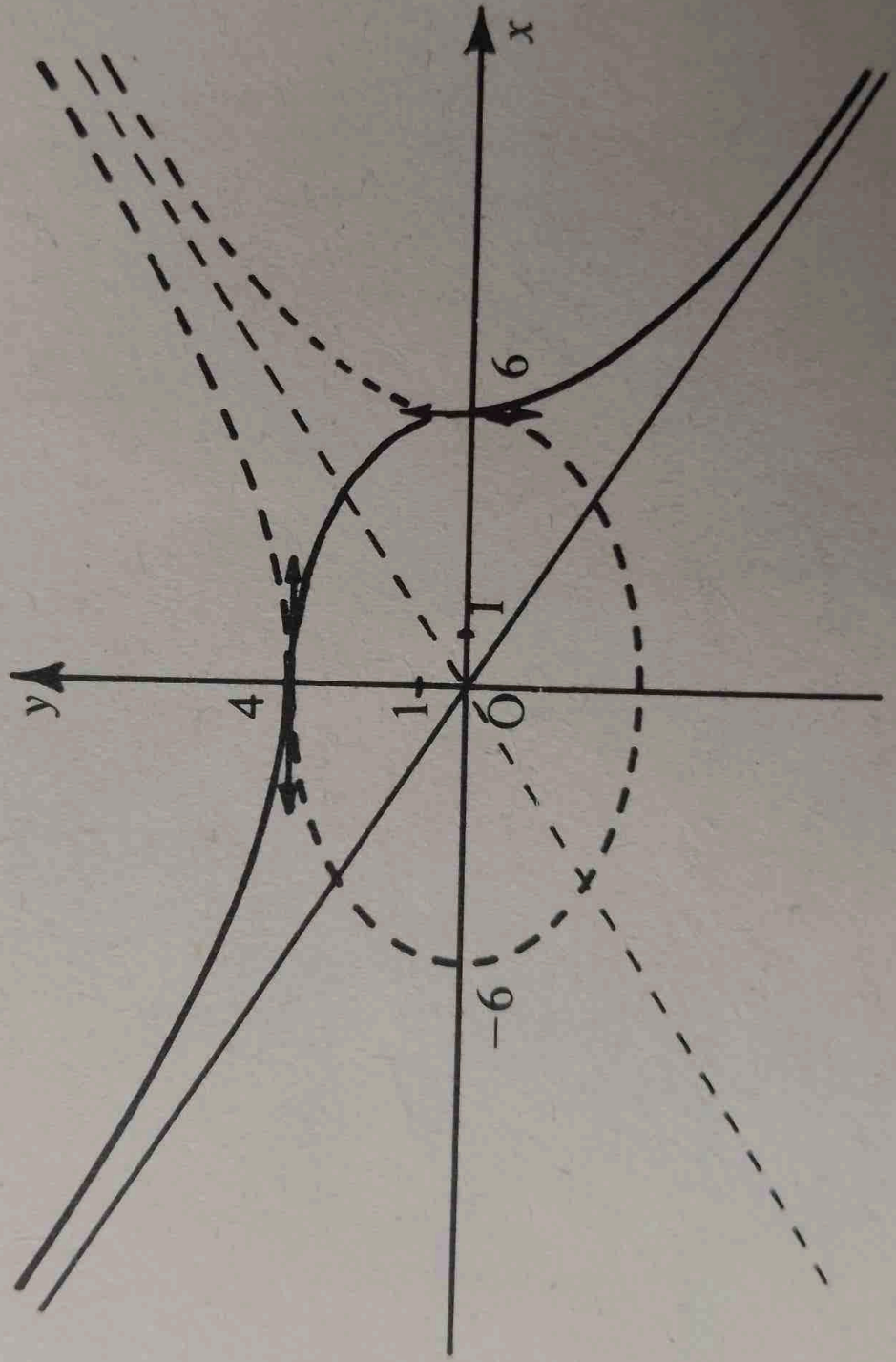
La courbe Γ est la réunion de H et de E.

10.5 L'équation réduite de la courbe C est : $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$

C est une ellipse de centre $(0, 0)$ de sommets les points de coordonnées $(-4, 0)$; $(4, 0)$; $(0, -3)$; $(0, 3)$.



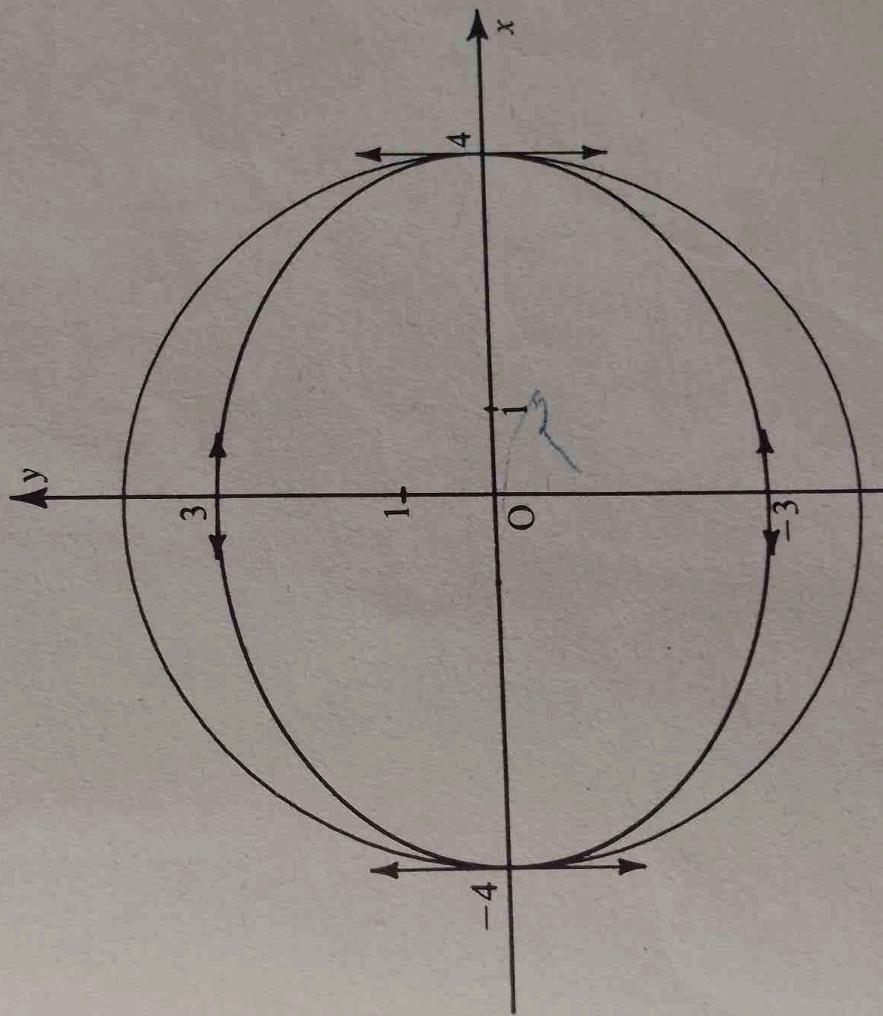
L'ensemble des points vérifiant cette équation est vide d'où :



10.5

1° L'équation réduite de la courbe C est : $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$.

C est une ellipse de centre $(0, 0)$ de sommets les points de coordonnées $(-4, 0)$; $(4, 0)$; $(0, -3)$; $(0, 3)$.



2° h est une affinité orthogonale d'axe l'axe des abscisses et de rapport $\frac{3}{4}$

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = \frac{3}{4} y_1 \end{cases}$$

L'équation de C devient : $\frac{x^2}{4^2} + \frac{(\frac{3}{4} y_1)^2}{3^2} = 1$,

d'où : $x_1^2 + y_1^2 = 4^2$.

C₁ est le cercle de centre O et de rayon 4.

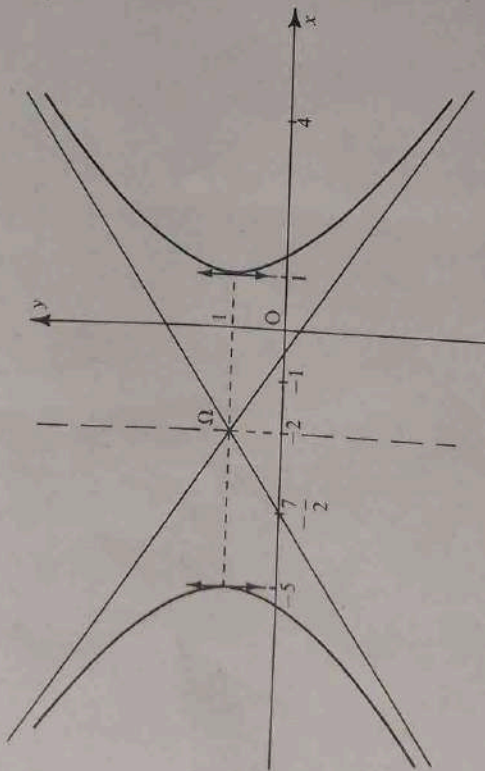
10.6 1° Soit C la courbe d'équation :

(1) $4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y - 29 = 0$.

(1) s'écrit successivement

$$\begin{aligned} &4(x^2 + 4x) - 9(y^2 - 2y) - 29 = 0 \\ &4[(x + 2)^2 - 4] - 9[(y - 1)^2 - 1] - 29 = 0 \\ &4(x + 2)^2 - 9(y - 1)^2 - 36 = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{(x + 2)^2}{3^2} - \frac{(y - 1)^2}{2^2} - 1 = 0.$$



C est une hyperbole de centre le point $\Omega(-2, 1)$ d'axes les droites d'équations : $x = -2$ et $y = 1$ et d'asymptotes les droites d'équations :

$2x - 3y + 7 = 0$ et $2x + 3y + 1 = 0$.

Soit M un point de coordonnées (x, y) dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ et de coordonnées (X, Y) dans le repère $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$.

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{OM} &= \Omega\vec{O} + \Omega\vec{M} = -2\vec{i} + \vec{j} + X\vec{I} + Y\vec{J} \\ \vec{OM} &= -2\vec{i} + \vec{j} + X(3\vec{i} + 2\vec{j}) + Y(3\vec{i} - 2\vec{j}). \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{cases} x = 3X + 3Y - 2 \\ y = 2X - 2Y + 1 \end{cases}$$

d'où l'équation de C dans le nouveau repère :

$$4(3X + 3Y - 2)^2 - 9(2X - 2Y + 1)^2 + 16(3X + 3Y - 2)^2 + 18(2X - 2Y + 1) - 29 = 0$$

d'où :

$$XY = \frac{1}{4}$$

10.7 Soit T la transformation ponctuelle définie par

$$\begin{cases} x' = \frac{-x}{1-x} \\ y' = \frac{y}{1-x} \end{cases}$$

1° L'application T est définie pour tout point du plan n'appartenant pas à la droite d'équation $x = 1$. Soit P_1 le complémentaire de cette droite dans le plan.

$(\forall M \in P_1)$ on a : $(1-x)x' = -x$

c'est-à-dire : $x(1-x') = -x'$.

$(\forall M \in P_1)$ on a : $(1-x)y' = y$.

Donc si $x' \neq 1$ on a : $x = \frac{x'}{x'-1}$ et $y = \frac{-y'}{x'-1}$.

Pour tout point $M' \in P_1$ on peut définir l'image réciproque de M' , T est une bijection de P_1 sur P_1 .

$(\forall M \in P_1) T[T(M)] = M$ T est involutive.

2° Les points invariants ont des coordonnées qui vérifient :

$$\begin{cases} x(x-2) = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$$

Donc l'ensemble des points invariants est la réunion de la droite d'équation $x = 0$ et du point de coordonnées $(2, 0)$.

3° La transformation réciproque est définie par :

$$\begin{cases} x = \frac{x'}{x'-1} \\ y = \frac{-y'}{x'-1} \end{cases}$$

Soit D la « droite » d'équation :

$$\begin{cases} ux + vy + w = 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \quad (u \text{ et } v \text{ non tous deux nuls}).$$

La transformée de D a pour équation

$$\begin{cases} u \frac{x'}{x'-1} + v \frac{-y'}{x'-1} + w = 0 \\ x' \neq 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x'(u+w) - uy' - w = 0 \\ x' \neq -1 \end{cases}$$

C'est l'équation d'une droite car $u+w$ et v sont non tous deux nuls car sinon D aurait pour équation $u(x-1) = 0$ ce qui est impossible.

$$4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y - 29 = 0.$$

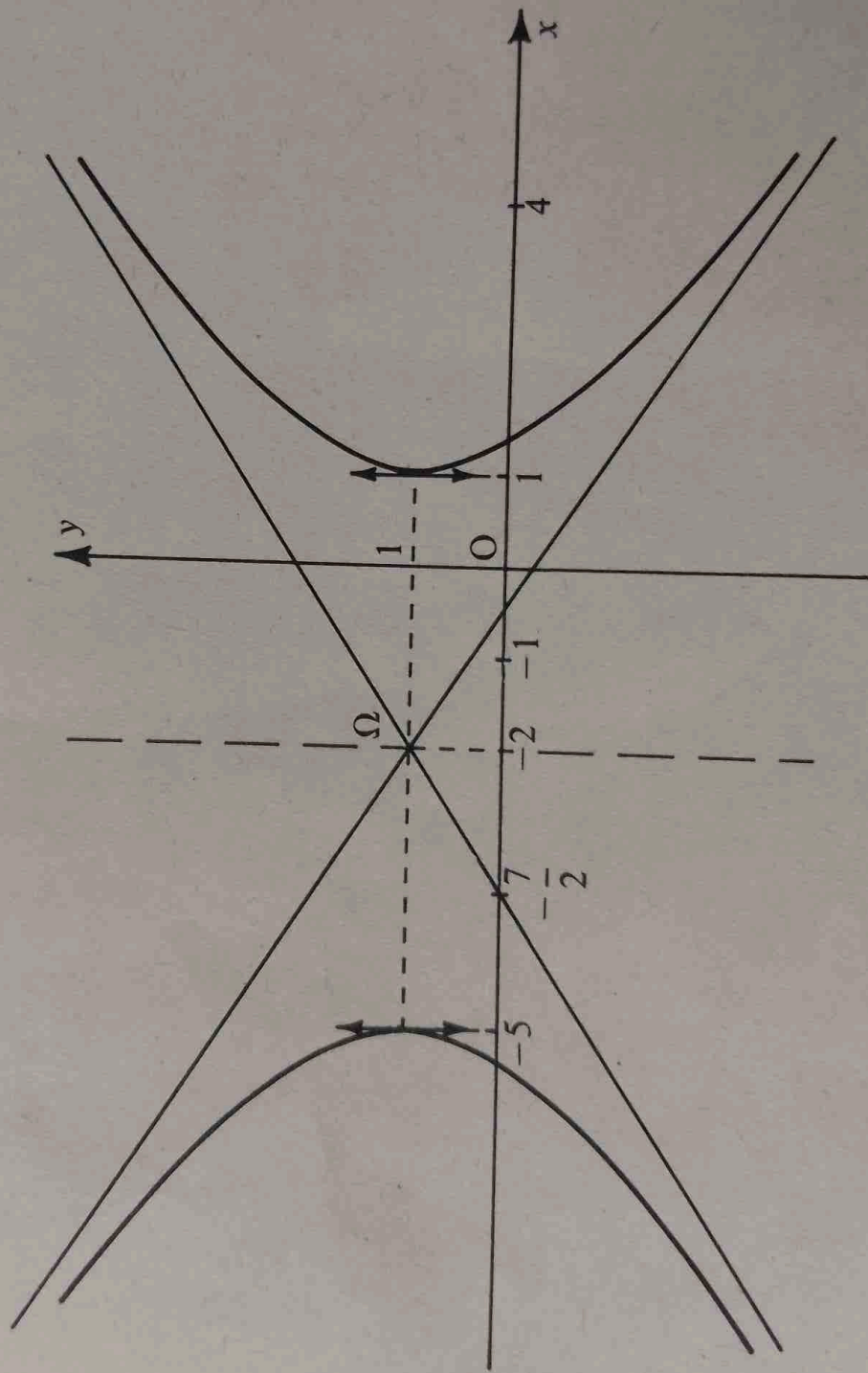
(1) s'écrit successivement :

$$4(x^2 + 4x) - 9(y^2 - 2y) - 29 = 0$$

$$4[(x + 2)^2 - 4] - 9[(y - 1)^2 - 1] - 29 = 0$$

$$4(x + 2)^2 - 9(y - 1)^2 - 36 = 0$$

$$\frac{(x + 2)^2}{3^2} - \frac{(y - 1)^2}{2^2} - 1 = 0.$$



C est une hyperbole de centre le point $\Omega(-2, 1)$ d'axes les droites

de sommets $(-2, -1)$ $(-2, 3)$

La transformée de D est une droite de même direction si, et seulement si,

$$\begin{cases} u = -(u+w) \\ 2u+w=0. \end{cases}$$

4° L'équation du « cercle » de centre O et de rayon 1 est :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Le transformé a pour équation :

$$\begin{cases} y'^2 = -2x' + 1 \\ x' \neq 1 \end{cases} \iff y'^2 = -2x' + 1$$

c'est une parabole d'axe : l'axe des abscisses et de sommet le point de coordonnées $(\frac{1}{2}, 0)$.

5° La « courbe » d'équation :

$$\begin{cases} x^2 + ky^2 - 2\alpha x - \beta^2 = 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

a pour transformée la « courbe » d'équation :

$$\begin{cases} x'^2(1-2\alpha-\beta^2) + ky'^2 + x'(2\alpha+2\beta^2) - \beta^2 = 0 \\ x' \neq 1. \end{cases}$$

La courbe sera globalement invariante par T si et seulement si :

$$\begin{cases} 1-2\alpha-\beta^2 = 1 \\ 2\alpha+2\beta^2 = -2\alpha \end{cases}$$

d'où la courbe sera globalement invariante si et seulement si :

$$2\alpha + \beta^2 = 0.$$

6° Soit Γ_k les « courbes » d'équation :

$$\begin{cases} x^2 + ky^2 + 4x - 4 = 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

on a :

$$\alpha = -2 \text{ et } \beta^2 = 4$$

on a $2\alpha + \beta^2 = 0$ donc Γ_k est globalement invariante par T.

Les courbes Γ_k coupent l'axe des abscisses aux points de coordonnées :

$$(-2+2\sqrt{2}, 0) \text{ et } (-2-2\sqrt{2}, 0).$$

L'équation réduite de Γ_k est :

$$\frac{(x+2)^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{ky^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1.$$

Le centre des « coniques » Γ_k est le point de coordonnées $(-2, 0)$.

Les axes de symétrie ont pour équation :

$$x = -2 \text{ et } y = 0.$$

Equation de Γ_0 :

$$\frac{(x+2)^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1.$$

Γ_0 est la réunion de deux droites parallèles d'équation :

$$x = 2\sqrt{2} - 2 \text{ et } x = -2\sqrt{2} - 2.$$

Equation de Γ_1 :

$$\frac{(x+2)^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1.$$

Γ_1 est le cercle de centre le point de coordonnées $(-2, 0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

$$\text{Equation de } \Gamma_{-1} : \frac{(x+2)^2}{(2\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1.$$

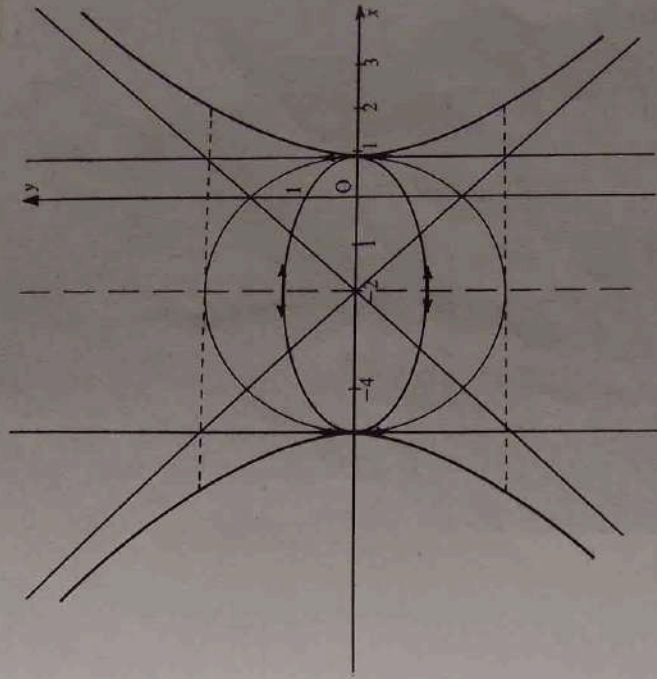
Γ_{-1} est l'hyperbole de centre $(-2, 0)$ d'asymptotes les droites d'équation :

$$x - y + 2 = 0 \text{ et } x + y + 2 = 0.$$

Equation de Γ_4 :

$$\frac{(x+2)^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1.$$

Γ_4 est une ellipse de centre $(-2, 0)$ de grand axe l'axe des abscisses.



7° Soit C la courbe d'équation :

$$y = \sqrt{-x^2 + 6x + 7} \iff \begin{cases} y^2 + x^2 - 6x - 7 = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$ est l'équation d'un cercle de centre $(3, 0)$ et de rayon 4.

C est donc un demi-cercle.

La courbe C' transformée de C par T a pour équation :

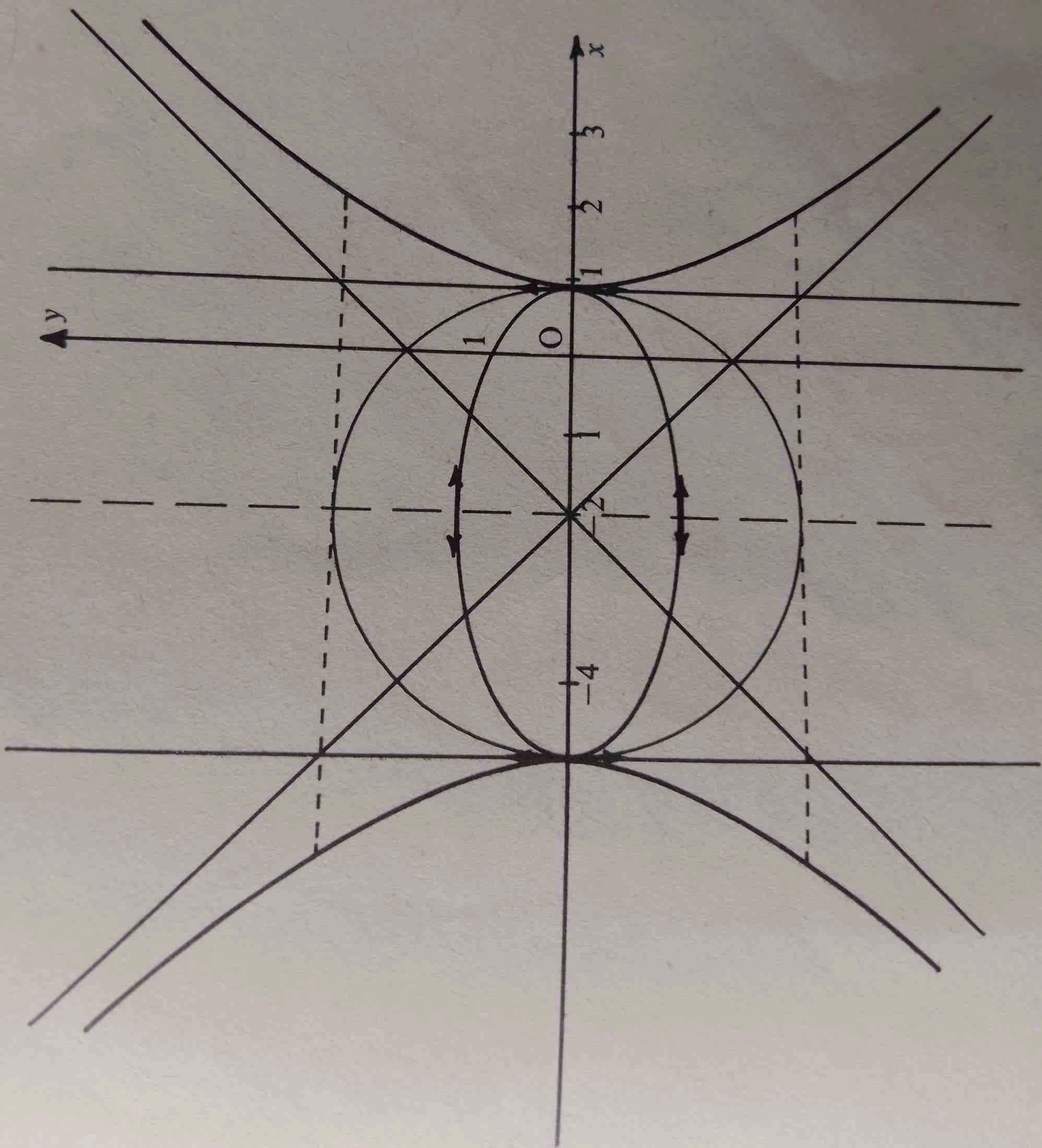
$$y' = \frac{1-x'}{|x'-1|} \sqrt{12x'^2 - 20x' + 7} \text{ avec } x' \neq 1$$

