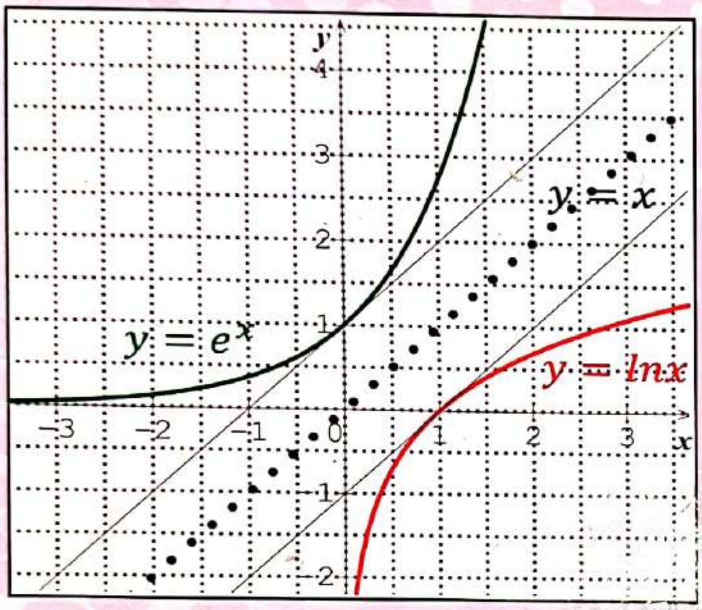
L'Excellence en Mathématiques

T^{le}

D & TI



$$\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n = \cos^n x$$

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

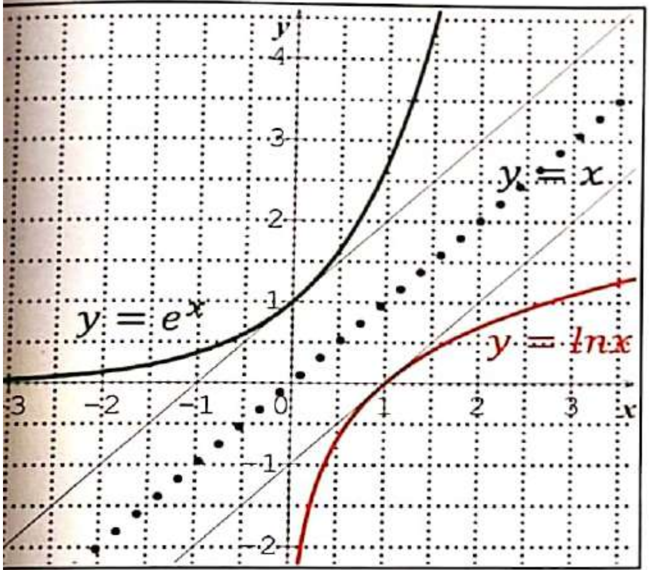
LIVRE DE L'ÉLÈVE

Valentin TEGNINKO
Damase SIELINOU
Albert BOUDA
Roger POKAM
Raoul BOUDY
Chamberlain FOUODJI

Ami Education

L'Excellence en Mathématiques

T^le D & TI



$$\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n = \cos^n x$$

$$x)v(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

LIVRE DE L'ÉLÈVE

Valentin TEGNINKO
Damase SIELINOU
Albert BOUDA
Roger POKAM
Raoul BOUDY
Chamberlain FOUODJI

Ami Education

Première édition 2014
© NMI Education
B.P. 31267
Yaoundé - Cameroun
Email : frontdesk@nmieducation.org
Site Web : www.nmieducation.org
Responsable éditoriale : Mela Fokam Gisèle
Assistante Editorial : Makowo Momo Solange
Couverture : Ndjofang Bagzé Raymond
Infographie : Youmbougne Sophonie
Illustrations : Nmi Education

Printed and bound in India by Replika Press Pvt. Ltd.

