Se préparer au BAC

Bac

Sujets et corrigés

Maths

Section Maths

- Sujets de 2016 à 2022
- Corrigés détaillés

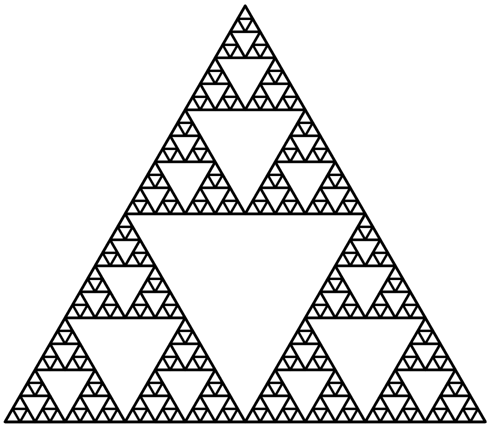
Volume 2

BAC Tunisie

Prof. : Moez Boussetta

Édition 2023

Fractale & Python



Triangle de Sierpiński

```
from turtle import Turtle,Screen
import turtle as t
def Sierpinski(n,length):
    if n == 0:
        return
    for i in range(3):
        Sierpinski(n - 1, length / 2)
        t.fd(length)
        t.rt(-120)

window = Screen()
Sierpinski(6,200)
turtle = Turtle()
turtle.hideturtle()
t.penup()
t.shape('circle')
t.shapesize(0.01,0.01, 0.1)

ts = turtle.getscreen()
ts.getcanvas().postscript(file="sierpinski.eps")

window.mainloop()
```

Dernière mise à jour : 7 septembre 2022

Table des matières

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION
*****
EXAMEN DU BACCALAURÉAT

SESSION 2016

Épreuve : **MATHÉMATIQUES**
Section : **Mathématiques**
Durée : **4 h** | Coefficient : **4**
Session principale

Le sujet comporte cinq pages numérotées de 1/5 à 5/5
La page 5/5 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points)

Le plan est orienté.

Dans la figure 1 de l'annexe jointe, ABC est un triangle direct, rectangle en A et tel que $AB < AC$.

La médiatrice du segment $[BC]$ coupe les droites (AB), (AC) et (BC) respectivement en E, F et G.

1) Soit f la similitude directe de centre A et telle que $f(B) = F$.

a) Déterminer l'angle de f.

b) Montrer que l'image de la droite (BC) par f est la droite (GF).

c) Déterminer $f(C)$.

2) Le cercle $\mathscr{C}_1$ de diamètre $[BC]$ et le cercle $\mathscr{C}_2$ de diamètre $[EF]$ se coupent en A et H.

a) Montrer que $f(\mathscr{C}_1) = \mathscr{C}_2$.

b) Soit $I = f(H)$. Construire le point I.

c) Montrer que le quadrilatère HEIF est un rectangle.

d) La droite (FI) coupe la droite (AE) en un point J. Montrer que $f(F) = J$.

3) Soit g la similitude indirecte de centre A et telle que $g(B) = F$.

a) Montrer que $g = S_{(AC)} \circ f$.

b) Soit $E' = f(E)$. Montrer que E' est un point de la droite (AC).

c) Soit $F' = g(F)$ et $H' = g(H)$. Construire l'image par g du rectangle FHEI.

Exercice 2 **(3 points)**

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (1+2i)m\,z - (1-i)m^2 = 0$, où m est un nombre complexe non nul, d'argument $\theta \in]0,\pi[$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

On note z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E).

b) Montrer que $(z_1z_2$ est un réel strictement positif $)$ si et seulement si $\left(\theta = \frac{5\pi}{8}\right)$.

Dans la suite de l'exercice on prend $\theta = \frac{5\pi}{8}$.

2) Vérifier que $z_1z_2 = |m|^2\sqrt{2}$.

3) Soit t un réel strictement positif et $m = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}}e^{i\frac{5\pi}{8}}$. On se propose de construire les points M_1 et M_2, images des solutions z_1 et z_2 de l'équation (E), correspondant au nombre complexe m.

Dans la figure 2 de l'annexe jointe, $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct ;

B et C sont les points d'affixes respectives $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et t ;

E est le point d'intersection du demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[BC]$ avec l'axe $(0,\vec{v})$.

a) Montrer que $OE^2 = OB.OC$.

b) En déduire que $|m| = OE$.

4) a) Construire le point A d'affixe m.

b) En déduire une construction des points M_1 et M_2 images des solutions z_1 et z_2 de l'équation (E).

$(\text{On convient que } |z_1| < |z_2|)$.

Exercice 3 **(4 points)**

1) Soit a un entier tel que $a \equiv 1 \pmod{2^4}$ et $a \equiv 1 \pmod{5^4}$. Montrer que $a \equiv 1 \pmod{10^4}$.

2) Soit $b = (9217)^4$. Montrer que $b \equiv 1 \pmod{5}$ et $b \equiv 1 \pmod{2^4}$.

3) Pour tout entier naturel n, on pose $b_n = b^{5^n} - 1$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = (b_n + 1)^5 - 1$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = b_n^5 + 5\,b_n^4 + 10\,b_n^3 + 10\,b_n^2 + 5\,b_n$.

4) a) Montrer que si 5^{n+1} divise b_n alors 5^{n+2} divise b_n^5.

b) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $b_n \equiv 0 \pmod{5^{n+1}}$.

5) a) Montrer que $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{625}$.

b) Montrer que $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{10000}$.

c) Trouver un entier dont le cube est congru à 9217 modulo 10000.

2/5

Exercice 4 (8 points)

A) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2) a) Montrer que pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}}{2\,x\,\sqrt{x}}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer la courbe (C_f).

3) Soit λ un réel de $]0,1[$. On désigne par S_λ l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\lambda$ et $x=1$.

Calculer S_λ en fonction de λ et déterminer $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} S_\lambda$.

B) 1) Soit g_1 et g_2 les restrictions de f respectivement à chacun des intervalles $]0,1]$ et $[1,+\infty[$.

Montrer que g_1 réalise une bijection de $]0,1]$ sur un intervalle I que l'on déterminera et que g_2 réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur l'intervalle I.

2) Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que l'équation $f(x)=e+\dfrac{1}{n}$ admet dans $]0,+\infty[$ exactement deux solutions notées α_n et β_n telles que $0<\alpha_n<1<\beta_n$.

On définit ainsi, pour tout entier naturel non nul n, deux suites réelles (α_n) et (β_n).

b) Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

3) On considère la fonction h définie sur $[0,+\infty[$ par $h(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\left(f(x)-(e+\dfrac{1}{n})\right) & \text{si } x>0\\ 1 & \text{si } x=0.\end{cases}$

On note (C_h) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que h est continue à droite en 0.

b) Déterminer le signe de $h(x)$ pour tout $x\in[0,+\infty[$.

4) Soit H la primitive de h sur $[0,+\infty[$ qui s'annule en 0.

a) Justifier que les fonctions $u : x \mapsto \int_0^x e^{\sqrt{t}}dt$ et $v : x \mapsto 2+2\left(\sqrt{x}-1\right) e^{\sqrt{x}}$ sont continues sur $[0,+\infty[$ et dérivables sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $u(x) = v(x)$.

c) Donner l'expression de $H(x)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$.

5) Soit $\mathcal{A}_n$ l'aire de la partie du plan limitée par (C_h), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \beta_n$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{A}_n = 2 - \frac{2}{3}e$.

Section : …………………… N° d'inscription : ……………… Série : …………

Nom et prénom : ……………………………………………………………………

Date et lieu de naissance : ……………………………………………………………

Signatures des surveillants

………………

………………

Épreuve : Mathématiques (Section : Mathématiques) **Session principale**

Annexe (à rendre avec la copie)

Figure 1

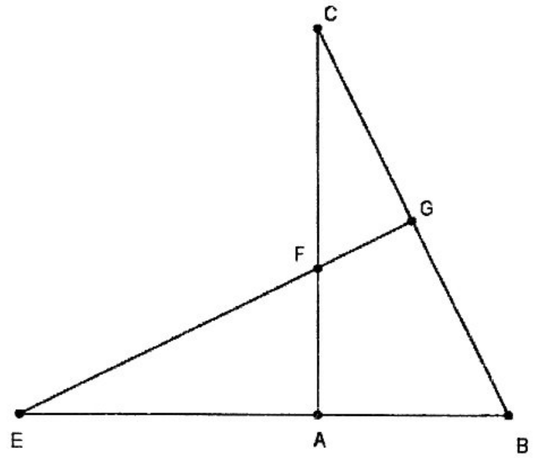
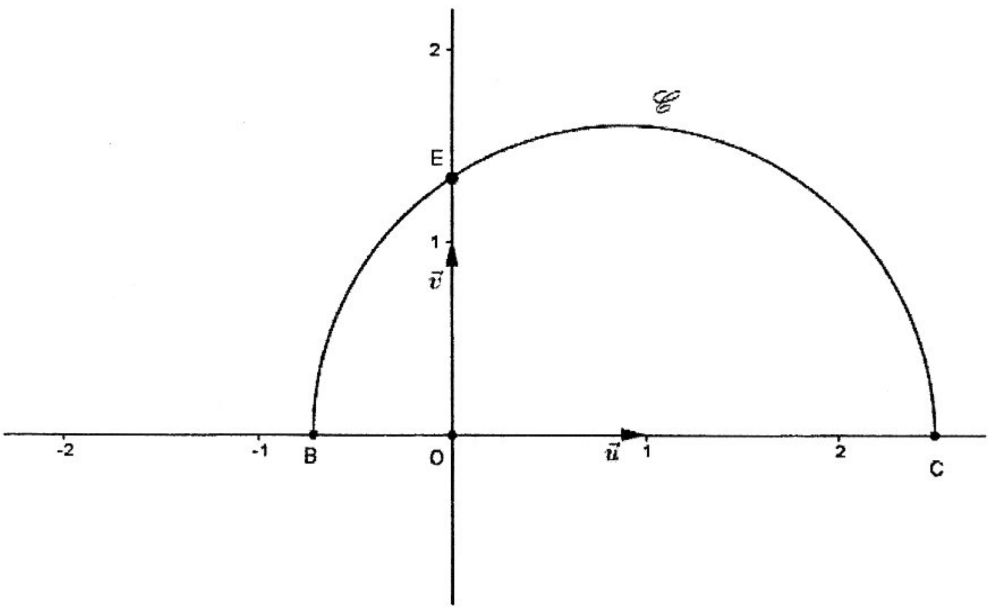


Figure 2



5/5

Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat

Section : Mathématiques

Session principale 2016

Exercice 1

1) a) $\theta \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b) On sait que $f(B) = F$ et $(GF) \perp (BC)$ car (GF) est la médiatrice de [BC], on en déduit que l'image de (BC) est (GF).

c) Puisque $f(A) = A$ et $(AB) \perp (AC)$ donc l'image de (AC) est (AB).

$C \in (BC) \cap (AC)$ donc $f(C) \in f((BC)) \cap f((AC))$ donc $f(C) \in (GF) \cap (AB) = \{E\}$.

Il en résulte que $f(C) = E$.

2) a) Le cercle ζ_1 est de diamètre [BC] donc son image par f est le cercle de diamètre $[f(B)f(C)]$, or $f(B) = F$ et $f(C) = E$, il en résulte que l'image de ζ_1 par f est le cercle de diamètre [EF].

Ainsi $f(\zeta_1) = \zeta_2$.

b) (Voir figure)

c) Les points I et H appartiennent au cercle ζ_2 de diamètre [EF] privé de E et F donc $\widehat{EIF} = \widehat{EHF} = \frac{\pi}{2}$, de plus les points A et F sont deux points de l'arc orienté $\widehat{IH} \setminus \{I, H\}$ situé sur ζ_2 donc $\left(\overrightarrow{FH}, \overrightarrow{FI}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AI}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Ainsi le quadrilatère HEIF admet trois angles droits donc c'est un rectangle.

d) $F \in (AF) \cap (HF)$ donc $f(F) \in f((AF)) \cap f((HF))$ donc $(AE) \cap (IF) = \{I\}$.

Il en résulte que $f(F) = I$.

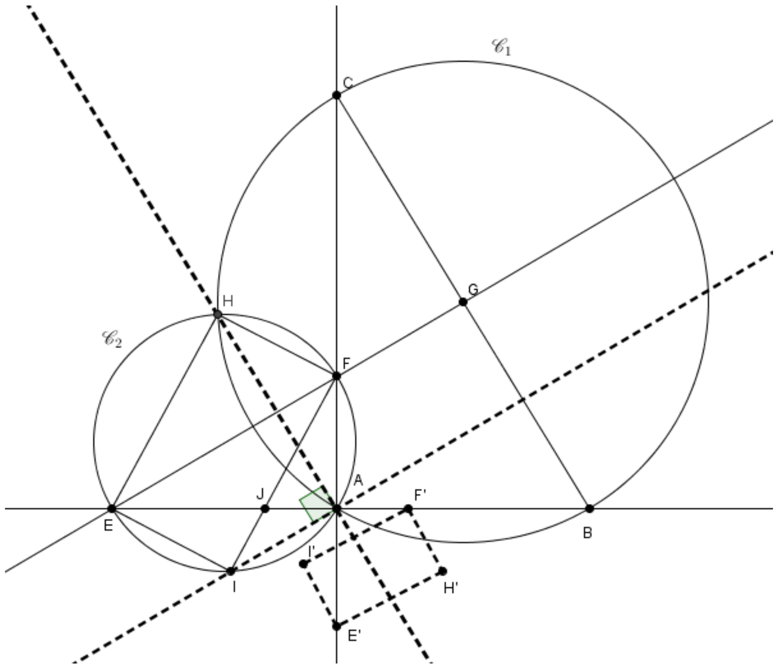
3) a) $S_{(AC)} \circ f$ est la composée d'une symétrie orthogonale (similitude indirecte) et d'une similitude directe donc c'est une similitude indirecte

de plus $\begin{cases} S_{(AC)} \circ f(A) = A = g(A) \\ S_{(AC)} \circ f(B) = F = g(B) \\ A \neq B \end{cases}$, on en déduit que $g = S_{(AC)} \circ f$.

b) Le point $E \in (AB)$ donc

$E' = g(E) \in g((AB)) = (AF) = (AC)$.

c) Voir figure.



Exercice 2

1) a) $\Delta=(1+2i)^2m^2+4(1-i)m^2=m^2$. Soit $\delta=m$.

$$z_1=\frac{(1+2i)m-m}{2}=im \quad \text{et} \quad z_2=\frac{(1+2i)m-m}{2}=m(1+i).$$

b) (z_1z_2 est un réel strictement positif) $\Leftrightarrow \begin{cases}\arg(z_1z_2)\equiv 0[2\pi]\\ \theta\in]0,\pi[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\arg(z_1)+\arg(z_2)\equiv 0[2\pi]\\ \theta\in]0,\pi[\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\theta+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\equiv 0[2\pi]\\ \theta\in]0,\pi[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\theta\equiv -\frac{3\pi}{4}[2\pi]\\ \theta\in]0,\pi[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\theta=-\frac{3\pi}{8}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\\ \theta\in]0,\pi[\end{cases} \Leftrightarrow \left(\theta=\frac{5\pi}{8}\right).$$

2) $z_1z_2=m^2i(1+i)=|m|^2e^{i\frac{5\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=|m|^2\sqrt{2}e^{i2\pi}=|m|^2\sqrt{2}.$

3) a) Le point $E\in\mathscr{C}\setminus\{B,C\}$ donc le triangle BEC est rectangle en E et les triangles OCE et OEB sont rectangles en O.

$\frac{OC}{OE}=\tan(OEC)=\text{cotan}\left(\frac{\pi}{2}-OEC\right)=\cot\text{an}(BEO)=\frac{OE}{OB}$, il en résulte que

$\frac{OC}{OE}=\frac{OE}{OB}\Leftrightarrow OE^2=OC.OB.$

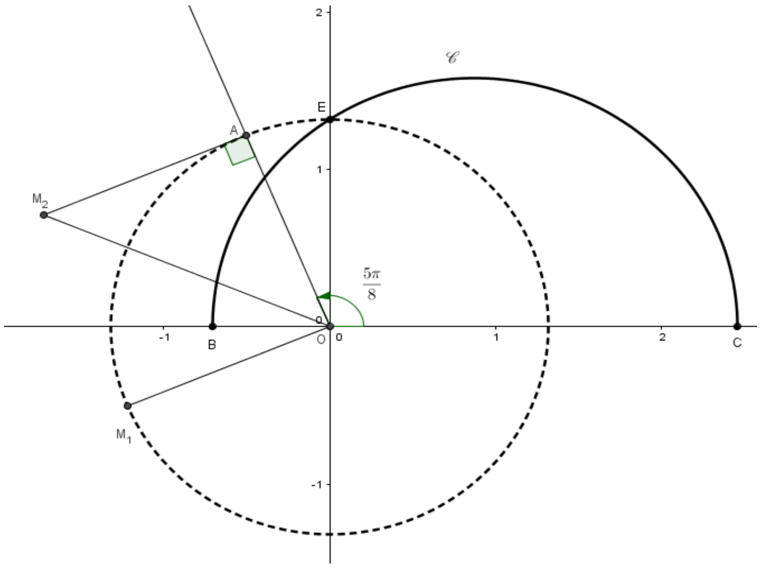
b) D'une part $m=\frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}}e^{i\frac{5\pi}{8}}$ donc $|m|=\frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}}$, d'autre part $OE^2=OC.OB=t\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $OE=\frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}}$.

Il en résulte que $|m|=OE$.

4) a) Voir figure.

a) On a $z_2=m(1+i)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}m$, il en résulte que M_2 est l'image de A par la similitude directe de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

$z_1=im=e^{i\frac{\pi}{2}}m$, il en résulte que M_1 est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.



Exercice 3

1) On a $\begin{cases} a \equiv 1\left(\bmod 2^4\right) \\ a \equiv 1\left(\bmod 5^4\right) \end{cases}$ donc $\begin{cases} a-1 \equiv 0\left(\bmod 2^4\right) \\ a-1 \equiv 0\left(\bmod 5^4\right) \\ 2^4 \wedge 5^4 = 1 \end{cases}$, on en déduit que $a-1 \equiv 0\left(\bmod 2^4 \times 5^4\right)$ ou encore

$a \equiv 1\left(\bmod 10^4\right)$.

2) $9217 \equiv 2(\bmod 5)$ donc $b=(9217)^4 \equiv 2^4(\bmod 5) \equiv 1(\bmod 5)$.

$9217 \equiv 1\left(\bmod 2^4\right)$ donc $b=(9217)^4 \equiv 1\left(\bmod 2^4\right)$.

3) a) Pour tout entier naturel n, $b_{n+1}=b^{5^{n+1}}-1=\left(b^{5^n}\right)^5-1=\left(b^{5^n}-1+1\right)^5-1=\left(b_n+1\right)^5-1$.

b) En utilisant la formule du binôme,

$b_{n+1}=\left(b_n+1\right)^5-1=b_n^5+5b_n^4+10b_n^3+10b_n^2+5b_n+1-1=b_n^5+5b_n^4+10b_n^3+10b_n^2+5b_n$.

4) a) Si 5^{n+1} divise b_n alors il existe un entier k tel que $b_n=5^{n+1}k$, il en résulte que

$b_n^5=\left(5^{n+1}k\right)^5=5^{5n+5}k^5=5^{n+2}\left(5^{4n+3}k^5\right)$ ce qui prouve que 5^{n+2} divise b_n^5.

b) Vérification pour n = 0. $b_0=b-1 \equiv 0(\bmod 5)$ Vrai (D'après 2)

Soit n un entier naturel. Supposons que $b_n \equiv 0\left(\bmod 5^{n+1}\right)$ et montrons que $b_{n+1} \equiv 0\left(\bmod 5^{n+2}\right)$.

Puisque $b_n \equiv 0\left(\bmod 5^{n+1}\right)$ c'est-à-dire 5^{n+1} divise b_n donc 5^{n+2} divise b_n^5, $5b_n^4$, $10b_n^3$, $10b_n^2$ et $5b_n$, il en résulte que 5^{n+2} divise $b_n^5+5b_n^4+10b_n^3+10b_n^2+5b_n=b_{n+1}$. D'où le résultat.

5) a) D'après 4)b) et pour $n=3$, $b_3=b^{125}-1=9217^{500}-1 \equiv 0\left(\bmod 5^4\right)$ donc $(9217)^{500} \equiv 1(\bmod 625)$.

b) D'après 2) $b=(9217)^4 \equiv 1\left(\bmod 2^4\right)$ donc $b^{125}=(9217)^{500} \equiv 1(\bmod 16)$.

Ainsi $(9217)^{500} \equiv 1(\bmod 16)$ et $(9217)^{500} \equiv 1(\bmod 625)$ d'après 1) $(9217)^{500} \equiv 1(\bmod 10000)$.

c) on sait que $(9217)^{500} \equiv 1(\bmod 10000)$ donc $(9217)^{501} \equiv 9217(\bmod 10000)$, il en résulte que

$\left((9217)^{167}\right)^3 \equiv 9217(\bmod 10000)$ ou encore le cube du nombre $(9217)^{167}$ est congru à 9217 modulo 10000.

Exercice 4

A.

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. La droite $x = 0$ est une asymptote à (C_f).

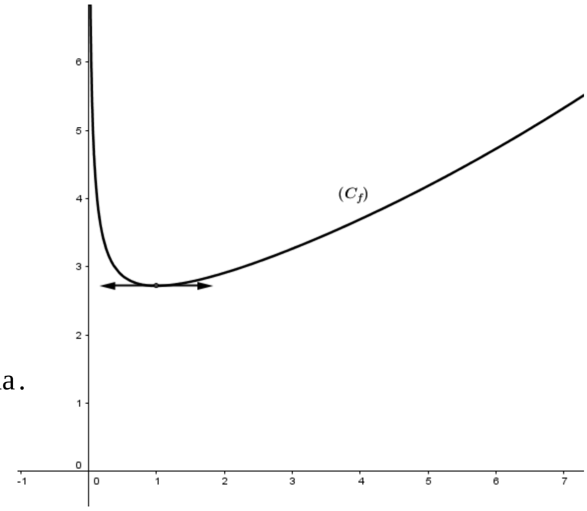
b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^3} = +\infty$. (C_f) admet une branche parabolique infinie de direction celle de $(O,\vec{j})$ en $+\infty$.

2) a) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\sqrt{x} - \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)e^{\sqrt{x}}}{2x\sqrt{x}}$.

b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $\sqrt{x} - 1 = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	||	$+\infty$ ↘	e	↗ $+\infty$	

c) Voir figure.



3) $S_\lambda = \displaystyle\int_\lambda^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int_\lambda^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx = 2\left[e^{\sqrt{x}}\right]_\lambda^1 = 2\left(e - e^{\lambda}\right)$ua.

$\lim\limits_{\lambda\to 0^+} S_\lambda = \lim\limits_{\lambda\to 0^+} 2\left(e - e^{\lambda}\right) = 2(e-1)$.

B. .

1) La fonction g_1 est continue et strictement décroissante sur $]0,1]$ donc elle réalise une bijection de $]0,1]$ sur $g_1(]0,1]) = [e,+\infty[$.

La fonction g_2 est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $g_2([1,+\infty[) = [e,+\infty[$.

2) a) La fonction g_1 est une bijection de $]0,1]$ sur $[e,+\infty[$. $e + \dfrac{1}{n} \in [e,+\infty[$ donc l'équation $g_1(x) = e + \dfrac{1}{n}$ admet une solution unique $\alpha_n \in]0,1]$, or $g_1(1) = e \neq e + \dfrac{1}{n}$ il en résulte que $\alpha_n \in]0,1[$.

La fonction g_2 est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[e,+\infty[$. $e + \dfrac{1}{n} \in [e,+\infty[$ donc l'équation $g_2(x) = e + \dfrac{1}{n}$ admet une solution unique $\beta_n \in [1,+\infty[$, or $g_2(1) = e \neq e + \dfrac{1}{n}$ il en résulte que $\beta_n \in]1,+\infty[$.

<u>Conclusion</u> : L'équation $f(x) = e + \dfrac{1}{n}$ admet dans $]0,+\infty[$ exactement deux solutions α_n et β_n telle que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.

b) On sait que $g_1(\alpha_n) = e + \dfrac{1}{n} \Leftrightarrow \alpha_n = g_1^{-1}\left(e + \dfrac{1}{n}\right)$. Or $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} e + \dfrac{1}{n} = e \\ \lim\limits_{x\to e} g_1^{-1}(x) = 1 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$.

De même on sait que $g_2(\beta_n)=e+\frac{1}{n} \Leftrightarrow \alpha_n = g_2^{-1}\left(e+\frac{1}{n}\right)$. Or $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} e+\frac{1}{n}=e \\ \lim\limits_{x\to e} g_2^{-1}(x)=1 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n=1$.

3) a) $\lim\limits_{x\to0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\,f(x)-\left(e+\frac{1}{n}\right)\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to0^+} e^{\sqrt{x}}-\left(e+\frac{1}{n}\right)\sqrt{x}=1=h(0)$ donc h est continue à droite en 0.

b) Pour tout $x\in[0,+\infty[, h(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $f(x)=e+\frac{1}{n} \Leftrightarrow x=0$ ou $x=\alpha_n$ ou $x=\beta_n$.

x	0		α_n		β_n		$+\infty$
$h(x)$	0	+	0	−	0	+	

4) a) La fonction $x\mapsto e^{\sqrt{x}}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $0\in[0,+\infty[$ donc la fonction u est la primitive de la fonction $x\mapsto e^{\sqrt{x}}$ qui s'annule en 0, il en résulte que u est continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$.

Les fonctions $x\mapsto e^{\sqrt{x}}$ et $x\mapsto\sqrt{x}-1$ sont continues sur $[0,+\infty[$ et dérivables sur $]0,+\infty[$, il en résulte que la fonction v est continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$.

b) Pour tout $x\in]0,+\infty[$, $u'(x)=e^{\sqrt{x}}$ et $v'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}+\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}=e^{\sqrt{x}}$.

Il en résulte que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $u'(x)=v'(x)$ par suite pour tout $x\in]0,+\infty[$, $u(x)=v(x)+c$ où c est un réel, or les fonctions u et v sont continues sur $[0,+\infty[$ donc $u(x)=v(x)+c$ pour tout $x\in[0,+\infty[$ et comme $u(0)=v(0)=0$ donc c = 0.

Ainsi $u(x)=v(x)$ pour tout $x\in[0,+\infty[$.

c) Pour tout $x\in[0,+\infty[, h(x)=\begin{cases}\sqrt{x}f(x)-\sqrt{x}\left(e+\frac{1}{n}\right) & \text{si } x>0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}=\begin{cases}e^{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\left(e+\frac{1}{n}\right) & \text{si } x>0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$,

on en déduit que pour tout $x\in[0,+\infty[, h(x)=e^{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\left(e+\frac{1}{n}\right)$ par suite pour tout $x\in[0,+\infty[$,

$$H(x)=\int_0^x e^{\sqrt{t}}dt-\left(e+\frac{1}{n}\right)\int_0^x\sqrt{t}dt=2+2\left(\sqrt{x}-1\right)e^{\sqrt{x}}-\frac{2}{3}\left(e+\frac{1}{n}\right)\left[t\sqrt{t}\right]_0^x$$
$$=2+2\left(\sqrt{x}-1\right)e^{\sqrt{x}}-\frac{2}{3}\left(e+\frac{1}{n}\right)x\sqrt{x}.$$

5) $A_n=\int_0^{\beta_n}|h(x)|dx=\int_0^{\alpha_n}h(x)dx+\int_{\beta_n}^{\alpha_n}h(x)dx=2H(\alpha_n)-H(\beta_n)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=\lim\limits_{n\to+\infty}2H(\alpha_n)-H(\beta_n)$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}2+4\left(\sqrt{\alpha_n}-1\right)e^{\sqrt{\alpha_n}}-\frac{4}{3}\left(e+\frac{1}{n}\right)\alpha_n\sqrt{\alpha_n}-2\left(\sqrt{\beta_n}-1\right)e^{\sqrt{\alpha_n}}+\frac{2}{3}\left(e+\frac{1}{n}\right)\beta_n\sqrt{\beta_n}=2-\frac{2}{3}e$.

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ✱✱✱✱✱ EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Épreuve : **MATHÉMATIQUES**	
	Section : **Mathématiques**	
	Durée : **4 h**	Coefficient : **4**
SESSION **2016**	**Session de contrôle**	

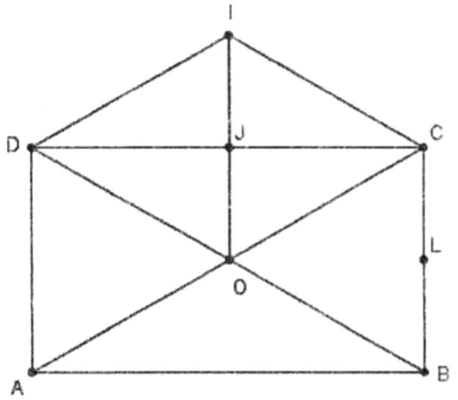
Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6
Les pages 5/6et 6/6 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points)

Le plan est orienté.

Dans la figure ci-contre ABCD est un rectangle direct de centre O

AOID et OCID sont deux losanges. Le point J est le milieu du segment $[CD]$ et le point L est le milieu du segment $[BC]$.



1) Soit R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Déterminer $R(O)$ et $R(D)$.

b) Montrer que $R(A) = B$.

2) Soit $g = S_{(OL)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(AD)}$.

a) Vérifier que $g(A) = C$ et $g(D) = B$.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de g.

3) Soit h l'homothétie de centre le point C et de rapport $\frac{1}{2}$ et on pose $\varphi = R \circ h \circ g^{-1}$.

a) Montrer que φ est une similitude indirecte de centre C.

b) Soit K le milieu du segment $[IC]$. Montrer que $\varphi(B) = K$.

c) Montrer que $\varphi = h \circ S_{(AC)}$.

4) Déterminer l'image par φ du rectangle ABCD.

Exercice 2 (4 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on désigne par (E) l'ellipse d'équation : $x^2 + 9y^2 = 9$.

Dans la figure 1 de l'annexe 1 jointe, (C_1) est le cercle de centre O et de rayon 1, (C_2) est le cercle de centre O et de rayon 3, N est le point de coordonnées $(\cos\theta , \sin\theta)$. P est le point de coordonnées $(3\cos\theta , 3\sin\theta)$, où θ est un réel appartenant à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1) Soit M le point de coordonnées $(3\cos\theta , \sin\theta)$.

a) Vérifier que M est un point de l'ellipse (E).

b) Placer le point M.

c) Justifier qu'une équation de la tangente T à (E) en M est $x \cos\theta + 3y \sin\theta = 3$.

2) La tangente T à (E) en M coupe l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées respectivement en H et K.

a) Déterminer les coordonnées des points H et K.

b) Montrer que $HK^2 = \dfrac{9}{\cos^2\theta} + \dfrac{1}{\sin^2\theta}$.

3) Soit f la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(\theta) = HK^2$.

a) Montrer que pour tout $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(\theta) = 2\left(4\sin^2\theta - 1\right) \dfrac{\cos^2\theta + 3\sin^2\theta}{\cos^3\theta \sin^3\theta}$.

b) En déduire que la distance HK est minimale si et seulement si $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

c) On désigne par D le point de l'ellipse (E) correspondant à $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

Construire le point D ainsi que la tangente en ce point à l'ellipse (E).

Exercice 3 (4 points)

Soit a un entier naturel non nul et premier avec 5.

1) En utilisant les restes possibles de la division euclidienne de a par 5, montrer que $a^4 \equiv 1 \pmod 5$.

2) Soit p et q deux entiers naturels non nuls tels que $p \leq q$ et $q \equiv p \pmod 4$.

a) Montrer que $a^q \equiv a^p \pmod 5$.

b) Montrer que $a^q \equiv a^p \pmod 2$.

c) En déduire que $a^q \equiv a^p \pmod{10}$.

3) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $25x - 21y = 4$.

a) Vérifier que $(1,1)$ est une solution de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

c) En déduire l'ensemble A des solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

d) Soit (α,β) un élément de A. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et premier avec 5, n^{α} et n^{β} ont le même chiffre d'unité.

Exercice 4 **(7 points)**

Soit f la fonction définie sur $\left[e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}}\right]$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-\ln^2 x}}{x}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to e^{\sqrt{2}}} \left(\frac{\ln x - \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}}\right) = e^{-\sqrt{2}}$.

b) En écrivant $\dfrac{f(x)}{x - e^{\sqrt{2}}} = \dfrac{-\left(\ln x + \sqrt{2}\right)}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} \cdot \dfrac{\ln x - \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}}$, montrer que $\displaystyle\lim_{x \to (e^{\sqrt{2}})^-} \left(\frac{f(x)}{x - e^{\sqrt{2}}}\right) = -\infty$.

Interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que f n'est pas dérivable à droite en $e^{-\sqrt{2}}$.

2) On donne, ci-dessous, le tableau donnant le signe de $f''(x)$, le signe de $f'(x)$ et les variations de la fonction f.

x	$e^{-\sqrt{2}}$		e^{-1}		α		β		$e^{\sqrt{2}}$
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0			$-$			
f	0	$\nearrow$	e			$\searrow$			0

Justifier que les points C et D, de coordonnées respectives $(\alpha, f(\alpha))$ et $(\beta, f(\beta))$, sont deux points d'inflexion de C_f.

3) Dans la figure 2 de l'annexe 2 jointe, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct ;

A et B sont les points de coordonnées respectives $(\sqrt{2}, 0)$ et $(-\sqrt{2}, 0)$;

C et D sont les points de coordonnées respectives $(\alpha, f(\alpha))$ et $(\beta, f(\beta))$;

Γ est la courbe représentative de la fonction exponentielle.

a) Construire les points de C_f d'abscisses $e^{-\sqrt{2}}$, e^{-1} et $e^{\sqrt{2}}$.

b) Tracer la courbe C_f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4) Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ par $g(x) = \sin x$.

a) Montrer que la fonction g réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

On note h sa fonction réciproque.

b) Montrer que la fonction h est dérivable sur $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ et que $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

c) Soit u la fonction définie sur $\left[e^{-1}, e\right]$ par $u(x) = h\left(\frac{\ln x}{\sqrt{2}}\right)$.

Montrer que pour tout $x \in \left[e^{-1}, e\right]$, $u'(x) = \frac{1}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}$.

d) En déduire que $\int_{e^{-1}}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} = \frac{\pi}{2}$.

5) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = e^{-1}$ et $x = e$.

a) Montrer que $\mathcal{A} = 2 + \int_{e^{-1}}^{e} \left(\frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}\right) dx$.

b) Vérifier que pour tout $x \in \left[e^{-1}, e\right]$, $\frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} = \frac{2}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} - f(x)$.

c) En déduire la valeur de $\mathcal{A}$.

Annexe 1 (à rendre avec la copie)

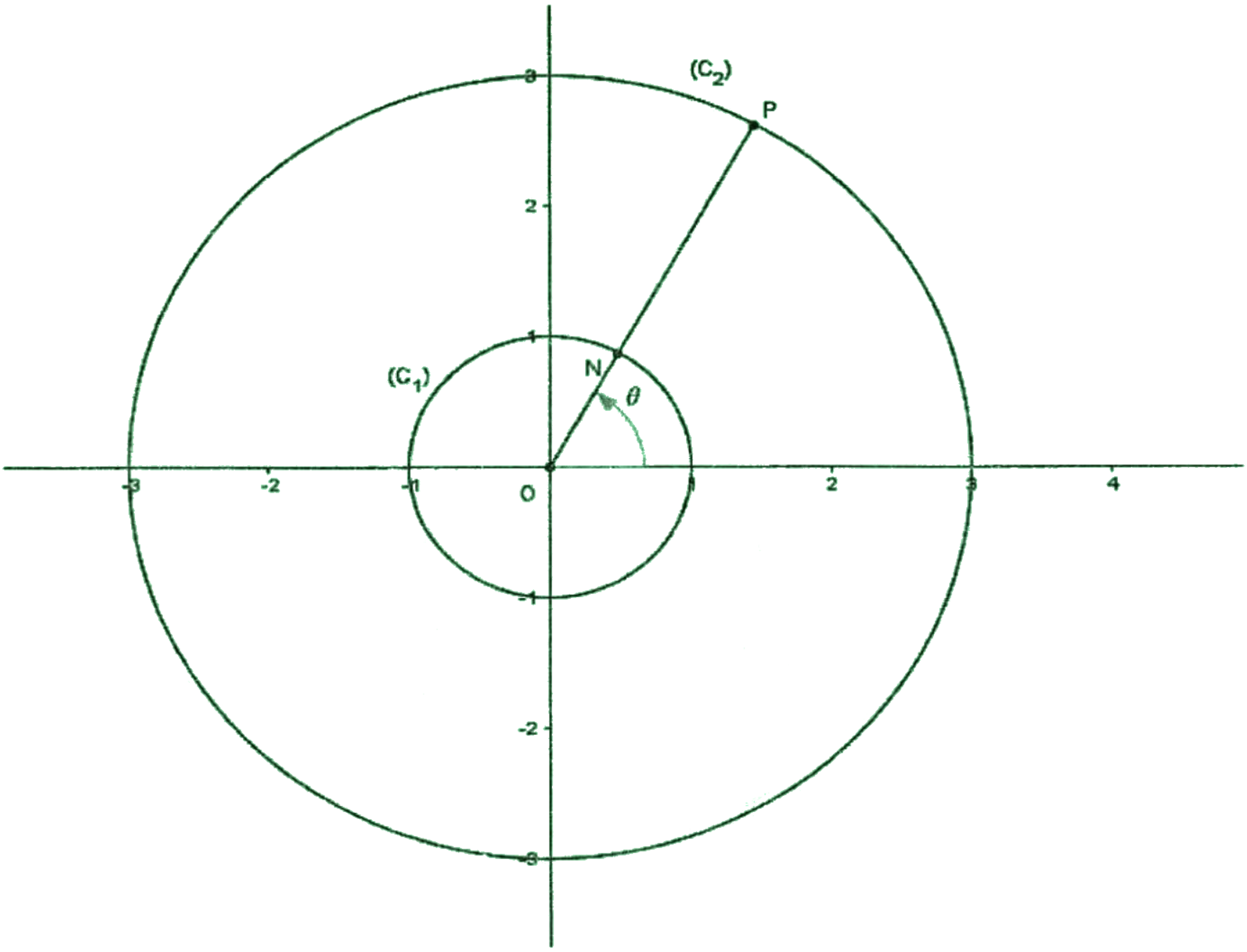


Figure 1

Annexe 2 (à rendre avec la copie)

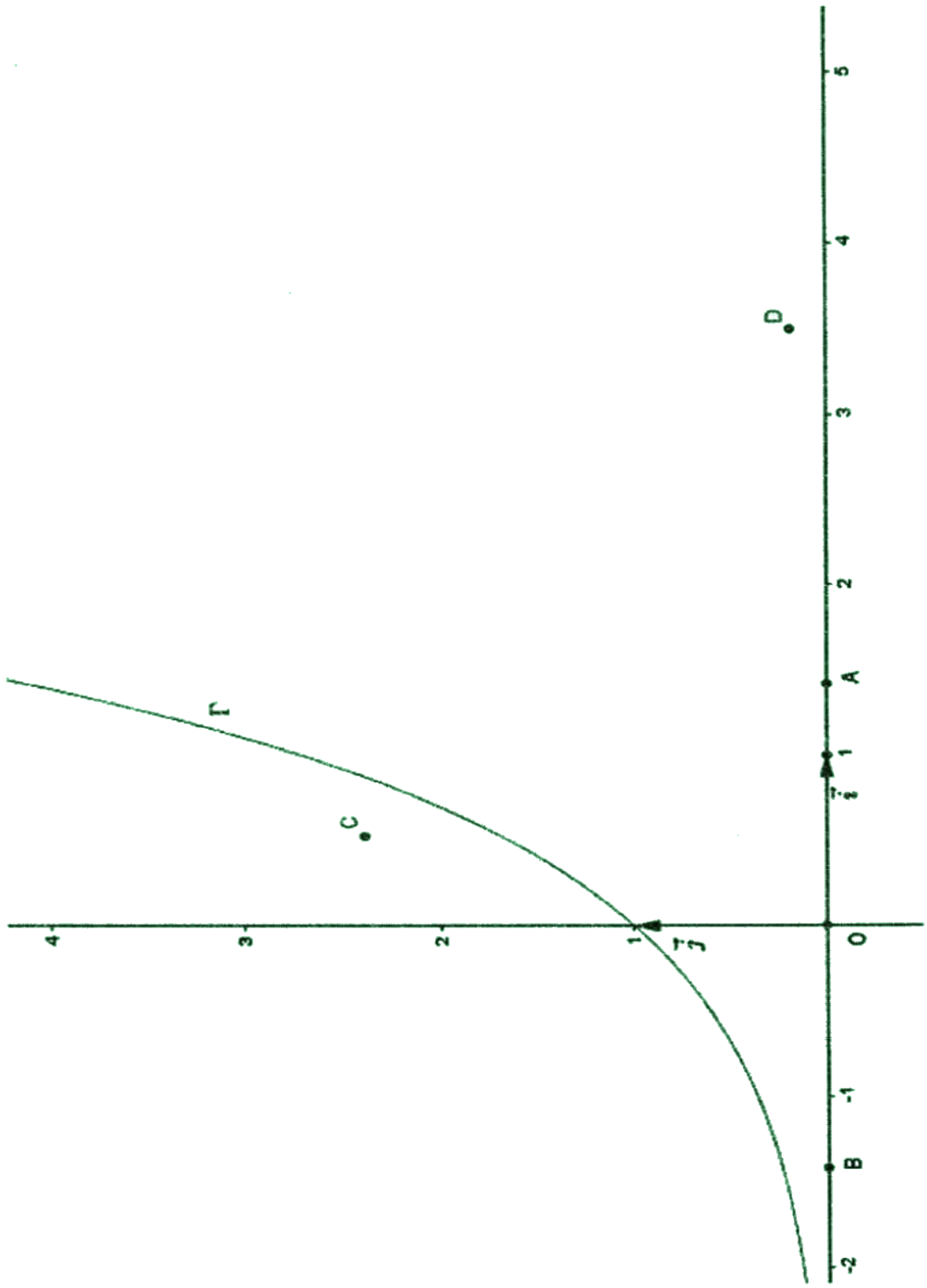


Figure 2

Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat

Section : Mathématiques

Session de contrôle 2016

Exercice 1

1) a) On sait que OCID est un losange donc $DI = DO$ et OIDA est un losange donc $IO = ID$, il en résulte que $DI = DO = OI$ par suite le triangle DOI est équilatéral donc $\begin{cases} ID = IO \\ \left(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IO}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ ce qui prouve que $R(D) = O$.

Le triangle DOI est équilatéral et J est un centre de symétrie du losange OCID donc OCI est un triangle équilatéral donc $\begin{cases} IO = IC \\ \left(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ ce qui prouve que $R(O) = C$.

b) Le triangle DAO est équilatéral direct (Le symétrique de DOI par (DO)) de donc son image par R est un triangle équilatéral direct (Le symétrique de COI par (CO)) et puisque $R(D) = O$, $R(O) = C$ et le triangle OBC est équilatéral direct donc l'image du triangle DAO par R est le triangle OBC, on en déduit que $R(A) = B$.

2) a) $g(A) = S_{(OL)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(AD)}(A) = S_{(OL)} \circ S_{(OI)}(A) = S_{(OL)}(B) = C$.

$g(D) = S_{(OL)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(AD)}(D) = S_{(OL)} \circ S_{(OI)}(D) = S_{(OL)}(C) = B$.

b) $g = S_{(OL)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(AD)} = S_{(OL)} \circ t_{2\overrightarrow{DJ}} = S_{(OL)} \circ t_{\overrightarrow{DC}}$ et puisque $\overrightarrow{DC}$ est directeur de (OL), il en résulte que g est une symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{DC}$ et d'axe (OL).

3) a) φ est la composée de deux similitudes directes (R et h) de rapports respectifs 1 et $\frac{1}{2}$ et d'une similitude indirecte $\left(g^{-1}\right)$ de rapport 1 donc φ est une similitude indirecte de rapport $1 \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$ donc elle admet un centre et puisque $\varphi(C) = R \circ h \circ g^{-1}(C) = R \circ h(A) = R(O) = C$, on en déduit que C est le centre de φ.

b) $\varphi(B) = R \circ h \circ g^{-1}(B) = R \circ h(D) = R(J) = K$.

c) $h \circ S_{(AC)}$ est la composée d'une similitude directe et d'une symétrie orthogonale (similitude indirecte) donc c'est une similitude indirecte

de plus $\begin{cases} h \circ S_{(AC)}(C) = C = \varphi(C) \\ h \circ S_{(AC)}(B) = h(I) = K = \varphi(B) \\ C \neq B \end{cases}$, on en déduit que $\varphi = h \circ S_{(AC)}$.

4) Soit D' le milieu de [OB]. ABCD est un rectangle donc son image par φ est un rectangle

$$\begin{cases}\varphi(A)=h\circ S_{(AC)}(A)=O\\ \varphi(B)=K\\ \varphi(C)=C\end{cases}$$ et OKCD' est un rectangle, il en résulte que l'image du rectangle ABCD par φ est le rectangle OKCD'.

Exercice 2

1) a) $(3\cos\theta)^2+9(\sin\theta)^2=9(\cos\theta)^2+9(\sin\theta)^2=9$ donc M est un point de (E).

b) $\begin{cases}x_M=x_P\\ y_M=y_N\end{cases}$.

c) $T:3(\cos\theta)x+9(\sin\theta)y=9\Leftrightarrow x\cos\theta+3y\sin\theta=3.$

2) a) $H(x,y)\in T\cap(O,\vec{i})\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\ x\cos\theta+3y\sin\theta=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\ x=\dfrac{3}{\cos\theta}\end{cases}$, il en résulte que $H\left(\dfrac{3}{\cos\theta},0\right)$.

$K(x,y)\in T\cap(O,\vec{j})\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ x\cos\theta+3y\sin\theta=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=\dfrac{1}{\sin\theta}\end{cases}$, il en résulte que $K\left(0,\dfrac{1}{\sin\theta}\right)$.

b) $HK^2=\left(\dfrac{3}{\cos\theta}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\right)^2=\dfrac{9}{\cos^2\theta}+\dfrac{1}{\sin^2\theta}$.

3) a) La fonction f est dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et

$$f'(\theta)=\frac{18\cos\theta\sin\theta}{\cos^4\theta}-\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\sin^4\theta}=\frac{18\sin^4\theta-2\cos^4\theta}{\cos^3\theta\sin^3\theta}=2\left(4\sin^2\theta-1\right)\frac{3\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^3\theta\sin^3\theta}.$$

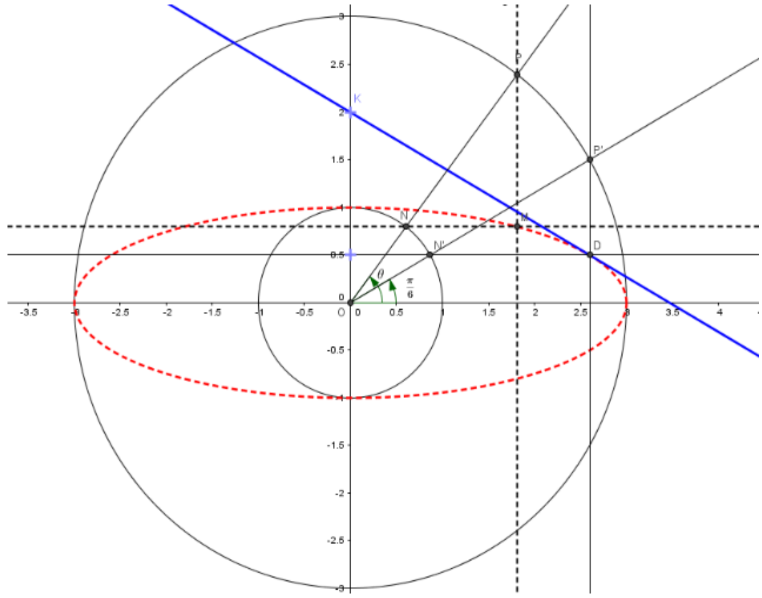
b) Le signe de $f'(\theta)$ est celui de $4\sin^2\theta-1=(2\sin\theta-1)(2\sin\theta+1)$.

$$\begin{cases}f'(\theta)=0\\ \theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\sin\theta-1=0\\ \theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases}\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{6}.$$

<table>
<tr><td>θ</td><td>0</td><td></td><td>$\frac{\pi}{6}$</td><td></td><td>$\frac{\pi}{2}$</td></tr>
<tr><td>$f'(\theta)$</td><td>||</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>||</td></tr>
<tr><td>$f(\theta)$</td><td>||</td><td>$+\infty \searrow$</td><td>16</td><td>$\nearrow +\infty$</td><td>||</td></tr>
</table>

D'après le tableau de variation HK est minimale si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{6}$.

c) Voir figure.



Exercice 3

1) Soit r le reste de a (mod 5).

On a a est premier avec 5, donc $r \in \{1,2,3,4\}$ or $r \wedge 5 = 1$ et 5 est premier donc $r^4 \equiv 1 (\bmod 5)$

Puisque $a^4 \equiv r^4 (\bmod 5)$, il en résulte que $a^4 \equiv 1 (\bmod 5)$.

2) a) $q \equiv p (\bmod 4)$ et $p \le q \Leftrightarrow q = 4n + p, n \in \mathbb{N}$.

$a^q \equiv a^{4n+p} (\bmod 5) \equiv a^{4n}.a^p (\bmod 5) \equiv a^p (\bmod 5)$.

b) Soit r le reste de a modulo 2, donc $r \in \{0,1\}$

Si $r = 0$ alors $a^p \equiv a^q \equiv 0 (\bmod 2)$ et si $r = 1$ alors $a^p \equiv a^q \equiv 1 (\bmod 2)$

On en déduit que $a^p \equiv a^q (\bmod 2)$

c) On a $\begin{cases} a^p \equiv a^q (\bmod 2) \\ a^p \equiv a^q (\bmod 5) \end{cases}$ donc $\begin{cases} a^p - a^q \equiv 0 (\bmod 2) \\ a^p - a^q \equiv 0 (\bmod 5) \\ 2 \wedge 5 = 1 \end{cases}$, on en déduit que $a^p - a^q \equiv 0 (\bmod 2 \times 5)$ ou

encore $a^p \equiv a^q (\bmod 10)$.

3) a) $25 \times 1 - 21 \times 1 = 4$.

b) $25x - 21y = 25 \times 1 - 21 \times 1$ donc $25(x-1) = 21(y-1)$ (*)

$\begin{matrix} 25 \text{ divise } 21(y-1) \\ 25 \wedge 21 = 1 \end{matrix}$ donc 25 divise $(y-1)$ donc $y = 25k + 1, k \in \mathbb{Z}$.

En remplaçant y dans (*), on obtient $x = 21k + 1, k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(21k+1, 25k+1), k \in \mathbb{Z}\}$

c) $A = \{(21k+1, 25k+1), k \in \mathbb{N}\}$

d) $\alpha = 21k + 1$ et $\beta = 25k + 1, k \in \mathbb{N}$, donc $\beta - \alpha = 4k$ on déduit d'après 2) que $n^\alpha \equiv n^\beta (\bmod 10)$.

Exercice 4

1) a) La fonction $v : x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en particulier en $e^{\sqrt{2}}$, il en résulte que

$$\lim_{x \to e^{\sqrt{2}}} \left(\frac{\ln x - \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}} \right) = \lim_{x \to e^{\sqrt{2}}} \left(\frac{v(x) - v\left(e^{\sqrt{2}}\right)}{x - e^{\sqrt{2}}} \right) = v'\left(e^{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{e^{\sqrt{2}}} = e^{-\sqrt{2}}.$$

b) $\lim\limits_{x\to\left(e^{\sqrt{2}}\right)^-}\dfrac{f(x)}{x-e^{\sqrt{2}}}=\lim\limits_{x\to\left(e^{\sqrt{2}}\right)^-}\dfrac{-\left(\ln x+\sqrt{2}\right)}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}\cdot\left(\dfrac{\ln x-\sqrt{2}}{x-e^{\sqrt{2}}}\right)$, or $\lim\limits_{x\to\left(e^{\sqrt{2}}\right)^-}\dfrac{-\left(\ln x+\sqrt{2}\right)}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}=-\infty$ et

$\lim\limits_{x\to\left(e^{\sqrt{2}}\right)^-}\left(\dfrac{\ln x-\sqrt{2}}{x-e^{\sqrt{2}}}\right)=e^{-\sqrt{2}}$, il en résulte que

$\lim\limits_{x\to\left(e^{\sqrt{2}}\right)^-}\dfrac{f(x)}{x-e^{\sqrt{2}}}=\lim\limits_{x\to\left(e^{\sqrt{2}}\right)^-}\dfrac{-\left(\ln x+\sqrt{2}\right)}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}\cdot\left(\dfrac{\ln x-\sqrt{2}}{x-e^{\sqrt{2}}}\right)=-\infty$. La courbe $\left(C_f\right)$ admet au point d'abscisse $e^{\sqrt{2}}$ une demi-tangente verticale.

c) $\lim\limits_{x\to e^{-\sqrt{2}}}\left(\dfrac{\ln x+\sqrt{2}}{x-e^{\sqrt{2}}}\right)=\lim\limits_{x\to e^{\sqrt{2}}}\left(\dfrac{v(x)-v\left(e^{-\sqrt{2}}\right)}{x-e^{\sqrt{2}}}\right)=v'\left(e^{-\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{e^{-\sqrt{2}}}=e^{\sqrt{2}}$.

$\lim\limits_{x\to\left(e^{-\sqrt{2}}\right)^+}\dfrac{f(x)}{x-e^{-\sqrt{2}}}=\lim\limits_{x\to\left(e^{\sqrt{2}}\right)^-}\dfrac{-\left(\ln x-\sqrt{2}\right)}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}\cdot\left(\dfrac{\ln x+\sqrt{2}}{x-e^{-\sqrt{2}}}\right)=+\infty$. On en déduit que f n'est pas dérivable à droite en $e^{-\sqrt{2}}$.

2) La fonction f est dérivable respectivement en α et β de plus f'' s'annule respectivement en α et β en changeant de signe donc les points C et D sont deux points d'inflexions de $\left(C_f\right)$.

3) a) Voir figure.
b) Voir figure.

4) a) La fonction g est dérivable sur $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ et $g'(x)=\cos x>0$ donc g est continue et strictement croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ par suite elle réalise une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ sur

$g\left(\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]\right)=\left[g\left(-\dfrac{\pi}{4}\right),g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right]=\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

b) $\begin{cases} g \text{ est strictement coissante sur} \left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right] \\ g \text{ est dérivable sur} \left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right] \\ g'(x)\neq 0 \text{ sur} \left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right] \end{cases}$ donc h est dérivable sur $g\left(\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]\right)=\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

$$h'(x)=\frac{1}{g'(h(x))}=\frac{1}{\cos y}\text{ avec}\begin{cases}h(x)=y\\ x\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\\ y\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}g(y)=x\\ x\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\\ y\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\sin y=x\\ x\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\\ y\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2 y=x^2\\ x\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\\ y\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\\ \sin y \text{ et } x \text{ de même signe}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos y=\sqrt{1-x^2}\\ x\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right].\\ y\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\end{cases}$$

On en déduit que $h'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

c) La fonction u est dérivable sur $\left[e^{-1},e\right]$ et $u'(x)=h'\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{2}}\right)\dfrac{1}{\sqrt{2}x}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\ln^2 x}{2}}}\dfrac{1}{\sqrt{2}x}=\dfrac{1}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}$.

d) $\displaystyle\int_{e^{-1}}^{e}\frac{1}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}dx=\left[u(x)\right]_{e^{-1}}^{e}=u(e)-u\left(e^{-1}\right)=h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-h\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

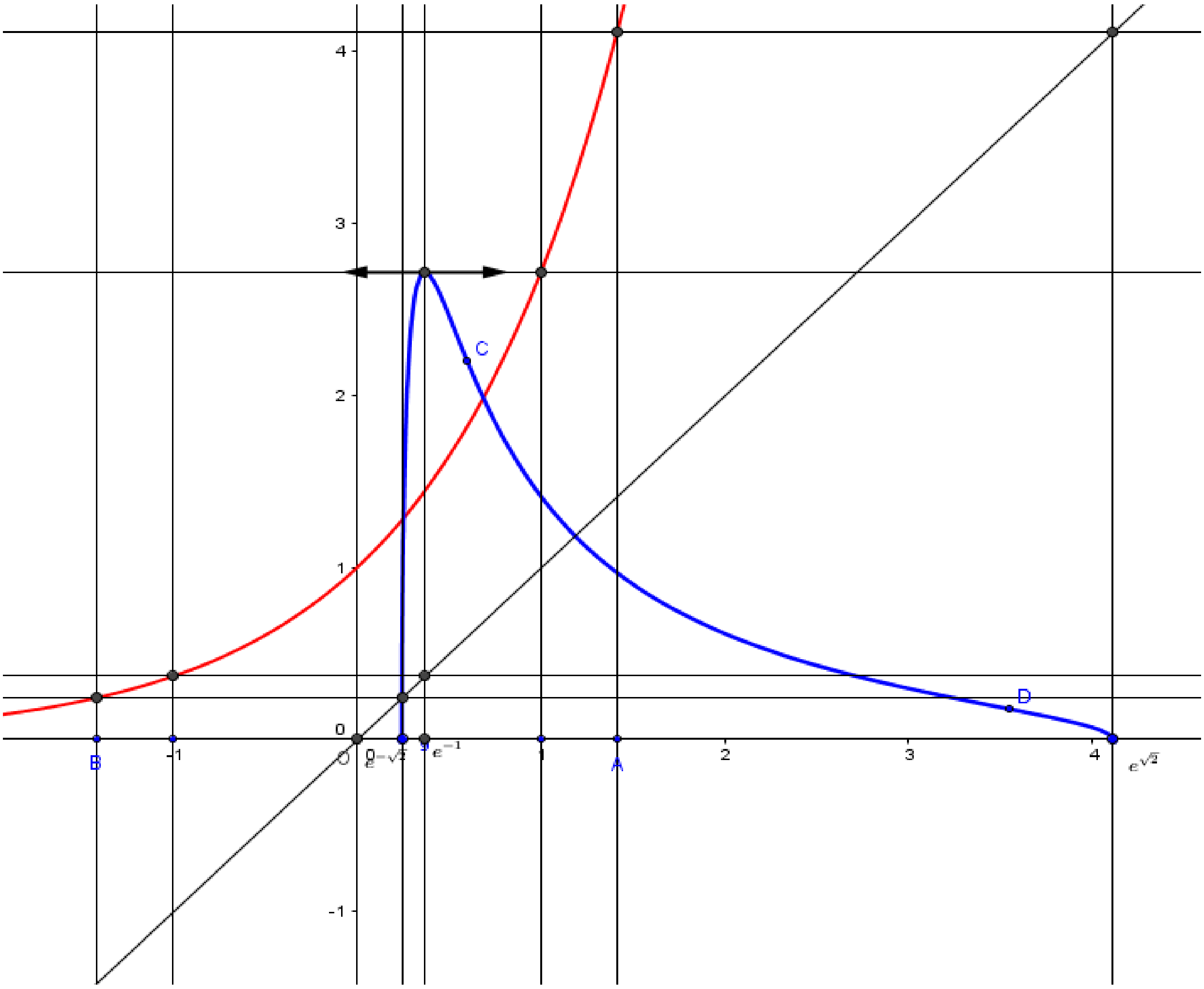
5) a) $\displaystyle A=\int_{e^{-1}}^{e}f(x)dx=\int_{e^{-1}}^{e}\frac{\sqrt{2-\ln^2 x}}{x}dx$

On pose $\begin{cases}u(x)=\sqrt{2-\ln^2 x}\\ v'(x)=\dfrac{1}{x}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}u(x)=\dfrac{-\ln x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}\\ v(x)=\ln x\end{cases}$

$$A=\left[\sqrt{2-\ln^2 x}\ln x\right]_{e^{-1}}^{e}+\int_{e^{-1}}^{e}\frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}dx=2+\int_{e^{-1}}^{e}\frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}dx.$$

b) Pour tout $x\in\left[e^{-1},e\right]$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{2-\ln^2 x}}{x}=\dfrac{2-\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}=\dfrac{2}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}-\dfrac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}$, il en résulte que $\dfrac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}=\dfrac{2}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}-f(x)$.

c) $\displaystyle A=2+\int_{e^{-1}}^{e}\frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}dx=2+\int_{e^{-1}}^{e}\frac{2}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}dx-\int_{e^{-1}}^{e}f(x)dx=2+\pi-A$, il en résulte que $2A=\pi+2$ ou encore $A=\left(\dfrac{\pi}{2}+1\right)$ua.


4
3
2
1
0
-1
-1
2
3
4
O
B
A
C
D
e^{-1}
$e^{-\sqrt{2}}$
$e^{\sqrt{2}}$

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ●●○●● **EXAMEN DU BACCALAURÉAT** SESSION **2017**	Épreuve : **Mathématiques**	
	Section : **Mathématiques**	
	Durée : 4h	Coefficient : 4
	Session principale	

Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

<u>Exercice 1</u> (5 points)

Le plan est orienté.

Dans la figure 1 de l'annexe 1 jointe,

ABC est un triangle équilatéral tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$,

Ω est un point intérieur au triangle ABC tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$,

I et J sont les projetés orthogonaux de Ω respectivement sur les droites (AB) et (AC),

D est le point de la droite (AC) tel que $DA = D\Omega$.

1) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega D}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

2) Soit $R = S_{(\Omega D)} \circ S_{(\Omega J)}$.

a) Justifier que R est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

b) Soit $F = R(J)$.

Montrer que F est un point de la demi-droite $[\Omega I)$. Construire le point F.

3) Soit h l'homothétie de centre Ω et telle que $h(F) = I$. On pose $f = h \circ R$.

a) Vérifier que $f(J) = I$.

b) Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le centre et l'angle.

c) Calculer $\frac{\Omega I}{\Omega A}$ et $\frac{\Omega A}{\Omega J}$. $\left(\text{On donne } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)$.

En déduire que le rapport de f est égal à $1+\sqrt{3}$.

4) Soit g la similitude indirecte de centre Ω telle que $g(J) = I$.

a) Montrer que $g = f \circ S_{(\Omega J)}$.

b) Déterminer le rapport de g.

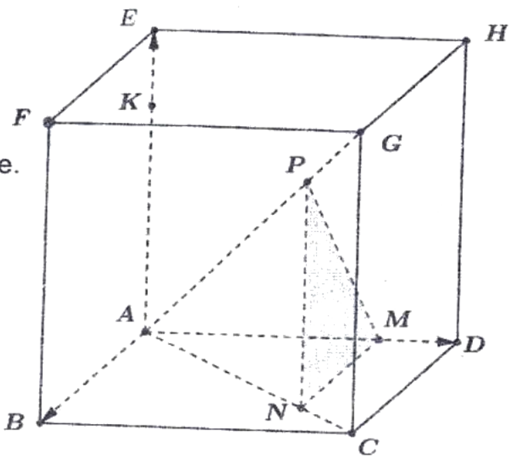
c) Montrer que l'axe de g est la droite (ΩD).

d) Montrer que $g = h \circ S_{(\Omega D)}$.

e) La droite (ΩD) coupe la droite (BC) en un point K. On pose $K' = g(K)$.

Vérifier que $h(K) = K'$. Construire alors le point K'.

Exercice 2 (3,5 points)



L'espace est orienté.

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube d'arrête 1.

$\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ est un repère orthonormé direct de l'espace.

1) a) Montrer que $\overrightarrow{EC} \wedge \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AH}$.

b) Montrer que l'aire du triangle ECD est égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Calculer le volume du tétraèdre AECD.

2) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{4}$.

On pose $M = h(D)$.

a) Le plan passant par M et parallèle au plan (DCG) coupe les segments $[AC]$ et $[AG]$ respectivement en N et P. Montrer que $h(C) = N$ et $h(G) = P$.

b) Le plan passant par M et parallèle au plan (ECD) coupe la droite (AE) en un point K. Calculer le volume du tétraèdre AKNM.

3) Soit (S) la sphère de centre le point $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Montrer que la sphère (S) coupe le plan (DCG) suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b) Soit (S') l'image de la sphère (S) par l'homothétie h.

Montrer que (S') coupe le plan (MNP) suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 3 (4 points)

1) Soit x un entier non nul premier avec 53.

a) Déterminer le reste modulo 53 de x^{52}.

b) En déduire que pour tout entier naturel k, $x^{52k+1} \equiv x \pmod{53}$.

2) Soit l'équation (E_1): $x^{29} \equiv 2 \pmod{53}$, où $x \in \mathbb{Z}$.

Montrer que 2^9 est une solution de (E_1).

3) Soit x une solution de l'équation (E_1).

a) Montrer que x est premier avec 53.

b) Montrer que $x^{261} \equiv x \pmod{53}$.

c) En déduire que $x \equiv 2^9 \pmod{53}$.

4) a) Montrer que $2^9 \equiv 35 \pmod{53}$.

b) Donner alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E_1).

5) On considère dans $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ l'équation (E_2) : $71u - 53v = 1$.

a) Vérifier que $(3\ ,\ 4)$ est une solution de l'équation (E_2).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ l'équation (E_2).

6) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} x \equiv 34 \pmod{71} \\ x^{29} \equiv 2 \pmod{53} \end{cases}$.

<u>Exercice 4</u> (7,5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement.

b) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) En déduire que $e^x - 1 \leq \sqrt{e^x - 1}$, si et seulement si, $x \leq \ln(2)$.

3) Montrer que le point $B(\ln 2\ ,\ 1)$ est un point d'inflexion de (C_f).

4) **Dans la figure 2 de l'annexe 2 jointe**, on a tracé dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe Γ de la fonction $x : \mapsto e^x - 1$.

a) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à Γ.

b) Tracer la courbe (C_f).

5) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \tan(x)$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, +\infty[$. On note g^{-1} sa fonction réciproque.

b) Calculer $(g^{-1})(0)$ et $(g^{-1})(1)$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $(g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

d) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{g^{-1}(x)}{x} = 1$.

6) On pose pour tout $x \in [0,+\infty[$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ et $G(x) = 2\left(f(x) - \left(g^{-1} o\, f\right)(x) \right)$.

a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $F'(x) = G'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0,+\infty[$, $F(x) = G(x)$.

c) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), la courbe Γ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$. Montrer que $A = 1 + \ln 2 - \frac{\pi}{2}$.

7) Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

On désigne par f_n la fonction définie sur $[\ln(n),+\infty[$ par $f_n(x) = \sqrt{e^x - n}$.

On note (C_n) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Soit G_n la fonction définie sur $[\ln(n),+\infty[$ par $G_n(x) = 2\left(f_n(x) - \sqrt{n}\, g^{-1}\left(\frac{f_n(x)}{\sqrt{n}} \right) \right)$.

Montrer que pour tout $x \in [\ln(n),+\infty[$, $G_n(x) = \int_{\ln(n)}^x f_n(t)\,dt$.

b) Vérifier que pour tout $x \geq \ln(n)$, $\sqrt{e^x - n} < \sqrt{e^x - 1}$.

En déduire que pour tout $x \geq \ln(n)$, $f_n(x) \leq e^x - 1$.

c) Soit A_n l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_n), la courbe Γ et les droites d'équations $x = \ln(n)$ et $x = \ln(n+1)$. Montrer que $A_n = 2\sqrt{n}\, g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - 1$.

d) Déterminer $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} A_n$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve : Mathématiques **Section : Mathématiques**

Annexe 1 à rendre avec la copie

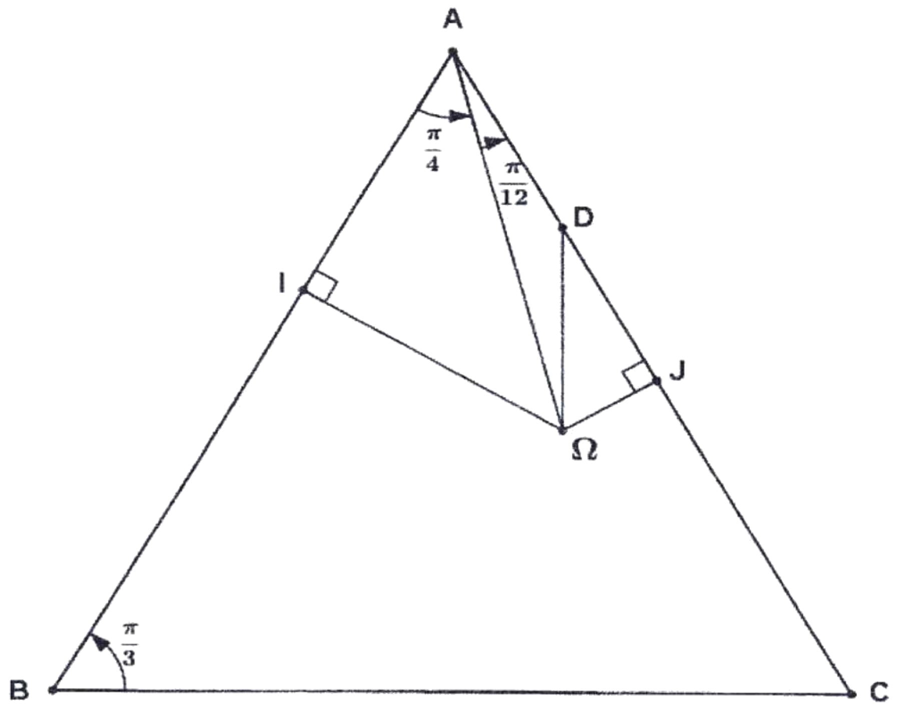


Figure 1

NE RIEN ECRIRE ICI

Épreuve : Mathématiques Section : Mathématiques

Annexe 2 à rendre avec la copie

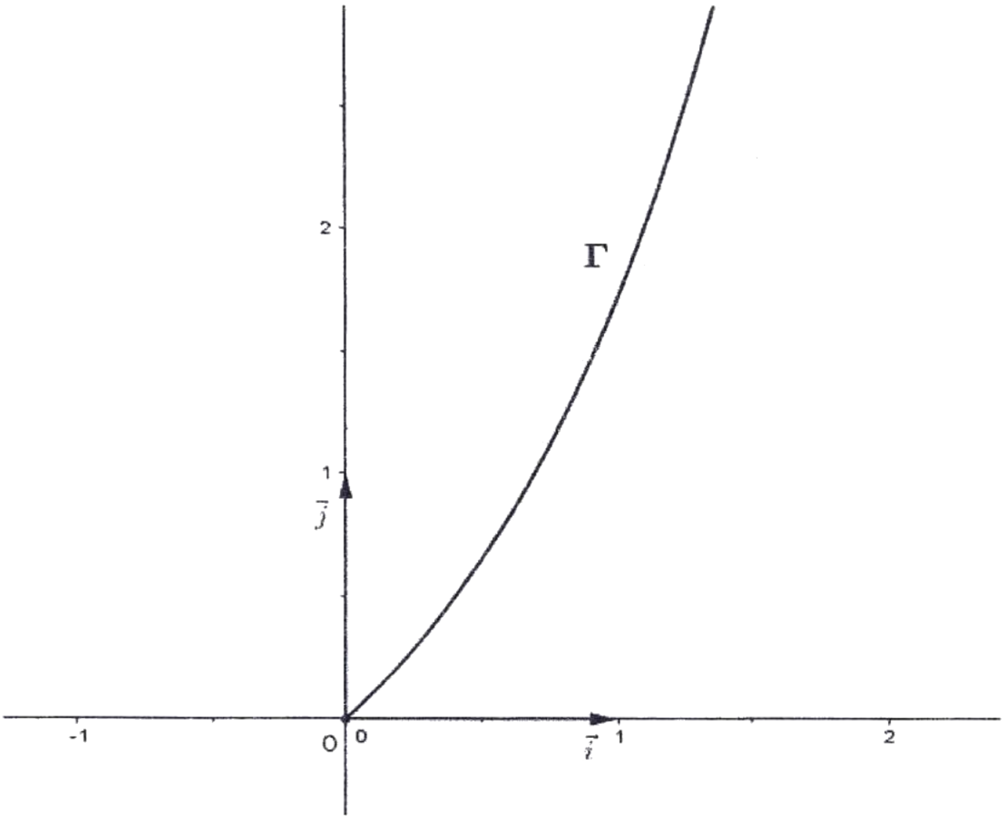


Figure 2

Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat
Session principale 2017 Section : *Mathématiques*

Exercice 1

1) $(\overrightarrow{\Omega J},\widehat{\overrightarrow{\Omega D}}) \equiv (\overrightarrow{\Omega J},\widehat{\overrightarrow{\Omega A}}) + (\overrightarrow{\Omega A},\widehat{\overrightarrow{\Omega D}})[2\pi]$.

$A\Omega J$ est un triangle rectangle en J tel que $(\overrightarrow{A\Omega},\widehat{\overrightarrow{AJ}}) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$.

Alors $(\overrightarrow{\Omega J},\widehat{\overrightarrow{\Omega A}}) \equiv (\overrightarrow{JA},\widehat{\overrightarrow{J\Omega}}) - (\overrightarrow{A\Omega},\widehat{\overrightarrow{AJ}})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}[2\pi]$

$DA\Omega$ est un triangle isocèle (direct) en D tel que $(\overrightarrow{A\Omega},\widehat{\overrightarrow{AD}}) \equiv (\overrightarrow{A\Omega},\widehat{\overrightarrow{AJ}})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$.

Alors $(\overrightarrow{\Omega D},\widehat{\overrightarrow{\Omega A}}) \equiv (\overrightarrow{A\Omega},\widehat{\overrightarrow{AJ}})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$. Par la suite $(\overrightarrow{\Omega J},\widehat{\overrightarrow{\Omega D}}) \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{12}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

2) a) R est la composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants au point Ω

Donc R est la rotation de centre Ω d'angle $\frac{2\pi}{3}$ car $2(\overrightarrow{\Omega J},\widehat{\overrightarrow{\Omega D}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

b) •$F = R(J)$ donc $(\overrightarrow{\Omega J},\widehat{\overrightarrow{\Omega F}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$, de plus $(\overrightarrow{\Omega J},\widehat{\overrightarrow{\Omega I}}) \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}[2\pi] \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

•$(\overrightarrow{\Omega F},\widehat{\overrightarrow{\Omega I}}) \equiv (\overrightarrow{\Omega F},\widehat{\overrightarrow{\Omega J}}) + (\overrightarrow{\Omega J},\widehat{\overrightarrow{\Omega I}})[2\pi] \equiv -\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}[2\pi] \equiv 0[2\pi]$ donc $F \in [\Omega I)$.

3) a) $f(J) = hoR(J) = h(F) = I$.

b) f est la composée d'une homothétie et d'un déplacement donc f est une similitude directe.

•$f(\Omega) = hoR(\Omega) = h(\Omega) = \Omega$. Alors Ω est le centre de f.

•$f(J) = I$ et $(\overrightarrow{\Omega J},\widehat{\overrightarrow{\Omega I}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ donc f est d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Remarques :

* f = h o R donc l'angle de f est celui de R car le rapport de h est positif car h(F) = I et $F \in [\Omega I)$.
* h et R ont le même centre Ω alors Ω est le centre de f = h o R.

c) Le triangle ΩAI est rectangle et isocèle en I, $\frac{\Omega I}{\Omega A} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Le triangle ΩJA est rectangle en J et $\widehat{\Omega A J} = \frac{\pi}{12}$, donc $\frac{\Omega A}{\Omega J} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$.

•f(J) = I . Donc le rapport de f est égal à $\frac{\Omega I}{\Omega J} = \frac{\Omega I}{\Omega A}\cdot\frac{\Omega A}{\Omega J} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1$.

4)a)• g est une similitude indirecte telle que $g(\Omega) = \Omega$ et $g(J) = I$.

• f o $S_{(\Omega J)}$ est la composée d'une similitude directe et d'un antidéplacement($S_{(\Omega J)}$),

donc f o $S_{(\Omega J)}$ est une similitude indirecte. $\left(S_{(\Omega J)}\text{ est une similitude indirecte}\right)$.

On vérifie facilement que f o $S_{(\Omega J)}(\Omega) = \Omega$ et f o $S_{(\Omega J)}(J) = I$.

Ainsi g et f o $S_{(\Omega J)}$ sont deux similitudes indirectes qui coïncident en deux points distincts donc $g = f \text{ o } S_{(\Omega J)}$.

b)•Méthode1: $g = f \text{ o } S_{(\Omega J)}$ et $S_{(\Omega J)}$ est une similitude indirecte de rapport 1.

Donc le rapport de g est celui de f c'est à dire $\sqrt{3}+1$.

•Méthode2: g(J) = I alors le rapport de g est $\frac{\Omega I}{\Omega J} = \sqrt{3}+1$.

c) $g(J)=I$ donc l'axe de g est la droite qui porte la bissectrice intérieure de l'angle $I\hat{\Omega}J$.

Or $\left(\overrightarrow{\Omega J}\,\hat{,}\,\overrightarrow{\Omega D}\right)\equiv\left(\overrightarrow{\Omega D}\,\hat{,}\,\overrightarrow{\Omega I}\right)[2\pi]$, alors la droite (ΩD) porte la bissectrice intérieure de l'angle $I\hat{\Omega}J$.

Ainsi l'axe de g est la droite (ΩD).

d) g est la similitude indirecte de centre Ω, de rapport $\sqrt{3}+1$ et d'axe (ΩD) donc la forme réduite de g est $g=h_{(\Omega,\ \sqrt{3}+1)}\ o\ S_{(\Omega D)}=S_{(\Omega D)}oh_{(\Omega,\ \sqrt{3}+1)}$

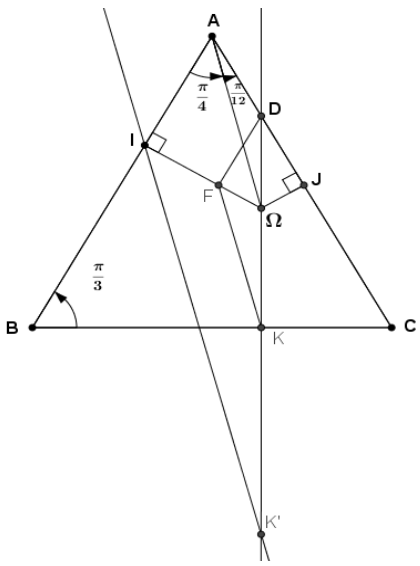
h est l'homothétie de centre Ω, de rapport $\dfrac{\Omega I}{\Omega F}=\dfrac{\Omega I}{\Omega J}=\sqrt{3}+1$. Donc $g\ =h\ o\ S_{(\Omega D)}$.

<u>Ou bien</u> : $g=f\ o\ S_{(\Omega J)}=hoRoS_{(\Omega J)}=hoS_{(\Omega D)}oS_{(\Omega J)}oS_{(\Omega J)}=hoS_{(\Omega D)}$.

e) K est un point de l'axe de g donc $K'=g(K)=h\ o\ S_{(\Omega D)}(K)=h(K)$.

* h (K) = K' et h (F) = I

* Le point K' est donc le point d'intersection de la droite (ΩK) avec la droite passant pat I et parallèle à la droite (FK).



Exercice 2

1) a) $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{EC}\wedge\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ or $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EC}\wedge\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AH}$.

b) L'aire du triangle ECD est égale à : $\dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{EC}\wedge\overrightarrow{ED}\|=\dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AH}\|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Le volume du tétraèdre AECD est : $v=\dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{EC}\wedge\overrightarrow{ED}\right).\overrightarrow{EA}\right|$. Avec $\overrightarrow{EA}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$, On trouve $v=\dfrac{1}{6}$.

2) a)• $C\in(AC)\cap(DCG)$ d'où $h(C)\in h(AC)\cap h(DCG)$.

$h(AC)=(AC)$ car le centre de h appartient à (AC) et $h(DCG)$ est le plan passant

par M et parallèle au plan (DCG).
Comme $(AC)\cap h(DCG)=\{N\}$ alors $h(C)=N$.

- $C\in(AG)\cap(DCG)$ d'où $h(G)\in h(AG)\cap h(DCG)$.
$h(AG)=(AG)$ et $(AG)\cap h(DCG)=\{P\}$ alors $h(G)=P$.

b) h(E) est le point d'intersection du plan h(ECD) avec la droite (AE)= h(AE). Donc h(E) = K.
(h(ECD) est le plan parallèle à (ECD) et passant par M).
Ainsi l'image par h du tétraèdre AECD est le tétraèdre AKMN.

Par la suite $V(AKMN)=\left(\frac{3}{4}\right)^3 \text{ x } \frac{1}{6}$.

3) a) **Méthode 1** : une équation du plan (DCG) est $y-1=0$ d'où $d(I,(DCG))=\frac{1}{2}$,

par conséquent : le plan (DCG) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) de rayon
$r=\sqrt{R^2-d(I,(DCG))}=\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Le centre de (C) est le point H du plan (DCG) vérifiant $\overrightarrow{IH}=\alpha\overrightarrow{AD}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

(Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est normal au plan (DCG)). On trouve $H\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$.

Méthode 2 : Remarquons que les points D, C et G (qui ne sont pas alignés) appartiennent à (S), alors le plan (DCG) coupe la sphère (S) suivant le cercle (C) circonscrit au triangle DCG (qui est rectangle en C). Le centre du cercle (C) est donc le milieu du segment [DG] c'est-à-dire le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$ et le rayon de (C) est $\frac{DG}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) h(S) = (S') , h(DCG) = (MNP) et $(S)\cap(DCG)=(C)$.
Donc le plan (MNP) coupe la sphère (S') suivant le cercle (C') = h(C).

(C') est un cercle de centre le point H' = h(H) et de rayon R' = $\frac{3}{4}R=\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

On trouve $H'\left(\frac{3}{8},\frac{3}{4},\frac{3}{8}\right)$.

Exercice 3

1) a) 53 est premier et x est un nombre premier avec 53 donc d'après Fermat :
$x^{52}\equiv 1(\text{mod}\,53)$. Le reste modulo 53 de x^{52} est égal à 1.

b) Soit k un entier naturel, on écrit $x^{52k+1}=\left(x^{52}\right)^k\cdot x$

Comme $x^{52}\equiv 1(\text{mod}\,53)$ alors $x^{52k+1}\equiv x\ (\text{mod}\ 53)$.

2) $\left(2^9\right)^{29}=2^{9\text{x}29}$ et $9\text{x}29=261=1+52\text{x}5$. Comme 2 est premier avec 53,

alors d'après 1)b) $\left(2^9\right)^{29}\equiv 2(\text{mod}\,53)$ d'où 2^9 est solution de l'équation (E_1).

3) a) Soit $d=x\wedge 53$.
d divise x donc d divise x^{29} et d divise 53 donc d divise 2. Car $x^{29}\equiv 2\ (\text{mod}\ 53)$.
($x^{29}\equiv 2\ (\text{mod}\ 53)$ alors il existe $p\in\mathbb{Z}$ tel que $x^{29}=2+53p$ c'est à dire $x^{29}-53p=2$)
Donc d = 1 ou d = 2. Comme 2 ne divise pas 53 alors d = 1.

b) x une solution de l'équation (E_1). D'après 3)a) x est premier avec 53.

261= 5x 52 + 1 donc $x^{261} \equiv x \pmod{53}$ d'aprés 1) b).

c) x est une solution de (E_1) alors $x^{29} \equiv 2 \pmod{53}$ d'où $\left(x^{29}\right)^9 \equiv 2^9 \pmod{53}$. (I)

Or 29 x 9 = 261 donc $\left(x^{29}\right)^9 \equiv x^{261} \pmod{53}$. D'aprés : 3)b) $x^{261} \equiv x \pmod{53}$. (II)

(I) et (II) donnent $x \equiv 2^9 \pmod{53}$.

4) a) $2^9 = 512 = 9 \times 53 + 35$ d'où $2^9 \equiv 35 \pmod{53}$

b) • Si x est une solution de (E_1) alors $x \equiv 2^9 \pmod{53}$, d'aprés 3)c)

• Si $x \equiv 2^9 \pmod{53}$ alors $x^{29} \equiv \left(2^9\right)^{29} \pmod{53}$

et comme $\left(2^9\right)^{29} \equiv 2 \pmod{53}$ (car 2^9 solution de (E_1)) alors $x^{29} \equiv 2 \pmod{53}$.

D'où x solution de (E_1).

Conclusion : x solution de $(E_1) \Leftrightarrow x \equiv 2^9 \pmod{53}$.

Or $2^9 \equiv 35 \pmod{53}$ d'aprés 4)a), d'où les solutions de l'équation (E_1) sont les entiers $53k + 35$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

5) a) 71 x 3 - 53 x 4 = 213 - 212 =1 donc (3 , 4) solution de (E_2).

b) •Soit (u, v) une solution de (E_2)

Des égalités: $71u - 53v = 1$ et 71 x 3 - 53 x 4 = 1 on déduit que $71(u-3) = 53(v-4)$

Comme $71 \wedge 53 = 1$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $v - 4 = 71k$ (lemme de Gauss)

Ainsi $S_{\mathbb{Z}x\mathbb{Z}} \subset \left\{ (u, 4+71k), (u,k) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$

• Soit $(u,k) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\begin{aligned}(u, 4+71k) \text{ est une solution de } (E_2) &\Leftrightarrow 71u - 53(4+71k) = 1\\ &\Leftrightarrow 71u - 53(4+71k) = 71 \times 3 - 53 \times 4\\ &\Leftrightarrow 71u - 53 \cdot 71k = 71 \times 3\\ &\Leftrightarrow u - 53 \cdot k = 3\\ &\Leftrightarrow u = 3 + 53k\end{aligned}$$

Par la suite $\left\{ (u, 4+71k), (u,k) \in \mathbb{Z}^2 \right\} \subset S_{\mathbb{Z}x\mathbb{Z}}$ si et seulement si $u = 3 + 53k$.

Conclusion : $S_{\mathbb{Z}x\mathbb{Z}} = \left\{ (3+53k, 4+71k), k \in \mathbb{Z} \right\}$

Remarque :On pourra appliquer le lemme de gauss deux fois : On exprime u et v en fonction de k et k' puis on vérifie que k=k'.

6) Soit $x \in \mathbb{Z}$,

$$\bullet \begin{cases} x \equiv 34 \pmod{71} \\ x^{29} \equiv 2 \pmod{53} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 34 \pmod{71} \\ x \equiv 35 \pmod{53} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 34 + 71u, & u \in \mathbb{Z} \\ x = 35 + 53v, & v \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Alors $71u - 53v = 1$. Donc (u, v) est solution de l'équation (E_2).

Par la suite il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\begin{cases} u = 3 + 53k \\ v = 4 + 71k \end{cases}$.

Ainsi $x = 34 + 71(3 + 53k) = 247 + 3763k, \; k \in \mathbb{Z}$.

réciproquement :

si $x = 247 + 3763\,k,\ k \in \mathbb{Z}$ alors

- $x = 71 \times 3 + 34 + 71\times(53\,k) \equiv 34 \pmod{71}$
- $x = 35 + 53 \times 4 + 53\times(71\,k) \equiv 35 \pmod{53}$. On sait que $2^{29} \equiv 35 \pmod{53}$.

Conclusion : l'ensemble des solutions du système est $S_{\mathbb{Z}} = \{\ 247 + 3763\,k,\ k \in \mathbb{Z}\ \}$.

Exercice 4

1)• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{e^x - 1}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{e^x}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}} = +\infty$.

(C_f) admet au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$.

2) a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{e^x - 1}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{\dfrac{e^x - 1}{x}} = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

• $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$ donc f n'est pas dérivable à droite en 0 .

La courbe (C_f) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente vertivale.

b) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$.

En effet:la fonction dérivée de $u : x \mapsto e^x - 1$ est la fonction $u' : x \mapsto e^x$ et $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

(u est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $u(x) > 0,\ \forall x \in]0, +\infty[$)

c)

x	0		$+\infty$
f'(x)	||	+	
f	0	↗	$+\infty$

d) f (ln(2)) = 1 et la fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$:

$x \in [0, \ln 2] \Leftrightarrow f(x) \le 1 \Leftrightarrow \sqrt{e^x - 1} \le 1 \Leftrightarrow \sqrt{e^x - 1} \times \sqrt{e^x - 1} \le 1 \times \sqrt{e^x - 1}$

$\Leftrightarrow e^x - 1 \le \sqrt{e^x - 1}$

(On sait que $\sqrt{e^x - 1} \ge 0$ pour tout $x \ge 0$).

3) On vérifie que pour tout $x\,]0, +\infty[$, $f''(x) = \dfrac{e^x\left(e^x - 2\right)}{4\left(\sqrt{e^x - 1}\right)^3}$.

x	0		ln(2)		$+\infty$
f''(x)	||	-	0	+	

f ''(x) s'annule en ln(2) en changeant de signe donc le point B(ln(2),1) est un point d'inflexion de (C_f).

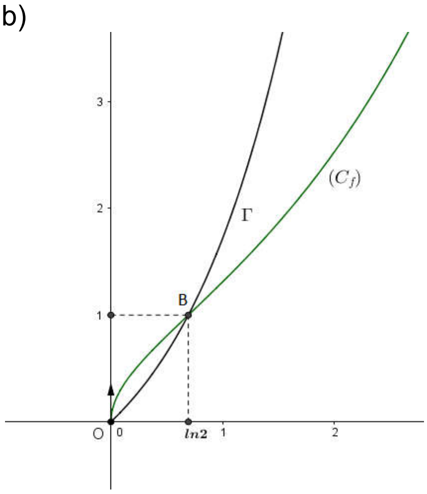
4) a) D'aprés 2) d) : $x \in [0,\ln 2] \Leftrightarrow e^x - 1 \le f(x)$.