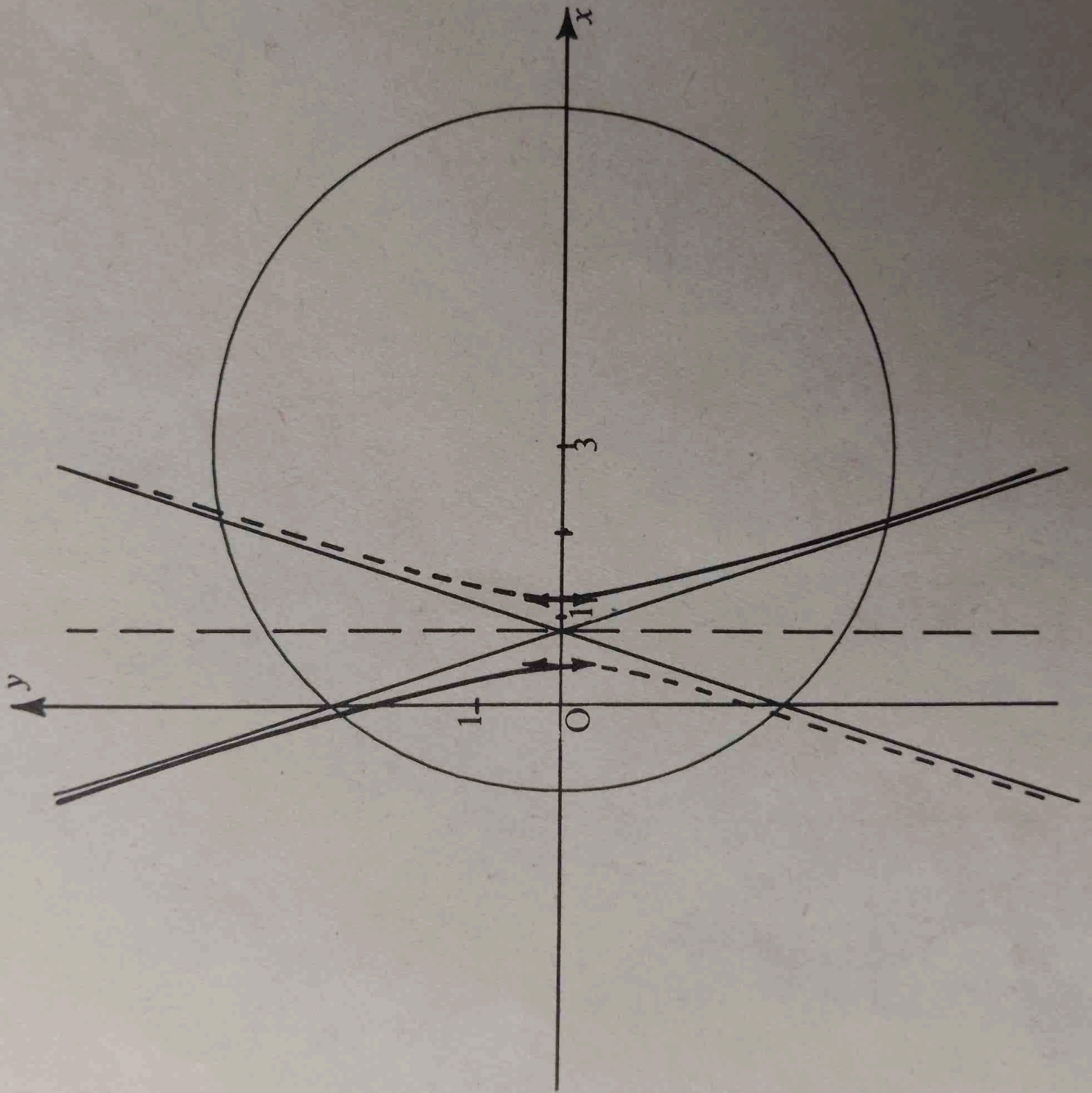
$$12x'^2 - 20x' + 7 \geq 0 \iff x' \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x' \geq \frac{7}{6}$$

d'où l'équation de C' :

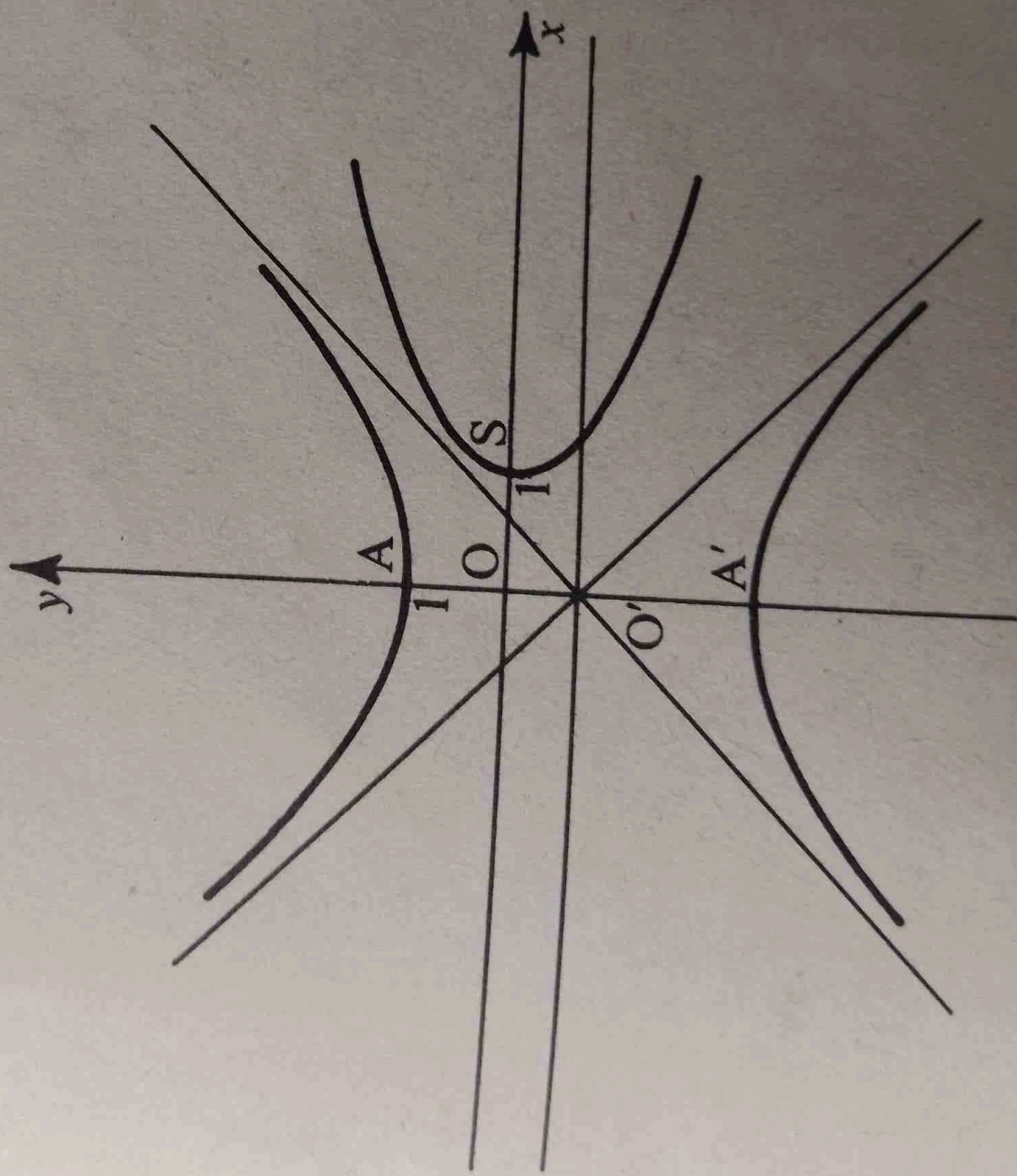
$$\begin{cases} y' = \sqrt{12x'^2 - 20x' + 7} & \text{si } x' \geq \frac{7}{6} \\ y' = -\sqrt{12x'^2 - 20x' + 7} & \text{si } x' \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

axe des abscisses.





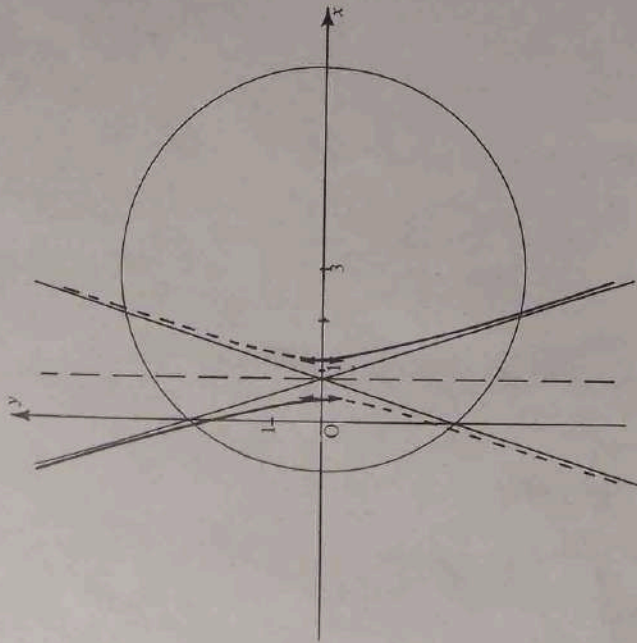
... transverse
 ... et $A'(0, -2)$, d'asymptotes les droites
 d'équations respectives $y = x - \frac{1}{2}$ et $y = -x - \frac{1}{2}$ dans le repère $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
 L'équation de C est $x - 1 = y^2$. C est une parabole de sommet $S(1, 0)$
 axe (S, \vec{e}_1) .



C'est donc une partie de l'hyperbole d'équation : $y^2 = 12x^2 - 20x + 7$.
 Cette hyperbole a pour centre $(\frac{2}{3}, 0)$, les équations des asymptotes sont :

$$y = -\sqrt{12}x + \frac{5}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad y = \sqrt{12}x - \frac{5}{\sqrt{3}}$$

L'axe transverse de l'hyperbole est l'axe des abscisses d'où :



10.8 1° L'équation réduite de Γ est : $\frac{(x-1)^2}{(\frac{2}{\sqrt{3}})^2} - \frac{y^2}{2^2} - 1 = 0$.

Γ est une hyperbole de centre $(1, 0)$ et d'asymptotes les droites ayant pour équation :

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{3}(x-1) \quad \text{et} \quad y = -\sqrt{3}(x-1). \\ 2^\circ (|z + 2\bar{z} + 1| = \sqrt{3}|z + \bar{z}|) &\iff |x + iy + 2(x - iy) + 1| = \sqrt{3}|2x| \\ &\iff |3x + 1 - iy| = \sqrt{3}|2x| \\ &\iff (3x + 1)^2 + y^2 = 3(4x^2) \\ &\iff y^2 = 3x^2 - 6x + 1. \end{aligned}$$

10.9 1° Les points M d'image A sont les points d'affixe z vérifiant :

$$3i = z^2 + iz + 1$$

c'est-à-dire :

$$z^2 + iz + 1 - 3i = 0.$$

Les racines de cette équation du second degré sont :

$$z_1 = 1 + i \quad \text{et} \quad z_2 = -1 - 2i.$$

Les points cherchés sont $M_1(1, 1)$ et $M_2(-1, -2)$.

2° On a : $x' + iy' = (x + iy)^2 + i(x + iy) + 1$

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2 - y + 1 \\ y' = 2xy + x. \end{cases}$$

c'est-à-dire :

3° Les coordonnées (x, y) des points M de Γ vérifient :

$$\begin{cases} -1 = x^2 - y^2 - y + 1 \\ y' = 2xy + x. \end{cases}$$

Une équation de Γ est $x^2 - y^2 - y + 2 = 0$.

4° Une équation de la droite $(0, \vec{e}_1)$ est : $y = 0$. Un point M appartient à cette droite si, et seulement si, ses coordonnées sont $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$. Les coordonnées du point M' image de M sont :

$$\begin{cases} x' = x^2 + 1 \\ y' = x. \end{cases}$$

M' appartient donc à la courbe d'équation $x = y'^2 + 1$.

Réciproquement soit $N(a, b)$ tel que $a = b^2 + 1$ on peut écrire $\begin{cases} a = b^2 + 1 \\ b = b \end{cases}$

donc N est l'image du point $N_1(b, 0)$, N_1 étant un point de la droite $(0, \vec{e}_1)$.

La courbe C a pour équation : $x = y^2 + 1$.

5° Une équation de Γ est $x^2 - y^2 - y + 2 = 0$ ou encore :

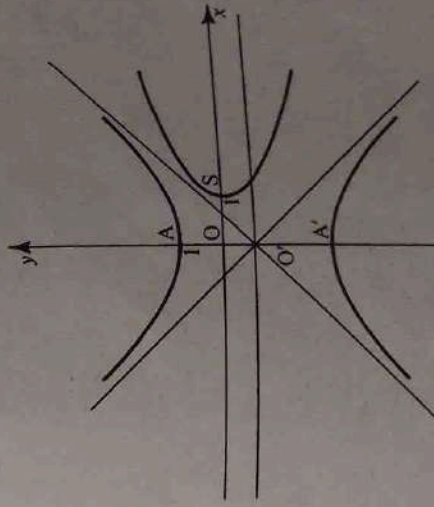
$$x^2 - \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} = 0.$$

Γ est l'hyperbole d'équation :

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + 1 = 0.$$

Γ est une hyperbole équilatère de centre $O'(0, -\frac{1}{2})$, d'axe transverse $(0, \vec{e}_2)$, de sommets $A(0, 1)$ et $A'(0, -2)$, d'asymptotes les droites d'équations respectives $y = x - \frac{1}{2}$ et $y = -x - \frac{1}{2}$ dans le repère $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Une équation de C est $x - 1 = y^2$. C est une parabole de sommet $S(1, 0)$ d'axe (S, \vec{e}_1) .



10.10 1° Soit la courbe E d'équation dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})

$$16x^2 + 25y^2 + 96x - 256 = 0$$

que l'on peut écrire successivement :

$$16(x^2 + 6x) + 25y^2 - 256 = 0$$

$$16[(x+3)^2 - 9] + 25y^2 - 256 = 0$$

$$16(x+3)^2 + 25y^2 - 400 = 0$$

$$\frac{(x+3)^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} - 1 = 0.$$

ou encore :
E est une ellipse de centre $O'(-3, 0)$, d'axes les droites (O', \vec{i}) et (O', \vec{j}) et de sommets $A(2, 0)$, $A'(-8, 0)$, $B(-3, -4)$ et $B(-3, 4)$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

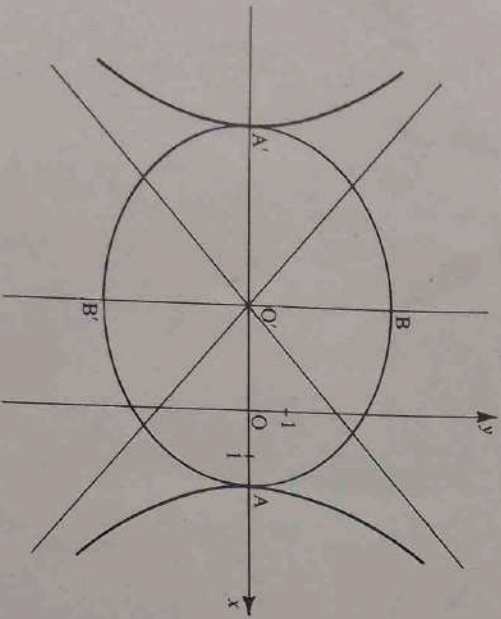
Soit la courbe H d'équation dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})

$$16x^2 - 25y^2 + 96x - 256 = 0$$

ou encore :

$$\frac{(x+3)^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} - 1 = 0.$$

H est une hyperbole de centre $O'(-3, 0)$, d'axe transverse (O', \vec{i}) , d'axe non transverse (O', \vec{j}) . Les sommets sont $A(2, 0)$ et $A'(-8, 0)$; des équations des asymptotes sont $y = \frac{4}{5}(x+3)$ et $y = -\frac{4}{5}(x+3)$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .



2° Soit C la courbe d'équation :

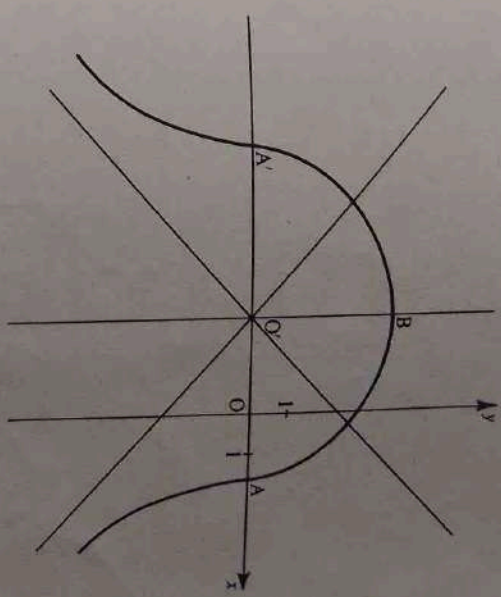
$$16x^2 + 25y^2 + 96x - 256 = 0$$

dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit P_1 le demi-plan $y \geq 0$; une équation de $C \cap P_1$ est :

$$16x^2 + 25y^2 + 96x - 256 = 0$$

d'où : C et E sont confondues dans P_1 .
Soit P_2 le demi-plan $y \leq 0$, une équation de $C \cap P_2$ est
 $16x^2 - 25y^2 + 96x - 256 = 0$
donc C et H sont confondues dans P_2
d'où :



10.11 1° Dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) soit C la courbe d'équation :

$$x^2 - 3y^2 + 8x + 12y + 16 = 0$$

que l'on peut écrire successivement :

$$x^2 + 8x - 3(y^2 + 4y) + 16 = 0$$

$$(x+4)^2 - 3(y+2)^2 + 12 = 0$$

$$\frac{(x+4)^2}{12} + \frac{(y+2)^2}{4} - 1 = 0.$$

ou encore :
C est une hyperbole de centre $O'(-4, 2)$, d'axe transverse (O', \vec{j}) , d'axe non transverse (O', \vec{i}) , de sommet $A'(-4, 0)$ et $A(-4, 4)$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Les asymptotes sont les droites d'équations dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{4}{\sqrt{3}} + 2 \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{4}{\sqrt{3}} + 2.$$

On pose $b^2 = 12$ et $a^2 = 4$, c'est-à-dire $b = 2\sqrt{3}$ et $a = 2$.

On a $c^2 = b^2 + a^2 = 16$ d'où $c = 4$.

Les foyers ont donc pour coordonnées :

$$F(-4, 6) \quad \text{et} \quad F'(-4, -2).$$

Les directrices sont les parallèles à l'axe non focal situées à la distance

$$\frac{a^2}{c} = 1 \quad \text{du centre } O'.$$

10.10 1° Soit la courbe E d'équation dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})

$$16x^2 + 25y^2 + 96x - 256 = 0$$

que l'on peut écrire successivement :

$$16(x^2 + 6x) + 25y^2 - 256 = 0$$

$$16[(x+3)^2 - 9] + 25y^2 - 256 = 0$$

$$16(x+3)^2 + 25y^2 - 400 = 0$$

ou encore :

$$\frac{(x+3)^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} - 1 = 0.$$

E est une ellipse de centre $O'(-3, 0)$ d'axes les droites (O', \vec{i}) et (O', \vec{j}) et de sommets $A(2, 0)$, $A'(-8, 0)$, $B(-3, -4)$ et $B(-3, 4)$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

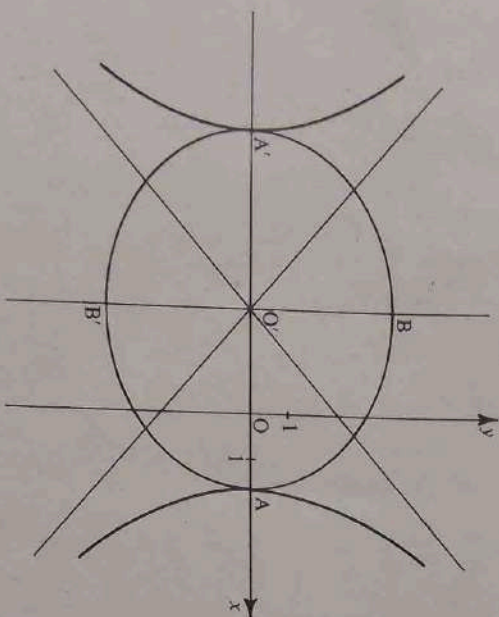
Soit la courbe H d'équation dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})

$$16x^2 - 25y^2 + 96x - 256 = 0$$

ou encore :

$$\frac{(x+3)^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} - 1 = 0.$$

H est une hyperbole de centre $O'(-3, 0)$ d'axe transverse (O', \vec{i}) , d'axe non transverse (O', \vec{j}) . Les sommets sont $A(2, 0)$ et $A'(-8, 0)$; des équations des asymptotes sont $y = \frac{4}{5}(x+3)$ et $y = -\frac{4}{5}(x+3)$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .



3° Soit C la courbe d'équation :

$$16x^2 + 25y^2 + 96x - 256 = 0$$

dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit P_1 le demi-plan $y \geq 0$; une équation de $C \cap P_1$ est :

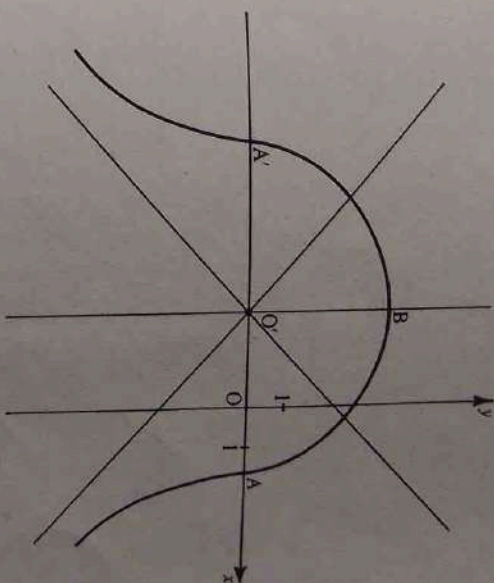
$$16x^2 + 25y^2 + 96x - 256 = 0$$

d'où : C et E sont confondues dans P_1 .

Soit P_2 le demi-plan $y \leq 0$, une équation de $C \cap P_2$ est

$$16x^2 - 25y^2 + 96x - 256 = 0$$

donc C et H sont confondues dans P_2
d'où :



10.11 1° Dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) soit C la courbe d'équation :

$$x^2 - 3y^2 + 8x + 12y + 16 = 0$$

que l'on peut écrire successivement :

$$x^2 + 8x - 3(y^2 + 4y) + 16 = 0$$

$$(x+4)^2 - 3(y+2)^2 + 12 = 0$$

$$\frac{(x+4)^2}{12} + \frac{(y+2)^2}{4} - 1 = 0.$$

ou encore :

C est une hyperbole de centre $O'(-4, 2)$, d'axe transverse (O', \vec{i}) d'axe non transverse (O', \vec{j}) , de sommet $A'(-4, 0)$ et $A(-4, 4)$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Les asymptotes sont les droites d'équations dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{4}{\sqrt{3}} + 2 \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{4}{\sqrt{3}} + 2.$$

On pose $b^2 = 12$ et $a^2 = 4$ c'est-à-dire $b = 2\sqrt{3}$ et $a = 2$.

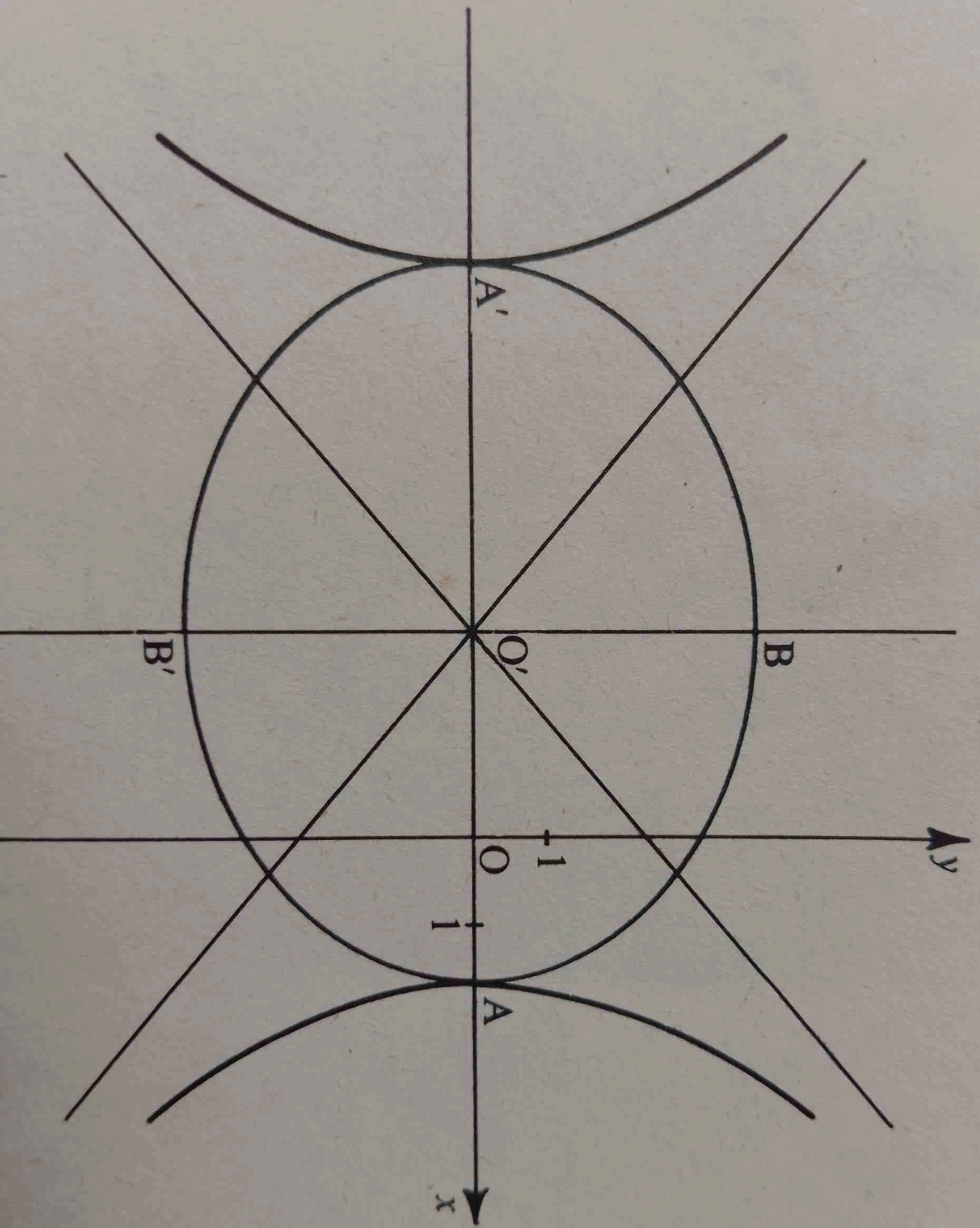
On a $c^2 = b^2 + a^2 = 16$ d'où $c = 4$.