Nmi Education

ISBN : 995680294-8

Avant-propos

Le développement des trois éléments clés que sont les savoirs, les savoir faire et les savoir être a été la préoccupation de tous les instants dans le présent ouvrage.

La procédure d'acquisition des savoirs a privilégié la capacité de tout apprenant à pouvoir mobiliser des connaissances nécessaires aux fins d'acquérir les connaissances nouvelles qui représentent une portion très réduite pour tout apprentissage qu'il soit théorique ou pratique. Considérer un apprenant comme un spectateur au sens large du terme des étapes du processus d'apprentissage serait une bévue pédagogique et didactique qui enfreindrait à l'efficacité et à l'efficience des résultats attendus. Ce manuel s'inscrit dans la logique d'accompagnement, d'encadrement, d'encouragement des apprenants et des lecteurs de manière générale sur l'accès aux connaissances mathématiques et à leur implication dans la gestion des problèmes de la vie courante.

Ce manuel suggère une progression que les auteurs estiment être à même de fluidifier efficacement la qualité des enseignements en tenant compte des exigences à court, à moyen et à long terme des programmes de mathématiques en vigueur dans la classe.

Les chapitres sont organisés en leçons et chaque leçon subdivisée en unités didactiques qui en constituent les articulations principales.

L'ossature d'une unité didactique se présente comme suit :

a) « **Prendre un bon départ** » : Une ou plusieurs activités sont proposées à l'apprenant, dans lesquelles il doit faire face aux difficultés, s'interroger et mobiliser ses connaissances et autres moyens pour répondre aux différentes interrogations posées.

b) « **Retenir** » : Cette partie très courte, dégage les principales recommandations assorties des activités menées dans « Prendre un bon départ » .

c) « **Exemples et exercices résolus** » : Des exemples diversifiés, liés à une capacité donnée y sont traités et largement commentés, parfois consolidés par des exercices résolus. On voudrait que ce manuel soit aussi une espèce d'annales et donc de repère pour les utilisateurs.

d) « **S'exercer** »: Des évaluations directes des capacités des apprenants à la mise en œuvre des savoirs sont proposées dans cette partie. Les éventuelles difficultés devraient être résolues en recourant aux commentaires faits dans les exemples traités.

A la fin d'un chapitre, est proposé un nombre assez important et diversifié d'exercices, regroupés en thèmes, pour faciliter l'exploitation du manuel, reprenant de manière directe ou indirecte des capacités acquises tout au long du chapitre.

Le souci d'avoir une forte culture de rigueur et une simplicité dans le raisonnement, celui d'amélioration de la communication(qualité de la rédaction des productions des élèves), le renforcement des capacités de muter les connaissances savantes en puissants outils de résolution des problèmes de la vie et le décloisonnement des enseignements disciplinaires sont des extrants impératifs pour tout apprenant d'une série scientifique qui rêve d'une insertion réussie dans le circuit de développement individuel et sociétal.

Les auteurs.

SOMMAIRE

Chapitre 1

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}^3$– RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

LEÇON 1 SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}^3$

- Consolidation des différentes méthodes de résolution.
- Utilisations des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^3$.

Prendre un bon départ

Activité 1

Le plan étant muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, soit f la fonction polynôme définie par $f(x)=-4x^3+ax^2+bx+c$, où a, b et c sont des réels. On veut déterminer les nombres réels a, b et c sachant que -1 et 2 sont des racines de f et que la courbe de f passe par le point $A(1;-2)$.

- Déterminer les équations que doivent satisfaire les réels a, b et c.
- Résoudre le système constitué par ces équations en utilisant deux méthodes que l'on nommera.

Activité 2

Une entreprise fabrique trois types de jouets en bois qui nécessitent : des camions, des patins et des chiens à traîner. Elle utilise :

- pour un camion : 2 kg de bois et 3 h de travail.
- pour un patin : 500 g de bois et 4 h de travail.
- pour un chien à traîner : 800 g de bois et 3h30 de travail,

Déterminer le nombre de camions, de patins et de chiens fabriqués si on utilise exactement 91 kg de bois, si on travaille 313 h et si on fabrique 89 objets au total.