Par la suite :

- si $x \in [0,\ln 2]$ alors alors (C_f) au-dessus de Γ.
- si $x \in [\ln(2),+\infty[$ alors (C_f) au-dessous de Γ.

(Remarque : $(C_f) \cap \Gamma = \{B\}$)

b)



5) a) La fonction g est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$

donc g est strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Ainsi g réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $g\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$.

De la continuité g sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et des égalités $g(0)=0$ et $\lim\limits_{x \mapsto \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} g(x) = +\infty$.

On déduit que $g\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right) = [0,+\infty[$.

b) $g^{-1}(0) = 0$ et $g^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$. Car $g(0) = 0$ et $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

c) Pout tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x) \neq 0$ alors g^{-1} est dérivable sur $g\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right) = [0,+\infty[$.

Soit $x \in [0,+\infty[$ et $y \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\left(g^{-1}(x) = y\right) \Leftrightarrow \left(g(y) = x\right) \Leftrightarrow (\tan y = x)$,ainsi :

pour tout $x \in [0,+\infty[$, $\left(g^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \dfrac{1}{g'(y)} = \dfrac{1}{1+(\tan y)^2} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{g^{-1}(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{g^{-1}(x) - g^{-1}(0)}{x-0} = \left(g^{-1}\right)'(0) = 1$.

6) a) f est continue sur $[0,+\infty[$ donc F est la primitive de f sur $[0,+\infty[$ qui s'annule en 0. $(F(0)=0)$

ainsi pour tout $x \in [0,+\infty[$ $F'(x) = f(x)$.

- $G(x) = 2\left(f(x) - \left(g^{-1} o f\right)(x) \right)$.

G est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$G'(x) = 2\left[f'(x) - f'(x) \cdot \left(g^{-1}\right)'(f(x))\right] = 2f'(x)\left[1 - \left(g^{-1}\right)'(f(x))\right]$$

$$= 2f'(x)\left(1 - \frac{1}{1+(f(x))^2}\right) = 2f'(x)\left(1 - \frac{1}{1+e^x-1}\right) = 2 \cdot \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right) = \sqrt{e^x-1} = f(x).$$

6

Donc $F'(x)=G'(x)$ pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$.

b) Pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$, $F'(x)=G'(x)$,

donc il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que ,pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$, $F(x)=G(x)+k$.

Les fonctions F et G sont continues en 0 et $F(0)=G(0)$ alors $k=0$.

(En effet $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}G(x)+k$ c'est à dire $F(0)=G(0)+k$)

Conclusion: pour tout $x\in\left[0,+\infty\right[$, $F(x)=G(x)$.

c) Pour tout $x\in[0,\ln(2)]$, $e^x-1\le f(x)$.

$$A=\int_0^{\ln(2)}\left(f(t)-\left(e^t-1\right)\right)dt=G(\ln(2))-\left[e^t-t\right]_0^{\ln(2)}=2\left(1-g^{-1}(1)\right)-\left(2-\ln(2)-1\right).\text{D'où } A=1+\ln2-\frac{\pi}{2}.$$

7)a)La fonction G_n est dérivable sur $\left]\ln(n),+\infty\right[$ et pour tout $x\in\left]\ln(n),+\infty\right[$,

$$G'_n(x)=2\left((f_n)'(x)-\sqrt{n}\,\frac{(f_n)'(x)}{\sqrt{n}}\cdot\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{f_n(x)}{\sqrt{n}}\right)\right)=2(f_n)'(x)\left(1-\sqrt{n}\,\frac{1}{1+\left(\frac{f_n(x)}{\sqrt{n}}\right)^2}\right)$$

$$=2(f_n)'(x)\left(1-\frac{1}{1+\frac{e^x-n}{n}}\right)=2\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-n}}\left(\frac{e^x-n}{e^x}\right)=\sqrt{e^x-n}=f_n(x).$$

La fonction $u:x\mapsto\int_{\ln(n)}^{x}f_n(t)dt$ est dérivable sur $\left[\ln(n),+\infty\right[$ et $u'(x)=f_n(x)$.

(Voir l'explication en 6)a))

Donc pour tout $x\in\left]\ln(n),+\infty\right[$, $G'_n(x)=u'(x)$.

Alors il existe $k\in\mathbb{R}$, tel que pour tout $x\in\left]\ln(n),+\infty\right[$,$G_n(x)=u(x)+k$.

comme $\lim\limits_{x\to\ln n}G_n(x)=\lim\limits_{x\to\ln n}\left[u(x)+k\right]$, de plus G_n et u sont continues en $\ln(n)$,

alors $G_n(\ln n)=u(\ln n)+k$ et puisque $G_n(\ln(n))=u(\ln(n))=0$ on trouve $k=0$.

Conclusion : Pour tout $n\ge2$ et pour tout $x\in\left[\ln(n),+\infty\right[$, $G_n(x)=\int_{\ln(n)}^{x}f_n(t)\,dt$.

b) Soit $n\ge2$; $n>1$ alors $-n<-1$ d'où $e^x-n<e^x-1$.

Comme $n\ge2$ et $x\ge\ln(n)$, $e^x-n\ge0$ et $e^x-1\ge0$.

D'où pour tout $n\ge2$ et pour tout $x\ge\ln(n)$, $\sqrt{e^x-n}<\sqrt{e^x-1}$.

Or d'après 4)a), $f(x)\le e^x$-1 pour tout $x\in\left[\ln(n),+\infty\right[$, car $(\ln(n)\ge\ln(2))$.

Donc $f_n(x)\le e^x$-1 , pour tout $n\ge2$ et pour tout $x\in\left[\ln(n),+\infty\right[$.

c) $A_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} \left(\left(e^x - 1\right) - f_n(x)\right) dx = \left[e^x - x\right]_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} - \left[G_n(x)\right]_{\ln(n)}^{\ln(n+1)}$

$= \left(n+1-\ln(n+1)-n+\ln(n) \right) - G_n(\ln(n+1))$

$= 1+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - 2\left(1-\sqrt{n}\, g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = 2\sqrt{n}\, g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - 1.$

d) • $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x) = 0$

• $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g^{-1}(x)}{x} = 1$ d'aprés 5)d).

D'où $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} A_n = 2-1 = 1.$

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ●●○●● **EXAMEN DU BACCALAURÉAT** SESSION **2017**	Épreuve : **Mathématiques**	
	Section : **Mathématiques**	
	Durée : 4h	Coefficient : 4
	Session de contrôle	

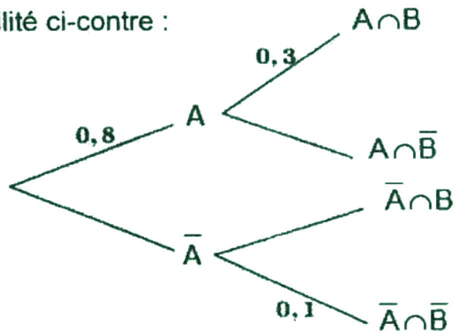
Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6.
Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

On représente une expérience aléatoire par l'arbre de probabilité ci-contre :



1) La probabilité de l'évènement $\overline{B}$ sachant A est égale à :

a) 0,7 b) 0,24 c) 0,11

2) La probabilité de l'évènement $\overline{A} \cap B$ est égale à :

a) 0,11 b) 0,18 c) 0,92

3) La probabilité de l'évènement A sachant B est égale à :

a) $\frac{3}{7}$ b) $\frac{5}{7}$ c) $\frac{4}{7}$

Exercice 2 (6 points)

Le plan est orienté.

Dans la figure 1 de l'annexe 1 jointe, ABC est un triangle direct tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$. Les points I, J et K sont les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement des sommets A, B et C. Le point E est le milieu du segment $[AC]$.

1) Montrer que le triangle AIE est équilatéral direct.

2) Soit S la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

On note Δ est la médiatrice du segment $[IE]$ et on pose $f = S \circ S_{\Delta}$.

a) Montrer que $S(I) = B$. En déduire que $f(E) = B$.

b) Montrer que f est une similitude indirecte de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

c) Caractériser $f \circ f$. En déduire que $f(B) = C$.

d) Montrer que l'image par f de la droite (BJ) est la droite (CK). En déduire que $f(J) = K$.

3) Soit g la similitude indirecte telle que $g(C) = A$ et $g(K) = I$.

a) En remarquant que le triangle BCK est rectangle, isocèle et direct, montrer que le point B est le centre de g.

b) On pose $D = g(A)$. Montrer que le point D appartient à la droite (BI).

c) Justifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$. Construire alors le point D.

4) On pose $\varphi = g \circ f$.

a) Montrer que φ est une similitude directe. Déterminer $\varphi(A)$ et $\varphi(B)$.

b) Montrer qu'une mesure de l'angle de φ est $\frac{7\pi}{6}$.

5) Soit Ω le centre de φ.

a) Vérifier que $D = \varphi \circ \varphi \circ \varphi(E)$. En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega D}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b) On pose $F = \varphi \circ \varphi \circ \varphi(J)$. Montrer les droites (FD) et (JE) sont perpendiculaires.

c) Vérifier que $F = \varphi \circ \varphi(I)$. En remarquant que $IB = IE$, montrer que $FD = FA$.

d) Construire le point F. En déduire une construction du point Ω.

Exercice 3 (4 points)

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 = 0$.

1) a) Justifier que l'équation (E) possède deux solutions distinctes. (On ne demande pas de déterminer ces solutions).

b) Déterminer $z_1 + z_2$. En déduire que les solutions de l'équation (E) ne sont pas conjuguées.

On désigne par z_1 la solution telle que $|z_1| > 1$ et z_2 l'autre solution.

On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B, I et J d'affixes respectives z_1, z_2, 1 et -1.

2) a) Soit C le milieu du segment $[AB]$. Montrer que l'affixe du point C est $z_C = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) En utilisant $(z_2 - z_1)^2 = (z_2 + z_1)^2 - 4z_1z_2$, montrer que $(z_2 - z_1)^2 = 4\left(z_C^2 - 1\right)$.

c) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CI}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CJ}}\right) \equiv 0\ [2\pi]$.

En déduire que la droite (AB) porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ICJ}$.

2/6

3) Soit (C) le cercle circonscrit au triangle IAJ. On note K le centre de (C) et z_K l'affixe du point K.

a) Prouver que K est un point de l'axe $(O,\vec{v})$. On pose $z_K = i\,y$, où y est un réel non nul.

b) Soit M un point du plan d'affixe z. Justifier que $(M\in(C))$ équivaut à $\left(|z-iy|^2=|1-iy|^2\right)$.

En déduire que $(M\in(C))$ équivaut à $\left(z\bar{z}+iy(z-\bar{z})=1\right)$.

c) En remarquant que $z_1=\dfrac{1}{z_2}$, montrer que le point B appartient au cercle (C).

4) a) Construire le point C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

b) Construire la droite (AB) et la médiatrice du segment $[AB]$.

c) Déduire une construction des points A et B, images des solutions de l'équation (E).

<u>Exercice 4</u> (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A) 1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$. Interpréter graphiquement.

2) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{x+2}{x(x+1)}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2=x+1$.

b) On note α la solution positive. Vérifier que la deuxième solution est égale à $-\dfrac{1}{\alpha}$.

c) Montrer que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse α.

d) Montrer qu'une équation de la tangente T à (C_f) au point A est $y=\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^3}\right)(x-\alpha)$.

e) Vérifier que la tangente T passe par le point $B\left(0\,,-1-\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$.

4) **Dans la figure 2 de l'annexe 2 jointe**, on a tracé dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la droite D d'équation $y = x + 2$ et la courbe Γ de la fonction $x :\mapsto x^2 + 1$.

a) Construire les points A et B.

b) Construire la tangente T et tracer la courbe (C_f).

B) Soit n un entier naturel non nul.

On pose pour tout $x \geq 1$, $G_n(x) = \int_1^x f(t^n)\,dt$.

1) a) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $\ln\left(\frac{1}{2}\right)(x-1) \leq G_n(x) \leq f(x^n)(x-1)$.

b) Montrer que pour tout réel $x \geq 1$, $G_n(x) = x\,f(x^n) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - n(x-1) - \int_1^x \frac{n}{1+t^n}\,dt$.

2) On pose $J_n = n\int_1^{\sqrt[n]{\alpha}} \frac{1}{1+t^n}\,dt$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$.

b) En utilisant B)1)a), montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n\left(\sqrt[n]{\alpha}\right) = 0$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt[n]{\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln(\alpha)$.

d) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .
Nom et Prénom : . . . .
Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants
. . . .
. . . .

Épreuve : Mathématiques **Section : Mathématiques**

Annexe 1 à rendre avec la copie

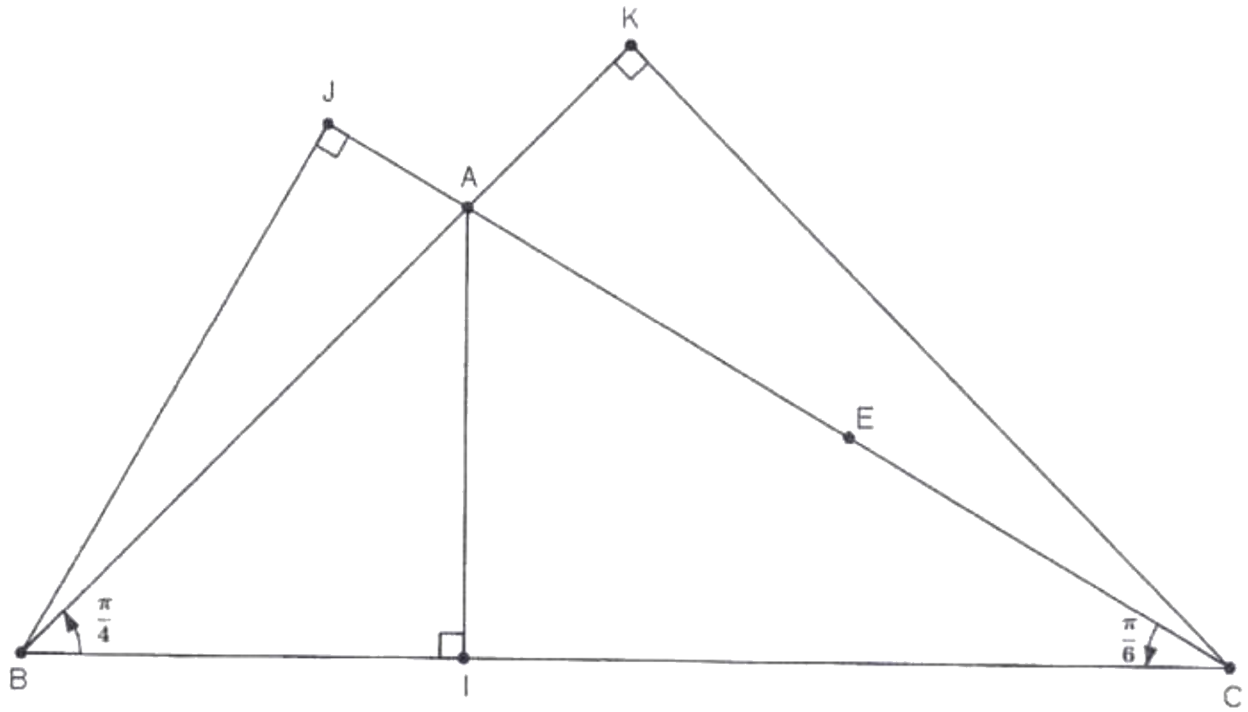


Figure 1

NE RIEN ECRIRE ICI

Épreuve : Mathématiques　　　Section : Mathématiques

Annexe 2 à rendre avec la copie

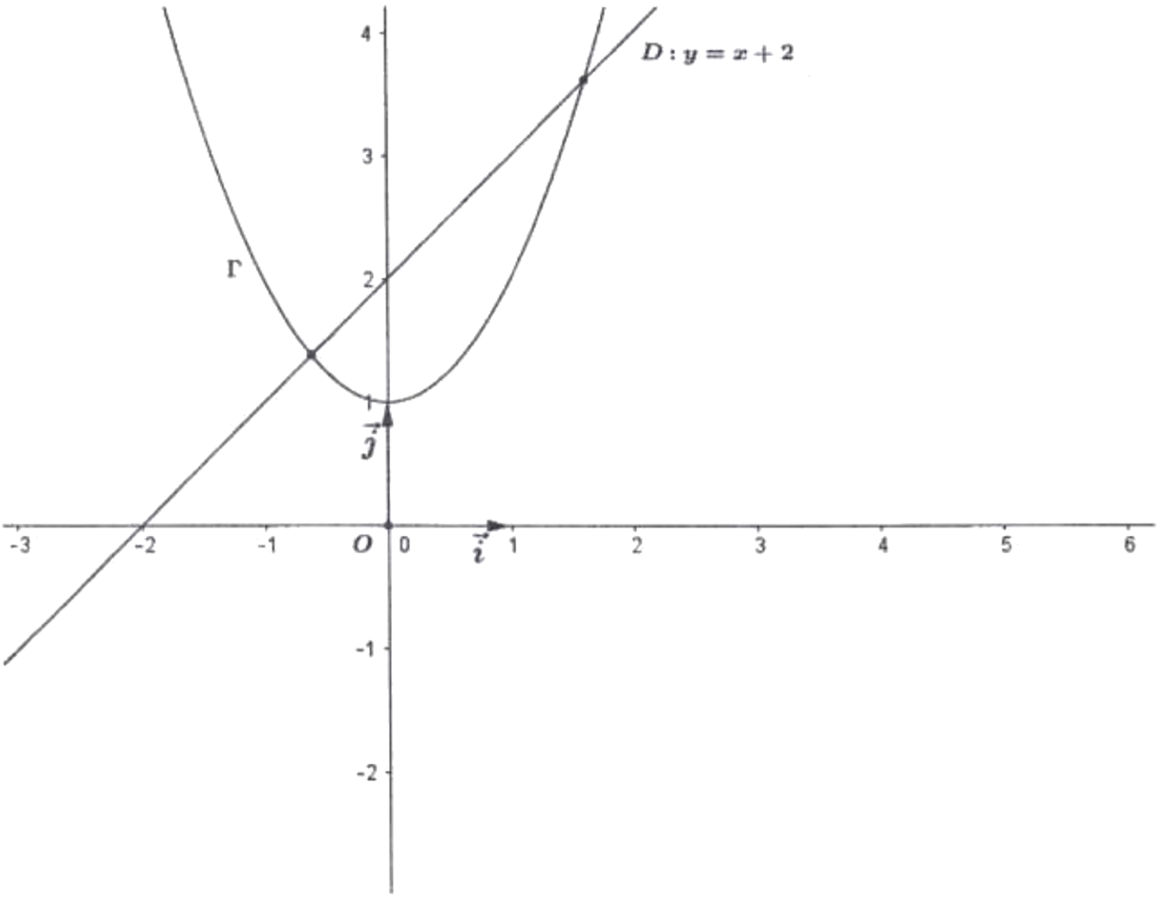


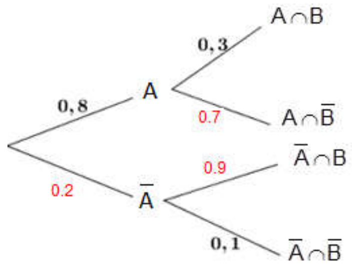
Figure 2

6/6

Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat
Session de contrôle 2017 Section : *Mathématiques*

Exercice 1

Il suffit de compléter l'arbre de probabilité :



1) a) 0.7

2) b) 0.18=0.2x0.9

3) c) $\dfrac{p(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0.8\text{x}0.3}{0.8\text{x}0.3+0.2\text{x}0.9}=\dfrac{24}{42}=\dfrac{4}{7}$.

Exercice 2

Le triangle AIC est rectangle en I et $(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AC}})\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ car $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CI}})\equiv\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$, puisque $I\in[CB)$.

De plus $[IE]$ est une médiane dans ce triangle donc $IE=AE$ donc AIE est équilatéral.

AIE est direct car $(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AE}})\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

2) a) ABI est un triangle rectangle en I, isocèle et direct donc

$AB=\sqrt{2}\,AI$ et $(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}})\equiv-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ par la suite $S(I)=B$.

• $S_\Delta(E)=I$ alors $f(E)=S\circ S_\Delta(E)=S(I)=B$.

b) f est la composée d'une similitude directe S de centre A et de rapport $\sqrt{2}$ et d'une similitude indirecte S_Δ de rapport 1 et comme $A\in\Delta$ alors $f(A)=S\circ S_\Delta(A)=A$ (f(A) = A) par la suite f est une similitude indirecte de centre A et de rapport $\sqrt{2}\times1=\sqrt{2}$.

c) f o f est une homothétie de centre A et de rapport : $\sqrt{2}^2=2$.

* $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AE}$ donc f o f (E)=C.
* f o f (E)=C d'où f (f(E)) = C or f(E) = B alors f(B) =C.

d) * (BJ) $\perp$ (AE) et f(B)=C donc :

f (BJ) est la droite passant par C et perpendiculaire à la droite f(AE) = (AB). D'où f(BJ) = (CK).

* $J\in(BJ)\cap(AC)$ donc $f(J)\in f(BJ)\cap f(AC)=(CK)\cap(AB)=\{K\}$. Ainsi $f(J)=K$. (f(AC)=f(AE)).

3) a) On a $g(C)=A$ et $g(K)=I$. On note $B'=g(B)$.

le triangle KBC est rectangle en K, isocèle et <u>direct</u> donc son image IB'A par g est un triangle rectangle en I, isocèle et <u>indirect</u>. Or le triangle IBA est rectangle en I, isocèle et indirect.
D'où B= B' et par la suite B est le centre de g.

b) g(B) = B et g(K)= I et A appartient à la droite (BK) donc D =g(A) est un point de la droite (BI).

c) g(C)=A , g(B)=B et g(A)=D ; g est une similitude indirecte d'où

$$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})\equiv-(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}})[2\pi]\equiv(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})[2\pi]\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi].$$

On construit un point T tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AT}})\equiv\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$.

Le point D est l'intersection de la droite (BI) avec la demi-droite $[AT)$.

4) a) φ est la composée de deux similitudes indirectes donc c'est une similitude directe.

• $\varphi(A)=gof(A)=g(A)=D$ et $\varphi(B)=gof(B)=g(C)=A$.

b) $\varphi(A)=D$ et $\varphi(B)=A$. Soit θ une mesure de l'angle de φ.

$$\theta \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DA}}\right)[2\pi] \equiv \pi+\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)[2\pi] \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi].$$

5) • $\varphi(E)=gof(E)=g(B)=B$, $\varphi(B)=A$ et $\varphi(A)=D$. Donc $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(E)=D$.

•$\varphi \circ \varphi \circ \varphi$ est la complosée de 3 similitudes directes de même centre Ω et de même angle $\frac{7\pi}{6}$ donc c'est une similitude directe de centre Ω et d'angle $3x\frac{7\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

• $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(E)=D$ donc $(\widehat{\overrightarrow{\Omega E},\overrightarrow{\Omega D}}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b) $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(E)=D$ et $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(J)=F$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{EJ},\overrightarrow{DF}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$, donc $(EJ)\perp(DF)$.

c) • $F=\varphi \circ \varphi \circ \varphi(J)$ et $\varphi(J)=g \circ f(J)=g(K)=I$ d'où $F=\varphi \circ \varphi(I)$

• $\begin{cases} \varphi \circ \varphi(I)=F \\ \varphi \circ \varphi(E)=A \\ \varphi \circ \varphi(B)=D \end{cases}$ et comme IB = IE alors FD = FA.

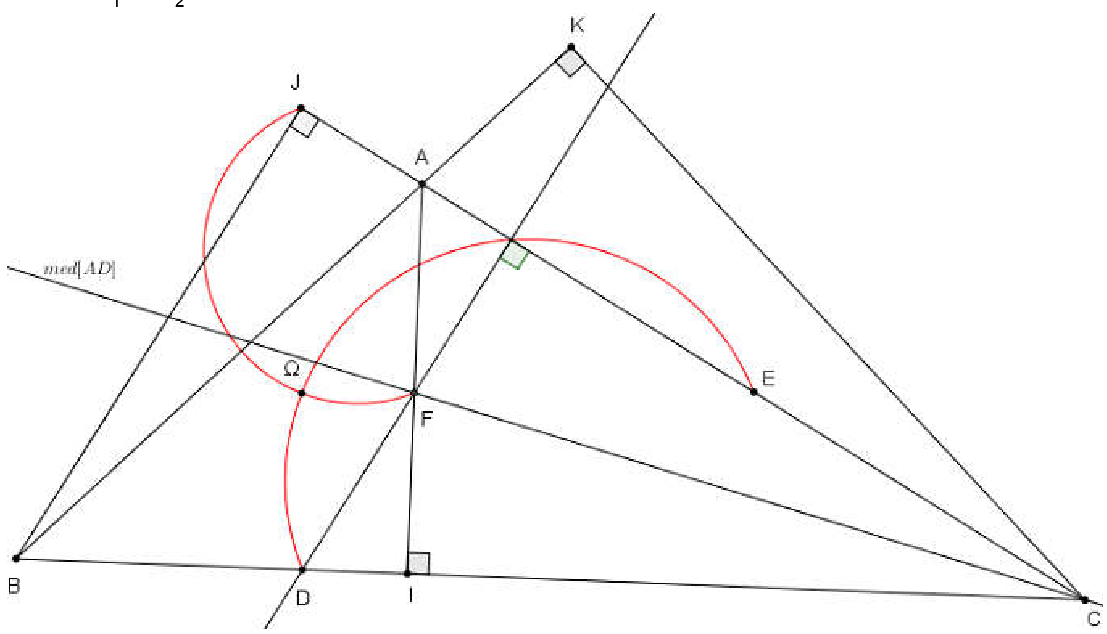
d) •Pour la construction du point D :

On utilise le fait que $FD=FA$ c'est à dire $F \in med[AD]$ et que $(FD)\perp(JE)$.

• $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega E},\overrightarrow{\Omega D}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc Ω est un point du demi-cercle Γ_1 de diamètre $[ED]$. Voir figure

$\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega J},\overrightarrow{\Omega F}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc Ω est un point du demi-cercle Γ_2 de diamètre $[JF]$. Voir figure

• $\Omega \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$.



2

Exercice 3

1) a) Il suffit de vérifier que le discriminant de l'équation (E) est non nul.

b) $z_1 + z_2 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{R}$ donc z_1 et z_2 ne sont pas conjugués.

2) a) $z_C = \frac{z_1+z_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) $(z_2-z_1)^2 = (z_2+z_1)^2 - 4z_1z_2 = (2z_C)^2 - 4 = 4(z_C^2-1)$. Car $z_2+z_1 = 2z_C$ et $z_1z_2 = 1$.

c) $$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CI}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CJ}}\right) \equiv \arg\left(\frac{1-z_C}{z_2-z_1}\right) + \arg\left(\frac{-1-z_C}{z_2-z_1}\right)[2\pi] \equiv \arg\left(\frac{1-z_C}{z_2-z_1}\cdot\frac{-1-z_C}{z_2-z_1}\right)[2\pi]$$
$$\equiv \arg\left(\frac{z_C^2-1}{(z_2-z_1)^2}\right)[2\pi] \equiv \arg\left(\frac{1}{4}\right)[2\pi] \equiv 0[2\pi]$$

d'où la droite (AB) porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ICJ}$.

3) a) K est le centre d'un cercle passant par I et J donc K appartient à la médiatrice du segment [IJ].
La médiatrice du segment [IJ] est l'axe des ordonnées.

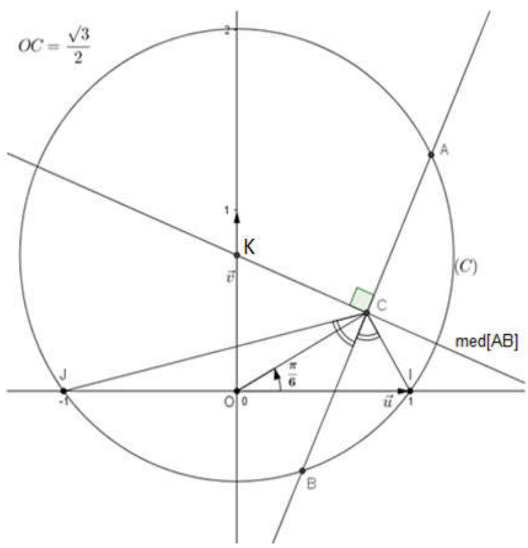
b) • $\left(M\in(C)\right) \Leftrightarrow KM = KI \Leftrightarrow |z-iy| = |1-iy| \Leftrightarrow \left(|z-iy|^2 = |1-iy|^2\right)$.
$\Leftrightarrow (z-iy)(\bar{z}+iy) = (1-iy)(1+iy)$
$\Leftrightarrow z\bar{z} + iy(z-\bar{z}) + y^2 = 1 + y^2$
$\Leftrightarrow z\bar{z} + iy(z-\bar{z}) = 1.$

c) $A\in(C) \Leftrightarrow z_1\bar{z_1} + iy(z_1-\bar{z_1}) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{z_2}\frac{1}{\bar{z_2}} + iy\left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{\bar{z_2}}\right) = 1$
$\Leftrightarrow \frac{1}{z_2.\bar{z_2}}\left(1+iy(\bar{z_2}-z_2)\right) = 1 \Leftrightarrow z_2\bar{z_2} + iy(z_2-\bar{z_2}) = 1 \Leftrightarrow B\in(C)$.

4) a) $z_C = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$, Voir figure.

b) La droite (AB) porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ICJ}$.
La médiatrice du segment [AB] est la perpendiculaire en C à la droite (AB).

c) Les points A et B sont les points d'intersection du cercle (C) avec la droite (AB). ($OA > OB$ car $|z_1| > 1$.)



3

Exercice 4

A) 1) a) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2}{x+1}=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$.

La droite d'équation x = 0 est une asymptote verticale à (C_f)

b) • $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2\frac{\ln(x)}{x}-\frac{\ln(x+1)}{x}$. (pour x > 0, $f(x)=\ln(x^2)-\ln(x+1)=2\ln x-\ln(x+1)$)

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$,

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

La courbe (C_f) admet au voisinage de +∞ une branche parabolique de direction celle de $(0,\vec{i})$.

2) a) Pour tout $x>0$,

$f(x)=\ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)=2\ln x-\ln(x+1)$.

D'où $f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+2}{x(x+1)}$.

b) Tableau de variation

x	0	+∞
f'(x)	‖	+
f	‖ −∞	↗ +∞

c) La fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc f est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f(]0,+\infty[)$.

De la continuité de f sur $]0,+\infty[$ et des égalités $\lim\limits_{0^+}f=-\infty$ et $\lim\limits_{+\infty}f=+\infty$ on déduit que $f(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$.

3) a) On trouve $x'=\frac{1+\sqrt5}{2}$ et $x''=\frac{1-\sqrt5}{2}$.

b) $\alpha=\frac{1+\sqrt5}{2}$ d'où $-\frac{1}{\alpha}=-\frac{2}{1+\sqrt5}=\frac{1-\sqrt5}{2}=x''$.

Soit $M(x,y)$ un point du plan.

$$M\in(C_f)\cap(O,\vec{i})\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\y=f(x)\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\\frac{x^2}{x+1}=1\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\x^2=x+1.\\y=0\end{cases}$$

Donc la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en un seul point A d'abscisse $\alpha=\frac{1+\sqrt5}{2}$.

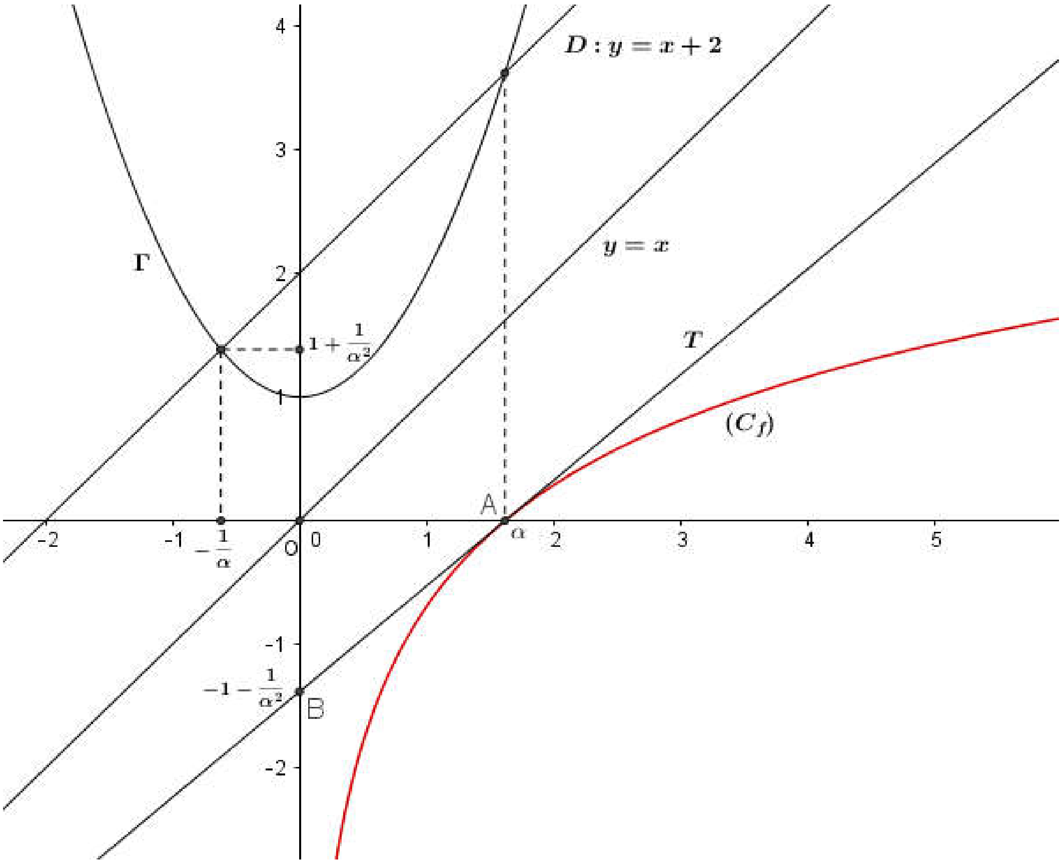
d) $T : y = f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$.

$f(\alpha)=0$ et $f'(\alpha)=\dfrac{\alpha+2}{\alpha(\alpha+1)}=\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha^3}$ puisque $\alpha^2=\alpha+1$, d'où $f'(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^3}$.

Par la suite $T :\ y=\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^3}\right)(x-\alpha)$.

e) $B\left(0\,,-1-\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^3}\right)(0-\alpha)=-1-\dfrac{1}{\alpha^2}$ alors $B\in(T)$.

4) a) et b)



B) 1) a) Soit $x\geq 1$ et $t\in[1,x]$,

$*\ 1\ \leq t\ \leq x$ et $n\geq\ 1$ alors $1\ \leq\ t^n\ \leq\ x^n$ or f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$

donc $f(1)\ \leq\ f(t^n)\ \leq\ f(x^n)$ d'où $\displaystyle\int_1^x \ln\left(\frac{1}{2}\right)dt\ \leq\ \int_1^x f(t^n)\,dt\ \leq\ \int_1^x f(x^n)\,dt$.

Donc pour tout $x\geq 1$, $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)(x-1)\ \leq\ G_n(x)\ \leq\ f(x^n)(x-1)$.

b) $G_n(x) = \int_1^x f(t^n)\,dt$. On intègre par parties:

Posons $\begin{vmatrix} u(t) = f(t^n) \\ v'(t) = 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} u'(t) = n\,t^{n-1}\dfrac{t^n+2}{t^n\left(t^n+1\right)} = \dfrac{n}{t}\dfrac{t^n+2}{\left(t^n+1\right)} \\ v(t) = t \end{vmatrix}$

Donc $G_n(x) = \left[t f\left(t^n\right)\right]_1^x - n\int_1^x \dfrac{t^n+2}{t^n+1}dt = x f\left(x^n\right) - f(1) - n\int_1^x \left(1+\dfrac{1}{t^n+1}\right)dt$

$= x f\left(x^n\right) - \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) - n(x-1) - \int_1^x \dfrac{n}{t^n+1}dt.$

Autrement : vérifier l'égalité de deux fonctions (ont la même dérivée et coïncident en 1).

2) a) $\alpha > 1$ donc $\sqrt[n]{\alpha} > 1$

D'aprés B)1)a) : $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right) \leq G_n\left(\sqrt[n]{\alpha}\right) \leq f\left(\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n\right)\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right).$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$; $\left(\sqrt[n]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln\alpha}\right)$ et $f\left(\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n\right) = f(\alpha) = 0$

D'aprés le théorème de comparaison des limites $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n\left(\sqrt[n]{\alpha}\right) = 0.$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{\alpha}-1}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{n}\ln(\alpha)}-1}{\frac{1}{n}\ln(\alpha)}.\ln(\alpha)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\ln(\alpha) = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

Par la suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{\alpha}-1}{\frac{1}{n}} = \ln(\alpha).$

d) $J_n = -G_n\left(\sqrt[n]{\alpha}\right) + \sqrt[n]{\alpha}\, f\left(\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n\right) - \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) - n\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right).$

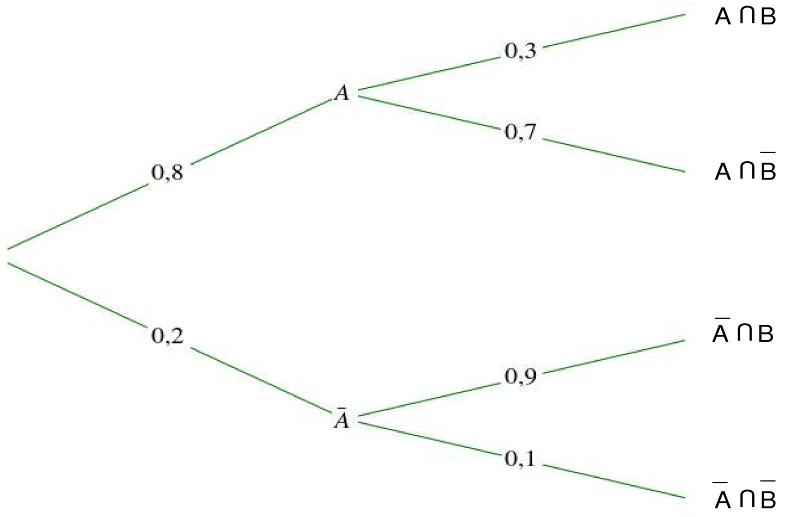
* $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n\left(\sqrt[n]{\alpha}\right) = 0.$
* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha}\, f\left(\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha}\, f(\alpha) = 1\text{x}0 = 0$
* $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{\alpha}-1}{\frac{1}{n}} = \ln(\alpha).$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = -\ln(\dfrac{1}{2}) - \ln(\alpha) = \ln\left(\dfrac{2}{\alpha}\right).$

6

EXAMEN DU BACCALAUREAT	Epreuve : MATHEMATIQUES
SESSION DE JUIN 2017	Durée :4H ****** Coefficient : 4
Section : Mathématiques	SESSION DE CONTRÔLE
Corrigé proposé par : FARID ABIDI	****** Lycée Ibn Rachic - Ezzahra

Exercice 1 :



1. a
2. b
3. c

Exercice 2 :

1. AIC est un triangle direct et rectangle en I et E milieu de $[AC]$ donc I est le centre du cercle circonscrit au triangle AIC .

   Il en résulte que : EA = EI et $\left(\widehat{\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EI}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CI}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

   Ainsi le triangle AIC est équilatéral direct .

2. a) ABI est un triangle direct , isocèle et rectangle en I donc $AB = \sqrt{2}AI$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}}\right) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

   donc $S(I) = B$.

   $f(E) = S \circ S_{\Delta}(E) = S(I) = B$.

   b) On a $f(A) = S \circ S_{\Delta}(A) = S(A) = A$ et $f = S \circ S_{\Delta}$ est la composée d'une similitude directe et de rapport $\sqrt{2}$ et d'une similitude indirecte de rapport 1 donc f est une similitude indirecte de rapport $\sqrt{2}$ et de centre A.

   c) $f \circ f$ est l'homothétie de centre A et de rapport $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

   On a : $f \circ f(E) = f(f(E)) = f(B)$. Posons $f \circ f(E) = E'$, $\overrightarrow{AE'} = 2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}$ donc E' = C.

Par suite, f(B) = C.

d) (BJ) est la droite perpendiculaire à la droite (AE) passant par B donc f((BJ)) est la droite perpendiculaire à f((AE)) = (AB) passant par f(B) = C . Or la droite (CK) est perpendiculaire à (BK) donc f((BJ) = (KC).

J $\in$(BJ) donc f(J) $\in$ (CK) et J $\in$ (AE) donc f(J) $\in$ (AB). Comme $(CK)\cap(AB)=\{K\}$ alors f(J) = K

3. g est la similitude indirecte telle que g(C) = A et g(K) = I

a) Posons g(B) = B', BCK est un triangle direct , isocèle et rectangle en K donc son image par g est le triangle B'AI indirect , isocèle et rectangle en I. Or BAI triangle indirect, isocèle et rectangle en I, donc B' = B d'où g(B) = B. Ainsi , B est le centre de g.

b) Soit D = g(A), A $\in$(BK) donc D $\in$ (BI).

c) On a : $\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}\right)\equiv-\frac{\pi}{6}[2\pi]$, g(C) = A, g(B) = B et g(A) = D donc $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

Désignons T un point du plan distinct de A telle que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AT}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$, la demi droite [AT) coupe la droite (BI) en D. (Voir figure ci-dessous).

4. a) φ est la composée de deux similitudes indirectes donc φ est une similitude directe.

$\varphi(A)=g\circ f(A)=g(f(A))=g(A)=D$ et $\varphi(B)=g\circ f(B)=g(f(B))=g(C)=A$.

b) $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DA}}\right)\equiv\pi+\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\pi+\frac{\pi}{6}[2\pi]\equiv\frac{7\pi}{6}[2\pi]$ donc l'angle de φ est $\frac{7\pi}{6}$.

5. Soit Ω le centre de φ.

a) $\varphi\circ\varphi\circ\varphi(E)=\varphi\circ\varphi\circ g\circ f(E)=\varphi\circ\varphi\circ g(B)=\varphi\circ\varphi(B)=\varphi(A)=D$.

Comme $3\times\frac{7\pi}{6}\equiv\frac{7\pi}{2}[2\pi]\equiv2\pi-\frac{\pi}{2}[2\pi]\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors $\varphi\circ\varphi\circ\varphi$ est une similitude directe de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Il en résulte que $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega E},\overrightarrow{\Omega D}}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b) On pose $F=\varphi\circ\varphi\circ\varphi(J)$, comme $D=\varphi\circ\varphi\circ\varphi(E)$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{FD},\overrightarrow{JE}}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $(FD)\perp(JE)$

c) $F=\varphi\circ\varphi\circ\varphi(J)=\varphi\circ\varphi\circ g\circ f(J)=\varphi\circ\varphi\circ g(K)=\varphi\circ\varphi(I)$.

D'autre part , $\varphi\circ\varphi(B)=\varphi(A)=D$ et $\varphi\circ\varphi(E)=\varphi\circ g\circ f(E)=\varphi\circ g(B)=\varphi(B)=A$.

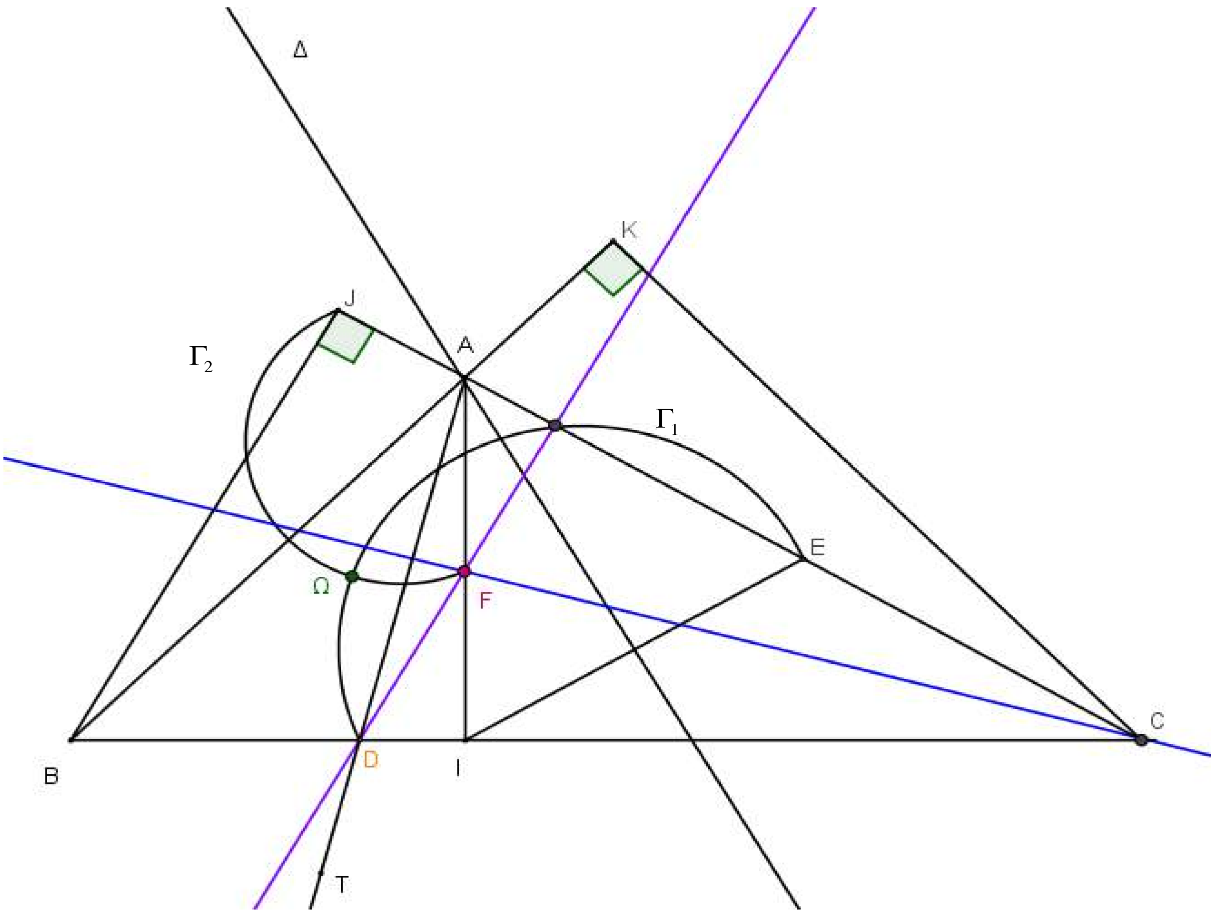
Soit k le rapport de la similitude directe $\varphi\circ\varphi$, comme IB = IE alors FD = k IB = k IE = FA.

Ainsi , FD = FA.

F est le point d'intersection de la médiatrice du segment [AD] et de la perpendiculaire à (JE) issue de D.

Soit $\Gamma_1 = \left\{M, M \in P / \left(\widehat{\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MD}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]\right\}$ et $\Gamma_2 = \left\{M, M \in P / \left(\widehat{\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MF}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]\right\}$,

$\{\Omega\} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$.



Exercice 3 :

1. a) Soit l'équation $(E): z^2 - \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 = 0$.

Le discriminant de (E) est $\Delta = \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4 = \frac{9}{4} + 3i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} - 4 = -\frac{5}{2} + 3i\frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$ donc l'équation (E) admet deux racines distinctes z_1 et z_2.

b) $z_1 + z_2 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Comme $z_1 + z_2$ n'est pas réel , alors z_1 et z_2 ne sont pas conjuguées.

2\. a) C est milieu de [AB] donc $z_C = \dfrac{z_1+z_2}{2} = \dfrac{3}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) $(z_2-z_1)^2 = z_2^{\,2} - 2z_1z_2 + z_1^{\,2} = z_2^{\,2} + 2z_1z_2 + z_1^{\,2} - 4z_1z_2 = (z_2+z_1)^2 - 4z_1z_2$

$= (2z_C)^2 - 4 = 4z_C^{\,2} - 4 = 4\left(z_C^{\,2}-1\right)$.

c) $(z_2-z_1)^2 = 4\left(z_C^{\,2}-1\right) \Leftrightarrow (z_2-z_1)^2 = 4(z_C-1)(z_C+1) \Leftrightarrow \dfrac{z_2-z_1}{z_C+1} = 4\dfrac{z_C-1}{z_2-z_1}$

donc $\arg\left(\dfrac{z_2-z_1}{z_C+1}\right) \equiv \arg\left(4\dfrac{z_C-1}{z_2-z_1}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z_2-z_1}{z_C+1}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_C-1}{z_2-z_1}\right)[2\pi]$

donc $\left(\widehat{\overrightarrow{JC},\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{IC}}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{IC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{JC}}\right) \equiv 0[2\pi]$

$\Leftrightarrow \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CI}}\right) + \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CJ}}\right) \equiv 0[2\pi]$

$\Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CI}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CJ}}\right) \equiv 0[2\pi]$

$\left(\widehat{\overrightarrow{CI},\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CJ}}\right)[2\pi]$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CJ}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CI},\overrightarrow{AB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CJ}}\right)[2\pi] \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{CI},\overrightarrow{AB}}\right)[2\pi]$

donc (AB) porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ICJ}$.

3\. a) ($\mathscr{C}$) est le cercle circonscrit au triangle IAJ et K son centre donc K appartient à la médiatrice de [IJ] . Comme $\left(O,\vec{v}\right)$ est la médiatrice de [IJ] alors K appartient à $\left(O,\vec{v}\right)$.

b) On pose $z_K = iy$, $y \in \mathbb{R}$

Soit M un point d'affixe z,

$M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow KM = KI \Leftrightarrow KM^2 = KI^2 \Leftrightarrow |z-z_K|^2 = |1-z_K|^2 \Leftrightarrow |z-iy|^2 = |1-iy|^2$

D'où $M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow |z-iy|^2 = |1-iy|^2 \Leftrightarrow (z-iy)\left(\overline{z}+iy\right) = (1-iy)(1+iy)$

$\Leftrightarrow z\overline{z} + iyz - iy\overline{z} + y^2 = 1 + y^2 \Leftrightarrow z\overline{z} + iy\left(z-\overline{z}\right) = 1$

c) $A \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow z_1\overline{z_1} + iy\left(z_1-\overline{z_1}\right) = 1 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1} = 1 - iy\left(z_1-\overline{z_1}\right)$

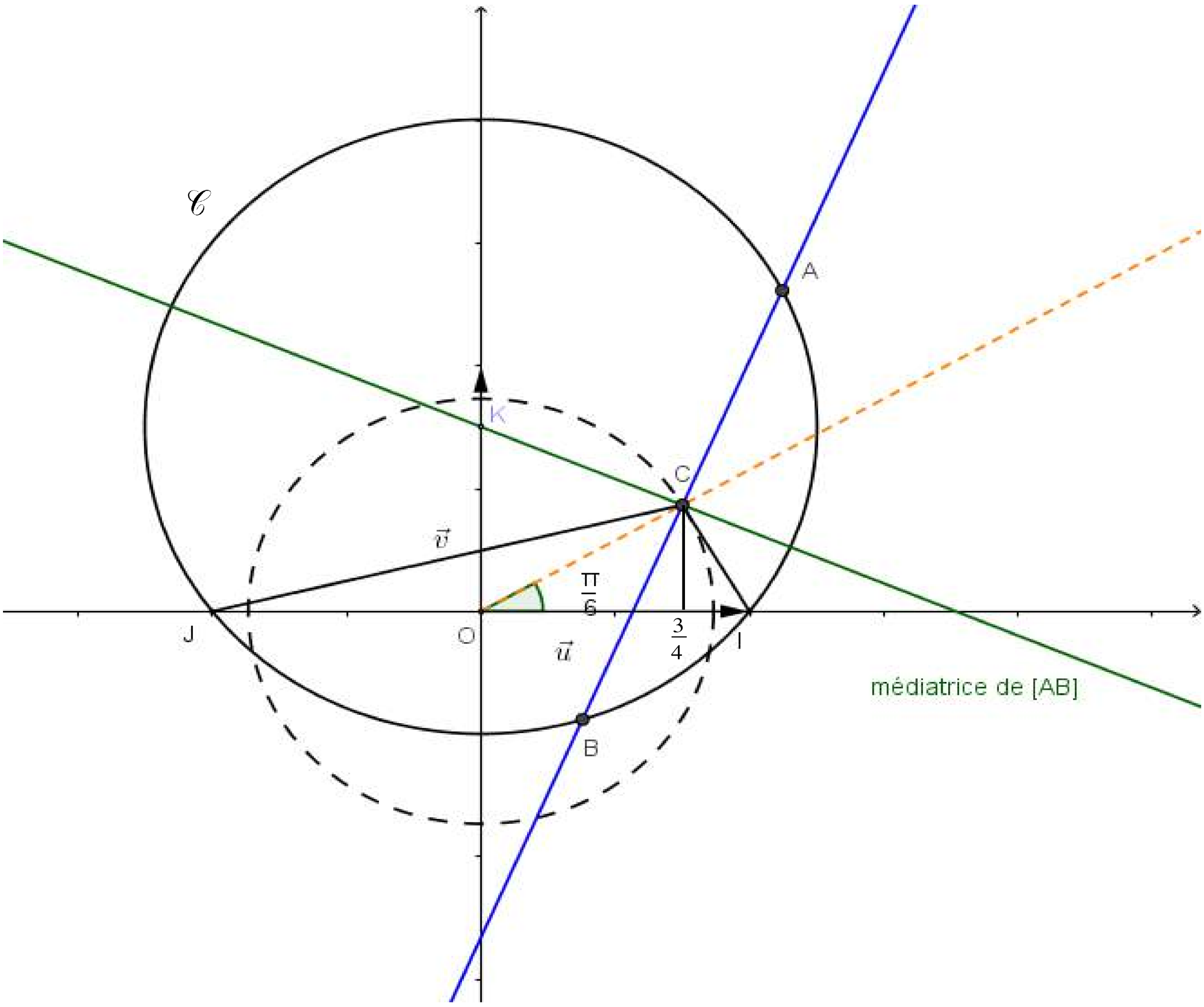
$$z_2\overline{z_2} + iy\left(z_2-\overline{z_2}\right) = \frac{1}{z_1}\frac{1}{\overline{z_1}} + iy\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{\overline{z_1}}\right) = \frac{1}{z_1\overline{z_1}} + iy\left(\frac{\overline{z_1}-z_1}{z_1\overline{z_1}}\right) = \frac{1+iy\left(\overline{z_1}-z_1\right)}{z_1\overline{z_1}}$$

$$= \frac{1-iy\left(z_1-\overline{z_1}\right)}{z_1\overline{z_1}} = 1$$

Donc $B \in (\mathscr{C})$.

4. a) On a : $z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$

b) K le centre du cercle ($\mathscr{C}$) est le point d'intersection de la médiatrice du segment [IJ] et la droite $\left(O, \vec{v}\right)$



Exercice 4 :

Pour tout $x > 0$, $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$.

A-1. a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x+1} = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

La droite $(O, \vec{j})$ est asymptote à (C_f).

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x}} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\ln\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)}{\dfrac{x^2}{x+1}}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)}{\dfrac{x^2}{x+1}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

Donc (C_f) admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{i})$ au voisinage de $+\infty$.

2. a) Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\dfrac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}}{\dfrac{x^2}{x+1}} = \dfrac{\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}}{\dfrac{x^2}{x+1}} = \left(\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}\right) \cdot \left(\dfrac{x+1}{x^2}\right) = \dfrac{x+2}{x(x+1)}$.

b)

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ 0

c) f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $J = f(]0,+\infty[) =]-\infty, 0[$.

3. a) $x^2 = x+1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

Le discriminant est $\sqrt{5}$ donc les solutions de l'équation sont $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Par suite, l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = x+1$ est $\left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

b) Soit $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $-\dfrac{1}{\alpha}=-\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}=-\dfrac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{-4}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

c) Pour tout $x>0$, $\begin{cases} f(x)=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{x+1}=1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=x+1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\alpha$

Donc la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse α.

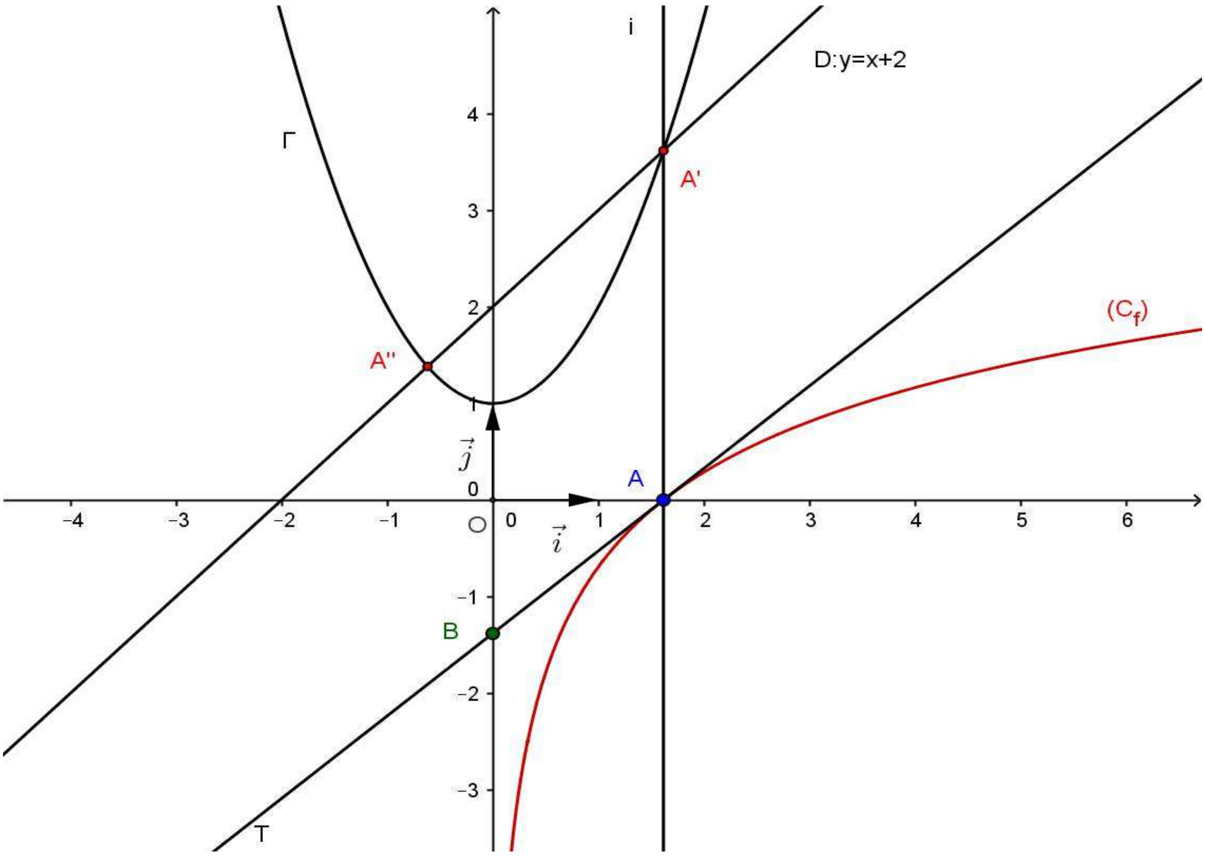
d) On a : $f(\alpha)=0$ et $\alpha^2=\alpha+1$ donc $f'(\alpha)=\dfrac{\alpha+2}{\alpha(\alpha+1)}=\dfrac{(\alpha+1)+1}{\alpha(\alpha+1)}=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha(\alpha+1)}=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^3}$.

Ainsi, une équation de la tangente T à (C_f) au point A est

$y=f'(\alpha)(x-\alpha)=\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{2}{\alpha^3}\right)(x-\alpha)$.

e) Soit $B\left(0,-1-\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{2}{\alpha^3}\right)(0-\alpha)=-1-\dfrac{2}{\alpha^2}$ donc T passe par B.

4. a) et b)



B- Soit n un entier non nul, On pose pour tout $x \geq 1$, $G_n(x) = \int_1^x f(t^n)\,dt$.

1.a) Pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $x \geq 1$,

$$1 \leq t \leq x \Rightarrow 1 \leq t^n \leq x^n \Rightarrow f(1) \leq f(t^n) \leq f(x^n) \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(t^n) \leq f(x^n)$$

Donc $\displaystyle\int_1^x \ln\left(\frac{1}{2}\right)dt \leq \int_1^x f(t^n)\,dt \leq \int_1^x f(x^n)\,dt$

donc $\ln\left(\frac{1}{2}\right)(x-1) \leq \displaystyle\int_1^x f(t^n)\,dt \leq f(x^n)(x-1)$ d'où $\ln\left(\frac{1}{2}\right)(x-1) \leq G_n(x) \leq f(x^n)(x-1)$

b) On pose $u(x) = f(t^n)$, $u'(t) = nt^{n-1}f'(t^n) = n\dfrac{t^n+2}{t(t^n+1)} = \dfrac{1}{t}\left(n + \dfrac{n}{t^n+1}\right)$

$v'(t) = 1$, $v(t) = t$

$$G_n(x) = \int_1^x f(t^n)\,dt = \left[t.f(t^n)\right]_1^x - \int_1^x \left(n + \frac{n}{t^n+1}\right)dt = x.f(x^n) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \int_1^x n\,dt - \int_1^x \frac{n}{t^n+1}dt$$

$$= x.f(x^n) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - n(x-1) - \int_1^x \frac{n}{1+t^n}dt$$

2. On pose $J_n = n\displaystyle\int_1^{\sqrt[n]{\alpha}} \frac{1}{1+t^n}dt$.

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln\alpha} = e^0 = 1.$

b) $\ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right) \leq G_n\left(\sqrt[n]{\alpha}\right) \leq f(\alpha)\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right)$ donc $\ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right) \leq G_n\left(\sqrt[n]{\alpha}\right) \leq 0$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right) = 0$ et par suite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} G_n\left(\sqrt[n]{\alpha}\right) = 0$.

c) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{\alpha}-1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}\ln\alpha}-1}{\frac{1}{n}} = \ln\alpha.\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}\ln\alpha}-1}{\frac{1}{n}\ln\alpha}$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\alpha = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{\alpha}-1}{\frac{1}{n}} = \ln\alpha$.

d) On a : $G_n\left(\sqrt[n]{\alpha}\right) = \sqrt[n]{\alpha}.f(\alpha) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - n\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right) - \displaystyle\int_1^{\sqrt[n]{\alpha}} \frac{n}{1+t^n}dt = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) - n\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right) - J_n$

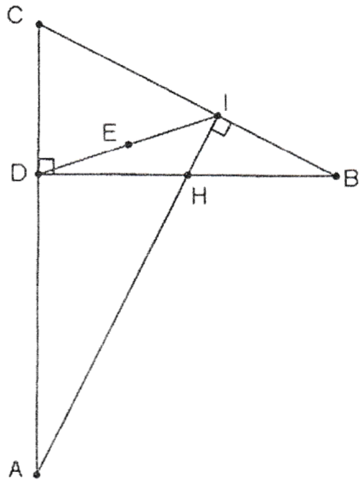
donc $J_n = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) - n\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right) - G_n\left(\sqrt[n]{\alpha}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \dfrac{\sqrt[n]{\alpha}-1}{\frac{1}{n}} - G_n\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)$.

Par suite , $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{\alpha}-1}{\frac{1}{n}} - \lim_{n\to+\infty} G_n\left(\sqrt[n]{\alpha}\right) = \ln 2 - \ln\alpha = \ln\left(\sqrt{5}-1\right)$

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ●●●●● **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2018**	***Session principale***		
	Epreuve : **Mathématiques**		Section : ***Mathématiques***
	Durée : **4h**	■	Coefficient de l'épreuve : **4**

Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6.
Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points)



Le plan est orienté. Dans la figure ci-contre,

- DBC est un triangle rectangle en D tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $DB = 2DC$;
- le point H est le milieu du segment $[DB]$;
- le point I est le projeté orthogonal du point H sur la droite (BC) ;
- le point E est le milieu du segment $[ID]$;
- les droites (IH) et (CD) se coupent au point A.

1) Soit R la rotation de centre H et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Calculer $\tan\widehat{CBD}$. En déduire que $\frac{IH}{IB} = \frac{1}{2}$.

b) Montrer alors que $R(I) = E$.

2) Soit h l'homothétie de centre D et de rapport 2. On pose $f = h \circ R$.

a) Déterminer $f(H)$.

b) Montrer que $f(I) = I$.

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

d) Montrer que $f(C) = A$.

3) a) La droite (CH) coupe la droite (AB) en un point F.

Justifier que les points B, I, H et F sont sur le cercle de diamètre $[BH]$.

En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{IH},\overrightarrow{IF}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

b) Montrer alors que l'image par f de la droite (ID) est la droite (IF).

c) La droite (ID) coupe les droites (CF) et (AB) respectivement en J et Ω . Montrer que $f(J) = F$.

d) Montrer que $f(F) = \Omega$.

4) Montrer que le triangle $CA\Omega$ est rectangle.

Exercice 2 **(3 points)**

Soit θ un réel non nul.
Dans la **figure 1** de **l'annexe** jointe,

- $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct ;
- $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1 ;
- E est le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OE}}) \equiv \theta\,[2\pi]$;
- F et G sont les points d'affixes, respectives, -1 et $1+\sqrt{2}$;
- Γ est le demi-cercle de diamètre $[FG]$;
- D est le point d'intersection de Γ et l'axe $(O, \vec{v})$.

1) a) Vérifier que $OD^2 = 1+\sqrt{2}$.

b) Soit A le point d'affixe $z_A = i\sqrt{1+\sqrt{2}}\, e^{i\theta}$. Vérifier que $z_A = OD\, e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$. Construire alors le point A.

2) On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}} e^{i\theta} z + e^{2i\theta} = 0$.

a) Vérifier que z_A est une solution de l'équation (E).

b) On désigne par B le point d'affixe z_B, où z_B est la deuxième solution de (E).

Déterminer z_B.

3) a) Montrer que les points O, A et B sont alignés.

b) Placer le point C d'affixe $z_C = OD\, e^{i\theta}$.

c) Montrer que $\dfrac{\mathrm{Aff}(\overrightarrow{AC})}{\mathrm{Aff}(\overrightarrow{AB})} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

En déduire que le triangle ABC est isocèle et que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$.

d) Construire alors le point B.

Exercice 3 **(7 points)**

A) On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x\ln x & \text{si } x > 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Vérifier que f est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) Dans la **Figure 2** de **l'annexe** jointe, on a tracé dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe Γ de la fonction $x \mapsto e^x$ et les droites Δ et Δ' d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$.

a) Construire les points A et B de (C_f) d'abscisses respectives e et $\frac{1}{e}$.

b) Déterminer la position relative de (C_f) et Δ puis la position relative de (C_f) et Δ'.

c) Tracer la courbe (C_f).

3) Soit S la partie du plan limitée par la courbe (C_f) et les droites Δ et Δ'.

Montrer que l'aire de la partie S est égale à $\frac{1}{4}\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$.

B) Soit n un entier naturel.

On pose $u_n=\int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n e^t\,dt$ et $v_n=\int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n e^t f(t)\,dt$.

1) a) Montrer que $u_n>0$.

b) Montrer que $0<u_n\le \frac{e}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

c) Montrer que $u_{n+1}=e-\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+1}}-(n+1)u_n$.

d) Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)u_n=e$.

2) a) Montrer que $-\frac{u_n}{e}\le v_n\le 0$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

b) Vérifier que pour tout $t\in\,]0,+\infty[$, $f(t)=t\,f'(t)-t$.

Montrer alors que $v_n=\int_{\frac{1}{e}}^{1} t^{n+1}e^t f'(t)\,dt-u_{n+1}$.

c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $(n+2)v_n=\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+2}}-v_{n+1}-u_{n+1}$.

d) Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+2)v_n=0$.

3) a) Montrer qu'il existe un seul réel α_n appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{e},1\right]$ tel que $f(\alpha_n)=\frac{v_n}{u_n}$.

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{v_n}{u_n}=0$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$.

<u>Exercice 4</u> (5 points)

A) Soit q un entier naturel.

1) Montrer que q^2 est impair si et seulement si q est impair.

2) Montrer que si q est impair alors $q^2\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,8)$.

B) On se propose de déterminer **l'ensemble A des triplets d'entiers naturels non nuls (m,n,q) tels que $2^{2m}+3^{2n}=q^2$.**

1) Vérifier que le triplet $(2,1,5)$ est un élément de A.

Dans la suite de l'exercice on suppose que (m,n,q) est un élément de A.

2) a) Montrer que q est impair.

b) Montrer que $q^2-3^{2n}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,8)$.

c) Montrer alors que m est différent de 1.

3) On suppose que $m \geq 2$.

a) Justifier que les entiers $\left(q-3^n\right)$ et $\left(q+3^n\right)$ sont pairs.

b) Soit $d=\left(q-3^n\right)\wedge\left(q+3^n\right)$.

Montrer que d divise $2q$ et que d divise 2^{2m}. En déduire que $d=2$.

c) Montrer que $q-3^n=2$ et que $q+3^n=2^{2m-1}$.

En déduire que $q=2^{2m-2}+1$ et que $3^n=2^{2m-2}-1$.

4) Déterminer n et q lorsque $m=2$.

5) On suppose que $m \geq 3$.

a) Montrer que $3^n \equiv -1 \pmod{16}$.

b) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel k, les restes possibles de 3^k dans la division euclidienne par 16.

c) En déduire qu'il n'existe pas de triplets (m,n,q) éléments de l'ensemble A tels que $m \geq 3$.

6) Déterminer l'ensemble A.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve : **Mathématiques** - Section : **Mathématiques - Session principale - 2018**

Annexe à rendre avec la copie

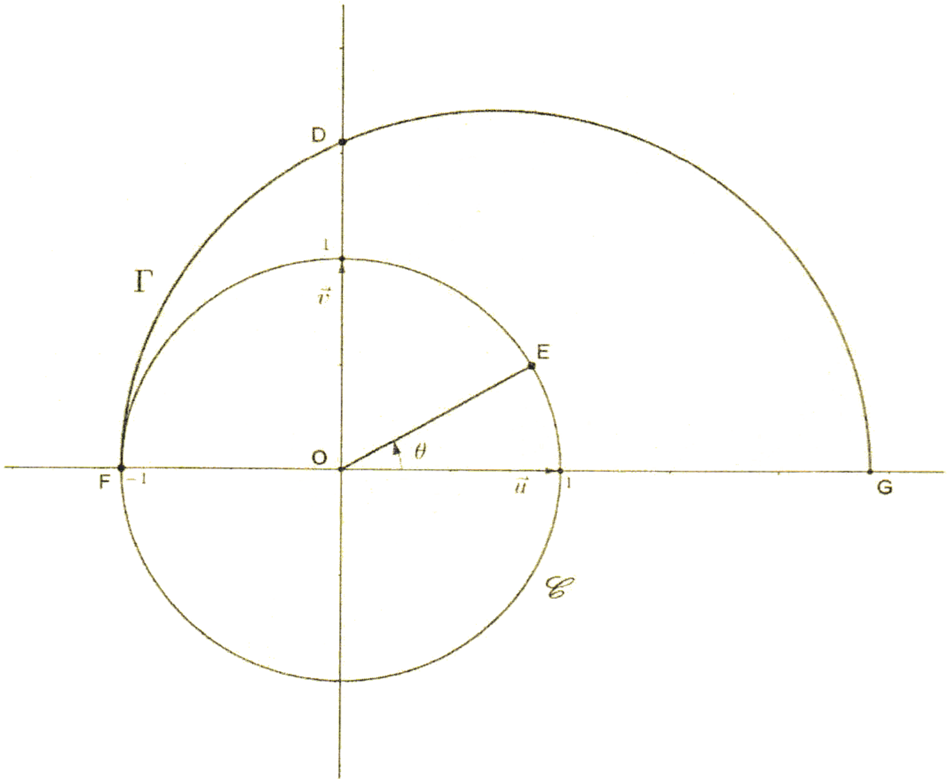


Figure 1

Ne rien écrire ici

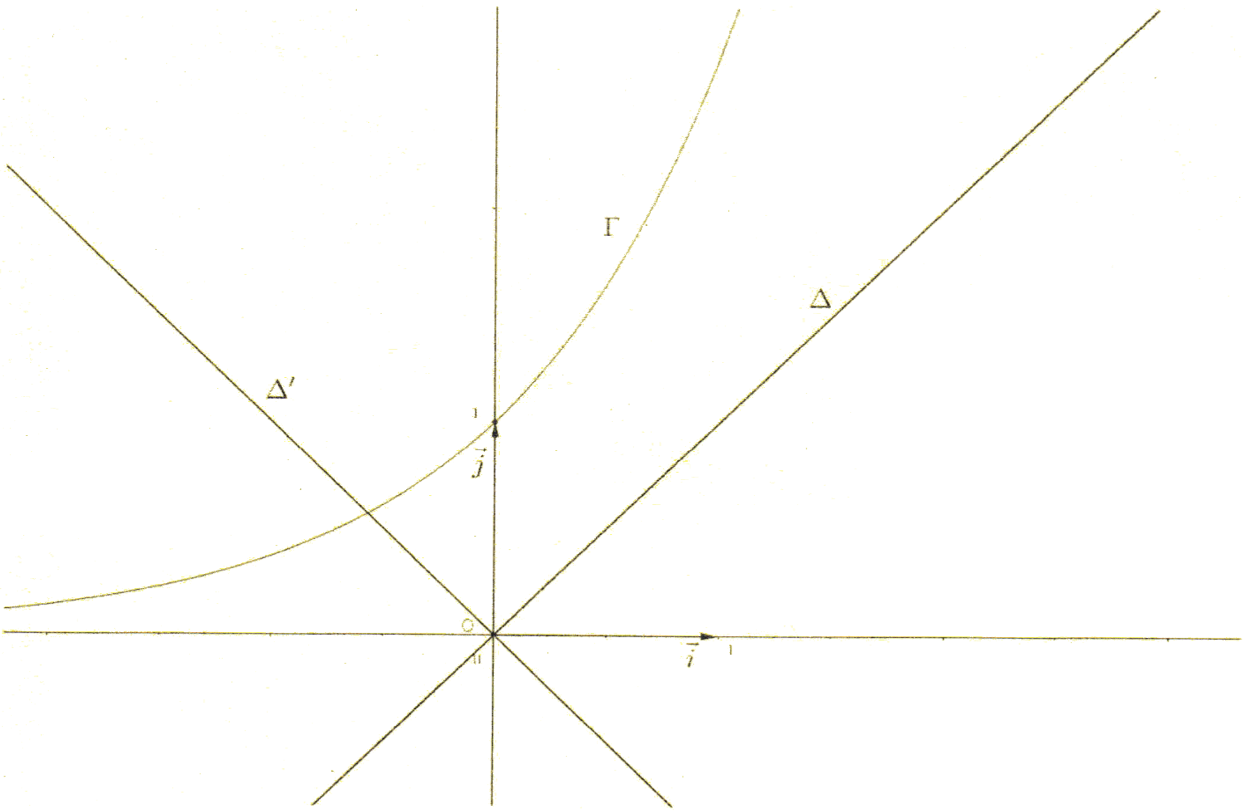
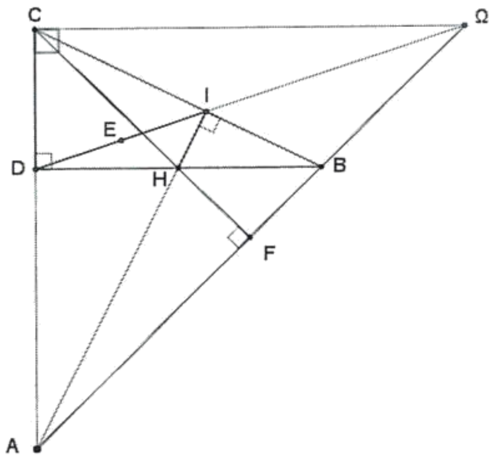


Figure 2

Epreuve : **Mathématiques** Section : **Mathématiques**	**BAC 2018** **Session principale**	**Corrigé et** **Barème de notation**

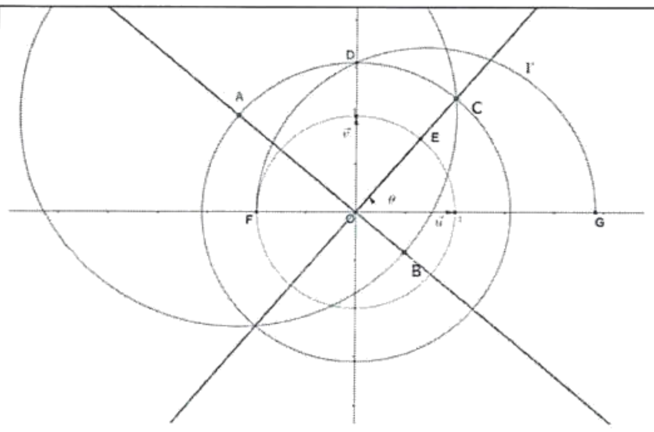
<u>Exercice 1</u> (5 points)

Question	Eléments de réponses	barème	commentaires
1) a)	*Dans le triangle DBC rectangle en D, $\tan\left(\widehat{CBD}\right)=\frac{DC}{DB}=\frac{1}{2}$. * Dans le triangle HBI rectangle en I, $\tan\left(\widehat{HBI}\right)=\frac{IH}{IB}$. Comme $\widehat{CBD}=\widehat{HBI}$ alors $\frac{IH}{IB}=\frac{1}{2}$.	0,5	2x 0,25
1) b)	Dans le triangle IDB, H milieu de DB et E milieu de DI Donc le point E vérifie : $HE=\frac{1}{2}IB=HI$ et $HE\ //\ BI$ et comme $HI \perp BI$ on a : $\begin{cases} HI=HE \\ \left(\widehat{\overrightarrow{HI},\overrightarrow{HE}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ 2\pi \end{cases}$ donc $R\ I\ = E$.	0,5	-Distance justifiée 0,25 -angle justifié 0,25
2) a)	$f\ H\ = hoR\ H\ = h\ H\ = B.$	0,25	
2) b)	$f\ I\ = hoR\ I\ = h\ E\ = I.$	0,25	
2) c)	f est la composée d'une homothétie de rapport 2 et d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc f est une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$. f(I) = I donc I est le centre de f.	1	4x 0,25
2) d)		0,5	2x 0,25
3) a)	* Les triangles rectangles FBH et IHB ont la même hypoténuse BH , donc les points B, I, H et F sont sur le même cercle de diamètre [BH]. $\left(\widehat{\overrightarrow{IH},\overrightarrow{IF}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{BH},\overrightarrow{BF}}\right)\ 2\pi$.(angles inscrits qui interceptent le même arc). * $\left(\widehat{\overrightarrow{BH},\overrightarrow{BF}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}-\left(\widehat{\overrightarrow{HF},\overrightarrow{HB}}\right)\ 2\pi$ $\equiv\frac{\pi}{2}-\left(\widehat{\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HD}}\right)\ 2\pi$ Or CDH est un triangle rectangle en D et DC=DH donc $\left(\widehat{\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HD}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}\ 2\pi$ et donc $\left(\widehat{\overrightarrow{IH},\overrightarrow{IF}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}\ 2\pi$.	0,75	0,25 + 0,5
3) b)	*L'image, par f, de la droite ID est la droite passant par I et perpendiculaire à la droite IF . Le triangle HIE est direct, rectangle et isocèle en H, d'où $\left(\widehat{\overrightarrow{ID},\overrightarrow{IH}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}\ 2\pi$ car $R(I)=E$ Or $\left(\widehat{\overrightarrow{ID},\overrightarrow{IF}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{ID},\overrightarrow{IH}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{IH},\overrightarrow{IF}}\right)\ 2\pi$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{ID},\overrightarrow{IF}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ 2\pi$. Donc l'image de la droite (ID) est la droite (IF).	0,5	
3) c)	$J \in ID \cap CH$ donc $f\ J \in IF \cap BA = F$ donc f(J)=F.	0,25	

3) d)	$F \in (CH) \cap (IF)$ donc $f(F) \in (AB) \cap (ID) = \{\Omega\}$ donc $f(F)=\Omega$.	0,25	
4)	$*f(F)=\Omega$ et $f(C)=A$ donc $A\Omega = 2CF$. Or $CF = CA$ car le triangle FCA est rectangle et isocèle en F $*$(FCA rectangle en F et $\widehat{ACF}=\frac{\pi}{4}$). D'où $A\Omega = 2AF$, ($F \in [A\Omega]$), et par suite F est le milieu de $[A\Omega]$. $F\Omega = FC = FA$ et $\widehat{ACF}=\frac{\pi}{4}$ donc $A\Omega C$ est rectangle en C.	0,25	
			

Exercice 2(3 points)

Question	Eléments de réponses	barème	commentaires
1) a)		0,25	
1) b)		0,5	2x0,25
2) a)	z_A solution de (E).	0,25	
2) b)		0,25	
3) a)	$\dfrac{\mathrm{Aff}(\overrightarrow{OA})}{\mathrm{Aff}(\overrightarrow{OB})} \in \mathbb{R}$	0,5	divisible
3) b)	$*$ $C \in [OE)$ tel que $OC=OD$.	0,25	
3) c)	$*$ $\dfrac{\mathrm{Aff}(\overrightarrow{AC})}{\mathrm{Aff}(\overrightarrow{AB})} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $AB = AC$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.	0,75	3x 0,25
3) d)	Construction de B.	0,25	

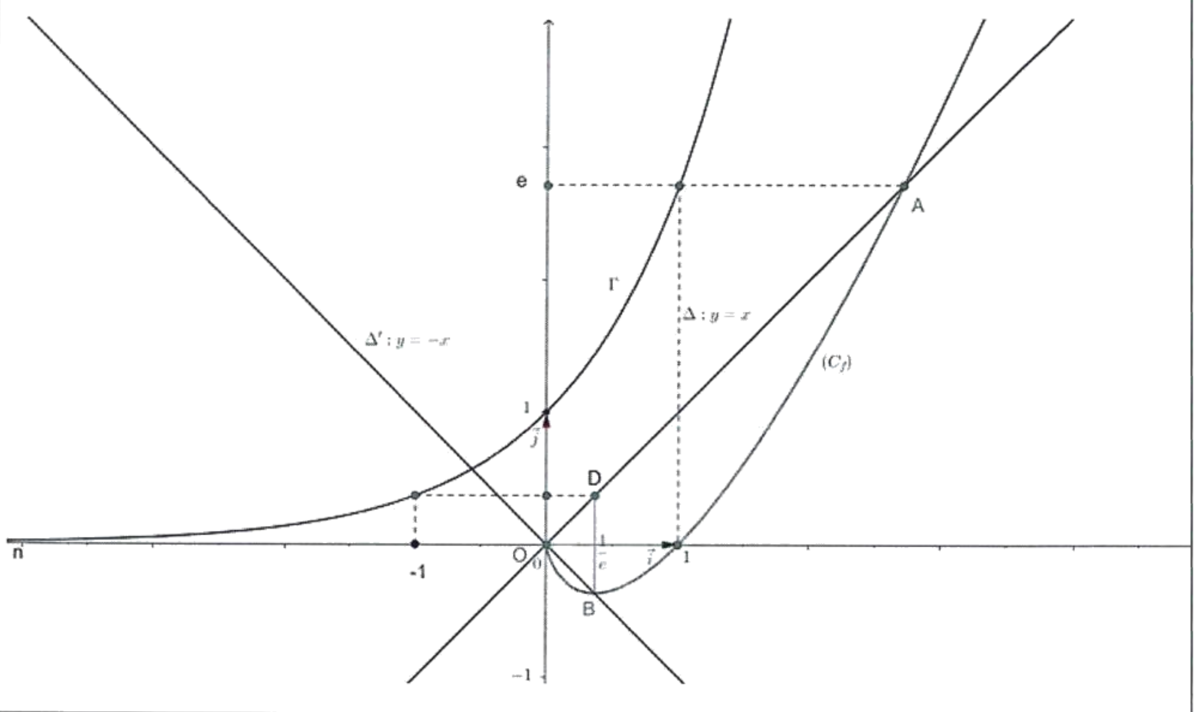


Exercice 3 (7 points)

Question	Eléments de réponses	barème	commentaires
A)1) a)	$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0.	0,25	
A) 1)b)	$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ donc f n'est pas dérivable à droite en 0. La courbe de f possède au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.	0,5	2x 0,25
A) 1)c)	Pour tout $x\in 0,+\infty$, $f'(x)=1+\ln x$. x : 0 … $1/e$ … $+\infty$ $f'(x)$: ‖ $-$ 0 $+$ f : 0 ↘ $-1/e$ ↗ $+\infty$	0,5	- 0,25 dérivée - 0,25 reste
A) 2)a)	Voir annexe	0,5	2x 0,25
A) 2)b)	Position relative de (C_f) et Δ . (C_f) et Δ'.	0,5	2 x 0,25
A) 2)c)	Voir annexe	0,75	0,25 étude de la B.I 0,5 courbe : (0,25 pour tous les éléments : Demi tg en O , tg en B , point A, position par rapport à Δ et Δ'. 0,25 allure)

A) 3)	$\mathcal{A}$ = aire du triangle OBD + aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), la droite Δ et les droites d'équations $x=\frac{1}{e}$ et $x=e$. $\mathcal{A}=\frac{1}{4}\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$.	0,5	0,25 traduction 0,25 reste
B) 1)a)	Sur $\left[\frac{1}{e},1\right]$, $x^n e^x>0$ donc $u_n>0$.	0,25	
B) 1)b)	$0<u_n\le\frac{e}{n+1}$. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$	0,5	2 x 0,25
B) 1)c)	On pose $u(x)=x^{n+1} \rightarrow u'(x)=n+1\ x^n$ $v'(x)=e^x \rightarrow v(x)=e^x$. D'où $u_{n+1}=\left[x^{n+1}e^x\right]_{\frac{1}{e}}^{1}-n+1\int_{\frac{1}{e}}^{1}x^n e^x\,dx=e-\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+1}}-\ n+1\ u_n$.	0,25	
B) 1)d)	$u_{n+1}=e-\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+1}}-\ n+1\ u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\ n+1\ u_n=e$.	0,25	
B)2) a)	f est croissante sur $\left[\frac{1}{e},1\right]$, donc $\frac{-1}{e}<f\ t\ \le 0$. $t^n e^t\ge 0$ sur $\left[\frac{1}{e},1\right]$ donc $-\frac{1}{e}\int_{\frac{1}{e}}^{1}t^n e^t\,dt\le\int_{\frac{1}{e}}^{1}t^n e^t f(t)\,dt\le 0$ d'où $-\frac{u_n}{e}\le v_n\le 0$. $-\frac{u_n}{e}\le v_n\le 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$.	0,5	2x 0,25
B)2) b)	* pour tout $t\in\ 0,+\infty$, $f\ t\ =t f'\ t\ -t$. * $v_n=\int_{\frac{1}{e}}^{1}t^{n+1}e^t f'\ t\ dt\ -u_{n+1}$.	0,5	2x 0,25
B) 2)c)	* intégration par parties : $t^{n+1}\ e^t \rightarrow n+1\ t^n e^t+t^{n+1}\ e^t$ $f'(t) \rightarrow f(t)$. $v_n=\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+2}}-\ n+1\ v_n-v_{n+1}-u_{n+1}$ donc $n+2\ v_n=\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+2}}-v_{n+1}-u_{n+1}$.	0,25	
B)2)d)	$\lim\limits_{n\to+\infty}\ n+2\ v_n=0$.	0,25	

B)3) a)	on a : $\frac{-1}{e}u_n \leq v_n \leq 0$ et $u_n > 0$ alors $\frac{-1}{e} \leq \frac{v_n}{u_n} \leq 0.$ f est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{e},1\right]$ donc $f\left(\left[\frac{1}{e},e\right]\right)=\left[\frac{-1}{e},1\right]$ et $\frac{v_n}{u_n} \in \left[\frac{-1}{e},1\right]$ donc d'aprés le théorème des valeurs intermédiaires il existe un seul réel $\alpha_n \in \left[\frac{1}{e},1\right]$ tel que $f(\alpha_n)=\frac{v_n}{u_n}.$	0,25	
B)3)b)	* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{v_n}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+2}{n+1}\frac{v_n}{u_n}.\frac{n+1}{n+2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{v_n}{u_n}=0.$	0,25	
B) 3)c)	$\alpha_n=f^{-1}\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{v_n}{u_n}\right).$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{v_n}{u_n}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f^{-1}\ x = 1$ car f est continue en 1 alors f^{-1} est continue en 0 et $f^{-1}\ 0 = 1.$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n = 1.$	0,25	



Exercice 4 (5 points)

Question	Eléments de réponses	barème	commentaires
A) 1)	q^2 est impair si et seulement si q est impair.	0,5	
A)2)	q impair donc q = 2k+1 , k $\in \mathbb{N}$ d'ou q²= 4k(k+1)+1 k(k+1) est pair donc q² $\equiv$ 1 mod 8	0,25	

B) 1)	$4^2+9^1=5^2$	0,25	
B) 2)a)	$4^m+9^n=q^2$ et comme 4^m est pair et 9^n impair alors q^2 impair et donc q impair (d'aprés A)1).).	0,25	
B) 2)b)	on a: $q^2\equiv 1 \bmod 8$ $3^{2n}=9^n\equiv 1 \bmod 8$ d'où $q^2-3^{2n}\equiv 0 \bmod 8$.	0,25	
B) 2)c)	Si m=1 alors $q^2-3^{2n}=4\equiv 4 \bmod 8$ ce qui est impossible donc $m\neq 1$.	0,25	
B) 3)a)	q est impair et 3^n est aussi impair donc $q-3^n$ et $q+3^n$ sont pairs.	0,5	2x 0,25
B) 3)b)	* d divise $q-3^n$ et d divise $q+3^n$ donc: d divise $q-3^n + q+3^n = 2q$ et d divise $q-3^n \; q+3^n = 2^{2m}$ donc d est une puissance de 2, $d=2^k, k\in 0,1,2,...,2m$. d divise 2^{2m}, d divise 2q et q est impair, donc d divise 2 d'où $d=1$ ou $d=2$ et comme $(q-3^n)$ et $(q+3^n)$ sont pairs alors $d=(q-3^n)\wedge(q+3^n)=2$.	0,75	3x 0,25
B) 3)c)	on a : $q-3^n < q+3^n$ $d=2$ donc il existe deux entiers a et b tels que : $q-3^n=2a$, $q+3^n=2b$ et $a\wedge b=1$. $q-3^n \, . \, q+3^n = 2^{2m}=4ab$, $m\geq 2$. On a alors : $\begin{cases} ab=2^{2m-2} \\ a\wedge b=1 \\ a<b \end{cases}$ donc $a=1$ et $b=2^{2m-2}$ donc $q-3^n=2$ et $q+3^n=2.2^{2m-2}$ D'où: $q=2^{2m-2}+1$ et $3^n=2^{2m-2}-1$.	0,5	2x 0,25
B) 4)	$m=2$ donc $n=1$ et $q=5$.	0,25	
B) 5)a)	$m\geq 3$ alors $2m-2\geq 4$ donc $2^{2m-2}\equiv 0 \bmod 16$ d'où $3^n=2^{2m-2}-1\equiv -1 \bmod 16$	0,5	
B) 5)b)	$3^k\equiv 1 \bmod 16$ si $k=4a$ $3^k\equiv 3 \bmod 16$ si $k=4a+1$; $a\in\mathbb{N}$. $3^k\equiv 9 \bmod 16$ si $k=4a+2$ $3^k\equiv 11 \bmod 16$ si $k=4a+3$	0,25	
B) 5)c)	D'après B) 5) a) et B) 5) b), il n'existe pas de triplets (m,n,q) éléments de l'ensemble A tels que $m\geq 3$.	0,25	
B) 6)	Conclusion m=2. Donc $A=\{(2,1,5)\}$.	0,25	

Un corrigé de l'épreuve de Mathématiques
Session principale 2018

Par Mohamed ATOUANI

Exercice 1.