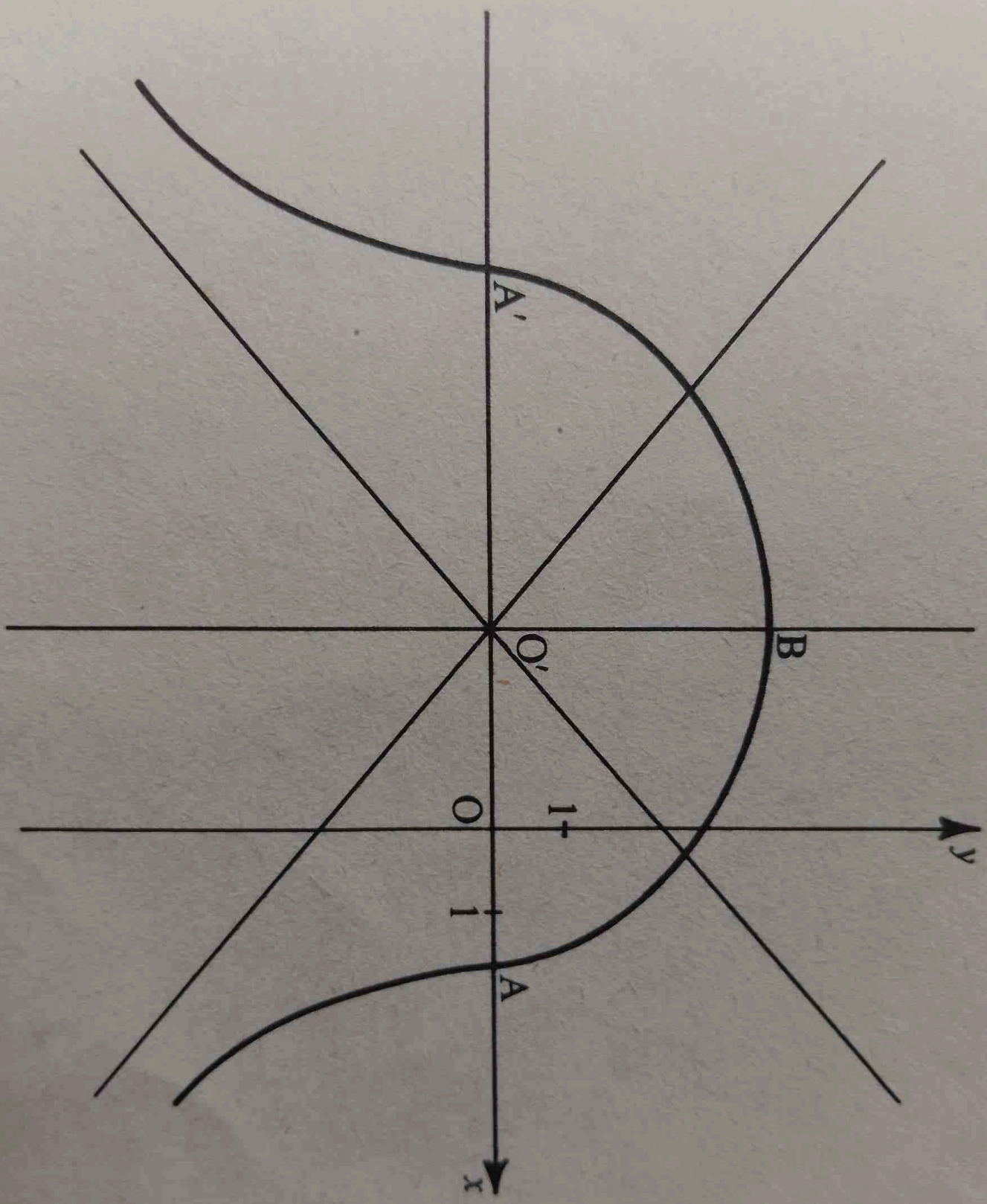
Les foyers ont donc pour coordonnées :

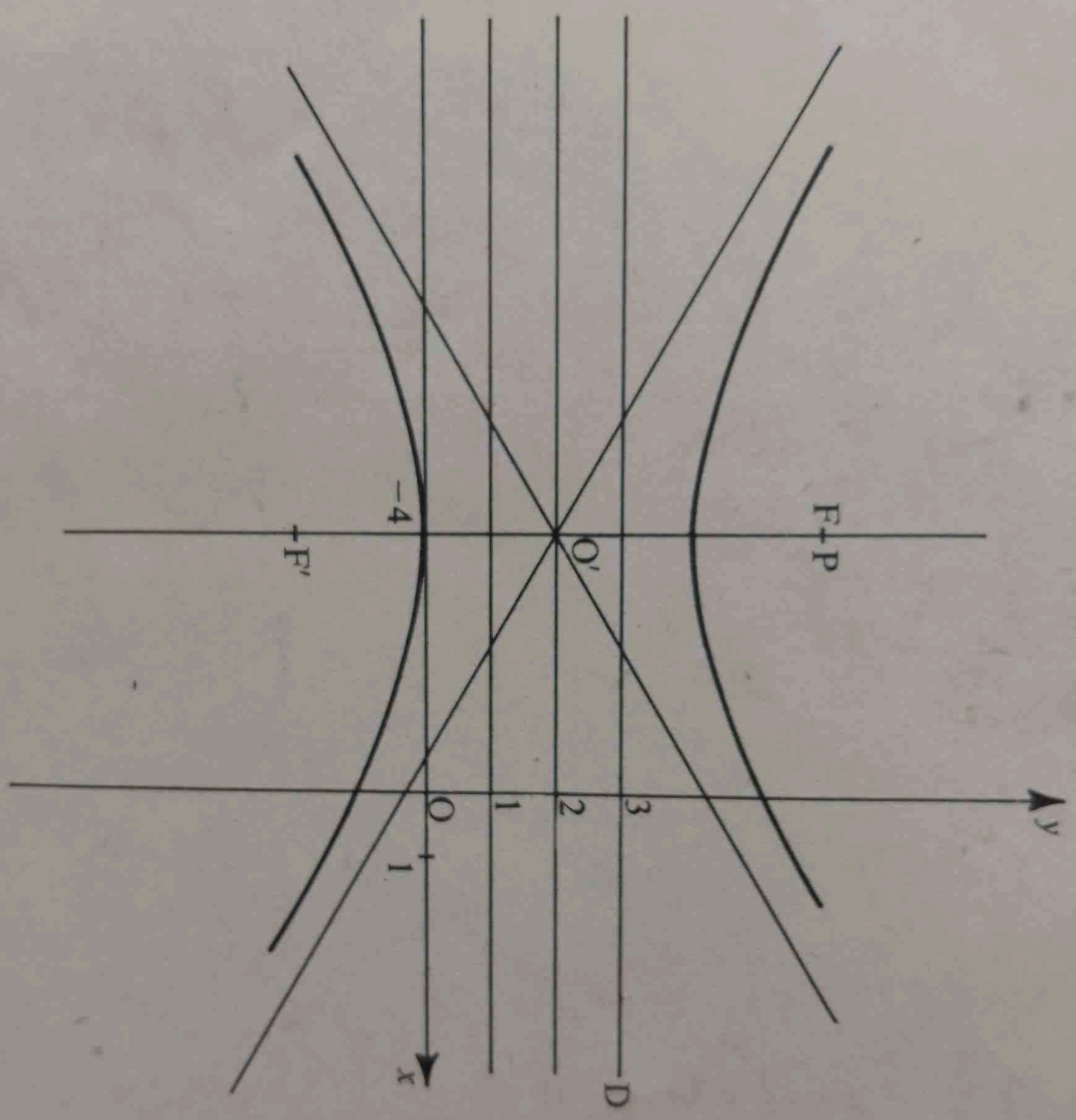
$$F(-4, 6) \quad \text{et} \quad F'(-4, -2).$$

Les directrices sont les parallèles à l'axe non focal situées à la distance

$$\frac{a^2}{c} = 1 \quad \text{du centre } O'.$$

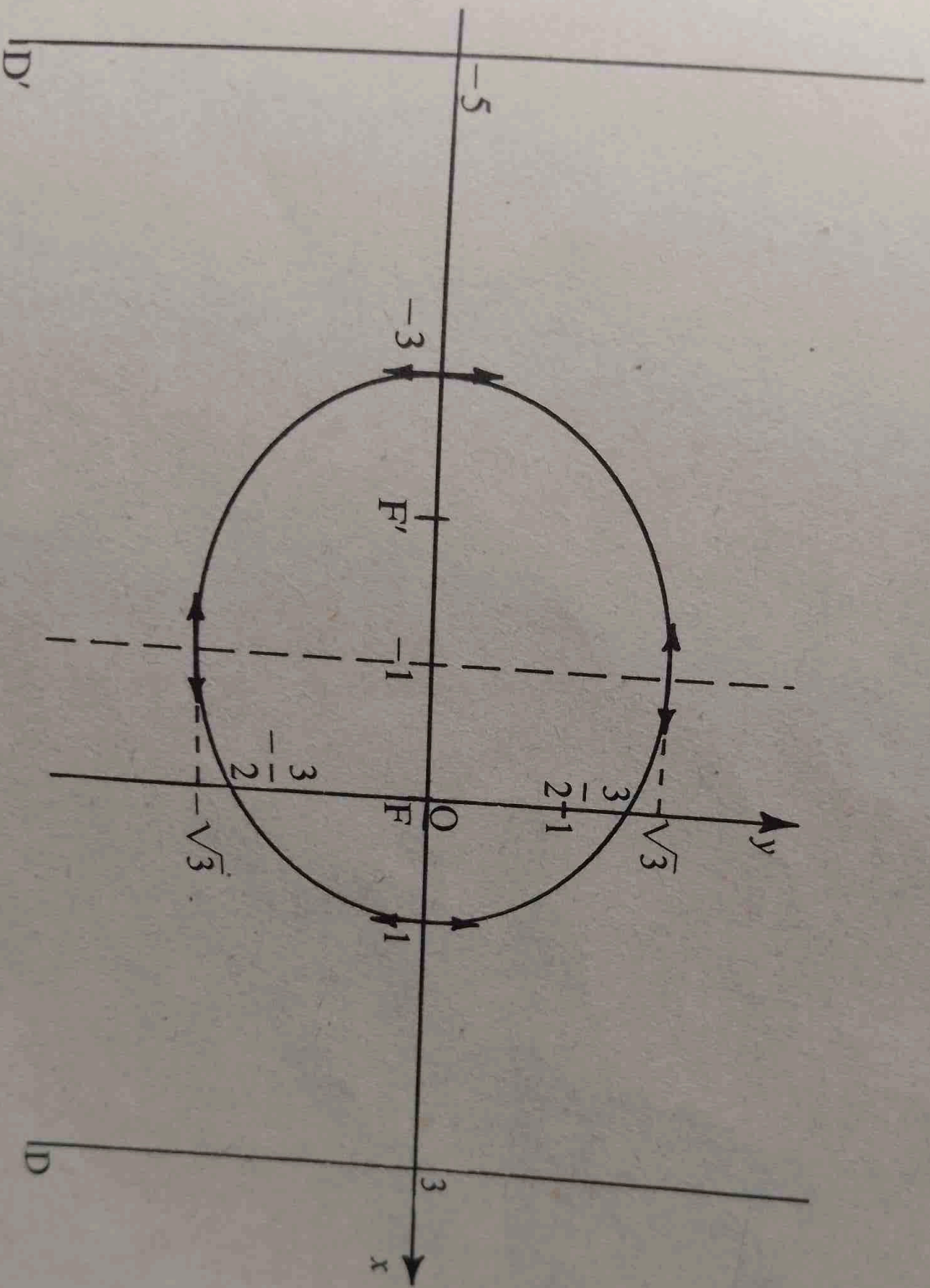






(0, 5)

C'est une ellipse de centre $(-1, 0)$ d'axes les droites $x = -1, y = 0$ de foyers $F(0, 0)$ et $F'(-2, 0)$ et de directrices associées : $x = 3$ et $x = -5$.

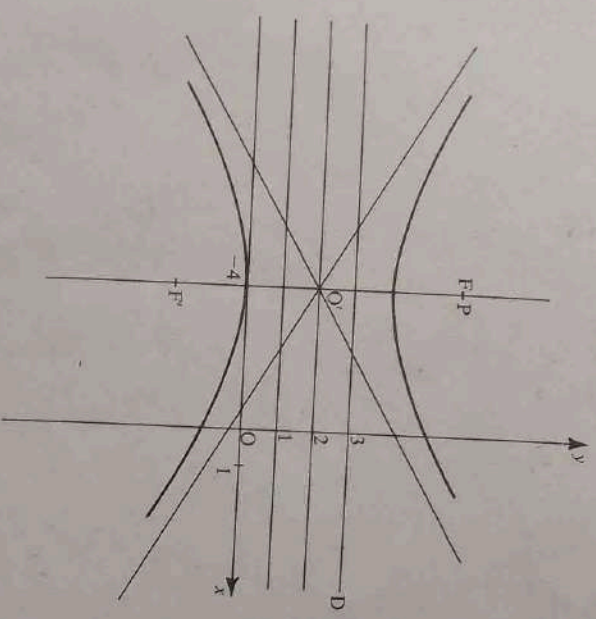


$$c = \frac{a}{2}$$

Ce sont les droites d'équations respectives :

$y = 3$ et $y = 1$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

L'excentricité e est $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$ (on a bien $e > 1$).



2° Soit $M(x, y)$ un point du plan rapporté au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
Le point P coïncide avec le point F. La droite D est la directrice associée à F et l'excentricité est 2. L'ensemble des points M tels que $\frac{d(M, P)}{d(M, D)} = 2$ est l'hyperbole de la question 1.

10.12 Soit Γ la conique d'équation : $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$.
L'équation réduite de Γ est : $\frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y+2)^2}{3^2} = 0$.

Γ est une ellipse de centre $(1, -2)$, de petit axe la droite d'équation $y = -2$ et de grand axe la droite $x = 1$.
Si on pose $a = 2, b = 3$, on a :

$c^2 = b^2 - a^2 = 5$ car $b > a$

d'où $c = \sqrt{5}$, l'excentricité est égale à $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ car $b > a$.

Les foyers sont les points du grand axe situé à la distance $\sqrt{5}$ du centre.
Les directrices sont les droites parallèles au petit axe et situées à la distance $\frac{b^2}{c}$ du centre.

$\frac{b^2}{c} = \frac{9}{\sqrt{5}}$; des équations des directrices sont $y = \frac{9}{\sqrt{5}} - 2$ et $y = -\frac{9}{\sqrt{5}} - 2$.
Les coordonnées des sommets sont $(3, -2)$; $(-1, -2)$; $(1, 1)$; $(1, -5)$.

10.13 Une équation de Γ est :

$\frac{(x-3)^2}{7^2} + \frac{(y+2)^2}{6^2} - 1 = 0$.

Γ est une ellipse de centre $(3, -2)$, de grand axe la droite $y = -2$ et de petit axe la droite $x = 3$.

Posons : $a^2 = 7^2$ et $b^2 = 6^2$ on a $a = 7$ et $b = 6$ ($a > b > 0$)
d'où : $c^2 = a^2 - b^2 = 49 - 36 = 13$ donc $c = \sqrt{13}$.

L'excentricité de Γ est : $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{7}$.

Les foyers ont pour coordonnées $F(\sqrt{13} + 3, -2)$ et $F'(-\sqrt{13} + 3, -2)$.

Des équations des directrices sont $x = \frac{49}{\sqrt{13}} + 3$ et $x = -\frac{49}{\sqrt{13}} + 3$; ce sont les droites situées à la distance $\frac{a^2}{c} = \frac{49}{\sqrt{13}}$ du centre de l'ellipse et parallèles au petit axe.

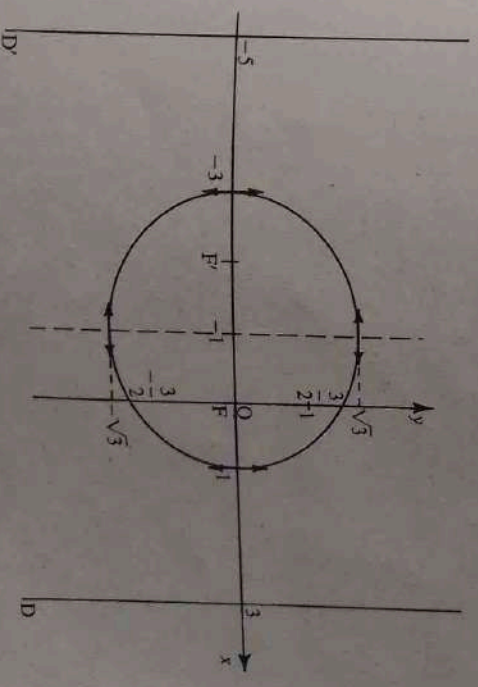
10.14 1° Dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) une équation de C est :

$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} - 1 = 0$.

Posons $a^2 = 4, b^2 = 3$, on a : $a = 2, b = \sqrt{3}$ ($a > b > 0$)
d'où : $c^2 = a^2 - b^2 = 1$ donc $c = 1$

$\frac{a^2}{c} = 4$ et $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$

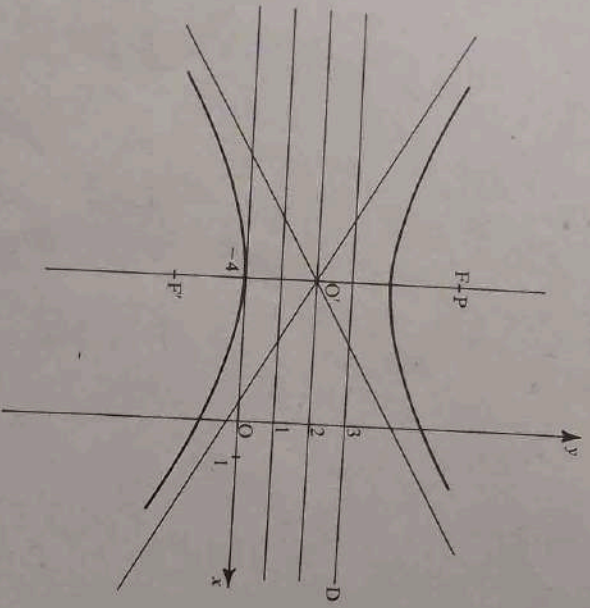
d'où : C est une ellipse de centre $(-1, 0)$ d'axes les droites $x = -1, y = 0$ de foyers $F(0, 0)$ et $F'(-2, 0)$ et de directrices associées : $x = 3$ et $x = -5$.



Ce sont les droites d'équations respectives :

$$y = 3 \quad \text{et} \quad y = 1 \quad \text{dans le repère } (O, \vec{i}, \vec{j}).$$

L'excentricité e est $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$ (on a bien $e > 1$).



2^o Soit $M(x, y)$ un point du plan rapporté au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
Le point P coïncide avec le point F . La droite D est la directrice associée à F et l'excentricité est 2. L'ensemble des points M tels que $\frac{d(M, P)}{d(M, D)} = 2$ est l'hyperbole de la question 1.

10.12

Soit Γ la conique d'équation : $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$.

L'équation réduite de Γ est : $\frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y+2)^2}{3^2} = 0$.

Γ est une ellipse de centre $(1, -2)$, de petit axe la droite d'équation $y = -2$ et de grand axe la droite $x = 1$.

Si on pose $a = 2$, $b = 3$, on a :

$$c^2 = b^2 - a^2 = 5 \quad \text{car} \quad b > a$$

d'où $c = \sqrt{5}$, l'excentricité est égale à $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ car $b > a$.

Les foyers sont les points du grand axe situé à la distance $\sqrt{5}$ du centre.

Les directrices sont les droites parallèles au petit axe et situées à la distance $\frac{b^2}{c}$ du centre.

$\frac{b^2}{c} = \frac{9}{\sqrt{5}}$, des équations des directrices sont $y = \frac{9}{\sqrt{5}}$ et $y = -\frac{9}{\sqrt{5}}$.
Les coordonnées des sommets sont $(3, -2)$; $(-1, -2)$; $(1, 1)$; $(1, -5)$.

10.13

Une équation de Γ est : $\frac{(x-3)^2}{7^2} + \frac{(y+2)^2}{6^2} - 1 = 0$.

Γ est une ellipse de centre $(3, -2)$, de grand axe la droite $y = -2$ et de petit axe la droite $x = 3$.

Posons : $a^2 = 7^2$ et $b^2 = 6^2$ on a $a = 7$ et $b = 6$ ($a > b > 0$)

d'où : $c^2 = a^2 - b^2 = 49 - 36 = 13$ donc $c = \sqrt{13}$.

L'excentricité de Γ est : $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{7}$.

Les foyers ont pour coordonnées $F(\sqrt{13} + 3, -2)$ et $F'(-\sqrt{13} + 3, -2)$.

Des équations des directrices sont $x = \frac{49}{\sqrt{13}} + 3$ et $x = -\frac{49}{\sqrt{13}} + 3$; ce sont

les droites situées à la distance $\frac{a^2}{c} = \frac{49}{\sqrt{13}}$ du centre de l'ellipse et parallèles au petit axe.

10.14

1^o Dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) une équation de C est :

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} - 1 = 0.$$

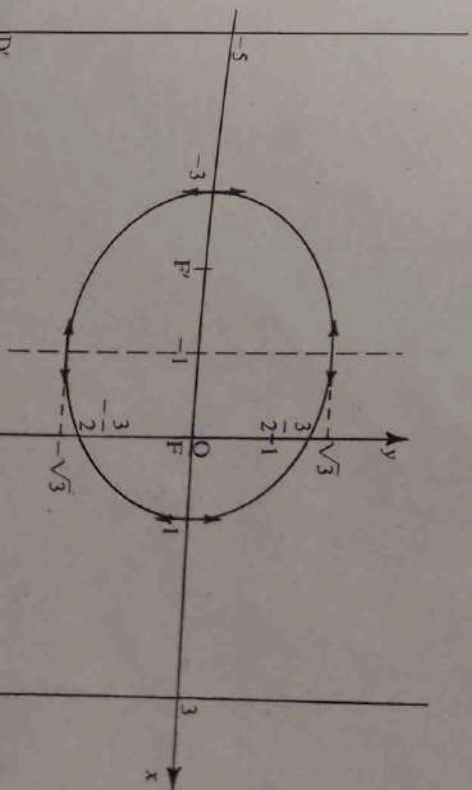
Posons $a^2 = 4$, $b^2 = 3$, on a : $a = 2$, $b = \sqrt{3}$ ($a > b > 0$)

d'où : $c^2 = a^2 - b^2 = 1$ donc $c = 1$

$$\frac{a^2}{c} = 4 \quad \text{et} \quad e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

d'où :

C'est une ellipse de centre $(-1, 0)$ d'axes les droites $x = -1$, $y = 0$ de foyers $F(0, 0)$ et $F'(-2, 0)$ et de directrices associées : $x = 3$ et $x = -5$.



2° a) On a : $|z|^2 = x^2 + y^2$.
Soit $M(x, y)$ un point de C d'affixe z on a :

$$3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0$$

ou : $4(x^2 + y^2) = x^2 - 6x + 9$

$$4|z|^2 = (x - 3)^2$$

d'où : $|z| = \frac{1}{2}|x - 3|$.

Mais M appartient à C donc l'abscisse de M est inférieure ou égale à 1
d'où : $|z| = \frac{1}{2}(3 - x)$.

b) On a : $x = |z| \cos \theta$

si θ est un représentant de $\arg z$ d'où :

$$|z| = \frac{3}{2 + \cos \theta}.$$

On a :

$$z' = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = \frac{3}{2 + \cos \theta}(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z'' = |z''|(\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)) = \frac{3}{2 - \cos \theta}(-\cos \theta - i \sin \theta)$$

$$z' - z'' = \frac{3}{2 + \cos \theta}(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{3}{2 - \cos \theta}(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z' - z'' = \frac{12}{4 - \cos^2 \theta}(\cos \theta + i \sin \theta).$$

La longueur du segment $[M'M'']$ est $|z' - z''|$:

$$|z' - z''| = \frac{12}{4 - \cos^2 \theta} \quad \text{car} \quad 4 - \cos^2 \theta > 0.$$

10.15 Une équation de la parabole est :

$$(y + 1)^2 = x + 4.$$

P est une parabole d'axe $y = -1$, de sommet $S(-4, -1)$, de paramètre $p = \frac{1}{2}$ de foyer $F(-\frac{15}{4}, -1)$. Une équation de la directrice est $x = -\frac{17}{4}$.

10.16 La conique E est une ellipse car l'excentricité $e = \frac{1}{2}$ est strictement inférieure à 1.

Pour tout point $M(x, y)$ du plan :

$$M \in E \iff \frac{d(M, F)}{d(M, D)} = \frac{1}{2} \iff \frac{d^2(M, F)}{d^2(M, D)} = \frac{1}{4}$$

si D est la droite d'équation $y = 1$.

$$d^2(M, F) = (x + 1)^2 + (y - 3)^2$$

$$d^2(M, D) = (y - 1)^2$$

d'où une équation de E est :

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = \frac{1}{4}(y - 1)^2$$

ou :

$$4(x + 1)^2 + 3\left(y - \frac{11}{3}\right)^2 - \frac{16}{3} = 0.$$

10.17 1° L'équation : $4mx^2 + 4max + 16y^2 - m^2a^2 = 0$ peut s'écrire :

$$4m\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + 16y^2 - a^2m(1 + m) = 0.$$

Si $m = 0$ l'équation devient : $y^2 = 0$; la famille de courbe se réduit à l'axe des abscisses.

Si $m = -1$ l'équation devient : $-4\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + 16y^2 = 0$; c'est l'équation d'un couple de droites sécantes :

$$4y - 2x - a = 0 \quad \text{et} \quad 4y + 2x + a = 0.$$

Si $m \neq 0$ et $m \neq -1$ l'équation peut s'écrire :

$$\frac{4\left(x + \frac{a}{2}\right)^2}{(1 + m)a^2} + \frac{16y^2}{a^2m(m + 1)} - 1 = 0.$$

Si $m > 0$ les nombres $1 + m$ et $m(1 + m)$ sont tous deux positifs.
Si $m < 0$ les nombres $1 + m$ et $m(1 + m)$ sont de signes contraires,
donc :

si $m > 0$ l'équation précédente est l'équation d'une ellipse,
si $m < 0$ et $m \neq -1$ l'équation précédente est l'équation d'une hyperbole.

2° a) On suppose $m = 3$ l'équation devient :

$$12x^2 + 12ax + 16y^2 - 9a^2 = 0$$

ou encore : $3\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + 4y^2 - 3a^2 = 0$

ou encore : $\frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2}{\frac{a^2}{3}} + \frac{4y^2}{3a^2} - 1 = 0$ (avec $a > 0$).

E est une ellipse de centre $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$, le petit axe est porté par la droite

$x = -\frac{a}{2}$ et le grand axe par la droite $y = 0$.

On a $c^2 = a^2 - \frac{3a^2}{4} = \frac{1}{4}a^2$ d'où $c = \frac{a}{2}$.

L'excentricité est égale à $\frac{1}{2}$; les foyers ont pour coordonnées $F(0, 0)$,

$F'(-a, 0)$.

Les coordonnées des sommets sont :

$$\left(-\frac{3a}{2}, 0\right); \left(\frac{a}{2}, 0\right); \left(-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right) \quad \text{et} \quad \left(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right).$$

b) L'équation de E peut s'écrire : $16x^2 + 16y^2 - 4x^2 + 12ax - 9a^2 = 0$

$$\|\overline{OM}\|^2 = x^2 + y^2$$

d'où : $16\|\overline{OM}\|^2 = 4x^2 - 12ax + 9a^2 = (2x - 3a)^2$

d'où : $\|\overline{OM}\| = \frac{1}{4}|2x - 3a|$

mais : $-\frac{3a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$ d'où $\|\overline{OM}\| = \frac{1}{4}(3a - 2x)$.

