COLLECTION LA PRIORITE

Du Professeur Théophile D. GOSSOU

MATHEMATIQUES GENERALES

Terminale C

TOME 1

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \propto_i MA_i{}^2 = k\right) \Leftrightarrow \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \propto_i MA_i{}^2 = \sum_{i=1}^{n} \propto_i MG^2 + \lambda\right) \vee \left(\sum_{i=1}^{n} \propto_i MA_i{}^2 = \mu + \vec{u}.\overrightarrow{OM}\right)\right]$$

PREMIERE SITUATION D'APPRENTIISSAGE

Nouvelle Edition 2019 - 2020

STRUCTURE DU DOCUMENT

1 - Cours

2 - Travaux Dirigés

3 - Exercices d'entraînement

4 - Queleques Epreuves

COURS

1 – Systèmes d'équations linéaires

2 – Calculs vectoriels

3 - Applications de l'espace

Situation de départ :

Texte : Le pont de Codji

Reliant les deux rives d'un fleuve, le pont réalisé par l'ingénieur PIKO est un chef d'œuvre que les pêcheurs contemplent chaque jour. Les travaux ont duré deux ans et une vingtaine de pêcheurs riverains ont été des ouvriers spécialisés en plongée.Sonon,l'un des ouvriers, a du plaisir à raconter à la jeune génération des longues journées de travail sur le chantier.
L'ingénieur PIKO dirigeait simultanément tous les ateliers : il exigeait partout la précision dans les mesures et s'en assurait. La qualité du sol du béton, les précisions du dosage, la forme et la qualité des poutres, l'implantation des piliers, le flux et le reflux du cours d'eau, rien n'échappait au contrôle de l'ingénieur PIKO. Les travaux achevés, le pont fut livré à la circulation. Les riverains sont encore fiers de ce pont qui n'a rien perdu de sa solidité des décennies durant.
Sonon s'interroge encore aujourd'hui sur les méthodes et les procédés qui ont permis à l'ingénieur PIKO de réussir ce chef d'œuvre.

Tâche : Tu vas te construire de connaissances nouvelles en mathématiques. Pour cela,

Activité 0 : Brainstorming

Consigne : Lis attentivement le texte de la situation de départ et exprime les idées et questions qu'il t'inspire.

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°1 : SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

Lors du lancement du pont de Codji, le comité chargé doit apprêter quelques outils élémentaires tels que la houe, la brouette, le râteau, la pelle, le coupe – coupe et la hache pour les travaux manuels. Pour cela, le comité a payé :

- ✓ un râteau, une pelle, un coupe – coupe, une houe et une hache à 8000 F CFA.
- ✓ deux râteaux, une pelle, deux coupes – coupes, trois houes et cinq haches à 18800F CFA.
- ✓ un râteau, deux pelles, trois coupes – coupes, une houe et deux haches à 16000F CFA.
- ✓ trois râteaux, une pelle, deux coupes – coupes, trois houes et une hache à 14000F CFA.
- ✓ un râteau, trois pelles, quatre coupes – coupes, deux houes et trois haches à 22800F CFA.

Gali, fils du président du comité de lancement est un futur candidat au Baccalauréat. Intéressé par ces informations, il se propose d'exploiter ces connaissances relatives à la résolution des systèmes d'équations linéaires étudiés en première. Rapidement, il a rencontré des difficultés.

Tâche : Tu vas aider Gali à affronter ces difficultés à travers les activités suivantes :

Activité 1 : Présentation analytique

Consigne

1°) En utilisant tes acquis, présente la forme d'un système de n équations à p inconnues.
2°) Rappelle la définition de deux systèmes équivalents.
3°) Traduis le problème relatif aux achats des outils par un système d'équations linéaires.

Acitivité 2 : Présentation vectorielle

Consigne

On considère dans l'ensemble $\boldsymbol{\omega}$ des vecteurs de l'espace les vecteurs $\overrightarrow{u_1}(a_1, b_1, c_1)$, $\overrightarrow{u_2}(a_2, b_2, c_2)$, $\overrightarrow{u_3}(a_3, b_3, c_3)$ et $\vec{v}(a, b, c)$.
Traduis un système d'équations linéaires l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{u_1} + 5\overrightarrow{u_2} - 2\overrightarrow{u_3} = \vec{v}$

Activité3: Exemple de résolution d'un système d'équations linéaires par la méthode du pivot de Gauss.

Consigne

1°) En utilisant tes acquis résous le système d'équations linéaires de l'activité 1 par la méthode du Pivot de Gauss.
3°) Précise alors le prix de chaque article.

Activité 4: Exemple de résolution de problème se ramenant à un système d'équations linéaires

Consigne

Trois frères ont acheté un objet à 100€. Le benjamin dit qu'il pourrait le payer seul si le cadet lui donnait la moitié de ce qu'il a. Le cadet dit que si l'aîné lui donnait le tiers de son argent, il paierait l'objet seul. Enfin, l'aîné ne demande que le quart de l'argent du benjamin pour payer seul l'objet. Détermine l'avoir de chacun des trois frères.

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°2 : CALCULS VECTORIELS

Les piliers utilisés pour la construction du pont ont chacun des formes spécifiques selon la charge à supporter. Pour la fondation d'un pilier, une grosse pierre en béton armée a la forme d'un cube. Sonon dans préoccupation voudrait connaître les objets mathématiques ayant entré dans la réalisation d'un cube et les positions des piliers les uns par rapport aux autres.

Tâche : Tu vas aider Sonon à travers les activités suivantes :

Activité 1 : Barycentre de n points pondérés

Activité 1.1 : Mise en situation

Consigne

1°) Représente un cube ABCDEFGH.

2°) Trouve un vecteur qui est une combinaison linéaire de :

-a) deux vecteurs

-b) trois vecteurs

3°) Déduis de ces égalités vectorielles un exemple de barycentre dans chaque cas.

Activité 1.2 : Quelques définitions

Consigne

Recopie puis complète les définitions suivantes en utilisant point pondéré et système de points pondérés.

D_1 : On appelle …………tout couple (A, $\propto$) où A est un point de l'espace $\mathscr{E}$ et $\propto$ un nombre réel.

D_2 : On appelle ……….toute suite finie de …………et noté $(A_{i,\propto_i})_{1\leq i\leq n}$

Activité 1.3 : Etude de quelques fonctions

Activité 1.3.1 : Fonction vectorielle de Leibniz

Activité 1.3.1.1 : Définition

Consigne :

Recopie puis complète la définition suivante en utilisant et $\sum_{i=1}^{n} \propto_i$ et $(A_{i,\propto_i})_{1\leq i\leq n}$ $\mathscr{E}$ désigne une droite, un plan ou l'espace ; $\mathscr{W}$ désigne l'ensemble des vecteurs de $\mathscr{E}$.

On appelle fonction vectorielle de Leibniz associée au …………l'application définie de $\mathscr{E}$ vers $\mathscr{W}$ qui au point M associe $f(M)$ telle que $f(M) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Activité 1.3.1.2 : Définition et théorème

Consigne

On considère la fonction vectorielle de Leibniz.

1-) Démontre que si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 0$ alors la fonction f est une application constante.

.2-a) Démontre que si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$ alors f est une application bijective.

-b) Déduis – en le nombre d'antécédent du vecteur nul par f.

2- Recopie et complète la définition suivante en utilisant $(A_{i,\propto_i})_{1\leq i\leq n}$ barycentre et antécédent.

On appelle ……..du système de points pondérés ……….l'unique ……..du vecteur nul. Il est souvent noté G.

Activité 1.3.1.3 : Propriétés de barycentre

Consigne 1 :

Soit$(A_{i,\propto_i})_{1\le i\le n}$ un système de points pondérés et G le barycentre de ce système.

.1°) Démontre que pour tout point quelconque O de l'espace, on a : $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}\right)$.

.2°) Démontre que pour tout nombre réel non nul k, $\left(\sum_{i=1}^{n}k\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{O}\right)\Leftrightarrow\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{O}\right)$

.3°) L'espace est rapporté au repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ et A_i a pour composantes $(x_i;y_i;z_i)$.
Détermine les composantes du barycentre G du système de points pondérés $(A_{i,\propto_i})_{1\le i\le n}$.

Activité 1.3.1.4 : Evaluation formative

Evaluation formative n°1 :

ABCD est un parallélogramme et on considère les fonctions vectorielles f et g de Leibniz définies par :
$\overrightarrow{f(M)}=3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{g(M)}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-4\overrightarrow{MD}$

.1°) Justifie que les points :

-a) A, B et C admettent de barycentre.

-b) A, B, C et D n'admettent pas de barycentre.

.2°) Parmi ces deux applications dis celle qui est bijective.

.3°) Donne une forme réduite de chacune de ces deux applications.

Evaluation formative n°2

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère$(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ et on considère les points $A(3\,;-4\,;2)$, $B(1\,;5\,;-2)$, $C(-4\,;-1\,;2)$.

1°) Détermine les coordonnées du barycentre I des points pondérés $(B,2)$ et $(C,3)$.

2°) Détermine les coordonnées du barycentre J des points pondérés $(A,5),(B,2)$ et $(C,3)$.

.3°) Vérifie que le point J est le milieu du segment $[AI]$.

Activité 1.3.2 : Fonction scalaire de Leibniz

Activité 1.3.2.1 : Définition

Recopie puis complète la définition suivante en utilisant $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i MA_i^2 et(A_i,\alpha_i)_{1\le i\le n}$.

$\mathscr{E}$ désigne une droite, un plan ou l'espace.

On appelle fonction scalaire de Leibniz associée au …………l'application φ définie de $\mathscr{E}$ vers ℝ qui au point M associe $\varphi(M)$ telle que $\varphi(M)\ =$ ……………

Activité 1.3.2.2 : Propriétés

Activité 1.3.2.2.1 : Lignes de niveau k où $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$ avec k un nombre réel.

Consigne :

On considère la fonction scalaire de Leibniz définie par $\varphi(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2$ et $(A_{i,\alpha_i})_{1\leq i\leq n}$ est un système de points pondérés tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$

1-a) Justifie que le système admet un barycentre noté G.

-b) Démontre que $\varphi(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MG^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i GA_i^2$.

2°) On désigne par k la ligne de niveau de l'application φ. Détermine suivant les valeurs de k la nature de l'ensemble (Γ) des points M de $\mathscr{E}$ tels que $\varphi(M) = k$ dans chacun des cas suivants :

-a) $\mathscr{E}$ est une droite

-b) $\mathscr{E}$ est un plan

-c) $\mathscr{E}$ est l'espace

<u>Activité 1.3.2.2.2</u> : Lignes de niveau k où $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$ avec k un nombre réel.

<u>Consigne</u>

On considère la fonction scalaire de Leibniz définie par $\varphi(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2$ où $(A_{i,\alpha_i})_{1\leq i\leq n}$ est un système de points pondérés avec $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$ et O un point du plan.

1°) Démontre que $\varphi(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i OA_i^2 - 2\overrightarrow{OM}.\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}\right)$

2°) On pose $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$ et on se propose de déterminer la ligne de niveau k telle que $\varphi(M) = k$. Pour cela, on distingue les cas suivants :

-a) Premier cas : $\vec{u} = \vec{o}$ .Détermine suivant les valeurs de k la nature de l'ensemble (Γ) des points M du plantels que $\varphi(M) = k$.

-b) Deuxième cas : $\vec{u} \neq \vec{o}$.On désigne par **($\mathscr{D}$)** la droite de repère (O, $\vec{u}$) et le point P tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{u}$.H désigne le projeté orthogonal de M sur la droite **($\mathscr{D}$)** .

- ✓ Démontre que $\overrightarrow{OM}.\vec{u} = \overline{OH} \times \overline{OP}$
- ✓ Démontre que ∀ k ∈IR, ($\varphi(M)$ = k.)⟺$\overline{OH}$ constante.
- ✓ Déduis – en dans ce cas l'ensemble des points M du plan tel que $\varphi(M) = k$.

<u>Activité 1.3.2.3</u> : Evaluations formatives

<u>Evaluation formative n°1</u>

ABCD est rectangle tel que $AB = 2 et\ BC = 1$ et on considère l'application g définie par :

$g(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$.

.1- Calcule $g(A)$

.2- Détermine et construis l'ensemble des points tels $g(M) = 10$.

<u>Evaluation formative n°2</u>

ABC est un triangle isocèle tel que $AB = 4$; $AC = BC = 6$ et on considère l'application h qui à tout point M du plan associe le point $h(M)$ telle que $h(M) = MA^2 + MB^2 - MC^2$.

.1- Calcule h(A) et h(I) où est le milieu du segment $[AB]$.

.2- Détermine l'ensemble **$(\mathscr{L})$** des points M du plan tel que $h(M) = 0$

<u>Activité 2</u> : Produit vectoriel

<u>Activité 2.1</u> : Quelques définitions

<u>Consigne</u>

Recopie et complète les définitions suivantes en utilisant : cercle, colinéaire, orienté, direct et indirect.

D_1 :On dit qu' un plan est orienté lorsque tous les ……………du plan sont ………………

D_2 : On dit que l'espace est orienté lorsqu'il contient un repère ……………ou …………

D_3 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'ensemble $\mathscr{W}$ des vecteurs de l'espace orienté ; A, B et des points de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ainsi défini :

- Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ………………, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{o}$
- Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non …………..,

Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$(direction).

-($\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{u} \wedge \vec{v}$) est une base de $\mathscr{W}$. (sens)

-$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| sin\widehat{BAC}$(module).

L'écriture $\vec{u} \wedge \vec{v}$ se lit « $\vec{u}$ $vectoriel$ $\vec{v}$ »

<u>Activité 2.2</u> : Propriété du produit vectoriel

<u>Activité 2.2.1</u> : Propriété fondamentale

<u>Consigne</u>

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'ensemble $\mathscr{W}$ des vecteurs de l'espace.

On se propose de démontrer que ($\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{o}$)⟺($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires).Pour cela, on choisit trois points A, B et C de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

.1- Démontre que ($\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{o}$) ⟹ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires).

.2- Démontre que ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires) ⟹ ($\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{o}$)

.3- Conclus

<u>Activité 2.2.2</u> : Propriétés algébriques

<u>Consigne</u>

En utilisant tes acquis, recopie puis complète les propriétés suivantes.

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace et pour tout nombre réel k, on a :

P_1 :$\vec{u} \wedge \vec{v}$ = ….$\vec{v} \wedge \vec{u}$

P_2 : $(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \dots . = \cdots (\vec{u} \wedge \vec{v}\,)$

P_3 : $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \cdots + \cdots$

P_4 :$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \cdots = \cdots$

<u>Activité 2.2.3</u> : Propriété analytique

<u>Consigne</u>

Soit $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ une base orthonormée directe de $\mathscr{W}$ et les vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$.

1- En utilisant les propriétés algébriques, démontre que $\vec{u}\wedge\vec{v} = (yz' - zy')\vec{\imath} + (zx' - xz')\vec{\jmath} + (xy' - yx')\vec{k}$ puis déduis – en les coordonnées du produit vectoriel $\vec{u}\wedge\vec{v}$ dans la base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$

.2- Présente sous une autre forme les coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ à l'aide des déterminants.

<u>Activité 2.2.4</u> : Evaluation formative

<u>Evaluation formative</u>

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ et on considère les points A(1 ;-1 ;1) ,B(2 ;1 ;4), C(4 ;1 ;2) et les vecteurs $\vec{u}(2;-1;1)$ et $\vec{v}(-2;1;-3)$ dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$.

.1- Détermine $\vec{u}\wedge\vec{v}$

.2-a) Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{BC}$.

-b) Déduis – en les coordonnées de $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}$et $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB}$.

-c) Dis ton constat puis déduis – en les coordonnées de $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{AB}$.

<u>Activité 2.3</u> : Utilisation du produit vectoriel

<u>Activité 2.3.1</u> : Equation cartésienne d'un plan

<u>Consigne</u>

L'espace $\mathscr{E}$est muni d'un repère orthonormé direct $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ et donne les points $A(-1\,;1\,;2)$, $B(1\,;1\,;-2)$ *et* $C(1\,;2\,;3)$.

.1-a) Justifie que ces trois points définissent un plan noté **($\mathscr{P}$)** .

-b) Déduis – en un vecteur normal du plan **($\mathscr{P}$).**

.2°) Détermine l'équation cartésienne de **($\mathscr{P}$).**

<u>Activité 2.3.2</u> : Calcul de distances

<u>Activité 2.3.2.1</u> : Distance d'un point à une droite

<u>Consigne</u>

Soit **($\mathscr{D}$)**une droite de repère ($A,\vec{u}$), M un point de l'espace et H le projeté orthogonal de M sur **($\mathscr{D}$).**

.1- Démontre que $d(\,M,(\mathscr{D})\,) = MH = \frac{\|\overrightarrow{MA}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

.2- On donne $A(0\,;3\,;-1), B(1\,;4\,;0)$ *et* $M(1\,;-1\,;1)$. Calcule la distance de M à la droite (AB)

<u>Activité 2.3.2.2</u> : Distance d'un point à un plan

<u>Consigne</u>

Soit **($\mathscr{P}$)** un plan de repère ($A,\vec{u},\vec{v}$), M un point de l'espace et K le projeté orthogonal de M sur **($\mathscr{P}$).**

.1°) Démontre que $d(M,(\mathscr{P})\,) = MK = \frac{|\overrightarrow{MA}.(\vec{u}\wedge\vec{v})|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$

.2°) On donne $A(0\,;3\,;-1), B(1\,;4\,;0), C(-2\,;2\,;0)$ *et* $M(1\,;-1\,;1)$. Calcule la distance du point M au plan (ABC)

<u>Activité 2. 3.3</u> : Calcul d'aire et de volume

<u>Consigne</u>

Soit ABCD un tétraèdre et V son volume

.1- a) Démontre que l'aire de la surface de la face triangulaire ABC est $\mathcal{A}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$

-b) Déduis – en que V = $\frac{1}{6}|\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})|$

.2°) On donne $A(1\,;-1\,;0), B(3\,;0\,;1), C(1\,;2\,;-1)\ et\ D(1\,;0\,;0)$

-a) Démontre que les points A, B, C et D forment un tétraèdre.

-b) Calcule de la surface du domaine délimité par le triangle ABC.

-c) Calcule le volume du tétraèdre ABCD.

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°2 : APPLICATIONS DE L'ESPACE

Sonon se propose de comprendre les principes mathématiques qui ont permis la disposition et l'implantation technique des piliers

Tâche : Tu vas aider Sonon à travers les activités suivantes :

Activité 1 : Applications affine de l'espace

Activité 1.1 : Quelques définitions

Consigne :

.1- Recopie puis complète les définitions suivantes en utilisant : applications linéaire, application affine

D1 : Une application f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ est une………si et seulement si elle conserve le barycentre.

D2 : On appelle…………… associée à f de dans toute application φ de $\mathcal{W}$dans $\mathcal{W}$telle que pour tous points A et B,φ($\overrightarrow{AB}$) = $\overrightarrow{f(A)f(B)}$

.2°) En utilisant tes acquis donne l'expression analytique d'une application :

-a) affine de l'espace

-b) linéaire de l'espace

Activité 1.2 : Quelques propriétés des applications affines de l'espace

Consigne :

En utilisant tes acquis complète les propriétés suivantes :

P1 : L'ensemble des points invariants par une application affine est ………

P2 : L'image d'une droite par une application affine est …………….

P3 : L'image d'un plan par une application affine est………………..

Activité 1.3 : Evaluation formative

Consigne

L'espace muni d'un repère orthonormé $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$et on considère le point $A(1\,;-2\,;3), B(1\,;-1\,;2)$

l'application$f$définie par : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x+y-z-3) \\ y' = \frac{1}{3}(x+2y+z+3) \\ z' = \frac{1}{3}(-x+y+2z-3) \end{cases}$

.1-a) Justifie que f est une application affine.

-b) Déduis-en l'expression analytique de l'application vectorielle φ associée à f.

.2-a) Détermine l'image A' et B' des points A et B par f.

-b) Détermine de deux façons différentes l'image $\overrightarrow{A'B'}$ de $\overrightarrow{AB}$ par f.
.3°) Détermine l'ensemble des antécédents de A' par f.
.4°) Démontre l'ensemble des points invariants par f est un plan (P)
.5°) Soit M un point de l'espace d'image M' par f.
-a) Démontre que M' appartient à (P).
-b) Démontre que si M' n'appartient pas à (P) la droite (MM') est orthogonale à (P).
6°) Déduis de la question 5 la nature de f.

<u>Activité 2</u> : Applications particulières

<u>Activité 2.1</u> : Translation

<u>Activité 2.1.1</u> : Définition et propriété.

<u>Consigne</u> :

.1- En utilisant tes acquis, définis translation de l'espace
.2- Enonce la propriété fondamentale d'une translation.

<u>Activité 2.1.2</u> : Définition analytique d'une translation.

<u>Consigne</u> :

L'espace est muni d'un repère$(o;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$
Soit t une translation de vecteur$\vec{u}(a;b;c)$,$M(x\,,y,z)$ un point de l'espace et $M'(x',y',z')$ son image par t.
.1°)En utilisant la définition de la translation établis l'expression analytique de t.
.2°) On donne $\vec{u}(-1;2;1)$. Présente l'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}$.

<u>Activité 2.1.3</u> : Propriétés

<u>Consigne</u>

Recopie puis complète les propriétés suivantes en utilisant tes acquis.
.1°) Toute translation transforme :
P_1 : une droite en…………………
P_2 : un plan en ……………………..
P_3 : une figure plane en …………………..
P_4 : un solide de l'espace en …………………..
.2°) P_5 : toute translation ………………le parallélisme et l'orthogonalité

<u>Activité 2.2</u> : Homothétie

<u>Activité .2.2.1</u> : Définition et propriété

<u>Consigne</u> :

.1- En utilisant tes acquis, définis une homothétie de l'espace.
.2- Enonce la propriété fondamentale de l'homothétie.

<u>Activité 2.2.2</u> : Définition analytique d'une homothétie.

<u>Consigne</u>

L'espace est muni du repère $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$.Soit h l'homothétie de centre **Ω**(a, b, c) et de rapport k.
.1°) En utilisant la définition de l'homothétie, établis son expression analytique.
.2°) Etudie le cas où $k\;=\;1$.

.3°) On donne $\Omega(1;-2\,;3)$ $et\ k\ =\ -2$.Présente l'expression analytique de l'homothétie h de centre Ω et de rapport k.

Activité 2.2.3 : Propriétés

Consigne

Recopie puis complète les propriétés suivantes :

P_1: Toute homothétie de l'espace est une application ……………….

P_2 :L'application vectorielle associée à une homothétie h de rapport k différent de l'unité est l'application de l'ensemble $\mathcal{W}$ des vecteurs dans lui – même qui à tout vecteur $\vec{u}$ associe le vecteur…………..

P_3 : Une homothétie de rapport k multiplie

-les distances par ……………..

-les aires par ………………….

-les volumes par…………….

Activité 2.3 : Symétrie orthogonale par rapport à un plan : Réflexion de plan.

Activité 2.3.1 : Plan médiateur d'un segment.

Consigne

En t'inspirant de tes acquis, définis le plan médiateur d'un segment.

Activité 2.3.2 : Définition de la flexion du plan.

Consigne :

En utilisant la définition du plan médiateur, définis la flexion de plan (P).

Activité 2.3.3 : Propriétés

Activité 2.3.3.1 : Propriété 1

Consigne :

Recopie puis complète les phrases suivantes en utilisant : invariant, globalement invariant, symétrie centrale, symétrie orthogonale puis présente dans chaque cas une figure illustrant la propriété.

Soit (P) un plan et $S_{(P)}$ la réflexion de plan (P).

P_1 : si (Q) est un plan perpendiculaire à (P) et $(\Delta) = (P)\cap(Q)$, alors (Q) est…………………par $S_{(P)}$ et la restriction $S_{(P)}$ à (Q) est dans le plan (Q) la …………………. d'axe (Δ).

P_2 : Si (D) est une droite perpendiculaire à (P) en un point I, alors (D) est…………………… par $S_{(P)}$ et la restriction de $S_{(P)}$ à (D) est sur la droite (D) la……………….de centre I.

P_3 : L'ensemble des points……………………..par une flexion de plan (P) est le plan (P).

Activité 2.2.3.2 : Propriété 2

Consigne :

En utilisant tes acquis, complète les propriétés suivantes :

Toute réflexion de l'espace transforme :

P_1 : Une droite en…………………………………………………………

P_2 : Un plan en…………………………………………………………….