1. (a) Par définition de la tangente d'un angle, $\tan\widehat{CBD} = \frac{DC}{DB} = \frac{DC}{2DC} = \frac{1}{2}$. Par ailleurs, le triangle IHB est rectangle en I, ce qui implique que $\frac{1}{2} = \tan\widehat{CBD} = \tan\widehat{IBH} = \frac{IH}{IB}$. D'où le résultat.
Attention, il est important de préciser que le triangle IHB est rectangle en I, sans quoi tout le raisonnement tombe à l'eau.

   Remarque : Je tiens à préciser qu'il est inutile de prendre les tangentes pour prouver ce résultat et qu'il est essentiellement dû à la similarité des triangles DBC et IHB. D'ailleurs l'égalité des tangentes d'un même angle exprimé dans deux triangles rectangles distincts est équivalente à l'égalité des quotients
$$\frac{DC}{DB} = \frac{IH}{IB},$$
qui elle aussi est conséquence de la similarité des triangles DBC et IHB et donc du théorème de Thalès.

   (b) Pour montrer que $\mathscr{R}(I) = E$, il suffit de montrer que $HI = HE$ et que $(\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HE}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$. En effet, dans le triangle IBD, H est le milieu du segment $[BD]$ et E est le milieu du segment $[ID]$, ainsi d'après le théorème des milieux (HE) est parallèle à (IB) et $HE = \frac{1}{2}IB = IH$ d'après ce qui précède. Le parallélisme de (HE) et (IB) implique que $(\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HE}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ car si deux droites sont parallèles et si une troisième droite est perpendiculaire à l'une alors elle est perpendiculaire à l'autre.

2. (a) $f(H) = (h \circ \mathscr{R})(H) = h(\mathscr{R}(H)) = h(H) = B$ car $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DH}$.

   (b) $f(I) = h(\mathscr{R}(I)) = h(E) = I$ car $\mathscr{R}(I) = E$ et $\overrightarrow{DI} = 2\overrightarrow{DE}$

   (c) D'après ce qui précède, f est la similitude de centre I, de rapport $k = 2$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$ car $f(I) = I$, $IB = 2IH$ et $(\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{IB}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

   (d) Afin de montrer que $f(C) = A$, il suffit de montrer que $IA = 2IC$ et $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IA}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$. La dernière condition est évidente car (IA) est perpendiculaire à (IC). Par ailleurs, les triangles IAC et DBC sont semblables (pour les raisons évidentes) donc
$$\frac{IA}{IC} = \frac{DB}{DC} = 2.$$
Cela termine notre preuve.
Notez que l'on peut aussi utiliser les tangentes. En effet, dans le triangle IAC, la somme des angles vaut π, ce qui implique que
$$\widehat{IAC} = \pi - (\widehat{AIC} + \widehat{ICA}) = \pi - \frac{\pi}{2} - \widehat{ICA} = \frac{\pi}{2} - \widehat{ICA}.$$

De même, dans le triangle DBC on a $\widehat{CBD} = \frac{\pi}{2} - \widehat{ICA}$. Les deux égalités impliquent donc que $\widehat{IAC} = \widehat{CBD}$. En particulier,

$$\frac{1}{2} = \tan \widehat{CDB} = \tan \widehat{IAC} = \frac{IC}{IA}.$$

Le résultat en découle.

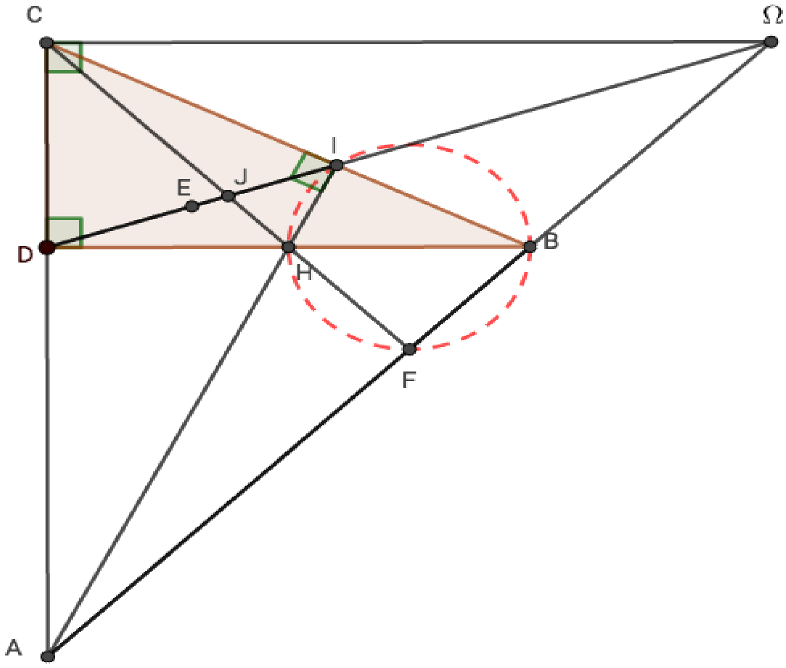
3. (a) Le triangle IBH est rectangle en I et d'hypoténuse $[BH]$, le cercle de diamètre $[BH]$ est donc le cercle circonscrit au triangle IBH et passe a fortiori par I. Le même argument montre que le point F appartient au cercle de diamètre $[BH]$, il suffit pour cela de montrer que le triangle BHF est rectangle en F. En effet, le point H est l'orthocentre du triangle ABC (point d'intersection des hauteurs) car il est à l'intersection des deux premières hauteurs, à savoir $[AI]$ et $[BD]$, $[CH]$ étant la troisième hauteur, cela implique que $(CH) \perp (AB)$ en F. D'où le résultat. L'angle $\widehat{FIH}$ et l'angle $\widehat{FBH}$ interseptent le même arc de cercle, ils ont donc la même mesure. Par ailleurs, l'angle $\widehat{BHF}$ est opposé par le sommet à l'angle $\widehat{DHC}$ donc sont égaux. La mesure de ce dernier vaut $\frac{\pi}{4}$ car le triangle DHC est isocèle et rectangle en D. Le résultat en découle car le triangle BFH est rectangle en F.

   (b) D'après la première question $\mathscr{R}(I) = E$, donc le triangle IHE est isocèle et rectangle en H, ce qui implique que l'angle HIE est de mesure égale à $\frac{\pi}{4}$. L'angle $\widehat{DIF}$ est donc un angle droit. Le résultat tombe comme la pomme de Newton.

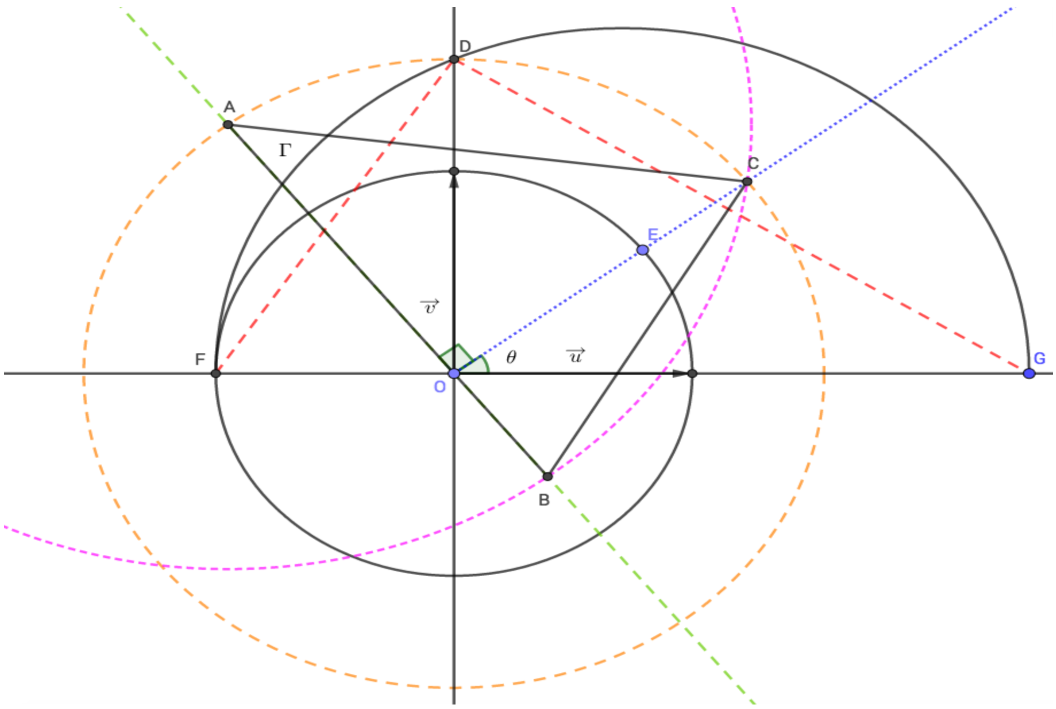
   (c) L'angle $\widehat{IFH}$ et $\widehat{IBH}$ interseptent le même arc de cercle donc sont de même mesure et donc de même tangente qui vaut $\frac{1}{2}$. On en déduit que $IF = 2IJ$. La question précédente implique alors que $f(J) = F$. Bien sûr la similarité des triangles permet aussi de conclure.

   (d) D'après ce qui précède, $(\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{I\Omega}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$. Par ailleurs, l'angle $\widehat{BFI}$ et l'angle $\widehat{BHI}$ interseptent le même arc de cercle donc sont de même mesure. Ceci implique que $\widehat{F\Omega I} = \widehat{HBI}$, ainsi ont la même tangente qui vaut $\frac{1}{2}$. Le résultat en découle. Même chose ici, la similarité des triangles permet d'avoir le résultat.

4. Il suffit de montrer que $FC = F\Omega = FA$, ce qui impliquerait que le triangle $CA\Omega$ est inscrit dans le cercle de diamètre $[A\Omega]$ et par conséquent que $CA\Omega$ est rectangle en C. En effet, $f(C) = A$ et $f(F) = \Omega$, ce qui implique que $A\Omega = 2CF$. Par ailleurs, $CF = AF$ car le triangle ACF est rectangle et isocèle en F car de plus, la mesure de l'angle $\widehat{FCA}$ vaut celle de l'angle $\widehat{HCD}$ qui est égale à $\frac{\pi}{4}$ et ce parce que le triangle HDC est rectangle et isocèle en D. Le résultat en découle.



Exercice 2.



1. (a) **Par similarité :** Les triangles ODF et ODG sont semblables donc

$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OF}} = \frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{OD}}.$$

3

Cette égalité implique en particulier que $\mathrm{OD}^2 = \mathrm{OF} \times \mathrm{OG}$. Le résultat en découle car $\mathrm{OF} = 1$ et $\mathrm{OG} = 1+\sqrt{2}$.

Méthode algébrique : On utilise ici l'équation d'un cercle et d'une droite. Posons $a = 1+\sqrt{2}$, on a $D = \Gamma \cap (Oy)$, il suffit donc de trouver l'équation de Γ. En effet, le centre de Γ a pour abscisse $-1+\frac{1+a}{2} = \frac{a-1}{2}$ (car son abscisse vaut $x_F + \frac{FG}{2}$) et pour ordonnée $y = 0$. Ainsi l'équation de Γ s'écrit

$$\left(x - \frac{a-1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1+a}{2}\right)^2, \qquad y \geq 0.$$

La droite (Oy) est d'équation $x = 0$, on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(\frac{1+a}{2}\right)^2 \\
y^2 &= \left(\frac{1+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 \\
y^2 &= \left(\frac{1+a}{2} - \frac{a-1}{2}\right)\left(\frac{1+a}{2} + \frac{a-1}{2}\right) \\
y^2 &= 1 \times a = a.
\end{aligned}$$

Le résultat en découle.

Méthode algébrico-géométrique : Notons $y_1 = \mathrm{DF}$, $y_2 = \mathrm{DG}$ et $x = \mathrm{OD}$. Le triangle DFG est rectangle en D car inscrit dans le demi-cercle Γ, ce qui implique que $y_1 y_2 = x(1+a)(*)$ (en calculant l'aire du triangle de deux manières différentes). Par ailleurs le théorème de Pythagore appliqué aux triangles ODG et ODF donne $a^2 + x^2 = y_2^2$ et $1 + x^2 = y_1^2$. En multipliant les deux dernières équations, on obtient

$$(a^2 + x^2)(1 + x^2) = (y_1 y_2)^2.$$

En élévant (*) au carré, on obtient

$$\begin{aligned}
(a^2 + x^2)(1 + x^2) &= x^2(1+a)^2 \\
a^2 + a^2x^2 + x^2 + x^4 &= x^2(1 + 2a + a^2) \\
x^4 - 2ax^2 + a^2 &= 0 \\
(x^2 - a)^2 &= 0 \\
x^2 &= a.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Remarque : Plus généralement, ce procédé géométrique permet de construire *à la règle et au compas* (règle non graduée) le nombre $\sqrt{a}$ à partir d'un nombre positif donné a.

(b) On a

$$z_A = i\sqrt{1+\sqrt{2}}e^{i\theta} = \mathrm{OD}ie^{i\theta} = \mathrm{OD}e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\theta} = \mathrm{OD}e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}.$$

Pour construire le point A, il suffit de tracer la perpendiculaire à (OE) passant par O et de reporter la longueur OD à l'aide d'un compas (cercle orange).

2. (a) En évaluant l'équation (E) en z_A, on obtient,

$$\begin{aligned} z_A^2 + \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}} e^{i\theta} z_A + e^{2i\theta} &= \mathrm{OD}^2 e^{i(2\theta+\pi)} + \sqrt{2} e^{2i\theta} + e^{2i\theta} \\ &= -(1+\sqrt{2}) e^{2i\theta} + (1+\sqrt{2}) e^{2i\theta} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi z_A est une solution de l'équation E.

(b) On sait que $z_A z_B = e^{2i\theta}$, ainsi

$$z_B = \frac{e^{2i\theta}}{z_A} = \frac{1}{\mathrm{OD}} e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}.$$

3. (a) Pour ce faire, il suffit de montrer que $\frac{z_A}{z_B} \in \mathbb{R}$. En effet,

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{\mathrm{OD} e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}}{\frac{1}{\mathrm{OD}} e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}} = \mathrm{OD}^2 e^{i\pi} = -\mathrm{OD}^2.$$

D'où le résultat.

(b) Voir figure. (Il suffit de reporter la longueur OD sur la demi-droite [OE).

(c) On a

$$\begin{aligned} \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} &= \frac{\frac{z_C}{z_A} - 1}{\frac{z_B}{z_A} - 1} \\ &= \frac{\frac{\mathrm{OD} e^{i\theta}}{\mathrm{OD} e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}} - 1}{\frac{z_B z_A}{z_A^2} - 1} \\ &= \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}} - 1}{\frac{e^{2i\theta}}{-\mathrm{OD}^2 e^{2i\theta}} - 1} \\ &= \frac{\mathrm{OD}^2(1+i)}{\mathrm{OD}^2 + 1} \\ &= \frac{\mathrm{OD}^2}{\mathrm{OD}^2 + 1} \times (1+i) \\ &= \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \times (1+i) \\ &= \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}{(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)} \times (1+i) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i). \end{aligned}$$

D'où le résultat.
D'après le calcul précédent, on a

$$\omega = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Ainsi $|\omega| = 1$ et $\arg \omega \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$. Le résultat en découle.

(d) La construction est triviale. En effet, AB = AC signifie que B appartient au cercle (mauve) de centre A et de rayon AC. Le point B appartient par ailleurs à la demi-droite [AO) car le triangle AOC est rectangle et isocèle en O.

Exercice 3.

Partie A

1. (a) Trivial car la limite de $x\ln x$ vaut $0 = f(0)$ (par croissance comparée) quand x tend vers 0^+.

   (b) On a
$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x\ln x}{x} = \ln x,$$
   la fonction ln tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0^+, ainsi la fonction f n'est pas dérivable à droite en 0 et admet une tangente verticale en ce point.

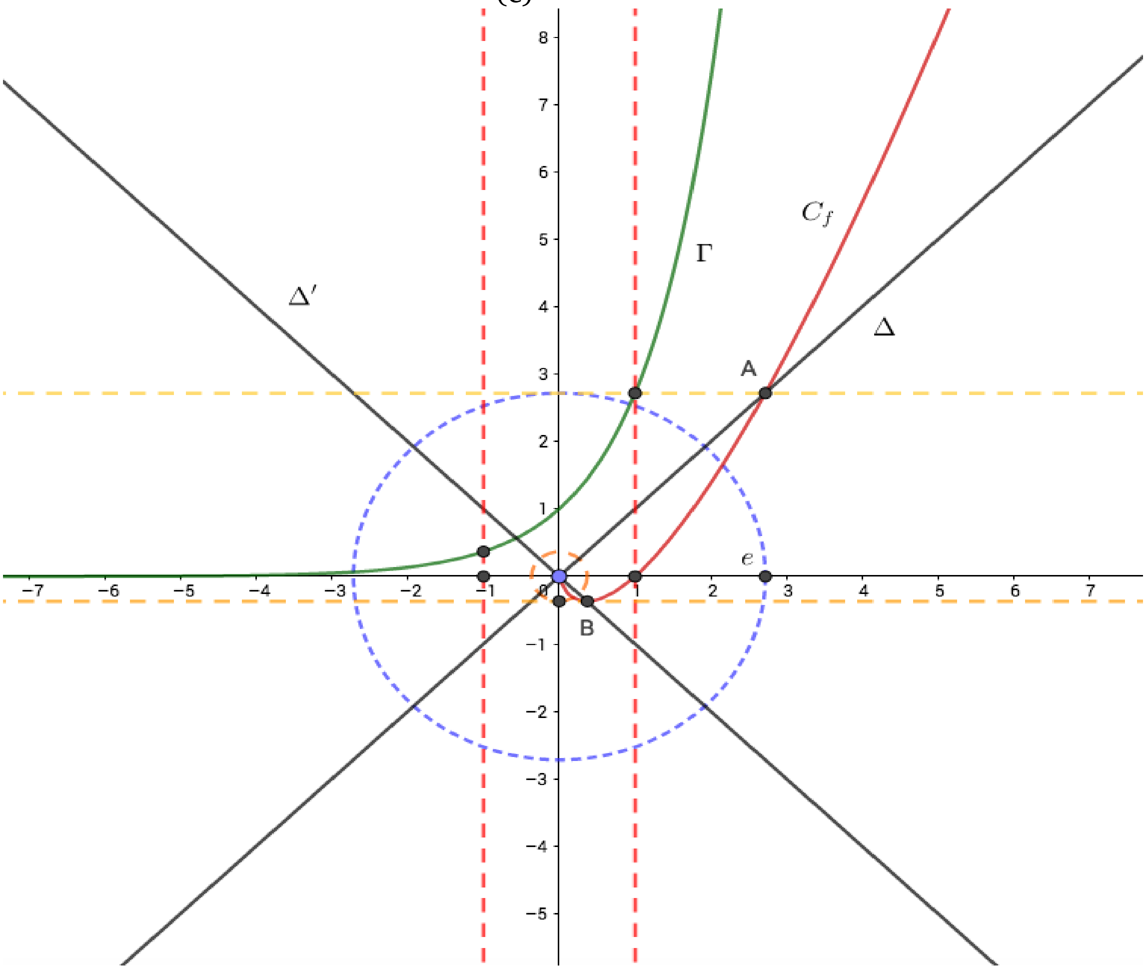
   (c) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) = \ln x + 1$$
   Pour tout $x > 0, f'(x) \geq 0 \iff \ln x \geq -1 \iff x \geq \frac{1}{e}$, ainsi f est décroissante sur $[0, \frac{1}{e}]$ et croissante sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$. D'où le tableau de variations

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. (a) Le point A est de coordonnées $x_A = e$ et $y_A = f(x_A) = f(e) = e$ et le point B a pour abscisse $x_B = \frac{1}{e}$ et pour ordonnée $y_B = f(x_B) = -\frac{1}{e}$. Afin de construire les points A et B, il suffit d'utiliser la courbe Γ pour mesurer $e = e^1$ et $\frac{1}{e} = e^{-1}$. Je vous laisse le soin de décortiquer mon schéma.

   (b) Étudier la position relative de (C_f) et Δ revient à étudier le signe de la fonction ϕ définie sur $[0,+\infty[$ par $\phi(x) = f(x) - x$. En effet, $\forall x > 0, \phi(x) = x\ln x - x = x(\ln x - 1)$. Ainsi le signe de $\phi(x)$ est celui de $\ln x - 1$ qui est positif si et seulement si $x \geq e$. On en déduit que (C_f) est en dessous de Δ quand $x \leq e$ et au dessus de Δ sinon. De plus, (C_f) intersecte Δ en $x = 0$ et $x = e$ (au point A). De même, la position relative de (C_f) et de Δ' est donnée par le signe de la fonction ψ définie sur $[0,+\infty[$ par $\psi(x) = f(x) + x = x(\ln x + 1)$. Or $\ln x + 1 \geq 0 \iff \ln x \geq -1 \iff x \geq \frac{1}{e}$. Il en découle que (C_f) est au dessus de Δ' quand $x \geq \frac{1}{e}$ et en dessous sinon, points d'intersection O et B.

(c)



3. La partie S du plan limitée par la courbe (C_f) et les droites Δ et Δ' est l'union du triangle T dont les sommets sont $O(0,0)$, $B(\frac{1}{e},-\frac{1}{e})$ et $B'(\frac{1}{e},\frac{1}{e})$ le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses et la partie S' limitée par la courbe (C_f), Δ, la droite verticale d'équation $x=\frac{1}{e}$ et celle d'équation $x=e$. L'aire du triangle T vaut $\frac{OB\times OB'}{2}=\frac{1}{e^2}$ et l'aire de S' vaut

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{e}}^{e}(x-f(x))dx &= \int_{\frac{1}{e}}^{e} x\,dx - \int_{\frac{1}{e}}^{e} x\ln x\\ &= [\frac{1}{2}x^2]_{\frac{1}{e}}^{e} - [\frac{1}{2}x^2\ln x]_{\frac{1}{e}}^{e} + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{e}}^{e} x\,dx\\ &= -\frac{1}{e^2}+\frac{1}{4}\Big(e^2-\frac{1}{e^2}\Big).\end{aligned}$$

Le passage de la première ligne à la deuxième se fait par intégration par parties. Le résultat en découle.

7

Partie B

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^n e^t$ est positive sur $[\frac{1}{e}, 1]$ donc $u_n \geq 0$. Par ailleurs, $u_n \neq 0$ car sinon la fonction continue $t \mapsto t^n e^t$ serait identiquement nulle sur $[\frac{1}{e}, 1]$, ce qui n'est pas le cas.

   (b) Il reste à montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \frac{e}{n+1}$. En effet, puisque $t \leq 1$, on obtient $e^t \leq e$ par croissance de la fonction exponentielle, ainsi $t^n e^t \leq t^n e$ et

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n e^t dt &\leq \int_0^1 t^n e dt \\ &\leq e \int_0^1 t^n dt \\ &= \frac{e}{n+1}.\end{aligned}$$

   Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la limite de (u_n) vaut 0.

   (c) Une simple intégration par parties permet d'avoir le résultat.

   (d) On a $(n+1)u_n = e - \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+1}} - u_{n+1}$, la limite de (u_{n+1}) vaut 0 donc $((n+1)u_n)$ tend vers e à l'infini.

2. La fonction f est négative sur $[\frac{1}{e}, 1]$, ce qui implique que $v_n \leq 0$. Par ailleurs, sur ce même intervalle, f est croissante donc

$$\forall t \geq \frac{1}{e}, \quad f(t) \geq f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}.$$

   En passant aux intégrales on obtient le résultat. Par le théorème des gendarmes, la suite (v_n) tend vers 0 à l'infini.

   On sait que $\forall t > 0, f'(t) = \ln t + 1$, on obtient donc

$$\forall t > 0, \quad tf'(t) - t = t \ln t = f(t).$$

   D'où le résultat. On a alors, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}v_n &= \int t^n e^t f(t) dt \\ &= \int t^n e^t (tf'(t) - t) dt \\ &= \int (t^{n+1} e^t f'(t) - t^{n+1} e^t) dt.\end{aligned}$$

   Le résultat en découle par linéarité de l'intégrale.

   (b) Il suffit d'intégrer par parties $v_n + u_{n+1}$. En effet,

$$\begin{aligned}\int t^{n+1} e^t f'(t) dt &= [t^{n+1} e^t f(t)]_{\frac{1}{e}}^{1} - \int f(t)[(n+1)t^n e^t - t^{n+1} e^t] dt \\ &= \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+2}} - (n+1)v_n - v_{n+1}.\end{aligned}$$

   Ainsi, on a montré que $v_n + u_{n+1} = \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+2}} - (n+1)v_n - v_{n+1}$. D'où le résultat.

(c) Les suites (u_{n+1}) et (v_{n+1}) tendent vers 0, ainsi la suite $((n+2)v_n)$ tend vers 0.

3. (a) D'après la question 2)a, on a $-\frac{u_n}{e} \leq v_n \leq 0$ ce qui implique en divisant par $u_n > 0$ que $-\frac{1}{e} \leq \frac{v_n}{u_n} \leq 0$, autrement dit $f(\frac{1}{e}) \leq \frac{v_n}{u_n} \leq f(1)$. Par continuité de la fonction f, le théorème des valeurs intermédiaires implique l'existence d'un réel $\alpha_n \in [\frac{1}{e}, 1]$ pour lequel $\frac{v_n}{u_n} = f(\alpha_n)$. L'unicité du réel α_n découle de la stricte croissance de la fonction f sur $[\frac{1}{e}, 1]$. **CQFD**.

(b) On a
$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{(n+1)v_n}{(n+1)u_n}.$$
Or, d'après la question 1)d, la suite $((n+1)u_n)$ tend vers e et d'après la question 2)d $(n+1)v_n = (n+2)v_n - v_n$, ainsi la suite $((n+1)v_n)$ tend vers 0. Le résultat en découle.

(c) Par continuité de la fonction f, on a
$$0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n\to 0+\infty} f(\alpha_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} \alpha_n\right),$$
ainsi $f\left(\lim_{n\to+\infty} \alpha_n\right) = 0$. Or le seul réel β pour lequel $f(\beta) = 0$ est $\beta = 1$. On en déduit que la suite (α_n) tend vers 1.

Exercice 4.

Partie A

1. Si q est impair alors $q \equiv 1 \pmod 2$ ce qui implique que $q^2 \equiv 1 \pmod 2$, donc q^2 est impair. Réciproquement, si q^2 est impair alors $q^2 \equiv 1 \pmod 2$ ce qui implique que $q^2 - 1 \equiv 0 \pmod 2$, autrement dit $(q-1)(q+1) \equiv 0 \pmod 2$, ainsi 2 divise $(q-1)(q+1)$ et donc par le lemme de Gauss 2 divise $q-1$ ou 2 divise $q+1$. Dans les deux cas, q est un nombre entier impair.

2. Si q est impair alors les restes possibles de la division euclidienne de q par 8 sont 1,3,5 et 7 car sinon q serait pair. Si par exemple $q \equiv 3 \pmod 8$ alors $q^2 \equiv 3^2 \pmod 8 \equiv 9 \pmod 8 \equiv 1 \pmod 8$. Les autres cas se traitent de la même façon. Le résultat en découle.

Partie B

1. On a $2^{2\times 2} + 3^{2\times 1} = 2^4 + 3^2 = 25 = 5^2$, ainsi le triplet $(2,1,5) \in A$.

2. (a) Soit $(m,n,q) \in A$. On sait que les puissances d'un nombre pair est un nombre pair, de même les puissances d'un nombre impair est un nombre impair, ainsi 2^{2m} est un nombre pair et 3^{2n} est un nombre impair. La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair étant impaire, on en déduit que q^2 est impair et par conséquent que q est impair par la première question de la partie A.

(b) Par la deuxième question de la partie A, on sait que $q^2 \equiv 1 \pmod 8$ car q est impair. Par ailleurs,

$$3^{2n} \equiv (3^2)^n \pmod 8 \equiv 9 \pmod 8 \equiv 1 \pmod 8.$$

Ainsi, $q^2 - 3^{2n} \equiv 1 - 1 \pmod 8 \equiv 0 \pmod 8$.

(c) Le résultat de la question précédente implique que $2^{2m} \equiv 0 \pmod 8$, ce qui n'est pas le cas pour $m = 1$ car $2^2 \equiv 4 \pmod 8 \not\equiv 0 \pmod 8$.

3. (a) 3^n est un nombre impair, de même pour q, ainsi $q - 3^n$ et $q + 3^n$ sont pairs.

(b) d divise $q - 3^n$ et $q + 3^n$ donc divise la somme des deux qui vaut $2q$ et leur produit aussi valant $q^2 - 3^{2n} = 2^{2m}$.
Les diviseurs de 2^{2m} sont tous de la forme 2^α pour un $\alpha \in \mathbb{N}$, il en va de même pour $d = 2^{\alpha_0}$ pour un $\alpha_0 \geq 1$ (car d est pair, étant plus grand commun diviseur de deux entiers pairs). Par ailleurs, 2^{α_0} divise $2q$, par conséquent $2^{\alpha_0 - 1}$ divise q, ce qui n'est pas possible sauf si $\alpha_0 - 1 = 0$, soit $\alpha_0 = 1$ car q est impair. Le résultat en découle.

(c) L'entier $q - 3^n$ est une puissance de 2 car il divise 2^{2m} donc s'écrit sous la forme 2^β et par conséquent $q + 3^n = 2^{2m-\beta}$. L'inégalité $q - 3^n < q + 3^n$ implique alors que $2^\beta < 2^{2m-\beta}$, ce qui implique que $\beta < 2m - \beta$. Maintenant, si $1 < \beta$ alors $2m - \beta > 1$, par conséquent 4 divise $q - 3^n$ et $q + 3^n$. Contradiction, car le plus grand commun diviseur de $q - 3^n$ et $q + 3^n$ vaut 2. Le résultat en découle.
On a $2q = (q - 3^n) + (q + 3^n) = 2 + 2^{2m-1}$. On obtient le résultat pour q en divisant les deux membres de l'égalité par 2. De même, $2 \times 3^n = (q + 3^n) - (q - 3^n) = 2^{2m-1} - 2$, le résultat s'en déduit en divisant par 2.

4. Si $m = 2$ alors $q = 2^{2\times2-2} + 1 = 5$ et $3^n = 2^{2\times2-2} - 1 = 3$, ce qui implique que $n = 1$.

5. (a) Puisque $m \geq 3$ alors il s'écrit sous la forme $m = 3 + k$ où $k \in \mathbb{N}$. Par ailleurs $3^n = 2^{2(3+k)-2} - 1 = 2^{4+2k} - 1 = 2^4 \times 2^{2k} - 1 = 16 \times 2^{2k} - 1 \equiv -1 \pmod{16}$. D'où le résultat.

(b) Les restes possibles de la division euclidienne de 3^k par 16 sont 1, 3, 9, 11.

(c) On sait que $3^n \equiv -1 \pmod{16} \equiv 15 \pmod{16}$, ainsi le reste de la division euclidienne de 3^n par 16 vaut 15, ce qui n'est pas d'après ce qui précède.

6. $A = \{(2, 1, 5)\}$.

CORRIGÉ DU SUJET DE MATHS
BAC 2018 SESSION PRINCIPALE

SECTION MATHS

PROPOSÉ PAR
M^{r} SALAH HANNACHI

EXERCICE N1 :

1) a) Dans le triangle rectangle BCD on a : $\tan\widehat{CBD} = \frac{CD}{DB} = \frac{1}{2}$. D'autre part dans le triangle rectangle IHB on a : $\tan\widehat{CBD} = \frac{IH}{IB}$ alors $\frac{IH}{IB} = \frac{1}{2}$ $(\star)$

b) Dans le triangle IDB on a : E=I⋆D et H=B⋆D alors (EH)∥(IB) et EH= $\frac{1}{2}$IB

Or (IB)⊥(IH) et IH= $\frac{1}{2}$IB d'après $(\star)$, alors IH=EH et $\widehat{IHE} = \frac{\pi}{2}$ donc le triangle IHE est rectangle et isocèle en H et comme EHI est un triangle direct alors R(I)=E.

2) a) f(H)=hoR(H)=h(H)=B car H=B⋆D. D'où f(H)=B

b) f(I)=hoR(I)=h(E) et h(E)=I car E=I⋆D, alors f(I)=I

c) f est la compose d'une homothétie h et d'un déplacement R alors f est une similitude directe de rapport k=2 (le rapport positif de l'homothétie h), de centre I (car f(I)=I et k≠ 1) et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (l'angle de la rotation R).

d) Dans les deux triangles IAC et CBD on a : $\widehat{CIA} = \widehat{CDB} = \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{BCD} = \widehat{ICA}$ (angle commun)

alors par conséquent $\widehat{IAC} = \widehat{CBD}$ donc $\frac{IC}{IA} = \tan\widehat{CBD} = \frac{1}{2}$ d'où IA= 2.IC

D'autre part (IA)⊥(IC), et comme le triangle AIC est direct alors $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IA}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Ainsi $\begin{cases} IA = 2.IC \\ (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IA}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ alors f(C)=A

3) a) On a : f(C)=A et f(H)=B alors f((CH))=(AB) d'où (CH)⊥(AB) donc $\widehat{HFB} = \widehat{HIB} = \frac{\pi}{2}$ et par la suite I et F appartiennent au cercle de diamètre [HB]

Dans le cercle de diamètre [HB] les angles $(\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{IF})$ et $(\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BF})$ sont deux angles inscrits interceptant le même arc alors $(\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{IF}) \equiv (\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BF})[2\pi]$

Or $(\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BF}) \equiv (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CH})[2\pi]$ en effet : les deux triangles CDH et HBF sont semblables car $\widehat{HFB} = \widehat{HDC} = \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{BHF} = \widehat{CHD}$ (deux angles opposés par le sommet)

et comme CDH est un triangle rectangle et isocèle en D (DC=DH= $\frac{1}{2}$DB) alors $(\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BF}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$. D'où $(\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{IF}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

b) $\widehat{DIH} = \widehat{EIH} = \frac{\pi}{4}$ car EIH est un triangle rectangle et isocèle en H (R(I)=E)

et $\widehat{HIF} = \frac{\pi}{4}$ alors $\widehat{DIF} = \widehat{DIH} + \widehat{HIF} = \frac{\pi}{2}$ d'où (ID)⊥(IF).

f((ID)) est la droite perpendiculaire à (ID) et passant par le point f(I)=I. Alors f((ID))=(IF)

c) On a f(C)=A et f(H)=B alors f((CH))=(AB)

et on a J∈(CH)∩(DI) alors f(J) ∈f((CH))∩f((DI)) cela signifie que f(J)∈(AB)∩(IF) et comme F∈(AB) alors f(J)=F

d) f((IF)) est la droite perpendiculaire à (IF) et passant par le point f(I)=I, alors f((IF))=(ID)
F∈(CH)∩(IF) alors f(F) ∈f((CH))∩f((IF)) cela signifie que f(F)∈(AB)∩(ID). D'où f(F)= Ω

4) Montrons d'abord que F=A⋆ Ω. Ce ci revient à montrer que J=F⋆C ?

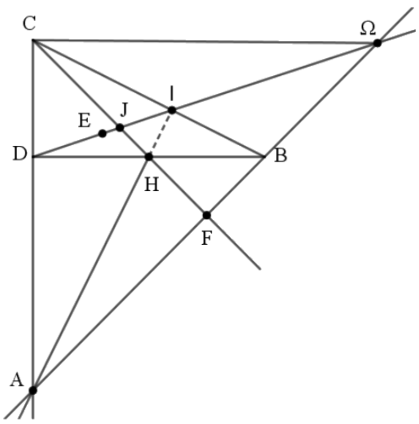
Le triangle DCH est rectangle et isocèle en D (c'est déjà justifié) alors $\widehat{ACF} = \frac{\pi}{4}$

et comme $\widehat{CFA} = \frac{\pi}{2}$ (c'est déjà montré) alors le triangle AFC est isocèle en F, d'où AF=FC

D'autre part AF=2.CJ (car f(C)=A et f(J)=F) alors FC=2.CJ et comme de plus J∈[CF] alors J=F⋆C.

La similitude f conserve le milieu alors f(J) =f(F)⋆f(C), d'où F=A⋆ Ω et par conséquent (FC) est un axe de symétrie dans le triangle A ΩC, ce qui implique que $\widehat{C\Omega F} = \widehat{CAF} = \frac{\pi}{4}$

D'où le triangle CA Ω est rectangle en C.



EXERCICE N2 :

1) a) Le triangle FDG est rectangle en D (car D∈ Γ et [FG] est le diamètre de Γ), de plus O est le projeté orthogonal de D sur [FG]. Alors $OD^2 = OF \times OG$ d'où $OD^2 = 1 + \sqrt{2}$

b) $z_A = i.\sqrt{1+\sqrt{2}}.e^{i\theta} = i.\sqrt{OD^2}.e^{i\theta} = OD.e^{i\frac{\pi}{2}}.e^{i\theta} = OD.e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$

2) (E) : $z^2 + \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}}e^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$

a) $\left(i.\sqrt{1+\sqrt{2}}.e^{i\theta}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}}e^{i\theta}\left(i.\sqrt{1+\sqrt{2}}.e^{i\theta}\right) + e^{2i\theta} = -(1+\sqrt{2})e^{2i\theta} + \sqrt{2}e^{2i\theta} + e^{2i\theta} = 0$

Alors z_A est une solution de l'équation (E).

b) On sait que $z_A.z_B = e^{2i\theta}$ alors cela signifie que $z_B = \frac{e^{2i\theta}}{z_A} = \frac{e^{2i\theta}}{i.\sqrt{1+\sqrt{2}}.e^{i\theta}} = -i\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}$

Ainsi $z_B = \frac{e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}}{OD}$

3) a) $\frac{z_A}{z_B} = \frac{OD.e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}}{\frac{e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}}{OD}} = OD^2.e^{i\pi} = -OD^2 \in IR$ alors les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires (et de sens contraires). D'où O, A et B sont alignés.

b) Voir la figure

c) $\frac{Aff(\overrightarrow{AC})}{Aff(\overrightarrow{AB})} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{ODe^{i\theta} - OD.e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}}{\frac{e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}}{OD} - OD.e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}} = \frac{OD - OD.e^{i\frac{\pi}{2}}}{\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{OD} - OD.e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{OD - i.OD}{\frac{-i}{OD} - i.OD} = \frac{i.OD + OD}{\frac{1}{OD} + OD} = \frac{OD^2}{1+OD^2}(1+i) =$
$\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}(1+i) = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}(1+i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

• On a : $\dfrac{Aff(\overrightarrow{AC})}{Aff(\overrightarrow{AB})} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ alors :

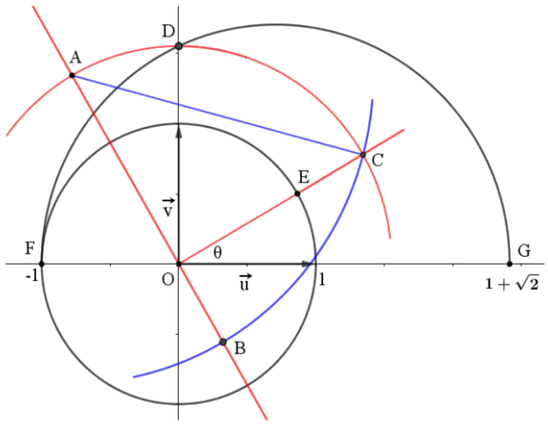
$\left|\dfrac{Aff(\overrightarrow{AC})}{Aff(\overrightarrow{AB})}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}|1+i| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2} = 1$ cela signifie que $\dfrac{AC}{AB} = 1$, d'où le triangle ABC est isocèle en A

et de plus $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \mathrm{Arg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)[2\pi]$

$\equiv \mathrm{Arg}(1+i)[2\pi]$

Ainsi $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

d) Voir la figure



EXERCICE N3 :

A)

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x.\ln x = 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ d'où f est continue à droite en 0

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x.\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ alors f n'est pas dérivable à droite en 0.

Donc la courbe (C_f) admet au point O(0,0) une demi-tangente à droite verticale dirigée vers le bas.

c) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a : $f'(x) = \ln x + 1$ pour tout $x > 0$.

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f	0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

2) a) Voir la figure

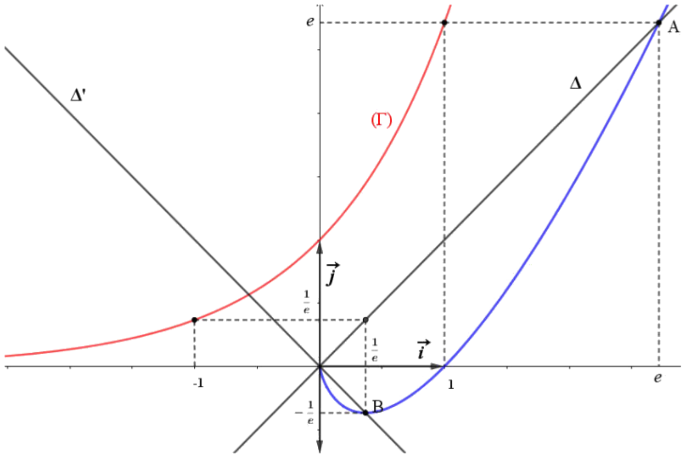
b) $f(x) - x = x(\ln x - 1)$ $\forall x > 0$ et $f(0) - 0 = 0$ alors :

x	0		e		$+\infty$
$f(x)-x$	0	−	0	+	
Cf/Δ	$Cf\cap\Delta=\{O(0,0)\}$	au dessous de Δ	$Cf\cap\Delta=\{A\}$	au dessus de ∞	

$f(x) + x = x(\ln x + 1)$ $\forall x > 0$ et $f(0) + 0 = 0$ alors :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f(x)+x$	0	−	0	+	
Cf/Δ'	$Cf\cap\Delta'=\{O(0,0)\}$	au dessous de Δ'	$Cf\cap\Delta'=\{B\}$	au dessus de Δ'	

c) Courbe (C_f)



3) L'aire $\mathcal{A}$ de la partie S :

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ où $\mathcal{A}_1$ est l'aire du triangle OBB' avec B' est le point de Δ d'abscisse $\frac{1}{e}$

et $\mathcal{A}_2$ est l'aire de partie du plan limitée par (C_f), Δ et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$

$\mathcal{A}_1 = \frac{\frac{1}{e}\times\frac{2}{e}}{2} = \frac{1}{e^2}$

$\mathcal{A}_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(x - f(x)\right)dx = \int_{\frac{1}{e}}^{e}(x - xlnx)dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{e} - \left(\left[\frac{x^2}{2}lnx\right]_{\frac{1}{e}}^{e} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{e}}^{e}\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \left(\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2e^2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4e^2}\right)$

$= \frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}$

Alors $\mathcal{A} = \frac{1}{e^2} + \frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2} = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4e^2} = \frac{1}{4}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right).(u.a)$

B) 1) a) La fonction $t \mapsto t^n e^t$ est continue et strictement positive sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ alors

$u_n = \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n e^t dt > 0.$

b) Pour tout $\frac{1}{e} \le t \le 1$ on a : $0 < e^{\frac{1}{e}} \le e^t \le e$ alors $0 < t^n e^t \le e.t^n$

En intégrant sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$, on obtient : $0 < u_n \le e.\int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n\, dt$ cela signifie que :

$0 < u_n \le e.\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)e^{n+1}}$ ce qui implique que $0 < u_n \le \frac{e}{n+1}$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

c) $u_{n+1} = \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^{n+1} e^t dt$

$= \left[t^{n+1}e^t\right]_{\frac{1}{e}}^{1} - (n+1)\int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n e^t dt = e - \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+1}} - (n+1)u_n$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(e - \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+1}} - u_{n+1}\right) = e$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+1}} = 0$

2) a) Pour tout réel t tel que : $\frac{1}{e} \le t \le 1$ on a : $f\left(\frac{1}{e}\right) \le f(t) \le f(1)$ car f est croissante sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$. Alors $-\frac{1}{e} \le f(t) \le 0$. Et comme $t^n e^t > 0 \;\forall\, t \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$ alors $-\frac{1}{e}t^n e^t \le t^n e^t f(t) \le 0$

En intégrant sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ on obtient : $-\frac{u_n}{e} \le v_n \le 0$

b) Pour tout $t > 0$, $tf'(t) - t = t(lnt + 1) - t = t.lnt = f(t)$

- $v_n = \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n e^t f(t)dt = \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n e^t (tf'(t) - t)dt$

$= \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^{n+1} e^t f'(t)dt - \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^{n+1} e^t dt = \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^{n+1} e^t f'(t)dt - u_{n+1}$

c) $v_n = \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^{n+1}e^t f'(t)dt - u_{n+1} = [t^{n+1}e^t f(t)]_{\frac{1}{e}}^{1} - \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^{n+1}e^t f(t) + (n+1)t^n e^t f(t)dt - u_{n+1}$

$$= \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+2}} - \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^{n+1}e^t f(t)dt - (n+1)\int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n e^t f(t)dt - u_{n+1}$$

Alors $v_n = \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+2}} - v_{n+1} - (n+1)v_n - u_{n+1}$

D'où $(n+2)v_n = \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+2}} - v_{n+1} - u_{n+1}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+2)v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+2}} - v_{n+1} - u_{n+1} = 0$ en effet : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+2}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = 0$ (puisque $-\frac{u_n}{e} \le v_n \le 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{u_n}{e} = 0$)

3) a) f est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ alors f réalise une bijection de $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ sur $f\left(\left[\frac{1}{e}, 1\right]\right) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), f(1)\right] = \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$

D'autre part : $-\frac{u_n}{e} \le v_n \le 0$ signifie $-\frac{1}{e} \le \frac{v_n}{u_n} \le 0$ donc $\frac{v_n}{u_n} \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$.

Alors l'équation $f(x) = \frac{v_n}{u_n}$ admet une unique solution α_n dans $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$.

b) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)u_n = e$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+2)v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+2)v_n}{(n+1)u_n} = 0$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+2)}{(n+1)} = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$

c) On a : pour tout $n \in IN, f(\alpha_n) = \frac{v_n}{u_n}$ alors $\alpha_n = f^{-1}\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$

Or f^{-1} est continue sur $\left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ car f est continue sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{v_n}{u_n}\right) = f^{-1}(0) = 1$ D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$

EXERCICE N4 :

A) 1) (q est impair) équivaut à $q \equiv 1[2]$

équivaut à $q^2 \equiv 1^2[2]$

équivaut à $q^2 \equiv 1[2]$

équivaut à (q^2 est impair)

2) q est impair alors il existe $k \in IN$ tel que $q = 2k+1$ donc $(q^2 - 1) = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$

Or $k(k+1)$ est un entier pair car c'est le produit de deux entiers consécutifs tels que l'un est nécessairement pair, alors $4k(k+1) = 4 \times 2t$ où $t \in IN$ donc $4k(k+1) \equiv 0[8]$.

D'où $q^2 \equiv 1[8]$.

B) 1) $2^{2\times2} + 3^{2\times1} = 25 = 5^2$ alors $(m, n, q) \in A$.

2) a) $2^{2m} + 3^{2n} = q^2$

On a : $2^{2m} \equiv 0[2]$ et $3^{2n} \equiv 1[2]$ (puisque $3 \equiv 1[2]$) alors $q^2 \equiv 1[2]$ c'est-à-dire q^2 est impair et cela signifie que q est impair.

b) On remarque que : $3^{2n} = 9^n \equiv 1[8]$ (puisque $9 \equiv 1[8]$)

et on a de plus $q^2 \equiv 1[8]$ alors $q^2 - 3^{2n} \equiv 0[8]$

c) On a $q^2 - 3^{2n} \equiv 0[8]$ signifie que $2^{2m} \equiv 0[8]$ ce qui implique que $2m \ge 3$, alors $m \ge 2$. D'où $m \ne 1$

3) a) On a : $q \equiv 1[2]$ (car q est impair) et $3^n \equiv 1[2]$ (puisque $3 \equiv 1[2]$) alors $q + 3^n \equiv 0[2]$ et $q - 3^n \equiv 0[2]$ d'où $q + 3^n$ et $q - 3^n$ sont deux entiers pairs.

b) d= $(q-3^n)\wedge(q+3^n)$ alors d divise $(q-3^n)$ et $(q+3^n)$ donc d divise $(q-3^n)+(q+3^n)$ et d divise $(q-3^n)(q+3^n)$. D'où d divise $2q$ et d divise $q^2-3^{2n}=2^{2m}$

- On a : d divise 2^{2m} alors d= 2^p où $p\in IN$, par conséquent d $\wedge q=1$. Ceci implique que d divise 2 (Lemme de Gauss). Or d ≥ 2 car $(q-3^n)$ et $(q+3^n)$ sont pairs alors d= 2.

c) On a : $(q-3^n)(q+3^n)=2^{2m}$ alors il existe $(\alpha,\beta)\in IN^2$ tel que $\alpha\geq 1$, $\beta\geq 1$, $(q-3^n)=2^\alpha$ et $(q+3^n)=2^\beta$. Ainsi $\alpha+\beta=2m$ et $\alpha\leq\beta$ (car $q-3^n\leq q+3^n$).
Supposons que $\alpha\neq 1$: alors $\beta\geq\alpha\geq 2$. Ce qui est absurde car $2^\alpha\wedge 2^\beta=2$
Ainsi $\alpha=1$ et par la suite $\beta=2m-1$
D'où $q-3^n=2$ et $q+3^n=2^{2m-1}$

- On a : $\begin{cases} q-3^n=2 & (1)\\ q+3^n=2^{2m-1} & (2)\end{cases}$ alors (1) + (2) donne $q=1+2^{2m-2}$
et (2) − (1) donne $3^n=2^{2m-2}-1$

4) Pour $m=2$: on obtient $q=5$ et $3^n=3$ alors $n=1$

5) a) $m\geq 3$ alors $2m-2\geq 4$ donc $2^{2m-2}\equiv 0[16]$ ce qui implique que $3^n\equiv -1[16]$

b) On remarque que $3^4\equiv 1[16]$ alors :

$k=\dots$	4p	4p+1	4p+2	4p+3
$3^k\equiv\dots[16]$	1	3	9	11

(où p$\in IN$)

c) Si $(m,n,q)\in A$ tel que $m\geq 3$ alors $3^n\equiv -1[16]$ cela signifie que $3^n\equiv 15[16]$ ce qui est absurde car $3^n\equiv r[16]$ où $r\in\{1,3,9,11\}$. Alors il n'existe pas un triplet $(m,n,q)\in A$ tel que $m\geq 3$.

6) On sait que $m\geq 2$ et que l'hypothèse $(m\geq 3)$ est absurde, alors $m=2$.
D'où $q=5$ et $n=1$. Ainsi si $(m,n,q)\in A$ alors $(m,n,q)=(2,1,5)$.
Réciproquement : si $(m,n,q)=(2,1,5)$ alors $2^{2m}+3^{2n}=16+9=25=5^2$. Alors $(m,n,q)\in A$
D'où $A=\{(2,1,5)\}$

Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat
Session principale 2018 Section : Mathématiques

Exercice1 :

1.a. Le triangle BCD et rectangle en D donc $\tan\left(\widehat{CBD}\right)=\frac{DC}{DB}=\frac{DC}{2DC}=\frac{1}{2}$.

Le triangle BIH est rectangle e I donc $\tan\left(\widehat{IBH}\right)=\frac{IH}{IB}$ et comme $\widehat{CBD}=\widehat{IBH}$ alors $\frac{IH}{IB}=\frac{1}{2}$.

b. Les points E et H sont les milieux respectifs des segments [ID] et [BD] donc $\overrightarrow{HE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}$

donc $HE=\frac{1}{2}BI=HI$ et $\left(\overrightarrow{HI},\widehat{\overrightarrow{HE}}\right)\equiv\left(\overrightarrow{HI},\widehat{\overrightarrow{BI}}\right)[2\pi]\equiv\left(\overrightarrow{IH},\widehat{\overrightarrow{IB}}\right)[2\pi]$ ainsi $R(I)=E$.

2.a. $f(H)=h\circ R(H)=h(H)=B$.

b. $f(I)=h\circ R(I)=h(E)=I$.

c. f est la composée d'une homothétie de rapport 2 et d'un déplacement d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc f est la similitude directe

de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre I.

d. Le triangle ICA est rectangle en I et de sens direct

donc $\frac{IA}{IC}=\tan\left(\widehat{ICA}\right)=\tan\left(\widehat{BCD}\right)=\frac{DB}{DC}=2$ et $\left(\overrightarrow{IC},\widehat{\overrightarrow{IA}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ d'où $f(C)=\mathbf{A}$.

3.a. $f(C)=A$ et $f(H)=B$ donc $\left(\overrightarrow{CH},\widehat{\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ d'où les droites (FB) et (FH) perpendiculaires en F.

Les triangles BIH et BFH sont rectangles respectivement en I et F alors les points B, I, H et F appartiennent au cercle de diamètre [BH].

$$\left(\overrightarrow{BH},\widehat{\overrightarrow{BF}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}-\left(\overrightarrow{HF},\widehat{\overrightarrow{HB}}\right)[2\pi]$$
$$\equiv\frac{\pi}{2}-\left(\overrightarrow{HC},\widehat{\overrightarrow{HD}}\right)[2\pi]$$

Le triangle CDH est rectangle et isocèle en D et de sens direct en effet $DH=\frac{1}{2}DB=DC$ et $\left(\overrightarrow{DH},\widehat{\overrightarrow{DC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

donc $\left(\overrightarrow{HC},\widehat{\overrightarrow{HD}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ ainsi $\left(\overrightarrow{BH},\widehat{\overrightarrow{BF}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Or $\left(\overrightarrow{IH},\widehat{\overrightarrow{IF}}\right)\equiv\left(\overrightarrow{BH},\widehat{\overrightarrow{BF}}\right)[2\pi]$ (deux angles inscrits qui interceptent le même arc) d'où $\left(\overrightarrow{IH},\widehat{\overrightarrow{IF}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

b. $R(I)=E$ signifie que le triangle HIE est rectangle isocèle en H et de sens direct d'où $\left(\overrightarrow{IE},\widehat{\overrightarrow{IH}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

ainsi $\left(\overrightarrow{ID},\widehat{\overrightarrow{IF}}\right)\equiv\left(\overrightarrow{IE},\widehat{\overrightarrow{IH}}\right)+\left(\overrightarrow{IH},\widehat{\overrightarrow{IF}}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ d'où les droites (ID) et (IF) sont perpendiculaires.

Or l'angle de f est $\frac{\pi}{2}$ d'où l'image de la droite (ID) par f est la droite passant par $f(I)=I$ et perpendiculaire à (ID).

Il en résulte que $f((ID))=(IF)$.

c. $J\in(ID)\cap(CH)$ donc $f(J)\in(IF)\cap(AB)=\{F\}$ d'où $f(J)=F$.

d. L'image de la droite (IF) par f est la droite passant par $f(I)=I$ et perpendiculaire à la droite (IF)

donc $f((IF))=(ID)$.

$F\in(CH)\cap(IF)$ donc $f(F)\in(AB)\cap(ID)$. Or $(AB)\cap(ID)=\{\Omega\}$ d'où $f(F)=\Omega$.

3. $f(C)=A$ et $f(F)=\Omega$ donc $A\Omega=2CF$.

$(CF)\perp(AF)$ et $\widehat{ACF}=\frac{\pi}{4}$ donc le triangle ACF est rectangle et isocèle en F d'où $CF=AF$ ainsi $A\Omega=2AF$

Comme $F\in[A\Omega]$ alors F est le milieu de $[A\Omega]$.

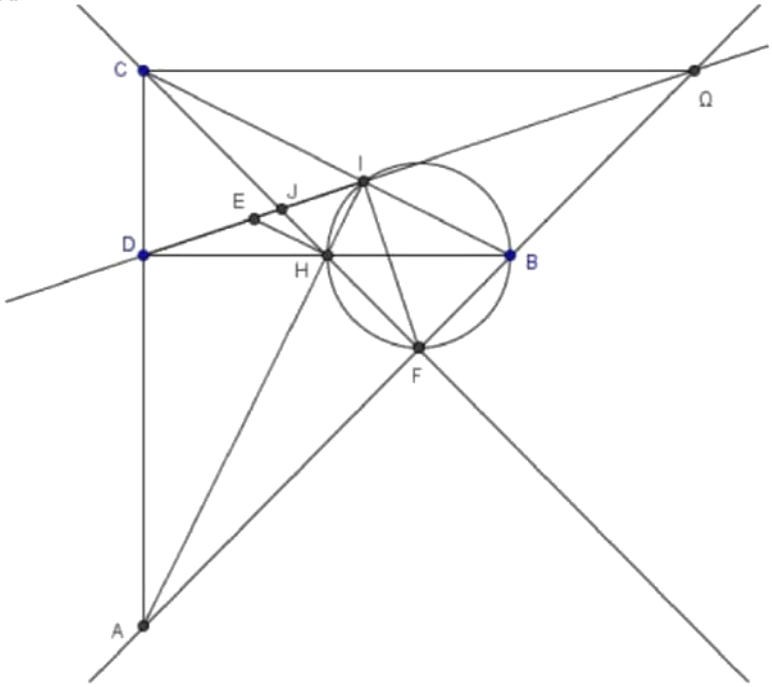
On a : F est le milieu de $[A\Omega]$ et $FA=FC=F\Omega$ donc le triangle $AC\Omega$ est rectangle en C.

Autrement :

$f(C)=A$ et $f(J)=F$ donc $AF=2CJ$

Or $AF=CF$ d'où $CF=2CJ$ et puisque $J\in[CF]$ alors J est le milieu de [CF]

La similitude directe f conserve le milieu alors F est le milieu de [AΩ].
Dans le triangle ACΩ, le milieu F de [AΩ] est équidistant des trois sommets A, C et Ω alors le triangle ACΩ est rectangle en A.



Exercice2 :

1.a. [FG] est un diamètre de Γ et D est un point de Γ donc le triangle FDG est rectangle en D et comme O est le projeté orthogonal de D sur [FG] alors $OD^2 = OF.OD = 1+\sqrt{2}$.

b. $z_A = \sqrt{1+\sqrt{2}}\, e^{i\frac{\pi}{2}}.e^{i\theta} = OD\, e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$ donc $OA = OD$ et $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OA}}\right) \equiv \theta + \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

Construction du point A.

2.a. $z_A^2 + \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}} e^{i\theta} z_A + e^{2i\theta} = -\left(1+\sqrt{2}\right)e^{2i\theta} + \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}} e^{i\theta}.i\sqrt{1+\sqrt{2}}e^{i\theta} + e^{2i\theta} = -\left(1+\sqrt{2}\right)e^{2i\theta} + \left(1+\sqrt{2}\right)e^{2i\theta} = 0$.

b. $z_A.z_B = e^{2i\theta} \Leftrightarrow z_B = \frac{e^{2i\theta}}{z_A} \Leftrightarrow z_B = \frac{1}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}} e^{i\theta}$.

3.a. $\frac{\text{aff}\left(\overrightarrow{OA}\right)}{\text{aff}\left(\overrightarrow{OB}\right)} = \frac{z_A}{z_B} = \frac{i\sqrt{1+\sqrt{2}}\,e^{i\theta}}{\frac{1}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}}e^{i\theta}} = -\left(1+\sqrt{2}\right) \in \mathbb{R}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires et par conséquent les points O, A et B sont alignés.

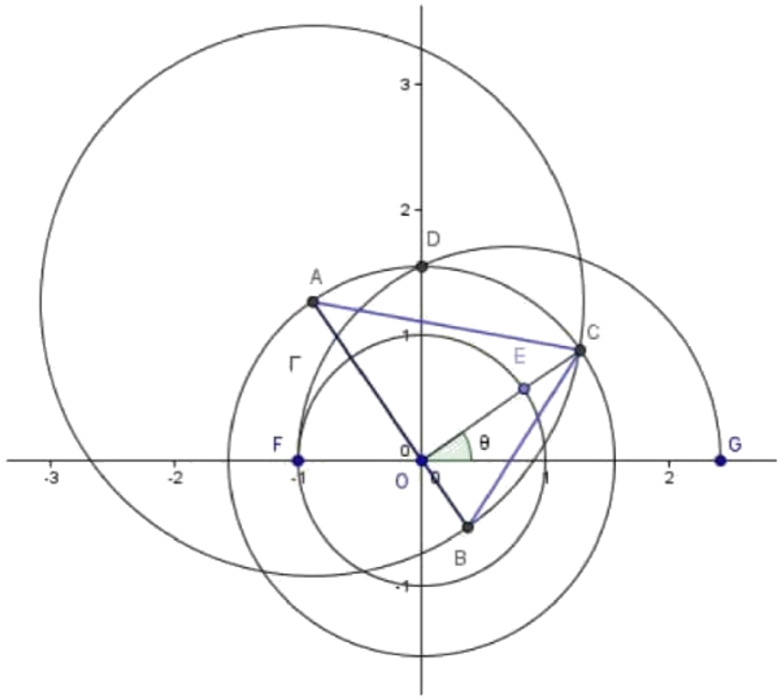
b. $OC = OD$ et $C \in [OE)$.

c. $\frac{\text{aff}\left(\overrightarrow{AC}\right)}{\text{aff}\left(\overrightarrow{AB}\right)} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}e^{i\theta} - i\sqrt{1+\sqrt{2}}e^{i\theta}}{\frac{1}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}}e^{i\theta} - i\sqrt{1+\sqrt{2}}e^{i\theta}} = \frac{1-i}{\frac{-i}{1+\sqrt{2}} - i} = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}(1+i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

$\frac{\text{aff}\left(\overrightarrow{AC}\right)}{\text{aff}\left(\overrightarrow{AB}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \left[1, \frac{\pi}{4}\right]$ d'où $\frac{AC}{AB} = 1$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$

d'où le triangle ABC est isocèle en A et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$

d. Voir figure.



Exercice3 :

1.a. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

b. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$ donc la fonction f n'est pas dérivable à droite en 0.

La courbe (C_f) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente d'équation : $\begin{cases} x=0 \\ y\le 0 \end{cases}$.

c. La fonction f est dérivable sur]0, +∞[et pour tout $x>0$, $f'(x)=1+\ln x$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

2.a. Voir figure.

b. Pour tout x ∈]0, +∞[, $f(x)-x = x\ln x - x = x(\ln x-1)$.

Si x ∈[0, e] alors $f(x)-x\le 0$ donc (C_f) est au dessous de Δ sur [0, e].

Si x ∈[e, +∞[alors $f(x)-x\ \ge 0$ donc (C_f) est au dessus de Δ sur [e, +∞[.

$(C_f)\cap\Delta=\{O,\ A(e,e)\}$.

Pour tout x ∈]0, +∞[, $f(x)+x = x(\ln x+1)$

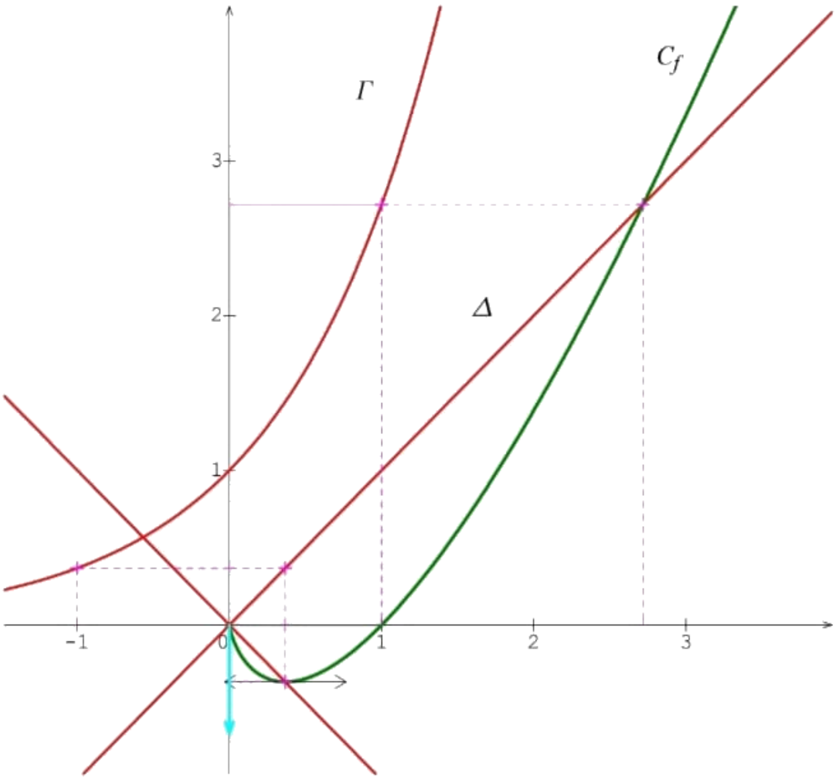
Si x ∈[0, $\dfrac{1}{e}$] alors $f(x)+x\ \le 0$ donc (C_f) est au dessous de Δ' sur [0, $\dfrac{1}{e}$].

Si x ∈[$\dfrac{1}{e}$, +∞[alors $f(x)+x\ \ge 0$ donc (C_f) est au dessus de Δ' sur [$\dfrac{1}{e}$, +∞[.

$(C_f)\cap\Delta'=\left\{O,\ B\left(\dfrac{1}{e},\dfrac{1}{e}\right)\right\}$.

c. Représentation graphique de la fonction f :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de +∞.



3. $A_S = \int_0^{\frac{1}{e}} 2x\,dx + \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left(x - f(x)\right)dx = \left[x^2\right]_0^{\frac{1}{e}} + \int_{\frac{1}{e}}^{e} x\left(1-\ln x\right)dx$.

On pose $u(x) = 1 - \ln x \Rightarrow u'(x) = -\frac{1}{x}$.

$v'(x) = x \quad \Rightarrow v(x) = \frac{x^2}{2}$

Donc $A_S = \frac{1}{e^2} + \left[\frac{x^2\left(1-\ln x\right)}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{e} + \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{x}{2}dx = \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^2} + \frac{1}{4}\left[x^2\right]_{\frac{1}{e}}^{e} = \frac{1}{4}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)$ u.a

B] n est un entier naturel.

1.a. $t \mapsto t^n e^t$ est continue sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ et $t^n e^t > 0$, pour tout $t \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$ donc $\int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n e^t dt > 0$ ainsi $u_n > 0$.

b. Pour tout $t \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$, $e^t \le e^1 = e$ donc pour tout $t \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$, $t^n e^t \le e.t^n$

Comme les fonctions $t \mapsto t^n e^t$ et $t \mapsto e.t^n$ sont continues sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ alors $\int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n e^t dt \le e\int_{\frac{1}{e}}^{e} t^n dt$

d'où $u_n \le e\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{\frac{1}{e}}^{1}$ ainsi $u_n \le e\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)e^{n+1}}\right) \le \frac{e}{n+1}$

Or : $u_n > 0$ d'où $0 < u_n \le \frac{e}{n+1}$. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

c. $u_{n+1} = \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^{n+1} e^t dt$

On pose $u(t) = t^{n+1} \Rightarrow u'(t) = (n+1)t^n$.

$v'(t) = e^t \Rightarrow v(t) = e^t$.

$u_{n+1} = \left[t^{n+1}e^t\right]_{\frac{1}{e}}^{1} - (n+1)\int_{\frac{1}{n}}^{1} t^n e^t dt = e - \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+1}} - (n+1)u_n$

d. $(n+1)u_n = e - \dfrac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n-1}} - u_{n+1}$ et $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+1}} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)u_n = e$.

2.a. La fonction f est croissante sur $\left[\dfrac{1}{e}, 1\right]$ donc pour tout $t \in \left[\dfrac{1}{e}, 1\right]$, $-\dfrac{1}{e} \leq f(t) \leq 0$

Pour tout $t \in \left[\dfrac{1}{e}, 1\right]$, $t^n e^t > 0$ d'où pour tout $t \in \left[\dfrac{1}{e}, 1\right]$, $-\dfrac{t^n e^t}{e} \leq t^n e^t f(t) \leq 0$ par suite $-\dfrac{u_n}{e} \leq v_n \leq 0$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{u_n}{e} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

b. Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $tf'(t) - t = t\ln t + t - t = f(t)$.

$v_n = \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n e^t (tf'(t) - t)dt = \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^{n+1}e^t f'(t)dt - \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^{n+1}e^t dt = \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^{n+1}e^t f'(t)dt - u_{n+1}$.

c. On pose $u(t) = t^{n+1}e^t \Rightarrow u(t) = (n+1)t^n e^t + t^{n+1}e^t$

$v'(t) = f'(t) \Rightarrow v(t) = f(t)$

$$v_n = \left[t^{n+1}e^t f(t)\right]_{\frac{1}{e}}^{1} - (n+1)\int_{\frac{1}{e}}^{1} t^n e^t f(t)dt - \int_{\frac{1}{e}}^{1} t^{n+1}e^t f(t)dt - u_{n+1} = \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+2}} - (n+1)v_n - v_{n+1} - u_{n+1}$$

On en déduit que : $(n+2)v_n = \dfrac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+2}} - v_{n+1} - u_{n+1}$.

d. on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+1}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+2)v_n = 0$.

3.a. $-\dfrac{u_n}{e} \leq v_n \leq 0$ et $u_n > 0$ donc $-\dfrac{1}{e} \leq \dfrac{v_n}{u_n} \leq 0$ d'où $\dfrac{v_n}{u_n} \in \left[-\dfrac{1}{e}, 0\right]$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{e}, 1\right]$ donc elle réalise une bijection de $\left[\dfrac{1}{e}, 1\right]$ sur $f\left(\left[\dfrac{1}{e}, 1\right]\right) = \left[-\dfrac{1}{e}, 0\right]$. Comme $\dfrac{v_n}{u_n} \in \left[-\dfrac{1}{e}, 0\right]$ alors il existe une unique réel $\alpha_n \in \left[\dfrac{1}{e}, 1\right]$ tel que $f(\alpha_n) = \dfrac{v_n}{u_n}$.

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+2)v_n}{(n+1)u_n} \cdot \dfrac{n+1}{n+2} = 0$.

c. $\alpha_n = f^{-1}\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f^{-1}(x) = f^{-1}(0) = 1$ (car f^{-1} est continue à gauche en 0) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$.

Exercice4 :

A] q est un entier naturel.

1. 2 est un nombre premier donc d'après le petit théorème de Fermat, $q^2 \equiv q \pmod 2$ signifie que q et q^2 ont le même reste modulo 2.

Ainsi, $q^2 \equiv 1 \pmod 2$ si et seulement si $q \equiv 1 \pmod 2$.

Par suite : q^2 est impair, si et seulement si, q est impair.

2. $q \equiv 1 \pmod 2$ donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $q = 2k+1$ ainsi $q^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1$

Or : $k(k+1) \in 2\mathbb{N}$ d'où $k(k+1) = 2k'$, $k' \in \mathbb{N}$ donc $q^2 = 8k' + 1$.

Il en résulte que si q est impair alors $q^2 \equiv 1 \pmod 8$

B]1. $2^{2.2} + 3^{2.1} = 2^4 + 3^2 = 5^2$ donc le triplet $(2,1,5)$ est un élément de A.

2.a. (m, n, q) est un élément de l'ensemble A donc $2^{2m} + 3^{2n} = q^2$.

Or : $2^{2m} \equiv 0 \pmod 2$ et $3^{2n} \equiv 1 \pmod 2$ d'où $2^{2m} + 3^{2n} \equiv 1 \pmod 2$ ainsi $q^2 \equiv 1 \pmod 2$

De la question **A-1)**, on déduit que $q \equiv 1 \pmod 2$.

b. $q \equiv 1 \pmod 2$ d'où d'après **A-2)**, $q^2 \equiv 1 \pmod 8$.

$3^2 \equiv 1(\text{mod}\,8)$ donc $3^{2n} \equiv 1(\text{mod}\,8)$

$q^2 \equiv 1(\text{mod}\,8)$ et $3^{2n} \equiv 1(\text{mod}\,8)$ d'où $q^2 - 3^{2n} \equiv 0(\text{mod}\,8)$.

c. $(m, n, p) \in A$ donc $q^2 - 3^{2n} = 2^{2m}$.

Comme $q^2 - 3^{2n} \equiv 0(\text{mod}\,8)$ alors $2^{2m} \equiv 0(\text{mod}\,8)$.

Si $m = 1$ alors $2^{2m} \equiv 4\ (\text{mod}\,8)$ ce qui est impossible et par conséquent $m \neq 1$.

3. On suppose que $m \geq 2$.

a. $q \equiv 1(\text{mod}\,2)$ et $3^n \equiv 1(\text{mod}\,2)$ donc $q - 3^n \equiv 0(\text{mod}\,2)$ et $q + 3^n \equiv 0(\text{mod}\,2)$ d'où les entiers $(q-3^n)$ et $(q+3^n)$ sont pairs.

b. $d = (q-3^n) \wedge (q+3^n)$.

d divise $(q-3^n)$ et d divise $(q+3^n)$ donc d divise $q - 3^n + q + 3^n$ et d divise $(q-3^n)(q+3^n)$

ce qui implique que d divise $2q$ et d divise $q^2 - 3^{2n} = 2^{2m}$.

d divise 2^{2m} donc $d = 2^p$ avec $p \in \{0, 1, \dots, 2m\}$.

d divise 2q et $d \wedge q = 2^p \wedge q = 1$ (car q est impair) alors d'après le lemme de Gauss : d divise **2.**

On sait que 2 divise $(q-3^n)$ et 2 divise $(q+3^n)$ alors 2 divise d.

Puisque d divise 2 et 2 divise d alors $d = 2\ (d > 0)$.

c. $(q-3^n) \wedge (q+3^n) = 2$ donc il existe deux entiers naturels non nuls a et b tels que : $q - 3^n = 2a$, $q + 3^n = 2b$

et $a \wedge b = 1$ d'où $q^2 - 3^{2n} = 4ab$ ainsi $2^{2m} = 4ab$ par suite $ab = 2^{2m-2}$ ($m \geq 2$).

Or : $q - 3^n < q + 3^n$ d'où $a < b$.

On en déduit que $a = 1$ et $b = 2^{2m-2}$ ce qui permet de conclure que $q - 3^n = 2$ et que $q + 3^n = 2^{2m-1}$.

$\begin{cases} q - 3^n = 2 \\ q + 3^n = 2^{2m-1} \end{cases}$ donc $2q = 2^{2m-1} + 2$ et $2.3^n = 2^{2m-1} - 2$ d'où $q = 2^{2m-2} + 1$ et $3^n = 2^{2m-2} - 1$.

4. Lorsque $m = 2$ alors $q = 5$ et $3^n = 3$ d'où $n = 1$.

5.a. On suppose que $m \geq 3$.

$m \geq 3$ donc $2m - 2 \geq 4$ d'où il existe un entier naturel u tel que $2m - 2 = 4 + u$.

Or : $2^4 \equiv 0(\text{mod}\,16)$ d'où $2^{4+u} \equiv 0(\text{mod}\,16)$ ainsi $2^{2m-2} \equiv 0(\text{mod}\,16)$ par suite $3^n = 2^{2m-2} - 1 \equiv -1(\text{mod}\,16)$.

b. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$3^0 \equiv 1(\text{mod}\,16)$, $3^1 \equiv 3(\text{mod}\,16)$, $3^2 \equiv 9(\text{mod}\,16)$, $3^3 \equiv 11(\text{mod}\,16)$ et $3^4 \equiv 1(\text{mod}\,16)$.

Si $k \equiv 0(\text{mod}\,4)$ alors $3^k \equiv 1(\text{mod}\,16)$.

Si $k \equiv 1(\text{mod}\,4)$ alors $3^k \equiv 3(\text{mod}\,16)$.

Si $k \equiv 2(\text{mod}\,4)$ alors $3^k \equiv 9(\text{mod}\,16)$

Si $k \equiv 3(\text{mod}\,4)$ alors $3^k \equiv 11(\text{mod}\,16)$

c. Si $m \geq 3$ alors $3^n \equiv -1(\text{mod}\,16)$ donc si $m \geq 3$ alors $3^n \equiv 15(\text{mod}\,16)$.

Or les restes possibles de 3^n modulo 16 sont : 1, 3, 9 et 11 d'où il n'existe pas de triplet (m, n, q) d'éléments de l'ensemble A tel que $m \geq 3$.

6. D'après ce qui précède, on déduit que : $(m, n, q) \in A \Leftrightarrow (m, n, q) = (2, 1, 5)$

Par suite $A = \{(2, 1, 5)\}$.

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ●●●●● **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2018**	***Session de contrôle***	
	Epreuve : **Mathématiques**	Section : ***Mathématiques***
	Durée : **4h** ■	Coefficient de l'épreuve : **4**

Le sujet comporte sept pages numérotées de 1/7 à 7/7.
Les pages 5/7, 6/7 et 7/7 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points)

Le plan est orienté. Dans la **Figure 1** de **l'annexe** jointe,

- ABC est un triangle équilatéral direct tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \widehat{\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$;
- $\mathscr{C}_1$ est le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre ;
- I est le milieu du segment $[BC]$;
- AICD est un rectangle direct.

1) Soit f le déplacement tel que $f(A)=C$ et $f(B)=A$.
   Montrer que f est une rotation dont on précisera son centre et une mesure de son angle.

2) Soit g l'antidéplacement tel que $g(A)=C$ et $g(B)=A$.
   a) Justifier que g est une symétrie glissante.
   b) Montrer que $g = t_{\overrightarrow{BI}} \circ S_\Delta$, où Δ est la médiatrice du segment $[AI]$.

3) Soit h l'homothétie de centre A et telle que $h(O)=I$. On pose $\varphi = g \circ h \circ f$.
   a) Montrer que φ est une similitude indirecte de rapport $\frac{3}{2}$.
   b) Montrer que $\varphi(B) = C$ et $\varphi(O) = D$.

4) Soit $E=\varphi(C)$.
   a) Montrer que le triangle DCE est isocèle en D.
   b) Justifier que $\left(\overrightarrow{DC}, \widehat{\overrightarrow{DE}}\right) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.
   c) Construire alors le point E.
   d) Soit Ω le centre de φ.
   Montrer que $\overrightarrow{\Omega B} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BE}$. Construire le point Ω.

5) On pose $\mathscr{C}_2 = \varphi(\mathscr{C}_1)$. Le cercle $\mathscr{C}_2$ coupe le cercle $\mathscr{C}_1$ au point C et en un autre point M. On pose $N=\varphi(M)$.
   Montrer que les points C, B et M sont alignés. Construire alors le point N.

<u>Exercice 2</u> (3 points)

Une urne contient six pièces de monnaie :

- quatre pièces sont équilibrées ;

[redacted]

Exercice 3 **(7 points)**

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=1-x+x\ln x$.

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $1+x\ln x\geq x$.

2) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{1+x\ln x} & \text{si } x>0, \\ f(0)=1. \end{cases}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-1}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement.

3) a) Montrer pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=-\dfrac{1+\ln x}{(1+x\ln x)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) Dans la **figure 2** de **l'annexe** jointe, on a tracé dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, les courbes (C_1) et (C_2) des fonctions définies sur $]0,+\infty[$ respectivement par $x\mapsto\ln x$ et $x\mapsto\dfrac{1}{x}$.

a) Construire le point A de (C_1) d'abscisse $\dfrac{1}{e}$ et le point B de (C_2) d'abscisse $1-\dfrac{1}{e}$.

En déduire une construction du point C de (C_f) d'abscisse $\dfrac{1}{e}$.

b) Déduire de la question 1) b) que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f(x)\leq\dfrac{1}{x}$.

Déterminer alors la position relative de (C_f) et (C_2).

c) Tracer la courbe (C_f).

5) On considère la fonction F définie sur $[1,+\infty[$ par $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$.

a) Montrer que pour tout $t\in[1,+\infty[$, $\dfrac{1}{t+t\ln(t)}\leq f(t)$.

b) Montrer alors que pour tout $x\in[1,+\infty[$, $\ln(1+\ln x)\leq F(x)\leq\ln x$.

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$.

6) Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que la fonction $h: x\mapsto x-F(x)$ est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$.

b) En déduire que l'équation $h(x)=n$ admet dans $[1,+\infty[$ une seule solution α_n.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=+\infty$.

d) Vérifier que $\dfrac{\alpha_n}{n}=\dfrac{1}{1-\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}}$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha_n}{n}$.

Exercice 4 (5 points)

1) On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2-(1+i)z-i=0$.

Résoudre l'équation (E). On note z_1 et z_2, les solutions de (E).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A, B, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives 1, i, z_1 et z_2.

Soit z un nombre complexe distinct de 1, i, z_1 et z_2.

On note M et M' les points d'affixes respectives z et $z'=\dfrac{z+i}{z-i}$.

Justifier que les points M et M' sont distincts.

Dans la suite de l'exercice on prend $z=i+2e^{i\theta}$, où θ est un réel.

3) a) Montrer que M décrit le cercle Γ de centre B et de rayon 2.

b) Montrer que $z'=1+ie^{-i\theta}$.

c) Montrer que $AM'=1$ et que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM'}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}-\theta\ [2\pi]$.

d) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque le point M décrit le cercle Γ.

4) Soit P le milieu du segment $[MM']$ et z_P son affixe.

On désigne par Q le point d'affixe $z_Q=e^{i\frac{\pi}{4}}z_P$.

a) Vérifier que $z_P=\dfrac{1+i+2e^{i\theta}+ie^{-i\theta}}{2}$.

b) En déduire que $z_Q=\dfrac{i\sqrt{2}+2\,e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}-e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}}{2}$.

c) Montrer alors que $z_Q=\dfrac{1}{2}\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+i\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3}{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

5) a) Montrer que lorsque le point M varie sur le cercle Γ, le point Q varie sur l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation

$$4x^2+\frac{4}{9}\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1.$$

b) Dans la **figure 3** de **l'annexe** jointe, on a tracé dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ le cercle Γ, l'ellipse $\mathcal{E}$, et on a placé un point M sur le cercle Γ tel que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}}\right)\equiv\theta\ [2\pi]$. Construire les points M' et Q.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .
Nom et Prénom : . . . .
Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants
. . . .
. . . .