Si $M(x, y)$ a pour affixe z on a : $z = x + iy$ et $\|\overline{OM}\| = |z|$; soit θ un argument de z , on a :

$$x = |z| \cos \theta \quad \text{et} \quad y = |z| \sin \theta$$

d'où l'expression $\|\overline{OM}\| = \frac{1}{4}(3a - 2x)$ devient :

$$|z| = \frac{1}{4}(3a - 2|z| \cos \theta)$$

d'où : $|z| = \frac{3a}{2(2 + \cos \theta)}$

c) On obtient : $z' - z'' = \frac{6a}{4 - \cos^2 \alpha} (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ (voir exercice 10.14)

d'où : $|z' - z''| = \|\overline{MM''}\| = \frac{6a}{4 - \cos^2 \alpha}$

d) On a : $\frac{2}{Z} = \frac{2(2 + \cos \alpha)}{3a(\cos \alpha + i \sin \alpha)} + \frac{2(2 - \cos \alpha)}{-3a(\cos \alpha + i \sin \alpha)}$

d'où : $Z = \frac{3a(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{4 \cos \alpha} = \frac{3a}{4} + i \frac{3a}{4} \operatorname{tg} \alpha$

Quand α varie le point P d'affixe Z décrit la droite d'équation :

$$x = \frac{3a}{4}$$

10.18 On pose $a = 4$ et $c = \frac{1}{2}d(F, F')$ d'où $c = 1$ on a : $a > c$ donc l'ensemble des points cherchés est une ellipse de foyers F et F'. Le centre est le milieu de [F, F'] et a pour coordonnées (3, 0). Le grand axe est porté par l'axe des abscisses. Soit b le réel positif défini par :

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad \text{d'où} \quad b = \sqrt{15}$$

L'équation de l'ellipse est alors :

$$\frac{(x-3)^2}{4^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{15})^2} - 1 = 0$$

ou encore : $15x^2 + 16y^2 - 90x - 105 = 0$.

10.19 On pose $a = 1$ et $c = \frac{1}{2}d(F, F')$ d'où $c = \frac{5}{2}$ on a : $a < c$ donc l'ensemble des points cherchés est une hyperbole de foyers F et F'. Le centre est le milieu de [F, F'] et a pour coordonnées $(\frac{0}{2}, \frac{3}{2})$.

L'axe focal est l'axe des ordonnées. Soit b le réel positif défini par :

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{d'où} \quad b^2 = \frac{21}{4}$$

L'équation de l'hyperbole est :

$$\frac{y^2}{1^2} - \frac{(x - \frac{3}{2})^2}{(\frac{\sqrt{21}}{2})^2} - 1 = 0$$

ou encore : $-\frac{21}{4}x^2 + y^2 - 3y - 3 = 0$.

10.20 1° Une représentation paramétrique de l'ellipse est :

$$M \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Un point Q(x, y) appartient à la tangente en M si et seulement si $\overline{MQ} \begin{pmatrix} x-a \cos t \\ y-b \sin t \end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur vitesse $\vec{v} \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}$ non nul. Une équation de la tangente en M est donc :

$$\begin{cases} x - a \cos t & -a \sin t \\ y - b \sin t & b \cos t \end{cases} = 0$$

en simplifiant : $bx \cos t + ay \sin t - ab = 0$.

Le point P est l'intersection de cette droite et de la droite d'équation $x = a$, d'où :

$$y_P = \overline{AP} = \frac{b(1 - \cos t)}{\sin t}$$

(sin t ≠ 0 car on a supposé M distinct de A et de A').

De même vous trouverez : $y_P = \overline{AP}' = \frac{b(1 + \cos t)}{\sin t}$.

On en déduit : $\overline{AP} \cdot \overline{AP}' = \frac{b^2(1 - \cos^2 t)}{\sin^2 t} = b^2$.

2° Les foyers ont pour coordonnées :

$$F(c, 0) \quad \text{et} \quad F'(-c, 0) \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

d'où :

$$\overline{FP} \begin{pmatrix} a-c \\ b(1-\cos t) \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \overline{FP}' \begin{pmatrix} -a-c \\ b(1+\cos t) \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\overline{FP} \cdot \overline{FP}' = \overline{F'P} \cdot \overline{F'P}' = c^2 - a^2 + b^2 = 0$$

donc (FP) et (FP') sont orthogonales, ainsi que (F'P) et (F'P').

b) L'équation de E peut s'écrire : $16x^2 + 16y^2 - 4x^2 + 12ax - 9a^2 = 0$

$$\|\overline{OM}\|^2 = x^2 + y^2$$

d'où : $16\|\overline{OM}\|^2 = 4x^2 - 12ax + 9a^2 = (2x - 3a)^2$

d'où : $\|\overline{OM}\| = \frac{1}{4}|2x - 3a|$

mais : $-\frac{3a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$ d'où $\|\overline{OM}\| = \frac{1}{4}(3a - 2x)$.

Si $M(x, y)$ a pour affixe z on a : $z = x + iy$ et $\|\overline{OM}\| = |z|$; soit θ un argument de z , on a :

$$x = |z| \cos \theta \quad \text{et} \quad y = |z| \sin \theta$$

d'où l'expression $\|\overline{OM}\| = \frac{1}{4}(3a - 2|x|)$ devient :

$$|z| = \frac{1}{4}(3a - 2|z| \cos \theta)$$

d'où : $|z| = \frac{3a}{2(2 + \cos \theta)}$

c) On obtient :

$$z' - z'' = \frac{6a}{4 - \cos^2 \alpha} (\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad (\text{voir exercice 10.14})$$

d'où : $|z' - z''| = \|\overline{MM''}\| = \frac{6a}{4 - \cos^2 \alpha}$

d) On a :

$$\frac{2}{Z} = \frac{2(2 + \cos \alpha)}{3a(\cos \alpha + i \sin \alpha)} + \frac{2(2 - \cos \alpha)}{-3a(\cos \alpha + i \sin \alpha)}$$

d'où : $Z = \frac{3a(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{4 \cos \alpha} = \frac{3a}{4} + i \frac{3a}{4} \operatorname{tg} \alpha$

Quand α varie le point P d'affixe Z décrit la droite d'équation :

$$x = \frac{3a}{4}$$

10.18

On pose $a = 4$ et $c = \frac{1}{2}d(F, F')$ d'où $c = 1$ on a : $a > c$ donc l'ensemble des points cherchés est une ellipse de foyers F et F'. Le centre est le milieu de [F, F'] et a pour coordonnées (3, 0). Le grand axe est porté par l'axe des abscisses. Soit b le réel positif défini par :

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad \text{d'où} \quad b = \sqrt{15}$$

L'équation de l'ellipse est alors :

$$\frac{(x-3)^2}{4^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{15})^2} - 1 = 0$$

ou encore :

$$15x^2 + 16y^2 - 90x - 105 = 0$$

10.19

On pose $a = 1$ et $c = \frac{1}{2}d(F, F')$ d'où $c = \frac{5}{2}$ on a : $a < c$ donc l'ensemble des points cherchés est une hyperbole de foyers F et F'. Le centre est le milieu de [F, F'] et a pour coordonnées $(0, \frac{3}{2})$. L'axe focal est l'axe des ordonnées. Soit b le réel positif défini par :

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{d'où} \quad b^2 = \frac{21}{4}$$

L'équation de l'hyperbole est : $-\frac{x^2}{1^2} + \frac{(y - \frac{3}{2})^2}{(\frac{\sqrt{21}}{2})^2} - 1 = 0$

ou encore : $-\frac{21}{4}x^2 + y^2 - 3y - 3 = 0$.

10.20

1° Une représentation paramétrique de l'ellipse est :

$$M \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Un point $Q(x, y)$ appartient à la tangente en M si et seulement si $\overline{MQ} \begin{pmatrix} x - a \cos t \\ y - b \sin t \end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur vitesse $\vec{v} \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}$ non nul.

Une équation de la tangente en M est donc :

$$\begin{vmatrix} x - a \cos t & -a \sin t \\ y - b \sin t & b \cos t \end{vmatrix} = 0$$

en simplifiant : $bx \cos t + ay \sin t - ab = 0$.

Le point P est l'intersection de cette droite et de la droite d'équation $x = a$, d'où :

$$y_P = \overline{AP} = \frac{b(1 - \cos t)}{\sin t}$$

($\sin t \neq 0$ car on a supposé M distinct de A et de A').

De même vous trouverez : $y_P = \overline{A'P'} = \frac{b(1 + \cos t)}{\sin t}$.

On en déduit : $\overline{AP} \cdot \overline{A'P'} = \frac{b^2(1 - \cos^2 t)}{\sin^2 t} = b^2$.

2° Les foyers ont pour coordonnées :

$$F(c, 0) \quad \text{et} \quad F'(-c, 0) \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

d'où :

$$\overline{FP} \begin{pmatrix} a - c \\ b(1 - \cos t) \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \overline{FP'} \begin{pmatrix} -a - c \\ b(1 + \cos t) \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\overline{F'P} \begin{pmatrix} a + c \\ b(1 - \cos t) \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \overline{F'P'} \begin{pmatrix} -a + c \\ b(1 + \cos t) \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$\overline{FP} \cdot \overline{FP'} = \overline{F'P} \cdot \overline{F'P'} = c^2 - a^2 + b^2 = 0$

donc (FP) et (F'P') sont orthogonales, ainsi que (F'P) et (FP').

11 | Géométrie descriptive

Ce chapitre figure au programme de Terminale E et ne figure pas au programme de Terminale C.

□ Rotation autour d'un axe vertical ou de bout

Si l'axe est vertical la rotation s'effectuera sur la projection horizontale, les projections frontales du point et de son image ayant même cote. Dans le cas où l'axe est de bout on échangera les rôles joués par les projections frontales et horizontales.

□ Rabattement d'un plan sur un plan horizontal

La rotation autour d'une horizontale D d'un plan P qui transforme P en un plan horizontal P₁ est appelée **rabattement** de P sur P₁, la droite D étant la **charnière du rabattement**.

On construit le rabattement d'un point M(m, m') par la méthode du **triangle de rabattement**. Soit D(d, d') la charnière du rabattement, μ l'intersection de la droite δ orthogonale à d passant par m. Le rabattement m₁ de m appartient à δ et l'on a :

$$d(\mu, m_1) = d(\mu, p)$$

où p est le point de la parallèle à d menée par m tel que :

$$d(m, p) = d(m', d')$$

Il y a deux rabattements possibles. Pour obtenir le rabattement de tout autre point on utilisera la **méthode des alignements**.

Soit N(n, n') un autre point du plan P, le rabattement n₁ de n sera tel que $\overline{m_1 n_1} = \overline{m n}$ si (mn) est parallèle à d et tel que o, m₁, n₁ soient alignés si (mn) coupe d en o.

Dans le cas d'un rabattement sur un plan frontal on échangera les rôles joués par projection horizontale et frontale.

Projections

11.1

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On désigne par $x'x, y'y, z'z$ les axes ayant pour vecteurs directeurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. On place O au centre de la feuille, (Ox, Oy) est le plan horizontal de projection; (Oy, Oz) est le plan frontal de projection; la ligne de terre est $y'Oy$; elle est parallèle au petit côté de la feuille et est orientée positivement de gauche à droite; Ox est dirigé vers le bas de la feuille et Oz vers le haut; l'unité de longueur est le centimètre.

1° Construire les traces du plan π d'équation

$$6x - 6y + 5z - 30 = 0.$$

2° Déterminer la projection frontale ω' du point Ω appartenant au plan π et dont la projection horizontale est le point $\omega(2, 1, 0)$.

3° Un hexagone ABCDEF du plan π a le côté AB horizontal et se projette horizontalement suivant un hexagone régulier de centre ω et dont la longueur du côté est de 4 cm. Construire les projections de cet hexagone ABCDEF.

Sur une notice jointe à l'épure, on expliquera brièvement les constructions effectuées.

(On rappelle que le côté de l'hexagone régulier est égal au rayon de son cercle circonscrit.)

(Exercice Bac. E. Paris 1981.)

Rotation autour d'un axe vertical ou de bout

11.2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) est le plan horizontal de projection et (O, \vec{j}, \vec{k}) le plan frontal de projection. Le point O est à gauche de la feuille et à mi-hauteur, la ligne de terre définie par (O, \vec{j}) est le petit axe de la feuille. On prendra 2 cm pour unité.

1° a) Construire les traces du plan R dont une équation cartésienne est

$$x - 2y + 2z = 0.$$

b) Tracer les projections de la droite Δ issue du point $\Omega \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et orthogonale au plan R.

c) Déterminer sur l'épure l'intersection H de R et de Δ .

d) Par la méthode de votre choix, donner une valeur approchée de α , distance de Ω au plan R, cette valeur étant mesurée sur l'épure.

2° On se propose dans cette question de vérifier par le calcul les résultats obtenus précédemment, pour cela on déterminera successivement :

a) une représentation paramétrique de la droite Δ

b) les coordonnées du point H
 c) la distance $d(\Omega, R)$ de Ω au plan R que l'on comparera avec la valeur mesurée.

(Exercice Bac. E. Lyon 1982.)

11.3 L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$. L'unité de longueur est le centimètre. O est au centre de la feuille. Le plan (Oy, Oz) est le plan frontal et le plan (Ox, Oy) le plan horizontal de projection. La ligne de terre est orientée positivement de gauche à droite, Ox dirigé vers le bas de la feuille, Oz vers le haut. Soit (P) le plan d'équation cartésienne :

$$2x - y + 3z - 6 = 0$$

et (Q) le plan d'équation :

$$x + y + z - 3 = 0.$$

- 1° Construire les traces des plans (P) et (Q).
- 2° Faire l'épure (d, d') de la droite (D) intersection des plans (P) et (Q).
- 3° Soit A et B les traces de (D). En faisant une rotation, faire apparaître le segment (AB) en vraie grandeur.

(Exercice Bac. E. Bordeaux 1981.)

Rabattement

11.4 L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) est le plan horizontal de projection et le plan (O, \vec{j}, \vec{k}) est le plan frontal de projection. Le point O est au centre de la feuille; la ligne de terre, définie par (O, \vec{j}) , est le petit axe de la feuille. L'unité est le centimètre. On considère les points A(3, -7, 4) et B(5, -1, 8) ainsi que la

$$\mathcal{D} \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + \lambda \\ z = 4 + \lambda. \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

- 1° Faire l'épure de A, de B, de \mathcal{D} .
 - 2° Construire la projection orthogonale H de B sur la droite \mathcal{D} .
 - 3° A l'aide d'un rabattement, faire apparaître le triangle ABH en vraie grandeur. En déduire l'épure d'un point S de la droite BH, situé à égale distance de A et de la droite \mathcal{D} .
- On expliquera les constructions effectuées.

(Exercice Bac. E. Amiens 1981.)

11.5 L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On désigne par $x'x, y'y, z'z$ les axes ayant pour vecteurs directeurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. (Ox, Oy) est le plan horizontal de projection; (Oy, Oz) est le plan frontal de projection; la ligne de terre est $y'Oy$, elle est le petit axe de la feuille, orienté positivement de la gauche vers la droite. Le point O est à 5 cm du

bord gauche de la feuille; Oz est dirigé vers le haut de la feuille, Ox vers le bas; l'unité de longueur est le centimètre.

1° Construire les traces horizontale et frontale du plan P d'équation :

$$x - y + 2z - 4 = 0.$$

2° On appelle D la droite du plan P dont la projection horizontale d a pour équations :

$$z = 0 \quad \text{et} \quad 3x + y - 9 = 0.$$

Déterminer sur l'épure la projection frontale d' de la droite D.

3° Soit Ω le point du plan P de coordonnées $(4, 5, \frac{5}{2})$. On considère le carré de centre Ω dont un côté est porté par D.

Construire les projections horizontale et frontale de ce carré.

(Exercice Bac. E. Paris 1982.)

Rotation autour d'un axe quelconque

11.6 L'espace orienté étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les plans (O, \vec{i}, \vec{j}) et (O, \vec{j}, \vec{k}) étant respectivement le plan horizontal et le plan frontal de projection tandis que la droite (O, \vec{j}) est la ligne de terre. Les axes Ox, Oy, Oz sont dirigés respectivement par $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. On prendra le centimètre pour unité de longueur et on placera le point O à mi-hauteur et à gauche de la feuille.

Par rapport à ce repère on définit la droite D par les équations :

$$\begin{cases} 3x - y + 2 = 0 \\ 3y - 5z + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{et le point A a pour coordonnées } (7, 9, 3).$$

1° Construire les épures (d, d') et (a, a') de la droite D et du point A.

2° Construire l'épure (b, b') du point B image de A dans la rotation d'axe

D et d'angle $+\frac{\pi}{3}$.

RÉSOLUTION DES EXERCICES ET PROBLÈMES

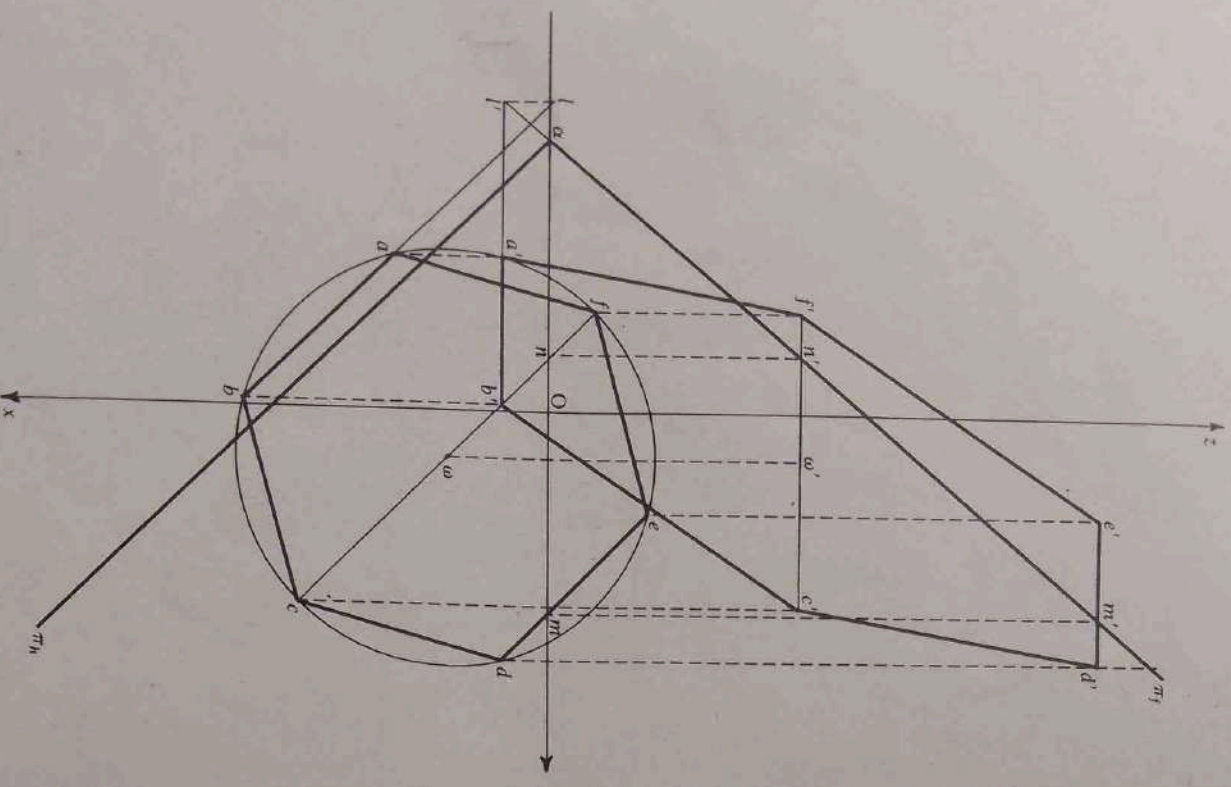
11.1

1° La trace horizontale (π_h) du plan π est la droite du plan (O, \vec{i}, \vec{j}) d'équation $x - y - 5 = 0$, les deux points $(0, -5, 0)$ et $(5, 0, 0)$ la définissent.

La trace frontale (π_f) du plan π est la droite du plan (O, \vec{j}, \vec{k}) d'équation $6y - 5z + 30 = 0$, les deux points $(0, -5, 0)$ et $(0, 0, 6)$ la définissent.

2° Le point Ω appartenant à π , ses coordonnées vérifient l'équation de π d'où la cote de Ω est : $\frac{24}{5}$.

Considérons le plan vertical parallèle à la droite (π_n) trace horizontale de π et passant par Ω , ce plan coupe le plan π suivant une horizontale passant par le point (n, n') . On rappelle donc ω sur la droite passant par n' parallèle à Ox .

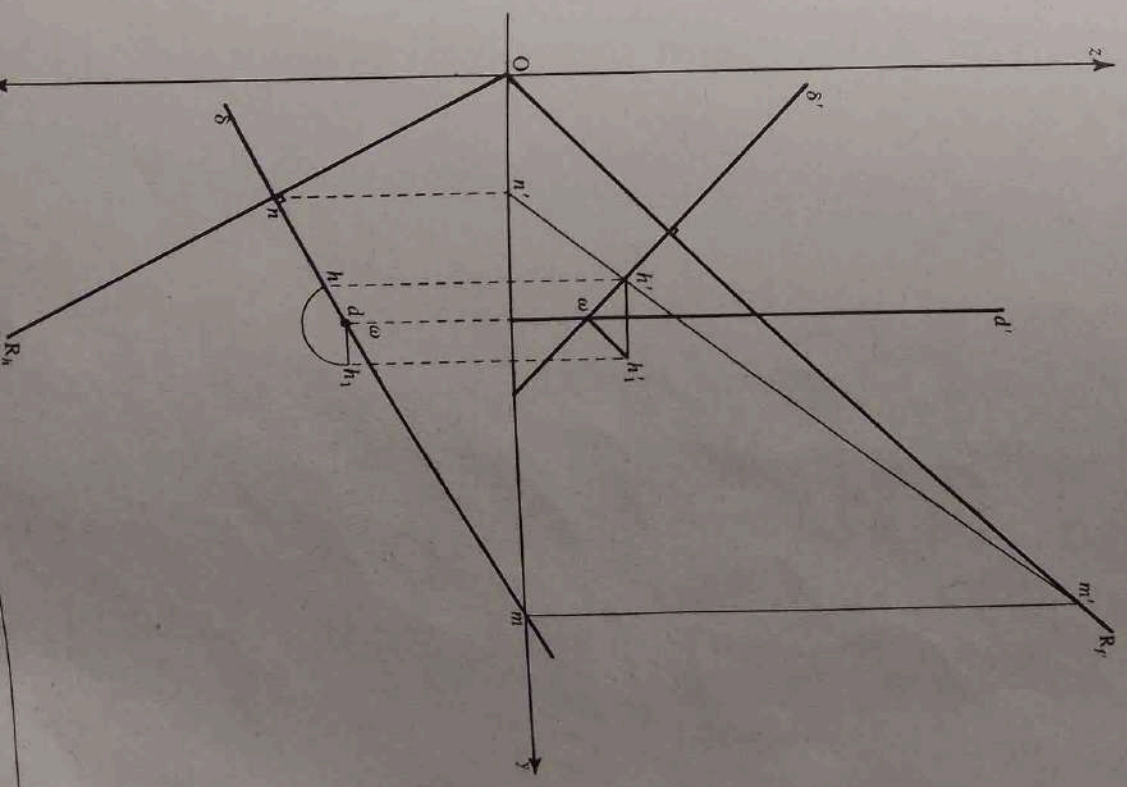


3° La droite (AB) étant horizontale, (ab) est parallèle à π_n , il en est de même pour (cf) et (ed) . On construit le cercle de centre ω de rayon 4, la

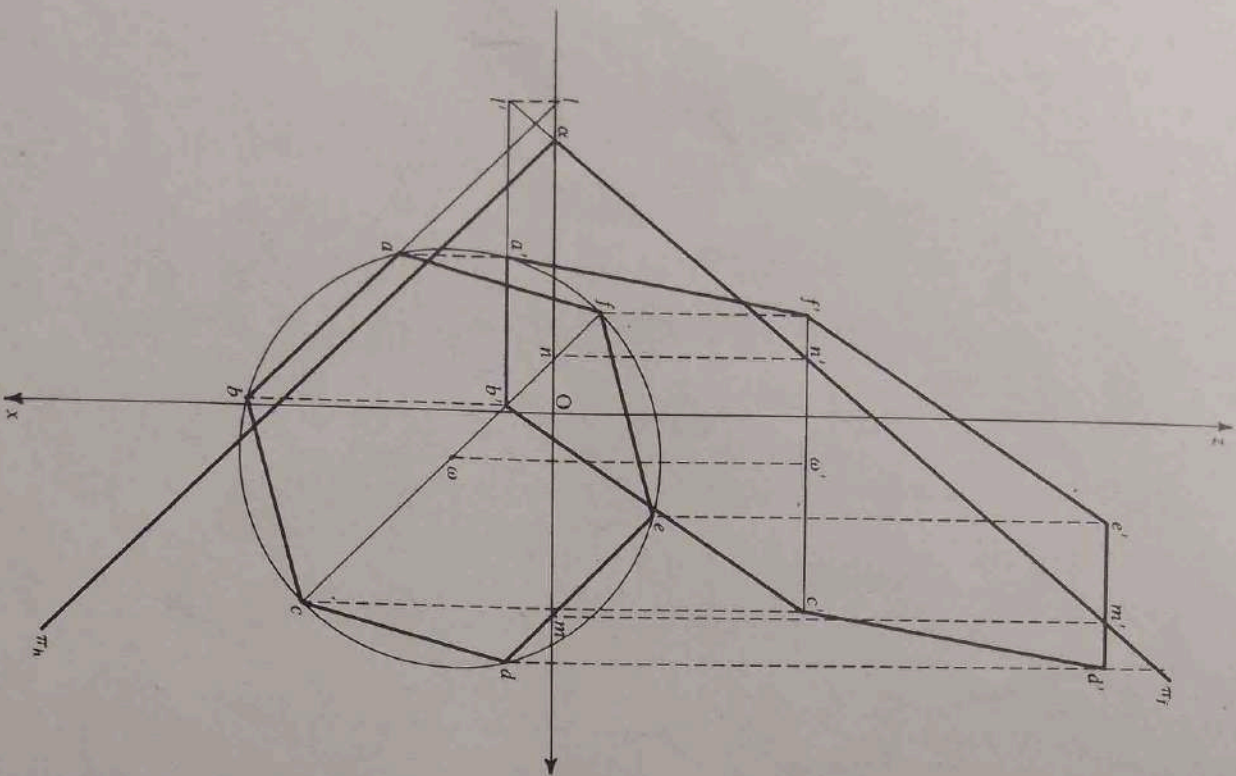
parallèle à π_n passant par ω coupe le cercle en e et f (deux choix possibles). On construit les autres points de l'hexagone en connaissant la longueur du côté. Pour rappeler les points a, b, c, d, e, f on utilisera une méthode identique à la méthode employée à la question 2. Les deux choix de c et f ne changent pas la figure globalement.

11.2

1° a) La trace horizontale (R_n) du plan R est la droite du plan (O, f, f') d'équation $x - 2y = 0$, les deux points $(0, 0, 0)$ et $(2, 1, 0)$ la définissent. La trace frontale (R_f) du plan R est la droite du plan (O, f', f') d'équation $-y + z = 0$, les deux points $(0, 0, 0)$ et $(0, 1, 1)$ la définissent.



Considérons le plan vertical parallèle à la droite (π_n) trace horizontale de π et passant par f_1 , ce plan coupe le plan π suivant une horizontale passant par le point (n, n') . On rappelle donc ω sur la droite passant par n' parallèle à Oy .