P_3 : Une figure plane en ………………………………………………

P_4 : Un solide de l'espace…………………………………………………

<u>Activité 2.3.4</u> : Exemple d'expression analytique d'une réflexion de plan

<u>Consigne</u>

Soit (P) le plan d'équation cartésienne $2x - y + z = 1$

Détermine l'expression analytique de la réflexion de plan (P) en utilisant la définition.

<u>Activité 2.4</u> : Symétrie orthogonale par rapport à une droite : Demi-tour.

<u>Activité 2.4.1</u> : Définition

<u>Consigne</u> :

En t'inspirant de la définition de la flexion de plan, définis un demi-tour d'axe (Δ).

<u>Activité 2.4.2</u> : Propriétés

<u>Activité 2.4.2.1</u> : Propriété1

<u>Consigne</u> :

Recopie puis complète les propriétés suivantes en en utilisant: points invariants, globalement invariant et symétrie centrale.

Soit (Δ) une droite de l'espace et $S_{(\Delta)}$le demi-tour d'axe (Δ) et (P) le plan perpendiculaire à(Δ) en un point I.

P_1 :Le plan (P) est……………………….par le demi-tour d'axe (Δ)

P_2 : La restriction de $S_{(\Delta)}$ à (P) est dans le plan (P)…………………………….de centre I.

P_3 : L'ensemble des …………………par un demi – tourd'axe (Δ)est la droite (Δ).

.

<u>Activité 2.4.2.2</u> : Propriétés 2

<u>Consigne</u> :

En utilisant tes acquis complète les propriétés suivantes.

1°) Tout demi-tour transforme :

P_1 : Une droite en……………………………………………………………………...

P2 : Un plan en………………………………………………………………………..

P3 : Une figure plane en………………………………………………………...

P4 : Un solide de l'espace en…………………………………………………...

2°) Tout demi-tour…………………………………………….le parallélisme et l'orthogonalité.

<u>Activité 2.4.3</u> : Exemple d'expression analytique d'un demi – tour.

<u>Consigne</u> :

Soit (Δ) une droite de repère $(A, \vec{u}\,)$avec $A\ (1\,; -1\,; 1)\ et\ \vec{u}(2\,; 1\,; -1)$

En utilisant la définition demi-tour, détermine l'expression analytique de$S_{(\Delta)}$.

<u>Activité 2.5</u> : Composition des applications.

<u>Activité 2.5.1</u> : Compositions de translations et d'homothéties.

<u>Activité 2.5.1.1</u> : Propriétés

En utilisant tes acquis recopie puis complète les propriétés suivantes en utilisant :

$\vec{u} + \vec{v}$; kk' ; h ; $kk' = 1$; $kk' \neq 1$

P_1 : La composée de deux translation $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$est la translation de vecteur……………

P_2 : La composée de deux homothéties h et h' de rapports respectifs de rapport k et k' est une homothétie de rapport…….et vérifie $hoh' = h'oh$

P_3 : La composée de deux homothéties de rapport ket k' est :
-Une translation si……………………………………………
-Une homothétie si……………………………………………….
P_4 :La composée d'une homothétie de rapport différent de 1 et d'une translation est une homothétie de rapport……..

Activité 2.5.1.2 : Evaluation formative

Evaluation formative n°1 :

Soit$t_{\vec{u}}$; $t_{\vec{v}}$ *et* $t_{\vec{w}}$ les translations de vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ où ces vecteurs sont définis dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ par : $\vec{u}(1;-2\,;1), \vec{v}(2;-2;-3)$ *et* $\vec{w}(2;-4;-2)$.
.1°) Vérifie que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$
.2°) Ecris l'expression analytique de chacune de ces translations.
.3°)Détermine l'expression analytique de $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$.
.4°) Compare l'expression analytique de et $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ *et* $t_{\vec{w}}$.

Evaluation formative n°2 :

Soit $A(1;-1;0), B(-1;0;1)$ *et* $C(0;1;-1)$.
On considère les homothétiesh_1,h_2 et h_3 de centres respectifs A,B et C et de rapports respectifs $\frac{1}{2}$,$2,-4$.
1°) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de $h_1 \circ h_2$
2°) Détermine la nature et les éléments caractéristiques $h_1 \circ h_3$

Evaluation formative n° 3 :

On considère l'homothétie h de centre $\Omega(0\,;1;-1)$ de rapport -4 et la translation de vecteur $\vec{u}(-2\,;1;1)$.Détermine la nature et les éléments caractéristiques des applications $h \circ t$ et $t \circ h$.

Activité 2.5.2 : Composition de réflexion de plan et de demi – tour

Activité 2.5.2.1: Propriétés

Consigne :

En utilisant tes acquis, recopie et complète les propriétés suivantes en utilisant : symétrie centrale, réflexion de plan, translation, demi-tour
P_1 : La composée de deux flexion de plan parallèles est une………dont le vecteur est normal à chacun de ces deux plans.
P_2: Toute………de vecteur $\vec{u}$non nul de l'espace est la composée de deux ……de plan parallèles telles que$\vec{u}$ soit normal à chacun de ces deux plans.
P_3: La composée de deux réflexions de plans perpendiculaires suivant une droite (Δ) est………. d'axe (Δ)
P_4: Tout…………d'axe (Δ) est la composée de deux………de plans perpendiculaires suivant une droite.
P_5 : La composée de deux demi-tours d'axes parallèles est une ………………dont le vecteur est orthogonal à un vecteur directeur de l'un de ces deux axes.
P_6: Toute………de vecteur$\vec{u}$non nul est la composée de deux …………d'axes parallèles dont un vecteur directeur est orthogonalà $\vec{u}$.
P_7: La composée de deux demi-tours d'axes(Δ_1) et (Δ_2), perpendiculaires en un point A est…….. d'axe $(\mathcal{D})$ où $(\mathcal{D})$ est la perpendiculaire commune à (Δ_1) et à (Δ_2)en A.
P_8: Tout ………de l'espace est la composée de deux…………d'axes perpendiculaires.

P_9: La composée d'un demi-tour d'axe (Δ)et d'une réflexion de plan ($\mathscr{P}$) tels que (Δ) soit orthogonale à ($\mathscr{P}$) en un point A est…………………………….de centre A.

P_{10} : Toute………de l'espace est la composée d'un……et d'une……dont l'axe et le plan sont orthogonaux.

Activité 2.5.2.2 : Evaluation formative

Soit (P) le plan d'équation $2x - y + z = 3$, (Δ) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$,(t∈ ℝ)et les points $A(3;\ 2;\ 2)$ et $B(2;\ 2;\ -1)$

On désigne par $S_{(P)}$la réflexion de plan (P) et $S_{(\Delta)}$le demi-tour d'axe (Δ)

1°) Etudie la position relative de (Δ)et de (P).

2°)Détermine les expressions analytiques de$S_{(\Delta)}$ et de $S_{(\Delta)}$.

3°) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de$S_{(\Delta)} \circ S_{(P)}$et $S_{(P)} \circ S_{(\Delta)}$.

TRAVAUX DIRIGES

1 – Systèmes d'équations linéaires

2 – Calculs vectoriels

3 - Applications de l'espace

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°1 : SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

Fiche N°1: Interprétation vectorielle d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues

Exercice 1 :

A toute valeur de m, on associe dans le plan minus d'un repère $(O, \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath})$ les droites (D_m) et (D'_m) d'équations respectives $x + 2y = m \; et \; mx - \;(2m - 1)\; y = m^2$

1°) Démonte que pour tout nombre réel$m$, (D_m) et (D'_m) se coupent en un point I_m dont on carculéra les coordonnées en fonction de m.

2°) Construis l'ensemble des points I_m lorsque $m$décrit $\mathbb{R}$.

Exercice 2

On considère les trois points d'équations respectives dans un repère du plan :
$2x - 5y = 3\ ;\ -x + 3y = m\ et\ 3x\ - 7y = 3m + 1$
1°) Détermine m pour que les trois droites soient concourantes.
2°) Détermine les coordonnées de leur point d'intersection

Exercice 3

A tout nombre réel m, on associe dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la droite (D_n) d'équation $(3m + 2)x + (7m + 3)\ y + m\ - 1 = 0$
1°) Démontre qu'un point $M_0(a\ , b)$ appartient à (D_n) quel que soit m si et seulement si
$3a + 7b + 1 = 2a + 3b - 1 = 0$
2°) Déduis –en que toutes les droites (D_n) passant par un point fixe dont –on calcule les coordonnées.

Exercice 4

A tout nombre réel m, on associe dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la droite (D_n) d'équation $(m + 1)^2x + m\ (m - 1)y - 4m^2 + m - 1 = 0$
1°) Démontre que toutes les droites (D_n) passent par un point fixe dont –on déterminera les coordonnées
2°) En est – il de même pour les droites (Δ_n) d'équation :
$(m^2 - 3m + 1)\ x + (2m^2 + m - 3)\ y + 4m^2 - 3m + 2 = 0$?

Exercice 5 :

Le plan P est muni d'un repère orthonormé$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.Soit f l'application de P dans P qui à tout point M de coordonnées $(x\ , y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'\ , y')$ telles que $\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x - 4y) \\ y' = \frac{1}{5}(-4x + 3y) \end{cases}$
1°) Démontre que $f$est bijective et définies analytiquement sa bijection réciproque.
2°) Détermine l'ensemble $\mathcal{P}\ des\ points\ invariant\ par\ f.$
3°) Pour tout point $M\ d'image\ M' par\ f,$
-a) Démontre que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ reste colinéaire à un vecteur fixe.
-b) Démontre que le milieux du segment $[MM']$ est invariant par f.
-c) Déduis – en une définition géométrique simple de la transformation f

Fiche N°2 : Transformation élémentaires d'un système d'équations linéaires

Exercice 1 :

Détermine les transformations élémentaires associes à chacun des systèmes suivants

$(S_{1:}):\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x-y+z=2 \\ 4x+3y+z=3 \end{cases}$ et $(S_{2:}):\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x+3y-z=2 \\ 2x+4y \quad\quad = 3 \end{cases}$

Exercice 2:

Détermine des systèmes dont les transformations élémentaires se présentent comme suit :

$(T_1):\begin{cases} x+y-z=1 \\ y+z=2 \\ -3z=3 \end{cases}$ $(T_2):\begin{cases} 2x+y-z=3 \\ 2y+z=-4 \\ -2z=4 \end{cases}$

Exercice 3 :

Détermine le système échelonné de chacun des systèmes suivants

$(S_{1:}):\begin{cases} -3x+2y-z=1 \\ x+y+z=0 \\ 4x+3y-2z=3 \end{cases}$ et $(S_2):\begin{cases} x+y+z=-2 \\ 2x+3y-z=2 \\ x+3y+z=1 \end{cases}$ $(S_3):\begin{cases} x+y+z=2 \\ -x+y+z=-1 \\ -x+2y-z=1 \end{cases}$

Fiche N°3 : Résolution d'un système d'équations linéaires par la méthode du pivot de Gauss

Exercice1 :

Résous par la méthode du pivot de gauss les systèmes

$S_{1:}\begin{cases} x+2y+z=3 \\ -x+y+2z=1 \\ 3x-3y-5z=2 \end{cases}$ et $(S_2):\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 5x-y+z=6 \\ 2x+4y+2z=2 \end{cases}$ $(S_3):\begin{cases} x+2y+2z=2 \\ 3x-2y-z=5 \\ 2x-5y+3z=-4 \\ x+4y+6z=0 \end{cases}$

$(S_4):\begin{cases} x+y+z+t=-1 \\ 2x+y-z+t=-6 \\ 3x-y+z-2t=4 \\ -x+y-z+3t=-9 \end{cases}$

Exercice 2

Résous suivants les valeurs de m systèmes suivantes :

$S_{1:}\begin{cases} mx+y+z=3 \\ x+my+z=1 \\ x+y+mz=1 \end{cases}$ $(S_2):\begin{cases} x+y+mz=1 \\ 3x+4y+2z=m \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$ $(S_3):\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=1 \\ x+y+mz=1 \end{cases}$

Exercice 3 :

Dans chacun des cas suivants

Démontre qu'il existe un polynôme unique tel que pour tout réels x

- ✓ $f''(\mathcal{X}) + f'(\mathcal{X}) - 4f(\mathcal{X}) = 8x^3 - 2\mathcal{X}^2 + 4\mathcal{X} - 6$ dont on déterminera le degré et les coefficients
- ✓ $(\mathcal{X}^2 - \mathcal{X} - 2)g''(\mathcal{X}) + (1 - 3\mathcal{X})g'(\mathcal{X}) + g(\mathcal{X}) = -4\mathcal{X}^3 - 6\mathcal{X}^2 - 22\mathcal{X} + 1$

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°2 : CALCULS VECTORIELS

Fiche n°1: Barycentre de n points pondérés.

Exercice 1:

Soit A et B deux points distincts. Dans chacun des cas écris A comme barycentre de B et C

1°) $\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{CA}$;
2°) $5\overrightarrow{AB}' = \overrightarrow{AC}'$
3°) $3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}'$
4°) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BC}$

Exercice 2

ABCD est un parallélogramme

1°) Réduis les sommes des vecteurs suivantes :
$\overrightarrow{S_1} = 3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}' - 2\overrightarrow{MC}$
$\overrightarrow{S_1} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}' + \overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{MD}$
$\overrightarrow{S_3} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$
2°) P est le point tels que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ Q *le point symétrique du milieu de* $[AD]$ *par rapport à* A
Démontre que les points P, Q *et* C *sont alignées*

Exercice 3

ABCD est un tétraèdre. P, Q, R et S sont des points tels que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, .
$\overrightarrow{CR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ *et* $\overrightarrow{CS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$. I et J sont les milieux respectifs des segments $[AC]$ *et* $[BD]$.
Démontre que les droites $(PS), (QR)$ *et* (IJ) *sont concourantes*

Exercice 4

L'espace $\mathscr{E}$est muni d'un repére$(0,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et on considère les points $A\ (3\ ;-4\ ;2)$;

$B(1\ ;5\ ;-2) et\ C(-4\ ;-1\ ;2)$

1°) Calculs les coordonnées du barycentre I des points pondérées $(B,2) et\ (C,3)$

2°) Détermine les coordonnées du barycentre J des points pondérés $(A,5)\ (B,2)\ et\ (C,3)$.

3°) Vérifie que J est le milieu du $[AI]$

4°) On désigne par G le barycentre des points pondérées $(A,-2)\ ;\ (B,1)\ et\ (C,4)$

-a) Exprime $\overrightarrow{AG}\ en\ fonction\ de\ \overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AC}$

-b) Déduis les coordonnées de G

5- a) Démontre que ABC est un triangle

-b) Représente dans un plan le triangle ABC sans tenir compte de ces longueurs

-c) Construis le point G en utilisant

- ✓ la question 4-a
- ✓ Le théorème des barycentres partiels

Fiche n°2: Lignes de niveau.

Exercice 1 :

ABCD est un triangle isocèle tels que $AB = AC = 7\ et\ BC = 4$.

$On\ désigne\ par\ I\ le\ milieu\ de\ [BC]\ et\ par\ G\ et\ par\ le\ centre\ de\ gravité\ du\ triangle\ ABC$

1°) Détermine et construire l'ensemble des points $M\ du\ plan\ tels\ que\ \|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}\| = 12$

2°) Détermine et construire l'ensemble des points $M\ du\ plan\ tels\ que$:

$-2AM^2 + BM^2 + CM^2 = 38$

3°) Détermine et construis l'ensemble M du plan tels que :$AM^2\ + BM^2 + CM^2 = 65$

4°) Détermine et construis l'ensemble des points M du plan tels que :

$\|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|2\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}\|$

Exercice 2

Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 4cm$.

Détermine et construis l'ensemble des points M du plan tels que $3MA = 5MB$

Exercice 3

On donne dans le plan $\mathscr{P}$un triangle équilatéral ABC tel que $AB = a$.

1°) Détermine et construis le barycentre G du système de points pondérés $(A,1)\ ;\ (B,1)\ et\ (C,2)$

2°) Calcule $GA^2\ ;\ GB^2\ et\ \ GC^2\ en\ fonction\ de\ a$.

3°) Détermine suivant les valeurs de a et de k l'ensemble des points M du plan tels que :

MA^2+MB^2+$2MC^2 = k^2$où $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points $A(3;1)$; $B(-2;3)$ et $C(1\ ;0)$ puis on désigne par G le barycentre de ces points affectés des coefficients respectifs $2\ ;1\ et\ -1$.

1°) Détermine les coordonnées de G.

2°) Détermine suivant les valeurs du nombre réel k l'ensemble des points M du plan tels que $2MA^2+MB^2-MC^2 = k^2$.

3°) Détermine l'ensemble des points M du plan tels que :

-a) $2MA^2-MB^2-MC^2 = 8$

-b) $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$

Exercice 5

Soit A et B deux points distincts du plan.

1°) Détermine l'ensemble des points M du plan tels que $mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) = -\frac{\pi}{4}$

2°) Détermine l'ensemble des points M du plan tels que $mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{5\pi}{6}[\pi]$

Fiche n°3 : Produit vectoriel

Exercice 1

Soit ABCDEFGH un cube tel que $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$ est une bse directe de l'ensemble des vecteurs de l'espace.

1°) Précise si chacune des bases suivantes est directe ou indirecte : $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BF}\right)$; $\left(\overrightarrow{FG},\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FB}\right)$;$\left(\overrightarrow{CS},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CG}\right)$ et $\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EH}\right)$

2°) Détermine les vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{GC}\wedge\overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{BE}\wedge\overrightarrow{HC}$, $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{HG}\wedge\overrightarrow{BF}$

Exercice 2

Soit $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ une base orthonormée directe de l'espace.

1°) Calcule les coordonnées du produit vectoriel $\vec{u}\wedge\vec{v}$ dans chacun des cas suivants :

-a) $\vec{u}(1\,;\,-2\,;\,-1)\ et\ \vec{v}(-2\,;\,-1\,;0)$

-b) $\vec{u}(3\,;0\,;\,-2)\ et\ \vec{v}(1\,;\,-1\,;4)$

-c)$\vec{u}(-2\,;1\,;\,-1)\ et\ \vec{v}(3\,;\,-2\,;1)$

-d)$\vec{u}(1\,;0\,;2)\ et\ \vec{v}(1\,;1\,;\,-1)$

2°) Dans chacun des cas ci – dessus, détermine une équation cartésienne du plan dirigé par les vecteurs $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ et passant respectivement par les points $A(1\,;\,-1\,;1)$; $B(1\,;\,-2\,;3)$;$C(1\,;0\,;1)$ $D(-2\,;1\,;\,-1)$

Exercice 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct$(O\ ,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ et on considère les points $A(-3\,;\ 0\,;1)$; $B(-2\,;\ 5\,;1)$; $C(1\,;-1\,;2)$

1°) Calcule l'aire de la surface du domaine délimité par le triangle ABC.

2°) Calcule le volume du tétraèdre OABC.

3°) Détermine les coordonnées du point D pour que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

4°) On désigne par I le milieu de [BC]. Détermine dans chacun des cas suivants, l'ensemble des points M de l'espace tels que :

-a) $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA}$

-b) $\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right)\wedge\overrightarrow{MB} = \vec{O}$

-c) $\left(2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right)\wedge\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right) = \vec{O}$

-d) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) \wedge (\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \vec{O}$

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°3 : APPLICATIONS DE L'ESPACE

Fiche 1 : Translations et homothéties

Exercice 1

ABCDEFGH est un cube.

1°) Détermine dans le repère (A, B, D, E) les coordonnées des images des points C, F, G et H par chacune des transformations suivantes.

-a) Translation de vecteur $\overrightarrow{EG}$.

-b) Translation de vecteur $\overrightarrow{BH}$.

-c) Homothétie de centre A et de rapport -2.

-d) Homothétie de centre F et de rapport $-\frac{1}{2}$.

2°) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2 et t la translation de vecteur $\overrightarrow{HD}$.

-a) Construis les images des points E, B, C et G par toh.

-b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de cette transformation.

Exercice 2

Soit ABCD un tétraèdre, Iet J les milieux respectifs de [AB] et [CD].

1°) Construis l'image du tétraèdre ABCD par la translation du vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

2°) Détermine dans le repère $(A, B, C, D\ )$ les coordonnées des images de chacun des points A, B, C et D par cette translation.

Exercice 3

On considère les transformations f et g d'expressions analytiques respectives.

$\begin{cases} x' = -2x - 4 \\ y' = -2y + 1 \\ z' = -2z + 3 \end{cases}$ et $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \\ z' = z - 1 \end{cases}$

1°) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f et g.

2°) Détermine les expressions analytiques de chacune des transformations $fog\ et\ gof$.

3°) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de $fog\ et\ gof$.

Exercice 4

L'espace est muni du repère $(O\ ,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ et on considère les points $A(-1\ ;\ 2\ ;-2)\ ;B(0\ ;\ -1\ ;3)$. On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport -3 puis par h' l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$

1°) Détermine les expressions analytiques de $h'oh\ \ et\ \ de\ hoh'$.

2°) Déduis – en la nature et les éléments caractéristiques de chacune de ces transformations.

Fiche n°2 : Réflexion de plan et demi – tour

Exercice 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonorméorthonormal$(O\ ,\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k})$, on considère l'application *f* qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x + 2y - 2z + 6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + y + 2z - 6) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + 2y + z + 6) \end{cases}$

1°) Démontre que l'ensemble des points invariants par *f* est un pan ($\mathscr{P}$).

2°) Pour tout point M d'image M' par f, on désigne par I le milieu du segment [MM'].

-a) Démontre que la droite (MM') est perpendiculaire au plan ($\mathscr{P}$).

-b) Démontre que le point I appartient au plan ($\mathscr{P}$).

3°) Déduis de tout ce qui précède la nature de l'application *f*.

Exercice 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé orthonormal $(O\ ,\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k})$, on considère l'application g qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point $M'(x', y', z')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{9}(-8x + 4y + z + 12) \\ y' = \frac{1}{9}(4x + 7y + 4z - 4) \\ z' = \frac{1}{9}(x + 4y - 8z + 8) \end{cases}$$

1°) Démontre que l'ensemble des points invariants par g est une droite ($\mathscr{D}$).

2°) Pour tout point M d'image M' par f, on désigne par I le milieu du segment [MM'].

-a) Démontre que la droite (MM') est perpendiculaire au plan ($\mathscr{D}$).

-b) Démontre que le point I appartient au plan ($\mathscr{D}$).

3°) Déduis de tout ce qui précède la nature de l'application g.

Exercice 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé orthonormal$(O\ ,\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k})$, on considère le plan (P) d'équation cartésienne $2x - y + z = 3$, la droite (D) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$ avec t un nombre réel et les points $A(3\ ; 2\ ; 2)\ et\ B(2\ ; 2\ ;\ -1)$.

1-a) Détermine les coordonnées des images des points O et A par la réflexion de plan (P).

-b) Démontre que les droites (OA) et (O'A') sont sécantes en un point de (P) dont on précisera les coordonnées.

2°) Détermine les coordonnées des images des points O et B par le demi – tour d'axe (D).

Exercice 4

L'espace est rapporté à un repère orthonormal$(O\ ,\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k})$ et on considère les points $A(3\ ;\ 0\ ; 0)$; $B(\ ;\ 3\ ; 0)$;$C(0\ ; 0\ ; 3)$ et G le centre de gravité du triangle ABC.

1-a) Détermine les coordonnées de G.

-b) Démontre que la droite (OG) est orthogonale au plan (ABC).

2°) Détermine les coordonnées de l'image O' de O par la réflexion de plan (ABC).
3°) Détermine les coordonnées des images de chacun des points O, A, B et C par le demi – tour d'axe (OG).

Exercice 5

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé orthonormal$(O\ ,\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k})$, on considère le plan (P) d'équation cartésienne $2x+y-z=3$ et les droites $(\Delta) et\ (\Delta')$ de représentations paramétriques respectives :

$\begin{cases} x = 2\propto -1 \\ y = \propto +2 \\ z = -\propto -2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = -1+t \\ y = 2-t \\ z = -2+t \end{cases}$ où $\propto$ et t son des nombres réels.