Épreuve : **Mathématiques** - Section : **Mathématiques - Session de contrôle - 2018**

Annexe à rendre avec la copie

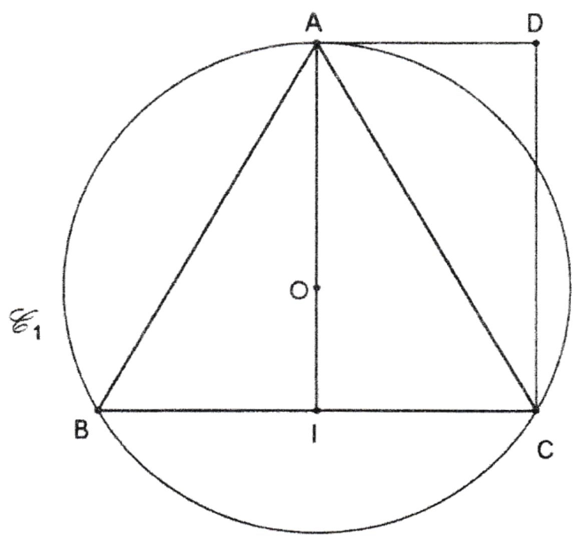


Figure 1

Ne rien écrire ici

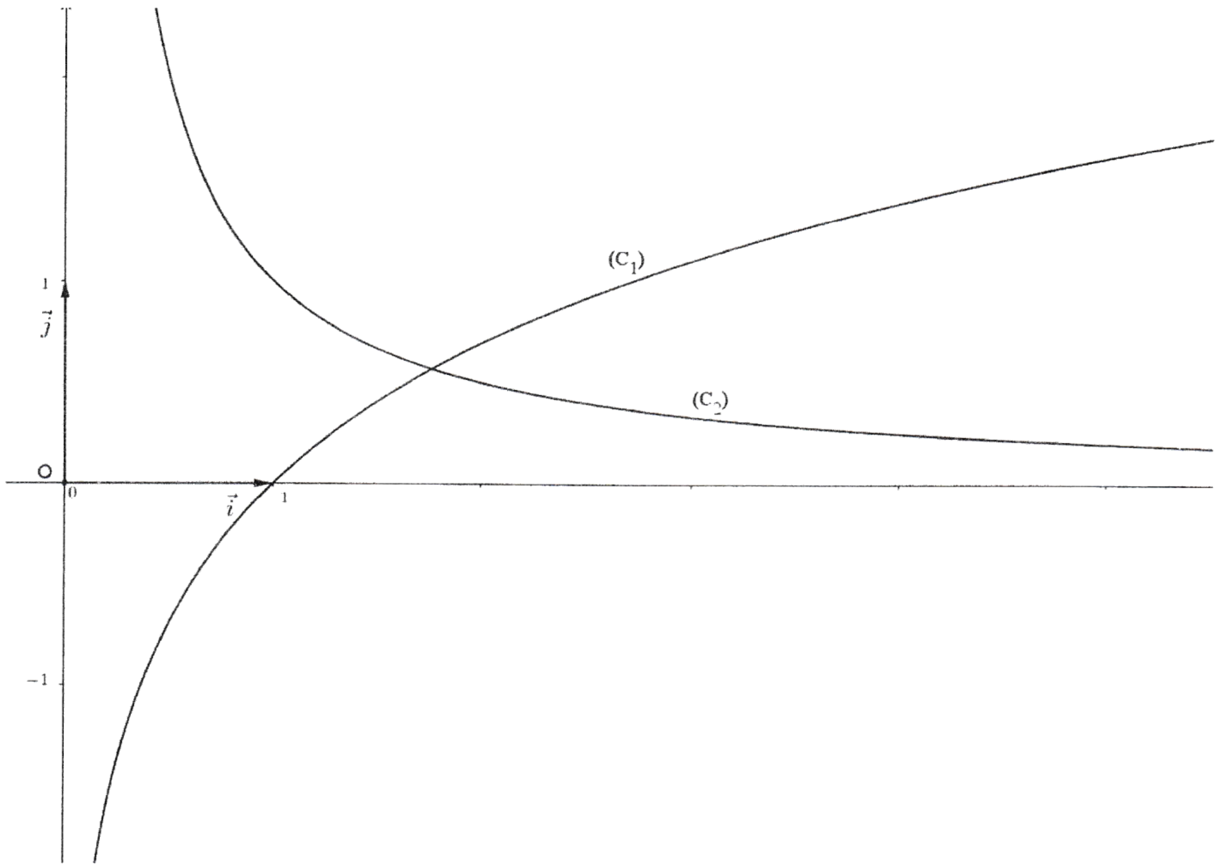


Figure 2

Ne rien écrire ici

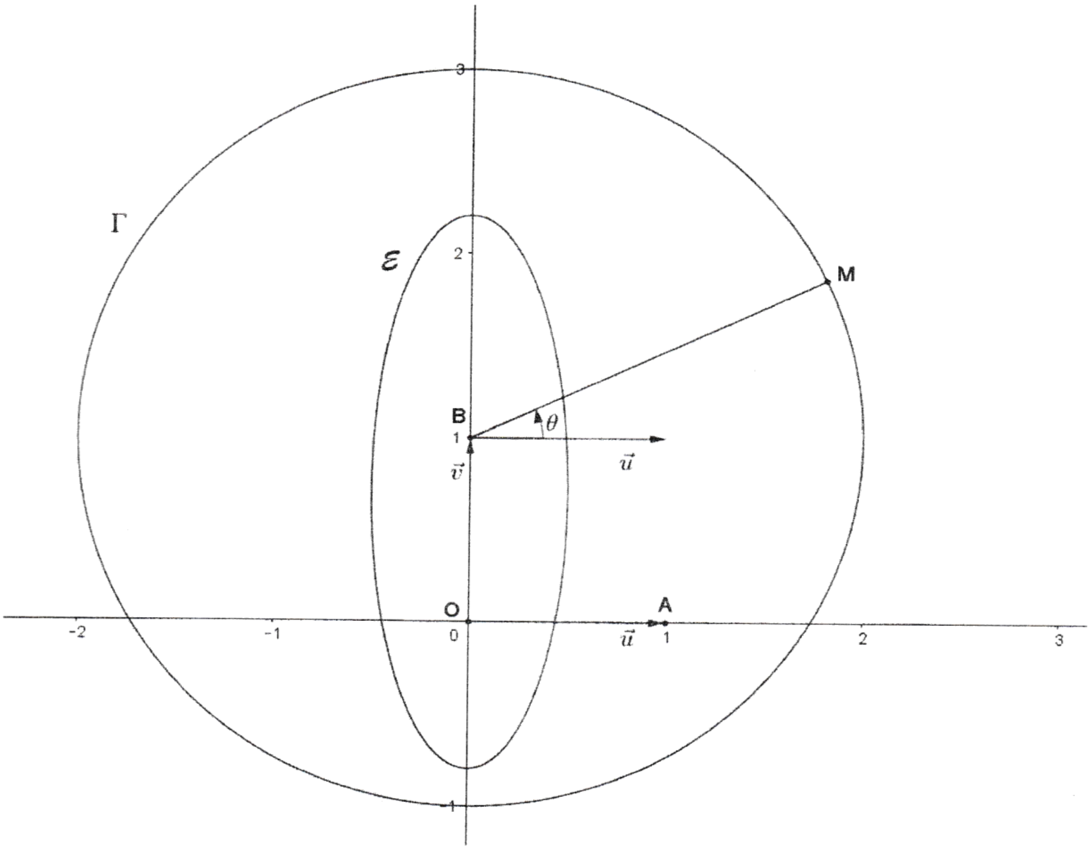
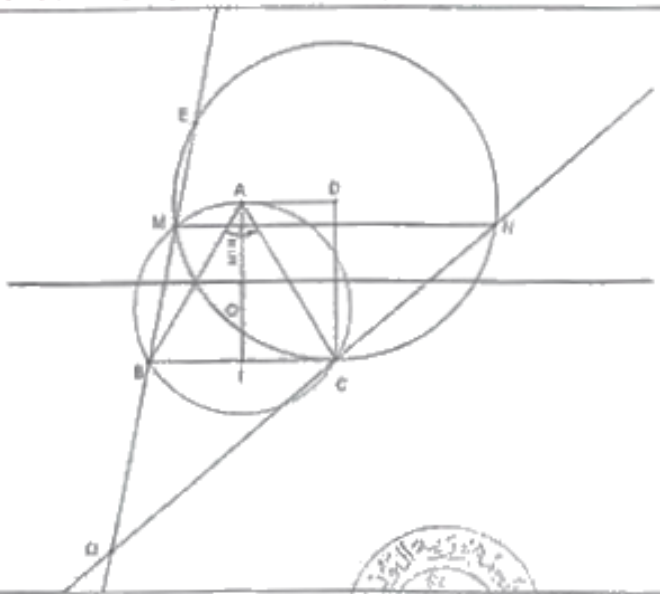


Figure 3

Epreuve : MATHÉMATIQUES Section : Mathématiques	BAC 2018 Session de contrôle	Corrigé et Barème de notation

Exercice 1 (5 points)

Question	Eléments de réponses	barème	commentaires
1)	$f=R\left(O,-\frac{2\pi}{3}\right)$ angle non nul → 0,25 angle → 0,25 Centre 0,25	3 x 0,25	
2) a)	g est une symétrie glissante.	0,25	
2) b)		0,5	
3) a)		0,25 +0,5	Nature Rapport
3) b)	$\varphi(B)=gohof(B)=goh(A)=g(A)=C$. $\varphi(O)=g\circ h\circ f(O)=g(I)=S_\Delta ot_{\vec{u}}(I)=S_\Delta(C)=D$.	2 x 0,25	
4) a)	On a : $E=\varphi(C)$, $\varphi(B)=C$ et $\varphi(O)=D$. OBC est un triangle isocèle en O donc son image par φ est le triangle DCE isocèle en D.	0,25	
4) b)	$\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}}\right)\equiv-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$	0,25	
4) c)	Construction de E	0,25	
4) d)	$E=\varphi o\varphi\ B$ et $\varphi o\varphi$ est une homothétie de rapport $\frac{9}{4}$ $\overrightarrow{\Omega B}=\frac{9}{4}\overrightarrow{\Omega E}$ d'où $\overrightarrow{\Omega B}=\frac{4}{5}\overrightarrow{BE}$. construction de Ω : voir annexe.	0,25 0,25 0,25	
5)	*les points B, M et E alignés *Ω, B et M alignés puisque $E\in(\Omega B)$. *$N=\varphi(M)$, $M\in(\Omega B)\cap\mathscr{C}$ donc $N\in(\Omega C)\cap\mathscr{C}$	0,25 0,25 0,25	
			

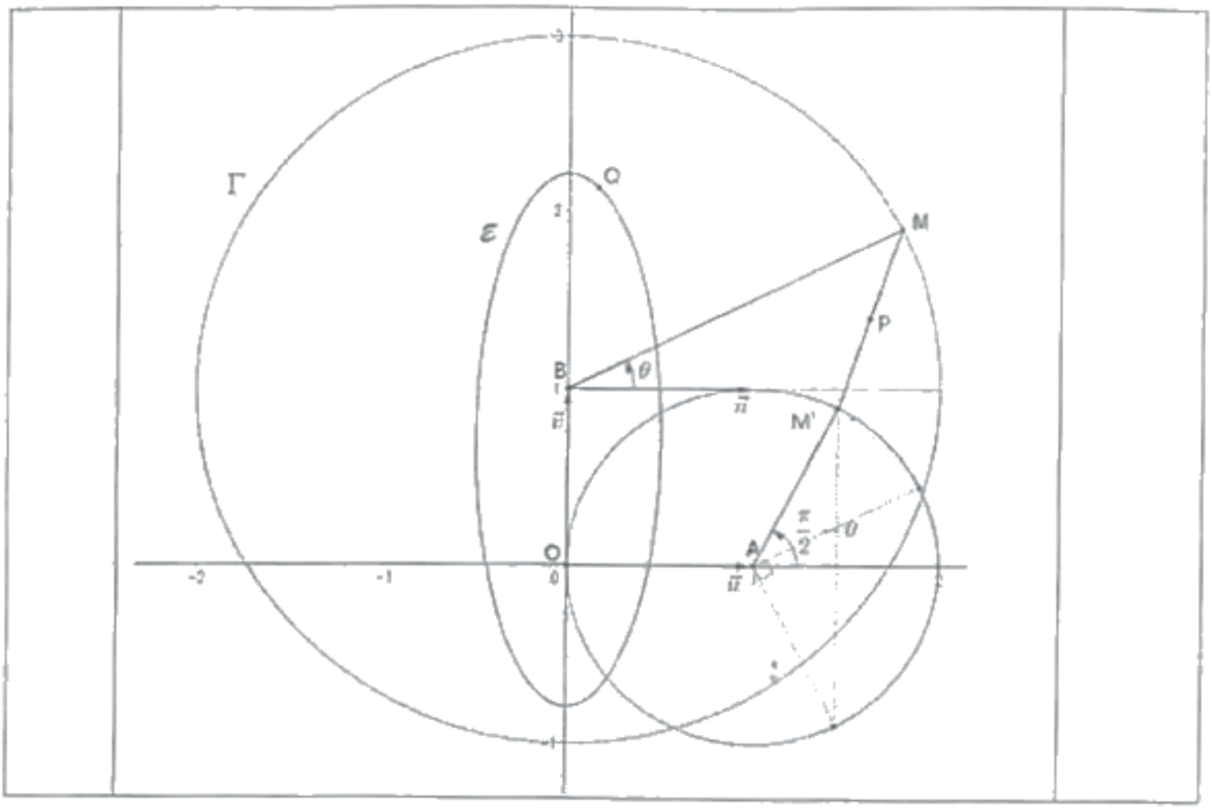
Exercice 2 (3 points)

Question	Eléments de réponses	barème	commentaires
1) a)	$p(E)=\frac{2}{3}$, $p(F_1/E)=\frac{1}{2}$ $p(F_1/\bar{E})=\frac{2}{3}$.	3x 0,25	
1) b)	$p(F_1)=\frac{5}{9}$.	2x 0,25	* Formule * reste
2)	Pour tout $n\geq 1$, $p(F_n)=\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right)$.	2x 0,25	* Formule appliquée * reste
3) a)	$X_n(\Omega)=\{0,n\}$, $p(X_n=0)=p(\overline{F_n})$ et $p(X_n=n)=p(F_n)$	3x 0,25	
3) b)	$E(X_n)=\frac{n}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right)$	0,25	
3) c)	$n=2$	0,25	

Exercice 3 (7 points)

Question	Eléments de réponses	barème	commentaires
1) a)		2x 0,25	* dérivée * reste
1) b)		0,25	
2) a)	$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1+x\ln x}=1$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$. d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$ et parsuite f est continue à droite en 0.	0,25	
2) b)	$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x\ln x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\ln x}{1+x\ln x}=+\infty$. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$ donc C_f possède au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.	2x 0,25	
2) c)	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$. La droite y=0 est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.	0,25 0,25	
3) a)	$x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=-\frac{1+\ln x}{(1+x\ln x)^2}$.	0,25	
3) b)	$\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & \frac{1}{e} & & +\infty \\ \hline f'(x) & \| & + & 0 & - & \\ \hline f & 1 & \nearrow & \frac{e}{e-1} & \searrow & 0 \end{array}$ double barre non sanctionnée	2x 0,25	*signe de f'(x) * reste
4) a)	Voir annexe	3x 0,25	
4) b)	pour tout $x\in]0,+\infty[$, $1+x\ln(x)\geq x$ Donc pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f(x)\leq\frac{1}{x}$.	2x 0,25	

2018 - Session de contrôle


Γ
ε
Q
M
P
B
θ
M'
A
O
-2
-1
0

CORRIGÉ DU SUJET DE MATHS

BAC 2018 SESSION DE CONTROLE

SECTION MATHS

PROPOSÉ PAR

M^r SALAH HANNACHI

EXERCICE 1 :

1) $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}}\right) \equiv \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)[2\pi]$

$\equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ Ainsi f est un déplacement d'angle non nul $-\frac{2\pi}{3}$ d'où f est une rota

d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ et de centre O car il est le point d'intersection des médiatrices des segme

[AB] et [AC] (O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC).

2) a) $g(A) = C$ et $g(B) = A$

$1^{ère}$ méthode :

Méd([AC])∩Méd([AB])= {O} alors Méd([AC])≠Méd([AB]) donc l'antidéplacement g est u

symétrie glissante.

$2^{éme}$ méthode :

$gog(B) = g(A) = C$ alors $gog \neq id_{\mathcal{P}}$ (où $id_{\mathcal{P}}$ est l'identité du plan orienté $\mathcal{P}$).

D'où l'antidéplacement g n'est pas une symétrie orthogonale ce qui implique que g

une symétrie glissante.

b) $gog(B) = g(A) = C$ alors $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI}$ est le vecteur de la symétrie glissante g.

$g(A) = C$ et $g(B) = A$ alors l'axe Δ de g passe par les milieux des segments [AC] et [AB

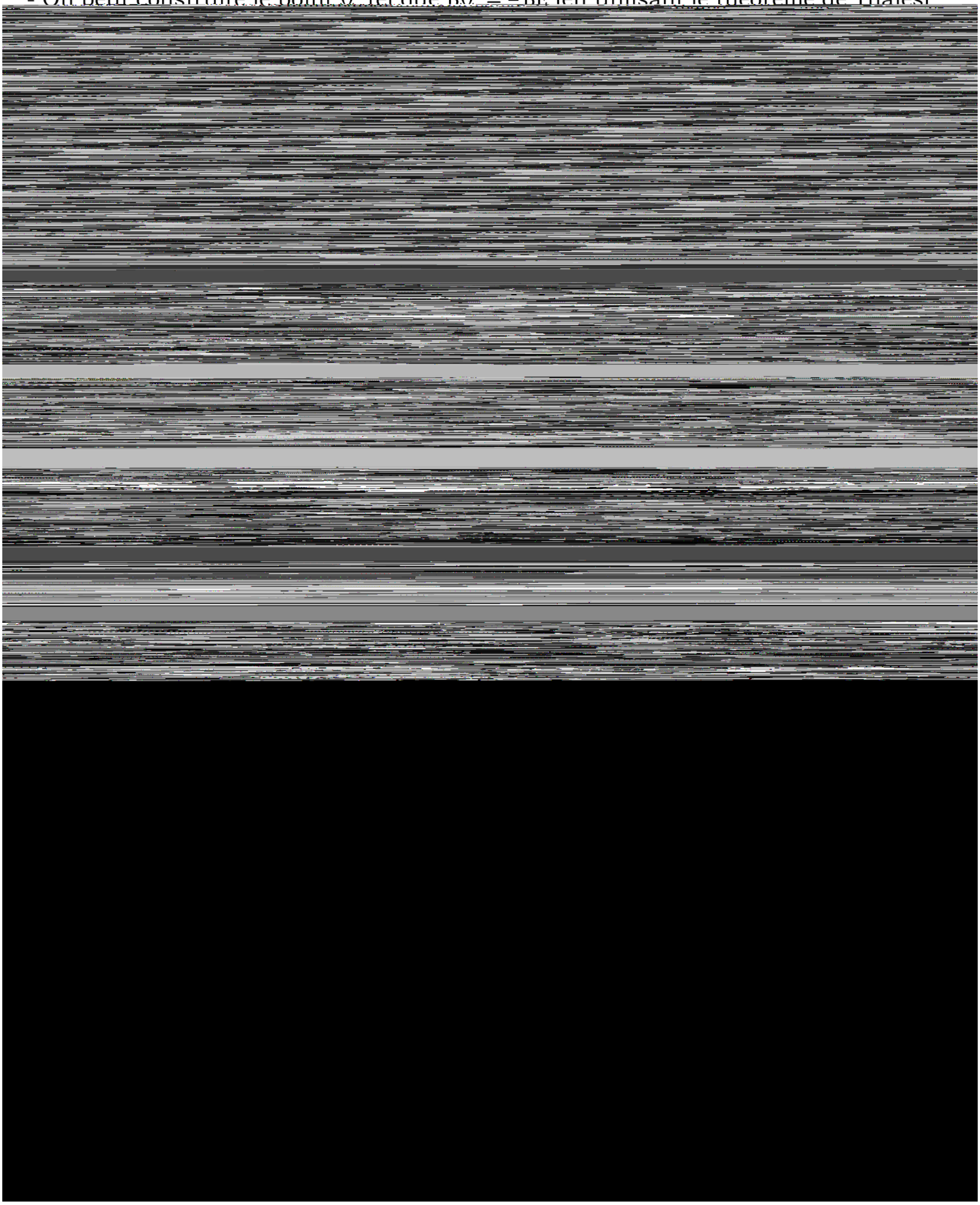
D'autre part : $\varphi \text{ o } \varphi(\mathrm{B}) = \varphi(\mathrm{C}) = \mathrm{E}$ alors $\overrightarrow{\Omega\mathrm{E}} = \frac{9}{4}\,\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}}$

$\overrightarrow{\Omega\mathrm{E}} = \frac{9}{4}\,\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}}$ équivaut à $\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}} + \overrightarrow{\mathrm{BE}} = \frac{9}{4}\,\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}}$

équivaut à $\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}} = \frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{BE}}$

● Construction de Ω :

- On peut construire le point Ω' tel que $\overrightarrow{\mathrm{B}\Omega'} = \frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ (en utilisant le théorème de Thalès)



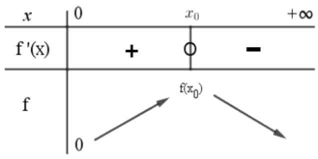
3) a) $X_n(\Omega) = \{0, n\}$

$$p(X_n = 0) = p(\overline{F_n}) = 1 - \frac{1}{3} \times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right]$$

$$p(X_n = n) = p(F_n) = \frac{1}{3} \times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right]$$

b) $E(X_n) = 0 \times p(X_n = 0) + n \times p(X_n = n) = \frac{n}{3} \times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right]$

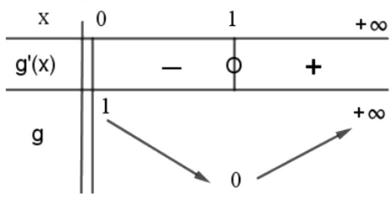
c) Voici le tableau de variation de la fonction f :



f est maximale sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $x = x_0$.
$x_0 \in [1,2]$ alors $E(X_n)$ =f(n) est maximale si et seulement si n$\in \{1,2\}$
On remarque dans le graphique que f(2)>f(1) alors
$E(X_n)$ est maximale si et seulement si n=2

EXERCICE N3 :

1) $g(x) = 1 - x + x\ln x \quad ; \quad x > 0$



a) $g'(x) = \ln x \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{x} - 1 + \ln x\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = 1$

b) Le réel $g(1) = 0$ est un minimum absolu de g alors pour tout $x > 0$, on a : $g(x) \geq 0$ ce qui implique que
$1 + x\ln x \geq x$ pour tout $x > 0$

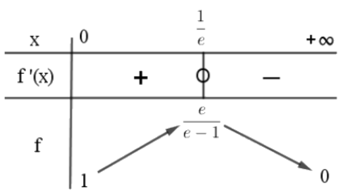
2) a) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{1+x\ln x} = 1 = f(0)$, alors f est continue à droite en 0

b) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{1+x\ln x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{-\ln x}{1+x\ln x} = +\infty$. Alors (C_f) admet au point A(0,1) une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x\ln x} = 0$. Alors l'axe des abscisses est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

3) a) On pose $u(x) = 1 + x\ln x$ alors $f'(x) = -\frac{u'(x)}{(u(x))^2} = -\frac{1+\ln x}{(1+x\ln x)^2}$, pour tout $x > 0$.

b) Tableau de variation de f :



4) a) • Le point A est l'intersection de (C_1) et la droite d'équation $y = \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$

• Le point B est le point de (C_2) dont le projeté orthogonal sur l'axe $(O, \vec{\imath})$ est le point K défini par : K= $t_{\vec{\imath}}(H')$ où $H' = S_O(H)$ tel que H est le point de l'axe $(O, \vec{\imath})$ d'abscisse $\frac{1}{e}$

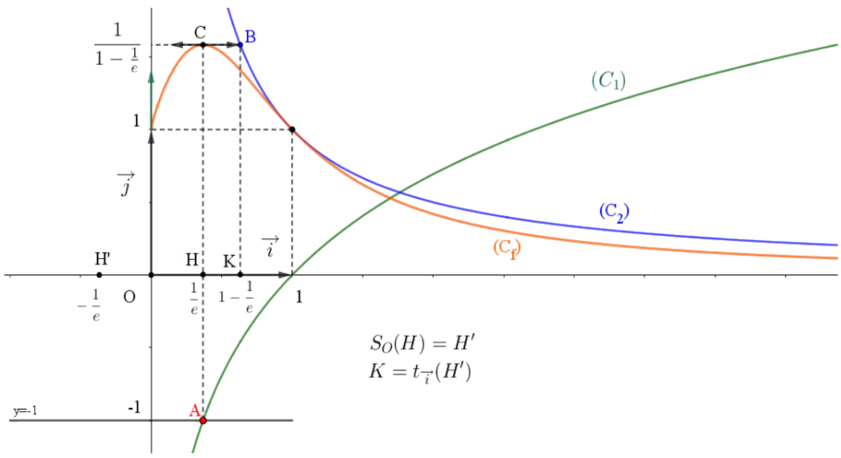
b) Pour tout $x > 0$, $1 + xlnx \geq x$ implique que $\frac{1}{1+xlnx} \leq \frac{1}{x}$

D'où $f(x) \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$

- Position de (C_f) par rapport à (C_2) :

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - \frac{1}{x}$	‖	−	0	−	
$(C_f)/(C_2)$	‖	$\frac{(C_2)}{(C_f)}$	$(C_f)\cap(C_2) = \{A(1,1)\}$	$\frac{(C_2)}{(C_f)}$	

c) La courbe (C_f) :



5) a) Pour tout $t \geq 1$, on a : $t.lnt \geq 0$ alors $t + t.lnt \geq 1 + t.lnt$

Cela signifie que $\frac{1}{t+t.lnt} \leq \frac{1}{1+t.lnt}$ D'où $\frac{1}{t+t.lnt} \leq f(t)$ pour tout $t \geq 1$.

b) Pour tout $t \geq 1$, on a : $\frac{1}{t+t.lnt} \leq f(t) \leq \frac{1}{t}$ alors $\int_1^x \frac{1}{t+t.lnt}dt \leq \int_1^x f(t)dt \leq \int_1^x \frac{1}{t}dt$ $\forall\, x \geq 1$

signifie que $\int_1^x \frac{\frac{1}{t}}{1+lnt}dt \leq F(x) \leq lnx$

signifie que $[ln(1 + lnt)]_1^x \leq F(x) \leq lnx$

signifie que $ln(1 + lnx) \leq F(x) \leq lnx$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}[ln(1 + lnx)] = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

Pour tout $x \geq 1$, on a : $\frac{ln(1+lnx)}{x} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{lnx}{x}$ et on a de plus $ln(1 + lnx) \geq 0$, $\forall\, x \geq 1$

(car $1 + lnx \geq 1$ pour tout $x \geq 1$)

alors $0 \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{lnx}{x}$ $\forall\, x \geq 1$. Par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$

6) a) La fonction F est dérivable sur $[1,+\infty[$ car f est continue sur $[1,+\infty[$ et on a $F'(x) = f(x)$

Alors la fonction $h : x \mapsto x - F(x)$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et on a : $h'(x) = 1 - f(x)$

Et comme $f(x) \leq \frac{1}{x}$ $\forall\, x > 0$ alors $f(x) < 1$ $\forall\, x > 1$ donc h est strictement croissante sur $]1,+\infty[$ et puisque h est continue sur $[1,+\infty[$ alors h est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

Ainsi h réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $h([1,+\infty[) = \left[h(1), \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)\right[= [1, +\infty[$

En effet : $h(1) = 1 - F(1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{F(x)}{x}\right) = +\infty$

b) Pour tout $n \in IN^*$, $n \in [1,+\infty[$ et comme de plus h est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$, alors $\forall\, n \in IN^*$ l'équation $h(x) = n$ admet une unique solution $\alpha_n \in [1,+\infty[$.

c) $h(\alpha_n) = n$ équivaut à $\alpha_n = h^{-1}(n)$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to+\infty} h^{-1}(n)$

$h^{-1}([1,+\infty[) = [1,+\infty[$ et h^{-1} est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} h^{-1}(n) = +\infty$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$

4) a) $z_p = \frac{z_M+z_{M'}}{2} = \frac{1+i+2e^{i\theta}+ie^{-i\theta}}{2}$

b) $z_Q = e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{1+i+2e^{i\theta}+ie^{-i\theta}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}+2e^{i\theta}+ie^{-i\theta}}{2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}+2e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\theta}+ie^{i\frac{\pi}{4}}e^{-i\theta}}{2} = \frac{i\sqrt{2}+2e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}+e^{i\frac{3\pi}{4}}e^{-i\theta}}{2}$

$= \frac{i\sqrt{2}+2e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}+e^{i(\frac{3\pi}{4}-\theta)}}{2} = \frac{i\sqrt{2}+2e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}-e^{i(\frac{7\pi}{4}-\theta)}}{2} = \frac{i\sqrt{2}+2e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}-e^{-i(\frac{\pi}{4}+\theta)}}{2}$

c) $z_Q = \frac{i\sqrt{2}+2e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}-e^{-i(\frac{\pi}{4}+\theta)}}{2} = \frac{i\sqrt{2}+2e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}+2e^{-i(\frac{\pi}{4}+\theta)}-3e^{-i(\frac{\pi}{4}+\theta)}}{2} = \frac{i\sqrt{2}}{2}+\frac{4\cos(\frac{\pi}{4}+\theta)}{2}-\frac{3e^{-i(\frac{\pi}{4}+\theta)}}{2}$

$= \frac{i\sqrt{2}}{2}+2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-\frac{3}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-i\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)\right]$

$= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+i\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)\right]$

5) a) On pose $z_Q = x_Q + iy_Q$ où $(x_Q, y_Q) \in IR^2$

On a : $z_Q = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+i\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)\right]$ équivaut à $\begin{cases} x_Q = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) \\ y_Q = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\theta) \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} 2x_Q = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) \\ \frac{2y_Q-\sqrt{2}}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) \end{cases}$

Alors $(2x_Q)^2 + \left(\frac{2y_Q-\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 1$. Cela signifie que $4x_Q{}^2 + \frac{4}{9}\left(y_Q - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$

Ainsi le point Q varie sur l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation : $4x^2 + \frac{4}{9}\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$ lorsque M varie sur le cercle Γ. (Remarque : Dans cette question il faut comprendre qu'on n'a pas demandé de montrer que cette équation est celle d'une ellipse)

b) Les étapes de construction du point Q :

- 1- Construire le point M' (pour cela on peut se servir des méthodes de construction des angles correspondants et des angles complémentaires).
- 2- Construire le point P milieu de [MM']
- 3- Construire sur l'ellipse $\mathcal{E}$ le point Q image du point P par la rotation de centre O

[redacted]

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2019	Session principale	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

La page 4 / 4 est à rendre avec la copie

Exercice 1 : (5 points)

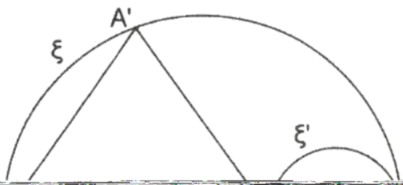
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Dans la figure ci-dessous,

ξ est le cercle de centre O et de diamètre $[BC]$, M est le point de $[BC]$ tel que $CM = \frac{1}{3}BC$

et ξ' est le cercle de diamètre $[CM]$. I et I' sont les milieux respectifs des segments $[BM]$ et $[CM]$.

A et A' sont deux points du cercle ξ tels que AMA'B est un losange et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

La droite (AC) recoupe le cercle ξ' en H.



1) a) Montrer que les droites (AB) et (HM) sont parallèles.

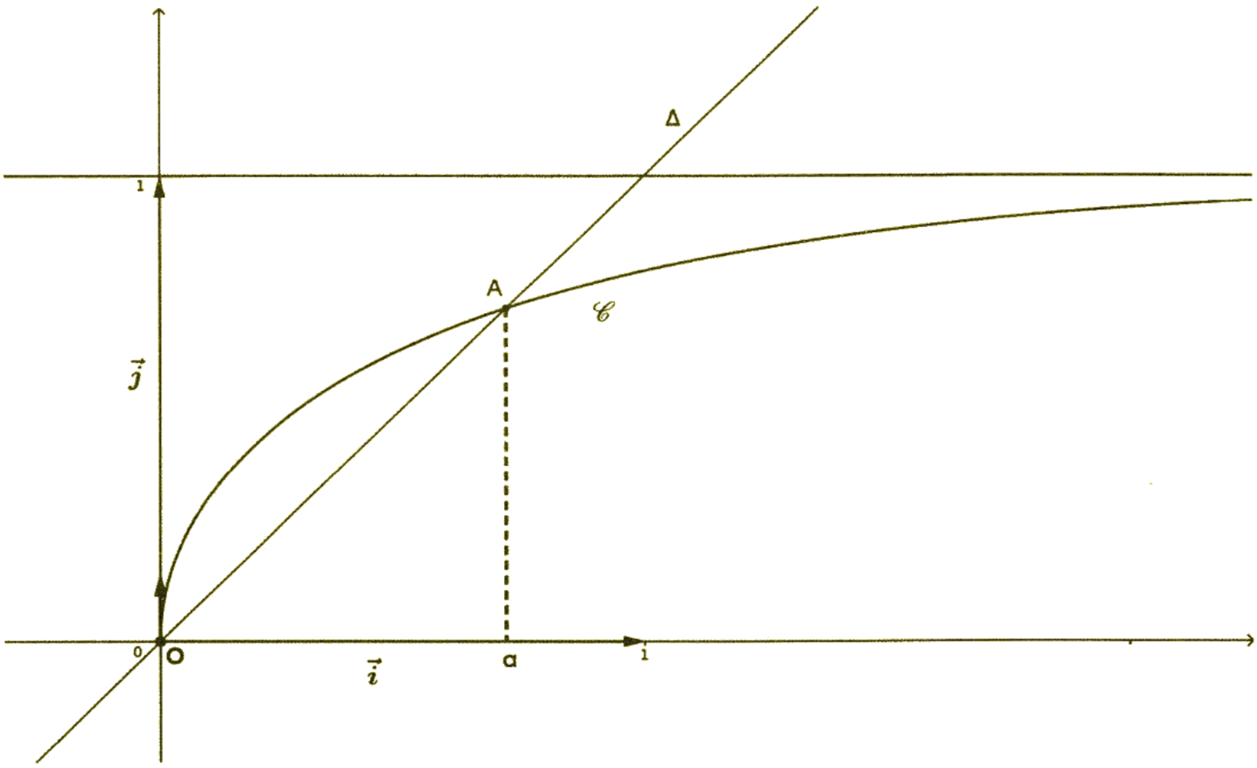
b) En déduire que les points H, M et A' sont alignés.

[redacted]

	Section : .... **N° d'inscription :** .... **Série :** .... **Nom et Prénom :** .... **Date et lieu de naissance :**	**Signatures des surveillants** ....

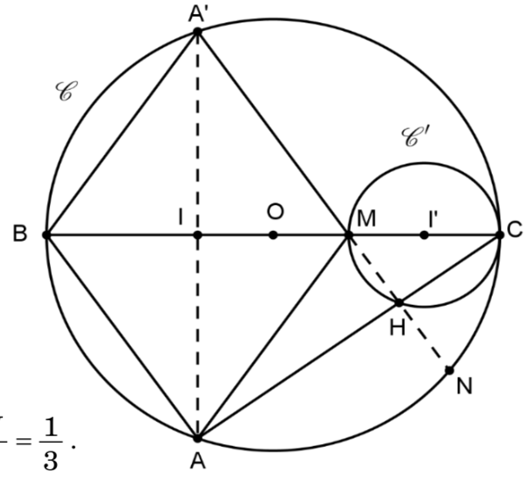
Épreuve : Mathématiques - Section : Mathématiques - Session principale (2019)

Annexe à rendre avec la copie



Lycée Rue Ahmed Amara Le Kef ◈ ◈ ◈ Habib Gammar	ELÉMENTS DE CORRECTION			
	Session Principale.2019	Mathématiques	4e M	4 Heures

Exercice 1



1) a) • $(AB)\perp(AC)$

• $H\neq M,C$ et $H\in\mathscr{C}_{(\varnothing[MC])}$ $\Rightarrow$ $(HM)\perp(HC)$

$$\begin{cases}(AB)\perp(AC)\\(HM)\perp(AC)\end{cases}\Rightarrow(AB)\,//\,(HM)$$

1) b) • $AMA'B$ est un losange alors $(AB)\parallel(A'M)$.

• $(AB)\parallel(MH)$.

d'où $(A'M)\parallel(MH)$ alors H,M et A' sont alignés.

1) c) ◆ Dans le triangle ABC, on a $\begin{cases}(AB)\parallel(MH)\\M\in(BC)\\H\in(AC)\end{cases}$ et $\dfrac{CM}{CB}=\dfrac{1}{3}$.

alors $\dfrac{CM}{CB}=\dfrac{MH}{AB}=\dfrac{1}{3}$ d'où $HM=\dfrac{1}{3}AB$

◆ Dans le triangle MHA, rectangle en H. on a $AM^2=HM^2+HA^2$ $\Leftrightarrow$ $HA^2=AM^2-HM^2$

Or $AB^2=AM^2$ d'où $HA^2=AB^2-HM^2$

2) a) $S=S_{dir}(H,k,\theta)$. $S(A)=M$

On a $HA^2=AB^2-HM^2=(3HM)^2-HM^2=8HM^2$ d'où $HA=2\sqrt{2}\,HM$.

S est d'angle $(\widehat{\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HM}})\equiv-\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et de rapport $\dfrac{HM}{HA}=\dfrac{HM}{2\sqrt{2}\,HM}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

2) b) • $S\big((AI)\big)$ est la droite perpendiculaire à (AI) passant par $S(A)=M$ alors $S\big((AI)\big)=(BC)$

• $S\big((MH)\big)$ est la droite perpendiculaire à (MH) passant par $S(H)=H$ alors $S\big((MH)\big)=(AC)$

• $(AI)\cap(MH)=\{A'\}$ alors $S((AI))\cap S((MH))=\{S(A')\}$

comme $S((AI))\cap S((MH))=(BC)\cap(AC)=\{C\}$ alors $S(A')=C$.

3) • On a $I=A*A'$ alors $S(I)=S(A)*S(A')=M*C=I'$ d'où $S(I)=I'$

• $S(I)=I'$ alors $(\widehat{\overrightarrow{HI},\overrightarrow{HI'}})\equiv-\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$ d'où $(HI)\perp(HI')$.

Le cercle $\mathscr{C}'$ est de centre I' et de rayon $I'H$ alors (HI) est tangente à $\mathscr{C}'$ en H.

4) a) $S'=S_{(AH)}\circ S\circ S_{(AH)}$

◆ S' est la composée de deux similitudes indirectes et d'une similitude directe alors S' est une similitude directe.

◆ De rapport $1\times\dfrac{\sqrt{2}}{4}\times1=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\neq1$

◆ Comme $S'(H)=H$ alors S' est de centre H.

4) b) • $\begin{cases} (\widehat{\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MN}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA'}})\ [2\pi] \\ \quad \equiv (\widehat{\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BC}})\ [2\pi] \quad (A'BM \text{ isocèle en } A') \\ \quad \equiv (\widehat{\overrightarrow{NA'},\overrightarrow{NC}})\ [2\pi] \quad (\text{Angles inscrits qui interceptent le même arc}) \\ \quad \equiv (\widehat{\overrightarrow{NM},\overrightarrow{NC}})\ [2\pi] \end{cases}$

alors CMN est isocèle en C.

4) c) • $S'(A) = S_{(AH)} \circ S \circ S_{(AH)}(A) = S_{(AH)} \circ S(A) = S_{(AH)}(M) = N$

• $S'(A) = N$ alors l'angle de S' est $(\widehat{\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HN}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Exercice 2

1) a) $A(2,0,1)$; $B(-2,0,1)$; $C(1,1,1)$ et $D(-4,0,-1)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix} \neq \vec{0}$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

d'où A, B et C ne sont pas alignés.

1) b) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{N_P}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $P = (ABC)$ alors $P : z + d = 0$

or $A(2,0,1) \in P \Rightarrow d = -1$ d'où $P : z - 1 = 0$ ainsi $P : z = 1$

2) a) $S : x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 1 = 0 \Leftrightarrow S : x^2 + y^2 + (z-2)^2 - 4 - 1 = 0 \Leftrightarrow S : x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 5$

alors S est une sphère de centre $\Omega(0,0,2)$ et de rayon $R = \sqrt{5}$.

2) b) $d(\Omega, P) = \frac{|2-1|}{\sqrt{1}} = 1 < R = \sqrt{5} \Rightarrow S \cap P$ est un cercle $\mathscr{C}$ de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5-1} = 2$

Or $I(0,0,1) \in P$ et $\overrightarrow{I\Omega}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \overrightarrow{N_P}$ alors $(\Omega I) \perp P$ d'où $\mathscr{C}$ est de centre I.

3) a) $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$; $\Omega_\lambda(0,0,\lambda)$ et $R_\lambda = \sqrt{(\lambda-1)^2 + 4}$

• $S_\lambda = S(\Omega_\lambda, R_\lambda)$; $d(\Omega_\lambda, P) = \frac{|\lambda - 1|}{\sqrt{1}} = |\lambda - 1| < R_\lambda$ car $\sqrt{(\lambda-1)^2} < \sqrt{(\lambda-1)^2 + 4} \Rightarrow |\lambda - 1| < R_\lambda$

$\Rightarrow S_\lambda \cap P$ est un cercle $\mathscr{C}'$ de rayon $r = \sqrt{{R_\lambda}^2 - (\lambda-1)^2} = \sqrt{(\lambda-1)^2 + 4 - (\lambda-1)^2} = \sqrt{4} = 2$.

Or $I(0,0,1) \in P$ et $\overrightarrow{I\Omega_\lambda}\begin{pmatrix}0\\0\\\lambda-1\end{pmatrix} = (\lambda-1)\overrightarrow{N_P}$ alors $(\Omega_\lambda I) \perp P$ d'où $\mathscr{C}'$ est de centre I ainsi $\mathscr{C}' = \mathscr{C}$

3) b) $D \in S_{\lambda_0} \Leftrightarrow D\Omega_{\lambda_0} = R_{\lambda_0} \Leftrightarrow \sqrt{4^2 + 0^2 + (\lambda_0 + 1)^2} = \sqrt{(\lambda_0 - 1)^2 + 4}$

$\Leftrightarrow 16 + {\lambda_0}^2 + 2\lambda_0 + 1 = {\lambda_0}^2 - 2\lambda_0 + 1 + 4 \Leftrightarrow 4\lambda_0 = -12 \Leftrightarrow \lambda_0 = -3$

3) c) • $S_{\lambda_0}=S_{-3}=S(\Omega_{-3},R_{-3})=S\left(\Omega(0,0,-3),R_{-3}=2\sqrt{5}\right)$ et $S=S\left(\Omega(0,0,2),R=\sqrt{5}\right)$

Soit $h_{(J(x,y,z);k)}$ l'homothétie telle que $h(S)=S_{\lambda_0}$ alors $|k|=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=2$ et $\overrightarrow{J\Omega_{\lambda_0}}=k\overrightarrow{J\Omega}$

donc $k=2$ ou $k=-2$ et $\begin{pmatrix}-x\\-y\\-3-z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-x\\-y\\2-z\end{pmatrix}$ alors $k=2$ ou $k=-2$ et $\begin{cases}x=0\\y=0\\z(k-1)=2k+3\end{cases}$

• Si $k=2$ alors $J(0,0,7)$ • Si $k=-2$ alors $J(0,0,\frac{1}{3})$ d'où $h=h_{(J(0,0,7);2)}$ ou $h=h_{\left(J'(0,0,\frac{1}{3});-2\right)}$

Exercice 3

1) a) $(E): 29x-13y=6$.

$29\times2-13\times4=58-52=6$ alors $(2,4)$ est une solution de (E).

1) b) • $29x-13y=29\times2-13\times4 \Leftrightarrow 29(x-2)=13(y-4)$

$\Rightarrow$ 13 divise $29(x-2)$ et $13\wedge29=1 \Rightarrow$ 13 divise $(x-2)\Rightarrow x-2=13k$; $k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow x=13k+2$ d'où $y=29k+4$

• Récoproquement : $29(13k+2)-13(29k+4)=6$

donc $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\left\{(13k+2,\ 29k+4)\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

2) $(E'): x^{19}\equiv-2(\text{mod }29)$.

• 29 est premier, ne divise pas 2 $\Rightarrow$ (Fermat) $2^{28}\equiv1(\text{mod }29)$.

• $(-8)^{19}\equiv(-2)^{57}\equiv\left((-2)^{28}\right)^2(-2)\equiv\underbrace{\left(2^{28}\right)^2}_{\equiv1(\text{mod }29)}(-2)\equiv-2(\text{mod }29)$ alors -8 est solution de (E').

3) a) x_0 est solution de (E') $\Leftrightarrow$ $x_0{}^{19}\equiv-2(\text{mod }29)$

• Si x_0 est un multiple de 29 alors $x_0\equiv0(\text{mod }29)$ donc $x_0{}^{19}\equiv0(\text{mod }29)$ absurde d'où x_0 n'est pas un multiple de 29.

• 29 est premier, ne divise pas x_0 $\Rightarrow$ (Fermat) $x_0{}^{28}\equiv1(\text{mod }29)$

3) b) • x_0 est solution de (E') $\Leftrightarrow$ $x_0{}^{19}\equiv-2(\text{mod }29)$

• $x_0{}^{57}\equiv\left((x_0)^{19}\right)^3\equiv(-2)^3\equiv-8(\text{mod }29)$

• $x_0{}^{57}\equiv\underbrace{\left((x_0)^{28}\right)^2}_{\equiv1(\text{mod }29)}x_0\equiv x_0(\text{mod }29)$ or $x_0{}^{57}\equiv-8(\text{mod }29)$ alors $x_0\equiv-8(\text{mod }29)$

3) c) • x_0 est solution de (E') $\Rightarrow$ $x_0\equiv-8(\text{mod }29)$

• Réciproquement : $x_0\equiv-8(\text{mod }29)$ $\Rightarrow$ $x_0{}^{19}\equiv(-8)^{19}(\text{mod }29)\Rightarrow x_0{}^{19}\equiv-2(\text{mod }29)$

$\Rightarrow$ x_0 est solution de (E')

• $S_{\mathbb{Z}}=\{-8+29k\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

3) d) $(x-3)^{19}\equiv-2(\text{mod }29) \underset{3)c)}{\Leftrightarrow} x-3\equiv-8(\text{mod }29)\Leftrightarrow x-3=-8+29k$; $k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=-5+29k$; $k\in\mathbb{Z}$

4) • $(x-3)^{19} \equiv -2 \pmod{29} \Leftrightarrow x-3 \equiv -8 \pmod{29}$

• $(x-3)^{13} \equiv -2 \pmod{13}$: 13 est premier, ne divise pas $x-3 \Rightarrow$ (Fermat) $(x-3)^{12} \equiv 1 \pmod{13}$.

$\Rightarrow (x-3)^{13} \equiv (x-3) \pmod{13}$

◆ $\begin{cases}(x-3)^{19} \equiv -2 \pmod{29}\\ (x-3)^{13} \equiv -2 \pmod{13}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-3 \equiv -8 \pmod{29}\\ x-3 \equiv -2 \pmod{13}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-3 = -8+29k\\ x-3 = -2+13k'\end{cases}$; $k,k' \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x-3 = -8+29k\\ -8+29k = -2+13k'\end{cases}$; $k,k' \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -5+29k\\ 29k-13k' = 6\end{cases}$; $k,k' \in \mathbb{Z}$

$29k-13k' = 6 \Leftrightarrow (k,k')$ est solution de $(E) \Leftrightarrow k = 13m+2$ et $k' = 29m+4$; $m \in \mathbb{Z}$

Ainsi $x = -5+29(13m+2) = 377m+53$; $m \in \mathbb{Z}$

Exercice 4

1) a) $f(x) = \sqrt{1-e^{-x}}$, $x \in [0,+\infty[$.

• f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{1-e^{-x}}} > 0$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1-e^{-x}} = 1$

• $f(0) = 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	0 ↗	1

f est continue strictement croissante sur $[0,+\infty[$ donc réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f([0,+\infty[) = [0,1[$ d'où f admet une fonction réciproque g définie sur $[0,1[$.

1) b) $\left(g(x) = y \;;\; x \in [0,1[\right) \Leftrightarrow \left(f(y) = x \;;\; y \in [0,+\infty[\right)$

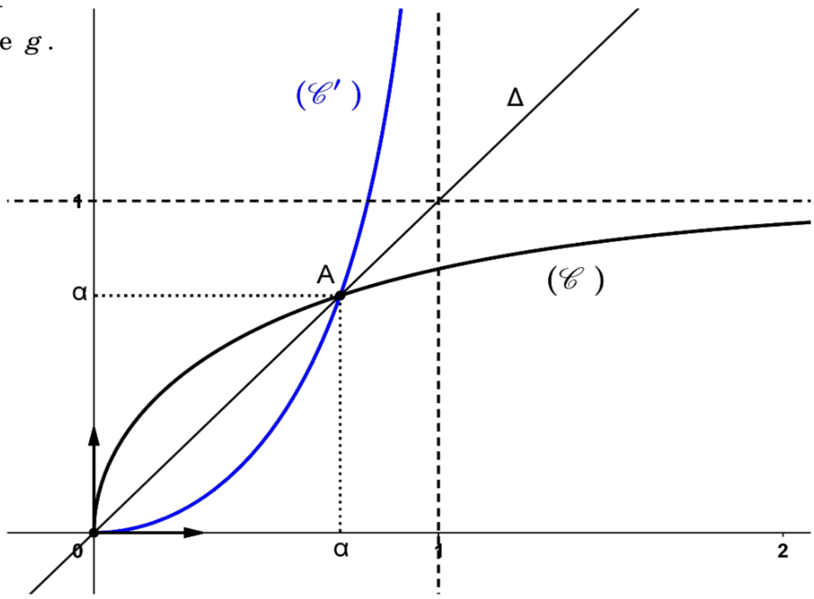
$f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{1-e^{-y}} = x \Leftrightarrow 1-e^{-y} = x^2 \Leftrightarrow e^{-y} = 1-x^2 \Leftrightarrow -y = \ln(1-x^2) \Leftrightarrow y = -\ln(1-x^2)$

$\Leftrightarrow \forall x \in [0,1[$, $g(x) = -\ln(1-x^2)$.

1) c) • $\forall x \in [0,1[$; $g(x) = x \Leftrightarrow g(x) - x = 0$, on pose $h(x) = g(x) - x$ d'où $g(x) = x \Leftrightarrow h(x) = 0$

• $\begin{cases}h \text{ continue sur } [0,1[\\ h(0.7) \simeq -0.026\\ h(0.8) \simeq 0.221\end{cases}$ alors $h(x) = 0$ $(g(x) = x)$ admet une solution α avec $0.7 < \alpha < 0.8$

1) d) La courbe $(\mathscr{C}')$ de g.



2) a) $\varphi(x)=\int_0^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \quad , \quad x\in[0,1[$.

- $\begin{cases} g \text{ est dérivable sur } [0,1[\\ g([0,1[)=[0,+\infty[\\ f \text{ est continue sur } [0,+\infty[\\ 0\in[0,+\infty[\end{cases} \Rightarrow \quad \varphi$ est dérivable sur $[0,1[$.

- $\varphi'(x)=g'(x)\times f(g(x))=\dfrac{2x}{1-x^2}\sqrt{1-e^{\ln(1-x^2)}}=\dfrac{2x}{1-x^2}\sqrt{1-1+x^2}=\dfrac{2x^2}{1-x^2} \Rightarrow \varphi'(x)=\dfrac{2x^2}{1-x^2}$

2) b) $\dfrac{2x^2}{1-x^2}=a+\dfrac{b}{1+x}+\dfrac{c}{1-x}=\dfrac{a(1-x^2)+b(1-x)+c(1+x)}{1-x^2}=\dfrac{a-ax^2+b-bx+c+cx}{1-x^2}$

$\dfrac{2x^2}{1-x^2}=\dfrac{-ax^2+(c-b)x+a+b+c}{1-x^2}$ alors $\begin{cases}-a=2\\ b=c\\ a+b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-2\\ b=1\\ c=1\end{cases}$

ainsi $\forall x\in[0,1[$, $\dfrac{2x^2}{1-x^2}=-2+\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}$

2) c) On a $\forall x\in[0,1[$, $\varphi'(x)=\dfrac{2x^2}{1-x^2}=-2+\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}$ alors $\varphi(x)=-2x+\ln(1+x)-\ln(1-x)+c$

Or $\varphi(0)=0\Rightarrow c=0$ d'où $\forall x\in[0,1[$; $\varphi(x)=-2x+\ln(1+x)-\ln(1-x)=-2x+\ln(\dfrac{1+x}{1-x})$.

2) d) $\mathscr{A}=\int_0^{\alpha}(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\alpha}(f(x)-x)\,\mathrm{d}x=2\underbrace{\int_0^{g(\alpha)} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\varphi(\alpha)}-2\int_0^{\alpha}x\,\mathrm{d}x=2\varphi(\alpha)-2\left(\dfrac{\alpha^2}{2}-0\right)$

$\mathscr{A}=2\varphi(\alpha)-2\left(\dfrac{\alpha^2}{2}-0\right)=2\left(\varphi(\alpha)-\dfrac{\alpha^2}{2}\right)$.

3) a) $U_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k\,3^k}$; $n\in\mathbb{N}^*$ et $S_n(t)=2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}t^{2k-1}$; $t\in[0,1[$

- $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} S_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(2\sum_{k=1}^{n}t^{2k-1}\right)\mathrm{d}t=2\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}t^{2k-1}\,\mathrm{d}t\right)=2\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\dfrac{t^{2k}}{2k}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)=\dfrac{2}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2k}}{k}\right)$

alors $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} S_n(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{3^k}{k3^{2k}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k\,3^k}\right)=U_n$

3) b) $g'(t)=\dfrac{2\,t}{1-t^2}$.

$S_n(t)=2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}t^{2k-1}=\dfrac{2}{t}\sum_{k=1}^{n}t^{2k}=\dfrac{2}{t}\left(t^2\times\dfrac{1-t^{2n}}{1-t^2}\right)=\dfrac{2t}{1-t^2}(1-t^{2n})=(1-t^{2n})\,g'(t)$

3) c) $0\le t\le\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow 0\le t^{2n}\le\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2n}\Rightarrow 0\le t^{2n}\le\left(\dfrac{3^n}{3^{2n}}\right)\Rightarrow 0\le t^{2n}\le\dfrac{1}{3^n}\Rightarrow-\dfrac{1}{3^n}\le-t^{2n}\le 0$

$\Rightarrow 1-\dfrac{1}{3^n}\le 1-t^{2n}\le 1\Rightarrow\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)g'(t)\le S_n(t)\le g'(t) \quad (\text{car } g'(t)\ge 0)$.

3) d) On a $\forall t \in [0, \frac{\sqrt{3}}{3}]$: $\left(1-\frac{1}{3^n}\right) g'(t) \leq S_n(t) \leq g'(t)$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(1-\frac{1}{3^n}\right) g'(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} S_n(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} g'(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \left(1-\frac{1}{3^n}\right)[g(t)]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \leq U_n \leq [g(t)]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(g(\frac{\sqrt{3}}{3}) - g(0)\right) \leq U_n \leq \left(g(\frac{\sqrt{3}}{3}) - g(0)\right) \Rightarrow \left(1-\frac{1}{3^n}\right) g(\frac{\sqrt{3}}{3}) \leq U_n \leq g(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

4) $$\begin{cases} \left(1-\frac{1}{3^n}\right) g(\frac{\sqrt{3}}{3}) \leq U_n \leq g(\frac{\sqrt{3}}{3}) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{3^n}\right) g(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 1 \times g(\frac{\sqrt{3}}{3}) = g(\frac{\sqrt{3}}{3}) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = g(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} g(\frac{\sqrt{3}}{3}) = g(\frac{\sqrt{3}}{3}) \end{cases}$$

Un corrigé de l'épreuve de Mathématiques
Session principale 2019

Par Mohamed ATOUANI

Exercice 1.

1. (a) Pour montrer que (AB) et (HM) sont parallèles, il suffit de montrer qu'elles sont perpendiculaires à une même droite, à savoir ici (AC). En effet, le triangle BAC est rectangle en A car il est inscrit dans le cercle ξ dont l'un des côtés est le diamètre de ce cercle. On en déduit que (AB) est perpendiculaire à (AC). De même, le triangle MHC est rectangle en H. Le résultat en découle.

   (b) Les droites (A'M) et (MH) sont parallèles car parallèles à une même droite, à savoir (AB). Ainsi, elles sont confondues car partagent le point M. D'où l'alignement de H, M et A'.

   (c) Les droites (HM) et (AB) sont parallèles donc d'après le théorème de Thalès

$$\frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{BC}} = \frac{1}{3}.$$

   D'où le résultat. Par ailleurs, le triangle AHM est rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore on a $\mathrm{HA}^2 = \mathrm{AM}^2 - \mathrm{HM}^2$. L'égalité $\mathrm{AB} = \mathrm{AM}$ implique le résultat.

2. (a) On a $(\overrightarrow{\mathrm{HA}}, \overrightarrow{\mathrm{HM}}) \equiv -\pi/2 \pmod{2\pi}$. Par ailleurs, d'après 1/c $\mathrm{HA}^2 = (3\mathrm{HM})^2 - \mathrm{HM}^2 = 8\mathrm{HM}^2$. Ainsi

$$\left(\frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{HA}}\right)^2 = \frac{1}{8}.$$

   Le résultat en découle par passage à la racine carrée. Donc S est la similitude directe de centre H, d'angle $-\pi/2$ et de rapport $\sqrt{2}/4$.

   (b) L'image de la droite (AI) par la similitude S est la droite perpendiculaire à (AI) passant par $S(A) = M$. Il s'agit de la droite (BC) car les diagonales d'un losange sont perpendiculaires. De même, l'image de la droite (MH) est la droite qui lui est perpendiculaire, passant par l'image de H par S, à savoir H lui-même. Il s'agit donc de (AC). Par ailleurs A' est à l'intersection de (AI) et (MH), ainsi son image par S est à l'intersection de (BC) et de (AC), images respectives de (AI) et (MH). Donc $S(A') = C$.

3. I est le milieu du segment [AA'], donc son image par S sera le milieu de l'image de [AA'], à savoir I' milieu de [MC]. Cela implique en particulier que (HI) est perpendiculaire à (HI'). Ce dernier étant le rayon du cercle ξ', on en déduit que (HI) est la tangente à ξ' en H.

4. (a) S' est la composée de 2 similitudes indirectes de même rapport égal à 1 et d'une similitude directe de rapport égal à $\sqrt{2}/4$. Il s'agit ainsi d'une similitude directe de rapport égal à $\sqrt{2}/4$. Par ailleurs, le point H est fixe par S' car

$$S'(H) = (S_{(\mathrm{AH})} \circ \mathrm{S} \circ S_{(\mathrm{AH})})(H) = S_{(\mathrm{AH})}(\mathrm{S}(H)) = S_{(\mathrm{AH})}(H) = H.$$

(b) Pour montrer que le triangle MCN est isocèle en C, il suffit de montrer que C est équidistant à M et N ou encore que (CH) est la médiatrice de [MN]. Pour se faire, on montre tout d'abord que (CH) est la bissectrice de $\widehat{MCN}$, la perpendicularité de (CH) à (MN) permettra alors de conclure. En effet,

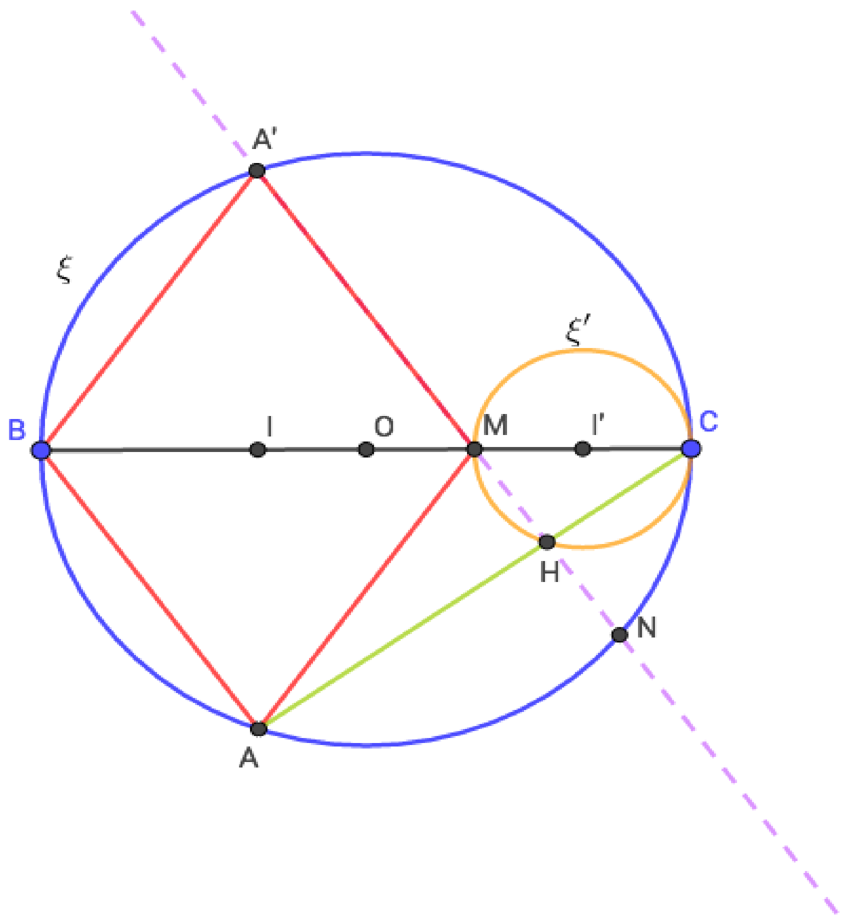
- l'angle $\widehat{\text{BA'A}}$ et l'angle $\widehat{\text{AA'M}}$ sont de même mesure car (AA') est la bissectrice de l'angle $\widehat{\text{BA'M}}$.
- L'angle $\widehat{\text{BCA}}$ et l'angle $\widehat{\text{BA'A}}$ sont de même mesure car ils interseptent le même arc de cercle.
- De même, $\widehat{\text{AA'M}}$ et $\widehat{\text{ACN}}$ sont de même mesure.

On en déduit que $\widehat{\text{BCA}}$ et $\widehat{\text{ACN}}$ sont de même mesure. Le résultat en découle.

(c) D'après la question précédente $S_{(\text{AH})}(M) = N$. On en déduit que

$$S'(A) = S_{(\text{AH})}(S(A)) = S_{(\text{AH})}(M) = N.$$

Par ailleurs, $S'(H) = H$, donc l'angle de S' vaut $(\overrightarrow{\text{HA}}, \overrightarrow{\text{HN}}) \equiv \pi/2 \pmod{2\pi}$.



Exercice 2.

1. (a) Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}(-4, 0, 0)$ et $\overrightarrow{\text{AC}}(-1, 1, 0)$ sont colinéaires. Ceci n'est pas le cas car $(-4)/(-1) \neq 0/1$.

(b) On sait que $z_A = z_B = z_C = 1$. Donc les points A, B et C appartiennent au plan d'équation $z = 1$. Or par trois points non alignés de l'espace passe un seul plan, ainsi l'équation de P est $z = 1$.

2. (a) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in S &\iff x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 1 = 0 \\ &\iff x^2 + y^2 + (z-2)^2 - 5 = 0 \\ &\iff x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 5. \end{aligned}$$

Ainsi S est la sphère de centre $\Omega(0, 0, 2)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

(b) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in P \cap S &\iff z = 1 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 5 \\ &\iff z = 1 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = 4. \end{aligned}$$

Le résultat en découle.

3. (a) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in P \cap S_\lambda &\iff z = 1 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + (z-\lambda)^2 = (\lambda-1)^2 + 4 \\ &\iff z = 1 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + (1-\lambda)^2 = (\lambda-1)^2 + 4 \\ &\iff z = 1 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = 4. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

(b)

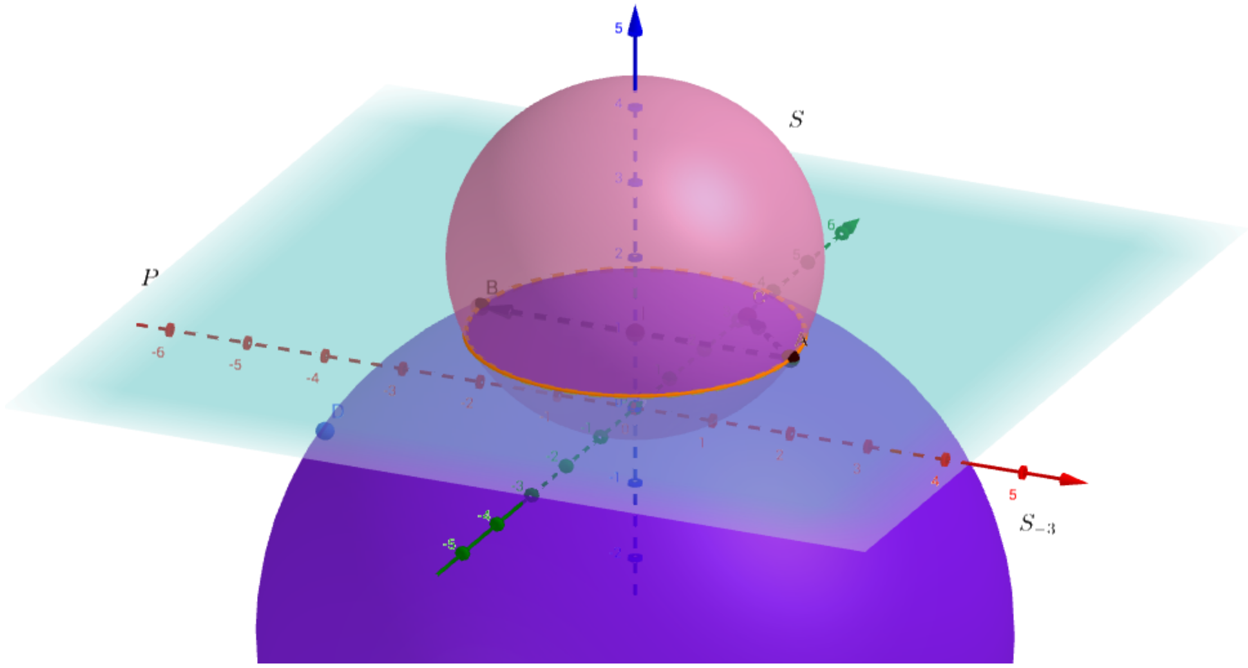
$$\begin{aligned} D \in S_\lambda &\iff (-4)^2 + (-1-\lambda)^2 = (\lambda-1)^2 + 4 \\ &\iff 16 + \lambda^2 + 2\lambda + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4 \\ &\iff 12 + 4\lambda = 0 \\ &\iff \lambda = -3. \end{aligned}$$

Ainsi $\lambda_0 = -3$.

(c) Soit h une homothétie de rapport k et de centre $G_k(x_{G_k}, y_{G_k}, z_{G_k})$. Puisque h transforme S en S_{-3} alors $R_{-3} = |k|R$, où R désigne le rayon de S. On en déduit que $\sqrt{20} = |k|\sqrt{5}$. Ainsi $|k| = 2$ ou encore $k = 2$ ou $k = -2$. Par ailleurs, l'image de $\Omega(0, 0, 2)$ par h vaut $\Omega_{-3}(0, 0, -3)$, donc $\overrightarrow{G_k\Omega_{-3}} = k\overrightarrow{G_k\Omega}$. En passant aux coordonnées on obtient

$$\begin{cases} x_{G_k} = kx_{G_k} \\ y_{G_k} = ky_{G_k} \\ z_{G_k} + 3 = k(z_{G_k} - 2) \end{cases}$$

Ainsi $x_{G_k} = y_{G_k} = 0$ et $z_{G_k} = (2k+3)/(k-1)$. Il existe donc deux homothéties de l'espace envoyant S sur S_{-3}, à savoir l'homothétie de centre $G_2(0, 0, 7)$ et de rapport $k = 2$ et l'homothétie de centre $G_{-2}(0, 0, 1/3)$ et de rapport $k = -2$.



Exercice 3.

1. (a) On a
$$29\times 2-13\times 4=58-52=6.$$
Ainsi $(2,4)$ est bien solution de l'équation (E).

   (b) D'après ce qui précède, nous avons
$$\begin{cases} 29x-13y & =6\\ 29\times 2-13\times 4 & =6\end{cases}$$
Ce système implique en particulier que $29(x-2)-13(y-4)=0$ ou encore que $29(x-2)=13(y-4)$ (*). On en déduit que 29 divise $13(y-4)$ et par conséquent 29 divise $y-4$ car 29 et 13 sont premiers entre eux. Il existe donc un entier k tel que $y=29k+4$. L'équation (*) devient alors
$$29(x-2)=13\times 29k.$$
Il en résulte que $x=13k+2$. La vérification de la réciproque est immédiate car
$$29(13k+2)-13(29k+4)=29\times 2-13\times 4=6.$$

2. L'entier 29 est premier et $2\not\equiv 0 \pmod{29}$ donc d'après le petit théorème de Fermat $2^{28}\equiv 1 \pmod{29}$. Par conséquent
$$\begin{aligned}(-8)^{19} &\equiv -(2^3)^{19} \pmod{29}\\ &\equiv -2^{57} \pmod{29}\\ &\equiv -2^{2\times 28+1} \pmod{29}\\ &\equiv -(2^{28})^2\times 2^1 \pmod{29}\\ &\equiv -2 \pmod{29}.\end{aligned}$$

Ainsi, -8 est solution de l'équation (E').

3. (a) L'entier x_0 est solution de l'équation (E') donc $x_0 \not\equiv 0 \pmod{29}$ car sinon $x_0^{19} \equiv 0 \pmod{29} \not\equiv -2 \pmod{29}$. Ainsi, puisque 29 est premier, le petit théorème de Fermat permet d'affirmer que

$$x_0^{28} \equiv 1 \pmod{29}.$$

(b) L'entier x_0 vérifie $x_0^{19} \equiv -2 \pmod{29}$ donc en élevant au cube on obtient

$$(x_0^{19})^3 \equiv (-2)^3 \pmod{29} \equiv -8 \pmod{29},$$

d'où $x_0^{57} \equiv -8 \pmod{29}$.

(c) On a

$$x_0^{57} \equiv x_0 \times (x_0^{28})^2 \pmod{29} \equiv x_0 \pmod{29}.$$

Le résultat en découle.

(d) Si x_0 est solution de l'équation (E') alors $x_0 \equiv -8 \pmod{29}$. L'ensemble des solutions de (E') dans $\mathbb{Z}$ est constitué d'élements de la forme $x_0 = -8 + 29k$, où $k \in \mathbb{Z}$.

(e) Soit $x \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}(x-3)^{19} \equiv -2 \pmod{29} &\iff x-3 \text{ est solution de (E')}\\ &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x-3 = -8+29k\\ &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = -5+29k.\end{aligned}$$

4. D'après le petit théorème de Fermat $(x-3)^{13} \equiv (x-3) \pmod{13}$. Ainsi le système à résoudre dans cette question est équivalent à

$$\begin{cases}(x-3)^{19} & \equiv -2 \pmod{29}\\ x-3 & \equiv -2 \pmod{13}.\end{cases}$$

On en déduit que x s'écrit sous la forme $x = -5 + 29k$ et sous la forme $x = 1 + 13k'$. Cela implique en particulier que $-5 + 29k = 1 + 13k'$ ou de façon équivalente $29k - 13k' = 6$. Ainsi (k, k') est solution de l'équation diophantienne $29x - 13y = 6$. Par conséquent, il existe un entier s tel que $k = 13s + 2$ et $k' = 29s + 4$. On obtient dans ce cas que

$$x = 1 + 13 \times (29s + 4) = 53 + 377s.$$

Exercice 4.

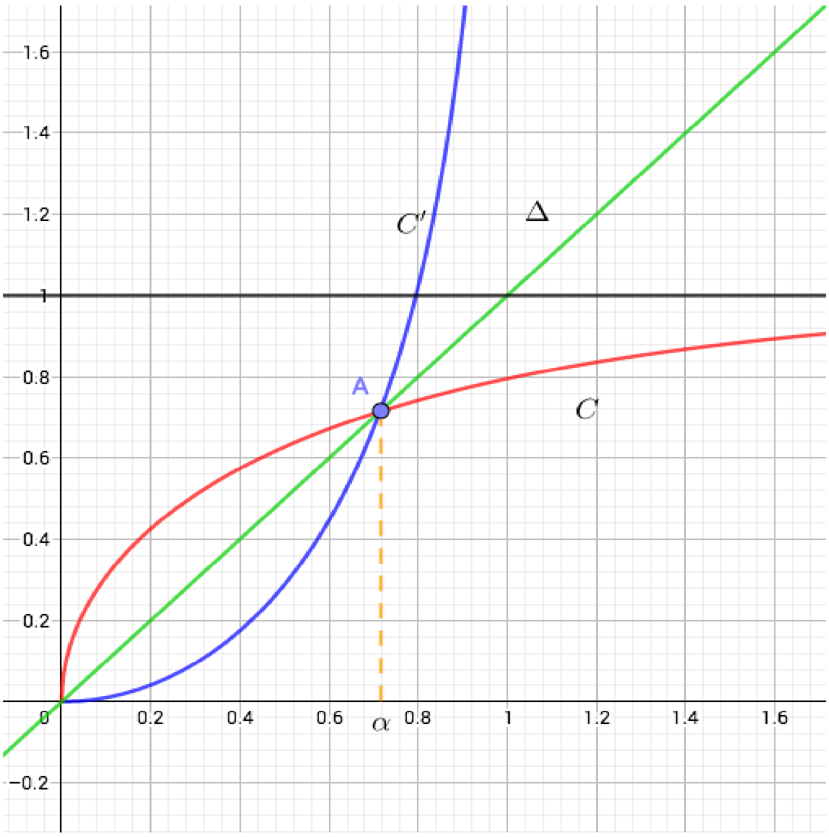
1. (a) Il suffit de montrer que f est strictement monotone et continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f(\mathbb{R}_+) = [0,1[$. En effet, la continuité est triviale. Par ailleurs, la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est strictement décroissante, ce qui implique que la fonction $x \mapsto 1 - e^{-x}$ est strictement croissante. La stricte croissance de la fonction racine carrée permet alors d'affirmer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Le résultat en découle.

(b) Pour tout $y \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} f(y) = x &\iff \sqrt{1-e^{-y}} = x \\ &\iff 1-e^{-y} = x^2 \quad \text{car } x \text{ est positif} \\ &\iff e^{-y} = 1-x^2 \\ &\iff -y = \ln(1-x^2) \\ &\iff y = -\ln(1-x^2). \end{aligned}$$

Le résultat tombe comme une pomme mure.

(c) Soit ψ la fonction définie sur $[0,\ 1[$ par l'expression $\psi(x) = g(x) - x$. On a $\psi(0.7) < 0$ et $\psi(0.8) > 0$, la continuité de ψ et le théorème des valeurs intermédiaires permettent d'assurer l'existence d'un nombre $\alpha \in [0.7; 0.8]$ vérifiant $\psi(\alpha) = 0$ ou encore $g(\alpha) = \alpha$.



2. (a) Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in [0,1[$

$$\varphi(x) = \int_0^{g(x)} f(t)dt = F(g(x)) - F(0).$$

Le résultat en découle par compostion. De plus,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= g'(x) \times f(g(x)) \\ &= \frac{2x}{1-x^2} \times x \\ &= \frac{2x^2}{1-x^2}. \end{aligned}$$

6

(b) On a

$$\frac{2x^2}{1 \quad x^2} = \frac{2x^2 \quad 2+2}{1 \quad x^2} = \frac{2(1 \quad x^2)+2}{1 \quad x^2} = \quad 2+\frac{2}{1 \quad x^2}.$$

On en déduit que $a = \quad 2$. Par ailleurs,

$$\frac{b}{1+x}+\frac{c}{1 \quad x} = \frac{b(1 \quad x)+c(1+x)}{1 \quad x^2} = \frac{(c \quad b)x+(b+c)}{1 \quad x^2} = \frac{2}{1 \quad x^2}.$$

Par identi cation, on obtient $c \quad b = 0$ et $b+c = 2$. Ainsi, $b = c = 1$ et

$$\frac{2x^2}{1 \quad x^2} = \quad 2+\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1 \quad x}.$$

(c) Pour tout x 2 $[0,1[$

$$' (x) = \int_0^x \frac{2t^2}{1 \quad t^2}dt = \int_0^x \bullet \quad 2+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1 \quad t} ‹ dt = \quad 2t+\ln(1+t) \quad \ln(1 \quad t) \,{}_0^x = \quad 2x+\ln \bullet \frac{1+x}{1 \quad x} ‹.$$

(d) On présente ici deux méthodes pour évaluer cette aire.

Première méthode : Cette méthode exploite l'idée de la symétrie entre le graphe d'une fonction et celui de sa réciproque. En effet

$$A = \int_0 (f(t) \quad g(t))dt = 2\int_0 (f(t) \quad t)dt = 2\int_0 f(t)dt \quad 2\int_0 tdt = 2\int_{g(\ )}^0 f(t)dt \quad 2\ t^2=2\ {}_0 = 2' (\ ) \quad {}^2 = 2 \ € ' (\ ) \quad \frac{{}^2}{2} Š .$$

7

Deuxième méthode : Cette méthode utilise l'idée qu'une primitive de la fonction ln est la fonction $x \mapsto x\ln x - x$.

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_0^{\alpha}(f(t)-g(t))dt \\
&= \int_0^{\alpha} f(t)dt - \int_0^{\alpha} g(t)dt \\
&= \int_0^{g(\alpha)} f(t)dt + \int_0^{\alpha}\big(\ln(1+t)+\ln(1-t)\big)dt \\
&= \varphi(\alpha) + \big[(1+t)\ln(1+t)-(1+t)-(1-t)\ln(1-t)+(1-t)\big]_0^{\alpha} \\
&= \varphi(\alpha) + (1+\alpha)\ln(1+\alpha) - (1-\alpha)\ln(1-\alpha) - 2\alpha \\
&= \varphi(\alpha) + \ln(1+\alpha) - \ln(1-\alpha) + \alpha\ln(1+\alpha) + \alpha\ln(1+\alpha) \\
&= \varphi(\alpha) + \ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) - 2\alpha + \alpha\ln(1-\alpha^2) \\
&= 2\varphi(\alpha) + \alpha\ln(1-\alpha^2).
\end{aligned}$$

Or on sait que $g(\alpha)=\alpha$ ou de façon équivalente $-\ln(1-\alpha^2)=\alpha$. Ainsi

$$\mathscr{A} = 2\varphi(\alpha) - \alpha^2 = 2\Big(\varphi(\alpha) - \frac{\alpha^2}{2}\Big).$$

3. (a) Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} S_n(t)dt &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} 2\sum_{k=1}^{n} t^{2k-1}dt \\
&= 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} t^{2k-1}dt \\
&= 2\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2k}t^{2k}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k3^k} \\
&= u_n.
\end{aligned}$$

(b) Pour tout $t \in [0,1[$,

$$\begin{aligned} S_n(t) &= 2\sum_{k=1}^{n} t^{2k-1} \\ &= 2\left(t + t^3 + t^5 + \cdots + t^{2n-1}\right) \\ &= 2t\left(1 + t^2 + t^4 + \cdots + t^{2n-2}\right) \\ &= 2t\sum_{0}^{n-1}(t^2)^k \\ &= 2t\frac{(t^2)^n - 1}{t^2 - 1} \\ &= 2t\frac{1 - t^{2n}}{1 - t^2}. \end{aligned}$$

Or g est dérivable sur $[0,1[$ de dérivée égale à la fonction $x \mapsto 2x/(1-x^2)$. On en déduit que

$$S_n(t) = (1 - t^{2n})g'(t).$$

(c) L'inégalité de droite est triviale car quand on retranche un nombre positif à 1 le résultat est plus petit que 1. L'inégalité de gauche découle du fait que

$$t \le \frac{\sqrt{3}}{3} \implies t^{2n} \le \frac{1}{3^n}$$

(d) Les inégalités de la question précédente impliquent en passant aux intégrales que

$$\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} g'(t)dt \le \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} S_n(t)dt \le \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} g'(t)dt,$$

ce qui est équivalent à

$$\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \le u_n \le g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

car $g(0) = 0$.

4. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite (u_n) est convergente car $\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{3^n} = 1$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2019	**Session de contrôle**	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

La page 4/4 est à rendre avec la copie

Exercice1 : (3 points)

Soient ABC un triangle rectangle en A et Δ la médiatrice du segment $[AB]$.

Répondre par « Vrai » ou « Faux » en justifiant la réponse.

1) $t_{\overrightarrow{BC}} o\ S_{\Delta} = t_{\overrightarrow{AC}} o\ S_{(AC)}$.
2) $S_{(AB)} \circ h_{(A,2)} \circ S_{(AC)} = h_{(A,-2)}$.
3) Si f est une isométrie fixant les points A et B alors $f^{-1} o S_{\Delta} o f$ est une symétrie glissante d'axe Δ.

Exercice 2 : (4,5 points)

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $R(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points I, C, D et K d'affixes respectives 1 + i, 1 + 2 i, 2i et 3i.

1) a) Placer les points I, C, D et K dans le repère R.
   b) Montrer qu'il existe une unique similitude indirecte g qui transforme I en D et D en K.
   c) Déterminer le rapport de g.
   d) Déterminer l'image du triangle IDO.
2) Soit M un point du plan et M' son image par g.
   On désigne par z et z' les affixes respectives de M et M'.
   a) Montrer que $z' = -\frac{1}{2}(1+i)\,\bar{z} + 1 + 2i$.
   b) Soit Ω le centre de g. Déterminer l'affixe de Ω.
   c) Vérifier que K est le milieu du segment $[\Omega I]$.
   d) Construire alors le centre Ω et l'axe Δ de g.
3) Soit h = gog.
   a) Montrer que h est une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$.
   b) On considère la suite de points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $A_0 = I$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A_{n+2} = h(A_n)$.
   Déterminer et construire les points A_2 et A_4.
   c) Soit $S_n = A_0A_2 + A_2A_4 + \dots + A_{2n-2}A_{2n}$.
   Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3 : (3 points)

Une entreprise fabrique des pièces électroniques pour une marque de voitures. Une étude statistique a prouvé que 6% des pièces fabriquées sont défectueuses.

L'unité de contrôle rejette 97% des pièces défectueuses et 2% des pièces non défectueuses.

On choisit une pièce au hasard et on la soumet à un test de contrôle.
On note D : " la pièce est défectueuse." et R : "la pièce est rejetée par l'unité de contrôle."

1) Traduire la situation par un arbre pondéré de probabilités.
2) a) Calculer la probabilité que la pièce soit défectueuse et ne soit pas rejetée par l'unité de contrôle.
   b) On dit qu'il ya erreur de contrôle lorsque une pièce défectueuse est acceptée ou une pièce non défectueuse est rejetée. Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de contrôle.
3) Montrer que la probabilité pour que la pièce soit acceptée est égale à 0,923.
4) Pour la commercialisation de ses pièces l'entreprise décide de faire passer chaque pièce à trois contrôles successifs mais indépendants :
   - Si la pièce est acceptée par les trois contrôles, elle sera commercialisée avec le logo de la marque de voiture.
   - Si elle est acceptée uniquement par deux contrôles, elle sera commercialisée sans le logo de la marque de voiture.
   - Si elle est acceptée uniquement par un contrôle ou rejetée, elle sera détruite.

   a) Montrer que la probabilité pour que la pièce soit commercialisée sans le logo de la marque de voiture est $3\times(0{,}923)^2\times(0{,}077)$.
   b) Déterminer la probabilité pour que la pièce soit détruite.

Exercice 4 : (4 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les plans P_1 et P_2 d'équations respectives P_1 : $3x - 2y - 2z = 1$ et P_2 : $4x - 11y + 2z = 0$.

1) a) Montrer que P_1 et P_2 se coupent suivant une droite Δ.
   b) Donner une représentation paramétrique de Δ.

Dans la suite de l'exercice, on se propose de déterminer les points de Δ à coordonnées entières.

2) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $7x - 13y = 1$.
   Vérifier que (2, 1) est une solution de (E) et résoudre l'équation (E).
3) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ le système (S) : $\begin{cases} 3x-2y-2z=1, \\ 4x-11y+2z=0. \end{cases}$

   a) Soit $(x, y, z)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

   Montrer que (x, y, z) est solution de (S) si et seulement si $\begin{cases} 7x-13y=1, \\ 2z=11y-4x. \end{cases}$

   b) En déduire l'ensemble des points de Δ à coordonnées entières.

Exercice 5 : (5,5 points)

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^{\frac{-1}{2x^2}}$ si $x \neq 0$ et $g(0)=0$. On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier la parité de g. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{g(x)}{x}$ et en déduire que g est dérivable en 0.

b) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $g'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$, pour tout $x \neq 0$.

c) Dresser le tableau de variation de g.

d) Montrer que g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$.

e) On désigne par g^{-1} la fonction réciproque de g, expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$.

3) a) Montrer que $\mathscr{C}$ admet deux points d'inflexions A et B que l'on déterminera.

(A désigne le point d'inflexion d'abscisse positive).

b) En annexe, on a représenté dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'équations respectives $y=e^x$ et $y=x^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Construire dans le même repère les points A et B et tracer la courbe $\mathscr{C}$

4) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x)=g^2(x)$. Justifier que f est croissante sur $[0, +\infty[$.