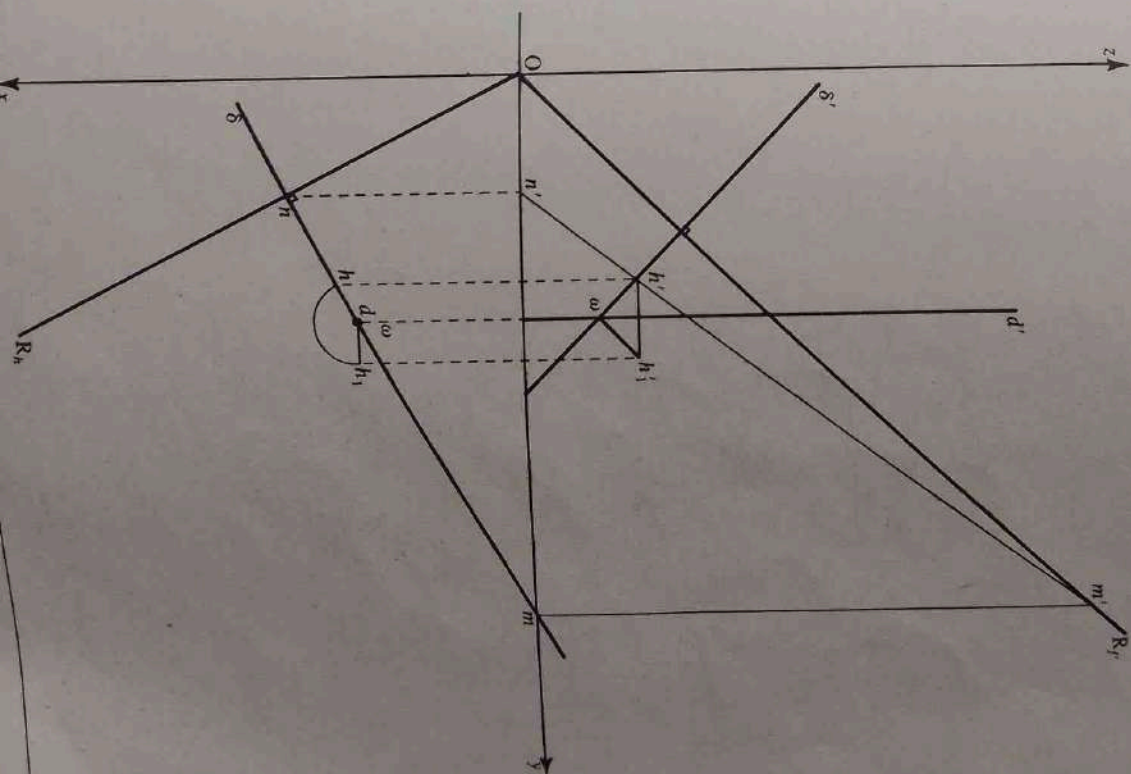


3° La droite (AB) étant horizontale, (ab) est parallèle à π_n , il en est de même pour (cf) et (ed) . On construit le cercle de centre ω de rayon 4, la

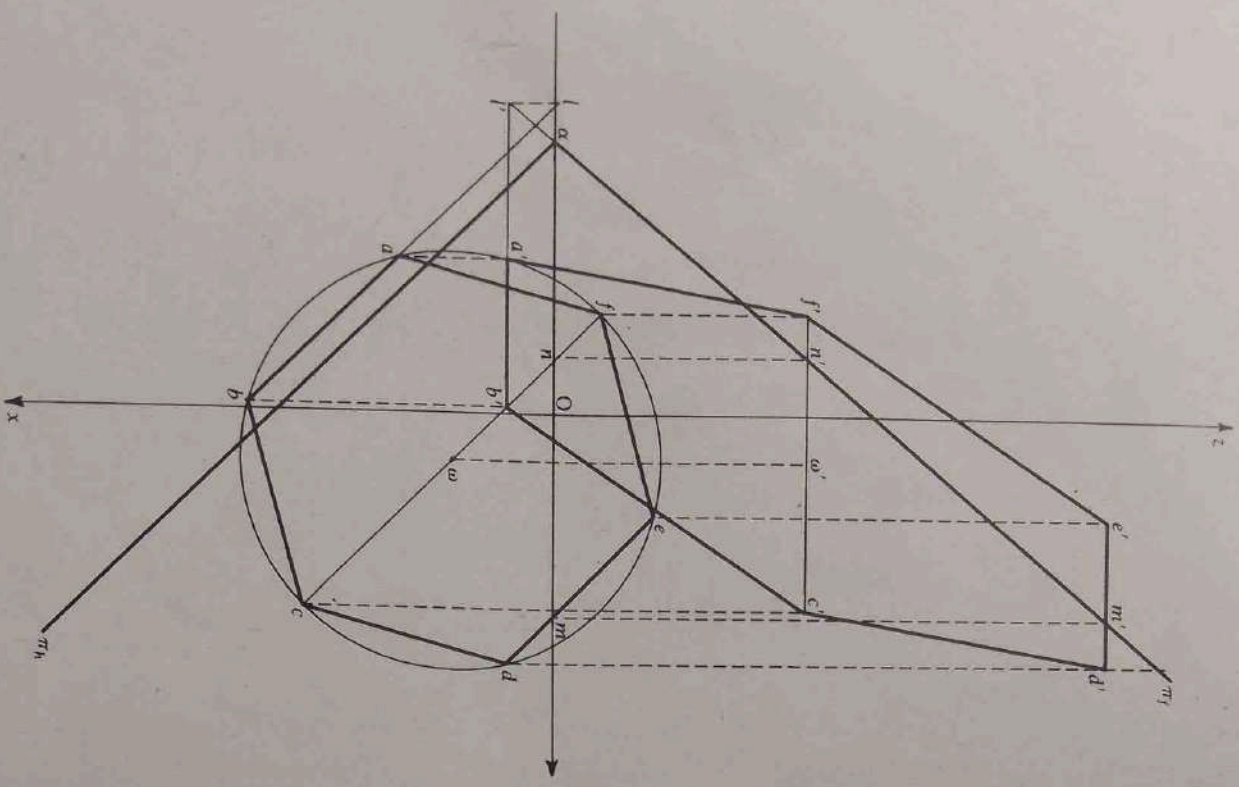
parallèle à π_n passant par ω coupe le cercle en c et f (deux choix possibles). On construit les autres points de l'hexagone en connaissant la longueur du côté. Pour rappeler les points a, b, c, d, e, f on utilisera une méthode identique à la méthode employée à la question 2. Les deux choix de c et f ne changent pas la figure globalement.

11.2

1° a) La trace horizontale (R_n) du plan R est la droite du plan (O, \vec{f}, \vec{f}) d'équation $x - 2y = 0$, les deux points $(0, 0, 0)$ et $(2, 1, 0)$ la définissent. La trace frontale (R_f) du plan R est la droite du plan (O, \vec{f}, \vec{k}) d'équation $-y + z = 0$, les deux points $(0, 0, 0)$ et $(0, 1, 1)$ la définissent.



Considérons le plan vertical parallèle à la droite (π_h) trace horizontale de π et passant par Ω , ce plan coupe le plan π suivant une horizontale passant par le point (n, n') . On rappelle donc ω sur la droite passant par n' parallèle à Oy .

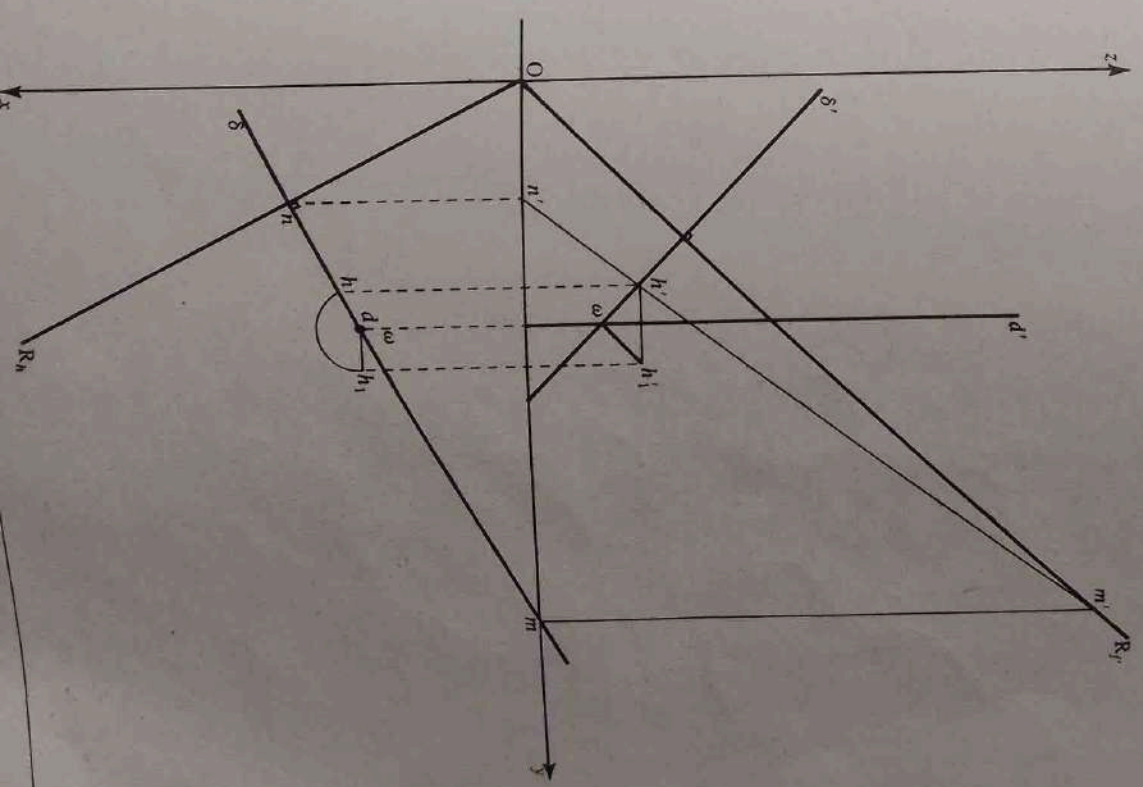


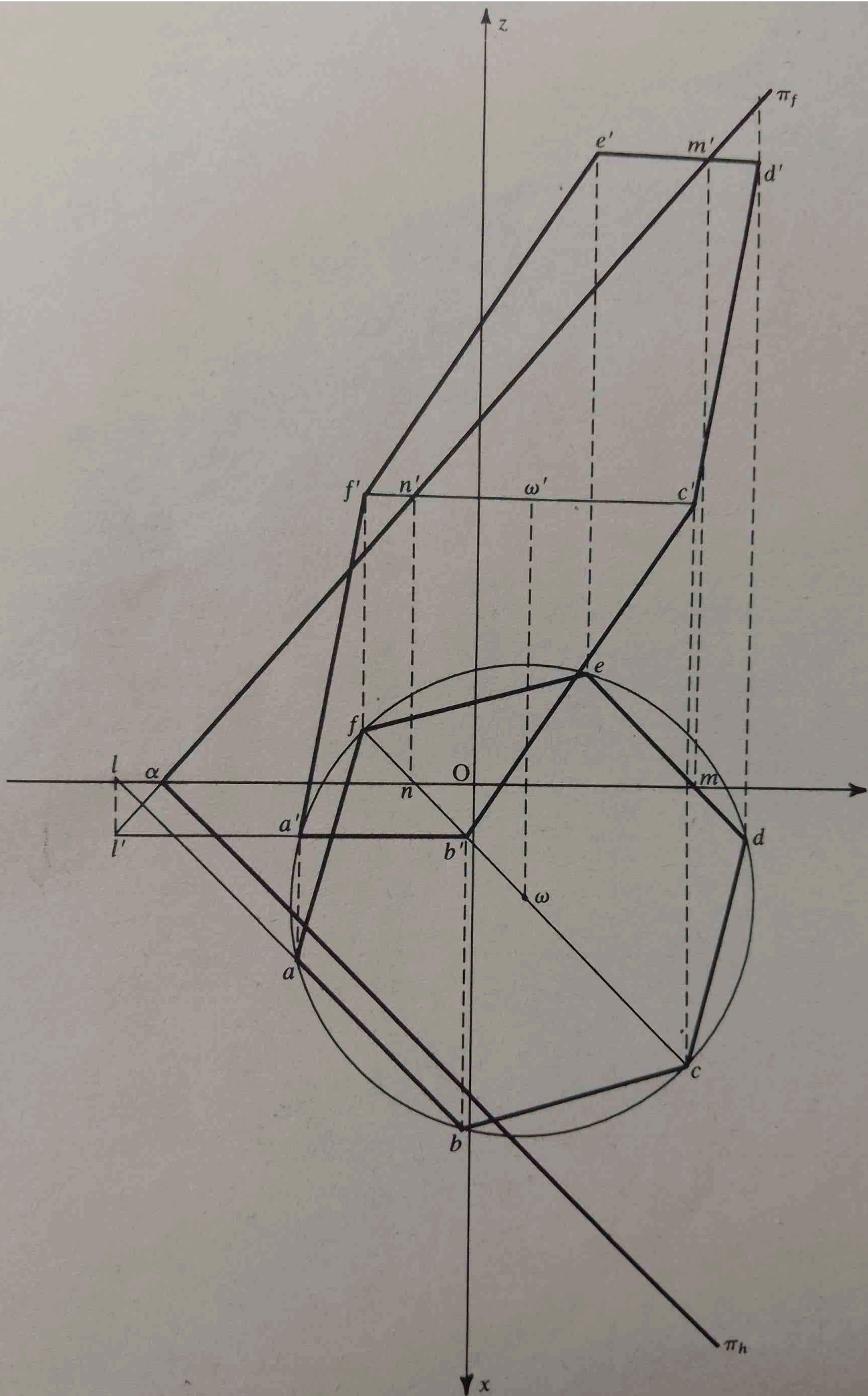
3° La droite (AB) étant horizontale, (ab) est parallèle à π_h , il en est de même pour (cf) et (ed) . On construit le cercle de centre ω de rayon 4, la

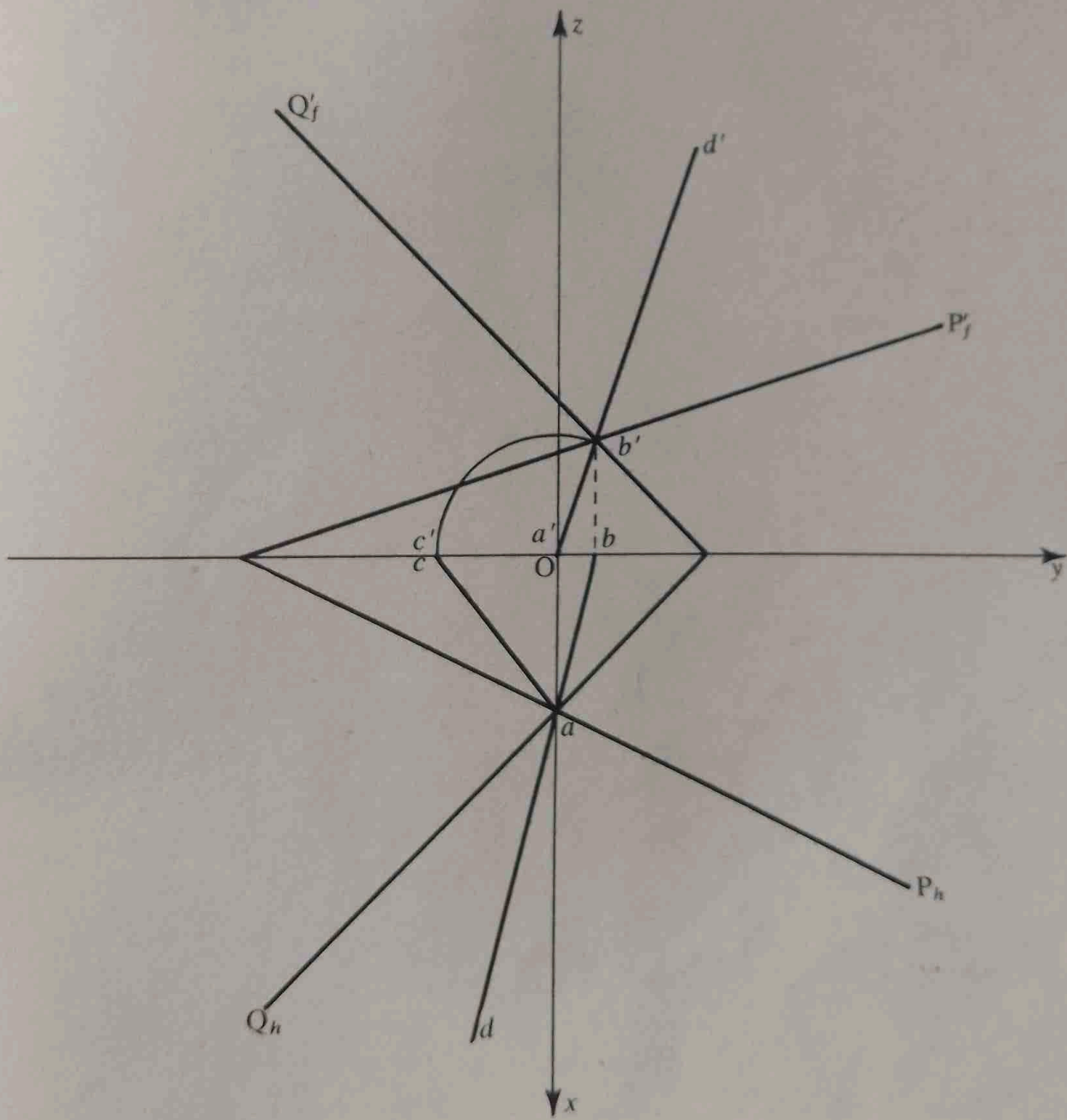
parallèle à π_h passant par ω coupe le cercle en c et f (deux choix possibles). On construit les autres points de l'hexagone en connaissant la longueur du côté. Pour rappeler les points a, b, c, d, e, f on utilisera une méthode identique à la méthode employée à la question 2. Les deux choix de c et f ne changent pas la figure globalement.

11.2

1° a) La trace horizontale (R_h) du plan R est la droite du plan (O, \vec{i}, \vec{j}) d'équation $x - 2y = 0$, les deux points $(0, 0, 0)$ et $(2, 1, 0)$ la définissent. La trace frontale (R_f) du plan R est la droite du plan (O, \vec{j}, \vec{k}) d'équation $-y + z = 0$, les deux points $(0, 0, 0)$ et $(0, 1, 1)$ la définissent.







3° Soit $\Delta = (\delta, \delta')$ la droite horizontale du plan (ABH) passant par H . δ' passe par h' et est parallèle à Oy ; δ passe par h et est parallèle à la trace

b) La projection horizontale de Δ est la droite passant par ω et orthogonale à la trace horizontale de R, la projection frontale de Δ est la droite passant par ω' et orthogonale à la trace frontale de R.

c) Considérons le plan vertical contenant la droite Δ , l'intersection de ce plan et du plan R est la droite $((mn), (m'n')) = (\delta, (m'n'))$ cette droite coupe la droite Δ au point (h, h') .

d) Considérons la rotation d'axe (d, d') vertical passant par le point Ω , qui transforme la droite (ΩH) en une droite frontale (ΩH_1) . La droite (ωh_1) est parallèle à Oy' et l'on a $d(\omega, h_1) = d(\omega, h)$, on rappelle le point h_1 sachant que H et H_1 ont même cote. La distance $d(\Omega, H) = d(\omega', h_1')$.
On mesure sur l'épure $\alpha = 1,35$ cm.

2° a) Une représentation paramétrique de Δ est :

$$\begin{cases} x = u + 2 \\ y = -2u + 3 \\ z = 2u + 1 \end{cases} \quad (u \in \mathbb{R})$$

car un vecteur directeur de Δ est $\vec{v}(1, -2, 2)$.

b) On a : $H \left(\frac{20}{9}, \frac{23}{9}, \frac{13}{9} \right)$.

c) On a : $d(H, \Omega) = \frac{2}{3}$ donc $d(H, \Omega) = \frac{4}{3}$ cm.

11.3 1° Les traces P_h et P_v de P sont les droites d'équations :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 6 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y - 3z + 6 = 0 \\ x = 0. \end{cases}$$

Les traces Q_h et Q_v de Q sont les droites d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x = 0. \end{cases}$$

2° La droite D passe par le point (a, a') intersection des traces horizontales de P et Q et par le point (b, b') intersection des traces frontales de P et Q; la droite D est la droite $(ab, a'b')$.

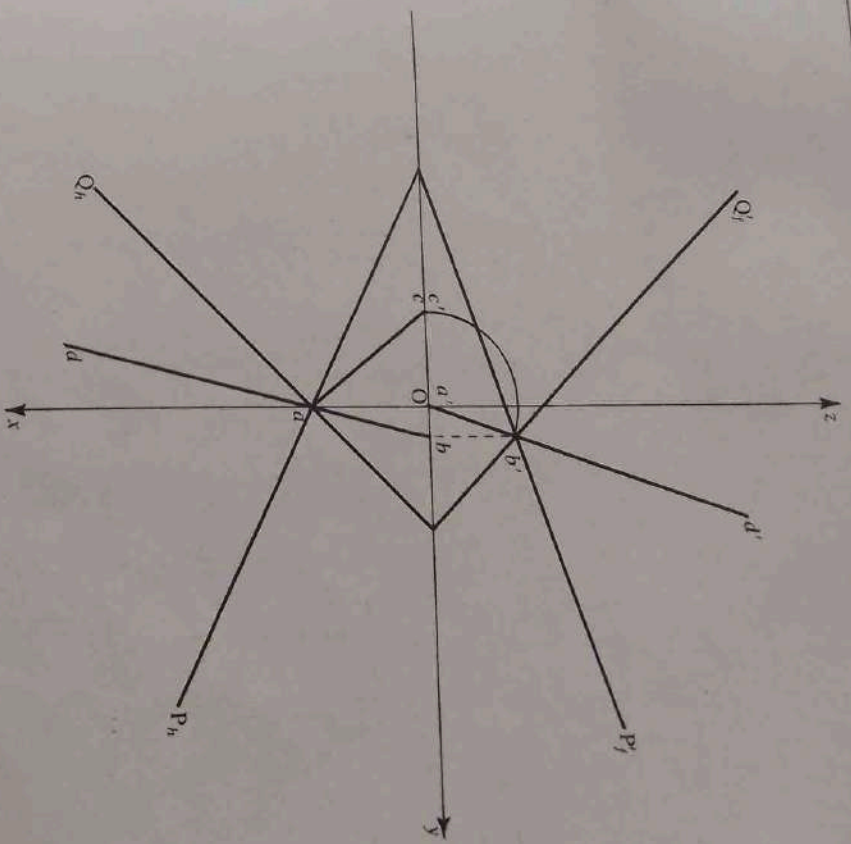
3° Considérons la rotation d'axe de bout la droite Ox , qui transforme le point B en le point C de la droite Oy . On construit (c, c') de Oy' tel que $d(O, b') = d(O, c')$. Le segment $[A, B]$ devient le segment $[A, C]$ qui est dans le plan horizontal donc

$$d(A, B) = d(a, c) = 3,85 \text{ cm.}$$

Voir figure ci-contre.

11.4 1° On construit les points (a, a') , (b, b') et la droite (d, d') .

2° La droite \mathcal{D} est parallèle au plan frontal (droite frontale) donc les projections frontales de (BH) et de \mathcal{D} sont orthogonales, h' est la projection orthogonale de b' sur d' ; on rappelle h' sur d' .



3° Soit $\Delta = (\delta, \delta')$ la droite horizontale du plan (ABH) passant par H, δ' passe par h' et est parallèle à Oy' ; δ passe par h et est parallèle à la trace horizontale du plan (ABH) .

Considérons le rabattement du plan (ABH) sur le plan horizontal π contenant Δ .

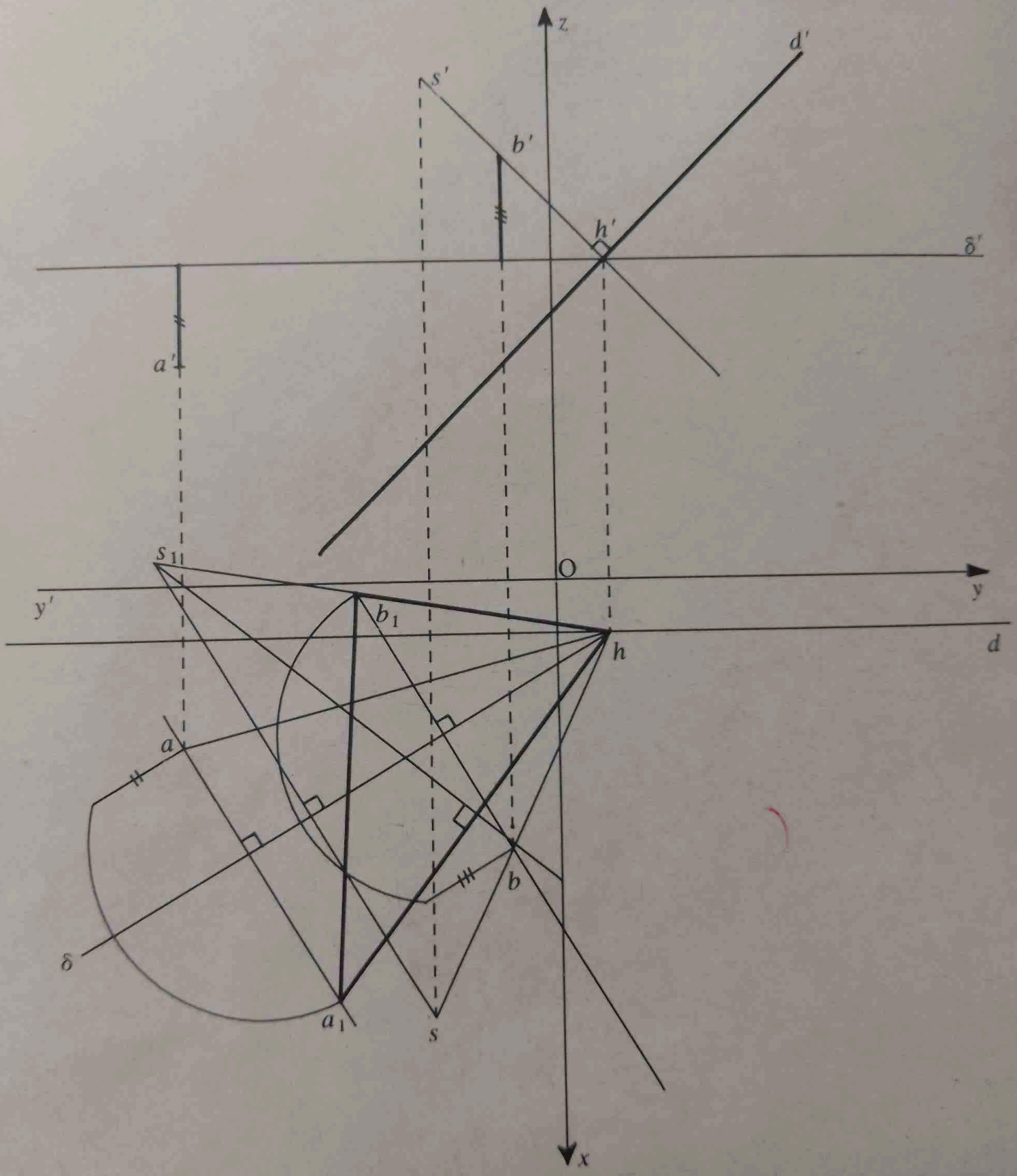
On construit les points a_1 et b_1 projections horizontales des rabattements de A et B par la méthode du triangle rectangle, la charnière étant la droite Δ . Le point H est invariant.