1-a) Démontre que (Δ) est perpendiculaire à (P).
-b) Démontre que (Δ) et (Δ') sont perpendiculaires.
2°) Détermine l'expression analytique de $S_{(P)}$, $S_{(\Delta)}$, $S_{(\Delta')}$.
3°) On pose : $f = S_{(P)} o S_{(\Delta)}\ et$ g = $S_{(\Delta)} o\ S_{(\Delta')}$.
-a) Donne la nature de f et de g.
-b) Détermine l'expression analytique de f et de g.
-c) Déduis – en les éléments caractéristiques de f et de g.
4-a) Justifie que (P) est globalement invariant par $S_{(\Delta)}$.
-b) Déduis – en la restriction de $S_{(\Delta)}$ à (P).
-c) Détermine l'expression analytique de cette restriction.
5°) On considère le plan (Q) d'équation cartésienne $4x+2y-2z-5=0$ et on pose :
$h = S_{(Q)} o S_{(P)}$
-a) Démontre que les plans (P) et (Q) sont parallèles.
-b) Déduis – en la nature et les éléments caractéristiques de h.
-c) Détermine de deux manières différentes l'expression analytique de h.

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

1 – Systèmes d'équations linéaires

2 – Calculs vectoriels

3 - Applications de l'espace

SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

Exercice 1

Résous les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$(S_1): \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + y + z \quad = 1 \\ -x - 2y + z = 2 \end{cases} ; (S_2): \begin{cases} 2x + 2y - 2z + 5t = -6 \\ 3x \quad - z + \quad t \quad = -3 \\ 2x - y \quad\quad - 3t = 2 \\ 2x \quad - y \quad + \quad z \quad - t = 1 \end{cases} ; \ (S_3): \begin{cases} 3x - 2y + 2z - 3t = 2 \\ 5x \ + \ y - z + \ 2t \ = -1 \\ 2x - y + z \ - 3t = 4 \\ 2x \ + y \ - \ z \ + t = 1 \end{cases} ;$$

$$(S_4): \begin{cases} 2x - 14y + 7z - 7t + 11u = -1 \\ 4x - 10y + 5z - 5 + 7ut \quad = 1 \\ x + 2y - z + t - 2u = 1 \\ 2x - 2y \ + \ z - t + u = 1 \end{cases}$$

Exercice 2

Résous dans $\mathbb{R}^4$ les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$(S_1): \begin{cases} 3x + 16y - 8z + 5t = 18 \\ 5x + 6y - 3z - 2t = -1 \\ x + 4y - 2z + t = 4 \end{cases} \ (S_2): \begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ 2x + y - z + t \quad = 2 \\ 3x - 2y + z - t = 1 \\ -x + 3y - \ 5z + t = -2 \end{cases}$$

Exercice 3

Résous dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes d'équations linéaires ci – dessous en discutant suivant les valeurs du paramètre réel m.

$$(S_1):\begin{cases}2x+3y-3z=m\\ x+y+5z=-7\\ x+3y+z=5\\ 2x+y+z=-2\end{cases};\quad (S_1):\begin{cases}mx+y+z=1\\ x+my+z=m\\ x+y+mz=m^2\end{cases};$$

$$(S_1):\begin{cases}(3m-4)x+2(m-1)y+(3m-2)z=1\\ 2(m-1)x+2(m-1)y+(3m-2)z=m-1\\ mx+my+2mz=m^2-2m+1\end{cases}$$

Exercice 4

Résous les systèmes suivants :

$$(S_1):\begin{cases}x+2y+z=0\\ 2x-3y+4z=0\\ -x+4y+z=0\end{cases};\quad (S_2):\begin{cases}x+2y+z=1\\ 2x-3y+4z=-11\\ -x+4y+z=-1\end{cases};$$

$$(S_3):\begin{cases}x+2y+z=1\\ -x-y+3z=2\\ x+7y+7z=3\end{cases};\quad (S_4):\begin{cases}x+2y+z=1\\ -x-y+3z=2\\ x+7y+7z=4\end{cases};$$

Exercice 5

Résous les systèmes suivants :

$$(S_1):\begin{cases}x+y+z=3\\ x+2y+3z=6\\ 2x-y+z=2\end{cases};\quad (S_2):\begin{cases}x+2y-z=4\\ 3x-y+4z=-4\\ 4x+y+3z=0\end{cases};$$

$$(S_3):\begin{cases}2x+y-z=3\\ 4x+7y+3z=21\\ -x-y-6z=-9\end{cases};\quad (S_4):\begin{cases}x-y-5z=-2\\ x+2y+z=2\\ 4x-y-14z=-4\end{cases}$$

Exercice 6

Résous dans $\mathbb{R}^4$ les systèmes suivants

$$(S_1):\begin{cases}3x+y-3z+t=2\\ 3x-2y+2z-t=2\\ 4x-3y+z-2t=0\\ x+y+z+t=4\end{cases};\ (S_2):\begin{cases}3a+b-3c+d=2\\ 3a-2b+2c-5d=-2\\ 4a-3b+c-d=-9\\ 5a+2b-4c+2d=3\end{cases};\ (S_3):\begin{cases}3p+q-3r+s=-3\\ 3p-2q+2r-s=13\\ 4p-3q+r+2s=16\\ p+5q-3r+4s=-8\end{cases}$$

Exercice 7

Résous dans $\mathbb{R}^5$ les systèmes suivants

$$(S_1):\begin{cases}3x+y-3z+t+u=3\\ 3x-2y+2z-t-2u=0\\ 4x-3y+z-2t+4u=4\\ x+y+z+t-u=3\end{cases};\ (S_2):\begin{cases}3a+b-3c+d+e=9\\ 3a-2b+2c-d-2e=-14\\ 4a-3b+c-2d+4e=-15\\ a+b+c+d-e=-1\\ 2a-3b-5c-2d+7e=5\end{cases};\ (S_3):\begin{cases}m+n+q=5\\ 2n+p-r=1\\ 4m-3q+2r=5\\ 2p+q+r=1\\ m-2p=2\end{cases}$$

Exercice 8

Résous les systèmes suivants :

$$(S_1): \begin{cases} 2x + 4y + 4z + 2t = 6 \\ x + 2y + 3z + t \ \ = 3 \\ -3x + y + z + 5t = 0 \\ 4x - y + 2z - t = 8 \end{cases} ; \quad (S_2): \begin{cases} 2x + 4y + 4z + 2t = 0 \\ x + 2y + 3z + t \ \ = -1 \\ -3x + y + z + 5t = -8 \\ 4x - y + 2z - t = 2 \end{cases} ;$$

$$(S_3): \begin{cases} 2x + y - z - t = 1 \\ x + 2y + z + 2t \ \ = 4 \\ x + y + 3z + t = 0 \\ -x - 2y - z + 4t = 8 \end{cases} ; \quad (S_4): \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t + u = 9 \\ x - y - z - t + 2u \ \ = 0 \\ x + y + 3z - 4t - 5u = -3 \\ x + 3y + t + u = 4 \\ 4x + 2y + z + 2u = 5 \end{cases}$$

$$(S_3): \begin{cases} 2x - 2y + z - t + u = 1 \\ x + 2y - z + t - 2u \ \ = 1 \\ 4x - 10y + 5z - 5t + 7u = 1 \\ 2x - 14y + 7z - 7t + 11u = -1 \end{cases}$$

Exercice 9

1°) Résous les systèmes suivants :

$$(S): \begin{cases} x + y + z + t = 30 \\ 2x + 3y - z + 2t = 37 \\ -3x + 5y - 3z + t = 10 \\ 5x + 2y + z - 3t = -26 \end{cases} \quad (S'): \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 30 \\ 2x^2 + 3y^2 - z^2 + 2t^2 = 37 \\ -3x^2 + 5y^2 - 3z^2 + t^2 = 10 \\ 5x^2 + 2y^2 + z^2 - 3t^2 = -26 \end{cases}$$

3°) Résous le système suivant

$$\begin{cases} \frac{x}{2x1} + \frac{y+1}{y-1} + \frac{z-1}{z+3} + t = 27 \\ \frac{2x}{2x1} + \frac{3y+3}{y-1} - \frac{z-1}{z+3} + 2t = 31 \\ \frac{-3x}{2x1} + \frac{5y+5}{y-1} + \frac{3z-3}{z+3} + t = 7 \\ \frac{5x}{2x1} + \frac{2y+2}{y-1} + \frac{z-1}{z+3} - 3t = -17 \end{cases}$$

Exercice 10

1°) Résous dans $\mathbb{R}^4$ le système : $(S): \begin{cases} x + y + z + t = -\frac{13}{2} \\ 4x + 3y + 2z + t \ \ = 0 \\ 8x + 4y + 2z + t = -2 \\ 32x + 12y + 4z + t = 0 \end{cases}$

2°) On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.
Détermine les nombres réels a, b, c, d et e sachant que la courbe représentative ($\mathscr{C}$) de f possède dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les propriétés suivantes.

- ✓ ($\mathscr{C}$) passe par les points O ,$A\left(1 ; -\frac{13}{2}\right)$,$B(2 ; -4)$
- ✓ ($\mathscr{C}$) admet en A et B une tangente de vecteur directeur $\vec{\imath}$.

Exercice 11

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par : $\vec{u} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ et $\vec{v} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$. Détermine une condition nécessaire suffisante et portant sur les nombres réels a , b et c pour que le vecteur $\vec{w} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ forme une base avec les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice 12

L'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et on considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ définis par :
$\vec{u} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{\imath} + \vec{k}$ et $\vec{w} = 2\vec{\imath} + \overrightarrow{2\jmath} - 3\vec{k}$.
1°) Démontre que ces trois vecteurs forment une base.
2°) Soit $\vec{p} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$. Détermine les coordonnées de $\vec{p}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Exercice13

L'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et on considère les familles de plans (P_m) et (Q_m) d'équations respectives :
$(m^2 - m - 1)x + (2m^2 + 1)y - (m^2 + m - 3)z + m + 2 = 0$
$(m + 1)x + (2m + 3)y - (m + 2)z + 3m - 1 = 0$
1°) Démontre que les plans (P_m) passent par un point fixe A que tu détermineras.
2°) Démontre que les plans (Q_m) contiennent une droite (Δ) dont tu donneras un repère.

Exercice 14

L'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et on considère la droite $(\mathscr{D})$ de repère $(A, \vec{u})$ où $A(1; 2; -1)$ et $\vec{u} = \vec{\imath} + \overrightarrow{2\jmath} + 3\vec{k}$.
1°) Détermine une représentation paramétrique de la droite $(\mathscr{D})$
2°) Démontre que $(\mathscr{D})$ est l'intersection de deux plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ dont tu donneras des repères.
3°) Soit $(\mathscr{P})$ un plan de l'espace d'équation $ax + by + cz = d$ $avec$ $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Détermine une condition nécessaire portant sur a, b, c et d pour que (P) contienne la droite **$(\mathscr{D})$.**

Exercice 15

Dans l'espace euclidien, on considère un tétraèdre ABCD dont les quatre faces ont même périmètre. Démontre que ce tétraèdre est régulier.

Exercice 16

On considère le polynôme f défini par : $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 6$
1°) Vérifie que 2 est une racine de f.
2°) Détermine quatre nombres réels a, b, c et d tels que l'on ait :
$f(x) = (x - 2)(ax^3 + bx^2 + cx + d)$
3°) On pose $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
-a) Vérifie que 3 est une racine de P.
-b) Donne la forme factorisée de f.

Exercice 17

1°) On considère les nombres réels $a, b\ et\ c$ tels que $asinx + bcosx + c = 0$. En donnant des valeurs particulières à x démontre que $a = b = c$.

2°) On considère à présent trois nombres réels $\alpha, \beta\ et\ \gamma$ tels que pour tout nombre réel x de $\left[1\ ;\ \frac{3}{2}\right]$ l'on ait : $\alpha sinx + \beta cosx + \gamma = 0\ \ (\mathbf{1})$

-a) En dérivant deux fois l'égalité $(\mathbf{1})$, montre que quel que soit le nombre réel x, on a :

$$\begin{cases} \alpha sinx + \beta cosx = 0 \\ \beta sinx - \alpha cosx = 0 \end{cases}$$

-b) Conclus par rapport à la nullité de $\alpha, \beta\ et\ \gamma$.

Exercice 18

Trois personnes A, B et C jouent un jeu d'argent. Chaque partie a un perdant et deux gagnants. Le perdant donne de l'argent à chaque gagnant de sorte que chaque gagnant double la somme qu'il possédait avant la partie. Trois parties sont jouées : A perd la première, B la deuxième et C la troisième.

Après ces trois parties, chaque joueur possède 24 louis.

Détermine la mise initiale de chaque joueur.

Exercice 19 :

1°) Résous dans $\mathbb{R}^4$ le système $\begin{cases} x + y + z + t = -6{,}5 \\ 4x + 3y + 2z + t = 0 \\ 8x + 4y + 2z + t = -2 \\ 32x + 12y + 4z + t = 0 \end{cases}$

2°) On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Détermine les réels $a, b\ , c, d\ et\ e$ sachant que la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la fonction possède dans le repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les propriétés suivantes.

- ✓ $(\mathscr{C})$ passe par les points $A\left(1; -\frac{13}{2}\right), B(2; -4)$
- ✓ $(\mathscr{C})$ admet en A et B une tangente de vecteur directeurs $\overrightarrow{OI}$

Exercice 20

Démontre qu'il existe un polynôme unique f telle que pour tout nombre réel x,

$$f''(x) + 3f'(x) - 4f(x) = 8x^3 - 2x^2 + 4x - 6$$

CALCULS VECTORIELS

Exercice 1

Soit dans un plan affine euclidien (P) un carré ABCD et trois réels non nuls a, b et c.

.1- Démontre que le barycentre des trois points A,B et C affectés respectivement des coefficients a, b et c est le point D si et seulement si : $c\ =\ a\ et\ b\ =\ -a$.

.2- La mesure d'un côté du carré ABCD est égale à 1.Sachant que D est le barycentre des A, B et C affectés des coefficients a, b, c respectivement, détermine les réels a, b et c pour que l'ensemble des points M du plan (P) tels que $aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 = 4$soit le cercle de centre D contenant le point B.

Exercice 2

ABCD étant un rectangle tel que : AB = 6 et AD = 8.

.1- Construis le barycentre G des points pondérés (A ,1), (B,3), (C,3), (D,1).

.2- I et J étant les milieux respectifs de [BC] et [AD],démontrer que les points I,J et G sont alignés.

.3- Calcule : GA^2,GB^2,GC^2 et GD^2

.4- Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2+3MB^2+3MC^2+MD^2=310$

Exercice 3

ABCD est un rectangle tel que : AB = 4 et AD = 3.

.1- Détermine le barycentre G des points pondérés (A,1) ,(B,-1), (C,1).

.2- Détermine l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 5$

.3- Détermine l'ensemble $\mathscr{F}$ des points du plan tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = \frac{25}{4}$

.4- Détermine l'ensemble $\mathscr{H}$ des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 61$

.5- Trace $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ **et** $\mathscr{H}$.

Exercice 4

Une unité de longueur étant choisie et on considère un triangle équilatéral de côté 3. B' est le milieu de [AC] et D le point défini par la relation $4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$

.1- a) Démontre que D est le barycentre du système $\{(A,3),(B,-2),(C,3)\}$

-b) Déduis – en que D appartient à la médiatrice du segment [AC]

.2- Démontre que $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BB'}$

.3- Calcule DA^2 et DB^2

.4- a) Détermine l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M vérifiant la relation $3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12$.

-b) Vérifie que le centre du gravité du triangle ABC appartient à $\mathscr{E}$ puis trace $\mathscr{E}$.

Exercice 5

On donne trois points A, B et C distincts non alignés du plan et on note a, b et c les longueurs des côtés BC, AC et AB respectivement du triangle ABC. On se propose d'étudier l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

.1- Soit G le centre de gravité du triangle ABC et le milieu du segment [BC].

-a) Calcule $AB^2 + AC^2$ en fonction de AI^2 et de BC^2 .

-b) Déduis – en $AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$ et écris de même les expressions de BG^2 et CG^2.

-c) Démontre que $AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$.

.2- Détermine l'ensemble $\mathscr{E}$

.3- On choisit a = 5 ; b = 4 ; c = 3. Place les points A, B et C puis dessine $\mathscr{E}$ dans ce cas particulier.

Exercice 6

Soit A, B et C trois points du plan non alignés tels que le triangle ABC ne soit pas équilatéral. On désigne par A', B' et C'les milieux respectifs des segments [BC] , [AC] et [AB] et on pose BC= a ; AC = b et AB = c où a , b et c sont des nombres réels strictement positifs.

.1- On considère le vecteur $\vec{u} = a^2\overrightarrow{BC} + b^2\overrightarrow{CA} + c^2\overrightarrow{AB}$.

-a) Montre que $\vec{u} = (a^2 - b^2)\overrightarrow{AC} + (c^2 - a^2)\overrightarrow{AB}$

-b) Déduis – en que $\vec{u}$n'est pas le vecteur nul.

.2- Pour tout point M du plan on pose : $f(M) = a^2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{MA'} + b^2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{MB'} + c^2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MC'}$

-a) Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Calcule $f(O)$.

-b) Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

- Montre que $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{6}(b^2 - c^2)$
- Déduis – en la valeur de $f(G)$.

-c) Détermine l'ensemble ($\mathscr{D}$) des points M du plan tels que $f(M) = 0$

Exercice 7

L'unité de longueur est le centimètre.

On considère dans le plan un triangle ABC tel que : AB = 7 ; AC = 5 et BC = 4 et I le milieu de [BC].

.1- Montre que AI = $\sqrt{33}$

.2- Soit M un point du plan.

-a) Détermine les valeurs du nombre réel m pour lesquelles le vecteur $m\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est égal à un vecteur $\vec{u}$ indépendant du point M.

-b) Exprime alors le vecteur $\vec{u}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AI}$.

-c) Détermine et construis l'ensemble $\mathscr{E}$des points M du plan tels que

$-MA^2 + MB^2 + MC^2 = -58.$

.3- Soit D le barycentre des points pondérés $(A, -1)$; $(B, 1)$; $(C, 1)$.

-a) Détermine la nature du quadrilatère ABDC.

-b) Détermine et construis l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M du plan tels que

$-MA^2 + MB^2 + MC^2 = -25.$

Exercice 8

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = a \text{ et } AC = 2a$; ($a \in \mathbb{R}_+^*$). I désigne le milieu du segment [AC] et G le barycentre des points pondérés $(A, 3)$; $(B, -2)$ et $(C, 1)$.

.1-a) Construis le point G et précise la nature du quadrilatère ABIG.

-b) Exprime en fonction de a les longueurs GA, GB et GC.

.2- A tout point M du plan, on associe le nombre réel défini par : $f(M) = 3MA^2 - 2MB^2 + MC^2$.

-a) Exprime f(M) en fonction de MG et de a.

-b) Détermine et construis l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $f(M) = 2a^2$.

.3- A tout point M du on associe maintenant le nombre réel défini par :

$h(M) = 3MA^2 - 2MB^2 - MC^2$.

-a) Démontre qu'il existe un vecteur $\vec{u}$non nul tel que $h(M) = \overrightarrow{MB}.\vec{u} - 2a^2$.

-b) On désigne par (Δ) l'ensemble des points M du plan tels que $h(M) = -2a^2$

- Vérifie que les points I et B appartiennent à (Δ).
- Détermine puis construis (Δ).

.4- (Δ) et (Γ) sont sécantes en deux points E et F. Démontre que les triangles GEC et GFC sont équilatéraux.

Exercice 9

ABC est un triangle équilatéral de côté a.

On désigne par A' le milieu du segment [BC] et par O le centre du triangle.

1-a) Détermine l'ensemble E des nombres réels m tels que les points A, B et C affectés des coefficients respectifs **m**, 1,1 admettent un barycentre.

-b) Détermine l'ensemble des barycentres obtenus lorsque m parcourt E .

2°) Dans cette question on choisit $m = 2$.

-a) Déterminer le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 2 ; 1 et 1 puis place sur une figure les points $, B, C, A'$ et G .

-b) Détermine et construire l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M tels que: $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$

3°) Dans cette question on choisit m = -2 et $\mathscr{D}$ est l'ensemble des points M tels que : $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 0$

-a) Préciser la nature de $\mathscr{D}$ et son intersection avec la droite (AA').

-b) Tracer D sur la figure précédente.

.Exercice 10

Dans un plan affine euclidien, on considère un carré ABCD tel que AB = BC = CD = DA = a ,(a ∈ $\mathbb{R}_+^*$)

.1- Soit ($\mathscr{E}_1$) l'ensemble des points M du plan tel que $MB^2 + MD^2 - MC^2 = 2a^2$.

-a) Montre qu'un point M du plan appartient à ($\mathscr{E}_1$) si et seulement si $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{CA} = 0$.

-b) Déterminer l'ensemble ($\mathscr{E}_1$).

.2-a) Déterminer trois réels b, c, d de façon que A soit le barycentre des points B,C ,D affectés respectivement les coefficients b, c et d.

-b) Déterminer l'ensemble ($\mathscr{E}_2$) des points M du plan tels que$MB^2 + MD^2 - MC^2 = a^2$

- c)Déterminer l'ensemble ($\mathscr{E}_3$) des points du plan tels que$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} - MC^2 = MA^2$

<u>**NB**</u> : Les questions (1) et (2) sont indépendantes.

Exercice 11

Dans le plan ($\mathscr{P}$) muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$on considère les points $A(-4\,;\ 4), B(-5\,; -1)$ et $C(1\,; 1)$.

.1- Calcule les coordonnées du barycentre G des points A,B et C affectés respectivement des coefficients 2 ; 1 ; 1.

.2- On considère l'application φ du plan ($\mathscr{P}$) dans ℝ telle que $\varphi(M) = 2MA^2 + MB^2 + MC^2$

-a) Démontre que pour tout point M du plan on a : $\varphi(M) = 4MG^2 + 40$

.3- On suppose que le point M appartient à la droite (D) dont une équation est : $y = 2x - 7$.

-a) Calcule $\varphi(M)$ en fonction de l'abscisse x du point M.

-b) Montrer qu'il existe une valeurx_0 une seule pour laquelle $\varphi(M)$ est minimum.

.4- On appelleM_0 le point de la droite (D) d'abscisse x_0

-a) Démontre que les droites (D) et (GM_0) sont perpendiculaires.

-b) Le résultat était – il prévisible ?

Exercice 12

Soit trois points A, B et C du plan tels AB = 3a ; AC = 4a et BC = 5a où a est un nombre réel strictement positif et on désigne par I le milieu du segment [BC].

.1- Montre que le triangle ABC est rectangle en A.

.2- Soit m un nombre réel de l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et G_m le barycentre des points pondérés (A, 1-2m) ; (B,m) et (C,m). Détermine l'ensemble des points G_m quand m décrit l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

.3- Démontre que $(1-2m)G_mA^2 + mG_mB^2 + mG_mC^2 = 25ma^2(1-m)$

.4-a) Détermine suivant les valeurs des réels m et k l'ensemble ($\mathscr{C}$) des points M du plan tels que (1-2m)G_mA^2 +mG_mB^2 + mG_mC^2 = $25ma^2k^2$

-b) Peux – tu déterminer les réels m et k pour que les trois points A, B et C appartiennent à ($\mathscr{C}$) ?

Exercice 13

Soit ABCD un quadrilatère, I milieu de [AC], J milieu de [BD]. Soit K le point tel que $\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$, L le point tel que $\overrightarrow{LC} = -2\overrightarrow{LD}$, M le milieu de [LK].

Le but du problème est de démontrer que M, I et J sont alignés et de donner la position de M sur la droite (IJ).

1-a) Justifie l'existence du barycentre G du système $\{(A,1),(B,2),(C,1),(D,2)\}$

-b) En regroupant les points de différentes façons, montre que G appartient aux droites (KL) et (IJ).

2-a) Montre que G = M

-b) Montre que M, I et J sont alignés.

-c) Donne la position de M sur la droite (IJ).

Exercice 14

ABC est un triangle isocèle tel que AB = AC = 7 et BC = 4. On désigne par J le milieu de [BC] et G le centre de gravité de ABC.

1°) Détermine et construis l'ensemble $\mathscr{E}_1$ des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}\| = 12$

2°) Détermine et construis l'ensemble $\mathscr{E}_2$des points M du plan tels que $-2MA^2 + MB^2 + CM^2 = 38$

3-a) Calcule AG et BG

-b) Détermine et construis l'ensemble $\mathscr{E}_3$ des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 + CM^2 = 65$

Exercice 15

ABCD est un losange de centre O tel que OB = 2OA

1°) Démontre que le barycentre des points pondérés (B,2) , (C-1) et (D,1) est le milieu du segment du segment [AB].