5) Soit un entier $n \geq 2$. On pose $V(n)=\pi \int_0^n f(t)\,dt$.

a) Interpréter graphiquement $V(n)$.

b) Montrer que $V(n) \geq \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(t)\,dt$.

c) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} V(n)=+\infty$.

d) Montrer que $V(n) \leq n\pi$.

e) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{V(n)}{n}$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

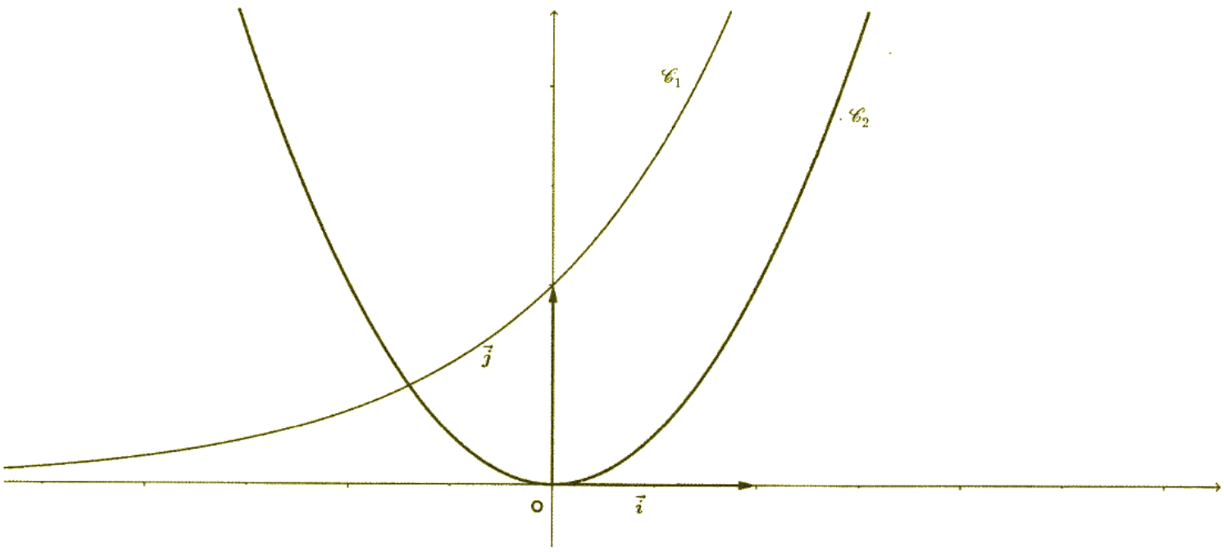
Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve : Mathématiques - Section : Mathématiques - Session de contrôle (2019)

Annexe à rendre avec la copie



CORRECTION : EPREUVE MATHEMATIQUES Session de contrôle 2019 BAC MATHS

Exercice N°1 :

1°) $\left(t_{\overrightarrow{AC}}\ o\ S_{(AC)}\right)^{-1} = \left(S_{(AC)}\right)^{-1} o \left(t_{\overrightarrow{AC}}\right)^{-1} = S_{(AC)}\ o\ t_{\overrightarrow{CA}}$ et $S_\Delta \circ S_{(AC)} = t_{\overrightarrow{AB}}$ car $\Delta \parallel (AC)$

$\Rightarrow \left(t_{\overrightarrow{BC}}\circ S_\Delta\right)\circ\left(t_{\overrightarrow{AC}}\circ S_{(AC)}\right)^{-1} = t_{\overrightarrow{BC}}\circ S_\Delta\circ S_{(AC)}\circ t_{\overrightarrow{CA}} = t_{\overrightarrow{BC}}\circ t_{\overrightarrow{AB}}\circ t_{\overrightarrow{CA}} = t_{\vec 0} = idp$

$\Rightarrow t_{\overrightarrow{BC}}\circ S_\Delta = t_{\overrightarrow{AC}}\circ S_{(AC)}$ $\Rightarrow$ **Vrai**

Ou bien : $t_{\overrightarrow{BC}}\circ S_\Delta = t_{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}}\circ S_\Delta = t_{\overrightarrow{AC}}\circ t_{\overrightarrow{BA}}\circ S_\Delta = t_{\overrightarrow{AC}}\circ S_{(AC)}$ car $t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}}(\Delta) = (AC)$

2°) $S_{(AB)}\circ h_{(A,2)}\circ S_{(AC)} = S_{(AB)}\circ S_{(AC)}\circ h_{(A,2)} = r_{(A,\pi)}\circ h_{(A,2)} = h_{(A,-2)}$ $\Rightarrow$ **Vrai**

3°) f est une isométrie qui fixe A et B donc $f = idp$ ou $f = S_{(AB)}$ d'où $f^{-1} = idp$ ou $f^{-1} = S_{(AB)}$

- $f = idp \Rightarrow f^{-1}\circ S_\Delta\circ f = S_\Delta$
- $f = S_{(AB)} \Rightarrow f^{-1}\circ S_\Delta\circ f = S_{(AB)}\circ \overbrace{S_\Delta\circ S_{(AB)}}^{(AB)\perp\Delta} = \overbrace{S_{(AB)}\circ S_{(AB)}}^{idp}\circ S_\Delta = S_\Delta$

  Donc $f^{-1}\circ S_\Delta\circ f = S_\Delta \Rightarrow$ **Faux**

Exercice N°2:

1°) a) figure 1

b) $\mathrm{I}\neq\mathrm{D}$ et $\mathrm{D}\neq\mathrm{K}$ donc il existe une similitude indirecte g qui transforme I en D et D en K

c) Soit k le rapport de g on a : $k = \dfrac{\mathrm{DK}}{\mathrm{ID}} = \dfrac{|z_{\mathrm{K}} - z_{\mathrm{D}}|}{|z_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{I}}|} = \dfrac{|3i-2i|}{|2i-1-i|} = \dfrac{|i|}{|-1+i|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) IDO est un triangle rectangle et isocèle en I, on sait que $g(\mathrm{I}) = \mathrm{D}$ et $g(\mathrm{D}) = \mathrm{K}$

$\Rightarrow g(\mathrm{IDO}) = \mathrm{DK}g(\mathrm{O})$ est un triangle rectangle et isocèle indirecte en D d'où $g(\mathrm{IDO}) = \mathrm{DKC}$

2°) a) $g(\mathrm{M}) = \mathrm{M}' \Leftrightarrow z' = a\overline{z} + b$, on a $g(\mathrm{IDO}) = \mathrm{DKC}$ donc $g(\mathrm{O}) = \mathrm{C} \Rightarrow b = 1+2i$

$g(\mathrm{D}) = \mathrm{K} \Rightarrow 3i = a\times 2\overline{i} + b \Rightarrow 3i = -2ia + 1 + 2i \Rightarrow -1+i = -2ia \Rightarrow a = \dfrac{-1+i}{-2i} = -\dfrac{1+i}{2}$

Donc $z' = -\dfrac{1}{2}(1+i)\overline{z} + 1 + 2i$

b) $z_\Omega = \dfrac{a\times\overline{b} + b}{1-|a|^2}$

- $a\times b + b = -\dfrac{1}{2}(1+i)(1-2i) + 1 + 2i$

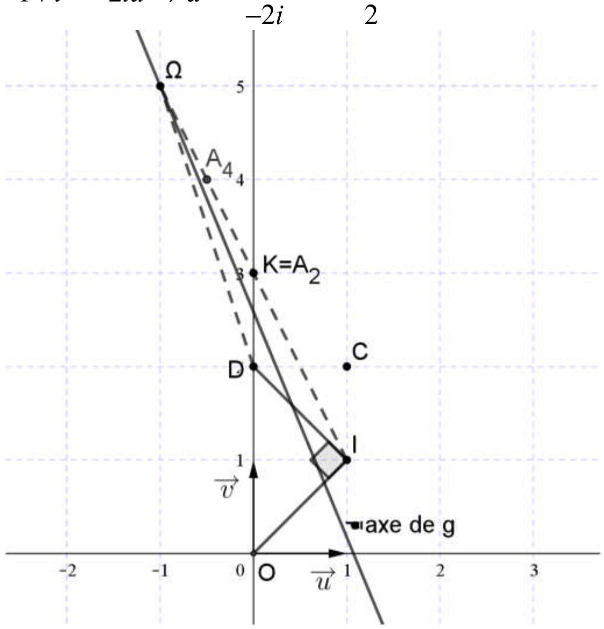
  $= -\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}i$

- $1-|a|^2 = 1 - \left|-\dfrac{1}{2}(1+i)\right|^2 = \dfrac{1}{2}$

il en résulte que $z_\Omega = -1+5i$

$\Rightarrow \mathrm{K}$ est le milieu de segment $[\Omega\mathrm{I}]$

d) L'axe de g porte la bissectrice intérieur de l'angle $\mathrm{I}\hat{\Omega}\mathrm{D}$



3°) a) $g=\overbrace{h'_{\left(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\circ S_\Delta}^{\text{forme réduite}}=S_\Delta\circ h'_{\left(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\Rightarrow g\circ g=h'_{\left(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\circ\overbrace{S_\Delta\circ S_\Delta}^{idp}\circ h'_{\left(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=h_{\left(\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$, ($h'$ homothétie)

b) $A_0=I\Rightarrow A_2=h(A_0)=h(I)\Rightarrow\overrightarrow{\Omega A_2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega I}=A_2=K$

$A_4=h(A_2)=h(K)\Rightarrow\overrightarrow{\Omega A_4}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega K}\Rightarrow A_4$ est le milieu du segment $[\Omega K]$

c) $A_2=h(A_0)$ et $A_4=h(A_2)\Rightarrow\overrightarrow{A_2A_4}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_2}\Rightarrow A_2A_4=\frac{1}{2}A_0A_2$

$A_4=h(A_2)$ et $A_6=h(A_4)\Rightarrow\overrightarrow{A_4A_6}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_2A_4}\Rightarrow A_4A_6=\frac{1}{2}A_2A_4=\left(\frac{1}{2}\right)^2A_0A_2$

$A_6=h(A_4)$ et $A_8=h(A_6)\Rightarrow\overrightarrow{A_6A_8}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_4A_6}\Rightarrow A_6A_8=\frac{1}{2}A_4A_6=\left(\frac{1}{2}\right)^3A_0A_2$

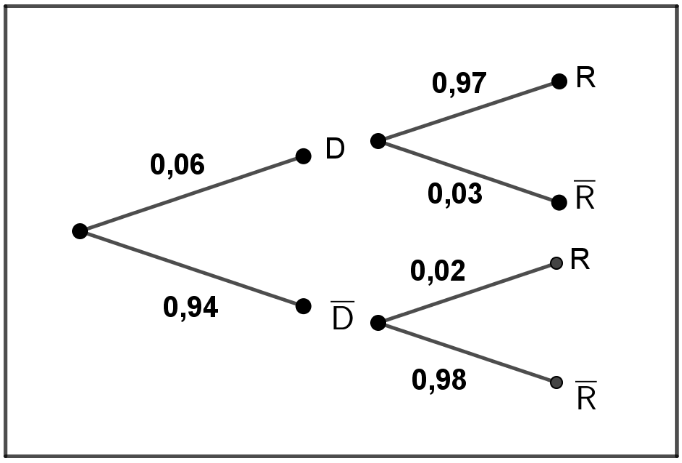
En général : $A_{2n-2}A_{2n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}A_0A_2$

$S_n=A_0A_2+A_2A_4+A_4A_6+\ldots+A_{2n-2}A_{2n}=A_0A_2+\frac{1}{2}A_0A_2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}A_0A_2$

$=\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)A_0A_2=\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}IK\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=2\times IK=2\sqrt{5}$

Exercice N°3 :

1°)



2°) a) $p(D\cap\bar{R})=0,06\times0,03=0,0018$

b) $p(\bar{D}\cap R)+p(D\cap\bar{R})$

$=0,94\times0,02+0,0018=0,0206$

3°) $p(\bar{R})=p(\bar{D}\cap\bar{R})+p(D\cap\bar{R})$

$=0,94\times0,98+0,0018=0,923$

4°) Soit X l'alea numérique qui pour valeur le nombre de fois où la pièce est accepter au cours de trois contrôles

X suit une loi binomiale de paramètre $p=0,923$ et $n=3$

$p(X=k)=C_3^k(0,923)^k\times(0,077)^{3-k}$ avec $k\in\{0,1,2,3\}$

a) $p_1=p(X=2)=C_3^2(0,923)^2\times(0,077)^{3-2}=3(0,923)^2(0,077)$

b) $p_2=p(X=1)+p(X=0)=C_3^1(0,923)^1\times(0,077)^{3-1}+C_3^0\left((0,923)^0\times0,077\right)^{3-0}$

$=3(0,923)\times(0,077)^2+(0,077)^3=0,0169$

Exercice N°4 :

1°) a) $\overrightarrow{N_{P_1}}\begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{N_{P_2}}\begin{pmatrix}4\\-11\\2\end{pmatrix}$ et $\frac{3}{4}\neq\frac{-2}{-11}\Rightarrow$ P_1 et P_2 sont sécants

b) $M(x,y,z)\in\Delta\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y-2z=1\\4x-11y+2z=0\end{cases}\Leftrightarrow$ pour $x=t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}(1)+(2)\Rightarrow 7t-13y=1\\2z=-4t+11y\end{cases}$

2°) • $7\times2-13\times1=14-13=1$

• $7x-13y=7\times2-13\times1\Leftrightarrow 7(x-2)=13(y-1)$

$\Leftrightarrow 13$ divise $7(x-2)$ et $7\wedge13=1$ donc lemme de Gauss

13 divise $(x-2)$ Ainsi $x-2=13k$; $k\in\mathbb{Z}$ par suite $x=2+13k$; $k\in\mathbb{Z}$

$*$ $7.(13k)=13(y-1)\Leftrightarrow 7k=y-1\Leftrightarrow y=1+7k$; $k\in\mathbb{Z}$

Conclusion : $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(2+13k,1+7k)\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$

3°) a) $(S):\begin{cases}3x-2y-2z=1\\4x-11y+2z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1)+(2)\Rightarrow 7x-13y=1\\(2)\Rightarrow 2z=-4x+11y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7x-13y=1\\2z=-4x+11y\end{cases}$

Réciproquement : $\begin{cases}7x-13y=1\\2z=-4x+11y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7x-13y=1\\2z+4x-11y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1)-(2)\Rightarrow 3x-2y-2z=1\\2z+4x-11y=0\end{cases}$

(ou bien par équivalence)

3°) b) $\begin{cases}7x-13y=1\\2z=-4x+11y\end{cases}\Leftrightarrow x=2+13k\ ;y=1+7k$ et $2z=3+25k\ ;\ k=2p+1\ ,p\in\mathbb{Z}$

Donc $M(15+26p,8+14p,14+25p)\ ;p\in\mathbb{Z}^*$

Exercice N°5 :

1°) a) • $x\mapsto u(x)=-\frac{1}{2x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $u(\mathbb{R}^*)=]-\infty,0[$

$x\mapsto v(x)=e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty,0[$ d'où $g=v\circ u$ est continue sur $\mathbb{R}^*$

• $\lim\limits_{x\to0}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}g(x)=0=g(0)$ donc est continue en 0

g est continue sur $\mathbb{R}^*$ et en 0 d'où elle est continue sur $\mathbb{R}$

b) $x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$ et $g(-x)=g(x)\Rightarrow g$ est paire

Donc la courbe ζ de g admet $(O,\vec{j})$ comme axe de symétrie

2°) a) On pose $X=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow x^2=-\frac{1}{X}\Rightarrow x=\sqrt{-\frac{1}{X}}$, $X\to-\infty$ lorsque $x\to0^+$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{g(x)}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^{-\frac{1}{2x^2}}}{x}\right)=\lim_{X\to-\infty}\left(\frac{e^{\frac{X}{2}}}{\sqrt{-\frac{1}{X}}}\right)=\lim_{X\to-\infty}\left(\sqrt{-Xe^X}\right)=0\Rightarrow g_d'(0)=0$$

ζ admet une demi-tangente horizontale au point O par raison de symétrie (g est paire)

$g'(0)=0$

D'où g est dérivable en 0

b) • $x \mapsto u(x) = -\frac{1}{2x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $u(\mathbb{R}^*) =]-\infty, 0[$

$x \mapsto v(x) = e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty, 0[$ d'où g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

• pour tout $x \neq 0$ on a : $g'(x) = \left(-\frac{1}{2x^2}\right)' e^{-\frac{1}{2x^2}} = \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{2x^2}} = \frac{g(x)}{x^3}$

c) g est paire $\Rightarrow$ on étudie g sur $[0, +\infty[$, $g'(x) > 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{2x^2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} e^x = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$

x	0 $\qquad$ $+\infty$
g'(x)	+
g(x)	0 $\nearrow$ 1

d) g est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$

et $\mathrm{f}([0, +\infty[) = [\mathrm{f}(0), \lim\limits_{+\infty} \mathrm{f}[= [0, 1[$

$\Rightarrow g$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$

e) $y \in]0, +\infty[$, $x \in]0, 1[$, $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2y^2}} = x \Leftrightarrow -\frac{1}{2y^2} = \ln x$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2 \ln x} = y^2$ or $g^{-1}(x) = y \in]0, +\infty[$ et $g(0) = 0 \Leftrightarrow g^{-1}(0) = 0$

D'où $\forall x \in [0, 1[: g^{-1}(x) = \sqrt{-\frac{1}{2 \ln x}}$

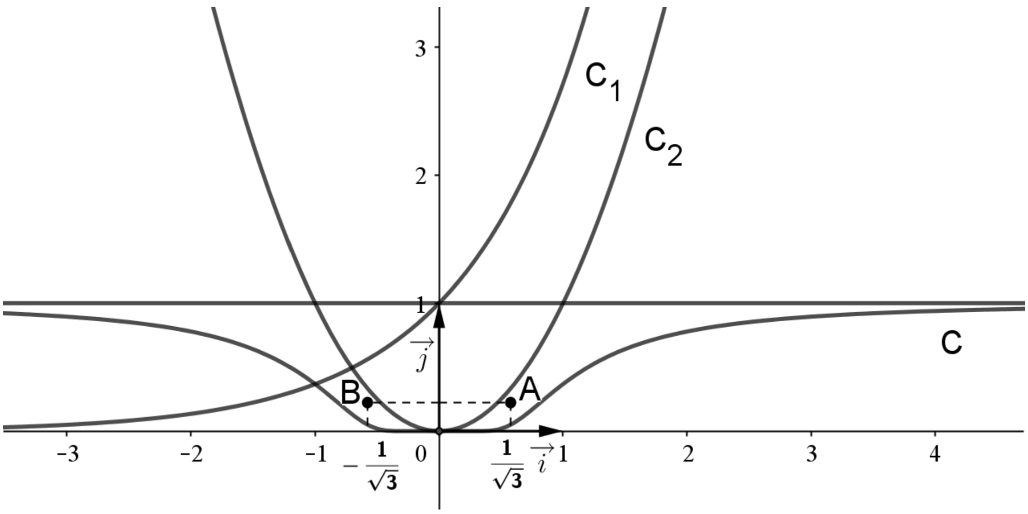
3°) a) Pour tout $x \neq 0$ on a : $g''(x) = \frac{x^3 g'(x) - 3x^2 g(x)}{x^6} = \frac{x^3 \frac{g(x)}{x^3} - 3x^2 g(x)}{x^6} = \frac{g(x)(1 - 3x^2)}{x^6}$

Le signe de $g''(x)$ est celui de $(1 - 3x^2)$, on a $1 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$g''(x)$ s'annule deux fois et change de signe donc ζ admet deux points d'inflexions $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, e^{-\frac{3}{2}}\right)$ et $B\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, e^{-\frac{3}{2}}\right)$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
signe de g''(x)		–	0	+	0	–	

b)



4°) $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x)=g^2(x) \Rightarrow f'(x)=2g'(x)g(x) \geq 0 \Rightarrow f$ est croissante sur $[0,+\infty[$

5°) a) $V(n)=\pi\int_0^n f(t)dt=\pi\int_0^n g^2(t)\,dt \Rightarrow$ comme g est continue et positive sur $[0,\pi]$

Alors : $V(n)$ est le volume(en unité de volume) engendré par rotation de la courbe ζ au tour de l'axe des abscisses

b) $\pi\int_{\sqrt{n}}^n f(t)dt-\pi\int_{\sqrt{n}}^n f(t)dt=\pi\left(\int_0^n f(t)dt+\int_n^{\sqrt{n}} f(t)dt\right)=\pi\int_0^{\sqrt{n}} f(t)dt \geq 0$

$$\Rightarrow V(n) \geq \pi\int_0^{\sqrt{n}} f(t)dt$$

c) • f est croissante sur $[0,+\infty[$; $t \geq \sqrt{n} \Rightarrow f(t) \geq f(\sqrt{n}) \Rightarrow \pi\int_{\sqrt{n}}^n f(t)dt \geq \pi\ f(\sqrt{n})\int_{\sqrt{n}}^n 1\,dt$

$$\Rightarrow V(n) \geq \pi\ f(\sqrt{n})(n-\sqrt{n}) \Rightarrow V(n) \geq \pi\sqrt{n}\ f(\sqrt{n})(\sqrt{n}-1)$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(\sqrt{n})=1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \pi\sqrt{n}\ f(\sqrt{n})(\sqrt{n}-1)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} V(n)=+\infty$

d) Pour tout réel t de $[0,+\infty[$, $g(t) \leq 1 \Rightarrow f(t) \leq 1 \Rightarrow \pi\int_{\sqrt{n}}^n f(t)dt \leq \pi\int_{\sqrt{n}}^n 1\,dt$

$$\Rightarrow V(n) \leq \pi(n-\sqrt{n}) \leq \pi n$$

e) $\pi f(\sqrt{n})(n-\sqrt{n}) \leq V(n) \leq \pi n \Leftrightarrow \pi\ f(\sqrt{n})\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \dfrac{V(n)}{n} \leq \pi$

$$\lim_{n\to+\infty} \pi\overbrace{f(\sqrt{n})}^{1}\left(1-\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{0}\right)=\pi \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{V(n)}{n}=\pi$$

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2020	Session principale	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.
La page 5/5 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (5 points)

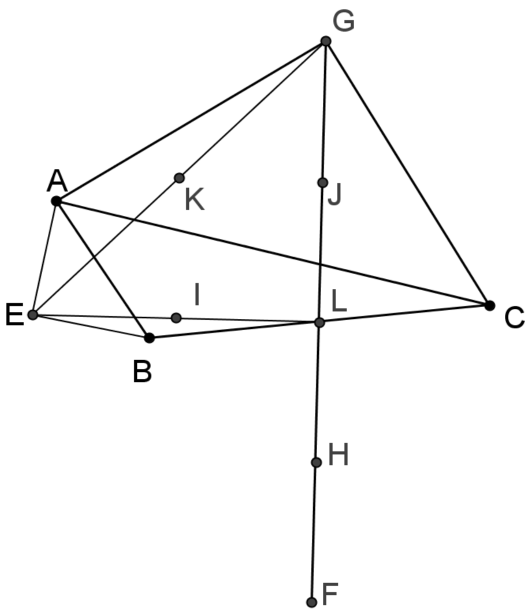
Le plan est orienté.

Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle direct, non rectangle et non isocèle.

GAC et EBA sont des triangles directs, rectangles et isocèles respectivement en G et en E.

L, K, I et J sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[GE]$, $[EL]$ et $[GL]$. F et H sont les symétriques respectifs de G et J par rapport à L.

On note r_1 et r_2 les rotations de même angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs G et E. S_L désigne la symétrie centrale de centre L.



1) a) Déterminer $r_2 \circ S_L \circ r_1(A)$.
   Caractériser $r_2 \circ S_L \circ r_1$.
   b) En déduire que le triangle EFG est rectangle, isocèle.
   c) Justifier que le quadrilatère LJKI est un carré.
2) Soit φ la symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{LK}$ et d'axe Δ passant par I.
   On pose $g = \varphi \circ S_{(LE)}$, où $S_{(LE)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (LE).
   a) Montrer que Δ = (IH).
   b) Montrer que g(J) = I et g(L)= E.
   c) Prouver que g est la rotation de centre K et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
3) Soit f l'antidéplacement qui envoie J en I et L en E.
   a) Justifier que f est une symétrie glissante.
   b) Donner les éléments caractéristiques de f.
4) Soit M un point du plan. Soient M' et M'' les images de M respectivement par f et g.
   Montrer que M' et M'' sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on précisera.

Exercice 2 : (4 points)

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Dans la figure 1 de l'annexe, (Γ) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$, A, B et C sont les points d'affixes respectives 1, $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.

Soit Q un point du cercle (Γ) d'affixe un nombre complexe a, distinct de $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$.

1) On désigne par R le point d'affixe $a+\bar{a}$.

   a) Vérifier que $R\in\left(O,\ \vec{u}\right)$. Construire R.

   b) Déterminer les nombres complexes a pour lesquels O, R et Q sont alignés.

2) Soit P le point du plan d'affixe ia et M un point d'affixe z non nul.

   a) Justifier que P est l'image de Q par une rotation que l'on précisera. Construire P.

   b) Montrer que A, P et M sont alignés $\Leftrightarrow \left(i\bar{a}+1\right)z+\left(ia-1\right)\bar{z}=i\left(a+\bar{a}\right)$.

   c) Montrer que $(AP)\perp(OM)\Leftrightarrow\left(i\,\bar{a}+1\right)z-\left(ia-1\right)\bar{z}=0$.

   d) Soit H le projeté orthogonal de O sur (AP). On désigne par Z_H l'affixe du point H.

   Justifier que $Z_H=\dfrac{i\left(a+\bar{a}\right)}{2\left(i\bar{a}+1\right)}$.

3) Soit N le point d'affixe $Z_N=\dfrac{\left(a+\bar{a}\right)}{\left(i\bar{a}+1\right)}$.

   a) Vérifier que N est l'image de H par une similitude que l'on déterminera.

   b) Construire le point N.

   c) Déterminer l'ensemble sur lequel varie le point N lorsque Q varie sur le cercle (Γ) privé des points B et C.

Exercice 3 : (4 points)

On considère la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n=2\times5^n+7$.

1) a) Justifier que pour tout entier naturel n, a_n est impair.

   b) Déterminer suivant les valeurs de n, le reste modulo 8 de 5^n.

   c) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n\equiv1\pmod 8$.

2) a) Montrer que si $\begin{cases}x\equiv1\pmod 8\\ x\equiv7\pmod{125}\end{cases}$ alors $x\equiv257\pmod{1000}$.

   b) Montrer que pour tout $n\geq3$, $a_n\equiv257\pmod{1000}$.

   c) Quels sont les trois derniers chiffres de $\left(2\times5^{2020}+7\right)\left(2\times5^{2021}+7\right)$?

3) a) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $5a_{2n}-a_{2n+1}=28$.

   b) Soit d le PGCD de a_{2n} et a_{2n+1}. Montrer que d est différent de 7.

   c) Trouver alors d.

Exercice 4 : (7 points)

I. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

On désigne par (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan P.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{-e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)\sqrt{1+e^{2x}}}$.

2) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

   b) Vérifier que pour tout réel x, $0<f(x)<1$.

3) a) Dresser le tableau de variation de f.

   b) Montrer que f réalise une bijection f^{-1}de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   c) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α telle que $0,5<\alpha<0,6$.

   d) Déterminer le signe de $f(x)-x$ pour tout réel x. Interpréter graphiquement le résultat.

4) Dans la figure 2 de l'annexe, on a construit la droite d'équation $y=x$ et on a placé le réel α sur l'axe des abscisses et le réel $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur l'axe des ordonnées.

   a) Tracer la courbe (ζ).

   b) Tracer la courbe (ζ') de f^{-1}.

5) a) Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=x-\ln(1+\sqrt{1+e^{2x}})$ est une primitive de f.

   b) On désigne par A l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (ζ), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\alpha$.

   Montrer que $A=\alpha+\ln\left(\dfrac{\alpha(1+\sqrt{2})}{\alpha+1}\right)$.

II. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on considère la fonction F_k définie sur $[0,+\infty[$, par $F_k(x)=\displaystyle\int_0^x (f(t))^k\,dt$.

1) a) Montrer que la fonction F_k est croissante sur $[0,+\infty[$,

   b) Montrer que pour tout réel $t\in[0,+\infty[$, $0\le (f(t))^k\le e^{-kt}$.

   c) En déduire que pour tout $x\in[0,+\infty[$, $0\le F_k(x)\le\dfrac{1}{k}$.

   d) Montrer alors que la fonction F_k possède une limite finie I_k quand x tend vers $+\infty$.

   e) Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} I_k=0$.

2) a) En utilisant la question I.5.a) montrer que $I_1=-h(0)$.

   b) Montrer que pour tout réel $t\in[0,+\infty[$, $(f(t))^3-f(t)=f'(t)$.

c) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $F_3(x) = F_1(x) + f(x) - f(0)$.

d) Montrer que $I_3 = \ln(1+\sqrt{2}) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$ et pour tout $k \geq 2$,

$$F_{2k+1}(x) - F_{2k-1}(x) = \frac{1}{2k-1}\left((f(x))^{2k-1} - (f(0))^{2k-1}\right).$$

b) En déduire que $I_{2k+1} - I_{2k-1} = \dfrac{-1}{(2k-1)(\sqrt{2})^{2k-1}}$, $k \geq 2$.

c) Montrer que $I_{2k+1} = I_3 - \displaystyle\sum_{m=2}^{k} \frac{1}{(2m-1)(\sqrt{2})^{2m-1}}$, $k \geq 2$.

d) En déduire $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \sum_{m=2}^{k} \frac{1}{(2m-1)(\sqrt{2})^{2m-1}}$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques
Session principale (2020)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

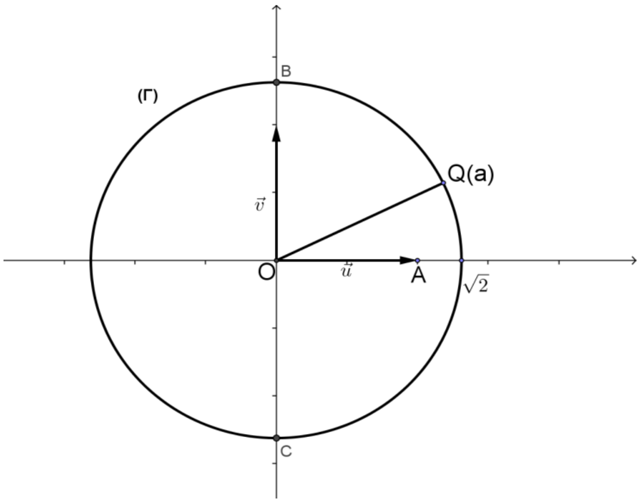
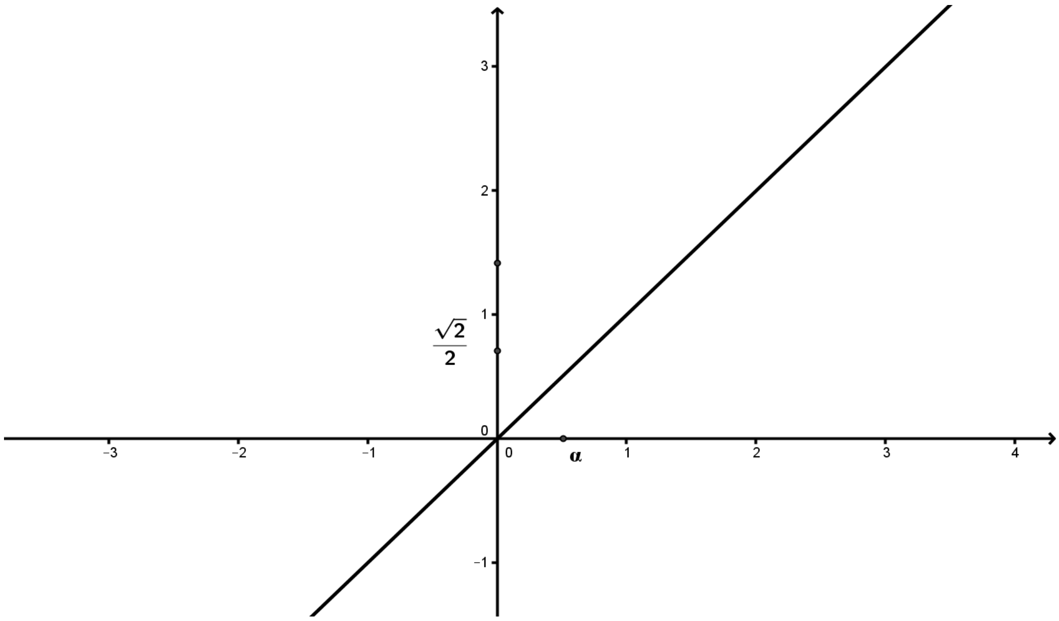


Figure 2



Un corrigé de l'épreuve de Mathématiques
Session principale 2020

Par Mohamed ATOUANI

Exercice 1.

1. (a) On a

$$\begin{aligned} r_2 \circ S_L \circ r_1(A) &= r_2(S_L(r_1(A))) \\ &= r_2(S_L(C)) \\ &= r_2(B) \\ &= A. \end{aligned}$$

L'application $r_2 \circ S_L \circ r_1$ est la composée de trois rotations (une symétrie centrale est une rotation d'angle π) qui fixe le point A, il s'agit ainsi de la rotation de centre A et d'angle $\pi/2 + \pi + \pi/2 = 2\pi$. Ainsi, $r_2 \circ S_L \circ r_1$ est l'identité du plan.

(b) Pour montrer que le triangle EFG est rectangle, isocèle en E, il suffit de montrer que $r_2(F) = G$. Or d'après la question précédente, $r_2 \circ S_L \circ r_1 = \mathrm{Id}$, cela implique que $r_2 = r_1^{-1} \circ S_L$. On obtient ainsi

$$r_2(F) = r_1^{-1}(S_L(F)) = r_1^{-1}(G) = G.$$

D'où le résultat.

(c) Le théorème des milieux appliqué au triangle ELG implique que $\mathrm{IK} = \frac{1}{2}\mathrm{LG} = \mathrm{LJ}$. De même, il implique que $\mathrm{KJ} = \frac{1}{2}\mathrm{EL} = \mathrm{IL}$. On en déduit que le quadrilatère KILJ est un parallélogramme. Pour montrer qu'il s'agit d'un carré, il suffit de montrer qu'il a un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur. En effet, le triangle EFG est isocèle en E donc sa médiane et sa médiatrice sont confondues. Il en résulte que (EL) est perpendiculaire à (FG), d'où l'angle droit. Par ailleurs, EFG est rectangle en E, ce qui implique que L est le centre de son cercle circonscrit. Ainsi, $\mathrm{EL} = \mathrm{LG}$ et du coup

$$\mathrm{IL} = \frac{1}{2}\mathrm{EL} = \frac{1}{2}\mathrm{LG} = \mathrm{LJ}.$$

2. (a) Par un point du plan, il passe une unique parallèle à une droite donnée. Ainsi, pour montrer que $\Delta = (\mathrm{IH})$, il suffit de montrer que (IH) est parallèle à (LK). En effet, $\widehat{\mathrm{ILK}} = \pi/4$ et $\widehat{\mathrm{LIH}} = \pi/4$ car LIH est rectangle, isocèle en L. On en déduit donc que les angles $\widehat{\mathrm{ILK}}$ et $\widehat{\mathrm{LIH}}$ sont alternes-internes et égaux. Le résultat en découle.

(b) On a

$$g(J) = \varphi(S_{(\mathrm{LE})}(J)) = \varphi(H) = I,$$

car $\Delta = (IH)$ et $\overrightarrow{\mathrm{HI}} = \overrightarrow{\mathrm{LK}}$ puisque le quadrilatère LKIH est un parallélogramme. Par ailleurs,

$$g(L) = \varphi(S_{(\mathrm{LE})}(L)) = \varphi(L) = E.$$

La dernière égalité est vraie car la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{LK}}$ envoie L sur K et (IH) est la médiatrice de [EK]. En effet, le théorème des milieux appliqué au triangle LEF implique que (IH) est parallèle à (EF) qui est perpendiculaire à (EK). De plus, I est équidistant à E et K, le résultat tombe ainsi comme une pomme mure.

(c) L'application g est la composée de deux antidéplacements donc est un déplacement. Par ailleurs,
$$g(K) = \varphi(S_{(\mathrm{LE})}(K)) = \varphi(K') = K,$$
où K' désigne le symétrique de K par $S_{(\mathrm{LE})}$. Par le théorème des milieux K' est le milieu de [EF] et $\overrightarrow{\mathrm{K'E}} = \overrightarrow{\mathrm{HI}} = \overrightarrow{\mathrm{LK}}$. Ainsi l'image de K' par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{LK}}$ vaut E, qui a K pour image par la symétrie d'axe Δ. On en déduit que g est la rotation de centre K et d'angle $(\overrightarrow{\mathrm{KJ}}, \overrightarrow{\mathrm{KI}}) \equiv -\pi/2 \pmod{2\pi}$)

3. (a) L'application f est un antidéplacement, donc il s'agit d'une symétrie orthogonale ou d'une symétrie glissante. L'image de J par f vaut I donc si f est une symétrie orthogonale, elle serait d'axe (LK) car cette dernière droite est la médiatrice de [JI], ainsi elle fixe en particulier le point L, ce qui n'est pas le cas. L'application f est donc une symétrie glissante.

   (b) L'image de J par f vaut I donc le milieu N de [IJ] appartient à l'axe de f. De même l'image de L vaut E donc I appartient à l'axe de f. On en déduit qu'il s'agit de la symétrie glissante d'axe (JI) et de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{JI}}$.

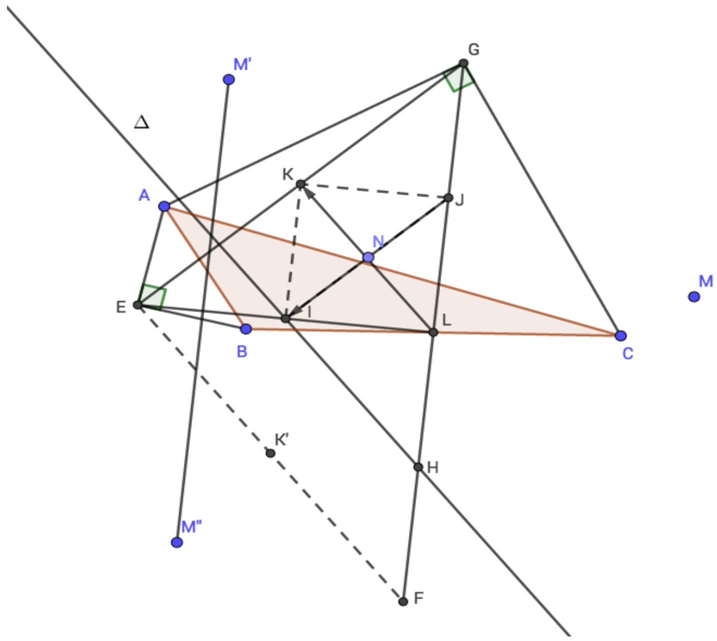
4. M" est le symétrique de M' par rapport à (EI). Pour le prouver, il suffit de montrer que (EI) est la médiatrice de [M'M"] ou encore que les points E et I sont équidistants à M' et M". En effet,

   - $g(J) = I$ et $g(M) = M''$ donc JM = IM".
   - $f(J) = I$ et $f(M) = M'$ donc JM = IM'.

   D'où IM' = IM". De même,

   - $g(L) = E$ et $g(M) = M''$ donc LM = EM".
   - $f(L) = E$ et $f(M) = M'$ donc LM = EM'.

   Le résultat en découle.



2

Exercice 2.

1. (a) Un nombre complexe $z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z$. Or

$$\overline{a+\overline{a}} = \overline{a} + \overline{\overline{a}} = \overline{a} + a = a + \overline{a}.$$

D'où l'appartenance de R à $\left(O, \overrightarrow{u}\right)$. Pour construire R, il suffit de remarquer que $a + \overline{a} = 2\mathscr{R}(a)$, où $\mathscr{R}$ désigne la partie réelle d'un nombre complexe. Voir figure pour la construction.

   (b) O, R et Q sont alignés si et seulement si Q $\in$ (OR). Cette dernière condition est équivalente à $a \in \mathbb{R}$ car (OR) est l'axe des abscisses. Or le point Q appartient à Γ, donc $a = \sqrt{2}$ ou $a = -\sqrt{2}$.

2. (a) On a

$$z_P = ia = e^{i\frac{\pi}{2}}a.$$

Cela implique en particulier que $|z_P| = |a|$ et $\arg(z_P) \equiv \pi/2 + \arg(a) \pmod{2\pi}$. Ainsi, le point P est l'image du point Q par la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$. Voir figure pour la construction.

   (b) Les points A, P et M sont alignés si et seulement si $\dfrac{z - z_P}{z - z_A} \in \mathbb{R}$. Or

$$\begin{aligned}
\frac{z - z_P}{z - z_A} \in \mathbb{R} &\iff \frac{z - z_P}{z - z_A} = \overline{\left(\frac{z - z_P}{z - z_A}\right)} \\
&\iff \frac{z - ia}{z - 1} = \frac{\overline{z} + i\overline{a}}{\overline{z} - 1} \\
&\iff (z - ia)(\overline{z} - 1) = (z - 1)(\overline{z} + i\overline{a}) && \text{et} \quad z \neq 1 \\
&\iff z\overline{z} - z - ia\overline{z} + ia = z\overline{z} + i\overline{a}z - \overline{z} - i\overline{a} && \text{et} \quad z \neq 1 \\
&\iff i\overline{a}z + z - \overline{z} + ia\overline{z} = ia + i\overline{a} && \text{et} \quad z \neq 1 \\
&\iff (i\overline{a} + 1)z + (ia - 1)\overline{z} = i(a + \overline{a}) && \text{et} \quad z \neq 1
\end{aligned}$$

Pour $z = 1$, auquel cas M et A sont confondus, la dernière égalité reste vraie car

$$(i\overline{a} + 1) \times 1 + (ia - 1) \times \overline{1} = i(a + \overline{a}).$$

On peut maintenant (et seulement maintenant) conclure que A, P et M sont alignés si et seulement si $(i\overline{a} + 1)z + (ia - 1)\overline{z} = i(a + \overline{a})$.

   (c) Pour $z \neq 0$, la droite (AP) est perpendiculaire à (OM) si et seulement si $\dfrac{z_P - z_A}{z} \in i\mathbb{R}$. Or

$$\begin{aligned}
\frac{z_P - z_A}{z} \in i\mathbb{R} &\iff \frac{z_P - z_A}{z} = -\overline{\left(\frac{z_P - z_A}{z}\right)} \\
&\iff \frac{ia - 1}{z} = -\frac{-i\overline{a} - 1}{\overline{z}} \\
&\iff (ia - 1)\overline{z} = (i\overline{a} + 1)z \\
&\iff (i\overline{a} + 1)z - (ia - 1)\overline{z} = 0.
\end{aligned}$$

Le résultat en découle.

(d) Le point H est le projeté orthogonal de O sur (AP). Ainsi, A, P et H sont alignés et (AP) $\perp$ (OH). D'après ce qui précède Z_H vérifie le système d'équation

$$\begin{cases}(i\overline{a}+1)Z_H+(ia-1)\overline{Z_H}=i(a+\overline{a})\\(i\overline{a}+1)Z_H-(ia-1)\overline{Z_H}=0\end{cases}$$

En prenant la somme des deux équations on obtient

$$2(i\overline{a}+1)Z_H=i(a+\overline{a}).$$

D'où le résultat.

3. (a) On a

$$\begin{aligned}Z_N&=\frac{(a+\overline{a})}{(i\overline{a}+1)}\\&=\frac{2}{i}\times\frac{i}{2}\frac{(a+\overline{a})}{(i\overline{a}+1)}\\&=\frac{2}{i}\times Z_H\\&=-2iZ_H\\&=2e^{-i\frac{\pi}{2}}Z_H.\end{aligned}$$

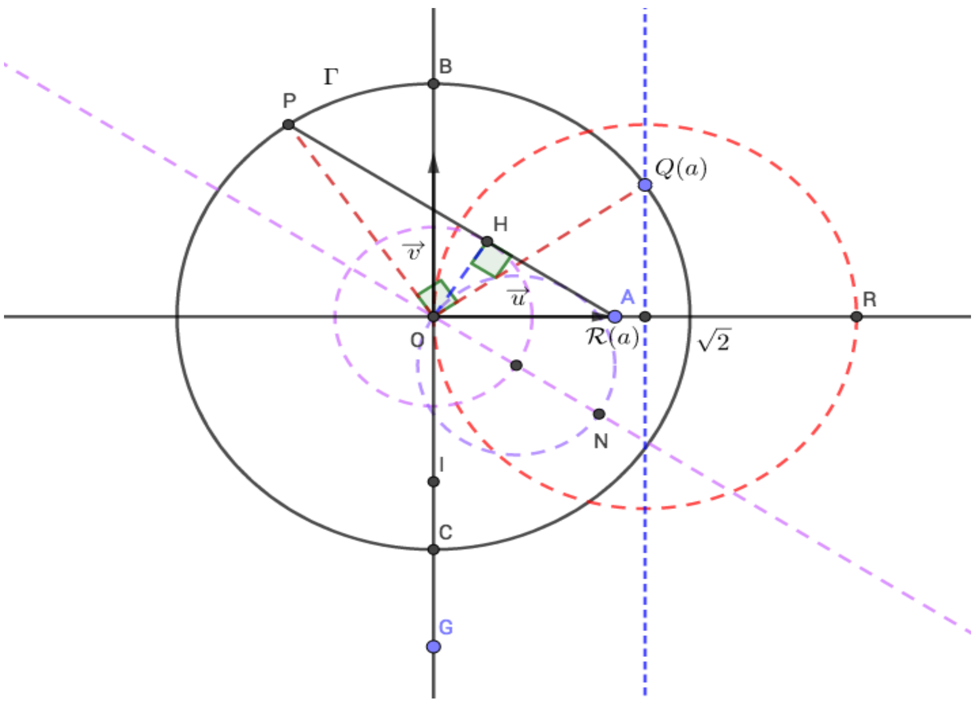
Ainsi, N est l'image de H par la similitude de centre O, de rapport 2 et d'angle de mesure $-\pi/2$.

(b) Voir figure pour la construction.

(c) Le triangle OHA est rectangle en H, O et A ne dépendent pas de Q, ainsi lorsque Q décrit le cercle Γ privé de B et C, le point H décrit le cercle de diamètre [OA] privé de O. Puisque N est l'image de H par la similitude de centre O, de rapport 2 et d'angle $-\pi/2$, il s'ensuit que N décrit le cercle de diamètre [OG] privé de O, où G est le point d'affixe $z_G=-2i$. Le centre de ce cercle est le point d'affixe $z_I=-i$.
Afin de démontrer ce résultat algébriquement, il suffit d'évaluer $|Z_N-z_I|$. En effet, nous avons

$$\begin{aligned}|Z_N-z_I|&=\left|\frac{a+\overline{a}}{i\overline{a}+1}+i\right|\\&=\left|\frac{a+i}{i\overline{a}+1}\right|\\&=\left|\frac{i(-ia+1)}{i\overline{a}+1}\right|\\&=\left|\frac{i\overline{(i\overline{a}+1)}}{i\overline{a}+1}\right|=1,\end{aligned}$$

car $|i|=1$ et pour tout $z\neq 0$, $\left|\frac{\overline{z}}{z}\right|=1$.



Exercice 3.

1. (a) Pour tout entier naturel n, $a_n = 2 \times 5^n + 7$. Il s'agit de la somme d'un nombre pair, à savoir 2×5^n et de 7 qui est impair. Le résultat est donc impair.

   (b) Si n est pair alors il s'écrit sous la forme $n = 2k$, où k désigne un entier naturel. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} 5^n &\equiv 5^{2k} \pmod 8 \\ &\equiv (5^2)^k \pmod 8 \\ &\equiv 25^k \pmod 8 \\ &\equiv 1^k \pmod 8 \\ &\equiv 1 \pmod 8. \end{aligned}$$

   Quand n est impair, il s'écrit sous la forme $n = 2k + 1$, auquel cas nous avons

$$\begin{aligned} 5^n &\equiv 5^{2k+1} \pmod 8 \\ &\equiv 5^{2k} \times 5 \pmod 8 \\ &\equiv 1 \times 5 \pmod 8 \\ &\equiv 5 \pmod 8. \end{aligned}$$

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si n est pair alors

$$\begin{aligned} a_n &\equiv 2 \times 5^n + 7 \pmod 8 \\ &\equiv 2 \times 1 + 7 \pmod 8 \\ &\equiv 9 \pmod 8 \\ &\equiv 1 \pmod 8. \end{aligned}$$

Si n est impair, on a

$$\begin{aligned}a_n &\equiv 2\times 5^n+7 \pmod 8\\ &\equiv 2\times 5+7 \pmod 8\\ &\equiv 1 \pmod 8.\end{aligned}$$

2. (a) Soit x un entier. Si

$$\begin{cases} x\equiv 1 \pmod 8\\ x\equiv 7 \pmod{125}\end{cases}$$

alors il existe un entier k tel que $x=1+8k$ et un entier k' tel que $x=7+125k'$. Cela implique en particulier que $1+8k=7+125k'$, ou encore que $8k-125k'=6$. Autrement dit, le couple (k,k') est solution de l'équation diophantienne

$$8z-125y=6.$$

Cette équation admet bien une solution car 8 et 125 sont premiers entre eux. Afin de la résoudre, il suffit de trouver une solution particulière de celle-ci en appliquant l'algorithme d'Euclide étendu. En effet,

$$\begin{aligned}125&=8\times 15+5\\ 8&=5\times 1+3\\ 5&=3\times 1+2\\ 3&=2\times 1+1.\end{aligned}$$

En remontant ces calculs, on obtient

$$\begin{aligned}1&=3-2\times 1\\ &=3-(5-3\times 1)\times 1\\ &=3\times 2-5\\ &=(8-5\times 1)\times 2-5\\ &=8\times 2-5\times 3\\ &=8\times 2-(125-8\times 15)\times 3\\ &=8\times 47-125\times 3.\end{aligned}$$

Ainsi $1=8\times 47-125\times 3$, donc en multipliant les deux membres de l'égalité par 6 on obtient

$$6=8\times 282-125\times 18.$$

Du coup, $(282,18)$ est une solution particulière de l'équation $8z-125y=6$. Le système

$$\begin{cases}8z-125y=6\\ 8\times 282-125\times 18=6\end{cases}$$

implique que $8(z-282)-125(y-18)=0$, ou encore que $8(z-282)=125(y-18)$. Cette relation est vraie dans $\mathbb{Z}$ donc 125 divise $8(z-282)$. Or 8 et 125 sont premiers entre eux, ainsi le lemme de Gauss permet d'affirmer que 125 divise

$z - 282$. Il existe alors un entier t tel que $z - 282 = 125t$, ou encore $z = 125t + 282$. Cela signifie en particulier que $k = 125t + 282$, ce qui implique que

$$\begin{aligned} x &= 1 + 8k \\ &= 1 + 8(125t + 282) \\ &= 1 + 2256 + 1000t \\ &= 257 + 1000(t + 2). \end{aligned}$$

Le résultat tombe alors comme la pomme de Newton.
Remarque : Sous les bonnes conditions, cette méthode s'applique aussi à un système de 3 équations en réduisant les deux premières à une seule équation, qui combinée avec la dernière donne un système de deux équations. Elle se généralise bien évidemment récursivement et de façon naturelle à un système comportant plus de 3 équations. Toutefois, elle n'est pas très efficace et il existe un fameux algorithme bien plus rapide, connu sous le nom du *théorème des restes chinois*.

(b) D'après la question 1)c, pour tout $n \geq 3, a_n \equiv 1 \pmod 8$. Par ailleurs, si $n \geq 3$ on peut écrire $n = 3 + u$, où u désigne un entier naturel. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} a_n &\equiv 2 \times 5^n + 7 \pmod{125} \\ &\equiv 2 \times 5^{3+u} + 7 \pmod{125} \\ &\equiv 2 \times 5^3 \times 5^u + 7 \pmod{125} \\ &\equiv 2 \times 125 \times 5^u + 7 \pmod{125} \\ &\equiv 7 \pmod{125}. \end{aligned}$$

La question précédente permet alors de conclure.

(c) On a

$$\begin{aligned} \left(2 \times 5^{2020} + 7\right)\left(2 \times 5^{2021} + 7\right) &= a_{2020} \times a_{2021} \\ &\equiv 257 \times 257 \pmod{1000} \\ &\equiv 66049 \pmod{1000} \\ &\equiv 049 \pmod{1000}. \end{aligned}$$

Les trois derniers chiffres de $\left(2 \times 5^{2020} + 7\right)\left(2 \times 5^{2021} + 7\right)$ sont donc 0, 4 et 9.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 5a_{2n} - a_{2n+1} &= 5 \times (2 \times 5^{2n} + 7) - (2 \times 5^{2n+1} + 7) \\ &= 2 \times 5^{2n+1} + 35 - 2 \times 5^{2n+1} - 7 \\ &= 28. \end{aligned}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 ne divise pas a_n car sinon 7 diviserait $a_n - 7 = 2 \times 5^n$. Ceci est impossible par le théorème fondamental de l'arithmétique (unicité de la décomposition d'un entier en facteurs premiers).

(c) Le nombre d divise a_{2n} et a_{2n+1} donc divise $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$. Les diviseurs de 28 sont 1, 2, 4, 7, 14 et 28. D'après ce qui précède, $d \neq 7$ et ne peut pas être un nombre pair car a_n est impair pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $d = 1$.

Exercice 4.

Partie I

1. La fonction f est dérivable sur son domaine de définition car composée de fonctions qui le sont. Plus précisément, $\forall x \in \mathbb{R}, 1+e^{2x} \neq 0$, ce qui signifie que la fonction $x \mapsto \sqrt{1+e^{2x}}$ n'a de problème de dérivabilité. Par ailleurs, la dérivée de $1/\sqrt{u}$, où u désigne une fonction strictement positive vaut $-u'/2u\sqrt{u}$. Dans notre cas, u est la fonction $x \mapsto 1+e^{2x}$ de dérivée égale à la fonction $x \mapsto 2e^{2x}$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2e^{2x}}{2(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}}} \\ &= \frac{-e^{2x}}{(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}}}. \end{aligned}$$

2. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$. Ainsi l'axe des abscisses est une asymptote de C_f au voisinage de $+\infty$ et la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote de C_f au voisinage de $-\infty$.

   (b) L'inégalité $f(x) > 0$ est immédiate. Pour l'inégalité de droite, nous savons que pour tout $x \in \mathbb{R}, e^{2x} > 0$. Cela implique que $1+e^{2x} > 1$, donc par croissance de la fonction racine carrée $\sqrt{1+e^{2x}} > 1$. La stricte décroissance de la fonction inverse $(y \mapsto 1/y)$ sur $\mathbb{R}_+$ implique l'inégalité désirée.

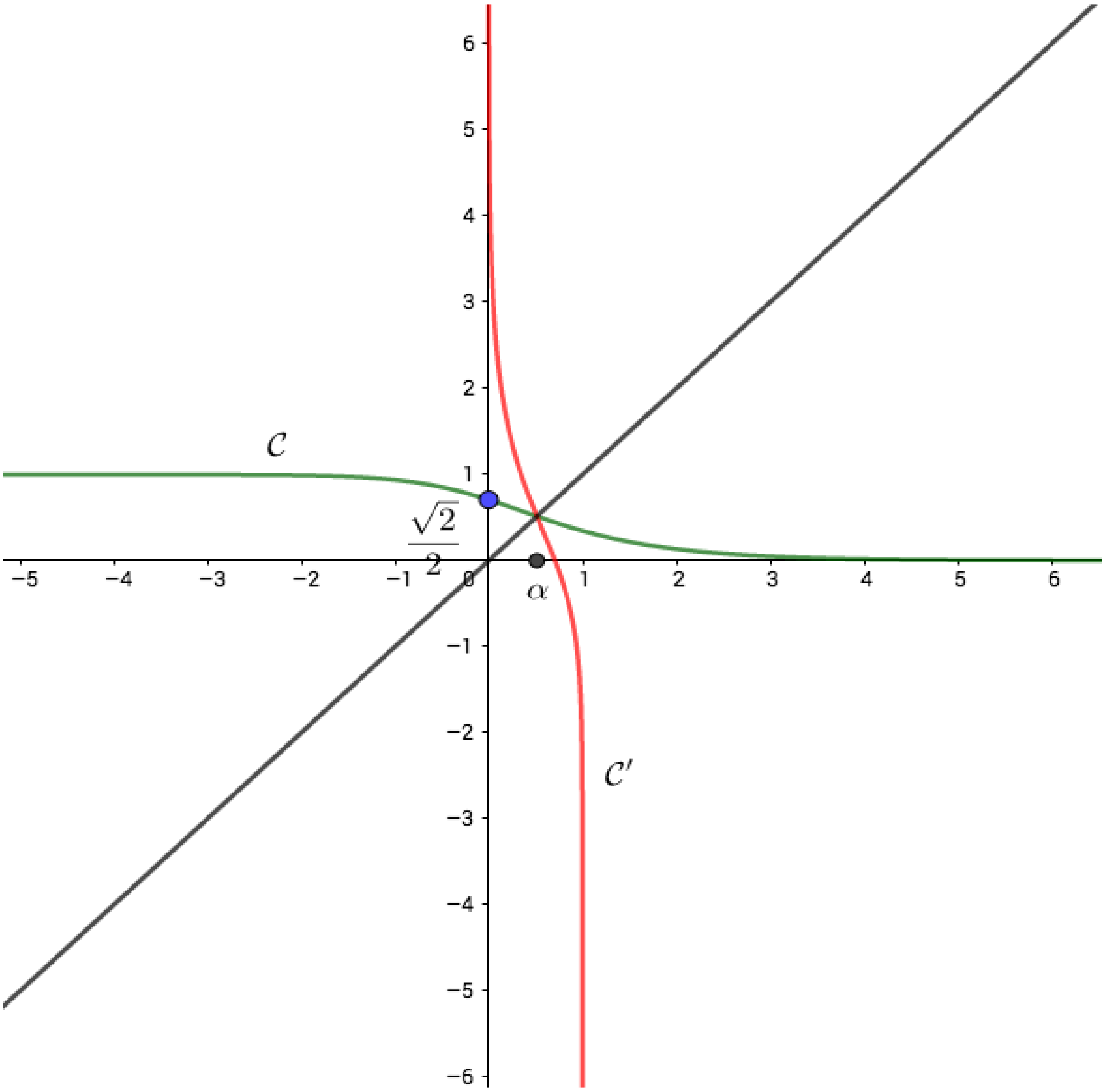
3. (a) La fonction f' est strictement négative sur $\mathbb{R}$, ainsi la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. On obtient ainsi la tableau de variations

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1 ↘	0

   (b) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{R}) =]0;1[$. Ainsi, elle établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;1[$.

   (c) La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc ne peut croiser la première bissectrice du repère (la droite d'équation $y = x$) qu'une seule fois. Plus rigoureusement, soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = f(x) - x$. Cette fonction est continue et strictement décroissante, étant somme de fonctions qui le sont. Par ailleurs (après calcul), $\phi(0.5) > 0$ et $\phi(0.6) < 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α tel que $0.5 < \alpha < 0.6$ et $\phi(\alpha) = 0$. Le résultat en découle trivialement.

   (d) La fonction ϕ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, ainsi elle est positive sur $]-\infty;\alpha]$ et strictement négative sur $]\alpha;+\infty[$. On en déduit que la courbe de f est au dessus de la droite d'équation $y = x$ sur $]-\infty;\alpha]$ et en dessous de celle-ci sinon.

4. 

5. (a) La fonction h est dérivable sur son domaine de définition et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
h'(x) &= 1 - \frac{\frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}}{1+\sqrt{1+e^{2x}}} \\
&= \frac{1+\sqrt{1+e^{2x}} - \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}}{1+\sqrt{1+e^{2x}}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{1+e^{2x}})\sqrt{1+e^{2x}} - e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}(1+\sqrt{1+e^{2x}})} \\
&= \frac{\sqrt{1+e^{2x}} + 1 + e^{2x} - e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}(1+\sqrt{1+e^{2x}})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Ainsi la fonction h est une primitive de f.

(b) L'aire A est donnée par l'intégrale

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x \\ &= [h(x)]_0^{\alpha} \\ &= h(\alpha) - h(0) \\ &= \alpha - \ln(1+\sqrt{1+e^{2\alpha}}) + \ln(1+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Or on sait que $f(\alpha) = \alpha$, autrement dit $\sqrt{1+e^{2\alpha}} = 1/\alpha$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} A &= \alpha - \ln(1+1/\alpha) + \ln(1+\sqrt{2}) \\ &= \alpha + \ln((\alpha+1)/\alpha) + \ln(1+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Le résultat en découle.

Partie II

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction F_k est croissante sur $[0, +\infty[$ par croissance de l'intégrale et positivité de la fonction $t \mapsto (f(t))^k$.

(b) L'inégalité de gauche est triviale par positivité de la fonction f. Pour montrer celle de droite, il suffit de montrer que pour tout $t \geq 0$, $f(t) \leq e^{-t}$. L'inégalité

$$1 + e^{2t} \geq e^{2t}$$

implique par croissance de la fonction racine carrée que $\sqrt{1+e^{2t}} \geq \sqrt{e^{2t}} = e^t$. La décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+$ implique de son côté que

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}} \leq \frac{1}{e^t} = e^{-t}.$$

L'inégalité souhaitée en découle.

(c) De même ici, l'inégalité de gauche est triviale. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité $(f(t))^k \leq e^{-kt}$ implique par passage aux intégrales que

$$\begin{aligned} F_k(x) &= \int_0^x (f(t))^k dt \\ &\leq \int_0^x e^{-kt} dt \\ &\leq \left[-\frac{1}{k}e^{-kt}\right]_0^x \\ &\leq \frac{1}{k}(e^{-kx} - 1) \\ &\leq \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

La dernière inégalité découle du fait que $e^{-kx} - 1 \leq 1$, qui est équivalente à $e^{-kx} \leq 2$. En réalité on montre facilement l'inégalité plus fine $e^{-kx} \leq 1$. En effet, en composant l'inégalité $-kx \leq 0$ par la fonction exponentielle, on obtient bien ce qu'il faut.

(d) La fonction F_k est croissante et majorée donc admet une limite finie au voisinage de $+\infty$.

(e) Les inégalités de la question c) impliquent par passage à la limite que

$$0 \leq I_k \leq \frac{1}{k}.$$

Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim_{k\to+\infty} I_k = 0$.

2. (a) On a

$$F_1(x) = \int_0^x f(t)dt = h(x) - h(0).$$

Pour montrer que $I_1 = -h(0)$, il suffit alors de montrer que $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$. Nous avons en effet pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} h(x) &= x - \ln(1+\sqrt{1+e^{2x}}) \\ &= \ln(e^x) - \ln(1+\sqrt{1+e^{2x}}) \\ &= \ln\left(\frac{e^x}{1+\sqrt{1+e^{2x}}}\right). \end{aligned}$$

Notre résultat revient ainsi à démontrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+\sqrt{1+e^{2x}}} = 1.$$

Ce résultat est relativement simple à démontrer car nous avons pour tout $x > 0$

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{1+\sqrt{1+e^{2x}}} &= \frac{e^x}{e^x\left(e^{-x}+\sqrt{\frac{1+e^{2x}}{e^{2x}}}\right)} \\ &= \frac{1}{e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}}}. \end{aligned}$$

Le résultat en découle car $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$.

(b) Pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} (f(t))^3 - f(t) &= \frac{1}{(1+e^{2x})(\sqrt{1+e^{2x}})} - \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} \\ &= \frac{1-(1+e^{2x})}{(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}}} \\ &= \frac{-e^{2x}}{(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}}} \\ &= f'(t). \end{aligned}$$

(d) La fonction F_k est croissante et majorée donc admet une limite finie au voisinage de $+\infty$.

(e) Les inégalités de la question c) impliquent par passage à la limite que

$$0 \leq I_k \leq \frac{1}{k}.$$

Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim\limits_{k \to +\infty} I_k = 0$.

2. (a) On a

$$F_1(x) = \int_0^x f(t)dt = h(x) - h(0).$$

Pour montrer que $I_1 = -h(0)$, il suffit alors de montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$. Nous avons en effet pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} h(x) &= x - \ln(1 + \sqrt{1 + e^{2x}}) \\ &= \ln(e^x) - \ln(1 + \sqrt{1 + e^{2x}}) \\ &= \ln\left(\frac{e^x}{1 + \sqrt{1 + e^{2x}}}\right). \end{aligned}$$

Notre résultat revient ainsi à démontrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1 + \sqrt{1 + e^{2x}}} = 1.$$

Ce résultat est relativement simple à démontrer car nous avons pour tout $x > 0$

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{1 + \sqrt{1 + e^{2x}}} &= \frac{e^x}{e^x\left(e^{-x} + \sqrt{\frac{1+e^{2x}}{e^{2x}}}\right)} \\ &= \frac{1}{e^{-x} + \sqrt{1 + e^{-2x}}}. \end{aligned}$$

Le résultat en découle car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$.

(b) Pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} (f(t))^3 - f(t) &= \frac{1}{(1 + e^{2x})(\sqrt{1 + e^{2x}})} - \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2x}}} \\ &= \frac{1 - (1 + e^{2x})}{(1 + e^{2x})\sqrt{1 + e^{2x}}} \\ &= \frac{-e^{2x}}{(1 + e^{2x})\sqrt{1 + e^{2x}}} \\ &= f'(t). \end{aligned}$$

(c) D'après la question précédente et par télescopage on a

$$\begin{aligned} I_{2k+1} - I_3 &= \sum_{m=2}^{k} I_{2m+1} - I_{2m-1} \\ &= -\sum_{m=2}^{k} \frac{1}{(2m-1)(\sqrt{2})^{2m-1}}. \end{aligned}$$

Le résultat en découle.

(d) D'après la question 1)a, $\lim_{k\to+\infty} I_{2k+1} = 0$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} \sum_{m=2}^{k} \frac{1}{(2m-1)(\sqrt{2})^{2m-1}} &= I_3 \\ &= \ln(1+\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2020	**Session de contrôle**	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.
La page 5/5 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (5 points)

Le plan est orienté.

Dans la **figure** de l'annexe jointe, ABC est un triangle équilatéral direct de centre O.

I, J et K sont les milieux respectifs des cotés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

Soit S la similitude directe de centre B et telle que S(J)=C.

1) Déterminer l'angle de S et montrer que son rapport est égal à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2) Soit (Γ) le cercle de diamètre $[AB]$ et (Γ') le cercle circonscrit au triangle ABC.
   a) Montrer que S (K) = O.
   b) En déduire que $S(\Gamma)=\Gamma'$.
   c) Déterminer et construire le point $A'=S(A)$.

3) La droite (OC) recoupe (Γ') en P et la droite (BP) recoupe (Γ) en Q.

On note S^{-1} l'application réciproque de S.

   a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de S^{-1}.
   b) Montrer que $S^{-1}(A)=Q$.
   c) Quelle est la nature du triangle BJQ ?
   d) Prouver que K est le milieu du segment $[QI]$.

4) Soit $\sigma=S\circ S_{(AB)}$ où $S_{(AB)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (AB).
   a) Justifier que σ est une similitude indirecte et déterminer ses éléments caractéristiques.
   b) Déterminer $\sigma(Q)$ et $\sigma(J)$.
   c) La droite (IJ) coupe la droite (QB) en un point M.
   Déterminer et construire le point $M'=\sigma(M)$.

Exercice 2 : (4 points)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et r le reste modulo 7 de k.

1) Montrer chacun des résultats suivants :
   $k^3 \equiv 1 \ (\text{mod } 7)$, si et seulement si, $r \in \{1, 2, 4\}$.
   $k^3 \equiv 6 \ (\text{mod } 7)$, si et seulement si, $r \in \{3, 5, 6\}$.
   $k^3 \equiv 0 \ (\text{mod } 7)$, si et seulement si, $r = 0$.

2) Soit $(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Déterminer les restes possibles modulo 7 de $x^3 + y^3$.

3) Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $E_a = \left\{ \ (x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ x^3 + y^3 = a \ \right\}$.

Montrer que les équations $x^3 + y^3 \equiv 3 (\text{mod } 7)$ et $x^3 + y^3 \equiv 4 (\text{mod } 7)$ n'admettent

pas de solutions dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

4) On considère l'ensemble E_{9990}. Supposons qu'il existe $(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $(x,y) \in E_{9990}$.
   a) Montrer alors que $x \equiv 0 \ (\text{mod } 7)$ ou $y \equiv 0 \ (\text{mod } 7)$.
   b) Déterminer E_{9990}.

Exercice 3 : (5 points)

On dispose d'une urne U_1 contenant deux boules noires et deux boules blanches et d'une urne U_2 contenant une boule noire et trois boules blanches. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On procède à l'expérience aléatoire suivante :

On tire au hasard une boule de U_1.

- Si elle est blanche, on la remet dans U_1 et on tire simultanément deux boules de U_2,

- Si elle est noire, on la met dans U_2 et on tire simultanément deux boules de U_2.

On considère les évènements suivants :

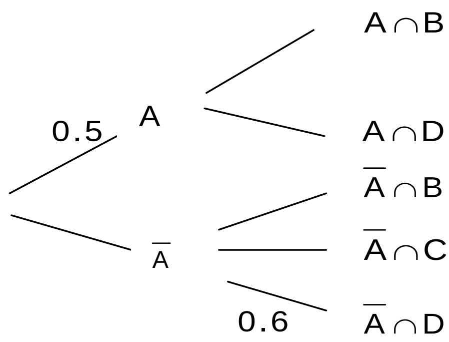
A « La boule tirée de U_1 est blanche. »

B « On tire deux boules blanches de l'urne U_2. »

C « On tire deux boules noires de l'urne U_2. »

D « On tire deux boules de couleurs différentes de l'urne U_2. ».

1) a) Recopier et compléter l'arbre de choix suivant :



b) Déterminer $p(B)$ et $p(D)$.

c) Montrer que la probabilité qu'il ne reste aucune boule noire dans U_2 est égale à $\frac{3}{10}$.

2) Soit X la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de boules noires restantes dans U_2.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Quelle est la probabilité qu'il reste au moins une boule noire dans U_2 ?

3) On répète n fois de suite (n>1) et de manière indépendante l'expérience aléatoire précédente. On désigne par F_n l'évènement : « Il ne reste dans U_2 aucune boule noire pour les (n-1) premières épreuves et il reste au moins une boule noire à la $n^{ème}$ épreuve ».

Quelle est la probabilité p_n de F_n ?

Exercice 4 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \frac{x\ln(1+x)}{1+x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A)

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$.

b) Montrer que $f'(x) = \frac{x+\ln(1+x)}{(1+x)^2}$, x > -1.

c) Montrer que $x+\ln(1+x) > 0$, si et seulement si, $x > 0$.

d) En déduire le tableau de variation de f.

e) Tracer (C).

B) Soit G la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $G(x)=\int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt$.

Pour tout entier $n\geq 1$, on pose $V_n = \int_1^{\frac{n+1}{n}} f(t^n)\,dt$ et on considère la fonction F_n définie sur $[1, +\infty[$

par $F_n(x)=\int_1^{x^n} \frac{f(t)}{t}\sqrt[n]{t}\,dt$.

1) Montrer que $G(x)=\frac{1}{2}\ln^2(1+x)-\frac{1}{2}\ln^2(2)$, $x\geq 1$.

2) Montrer que pour tout $x\geq 1$, $G(x^n)\leq F_n(x)\leq xG(x^n)$.

3) Montrer que F_n est dérivable sur $[1, +\infty[$ et que $F'_n(x)=nf(x^n)$, $x\geq 1$.

4) En déduire que pour tout entier $n\geq 1$, $n\,V_n = F_n(\frac{n+1}{n})$.

5) a) Montrer que $G\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) \leq n\,V_n \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)G\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)$, $n\geq 1$.

b) Vérifier que $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nV_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

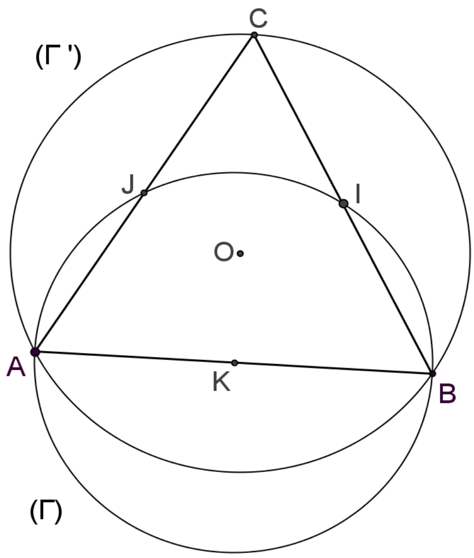
Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques
Session de contrôle (2020)
Annexe à rendre avec la copie

Figure



Page 5 sur 5

Lycée Rue Ahmed Amara Le Kef ◈ ◈ ◈ Habib Gammar	ELÉMENTS DE CORRECTION			
	Session de contrôle 2020	Mathématiques	4e M	4 Heures

Exercice 1

1) S la similitude directe de centre B telle que $S(J)=C$

- S est d'angle $(\widehat{\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{BC}})\equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$
- S est de rapport $\frac{BC}{BJ}=\frac{1}{\cos(C\hat{B}J)}=\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{6})}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

2) a) Le triangle BKO est rectangle en K

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ (\widehat{\overrightarrow{BK},\overrightarrow{BO}})\equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi] \\ \bullet\ \frac{BO}{BK}=\frac{1}{\cos(K\hat{B}O)}=\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{6})}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow S(K)=O$$

2) b) (Γ) est le cercle de centre K et passant par B alors $S(\Gamma)$ est le cercle de centre $S(K)=O$ et passant par $S(B)=B$.

Comme (Γ') est de centre O et passant par B alors $S(\Gamma)=\Gamma'$.

2) c) $S(\Gamma)=\Gamma'$, $S(B)=B$ et $S(A)=A'$

(Γ) est de diamètre $[AB]$ alors (Γ') est de diamètre $[A'B]$

Comme (Γ') est de centre O alors $O=B*A'$ donc $A'=S_O(B)$

3) a) S^{-1} est la réciproque d'une similitude directe S de centre B de rapport $\frac{2}{\sqrt{3}}$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$

alors S^{-1} est une similitude directe de centre B de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

3) b)
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ (\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BQ}})\equiv(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BP}})[2\pi]\equiv(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CP}})\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi] \\ \bullet\ \frac{BQ}{BA}=\cos(Q\hat{B}A)=\cos(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow S^{-1}(A)=Q$$

3) c) S^{-1} est une similitude et $\begin{cases}S^{-1}(A)=Q\\ S^{-1}(B)=B\\ S^{-1}(C)=J\end{cases}$ donc $S^{-1}(ABC)=QBJ$

Comme ABC est un triangle équilatéral alors BJQ est un triangle équilatéral.

3) d)
- ABC est un triangle équilatéral et $I=B*C$ alors $A\hat{I}B=\frac{\pi}{2}$
- $Q\in(\Gamma)$ le cercle de diamètre $[AB]$ alors $A\hat{Q}B=\frac{\pi}{2}$
- $I\hat{B}Q=I\hat{B}A+A\hat{B}Q=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$

alors $AIBQ$ est un rectangle et comme $K=A*B$ alors $K=A*Q$

4) a) ◆ $\sigma = S \circ S_{(AB)}$ alors σ est la composée d'une similitude directe S de rapport $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ et d'un antidéplacement (similitude indirecte de rapport 1) $S_{(AB)}$ alors σ est une similitude indirecte.

◆ • σ est de rapport $\frac{2\sqrt{3}}{3} \times 1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \neq 1$

• Comme $\sigma(B) = S \circ S_{(AB)}(B) = S(B) = B$ alors σ est de centre B.

• $\sigma(A) = S \circ S_{(AB)}(A) = S(A) = A'$ alors l'axe de σ porte la bissectrice intérieure de $A\hat{B}A'$

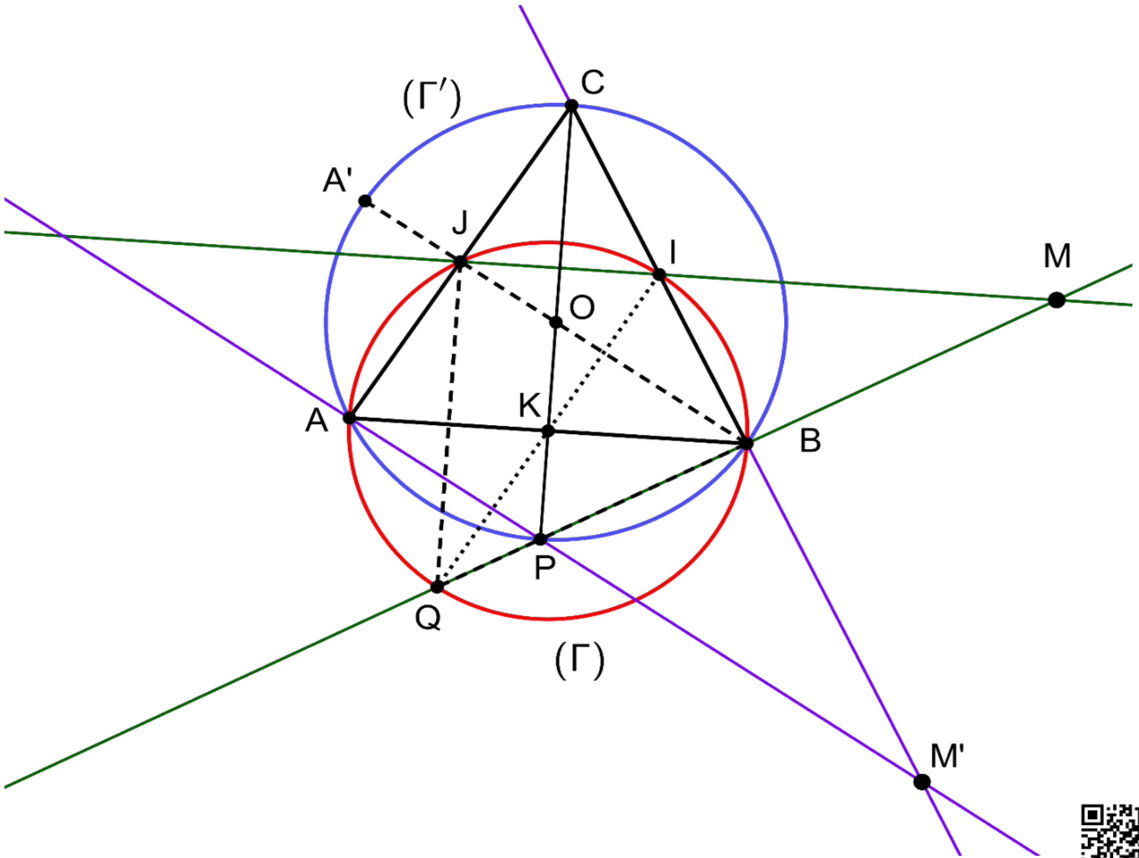
4) b) ◆ $\sigma(Q) = S \circ S_{(AB)}(Q) = S(J) = C$

◆ $\sigma(J) = S \circ S_{(AB)}(J) = S(Q) = A$

4) c) • $\begin{cases} K = Q * I \\ \sigma(K) = O \\ \sigma(Q) = C \\ \sigma(I) = I' \end{cases} \Rightarrow O = I' * C$ et comme $O = P * C \Rightarrow I' = P$

• $\{M\} = (IJ) \cap (BQ)$ alors $\{\sigma(M)\} = \sigma(IJ) \cap \sigma(BQ)$

• $\begin{cases} \sigma(B) = B \\ \sigma(Q) = C \\ \sigma(I) = P \\ \sigma(J) = A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma(IJ) = (PA) \\ \sigma(BQ) = (BC) \end{cases} \Rightarrow \{M'\} = (AP) \cap (BC)$



Exercice 2

$k \in \mathbb{N}^*$, r le reste modulo 7 de k. $[k \equiv r(\text{mod}\,7)]$

1) $k \equiv r(\text{mod}\,7)$ alors $k^3 \equiv r^3(\text{mod}\,7)$

reste modulo 7 de k	0	1	2	3	4	5	6
reste modulo 7 de k^3	0	1	1	6	1	6	6

alors
- $k^3 \equiv 1(\text{mod}\,7)$, si et seulement si, $r \in \{1,2,4\}$
- $k^3 \equiv 6(\text{mod}\,7)$, si et seulement si, $r \in \{3,5,6\}$
- $k^3 \equiv 0(\text{mod}\,7)$, si et seulement si, $r = 0$

2) $(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

reste modulo 7 de x^3 / reste modulo 7 de y^3	0	1	6
0	0	1	6
1	1	2	0
6	6	0	5
	reste modulo 7 de x^3+y^3		

alors les restes possibles modulo 7 de x^3+y^3 sont $\{0,1,2,5,6\}$

3) $a \in \mathbb{N}^*$ et $E_a = \{(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, x^3+y^3 = a\}$

Comme 3 et 4 ne sont pas des restes possibles modulo 7 de x^3+y^3

alors il n'existe aucun couple $(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $x^3+y^3 \equiv 3(\text{mod}\,7)$ et $x^3+y^3 \equiv 4(\text{mod}\,7)$

4) a) On a $a = 9990$ et $9990 \equiv 1(\text{mod}\,7)$ alors $x^3+y^3 \equiv 1(\text{mod}\,7)$

donc $\left(x^3 \equiv 0(\text{mod}\,7) \text{ et } y^3 \equiv 1(\text{mod}\,7)\right)$ ou $\left(y^3 \equiv 0(\text{mod}\,7) \text{ et } x^3 \equiv 1(\text{mod}\,7)\right)$

alors $x \equiv 0(\text{mod}\,7)$ ou $y \equiv 0(\text{mod}\,7)$

4) b) $(x,y) \in E_{9990}$ alors $x \equiv 0(\text{mod}\,7)$ ou $y \equiv 0(\text{mod}\,7)$

$x \equiv 0(\text{mod}\,7)$	7	14	21	28
$x^3 \equiv 0(\text{mod}\,7)$	343	2744	9261	21952

- $x^3+y^3 = 9990$ alors $x < 28$
  - Si $x = 7$; $(x^3 = 343)$ alors $y^3 = 9647$ donc y n'existe pas.
  - Si $x = 14$; $(x^3 = 2744)$ alors $y^3 = 7246$ donc y n'existe pas.
  - Si $x = 21$; $(x^3 = 9261)$ alors $y^3 = 729$ donc $y = 9$
- De même pour y au lieu de x.
- alors $E_{9990} = \{(9,21) , (21,9)\}$.

Exercice 3

$U_1 : [2N + 2B]$ et $U_2 : [1N + 3B]$

A : « La boule tirée de U_1 est blanche. »

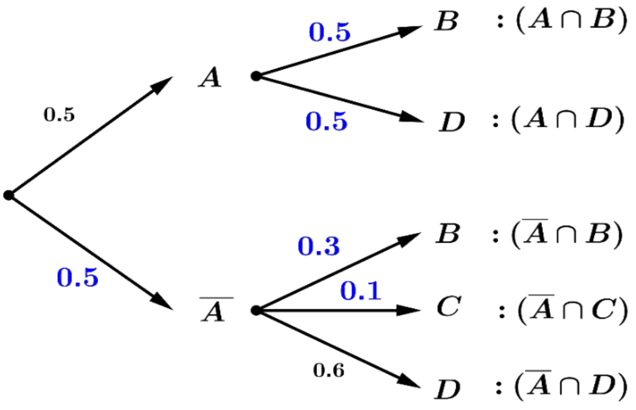
B : « On tire deux boules blanches de l'urne U_2. »

C : « On tire deux boules noires de l'urne U_2. »

D : « On tire deux boules de couleurs différentes de l'urne U_2. »

1) a)

- $p(B/A) = \dfrac{C_3^2}{C_4^2} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} = 0.5$
- $p(B/\overline{A}) = \dfrac{C_3^2}{C_5^2} = \dfrac{3}{10} = 0.3$
- $p(C/\overline{A}) = \dfrac{C_2^2}{C_5^2} = \dfrac{1}{10} = 0.1$



1) b)

- $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) + p(\overline{A}) \cdot p(B/\overline{A})$

$$= 0.5 \times 0.5 + 0.5 \times 0.3 = 0.25 + 0.15 = 0.4 = \frac{2}{5}$$

- $p(D) = p(A \cap D) + p(\overline{A} \cap D) = p(A) \cdot p(D/A) + p(\overline{A}) \cdot p(D/\overline{A})$

$$= 0.5 \times 0.5 + 0.5 \times 0.6 = 0.25 + 0.3 = 0.55 = \frac{11}{20}$$

1) c) La probabilité qu'il ne reste aucune boule noire dans U_2 est :

- $p(A \cap D) + p(\overline{A} \cap C) = p(A) \cdot p(D/A) + p(\overline{A}) \cdot p(C/\overline{A})$

$$= 0.5 \times 0.5 + 0.5 \times 0.1 = 0.25 + 0.05 = 0.3 = \frac{3}{10}$$

2) a) X : Le nombre de boules noires restantes dans U_2.

$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$p(A \cap D) + p(\overline{A} \cap C)$	$p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap D)$	$p(\overline{A} \cap B)$
	$0.3 = \dfrac{3}{10}$	$0.5 \times 0.5 + 0.5 \times 0.6 = 0.55 = \dfrac{11}{20}$	$0.5 \times 0.3 = 0.15 = \dfrac{3}{20}$

2) b) La probabilité qu'il reste au moins une boule noire dans U_2 est :

- $1 - p(X = 0) = 1 - 0.3 = 0.7$

3) F_n : « il ne reste dans U_2 aucune boule noire pour les $(n-1)$ premières épreuves et il reste au moins une boule noire à la nième épreuve. »

- $p_n = [p(X = 0)]^{n-1} \times [p(X \geq 1)] = (0.3)^{n-1} \times 0.7$

Exercice 4

A) $f(x)=\dfrac{x\ln(1+x)}{1+x}$, $x\in]-1,+\infty[$.

1) a) ◆ $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x\ln(1+x)}{1+x}=+\infty$ ◆ La droite $x=-1$ est une asymptote à $(\mathscr{C}_f)$

1) b) ◆ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln(1+x)}{1+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{\left(\dfrac{x}{1+x}\right)}_{1}\underbrace{\ln(1+x)}_{+\infty}=+\infty$

◆ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(t)}{t}=0$

◆ $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{i})$ au voisinage de $+\infty$.

2) a) • $x\mapsto 1+x$ est dérivable, strictement positive sur $]-1,+\infty[$.

alors $x\mapsto\ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$.

• $x\mapsto\dfrac{x}{1+x}$ est une fonction rationnelle dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ donc sur $]-1,+\infty[$.

alors f est dérivable sur $]-1,+\infty[$.

2) b) $\forall x\in]-1,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\left(1\times\ln(1+x)+\dfrac{1}{1+x}\times x\right)(1+x)-1\times x\ln(1+x)}{(1+x)^2}=\frac{\left(\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}\right)(1+x)-x\ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

$$=\frac{(1+x)\ln(1+x)+x-x\ln(1+x)}{(1+x)^2}=\frac{\ln(1+x)+x\ln(1+x)+x-x\ln(1+x)}{(1+x)^2}=\frac{x+\ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

2) c) ◆ Soit $h(x)=x+\ln(1+x)$.

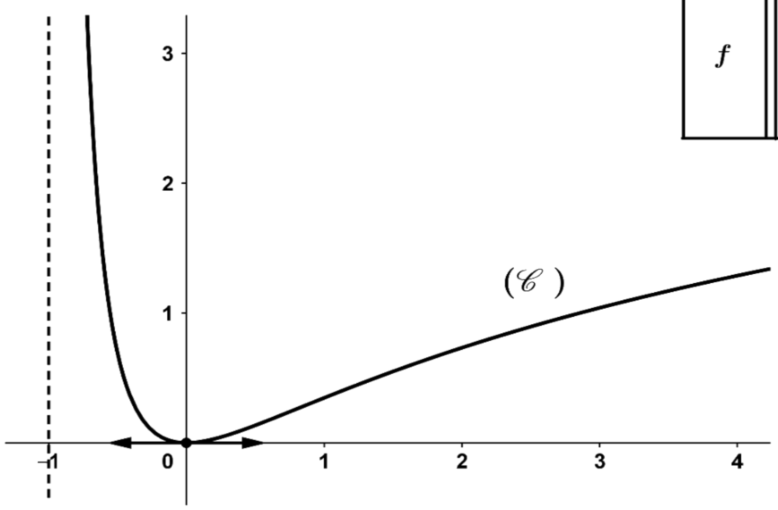
◆ h est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $\forall x\in]-1,+\infty[$, $h'(x)=\dfrac{x+2}{x+1}>0$

◆ h est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$ et comme $h(0)=0$ alors $x+\ln(1+x)>0\Leftrightarrow x>0$

2) d) Tableau de variation de f .

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

2) e) La courbe $(\mathscr{C})$ de f .



B) 1) $\forall x \in [1,+\infty[$, $G(x)=\int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt=\int_1^x \frac{t\ln(1+t)}{t(1+t)}\,dt=\int_1^x \frac{1}{1+t}\times\ln(1+t)\,dt=\left[\frac{\ln^2(1+t)}{2}\right]_1^x$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln^2(1+x)-\ln^2(2)\right)=\frac{1}{2}\ln^2(1+x)-\frac{1}{2}\ln^2(2).$$

2) On a $\forall x\ge 1$, $1\le t\le x^n \Rightarrow \sqrt[n]{1}\le\sqrt[n]{t}\le\sqrt[n]{x^n} \Rightarrow 1\le\sqrt[n]{t}\le x \Rightarrow \frac{f(t)}{t}\le\frac{f(t)}{t}\sqrt[n]{t}\le\frac{f(t)}{t}x$

$\Rightarrow \underbrace{\int_1^{x^n}\frac{f(t)}{t}\,dt}_{G(x^n)}\le\underbrace{\int_1^{x^n}\frac{f(t)}{t}\sqrt[n]{t}\,dt}_{F_n(x)}\le x\underbrace{\int_1^{x^n}\frac{f(t)}{t}\,dt}_{G(x^n)}$ alors $\forall x\ge 1$, $G(x^n)\le F_n(x)\le xG(x^n)$.

3) • $F_n(x)=\int_1^{x^n}\frac{f(t)}{t}\sqrt[n]{t}\,dt$; $x\ge 1$.

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ u: x\mapsto x^n \text{ est dérivable sur } [1,+\infty[\\ \bullet\ u\left([1,+\infty[\right)=[1,+\infty[\\ \bullet\ t\mapsto \frac{f(t)}{t}\sqrt[n]{t} \text{ est continue sur } [1,+\infty[\\ \bullet\ 1\in[1,+\infty[\end{array}\right\}\Rightarrow F_n \text{ est dérivable sur } [1,+\infty[$$

et $F'_n(x)=nx^{n-1}\frac{f(x^n)}{x^n}\sqrt[n]{x^n}=nx^{n-1}\frac{f(x^n)}{x^n}x=nx^n\frac{f(x^n)}{x^n}=nf(x^n)$.

4) • $V_n=\int_1^{\frac{n+1}{n}} f(t^n)\,dt$; $n\ge 1$.

$V_n=\int_1^{\frac{n+1}{n}} f(t^n)\,dt=\frac{1}{n}\int_1^{\frac{n+1}{n}} nf(t^n)\,dt=\frac{1}{n}\int_1^{\frac{n+1}{n}} F'_n(t)\,dt=\frac{1}{n}\left[F_n(t)\right]_1^{\frac{n+1}{n}}$

$V_n=\frac{1}{n}\left(F_n(\frac{n+1}{n})-F_n(1)\right)=\frac{1}{n}\left(F_n(\frac{n+1}{n})-\underbrace{F_n(1)}_{0}\right)=\frac{1}{n}F_n(\frac{n+1}{n})$

alors $\forall n\ge 1$, $nV_n=F_n(\frac{n+1}{n})$.

5) a) On a $\forall x\ge 1$, $G(x^n)\le F_n(x)\le xG(x^n)$

alors pour $x=\frac{n+1}{n}\ge 1$, $G\left((\frac{n+1}{n})^n\right)\le F_n(\frac{n+1}{n})\le\left(\frac{n+1}{n}\right)G\left((\frac{n+1}{n})^n\right)$

donc $G\left((\frac{n+1}{n})^n\right)\le nV_n\le\left(\frac{n+1}{n}\right)G\left((\frac{n+1}{n})^n\right)$, $n\ge 1$.

5) b) ◆ $e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}=e^{\ln\left((1+\frac{1}{n})^n\right)}=(1+\frac{1}{n})^n=(\frac{n+1}{n})^n$

◆ $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{n+1}{n})^n=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}=\lim\limits_{k\to 0}e^{\frac{\ln(1+k)}{k}}=e^1=e$

5) c) ◆ On a $G\left((\frac{n+1}{n})^n\right)\le nV_n\le\left(\frac{n+1}{n}\right)G\left((\frac{n+1}{n})^n\right)$ et comme G est continue en e

alors $\left.\begin{array}{l}\bullet\ \lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{n+1}{n})^n=e\\ \bullet\ \lim\limits_{x\to e}G(x)=G(e)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\bullet\ \lim\limits_{n\to+\infty}G\left((\frac{n+1}{n})^n\right)=G(e)\\ \bullet\ \lim\limits_{n\to+\infty}\underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)}_{1}G\left((\frac{n+1}{n})^n\right)=G(e)\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}nV_n=G(e)$

◆ On a $V_n=\frac{1}{n}(nV_n)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\underbrace{\frac{1}{n}}_{0}\underbrace{(nV_n)}_{e}=0$

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2020	Session de contrôle	
	Épreuve : Mathématiques	Section : Mathématiques
	Durée : 4h	Coefficient de l'épreuve : 4

Corrigé et barème de notation

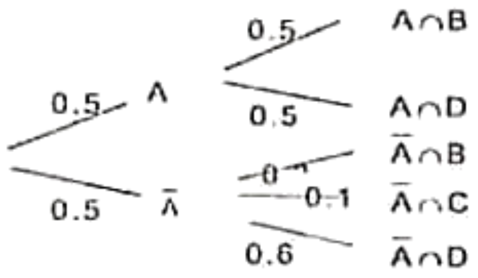
Exercice 1 (5 points)

Question	Elements de réponse	Commentaires	Note
1)	$\theta = (\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$ $k = \frac{BC}{BJ} = \frac{1}{\cos(\widehat{JBC})} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$		0,25 0,25
2)a)			0,25
2)b)			0,25
2)c)			2x0,25
3)a)	S^{-1} est une similitude directe de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$, de centre B et d'angle $\frac{\pi}{6}$	0,25 0,25	2x0,25
3)b)	$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BQ}) \equiv (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BP})[2\pi]$ $\equiv (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CP}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ d'où $S^{-1}(A)=Q$ $\frac{BQ}{BA} = \cos(\widehat{QBA}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$		0,25
3)c)	$S^{-1}(A)=Q$ $S^{-1}(B)=B$ donc $S^{-1}(ABC)=QBJ$ $S^{-1}(C)=J$ ABC est équilatéral direct et S^{-1} est une similitude donc QBJ est équilatéral	0,25 nature 0,25 justification	0, 5
3)d)			0,5
4)a)	σ similitude indirecte Le rapport est $\frac{2}{\sqrt{3}}\times 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \neq 1$ S(B)=B donc B est le centre de σ $\sigma(A)=S(A)=A'$ donc l'axe Δ porte la bissectrice intérieure de l'angle $[\widehat{BA,BA'}]$	0,25 0,25 0,25	0,75
4)b)	$\sigma(Q)=S(J)=C$ $\sigma(BJQ)=B\sigma(J)C$ est équilatéral indirect donc $\sigma(J)=A$		2x0,25
4)c)	$M\in(QB)\cap(IJ)$ donc $\sigma(M)\in\sigma((BQ))\cap\sigma((IJ))$ $\sigma(K)=Q$, $I=S_K(Q)$ alors $\sigma(I)=S_Q(C)=P$ Donc $\sigma((IJ))=(AP)$ d'où $\{M'\}=(BC)\cap(AP)$		2x0,25

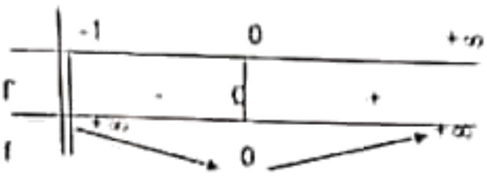
Exercice 2 (4 points)

Question	Eléments de réponse	Commentaires	Note
1)	Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et r le reste modulo 7 de k. les restes modulo 7 de k^3. <table><tr><td>r</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>Reste de k^3</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>6</td><td>1</td><td>6</td><td>6</td></tr></table>		3x0,25
2)	$x^3 + y^3 \equiv r(\text{mod}7)$ d'où les restes possibles sont 0, 1, 2, 5 et 6.		1,25
3)	3 et 4 ne sont pas des restes possibles donc il n'existe aucun couple $(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $x^3 + y^3 \equiv 3(\text{mod}7)$ et $x^3 + y^3 \equiv 4(\text{mod}7)$	2x0,25	0,5
4)a)	$x^3 + y^3 \equiv 1(\text{mod}7)$ $x \equiv 0(\text{mod } 7)$ $y \equiv 0(\text{mod } 7)$	0,25 0,25 0,25	0,5
4)b)	Si y=7 alors x^3= 9647 alors x n'existe pas. Si y=14 alors x^3= 7246 alors x n'existe pas. Si y=21 alors x^3= 729 alors x =9 Même travail pour x au lieu de y Alors E_{9990}= {(21,9), (9,21) }	0,25 0,25 0,25	3x0,25

Exercice 3 (5 points)

Question	Eléments de réponse	Commentaires	Note
1)a)		5x0,25 30 JUIL 2020	1,25
1)b)	$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{2}{5}$ $p(D) = p(D \cap A) + p(D \cap \bar{A}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{11}{20}$	Formule appliquée + calcul (2x0,25) Formule appliquée + calcul (2x0,25)	2x0,5
1)c)	la probabilité qu'il ne reste aucune boule noire dans U_2 est $p(C) + p(D \cap A)$ $p(C) + p(D \cap A) = \frac{1}{20} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20} + \frac{1}{4} = \frac{3}{10}$	Traduction 0,25 Formule appliquée 0,25	0,5
2)a)	$X(\Omega) = \{0,1,2\}$ $p(X = 0) = p(C) = \frac{3}{10}$, $p(X = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{6}{10} = \frac{11}{20}$ $p(X = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{0}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{20}$		1
2)b)	$p(X \geq 1) = p(X = 1) + p(X = 2) = \frac{7}{10}$	Traduction 0,25 Calcul 0,25	0,5
3)	$p_n = [p(X = 0)]^{n-1} \times p(X \geq 1) = \frac{7}{10} \times \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}$	Traduction 0,5 Calcul 0,25	0,75

Exercice 4 (6 points)

Question	Elements de réponse	Commentaires	Note
1)a)	$\lim\limits_{x\to -1^{+}} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^{+}} \left(x \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \ln(x+1)\right) = +\infty$ Alors la droite $x = -1$ est une asymptôte verticale à (C).		0,5
1)b		3x0,25	0,75
2)a)	f est le produit de deux fonctions dérivables sur $]-1, +\infty[$ qui sont $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ une fonction rationnelle dérivable sur son domaine de définition et $x \mapsto \ln(x+1)$ composée de la fonction ln avec $x \mapsto x+1$ aussi dérivable sur son domaine		0,25
2)b)	Pour $x > 1$, on a $f'(x) = \frac{(1+x)\ln(1+x) + x - x\ln(1+x)}{(1+x)^2}$ $= \frac{x + \ln(1+x)}{(1+x)^2}$		0,25
2)c)	Soit $h(x) = x + \ln(1+x)$ h est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et pour tout $x > 1$ on a $h'(x) = \frac{x+2}{x+1} > 0$ pour tout $x > -1$, alors h est strictement croissante sur $]-1, +\infty[$ et puisque $h(0) = 0$ alors $h(x) > 0$ ssi $x > 0$		0,25
2)d)			0,25
2)e)	2020	- 0,25 pour chaque élément manquant (branche + asymptôte +tangente)	0,75
B)			
1)	$G(x) = \left[\frac{1}{2}\ln^2(1+t)\right]_1^x = \frac{1}{2}\ln^2(1+x) - \frac{1}{2}\ln^2(2)$		0,25
2)	Pour $x \geq 1$, $1 \leq t \leq x^n$ alors $1 \leq \sqrt[n]{t} \leq \sqrt[n]{x^n}$ alors $1 \leq \sqrt[n]{t} \leq x$ alors $\frac{f(t)}{t} \leq \frac{f(t)}{t}\sqrt[n]{t} \leq x\frac{f(t)}{t}$ alors $\int_1^{x^n} \frac{f(t)}{t}\,dt \leq \int_1^{x^n} \frac{f(t)}{t}\sqrt[n]{t}\,dt \leq x\int_1^{x^n} \frac{f(t)}{t}\,dt$	0,25 0,25	0,5
3)		Dérivabilité 0,25 Dérivée 0,25	0,5

4)	pour $n \geq 1$, $v_n = \int_1^{(1+\frac{1}{n})} f(t^n)\,dt = \frac{1}{n}\int_1^{(1+\frac{1}{n})} F'_n(t)\,dt$ $= \frac{1}{n}F_n(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}F_n(1) = \frac{1}{n}F_n(1+\frac{1}{n})$ donc $nv_n = F_n(1+\frac{1}{n})$	0,25 0,25	0,5
5)a)	D'après 2) on a $G(x^n) \leq F_n(x) \leq xG(x^n)$ alors $G((1+\frac{1}{n})^n) \leq F_n(1+\frac{1}{n}) \leq (1+\frac{1}{n})G((1+\frac{1}{n})^n)$ alors $G((1+\frac{1}{n})^n) \leq nV_n \leq (1+\frac{1}{n})G((1+\frac{1}{n})^n)$, $n \geq 1$.		0,25
5)b)	$(1+\frac{1}{n})^n = e^{\ln((1+\frac{1}{n})^n)} = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}} = e$	0,25 0,25	2x0.25
5)c)	$\lim\limits_{n\to+\infty} G((1+\frac{1}{n})^n) = G(\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n) = G(e)$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(nV_n) = \cancel{e}\,(e)$ $V_n = \frac{1}{n}(nV_n)$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n) = 0 \times e = 0$		2x0,25

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2021	Session principale
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**

✳✳✳✳✳

N° d'inscription | | | | | | |

Le sujet comporte quatre pages. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5.5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure de l'annexe jointe, $OABC$ est un rectangle de centre I tel que $OC = 1$, $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ et D le point du segment $[OA]$ tel que $OD = OC$.