On a :

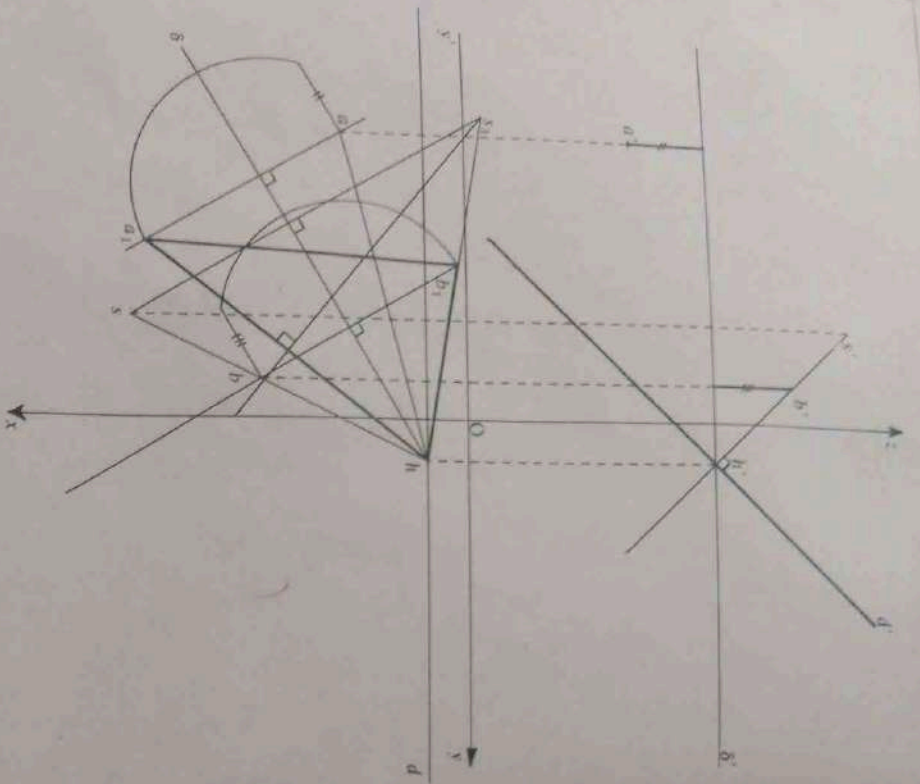
$$\begin{aligned} d(A, B) &= d(a_1, b_1) = 7,55 \text{ cm} \\ d(A, H) &= d(a_1, h) = 8,55 \text{ cm} \\ d(B, H) &= d(b_1, h) = 4,85 \text{ cm.} \end{aligned}$$

H appartient à \mathcal{D} , S est l'intersection de la droite (BH) et de la médiatrice de (A, H) .

On construit s_1 intersection de la médiatrice de (a_1, h) et de (b_1, h) qui est l'image de S dans le rabattement précédent. On construit s intersection de (bh) et de la droite passant par s_1 et orthogonale à δ . On relève s sur $(b'h')$.
Voir figure page 256



$$(x - y + 2z - 4 = 0)$$



11.5

1^o La trace horizontale P_h est la droite d'équation $\begin{cases} x - y + 2z - 4 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ définie par les points $(0, -4, 0)$ et $(4, 0, 0)$.

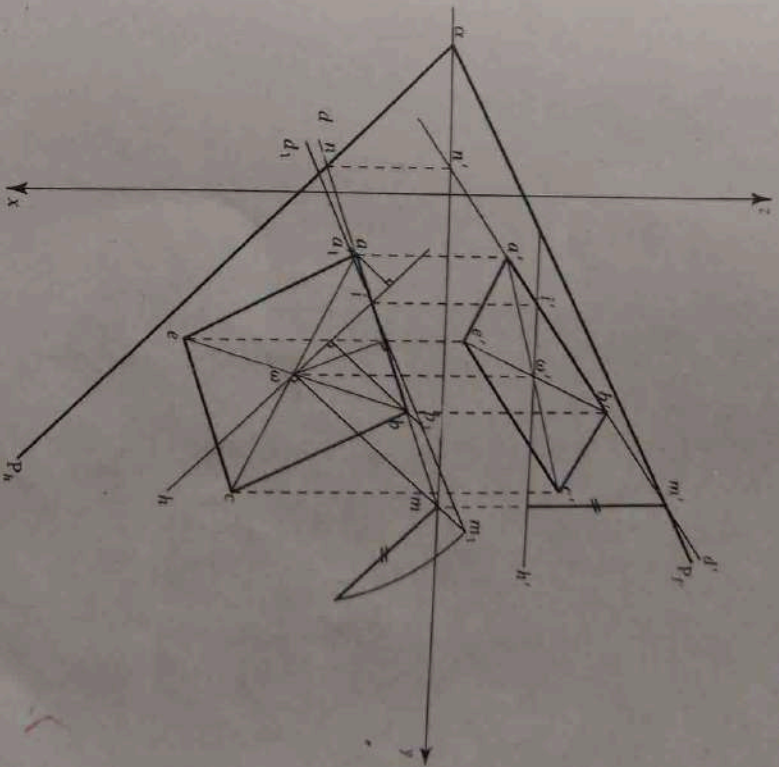
La trace frontale P_f est la droite d'équation $\begin{cases} x - y + 2z - 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ définie par les points $(0, -4, 0)$ et $(0, 0, 2)$.

2^o La droite d coupe les traces du plan P aux points (m, m') et (n, n') . La droite d' est la droite $(m'n')$.

3^o Considérons le rabattement du plan P sur le plan horizontal π contenant Ω . La charnière est l'horizontale (h, h') du plan P passant par Ω (h est parallèle à P_h et h' est parallèle à $O'y$).

On construit par la méthode du triangle rectangle le point M_1 , image de M dans le rabattement. La droite D_1 , image de D est obtenue par la méthode des alignements, le point (i, i') intersection de (h, h') et de D est invariant dans le rabattement; la droite d_1 est donc la droite (m_1, l_1) . On construit sur d_1 le carré en « vraie grandeur »; on abaisse de ω la

perpendiculaire à d_1 . La distance de ω à d_1 est égale à la moitié de la longueur du côté du carré; on reporte cette longueur de part et d'autre du projeté de ω sur d_1 . On obtient a et b en relevant les points a_1 et b_1 , obtenus, a' et b' sont obtenus en rattachant a et b sur d' . Les deux autres sommets sont symétriques de a et b par rapport à ω .



11.6

Déterminons le plan Π orthogonal à $D(d, d')$ passant par $A(a, a')$ par deux droites orthogonales à D : une horizontale $H(h, h')$ passant par A et une frontale $F(f, f')$ passant par A .

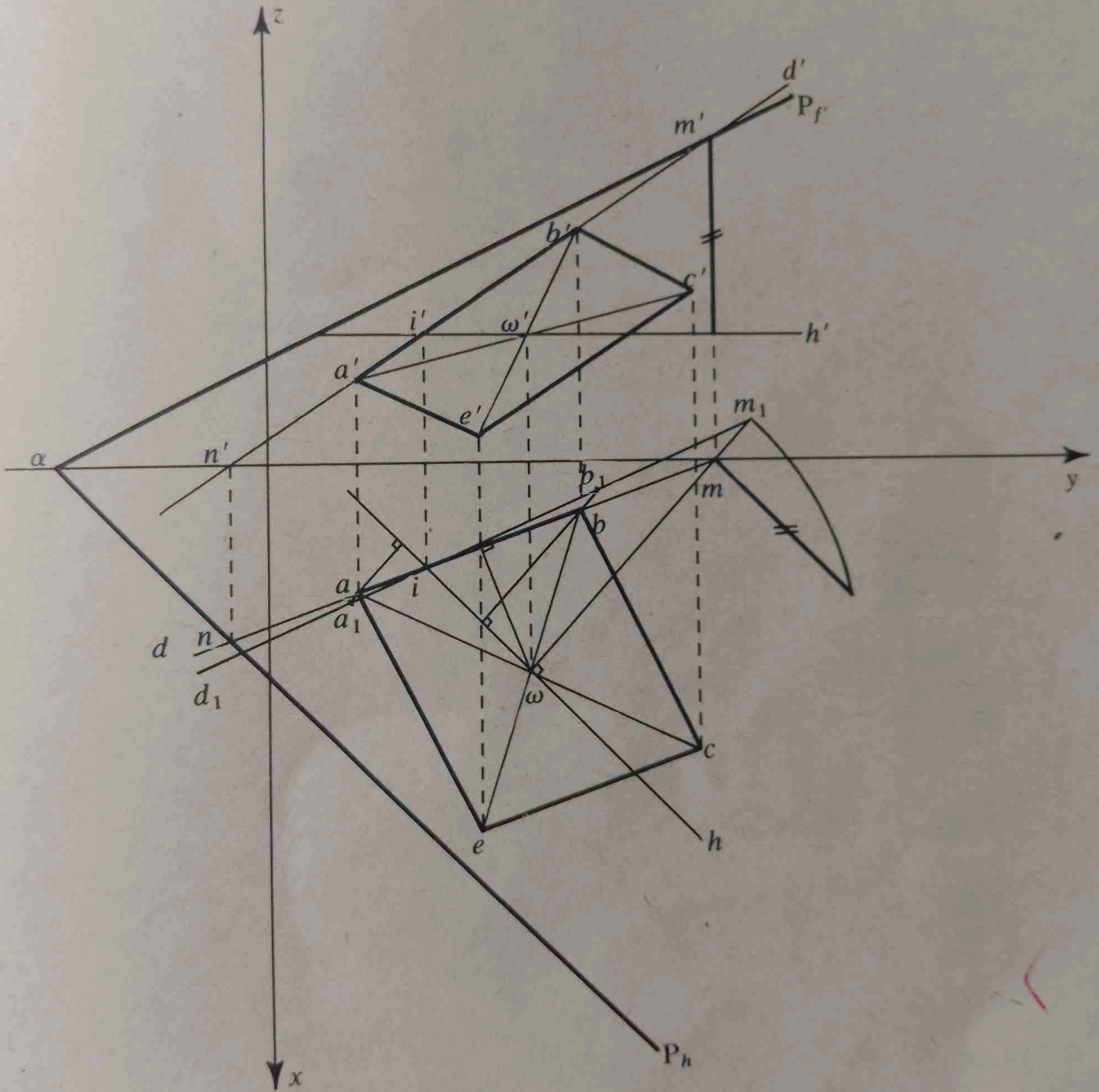
Déterminons l'intersection Ω de Π et de D . Pour cela considérons le plan de bout passant par D il coupe H en $N(n, n')$ et F en $M(m, m')$. La droite MIN coupe D en $\Omega(\omega, \omega')$.

Rabottons le plan Π sur le plan frontal f en utilisant pour charnière la droite F . Le point M est invariant dans le rabattement. Déterminons la projection frontale ω'' de l'image de Ω dans le rabattement en utilisant le triangle de rabattement: on mène par ω' la parallèle à f' et on porte une longueur $\omega'\mu$ égale à $\omega\mu_1$ (voir dessin). Le triangle de rabattement relatif à Ω est sur l'épure $m'\omega'\mu$; on a alors ω'' en portant sur d' : $m'\omega'' = m'\mu$. On considère alors l'image de a' : b'' dans la rotation de centre ω'' et d'angle $+\frac{\pi}{3}$; b'' est la projection frontale du rabattement de B : la droite $\Omega''B''$ coupe F en P , P est

perpendiculaire à d_1 . La distance de ω à d_1 est égale à la moitié de la longueur du côté du carré; on reporte cette longueur de part et d'autre du projeté de ω sur d_1 .

On obtient a et b en relevant les points a_1 et b_1 obtenus, a' et b' sont obtenus en rappelant a et b sur d' .

Les deux autres sommets sont symétriques de a et b par rapport à ω .

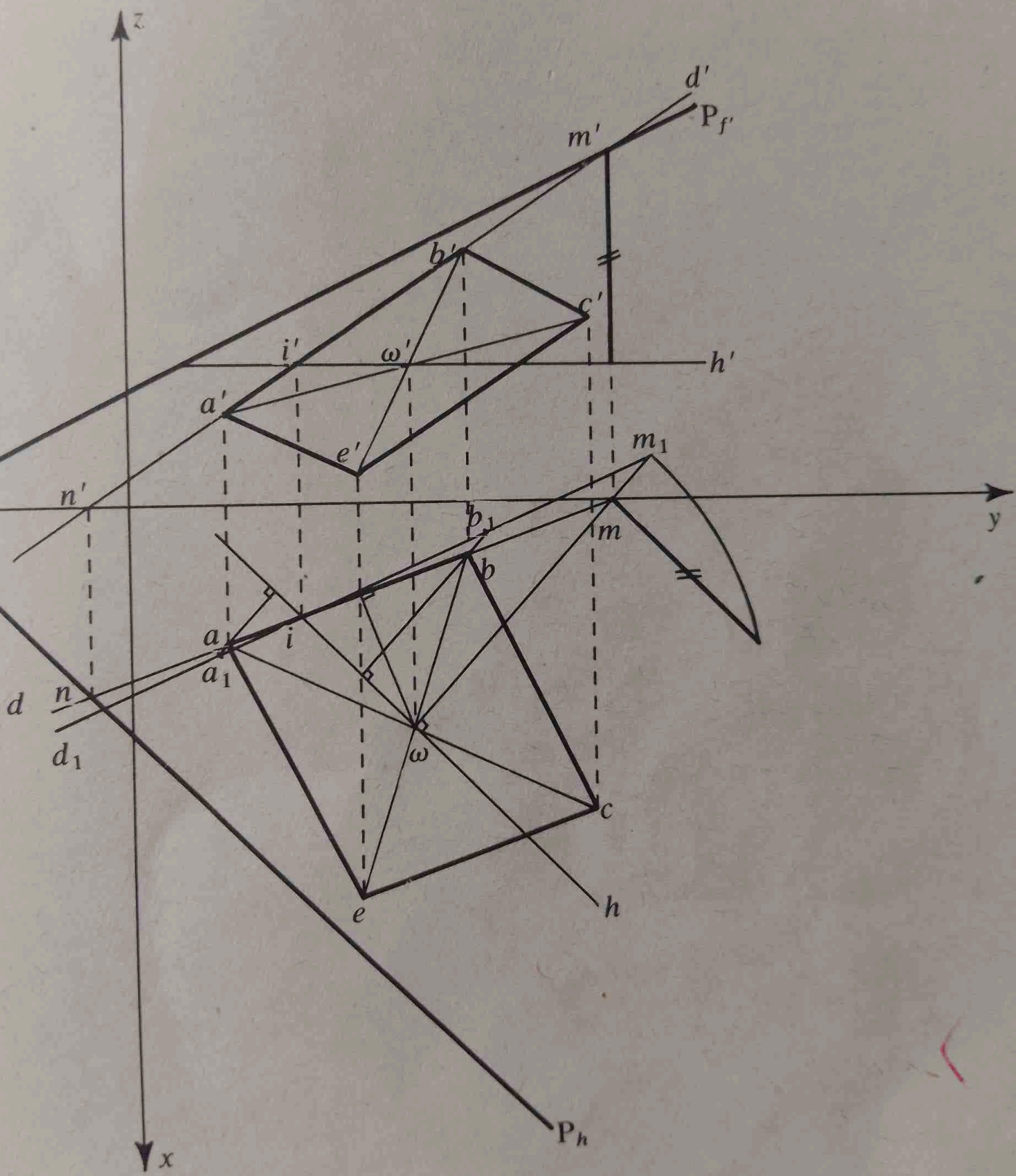


1.6 Déterminons le plan Π orthogonal à $D(d, d')$ passant par $A(a, a')$ par deux droites orthogonales à D ; une horizontale $H(h, h')$ passant par A et une

projeté de ω sur a_1 .

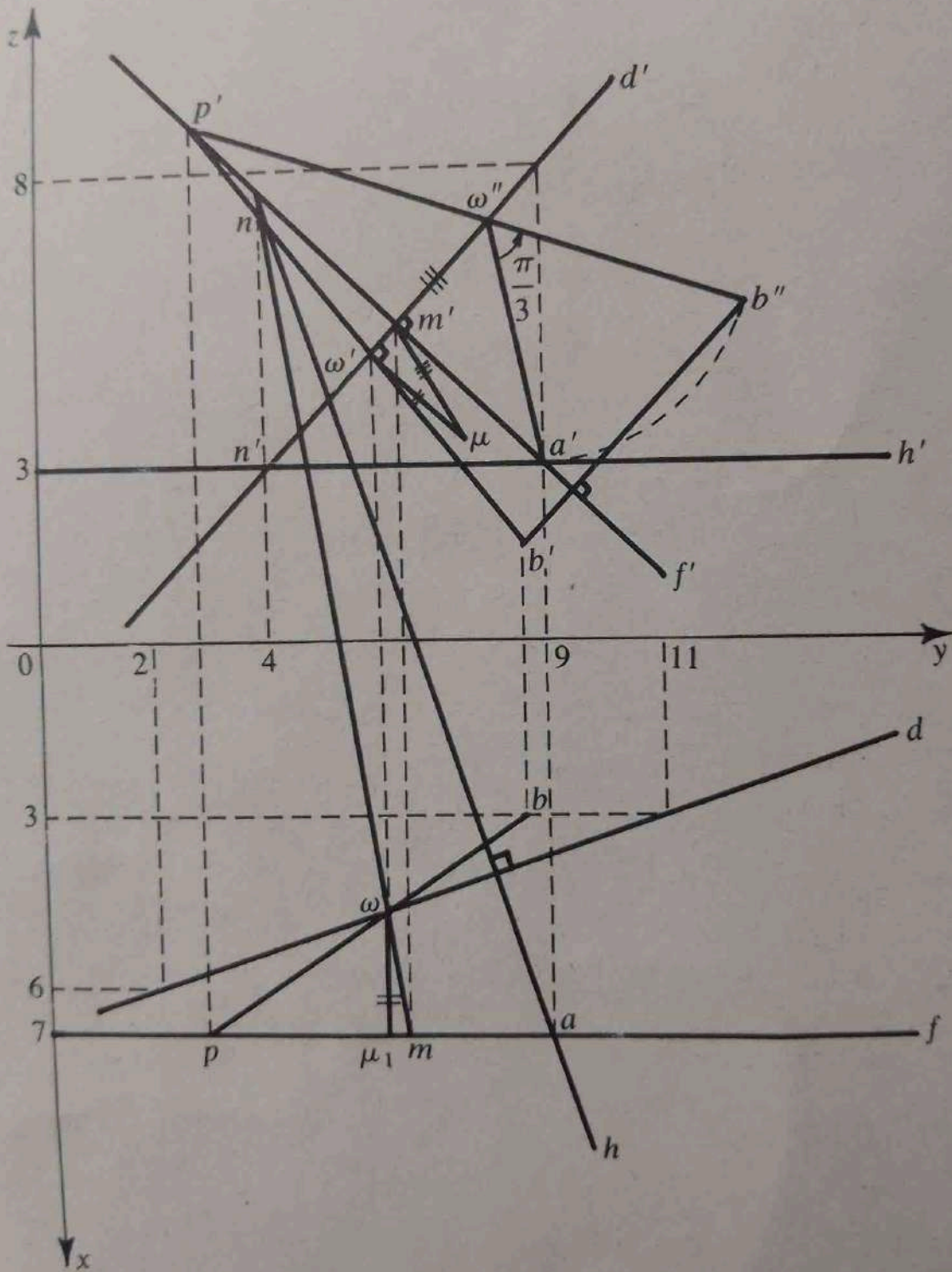
On obtient a et b en relevant les points a_1 et b_1 obtenus, a' et b' sont obtenus en rappelant a et b sur d' .

Les deux autres sommets sont symétriques de a et b par rapport à ω .



Déterminons le plan Π orthogonal à $D(d, d')$ passant par $A(a, a')$ par deux
 horizontale $H(h, h')$ passant par A et un

invariant dans le rabattement donc b' projection frontale de B sera sur $p'\omega'$ et sur la perpendiculaire à f' mené par b'' . On rappelle b' en b sur $p\omega$. On construit le point B(b, b') image de A.



2° On suppose désormais $a = 1$ et $b = 2$.

a) Montrer que $\varphi_{1,2}$ est une symétrie affine dont on déterminera les éléments.

b) Montrer que $\varphi_{1,2}(C) = C$.
D. On considère, dans le repère R, le mouvement du point M dont les coordonnées sont données en fonction du temps par :

$$x(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad y(t) = e^t \quad (t \geq 0).$$

1° Montrer que la trajectoire du mobile est une partie de C que l'on précisera.

2° Déterminer la nature du mouvement de M.

(Problème Bac E. Besançon-Grenoble-Lyon 1982.)

12.2

On désigne par P un plan de l'espace E.

La distance de deux points M et N de E, ou norme du vecteur \overline{MN} , est notée $\|\overline{MN}\|$. A tout couple (M, N) des points de E, on associe

a) le réel $\Delta(M, N) = \frac{\|\overline{MN}\|}{m}$ si les points M et N ont la même projection orthogonale m sur P,

b) le réel $\Delta(M, N) = \frac{\|\overline{Mm}\| + \|\overline{mn}\| + \|\overline{nN}\|}{m+n}$ si les points M et N ont, sur P, des projections orthogonales m et n distinctes. On choisira un repère cartésien orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E tel que (O, \vec{i}, \vec{j}) soit un repère cartésien orthonormé de P.

1° On désigne par t un réel quelconque.

Le point $M(t)$ de E est défini par l'égalité :

$$\overline{OM}(t) = (\cos t) \cdot \vec{i} + (\sin t) \cdot \vec{j} + t \cdot \vec{k}$$

et le point L de P est tel que $\overline{OL} = \vec{i}$.

Démontrer que $\Delta(L, M(t)) = |t| + \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right|$.

2° Étudier les variations de la fonction :

$$f : [-2\pi, +4\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto |t| + \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right|.$$

Tracer la courbe représentative F de f dans un plan (T) affine euclidien, rapporté au repère cartésien orthonormé $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra le centimètre comme unité de longueur.

3° L'unité d'aire étant le centimètre carré, calculer l'aire de la partie du plan (T) limitée par F, par l'axe des abscisses et par les droites qui ont pour équations respectives :

$$t = 4\pi \quad \text{et} \quad t = -2\pi.$$

4° α étant un réel strictement positif donné, on désigne par A le point de E tel que :

$$\overline{OA} = \alpha \vec{k}.$$

a) Quel est l'ensemble des points M du plan P tels que, l étant un réel donné, $\Delta(A, M) = l$? Discuter suivant les valeurs de l.

b) Quel est l'ensemble des points N du plan (O, \vec{i}, \vec{k}) tels que $\Delta(A, N) = l$? Discuter suivant les valeurs de l.

5° Étant donné les réels α, β, γ strictement positifs et tels que $\beta < \alpha$, les points A et B de E sont définis par $\overline{OA} = \alpha \vec{k}$, $\overline{OB} = \gamma \vec{i} + \beta \vec{k}$. Quel est l'ensemble des points S de P tels que $\Delta(A, S) = \Delta(S, B)$? Discuter suivant les valeurs respectives de γ et de $\alpha - \beta$.

6° On désigne par φ une application affine de E vers E qui a) laisse P globalement invariant

b) est telle que, quels que soient les points M et N de E,

$$\Delta(M, N) = \Delta(\varphi(M), \varphi(N)).$$

Quelles sont les restrictions à P des applications affines φ ?

Prouver que, si m est la projection orthogonale de M sur P, $\varphi(m)$ est la projection orthogonale de $\varphi(M)$ sur P.

Trouver toutes les applications affines φ de E vers E qui possèdent les propriétés a) et b).

(Problème Bac C. Clermont-Ferrand 1977.)

12.3

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On désigne par P^* le plan P privé du point O.

Un point quelconque M ayant pour coordonnées x et y par rapport au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) a pour affixe le nombre complexe $z = x + iy$; on note \bar{z} le conjugué de z; on désigne par $[r, \theta]$ le nombre complexe qui s'écrit $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec r élément de \mathbb{R}_+ et θ élément de \mathbb{R} .

A. Étant donné un nombre complexe a non nul, on considère l'application φ_a de P^* dans P^* qui à chaque point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{a}{\bar{z}}.$$

1° Cette application est-elle bijective?

Déterminer suivant les valeurs de a l'ensemble des points invariants par φ_a .

2° Déterminer la nature de l'application composée $\varphi_b \circ \varphi_a$ a et b étant des nombres complexes non nuls.

Montrer que $\varphi_a \circ \varphi_a$ est la restriction à P^* d'une isométrie de P dont on déterminera la nature et les éléments remarquables en fonction de l'argument de a.

Quelle condition nécessaire et suffisante doit vérifier a pour que φ_a soit involutive?

B. Dans cette partie, a est un réel strictement positif.

1° En utilisant la partie A, répondre aux questions suivantes :

φ_a est-elle bijective?

Quel est l'ensemble des points invariants par φ_a ?

b étant aussi un réel strictement positif, quelle est la nature de $\varphi_b \circ \varphi_a$? φ_a est-elle involutive?

2° M' étant l'image de M par l'application φ_a , calculer les coordonnées x' , y' de M' en fonction des coordonnées x et y de M, puis les coordonnées x et y de M en fonction des coordonnées x' et y' de M'.

3° Soit z' étant l'affixe de M', on pose $z' = [r', \theta']$, calculer r' et θ' en fonction de r et θ .

4° Dans la suite du problème, on se servira, suivant les questions, soit de la relation : $z' = \frac{a}{z}$, soit des relations donnant x' et y' en fonction de x et y , soit de celles donnant x et y en fonction de x' et y' , soit de celles donnant r' et θ' en fonction de r et θ .

5° Soit une droite (D) passant par O, déterminer l'image par φ_a de (D) privée de O.

6° Soit un cercle (C) passant par O et centré sur l'axe des abscisses en un point d'abscisse c . Déterminer l'image par φ_a de (C) privé de O. En déduire l'image par φ_a d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées et distincte de celui-ci.

7° Soit (H) la courbe d'équation $x^2 - y^2 + 2x = 0$ par rapport au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

8° Montrer que (H) est une hyperbole dont on indiquera centre, axes de symétrie, sommets, foyers, asymptotes. Dessiner (H) en prenant 4 cm pour unités sur chacun des deux axes.