2°) Soit k un nombre réel.

-a) Détermine et construis l'ensemble $\mathscr{E}_1$ des barycentreG_k des points pondérés $(A,k),(B,2),(C,k-1)$ et $(D,1-2k)$.

-b) Détermine la valeur de k pour laquelle G_k est un point de la droite (AC).

3°) Détermine et construis l'ensemble :

-a) $\mathscr{E}_2$ des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ et $2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ soient colinéaires.

-b) $\mathscr{E}_3$ des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ et $2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ ont la même norme.

Exercice 16

Dans le plan, on considère un triangle équilatéral et on pose : $\|\overrightarrow{AB}\| = a, a > 0$

Soit I le point du plan défini par $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{CB}$

1°) Exprime $IA^2 + IB^2 et\ IC^2$ en fonction de a

2°) Trouve le triplet de réels (α,β,γ) tels que I soit le barycentre du système $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$

3°) k est un nombre réel donné.

-a) Détermine l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $MA^2 + 2MB^2 - 2CM^2 = ka^2$

-b) Détermine si possible k tel que B soit un élément de (Γ).
-c) Démontre que (Γ) est un cercle, auquel sont tangentes les droites (AB) et (AC).

Exercice 17 :

A et B sont deux points distincts du plan tels que $AB = 6cm$.
On se propose de déterminer les ensembles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ définis par :
$\mathcal{E}_1 : MA^2 + MB^2 = \frac{10}{3}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ et $\mathcal{E}_2 : MA^2 + MB^2 = \frac{10}{3}MA.MB$
1°) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de chacun des ensembles $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ définis par : $\mathcal{S}_1 : \frac{MA}{MB} = 3$ et $\mathcal{S}_2 : MA - \frac{1}{3}MB = 0$.
2-a) Justifie que $\frac{10}{3}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$
-b) Démontre que pour tout point de $\mathcal{E}_1$, on a : $(MA^2 + MB^2 = \frac{10}{3}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}) \Rightarrow (\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0)$ où I et J sont des points du plan à préciser.
-c) Déduis – en la nature et les éléments caractéristiques de $\mathcal{E}_1$ puis construis $\mathcal{E}_1$.
3-a) Démontre que $\left(MA^2 + MB^2 = \frac{10}{3}MA.MB\right) \Rightarrow (MA - 3MB)\left(MA - \frac{1}{3}MB\right) = 0$.

-b) Démontre en t'aidant de la question 1 que $\mathcal{E}_2$ est la réunion de deux ensembles à préciser.

-c) Construis $\mathcal{E}_2$.

4°) Détermine $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$

Exercice18

ABC est un triangle équilatéral tel que $AB = a \; avec \; a \in \mathbb{R}_+^*$
1-a) Détermine l'ensemble E_1 des nombres réels m tels que les points A, B et C affectés des coefficients m , $4 \; et \; 1$ admettent de barycentre.
-b) Détermine l'ensemble des barycentres lorsque m décrit E_1.
2°) On se place maintenant dans le cas où $m = -1$
-a) Détermine puis construis le barycentre G des points $(A, -1)$, $(B, 4) \; et \; (C, 1)$
-b) Détermine et construis l'ensemble des points M du plan tels que $\|-\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 2a$
-c) Détermine et construis l'ensemble des points M du plan tels que $3MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = a^2$
-d) Détermine et construis l'ensemble des points M du plan tels que $-MA^2 + 4MB^2 + MC^2 = a^2$

Exercice 19

λ désigne un nombre réel strictement positif. On donne dans l'espace un triangle ABC tel que $AB = 2\lambda \; et \; AC = \lambda$
1°) Construis le barycentre G des points A, B et C affectés respectivement de coefficients $3\,; -1 \; et \; 2$
2°) Détermine l'ensemble (Γ) des points M de l'espace vérifiant $3MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = 5\lambda^2$
3°) On suppose l'espace rapporté à un repère orthonormé $(A; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ et on donne $(0\,;4\,;0)$, $C(0\,;0\,;2)$
-a) Détermine les coordonnées de G.
-b) Ecris les équations cartésiennes des plans (ABC) et (Γ)
-c) Détermine l'intersection de (ABC) et de (Γ).

Exercice 20

1°) Détermine une équation cartésienne du plan P matérialisé par la plaque (R).

2°) Justifie que la trajectoire du mobile G est représentée par la droite (Δ) de représentation paramétrique
$\begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha - 1 \ , \quad \alpha \in \mathbb{R}. \\ z = \alpha \end{cases}$

3°) Justifie que la droite (Δ) et le plan (P) sont perpendiculaires.

3°) Détermine les coordonnées du point K où se produira éventuellement le choc entre le mobile G et la plaque matérialisant le plan (P).

4°) Calcule la distance parcourir par le mobile G depuis l'instant t_1 jusqu'au moment du choc éventuel.

Exercice 21

Dans l'espace orienté muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$; $\vec{k}$), on considère le point A(1, 1, 1) et les plans (P) et (Q) d'équations respectives : $x + y + z - 1 = 0$ et
$x + y - 2z - 4 = 0$.

1.a) Démontrer que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.

b) Donner un repère de leur droite d'intersection (Δ).

2.a) Le point A appartient-il à (Δ)?

b) Calculer la distance du point A à (Δ).

3.) Soit ($\mathscr{D}$) la droite passant par A et perpendiculaire au plan (P).

a) Détermine une représentation paramétrique de ($\mathscr{D}$).

b) En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan (P).

4.) Soit R le plan passant par A et perpendiculaires aux plans (P) et (Q).

a.) Détermine une équation cartésienne du plan R.

b.) Détermine (P) ∩ (Q) ∩ (R).

Exercice 22

Soit dans l'espace orienter ($\mathscr{E}$), trois points A(1, -1, 2) ; B(0 ; -2 ; 1) et C(2, -1 ; 3) non alignés.

1°) Détermine l'ensemble des points M tels que :

-a) E_1 = { M∈($\mathscr{E}$) / $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{BC}$ }

-b) E_2 = { M∈($\mathscr{E}$) / $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{0}$ }

-c) E_3 = { M∈($\mathscr{E}$) / $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CM} = \vec{0}$ }

-d) E_4 = { M∈($\mathscr{E}$) / $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ }

-e) E_5 = { M∈($\mathscr{E}$) / ($\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} - 3\overrightarrow{MC}$)$\wedge$($\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ }

-f) E_6 = { M∈($\mathscr{E}$) / $\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{AB}$ } avec $\vec{u}$ un vecteur non nul tel que $\vec{u}(1, 1, 3)$

-g) E_7 = { M∈($\mathscr{E}$) / ($\overrightarrow{MA}.\left[\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BM}\right) \wedge \left(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}\right)\right]$

2°) Détermine un système d'équation paramétrique des ensembles de E_1 à E_6.

3°) Détermine une équation cartésienne de E_7.

Exercice 23

Dans l'espace orienté muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$; $\vec{k}$),

On considère les points A(0 ; 1 ; -2) , B(-1 ; 0 ; -1) , C(0 ; -5 ; -5) , D(2 ; 0 ; -2) et E(1 ; -4 ; -6).

1-a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

-b) Calculer l'aire du triangle ABC.
2.) Démontrer que le quadrilatère ABCE est un rectangle.
3-a) Donner une équation cartésienne du plan (ABC).
-b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point D sur le plan (ABC).
4°) On désigne par H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
-a) Détermine les coordonnées du point H.
-b) Calcule la distance du point D au plan (ABC).
-c.) Calculer le volume du tétraèdre ABC.

Exercice 24

Dans l'espace orienté muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$), on considère les points A(1 ; 0 ; -2) , B(-2 ; 1 ; 1) , C(1 ; 1 ; 4) et E(2 ; 2 ; 2).
1.a) Démontre que les points A, B et C déterminent un plan (P).
b) Détermine une équation cartésienne de (P).
c) Vérifie que E ∉ (P).
d) Calcule l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre ABCE.
2.) Soit (D) la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$
a.) Démontrer que (D) est sécante à (P) et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
b) Vérifie que E ∉ (D).
3.) Soit (Q) le plan contenant (D) et E.
a) Démontre qu'une équation cartésienne de (Q) est $y - z = 0$.
b) Détermine une représentation paramétrique de l'ensemble (Δ) tel que (Δ) = (P) ∩ (Q).
4.) On désigne par H et K les projetés orthogonaux du point E et respectivement sur (P) et sur (Δ).
a) Quelle est la nature du triangle EHK.
b) Calculer d(E, P) et d(E, Δ).
c)Déduire alors HK.

Exercice 25

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$), on donne les points A(3 ; 5 ; 1), B(0 ; 2 ; 4) et le vecteur $\vec{u}$(1 ; 2 ; 3).
1.) Soit (D) la droite de repère (A, $\vec{u}$)
2-a) Détermine une représentation paramétrique de (D).
-b) Détermine le point C de (D) d'ordonnée nulle et le point N de (D) dont l'abscisse est égale à l'ordonnée.
2°) Soit (P) le plan d'équation cartésienne : $2x - 3y + z = 10$
-a) Calculer la distance de d à (P).
-b) Démontre que la droite (AB) et le plan (P) sont sécants en un point M dont on déterminera les coordonnées.
3°) Soit (Q) le plan passant par les points A et B et perpendiculaire à (P) ; on désigne par (Δ) la droite d'intersection de (P) et (Q).
-a) Détermine une équation cartésienne de (Q).
-b) Donner une représentation paramétrique de (Δ).
4°) Soit les points E(2 ; -1 ; -4), F(1 ; 0 ; -3) et G(1 ; 2 ; 1).

-a) Démontrer que les points E, F et G déterminent un unique plan dont un vecteur normal est $\vec{u}$.
-b) Justifier que AEFG est un tétraèdre puis calculer son volume.

Exercice 26

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$). On considère les points A(2 ; -1 ;1) ; B(3 ;-2 ; 0) et C(-1 ; 0 ; 2).

1.a) Justifier que les points A, B et C déterminent un plan (P).

b) Déterminent une équation cartésienne du plan (P).

2.) soit m un nombre réel. On considère le barycentre Gm des points pondérés (A ; 1 ; -3m) , (B ; 2m) et (c ; m).

a) Justifier l'existence de Gm pour tout m élément de ℝ.

b) Exprimer en fonction de m les coordonnées (x, y, z) de Gm.

c) En déduire que l'ensemble (Δ) des points Gm, lorsque m décrit ℝ est une droite dont on donnera un repère.

3.) Soit (Q) le plan d'équation cartésienne $x + y + z = 0$.

a.) Démontrer que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.

b) On pose (D) = (P) ∩ (Q). Donner une représentation paramétrique de (D).

c) Etudier la position relative des droites (Δ) et (D).

Exercice 27

L'espace ($\mathscr{E}$) rapporté à un repère orthonormé direct (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$). On donne les points $A(-1\,;\,2\,;3)$; $B(-1\,;\,2\,;\,-1)$ et $C(-3\,;\,0\,;\,4)$ et on désigne par I le barycentre des points pondérés $(A\,;\,2)$ et $(B\,;\,3)$.

1.) Détermine les coordonnées du point I.

2.) Soit (D) l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$\left(2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right)\wedge\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right) = \vec{0}$. Démontre que (D) est une droite dont on donnera un repère.

3.) Soit (Δ) la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -1 - 2\alpha \\ y = 2 - 2\alpha \\ z = -2 + \alpha \end{cases}$; $(\alpha \in \mathbb{R})$

a) Démontre que (Δ) et (D) sont strictement parallèles.

b) Détermine une équation cartésienne du plan (P) déterminé par (Δ) et (D).

4.) Soit (Q) le plan d'équation cartésienne $x + y = 0$ et K(1 ; 2 ; 0).

a) Démontre que (P) ⊥ (Q).

b) Calculer les distances d(K ; (P)) et d(K ;(Q)).

c) En déduire la distance du point K à la droite d'intersection de (P) et (Q).

Exercice 28

Dans l'espace ($\mathscr{E}$) on considère trois points non alignés A, B et C. Soit G le barycentre des points (A ; -1) ; (B ; 1) et (C ; 1) ; K l'isobarycentre des points A, B et C.

1.a) Démontrer que ABCD est un parallélogramme.

b) Démontre que l'ensemble (Δ) des points M de ($\mathscr{E}$) tels que :

$\left(-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)\wedge\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right) = \vec{0}$est une droite dont on précisera un repère.

c) Démontre que l'ensemble des points M de ($\mathscr{E}$) tel que

$\left(-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right).\left(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$est un plan.

2.) Soit (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$; $\vec{k}$) un repère orthonormé direct de ($\mathscr{E}$) dans lequel les points A, B et C ont pour triplet respectif de coordonnées (1 ; 1 ; -2) ; (1 ; 1 ; -1) ; (-2 ; 1 ; 2).

a) Détermine les coordonnées des points G et K.

b) Détermine une représentation paramétrique de (Δ).

c) Justifie que le plan (P) a pour équation cartésienne $x + z + 3 = 0$.

d) Démontre que OABC est un tétraèdre et calcule son volume.

Exercice 29

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$; $\vec{k}$). On considère les points $A(1\ ;\ -2\ ;\ 1)$; B(0 ;1 ; 2) ; C(0 ; 3 ; 4) et D(5 ;1 ;3). (D_1) et (P) sont respectivement l'ensemble des points M(x, y, z) tels que (D_1) : $\begin{cases} x + z - 3 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ et (P) : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CD} = 1$.

1°) Détermine la nature du repère de (D_1).

2°) Détermine une équation cartésienne de (P) et préciser sa nature.

3-a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés et détermine une équation du plan (ABC).

-b) Déduis- en que les points A, B, C et D sont coplanaires.

-c) Calcule le volume du tétraèdre ABCD.

-d) Détermine une représentation de la hauteur (Δ) issue de D du tétraèdre.

4.) Détermine les coordonnées du point E pour que le quadruplet ABCE soit un parallélogramme et calcule l'aire de ce parallélogramme.

5.) Montrer que les droites (Δ) et (D_1) sont non coplanaires.

6.) Soit (D') la droite de système d'équation cartésienne : $\frac{x-1}{2} = y = -z - 1$.

Détermine une équation cartésienne du plan (Q) parallèle à la droite (D'), orthogonal au plan (ABC) et contenant le point O.

APPLICATIONS DE L'ESPACE

Exercice 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé$(o; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$.

On considère le plan ($\mathscr{P}$) d'équation x – 2y + 3z = 1 et le point A(4 ; - 5 ; 5).

1°)Détermine les coordonnées de l'image A' de A par la projection orthogonale p sur le plan ($\mathscr{P}$).

2°) Détermine une représentation paramétrique de l'ensemble des antécédents de A' par p.

Exercice 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$.

Soit ($\mathscr{D}$) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$; ($\lambda \in \mathbb{R}$) et le point A(2 ;3 ;-1).

.1- Détermine les coordonnées de l'image A' de A par la projection orthogonale p sur ($\mathscr{D}$).

.2- Détermine une équation cartésienne de l'ensemble des antécédents de A' par p.

Exercice 3

Soit ABCDEFGH un cube ; h_1, l'homothétie de centre A et de rapport 2 ; h_2 l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$; t la translation de vecteur $\overrightarrow{HD}$.

.1-a) Construis les images des points E, B , C et G par la composée toh.

-b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de cette transformation.

.2-a) Construis les images des points E, B , C et G par la composée h_2oh_1.

-b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de cette transformation.

Exercice 4

On considère les transformations f et g d'expressions analytiques respectives :

$\begin{cases} x' = -2x - 4 \\ y' = -2y + 1 \\ z' = -2z + 3 \end{cases}$ et $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \\ z' = z - 1 \end{cases}$.

.1- Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f et g.

.2- Détermine l'expression analytique, la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations fog et gof.

Exercice 5

Soit les points $A(-1\,;2\,;-2), et\ \ B(1\,;-1\,;3)$, h_1 l'homothétie de centre A et de rapport – 3 , h_2 l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$.

.1- Détermine l'expression analytique de h_2oh_1 et h_1oh_2.

.2- Déduis – en la nature et les éléments caractéristiques de chacune ces transformations.

Exercice 6

Soit les points $A(3\,;0\,;0), B(0\,;3\,;0), C(0\,;0\,;3)$ et G le centre de gravité du triangle ABC.

.1- Détermine les coordonnées de G et démontre que la droite (OG) est perpendiculaire au plan (ABC).

.2- Détermine les coordonnées de l'image de O par la réflexion de plan (ABC).

.3- Détermine les coordonnées de l'image de chacun des points O, A, B et C par le demi-tour d'axe (OG).

Exercice 7

Soit le plan (P) d'équation x – 2y + z =1 et la droite (D) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda; \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$

($\lambda \in \mathbb{R}$) et le point $A(2\,;-3\,;1)$.

.1- Démontre que (D) est perpendiculaire au plan (P) en un point I dont tu détermineras les coordonnées.

.2- Détermine les images respectives des points A_1 et A_2 de A par les projections orthogonales sur (P) et (D).

.3- Vérifie que le quadrilatère AA_1IA_2est un rectangle.

Exercice 8

ABCDEFGH est un cube et I le centre de la face EFGH.

L'espace est rapporté au repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ et on désigne par s la réflexion de plan (ACE) et s' la réflexion de plan (CFH).

.1- Détermine les expressions analytiques de s et de s'.

.2-a) Démontre que les plans (ACE) et (CFH) sont perpendiculaires.

-b) Déduis – en l'expression analytique du demi – tour d'axe (CI).

Exercice 9

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
Soit (P) le plan d'équation 2x + y – z = 3 et (Δ) la droite perpendiculaire à (P) en O.
.1- Détermine l'expression analytique de chacune des transformations suivantes :
-a) réflexion $S_{(P)}$
-b) demi – tour $S_{(\Delta)}$
-c) $S_{(\Delta)}oS_{(P)}$
.2- Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $S_{(\Delta)}oS_{(P)}$.

Exercice 10

L'espace au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les points $A(1\,;-2\,;-1)$; $B(m\,;3\,;m)$ et $C(5\,;5+m\,;m+4)$ où m est un paramètre réel.
.1-Détermine dans chacun des cas suivants :
(i). (AB) et (AC) sont orthogonales.
(ii). A, B et C déterminent un plan.
.2- On pose m = 1
-a)En remarquant qu'on est dans l'hypothèse (ii), Trouve un vecteur normal au plan (ABC).
-b) Ecris une représentation paramétrique de la droite (Δ) perpendiculaire au plan (ABC) en A.

Exercice 11

Soit h une application de l'espace $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ d'expression analytique $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x+2y-2z+2) \\ y' = \frac{1}{3}(2x+2y+z-1) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x+y+2z+1) \end{cases}$
où M et M' sont des points de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z').
1°) Détermine hoh(M).
2°) Démontre que h est une réflexion dont tu donneras l'élément caractéristique.
3°) On considère les symétries orthogonales S_P et S_Q de plans respectifs.
(P) : $(P): 2x - y + z - 1 = 0$ et $(Q): x + y - z + 2 = 0$ $et\ on\ pose: k = S_P o S_Q$.
-a) Démontre que k est un demi – tour.
-b) Détermine une représentation paramétrique de l'axe (Δ) de k.
4°) Détermine de deux facons différentes l'expression analytique de k.

Exercice 12

On considère dans l'espace $\mathcal{E}$ le cube ABCDEFG d'arête 1cm. L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. (P) désigne le plan (EDG) ; (Δ) désigne la droite de repère $(J\ , \vec{u})$ où J est le milieu du segment [HF] et $\vec{u}(2; 1; 1)$.
1-a) Détermine l'équation cartésienne de (P).
 -b) Détermine (P) ∩ (Δ).
2°) Détermine l'expression analytique de la réflexion de plan S_Q où (Q) est d'équation $x - y - z + 1 = 0$.
3°) Détermine l'équation cartésienne d'un plan (Q')pour que $S_{(Q)}oS_{(Q')}$ = (Δ).

4°) f est l'application de l'espace dans lui – même d'expression analytique $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x + 2y + 2z - 2) \\ y' = \frac{1}{3}\left(2x - 2y + z + \frac{1}{2}\right) \\ z' = \frac{1}{3}\left(2x + y - 2z + \frac{7}{2}\right) \end{cases}$

où M et M' sont des points de l'espace de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') tel que f(M) = M'

-a) Détermine l'ensemble des points invariants (**Γ**) par f. (on donnera un repère de (**Γ**)).

-b) Démontre que $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à (**Γ**).

-c) Démontre que le milieu I de [MM'] appartient à (**Γ**).

-d) Précise alors la nature de f.

Exercice 13

M et M' sont deux points de l'espace tels que $a\overrightarrow{M'A} + b\overrightarrow{M'B} + 2\overrightarrow{M'M} = \vec{O}$ où a et b sont des nombre réels.

1°) Détermine une condition sur a et b pour qu'il existe, pour tout M de l'espace, un unique point M' tel que $a\overrightarrow{M'A} + b\overrightarrow{M'B} + 2\overrightarrow{M'M} = \vec{O}$.

2°) On suppose maintenant réalisé la condition de la question 1) et on désigne par *f* l'application qui atout point M de l'espace associe le point M' (défini au 1).

-a) Détermine suivant les valeurs du couple (a, b), l'ensemble (I) des points invariants par f.

-b) On suppose a + b = 0.

Exprime pour tout point M de l'espace, le vecteur $\overrightarrow{M'M}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du nombre réel a, puis déduis – enla nature de *f*.

-c) On pose a + b ≠ 0.

Détermine la nature de *f*, puis déduis – enl'expression analytique de *f* si, A(1 ;0 ;1) et B(2 ;-3 ;4) dans l'espace muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

3°) on considère maintenant un cube ABCDEFGH tel que le repère R = $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé de l'espace. T est le centre de la face EFGH.

Soit S la réflexion de plan (ACE) et S' la réflexion de plan (CFH).

-a) Détermine dans R l'expression analytique de S.

-b) Démontre que le plan (CFH) est globalement invariant par S.

-c) Détermine la nature et, le ou les éléments caractéristiques de SoS'

Exercice 14

$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$est un repère orthonormé direct de l'espace. On considère dans l'espace les points $A(\,1\,; -2\,; -1)$, $B(m\,;\,3\,;\,m)$ et $C(5\,;\,5\,+\,m\,;\,m\,+\,4)$.

1°) Détermine le paramètre réel m dans chacun des cas suivant :

(i) (AB) ⊥ (AC)

(ii) Les points A, B et C déterminent un plan.

2°) On pose m = 1

-a) En remarquant qu'on est dans l'hypothèse (ii), trouve un vecteur normal au plan (ABC).

-b) Ecris une représentation paramétrique de la droite (Δ) perpendiculaire au plan (ABC) en A.

3°) ($\mathscr{D}$) est l'ensemble des points M de l'espace, équidistants de la droite (Δ) perpendiculaire au plan (ABC).

-a) Montre que A est un point de (L).

-b) Ecris une équation cartésienne de (L).

Exercice 15

1°) Dans l'espace orienté, on considère un carré ABCD de centre O tel que OA = 1.On désigne par S le point de l'espace tel que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OS}$ par d1 et d2 les demi-tours d'axes respectifs (OA) et (OB).

-a) Précise la nature de d1 o d2.

-b) Justifie que ($A, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OA}$) est un repère orthonormé direct de l'espace.

-c) Démontre que l'application t de l'espace dans l'espace qui a tout point M associe M' tel que $\overrightarrow{BM'} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) \wedge \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM}$ est une translation de vecteur de vecteur colinéaire à $\overrightarrow{OS}$. Donne une équation cartésienne de l'image par t du plan (OAB) dans le repère ($A, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OA}$).

2°) Soit f l'application affine de l'espace dans l'espace d'expression : $f: \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x + 2y - 2z + 2) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + y + 2z - 2) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + 2y + z + 2) \end{cases}$

-a) Détermine l'ensemble des points invariants par f. Soit M un point de l'espace d'image M' par f et I le milieu du segment [MM']. Montre que I est invariant par f.

-b) Montre que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur à préciser.