1) **a/** Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie O sur I et D sur B.

b/ Montrer que f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$.

c/ On note Ω le centre de f. Construire Ω.

2) Soit g l'antidéplacement qui envoie O sur I et D sur B.

a/ Montrer que g est une symétrie glissante.

b/ Soit J le milieu du segment $[OI]$ et K le milieu du segment $[BD]$.
Les droites (JK) et (OA) se coupent au point E.
Montrer que $g(E) = J$.

c/ En déduire que $g = S_{(JK)}\ o\ t_{\overrightarrow{EJ}}$.

3) **a/** Montrer que $f^{-1} o\ g = S_{(OA)}$. En déduire que $f(E) = J$.

b/ Comparer OE et OJ. En déduire que les droites $(O\Omega)$ et (JK) sont perpendiculaires.

Dans la suite, on munit le plan du repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC})$.
On note z_I , z_J et z_K les affixes respectives des points I , J et K.

4) **a/** Justifier que $z_I = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b/ Montrer que $z_K - z_J = \cos(\frac{\pi}{12})e^{i\frac{\pi}{12}}$.

c/ Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{JK})$.

5) Soit M un point de la droite (JK) . On désigne par N le symétrique de M par rapport à (OA) et par P l'image de M par g.

a/ Soit r la rotation de centre E et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.
Montrer que $r(M) = N$.

b/ En déduire que $f(N) = P$.

Exercice 2 (4 points)

1) **a/** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $21^n \equiv 1+20n \ (mod\ 100)$.

b/ En déduire les deux derniers chiffres de l'entier 2021^{2021}.

On note E l'ensemble des entiers $x \in \mathbb{Z}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x^n \equiv 1+n(x-1)\ (mod\ 100).$$

2) Vérifier que 21 est un élément de E.

3) Soit x un élément de E.

a/ Montrer que $(x-1)^2 \equiv 0\ (mod\ 100)$.

b/ En déduire que $x \equiv 1\ (mod\ 10)$.

4) Soit $q \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+10\,q)^n \equiv 1+10\,nq\ (mod\ 100)$.

5) Déterminer l'ensemble E.

Exercice 3 (6 points)

1) Soit φ la fonction définie sur $]\,0,+\infty\,[$ par $\varphi(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

a/ Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\varphi(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.

b/ Montrer que pour tout $x>0$, $\varphi'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}$.

c/ Dresser le tableau de variation de φ.

d/ Tracer la courbe $(\mathscr{C})$, en précisant l'intersection avec l'axe des abscisses.

Dans la suite de l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 1.

2) Soit φ_n la fonction définie sur $]\,-n,+\infty\,[$ par $\varphi_n(x)=\dfrac{1+\ln(x+n)}{x+n}$.

On désigne par $(\mathscr{C}_n)$ sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a/ En remarquant que $\varphi_n(x)=\varphi(x+n)$, montrer que $(\mathscr{C}_n)$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par une translation que l'on précisera.

b/ Tracer $(\mathscr{C}_1)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3) Soit h_n la fonction définie sur $]\,0,+\infty\,[$ par $h_n(x)=\varphi_n(x)-\varphi(x)$.

a/ Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $h_n(x)<0$.

b/ Montrer que pour tout x de $]\,0,1\,]$, $h'_n(x)<0$.

c/ En déduire que l'équation $h_n(x)=0$ admet dans l'intervalle $]\,0,+\infty\,[$ une unique solution α_n et vérifier que $\dfrac{1}{e} < \alpha_n < 1$.

4) **a/** Montrer que $n+1+\alpha_{n+1} > n+\alpha_n$.

b/ Comparer $\varphi(\alpha_{n+1})$ et $\varphi(\alpha_n)$.

c/ Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

d/ Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi(\alpha_n)=0$. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 4 (4.5 points)

1) Soit F et H les fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par

$$F(x) = \int_1^x e^{-\sqrt{t}}dt \quad \text{et} \quad H(x) = \frac{4}{e} - 2\,(\,1+\sqrt{x}\,)\,e^{-\sqrt{x}}.$$

a/ Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et donner $F'(x)$.

b/ Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x) = H(x)$.

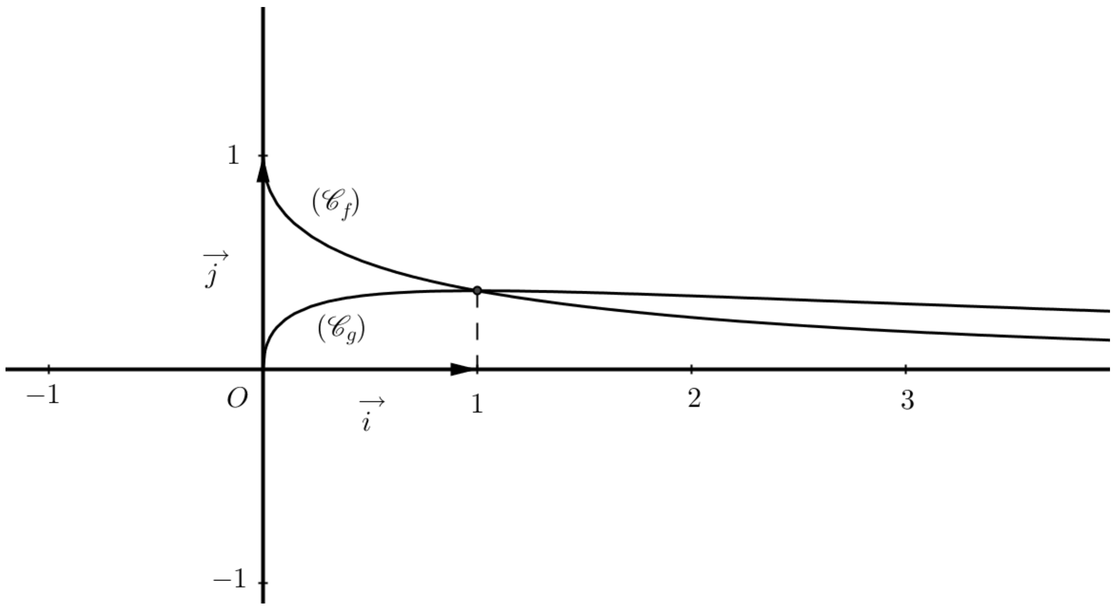
c/ En déduire que $F(0) = H(0)$.

2) Soit G la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $G(x) = \int_1^x \sqrt{t}e^{-\sqrt{t}}dt$.

a/ En remarquant que pour tout $t > 0$, $\sqrt{t} = \dfrac{t}{\sqrt{t}}$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que $G(x) = \dfrac{2}{e} - 2xe^{-\sqrt{x}} + 2F(x)$, pour tout $x > 0$.

b/ Justifier que $G(0) = \dfrac{2}{e} + 2F(0)$.

3) Ci-dessous on a tracé , dans un repère orthonormé, les courbes $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ des fonctions f et g définies sur $[0,+\infty\,[$ par $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$ et $g(x) = \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}$.



Pour tout $\lambda \geqslant 1$, on désigne par $\mathscr{A}_\lambda$ l'aire en $(u.a)$ de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$.

a/ Montrer que $\mathscr{A}_1 = \dfrac{6}{e} - 2$.

b/ Montrer que pour tout $\lambda > 1$, $\mathscr{A}_\lambda = \mathscr{A}_1 + G(\lambda) - F(\lambda)$.

c/ Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathscr{A}_\lambda$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

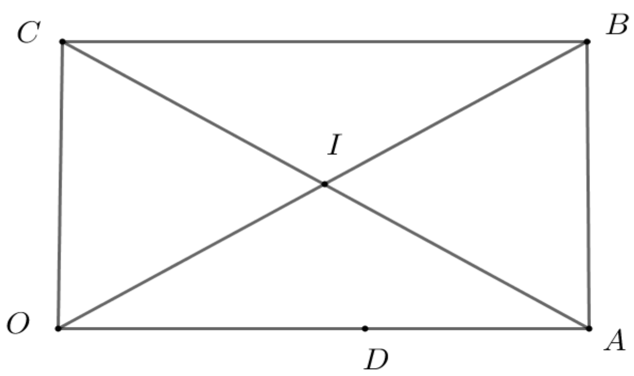
Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques
Session principale (2021)
Annexe à rendre avec la copie



Correction examen du baccalauréat section Mathématiques session principale 2021

Une correction possible proposée par Kooli Mohamed Hechmi

Exercice 1

1) a) Dans le triangle OBC rectangle en C, on a :

$\sin(\widehat{OBC}) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{OC}{OB} = \frac{1}{2}$ alors $OB = 2OC$ par suite $2IB = 2OD$ donc $IB = OD = 1 \neq 0$

alors il existe un unique déplacement f qui transforme O en I et D en B.

b) Soit α l'angle de f alors $\alpha \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{IB}}\right)[2\pi] \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

alors f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$

c) On a Ω est le centre de f alors $med[OI] \cap med[DB] = \{\Omega\}$

d'où la construction de Ω.

2) a) On g est un antidéplacement alors g est soit une symétrie axiale soit une symétrie glissante et comme $med[OI] \neq med[DB]$ **alors g est une symétrie glissante.**

b) Soit Δ l'axe de g, on $g(O) = I$ et $g(D) = B$ alors $O * I = J \in \Delta$ et $D * B = K \in \Delta$

par suite $\Delta = (JK)$.

On pose $g(E) = E'$ et on a $g(O) = I$ et $g(D) = B$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{E'I}, \overrightarrow{E'B}}\right) \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{ED}}\right)[2\pi] \equiv -\pi[2\pi]$

par suite $E' \in (IB)$ d'autre part $E \in (JK)$ alors $E' \in (JK)$ donc $E' \in (JK) \cap (IB) = \{J\}$

alors $g(E) = J$.

c) Soit $\vec{u}$ le vecteur de g alors $g = t_{\vec{u}}\ o\ S_{(JK)} = S_{(JK)}\ o\ t_{\vec{u}}$

$g(E) = t_{\vec{u}}\ o\ S_{(JK)}(E) = t_{\vec{u}}(E) = J$ $\quad E \in (JK)$ alors $\vec{u} = \overrightarrow{EJ}$ par suite **$g = t_{\overrightarrow{EJ}}\ o\ S_{(JK)} = S_{(JK)}\ o\ t_{\overrightarrow{EJ}}$**

3) a) On $f^{-1}\ o\ g(O) = f^{-1}(g(O)) = f^{-1}(I) = O$ car $f(O) = I$

d'autre part $f^{-1}\ o\ g(D) = f^{-1}(g(D)) = f^{-1}(B) = D$ car $f(D) = B$

$S_{(OA)}(O) = O$ et $S_{(OA)}(D) = D$ car $D \in (OA)$

alors $f^{-1}\ o\ g(O) = S_{(OA)}(O)$ et $f^{-1}\ o\ g(D) = S_{(OA)}(D)$

On a $f^{-1}\ o\ g$ est la composé d'un antidéplacement et d'un déplacement alors $f^{-1}\ o\ g$ est un antidéplacement et on a $S_{(OA)}$ est un antidéplacement

$f^{-1}\ o\ g$ et $S_{(OA)}$ coïncides en deux points distincts alors $f^{-1}\ o\ g = S_{(OA)}$.

$f^{-1}\ o\ g = S_{(OA)} \Rightarrow f\ o\ f^{-1}\ o\ g = f\ o\ S_{(OA)} \Rightarrow$ **$g = f\ o\ S_{(OA)}$**

on a $g(E) = J$ alors $f\ o\ S_{(OA)}(E) = J$ alors $f\left(S_{(OA)}(E)\right) = J$ donc $f(E) = J$

b) On a $g(E) = J$ et $g(O) = I$ alors $OE = IJ$ (tout antidéplacement conserve les distances)

et $J = O * I$ alors $OJ = IJ$

conclusion $OE = OJ$.

on a $OE = OJ$ donc $O \in med[EJ]$

on a $f(E) = J$ alors $\Omega E = \Omega J$ donc $\Omega \in med[EJ]$

par suite $(O\Omega) = medmed[EJ]$ donc $(O\Omega)\perp(EJ)$ or $K \in (EJ)$

alors $(O\Omega)\perp(JK)$

4) **a)** On $OI = 1$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OI}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ alors

$$\begin{cases} OI = 1 \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OI}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow z_I = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

b) On a $\begin{cases} OB = 2OC = 2 \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow z_B = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

On a $z_D = 1$

on a $K = B * D$ alors $z_K = \frac{z_B + z_D}{2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}+1}{2}$

on a $J = O * I$ alors $z_J = \frac{z_O + z_I}{2} = \frac{z_I}{2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{2}$

$$z_K - z_J = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}+1}{2} - \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}+1}{2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{i0}}{2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}+e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$z_K - z_J = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}$

c) On a $\left(\widehat{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{JK}}\right) \equiv arg\left(\frac{z_K - z_J}{z_D - z_O}\right)[2\pi] \equiv arg(z_K - z_J) - arg(z_D)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$

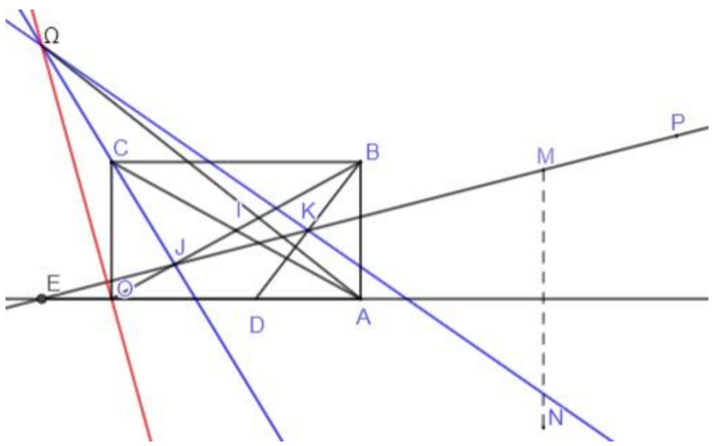
$\left(\widehat{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{JK}}\right) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$

5) **a)** On $S_{(OA)}(M) = N$ et $E \in (OA)$ alors $EM = EN$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{EM},\overrightarrow{EN}}\right) \equiv -2\left(\widehat{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{JK}}\right)[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$

$$\begin{cases} EM = EN \\ \left(\widehat{\overrightarrow{EM},\overrightarrow{EN}}\right) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi] \\ r(E) = E \end{cases} \Leftrightarrow r(M) = N$$

b) On $g = f\ o\ S_{(OA)}$

$g(M) = P \Leftrightarrow f\ o\ S_{(OA)}(M) = P \Leftrightarrow f(N) = P$



Exercice 2

1) a) On pour $= 0$, $21^0 + 20 \times 0 = 1$ donc $21^0 \equiv 1 + 20 \times 0 (mod\ 100)$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $21^n \equiv 1 + 20 \times n (mod\ 100)$

montrons que $21^{n+1} \equiv 1 + 20 \times (n+1)(mod\ 100)$

$$
\begin{aligned}
21^{n+1} &\equiv 21^n \times 21 (mod\ 100)\\
&\equiv 21(1 + 20 \times n)(mod\ 100)\\
&\equiv 21 + 21 \times 20n (mod\ 100)\\
&\equiv 1 + 20 + (20+1) \times (20n)(mod\ 100)\\
&\equiv 1 + 20 + 20n + 400n (mod\ 100)\\
&\equiv 1 + 20 + 20n (mod\ 100) \quad \text{car } 400n \equiv 0 (mod\ 100)\\
&\equiv 1 + 20 \times (n+1)(mod\ 100)
\end{aligned}
$$

Conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $21^n \equiv 1 + 20 \times n (mod\ 100)$

b) On a $2021 \equiv 21 (mod\ 100)$ ⇨ $2021^{2021} \equiv 21^{2021} (mod\ 100)$ ⇨

$2021^{2021} \equiv 1 + 20 \times 2021 (mod\ 100)$ d'après 1)a)

$2021 \equiv 21 (mod\ 100)$ ⇨ $20 \times 2021 \equiv 20 \times 21 (mod\ 100)$ ⇨ $20 \times 2021 \equiv 420 (mod\ 100)$

⇨ $20 \times 2021 \equiv 20 (mod\ 100)$ ⇨ $1 + 20 \times 2021 \equiv 21 (mod\ 100)$

alors $2021^{2021} \equiv 21 (mod\ 100)$

alors le chiffre des unités de 2021^{2021} est 1 et son chiffre de dizaine est 2

2) On a E est l'ensemble des entiers x vérifiant $x^n \equiv 1 + n(x-1)(mod\ 100)$

d'après 1) a on a $21^n \equiv 1 + 20n (mod\ 100)$ ce qui donne $21^n \equiv 1 + n(21-1)(mod\ 100)$

alors 21 est un élément de E

3) a) On a x est un élément de E alors $x^n \equiv 1 + n(x-1)(mod\ 100)$est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$

spécialement pour $n = 2$ alors $x^2 \equiv 1 + 2(x-1)(mod\ 100)$, $x^2 \equiv 1 + 2x - 2 (mod\ 100)$

$x^2 - 2x + 1 \equiv 0 (mod\ 100)$, $(x-1)^2 \equiv 0 (mod\ 100)$

b) On a $(x-1)^2 \equiv 0 (mod\ 100)$ alors il existe un entier k tel que $(x-1)^2 = 100k = 10(10k)$

alors $(x-1)^2 \equiv 0 (mod\ 10)$

Soit a un entier, déterminons le reste modulo 10 de a^2

Reste modulo 10 de a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Reste modulo 10 de a^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

alors $a^2 \equiv 0(mod\ 10)$ si et seulement si $a \equiv 0(mod\ 10)$

par suite $(x-1)^2 \equiv 0(mod\ 10)$ si et seulement si $x - 1 \equiv 0(mod\ 10)$ alors $x \equiv 1(mod\ 10)$

4) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(1+10q)^n = C_n^0 1^n \times (10q)^0 + C_n^1 1^{n-1} \times (10q)^1 + C_n^2 1^{n-2} \times (10q)^2 + \cdots + C_n^n 1^0 \times (10q)^n$$

$$= 1 + 10qC_n^1 + (10q)^2 C_n^2 + (10q)^3 C_n^3 + \cdots + (10q)^n C_n^n$$

$$= 1 + 10qC_n^1 + 10^2 \times q^2 C_n^2 + 100^3 \times q^3 C_n^3 + \cdots + 100^n \times q^n$$

$$= 1 + 10nq + 100q^2 C_n^2 + 100 \times 100^2 q^3 \times C_n^3 + \cdots 100 \times 100^{n-1} q^n$$

$$= 1 + 10nq + 100(q^2 C_n^2 + 100^2 q^3 C_n^3 + \cdots + 100^{n-1} q^n)$$

on a $100(q^2 C_n^2 + 100^2 q^3 C_n^3 + \cdots + 100^{n-1} q^n) \equiv 0(mod\ 100)$

alors $1 + 10nq + 100(q^2 C_n^2 + 100^2 q^3 C_n^3 + \cdots + 100^{n-1} q^n) \equiv 1 + 10nq(mod\ 100)$

par suite $(1+10q)^n \equiv 1 + 10nq(mod\ 100)$

5) On a $x \in E \Rightarrow x \equiv 1(mod\ 10) \Rightarrow x = 1 + 10q\ ,\ q \in \mathbb{Z}$

$\forall n \in \mathbb{N}\ (1+10q)^n \equiv 1 + 10nq(mod\ 100)$

$$\equiv 1 + (1 + 10q - 1)n(mod\ 100)$$

alors $1 + 10q$ est un élément de E

l'ensemble des solutions de E de la forme $+10q\ ,\ q \in \mathbb{Z}$

Exercice 3

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1+\ln x}{x} = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C})$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1+\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$

b) On a pour tout $x > 0$; $\varphi'(x) = \left(\frac{1+\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\times x - (1+\ln x)}{x^2} = \frac{1-1-\ln x}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$

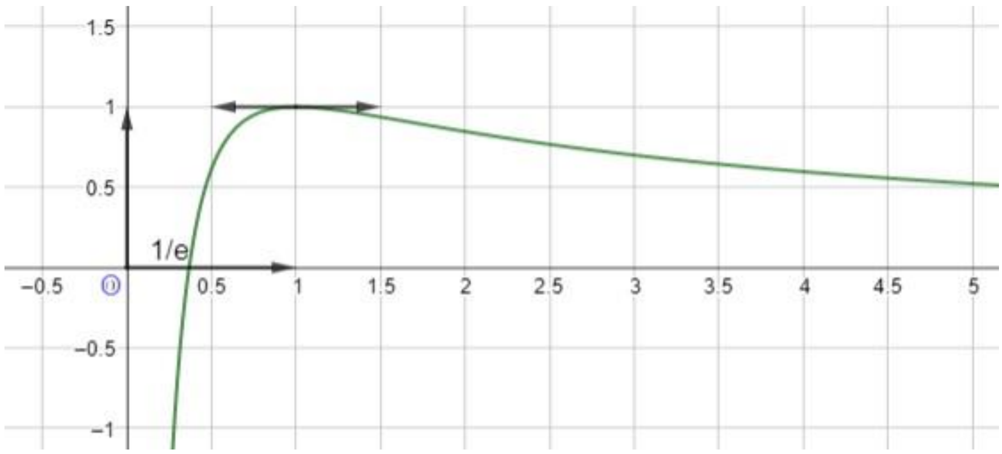
c) On a pour tout $x > 0$; $\varphi'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$ alors $\varphi'(x)$ prend le signe de $-\ln x$ sur $]0\ ,+\infty[$

$\varphi'(x) = 0\ ,\ x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

d) On a $M(x\,,y) \in (O\,,\vec{i}\,) \cap (\,\mathcal{C}) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1+\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$ alors le point $\left(\frac{1}{e}\,,0\right)$ est le point d'intersection de ($\mathcal{C}$) et l'axe des abscisses.

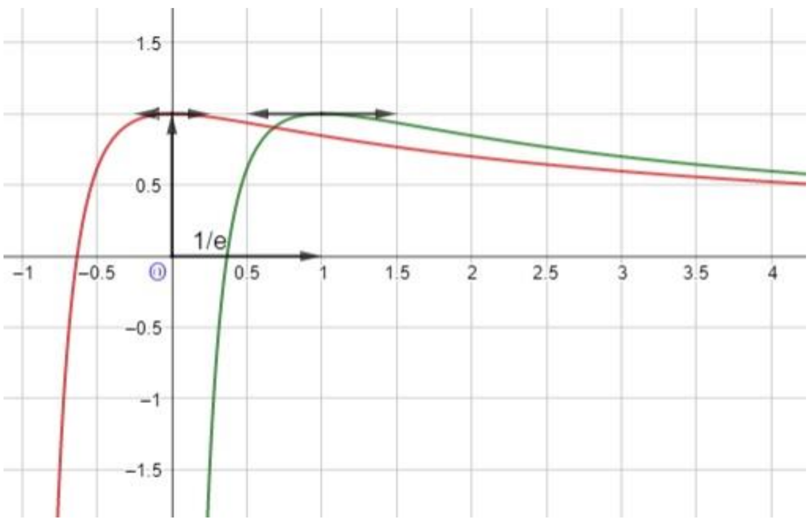


2) a) On a pour tout $\in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n(x) = \frac{1+\ln(x+n)}{x+n}$ $\quad x \in \,]-n\,,+\infty[$

$= \varphi(x+n)$ tel que $x + n > 0$

$M(x, \varphi(x)) \in (\,\mathcal{C}\,)$, $M'(x,\ \varphi_n(x)) \in (\,\mathcal{C}_n\,)$ alors $M' = t_{-n\vec{i}}(M)$ par suite ($\mathcal{C}_n$) est l'image de ($\mathcal{C}$) par la translation de vecteur $-n\vec{i}$ (notion vue en deuxième année)

b) On a ($\mathcal{C}_1$) est l'image de ($\mathcal{C}$) par la translation de vecteur $-\vec{i}$



3) a) On a pour tout > 0 , $h_n(x) = \varphi_n(x) - \varphi(x)$

pour tout ≥ 1 , $h_n(x) = \varphi_n(x) - \varphi(x) = \varphi(x+n) - \varphi(x)$

on a $x+n \geq x$ or la fonction φ est décroissante sur $[1,+\infty[$ alors $\varphi(x+n) < \varphi(x)$ donc

$\varphi(x+n) - \varphi(x) < 0$ par suite $h_n(x) < 0$

b) On a pour tout $x \in]0,1]$, $h'_n(x) = \varphi'_n(x) - \varphi'(x) = -\frac{\ln(x+n)}{(x+n)^2} + \frac{\ln x}{x^2}$

or $x \in]0,1]$ et $x+n > 1$ alors $\ln x \leq 0$ et $\ln(x+n) > 0$ donc pour tout $x \in]0,1]$ $h'_n(x) < 0$

b) * Sur l'intervalle $[1,+\infty[$ on a $h_n(x) < 0$ alors l'équation $h_n(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $[1,+\infty[$

* On a h_n est continue et strictement décroissante sur $]0,1]$ donc h_n réalise une bijection de $]0,1]$ sur $h_n(]0,1]) = [h_n(1),+\infty[$ et comme $h_n(1) < 0$ (d'apres 3) a))

alors $0 \in [h_n(1),+\infty[$ par suite l'équation $h_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $]0,1]$

conclusion l'équation $h_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $]0,+\infty]$

$h_n\left(\frac{1}{e}\right) > 0$ et $h_n(1) > 0$ alors $h_n\left(\frac{1}{e}\right) \times h_n(1)$ donc $\frac{1}{e} < \alpha_n < 1$

4) a) On a $\frac{1}{e} < \alpha_{n+1} < 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{e} < 1 + \alpha_{n+1} < 2 \Rightarrow 1 + \alpha_{n+1} > 1 + \frac{1}{e}$ (1)

et on a $\frac{1}{e} < \alpha_n < 1 \Rightarrow \alpha_n < 1$ (2)

de (1) et (2) $1 + \alpha_{n+1} > \alpha_n \Rightarrow n + 1 + \alpha_{n+1} > n + \alpha_n$

b) On a $n + 1 + \alpha_{n+1} > n + \alpha_n > 1$ et la fonction φ est décroissante sur $[1,+\infty[$ alors on a $\varphi(n+1+\alpha_{n+1}) < \varphi(n+\alpha_n)$ or $\varphi(x+n) = \varphi_n(x)$ alors $\varphi(n+1+\alpha_{n+1}) = \varphi_{n+1}(\alpha_{n+1})$

donc $\varphi_{n+1}(\alpha_{n+1}) < \varphi_n(\alpha_n)$ (3)

d'autre part $h(\alpha_n) = \varphi_n(\alpha_n) - \varphi(\alpha_n) = 0$ ce qui donne $\varphi_n(\alpha_n) = \varphi(\alpha_n)$

donc $\varphi_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \varphi(\alpha_{n+1})$

l'inégalité (3) devient $\varphi(\alpha_{n+1}) < \varphi(\alpha_n)$

c) On $\varphi(\alpha_{n+1}) < \varphi(\alpha_n)$ on a α_n et α_{n+1} sont dans l'intervalle $]0,1]$ et la fonction φ est strictement croissante sur $]0,1]$ donc $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ alors la suite (α_n) est ,décroissante et minorée par $\frac{1}{e}$ alors la suite (α_n) est convergente et converge vers une limite ℓ.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(\alpha_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(\alpha_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\ln(n+\alpha_n)}{n+\alpha_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+\alpha_n} + \frac{\ln(n+\alpha_n)}{n+\alpha_n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n + \alpha_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+\alpha_n} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+\alpha_n)}{n+\alpha_n} = 0$

par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(\alpha_n) = 0$

la suite (α_n) converge vers une limite ℓ , φ est continue en ℓ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(\alpha_n) = \varphi(\ell) = 0$

donc $1 + \ln(\ell) = 0$, $\ln(\ell) = -1$, $\ell = \frac{1}{e}$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{1}{e}$

Exercice 4

1) $F(x) = \int_1^x e^{-\sqrt{t}}\, dt$ et $H(x) = \dfrac{4}{e} - 2(1+\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}}$ $x \in \mathbb{R}_+$

a) $t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $1 \in \mathbb{R}_+$ alors $x \mapsto F(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $F'(x) = e^{-\sqrt{x}}$

b) Soit la fonction U définie sur $]0,+\infty[$ par : $U(x) = F(x) - H(x)$

U est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $U'(x) = \left(F(x) - H(x)\right)' = e^{-\sqrt{x}} - \left(\frac{4}{e} - 2(1+\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}}\right)'$

$$= e^{-\sqrt{x}} + 2\left((1+\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}}\right)'$$

$$= e^{-\sqrt{x}} + 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})\right)$$

$$= e^{-\sqrt{x}} + \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}} = 0$$

donc $U(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ or $U(1) = F(1) - H(1) = 0$ alors $c = 0$ par suite $F(x) - H(x) = 0$ si $x > 0$

conclusion $\forall x > 0$ $F(x) = H(x)$

on a F et H sont continues sur $\mathbb{R}_+$ donc F et H sont continues à droite en 0

$\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} H(x) = H(0)$ par suite $F(0) = H(0)$

2) $G(x) = \int_1^x \sqrt{t}e^{-\sqrt{t}}\, dt$ $x \in [0,+\infty[$

a) soit $t > 0$ $G(x) = \int_1^x \sqrt{t}e^{-\sqrt{t}}\, dt = \int_1^x \dfrac{t}{\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}}\, dt = -2\int_1^x t \times \left(\dfrac{-1}{2\sqrt{t}}\right)e^{-\sqrt{t}}\, dt$

on pose $U(t) = t$ $U'(t) = 1$

$V'(t) = \frac{-1}{2\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}}$ $V(t) = e^{-\sqrt{t}}$

$$G(x) = -2\left(\left[te^{-\sqrt{t}}\right]_1^x - \int_1^x e^{-\sqrt{t}}\, dt\right) = -2\left(\left[te^{-\sqrt{t}}\right]_1^x - \int_1^x e^{-\sqrt{t}}\, dt\right)$$

$$= -2\left(xe^{-\sqrt{x}} - e^{-1} - \int_1^x e^{-\sqrt{t}}\, dt\right) = -2\left(xe^{-\sqrt{x}} - \frac{1}{e} - F(x)\right)$$

$$= \frac{2}{e} - 2xe^{-\sqrt{x}} + 2F(x)$$

alors pour tout $x > 0$ on a $G(x) = \frac{2}{e} - 2xe^{-\sqrt{x}} + 2F(x)$

b) les fonctions G et F sont continues à droite en 0

alors $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) = G(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2}{e} - 2xe^{-\sqrt{x}} + 2F(x)$ alors $G(0) = \frac{2}{e} + 2F(0)$

3) a) $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$ et $g(x) = \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}$ pour $x \in [0\,,+\infty[$

$$A_1 = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx = \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 e^{-\sqrt{x}}\,dx - \int_0^1 \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\,dx$$

$$= -\int_1^0 e^{-\sqrt{x}}\,dx + \int_1^0 \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\,dx$$

$$= -F(0) + G(0) = \frac{2}{e} + F(0) = \frac{2}{e} + H(0) = \frac{2}{e} + \frac{4}{e} - 2 = \frac{6}{e} - 2$$

alors $A_1 = \frac{6}{e} - 2\ ua$

b) Soit $\lambda > 1$

$$A_\lambda = \int_0^\lambda |f(x) - g(x)|\,dx = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx + \int_1^\lambda |f(x) - g(x)|\,dx$$

$$= \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx + \int_1^\lambda (g(x) - f(x))\,dx$$

$$= A_1 + \int_1^\lambda \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\,dx - \int_1^\lambda e^{-\sqrt{x}}\,dx$$

$$= A_1 + G(\lambda) - F(\lambda)$$

c) $A_\lambda = A_1 + G(\lambda) - F(\lambda) = \frac{6}{e} - 2 + \frac{2}{e} - 2\lambda e^{-\sqrt{\lambda}} + H(\lambda)$

or d'après 2) c) $G(x) = \frac{2}{e} - 2xe^{-\sqrt{x}} + 2F(x)$ d'où $G(x) - F(x) = \frac{2}{e} - 2xe^{-\sqrt{x}} + F(x)$ avec $x > 0$

par suite $A_\lambda = \frac{6}{e} - 2 + \frac{2}{e} - 2\lambda e^{-\sqrt{\lambda}} + F(\lambda)$

$= \frac{8}{e} - 2 - 2\lambda e^{-\sqrt{\lambda}} + H(\lambda)$ car pour tout $x > 0$, $F(X) = H(x)$

$= \frac{8}{e} - 2 - 2\lambda e^{-\sqrt{\lambda}} + \frac{4}{e} - 2\left(1 + \sqrt{\lambda}\right)e^{-\sqrt{\lambda}} = \frac{12}{e} - 2 + -2\lambda e^{-\sqrt{\lambda}} - 2e^{-\sqrt{\lambda}} - 2\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}}$

$= \frac{12}{e} - 2 - 4\lambda e^{-\sqrt{\lambda}} - 2e^{-\sqrt{\lambda}}$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} A_\lambda = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{12}{e} - 2 \underbrace{-4\lambda e^{-\sqrt{\lambda}} - 2e^{-\sqrt{\lambda}}}_{0}$$

donc $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A_\lambda = \frac{12}{e} - 2$

MATHÉMATIQUES
Section : Mathématiques
Session principale 2021

Exercice 1 :

1/ a/ OABC est un rectangle de centre I donc IO = IC et comme

$\left(\overrightarrow{OI}, \widehat{\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}[2\pi]$ ou encore $\left(\overrightarrow{OI}, \widehat{\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ alors IOC est équilatéral.

Ainsi IB = IO = OC et OD = OC alors OD = OB $\neq$ 0, par suite il existe un unique déplacement f tel que f(O) = I et f(D) = B.

b/ $\left(\overrightarrow{OD}, \widehat{\overrightarrow{IB}}\right) \equiv \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}, \widehat{\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi] \equiv \left(\overrightarrow{OA}, \widehat{\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

Comme $\frac{\pi}{6} \neq 2k\pi$ donc f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$.

c/ Le centre Ω de f est le point d'intersection des médiatrices de $[OI]$ et $[BD]$.

med($[OI]$) $\cap$ med($[BD]$) = $\{\Omega\}$

2) a/ g est l'antidéplacement tel que g(O) = I et g(D) = B donc g soit une symétrie orthogonale soit une symétrie glissante et comme on a med($[OI]$) $\neq$ med($[BD]$) alors g est une symétrie glissante.

b/ g(O) = I g(B) = D donc l'axe de g est la droite des milieux des segments $[OI]$ et $[BD]$ qui est (IK).

On sait que l'axe de la symétrie glissante est globalement invariant c'est-à-dire que g((JK)) = (JK).

Maintenant : E$\in$(OD) donc g(E) $\in$(IB) et E$\in$(JK) donc g(E) $\in$(JK)

Il vient alors que g(E) $\in$(IB) $\cap$ (JK) =$\{J\}$, par suite g(E) = J.

c/ $g = t_{\vec{u}} o S_{(JK)} = S_{(JK)} o t_{\vec{u}}$ et comme E$\in$(JK) alors $g(E) = t_{\vec{u}}(E) = J$ et par suite $\vec{u} = \overrightarrow{EJ}$.

Conclusion : $g = t_{\overrightarrow{EJ}} o S_{(JK)} = S_{(JK)} o t_{\overrightarrow{EJ}}$.

3) a/ On a $f^{-1}og$ est la composée d'un déplacement et un antidéplacement donc c'est un antidéplacement.

- $f^{-1}og(O) = f^{-1}[g(O)] = f^{-1}[I] = O$ et $f^{-1}og(D) = f^{-1}[g(D)] = f^{-1}[B] = D$
- $S_{(OA)}(O) = O$ et $S_{(OA)}(D) = D$ car $D \in (OA)$

Ainsi, $f^{-1}og$ et $S_{(OA)}$ sont deux antidéplacements qui coïncident en deux points distincts O et D donc $f^{-1}og = S_{(OA)}$.

$f^{-1}og = S_{(OA)}$ donc $g^{-1}of = S_{(OA)}$ ou encore $f = goS_{(OA)}$.

Par suite $f(E) = goS_{(OA)}(E) = g\left[S_{(OA)}(E)\right] = g(E) = J$

b/ $f(O) = I$, $f(E) = J$ et f conserve les distances alors $OE = IJ$ et comme $OJ = IJ$ alors $OE = OJ$

La rotation f de centre Ω envoie E sur J donc ΩE = ΩJ

Les points O et Ω sont équidistants des extrémités du segment $[EJ]$ donc $(O\Omega) = \text{méd}[EJ]$, $(O\Omega) \perp (EJ)$ et $K \in (EJ)$ alors $(O\Omega) \perp (JK)$

4) a/ $Z_I = OI\, e^{i\frac{\pi}{6}} = OC\, e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b/ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{AB}{OB}$ donc $OB = \frac{AB}{\sin\frac{\pi}{6}} = 2$ et par suite $Z_B = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$Z_K = \frac{Z_B + Z_D}{2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}} + 1}{2} \text{ et } Z_J = \frac{Z_O + Z_I}{2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{2} \text{ alors}$$

$$Z_K = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}} + 1}{2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)}{2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{12}} \times 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}$$

c/ $\left(\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{JK}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{EJ}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi - \frac{5\pi}{6}}{2}(2\pi) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$

5) a/ $S_{(OA)}(M) = N$ et $E \in (OA)$ alors $EM = EN$ et

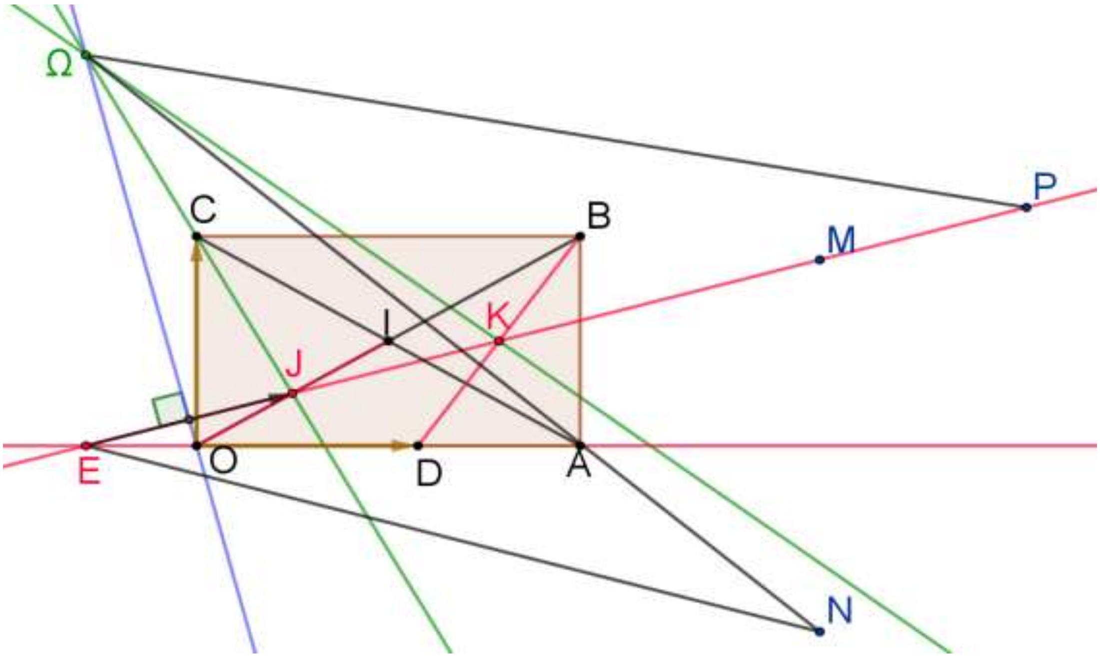
$\left(\widehat{\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EN}}\right) \equiv -2\left(\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{JK}}\right)[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$ et par suite $r(M) = N$.

b/ $S_{(OA)}(M) = N$

f et r sont deux rotations d'angles opposés donc for est une translation.

De plus $for(E) = f(E) = J$ donc $for = t_{\overrightarrow{EJ}}$

$f(N) = for(M) = t_{\overrightarrow{EJ}}(M) = t_{\overrightarrow{EJ}}\left(g^{-1}(P)\right) = t_{\overrightarrow{EJ}}\left(t_{\overrightarrow{JE}}oS_{(JK)}(P)\right) = S_{(JK)}(P) = P$



Exercice 2 :

1) a/ Pour n = 0, $21^0 = 1$ et $1+20\times 0 = 1$ donc $21^0 \equiv 1+20\times 0 (\text{mod} 100)$.

Soit $n \in \text{IN}$. Supposons que $21^n \equiv 1+20n(\text{mod}100)$ et montrons que $21^{n+1} \equiv 21+20n(\text{mod}100)$.

$$21^{n+1} \equiv 21\times 21^n (\text{mod}100) \equiv 21\times(1+20n)(\text{mod}100)$$

$$\equiv 21+20n+100\times 4n(\text{mod}100) \equiv 21+20n(\text{mod}100)$$

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \text{IN}$, $21^n \equiv 1+20n(\text{mod}100)$.

b/ $2021 \equiv 21(\text{mod}100)$ donc

$$2021^{2021} \equiv 21^{2021}(\text{mod}100) \equiv 1+20\times 2021(\text{mod}100) \equiv 21(\text{mod}100).$$

Donc les deux derniers chiffres du nombre 2021^{2021} sont 2 pour les dizaines et 1 pour unité.

2) $E = \{x, x \in Z / \forall n \in \text{IN}, x^n \equiv 1+n(x-1)(\text{mod}100)\}$

Soit $n \in \text{IN}$, d'après 1) a/, $21^n \equiv 1+20n(\text{mod}100)$ ou encore $21^n \equiv 1+n(21-1)(\text{mod}100)$ et ceci prouve que $21 \in E$.

3) a/ Soit $x \in E$.

$x^n \equiv 1+n(x-1)(\text{mod}100)$ est vraie pour tout entier naturel n.

En particulier, pour $n = 2$; $x^2 \equiv 1+2(x-1)(\text{mod}100)$

sig $x^2 \equiv 2x-1(\text{mod}100)$

sig $x^2 - 2x + 1 \equiv 0(\text{mod}100)$

sig $(x-1)^2 \equiv 0(\text{mod}100)$

b/

Reste modulo 10 de a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Reste modulo 10 de a²	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Le tableau de congruence précédent montre que
$a^2 \equiv 0 \pmod{10}$ ssi $a \equiv 0 \pmod{10}$.

$(x-1)^2 \equiv 0 \pmod{100}$ sig $(x-1)^2 = 10 \times 10k \, (k \in \mathbb{Z})$ c'est à dire
$(x-1)^2 \equiv 0 \pmod{10}$ donc $x-1 \equiv 0 \pmod{10}$ ou encore $x \equiv 1 \pmod{10}$.

Autrement :

On note r le reste modulo 10 de $(x-1)$.

Si $(x-1)$ n'est pas un multiple de 10 alors $r \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} = A$

Reste modulo 10 de x - 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Reste modulo 10 de $(x - 1)^2$	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Avec cette hypothèse $(x -1)^2$ n'est pas un multiple de10 par conséquent le chiffre des unités de $(x -1)^2$ est non nul par la suite $(x -1)^2$ n'est pas divisible par 100.

Conclusion : $x-1 \equiv 0 \pmod{10}$ ou encore $x \equiv 1 \pmod{10}$.

Ou bien :

Comme $(x-1)^2 \equiv 0 \pmod{100}$ alors chacun des entiers (naturels) premiers 2 et 5 divise $(x -1)^2$ par conséquent 2 divise $|x-1|$ et 5 divise $|x-1|$

De plus 2x5 = 10 alors 10 divise $|x-1|$ (car $2 \wedge 5 = 1$)

Ainsi $x-1 \equiv 0 \pmod{10}$ ou encore $x \equiv 1 \pmod{10}$.

4) Soit $q \in \mathbb{Z}$

Montrons, par récurrence, que :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+10q)^n \equiv (1+10nq) \pmod{100}$

- Pour $n = 0$, $(1+10q)^0 = 1 = 1 + 10 \times 0 \times q$ d'où

  $(1+10q)^0 \equiv (1+10 \times 0 \times q) \pmod{100}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $(1+10q)^n \equiv (1+10nq) \pmod{100}$ et montrons que $(1+10q)^{n+1} \equiv (1+10(n+1)q) \pmod{100}$

  $$\begin{aligned}(1+10q)^{n+1} = (1+10q)(1+10q)^n &\equiv (1+10q)(1+10nq) \pmod{100} \\ &\equiv 1+10q+10nq+100nq^2 \pmod{100}. \\ &\equiv 1+10(n+1)q \pmod{100}\end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $n \in IN$, $(1+10q)^n \equiv (1+10nq)(\text{mod}100)$

5) D'après 3) b/, Si $x \in E$ alors $x = 10q+1\,(q \in Z)$.

La réciproque est assurée par la question 4).

En effet : $x^n = (1+10q)^n \equiv (1+10nq)(\text{mod}100)$

sig $x^n \equiv (1+n(1+10q-1))(\text{mod}100)$

sig $x^n \equiv (1+n(x-1))(\text{mod}100)$.

Conclusion : $E = \{10q+1, q \in Z\}$

Exercice 3 :

1) a/ $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+\ln x}{x} = -\infty$ donc la droite x = 0 est une asymptote à (ζ).

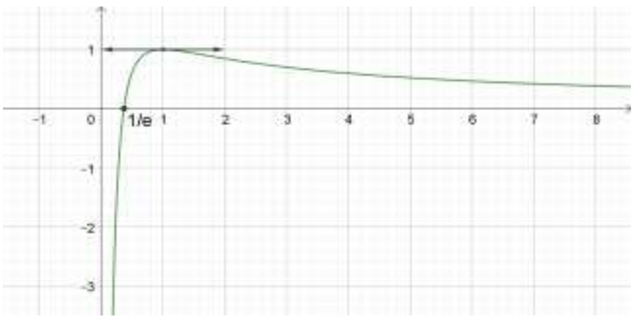
$\lim\limits_{x\to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc la droite y = 0 est une asymptote à (ζ) au voisinage de $(+\infty)$.

b/ Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\varphi'(x) = \dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)x - (1+\ln x)}{x^2} = \dfrac{-\ln x}{x^2}$.

c/

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0	−	
φ	$-\infty$	↗	1	↘	0

d/ $\varphi(x) = 0$ sig $x = \dfrac{1}{e}$.

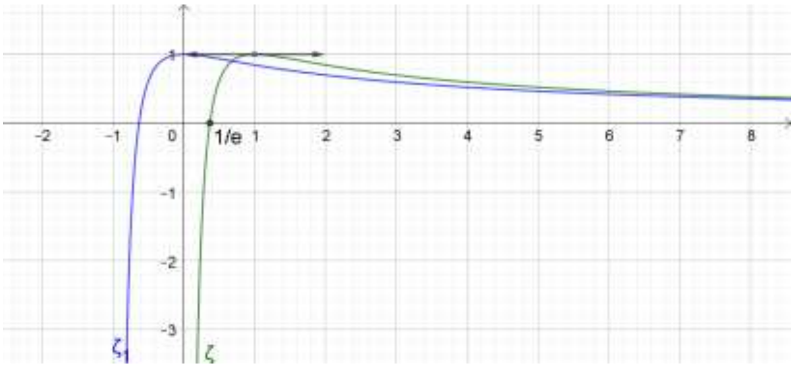


2/ a/ $n \in IN^*$. $\varphi_n(x) = \dfrac{1+\ln(x+n)}{x+n}$; $x \in]-n,+\infty[$

Pour tout $x \in]-n,+\infty[$, $\varphi_n(x) = \dfrac{1+\ln(x+n)}{x+n} = \varphi(x+n)$ avec $x+n \in]0,+\infty[$ donc $N(x,\varphi_n(x)) \in (\zeta_n)$ ssi $M(x+n,\varphi(x+n)) \in (\zeta_n)$

et comme $\varphi_n(x)=\varphi(x+n)$ alors $\overrightarrow{MN}=-n\,\vec{i}$ c'est-à-dire que (ζ_n) est l'image de (ζ) par la translation de vecteur $-n\,\vec{i}$.

b/ (ζ_1) est l'image de (ζ) par la translation de vecteur $-\vec{i}$.



3) a/ $h_n(x)=\varphi_n(x)-\varphi(x)\ ;x\in\left]0,+\infty\right[$.

Soit $x\geq 1$. $h_n(x)=\varphi_n(x)-\varphi(x)=\varphi(x+n)-\varphi(x)$ et comme $x+n>x\geq 1$ et que φ est strictement décroissante sur $\left]0,+\infty\right[$ alors $h_n(x)<0$.

b/ Soit $x\in\left]0,1\right]$. $h_n'(x)=\varphi'(x+n)-\varphi'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}-\dfrac{\ln(x+n)}{(x+n)^2}$

Comme $x\in\left]0,1\right]$ et que $x+n>1$ alors $\ln x\leq 0$ et $\ln(x+n)>0$ d'où $h_n'(x)<0$

c/ * Sur $\left[1,+\infty\right[$, $h_n(x)<0$ donc l'équation $h_n(x)=0$ n'admet aucune solution.

* h_n est continue et strictement décroissante sur $\left]0,1\right]$, donc elle réalise une bijection de $\left]0,1\right]$ sur $h_n(\left]0,1\right])=\left[h_n(1),+\infty\right[$ et comme $h_n(1)<0$ **(3)a/)** alors l'équation $h_n(x)=0$ admet une solution unique α_n dans $\left]0,1\right]$.

Il reste à vérifier que $\dfrac{1}{e}<\alpha_n<1$.

On a : $h_n(1)<0$, il suffira alors de vérifier que $h_n\left(\dfrac{1}{e}\right)>0$

$$h_n\left(\frac{1}{e}\right)=\varphi_n\left(\frac{1}{e}\right)-\varphi\left(\frac{1}{e}\right)=\varphi_n\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1+\ln\left(\frac{1}{e}+n\right)}{\frac{1}{e}+n}>0\ \left(\text{car } \frac{1}{e}+n>1\right)$$

4) a/ $\dfrac{1}{e}<\alpha_n<1$ et $\dfrac{1}{e}<\alpha_{n+1}<1$ donc $1+\dfrac{1}{e}<1+\alpha_{n+1}<2$.

Ainsi, $1+\alpha_{n+1}>1+\dfrac{1}{e}>1$ et comme $\alpha_n<1$ alors $1+\alpha_{n+1}>\alpha_n$ et par suite $n+1+\alpha_{n+1}>n+\alpha_n$.

b/ $n+1+\alpha_{n+1} > n+\alpha_n > 1$ et φ est décroissante sur $[1,+\infty[$ donc

$\varphi(n+1+\alpha_{n+1}) < \varphi(n+\alpha_n)$ (1)

Comme $\varphi(x+n) = \varphi_n(x)$ alors $\varphi(n+1+\alpha_{n+1}) = \varphi_{n+1}(\alpha_{n+1})$ et

$\varphi(n+\alpha_n) = \varphi_n(\alpha_n)$ donc l'inégalité (1) s'écrit : $\varphi_{n+1}(\alpha_{n+1}) < \varphi_n(\alpha_n)$ (2)

D'autre part, $h_n(\alpha_n) = \varphi_n(\alpha_n) - \varphi(\alpha_n) = 0$ alors $\varphi_n(\alpha_n) = \varphi(\alpha_n)$ et aussi

$\varphi_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \varphi(\alpha_{n+1})$ et par suite l'inégalé (2) s'écrit : $\varphi(\alpha_{n+1}) < \varphi(\alpha_n)$.

c/ $\varphi(\alpha_{n+1}) < \varphi(\alpha_n)$, les termes de la suite (α_n) sont dans $]0,1]$ et la fonction φ est strictement croissante sur cet intervalle donc $\alpha_{n+1} < \alpha_n$.

La suite (α_n) est ainsi décroissante et minorée par $\frac{1}{e}$ alors elle va converger vers une limite l

d/ $\frac{1}{e} < \alpha_n < 1$ donc $-1 < \ln(\alpha_n) < 0$ d'où $0 < 1+\ln(\alpha_n) < 1$

Par suite $0 < \varphi(\alpha_n) < \frac{1}{n}$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(\alpha_n) = 0$.

On pose $\beta_n = \varphi(\alpha_n)$.

La fonction φ réalise une bijection de $\left]\frac{1}{e},1\right[$ sur $]0,1[$.

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \varphi^{-1}(\beta_n) = \varphi^{-1}(0) = \frac{1}{e}.$$

Autrement :

$(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+\alpha_n) = +\infty$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi(n+\alpha_n) = 0$

De l'égalité $\varphi(n+\alpha_n) = \varphi(\alpha_n)$ on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi(\alpha_n) = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi(\alpha_n) = 0$. Posons $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n) = L$

Comme $L > \frac{1}{e}$ (car $\alpha_n > \frac{1}{e}$) alors φ est continue en L

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi(\alpha_n) = \varphi(L) = 0$. Par suite $\varphi(L) = 0$ sig $L = \frac{1}{e}$

Exercice 4 :

1) a/ $F(x) = \int_1^x e^{-\sqrt{t}}dt$ et $H(x) = \frac{4}{e} - 2(1+\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}}$. $x \in [0,+\infty[$.

$t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $1 \in [0,+\infty[$ donc F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $F'(x) = e^{-\sqrt{x}}$.

b/ La fonction H est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$H'(x)=-2\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)e^{-\sqrt{x}}\right]=e^{-\sqrt{x}}.$$

F et H sont dérivables sur $]0,+\infty[$ et on a $F'(x)=H'(x)$ et comme F(1) = H(1) = 0 alors F(x) = H(x) pour tout $x\in]0,+\infty[$

c/ Les fonctions F et H coïncident sur $]0,+\infty[$ et sont continues à droite en zéro, donc on a : $F(0)=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}H(x)=H(0)$

2) a/ $G(x)=\displaystyle\int_1^x\sqrt{t}e^{-\sqrt{t}}dt\ ;\ x\in[0,+\infty[$.

Soit $x>0$. $G(x)=\displaystyle\int_1^x\sqrt{t}e^{-\sqrt{t}}dt=\int_1^x\frac{t}{\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}}dt=2\int_1^x t\times\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}}\right)dt$

On pose : $U(t)=t\to U'(t)=1$

$$V'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}}\to V(t)=-e^{-\sqrt{t}}$$

$$G(x)=2\left[-te^{-\sqrt{t}}\right]_1^x+2\int_1^x e^{-\sqrt{t}}dt=2\left(\frac{1}{e}-xe^{-\sqrt{x}}\right)+2F(x)=\frac{2}{e}-2xe^{-\sqrt{x}}+2F(x)$$

b/ $G(x)=\dfrac{2}{e}-2xe^{-\sqrt{x}}+2F(x)$ pour tout $x>0$.

La fonction $x\mapsto\dfrac{2}{e}-2xe^{-\sqrt{x}}+2F(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$

$$G(0)=\lim_{x\to0^+}G(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2}{e}-2xe^{\sqrt{x}}+2F(x)\right)=\frac{2}{e}+2F(0)$$

3) a/ $f(x)=e^{-\sqrt{x}}$ et $g(x)=\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}$

Soit $\lambda\geq1$.

$$\mathcal{A}_1=\int_0^1(f(x)-g(x))\,dx=\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}\,dx-\int_0^1\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\,dx$$

$$=-\int_1^0 e^{-\sqrt{x}}\,dx+\int_1^0\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\,dx$$

$$=-F(0)+G(0)=\frac{2}{e}+F(0)=\frac{2}{e}+H(0)=\frac{2}{e}+\frac{4}{e}-2=\frac{6}{e}-2$$

b/ Soit $\lambda>1$.

$$\mathcal{A}_\lambda=\int_0^\lambda|f(x)-g(x)|\,dx=\int_0^1(f(x)-g(x))\,dx+\int_1^\lambda(g(x)-f(x))\,dx$$

$$\mathcal{A}_\lambda=\mathcal{A}_1+\int_1^\lambda\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\,dx-\int_1^\lambda e^{-\sqrt{x}}\,dx=\mathcal{A}_1+G(\lambda)-F(\lambda).$$

c/ D'après 2) a/ on a :

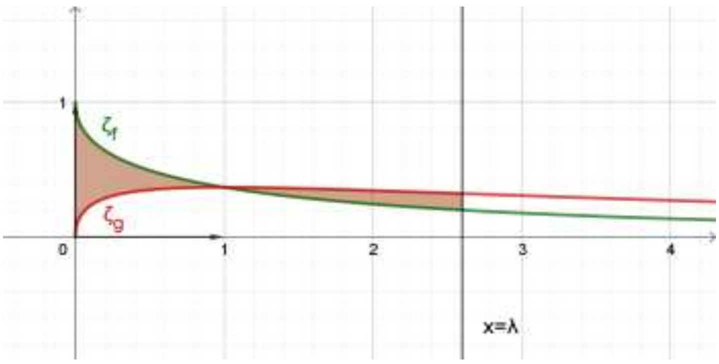
$G(x)=\frac{2}{e}-2xe^{-\sqrt{x}}+2F(x)$ donc $G(x)-F(x)=\frac{2}{e}-2xe^{-\sqrt{x}}+F(x)$

$(x>0)$

D'où $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} G(\lambda)-F(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{2}{e}-2\lambda e^{-\sqrt{\lambda}}+F(\lambda)$

Comme $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda e^{-\sqrt{\lambda}}=0$ et $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}F(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}H(\lambda)=\frac{4}{e}$ alors

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} G(\lambda)-F(\lambda)=\frac{6}{e}$ et par suite $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}_\lambda=\frac{12}{e}-2$



RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2021	Session de contrôle
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**

N° d'inscription

* * * * *

Le sujet comporte cinq pages. Les pages 4/5 et 5/5 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3 points)

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

1) Déterminer les restes possibles modulo 6 de l'entier a^2.

2) Vérifier que $a^3 \equiv a \ (mod\ 6)$.

3) **a/** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^{2n+1} \equiv a \ (mod\ 6)$.

b/ En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $a^{2n} \equiv a^2 \ (mod\ 6)$.

4) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système $\begin{cases} x^7 - y^8 \equiv 0 \ (mod\ 6), \\ x^3y^2 \equiv 1 \ (mod\ 6). \end{cases}$

Exercice 2 (5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure 1 de l'annexe jointe, ABC est un triangle rectangle et isocèle en A de sens direct, le point O est le milieu du segment $[BC]$ et les triangles AEB et ACF sont équilatéraux directs.

1) Soit r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{5\pi}{6}$. Montrer que $r_1(B) = F$ et $r_1(E) = C$.

2) Soit S la symétrie orthogonale d'axe (OA).

a/ Montrer que $S([BE]) = [CF]$.

b/ Les droites (BE) et (CF) se coupent en un point Ω.
Montrer que les points A, O et Ω sont alignés.

3) Soit f un déplacement qui envoie le segment $[BE]$ sur le segment $[CF]$.

a/ Montrer que $f = r_1$ ou f est la rotation r_2 d'angle $-\frac{\pi}{6}$ et de centre Ω.

b/ Construire le point $A' = r_2(A)$ et montrer que $ACA'F$ est un losange.

4) Soit g l'antidéplacement qui envoie B sur F et E sur C.

a/ Montrer que g est une symétrie glissante.

b/ Montrer que $g(A) = A'$.

c/ Soit I le milieu du segment $[BE]$ et $J = g(I)$. Montrer que $g = S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{IJ}}$.

Exercice 3 (4.5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) **a/** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+z+\frac{1}{3}=0$.
On note z_1 et z_2 les solutions avec $Im(z_1)>0$.

b/ Écrire z_1 sous forme exponentielle.

Dans la figure 2 de l'annexe jointe , A et B sont les points d'affixes respectives 1 et $e^{i\frac{5\pi}{6}}$. Δ est la droite d'équation $x=-\frac{1}{2}$.

2) La droite Δ coupe la droite (OB) au point C.
Montrer que l'affixe du point C est égale à z_1.

3) Soit D le point d'affixe $z_D=\frac{1}{3\sqrt{3}}i$.

a/ Vérifier que $z_D=z_1^3$.

b/ Montrer que $\frac{z_D-1}{z_1-1}=\frac{2}{3}$.

c/ Construire le point D.

4) Soit $z\in\mathbb{C}$.
Montrer que $\left(z^2+z\in\mathbb{R}\right)$ équivaut à $\left(z\in\mathbb{R}\ \text{ ou }\ Re(z)=-\frac{1}{2}\right)$.

5) Pour $z\in\mathbb{C}\setminus\{\,1\,\}$, on désigne par M et N les points d'affixes respectives z et z^3.

a/ Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.

b/ Dans la figure 2 de l'annexe, on a placé un point P de la droite Δ d'affixe α .
Construire, en justifiant, le point Q d'affixe α^3.

Exercice 4 (7.5 points)

Partie A

Dans la figure 3 de l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=xe^x$.
α et β sont les réels tels que $g(\alpha)=1$ et $g(\beta)=\frac{1}{2}$.

1) En utilisant le graphique,

a/ donner le tableau de signe de la fonction dérivée g' de g,

b/ résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations ci-dessous.

$$g(x)<\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad g(x)<1.$$

2) Montrer que $\alpha>\frac{1}{2}$.

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=g(x)-\left(g(x)\right)^2$.
On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a/ Calculer $f(\alpha)$ et $f(\beta)$.

b/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter le résultat.

c/ Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$. Déterminer la branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

4) **a/** Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=2g'(x)\left(\dfrac{1}{2}-g(x)\right)$.

b/ Dresser le tableau de variation de f.

c/ Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $(O,\vec{i}\,,\vec{j})$.

5) Soit $\mathscr{A}$ l'aire en $(u.a)$ de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\alpha$.

a/ Montrer que $\mathscr{A}=\dfrac{1}{2}-\displaystyle\int_0^{\alpha} xe^{2x}dx$.

b/ En déduire que $\mathscr{A}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2\alpha}+\dfrac{1}{4\alpha^2}$.

Partie B

Pour tout entier $n\geqslant 2$, on pose $J_n=\displaystyle\int_0^{\alpha}\left(g(x)\right)^n dx$.

1) **a/** Montrer que $0\leqslant J_n\leqslant\dfrac{\alpha}{n+1}$.

b/ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

2) **a/** Montrer que $\displaystyle\int_{\alpha-\frac{1}{n}}^{\alpha}\left(g(x)\right)^n dx\leqslant J_n$.

b/ Montrer que $\dfrac{1}{n}\left[g\left(\alpha-\dfrac{1}{n}\right)\right]^n\leqslant J_n\leqslant 1$.

c/ Justifier que $\sqrt[n]{n}=e^{\frac{\ln n}{n}}$ puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{J_n}=1$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques
Session de contrôle (2021)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

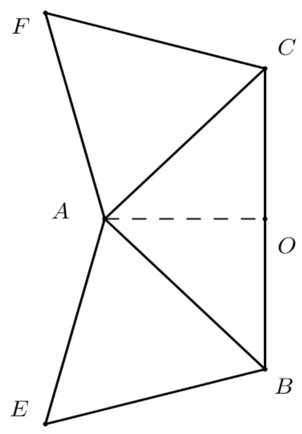
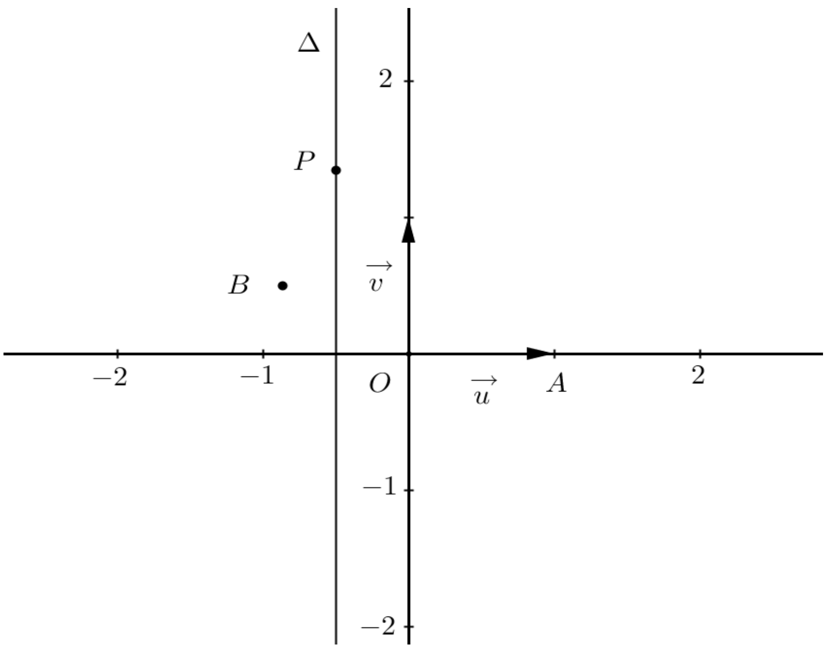
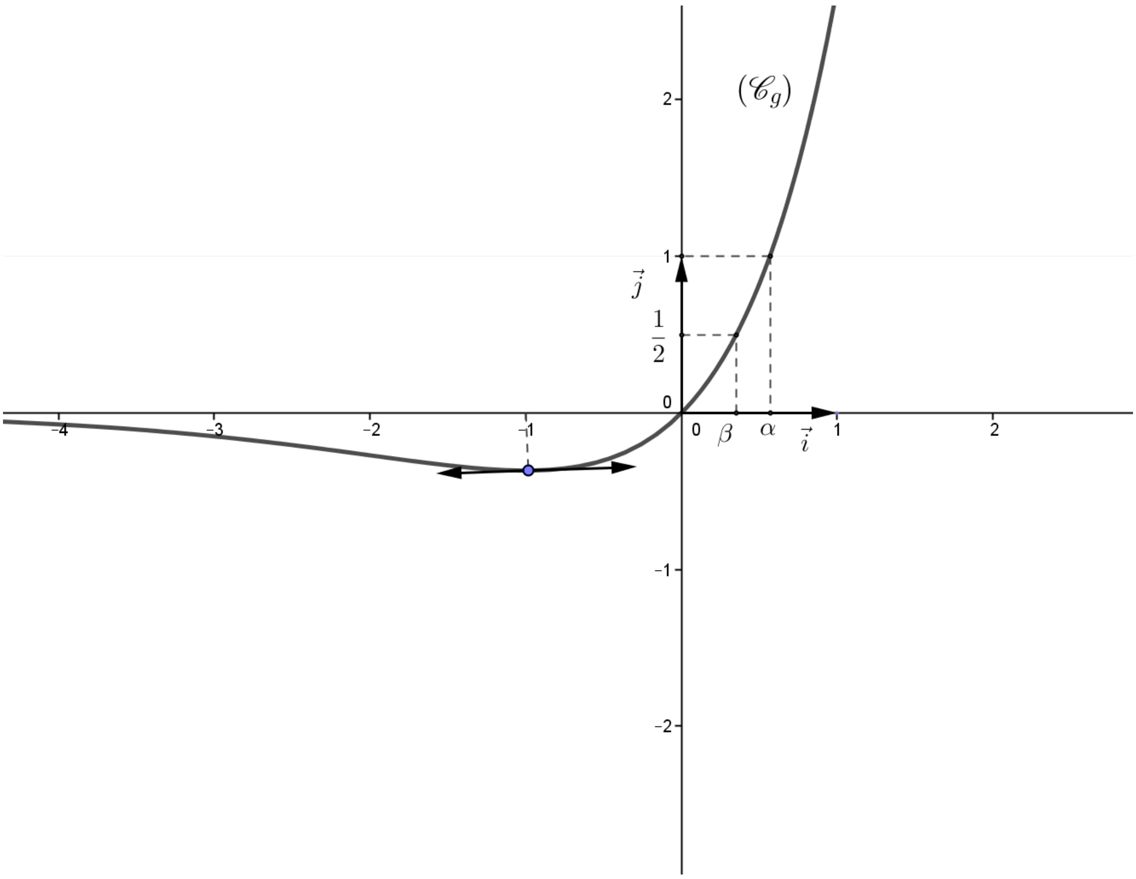


Figure 2



Ne rien écrire ici

Figure 3



MATHÉMATIQUES
Section : Mathématiques
Session de contrôle 2021

Exercice 1 :

Soit $a \in \mathbb{Z}$.

1) On note r_1 et r_2 les restes possibles modulo 6 respectivement des entiers a et a^2.

r_1	0	1	2	3	4	5
r_2	0	1	4	3	4	1

Donc les restes possibles modulo 6 de a^2 sont 0, 1, 3 et 4.

2) On note r_1, r_2 et r_3 les restes possibles modulo 6 respectivement des entiers a, a^2 et a^3.

r_1	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
r_2	0	1	4	3	4	1
$r_3 = r_1.r_2$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

D'après le tableau on a : $r_3 = r_1$, par suite $a^3 \equiv a \pmod 6$

3) a/ * Pour $n = 0$ on a : $a^{2\times 0+1} \equiv a \pmod 6$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

* Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $a^{2n+1} \equiv a \pmod 6$ alors $a^{2n+3} \equiv a \pmod 6$

On a : $a^{2n+3} = a^{2n+1} \times a^2$ donc $a^{2n+3} \equiv a^{2n+1} \times a^2 \pmod 6 \equiv a^3 \pmod 6 \equiv a \pmod 6$

Ainsi si la propriété est vraie pour n alors elle est vraie pour $(n + 1)$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^{2n+1} \equiv a \pmod 6$

b/ On a : $a^{2n} = a \times a^{2n-1}$.

Pour tout $n \geq 1$, $a^{2(n-1)+1} \equiv a \pmod 6$ (d'après 3) a/)

D'où $a^{2n-1} \equiv a \pmod 6$ par suite $a^{2n} \equiv a^2 \pmod 6$

4) D'après 3) a/ on a : $x^{2\times 3+1} \equiv x \pmod 6$ d'où $x^7 \equiv x \pmod 6$

$x^{2\times 1+1} \equiv x \pmod 6$ d'où $x^3 \equiv x \pmod 6$

D'après 3) b/ on a : $x^{2\times 4} \equiv x^2 \pmod 6$ d'où $x^8 \equiv x^2 \pmod 6$

$$\begin{cases} x^7 - y^8 \equiv 0 \pmod 6 \\ x^3.y^2 \equiv 1 \pmod 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y^2 \equiv 0 \pmod 6 \\ x.y^2 \equiv 1 \pmod 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y^2 \equiv 0 \pmod 6 \\ y^4 \equiv 1 \pmod 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 1 (\text{mod } 6) \\ y^2 \equiv 1(\text{mod } 6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 1 (\text{mod } 6) \\ y \equiv 1(\text{mod } 6) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \equiv 1 (\text{mod } 6) \\ y \equiv 5(\text{mod } 6) \end{cases}$$

$S_{Z^2} = \{(1 + 6k, 1 + 6k) ; (1 + 6k, 5 + 6k)\ k \in Z\}$

Exercice 2 :

1) On a : AB = AC et AC = AF d'où AB = AF.

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF})\ 2\pi$

$\equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\ 2\pi$

D'où $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) \equiv \frac{5\pi}{6}\ 2\pi$, par suite $r_1(B) = F$.

On a : AE = AB et AB = AC d'où AE = AC.

$(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\ 2\pi$

$\equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\ 2\pi$

D'où $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{5\pi}{6}\ 2\pi$, par suite $r_1(E) = C$.

2) a/ On a : AB = AC et O milieu de [BC] donc (AO) est la médiatrice de [BC].
D'où S(B) = C.
On suppose que S(E) = E'.

On a : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) \equiv -(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE'})\ 2\pi$ d'où $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE'}) \equiv \frac{\pi}{3}\ 2\pi$.

Or $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{3}\ 2\pi$ donc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE'}) \equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF})\ 2\pi$ d'où $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE'}) \equiv 0\ 2\pi$ (1)

On a : S(E) = E' donc AE = AE', d'autre part AE = AB = AC = AF donc AF = AE'(2)
D'après (1) et (2) on a : F = E', d'où S(E) = F.
On a : S(B) = C et S(E) = F donc s([BE]) = [CF].

b/ On a : $(BE) \cap (CF) = \{\Omega\}$ et S((BE)) = (CF), S((CF)) = (BE)
Comme $(BE) \cap (CF) = \{\Omega\}$ alors $S(\Omega) = \Omega$.
Par suite $\Omega \in (OA)$.

3) a/ On a : f([BE]) = [CF] donc f(B) = C et f(E) = F ou f(B) = F et F(E) = C.

- Si f(B) = F et f(E) = C alors $f = r_1$ car r_1 est l'unique déplacement qui envoi B en F et E en C.
- Si (B) = C et f(E) = F alors f est un déplacement d'angle $\theta \equiv (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF})\ 2\pi$.

Or on a $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{FC}) \equiv \frac{5\pi}{6}\ 2\pi$ (car $r_1(B) = F$ et $r_1(E) = C$) donc $\theta \equiv \frac{5\pi}{6} - \pi\ 2\pi \equiv -\frac{\pi}{6}\ 2\pi$

Comme $\theta \neq 2k\pi,\ k \in Z$ alors f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{6}$

On considère la rotation r_2 de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{6}$

✓ On a $\Omega B = \Omega C$ (car $\Omega \in$ med([BC])) et $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}) \equiv (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF})\ 2\pi$ donc

$(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}) \equiv -\frac{\pi}{6}\ 2\pi$ par suite $r_2(B) = C$.

✓ On a $\Omega E = \Omega F$ (car $\Omega \in$ med([EF])) et $(\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega F}) \equiv (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF})\ 2\pi$ donc

$(\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega F}) \equiv -\frac{\pi}{6}\ 2\pi$ par suite $r_2(E) = F$.

Par suite $f = r_2$ car r_2 est l'unique déplacement qui envoi B en C et E en F.

b/ On a : $r_2(B) = C$, $r_2(E) = F$ et $r_2(A) = A'$ alors CA' = BA = CA donc A' est un point du cercle ζ de centre C et passant par A, et A' ≠ A.

D'autre part on a : FA' = EA = FA donc A' est un point du cercle ζ' de centre F et passant par A et A' ≠ A.

Conclusion : $(\zeta \cap \zeta') \setminus \{A\} = \{A'\}$ (Voir **Figure**)

On a : CA' = CA et FA' = FA et comme on a CA = FA alors CA' = CA = FA = FA' d'où le quadrilatère ACA'F est un losange.

4) On a g est antidéplacement tel que g(B) = F et g(E) = C.

a/ On a : med([BF]) ≠ med([EC]) car (BF) et (EC) ne sont pas parallèles, donc g n'est pas une symétrie orthogonale par suite g est une symétrie glissante.

b/ On a : AEB est un triangle équilatéral direct alors son image par g est un triangle équilatéral direct.

Comme on a g(B) = F, g(E) = C et A'CF est un triangle équilatéral direct alors g(A) = A'.

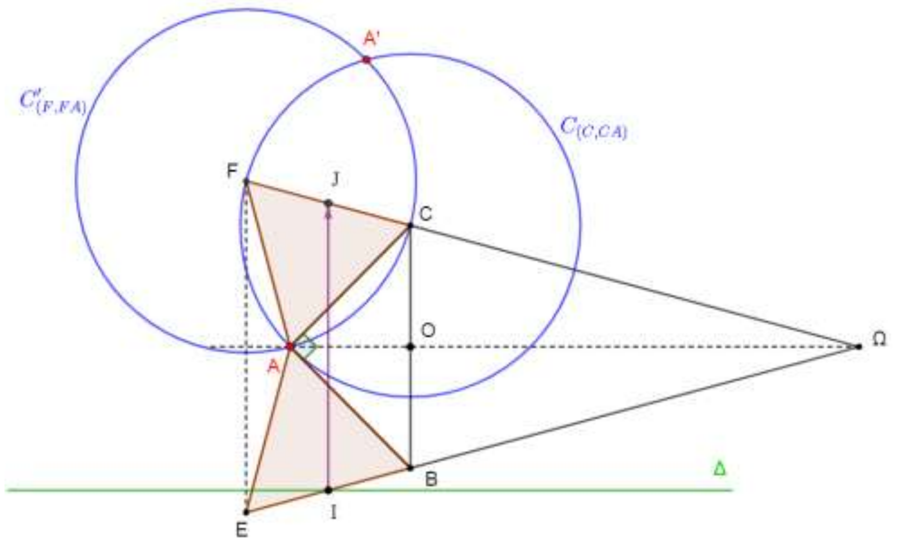
c/ Soit Δ l'axe de g et $\vec{u}$ son vecteur, alors on a $g = t_{\vec{u}} o S_\Delta = S_\Delta o t_{\vec{u}}$

g(A) = A' et J milieu de [AA'] alors $J \in \Delta$ (d'après 3) b))

g(I) = J alors le milieu de [IJ] appartient à Δ d'où Δ = (IJ).

$g(I) = J \Leftrightarrow t_{\vec{u}} o S_\Delta(I) = J \Leftrightarrow t_{\vec{u}}(I) = J \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{IJ}$

Figure



Exercice 3 :

1) a/ $\Delta=-\frac{1}{3}=(\frac{i}{\sqrt{3}})^2$

$z_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}i$ et $z_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}i$

$S_C=\{z_1\,;\,z_2\}$

b/ $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}i=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

2) On a : $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}i=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Ainsi $\text{Ré}(z_1)=-\frac{1}{2}$ et $\arg(z_1)\equiv\arg(z_B)[2\pi]\equiv\arg(z_C)[2\pi]$

Par suite $z_C=z_1$

3) a/ $z_D=\frac{1}{\sqrt{3}}i$

$(z_1)^3=(\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\frac{5\pi}{6}})=\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{i\frac{5\pi}{2}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}i=z_D$

b/ $\frac{z_D-1}{z_1-1}=\frac{z_1{}^3-1}{z_1-1}=\frac{(z_1-1)(z_1{}^2+z_1+1)}{(z_1-1)}=z_1{}^2+z_1+1$

z_1 est solution de l'équation (E) donc $z_1{}^2+z_1+1=z_1{}^2+z_1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

Par suite $\frac{z_D-1}{z_1-1}=\frac{2}{3}$

c/ On a : $\frac{z_D-1}{z_1-1}=\frac{2}{3}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires d'où $D\in(AC)$.

D'autre part $z_D=\frac{1}{\sqrt{3}}i$ donc le point $D\in(O,\vec{v})$

Par suite $(AC)\cap(O,\vec{v})=\{D\}$.

4) $z^2+z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\bar{z}^2+\bar{z}=z^2+z\Leftrightarrow(\bar{z}-z)(z+\bar{z}+1)=0\Leftrightarrow\bar{z}=z$ ou $2\text{Re}(z)=-1$

D'où $z^2+z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$ ou $\text{Re}(z)=-\frac{1}{2}$

5) a/ $M(z)$, $N(z^3)$.

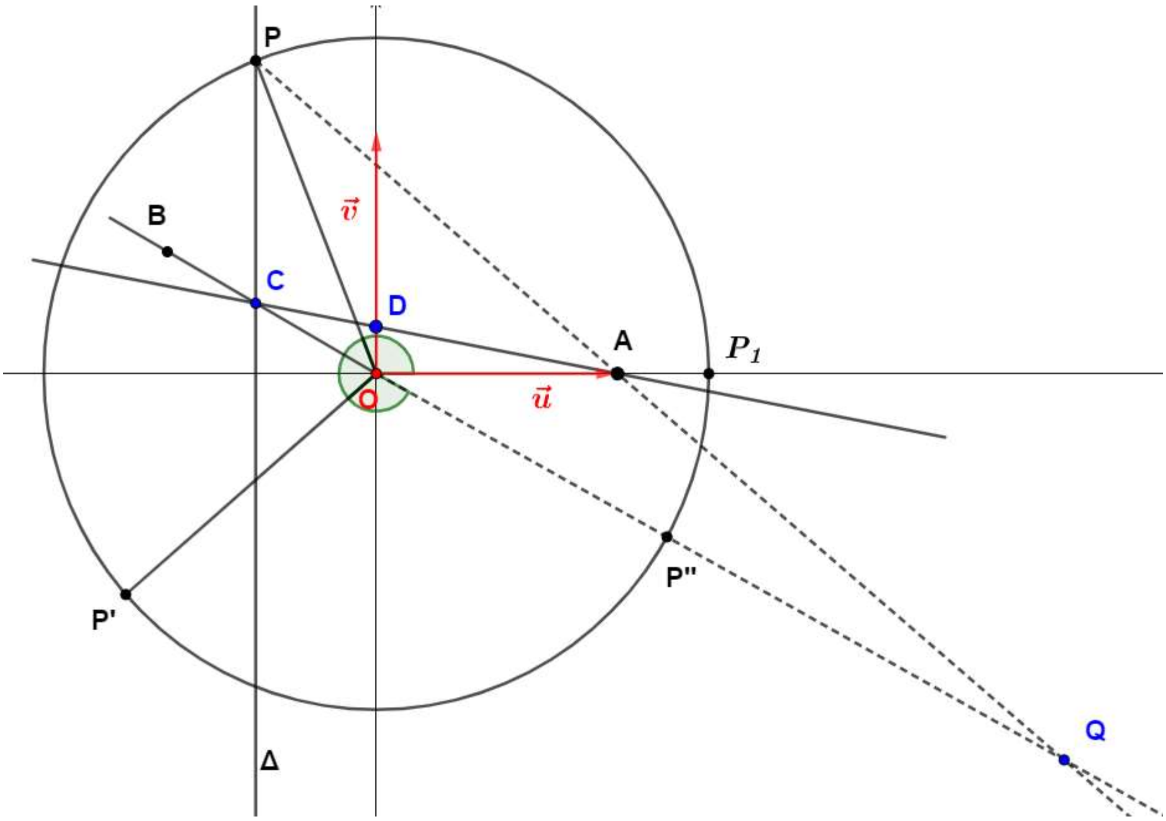
$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow\frac{z^3-1}{z-1}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(z^2+z+1)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(z^2+z)\in\mathbb{R}$

$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$ ou $\text{Re}(z)=-\frac{1}{2}$

Par suite l'ensemble des point M tel que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires est $\Delta\cup(O,\vec{u})\setminus\{A\}$

b/ On a $P\in\Delta$ alors $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AQ}$ sont colinéaires.

De plus $\alpha\neq0$ alors $(\vec{u},\overrightarrow{OQ})\equiv\arg(\alpha^3)\ 2\pi\ \equiv3(\vec{u},\overrightarrow{OP})\ 2\pi$



Exercice 4 :

Partie A

1) a/ On a : g'(x) < 0 pour tout x < - 1

g'(x) > 0 pour tout x > -1

g'(-1) = 0

x	-∞		-1		+∞
g'(x)		–	0	+	

b/ $g(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in -\infty, \beta$ d'où $S_{IR} = -\infty, \beta$

$g(x) < 1 \Leftrightarrow x \in -\infty, \alpha$ d'où $S_{IR} = -\infty, \alpha$

2) On suppose que $\alpha \leq \frac{1}{2}$ alors $e^{\alpha} \leq \sqrt{e}$ d'où $\alpha e^{\alpha} \leq \frac{1}{2}\sqrt{e}$ d'où $g(\alpha) \leq \sqrt{\frac{e}{4}}$ ce qui est absurde car g(α) = 1 et par suite $\alpha > \frac{1}{2}$.

Autrement : $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} \simeq 0,82 < 1$ d'après 1) b) On a : $\frac{1}{2} \in -\infty, \alpha$

3) a/ $f(\alpha)=0$ et $f(\beta)=\beta e^{\beta}-\left(\beta e^{\beta}\right)^{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

b/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[g(x)-(g(x))^2\right]=0-0=0.$

La droite d'équation : y = 0 est une asymptote horizontale à (ζ) au voisinage de (-∞)

c/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(g(x))^2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\left[1-g(x)\right]=(+\infty)\times(-\infty)=-\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}\left[1-xe^{x}\right]=(+\infty)\times(-\infty)=-\infty.$

La courbe (ζ) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$ au voisinage de (+∞).