9° Montrer que (H) est l'ensemble des points M d'affixe $z = [r, \theta]$ tel que :

$$r = f(\theta) \text{ où } f(\theta) = \frac{-2 \cos \theta}{\cos 2\theta}$$

10° θ décrivant un sous-ensemble de $[0, 2\pi[$. En étudiant le signe de $f'(\theta)$ suivant les valeurs de θ , vérifier que (H) se trouve située dans trois régions du plan limitées par des demi-droites d'origine O; sur la figure, on hachurera les autres régions.

11° A partir de cette question, on suppose $a = 1$. Soit (T^*) l'image par φ_1 de (H) privée de O et soit $(T) = (T^*) \cup \{O\}$. Montrer que (T) est l'ensemble des points M d'affixe $z = [r, \theta]$ tels que $r = g(\theta)$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$; calculer $g(\theta)$.

12° Montrer que (T) se trouve dans les mêmes régions que celles définies au 2° et qui contiennent (H).
 13° Montrer que (T) admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie.
 14° Placer les points invariants de (H) et calculer leurs coordonnées.
 15° Soit A le point de (H) appartenant à l'axe des abscisses et dont l'abscisse est strictement négative.
 16° Déterminer $A' = \varphi_1(A)$.
 17° Soit (Δ) la tangente en A à (H); déterminer l'image (Δ') de (Δ) par φ_1 en utilisant la question B. 4°.
 18° Construire (Δ') .
 19° Montrer qu'une équation cartésienne de (T) est :

$$y^2 = x^2 \left(\frac{1+2x}{1-2x} \right)$$

Soit (T) l'ensemble des points du plan P de coordonnées x et y telles que :

$$y = x \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$$

$$x \mapsto x \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$$

En étudiant la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et en utilisant les questions précédentes, construire (T_1) sur le même graphique que (H), puis en déduire (T) . Préciser les tangentes en O et en A' à (T_1) . Vérifier que (T) et (Δ') ont la même tangente en A'.

(Problème Bac. C. Rouen 1982.)

12.4

A. Soit P un plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . A tout point M de P de coordonnées (x, y) on associe le nombre complexe $z = x + iy$. Soit l'application

$$F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto z' = \frac{z}{1+|z|}$$

et l'application

$$\Phi : P \rightarrow P$$

$$M \mapsto M'$$

M ayant pour affixe z et M' pour affixe $z' = F(z)$.

1° Étudier et représenter graphiquement la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

2° a) Soit D_0 la droite (O, \vec{i}) de P. Déterminer $\Phi(D_0)$.

b) Si M et N sont deux points de D_0 , quelle est l'image par Φ du segment $[M, N]$?

3° a) Soit r une rotation de P de centre O. Montrer que, pour tout point M de P,

$$\Phi(r(M)) = r(\Phi(M))$$

(on pourra associer à r une application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} de la forme : $z \mapsto az$).

b) Déterminer $\Phi(P)$ et $F(\mathbb{C})$. Démontrer que Φ et F sont injectives.

B. Soit Δ l'application de $P \times P$ dans \mathbb{R}_+ qui, au couple (M, N) de points de P d'affixes respectives (m, n) fait correspondre :

$$\Delta(M, N) = |F(m) - F(n)| = \left| \frac{m}{1+|m|} - \frac{n}{1+|n|} \right|$$

1° Soit M_1 et N_1 d'affixes respectives $z_1 = -2$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$. Calculer :

$$\Delta(O, M_1), \quad \Delta(O, M_2), \quad \Delta(M_1, M_2)$$

2° Vérifier que : $V(M, N, Q) \in P^3$

$$\Delta(M, N) = 0 \iff M = N$$

$$\Delta(M, N) = \Delta(N, M)$$

$$\Delta(M, Q) \leq \Delta(M, N) + \Delta(N, Q)$$

3° Démontrer que, M et N étant des points quelconques de P, Δ(M, N) admet un plus petit majorant (ou borne supérieure) que l'on précisera.

C. Soit C le cercle de centre O et de rayon 1. Soit un réel $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et S'_α la corde de C privée de ses extrémités et perpendiculaire à la droite D_0 au point d'abscisse $\cos \alpha$.

1° Soit $M(x, y)$ d'image $M'(x', y')$ par Φ . Calculer x' et y' en fonction de x et y . Former la relation (E) vérifiée par (x', y') pour que $M' \in S'_\alpha$.

2° Déterminer l'image réciproque S_α de S'_α (S_α est l'ensemble des points de P dont les images par Φ appartiennent à S'_α) par l'une des deux méthodes :

- a) Traduire (E) en termes de distances.
- b) S_α est une partie d'une conique dont on formera une équation cartésienne que l'on réduira.
- 3° Construire S_π et placer ses éléments géométriques.

RÉSOLUTION DES PROBLÈMES

12.1 A. 1° f_1 est continue sur $] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et dérivable sur $] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ (opérations et composition de fonctions continues et dérivables).

$$f_1'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Sur ce dernier ensemble :
 Pour avoir les demi-tangentes aux points d'abscisses -1 et 1 de C_1 , on dispose de deux méthodes :
 — chercher la limite du taux de variation ;
 — chercher la limite de f_1' qui est

$$\lim_{x \rightarrow -1} f_1'(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f_1'(x) = -\infty$$

les demi-tangentes sont donc parallèles à Oy.

2° $f_1(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1} + x}{\sqrt{x^2-1}}$ du signe de $\sqrt{x^2-1} + x$.

- Si $x > 1$, $\sqrt{x^2-1} + x > -x$ (puisque $-x < 0$ et $\sqrt{x^2-1} > 0$) donc $f_1'(x) > 0$.
- Si $x < -1$, $\sqrt{x^2-1} + x > -x \iff x^2 - 1 > x^2$ non vérifiée. Donc $f_1'(x) < 0$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f_1'(x)$		-		+
$f_1(x)$		0	-1	1
				+

Branches infinies

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2-1}) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = 2.$$

Pour $x > 1$, $f_1(x) - 2x = -x + \sqrt{x^2-1} = \frac{x^2-1-x^2}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_1(x) - 2x] = 0 \text{ et } f_1(x) - 2x < 0$$

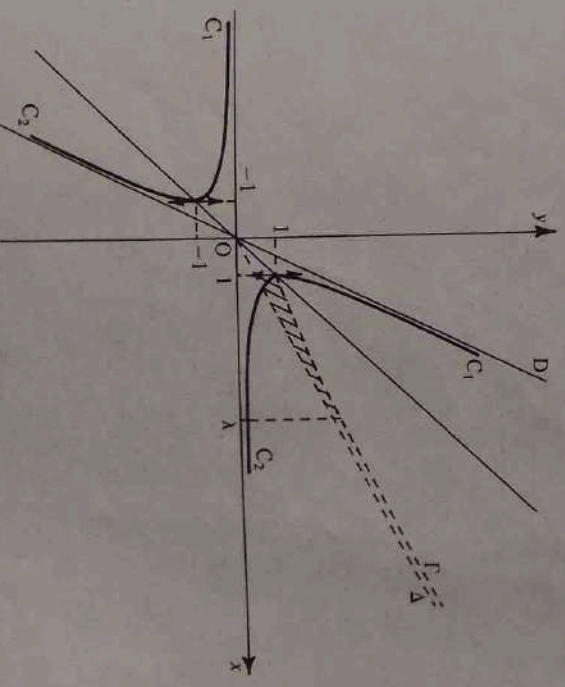
donc la droite D d'équation $y = 2x$ est une asymptote, C_1 est au-dessous de l'asymptote.

- Pour $x < -1$,

$$f_1(x) = x + \sqrt{x^2-1} = \frac{x^2 - (x^2-1)}{x - \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x - \sqrt{x^2-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = 0.$$

La droite $x'x$ est une asymptote, $f_1(x) = \frac{1}{x - \sqrt{x^2-1}} < 0$ pour $x < -1$ donc C_1 est au-dessous de l'asymptote.



2° La restriction de f_1 à $]1, +\infty[$ est une application continue et strictement croissante de $I =]1, +\infty[$ sur I . Elle admet une bijection réciproque g continue et strictement croissante de I sur I .

$$\begin{aligned} (V(x, y) \in I^2) & \iff y - x = \sqrt{x^2 - 1} \\ & \iff (y - x)^2 = x^2 - 1 \\ & \iff y \geq x \\ & \iff \begin{cases} y^2 - 2xy + x^2 = x^2 - 1 \\ y \geq x \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} x = \frac{y^2 + 1}{2y} \\ y \geq x \end{cases} \end{aligned}$$

la condition $y \geq x$ est-elle vérifiée?

$$y \geq \frac{y^2 + 1}{2y} \iff 2y^2 \geq y^2 + 1 \iff y^2 \geq 1 \text{ ce qui est vrai lorsque } y \in I.$$

Donc $g :]1, +\infty[\longrightarrow]1, +\infty[$
 $x \longmapsto \frac{x^2 + 1}{2x}$

la représentation graphique de g est la symétrique de la partie de C_1 correspondant à $x \geq 1$ par rapport à la première bissectrice du repère (en pointillé sur la figure). Elle admet pour asymptote la symétrique Δ de D par rapport à la première bissectrice du repère :

l'équation de D est $y = 2x$

celle de Δ est $x = 2y$ c'est-à-dire $y = \frac{x}{2}$.

$$\begin{aligned} 4^\circ \mathcal{A}(\lambda) &= \int_1^\lambda \left[g(x) - \frac{x}{2} \right] dx = \int_1^\lambda \frac{1}{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} [\ln |x|]_1^\lambda = \frac{1}{2} \ln \lambda \end{aligned}$$

c'est l'aire de la partie hachurée sur la figure, l'unité d'aires étant l'aire du carré ou du rectangle dont les côtés ont pour longueurs les unités choisies sur les deux axes de coordonnées.

B. 1° Les points $M_1(x_1, y_1)$ et M_2 de coordonnées $x_2 = -x_1, y_2 = -y_1$ sont symétriques dans la symétrie s par rapport à O .

$$\begin{aligned} M_1 \in C_1 & \iff y_1 = x_1 + \sqrt{x_1^2 - 1} \\ & \iff -y_2 = -x_2 + \sqrt{x_2^2 - 1} \\ & \iff y_2 = x_2 - \sqrt{x_2^2 - 1} \\ & \iff M_2 \in C_2 \end{aligned}$$

donc $s(C_1) = C_2$. On construit C_2 comme étant la symétrique de C_1 par rapport à O .

$$\begin{aligned} 2^\circ (y = x + \sqrt{x^2 - 1} \text{ ou } y = x - \sqrt{x^2 - 1}) \\ & \iff (y - x) = \sqrt{x^2 - 1} \text{ ou } y - x = -\sqrt{x^2 - 1} \\ & \iff (y - x)^2 = x^2 - 1 \\ & \iff y^2 - 2xy + x^2 = x^2 - 1 \\ & \iff y^2 - 2xy + 1 = 0. \end{aligned}$$

3° a) La famille $(\vec{i}, \vec{j} + 2\vec{j})$ est libre car quels que soient les réels λ et μ :

$$\begin{aligned} \lambda \vec{i} + \mu (\vec{i} + 2\vec{j}) = \vec{0} & \iff (\lambda + \mu) \vec{i} + 2\mu \vec{j} = \vec{0} \\ & \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 2\mu = 0 \end{cases} \iff \lambda = \mu = 0. \end{aligned}$$

Le nombre de vecteurs de la famille est $2 = \dim \mathbb{P}$ donc la famille $(\vec{i}, \vec{i} + 2\vec{j})$ est une base du plan vectoriel \mathbb{P} et $(O, \vec{i}, \vec{i} + 2\vec{j})$ est un repère de \mathbb{P} associé à \mathbb{P} .

b) Appelons (x, y) et (X, Y) les couples de coordonnées de M respectivement dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) et dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{i} + 2\vec{j})$:

$$\begin{aligned} \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = X\vec{i} + Y(\vec{i} + 2\vec{j}) = (X + Y)\vec{i} + 2Y\vec{j} \\ \begin{cases} x = X + Y \\ y = 2Y \end{cases} \end{aligned}$$

$$M \in C \iff y^2 - 2xy + 1 = 0 \iff (2Y)^2 - 2(X + Y)(2Y) - 1 = 0$$

$$\iff 4Y^2 - 4XY - 4Y^2 + 1 = 0 \\ \iff XY = \frac{1}{4}.$$

C'est l'équation de C dans le nouveau repère.

C. 1° a) $\begin{cases} x' = ax \\ y' = bx - ay. \end{cases}$

Si l'on se donne (x', y') arbitraire, le système :

$$\begin{cases} ax = x' \\ bx - ay = y' \end{cases}$$

admet une solution unique (x, y) si et seulement si c'est un système de Cramer c'est-à-dire si et seulement si le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & -a \end{vmatrix} = -a^2$$

est non nul. Donc $\varphi_{a,b}$ est une bijection si et seulement si $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

b) $M(x, y)$ est invariant par $\varphi_{a,b}$ si et seulement si

$$\begin{cases} ax = x \\ bx - ay = y \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} (a-1)x = 0 \\ bx - (a+1)y = 0 \end{cases}$$

le déterminant du système est :

$$\begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ b & -a-1 \end{vmatrix} = -a^2 + 1.$$

• Si $a \neq 1$ et $a \neq -1$, le système est de Cramer et admet la seule solution $(0, 0)$. L'ensemble des points invariants est $\{O\}$.

• Si $a = 1$, l'ensemble des points invariants est la droite d'équation $y = \frac{b}{2}x$.

• Si $a = -1$, l'ensemble des points invariants est la droite d'équation $x = 0$ c'est-à-dire $y'y$.

c) $\varphi_{(a,b)}$ est une application affine. C'est une symétrie affine si et seulement si elle est involutive c'est-à-dire $\varphi_{(a,b)}^2 = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$.

$M(x, y)$ a pour image $\varphi_{(a, b)}(M)$ de coordonnées :

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = bx - ay \end{cases}$$

$\varphi_{(a, b)}^{-1}(M')$ a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x'' = ax' = a^2x \\ y'' = bx' - ay' = bax - a(bx - ay) = a^2y \end{cases}$$

$\varphi_{(a, b)}^{-1}(M) = M$ pour tout M de P si et seulement si $a^2 = 1$. Donc $\varphi_{(a, b)}$ est une symétrie affine si et seulement si $a = 1$ ou $a = -1$.

2° a) $\varphi_{1, 2}$ est une symétrie affine puisque $a = 1$. L'axe de cette symétrie est l'ensemble des points invariants trouvé à la question C. 1° b) pour $a = 1$ et $b = 2$, c'est la droite d'équation $y = x$.

La direction de la symétrie est l'ensemble des vecteurs \vec{v} dont l'image est $-\vec{v}$ par l'endomorphisme associé à $\varphi_{(a, b)}$, c'est-à-dire des vecteurs $\vec{v}(x, y)$ tels que :

$$\begin{cases} x = -x \\ bx - y = -y \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad x = 0.$$

$\varphi_{1, 2}$ est donc la symétrie affine d'axe la première bissectrice du repère (O, \vec{i}, \vec{j}) parallèlement à $y' = x'$.

b) $M(x, y)$ a pour image par $\varphi_{1, 2}$ le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2x - y \end{cases} \iff \begin{cases} x = x' \\ y = 2x' - y' \end{cases}$$

$$M \in C \iff y^2 - 2xy + 1 = 0$$

$$\iff (2x' - y')^2 - 2x'(2x' - y') + 1 = 0$$

$$\iff y'^2 - 2x'y' + 1 = 0$$

$$\iff M' \in C$$

donc $\varphi_{1, 2}(C) = C$.

D. 1°

$$\begin{cases} x = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = e^t \quad (t \geq 0) \end{cases}$$

la trajectoire est incluse dans la courbe d'équation : $x = \frac{y + \frac{1}{y}}{2}$

c'est-à-dire :

$$2x = y + \frac{1}{y} \\ y^2 - 2xy + 1 = 0$$

qui est l'équation de C. Mais $t \geq 0$ donc $y = e^t \geq 1$, par suite la trajectoire est la partie de C définie par :

$$\begin{cases} y^2 - 2xy + 1 = 0 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

Ce n'est autre que l'arc de C₁ défini par :

$$\begin{cases} y = x + \sqrt{x^2 - 1} \\ x \geq 1 \end{cases}$$

2° Les coordonnées du vecteur-vitesse et du vecteur-accelération à l'instant t sont :

$$\vec{v} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t - e^{-t} \\ e^t \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = \frac{1}{4} (e^t - e^{-t})(e^t + e^{-t}) + e^{2t} = \frac{5}{4} e^{2t} - \frac{1}{4} e^{-2t}$$

$$= \frac{1}{4} e^{-2t} (5e^{4t} - 1) > 0$$

car $e^{-2t} > 0$ et $5e^{4t} - 1 \geq 4$ pour $t \geq 0$ donc le mouvement du point M est accéléré pour $t \geq 0$.

12.2

1° Le point $M(t)$ se projette orthogonalement en L sur le plan P si, et seulement si :

$$\cos t = 1 \quad \text{et} \quad \sin t = 0$$

c'est-à-dire $t = 0 \in [2\pi]$. D'où la discussion

• Si $t = 0 \in [2\pi]$, on a

$$\Delta(L, M(t)) = \|\overline{LM}(t)\| = |t| = |t| + \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right|$$

• Si $t \neq 0 \in [2\pi]$, on a

$$\Delta(L, M(t)) = \|\overline{LM}(t)\| + \|\overline{m}(t)M(t)\|$$

$$= \sqrt{(\cos t - 1)^2 + \sin^2 t} + |t|$$

$$= \sqrt{2(1 - \cos t)} + |t|$$

$$= \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} + |t|$$

$$= \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| + |t|.$$

2° On note que la fonction f est paire. De plus, pour $t \geq 0$, on a

$$f(t + 2\pi) = t + 2\pi + \left| 2 \sin \left(\frac{t}{2} + \pi \right) \right| = f(t) + 2\pi.$$

De sorte que le graphe de f sur $[2\pi, 4\pi]$ se déduit de celui de f sur $[0, 2\pi]$ par la translation de vecteur $2\pi(\vec{a} + \vec{b})$.

Finalement on étudie f sur $[0, 2\pi]$, où l'on a :

$$f(t) = t + 2 \sin \frac{t}{2} \\ f'(t) = 1 + \cos \frac{t}{2}$$

d'où :

t	0		2π
$f(t)$		+	0
$f'(t)$	0		2π

La fonction f possède, pour $t = 0$, une dérivée à droite égale à 2 et une dérivée à gauche égale à -2 . Pour $t = 2\pi$, la fonction f possède une dérivée à droite égale à 2 et une dérivée à gauche égale à 0. Voir figure 1.

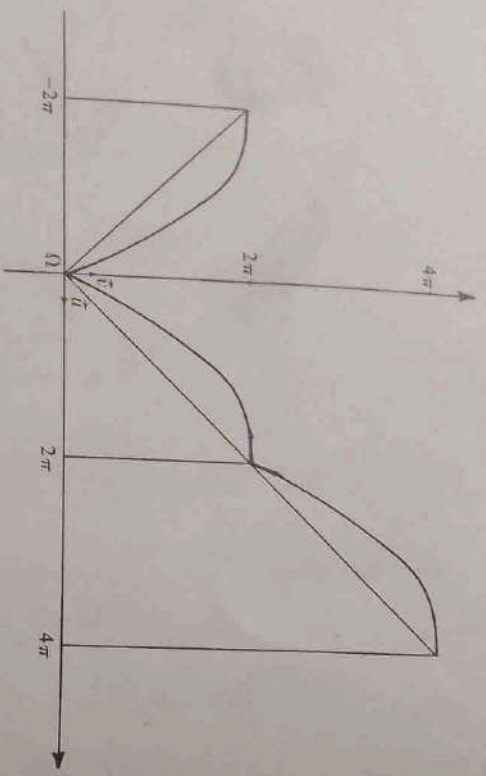


Fig. 1

3° Calculons d'abord l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et la droite d'équation $t = 2\pi$. On sait que cette aire est égale à

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \int_0^{2\pi} \left(t + 2 \sin \frac{t}{2} \right) dt = \left[\frac{t^2}{2} - 4 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi^2 + 8.$$

Les propriétés géométriques de la courbe représentative montrent que l'aire totale demandée par l'énoncé est égale à l'aire d'un carré de côté 2π augmentée de trois fois l'aire précédente, soit :

$$4\pi^2 + 3(2\pi^2 + 8) = 10\pi^2 + 24.$$

4° a) Pour un point M quelconque du plan P (Y compris le point O), on a :

$$\Delta(A, M) = \alpha + \|\overline{OM}\|.$$

Par suite $\Delta(A, M) = l$ équivaut à $\|\overline{OM}\| = l - \alpha$. D'où la discussion

- Si $l < \alpha$, l'ensemble est vide.
- Si $l = \alpha$, l'ensemble est $\{O\}$.
- Si $l > \alpha$, l'ensemble est le cercle de centre O et de rayon $l - \alpha$.

b) Distinguons deux cas, pour calculer $\Delta(A, N)$, lorsque N est dans le plan (O, \vec{f}, \vec{k}) .

Si N est sur la droite (O, \vec{k}) , on a $\Delta(A, N) = \|\overline{AN}\| = |z - \alpha|$.
Si N n'est pas sur la droite (O, \vec{k}) , on a $\Delta(A, N) = \alpha + |y| + |z|$.

- La discussion est donc la suivante :
- Si $l < 0$, l'ensemble cherché est vide.
 - Si $l = 0$, l'ensemble est $\{A\}$.

- Si $0 < l \leq \alpha$, l'ensemble cherché est formé des deux points de la droite (O, \vec{k}) de cotes $\alpha - l$ et $\alpha + l$.
- Si $l > \alpha$, l'ensemble cherché est formé des deux points précédents et du carré d'équation $|y| + |z| = l - \alpha$, le point $(0, l - \alpha)$ étant exclu. Voir figure 2 (faite dans le cas $\alpha = 1, l = 3$).

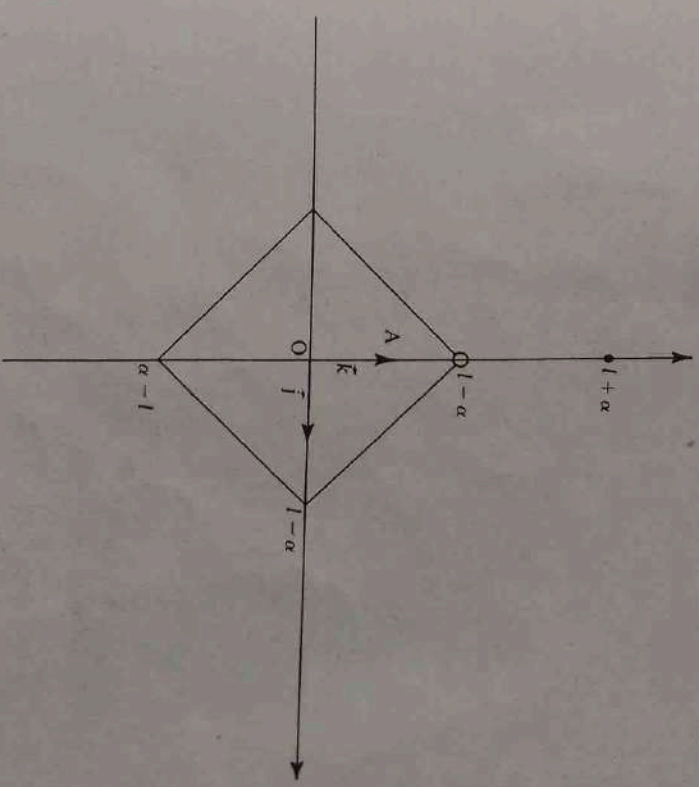


Fig. 2

5° Appelons F la projection orthogonale de B sur P, on a $\overline{OF} = \gamma \vec{f}$.

Nous avons vu à la question précédente que $\Delta(A, S) = \alpha + \|\overline{OS}\|$, lorsque S est dans P. On voit de même que $\Delta(B, S) = \beta + \|\overline{FS}\|$.

L'ensemble cherché est donc caractérisé par

$$\|\overline{SF}\| - \|\overline{SO}\| = \alpha - \beta.$$

Comme $\|\overline{OF}\| = \gamma$, on a la discussion suivante :

- Si $\alpha - \beta > \gamma$, l'ensemble cherché est vide.
- Si $\alpha - \beta = \gamma$, l'ensemble cherché est la demi-droite fermée d'origine O et dirigée par le vecteur $-\vec{f}$.
- Si $\alpha - \beta < \gamma$, l'ensemble cherché est une branche de l'hyperbole de foyers O et F et dont la distance des sommets est $\alpha - \beta$.

6° La restriction, $\overline{\varphi}$, d'une application φ à P est évidemment une isométrie du plan P. Notons que $\overline{\varphi}$ est donc, en particulier, une bijection de P sur P. Soit maintenant M un point de E, m sa projection orthogonale sur P et m' la

projection orthogonale de $\varphi(M)$ sur P . Introduisons le point n de P défini par $n = \varphi^{-1}(m)$. (On a donc $m' = \varphi(n)$.) Remarquons maintenant que $\Delta(M, n) = \|Mn\| + \|\overline{mn}\| \geq \|M\overline{m'}\| = \Delta(M, m')$.

Il en résulte :

$$\Delta(\varphi(M), \varphi(n)) \geq \Delta(\varphi(M), \varphi(m))$$

soit :
$$\|\overline{\varphi(M)\overline{m'}}\| \geq \|\overline{\varphi(M)\overline{m}}\| + \|\overline{m'\varphi(m)}\|.$$

On en déduit : $\|\overline{m'\varphi(m)}\| = 0$ soit $\varphi(m) = m'$.
 Soit maintenant φ une application affine vérifiant $a)$ et $b)$. Soit t la translation de vecteur $\overline{O\varphi(O)}$. Il est clair que $\varphi' = t^{-1} \circ \varphi$ est une application affine vérifiant également $a)$ et $b)$. De plus, $\varphi'(O) = O$. Soit A et A' les points de E définis par $OA = \vec{k}$, $OA' = -\vec{k}$. Le point $\varphi(A)$ se projette orthogonalement en O sur P et

$$\|\overline{OA}\| = \Delta(O, A) = \Delta(\varphi'(O), \varphi(A)) = \|\overline{O\varphi(A)}\|.$$

Il en résulte que $\varphi'(A) = A$ ou $\varphi'(A) = A'$.

Premier cas : $\varphi'(A) = A$. La restriction de φ' à P est une isométrie de P laissant O invariant, c'est donc une rotation de centre O ou une symétrie par rapport à une droite passant par O . La restriction de φ' à la droite (O, \vec{k}) est l'identité.

Il en résulte que φ' est une isométrie de E , plus précisément φ' est : soit une rotation d'axe (O, \vec{k})

soit une symétrie par rapport à un plan contenant (O, \vec{k}) .
 L'application φ peut donc être :

- une translation de vecteur appartenant à la direction de P ;
- une rotation d'axe perpendiculaire à P ;

• une symétrie orthogonale par rapport à un plan perpendiculaire à P .