-c) Déduis – en la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 16 :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé$\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne le plan (P) déquation :

$$2x + y - z = 1$$

et l'application affine f d'expression analytique $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(-5x - 3y + 2z - 3) \\ y' = \frac{1}{2}(3x + y - 2z - 1) \\ z' = \frac{1}{2}(-6x - 6y + 2z - 6) \end{cases}$

1°) Détermine l'expression analytique de la réflexion de plan (P).

2°) Reconnais l'application affine f.

QUELQUES PROBLEMES

Problème 1

Partie A

Dans l'espace orienté, on considère un carré ABCD de centre O tel que OA = 1.

1°) On désigne par S le point de l'espace tel que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OS}$ par d_1 et d_2 les demi-tours d'axes respectifs (OA) et (OB).

-a) Précise la nature de $d_1 \circ d_2$.

-b) Justifie que ($A, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OA}$) est un repère orthonormé direct de l'espace.

2°) Démontre que l'application t de l'espace dans l'espace qui a tout point M associe M' tel que :$\overrightarrow{BM'} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) \wedge \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM}$ est une translation de vecteur colinéaire à $\overrightarrow{OS}$. Donne une équation cartésienne de l'image par t du plan (OAB) dans le repère ($A, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OA}$).

Partie B

Soit f l'application affine de l'espace dans l'espace d'expression : $f: \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x + 2y - 2z + 2) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + y + 2z - 2) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + 2y + z + 2) \end{cases}$

-a) Détermine l'ensemble des points invariants par *f*. Soit M un point de l'espace d'image M' par *f* et I le milieu du segment [MM']. Montre que I est invariant par *f*.

-b) Montre que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur à préciser.

-c) Déduis – en la nature et les éléments caractéristiques de *f*.

Problème 2 :

ABCDEFGH est un cube. On désigne par (P) le plan (CFH) et par (Q) le plan perpendiculaire à (P) contenant la droite (CF). Soit I le point d'intersection de (P) et de la droite (AG).

Partie A :

L'espace est rapporté au repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$.

.1-a) Détermine une équation cartésienne de (P).

-b) Détermine les coordonnées de I.

.2- Détermine une équation cartésienne de (Q).

Partie B :

Soit *f* l'application affine de τ dans τ d'expression analytique : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z + 4) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + y - 2z + 4) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x - 2y + z + 4) \end{cases}$

.3- Soit M un point quelconque de τ d'image M' par *f* .

-a) Démontre que le milieu du segment $[MM']$ appartient au plan (P).

-b) Démontre que $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur normal à (P)

-c) Détermine l'ensemble des points de l'espace invariant par

-d) Déduis – en la nature et les éléments caractéristiques de *f* .

.4- S_Q est la réflexion de plan Q .

-a) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de :$g = S_Q o\, f$.

-b) Détermine l'expression analytique de g.

.5- S_P désigne la réflexion du plan (P). Détermine l'équation cartésienne d'un plan (P) tel que $S_{P}\, _O\, S_P = t_{\overrightarrow{AG}}$; S_P étant la réflexion de plan (P).

Problème 3

Partie A :

L'unité de longueur est le cm. Dans un plan de l'espace, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 2a et AC = a où a ∈ $\mathbb{R}_+$.

.1- Détermine et construire l'ensemble E_1des points tels que :$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$

.2- On désigne par H point du plan tel que $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

-a) Démontre que H est le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients que l'on déterminera.

-b) Soit E_2 l'ensemble des points M du plan tels que : $-3MA^2 + MB^2 + 4MC^2 = k$, $k \in \mathbb{R}$.

- Détermine les valeurs de k pour lesquelles E_2 contient le point A.
- Construire E_2 pour cette valeur de k.

Partie B

Dans l'espace, on considère maintenant, une pyramide ABCD telle que :

- La base ABCD est un carré de sens direct et de centre O.
- La droite (OE) est perpendiculaire au plan (ABC) ;
- OE = OA = a.

.3- a) Démontrer que la pyramide est invariante par la flexion de plan (ACE).

-b) Cette pyramide est-elle invariante pour le demi-tour d'axe (OE) ?

.4-a) Déterminer le point G isobarycentre des points A, B, C, D et E

-b) Démontrer que GA ≠ GE.

.5- Soit f une réflexion laissant invariante la pyramide

-a) Démontrer que G est invariante par f.

-b) Démontrer que l'image de E par f n'est pas A.

-c) Démontrer que E est invariant par f.

Partie C

Dans cette partie, l'espace est rapporté au repère (O, A, B, C).

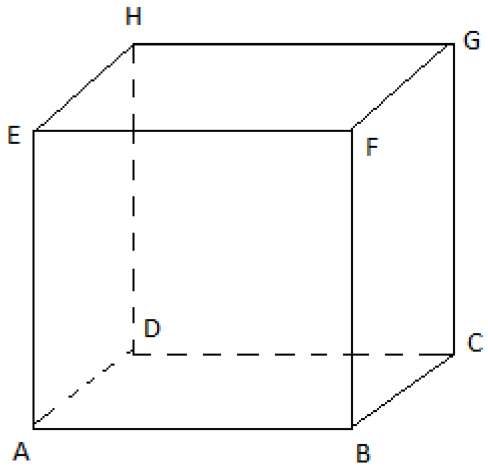
.6- Détermine les coordonnées du point G.

.7- Détermine l'expression analytique de la réflexion de plan (ACE).

.8- Détermine la composition de la réflexion de plan (ABC) et du demi-tour d'axe (OE).

Problème 4

ABCDEFGH est un cube représenté comme suit :



Partie A

1-a) Démontrer que le point A est le barycentre des points B, C et D affectés des coefficients que tu détermineras.

-b) Déterminer l'ensemble ($\mathscr{S}$) des points M de l'espace $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = MC^2$.

.2-a) Soit t l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui a tout point M de $\mathscr{E}$ associe le point M' de $\mathscr{E}$ définie par : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MF}$. Donne la nature et les éléments caractéristiques de l'application t.

-b) Soit h l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui a tout point de M associe le point M' de $\mathscr{E}$ définie par : $\overrightarrow{CM'} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{AM} = \vec{0}$. Donne la nature et les éléments caractéristiques de l'application h.

Partie B

L'espace $\mathscr{E}$ est associé par le repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

Unité graphique : 1 cm. On considère dans $\mathscr{E}$ les points I $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ K $(\frac{1}{2}; 0; 0)$ et L $(\frac{1}{2}; 1; 0)$.

.3-a) Calcule la distance du point I au plan (ABC)

-b) Déduis-en que IABCD est une pyramide.

.4-a) Démontre que les plans (IAB) et (ICD) sont perpendiculaires.

-b) Caractérise l'intersection de ces deux plans.

.5-a) Donne les expressions analytiques des applications h et t de la partie A.

-b) Détermine et caractérise l'application k tel que hok = t.

.6-a) Calcule le volume de l'image par t de l'ensemble ($\mathscr{S}$) de la partie A.

-b) Calcule le volume de l'image par h de la pyramide IABCD.

.7- Soit f_1 la réflexion de plan (ICD) et f_2 la réflexion de plan (IAB).

-a) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de $f = f_1 \circ f_2$

-b) Détermine l'image de la droite (IC) par f.

Partie C

On pose $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) = (A, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et on définit de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ l'application notée $\mathscr{S}$ d'expression

analytique : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x + 2y - 2z + 2) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + y + 2z - 2) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + 2y - z + 2) \end{cases}$.

.8- Démontre que $\mathscr{S}$ est une application affine.

.9- Démontre que l'ensemble des points fixes par $\mathscr{S}$ est le plan (BGE).

.10- Démontre que $\mathscr{S}$ est la réflexion de plan (BGE).

Problème 5

ABCDEFGH est un cube tel que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé direct de l'espace $\mathscr{E}$.

On pose $\vec{\imath} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{\jmath} = \overrightarrow{AD}$; $\vec{k} = \overrightarrow{AE}$. On munit l'espace $\mathscr{E}$ du repère orthonormé direct $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère dans $\mathscr{E}$ les points $K\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$; $L\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$ $S\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

1°) Soit t l'application $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui a tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MF}$.

Justifie que t est une translation.

2- a) Calcule la distance du point S au plan (ABC).

-b) En déduire que SABCD.

3°) Soit f_1 la réflexion du plan (SAB) et f_2 la réflexion du plan (SCD).

-a) Démontre que les plans (SAB) et (SCD) sont perpendiculaires.

-b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de $f_1 \circ f_2$.

4-a) Déterminer l'expression analytique de f_1.

-b) Déterminer l'image par $f_1 \circ f_2$ de la droite (SC).

Problème 6

Dans l'espace muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points $A(4; 2; 2)$ et $B(0; 2; 0)$ tels que $S_P(A) = B$ où S_P est la réflexion de plan (P).

1°) Détermine une équation cartésienne du plan (P).

2°) Détermine analytiquement S_P.

3°) Soit (Q) le plan dont un repère est $(A, \overrightarrow{AB}, \vec{\jmath})$

Démontre que (Q) est globalement invariant par S_P.

4°) Calcule la distance de l'origine O du repère à la droite (Δ) où $(\Delta) = (P) \cap (Q)$.

5°) Soit les points C et D tels que le quadrilatère ABCD soit un carré.

-a) Démontre que A est le barycentre des points pondérés (B, α); (C, β); (D, μ) où le triplet(α, β, μ) est à préciser

-b) Détermine l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC}^2$

-c) Détermine le volume V' de l'image de (Γ) par S_P.

Problème 7

Partie A

Dans l'espace muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points $A(0; 1; 2)$, $B(1; -1; -2)$, $C(1; 2; 1)$ et $D\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

1°) Démontre que les points A, B et C déterminent un plan (ABC) dont on précisera une équation cartésienne.

2°) Soit (Δ) l'ensemble des points (P) de l'espace tels que AP = BP = CP.

-a) Démontre que pour tout point $P(x, y, z)$ de l'espace, $[P \in (\Delta)] \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y - 8z - 1 = 0 \\ 2x + 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$

Déduis – en que (Δ) est une droite dont on précisera un repère.
-b) Vérifie que la droite (Δ) et le plan (ABC) sont perpendiculaires.
-c) Soit **Ω** le point de (Δ) situé dans le plan (ABC). Détermine les coordonnées de **Ω** puis ce que représente le point **Ω** pour le triangle ABC.

Partie B

Soit g le demi – tour d'axe (Δ), t l'application de l'espace dans l'espace qui à tout point M associe le point M' tel que vecteur $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{M\Omega} - 3\overrightarrow{MG}$ où G est le centre de gravité du triangle ABC.
3°) Justifie que g(A) , g(B) et g(C) sont les sommets d'un triangle dont on donnera l'aire.
4°) Détermine l'expression analytique de g.
5°) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de t.

Problème 8

On considère dans l'espace $\mathscr{E}$ un cube ABCDEFGH reposé sur la face ABCD et dont la face ABFE est située dans le plan vertical de face. On désigne par (P) le plan (CFH) et (Q) le plan perpendiculaire à (P) et contenant la droite (CF). Soit I le oint d'intersection de (P) et de la droite (AG).

Partie A :

Dans toute la suite, l'espace $\mathscr{E}$est rapporté au repère orthonormé direct (A, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$).
1-a) Détermine une équation cartésienne de (P).
-b) Détermine les coordonnées de I.
2°) Détermine une équation cartésienne du plan (Q).
3°) Calcule le volume de l'image par h de la pyramide IABCD de base ABCD.

Partie B

Soit f l'application affine de τ dans τ d'expression analytique $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z + 4) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + y - 2z + 4) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x - 2y + z + 4) \end{cases}$

8.) Soit M est point quelconque de τ d'image M' par *f*.
a) Démontre que le milieu du segment [MM'] appartient au plan (P).
b) Démontreque $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur normal à (P).
c) Détermine l'ensemble des points de l'espace invariants par *f*.
d) Déduis – en la nature et les éléments caractéristiques de *f*.
9.) S_Q est la réflexion de plan (Q).
a) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de : $g = S_Q \, o \, f$.
b) Détermine l'expression analytique de g.
10.) S_P désigne la réflexion du plan (P), détermine l'équation cartésienne d'un plan (P) tel que : $S_P \, o \, S_P = t_{\overrightarrow{AG}}$; S_P étant la réflexion de plan (P).

Problème 9

ABC est un triangle

Partie A

1°) Construis le barycentre G_1 des points pondérés (A,1) , (B,-1) et (C,1).

2°) Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$

-a) Vérifie que B appartient à (Γ).

-b) Détermine et construis (Γ).

Partie B

Dans cette partie, on pose : AB = 7 ; AC = 5 et BC = 4 et on désigne par I le milieu du segment [BC].

3°) Calcule AI.

4°) Détermine et construis l'ensemble $\mathscr{E}_1$ des points M du plan tels que $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 58$(on pourra penser au point I).

5°) On désigne par D le barycentre des points pondérés (A,-1) , (B,1) et (C,1).

-a) Détermine la nature du quadrilatère ABDC.

-b) Détermine et construis l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 - MC^2 = 25$

Partie C

On suppose ici que ABC est un triangle équilatéral tel que $AB = a \ avec \ a > 0$.

6°) Détermine et construis l'ensemble $\mathscr{E}_3$ des points M du plan tels que $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = a^2$

7-a) Construis le barycentre G_2 des points pondérés (A,-1) , (B,4) et (C,1).

-b) Détermine et construis l'ensemble $\mathscr{E}_4$ des points M du plan tels que $MA^2 - 4MB^2 - MC^2 = -\frac{a^2}{2}$

Problème 10

On considère un cube ABCDEFGH dans l'espace $\mathscr{E}$ muni du repère orthonormé direct (A, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$).

1°) Dans le plan (P) = (ABC), on désigne par R le barycentre des points pondérés (A,2) (B,1) et (D,1) et par f l'application de (P) dans l'ensemble des nombres réels définie pour tout point M de (P) par :

$f(M) = 2MA^2 + MB^2 + MD^2$

-a) Démontre que pour tout point M, on a : $f(M) = 4MR^2 + \frac{3}{2}$

-b) Détermine suivant les valeurs du réel k l'ensemble (E_k) des points M de (P) tels que $f(M) = k$

-c) Détermine les valeurs de k pour lesquelles C appartient à (E_k).

2°) Soit g l'application de $\mathscr{E}$ dans l'ensemble des nombres réels définie pour tout point M de $\mathscr{E}$ par :

$g(M) = -MA^2 + MB^2 - MF^2 + MG^2$. On désigne par (Q) l'ensemble des points de $\mathscr{E}$ tels que $g(M) = 2$

-a) Vérifie que A est un point de (Q).

-b) Démontre que (Q) est un plan dont on donnera une équation cartésienne.

3°) Soit U le milieu de [AB] et T celui de [AH].

-a) Prouve que les points E, U et C définissent un unique plan.

-b) Démontre que (FT) est orthogonale à (EUC).

-c) Détermine les coordonnées du projeté orthogonal L de F sur (EUC).

-d) Détermine l'ensemble des points de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}$

4°) Soit S le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

-a) Calcule la distance du point S à la droite (AC) et la distance du point S au plan (ABC).

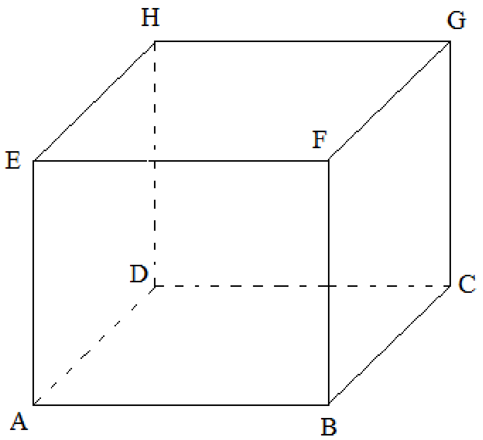
-b) Démontre que les plans (SAB) et (SCD) sont perpendiculaires puis détermine une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

QUELQUES EPREUVES

SUJET 1

Contexte : La refondation au Bénin.

Dans son programme de développement, le gouvernement béninois décide de construire une grande institution financière dont la région de Covè. Les travaux sont confiés à l'ingénieur Dramane qui en fait une maquette du chef d'œuvre comme représentée ci- dessous suivi de quelques informations utiles.



A la vue de cette maquette, Toni fils aîné de l'ingénieur décide décide de s'appliquer sur les connaissances géométriques acquises en classe mais il rencontre certaines difficultés.

Tâche : Tu es invité(e) à trouver des solutions aux préoccupations de Toni en résolvant les problèmes suivant.

Problème 1

1.a) Donne la nature géométrique de cette institution financière.

b) Quelle est la nature du triangle ABD.

2.) Démontre que $\left(H,\ \overrightarrow{HG},\overrightarrow{HE},\overrightarrow{HD}\right)$ est un repère de l'espace.

3.) Détermine les coordonnées des points D, F et G dans ce repère.

4.) Détermine une équation paramétrique du plan DFG.

Problème 2

La construction de la banque étant achevée, le Maire de la région de Covè décide de sécuriser les lieux en plaçant 3 agents de sécurités à des points stratégiques P, Q et R tels que

$\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AQ} = 4\overrightarrow{AD}$et R le barycentre des points pondérés (C ; -1) et (G ; 2). Une caméra de surveillance sera installée au milieu M du segment [AE].

L'espace occupée l'ensemble est muni du repère orthogonal $\left(A,\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1.a) Démontre que le point R a pour coordonnées (1 ; 1 ; 2).

b) Démontre que les points P, Q et R ne sont pas alignés.

2.a) Détermine la nature du triangle PQR puis calcule son aire.

b) Calcule de deux manière différentes, la distance du point M à la droite (BC).

3.) Démontre qu'une équation du plan (PQR) est : $4x + 2y + z - 8 = 0$.

Problème 3

A l'extérieur de la banque, l'espace PQRE est réservée au guichet automatique et le point K est le projeté orthogonal du point E sur le plan (PQR).

1.a) Justifie que E n'appartient pas au plan (PQR).
b) Démontre que le guichet automatique est un tétraèdre.
2.a) Détermine une équation cartésienne de la droite (EK).
b) Déterminer les coordonnées de K.
3.a) Calcule de deux manières différentes, la distance du point E au plan (PQR).
b) Calcule le volume du guichet automatique.

SUJET 2

Contexte : Aménagement du territoire
Dans le projet d'aménagement de son territoire, un pays africain a prévu de construire un tour dans sa capitale économique et de fortifier la citadelle de la ville. Coffi, l'ingénieur invité à cet effet, a muni l'espace d'un repère orthonormé direct dans lequel deux points P et K ont pour triplet de coordonnées respectifs $\left(\frac{49}{4}; \frac{5}{6}; 0\right)$et $\left(\frac{-63}{4}; \frac{41}{6}; -1\right)$.

En fait, la présidence de la république et la citadelle de la ville sont assimilés respectivement aux points P et K. La tour à la forme d'un tétraèdre BENI à la cime I duquel sera cachée une puissante caméra de surveillance. Pour des mesures de sécurité, certaines constructions de la ville seront détruites. L'ingénieur désigne par (Γ_1) l'ensemble de ces constructions et précise que (Γ_1) est l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{PM} \wedge \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{PE}$ puis donne $B\left(\frac{1}{4}; \frac{5}{6}; 0\right)$, $E\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{3}; 0\right)$, $N\left(0\,; \frac{4}{3}; 0\right)$. Il ajoute que G = bar {(B, 1) ; (E, 2) ; (N, -4)}. La caméra pourra accéder parfaitement à tous les points M de l'espace vérifiant
$\|\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{ME} - 4\overrightarrow{MN}\| = 10$.
Un radar sera installer en un lieu caché de la ville ; les coordonnées x, y, z de ce lieu et l'année t_o (en centaines) d'activation du radar sont solutions du système (S) : $\begin{cases} x + y + z + t = 23{,}13 \\ -x + y - 2z - t = -22{,}13 \\ x - y - z + t = 19{,}13 \\ 2x - 3y - z - 2t = -42{,}26 \end{cases}$

Lors d'une de ces recherches sur l'internet, Falim un élève en classe de Tle D a découvert ces information et décide d'en percer le secret.
Tâche : Tu vas aider Falim en résolvant les trois problèmes suivant. L'unité de longueur est le décamètre.

Problème 1

1°) Résous le système (S) par la méthode de PIVOT de GAUSS puis déduis en que le radar sera activé en 2013.
2-a) Détermine les coordonnées du point G.
-b) Montre que (Γ_1) est une droite dont tu donneras un repère.
3°) Justifie (Γ_1) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = \frac{49}{4} + 14\alpha \\ y = \frac{5}{6} - 3\alpha \\ z = 0 \end{cases}$; $(\alpha \in \mathbb{R})$.
4-a) Le point K appartient-il à (Γ_1) ?
-b) Justifie que (14 ; -3 ; 1) est le triplet de coordonnées de $\overrightarrow{KG}$ puis déduis en la distance de la citadelle à (Γ_1).
5°) En réalité, le radar est situé à un point R(1 ; 1 ; 1) par lequel passe une plaque électrique. Cette plaque est matérialisée par un plan (P_1) perpendiculaire à la droite (KG).

Détermine une équation cartésienne du plan (P_1).

Problème 2

Les murs de la citadelle seront construits et un câble électrique haute tension y sera caché. Ce câble est représenté par une droite (Δ). Aussi placera t-on un récepteur d'ondes représenté par un plan (P_3) de vecteur normal $\vec{x}_3(1; 5; 1)$ et passant par un point D(0 ; 0 ; 1).

6°) On désigne un mur de la citadelle par un plan (P_2) d'équation $-7x + y + 2z + 4 = 0$ et suppose que (P_1) est d'équation $14x - 3y + z - 12 = 0$.

-a) Montre que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.

-b) (Δ) est l'intersection de (P_1) et (P_2). Vérifie que R(1 ; 1 ; 1) $\in$ (Δ) puis déduis en une représentation paramétrique de (Δ).

7-a) Montre que les plans (P_1) et (P_3) sont perpendiculaires.

-b) Montre de même que la droite (Δ) et le plan (P_2) sont parallèles.

8°) Détermine l'intersection de (Δ) et (P_3).

Problème 3

Le sommet de la tour BENI est le point I de coordonnées (1 ; 3 ; 9).

9°) Détermine la distance du point I au plan (BEN) puis déduis en la hauteur H de la tour en décamètre.

10) Calcule le volume V de la tour BENI.

11°) Soit (Γ_2) l'ensemble des points M de l'espace tel que $\|\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{ME} - 4\overrightarrow{MN}\| = 10$.

Détermine l'ensemble (Γ_2).

SUJET 3

Contexte :

Lors de la journée béninoise des arts et culture, l'un des objets d'art exposé par l'artiste ''Ben'' a la forme d'un cube ABCDEFGH. Un jeu de lumière est placé en un point I sur le segment [GH]. Le point J est l'intersection du plan (ACI) et de la droite (EH), le point K est milieu de [BC]. Le solide FACIJ est destiné à contenir de l'eau. Deux ouvertures O_1 et O_2 sont prévues respectivement sur mes plans (IGC) et (AJG). Un visiteur français voulant acheter cet objet souhaite connaître le volume le volume de l'eau que peut contenir le solide FACIJ et des demande l'emplacement exact des points O_1 et O_2. L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$ et on désigne par R le projeté orthogonal de I sur (AC) avec I $\left(\frac{1}{3}; 1; 1\right)$.

Ben a fait appel à son enfant Yvon en classe de Terminale D pour l'aider à répondre au visiteur.

Tâche : Tu es invité(e) à aider Yvon à trouver des solutions aux préoccupations de Ben en résolvant les trois problèmes suivant.

Problème 1

1-a) Précise les coordonnées de chacun des points C, F, E, H et G.

-b) Détermine une équation cartésienne du plan (ACI).

-c) Détermine un système d'équation cartésienne de la droite (EH).

-d) Déduis en qu'on a J $\left(O; \frac{2}{3}; 1\right)$.

2-a) Justifie que (IJ) et (AC) sont parallèles.

-b) Calcule les distances IJ et AC.

-c) Quelle est la nature du quadrilatère ACIJ.

3-a) Justifie les affirmations suivantes :

- $\overrightarrow{AR} = k\overrightarrow{AC}$; $k \in \mathbb{R}$
- $\overrightarrow{IR}.\overrightarrow{AC} = 0$

-b) Déduis en alors le réel k où R $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; 0\right)$.

4°) Calcule alors :

-a) L'aire de ACIJ

-b) La distance de F au plan (ACI).

-c) Le volume de l'eau que peut contenir le solide FACIJ.