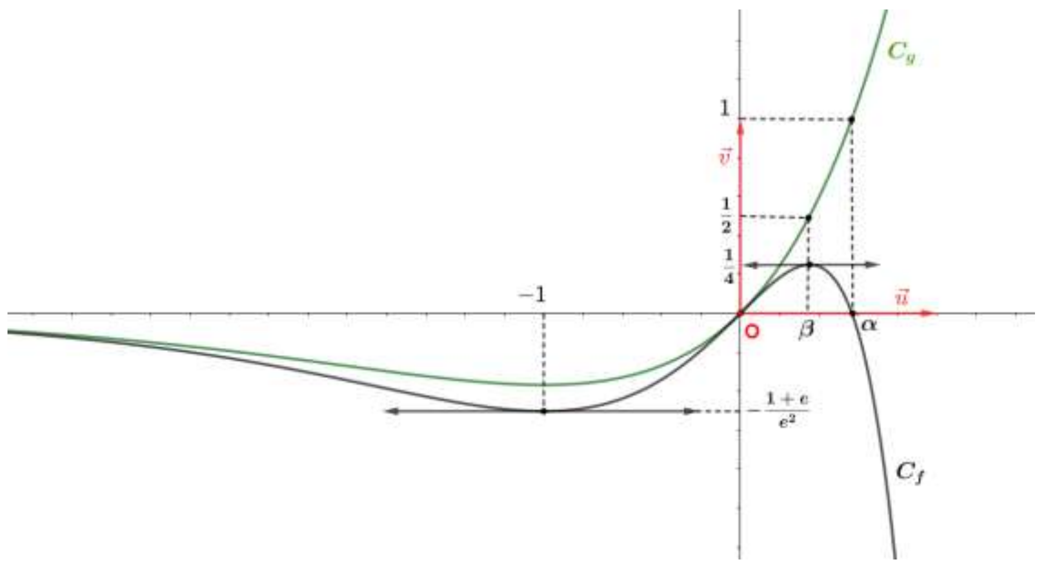
4) a/ On a f(x) = g(x) – (g(x))² donc $f'(x)=g'(x)-2g'(x)g(x)=2g'(x)\left[\frac{1}{2}-g(x)\right]$

b/ $f'(x)=0$ sig $g'(x)=0$ ou $g(x)=\frac{1}{2}$

sig x = -1 ou x = β

x	$-\infty$		-1		β		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{1}{2}-g(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1+e}{e^2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

c/



5) a/ $\mathcal{A} = \int_0^{\alpha} |f(x) - g(x)| dx = \int_0^{\alpha} (g(x) - f(x)) dx = \int_0^{\alpha} (g(x))^2 dx = \int_0^{\alpha} x^2 e^{2x} dx.$

On pose $U(x) = x^2 \to U'(x) = 2x$

$$V'(x) = e^{2x} \to V(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$\mathcal{A} = \left[\frac{1}{2} x^2 e^{2x}\right]_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha} x e^{2x} dx = \frac{1}{2}\alpha^2 e^{2\alpha} - \int_0^{\alpha} x e^{2x} dx.$$

On a : $g(\alpha) = 1$ donc $\frac{1}{2}\alpha^2 e^{2\alpha} = \frac{1}{2}(g(\alpha))^2 = \frac{1}{2}$

Par suite $\mathcal{A} = \frac{1}{2} - \int_0^{\alpha} x e^{2x} dx.$

b/ Par une intégration par parties de l'intégrale $\int_0^{\alpha} x e^{2x} dx.$ on a :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2} x e^{2x}\right]_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2} x e^{2x}\right]_0^{\alpha} + \left[\frac{1}{4} e^{2x}\right]_0^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha e^{2\alpha} + \frac{1}{4} e^{2\alpha} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\alpha}\alpha^2 e^{2\alpha} + \frac{1}{4\alpha^2}\alpha^2 e^{2\alpha}$$

Comme $\alpha^2 e^{2\alpha} = 1$ alors $\mathcal{A} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{4\alpha^2}$

Partie B

1) a/ On a pour tout $x \in [0, \alpha]$, $1 \le e^{nx} \le e^{n\alpha}$ et $x^n \ge 0$ alors $0 \le x^n e^{nx} \le x^n e^{n\alpha}$

D'où $0 \le \int_0^{\alpha} x^n e^{nx} dx \le e^{n\alpha} \int_0^{\alpha} x^n dx$

Ainsi $0 \le J_n \le \frac{\alpha^{n+1} e^{n\alpha}}{n+1}$ de plus $\alpha^{n+1} e^{n\alpha} = \alpha\left(\alpha e^{\alpha}\right)^n = \alpha \times 1 = \alpha$

Par suite $0 \le J_n \le \frac{\alpha}{n+1}$

b/ On a $0 \le J_n \le \frac{\alpha}{n+1}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\alpha}{n+1} = 0$

Par suite $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n = 0$

2) a/ Pour $n \ge 2$ on a $0 \le \alpha - \frac{1}{n}$ car $\alpha > \frac{1}{2}$

On a : $J_n = \int_0^{\alpha} (g(x))^n dx = \int_0^{\alpha-\frac{1}{n}} (g(x))^n dx + \int_{\alpha-\frac{1}{n}}^{\alpha} (g(x))^n dx$

On a $0 \le \alpha - \frac{1}{n}$ et $(g(x))^n \ge 0$ pour tout $x \in \left[0, \alpha - \frac{1}{n}\right]$ donc $\int_0^{\alpha-\frac{1}{n}} (g(x))^n dx \ge 0$

Par suite $\int_{\alpha-\frac{1}{n}}^{\alpha} (g(x))^n dx \le J_n$

b/ Pour $n \ge 2$ on a $\int_{\alpha-\frac{1}{n}}^{\alpha} (g(x))^n dx \le \int_0^{\alpha} (g(x))^n dx \le \frac{\alpha}{n+1}$

- $\frac{\alpha}{n+1} < 1$ (1)
- $\int_{\alpha-\frac{1}{n}}^{\alpha} (g(x))^n\, dx \ge \int_{\alpha-\frac{1}{n}}^{\alpha} \left(g(\alpha - \frac{1}{n})\right)^n dx$, car g est croissante et positive sur

$\left[\alpha - \frac{1}{n}, \alpha\right]$. De plus on a $\int_{\alpha-\frac{1}{n}}^{\alpha} \left(g(\alpha - \frac{1}{n})\right)^n dx = \frac{1}{n}\left(g(\alpha - \frac{1}{n})\right)^n$ (2)

Par suite d'après (1) et (2) on a : $\frac{1}{n}\left(g(\alpha - \frac{1}{n})\right)^n \le J_n \le 1$

c/ On a $\ln(\sqrt[n]{n}) = \ln n^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\ln n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt[n]{n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln}{n}} = e^0 = 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha - \frac{1}{n}) = \alpha$ et g est continue en α alors $\lim\limits_{n\to+\infty} g(\alpha - \frac{1}{n}) = g(\alpha) = 1$

On a d'après 2) b/ $\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\left(g(\alpha - \frac{1}{n})\right) \le \sqrt[n]{J_n} \le 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}\left(g(\alpha - \frac{1}{n})\right) = 1$

Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{J_n} = 1$

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2022	Session principale
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**

N° d'inscription

✎✎✎✎✎

Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6

Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

✎Exercice 1 (3 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit $\theta \in \left]0, \pi\right[$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2e^{i\theta} z + \left(e^{2i\theta} - 4\right) = 0$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On note z_1 et z_2 les solutions de (E). z_1 est tel que $\Re e\left(z_1\right) < 0$.

2) On considère les points A, B, I, M_1 et M_2 d'affixes respectives 1, -1, $e^{i\theta}$, z_1 et z_2.

a) Montrer que I est le milieu du segment $\left[M_1 M_2\right]$.

b) Vérifier que $\overrightarrow{IM_1} = \overrightarrow{AB}$.

c) Dans la **figure 1** de l'annexe jointe, on a placé dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, les points A, B et I.

Construire les points M_1 et M_2.

3) a) Montrer que les droites $\left(AM_2\right)$ et $\left(BM_1\right)$ se coupent au point J d'affixe $\left(-e^{i\theta}\right)$.

b) Déterminer la valeur du réel θ telle que l'aire du triangle JM_1M_2 soit maximale.

✎Exercice 2 (5 points)

Le plan est orienté. Dans la **figure 2** de l'annexe jointe,

- OAB est un triangle rectangle et isocèle en O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{4} \left[2\pi\right]$.
- CBA est un triangle isocèle en C tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{12} \left[2\pi\right]$.

1) Soit R la rotation de centre B et d'angle $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

a) Vérifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3} \left[2\pi\right]$.

b) On note $D = R(C)$. Justifier que les points O, D et B sont alignés et construire le point D.

c) Montrer que le triangle ACD est rectangle et isocèle en C.

2) Soit f la similitude directe telle que $f(B) = A$ et $f(O) = C$.

a) Montrer que $f(A) = D$.

b) Montrer qu'une mesure de l'angle de f est $\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.

c) Soit $E = f(D)$. Vérifier que le point E est un point de la droite (AC).

d) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DE}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$ puis construire le point E.

e) Soit Ω le centre de f. Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega E}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

3) On suppose $OA = OB = 1$ et on rapporte le plan au repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

a) On note z_C l'affixe du point C. Montrer que $\arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$.

b) Soit $z' = az + b$ l'expression complexe de f où a et b sont deux nombres complexes.

Montrer que $ai + b = 1$ et que $z_C = b$.

c) On note z_Ω l'affixe de Ω. Vérifier que $z_\Omega \neq 0$ et montrer que $\frac{z_\Omega - i}{z_\Omega} = \frac{1-i}{b}$.

En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega B}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

4) Montrer que le point Ω est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OE) et le construire.

✎ **Exercice 3** (5,5 points)

Partie A

Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 19u + 11v = 1$.

1)a) Vérifier que $(-4, 7)$ est une solution de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).

2)a) Montrer que $u = 7$ est l'unique entier appartenant à $\{1, 2, ..., 10\}$ tel que $19u \equiv 1\ (\text{mod}\ 11)$.

b) Montrer de même que $v = 7$ est l'unique entier appartenant à $\{1, 2, ..., 18\}$ tel que $11v \equiv 1\ (\text{mod}\ 19)$.

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E_{209}) : x^2 \equiv x\ (\text{mod}\ 209)$.

Partie B

1) Vérifier que les entiers 0 et 1 sont des solutions de (E_{209}).

2) Décomposer 209 en produit de facteurs premiers.

3) Montrer que 133 et 77 sont des solutions de (E_{209}).

4) Soit x une solution de $\left(E_{209}\right)$.

a) Montrer que 19 divise $x\left(x-1\right)$ et 11 divise $x\left(x-1\right)$.

b) Vérifier que x et $\left(x-1\right)$ sont premiers entre eux.

5) Soit x une solution de $\left(E_{209}\right)$ appartenant à $\left\{2,3....,208\right\}$.

a) Montrer que 19 divise x ou 11 divise x.

b) On suppose que $x=19k$ où k est un entier.

Montrer que 11 divise $\left(x-1\right)$ puis déduire que $x=133$.

c) On suppose que 11 divise x. Montrer que $x=77$.

6) Déterminer les solutions de $\left(E_{209}\right)$ appartenant à $\left\{0,1,...,208\right\}$.

Partie C

Soit y un entier et x son reste modulo 209.

1) Montrer que y est une solution de $\left(E_{209}\right)$ si et seulement si x est une solution de $\left(E_{209}\right)$.

2) Donner alors les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $\left(E_{209}\right)$.

✎**<u>Exercice 4</u> (6,5 points)**

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\left]1,+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$.

On note $\left(C\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$. Interpréter graphiquement.

2)a) Montrer pour tout $x>1$, $f'(x)=\dfrac{-1}{x\ln^2 x}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer $\left(C\right)$.

3) Montrer que l'équation $f(x)=x$ possède sur $\left]1,+\infty\right[$ une unique solution α et que $\alpha<e$.

Partie B

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x > 1$, on pose $F(x) = \int_{\alpha}^{x} \left(f(t)\right)^n \, dt$ et $H(x) = \int_{\ln\alpha}^{\ln x} \frac{e^t}{t^n} \, dt$.

a) Montrer que H est dérivable sur $\left]1, +\infty\right[$ et calculer $H'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x > 1$, $H(x) = F(x)$.

2) On pose pour tout entier $n \geq 1$, $U_n = \int_{\alpha}^{e} \left(f(t)\right)^n \, dt$.

a)Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $U_n = \int_{\ln\alpha}^{1} \frac{e^t}{t^n} \, dt$.

b) En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\frac{\alpha^n - \alpha}{n-1} \leq U_n \leq \frac{e}{n-1}\left(\alpha^{n-1} - 1\right)$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\alpha^n}{n} = +\infty$ puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

d) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_n}{\alpha^n}$.

3) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} (k-2) U_k$.

a) En intégrant par parties, montrer que pour tout $n \geq 1$, $U_n = e - \alpha^{n+1} + n\, U_{n+1}$.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $S_n = \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^2}{\alpha - 1} + (1-n)e - U_n$.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{\alpha^n}$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve : Mathématiques - Section : Mathématiques

Session principale (2022)

Annexe à rendre avec la copie

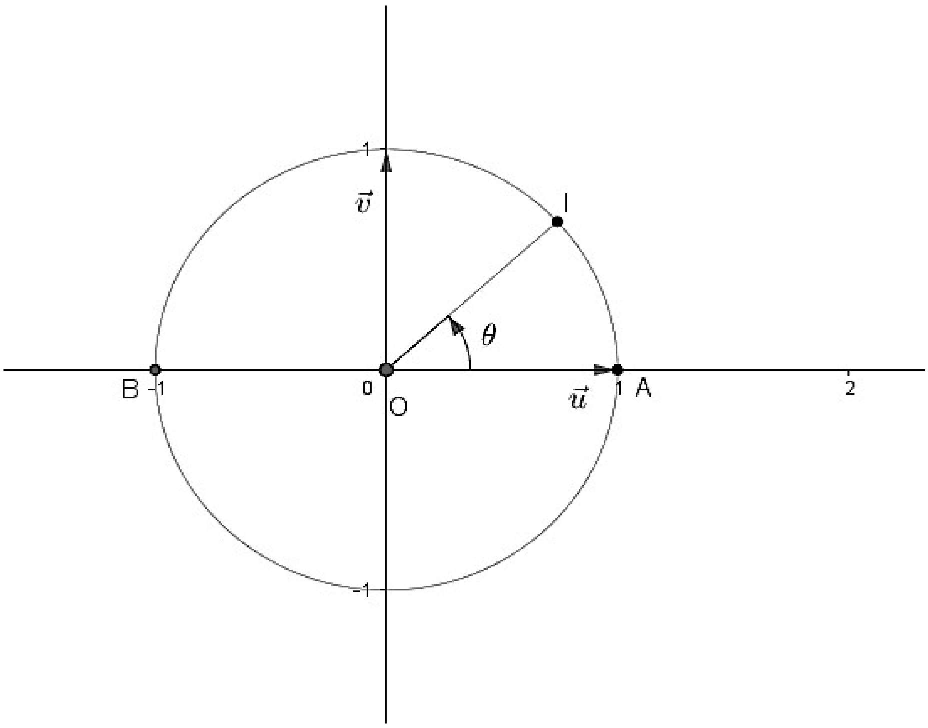


Figure 1

Ne rien écrire ici

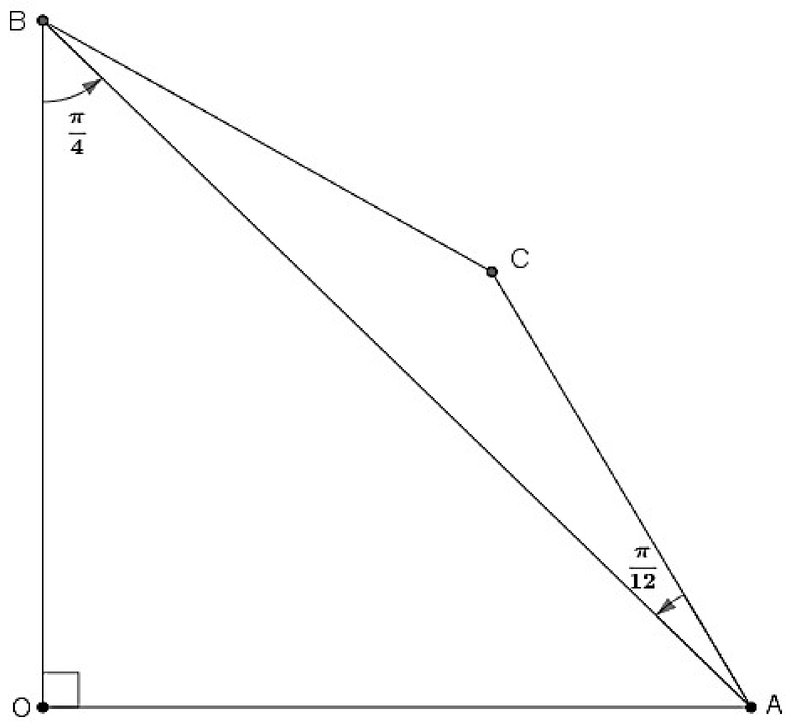


Figure 2

Un corrigé proposé par Mr Mechmeche Imed
du sujet de mathématique, section maths
de la session principale 2022

Exercice 1

$(E) : z^2 - 2e^{i\theta}z + \left(e^{i2\theta} - 4\right) = 0$

1) $\Delta = \left(-2e^{i\theta}\right)^2 - 4\left(e^{i2\theta} - 4\right) = 16$, donc une racine carrée de Δ est $\delta = 4$

d'où les solutions de l'équation (E) sont :

$z_1 = \frac{2e^{i\theta}-4}{2} = e^{i\theta} - 2$ et $z_2 = \frac{2e^{i\theta}+4}{2} = e^{i\theta} + 2$. On a bien $R(z_1) = \cos\theta - 2 < 0$

2) a) $\frac{z_{M_1}+z_{M_2}}{2} = \frac{z_1+z_2}{2} = \frac{e^{i\theta}-2\ +e^{i\theta}+2}{2} = e^{i\theta} = z_I \iff I = M_1 * M_2$

b) On a $z_{M_1} - z_I = z_B - z_A = -2 \quad \iff \overrightarrow{IM_1} = \overrightarrow{AB}$

c) Le point M_1 est le quatrième sommet du parallélogramme $BAIM_1$

Le point M_2 est le symétrique de M_1 par apport à I

3) a) $Im(z_1) = \sin\theta \neq 0$ car $\theta \in]0, \pi[$ donc $M_1 \notin (AB)$ donc (BM_1) et (AM_2) sont sécantes

de plus on a $\frac{z_{M_2}-z_J}{z_A-z_J} = 2 \in \mathbb{R} \implies J \in (AM_2)$ et $\frac{z_{M_1}-z_J}{z_B-z_J} = 2 \in \mathbb{R} \implies J \in (BM_1)$

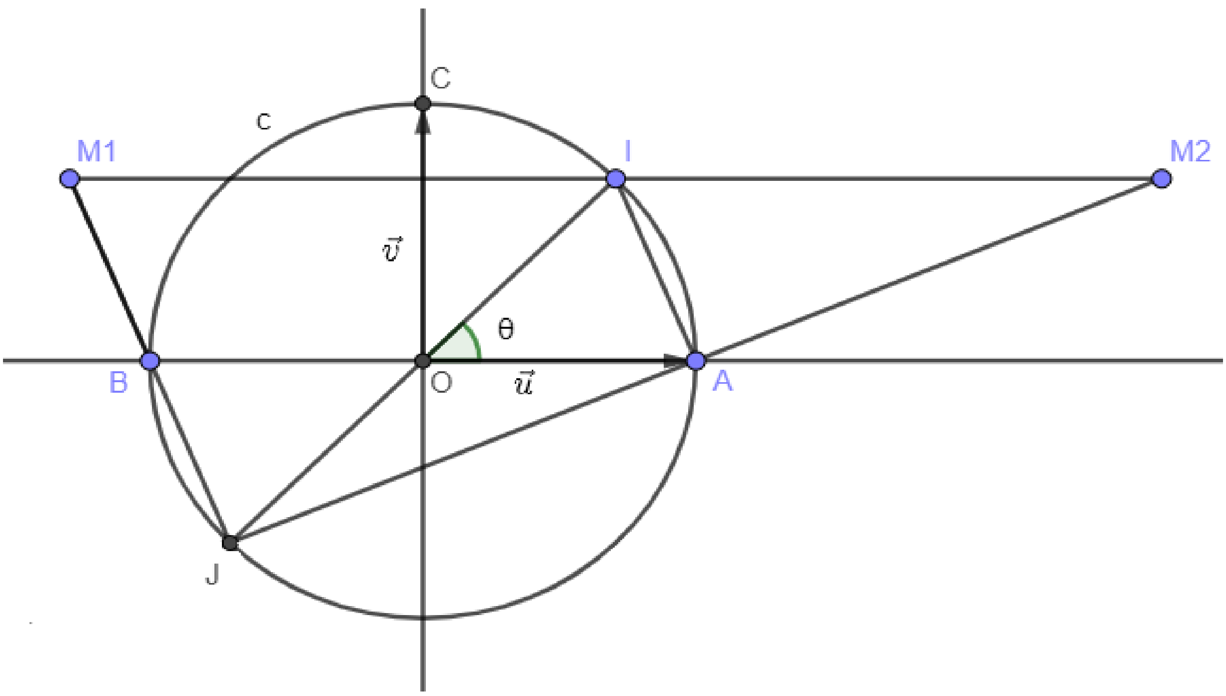
et par suite les droites (BM_1) et (AM_2) sont sécantes en J

b) $M_1M_2 = 2M_1I = 2AB = 2 \times 2 = 4$

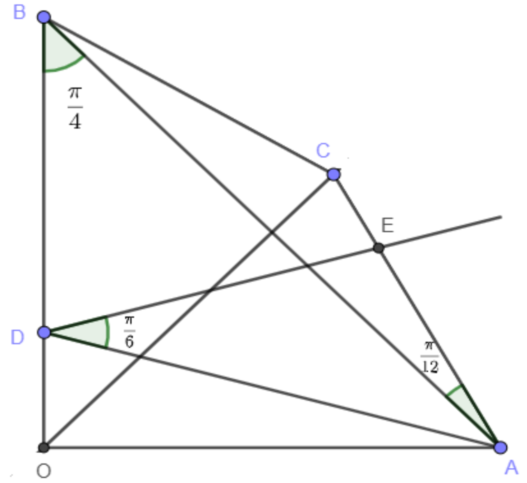
soit H le projeté orthogonal de J sur la droite (M_1M_2) alors $JH = 2\sin\theta$

ainsi l'aire$(JM_1M_2) = \frac{JH \times M_1M_2}{2} = 4\sin\theta$

Donc la valeur maximale de cette aire est 4 atteinte en $\theta = \frac{\pi}{2}$



Exercice 2



1) a) $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BO}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO}}\right)\ [2\pi]$

$$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO}}\right)\ [2\pi]$$

$$\equiv \frac{-\pi}{12} + \frac{-\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

b) $R_{\left(B,\frac{-\pi}{3}\right)}(C) = D \implies \left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

donc $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BO}}\right)\ [2\pi]$

d'où $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BO}$ sont colinéaires, de même sens

donc les points B, D et O sont alignés.

c) Le triangle ABC est isocèle en C

et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi] \implies \left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}\right) \equiv \pi - 2\frac{\pi}{12} \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$

d'où $\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

de plus on a $CD = CB = CA$ donc le triangle ACD est isocèle rectangle en C.

2) a) Le triangle BOA est isocèle rectangle en O , direct.

Le triangle ACD est isocèle rectangle en C , direct.

et comme $f(B) = A$ et $f(O) = C$ alors $f(A) = D$

b) Une mesure de l'angle de f est : $\left(\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}}\right)\ [2\pi]$

$$\equiv \frac{\pi}{4} + \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) - \pi\ [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} - \pi \equiv -\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$$

c) $D \in (BO) \implies f(D) \in f\big((BO)\big)$ d'où $E \in (AC)$

d) On a $\left(f(D) = E \text{ et } f(A) = D\right) \implies \left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{ED}}\right) \equiv \frac{-5\pi}{6}\ [2\pi] \implies \left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DE}}\right) \equiv \frac{-5\pi}{6} + \pi\ [2\pi]$

$$\equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$$

e) $f \circ f \circ f(B) = f \circ f(A) = f(D) = E$ et $f \circ f \circ f$ est une similitude directe de centre Ω

et d'angle $-\frac{5\pi}{6} \times 3 \equiv \frac{-\pi}{2}\ [2\pi]$ d'où $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega E}}\right) \equiv \frac{-\pi}{2}\ [2\pi]$

3) a) On a $(CB = CA \text{ et } OB = OA) \implies (OC) = med[AB]$

et comme OAB est isocèle rectangle en O alors $[OC)$ est la bissectrice de $\widehat{AOB}$

et par suite $\arg(z_C) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

b) $f(B) = A \implies z_A = az_B + b \implies 1 = ai + b$ et $f(O) = C \implies z_C = b$

c) Soit Ω le centre de f alors $z_\Omega = \frac{b}{1-a} \neq 0$, $z_\Omega - i = \frac{b+ia-i}{1-a} = \frac{1-i}{1-a}$ d'où $\frac{z_\Omega - i}{z_\Omega} = \frac{1-i}{b}$

$\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega O},\overrightarrow{\Omega B}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_\Omega - i}{z_\Omega}\right) \equiv \arg\left(\frac{1-i}{b}\right) \equiv \arg(1-i) - \arg(z_c) \equiv -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

d) On sait que $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega E}}\right) \equiv \frac{-\pi}{2}\ [2\pi]$ 2) e) et que $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega O},\overrightarrow{\Omega B}}\right) \equiv \frac{-\pi}{2}\ [2\pi]$

d'où $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega O},\overrightarrow{\Omega E}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega O},\overrightarrow{\Omega B}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega E}}\right) \equiv \pi\ [2\pi]$ donc $\Omega \in (OE)$

et comme $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega O},\overrightarrow{\Omega B}}\right) \equiv \frac{-\pi}{2}\ [2\pi]$ alors Ω est le projeté orthogonal de B sur (OE)

Exercice 3

Partie A

Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E): $19u + 11v = 1$

1) a) $19 \times (-4) + 11 \times 7 = -76 + 77 = 1$ donc le couple $(-4,7)$ est une solution de (E).

b) $19u + 11v = 1 \Leftrightarrow 19u + 11v = 19 \times (-4) + 11 \times 7 \Leftrightarrow 19(u+4) = 11(7-v)$

Donc $19|11(7-v)$ et comme $19 \wedge 11 = 1$ alors d'après le lemme de Gauss $19|(7-v)$

d'où $7 - v = 19k$, $k \in \mathbb{Z}$

$19(u+4) = 11(7-v) \Longrightarrow 19(u+4) = 11 \times 19k \Longrightarrow (u+4) = 11k$

la réciproque est évidente, d'où $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(-4+11k, 7-19k)\ \ k \in \mathbb{Z}\}$

2) a) 19 et 11 sont premiers entre eux donc l'équation $19u \equiv 1\ (\,mod\ 11)$ admet une unique solution $u \in \{1,2,3,\dots,10\}$, or $19 \times 7 = 133 = 11 \times 12 + 1$

donc 7 est cette unique solution

b) Exactement le même raisonnement avec l'équation $11v \equiv 1\ (\,mod\ 19)$, on trouve $v = 7$

Partie B

Soit dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E_{209}): $x^2 \equiv x\ (mod\ 209)$

1) $0^2 = 0 \equiv 0\ (mod\ 209)$ et $1^2 = 1 \equiv 1(mod\ 209)$ donc 0 et 1 sont des solutions de (E_{209})

2) $209 = 11 \times 19$

3) $133^2 - 133 = 84 \times 209$ et $77^2 - 77 = 28 \times 209$ donc 133 et 77 sont des solutions de (E_{209})

4) a) $x^2 \equiv x\ (mod\ 209) \Leftrightarrow x(x-1) \equiv 0\ (mod\ 209) \Leftrightarrow 209|x(x-1)$

On a $19|209$ et $209|x(x-1)$ donc $19|x(x-1)$

de même $11|209$ et $209|x(x-1)$ donc $11|x(x-1)$

b) $x - (x-1) = 1$ donc d'après l'identité de Bézout x et $(x-1)$ sont premiers entre eux

5) Soit $x \in \{2,3,\dots,208\}$ une solution de (E_{209})

a) On a d'après 4) $11|x(x-1)$ et 11 est premier donc $11|x$ ou $11|(x-1)$

de même $19|x(x-1)$ et 19 est premier donc $19|x$ ou $19|(x-1)$

$11 \wedge 19 = 1$ donc si $(11|x\ \ et\ \ 19|x)$ alors $11 \times 19 = 209|x$ donc $209 \leq x$ absurde car $x \leq 208$

de même si $(11|x-1\ \ et\ \ 19|x-1)$ alors $209|x-1$ donc $209 < x$ absurde car $x \leq 208$

donc on ne peut pas avoir à la fois $(11|x\ \ et\ \ 19|x)$ ou $(11|x-1\ \ et\ \ 19|x-1)$

conclusion : Deux cas seulement sont possibles, $(19|x$ et $11|x-1)$ ou $(19|x-1$ et $11|x)$

On peut raisonner autrement, en montrant que si 19 ne divise pas x alors $11|x$

Supposons 19 ne divise pas x, comme 19 est premier et $19|x(x-1)$ alors $19|(x-1)$

donc $x-1=19k$, $k \in \mathbb{Z}$, or $x \in \{2,3,\dots,208\} \Longrightarrow k \in \{1,2,3,\dots,10\}$ et par suite $k \wedge 11 = 1$

$(19 \wedge 11 = 1$ et $k \wedge 11 = 1) \Longrightarrow 19k \wedge 11 = 1$

On a $11|x(x-1) \Leftrightarrow 11|x \times 19k$ et $19k \wedge 11 = 1$ donc d'après le lemme de Gauss $11|x$

conclusion : si $x \in \{2,3,\dots,208\}$ alors $19|x$ ou $11|x$

b) On suppose que $x = 19k$ donc $19|x$ et par suite $11|(x-1)$

donc $x-1 \equiv 0(mod\ 11)$ et $x = 19k \Longrightarrow 19k \equiv 1(mod\ 11) \Longrightarrow k = 7$ donc $x = 19 \times 7 = 133$

c) On suppose que $11|x$ donc d'après ce qui précède $19|(x-1)$

alors on obtient $x = 11k \equiv 1(mod\ 19) \Longrightarrow k = 7 \Longrightarrow x = 77$

6) Si x est solution de (E_{209}) et $x \in \{2,3,\dots,208\}$ alors d'après 5) $x = 133$ ou $x = 77$

et on sait que 133 , 77, 0 et 1 sont des solutions de (E_{209})

Donc les solutions de (E_{209}) appartenant à $\{0,1,2,3,\dots,208\}$ sont 0, 1, 77 et 133

Partie C

1) On a $y \equiv x(mod\ 209)$ et $x \in \{2,3,\dots,208\}$ donc $y^2 \equiv x^2(mod\ 209)$

d'où $y^2 - y \equiv x^2 - x\ (mod\ 209)$ donc $y^2 \equiv y(mod\ 209)$ ssi $x^2 \equiv x\ (mod\ 209)$

2) Soit $y \in \mathbb{Z}$ une solution de (E_{209}) et soit x le reste de y mod 209

alors $y = 209k + x$ avec $x \in \{0, 1, 77, 133\}$

donc d'après 1) $S_{\mathbb{Z}} = \{133 + 209k, 77 + 209k\ , 1 + 209k\ , 209k,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 4

Partie A

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$, donc la droite $y = 0$ est une asymptote à (C) en $+\infty$

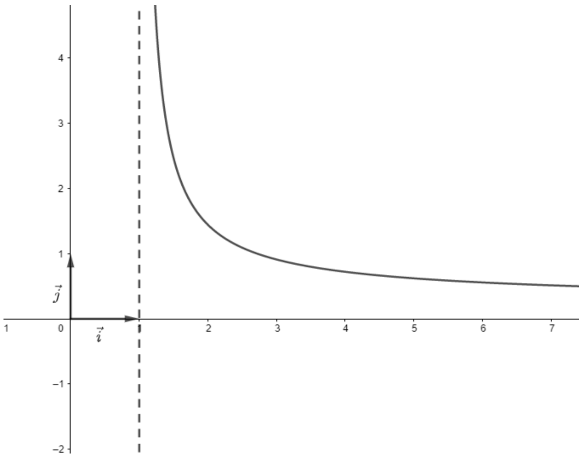
$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{1}{\ln x} = +\infty$, donc la droite $x = 1$ est une asymptote à (C)

2) a) f est dérivable sur $]1,+\infty[$, et pour tout $x \in]1,+\infty[$, $f'(x) = -\frac{\frac{1}{x}}{(ln\ x)^2} = \frac{-1}{x\ln^2 x}$

b) Tableau de variation de f

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0

c) Traçage de (C)



3) Posons $h(x) = f(x) - x\,, x > 1$

h est continue est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$, car $h'(x) = f'(x) - 1 < 0$

et $h(]1, +\infty[) = \mathbb{R}$, contient 0 donc l'équation $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$

admet dans $]1, +\infty[$ une unique solution α.

De plus $h(e) = f(e) - e = 1 - e < 0 = h(\alpha) \Longrightarrow e > \alpha$

car h est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$

Partie B

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x > 1$, on pose $F(x) = \int_\alpha^x f^n(t)dt$ et $H(x) = \int_{\ln\alpha}^{\ln x} \frac{e^t}{t^n} dt$

a) La fonction ln est dérivable sur $]1, +\infty[$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$

$t \longmapsto \frac{e^t}{t^n}$ est continue sur $]0, +\infty[$

et $\ln\alpha \in \ ]0, +\infty[$ car $\alpha > 1$

Donc H est dérivable sur $]1, +\infty[$ et $H'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{e^{\ln x}}{(\ln x)^n} = \frac{1}{(\ln x)^n} = f^n(x)$

b) On a pour tout $x \in]1, +\infty[$, $H'(x) = f^n(x)$ et $H(\alpha) = 0 \Longrightarrow H(x) = \int_\alpha^x f^n(t)dt = F(x)$

2) $U_n = \int_\alpha^n f^n(t)dt\,, n \geq 1$

a) Pour tout $n \geq 1$, on a $U_n = F(e) = H(e) = \int_{\ln\alpha}^{\ln e} \frac{e^t}{t^n} dt = \int_{\ln\alpha}^{1} \frac{e^t}{t^n} dt$

b) On sait que $1 < \alpha < e \Longrightarrow 0 < \ln\alpha < 1$

$\ln\alpha < t < 1 \Rightarrow \alpha < e^t < e \Longrightarrow \frac{\alpha}{t^n} < \frac{e^t}{t^n} < \frac{e}{t^n} \ \Longrightarrow \int_{\ln\alpha}^1 \frac{\alpha}{t^n} dt \leq \int_{\ln\alpha}^1 \frac{e^t}{t^n} dt \leq \int_{\ln\alpha}^1 \frac{e}{t^n} dt$

car les fonctions $t \mapsto \frac{\alpha}{t^n}$, $t \mapsto \frac{e^t}{t^n}$ et $t \mapsto \frac{e}{t^n}$ sont continues sur $[\ln\alpha\ , 1]$

$$\int_{\ln\alpha}^1 \frac{1}{t^n} dt = \left[\frac{-1}{(n-1)t^{n-1}}\right]_{\ln\alpha}^1 = \frac{1}{n-1}\left(\left(\frac{1}{\ln\alpha}\right)^{n-1} - 1\right) = \frac{1}{n-1}(\alpha^{n-1} - 1) \ \ car\ f(\alpha) = \alpha$$

Donc pour tout $n \geq 2$, $\frac{\alpha^n - \alpha}{n-1} \leq U_n \leq \frac{e}{n-1}(\alpha^{n-1} - 1)$

c) $\ln\frac{\alpha^n}{n} = n\ln\alpha - \ln n = n\left(\ln\alpha - \frac{\ln n}{n}\right)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\frac{\alpha^n}{n} = +\infty$

$\frac{\alpha^n}{n} = e^{\ln\frac{\alpha^n}{n}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\alpha^n}{n} = +\infty$

On a $\frac{\alpha^n-\alpha}{n-1} \leq U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\alpha^n-\alpha}{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{\alpha^n}{n}-\frac{\alpha}{n}}{1-\frac{1}{n}} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

d) On a , $0 < \frac{\alpha^n-\alpha}{n-1} \leq U_n \leq \frac{e}{n-1}(\alpha^{n-1}-1)$ car $\alpha > 1$ donc , $0 < U_n \leq \frac{e}{n-1}(\alpha^{n-1}-1)$

d'où $0 < \frac{U_n}{\alpha^n} \leq \frac{e}{n-1} \times \frac{(\alpha^{n-1}-1)}{\alpha^n} \Longrightarrow 0 < \frac{U_n}{\alpha^n} \leq \frac{e}{n-1}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^n}\right)$

donc $0 < \frac{U_n}{\alpha^n} \leq \frac{e}{n-1}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^n}\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e}{n-1}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^n}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{U_n}{\alpha^n} = 0$

3) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n}(k-2)U_k$, $n \geq 1$

a) $U_n = \int_{\ln\alpha}^{1}\frac{e^t}{t^n}dt$. On pose $\begin{cases} u(t) = \frac{1}{t^n} \\ v'(t) = e^t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(t) = \frac{-n}{t^{n+1}} \\ v(t) = e^t \end{cases}$

alors $U_n = \left[\frac{e^t}{t^n}\right]_{\ln\alpha}^{1} + n\int_{\ln\alpha}^{1}\frac{e^t}{t^{n+1}}dt = e - \frac{\alpha}{(\ln x)^n} + n\,U_{n+1} = e - \alpha^{n+1} + n\,U_{n+1}$ car $\frac{1}{\ln\alpha} = \alpha$

b) Montrons par récurrence que $\forall\, n \geq 1$, $S_n = \frac{\alpha^{n+1}-\alpha^2}{\alpha-1} + (1-n)e - U_n$

pour $n = 1$, $S_1 = (1-2)U_1 = \frac{\alpha^2-\alpha^2}{\alpha-1} + (1-1)e - U_1 = -U_1$ vrai

soit $n \geq 1$, supposons que $S_n = \frac{\alpha^{n+1}-\alpha^2}{\alpha-1} + (1-n)e - U_n$

et montrons que $S_{n+1} = \frac{\alpha^{n+2}-\alpha^2}{\alpha-1} + (-n)e - U_{n+1}$

On a $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}(k-2)U_k = S_n + (n-1)U_{n+1}$

$$= \frac{\alpha^{n+1}-\alpha^2}{\alpha-1} + (1-n)e - U_n + (n-1)U_{n+1}$$
$$= \frac{\alpha^{n+1}-\alpha^2}{\alpha-1} + (1-n)e - (e - \alpha^{n+1} + n\,U_{n+1}) + (n-1)U_{n+1}$$
$$= \frac{\alpha^{n+1}-\alpha^2}{\alpha-1} + \alpha^{n+1} - ne - U_{n+1}$$
$$= \frac{\alpha^{n+2}-\alpha^2}{\alpha-1} + (-n)e - U_{n+1}$$

conclusion : $\forall\, n \geq 1$, $S_n = \frac{\alpha^{n+1}-\alpha^2}{\alpha-1} + (1-n)e - U_n$

c) $\frac{S_n}{\alpha^n} = \frac{\alpha}{\alpha-1} - \frac{\alpha^2}{\alpha-1} \times \frac{1}{\alpha^n} + \left(\frac{1}{\alpha^n} - \frac{n}{\alpha^n}\right)e - \frac{U_n}{\alpha^n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{U_n}{\alpha^n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\alpha^n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\alpha^n} = 0$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{\alpha^n} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION EXAMEN DU BACCALAURÉAT Session 2022	Session principale	
	Épreuve : Mathématiques	Section : Mathématiques
	Durée : 4 h	Coefficient de l'épreuve : 4

Exercice 1 : (3 pts)

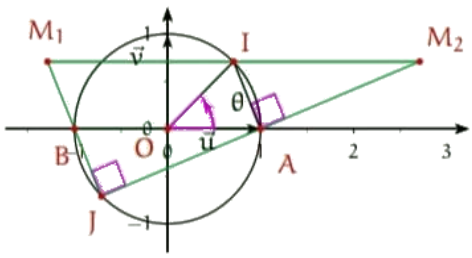
1 $(E) : z^2 - 2e^{i\theta}z + e^{2i\theta} - 4 = 0,\ \theta \in]0, \pi[$.
On a : $\Delta = (-2e^{i\theta})^2 - 4(e^{2i\theta} - 4) = 4e^{2i\theta} - 4e^{2i\theta} + 16 = 4^2$ donc $\delta = 4$ est une racine carrée de Δ.
Les solutions de (E) sont donc $z_1 = \dfrac{2e^{i\theta} - 4}{2} = e^{i\theta} - 2$ et $z_2 = \dfrac{2e^{i\theta} + 4}{2} = e^{i\theta} + 2$.
Conclusion : $\boxed{S_C = \{e^{i\theta} - 2, e^{i\theta} + 2\}}$. (0.75)
Autrement :

$$\begin{aligned} z^2 - 2e^{i\theta}z + e^{2i\theta} - 4 = 0 &\iff (z - e^{i\theta})^2 = 4 \\ &\iff z - e^{i\theta} = 2 \text{ ou } z - e^{i\theta} = -2 \\ &\iff z = e^{i\theta} + 2 \text{ ou } z = e^{i\theta} - 2 \end{aligned}$$

2 a) $\dfrac{z_1 + z_2}{2} = \dfrac{e^{i\theta} - 2 + e^{i\theta} + 2}{2} = e^{i\theta} = z_I$ donc $\boxed{\text{I est le milieu du segment } [M_1M_2]}$. (0.25)

b) $\text{aff}(\overrightarrow{IM_1}) = z_1 - z_I = e^{i\theta} - 2 - e^{i\theta} = -2$ et $\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A = -2$
donc $\text{aff}(\overrightarrow{IM_1}) = \text{aff}(\overrightarrow{AB})$ d'où $\boxed{\overrightarrow{IM_1} = \overrightarrow{AB}}$. (0.25)

c) $\overrightarrow{IM_1} = \overrightarrow{AB}$ et I est le milieu du segment $[M_1M_2]$. (0.5)



3 a) $\dfrac{\text{aff}(\overrightarrow{AM_2})}{\text{aff}(\overrightarrow{BM_1})} = \dfrac{e^{i\theta} + 2 - 1}{e^{i\theta} - 2 + 1} = \dfrac{e^{i\theta} + 1}{e^{i\theta} - 1} = \dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})} = -i\cot\dfrac{\theta}{2} \in i\mathbb{R}$
donc les droites (AM_2) et (BM_1) sont perpendiculaires
ainsi $\boxed{\text{les droites } (AM_2) \text{ et } (BM_1) \text{ sont sécantes}}$. (0.25)

$\dfrac{\text{aff}(\overrightarrow{AM_2})}{\text{aff}(\overrightarrow{JA})} = \dfrac{e^{i\theta} + 2 - 1}{1 + e^{i\theta}} = 1 \in \mathbb{R}$ donc $\boxed{J \in (AM_2)}$. (0.25)

$\dfrac{\text{aff}(\overrightarrow{BM_1})}{\text{aff}(\overrightarrow{JB})} = \dfrac{e^{i\theta} - 2 + 1}{e^{i\theta} - 1} = 1 \in \mathbb{R}$ d'où $\boxed{J \in (BM_1)}$. (0.25)

Conclusion : Les droites (AM_2) et (BM_1) se coupent au point J d'affixe $(-e^{i\theta})$.

b) On note $\mathcal{A}(\theta)$ l'aire du triangle JM_1M_2.
Soit θ un réel de $]0, \pi[$.

Le triangle JM_1M_2 est rectangle en J donc $\mathcal{A}(\theta) = \dfrac{JM_1 \times JM_2}{2}$.

Or $JM_1 = \left|2e^{i\theta} - 2\right| = 2\left|e^{i\theta} - 1\right|$ et $JM_2 = 2\left|e^{i\theta} + 1\right|$

d'où $\mathcal{A}(\theta) = \dfrac{4\left|e^{2i\theta} - 1\right|}{2} = 2\left|e^{i\theta}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})\right| = 2\left|2i\sin\theta\right| = 4\left|\sin\theta\right| = 4\sin\theta$.

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } \theta \in]0,\pi[,\ \mathcal{A}(\theta) = 4\sin\theta}$. (0.25)

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\theta) \text{ est maximale } &\Longleftrightarrow \sin\theta = 1\\ &\Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \text{ car } \theta \in]0,\pi[\end{aligned}$$

(0.25)

Exercice 2 : (5 pts)

1 (a) Vérifier que : $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BO}}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$. (0,25)

$$\begin{aligned}(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BO}}) &\equiv (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) + (\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO}})[2\pi]\\ &\equiv -\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4}[2\pi]\\ &\equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{aligned}$$

(b) $D = R(C)$ donc $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ et comme $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BO}}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

alors $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BO}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}})[2\pi]$ d'où $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BO}$ sont colinéaires

et par conséquent $\boxed{\text{les points B, O et D sont alingés}}$. (0.25)

Constuction du point D. (0.25)

$R(C) = D$ signifie $\begin{cases} BC = BD \\ (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ signifie que le triangle BCD est équilatéral indirect.

(c) Le triangle BCD est équilatéral donc $CB = CD$ et puisque $CB = CA$ alors $CA = CD$

$$\begin{aligned}(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}}) &\equiv (\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{BD}}) + (\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}}) + (\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CA}})[2\pi]\\ &\equiv (\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}}) + (\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})[2\pi]\\ &\equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}[2\pi]\\ &\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]\end{aligned}$$

On a : $\begin{cases} CA = CD \\ (\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc $\boxed{\text{le triangle ACD est rectangle et isocèle en C}}$. (0.5)

2 f est la similitude directe telle que $f(B) = A$ et $f(O) = C$.

ⓐ On pose $f(A)=A'$.
Le triangle OAB est rectangle isocèle en O et de sens direct donc son image la similitude directe f est un triangle qui lui est directement semblable
d'où le triangle $CA'A$ est rectangle isocèle en C et de sens direct.
Comme le triangle CDA est rectangle isocèle en C et de sens direct alors $A'=D$.
On en déduit que $\boxed{f(A)=D}$. (0.25)

ⓑ Une mesure de l'angle de f est :

$$\begin{aligned}(\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{AC}})[2\pi] &\equiv (\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}})+(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})+\pi[2\pi]\\ &\equiv \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}+\pi[2\pi]\\ &\equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi]\\ &\equiv -\frac{5\pi}{6}[2\pi]\end{aligned}$$

ainsi $\boxed{\text{une mesure de l'angle de la similitude directe } f \text{ est } -\frac{5\pi}{6}}$. (0.25)

ⓒ Les points B, D et O sont alinés donc les points $f(B)$, $f(D)$ et $f(O)$ sont alignés d'où les points A, E et C sont alignés ce qui prouve que $\boxed{E\in(AC)}$. (0.25)

ⓓ On a : $\begin{cases} f(D)=E \\ f(A)=D \end{cases}$ donc $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{ED}})\equiv-\frac{5\pi}{6}[2\pi]$. (0.25)

$$\begin{aligned}(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DE}}) &\equiv (\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{ED}})+\pi[2\pi]\\ &\equiv -\frac{5\pi}{6}+\pi[2\pi]\\ &\equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]\end{aligned}$$

Construction de E : $E\in(AC)$ et $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DE}})\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$. (0.25)

ⓔ Soit Ω le centre de f. (0.25)

$$\begin{aligned}(\widehat{\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega E}}) &\equiv (\widehat{\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega A}})+(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega D}})+(\widehat{\overrightarrow{\Omega D},\overrightarrow{\Omega E}})[2\pi]\\ &\equiv -\frac{5\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}[2\pi]\\ &\equiv -\frac{5\pi}{2}[2\pi]\\ &\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{aligned}$$

3 ⓐ $OA=OB$ er $CA=CB$ donc (OC) est la médiatrice de $[AB]$
comme OAB est isocèle en O alors $[OC)$ est la bissectrice intérieure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$
par suite $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ ainsi $\boxed{\arg(z_C)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]}$ (0.5)

ⓑ $f(B)=A$ signifie $z_A=az_B+b$ signifie $\boxed{ai+b=1}$.
$f(O)=C$ signifie $z_C=az_O+b$ signifie $\boxed{z_C=b}$. (0.5)

ⓒ Soit $z' = az + b$ l'expression complexe de f, où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. (0.75)

$f(O) = C \neq O$ donc $\Omega \neq O$ d'où $z_\Omega \neq 0$.

$\dfrac{z_\Omega - i}{z_\Omega} = \dfrac{\frac{b}{1-a} - i}{\frac{b}{1-a}} = \dfrac{b + ia - i}{b} = \dfrac{1-i}{b}$

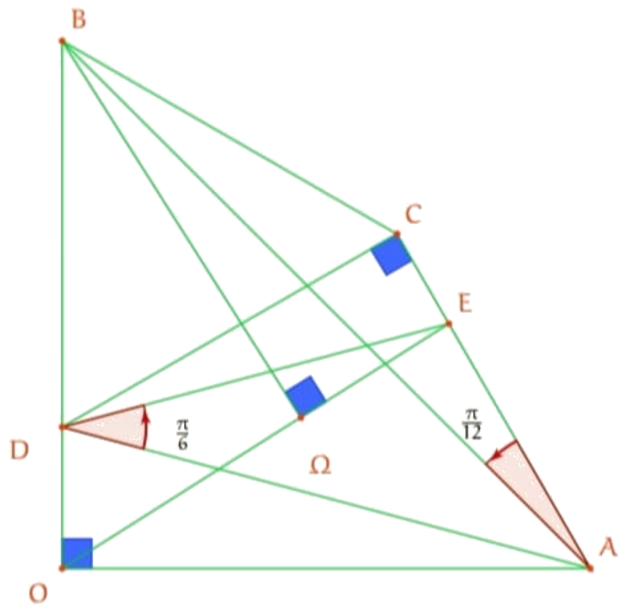
$$\begin{aligned}
(\widehat{\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega B}}) &\equiv \arg\left(\frac{i - z_\Omega}{-z_\Omega}\right)[2\pi] \\
&\equiv \arg\left(\frac{z_\Omega - i}{z_\Omega}\right)[2\pi] \\
&\equiv \arg\left(\frac{1-i}{b}\right)[2\pi] \\
&\equiv \arg(1-i) - \arg(z_C)[2\pi] \\
&\equiv -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}[2\pi] \\
&\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]
\end{aligned}$$

4 Montrer que le point Ω est le projeté orthogonal de B sur la droite (OE) et le construire. (0.5)

$$\begin{aligned}
(\widehat{\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega E}}) &\equiv (\widehat{\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega B}}) + (\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega E}})[2\pi] \\
&\equiv -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}[2\pi] \\
&\equiv \pi[2\pi]
\end{aligned}$$

donc $\Omega \in (OE)$. De plus $(\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega E}}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors $(\Omega B) \perp (OE)$.

Il en résulte que $\boxed{\Omega \text{ est le projeté orthogonal de } B \text{ sur la droite } (OE)}$.



Exercice 3 : (5.5 pts)

Partie A :

1 a) $19\times(-4)+11\times7=-76+77=1$ donc le couple $(-4,7)$ est une solution particulière de l'équation (E). (0.25)

b) Soit $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$.

$$\begin{aligned}19u+11v=1 &\iff 19u+11v=19\times(-4)+11\times7\\ &\iff 19(u+4)=11(-v+7)\end{aligned}$$

On a 11 divise $19(u+4)$ et $11\wedge19=1$ donc d'après le lemme de Gauss, 11 divise $u+4$ d'où il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $u=11k-4$.

On a $\begin{cases}19(u+4)=11(-v+7)\\ u=11k-4\,,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$ donc $19\times11k=11(-v+7)$, $k\in\mathbb{Z}$

d'où $v=-19k+7$, $k\in\mathbb{Z}$.

Réciproquement :

pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $19u+11v=19(11k-4)+11(-19k+7)=19\times(-4)+11\times7=1$

Conclusion : $\boxed{S_{\mathbb{Z}^2}=\{(11k-4,-19k+7),\ k\in\mathbb{Z}\}}$. (0.5)

2 a) $19\wedge11=$ donc il existe un unique entier $u\in\{1,2,...,10\}$ tel que $19u\equiv1\pmod{11}$.
De plus $19\times7=133=11\times12+1$ alors $19\times7\equiv1\pmod{11}$. On en déduit que $\boxed{u=7\text{ est l'unique entier appartenant à }\{1,2,...,10\}\text{ tel que }19u\equiv1\pmod{11}}$. (0.5)

b) $11\wedge19=1$ donc il existe un unique entier v appartenant à $\{1,2,...,18\}$ tel que $11v\equiv1\pmod{19}$. De plus $11\times7=19\times4+1$ alors $11\times7\equiv1\pmod{19}$.
D'où $\boxed{v=7\text{ est l'unique entier appartenant à }\{1,2,...,18\}\text{ tel que }11v\equiv1\pmod{19}}$ (0.5)

Partie B :

1 $0^2\equiv0\pmod{209}$ et $1^2\equiv1\pmod{209}$ donc $\boxed{0\text{ et }1\text{ sont des solutions de }(E_{209})}$. (0.25)

2 $209=11\times19$. (0.25)

3 $133^2=17689=209\times84+133$ donc $133^2\equiv133\pmod{209}$
d'où $\boxed{133\text{ est une solution de }(E_{209})}$. (0.25)
$77^2=5929=209\times28+77$ donc $77^2\equiv77\pmod{209}$
ainsi $\boxed{77\text{ est une solution de }(E_{209})}$. (0.25)

4 a) Soit x une solution de (E_{209}).

$$\begin{aligned}x^2\equiv x\pmod{209} &\Longrightarrow x(x-1)\equiv0\pmod{11\times19}\\ &\Longrightarrow x(x-1)\equiv0\pmod{11}\text{ et }x(x-1)\equiv0\pmod{19}\end{aligned}$$

On en déduit que : $\boxed{11\text{ divise }x(x-1)\text{ et }19\text{ divise }x(x-1)}$. (0.5)

b) $x-(x-1)=1$ donc d'après le théorème de Bézout, $x\wedge(x-1)=1$. (0.25)

5 Soit x une solution de (E_{209}) appartenant à $\{2,3,...,208\}$.

(a) On suppose que 19 ne divise pas x et 11 ne divise pas x.
19 est premier et 19 ne divise pas x donc $19 \wedge x = 1$.
On a $\begin{cases} 19 \text{ divise } x(x-1) \\ 19 \wedge x = 1 \end{cases}$ donc d'après le lemme de Gauss , 19 divise $x-1$
ainsi $x - 1 \equiv 0 \pmod{19}$
11 est premier et 11 ne divise pas x donc $11 \wedge x = 1$ et comme 11 divise $x(x-1)$ alors d'après le lemme de Gauss, 11 divise $x-1$ ainsi $x-1 \equiv 0 \pmod{11}$.
On a : $\begin{cases} x-1 \equiv 0 \pmod{11} \\ x-1 \equiv 0 \pmod{19} \\ 11 \wedge 19 = 1 \end{cases}$ donc $x - 1 \equiv 0 \pmod{209}$ ce qui est absurde
car $x - 1 \in \{1, 2, ..., 207\}$.
Il en résulte que $\boxed{19 \text{ divise } x \text{ ou } 11 \text{ divise } x}$. (0.25)

(b) On suppose que $x = 19k$, $k \in \mathbb{Z}$.
On a $x \in \{2, 3, ..., 208\}$ et $x = 19k$, $k \in \mathbb{Z}$ donc $k \in \{1, 2, ..., 10\}$
comme $11 \wedge 19 = 1$ et $11 \wedge k = 1$ alors $11 \wedge x = 1$.
On a $\begin{cases} 11 \text{ divise } x(x-1) \\ 11 \wedge x = 1 \end{cases}$ donc 11 divise $x-1$ ainsi $19k \equiv 1 \pmod{11}$
D'après **A-2-a)**, $k = 7$ et par suite $x = 19 \times 7 = 133$. (0.5)

(c) 11 divise x et $x \in \{2, 3, ..., 208\}$ donc il existe $k' \in \{1, 2..., 18\}$ tel que $x = 11k'$.
$19 \wedge 11 = 1$ et $19 \wedge k' = 1$ donc $19 \wedge x = 1$.
On a $\begin{cases} 19 \text{ divise } x(x-1) \\ 19 \wedge x = 1 \end{cases}$ donc 19 divise $x-1$ d'où $11k' \equiv 1 \pmod{19}$
D'après **A-2-b)** $k' = 7$ et par suite $x = 77$. (0.5)

6 L'ensemble des solutions de (E_{209}) dans $\{0, 1, ..., 208\}$ est $\{0, 1, 77, 133\}$. (0.25)

Partie C :

1 $y \in \mathbb{Z}$ et x son reste modulo 209. 0.25)
$y \equiv x \pmod{209}$ donc $y^2 \equiv x^2 \pmod{209}$

$$\begin{aligned} y \text{ est une solution de } (E_{209}) &\iff y^2 \equiv y \pmod{209} \\ &\iff x^2 \equiv x \pmod{209} \\ &\iff x \text{ est une solution de } (E_{209}) \end{aligned}$$

2 $y \in \mathbb{Z}$ est une solution de (E_{209}), si et seulement si, $y = 209k + x$, $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in \{0, 1, 77, 133\}$.
Par suite $\boxed{S_{\mathbb{Z}} = \{209k, 209k+1, 209k+77, 209k+133, k \in \mathbb{Z}\}}$. (0.25)

Exercice 1 :

Partie A :

1 $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$, $x \in]1, +\infty[$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$. (0.5)

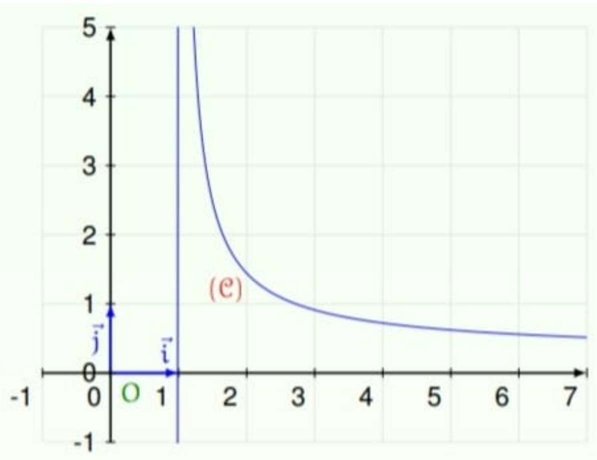
On a : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\ln x} = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$. (0.5)

2 (a) La fonction f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x > 1$, $f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \dfrac{-1}{x\ln^2 x}$. (0.25)

(b) Tableau de variation de f. (0.25)

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$
f	‖ $+\infty$	$\searrow$ 0

(c) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$. (0.5)



3 Soit g la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
Dans $]1,+\infty[$, l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $g(x) = 0$.
La fonction g est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$, pour tout $x > 1$.
La fonction g est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $g(]1,+\infty[) =]\lim\limits_{+\infty} g, \lim\limits_{1^+} g[= \mathbb{R}$.
Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors il existe un unique réel α de $]1,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$ et par suite l'équation $f(x) = x$ admet dans $]1,+\infty[$ une solution unique α.
On a : $g(e) = f(e) - e = 1 - e < 0 = g(\alpha)$ et g est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ alors $\alpha < e$. (0.75)
Conclusion : $\boxed{\text{l'équation } f(x) = x \text{ possède dans }]1,+\infty[\text{ une unique solution } \alpha \text{ et que } \alpha < e}$.

Partie B

1 (a) On a : $\begin{cases} x \longmapsto \ln x \text{ est dérivabme sur }]1,+\infty[\\ t \longmapsto \dfrac{e^t}{t^n} \text{ est continue sur }]0,+\infty[\\ \ln(]1,+\infty[) =]0,+\infty[\text{ et } \ln\alpha \in]0,+\infty[\end{cases}$ donc la fonction H est dérivable sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x > 1$, $H'(x) = \dfrac{1}{x}\dfrac{e^{\ln x}}{\ln^n x} = \dfrac{1}{x}\dfrac{x}{\ln^n x} = \dfrac{1}{\ln^n x}$. (0.5)

ⓑ La fonction $t \longmapsto (f(t))^n$ est continue sur $]1,+\infty[$ et $\alpha \in]1,+\infty[$ donc F est dérivable sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x>1$, $F'(x)=(f(x))^n=H'(x)$.
d'où il existe une constante réelle c tel que pour tout $x>1$, $H(x)=F(x)+c$
De plus $F(\alpha)=H(\alpha)=0$ alors $c=0$ et par suite $\boxed{\text{pour tout } x>1,\ H(x)=F(x)}$. (0.25)

2 $U_n=\displaystyle\int_\alpha^e (f(t))^n dt$, $n\in\mathbb{N}^*$.

ⓐ Pour tout $n\geqslant 1$, $U_n=\displaystyle\int_\alpha^e (f(t))^n dt=F(e)=H(e)=\int_{\ln\alpha}^{\ln e}\frac{e^t}{t^n}dt=\int_{\ln\alpha}^{1}\frac{e^t}{t^n}dt.$ (0.25)

ⓑ Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$.
On a : $1<\alpha<e$ donc $\ln\alpha<1$

$$\ln\alpha\leqslant t\leqslant 1\Longrightarrow \alpha\leqslant e^t\leqslant e$$
$$\Longrightarrow \frac{\alpha}{t^n}\leqslant\frac{e^t}{t^n}\leqslant\frac{e}{t^n} \text{ car } t^n>0$$

Les fonctions $\left.\begin{array}{l} t\longmapsto \dfrac{\alpha}{t^n}\\ t\longmapsto \dfrac{e^t}{t^n}\\ t\longmapsto \dfrac{e}{t^n}\end{array}\right\}$ sont continues sur $[\ln\alpha,1]$

alors $\alpha\displaystyle\int_{\ln\alpha}^1\frac{1}{t^n}dt\leqslant\int_{\ln\alpha}^1\frac{e^t}{t^n}dt\leqslant e\int_{\ln\alpha}^1\frac{1}{t^n}dt.$

Or $\displaystyle\int_{\ln\alpha}^1\frac{1}{t^n}dt=\frac{-1}{n-1}\left[\frac{1}{t^{n-1}}\right]_{\ln\alpha}^1=\frac{1}{n-1}((f(\alpha))^{n-1}-1)=\frac{1}{n-1}(\alpha^{n-1}-1)$

d'où $\dfrac{\alpha}{n-1}(\alpha^{n-1}-1)\leqslant U_n\leqslant\dfrac{e}{n-1}(\alpha^{n-1}-1)$.

On en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N} \text{ tel que } n\geqslant 2,\ \dfrac{\alpha^n-\alpha}{n-1}\leqslant U_n\leqslant\dfrac{e}{n-1}(\alpha^{n-1}-1)}$. (0.5)

ⓒ Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{\alpha^n}{n}=\dfrac{e^{n\ln\alpha}}{n\ln\alpha}\cdot\ln\alpha$

On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\ln\alpha=+\infty$ car $\ln\alpha>0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\cdot\ln\alpha=+\infty$

donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha^n}{n}=+\infty}$. (0.25)

Pour tout $n\geqslant 2$, $U_n\geqslant\dfrac{\alpha^n-\alpha}{n-1}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha^n-\alpha}{n-1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha^n}{n}\cdot\frac{1-\frac{1}{\alpha^{n-1}}}{1-\frac{1}{n}}=+\infty$

d'où $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}U_n=+\infty}$. (0,25)

ⓓ Pour tout $n\geqslant 2$, $\dfrac{1-\frac{1}{\alpha^{n-1}}}{n-1}\leqslant\dfrac{U_n}{\alpha^n}\leqslant\dfrac{e}{n-1}\left(\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\alpha^n}\right)$

et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{\alpha^{n-1}}}{n-1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{e}{n-1}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^n}\right)=0$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{U_n}{\alpha^n}=0}$ (0.25)

3 $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n(k-2)U_k$, $n\geqslant 1$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose $\begin{cases} u(t) = \dfrac{1}{t^n} \\ v'(t) = e^t \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) = -\dfrac{n}{t^{n+1}} \\ v(t) = e^t \end{cases}$

$U_n = \left[\dfrac{e^t}{t^n}\right]_{\ln\alpha}^{1} - \displaystyle\int_{\ln\alpha}^{1} -n\dfrac{e^t}{t^{n+1}}dt = e - \dfrac{\alpha}{\ln^n\alpha} + n\int_{\ln\alpha}^{1}\dfrac{e^t}{t^{n+1}} = e - \alpha^{n+1} + nU_{n+1}$

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = e - \alpha^{n+1} + nU_{n+1}}$ (0.5)

(b) • Pour $n = 1$, $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{1}(k-2)U_k = -U_1$ et $\dfrac{\alpha^2 - \alpha^2}{\alpha - 1} + (1-1)e - U_1 = -U_1 = S_1$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $S_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \alpha^2}{\alpha - 1} + (1-n)e - U_n$ et on montre que $S_{n+1} = \dfrac{\alpha^{n+2} - \alpha^2}{\alpha - 1} + (1-(n+1))e - U_{n+1}$.

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1}(k-2)U_k = S_n + (n+1-2)U_{n+1} \\
&= \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^2}{\alpha - 1} + (1-n)e - U_n + (n-1)U_{n+1} \\
&= \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^2}{\alpha - 1} + (1-n)e - e + \alpha^{n+1} - nU_{n+1} + (n-1)U_{n+1} \\
&= \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^2 + \alpha^{n+1}(\alpha - 1)}{\alpha - 1} + (1-n-1)e - U_{n+1} \\
&= \frac{\alpha^{n+2} - \alpha^2}{\alpha - 1} + (1-(n+1))e - U_{n+1}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \alpha^2}{\alpha - 1} + (1-n)e - U_n}$. (0,75)

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{S_n}{\alpha^n} = \dfrac{\alpha - \frac{1}{\alpha^{n-2}}}{\alpha - 1} + \dfrac{n}{\alpha^n}(\dfrac{1}{n} - 1)e - \dfrac{U_n}{\alpha^n}$

On a : $\alpha > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\alpha^{n-2}} = 0$

D'après **B-2-c)**, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha^n}{n} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\alpha^n} = 0$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{\alpha^n} = 0$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha - \frac{1}{\alpha^{n-2}}}{\alpha - 1} + \dfrac{n}{\alpha^n}(\dfrac{1}{n} - 1)e - \dfrac{U_n}{\alpha^n} = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$ ainsi $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{\alpha^n} = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}}$. (0.25)

SECTION MATHS

CORRIGÉ DE L'EPREUVE DE MATHS
SESSION PRINCIPALE BAC 2022
PAR Mr SALAH HANNACHI

EXERCICE 1 :

1) $\Delta' = e^{i2\theta} - \left(e^{i2\theta} - 4\right) = 4$, alors 2 est une racine carrée de Δ' donc

$S_{\mathbb{C}} = \left\{e^{i\theta} + 2\,,\ e^{i\theta} - 2\right\}$.

$\mathcal{Re}\left(e^{i\theta} - 2\right) = cos\theta - 2 < 0$ alors $z_1 = e^{i\theta} - 2$ et $z_2 = e^{i\theta} + 2$

2) a) $\frac{z_1+z_2}{2} = \frac{e^{i\theta}-2+e^{i\theta}+2}{2} = e^{i\theta} = z_I$ alors I est le milieu du segment $[M_1M_2]$.

b) $aff\left(\overrightarrow{IM_1}\right) = z_1 - e^{i\theta} = -2 = -1 - 1 = aff\left(\overrightarrow{AB}\right)$ alors $\overrightarrow{IM_1} = \overrightarrow{AB}$

3) a) $\theta \notin \{0, \pi\}$ alors le point $I \notin \{A, B\}$ donc les points I, A, B ne sont pas alignés et puisque $\overrightarrow{IM_1} = \overrightarrow{AB}$ alors $IABM_1$ est un parallélogramme.

Et comme $M_2 \notin (IA)$ (I est le milieu de $[M_1M_2]$) alors les droites (AM_2) et (BM_1) sont sécantes en un point J.

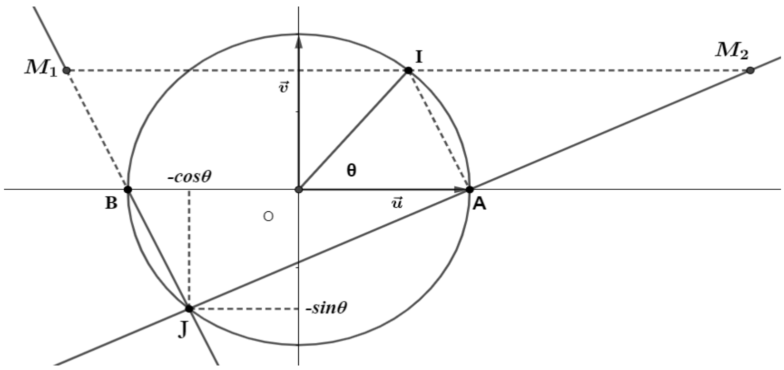
♦ Dans le triangle JM_1M_2 on a I est le milieu de $[M_1M_2]$ et (IA) et (JM_1) sont parallèles, alors d'après le théorème de Thalès $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JM_1}$ et puisque $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BM_1}$ alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{JB}$ donc les segments $[AB]$ et $[IJ]$ ont le même milieu et par conséquent O est le milieu de $[IJ]$, donc $z_J = -z_I$ d'où $z_J = -e^{i\theta}$.

b) J appartient au cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ car $OJ = \left|z_J\right| = 1$ et $J \notin \{A, B\}$ car $J = S_O(I)$ alors $\widehat{AJB} = \frac{\pi}{2}$

Donc le triangle JM_1M_2 est rectangle en J, d'où son aire $\mathcal{A} = \frac{JM_1 \times JM_2}{2}$

$$\mathcal{A} = \frac{|2e^{i\theta}-2|\times|2e^{i\theta}+2|}{2} = 2\left|\left(e^{i\theta} - 1\right)\left(e^{i\theta} + 1\right)\right|$$
$$= 2\left|e^{i2\theta} - 1\right| = 2\sqrt{(cos2\theta - 1)^2 + sin^2 2\theta}$$
$$= 2\sqrt{2}\sqrt{1 - cos2\theta} = 2\sqrt{2}\sqrt{2sin^2\theta} = 4sin\theta \text{ car } \theta \in]0, \pi[$$

Ainsi $\mathcal{A}$ est maximale si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{2}$



EXERCICE 2 :

1) a) $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BO}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO}}\right)\ [2\pi]$

$\equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right) - \left(\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}}\right)\ [2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

b) $D = R(C)$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BO}}\right)[2\pi]$

ce qui implique que $\left(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BO}}\right) \equiv 0[2\pi]$ d'où O, B et D sont alignés.

c) On a le triangle ABC est isocèle en C alors $CA = CB$

et on a $D = R(C)$, alors $BC = BD$ et $\widehat{CBD} = \frac{\pi}{3}$ donc le triangle BCD est équilatéral.

Ce qui implique que $CA = CD$ et $\widehat{CDO} = \frac{2\pi}{3}$

On a aussi $\widehat{CAO} = \widehat{CAB} + \widehat{BAO}$ et comme OAB est rectangle et isocèle en O alors $\widehat{BAO} = \frac{\pi}{4}$ donc $\widehat{CAO} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$

Ainsi dans le quadrilatère $CAOD$ on a : $\widehat{CDO} + \widehat{AOD} + \widehat{CAO} = \frac{3\pi}{2}$ donc $\widehat{ACD} = \frac{\pi}{2}$

Et par la suite le triangle ACD est rectangle et isocèle en C.

2) a) On note $A' = f(A)$.

On a : $(OA) \perp (OB)$ alors $f((OA)) \perp f((OB))$

signifie que $(A'C) \perp (AC)$ donc $A' \in (DC)$

D'autre part, puisque A, C et A' sont les images respectives par f des points B, O et A et puisque f est une similitude directe, alors :

$\left(\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA'}}\right)[2\pi]$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA'}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

cela signifie que $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right)[2\pi]$ (car le triangle ACD est rectangle et isocèle en C),ce qui équivaut à $\left(\widehat{\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv 0[2\pi]$ d'où $A' \in (AD)$

Ainsi $A' \in (AD) \cap (DC)$ et par la suite $A' = D$. Autrement dit $f(A) = D$

b) On a $f(B) = A$ et $f(O) = C$ alors une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{AC}\right)$ est une mesure de l'angle de f

$$\begin{aligned}\left(\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{AC}}\right) &\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}}\right)[2\pi] \\ &\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) - \pi[2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} - \pi[2\pi] \\ &\equiv \frac{-5\pi}{6}[2\pi]\end{aligned}$$

c) On a les points B, D et O sont alignés alors a $f(B)$, $f(D)$ et $f(O)$ le sont aussi donc $E \in (AC)$.

d) $\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DE}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)[2\pi]$ (conservation des mesures des angles orientés)

$$\begin{aligned}&\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right)[2\pi] \\ &\equiv -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]\end{aligned}$$

e) $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega E}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega A}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega D}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega D},\overrightarrow{\Omega E}}\right)[2\pi]$

Or $f(B) = A$, $f(A) = D$ et $f(D) = E$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega E}}\right) \equiv 3 \times \left(-\frac{5\pi}{6}\right)[2\pi]$

D'où $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega E}}\right) \equiv -\frac{5\pi}{2}[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

3) a) $arg\,(z_C) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right)[2\pi]$

Les triangles OAD et ACD sont rectangles respectivement en O et C alors ils sont inscrits dans le même cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AD]$, donc les points O, A, C et D appartiennent au même cercle $\mathcal{C}$.

D'autre part, les angles orientés inscrits $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)$ interceptent le même arc orienté $\overset{\frown}{AC}$, alors $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}\right)[2\pi]$

donc $arg\,(z_C) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

b) $f : M(z) \longmapsto M'(z')$ tel que $z' = az + b$

On a : $f(B) = A$ alors $z_A = az_B + b$ d'où $ai + b = 1$

Et on a : $f(O) = C$ alors $z_C = az_O + b = b$

c) Supposons que $\Omega = O$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$, donc $E \in [OA)$ et puisque

$E \in (AC)$ alors $E = A$ ce qui est impossible car $\left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DE}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

D'où $\Omega \neq O$ et par la suite $z_\Omega \neq 0$

♦ Ω est le centre de la similitude directe f alors $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$

donc $\frac{z_\Omega - i}{z_\Omega} = \frac{z_\Omega - i}{\frac{b}{1-a}} = \frac{(1-a)(z_\Omega - i)}{b} = \frac{(z_\Omega - az_\Omega) - i + ai}{b} = \frac{b - i + (1-b)}{b} = \frac{1-i}{b}$

Ainsi $\frac{z_\Omega - i}{z_\Omega} = \frac{1-i}{b}$

♦ On a : $B(i)$ et $C(b)$ alors :

$\frac{z_\Omega - i}{z_\Omega} = \frac{1-i}{b}$ implique que $\left(\widehat{\overrightarrow{O\Omega}, \overrightarrow{B\Omega}}\right) \equiv arg(1-i) - arg(z_C)\,[2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

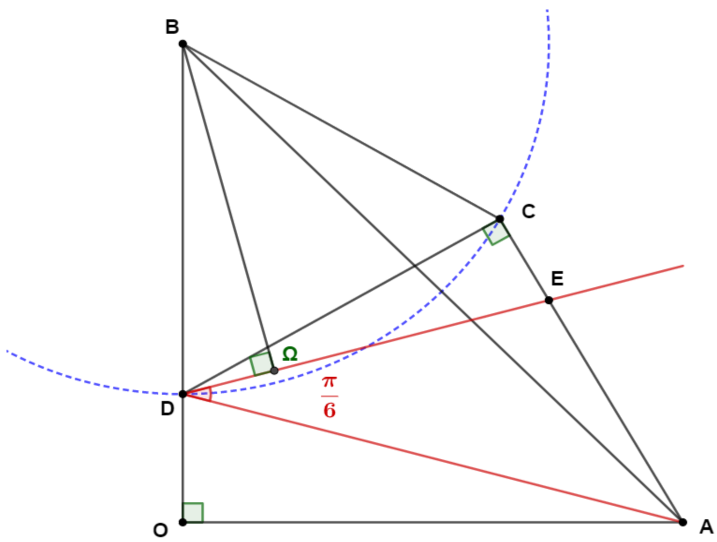
Cela équivaut à $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega B}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

4) On a : $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega B}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors $(\Omega O) \perp (\Omega B)$

et $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega E}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors $(\Omega E) \perp (\Omega B)$

Donc $(\Omega O) \parallel (\Omega E)$ et ayant un point commun d'où $\Omega \in (OE)$

Et puisque de plus $(\Omega B) \perp (\Omega E)$ alors Ω est le projeté orthogonal de B sur la droite (OE).



EXERCICE 3 :

Partie A

1) a) $19 \times (-4) + 11 \times 7 = -76 + 77 = 1$ alors $(-4{,}7)$ est une solution de l'équation $(E) : 19u + 11v = 1$

b) Un couple d'entiers (u, v) est une solution de (E) si et seulement si $19u + 11v = 19 \times (-4) + 11 \times 7$ ce qui équivaut à $19(u + 4) = 11(7 - v)$ alors 19 divise $11(7 - v)$. Et comme 19 et 11 sont premiers entre eux alors 19 divise $(7 - v)$ ce qui implique qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $7 - v = 19k$. Donc $v = 7 - 19k$.

Par conséquent $19(u + 4) = 11 \times 19k$ ce qui équivaut à $u = 11k - 4$

Ainsi $(u, v) = (11k - 4\,, 7 - 19k)$ où $k \in \mathbb{Z}$

Réciproquement : Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a :

$19(11k - 4) + 11(7 - 19k) = 19 \times (-4) + 11 \times 7 = 1$

alors $(11k - 4\,, 7 - 19k)$ est une solution de (E) pour tout $k \in \mathbb{Z}$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation (E) est

$S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(11k - 4\,, 7 - 19k)\,;\ k \in \mathbb{Z}\}$

2) a) $19 \times 7 = 133 = 11 \times 12 + 1$ alors $19 \times 7 \equiv 1(mod 11)$ donc 7 est un inverse de 19 modulo 11, d'où 7 est l'unique entier u de l'ensemble $\{1,2, \dots ,11 - 1\}$ tel que $19u \equiv 1(mod 11)$.

b) $11 \times 7 = 77 = 19 \times 4 + 1$ alors $11 \times 7 \equiv 1(mod 19)$ donc 7 est un inverse de 11 modulo 19, d'où 7 est l'unique entier v de l'ensemble $\{1,2, \dots ,19 - 1\}$ tel que $11v \equiv 1(mod 19)$.

Partie B

1) $0^2 = 0 \equiv 0(mod 209)$ et $1^2 = 1 \equiv 1(mod 209)$ alors 0 et 1 sont deux solutions de l'équation $(E_{209}) :\ x^2 \equiv x(mod 209)$

2) $209 = 11 \times 19$

3) • $77^2 - 77 = 5852 = 11 \times 532 = 19 \times 308$

alors $77^2 - 77 \equiv 0(mod 11)$ et $77^2 - 77 \equiv 0(mod 19)$

11 et 19 sont premiers entre eux alors $77^2 - 77 \equiv 0(mod 11 \times 19)$

D'où $77^2 \equiv 77(mod 209)$

• $133^2 - 133 = 17556 = 11 \times 1596 = 19 \times 924$

alors $133^2 - 133 \equiv 0(mod 11)$ et $133^2 - 133 \equiv 0(mod 19)$

alors $133^2 - 133 \equiv 0(mod 11 \times 19)$. D'où $133^2 \equiv 133(mod 209)$

Ainsi 77 et 133 sont deux solutions de l'équation (E_{209}).

4) a) $x^2 \equiv x(mod 209)$ équivaut à $x(x-1) \equiv 0(mod 209)$

équivaut à $x(x-1) \equiv 0(mod 11)$ et $x(x-1) \equiv 0(mod 19)$

Ainsi 11 divise $x(x-1)$ et 19 divise $x(x-1)$

b) $x - (x-1) = 1$ alors d'après le théorème de Bézout x et $x-1$ sont premiers entre eux.

5) $x \in \{2,3, \dots ,208\}$ tel que $x^2 \equiv x(mod 209)$

a) 11 divise $x(x-1)$ et 11 est premier alors 11 divise x ou 11 divise $x-1$ de même 19 divise $x(x-1)$ et 19 est premier alors 19 divise x ou 19 divise $x-1$.

Supposons que ni 11 ni 19 divise x, alors dans ce cas $x-1$ est divisible à la fois par 11 et par 19. Et comme 11 et 19 sont premiers entre eux, alors $x-1$ est divisible par 209.

Autrement dit : $x = 1 + 209k$ où $k \in \mathbb{Z}$ ce qui est impossible car $x \in \{2,3, \dots ,208\}$. Ainsi 11 divise x ou 19 divise x.

b) On a 11 divise $x(x-1)$. Supposons que 11 ne divise pas $(x-1)$ alors 11 divise x car 11 est premier. Donc $x = 11q$ où $q \in \mathbb{Z}$

Et puisque $x = 19k$; $k \in \mathbb{Z}$ et 11 et 19 sont premiers entre eux, alors 11 divise k, donc il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 19 \times 11k' = 209k'$ ce qui est impossible car $x \in \{2,3, \dots ,208\}$. D'où 11 divise $(x-1)$

- 11 divise $(x-1)$ alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 1 + 11n$
  Or $x = 19k$; $k \in \mathbb{Z}$ alors $19k = 1 + 11n$
  cela signifie que $19k - 11n = 1$, donc d'après la question 1) b) : il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $k = 11q - 4$ et $-n = 7 - 19q$. Alors en particulier $x = 19(11q - 4) = 209q - 76$. Et comme l'entier $2 \leq x \leq 208$ alors l'entier $\frac{78}{209} \leq q \leq \frac{284}{209}$ donc $q = 1$ et par la suite $x = 209 \times 1 - 76 = 133$

c) On a 11 divise x, et puisque 11 divise $x(x-1)$ alors 11 ne divise pas $x-1$ (car x et $x-1$ sont premiers entre eux et 11 est premier)
Par conséquent 19 ne divise pas x (la contraposée de la question 5)b))
donc nécessairement 19 divise $x-1$ car 19 est premier, alors :
il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 1 + 19m$.
D'autre part $x = 11m'$ où $m' \in \mathbb{Z}$ alors $1 + 19m = 11m'$ équivaut à $-19m + 11m' = 1$ donc d'après la question 1) b) : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-m = 11k - 4$ et $m' = 7 - 19k$, alors en particulier $x = 11(7 - 19k)$
$= 77 - 209k$
Puisque l'entier $2 \leq x \leq 208$ alors $-\frac{131}{209} \leq k \leq \frac{75}{209}$ donc $k = 0$
Et par la suite $x = 77 - 209 \times 0 = 77$

6) Ainsi : si x est solution de l'équation (E_{209}) dans l'ensemble $\{2,3,\dots,208\}$ alors $x = 133$ ou $x = 77$ et comme 0 et 1 sont deux solutions de cette équation alors les solutions de (E_{209}) dans l'ensemble $\{0,1,2,3,\dots,208\}$ sont $0, 1, 77$ et 133.

Partie C

Soit $y \in \mathbb{Z}$ et $x \in \{0,1,2,3,\dots,208\}$ tel que $y \equiv x(mod 209)$

1) y est solution de (E_{209}) équivaut à $y^2 \equiv y(mod 209)$ alors $y^2 \equiv x(mod 209)$
Or $y^2 \equiv x^2(mod 209)$ alors $x^2 \equiv x(mod 209)$ d'où x est solution de (E_{209})
Réciproquement : Si x est solution de (E_{209}) alors $x^2 \equiv x(mod 209)$
Or $y \equiv x(mod 209)$ alors $y^2 \equiv x^2(mod 209)$ donc $y^2 \equiv y(mod 209)$ d'où y est solution de (E_{209}).
Ainsi : y est solution de (E_{209}) si et seulement si x est solution de (E_{209})

2) On a $y = x + 209k \;\; ; \;\; k \in \mathbb{Z}$ et $x \in \{0,1,2,3, \dots ,208\}$

Donc y est solution de (E_{209}) dans $\mathbb{Z}$ si et seulement si :

$y \in \{209k\, , 1 + 209k\, , 77 + 209k\, , 133 + 209k\}$

Ainsi $S_{\mathbb{Z}} = \{209k\, , 1 + 209k\, , 77 + 209k\, , 133 + 209k \;\; tels\ que \;\; k \in \mathbb{Z}\}$

EXERCICE 4 :

Partie A

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{lnx} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{lnx} = +\infty$

Interprétation graphique :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ signifie que la droite des abscisses est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

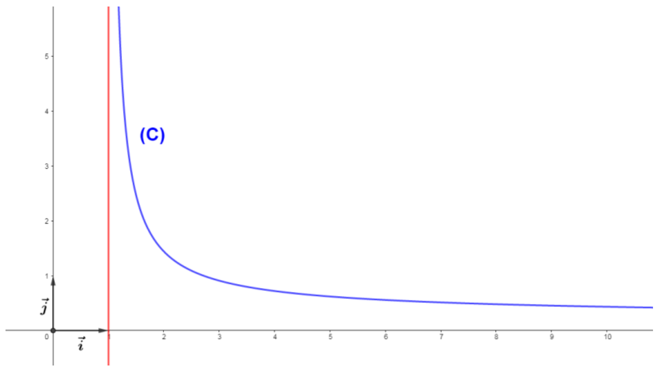
$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ signifie que la droite $D : x = 1$ est une asymptote à la courbe (C) à droite.

2) a) $f'(x) = -\frac{\frac{1}{x}}{(lnx)^2} = -\frac{1}{x(lnx)^2} \quad \forall \; x > 1$

b)

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0

c)



3) On pose $g(x) = f(x) - x$ pour tout $x > 1$ alors on a :

$f(x) = x$ équivaut à $g(x) = 0$

La fonction g est dérivable sur $]1, +\infty[$ (comme étant différence de deux fonctions dérivables). $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$, $\forall\, x > 1$ alors g est continue et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $g(]1, +\infty[) =]-\infty, +\infty[= IR$ et par la suite le réel 0 admet dans $]1, +\infty[$ un unique antécédent α par g.

Ainsi l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]1, +\infty[$

⁎ $g(e) = f(e) - e = 1 - e < 0$ alors $g(e) < g(\alpha)$ et comme g est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ alors $\alpha < e$

Partie B

1) a) La fonction $ln : x \longmapsto lnx$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et on a $\forall\, x \in\,]1, +\infty[$ $lnx \in\,]0, +\infty[$.

La fonction $t \longmapsto \frac{e^t}{t^n}$ est continue sur $]0, +\infty[$ $\forall\, n \in IN^*$ (comme étant rapport d'une fonction continue sur$]0, +\infty[$ sur une fonction continue et non nulle sur $]0, +\infty[$). De plus on a $ln\alpha \in\,]0, +\infty[$ car $\alpha > 1$

alors la fonction $\psi : x \longmapsto \int_{ln\alpha}^{x} \frac{e^t}{t^n}\, dt$ est dérivable sur$]0, +\infty[$.

Donc la fonction $H : x \longmapsto \psi(lnx) = \int_{ln\alpha}^{lnx} \frac{e^t}{t^n}\, dt$ est dérivable sur $]1, +\infty[$.

- $H'(x) = \frac{1}{x}\, \psi'^{(lnx)} = \frac{1}{x} \frac{e^{lnx}}{(lnx)^n} = \frac{1}{(lnx)^n}$ pour tout $x > 1$.

b) La fonction f est continue sur $]1, +\infty[$ alors $\forall\, n \in IN^*$ la fonction f^n est continue aussi sur $]1, +\infty[$. Et on a de plus $\alpha \in\,]1, +\infty[$ alors la fonction $F : x \longmapsto \int_{\alpha}^{x} (f(t))^n\, dt$ est dérivable sur $]1, +\infty[$.

$F'(x) = (f(x))^n = \frac{1}{(lnx)^n}$ $\quad \forall\, x > 1$ alors $F'(x) = H'(x)$ $\;\forall\, x > 1$

ce qui implique que $F(x) = H(x) + c$ où $c \in IR$.