Deuxième cas : $\varphi'(A) = A'$. On a alors $\varphi'(A') = A$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan P . L'application affine $\varphi' \circ s$ vérifie $a)$, $b)$ et laisse invariants les points O et A : on est ainsi ramené au premier cas. L'application peut donc être :

- la composée (commutative) de s et d'une translation dont le vecteur appartient à la direction de P ;
- la composée (commutative) de s et d'une rotation d'axe perpendiculaire à P ;

• la composée (commutative) de s et d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan perpendiculaire à P , c'est-à-dire un demi-tour dont l'axe est dans P .

Réciproquement, il est évident que toutes les applications φ ainsi trouvées sont des applications affines vérifiant $a)$ et $b)$.

12.3 A. 1° φ_a est une bijection de P^* sur lui-même si, et seulement si, tout point M' de P^* possède un antécédent et un seul par φ_a ; quels que soient z et z' de C^* , on a :

$$z' = \frac{a}{z} \iff z = \frac{\overline{a}}{z'}$$

φ_a est donc une bijection de P^* sur lui-même et $\varphi_a^{-1} = \varphi_{\overline{a}}$.

Un point $M(z)$ est invariant si, et seulement si,

$$z = \frac{a}{z} \iff z\overline{z} = a \iff |z|^2 = a.$$

Si $a \notin \mathbb{R}_+$, il n'y a pas de point invariant.
 Si $a \in \mathbb{R}_+$, l'ensemble des points invariants est le cercle de centre O et de rayon \sqrt{a} .

2° Soit $M(z)$ un point de P^* , l'axe z'' de $\varphi_b \circ \varphi_a(M)$ est :

$$z'' = \frac{b}{\frac{a}{z}} = \frac{b}{a} z$$

$\varphi_b \circ \varphi_a$ est donc la restriction à P^* d'une similitude directe de centre O .

Le point $\varphi_a \circ \varphi_a(M)$ a pour affixe $\frac{a}{z}$, on a donc dans ce cas $z'' = \frac{a}{a} z$. Mais

$$\left| \frac{a}{z} \right| = 1 \text{ donc } \varphi_a \circ \varphi_a \text{ est la restriction à } P^* \text{ de la rotation de centre } O \text{ et d'angle } \arg\left(\frac{a}{z}\right) \equiv 2 \arg a [2\pi].$$

φ_a est involutive si, et seulement si, $\frac{a}{a} = 1$ c'est-à-dire a est un nombre réel.

B. 1° Pour tout a non nul φ_a est une bijection; si $a > 0$ l'ensemble des points invariants est le cercle de centre O et de rayon \sqrt{a} . a et b étant des éléments de \mathbb{R}^* , $\frac{b}{a}$ aussi donc $\varphi_b \circ \varphi_a$ est l'homothétie de centre O et de

rapport $\frac{b}{a}$. φ_a est involutive ($\varphi_a \circ \varphi_a = id_{P^*}$).

2° On a : $z' = \frac{a}{z} = \frac{a}{x-iy} = \frac{a}{x^2+y^2} (x+iy)$

d'où :

$$(1) \begin{cases} x' = \frac{ax}{x^2+y^2} \\ y' = \frac{ay}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Sous forme trigonométrique on a, sachant que $a \in \mathbb{R}^*$

$$[r', \theta'] = \frac{a}{a} = \frac{a}{a} = a \left[\frac{1}{r}, -\theta \right] = \left[\frac{a}{r}, +\theta \right]$$

d'où :

$$(2) \begin{cases} r' = \frac{a}{r} \\ \theta' \equiv \theta [2\pi]. \end{cases}$$

3° On a en utilisant (1) : $\overline{OM'} = \frac{a}{x^2+y^2} \overline{OM}$, les points O, M, M' sont donc alignés.

Soit $D^* = D - \{O\}$ en utilisant la propriété précédente on a $\varphi_a(D^*) \subset D^*$.

Mais φ_a est involutive donc $\varphi_a \circ \varphi_a(D^*) = D^* \subset \varphi_a(D^*)$ d'où $\varphi_a(D^*) = D^*$.

4° Une équation de C est $(x-c)^2 + y^2 = c^2$ c'est-à-dire $x^2 + y^2 = 2cx$. Soit $M(x, y)$ un point de C différent de O, en utilisant (1) sachant que $x^2 + y^2 = 2cx$, son image M' a pour abscisse $x' = \frac{a}{2c}$. Donc l'image de C est incluse dans la droite L d'équation $x = \frac{a}{2c}$.

Réciproquement soit M_1 un point de L, les coordonnées de M_1 sont $(\frac{a}{2c}, \frac{y}{1})$ les coordonnées de l'antécédent de M_1 vérifient :

$$\begin{cases} \frac{a}{2c} = \frac{ax}{x^2 + y^2} \\ \frac{y}{1} = \frac{ay}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

donc vérifiant $x^2 + y^2 = 2cx$; l'antécédent de M_1 appartient à $C^* = C - \{O\}$ donc $\varphi_a(C^*) = L$.

φ_a étant involutive, on a $\varphi_a(L) = C^*$.
Soit D une droite parallèle à l'axe des ordonnées et distincte de celui-ci, une équation de D est $x = m$ ($m \neq 0$). Posons $c = \frac{a}{2m}$ d'après l'étude précédente D a pour image le cercle de centre le point $(c, 0)$ passant par l'origine et privé de ce dernier point.

C. 1° Une équation de H est $(x+1)^2 - y^2 - 1 = 0$. H est donc une hyperbole de centre $\Omega(-1, 0)$ d'axe transverse (Ω, \vec{i}) et non transverse (Ω, \vec{j}) . Les sommets sont $A(-2, 0)$ et $O(0, 0)$. Les asymptotes sont les droites d'équation $y = x + 1$ et $y = -(x + 1)$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
On a $c = \sqrt{2}$, les foyers appartenant à l'axe transverse ont pour coordonnées dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) :

$$F(-1 + \sqrt{2}, 0) \text{ et } F'(-1 - \sqrt{2}, 0).$$

2° On a : $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$ avec $\begin{cases} \theta \in [0, 2\pi[\\ r > 0 \end{cases}$

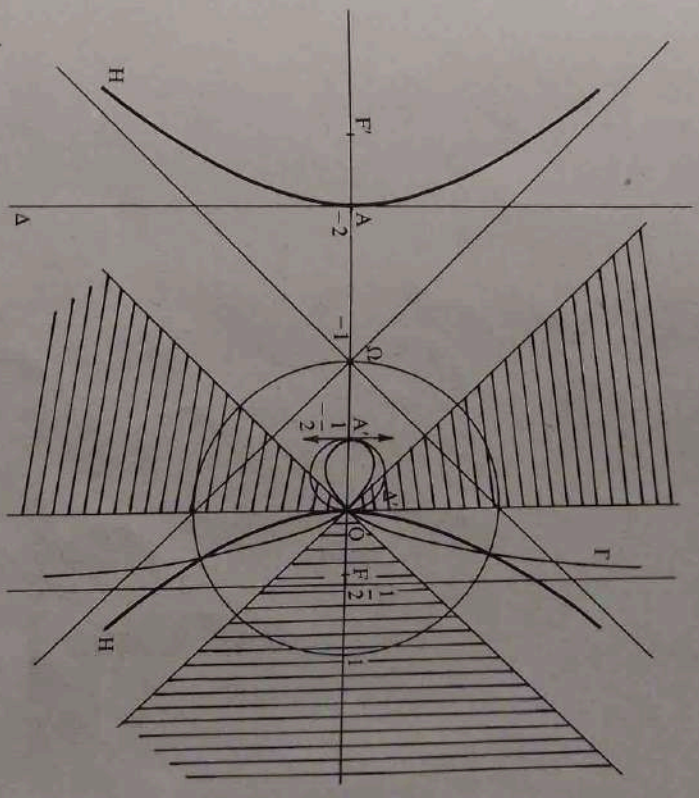
On obtient en remplaçant dans l'équation proposée de H une équation équivalente :

$$\begin{cases} r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta + 2r \cos \theta = 0 \\ \theta \in [0, 2\pi[\\ r > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} r = -\frac{2 \cos \theta}{\cos 2\theta} \\ \theta \in [0, 2\pi[\\ r > 0. \end{cases}$$

Étudions le signe de $f(\theta)$ lorsque $\theta \in [0, 2\pi]$ on a :

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$-2 \cos \theta$	-	0	-	+	+	0	-	-
$\cos 2\theta$	+	0	-	0	+	0	-	+
$f(\theta)$	-	+	0	-	+	0	-	+

$f(\theta)$ est positif lorsque $\theta \in E_f =]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}[\cup]\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}[$.
On obtient bien trois régions du plan, les autres régions étant hachurées sur la figure.



3° On suppose $a = 1$. Pour tout point M du plan on a les équivalences successives

$$\begin{aligned} M \in \Gamma^* &\iff \varphi_1^{-1}(M) \in H - \{O\} \\ &\iff \varphi_1(M) \in H - \{O\} \text{ (car } \varphi_1 \text{ est involutive)} \\ &\iff \frac{1}{r} = f(\theta) \text{ (} \theta \in E_f - \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\} \text{) (d'après les relations (2))} \\ &\iff r = \frac{1}{f(\theta)} \text{ (} \theta \in E_f - \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\} \text{)} \\ &\iff r = \frac{\cos 2\theta}{-2 \cos \theta} \text{ (} \theta \in E_f - \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\} \text{)}. \end{aligned}$$

Posons $g(\theta) = \frac{\cos 2\theta}{-2 \cos \theta}$, $\theta \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}[\cup]\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}[$.

L'équation $r = g(\theta)$ caractérise donc Γ^* auquel on a ajouté l'origine.
4° H et Γ sont dans les mêmes régions du plan car les ensembles d'étude de g et f coïncident sauf pour deux bornes.

$g(-\theta) = g(\theta)$, les points d'affixes, $[g(\theta), \theta]$ et $[g(-\theta), -\theta]$ sont donc symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Les points invariants de φ_1 sont les points du cercle de centre O et de rayon 1. Ce cercle défini par $r = 1$ rencontre H en deux points définis par :

$$f(\theta) = 1 \iff 2 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta - 1 = 0, \quad \theta \in E_f$$

Posons $\cos \theta = u$ l'équation devient : $2u^2 + 2u - 1 = 0$ qui admet comme solutions

$$u_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

Mais $u_1 < -1$ donc on a à résoudre

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \\ \theta \in E_f \end{cases}$$

Il y a deux valeurs θ_1 et θ_2 qui conviennent, ces deux valeurs ayant des sinus opposés.

$$\sin \theta_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \quad \sin \theta_2 = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

Les coordonnées des points invariants sont donc :

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} & \cos \theta_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} & \sin \theta_2 = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

5° A est un sommet de H, A(-2, 0). On a A' = $\varphi_1(A)$ de coordonnées $(-\frac{1}{2}, 0)$. La tangente en A à H est parallèle à Oy et a pour équation $x = -2$ son image est le cercle privé de O de centre $(-\frac{1}{4}, 0)$ passant par O.

6° Les points de Γ sont caractérisés par :

$$\begin{cases} r = \frac{\cos 2\theta}{-2 \cos \theta} \\ \theta \in E_f - \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\} \end{cases} \iff \begin{cases} r = \frac{\cos 2\theta}{-2 \cos \theta} \\ r \geq 0 \end{cases}$$

Pour trouver une équation cartésienne de Γ posons $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, on a successivement :

$$\begin{aligned} -2r \cos \theta &= \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ -2r^2 [r \cos \theta] &= r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta \\ -2(x^2 + y^2)x &= x^2 - y^2 \end{aligned}$$

d'où

$$-2x = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

ou encore :

$$y^2 = x^2 \frac{1 + 2x}{1 - 2x}$$

Soit

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$$

La fonction F est continue en tout point de son ensemble de définition

$$D_F = \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[\text{ et elle est dérivable sur } \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[.$$

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[\quad F'(x) = \frac{1+2x-4x^2}{(1+2x)(1-2x)} \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$$

Les racines de $1+2x-4x^2$ sont $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ une seule appartient à

$$\left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[.$$

On a :

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{4}$	$\frac{1}{2}$
F'(x)	-	0	+
F(x)	0	$F\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)$	$+\infty$

$$F\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \sqrt{\sqrt{5}-2}$$

$$F(0) = 0.$$

Étudions la demi-tangente au point de coordonnées $(-\frac{1}{2}, 0)$, pour cela formons le taux d'accroissement.

$$\left(\forall x \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[\right) \quad \frac{F(x) - F\left(-\frac{1}{2}\right)}{x + \frac{1}{2}} = \frac{2x}{\sqrt{(1+2x)(1-2x)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{F(x)}{x + \frac{1}{2}} = -\infty \quad \left(\text{C'est aussi } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} F'(x) \right)$$

Γ_1 admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées au point A de coordonnées $(-\frac{1}{2}, 0)$.

$F'(0) = 1$ donc la tangente en O a pour équation $y = x$.

Γ est la réunion de Γ_1 et de la courbe symétrique de Γ_1 par rapport à l'axe des abscisses.

12.4 A. 1° $f : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ est définie sur \mathbb{R} et elle est impaire.

Si $x \geq 0$, $f(x) = \frac{x}{1+x}$ et $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.

x	0	+	$+\infty$
$f(x)$	0	+	1

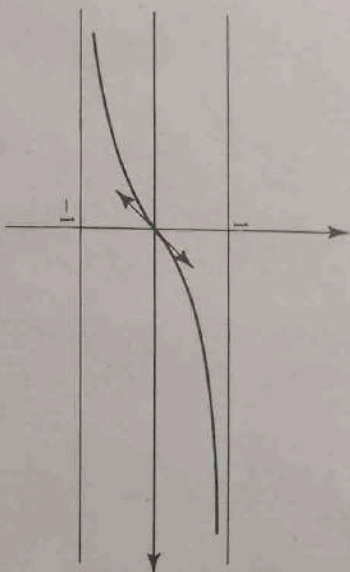


Fig. 1

2° a) D_0 est l'ensemble des points du plan P d'affixe $z = x$ réel quelconque donc $\Phi(D_0)$ est l'ensemble des points de P d'affixe $z' = f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

Puisque f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} , $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$ et $\Phi(D_0)$ est un segment ouvert $]A, B[$ avec $A(1, 0)$ et $B(0, 1)$.

b) Soit $M(x_1, 0)$ et $N(x_2, 0)$ deux points de D_0 . La restriction de f à $]x_1, x_2[$ est continue et strictement croissante donc

$$f([x_1, x_2]) = [f(x_1), f(x_2)]$$

$$\Phi([M, N]) = [\Phi(M), \Phi(N)].$$

d'où

3° a) Associons à r l'application : $z \mapsto az$ où $|a| = 1$ et $\arg a \equiv \theta [2\pi]$, θ étant une mesure de l'angle de la rotation r . Quel que soit z de \mathbb{C} :

$$F(az) = \frac{az}{1+|az|} = \frac{az}{1+|z|} = aF(z).$$

$\Phi(r(M))$ est le point d'affixe $F(az)$ et $r(\Phi(M))$ est le point d'affixe $aF(z)$ donc :

$$\Phi(r(M)) = r(\Phi(M)).$$

b) P est la réunion de droites passant par O . Soit D une droite passant par

O . Il existe une rotation r telle que $D = r(D_0)$ d'où :

$$\Phi(D) = \Phi(r(D_0)) = r(\Phi(D_0)) = r([A, B])$$

l'image de D est donc un segment ouvert de milieu O et $\Phi(P)$ est la réunion de tous les segments $r([A, B])$, r étant une rotation arbitraire de centre O . Donc $\Phi(P)$ est le disque ouvert de centre O , de rayon 1.

$F(\mathbb{C})$ est l'ensemble des affixes des points de ce disque donc

$$F(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}.$$

Pour montrer que Φ est injective, montrons que

$$(V(M, N) \in \mathbb{P}^2) \quad M \neq N \implies \Phi(M) \neq \Phi(N).$$

En effet :

• si M et N sont alignés avec O , soit r la rotation transformant D_0 en (MN)

$$M \neq N \implies r^{-1}(M) \neq r^{-1}(N) \text{ (car } r^{-1} \text{ est bijective)}$$

$$\implies \Phi(r^{-1}(M)) \neq \Phi(r^{-1}(N))$$

(car f est une bijection de \mathbb{R} sur $] -1, 1[$, il donc si $r^{-1}(M)$ et $r^{-1}(N)$ sont distincts, leurs images par Φ ont des abscisses distinctes)

$$\implies r^{-1}(\Phi(M)) \neq r^{-1}(\Phi(N))$$

$$\implies \Phi(M) \neq \Phi(N);$$

• si M et N ne sont pas alignés avec O , $\Phi(M)$ et $\Phi(N)$ appartiennent à deux segments distincts passant par O donc $\Phi(M) \neq \Phi(N)$.

F est injective car si m et n sont les affixes de deux points quelconques M et N :

$$m \neq n \implies M \neq N \iff \Phi(M) \neq \Phi(N) \implies F(m) \neq F(n).$$

B. 1° $F(0) = 0$, $F(-2) = \frac{-2}{1+|-2|} = -\frac{2}{3}$.

$$F(1+i\sqrt{3}) = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+|1+i\sqrt{3}|} = \frac{1+i\sqrt{3}}{3}$$

$$\Delta(O, M_1) = \left| 0 - \left(-\frac{2}{3} \right) \right| = \frac{2}{3}$$

$$\Delta(O, M_2) = \left| 0 - \frac{1+i\sqrt{3}}{3} \right| = \frac{2}{3}$$

$$\Delta(M_1, M_2) = \left| -\frac{2}{3} - \frac{1+i\sqrt{3}}{3} \right| = \frac{1}{3} |3+i\sqrt{3}|$$

$$= \frac{\sqrt{12}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$2^\circ \bullet \Delta(M, N) = 0 \iff \left| \frac{m}{1+|m|} - \frac{n}{1+|n|} \right|$$

$$\iff \frac{m}{1+|m|} = \frac{n}{1+|n|} \quad (1)$$

si $m = n$, (1) est vérifiée. Si $m \neq n$, (1) n'est pas vérifiée puisque l'application F est injective. Donc $\Delta(M, N) = 0$ seulement pour $m = n$ c'est-à-dire pour $M = N$.

$$\Delta(M, N) = \left| \frac{m}{1+|m|} - \frac{n}{1+|n|} \right| = \left| \frac{n}{1+|n|} - \frac{m}{1+|m|} \right| = \Delta(N, M)$$

• Quels que soient $M(m), N(n), Q(q)$:

$$\begin{aligned} \Delta(M, Q) &= \left| \frac{m}{1+|m|} - \frac{q}{1+|q|} \right| \\ &= \left| \frac{m}{1+|m|} - \frac{n}{1+|n|} + \frac{n}{1+|n|} - \frac{q}{1+|q|} \right| \\ &\leq \left| \frac{m}{1+|m|} - \frac{n}{1+|n|} \right| + \left| \frac{n}{1+|n|} - \frac{q}{1+|q|} \right| \\ &\leq \Delta(M, N) + \Delta(N, Q). \end{aligned}$$

Remarque
 Δ possède les propriétés qui définissent une distance.

3° $\Delta(M, N) = |F(m) - F(n)| = \|\vec{MN}'\|$,
 les points M' et N' étant les images de M et N par l'application Φ et ayant pour affixes $F(m)$ et $F(n)$.
 Puisque $\Phi(P)$ est le disque ouvert de centre O et de rayon 1, la borne supérieure de $\|\vec{MN}'\|$ est la longueur 2 d'un diamètre du disque. Donc $\Delta(M, N) < 2$.

C. 1° $x' + iy' = \frac{x + iy}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$ d'où

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} \\ y' = \frac{y}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

$$M' \in S'_\alpha \iff \begin{cases} x' = \cos \alpha \\ -\sin \alpha < y' < \sin \alpha \end{cases} \quad (2)$$

$$\iff \frac{x}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \alpha \quad (E)$$

la condition (3) sera en effet vérifiée puisque l'image d'un point quelconque du plan appartient au disque ouvert.

2° a) (E) $\iff x = \cos \alpha + \sqrt{x^2 + y^2} \cos \alpha$

$$\iff x - \cos \alpha = \sqrt{x^2 + y^2} \cos \alpha$$

$$\iff \begin{cases} MH = MO \cos \alpha \\ x \geq \cos \alpha \end{cases}$$

MH étant la distance de M à la droite L contenant S'_α (fig. 2).

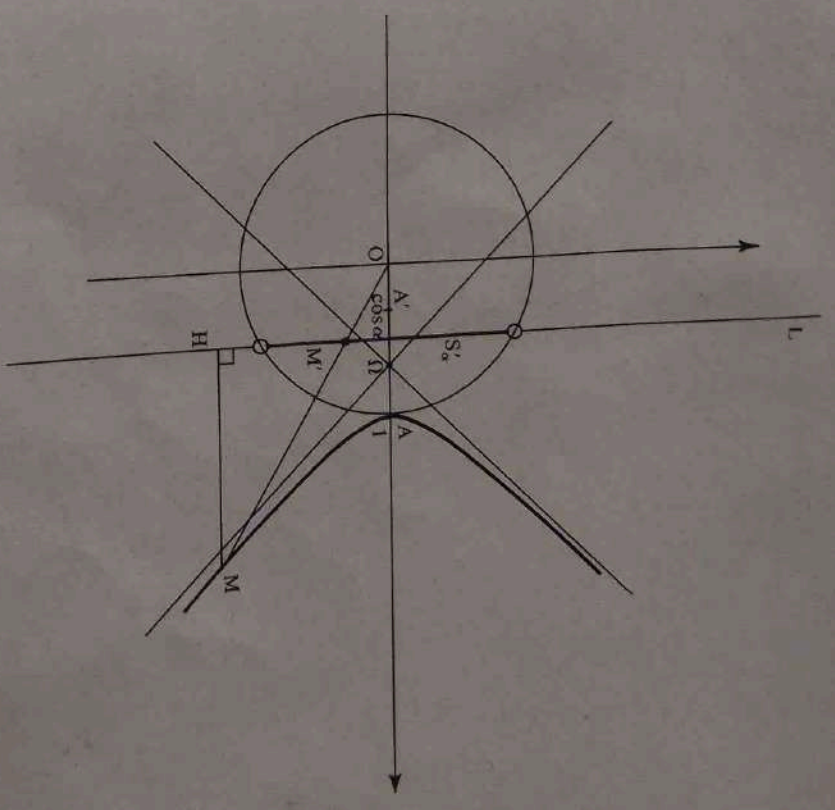


Fig. 2

S_α est donc un arc d'hyperbole de foyer O , de directrice L , d'excentricité $e = \frac{1}{\cos \alpha}$ (c'est l'arc correspondant à $x \geq \cos \alpha$).

b) (E) $\iff \begin{cases} (x - \cos \alpha)^2 = (x^2 + y^2) \cos^2 \alpha \\ x \geq \cos \alpha \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x^2 \sin^2 \alpha - y^2 \cos^2 \alpha - 2x \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 0 \\ x \geq \cos \alpha \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 \cot^2 \alpha - 2x \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \cot^2 \alpha = 0 \\ x \geq \cos \alpha \end{cases}$$

$$\iff \frac{\left(x - \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}\right)^2}{\cot^4 \alpha} - \frac{y^2}{\cot^2 \alpha} = 1 \quad (\text{après réduction})$$

$$\iff \begin{cases} \frac{\left(x - \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}\right)^2}{\cot^4 \alpha} - \frac{y^2}{\cot^2 \alpha} = 1 \\ x \geq \cos \alpha \end{cases}$$

On reconnaît l'équation d'un arc d'hyperbole.

3° Si $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\epsilon = 2$, centre $\Omega \left(\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}, 0 \right) = \left(\frac{3}{2}, 0 \right)$.

Asymptotes d'équations dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) :

$$y = \left(x - \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) \operatorname{tg} \alpha \quad \text{et} \quad y = - \left(x - \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) \operatorname{tg} \alpha$$

c'est-à-dire :

$$y = \left(x - \frac{3}{2} \right) \sqrt{3} \quad \text{et} \quad y = - \left(x - \frac{3}{2} \right) \sqrt{3}$$

Sommets de coordonnées dans (O, \vec{u}, \vec{v}) :

$$A \left(\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \operatorname{ctg}^2 \alpha, 0 \right) = (1, 0)$$

$$A' \left(\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \operatorname{ctg}^2 \alpha, 0 \right) = \left(\frac{1}{3}, 0 \right)$$

Nous avons construit l'arc d'hyperbole à la figure 2.

INDEX

A	Affinité	99-103
	Affixe d'un nombre complexe	5-8-9
	Angle d'une similitude directe	177-180
	Angle orienté	136-137-139
	Espace vectoriel	154
	Euler (formules d')	154
	Excentricité d'une conique	92-99
F	Application linéaire	52-57
	Arguments d'un nombre complexe	6-8
	Asymptotes d'une hyperbole	223
	Automorphisme d'espace vectoriel	53
	Axe focal	223
B	Axe transverse	223
	Forme algébrique ou cartésienne de z	5-7
	Forme linéaire	52-58
	Forme trigonométrique de z	6-8
	Barycentre	79-81
	Base	26-39
	Base canonique, titre descriptif	248
	Base canonique, titre descriptif	259
	Index	283

Table des matières

1. Nombres complexes 5
 2. Espaces vectoriels 35
 3. Applications linéaires 52
 4. Calcul barycentrique 78
 5. Applications affines 92
 6. Angles orientés 136
 7. Isométries du plan 177
 8. Similitudes directes du plan 199
 9. Isométries de l'espace 212
 10. Coniques 248
 11. Géométrie descriptive 259
 12. Problèmes de révision 283
 Index

R
 Rabattement 248-250
 Racines carrées d'un nombre
 complexe 7
 Racines n ièmes 7-10
 Rapport de similitude 177-180
 Rectification (partie) 5
 Retournement 199-205
 Rotation 152-200-203-248-249-251

S
 Sommets d'une conique 222-223
 Sous-espace vectoriel 35-39
 supplémentaires
 Sous-espaces vectoriels 54
 Symétrie affine 97-103
 Symétrie orthogonale 153-199
 Symétrie vectorielle 55-58

T
 Translation affine 94-101-155-199
 V
 Vecteurs linéairement dépendants 36
 Vecteurs linéairement indépendants 36
 Visage 202-203

L
 Lehm (fonction scalaire de) 80-83

M
 Matrice canonique 37
 Matrice-colonne 37
 Matrice d'une famille de vecteurs 37
 Matrice-ligne 37
 Matrice réduite de Gauss 38
 Médiane (théorème de la) 80
 Mesures d'un angle orienté 136-137
 Module d'un nombre complexe 5-8
 Moyre (formule de) 6

N
 Noyau d'une application linéaire 52

P
 Parabole 222
 Paramètre d'une parabole 223
 Pivot 38
 Plan vectoriel 53
 Projection orthogonale (ou projecteur) 96-102
 55-58

F 69,00/08/93

ISBN 2-09-175214-2