Problème 2

Les points O_1 et O_2 sont respectivement barycentre des points pondérés (I, 2) ; (G ; 1) ; (C ; 1) et l'isobarycentre des points J et G. On désigne par Mun point quelconque de l'espace.

5-a) Détermine les coordonnées des points O_1 et O_2.

-b) Montre que $\vec{v} = 2\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MC}$ est un vecteur constant et que $\|\vec{v}\| = \frac{5}{3}$.

-c) Détermine l'ensemble (Γ_1) des points M de l'espace tels que $\|2\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MC}\| = \|\vec{v}\|$.

-d) Détermine l'équation cartésienne de l'ensemble (Γ_2) des points M de l'espace tel que $\|\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.

6°) On considère le système de points pondérés $\{(I; 2);\ (G\ ; m);\ (C; m)$ où $m \in \mathbb{N}^*\}$.

-a) Justifie que ce système admet un barycentre Gm.

-b) Le point I appartient-il à l'ensemble (Γ_3) des points M de l'espace tels que $\|2\overrightarrow{MI} + m\,\overrightarrow{MG} + m\,\overrightarrow{MC}\| = m\,\|\vec{v}\|$.

Problème 3

Pour assurer la sécurité de la salle d'explosion, un panneau solaire assimilable à un plan (Q) définie par $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 5$ et deux systèmes d'alarme accroché des ficelles (F_1) et (F_2) définies respectivement par $x - 2 = y = \frac{1}{2}z - 1$et $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{OB}$. L'espace est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$; $\vec{k}$) ; M(x, y, z) un point de cet espace ; A(1 ; 2 ; -4) ; B(4 ; 7 ; 2) et $\vec{u}$(3 ; -2 ; 1).

7-a) Justifie que (F_2) est une droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 3t + 6 \\ y = -2t - 2 \\ z = t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$.

-b) Calcule la distance du point A à la droite (F_1).

8-a) Démontre que (F_1) et (F_2) ne sont pas coplanaires.

-b) Détermine une équation cartésienne de (Q).

9-a) Démontre que l'ensemble (F_3) des points M(x, y, z) tels que : $\begin{cases} x + y - z = -3 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$ est une droite.

-b) Démontre que la droite (F_3) est perpendiculaire à (Q).

10°) Démontre que les points A, B, O forment un plan (R) dont on donnera une équation cartésienne.

SUJET 4

Contexte Test

Achiri de poisson est un professeur au Lycée Paris Sud en France. Après des séries de travaux d'échange de connaissance avec ses apprenants, il décide de connaître le degré d'assimilation de ses apprenants en leurs proposant ce qui suit intitulé test.

Tâche : Tu es invité(e) à jouer le rôle de ses apprenants en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1

L'espace est muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$; $\vec{k}$).

1-a) Démontre que les points $A(1\ ;\ 2\ ;\ -3)\ ;\ B(-3\ ;\ 1\ ;\ 4)\ et\ C(2\ ;\ 6\ ;\ -1)$ déterminent un plan.

-b) Vérifie qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z + 3 = 0$.

2-a) Détermine un système d'équation paramétrique de la droite (D) passant par I (-5 ; 9 ; 4) et perpendiculaire à (ABC).

-b) Détermine les coordonnées de J, le projeté orthogonal de I sur le plan (ABC).

-c) Déduis en les distances du point I au plan (ABC).

3-a) Détermine les coordonnées du barycentre G des points pondérés $(A\ ,2)\ ;\ (B,-1)\ ;\ \ (C,1)$.

-b) Prouve que $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$.

-c.) Déduis en l'ensemble (Γ_3) des ponts M de l'espace tel que $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 2\sqrt{21}$

Problème 2

L'espace est muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$; $\vec{k}$). Soit (P_1) et (P_2) les plans d'équations cartésienne respective $-2x + y + z - 6 = 0\quad et\ \ x - 2y + 4z - 9 = 0$.

1°) Montre que (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires.

2°) Soit (Δ) la droite d'intersection de (P_1) et (P_2). Montre qu'une représentation paramétrique de (Δ) est :

$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -8 + 3t \quad ;\ \ t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

3°) Soit M un point de (Δ) de paramètre t et A de coordonnée A(-9 ; -4 ; -1).

-a) Vérifie que A n'appartient ni à (P_1) ni à (P_2).

-b) Exprimer AM^2 en fonction de t.

-c) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$par $f(t) = 2t^2 - 2t + 3$. Donne la fonction dérivée de f puis déduis le point M pour que la distance AM est minimale, on désigne ce point par I.

7-a) Soit (Q) le plan orthogonal à (Δ) passsant par A. Détermine une équation de (Q).

-b) Démontre que le point I est le projeté orthogonal de A sur (Δ).

Problème 3

Dans un cube ABCDEFGH d'arrête de longueur 1. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [GH]. Le point K est le centre de la face (BCGF). Les calculs seront effectués dans le repère orthonormal$\left(A;\ \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AE}\right)$.

8-a) Justifie que les points B, H, G, D, F, J et I ont pour coordonnées dans le repère $\left(A;\ \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AE}\right)$

$B(1\ ;\ 0\ ;\ 0).H(0\ ;\ 1\ ;\ 1)\ ;\ G(1\ ;\ 1\ ;\ 1)\ ;\ F(1\ ;\ 0\ ;\ 1)\ ;\ I\left(\frac{1}{2};0;0\right)$; J$\left(\frac{1}{2};1;1\right)$; $D(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$.

9-a) Démontrer que le quadrilatère DIFG est un parallélogramme.

-b) Etablis que DIFG est un losange et montre que l'aire de ce losange est égale à $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

SUJET 5

Contexte : Un jeu d'élève.

Sur le dispositif schématisé du document, une cible est placée en un point S, sommet d'une pyramide régulière à base carrée. ABCDEFGH est un cube d'arrête 1(unité de longueur 1cm).

L'espace est rapporté au système de points (A ; B ; D ; E).

Un jeu consiste à tirer une balla d'une machine et essayer d'atteindre la cible. On a supposer que les trajectoires de toute balles tirées sont des droites et dépendent de certains paramètres que le joueur fait entrer dans sa machine. Trois élèves en classe de Terminale D Emmanuel, Alice et Octave ont fait chacun un essai sans succès.

La trajectoire de la balle tirée par Emmanuel est la droite (D_1) de représentation paramétrique (S) (voir support). Celle de la balle tirée par Alice est la droite (D_2) de système d'équation cartésienne le système (S'). Enfin, Octave a tiré une balle dont la trajectoire est la droite (D_3) passant par K et L. (voir support).

Kokou, un autre élève en Terminale D, qui veut aussi faire un essai se demande comment s'y prendre pour atteindre S.

Tâche : Tu vas aider Kokou à atteindre la cible en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1

1-a) Montre que (A ; B ; D ; E) est un repère orthonormé de ($\mathscr{E}$).

-b) Dans le repère orthonormé direct $\left(A;\ \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AE}\right)$, détermine les coordonnées A ; B ; C ; D ; E ; F ; G ; H ; O.

2°) Donne un repère de chacune des droites (D_1) ; (D_2) et (D_3).

3-a) Démontre que (D_1) et (D_2) sont strictement parallèles.

-b) Détermine une équation cartésienne du plan (P_1) contenant (D_1) et (D_2).

4-a) Démontre que (D_1) et (D_3) sont sécantes en un point I dont on précisera ses coordonnées.

-b) Détermine une équation cartésienne du plan (Q) contenant ces droites.

-c) Déduis en une représentation paramétrique de (Q).

5°) Trouve une équation représentation paramétrique puis une équation cartésienne du plan ($\prod$) contenant (D_2)et perpendiculaire à (D_3).

6-a) Montre que $\forall\, M \in$ ($\mathscr{E}$) on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$ et $\overrightarrow{GM} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{GC}$

-b) En déduire que l'ensemble (Γ) des points M de ($\mathscr{E}$) tels que :

$\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right).\left(\overrightarrow{GM} - \overrightarrow{CM}\right) = 0$ est un plan que l'on caractérisera.

-c) Déterminer et caractérisé les ensembles suivants :

$(\Delta) = \left\{M \in (E) / \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right) \wedge \left(\overrightarrow{GM} - \overrightarrow{CM}\right) = \vec{0}\right\}$

$(D_2) = \left\{M \in (E) / \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = 4\left\|\overrightarrow{GM} - \overrightarrow{CM}\right\|\right\}$

Problème 2

Kokou découvre une information pouvant l'aider à atteindre la cible : les plans (SEF) et (SGH) sont perpendiculaires.

7-a) Ecris un vecteur normal à chacun des deux plans (SEF) et (SEG).

-b) On pose : $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OS}$ avec $\overrightarrow{OS} = \alpha\overrightarrow{OS}$; $\alpha > 1$.

Ecris en fonction de α les coordonnées du point S.

-c) Montrer que l'information conduit à la résolution d'une équation du second degré d'inconnue α. Prouver alors que $\alpha = \frac{3}{2}$ et déduis les coordonnées de S.

8°) Kokou décide alors de donner pour trajectoire à la balle, la droite (Δ) perpendiculaire au plan (FCH) et passant par le point N(1 ; 2).

-a) Ecris une représentation paramétrique de la droite (Δ).

-b) Prouver que la cible est atteinte.

Problème 3

9°) Ecris une équation cartésienne du plan (FCH).

10-a) Calculer l'aire du triangle FCH en cm^2.

-b) Montrer que FCHD est un tétraèdre et calculer en cm^2 son volume V.

-c) Déduis en la distance du point G au plan (FCH).

Support :

(S) : $\begin{cases} x = -2 + \alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = 4 - 2 \end{cases}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$; $(S'): 2x = y - 4 = \frac{z-2}{-1}$; $K(-4, 1, 1)$et $L(2, 5, 3)$.

- O est le centre du carré ABCD.
- O' est le centre du carré EFGH.

SUJET 6

Contexte : Le porc sec.

Dans le souci de désengorger le port Cotonou, le président de la république a pris l'initiative de faire construire un mouvement porc sec à Parakou. Dossou un ingénieur des travaux publics à gagné l'appel d'offre pour exécuter une partie de ces travaux. Il propose la maquette suivante qui est la salle administrative représentée par le cube ABCDEFBH d'arrêtes 3m ci- dessous. I milieu du segment [GH] et J le centre du carré BCGF.

Dans l'espace orienté ($\mathscr{E}$), on considère le repère orthonormé direct $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$. Dans l'étude des aspects mathématiques de ces travaux, Dossou rencontre d'énormes difficultés.

Tâche : Tu vas aider Dossou à travers la résolution des problèmes suivant.

Problème 1

1°) Détermine les coordonnées des points E, I, J dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

-a) Donne une équation cartésienne du plan (EIJ).

-b) Justifie que AEIJ est un tétraèdre et calcule son volume.

3°) Détermine une équation cartésienne du plan médiateur du segment [IJ].

4°) Soit (Γ) l'ensemble des points M' de l'espace tels que

$(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG}) \wedge (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH}) = 0.$

-a) Démontre que $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MG}=4\overrightarrow{MJ}$et $\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MH}=2\overrightarrow{MI}$.

-b) Déduis en que (Γ) est une droite (D) dont donnera un repère.

5°) Soit (Δ) la droite dont un système d'équation cartésienne est $x-\frac{1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-1}$.

-a) Les droites (D) et (Δ) sont elles coplanaires ?

-b) Calcule la distance du point A à la droite (Δ).

6°) Détermine l'ensemble (Q) des points M de l'espace tels que

$\|4\overrightarrow{MG}-4\overrightarrow{HM}\|-\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MG}\|=0$.

Problème 2

Soit K un point de l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(A;\ \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AE})$. On pose K = bar {(A, -2) ; (B, -1) ; (G ; -1)}.

1°) On désigne par M un point quelconque de l'espace.

-a) Montre que le vecteur $\vec{V}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ est indépendant de M et de norme $3\sqrt{5}$.

-b) Détermine l'ensemble (γ) des points M de l'espace tels que $\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=\|\vec{V}\|$.

2°) On considère le système de point pondéré {(A, -2) ; (B, -m), (G, -m) où m est un entier naturel fixé.

-a) Montre que le barycentre Gm de ce système de points pondérés existe.

-b) Montre que Gm appartient au segment [AJ].

9°) Soit la droite (D_1) de système d'équation cartésienne $\begin{cases} x=2 \\ \frac{y-1}{-2}=\frac{-z+1}{3} \end{cases}$ et (D_2) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=1 \\ y=4\beta+2 \\ z=6\beta+1 \end{cases}$ $(\beta\ \in\mathbb{R})$.

-a) Montre que (D_1) et (D_2) sont strictement parallèles.

-b) Détermine une équation cartésienne du plan (R) les contenant.

Problème 3

Dossou dans ses recherches considère un autre repère orthonormé direct (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$; $\vec{k}$) et les points A(-1 ; -1 ; 6) ; B(1 ; -2 ; 1) ; C(3 ; 2 ; -11) dans ce repère. On pose G = bar {(A, 3) ; (B, 1) ; (C, 1)}.

10°) Détermine les coordonnées du point G.

11°) Démontre que pour tout point M de l'espace : $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=5\overrightarrow{MG}$.

12°) Soit (P) l'ensemble des points M de l'espace tel que$(3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})=0$.

-a) Démontre que (P) est un plan dont on donnera les éléments caractéristiques (un point et un vecteur normal à (P).

-b) Démontre qu'une équation cartésienne de (P) est $2x-y-5z+7=0$.

13°) Donne une représentation paramétrique de (Δ) orthogonal à (P) et passant par K(-1 ; 1 ; 2).

14°) Soit K' le projeté orthogonal de K sur (P).

-a) Détermine les coordonnées de K'.

-b) Calcule la distance du point K au plan (P).

15°) On donne H = bar {(B, 1) ; (C, 1)}, $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\quad et\ \ \overrightarrow{CA}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{MC}$.

-a) Exprime L comme barycentre des points A et B.

-b) Exprime M comme barycentre des points A et C.

-c) Déduis en que les droites (AH), (CL) et (BM) sont concourantes.

SUJET 7

Contexte : Les gâteaux de la journée culturelle.

Dans le cadre de ces activités culturelles, la section ‘’cuisine’’ a confectionné des gâteaux qu’elle se propose de mettre à la vente. Pour des raisons d’hygiène, ces gâteaux sont exposés dans une boîte en plexiglas représentée par le cube ABCDEFGH d’arrête 1m ci-dessous représenté.
I est le centre de la face BCGF.
J le milieu du segment [BC].
Les gâteaux couverts de chocolats sont rangés dans le solide de base HFC obtenu en reliant le point A à chacun des sommets de HFC.
Par ailleurs, un plan (P) sert de séparation dans la salle de vente. Ariane, élève en classe de Terminale D, membre de cette section est très émerveillé par cette prouesse. Elle y reconnaît certaines configurations étudiées.
Tâche : Tu vas résoudre les trois problèmes ci-après pour te rendre compte des concepts mathématiques qui se cachent derrière.

Problème 1

On pose $\vec{\imath} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{\jmath} = \overrightarrow{AD}et\vec{k} = \overrightarrow{AE}$.

1-a) Montre que (A ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$; $\vec{k}$) est un repère orthonormé direct.

-b) Montre que le vecteur $\overrightarrow{FH} \wedge \overrightarrow{FC}$ a pour coordonnée (-1 ; -1 ; -1).

-c) Calcule la distance du point A au plan (HFC).

2-a) Montre que le solide AHFC est un tétraèdre de base HFC.

-b) Calcule le volume de ce solide.

-c) Montre que les droites (AH) et (FC) sont orthogonales.

Problème 2

On considère le point G barycentre des points pondérés (A, 2) ; (B, 1) et (C, 1).

1°) On désigne par M un point de l’espace.

-a) Montre que le vecteur $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est indépendant de M et de norme égale à $\sqrt{5}$.

-b) Détermine l’ensemble (Γ) des points M de l’espace tel que$\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 5\left\|\vec{V}\right\|^2$.

4°)On considère le système de point pondérés (A, 2) ; (B, m) et (C, m) , m étant un nombre entier naturel.

-a) Montre que le barycentre Gm de ce système de points pondérés existe.

-b)Montre que $\overrightarrow{AG_m} = \frac{m}{1+m}\overrightarrow{AJ}$ et déduis en que le point Gm appartient au segment [AJ].

5°) On désigne par (Γm) l’ensemble des points M de l’espace tels que$\left\|2\overrightarrow{MA} + m\,\overrightarrow{MB} + m\,\overrightarrow{MC}\right\| = m\left\|\vec{V}\right\|$.
Montre que A appartient à(Γm).

Problème 3

6-a) Soit L(-1 ; 2 ; 1) ; N(1 ; -6 ; -1) et S(2 ; 2 ; 2) trois points du plan (P). Donne une équation cartésienne de (P).

-b) Détermine une représentation paramétrique de la droite (Δ) perpendiculaire au plan (P) et passant par le point T(2 ; 3 ; -5) puis détermine les coordonnées du point K intersection de la droite (Δ) et du plan (P).

7°) Soit (D_1) la droite de système d'équation cartésienne $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = -z$ et (D_2) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

-a) Montre que (D_1) et (D_2) sont strictement parallèles.

-b) Détermine un équation cartésienne du plan (Q) les contenant.

8°) Calcule les distances du point K aux droites (D_1) et (D_2).

SUJET 8

Texte : Fête de fin d'année

Pour les manifestations de la fête de fin de l'année 2012, ANANI a décidé ses invités dans son jardin. Consulté pour aménager le jardin, le technicien Dossou a prévu :

- L'installation, au centre du jardin, des guirlandes suivant une ligne (C) situé dans le plan (EFG) tel que E(1 ; 2 ; 1) ; F(3 ; -1 ; 1) et G(-1 ; 0 ; 2) dans un repère orthonormé direct (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) de l'espace ;
- La création d'une cuisine occasionnelle cachée par trois contre plaqués situés dans les plans ; (P_1) ; (P_2) et (P_3) tels que dans (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) (P_1) :$2x + y + z - 5 = 0$;

(P_2) :$x + 2y - z - 2 = 0$; (P_3) contient la droite (D) de système paramétrique

$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 + 2\alpha \\ z = 1 - \alpha \end{cases}$ $\alpha \in \mathbb{R}$et (P_3) perpendiculaire à (P_1).

Ali se pose des questions sur la pertinence de son plan d'aménagement.

Tâche : Tu vas aider Ali dans ses préoccupations en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1

1-a) Justifie que (EFG) est bien un plan puis détermine une équation cartésienne de ce plan.

-b) Ecris une équation cartésienne du plan (P_3).

-c) Vérifier que (EFG) et (P_2) sont sécants.

-d) Démontrer que (P_2) et (P_3) sont perpendiculaires.

3-a) Démontrer que l'intersection des trois plans (EFG) ; (P_2) et (P_3) est réduite à un point N do nt on précisera les coordonnées.

-b) Le point N appartient-il à (D) ?

Problème 2

Dossou a trouvé que la ligne des guirlandes (C) est constituée par les points M de l'espace tel que$\left(2\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG}\right).\left(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} + 2\overrightarrow{MG}\right) = 0$.

4.) Détermine les coordonnées du barycentre H des points pondérés (E, 2) ; (F, 1) et (G, 1) puis celle du barycentre K des points (E, 1) ; (F, 1) et (G, 2).

a) Démontre que $2\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} = 4\overrightarrow{MH}$ et que $\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} + 2\overrightarrow{MG} = 4\overrightarrow{MK}$.

b) Démontre que (C) est un sphère dont on précisera les coordonnées du centre et puis son rayon.

c) H est un point de l'espace définie par $\overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + 2\overrightarrow{EG}$.

Démontre que H est le barycentre des points E, F et G affectés des coefficients que l'on précisera.

Problème 3

Pour la construction d'un autre bâtiment Dossou considère les points A(2 ; 1 ; 3); B(-3 ; -1 ; 7) et C(3 ; 2 ; 1) et la droite (Δ) d'équation paramétrique $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

6-a) Démontre que les points A, B et C ne sont pas alignés.

-b) Détermine une équation cartésienne du plan (ABC).

7-a) Précise un repère (K, $\vec{u}$) de (Δ).

-b) Détermine les coordonnées du point S de (Δ) d'abscisse -1.

-c) Détermine les coordonnées du point I de (Δ) dont l'abscisse est égale à l'ordonnée.

-d) Ecris un système d'équation cartésienne de (Δ).

-e) Soit la droite (Δ') définie par : $-x = \frac{2y-2}{3} = -2z + 4$.

i) Précise un repère de (Δ').

ii) Prouve que (Δ') et (Δ) sont strictement parallèles.

8-a) Démontre que (Δ) est orthogonal au plan (ABC).

On note H le point d'intersection de (Δ) et de (ABC). Détermine les coordonnées de H.

-b) Calcule la distance du point C à la droite (Δ) et au plan (P).

-c) Calcule l'aire du triangle ABC.

9°) On considère les plans (P) et (Q) d'équation respectives (P) : $3x - y + z + 2 = 0$;
(Q) : $-2x - 4y + 2z + 1 = 0$.

-a) Ecris un système d'équations paramétriques de (P).

-b) Démontre que (P) et (Q) sont perpendiculaires.

-c) On désigne par (D') la droite d'intersection de (P) et (Q). Détermine une équation cartésienne de (D').

-d) Détermine une équation cartésienne du plan (R), orthogonal à (P) et à (Q) et passant par B.

-e) Détermine une équation cartésienne de (R) ∩ (P) ∩(Q).

SUJET 9

Contexte : Construction de boutique

L'entreprise de l'ingénieur John a gagné un marché après avis d'appel d'offres pour construire des boutiques témoins de l'ONASA dans des villages. Les boutiques sans toiture ont la forme d'un cube ABCDEFGH.

Jolidon, un élève en classe de Terminale D, résidant dans l'un de ces villages, cherche à connaître les principes à de telle construction

Jolidon, est aussi sollicité par l'ingénieur John pour l'aider à déterminer entre autres les ensembles (E_1) et (E_2) des points M de l'espace vérifiant respectivement :

$(2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MH}) \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$et $(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MH}).(-2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MH}) = 0$. Sachant que K est le barycentre des points pondérés (A, 2) ; (C, 2) et (H, 1).

Tâche : A l'instar de Jolidon, tu es invité(e) à aider pour la résolution des trois problèmes suivants.

Problème 1

1°) Détermine les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H dans le repère $(A, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

2°) I désigne le milieu du segment [GH] et J le centre du carré BCGF. Détermine les coordonnées des points I, J et K dans le même repère.

3-a) Justifie que les points A, E, I, J sont les sommets d'un tétraèdre.

-b) Calcule le volume du tétraèdre AEIJ.

4-a) Détermine l'ensemble (E_1) puis donne une représentation paramétrique de (E_1).
-b) Détermine l'ensemble (E_2) puis donne une équation cartésienne de (E_2).
-c) Détermine l'intersection de (E_1) et (E_2).

Problème 2

Une étude est initiée pour choisir le site du village de TODAN. Il s'agit du site pour abriter la boutique de l'ONASA. La majorité des populations du village est située sur une droite identifiée (D) et la position du site M_0 doit être à une distance raisonnable de (D). Ainsi, John muni l'espace d'un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$; $\vec{k}$) puis considère les droites

(D) : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et (D') : $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{4}$

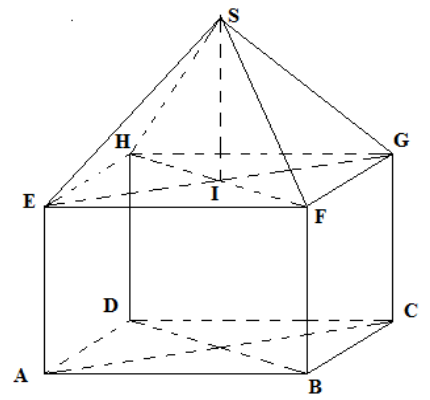
5.) Démontre que les droites (D) et (D') sont strictement parallèles.
6.) Détermine une équation cartésienne du plan (P) contenant les droites (D) et (D').
7.a) Détermine une équation cartésienne du plan (Q) passant par le point S(1 ; 2 ; -1) et orthogonal à (D) puis déduis en une représentation paramétrique du plan (Q).
b) Donne un repère de la droite (D) puis déduis en la distance de M_0(0 ; 1 ; -1) à (D).