Or $F(\alpha) = H(\alpha) = 0$ alors $c = 0$ donc $F(x) = H(x)$; $\;\forall\, x > 1$

2) a) $u_n = \int_{\alpha}^{e} (f(t))^n\, dt = F(e)$ alors $u_n = H(e) = \int_{ln\alpha}^{lne} \frac{e^t}{t^n}\, dt$

Donc $u_n = \int_{ln\alpha}^{1} \frac{e^t}{t^n}\, dt$ $\;;\, \forall\, n \in IN^*$

b) On a $\alpha < e$ alors $ln\alpha < 1$

$ln\alpha \leq t \leq 1$ équivaut à $\alpha \leq e^t \leq e$

équivaut à $\frac{\alpha}{t^n} \leq \frac{e^t}{t^n} \leq \frac{e}{t^n}$

Or $ln\alpha < 1$ alors $\int_{ln\alpha}^{1} \frac{\alpha}{t^n}\, dt \leq \int_{ln\alpha}^{1} \frac{e^t}{t^n}\, dt \leq \int_{ln\alpha}^{1} \frac{e}{t^n}\, dt$

Cela signifie que $\alpha \int_{ln\alpha}^{1} \frac{1}{t^n}\, dt \leq u_n \leq e \int_{ln\alpha}^{1} \frac{1}{t^n}\, dt$

$\int_{ln\alpha}^{1} \frac{1}{t^n}\, dt = \left[\frac{-1}{(n-1)t^{n-1}}\right]_{ln\alpha}^{1} = \frac{1}{(n-1)(ln\alpha)^{n-1}} - \frac{1}{n-1}$

Or $f(\alpha) = \alpha$ alors $ln\alpha = \frac{1}{\alpha}$ donc $\int_{ln\alpha}^{1} \frac{1}{t^n}\, dt = \frac{\alpha^{n-1}-1}{(n-1)}$

D'où $\alpha\frac{\alpha^{n-1}-1}{n-1} \leq u_n \leq e\frac{\alpha^{n-1}-1}{n-1}$ et par la suite $\frac{\alpha^n-\alpha}{n-1} \leq u_n \leq \frac{e}{n-1}(\alpha^{n-1}-1)$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha^n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{nln\alpha}}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{n/\alpha}}{n/\alpha}\frac{1}{\alpha} = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha^n-\alpha}{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha^n}{n}\frac{1-1/\alpha^{n-1}}{1-1/n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha^n}{n} = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

(Notez bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\alpha^{n-1}} = 0$ car $\alpha > 1$)

d) On a : $\frac{\alpha^n-\alpha}{n-1} \leq u_n \leq \frac{e}{n-1}(\alpha^{n-1}-1)$ alors $\frac{1-1/\alpha^{n-1}}{n-1} \leq \frac{u_n}{\alpha^n} \leq \frac{e}{n-1}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^n}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-1/\alpha^{n-1}}{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n-1}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^n}\right) = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\alpha^n} = 0$

3) a) $\forall\, n \in IN^*,\ u_n = \int_{ln\alpha}^{1} \frac{e^t}{t^n}\, dt$

On pose $\begin{cases} u(x) = \frac{1}{t^n} \\ v'(x) = e^t \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = \frac{-n}{t^{n+1}} \\ v(x) = e^t \end{cases}$

$u_n = \left[\frac{e^t}{t^n}\right]_{ln\alpha}^{1} + n\int_{ln\alpha}^{1} \frac{e^t}{t^{n+1}}\, dt = e - \frac{e^{ln\alpha}}{(ln\alpha)^n} + nu_{n+1}$

$= e - \frac{\alpha}{(1/\alpha)^n} + nu_{n+1} = e - \alpha^{n+1} + nu_{n+1}$

b) ⁎ Pour $n = 1$: $S_1 = -u_1 = \frac{\alpha^2-\alpha^2}{\alpha-1} + (1-1)e - u_1$ (la propriété est vraie)

⁎ On suppose que pour un certain rang n, on a :

$S_n = \frac{\alpha^{n+1}-\alpha^2}{\alpha-1} + (1-n)e - u_n$

⁎ Montrons que $S_{n+1} = \frac{\alpha^{n+2}-\alpha^2}{\alpha-1} - ne - u_{n+1}$

$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}(k-2)\,u_k = \sum_{k=1}^{n}(k-2)\,u_k + (n-1)\,u_{n+1}$

$= S_n + (n-1)\,u_{n+1}$

$= \frac{\alpha^{n+1}-\alpha^2}{\alpha-1} + (1-n)e - u_n + (n-1)\,u_{n+1}$

$= \frac{\alpha^{n+1}-\alpha^2}{\alpha-1} + (1-n)e - u_n + nu_{n+1} - u_{n+1}$

Or $u_n = e - \alpha^{n+1} + nu_{n+1}$ alors $nu_{n+1} = u_n - e + \alpha^{n+1}$

Donc $S_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1}-\alpha^2}{\alpha-1} + (1-n)e - u_n + u_n - e + \alpha^{n+1} - u_{n+1}$

$= \frac{\alpha^{n+1}-\alpha^2}{\alpha-1} - ne + \alpha^{n+1} - u_{n+1}$

$= \frac{\alpha^{n+1}-\alpha^2+\alpha^{n+2}-\alpha^{n+1}}{\alpha-1} - ne - u_{n+1} = \frac{\alpha^{n+2}-\alpha^2}{\alpha-1} - ne - u_{n+1}$

Ainsi $\forall\, n \in IN^*$, on a : $S_n = \frac{\alpha^{n+1}-\alpha^2}{\alpha-1} + (1-n)e - u_n$

c) $\frac{S_n}{\alpha^n} = \frac{\alpha^{n+1}-\alpha^2}{\alpha^n(\alpha-1)} + \frac{(1-n)e}{\alpha^n} - \frac{u_n}{\alpha^n} = \frac{\alpha-\alpha^2}{(\alpha-1)} + \left(\frac{1}{\alpha^n} - \frac{n}{\alpha^n}\right)e - \frac{u_n}{\alpha^n}$

$= -\alpha + \left(\frac{1}{\alpha^n} - \frac{n}{\alpha^n}\right)e - \frac{u_n}{\alpha^n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\alpha^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\alpha + \left(\frac{1}{\alpha^n} - \frac{n}{\alpha^n}\right)e - \frac{u_n}{\alpha^n}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha^n}{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\alpha^n} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\alpha^n} = -\alpha$

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2022	Session de contrôle
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**

N° d'inscription

Le sujet comporte cinq pages numérotées de 1/5 à 5/5.

La page 5/5 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 **(5,5 points)**

Le plan est orienté. Dans la figure de l'annexe jointe,

- Le triangle OEB est rectangle en B et tel que $\left(\overrightarrow{OE}, \widehat{\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.
- Le triangle OEF est rectangle en E et tel que $\left(\overrightarrow{FE}, \widehat{\overrightarrow{FO}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.
- Le point I est le milieu du segment $[OF]$.

1) On pose $R = S_{(OE)} \circ S_{(OB)}$.

a) Justifier que R est la rotation de centre O et d'angle $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

b) Montrer que $R(E) = I$.

2) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 2. On pose $f = h \circ R$.

a) Montrer que $f(E) = F$.

b) Montrer que f est une similitude directe dont on déterminera les éléments caractéristiques.

3) La médiatrice du segment $[IE]$ coupe la droite (BE) en un point A.

a) Montrer que $f(B) = A$.

b) Vérifier que $EA = EO$. Montrer alors que le quadrilatère AEIF est un losange.

4) Soit g la similitude indirecte telle que $g(B) = A$ et $g(E) = F$.

On désigne par Ω le centre de g et on pose $K = g(F)$.

a) Montrer que le rapport de g est égal à 2.

b) Justifier que $\left(\overrightarrow{FE}, \widehat{\overrightarrow{FA}}\right) \equiv \left(\overrightarrow{EA}, \widehat{\overrightarrow{EF}}\right) [2\pi]$.

c) En déduire que $\left(\overrightarrow{FE}, \widehat{\overrightarrow{FK}}\right) \equiv \pi \, [2\pi]$ puis que $F \in [EK]$.

d) Montrer que le point Ω appartient à la droite (EF) privée du segment $[EF]$.

e) En déduire l'axe de g.

f) Construire le point Ω.

5) a) Montrer que $g\big((\Omega I)\big)=(\Omega A)$.

b) Montrer que les points Ω, B et I sont alignés.

Exercice 2 **(3,5 points)**

On dispose d'une urne contenant cinq boules portant les numéros $-1,0,0,1,2$.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1) On considère les évènements :

A : «Les deux boules tirées sont de même numéro.»

B : «Avoir au moins une boule numérotée 0.»

a) Calculer la probabilité de l'évènement A.

b) Montrer que la probabilité de l'évènement B est égale à $\frac{7}{10}$.

2) On désigne par X la variable aléatoire égale au produit des numéros des boules tirées.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance et la variance de X.

3) Une expérience consiste à répéter l'épreuve précédente n fois de suite $(n \geq 2)$ en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne. On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on obtient au moins une boule numérotée 0.

a) Déterminer $P(Y=1)$.

b) Déterminer la plus petite valeur de n pour que le nombre moyen de fois où l'on obtient au moins une boule numérotée 0 soit supérieur ou égal à 5.

Exercice 3 **(4 points)**

Partie A

Soit p un nombre premier tel que $p>3$ et $p \equiv 2 \pmod 3$.

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E_p) : x^3 \equiv 1 \pmod p$.

1) Montrer que si $x \equiv 1 \pmod p$ alors x est une solution de (E_p).

2) Soit x une solution de (E_p).

a) Montrer que $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

b) En déduire que $x \equiv 1 \pmod p$.

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E_p).

Partie B

Soit dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E_{43}) : x^3 \equiv 1 \pmod{43}$.

1) Montrer que $x^3 \equiv 1 \pmod{43}$ si et seulement si $x \equiv 1 \pmod{43}$ ou $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{43}$.

(On pourra remarquer que $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$.)

2) a) Vérifier que $(2x+1)^2 + 3 = 4(x^2 + x + 1)$ et que $30^2 \equiv -3 \pmod{43}$.

b) Montrer que $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{43}$ si et seulement si $(2x+1)^2 \equiv -3 \pmod{43}$.

c) En déduire que :

$x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{43} \Rightarrow (2x-29) \equiv 0 \pmod{43}$ ou $(2x+31) \equiv 0 \pmod{43}$.

3) a) Vérifier que 22 est un inverse de 2 modulo 43.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E_{43}).

<u>Exercice 4</u> (7 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$.

On note (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie A

1) Montrer que f est paire.

2) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Interpréter.

3) a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{(1-e^{2x})\, e^x}{(1+e^{2x})^2}$, pour tout réel x.

b) Dresser le tableau de variation de f .

4) Tracer (ζ).

Partie B

Soit F la fonction définie sur $\left]0, +\infty\right[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^{\ln x} f(t)\, dt$.

1) Montrer que F est dérivable sur $\left]0, +\infty\right[$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x > 0$.

2) a) Montrer que la fonction g définie par $g(x) = \tan x$ est une bijection de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\left]0, +\infty\right[$.

On note g^{-1} la fonction réciproque de g.

b) Déterminer $g^{-1}(1)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g^{-1}(x)$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et que $(g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, pour tout $x > 0$.

3) Montrer que $F(x) = g^{-1}(x) - \dfrac{\pi}{4}$, pour tout $x>0$.

4) Soit $\lambda > 0$. On désigne par $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (ζ) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = -\lambda$ et $x = \lambda$.

a) Montrer que $A(\lambda) = 2\,F(e^{\lambda})$.

b) Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$.

Partie C

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\ F(e^t)\ dt$.

1) a) Montrer que pour tout réel $t \geq 0$, $0 \leq F(e^t) \leq \dfrac{\pi}{4}$.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

2) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n = \dfrac{F(e)}{n+1} - \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}\ f(t)\ dt$.

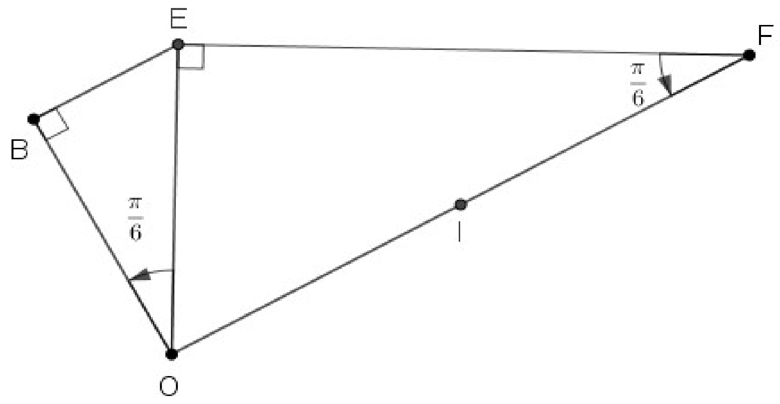
b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} n\,I_n = g^{-1}(e) - \dfrac{\pi}{4}$.

	Section : . . . . **N° d'inscription :** . . . . **Série :** . . . . **Nom et Prénom** : . . . . **Date et lieu de naissance** :	**Signatures des surveillants** . . . .

Épreuve : Mathématiques - Section : Mathématiques

Session de contrôle (2022)

Annexe à rendre avec la copie



Exercice 1

1. a) $(OE)\cap(OB)=\{O\}$ et $2\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OE}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

   Donc **R est la rotation de centre O est d'angle $-\frac{\pi}{3}$** .

   b) Le triangle OEF est rectangle en B et I le milieu de $[OF]$ donc $IE=IO$.

   De plus on a : $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OE}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OE}\right)[2\pi]$
   $\equiv\pi-\left(\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FO}\right)[2\pi]$
   $\equiv\pi-\frac{\pi}{6}[2\pi]\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

   Donc le triangle OIF est équilatéral direct.

   Ainsi $OE=OI$ et $\left(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OI}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$. D'où **$R(E)=I$** .

2. a) $f(E)=h\circ R(E)=h(I)=$ **F**.

   b) $f=h_{(O,2)}\circ R_{(O,-\frac{\pi}{3})}$ est la composée d'une homothétie de rapport strictement positif et d'une rotation de même centre donc c'est la forme réduite d'une similitude directe de centre O de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

3. a) Le triangle OIE est équilatéral direct et (OA) est la médiatrice de $[EI]$ donc $[OA)$ est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{EOI}$ alors $\left(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OA}\right)\equiv-\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

   D'où $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OE}\right)+\left(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OA}\right)[2\pi]\equiv-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}[2\pi]\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

   Le triangle OBA est rectangle en B donc $\frac{OA}{OB}=\frac{1}{\cos\left(\widehat{BOA}\right)}=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}=2$.

   Il en résulte que **$f(B)=A$** .

   b) On a $\widehat{EOA}=\frac{\pi}{6}$.

   Le triangle ABO est rectangle en B donc $\widehat{BAO}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$.

   Ainsi on a : $\widehat{EOA}=\widehat{BAO}=\frac{\pi}{6}$.

   D'où le triangle EOA est isocèle en E. Par suite $EO=EA$.

   La droite (OA) étant la médiatrice de $[EI]$ donc $OE=OI$ et $AE=AI$.

   Or on a $EO=EA$ donc $EO=EA=AE=AI$ d'où $OIAE$ est un losange.

   Par suite $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{EA}$.

   Le point I étant le milieu de $[OF]$ donc $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{IF}$.

   Il en résulte que $\overrightarrow{IF}=\overrightarrow{EA}$.

Il s'ensuit que $AEIF$ est un parallélogramme.

Or $EI = EO$ et $EO = EA$ donc $EI = EA$ d'où $AEIF$ est un losange .

4 a Soit k le rapport de g.

$g(B) = A$ et $g(E) = F$ donc $k = \dfrac{AF}{BE}$.

Or $f(B) = A$ et $f(E) = F$ et f est une similitude directe de rapport 2 donc $\dfrac{AF}{BE} = 2$.

D'où $k = 2$.

b $AEIF$ est un losange donc le triangle AEF est isocèle en A.

D'où $\left(\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EF}\right)[2\pi]$

c g étant une similitude indirecte donc elle change les mesures des angles orientés en leurs opposés. Ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} g(E) = F \\ g(F) = K \\ g(B) = A \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FK}\right) \equiv -\left(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EF}\right)[2\pi].$$

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FK}\right) &\equiv \left(\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FA}\right) + \left(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FK}\right)[2\pi]\\ &\equiv \left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EF}\right) - \left(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EF}\right)[2\pi]\\ &\equiv \left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EF}\right) + \left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EB}\right)[2\pi]\\ &\equiv \left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB}\right)[2\pi]\\ &\equiv \pi[2\pi]\end{aligned}$$

D'où $\left(\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FK}\right) \equiv \pi[2\pi]$.

Ainsi : $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{FK}$ sont colinéaires de sens contraires et $F \in [EK]$.

d On a : $g(E) = F$ et $g(F) = K$ donc $g \circ g(E) = K$.

Or $g \circ g = h_{(\Omega,4)}$ donc $\overrightarrow{\Omega K} = 4\overrightarrow{\Omega E}$.

Donc $\overrightarrow{\Omega K}$ et $\overrightarrow{\Omega E}$ sont colinéaires de même sens.

Par suite Ω appartient à la droite (KE) privée du segment $[KE]$.

Or $F \in [KE]$ donc $(EF) = (KE)$ et $[EF] \subset [KE]$.

Comme $\Omega \notin [KE]$ donc $\Omega \notin [EF]$.

Il en résulte que Ω appartient à la droite (EF) privée du segment $[EF]$.

e Ω appartient à la droite (EF) privée du segment $[EF]$ donc la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{E\Omega F}$ est portée par la droite (EF).

Comme $g(E)=F$ et la droite (EF) porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{E\Omega F}$ donc l'axe de g est la droite (EF) .

f $g=h_{(\Omega,2)}\circ S_{(EF)}$ donc $g(E)=h_{(\Omega,2)}\circ S_{(EF)}(E)=h_{(\Omega,2)}(E)$.

Or $g(E)=F$ donc $h_{(\Omega,2)}(E)=F$ d'où $\overrightarrow{\Omega F}=2\overrightarrow{\Omega E}$.

D'où E est le milieu de $[\Omega F]$.

Par suite Ω est le symétrique de F par rapport à E .

5 a $AEIF$ est un losange donc $S_{(EF)}(I)=A$.

$\Omega\in(EF)$ donc $S_{(EF)}(\Omega)=\Omega$.

D'où $S_{(EF)}\big((\Omega I)\big)=(\Omega A)$.

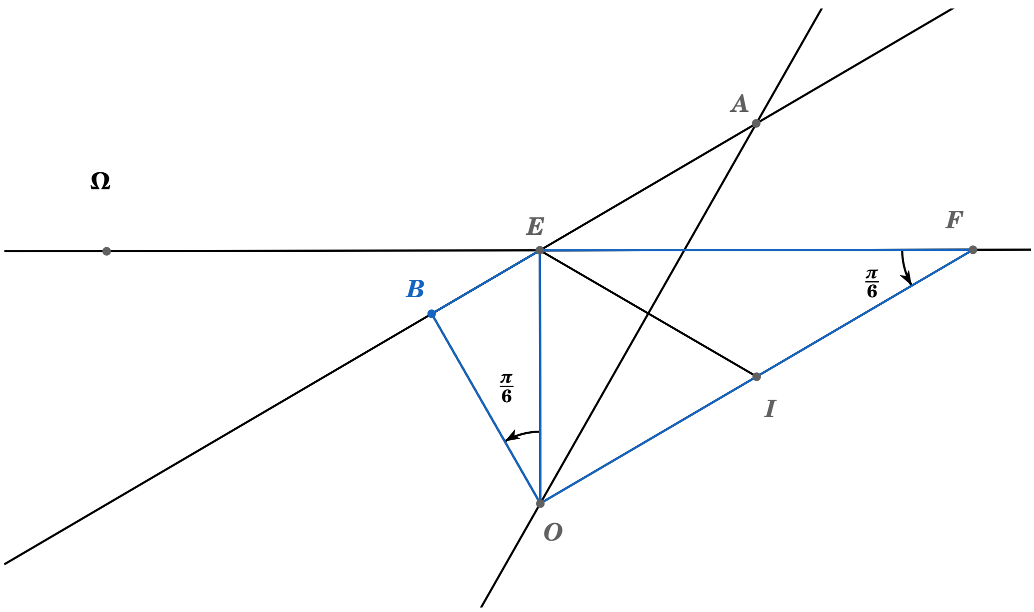
Comme $g=h_{(\Omega,2)}\circ S_{(EF)}$ alors $g\big((\Omega I)\big)=h_{(\Omega,2)}\big((\Omega A)\big)=(\Omega A)$.

b $g(B)=A$ et $g(\Omega)=\Omega$ donc $g\big((\Omega B)\big)=(\Omega A)$.

Ainsi $g\big((\Omega I)\big)=g\big((\Omega B)\big)$.

Comme g est une bijection alors $(\Omega I)=(\Omega B)$.

Par suite Ω, B et I sont alignés .



Exercice 2

1) a) $p(A) = \dfrac{C_2^2}{C_5^2} = \dfrac{1}{10} = \boxed{0,1}$.

b) $p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \dfrac{C_2^3}{C_5^2} = 1 - \dfrac{3}{10} \boxed{= 0,7}$.

2) a)

$X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 2\}$.

$p(X=-2) = \dfrac{C_1^1 \times C_1^1}{C_5^2} = \dfrac{1}{10} = \boxed{0,1}$.

$p(X=-1) = \dfrac{C_1^1 \times C_1^1}{C_5^2} = \dfrac{1}{10} = \boxed{0,1}$.

$p(X=0) = p(B) = \dfrac{7}{10} = \boxed{0,7}$.

$p(X=2) = \dfrac{C_1^1 \times C_1^1}{C_5^2} = \dfrac{1}{10} = \boxed{0,1}$.

x_i	-2	-1	0	2
p_i	$0,1$	$0,1$	$0,7$	$0,1$

b) $E(X) = -2 \times 0,1 + (-1) \times 0,1 + 0 \times 0,7 + 2 \times 0,1 = \boxed{-0,1}$.

$E(X^2) = (-2)^2 \times 0,1 + (-1)^2 \times 0,1 + 0^2 \times 0,7 + 2^2 \times 0,1 = 0,9$.

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \boxed{0,89}$.

3) a) X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = p(B) = 0,7$.

$p(Y=1) = C_n^1 \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^1 \times \left(\dfrac{3}{10}\right)^{n-1} = \boxed{\dfrac{7n}{10} \times \left(\dfrac{3}{10}\right)^{n-1}}$.

b) Le nombre moyen de fois où l'on obtient au moins une boules numérotée 0 est :

$$E(Y) = n \times p = \frac{7n}{10}$$

$E(Y) \geq 5 \iff \dfrac{7n}{10} \geq 5 \iff n \geq \dfrac{50}{7}$.

La plus petite valeur de n tel que $E(Y) \geq 5$ est $\boxed{n = 8}$.

Exercice 3

Partie A

1. $x \equiv 1 \pmod p \implies x^3 \equiv 1^3 \pmod p \implies x^3 \equiv 1 \pmod p$.

   Ainsi : **Si $x \equiv 1 \pmod p$ alors x est une solution de (E_p)** .

2. a) Soit x une solution de (E_p).

   Supposons que p divise x alors $x \equiv 0 \pmod p$ donc $x^3 \equiv 0 \pmod p$ ce qui est absurde car $x^3 \equiv 1 \pmod p$. Donc p ne divise pas x.

   p est premier et p ne divise pas x donc d'après Fermat : $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

   b) $p \equiv 2 \pmod 3$ donc il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 3q+2$.

   Or $p > 2 \implies 3q+2 > 2 \implies q > 0$. Donc $p = 3q+2$ avec $q \in \mathbb{N}^*$

   x étant une solution de (E_p) donc d'après la question a) on a : $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

   Alors $x^{3q+1} \equiv 1 \pmod p$.

   Or on a : $x^3 \equiv 1 \pmod p$ et $x^{3q+1} = \left(x^3\right)^q \times x$ donc $x^{3q+1} \equiv x \pmod p$.

   Il en résulte que $x \equiv 1 \pmod p$.

3. On a :

   - Si x est une solution de (E_p) alors $x \equiv 1 \pmod p$.
   - Si $x \equiv 1 \pmod p$ alors x est une solution de (E_p).

   Il en résulte que l'ensemble de solution de (E_p) dans $\mathbb{Z}$ est :

$$S_{\mathbb{Z}} = \left\{x \in \mathbb{Z} \ \text{ tel que } \ x \equiv 1 \pmod p\right\} = \left\{1 + pk \ ; \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Partie B

1. On a : $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ donc :

$$\begin{aligned}
x^3 \equiv 1 \pmod{43} &\iff x^3 - 1 \equiv 0 \pmod{43} \\
&\iff (x-1)(x^2+x+1) \equiv 0 \pmod{43} \\
&\iff x-1 \equiv 0 \pmod{43} \ \text{ ou } \ x^2+x+1 \equiv 0 \pmod{43} \quad \begin{cases} "\Rightarrow" \text{ car } 43 \text{ est premier} \\ "\Leftarrow" \text{ évident} \end{cases} \\
&\iff x \equiv 1 \pmod{43} \ \text{ ou } \ x^2+x+1 \equiv 0 \pmod{43}
\end{aligned}$$

Ainsi : $x^3 \equiv 1 \pmod{43} \iff x \equiv 1 \pmod{43} \ \text{ ou } \ x^2+x+1 \equiv 0 \pmod{43}$

2 a $(2x+1)^2+3=4x^2+4x+1+3=4x^2+4x+4=$ $4(x^2+x+1)$.

$30^2=900=43\times 20+40$ donc $30^2\equiv 40\pmod{43}\equiv -3\pmod{43}$.

b

$$\begin{aligned} x^2+x+1\equiv 0\pmod{43} &\Longrightarrow 4(x^2+x+1)\equiv 0\pmod{43}\\ &\Longrightarrow (2x+1)^2+3\equiv 0\pmod{43}\\ &\Longrightarrow (2x+1)^2\equiv -3\pmod{43}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2x+1)^2\equiv -3\pmod{43} &\Longrightarrow (2x+1)^2+3\equiv 0\pmod{43}\\ &\Longrightarrow (2x+1)^2\equiv -3\pmod{43}\\ &\Longrightarrow 4(x^2+x+1)\equiv 0\pmod{43}\\ &\Longrightarrow x^2+x+1\equiv 0\pmod{43}\quad \text{D'aprés Gauss car } 43\wedge 4=1\end{aligned}$$

Il en résulte que : $x^2+x+1\equiv 0\pmod{43}$ si et seulement si $(2x+1)^2\equiv -3\pmod{43}$

c

$$\begin{aligned} x^2+x+1\equiv 0\pmod{43} &\Longrightarrow (2x+1)^2\equiv -3\pmod{43}\\ &\Longrightarrow (2x+1)^2\equiv 30^2\pmod{43}\\ &\Longrightarrow (2x+1)^2-30^2\equiv 0\pmod{43}\\ &\Longrightarrow (2x+1-30)(2x+1+30)\equiv 0\pmod{43}\\ &\Longrightarrow (2x-29)(2x+31)\equiv 0\pmod{43}\\ &\Longrightarrow 2x-29\equiv 0\pmod{43} \text{ ou } 2x+31\equiv 0\pmod{43} \text{ car 43 est premier}\end{aligned}$$

3 $22\times 2=44$ et $44\equiv 1 pmod 43$ donc $22\times 2\equiv 1 pmod 43$.

Donc 22 est un inverse de 2 modulo 43.

4 Soit x une solution de (E_{43}).

D'après la question 1 on a : $x\equiv 1\pmod{43}$ ou $x^2+x+1\equiv 0\pmod{43}$.

D'après la question 2/ c) on déduit que :

$$x\equiv 1\pmod{43} \text{ ou } 2x-29\equiv 0\pmod{43} \text{ ou } 2x+31\equiv 0\pmod{43}$$

Or nous avons :

$$\begin{aligned} 2x-29\equiv 0\pmod{43} &\Longrightarrow 2x\equiv 29\pmod{43}\\ &\Longrightarrow 22\times 2x\equiv 22\times 29\pmod{43}\\ &\Longrightarrow x\equiv 638\pmod{43}\\ &\Longrightarrow x\equiv 36\pmod{43}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x+31\equiv 0 \pmod{43} &\Longrightarrow 2x\equiv -31 \pmod{43}\\ &\Longrightarrow 2x\equiv 12 \pmod{43}\\ &\Longrightarrow 22\times 2x\equiv 22\times 12 \pmod{43}\\ &\Longrightarrow x\equiv 638 \pmod{43}\\ &\Longrightarrow x\equiv 6 \pmod{43}\end{aligned}$$

Il en résulte que :

Si x est une solution de (E_{43}) alors $x\equiv 1 \pmod{43}$ ou $x\equiv 36 \pmod{43}$ ou $x\equiv 6 \pmod{43}$.

Réciproquement :

- $x\equiv 1 \pmod{43} \Longrightarrow x^3\equiv 1^3 \pmod{43} \Longrightarrow x^3\equiv 1 \pmod{43}$.
- $x\equiv 36 \pmod{43} \Longrightarrow x^3\equiv 36^3 \pmod{43} \Longrightarrow x^3\equiv 1 \pmod{43}$.

  Car $36\equiv -7 \pmod{43} \Longrightarrow 36^2\equiv (-7)^2 \pmod{43} \Longrightarrow 36^2\equiv 49 \pmod{43} \Longrightarrow 36^2\equiv 6 \pmod{43}$.

  Donc $36^3\equiv -7\times 6 \pmod{43} \Longrightarrow 36^3\equiv -42 \pmod{43} \Longrightarrow 36^3\equiv 1 \pmod{43}$.
- $x\equiv 6 \pmod{43} \Longrightarrow x^2\equiv 36 \pmod{43} \Longrightarrow x^2\equiv -7 \pmod{43} \Longrightarrow x^3\equiv -7\times 6 \pmod{43} \Longrightarrow$ $x^3\equiv 1 \pmod{43}$.

Conclusion :

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E_{43}) est :

$$S_{\mathbb{Z}}=\left\{43k+1\ ;\ 43k+6\ ;\ 43k+36\ \ ;\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Exercice 4

Partie A

1. $D_f = \mathbb{R}$ donc pour tout $x \in D_f$ on a $-x \in D_f$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-2x}} = \dfrac{e^{-x}.e^{2x}}{(1+e^{-2x}).e^{2x}} = \dfrac{e^{x}}{e^{2x}+1} = f(x)$.

   Donc la fonction f est paire.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{1+e^{2x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x\left(\dfrac{1}{e^x}+e^x\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\dfrac{1}{e^x}+e^x} = 0$.

   Donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

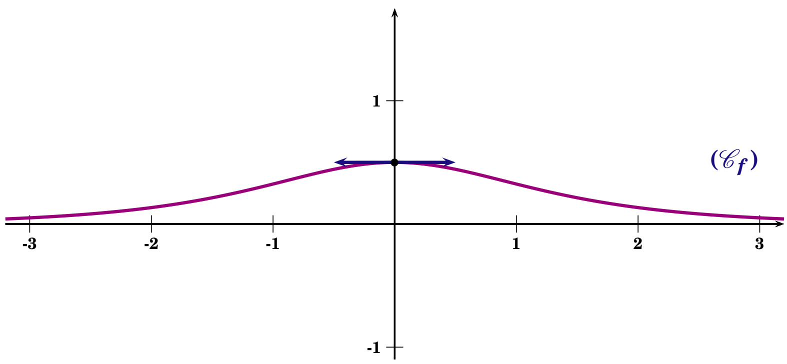
3. a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

   $$f'(x) = \frac{e^x\cdot(1+e^{2x})-2e^{2x}\cdot e^x}{(1+e^{2x})^2} = \frac{e^x\left(1+e^{2x}-2e^{2x}\right)}{(1+e^{2x})^2} = \frac{e^x\left(1-e^{2x}\right)}{(1+e^{2x})^2}$$

   b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $1-e^{2x}$.

   $1-e^{2x} \geq 0 \iff e^{2x} \leq 1 \iff 2x \leq 0 \iff x \leq 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

4. 

Partie B :

1. On a :

$$\begin{cases} \bullet\ f \text{ est continue sur } \mathbb{R}. \\ \bullet\ 0 \in \mathbb{R} \\ \bullet\ \text{La fonction } u : \longmapsto \ln x \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\\ \bullet\ u\left(]0,+\infty[\right) \subset \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc $\boxed{F : x \longmapsto \int_0^{\ln x} f(t)dt \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[}$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a :

$$F'(x) = f(\ln x)\cdot\frac{1}{x} = \frac{e^{\ln x}}{1+e^{2\ln x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{1}{x} = \boxed{\frac{1}{1+x^2}}$$

2. a) g est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $g'(x) = 1+\tan^2 x > 0$.

Donc g est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

D'où g est une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $g\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]\lim\limits_{0^+} g, \lim\limits_{\frac{\pi}{2}^-} g\right[=]0,+\infty[$

b) $\frac{\pi}{4} \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ alors $\boxed{g^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x) = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}}$

c) g est dérivable et ne s'annule pas sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Donc g^{-1} est dérivable sur $g\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right) =]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a :

$$\left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{1+\tan^2 y} \quad \text{avec } y = g^{-1}(x)$$

$y = g^{-1}(x) \iff g(y) = x \iff \tan y = x.$

Donc pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a : $\boxed{(g^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$

3. Pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a : $F'(x) = (g^{-1})'(x)$.

Donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a : $F(x) = g^{-1}(x) + c$.

Or $F(1) = \int_0^{\ln 1} f(t)dt = \int_0^0 f(t)dt = 0$ et $g^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$ donc $c = -\frac{\pi}{4}$.

D'où pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a : $\boxed{F(x) = g^{-1}(x) - \frac{\pi}{4}}$.

4) a) Soit $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \int_{-\lambda}^{\lambda} |f(t)|dt \\ &= \int_{-\lambda}^{\lambda} f(t)dt \text{ car } f(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R} \\ &= 2\int_{0}^{\lambda} f(t)dt \text{ car } f \text{ est paire} \\ &= 2\int_{0}^{\ln(e^{\lambda})} f(t)dt \text{ car } \ln\left(e^{\lambda}\right) = \lambda \\ &= 2F\left(e^{\lambda}\right). \end{aligned}$$

b) $A(\lambda) = 2F\left(e^{\lambda}\right) = 2\left[g^{-1}\left(e^{\lambda}\right) - \frac{\pi}{4}\right]$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{\lambda} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{\lambda \to +\infty} g^{-1}\left(e^{\lambda}\right) = \frac{\pi}{2}$$

D'où $\boxed{\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}}$.

Partie C

1) a) Pour tout $x > 0$ on a : $g^{-1}(x) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Or pour tout pour tout $t \geqslant 0$; $e^t > 0$ donc, $g^{-1}\left(e^t\right) < \frac{\pi}{2}$ d'où , $g^{-1}\left(e^t\right) - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$.

Par suite pour tout $t \geqslant 0$ on a : $F(e^t) < \frac{\pi}{4}$.

D'autre part $F(e^t) = \int_0^{\ln(e^t)} f(x)dx = \int_0^t f(x)dx$.

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$ alors pour tout $t \geqslant 0$, $F(e^t) \geqslant 0$.

Il en résulte que pour tout $t \geqslant 0$, on a : $\boxed{0 \leqslant F(e^t) \leqslant \frac{\pi}{4}}$.

b) On a pour tout $t \geqslant 0$, on a : $0 \leqslant F(e^t) \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Donc pour tout $t \geqslant 0$, $0 \leqslant t^n F(e^t) \leqslant \frac{\pi}{4} \cdot t^n$.

Les fonctions $t \longmapsto t^n F(e^t)$ et $t \longmapsto \frac{\pi}{4} \cdot t^n$ sont continues sur $[0,1]$ donc

$$0 \leqslant \int_0^1 t^n F(e^t)dt \leqslant \frac{\pi}{4}\int_0^1 t^n dt$$

Or $\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ donc $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\pi}{4(n+1)}$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \;;\; 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\pi}{4(n+1)} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\pi}{4(n+1)} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$$

2) Soit h la fonction définie par $h(t) = F(e^t) = \int_0^t f(x)dx$.

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ alors F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$; $h'(t) = f(t)$.

On pose $\begin{cases} u(t)=F(e^t) \\ v'(t)=t^n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(t)=f(t) \\ v(t)=\dfrac{t^{n+1}}{n+1} \end{cases}$

Donc $I_n=\dfrac{1}{n+1}\left[t^{n+1}F(e^t)\right]_0^1-\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}f(t)dt=\boxed{\dfrac{F(e)}{n+1}-\dfrac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f(t)dt}$.

3 Pour tout réel t on a $0<f(t)\leqslant\dfrac{1}{2}$.

Donc pour tout $t\in[0;1]$ on a : $0<t^{n+1}f(t)\leqslant\dfrac{1}{2}t^{n+1}$.

Alors $0\leqslant\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}f(t)dt\leqslant\dfrac{1}{2}\int_0^1 t^{n+1}dt$.

Par suite $0\leqslant\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}f(t)dt\leqslant\dfrac{1}{2(n+2)}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2(n+2)}=0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^{n+1}f(t)dt=0$.

$I_n=\dfrac{F(e)}{n+1}-\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}f(t)dt$ donc $nI_n=F(e)\dfrac{n}{n+1}-\dfrac{n}{n+1}\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}f(t)dt$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^{n+1}f(t)dt=0$ alors $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}nI_n=F(e)=g^{-1}(e)-\dfrac{\pi}{4}}$

Correction examen du baccalauréat section Mathématiques session contrôle 2022

Une correction possible proposée par Kooli Mohamed Hechmi

Exercice 1

1) On a : $R = S_{(OE)}\ o\ R_{(OB)}$

a) on a $(OE) \cap (OB) = \{O\}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE}}\right) \equiv -\frac{\pi}{6}$

alors R est la rotation de centre O et d'angle $2 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{3}$

R est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

b) Le tringle OFE est rectangle en E et $\left(\widehat{\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FO}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et comme $I \in [OF]$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OI}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ (1)

Le tringle OFE est rectangle en E et $I = O * F$ alors $IO = IF = IE$ (2)

de (1) et (2) le triangle OEI est équilatéral indirect donc $\begin{cases} OE = OI \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OI}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ d'où $R(E) = I$

2) $h = h_{(O,2)}$ $f = h\ o\ R$

a) $f(E) = h\ o\ R(E) = h(I)$ or $OF = 2OI$ alors $h(I) = F$ donc $f(E) = F$

b) On a f est la composée d'une homothétie de centre O et de rapport , et d'une rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ alors f est une similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

3) **a)** On a $(OA) = med\ [IE]$ donc (OA) est la bissectrice intérieure de $\widehat{EOI}$

par suite $\left(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OA}}\right) \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OA}}\right)\ [2\pi]$$
$$\equiv -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$$
$$\equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

le triangle OAB est rectangle en B alors $\frac{OA}{OB} = \frac{1}{\frac{OB}{OA}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$\begin{cases} OA = 2OB \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$ alors $f(B) = A$

b) On a $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ or le triangle OAB est rectangle en B alors $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ et comme $E \in [AB]$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AO}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

on a d'après $\left(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OA}}\right) \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

par suite $\left(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AO}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE}}\right)\ [2\pi]$ alors le tringle AEO est isocèle en E par suite $EA = EO$

On a $\begin{cases} f(B) = A \\ f(E) = F \end{cases} \quad \Rightarrow \quad AF = 2BE \quad (1)$

on OBE rectangle en B alors $\frac{BE}{OE} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ donc $OE = 2BE \quad (2)$

de (1) et (2) $AF = OE$ alors $AF = AE$

de plus on a $IO = IE = IF$ donc $IE = EF = AF = AE$ par suite **$AEIF$ est un losange**

4) on a g est une similitude indirecte $g(B) = A$, $g(E) = F$ et $g(F) = K$

a) On a $g(B) = f(B) = A$ et $g(E) = f(E) = F$ alors g et f ont le même rapport alors **le rapport de g est 2**

b) On $AEIF$ est un losange alors $\left(\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FA}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EF}}\right)\ [2\pi]$

c) On $\begin{cases} g(B) = A \\ g(E) = F \\ g(F) = K \end{cases}$ et g est une similitude indirecte alors $\left(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FK}}\right) \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EF}}\right)\ [2\pi]$

$E \in [AB]$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EF}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{EF}}\right)\ [2\pi]$

$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EF}}\right) + \pi[2\pi]$

$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FA}}\right) + \pi[2\pi]$ 4) b)

par suite $\left(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FK}}\right) \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FA}}\right) + \pi[2\pi]$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FK}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FA}}\right) \equiv \pi[2\pi]$

d'où $\left(\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FA}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FK}}\right) \equiv \pi[2\pi]$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FK}}\right) \equiv \pi[2\pi]$

les vecteurs $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{FK}$ sont collinaires et de sens contraire alors $F \in [EK]$

d) On a g est une similitude indirecte de centre Ω et de rapport 2 donc $g\ o\ g = h_{(\Omega,4)}$

$g\ o\ g(E) = g(F) = K \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\Omega K} = 4\overrightarrow{\Omega E} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\Omega K}$ et $\overrightarrow{\Omega E}$ sont collinaires et de même sens

$\Rightarrow \Omega \in (EK)\backslash[EK] \quad \Rightarrow$ or $(EK) = (EF)$ alors $\Omega \in (EF)\backslash[EF]$

c) On a $g(E) = F$ donc l'axe de g est porté par la bissectrice intérieure de $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega E},\overrightarrow{\Omega F}}\right)$

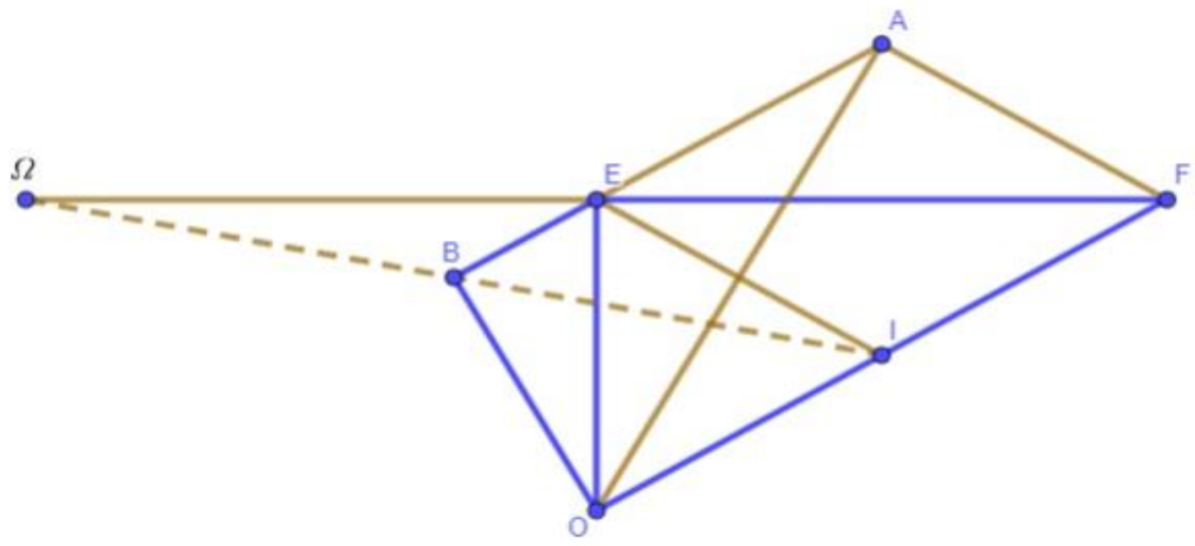
or $\Omega \in (EF)\backslash[EF]$ alors **l'axe de g est la droite (EF)**

c) On a $g(E) = F \Rightarrow \Omega F = 2\Omega E \quad \Rightarrow$ **$E = \Omega * F$ d'où la construction de Ω.**

5) a) On a $g = h_{(\Omega,4)}\, o\ S_{(EF)}$ et on a $AEIF$ est un losange donc $S_{(EF)}(I) = A$

posons $g(I) = I'$ donc $g(I) = h_{(\Omega,4)}\, o\ S_{(EF)}(I) = h_{(\Omega,4)}(A) = I'$ d'où $I' \in (\Omega A)$ alors $g(I) \in (\Omega A)$ or $g(\Omega) = \Omega$ alors **$g(\Omega I) = (\Omega A)$**

b) Supposons que Ω , B et I ne sont pas alignés alors $g(\Omega) = \Omega$, $g(B) = A$ et $g(I)$ ne sont pas alignés or $g(I) \in (\Omega A)$ donc $g(\Omega) = \Omega$, $g(B) = A$ et $g(I)$ sont alignés ce qui absurde alors **Ω , B et I sont alignés**



Exercice 2

1) a) On a : $p(A) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$

b) $p(B) = \frac{C_2^1 \times C_3^1 + C_2^2}{C_5^2} = \frac{2\times 3+1}{10} = \frac{7}{10}$

autrement

Soit $\overline{B}$ « aucune boule numéroté 0 n'est tirée » $p(\overline{B}) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$

$p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

2) a) On a $X(\Omega) = \{-2\,, -1\,, 0\,, 2\,\}$

$p(X=-2) = \frac{C_1^1 \times C_1^1}{C_5^2} = \frac{1}{10}$, $p(X=-1) = \frac{C_1^1 \times C_1^1}{C_5^2} = \frac{1}{10}$, $p(X=0) = \frac{7}{10}$ et $(X=2) = \frac{C_1^1 \times C_1^1}{C_5^2} = \frac{1}{10}$

d'où la loi de probabilité de X

x_i	-2	-1	0	2	total
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

b) On $E(X) = \sum x_i\, p_i = \frac{-2}{10} + \frac{-1}{10} + 0 + \frac{2}{10} = \frac{-1}{10}$

$E(X) = \frac{-1}{10}$

3) a) La variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{7}{10}$

$p(Y=1) = C_n^1 \times \frac{7}{10} \times \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} = \frac{7n}{10} \times \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}$

$p(Y=1)=\frac{7n}{10}\times\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}$

b) On $p(Y)\geq 5 \iff n\times\frac{7}{10}\geq 5 \iff n\geq\frac{10}{7}\times 5 \iff n\geq\frac{50}{7}\simeq 7,14$

alors la plus petite valeur de n tel que $p(Y)\geq 5$ et $n=8$

Exercice 3

Partie A

1) On a : p est premier , $p\geq 3$ et $p\equiv 2(mod\ 3)$ $(E_p): x^3\equiv 1(mod\ p)$

$x\equiv 1(mod\ p) \Rightarrow x^3\equiv 1^3(mod\ p)$ donc $x^3\equiv 1(mod\ p)$ d'où x est solution de (E_p).

2) a) Supposons que p divise x alors $x\equiv 0(mod\ p)$ donc $x^3\equiv 0(mod\ p)$

absurde car $x^3\equiv 1(mod\ p)$ donc p ne divise pas x et comme p est premier alors d'après Fermat

$x^{p-1}\equiv 1(mod\ p)$

b) On x est solution de $(E_p)\Rightarrow x^{p-1}\equiv 1(mod\ p)$ et on a $p\equiv 2(mod\ 3)$ alors il existe $k\in\mathbb{Z}^*$

(car $p\geq 3$) tel que $p=3k+2$ par suite $x^{3k+2-1}\equiv 1(mod\ p)\Rightarrow x^{3k+1}\equiv 1(mod\ p)$

$\Rightarrow x^{3k}\times x\equiv 1(mod\ p) \Rightarrow (x^3)^k\times x\equiv 1(mod\ p)$

or $x^3\equiv 1(mod\ p)\Rightarrow (x^3)^k\equiv 1(mod\ p)\Rightarrow (x^3)^k\times x\equiv x(mod\ p)$ par suite $x\equiv 1(mod\ p)$

3) On a x est solution de $(E_p)\Rightarrow x\equiv 1(mod\ p)$ alors il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x=1+pk$

$S_{\mathbb{Z}}=\{1+pk\ ,k\in\mathbb{Z}\}$

Partie B

1) On a $(E_{43}): x^3\equiv 1(mod\ 43)\Rightarrow x^3-1\equiv 0(mod\ 43)\Rightarrow (x-1)(x^2+x+1)\equiv 0(mod\ 43)$

$\Rightarrow (x-1)\equiv 0(mod\ 43)$ ou $x^2+x+1\equiv 0(mod\ 43)$

2) a) $(2x+1)^2+3=4x^2+4x+1+3=4(x^2+x+1)$

$30^2=900=21\times 43-3$ donc $30^2\equiv -3(mod\ 43)$

b) On a $x^2+x+1\equiv 0(mod\ 43)\iff 4(x^2+x+1)\equiv 0(mod\ 43)\iff (2x+1)^2+3\equiv 0(mod\ 43)$

$\iff (2x+1)^2\equiv -3(mod\ 43)$

c) On a $x^2+x+1\equiv 0(mod\ 43)\Rightarrow (2x+1)^2\equiv -3(mod\ 43)\Rightarrow (2x+1)^2\equiv 30^2(mod\ 43)$ **2) a)**

$\Rightarrow (2x+1)^2-30^2\equiv 0(mod\ 43)\Rightarrow (2x+1-30)(2x+1+30)\equiv 0(mod\ 43)$

$\Rightarrow (2x-29)(2x+31)\equiv 0(mod\ 43)$

$\Rightarrow 2x-29\equiv 0(mod\ 43)$ ou $2x+31\equiv 0(mod\ 43)$

3) a) On a $22\times 2=44=43+1$ alors $22\times 2\equiv 1\ (mod\ 43)$

par suite 22 est inverse de 2 modulo 43

b) On a d'après **2) b)** x est solution de (E_{43}) alors $x\equiv 1(mod\ 43)$

On a d'après 2) c) x est solution de (E_{43}) alors $2x - 29 \equiv 0 (mod\ 43)$ ou alors $2x + 31 \equiv 0 (mod\ 43)$

x est solution de (E_{43}) alors x est solution de (E_{43}) ssi $x \equiv 1 (mod\ 43)$ ou $2x - 29 \equiv 0 (mod\ 43)$ ou $2x + 31 \equiv 0 (mod\ 43)$

* $x \equiv 1 (mod\ 43) \Leftrightarrow$ $x = 43k + 1 ,\ k \in \mathbb{Z}$

* $2x - 29 \equiv 0 (mod\ 43) \Leftrightarrow 2x \equiv 29 (mod\ 43) \Leftrightarrow 2 \times 22x \equiv 22 \times 29 (mod\ 43)$

$\Leftrightarrow x \equiv 22 \times 29 (mod\ 43)$ (car $22 \times 2 \equiv 1\ (mod\ 43)$)$\Leftrightarrow x \equiv 22 \times 29 (mod\ 43)$

$\Leftrightarrow x \equiv 14 \times 43 + 36 (mod\ 43) \Leftrightarrow x \equiv 36 (mod\ 43) \Leftrightarrow$ $x = 43k + 36 ,\ k \in \mathbb{Z}$

* $2x + 31 \equiv 0 (mod\ 43) \Leftrightarrow 2x \equiv -31 (mod\ 43) \Leftrightarrow 2x \equiv 12 (mod\ 43)$

$\Leftrightarrow 22 \times 2x \equiv 22 \times 12 (mod\ 43) \Leftrightarrow x \equiv 22 \times 12 (mod\ 43) \Leftrightarrow x \equiv 6 \times 43 + 6 (mod\ 43)$

$\Leftrightarrow x \equiv 6 (mod\ 43) \Leftrightarrow$ $x = 43k + 6 ,\ k \in \mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{Z}} = \{43k + 1 , 43k + 36, 43k + 6\ \ k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 4

$f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Partie A

1) On a $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -x \in \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}\ f(-x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}} = \frac{e^{2x} \times e^{-x}}{e^{2x}(1+e^{-2x})} = \frac{e^x}{1+e^{2x}} = f(x)$ alors f est paire

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^{2x}(e^{-2x}+1)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \overbrace{\frac{1}{\underbrace{e^x}_{+\infty}\left(\underbrace{e^{-2x}+1}_{1}\right)}}^{0} = 0$

alors la droite d'équation y=0 est une asymptote horizontale à ($\mathcal{C}$) au voisinage de $+\infty$

3) a) $\forall x \in \mathbb{R}$;

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{1+e^{2x}}\right)' = \frac{e^x(1+e^{2x}) - 2e^{2x} \times e^x}{(1+e^{2x})^2} = \frac{e^x + e^{3x} - 2e^{3x}}{(1+e^{2x})^2} = \frac{e^x - e^{3x}}{(1+e^{2x})^2} = \frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2}$$

b) On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2}$ or $e^x > 0$ et $(1+e^{2x})^2 > 0$

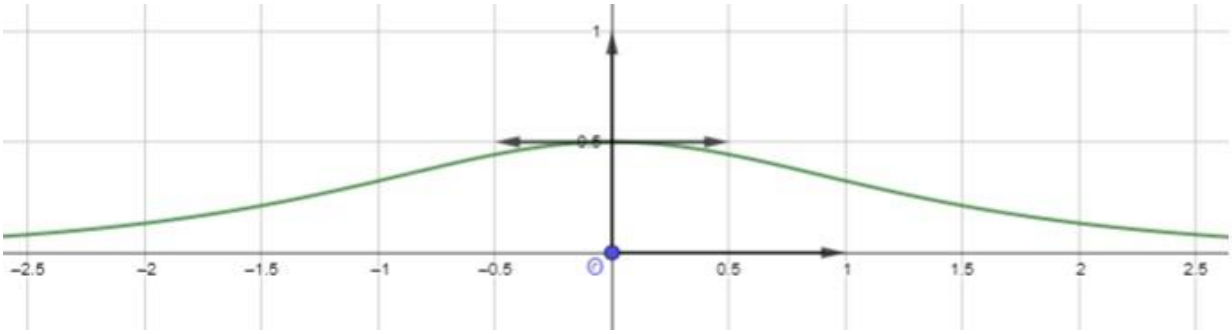
alors $f'(x)$ prend le signe de $1 - e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$

$f'(x) \leq 0 \Rightarrow 1 - e^{2x} \leq 0 \Rightarrow e^{2x} \geq 1 \Rightarrow x \geq 0$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et comme f est paire alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

4)



Partie B

$F(x) = \int_0^{\ln x} f(t)\ dt \quad , \forall x \in \mathbb{R}$

1) $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$ on a $\ln x \in \mathbb{R}$

$t \mapsto f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$ alors F est dérivable sur $]0, +\infty]$.

$\forall x \in]0, +\infty]\ , F'(x) = (\ln x)' \times f(\ln x) = \frac{1}{x} \times \frac{e^{\ln x}}{1 + e^{2\ln x}} = \frac{1}{x} \times \frac{e^{\ln x}}{1 + (e^{\ln x})^2} = \frac{1}{x} \times \frac{x}{1 + x^2} = \frac{1}{1 + x^2}$

$\forall x \in]0, +\infty]\ , F'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

2) **a)** $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $g'(x) = (\tan x)' = 1 + \tan^2 x > 0$

g est continue et strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

alors g réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $g\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) =]0, +\infty[$

b) On a $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff g^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

on a $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} g(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty \quad \iff \lim\limits_{x \to +\infty} g^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$

c) On a g est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x) \neq 0$

alors g^{-1} est dérivable sur $g\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) =]0, +\infty[$

$\forall x \in]0, +\infty[\ , (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$

posons pour tout $x \in]0, +\infty[$ et pour tout $\in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $g^{-1}(x) = y \iff g(y) = x$

$\iff \tan y = x$ alors $\tan^2 y = x$

par suite $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{1+x^2}$

pour tout $\in]0, +\infty[\ , (g^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

3) On a $\forall x \in]0\,,+\infty[\,,\, F'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (g^{-1})'(x) \;\Rightarrow F(x) = g^{-1}(x) + c\,,\; c \in \mathbb{R}$

$F(1) = g^{-1}(1) + c\,,\quad F(1) = \int_0^{\ln 1} f(t)\; dt = \int_0^{0} f(t) = 0$

par suite $0 = g^{-1}(1) + c \qquad c = -g^{-1}(1) = -\frac{\pi}{4}$

$\forall x \in]0\,,+\infty[\,,\, F(x) = g^{-1}(x) - \frac{\pi}{4}$

4) a) on a f est paire alors $A(\lambda) = \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,dx = 2\int_0^{\lambda} f(x)\,dx = \int_0^{\ln e^{\lambda}} f(x)\; dx = 2F(e^{\lambda})$

$A(\lambda) = 2F(e^{\lambda})$

b) On $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} 2F(e^{\lambda})$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{\lambda} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g^{-1}(x) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

alors $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} F(e^{\lambda}) = \frac{\pi}{2}$ par suite $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = 2\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = \frac{\pi}{2}$

Partie C

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \int_0^1 t^n\, F(e^t)\, dt$

1) a) On a $\forall\, x \in]0\,,+\infty[\,,\, F(x) = g^{-1}(x) - \frac{\pi}{4}$ et $\forall x \in]0\,,+\infty[$ on a $0 < g^{-1}(x) < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow\; -\frac{\pi}{4} < g^{-1}(x) - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \quad\Rightarrow\quad -\frac{\pi}{4} < F(x) < \frac{\pi}{4} \quad\Rightarrow\quad F(x) < \frac{\pi}{4}$

or $\forall\; t > 0$ on a $e^t > 0$ par suite $F(e^t) < \frac{\pi}{4} \quad\Rightarrow\quad F(e^t) \le \frac{\pi}{4} \quad (1)$

On a $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ et $\forall\, x \ge 1 \;\; \ln x \ge 0 \;\Rightarrow \int_0^{\ln x} f(t)\; dt \ge 0 \quad\Rightarrow\; F(x) \ge 0$

or $\forall\, t \ge 1$ on a $e^t \ge 0$ donc $F(e^t) \ge 0 \qquad (2)$

de (1) et (2) pour tout réel $t \ge 0 \qquad 0 \le F(e^t) \le \frac{\pi}{4}$

b) On a $\forall\, t \ge 0 \qquad 0 \le F(e^t) \le \frac{\pi}{4} \;\Rightarrow\; 0 \le t^n F(e^t) \le t^n \times \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow\; 0 \le \int_0^1 t^n F(e^t)\,dt \le \int_0^1 t^n \times \frac{\pi}{4}\; dt \;\Rightarrow\; 0 \le I_n \le \frac{\pi}{4}\int_0^1 t^n\; dt \;\Rightarrow\; 0 \le I_n \le \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_0^1$

$\Rightarrow\; 0 \le I_n \le \frac{\pi}{4}\times\frac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi}{4}\times\frac{1}{n+1} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

2) a) On a: $I_n = \int_0^1 t^n\, F(e^t)\; dt$

$u(t) = F(e^t) \qquad u'(t) = e^t \times F'(e^t) = e^t \times \frac{1}{1+e2^t} = \frac{e^t}{1+e^{2t}} = f(t)$

$v'(t) = t^n \qquad v(t) = \frac{1}{n+1} t^{n+1}$

$$I_n=\left[\frac{F(e^t)t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1-\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}\times\frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt=\frac{F(e)-F(1)}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f(t)\,dt$$

$$=\frac{F(e)}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f(t)\,dt$$

b) On a : $nI_n=\dfrac{n}{n+1}F(e)-\dfrac{n}{n+1}\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}f(t)\,dt$

On a $\forall t\geq 0\,,0\leq f(t)\leq\dfrac{1}{2}\Rightarrow 0\leq t^{n+1}f(t)\leq\dfrac{1}{2}t^{n+1}\Rightarrow 0\leq\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}f(t)\,dt\leq\frac{1}{2}\int_0^1 t^{n+1}\,dt$

$\Rightarrow\ 0\leq\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}f(t)\,dt\leq\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+2}t^{n+2}\right]_0^1\ \Rightarrow\ 0\leq\int_0^1 t^{n+1}f(t)\,dt\leq\frac{1}{2(n+2)}$

On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2(n+2)}=0$ d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^{n+1}f(t)\,dt=0$

$*\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}F(e)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\underbrace{1+\frac{1}{n}}_{1}}F(e)=F(e)$

$*\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f(t)\,dt=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\underbrace{1+\frac{1}{n}}_{1}}\underbrace{\int_0^1 t^{n+1}f(t)}_{0}=0$

d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}nI_n=F(e)=g^{-1}(x)-\frac{\pi}{4}$

A.S :2021/2022	Epreuve : Mathématiques	Session contrôle
Mr. ABBASSI AYMEN	Examen du Baccalauréat (Une correction)	Section : Mathématiques

EXERCICE N°1 : (5.5 points)

Le plan est orienté. Dans la figure de l'annexe jointe,

- Le triangle OEB est rectangle en B et tel que $\left(\overrightarrow{OE}, \widehat{\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.
- Le triangle OEF est rectangle en E et tel que $\left(\overrightarrow{FE}, \widehat{\overrightarrow{FO}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.
- Le point I est le milieu du segment $[OF]$.

1) On pose $R = S_{(OE)} \circ S_{(OB)}$.

a) Justifier que R est la rotation de centre O et d'angle $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	0.5

$\bullet (OB) \cap (OE) = \{O\}$

$$\bullet\ 2\left(\overrightarrow{OB}, \widehat{\overrightarrow{OE}}\right) \equiv -2\left(\overrightarrow{OE}, \widehat{\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]$$
$$\equiv -2 \times \frac{\pi}{6}[2\pi]$$
$$\equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

donc $R = S_{(OE)} \circ S_{(OB)} = R_{\left(O; -\frac{\pi}{3}\right)}$

b) Montrer que $R(E) = I$.	0.5

le triangle OEF est rectangle en E et I milieu de $[OF]$ alors $IO = IE$

donc le triangle OEF est isocèle en I

de plus $\left(\overrightarrow{OI}, \widehat{\overrightarrow{OE}}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OF}, \widehat{\overrightarrow{OE}}\right)[2\pi]$ car $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OF}$ sont colinéaires et de même sens

$$\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}[2\pi]$$
$$\equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

d'où le triangle est équilatéral direct $\Rightarrow \begin{cases} OE = OI \\ \left(\overrightarrow{OE}, \widehat{\overrightarrow{OI}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Rightarrow \boxed{R(E) = I}$

2) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 2. On pose $f = h \circ R$.

a) Montrer que $f(E) = F$. **0.25**

$\begin{cases} R(E) = I \\ h(I) = F \end{cases}$ car $I = O * F \Rightarrow \overrightarrow{OF} = 2\overrightarrow{OI} \Rightarrow h_{(O,2)}(I) = F$

donc $\boxed{f(E) = h \circ R(E) = h(I) = F}$.

b) Montrer que f est une similitude directe dont on déterminera les éléments caractéristiques. **0.5**

$f = h \circ R = h_{(O;2)} \circ R_{(O,-\frac{\pi}{3})}$, c'est la forme réduite de f.

donc f est une similitude direct de centre O, de rapport 2 et d'angle $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

3) La médiatrice du segment $[IE]$ coupe la droite (BE) en un point A.

a) Montrer que $f(B) = A$. **0.5**

$\left.\begin{array}{l} OIE \text{ est isocèle en } O \\ (OA) = med[EI] \end{array}\right\}$ alors $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}}) \equiv \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OE}})[2\pi]$

$\equiv \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

donc $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OE}}) + (\widehat{\overrightarrow{OE}; \overrightarrow{OA}})[2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}[2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\frac{OA}{OB} = \frac{1}{\frac{OB}{OA}} = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{3})} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ par suite $\boxed{f(B) = A}$

b) Vérifier que $EA = EO$. Montrer alors que le quadrilatère AEIF est un losange. **0.5**

Dans le triangle OAB on a; $\widehat{BAO} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \widehat{BAO} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \widehat{EAO} = \frac{\pi}{6}$.

or $\widehat{EOA} = \frac{\pi}{6}$ donc le triangle OAE est isocèle en E $\Rightarrow \boxed{EA = EO}$

$\begin{cases} (OA) = med[EI] \\ O \in (OA) \text{ et } A \in (OA) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OI = OE \\ AI = AE \end{cases}$ et $EA = EO$ donc $OI = IA = AE = EO$

d'où OIAE est un losange $\Rightarrow (EA) // (OI)$ et O, I et F sont alignés

alors $(EA) // (IF)$ et $\begin{cases} EA = OI \\ OI = IF \end{cases} \Rightarrow EA = IF$.

Par suite; AEIF est un parallélogramme et $IE = IF$ alors $\boxed{\text{AEIF est un losange}}$

4) Soit g la similitude indirecte telle que $g(B) = A$ et $g(E) = F$.

On désigne par Ω le centre de g et on pose $K = g(F)$.

a) Montrer que le rapport de g est égal à 2. **0.25**

On désigne par k' le rapport de g

$$\left.\begin{array}{l} g(B)=A \\ g(E)=F \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{k' = \frac{AF}{BE} = 2} \text{ car } \left\{\begin{array}{l} f(E)=F \\ f(B)=A \\ f \text{ est de rapport } 2 \end{array}\right.$$

b) Justifier que $(\widehat{\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EF}})\ [2\pi]$. **0.25**

Le triangle AEF est isocèle en A donc $(\widehat{\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EF}})\ [2\pi]$

c) En déduire que $(\widehat{\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FK}}) \equiv \pi\ [2\pi]$ puis que $F \in [EK]$ **0.5**

$$\left.\begin{array}{l} g(B)=A \\ g(E)=F \\ g(F)=K \end{array}\right\} \text{alors } (\widehat{\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FK}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EF}})\ [2\pi] \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FK}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EB}})\ [2\pi]$$

$$\begin{aligned}(\widehat{\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FK}}) &\equiv \underbrace{(\widehat{\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FA}})} + (\widehat{\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FK}})\ [2\pi] \\ &\equiv (\widehat{\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EF}}) + (\widehat{\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EB}})\ [2\pi] \\ &\equiv (\widehat{\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}})\ [2\pi] \\ &\equiv \pi\ [2\pi]\end{aligned}$$

donc $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{FK}$ sont colinéaires et de sens contraires d'ou $\boxed{F \in [EK]}$

d) Montrer que le point Ω appartient à la droite (EF) privée du segment $[EF]$. **0.5**

$$\left.\begin{array}{l} g\circ g(E) = K \\ g\circ g = h_{(\Omega;4)} \end{array}\right\} \text{alors } h_{(\Omega,4)}(E) = K \Rightarrow \overrightarrow{\Omega K} = 4\overrightarrow{\Omega E} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{\Omega K}$ et $\overrightarrow{\Omega E}$ sont colinéaires et de même sens

$\Rightarrow \Omega \in (EK)\setminus[EK]$

or $F \in [EK]$ donc $\boxed{\Omega \in (EF)\setminus[EF]}$ car $(EK)\setminus[EK] \subset (EF)\setminus[EF]$.

e) En déduire l'axe de g. **0.25**

L'axe de g est la bissectrice interieure de l'angle géométrique $E\hat{\Omega}F$ car $g(E)=F$

donc $\boxed{(EF) \text{ est l'axe de } g}$ car $\Omega \in (EF)\setminus[EF] \Rightarrow E\hat{\Omega}F = 0$.

f) Construire le point Ω.	0.25

$$g = h_{(\Omega,2)} \circ S_{(EF)} = S_{(EF)} \circ h_{(\Omega,2)}$$

$$g(E)=F \Rightarrow h_{(\Omega,2)} \circ S_{(EF)}(E) = F \Rightarrow h_{(\Omega,2)}(E) = F \Rightarrow \overrightarrow{\Omega F} = 2\overrightarrow{\Omega E}$$

$$\Rightarrow E = \Omega * F \Rightarrow \boxed{\Omega = S_E(F)}$$

5) a) Montrer que $g\big((\Omega I)\big)=(\Omega A)$.	0.5

$$\begin{cases} h_{(\Omega,2)}\big((\Omega I)\big) = (\Omega I) \text{ car la droite } (\Omega I) \text{ passe par le centre } \Omega \text{ de } h_{(\Omega,2)} \\ S_{(EF)}\big((\Omega I)\big) = (\Omega A) \text{ car } S_{(EF)}(\Omega) = \Omega \text{ et } S_{(EF)}(I) = A. \end{cases}$$

donc $g\big((\Omega I)\big) = S_{(EF)} \circ h_{(\Omega,2)}\big((\Omega I)\big) = (\Omega A)$

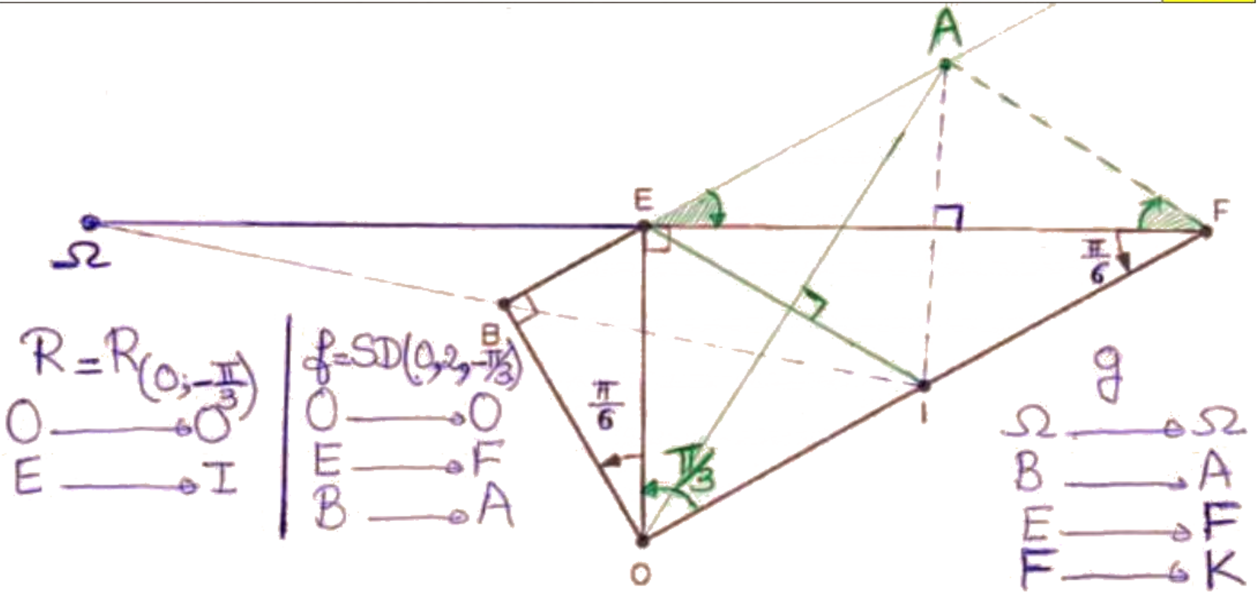
b) Montrer que les points Ω, B et I sont alignés.	0.25

$$g^{-1} = \left(S_{(EF)} \circ h_{(\Omega,2)}\right)^{-1} = h^{-1}_{(\Omega,2)} \circ \left(S_{(EF)}\right)^{-1} = h_{(\Omega,\frac{1}{2})} \circ S_{(EF)}$$

$$g^{-1}(A) = B \Rightarrow h_{(\Omega,\frac{1}{2})} \circ S_{(EF)}(A) = B \Rightarrow h_{(\Omega,\frac{1}{2})}(I) = B \Rightarrow \overrightarrow{\Omega B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega I}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{\Omega B}$ et $\overrightarrow{\Omega I}$ sont colinéaires $\Rightarrow \boxed{\Omega \in (BI)}$

	N



EXERCICE N°2 : (3.5 points)

On dispose d'une urne contenant cinq boules portant les numéros $-1, 0, 0, 1, 2$.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1) On considère les évènements :

A : « Les deux boules tirées sont de même numéro. »

B : « Avoir au moins une boule numérotée 0. »

a) Calculer la probabilité de l'évènement A. **0.5**

$$p(A) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$$

b) Montrer que la probabilité de l'évènement B est égale à $\frac{7}{10}$. **0.5**

$\overline{B}$: « Aucune boule qui porte le numéro 0 »

$$p(\overline{B}) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10} \text{ donc } p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

2) On désigne par X la variable aléatoire égale au produit des numéros des boules tirées.

a) Déterminer la loi de probabilité de X. **1.25**

Soit E l'univer de cet experience aléatoire

$X(E) = \{-2; -1; 0; 2\}$

$p(X=-2) = \frac{C_1^1 C_1^1}{C_5^2} = \frac{1}{10}$ $\{-1, 2\}$

$p(X=-1) = \frac{C_1^1 C_1^1}{C_5^2} = \frac{1}{10}$ $\{-1; 1\}$

$p(X=0) = p(B) = \frac{7}{10}$

$p(X=2) = \frac{C_1^1 C_1^1}{C_5^2} = \frac{1}{10}$ $\{2; 1\}$

b) Calculer l'espérance et la variance de X. **0.5**

x_i	-2	-1	0	2	Totale
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{10}$	1
$x_i p(X=x_i)$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{5}$	$E(X) = -\frac{1}{10}$
$x_i^2 p(X=x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{2}{5}$	$E(X^2) = \frac{9}{10}$.

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$\boxed{V(X) = \frac{9}{10} - \left(-\frac{1}{10}\right)^2 = 0,89}$$

3) Une expérience consiste à répéter l'épreuve précédente n fois de suite $(n \geq 2)$ en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne. On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on obtient au moins une boule numérotée 0.

a) Déterminer $P(Y=1)$. **0.25**

L'experience aléatoire est constituée de n épreuves identiques, indépendants et n'ayant que deux issues B ou $\overline{B}$

alors Y suit une loi binomiale de paramètre n et $p = p(B) = \frac{7}{10}$

donc $p(Y=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k \left(\frac{7}{10}\right)^k \left(\frac{3}{10}\right)^{n-k}$ avec $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$.

d'ou $\boxed{p(Y=1) = C_n^1 \left(\frac{7}{10}\right)^1 \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} = n\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}}$

b) Déterminer la plus petite valeur de n pour que le nombre moyen de fois où l'on obtient au moins une boule numérotée 0 soit supérieur ou égal à 5. **0.5**

$E(Y) = n.p = n\frac{7}{10}$

$E(Y) \geqslant 5 \iff \frac{7}{10}n \geqslant 5 \iff n \geqslant \frac{5\times10}{7} \iff n \geqslant 7,14$

donc la plus petit valeur de n pour que $E(x) \geqslant 5$ est 8

EXERCICE N°3 : (4 points)

Partie A

Soit p un nombre premier tel que $p>3$ et $p \equiv 2 \pmod 3$.

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E_p) : x^3 \equiv 1 \pmod p$.

1) Montrer que si $x \equiv 1 \pmod p$ alors x est une solution de (E_p). **0.25**

$x \equiv 1 [p] \Rightarrow x^3 \equiv 1 [p] \Rightarrow x$ est une solution de l'équation (E_p)

2) Soit x une solution de (E_p).

a) Montrer que $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. **0.5**

Supposons que p divise x alors $x \equiv 0 [p] \Rightarrow x^3 \equiv 0 [p] \Rightarrow x^3 \not\equiv 1 [p]$

donc x n'est pas une solution de (E_p) ce qui est absurde.

d'ou p ne divise pas x
et p premier

$\xrightarrow[\text{de Fermat}]{\text{Petit théorème}}$ $\boxed{x^{p-1} \equiv 1 [p]}$

b) En déduire que $x \equiv 1 \pmod p$.	0.5

$p \equiv 2\,[3] \Rightarrow$ il existe $k \in \mathbb{N}^*$; $p = 2 + 3k$ car $p > 3$

x est une solution de $(E_p) \Rightarrow x^3 \equiv 1\,[p] \Rightarrow (x^3)^k \equiv 1\,[p]$

$\Rightarrow x^{3k} \equiv 1\,[p] \Rightarrow x^{3k} . x \equiv 1 . x\,[p] \Rightarrow x^{3k+1} \equiv x\,[p]$

donc $x^{p-1} \equiv x\,[p]$

or $x^{p-1} \equiv 1\,[p]$ d'où $\boxed{x \equiv 1\,[p]}$

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E_p).	0.25

D'après 1) et 2)b) on a ; $\left(x^3 \equiv 1\,[p]\right) \Longleftrightarrow \left(x \equiv 1\,[p]\right)$

donc $\boxed{S_{\mathbb{Z}} = \{1 + pk\,;\ k \in \mathbb{Z}\}}$

Partie B

Soit dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E_{43}) : x^3 \equiv 1 \pmod{43}$.

1) Montrer que $x^3 \equiv 1 \pmod{43}$ si et seulement si $x \equiv 1 \pmod{43}$ ou $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{43}$. (On pourra remarquer que $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$.)	0.5

$x^3 \equiv 1\,[43] \Longleftrightarrow x^3 - 1 \equiv 0\,[43] \Longleftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) \equiv 0\,[43]$

$\Longleftrightarrow$ 43 divise $(x-1)(x^2+x+1)$

donc $\boxed{\text{43 divise } (x-1) \text{ ou } 43 \text{ divise } (x^2+x+1) \text{ car 43 est premier.}}$

Réciproquement ;

$43 \mid x-1$ ou $43 \mid x^2+x+1$ alors $43 \mid (x-1)(x^2+x+1)$

Conclusion ; $x^3 \equiv 1\,[43] \Longleftrightarrow x \equiv 1\,[43]$ ou $x^2+x+1 \equiv 0\,[43]$

2) a) Vérifier que $(2x+1)^2 + 3 = 4(x^2+x+1)$ et que $30^2 \equiv -3 \pmod{43}$.	0.5

$(2x+1)^2 + 3 = 4x^2 + 4x + 1 + 3 = 4x^2 + 4x + 4 = 4(x^2 + x + 1)$

$30^2 = 900 = -3 + 43 \times 21$ donc $\boxed{30^2 \equiv -3\,[43]}$

b) Montrer que $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{43}$ si et seulement si $(2x+1)^2 \equiv -3 \pmod{43}$.	0.25

$x^2+x+1 \equiv 0\,[43] \Rightarrow 4(x^2+x+1) \equiv 0\,[43] \Rightarrow (2x+1)^2+3 \equiv 0\,[43]$

$\Rightarrow \boxed{(2x+1)^2 \equiv -3\,[43]}$

Réciproquement ;

$(2x+1)^2 \equiv -3\,[43] \Rightarrow (2x+1)^2+3 \equiv 0\,[43] \Rightarrow 4(x^2+x+1) \equiv 0\,[43]$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 43 \mid 4(x^2+x+1) \\ 43 \wedge 4 = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{Gauss}]{\text{Lemme de}} 43 \mid x^2+x+1 \Rightarrow \boxed{x^2+x+1 \equiv 0\,[43]}$

Conclusion ; $\left(x^2+x+1 \equiv 0\,[43]\right) \Leftrightarrow \left((2x+1)^2 \equiv -3\,[43]\right)$

c) En déduire que : $x^2+x+1 \equiv 0 \pmod{43} \Rightarrow (2x-29) \equiv 0 \pmod{43}$ ou $(2x+31) \equiv 0 \pmod{43}$.	0.5

$x^2+x+1 \equiv 0\,[43] \Rightarrow (2x+1)^2 \equiv -3\,[43]$

D'après B) 2) a) on a ; $30^2 \equiv -3\,[43]$ donc $(2x+1)^2 \equiv 30^2\,[43] \Rightarrow (2x+1)^2 - 30^2 \equiv 0\,[43]$

$\Rightarrow (2x+1-30)(2x+1+30) \equiv 0\,[43] \Rightarrow (2x-29)(2x+31) \equiv 0\,[43]$

$\Rightarrow \boxed{2x-29 \equiv 0\,[43] \text{ ou } 2x+31 \equiv 0\,[43]}$ car 43 est premier

3) a) Vérifier que 22 est un inverse de 2 modulo 43.	0.25

$2 \times 22 = 44 = 1+43 \Rightarrow 22 \times 2 \equiv 1\,[43]$ donc 22 est un inverse de 2 modulo 43.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E_{43}).	0.5

$x^2+x+1 \equiv 0\,[43]$

donc $2x-29 \equiv 0\,[43]$

$\Rightarrow 2(x-14) \equiv 1\,[43]$

$\Rightarrow 2(x-14) \equiv 2\times22\,[43]$ car $2\times22 \equiv 1\,[43]$

$\Rightarrow 2(x-14-22) \equiv 0\,[43]$

$\Rightarrow 2(x-36) \equiv 0\,[43]$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 43 \mid 2(x-36) \\ 43 \wedge 2 = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{de Gauss}]{\text{Lemme}} 43 \mid x-36$

d'où $\boxed{x \equiv 36\,[43]}$

ou $2x+31 \equiv 0\,[43]$

$\Rightarrow 2(x+16) \equiv 1\,[43]$

$\Rightarrow 2(x+16) \equiv 2\times22\,[43]$ car $2\times22 \equiv 1\,[43]$

$\Rightarrow 2(x+16-22) \equiv 0\,[43]$

$\Rightarrow 2(x-6) \equiv 0\,[43]$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 43 \mid 2(x-6) \\ 43 \wedge 2 = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{de Gauss}]{\text{Lemme}} 43 \mid x-6$

d'où $\boxed{x \equiv 6\,[43]}$

Réciproquement

Supposons que $x \equiv 36\,[43]$

$x^2 \equiv 36^2\,[43]$

$\Rightarrow x^2 \equiv 6\,[43]$ car $36^2 = 6 + 30\times43$

$\Rightarrow x^2+x+1 \equiv 0\,[43]$

Supposons que $x \equiv 6\,[43]$

$x^2 \equiv 6^2\,[43]$

$\Rightarrow x^2 \equiv 36\,[43]$

$\Rightarrow x^2+x+1 \equiv 0\,[43]$

<u>Conclusion</u> $(x^2+x+1=0) \Leftrightarrow x \equiv 6\ [43]$ <u>ou</u> $x \equiv 36\ [43]$

D'après B) 1) on a; $x^3 \equiv 1\ [43] \Leftrightarrow x \equiv 1\ [43]$ <u>ou</u> $x^2+x+1 \equiv 0\ [43]$

$\Leftrightarrow x \equiv 1\ [43]$ <u>ou</u> $x \equiv 6\ [43]$ <u>ou</u> $x \equiv 36\ [43]$

<u>D'où</u> $\boxed{S_{\mathbb{Z}} = \{1+43k, k\in\mathbb{Z}\} \cup \{6+43k, k\in\mathbb{Z}\} \cup \{36+43k, k\in\mathbb{Z}\}}$

EXERCICE N°4 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$.

On note (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1) Montrer que f est paire.	0.25

Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $(-x) \in \mathbb{R}$ et on a;

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}} = \frac{\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^{2x}}} = \frac{\frac{1 \cdot e^x}{e^x \cdot e^x}}{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}} = \frac{e^x}{e^{2x}+1} = f(x)$$

<u>donc</u> $\boxed{f \text{ est une fonction paire}}$

2) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Interpréter.	0.5

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}(e^{-x}+e^x)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{-x}+e^x}\right) = 0 \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{x}) = +\infty \end{cases}$$

Alors la courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $+\infty$

3) a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{(1-e^{2x})\,e^x}{(1+e^{2x})^2}$, pour tout réel x.	0.25

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a;

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^{2x}) - 2e^{2x}e^x}{(1+e^{2x})^2} = \frac{e^x + e^{3x} - 2e^{3x}}{(1+e^{2x})^2} = \frac{e^x - e^{3x}}{(1+e^{2x})^2} = \frac{(1-e^{2x})e^x}{(1+e^{2x})^2}.$$

b) Dresser le tableau de variation de f .	0.5

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(1-e^{2x})e^x}{(1+e^{2x})^2} = 0 \Leftrightarrow 1-e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 1 = e^{2x} \Leftrightarrow x = 0$$

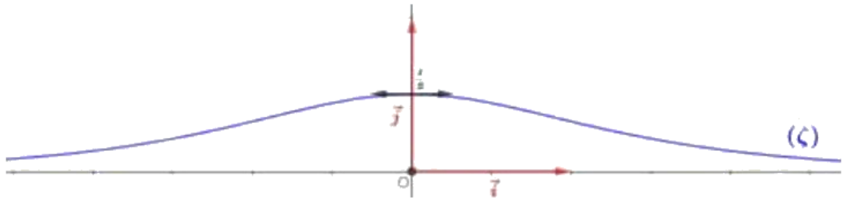
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{(1-e^{2x})e^x}{(1+e^{2x})^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow 1-e^{2x} > 0 \Leftrightarrow 1 > e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 0 > 2x \Leftrightarrow x < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

4) Tracer (ζ).	0.5



Partie B

Soit F la fonction définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par $F(x)=\int_0^{\ln x} f(t)\,dt$.

1) Montrer que F est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x>0$.	0.5

- La fonction $t \mapsto f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $0 \in \mathbb{R}$
- La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$
- Pour tout $x \in]0,+\infty[$; $\ln x \in \mathbb{R}$.

alors F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a ;

$$F'(x) = \ln' x \cdot f(\ln x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{e^{\ln x}}{1+e^{2\ln x}} = \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{1+(e^{\ln x})^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

2) a) Montrer que la fonction g définie par $g(x)=\tan x$ est une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\left]0,+\infty\right[$.	0.5

g est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et pour tout $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$ on a ; $g'(x) = 1+\tan^2 x > 0$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

g est strictement croissante sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ donc elle réalise une bijection de $]0,\frac{\pi}{2}[$ sur $g(]0,\frac{\pi}{2}[) =]0,+\infty[$ car g est continue sur $]0,\frac{\pi}{2}[$

On note g^{-1} la fonction réciproque de g.

b) Déterminer $g^{-1}(1)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g^{-1}(x)$.	0.5

$\begin{cases} g^{-1}(1) = x \\ x \in]0,\frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 1 \\ x \in]0,\frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ x \in]0,\frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ donc $g^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

$\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et que $(g^{-1})'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, pour tout $x>0$.	0.5

- La bijection g est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$
- Pour tout $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$; $g'(x) \neq 0$

alors g^{-1} est dérivable sur $g(]0,\frac{\pi}{2}[) =]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a ;

$(g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \dfrac{1}{g'(y)} = \dfrac{1}{1+\tan^2 y}$ avec $y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow x = g(y) = \tan y \Leftrightarrow x^2 = \tan^2 y$

donc $\boxed{(g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}}$

3) Montrer que $F(x)=g^{-1}(x)-\frac{\pi}{4}$, pour tout $x>0$	0.5

Pour tout $x\in]0,+\infty[$; $F'(x)=(g^{-1})'(x)$

donc pour tout $x\in]0,+\infty[$; $F(x)=g^{-1}(x)+C$ avec $C\in\mathbb{R}$.

or $\begin{cases} F(1)=g^{-1}(1)+C=\frac{\pi}{4}+C \\ F(1)=\int_0^{\ln 1} f(t)\,dt=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{4}+C=0 \Rightarrow C=-\frac{\pi}{4}$

donc ; $\boxed{F(x)=g^{-1}(x)-\frac{\pi}{4}}$

4) Soit $\lambda>0$. On désigne par $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (ζ), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=-\lambda$ et $x=\lambda$.

a) Montrer que $A(\lambda)=2F(e^{\lambda})$.	0.5

$A(\lambda)=\int_{-\lambda}^{\lambda} f(t)\,dt=2\int_0^{\lambda} f(t)\,dt$ car f est une fonction paire

$=2\int_0^{\ln(e^{\lambda})} f(t)\,dt=2F(e^{\lambda})$.

b) Déterminer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.	0.25

$A(\lambda)=2F(e^{\lambda})=2\left(g^{-1}(e^{\lambda})-\frac{\pi}{4}\right)=2g^{-1}(e^{\lambda})-\frac{\pi}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{\lambda}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g^{-1}(x)=\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\lambda\to+\infty} g^{-1}(e^{\lambda})=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(2g^{-1}(e^{\lambda})\right)=\pi$

donc $\boxed{\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)=\frac{\pi}{2}}$

Partie C

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n=\int_0^1 t^n F(e^t)\,dt$.

1)a) Montrer que pour tout réel $t\geq 0$, $0\leq F(e^t)\leq\frac{\pi}{4}$.	0.5

Pour tout $t\in[0,+\infty[$; $e^t\geq e^0 \Rightarrow e^t\in[1,+\infty[\Rightarrow g^{-1}(e^t)\in g^{-1}([1,+\infty[)$

$\Rightarrow \boxed{g^{-1}(e^t)\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[}$

donc pour tout $t\in[0,+\infty[$; $\frac{\pi}{4}\leq g^{-1}(e^t)\leq\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0\leq g^{-1}(e^t)-\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \boxed{0\leq F(e^t)\leq\frac{\pi}{4}}$

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$.	0.5

Pour tout $t\in[0,1]$; $0\leq F(e^t)\leq\frac{\pi}{4} \Rightarrow 0\leq t^n F(e^t)\leq \frac{\pi}{4}t^n$ car $t^n\geq 0$
de plus les fonctions $t\mapsto 0$; $t\mapsto t^n F(e^t)$ et $t\mapsto\frac{\pi}{4}t^n$ sont continues sur $[0,1]$
donc $\int_0^1 0\,dt\leq\int_0^1 t^n F(e^t)\,dt\leq\frac{\pi}{4}\int_0^1 t^n dt \Rightarrow 0\leq I_n\leq\frac{\pi}{4}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$\Rightarrow \boxed{0\leq I_n\leq\frac{\pi}{4(n+1)}}$

$\begin{cases}\text{Pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leq I_n\leq\frac{\pi}{4(n+1)}\\ \lim_{n\to+\infty}(0)=0\\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4(n+1)}\right)=0\end{cases}$ alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty}(I_n)=0}$

2)a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n=\frac{F(e)}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f(t)\,dt$.	0.5

$\begin{pmatrix} u(t)=F(e^t) \longrightarrow u'(t)=e^t F'(e^t)=e^t\cdot\frac{1}{1+(e^t)^2}=\frac{e^t}{1+e^{2t}}=f(t)\\ v'(t)=t^n \longrightarrow v(t)=\frac{t^{n+1}}{n+1}\end{pmatrix}$

$I_n=\int_0^1 t^n F(e^t)\,dt=\left[\frac{t^{n+1}F(e^t)}{n+1}\right]_0^1-\int_0^1\frac{t^{n+1}f(t)}{n+1}\,dt=\frac{F(e)}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f(t)\,dt$

b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} nI_n = g^{-1}(e)-\frac{\pi}{4}$.	0.25

Posons $U_n=\int_0^1 t^{n+1}f(t)\,dt$
Pour tout $t\in[0,1]$; $0\leq t\leq 1 \Rightarrow 0<f(1)\leq f(t)\leq f(0) \Rightarrow 0\leq t^{n+1}f(t)\leq\frac{1}{2}t^{n+1}$
et comme les fonctions $t\mapsto 0$; $t\mapsto t^{n+1}f(t)$ et $t\mapsto\frac{1}{2}t^{n+1}$ sont continues sur $[0,1]$
alors $\int_0^1 0\,dt\leq\int_0^1 t^{n+1}f(t)\,dt\leq\frac{1}{2}\int_0^1 t^{n+1}dt \Rightarrow 0\leq U_n\leq\frac{1}{2(n+2)}$

$\begin{cases}\text{Pour tout } n\in\mathbb{N}^*;\ 0\leq U_n\leq\frac{1}{2(n+2)}\\ \lim_{n\to+\infty}(0)=0\\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2(n+2)}\right)=0\end{cases}$ alors $\lim_{n\to+\infty}U_n=0$.

$\lim_{n\to+\infty}(nI_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}F(e)-\frac{n}{n+1}U_n\right)$

$=\lim_{n\to+\infty}\left(\underbrace{\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}}_{\to 1}F(e)-\underbrace{\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}}_{\to 1}\underbrace{U_n}_{\to 0}\right)=F(e)=g^{-1}(e)-\frac{\pi}{4}$