Problème 3

Dans l'espace orienter muni d'un repère (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$; $\vec{k}$), on considère le point A(1 ; 1 ; 1) et les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x + y + z - 1 = 0$ et $x + y - 2z - 4 = 0$.
1.a) Démontre que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.
b) Donner un repère de leur droite d'intersection (Δ).
2-a) Le point A appartient – il à (Δ) ?
-b) Calculer la distance du point A à la droite (Δ).
3.) Soit (D) la droite passant par A et perpendiculaire au plan (P).
-a) Détermine une représentation paramétrique de (D).
-b) En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur (P).
4°) Soit (R) le plan passant par A et perpendiculaires aux plans (P) et (Q).
-a) Détermine une équation cartésienne du plan (R).
-b) Détermine (P) ∩ (Q) ∩ (R).
-c) Démontre que l'ensemble des points M de l'espace tels que $d(M, (R)) = \sqrt{2}$ est la réunion de deux plans (R_1) et (R_2) que l'on précisera.

SUJET 10

Texte :
Taka, originaire de Bounkombé, après sa formation en architecture, a décidé de moderniser la construction des ''Tatas''(maison) dans sa région fabrique une maquette dont la représentation est faite ci – dessous.
Cette maquette est un cube ABCDEFGH surmonté d'une pyramide régulière SEFGH telle que SI = AB.
Mica, élève en classe de Terminale D est allé voir TAKA et lui demande des informations relatives à la réalisation de la maquette. Celui-ci lui précise que dans un repère orthonormé direct de l'espace on a B(2 ; 0 ; 1) ; C(2 ; 1 ; 1) ; D(1 ; 1 ; 1) ; E(1 ; 0 ; 2) ; F(2 ; 0 ; 2).
Mica se demande comment trouver les coordonnées des autres points dans ce repère et décide de connaître les positions relatives de certains plans et droites.



Tâche : Tu vas aider Mica dans ses préoccupations en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1

1°) Vérifie que A(1 ; 0 ; 1) ; G(2 ; 1 ; 2) et H(1 ; 1 ; 3).

2°) Déduis en les coordonnées des points I, S et K = bar {(G, -2) ; (C, 1) ;(D, 3)}.

3-a) Démontre que les points C, H et A ne sont pas alignés.

-b) Déduis en une représentation paramétrique de (ACH) puis un vecteur normal à ce plan.

4°) Détermine une représentation paramétrique de la droite (IB).

5°) Déduis en l'intersection du plan (ACH) et de la droite (IB).

Problème 2

On considère le plan (Q) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 - t - f \\ y = t \\ z = 2 + f \end{cases}$ $\quad (t, f\ ) \in \mathbb{R}$

1°) Démontre que (Q) = (BED).

2°) Prouver que la droite (IC) est strictement parallèle au plan (Q).

3°) Détermine une équation cartésienne du plan (BEC).

4°) Démontrer que (SCD) et (Q) sont sécant et détermine un repère de (SCD) ∩ (Q).

5°) Prouver que les droites (EC) et (FD) sont sécantes et détermine leur intersection.

Problème 3

Mica veut connaître le volume du solide BCDE et une mesure en degré de l'angle CEB.

1°) Démontre que BCDE est un tétraèdre.

2°) Détermine la hauteur relative au sommet D dans ce tétraèdre.

3°) Détermine l'aire du triangle BCE. Déduis en le volume de BCDE.

4°) On considère dans $\mathbb{R}^4$ le système de quatre équations linéaires à quatre inconnues x, y, z et t. (S) :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ -x + y - z + t = -4 \\ -8x + 4y + 2z + t = -7 \\ 3x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

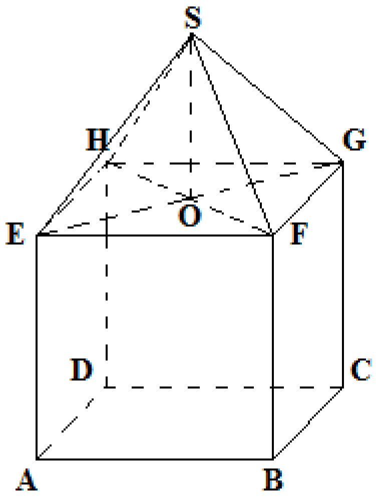
-a) Résous le système (S) par la méthode de Pivot de GAUSS.

-b) Détermine les coefficients réels a, b, c et d de la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sachant que la courbe représentative de F tracée dans un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) passe par les points A(1 ; 2) ; B(-1 ; -4) ; D(-2 ; -7) et admet en son point d'abscisse -1un coefficient directeur égal à 1.

SUJET 11

Contexte : Une salle de spectacle

Dans l'objectif de créer un cadre de divertissement et de loisir pour les jeunes, AVATAR, un opérateur économique en partenariat avec la Mairie de Calavi, projette la construction d'une salle de spectacle à Cococodji. Pour se différencier des autres promoteurs immobiliers, son Architecte lui propose le plan suivant avec les informations ci-après :



ABCDEFGH est un cube chapeauté par une pyramide régulière SEFGH dont la base EFGH a pour centre O et $4SO = AB$

Un voyant sera placé en S. Une poubelle en un point R tel que

$2\overrightarrow{AR} + 3\overrightarrow{BR} - 7\overrightarrow{CR} = \vec{0}$

I le barycentre des points pondérés (A,2) et (B,3).
J le barycentre des points pondérés (A,2) et (B, -3).
Les points R, I et J ne sont pas alignés.

Une caméra de surveillance, sera placée en un point K élément de l'ensemble $(\Gamma_1) = \left\{M \in \mathcal{E} \,/\, \frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}\right\}$. Pour compartimenter le bâtiment une séparation, ayant pour support l'ensemble (Γ_2) des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\left(2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right).\left[\left(2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC}\right) \wedge \left(2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right)\right] = 0$ et une poutre assimilable à l'ensemble $(\Delta_2) = \left(2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right) \wedge \left(2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right)$, sont prévues.

Obrienne, la technicienne en charge des travaux, à la vue du plan et des informations qui l'accompagnent, se propose de faire quelques vérifications puis des retouches dans la mesure du possible. Il sollicite alors l'aide de son jeune frère Walter, élève en classe de Terminale D.

Tâche : Tu es invité à aider Obrienne et Walter, dans leur travail, en résolvant chacun des trois problèmes suivants

Problème1

1-a) Justifie l'existence et l'unicité du point R. Que représente-t-il ?
-b) Justifie que les points A, B, C et R sont coplanaires.
2°) Détermine l'ensemble des points M de l'espace tel que :
- a) $\left\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC}\right\| = 4$
-b) $\left\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right\|$
-c) $\left\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC}\right\| \leq 6$
3-a) Démontre que $\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HF} = 2\overrightarrow{EF}$
-b) Démontre que pour tout point Mde $\mathcal{E}$, on a : $\overrightarrow{ME} \wedge \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MF} \wedge \overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{EF}$
-c) Déduis-en l'ensemble (Δ_1) des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{ME} \wedge \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MF} \wedge \overrightarrow{MH}$
4-a) Détermine l'ensemble (Γ_2)
-b) Détermine l'ensemble (Δ_2)
5-a) Démontre que pour tout point Mde $\mathcal{E}$, $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right).\left(2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right) = 0$

-b) Détermine (Γ_1)

-c) Propose deux exemples possibles du point K

Problème2

En réalité l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(\boldsymbol{O};\ \vec{\boldsymbol{u}};\vec{\boldsymbol{v}};\ \vec{\boldsymbol{w}})$et pour décorrer la salle, Obrienne utilise les rubans assimilés à des droites (D_1) de système d'équations cartésiennes $\frac{x-1}{2}=\frac{-y+2}{2}=\frac{z-3}{4}$; (D_2) de représentation paramétrique $\begin{cases} x=-1+\alpha \\ x=-\alpha \\ z=1+2\alpha \end{cases}$ $(\ \alpha\in\mathbb{R})$ et (D_3) de système d'équations cartésiennes $\begin{cases} x=1 \\ 3x-z-8=0 \end{cases}$

6-a)Donne un repère de la droite (D_3) et une représentation paramétrique de la droite (D_1)

-b) Démontre que les droites $(D_1)\ et\ (D_2)$ sont strictement parallèles

-c) Démontre que les droites $(D_1)\ et\ (D_2)$ définissent un plan (P_1) dont tu détermineras une équation cartésienne.

7-a) Justifie que les droites $(D_1)\ et\ (D_3)$ ne sont pas coplanaires

-b) Détermine une représentation paramétrique du plan (P_2) parallèles à (D_1) et contenant (D_3)

-c) Déduis-en une équation cartésienne du plan (P_2).

8-a) Justifie que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants

-b) Donne alors une représentation paramétrique de la droite d'intersection (D_4) de (P_1) et (P_2)

Problème 3

Partie A

Pour sécuriser l'entrée dans la salle de spectacle, Obrienne prévoit une serrure de sécurité portant un code qui est un numéro à quatre chiffres. Walter cherche le numéro décrit par sa sœur dans le langage suivant :

- ✓ La somme de ses chiffres est 15 ;
- ✓ En permutant à la fois de ses chiffres des unités et celui des centaines, Le chiffre des dizaines et celui des milliers, le numéro diminue de 2772 ;
- ✓ En permutant le chiffre des unités et celui des centaines, le numéro augmente de 198 ;
- ✓ En permutant le chiffre des unités et celui des dizaines, le numéro diminue de 9.

9-a) Traduis ces informations en un système de quatre équations à quatre inconnues x, y, z et t respectivement chiffre des milliers, centaines, dizaines, et des unités du numéro de l'objet d'art.

-b) Détermine ce numéro.

10°) Pour des raisons de sécurité, deux caméras de surveillance ,observent les spectateurs, avec les trajectoires décrivant l'ensemble (E_m) des points M (x ; y ; z) de l'espace vérifiant le système suivant(S_m): $\begin{cases} x+\ 2y+4z=-1 \\ x-my+m^2z+=m+1 \text{ avec } m \text{ un paramètre réel} \\ 2x+my+2mz=2 \end{cases}$

-a) Résous dans $\mathbb{R}^3$ suivant les valeurs de m le système (S_m)

-b) déduis en suivant les valeurs de m la nature de (E_m).

Partie B

Après plusieurs modifications du plan initial, le tétraèdre $ABDE$ est tel que ABD, ABE et ADE forment trois triangles rectangles isocèles en A et $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$. Une poutre, ayant pour support la droite (Δ_2), sera érigée pour la solidité du bâtiment et La partie latérale du toit sera badigeonnée. L'unité de longueur est 10mètres.

11-a) Démontre AB=AE=AD=1 (en utilisant les informations du problème 2

-b) Démontre le quadruplet $\mathcal{R} = \left(\text{A}; \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ un repère orthonormé direct de l'espace

12) Détermine dans $\mathcal{R}$ les coordonnées des points F, H, O, G, S, I et J(en utilisant le solide ABCDEFGHS)

13-a) Démontre qu'une équation cartésienne du plan $(SFH) = (\mathcal{P})$ est $y + z - 1 = 0$

-b) Calcule l'aire de la face SFG

-c) Déduis-en l'aire de la partie du toit à badigeonner

-d) Vérifie que $E \notin (\mathcal{P})$ en déduis le volume du tétraèdre SFHE

14°) Calcule la distance du point B à l'ensemble (Δ_1) et en déduis que $B \notin (\Delta_1)$

SUJET 12

Contexte : Tabaski 2012 à DOUNYA

La nuit de la fête de tabaski a été spécialement organisé par le maire de la commune de DOUNYA . Il a apprêté à cet effet le jardin de la mairie. Ousman, élève en classe de Terminale C et ami du décorateur du jardin est l'un des invités à cette fête. Sur les lieux, Ousman découvre une pierre bien polie des courbes E_1, E_2, E_3 et des images fictives provenant d'autres images. Emu par tout ce qu'il a vu, il s'est rapproché le lendemain de son ami le décorateur. Il constate que :

- ✓ Les sommets A, B, C et D de la pierre polie sont les sommets du tétraèdre ABCD tels que les triangles ABC, ABD et ACD sont rectangles et isocèles en A.
- ✓ La face BCD se repose sur le sol et H est le projeté orthogonal de A sur BCD.
- ✓ Les courbes E_1, E_2 et E_3 sont dans le plan (BCD), l'ensemble des points M vérifiant respectivement :

$$\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right).\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\right) = 0$$

$\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\right\|$ et $MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2a^2$où $a = BC$.

Sidéré par ces informations, Ousman se propose d'en savoir d'avantage.

Tâche : Tu aideras Ousman en résolvant chacun des trois problèmes suivants.

Problème 1

1°) Justifie que BCD est un triangle rectangle.

2°) Démontre que :

-a) La droite (AH) est contenue dans le plan dans le plan médiateur des segments [CD] et [BC].

-b) Déduis – enque H est l'isobarycentre des points B, C et D.

3-a) Détermine puis construire dans le plan (BCD) les ensembles E_1 et E_2 .

-b) Justifie que $HB^2 = \frac{a^2}{3}$.

-c) Détermine puis construis le plan (BCD) l'ensemble E_3 .

Problème 2

En réalité les points A, B, C et D sont tels que $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$.

4-a) Démontre que AB = AC = AD = 1uL

-b) Justifie que R = (A, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$) est un repère orthonormé direct de l'espace ($\mathscr{E}$) .

5-a) Détermine dans R une équation cartésienne du plan (BCD).

-b) Détermine dans R les coordonnées du point H.

6-a) Ecris dans R une équation cartésienne du plan passant par $I(2\ ;\ 0\ ;1)$ et perpendiculaire à la droite à la droite (BH).

-b) Détermine dans R les coordonnées du point T intersection de (BH) et (P).

Problème 3

Dans le jardin cette nuit là se trouvait des images des images projetées par des appareils spécialisés. Parmi tant d'autres images, deux ont impressionnéOusman.

Celle obtenue du tétraèdre ABCD par l'application f dont l'expression analytique est donné dans le repère R par : $f: \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z + 10) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + 2y - z - 5) \\ z' = -\frac{1}{3}(-2x + y - 2z + 5) \end{cases}$ et l'autre obtenue du tétraèdre ABCD par le demi-tour d'axe la droite (Δ) parallèle à (AH) et passant par $T(0\ ;\ 2\ ;\ -1)$.

7-a) Détermine dans R une équation cartésienne de l'ensemble (P) des points de l'espace ($\mathscr{E}$) invariant par f

-b) Démontre que pour deux points $M(\,x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ tel que : $M' = f\ (M)$ et M n'appartient pas à (P) on a :

- (MM') perpendiculaire à (P)
- Le milieu [MM'] est un point de (P).

-c) Donne la nature de f.

8°) Détermine la nature de l'image du solide ABCD obtenue par f .

9°) Justifie que (BCD) et (P) sont perpendiculaires suivant une droite (Δ') et détermine la nature de l'application g = $f o S_{(BCD)}$

10°) Détermine une expression analytique de $S_{(\Delta)}$.

11°) Détermine une équation cartésienne de l'image (Δ) de la droite (BC) par $S_{(\Delta)}$.

SUJET13

Contexte

Les travaux de réfection du bloc administratif CEG ZOUDJI ont duré deux mois. Impressionné par la rapidité, Azoto, un élève en terminale C décide de comprendre les méthodes qui ont été mises en jeu. Il reconnaît que les étapes d'évolution des travaux ont été modelées par les applications$f$ et g. Certaines applications sont définies dans le plan et d'autres dans l'espace. Pour cela, Azoto rapporte respectivement le plan ($\mathscr{P}$) et l'espace $\mathscr{E}$ aux repères orthonormés $(o\ ,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $(o\ ,\vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k})$.

f est définie de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ par f(M) = M' où$M(x, y)$ et $M'(x', y')$ avec $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 1 \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2 - \sqrt{3} \end{cases}$

g est définie de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ par g(M) = M' où$M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ avec $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-2x - 2y + z + 2) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + y - 2z + 3) \\ z' = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z + 4) \end{cases}$

Azoto décide de prendre connaissance de ses applications et de les utiliser.

Tâche : Tu es invité à agir à la place de Azoto en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1

1°) Démontre que f est une bijection du plan dans lui – même .
2-a) Démontre que f est une isométrie.
-b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f.
3°) On considère les plans (Q) et (R) d'équations respectives $x - y + z = 3$ et $2x - y - 3z = -4$ et on désigne par h la réflexion de plan (Q). Soit B$(0; 4; 0)$ et les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ définis par :
$\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath})$ et $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{70}}(6\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 5\vec{k})$.
-a) Démontre que $(B, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est un repère du plan (R).
-b) Détermine l'expression analytique de la restriction h' de h à (R) relativement au repère $(B, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$
3-a) Montre que g est une involution.
-b) Montre que g est une isométrie.
-c) Détermine l'ensemble des points invariants par g.
-d) Déduis – en que g est un demi – tour d'axe (D) à préciser.

Problème 2

Dans le repère orthonormé direct $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points $A(1; -2; -1), B(3; -4; -5)$ $etC(0; -1; 2)$. L'unité de longueur est le centimètre.
1°) Ecris une équation cartésienne du plan (P') tel que A et B soit l'image de B par la réflexion de plan (P').
2°) Par le point C, on mène la droite (D') orthogonale au plan (P') en point H.
-a) Ecris un système d'équation cartésienne de la droite (D').
-b) Déduis – en les coordonnées de H.
-c) Calcule de deux manières différentes la distance du point C au plan (P').
-d) Calcule l'aire du triangle ABC.
-e) Justifie que h n'appartient pas au plan (ABC) puis conclus.
3°) Soit D$\left(-1; \frac{5}{2}; -3\right)$
-a) Vérifie que D n'appartient pas à la droite (D').
-b) Détermine une équation cartésienne du plan (R') contenant les droites (D) et (D').
-c) Détermine une représentation de (Δ) = (P')∩(R').
4°) On donne les points $E(1; -2; -4), F(2; -5; 5)$ et les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{\imath} + (m + 3)\vec{\jmath} + (9 - m)\vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{\imath} + (m + 1)\vec{\jmath} + 4m\vec{k}$ où m est un paramètre réel.
-a) Détermine les valeurs de m pour lesquelles : $(\Delta_1) = (E, \vec{u})$ et $(\Delta_2) = (F, \vec{v})$ soient :

- ✓ parallèles
- ✓ sécantes

-b) Soit G le barycentre des points pondérés (E, 2) et (F, -3).

- ✓ Détermine les coordonnées de G.
- ✓ Détermine l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que : $2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ME}+3\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{MC}=0$

Problème 3

Dans cette partie on considère les ensembles ($\mathscr{C}_1$) et ($\mathscr{C}_2$) définis par :

$\mathscr{C}_1$: $MA^2+MB^2=\frac{10}{3}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

$\mathscr{C}_2$: $MA^2+MB^2=\frac{10}{3}MA.MB$

1°) Détermine de deux manières différentes l'ensemble $\mathscr{C}_1$

2°) Détermine de deux manières différentes l'ensemble $\mathscr{C}_2$

3°) Détermine l'intersection $\mathscr{L}$ de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

SUJET 14

Contexte: Préparation d'une évaluation sommative

Adiro est un nouvel élève en terminale C. Il vient de finir la première situation d'apprentissage au programme de mathématiques de la classe et prépare activement sa première évaluation sommative des enseignements reçus.

Tâche : Comme Adiro, tu es invité à résoudre les trois problèmes suivants :

Problème 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(o\,,\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\,,\ \vec{k})$, on considère les points $A(-2;0;1), B(1;1;-1)$ et $C(3;2;-2)$. On donne $\|\vec{\imath}\|=2cm$ où désigne centimètre.

1°) A est l'image de B par la réflexion de plan (P) où (P) est un plan de l'espace et on note S cette réflexion.

-a) Ecris une équation cartésienne du plan (P).

-b) Détermine l'expression analytique de S.

2°) On note (Q) le plan (ABC).

-a) Ecris une équation cartésienne de (Q).

-b) Détermine en centimètre carré l'aire de la surface du domaine délimité par le triangle ABC.

-c) Démontre que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.

-d) Détermine une représentation paramétrique de la droite d'intersection des plans (P) et (Q).

3°) Soit (R) le plan d'équation $x+5y+4z=0$. On appelle S' et S'' les réflexions de plans (Q) et(R) respectivement.

-a) Donne la précise de S'oS.

-b) Donne la nature et les éléments caractéristiques de S''oS'oS.

Problème 2

l'espace $\mathscr{E}$ repère orthonormé direct$(o\,,\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\,,\ \vec{k})$.

On considère le plan (π) déquation $2x + y - z = 3$ et (Δ) la droite orthogonale à (π) et passant par l'origine O du repère orthonormé direct $\left(o\,,\vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\,,\ \vec{k}\right)$.

4°) Détermine l'expression analytique de chacune des transformations suivantes :

-a) la réflesions de plan (π)

-b) Le demi – tour d d'axe (Δ)

-c) La composée $\underline{s}od$

5°) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la transformation$\underline{s}od$.

Problème 3

Dans l'espace orienté $\mathscr{E}$, on considère un carré ABCD de centre O tel que OA = 1.

6°) Démontre que O est le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(N, -2)$, $(C, 1)$ et $(D, -2)$

7°) Détermine l'ensemble (Γ) des points M de $\mathscr{E}$ tels que $MA^2 - 2MB^2 + MC^2 - 2MD^2 = -4$

8°) On désigne par S le point de $\mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OS}$, par d_1 et d_2 les demi – tours d'axes respectifs (OA) et (OB).

-a) Précise la nature de d_1od_2

-b) Détermine l'image de (Γ) par d_1od_2.

-c) Justifie que $\left(A, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OA}\right)$ est un repère orthonormé direct de $\mathscr{E}$

9°) Soit l'application t de $\mathscr{E}$dans $\mathscr{E}$qui à tout point M associe le point M' tel que :

$\overrightarrow{BM'} = \overrightarrow{BM} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) \wedge \overrightarrow{BC}$.

-a) Démontre que pour tout point M de l'espace, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est constant et colinéaire à $\overrightarrow{OS}$.

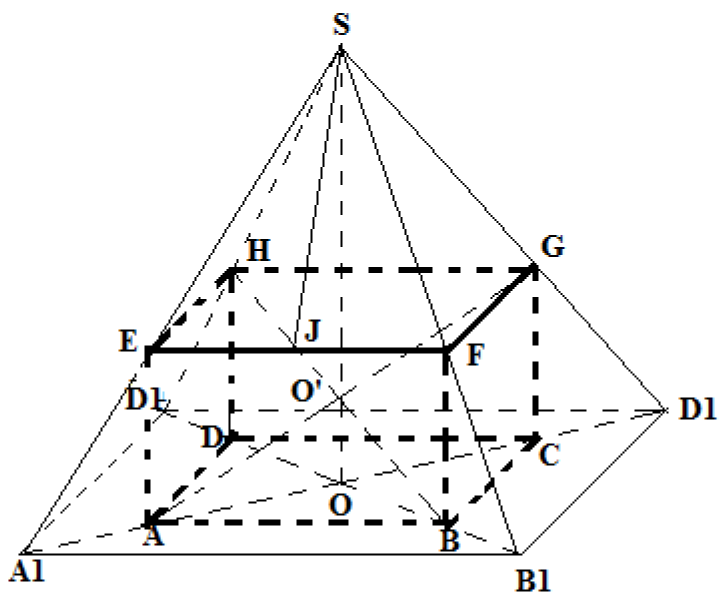
-b) Déduis – en que t est une translation et précise son vecteur $\vec{u}$.

-c) Sachant que l'image d'un plan (P) par une translation est un plan (P') parallèle à (P), détermine dans le repère t $\left(A, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OA}\right)$, une équation cartésienne de l'image par t du plan (OAB).

SUJET 15

<u>Contexte</u> : Le plan d'une maison

La figure ci – dessous est le plan d'une maison réalisé par un architecte. $SA_1B_1C_1D_1$ est une pyramide régulière de hauteur $2a$ et dont le côté de la base est $2a$; ABCDEFGH est un cube d'arête $a$tels que les carrés ABCD et $A_1B_1C_1D_1$ ont les supports de leurs côtés deux à deux parallèles. I et J sont les milieux respectifs des segments [AF] et [EF] , O est le centre du carré ABCD et O' le centre du cube.



L'architecte a prévu deux systèmes de sécurité dans cette maison.

- ✓ Le premier est un détecteur d'incendie qui surveille des zones à risques situées en des points M de l'espace tels que : $\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{AO}$ où $\vec{u}(1;-2;2)$ dans l'espace orienté muni du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
- ✓ Le second est constitué des cameras de surveillance qui sont placées en des points M de l'espace définis par les ensembles $\mathscr{E}_1$et $\mathscr{E}_2$tels que :

$\mathscr{E}_1$: $MA^2 + MF^2 - MG^2 - MD^2 = -2a^2$ et

$\mathscr{E}_2$: $MA^2 + MF^2 + MG^2 + MD^2 = 6a^2$

Steve est le fils de l'architecte en terminale C. Il souhaite utiliser ses connaissances pour comprendre les concepts mathématiques qui sont liées à ce plan.

Tâche : Tu es invité (e) à agir à la place de Steve en résolvant rigoureusement les trois problèmes suivants :

Problème 1

1°) Démontre qu'il existe une homothétie h (dont tu précisras les éléments caractéristiques) qui transforme $\overrightarrow{FG}$ en $\overrightarrow{B_1C_1}$.

2°) Calcule le volume de l'image par h du tétraèdre SJFG.

3°) Démontre que la droite (EG) est orthogonale au plan (SB_1D_1).

4°) Soit s la réflexion de plan (SB_1D_1).

-a) Détermine la nature de la restriction $\bar{s}$ de s à la droite (EG).

-b) Détermine l'image de la droite (EG) par $\bar{s}$

5°) Détermine l'ensemble (Δ) des points M de l'espace tels $\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{AO}$

6°) Détermine une représentation paramétrique de (Δ) puis calcule la distance du point A à la droite (Δ).

7°) Détermine une équation cartésienne du plan (P) défini par les points B, E et G.

Problème 2

Soit f et g les fonctions scalaires de Leibniz définies pour tout point M de l'espace par :

$f(M) = MA^2 + MF^2 - MG^2 - MD^2$ et $g(M) = MA^2 + MF^2 + MG^2 + MD^2$

8-a) Justifie le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MF} - \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MD}$ est un vecteur constant et exprime le en fonction de $\overrightarrow{DA}$.

-b) Calcule $f(O')$ puis déduis-en que $f(M) = 4\overrightarrow{MO'}.\overrightarrow{DA}$

-c) Exprime $\overrightarrow{IO'}$en fonction de $\overrightarrow{DA}$ et calcule $f(I)$.

-d) Déduis – en que l'ensemble $\mathscr{E}_1$est le plan (ABF).
9-a) Démontre que g(O')= $3a^2$
-b) Démontre que g(M) = $4MO'^2 +$ g(O')
-c) Détermine $\mathscr{E}_2$
10°) (Q) est le plan perpendiculaire à (P) et contenant la droite (BG) ; K est le point d'intersection de (P) et de la droite (DF).
-a) Détermine les coordonnées de K.
-b) Détermine une équation cartésienne de (Q).

Problème 3

11°) F est l'application affine de l'espace dans lui – même d'expression

analytique: $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x + 2y - 2z + 2) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + y + 2z - 2) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + 2y + z + 2) \end{cases}$.

M est point quelconque de l'espace d'image M' par F.
-a) Démontre que le milieu du segment [MM'] appartient au plan (P).
-b) Démontre que $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur normal au plan (P).
-c) Détermine l'ensemble des points invariant par F.
-d) Déduis – en la nature et les éléments caractéristiques de F.
12°) G est la réflexion de plan (Q).
-a) Détermine l'expression analytique de G.
-b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de FoG.

SUJET 16

Contexte :
Fifamè, élève en terminale scientifique a rendu visite à son oncle PIKO, ingénieur des ponts et chaussées dans son bureau de recherche. Elle découvre avec stupéfaction son oncle assis derrière une maquette ayant la forme d'un cube ABCDEFGH d'arête a où I, J et K sont des points tels que : $3\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{BC}$;$3\overrightarrow{EJ} = 2\overrightarrow{EH}$ et K est le milieu du segment [IJ]. Dans un coin, à l'intérieur de la maquette se trouve un solide plein aux couleurs nationales que l'on peut assimiler à l'ensemble (Γ_1) des points M de l'espace tels que $15MA^2 + MC^2 = 2a^2$. Quelques matériaux sont placés sur une partie de la configuration (Γ_2) de l'espace constitué de l'ensemble des points M de l'espace vérifiant : $2BM^2 - AM^2 - FM^2 = -a^2$. PIKo est préoccupé par les configurations de l'espace qui ont une signification importante sur son vaste chantier de construction d'un pont. Enfin, les applications de l'espace sont abondamment utilisées par PIKO.
Fifamè se demande quelles peuvent – être les connaissances mathématiques qui sous – tendent les recherches de PIKO.

Tâche : Tu es invité à aider Fifamè à satisfaire ses préoccupations en traitant les trois problèmes suivants.

Problème 1 :

1°) Démontre que K est barycentre des points pondérés $(B, 1)$; $(C, 2)$; $(E, 1)$ et $(H, 2)$.
2-a) Détermine le barycentre L des points pondérés $(A, 15)$ et $(C, 1)$.
-b) Calcule Ac, AL et CL.
-c) Détermine la forme du solide (Γ_1) aus couleurs nationales.

3-a) Démontre que pour tout point M de l'espace, $2BM^2 - AM^2 - FM^2 = -a^2 + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BE}$
-b) Détermine la configuration (Γ_2) sur laquelle sont déposés les matériaux.

Problème 2

Dans l'espace orienté E du chantier et muni du repère orthonormédirect $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points $N(5\,;4\,;2)\,;L(2\,,1\,,2\,)\,,Q(1\,,1\,,2)$.

4-a) Démontre les points N, L et Q déterminent un plan (H).

-b) Détermine un équation cartésienne du plan (H).

5°) Soit f l'application de H dans H qui à tout point $M(x\,,y\,,z)$ associe le point $M'(x',y',z')$ tel que :

$$\begin{cases} 3x' = x + 2y - 2z + 15 \\ 3y' = 2x + y + 2z + 3 \\ 3z' = -2x + 2y + z + 6 \end{cases}$$

-a) Détermine l'ensemble des points $M(x\,,y\,,z)$ de l'espace invariant par f.

-b) Déduis – en la nature de f..

6°) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{NL}$. On pose : $s = t \circ f$

-a) Donne l'expression analytique de s.

-b) Démontre que l'ensemble des points invariants de E par s est le plan (H).

-c) Soit M un point de E n'appartenant pas à H et $M' = s(M)$.

- Démontre que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur normal au plan (H).
- Démontre que le milieu du segment [MM'] appartient au plan (H).

-d) Détermine la nature de s.

-e) Démontre que $f = t' \circ s$ où t' est une translation que tu préciseras.

Problème 3

Dans ce problème on pose $a = 1$ et on sépare le cube à l'intérieur en deux espaces par un mur délimité par le plan (P) = (BDF). L'espace est muni du repère orthonormé direct (A,B,D,E)

7°) Détermine une équation cartésienne du plan (P).

8°) Détermine une représentation paramétrique de la droite $(\Delta) = (EG)$.

9-a) Détermine la position relative de la droite (Δ) et du plan (P).

-b) Définis analytiquement la composée $S_{(\Delta)} \circ S_{(P)}$.

10°) On désigne par (Q) le plan (ECG).

-a) Démontre que (Q) est globalement invariant par la réflexion $S_{(P)}$.

-b)Soit f la restriction de $S_{(P)}$ au plan (Q). Donne, dans le plan (Q) la nature et les éléments caractéristiques de f.

11-a) Démontre que le plan (P) est globalement invariant par le demi – tour $S_{(\Delta)}$.

-b) Soit g la restriction de $S_{(\Delta)}$ au plan (P). Détermine la nature et les éléments caractéristiques de g dans le plan (P).

SUJET 17

Contexte : Les vacances de Jos

Jos un élève en classe de première scientifique avit passé ses vacances dernières dans l'atelier d'alliage de son oncle Boton. Il eut la chance d'assister de bout en bout à la fabrication de précieux objets d'alliage (Σ)

dont il a le plaisir de raconter les moments forts. Il se souvient de cette grande table métallique de travail de son oncle sur laquelle on peut remarquer :

- Trois poteaux respectivement fixés aux points R, S et T tels que RST est un triangle rectangle en R et $RS = 2RT = 2a$ où a est un nombre réel strictement positif.
- Un zone soigneusement délimitée par l'ensemble (Γ_k) des points M du plan tels que $3MR^2 + MS^2 - 2MT^2 = ka^2$ où k est le nombre d'éléments à utiliser dans la fabrication de l'objet.

Les objets dits de la catégorie « léger » nécessitent une zone moins vaste dont la limite (Γ_k) passe au plus par le point T. Jos avoue à ses amisn'avoir jamais compris son oncle trace l'ensemble (Γ_k) quand bien même ce dernier lui donné l'indication $\overrightarrow{RJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{RS} - \overrightarrow{RT}$ avec J un point du plan de la table. Il s'intéresse aussi au procédé mathématique mis en jeu pour la réalisation de (Σ).

Tâche : Tu es invité à aider Jos dans ses préoccupations à travers la résolution des trois problèmes suivants.

Problème 1

1-a) Prouve que $J = bar\{(R,3)\ ;\ (S,1)\ ;\ (T,-2)\}$

-b) Détermine l'ensemble (Γ_k)

2-a) Détermine la valeur de k pour laquelle (Γ_k) contient le point T.

-b) Détermine puis construis(Γ_8).

3°) Donne l'ensemble des valeurs de k lorsque l'objet à fabriquer est de la catégorie « léger ».

Problème 2

En réalité (Σ) est un bel alliage précieux ayant la forme d'un cube nommé ABCDEFGH sectionné suivant le plan (P) assimilable au plan (BGE) posé sur sa face ABCD et contenat une pyramide IABCD pleine, où I est l'intersection de (P) et de la droite (DF). Pour comprendre les procédés mathématiques qui ont permis de projeter cet objet (Σ) pendant l'exposition, Jos se propose d'étudier deux applications h et f de l'espace.

Partie A :

Il définit l'application h qui à tout point M de l'espace associe le point $h(M) = M'$ tel que $\overrightarrow{CM'} + \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{AM} = \vec{O}$ et l'application $f = S_{(P)} \circ S_{(Q)}$ où (Q) est le plan perpendiculaire à (P) contenant la droite (BG) et $S_{(P)}$ la réflexion de plan de (P).

4-a) Démontre que les droites (EG) et (EB) sont orthogonales respectivement aux plans (DHF) et (DFG).

-b) Déduis – en que la droite (DF) est orthogonale au plan (P).

-c) Détermine $(Q)\cap(P)$.

-d) Démontre que (DF) est parallèle à (Q).

5°) Détermine la nature de f puis précise ses éléments caractéristiques.

6-a) Prouve que le point C est barycentre de A, B et D.

-b) Donne la nature et les éléments caractéristiques de h.

Partie B :

Jos se propose de travailler dans le repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ afin de mieux appréhender les concepts et choisir l'unité graphique 1cm.

7-a) Détermine une équation cartésienne du plan (P).

-b) Détermine les coordonnées du point I.

8°) Détermine une équation cartésienne du plan (Q).

9°) Calcule le volume de l'image par h de la pyramide IABCD de base ABCD.

Problème 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, Jos se dit aussi que pour projeter l'ensemble(Σ) , l'application g sera mieux adaptée ; g a pour expression analytique

$$:\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x-2y-2z+6) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x-y+2z-6) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x+2y-z+12) \end{cases}$$

10°) Démontre que g est un demi – tour dont tu préciseras l'axe (Δ').

11°) Soit (P') le plan d'équation $x-y-z+2=0$ et les points $L\left(\frac{1}{2}\,;0\,;0\right)$; $K\left(\frac{1}{2}\,;1\,;0\right)$

-a) Détermine l'image de la droite (LK) par g.

-b) Démontre que (P') est globalement invariant par g.

-c) Donne la nature et les éléments caractéristiques de la restriction φ de g à (P').

SUJET 18

Contexte : Les caisses de marabout.

Pour confisquer ses effets urgents, le marabout a fait réaliser par un soudeur de la place des caisses. A la vue de ces caisses, son fils Para voudrait comprendre comment ce soudeur est arrivé à réaliser chacune des caisses à son papa. Les explications du soudeur sont axées sur des notions mathématiques. Para ne comprend ces explications données par le soudeur.

Tâche : Tu vas aider Para à travers les activités suivantes.

Problème 1

L'une des caisses du soudeur a la formen d'un tétraèdre tel que $AB = BC = BD$; $(BA) \perp (BD)$ $et\ \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$.

1°) Démontre que le repère $(B,\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA})$ est repère orthonormé direct.

2°) Détermine les coordonnées des points A, B, C et D dans ce repère.

3°) On désigne I le projeté orthogonal de B sur le plan (ACD).

-a) Détermine une équation cartésienne du plan ABC.

-b) Détermine les coordonnées du point I

-c) Démontre que le point I est centre de gravité du triangle ACD.

-d) Démontre que le triangle ACD est équilatéral.

4°) Soit h la transformation de l'espace dans lui – même qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

-a) Démontre que h est une homothétie que tu caractériseras.

-b) Détermine l'expression analytique de h.

-c) Détermine le volume de l'image du tétraèdre ABCD par l'homothétie h.

Problème 2

L'une des caisses est un tétraèdre quelconque et on considère la face ABC. On désigne par a , b, c les longueurs des côtés [BC], [AC] , [AB] et on note $\propto$ la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ du triangle ABC ; $0 <\propto< \pi$.

5-a) Construis le point G barycentre du système $\{(A,-1);\ (B,1)\ ;\ (C,1)\ ;(B,1)\}$.

-b) Donne la nature du quadrilatère BACG.

6°) On considère la fonction f définie dans le plan qui à tout point M du plan associe le nombre réel $f(M) = -MA^2 + MB^2 + MC^2$

-a) Démontre que $GA^2 = b^2 + c^2 + 2bc.\cos\propto$

-b) Déduis – en que $f(M) = MG^2 - 2bc.\cos\propto$

-c) Détermine suivant les valeurs de $\propto$ l'ensemble (Γ) des ponts M du plan tels que $f(M) = 0$.

7°) On suppose que le triangle ABC est rectangle en A et que $b = 2c$. A tout point M du plan, on associe le nombre réel $g(M) = 3MA^2 - 2MB^2 - MC^2$. Démontre qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ non nul tel que $g(M) = \overrightarrow{MB}.\vec{u} - 2c^2$

8°) Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan tel que $g(M) = -2c^2$. On désigne par I le milieu de [AC].

-a) Vérifie que les points B et I appartiennent à (Δ).

-b) Déduis – en la nature de (Δ).

-c) (Δ) et (Γ) sont sécantes en deux points E et F. Démontre que les triangles GEC et GFC sont équilatéraux.

Problème 3

Les plans des caisses sont réalisés dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et l'une des applications utilisées est

l'application f qui a pour expression analytique : : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x - 2y - 2z + 6) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x - y + 2z - 6) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + 2y - z + 12) \end{cases}$

9°) Démontre que f est un demi – tour d'axe (Δ) puis donne un repère $(\Omega, \vec{u})$

10°) Soit K et L les points de coordonnées respectives $(0\,;0\,;3)$ *et* $(-1\,;0\,;1)$. Vérifie que K appartient à (Δ) et que L n'appartient pas à (Δ).

11°) Soit (P) le plan (ΩKL) et (P') le plan contenant (Δ) et perpendiculaire à (P).

-a) Détermine une équation cartésienne de chacun des plans (P) et (P').

-b) Justifie que $f = S_{(P)} \circ S_{(P')}$.

12°) Soit H le projeté orthogonal de L sur (Δ) et (Q) le plan parallèle à (P') passant par L.

-a) Détermine les coordonnées de H.

-b) Détermine $S_{(P')} \circ S_{(Q)}$.

13°) Détermine l'expression analytique de (Q).

SUJET 19

Contexte : Visite d'un centre de loisir.

Dans le centre de loisir de l'arrondissement de Codji, se trouvent deux principaux bâtiments. L'un de ces bâtiments a la forme d'un cube ABCDEFGH de centre O et d'arrête 6cm, sa toiture a la forme d'une pyramide régulière SEFGH de sommet S. L'autre bâtiment a la forme d'un tétraèdre IJKL tel que IJK, IJLet IKL forment des triangles rectangles isocèles en I et $\overrightarrow{IK} \wedge \overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IJ}$.

Joseph, élève en classe de terminale scientifique a visité ce centre. Il a découvert à l'intérieur du bâtiment tétraédrique un objet au point R, projeté orthogonal de I sur le plan (JKL) et une décoration ayant la forme de l'ensemble (E_m) des points de l'espace tels que $MJ^2 + MK^2 + ML^2 = m$ où m est un nombre réel.

Joseph cherche à déterminer l'ensemble (E_m), à evaluer le volume V' de l'image de la pyramide SEFGH par une application *f*. Il veut aussi déterminer l'équation cartésienne de l'image d'un plan par une application g.

Tâche : Tu es invité à aider Joseph en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1

1-a) Démontre que $IJ = IK = IL = 1$

-b) Justifie que $(I, \overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IL})$ est un repère orthonormé direct de l'espace.

Dans la suite du problème, on suppose que l'espace est muni du repère orthonormé direct $(I, \overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IL})$

2-a) Détermine une équation cartésienne du plan (JKL).

-b) Vérifie que R est le centre de gravité du triangle JKL.

3-a) Détermine la nature du triangle JKL.

-b) Détermine suivant les valeurs de m la nature de (E_m).

Problème 2

En réalité le sommet S du toit du bâtiment cubique appartient à l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que $(2\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MH}).(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MG} - 3\overrightarrow{ME}) = 0$.

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$avec $\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$, $\vec{k} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AE}$.

L'application f est définie par $f = hot$ où $t = S_{(P_1)} o S_{(P_2)}$ et h l'application qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MH}$; $S_{(P_1)}$ et $S_{(P_2)}$ sont les réflexions de plans (P_1) et (P_2) d'équations cartésiennes respectives : $2x + 2y - z + 9 = 0$ et $x + y - \frac{1}{2}z = 0$. On note (Δ) la droite passant par O et orthogonale à (P_1) en O'.

4°) Justifie que $A(-3;-3;-3), B(3;-3;-3), C(3;3;-3), et\ D(-3;3;-3)$

5°) Soit T le barycentre des points pondérés $(E,2)$; $(F,1)$ et $(H,1)$.

-a) Détermine les coordonnées de T.

-b) Justifie que (Γ) est un plan.

-c) Détermine une équation cartésienne de (Γ).

6-a) Justifie que S appartient à la droite de repère $(O, \vec{k})$.

-b) Détermine les coordonnées de S.

-c) Calcule le volume de la pyramide SEFGH.

7-a) Justifie que les plans (P1) et (P2) sont strictement parallèles.

-b) Détermine les coordonnées de O'.

8-a) Détermine les expressions analytiques de $S_{(P_1)}$ et du tour $S_{(\Delta)}$d'axe (Δ).

-b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de t.

-c) Déduis – en l'expression analytique de $S_{(P_2)}$.

-d) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de $S_{(\Delta)} o S_{(P_2)}$.

9-a) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de h.

-b) Donne l'expression analytique de f.

10°) Calcule le volume V'.

Problème 3

Texte : 57ème anniversaire dans la commune de ODORA

Pour un cachet spécial à la 57ème anniversaire dans la commune de ODORA, le maire Agbanglo, dans l'organisation de la nuit d'indépendance a prévu des cadeaux sous forme d'emballage en forme cubique aux meilleurs artistes qui seront retenus parmi les artistes invités. Sur les lieux de célébration, des lampadaires et des caméras sont placés à divers endroits. Le technicien chargé de préparer le lieu de célébration a utilisé des codes qui caractérisent les poteaux des lampadaires, la façon de disposer ces lampadaires et le podium pour les artistes.

- ✓ La forme des cadeaux est assimilable à un cube PQRSTUVW d'arête un mètre.
- ✓ Un poteau de lampadaire est caractérisé par l'ensemble (Δ) défini par :
  $(\Delta) = \left\{M \in \mathcal{E} / \left(-\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MW}\right) \wedge \left(-2\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MW}\right) = \vec{O}\right\}$
- ✓ Le podium apprêté est caractérisé par l'ensemble $\mathscr{P}$ défini par :
  $\mathscr{P} = \left\{M \in \mathcal{E} / \left(-\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MW}\right) . \left(-2\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MW}\right) = 0\right\}$
- ✓ Les transformations utilisées pour installer sans difficulté les poteaux des lampadaires sont définies par : $t: \forall (M, M') \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}, \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MV} - \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MU}$
  $h: \forall (M, M') \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}, \overrightarrow{RM'} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MS} - \overrightarrow{PM} = \vec{O}$

Intéressé par la forme des cadeaux, les ensembles et les transformations, Awé, un élève en terminale C se propose de tester ses connaissances acquises dans la première situation d'apprentissage. Pour cela, il aborde son professeur de mathématiques qui lui a proposé une série de questions réparties en trois problèmes.

Tâche : **Pour ton évaluation, tu vas résoudre rigoureusement les trois problèmes à la place de Awé.**

Problème 1

1-a) Démontre que PQVW est un parallélogramme.

-b) Déduis – en que V est le barycentre des points pondérés $(P, -1)$; $(Q, 1)$ et $(W, 1)$

2°) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de chacun des ensembles (Δ) et $\mathscr{P}$.

3°) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations t et h.

4°) Détermine suivant les valeurs du paramètre réel m la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble σ des points M de l'espace tels que $-MP^2 + MQ^2 + MW^2 = \frac{m^2-1}{m}$

Problème 2

Dans ce problème, on munit l'espace du repère $r = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ tels que :

$\overrightarrow{PQ} = \vec{\imath}$; $\overrightarrow{PS} = \vec{\jmath}$; $\overrightarrow{PT} = \vec{k}$ et $\overrightarrow{OP} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$

5°) Démontre que r est un repère orthonormé direct.

6°) Détermine les coordonnées de chacun des points P, Q , R , S , T , U , V et W.

7-a) Détermine une représentation paramétrique de (Δ)

-b) Détermine une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.

8-a) Détermine l'expression analytique de chacune des transformations t et h.

-b) Détermine une expression analytique de la réflexion f de plan $\mathscr{P}$.

-c) Détermine une expression analytique du demi – tour g d'axe (Δ).

9-a) Démontre que est $\mathscr{P}$ globalement invariant par g.

-b) Déduis – en la restriction de g à f.

10°) Détermine suivant les valeurs de m l'image de σ par hot.

Problème 3

Dans ce problème, on considère les applications $\mathscr{s}$ et φ de l'espace définies par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x - y + 2z - 3) \\ y' = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z - 3) \\ z' = \frac{1}{3}(2x + 2y - z + 6) \end{cases}$$

et $\varphi = f o \mathscr{s}$

11°) Démontre que $\mathscr{s}$ est une réflexion de plan ( ) dont on donnera un repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$

12°) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de φ.

13-a) Démontre que pour tout point $M_o$de l'espace, $\Omega M_o = \frac{|\overrightarrow{\Omega M_o}.(\vec{u} \wedge \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$

-b) Déduis – en la distance de chacun des points $A(1; -1; 1), B(-2; -1; 0), C(0; -1; 1)$ au plan ( ) puis conclus.

-c) Démontre que ABC n'est pas un triangle équilatéral.

14°) On désigne par A', B' et C'les milieux respectifs des segments [BC] , [AC] et [AB] et on pose BC= a ; AC = b et AB = c où a , b et c sont des nombres réels strictement positifs.

-a) On considère le vecteur $\vec{q}$ défini par : $\vec{q} = a^2\overrightarrow{BC} + b^2\overrightarrow{CA} + c^2\overrightarrow{AB}$.

$-a_1$) Montre que $\vec{q} = (a^2 - b^2)\overrightarrow{AC} + (c^2 - a^2)\overrightarrow{AB}$

$-a_2$) Déduis – en que $\vec{q}$ n'est pas le vecteur nul.

-b) Pour tout point M de Γ, on pose : $k(M) = a^2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{MA'} + b^2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{MB'} + c^2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MC'}$

$-b_1$)Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Calcule $f(O)$.

$-b_2$) Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

$-b_{2-1}$) Montre que $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{6}(b^2 - c^2)$

$-b_{2-2}$)Déduis – en la valeur de $f(G)$.

-c) Détermine l'ensemble ($\mathscr{D}$) des points M de Γ tels que $k(M) = 0$.