Retenir

(1) On appelle ***système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$*** ou ***système d'équations linéaires à trois inconnues***, tout regroupement de plusieurs équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$ auxquelles on doit rechercher un seul ensemble solution.

(2) ***Résoudre*** un système d'équations linéaires à trois inconnues revient à déterminer toutes les solutions communes à chacune des équations du système.

EXEMPLE 1

(i) $\begin{cases} -x+3y-\frac{1}{2}z=6 \\ 2x+2y-3z=4 \end{cases}$ est un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$

(ii) $\begin{cases} x+y+z=89 \\ 3x+4y+3,5z=313 \\ 20x+5y+8z=910 \end{cases}$ est un système de trois équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$

(iii) $\begin{cases} x-y+2z=2 \\ 2x+3y-z=1 \\ -x+y-2z=-2 \\ x+2y+3z=-5 \end{cases}$ est un système de quatre équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$

METHODES ET REMARQUES

Pour résoudre un système de ***trois*** équations linéaires à trois inconnues, on utilise deux méthodes :

- ***La méthode par substitution***
- ***La méthode du Pivot de Gauss.***

EXEMPLE 2

Résolvons dans $\mathbb{R}^3$ le système : $\begin{cases} -x+3y-2z=-4 \\ 4x-2y-z=8 \\ x+5y-3z=2 \end{cases}$.

Méthode par substitution

$$\begin{cases} -x+3y-2z=-4 \\ 4x-2y-z=8 \\ x+5y-3z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4+3y-2z \\ 4(4+3y-2z)-2y-z=8 \\ 4+3y-2z+5y-3z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4+3y-2z \\ 10y-9z=-8 \\ 8y-5z=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4+3y-2z \\ y=\dfrac{9}{10}z-\dfrac{8}{10} \\ 8\left(\dfrac{9}{10}z-\dfrac{8}{10}\right)-5z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4+3y-2z \\ y=\dfrac{9}{10}z-\dfrac{8}{10} \\ \dfrac{22}{10}z=\dfrac{44}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4+3\times1-2\times2=3 \\ y=\dfrac{9}{10}\times2-\dfrac{8}{10}=1 \\ z=2 \end{cases}$$

Ainsi l'ensemble solution du système est $\boxed{S=\{(3,1,2)\}}$.

Méthode du pivot de Gauss

Donnons un nom à chacune des équations du système, on obtient par exemple :

$$\begin{cases} -x+3y-2z=-4 & L_1 \\ 4x-2y-z=8 & L_2 \\ x+5y-3z=2 & L_3 \end{cases}$$

Fixons une des équations. Par exemple L_1 et une des inconnues par exemple x que nous comptons éliminer dans les équations L_2 et L_3 par combinaisons linéaires avec L_1. On a alors :

Disposition pratique de calcul

$$\begin{array}{rl} 4L_1 & -4x+12y-8z=-16 \\ L_2 & \underline{4x-2y-z\quad=8} \\ 4L_1+L_2 \to & 0+10y-9z=-8 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} L_1 & -x+3y-2z=-4 \\ L_3 & \underline{x+5y-3z=2} \\ L_1+L_3 \to & 0+8y-5z=-2 \end{array}$$

Nouvelle écriture du système

$$\begin{array}{r} \\ 4L_1+L_2 \to \\ L_1+L_3 \to \end{array} \begin{cases} 2x+3y+z=4 & L_1 \\ 10y-9z=-8 & L'_2 \\ 8y-5z=-2 & L'_3 \end{cases}$$

En gardant l'équation L_1 fixée, fixons par exemple l'équation L'_2 et l'inconnue y puis éliminons y dans l'équation L'_3.

$$\begin{array}{rl} 8L'_2 & 80x-72z=-64 \\ -10L'_3 & \underline{-80y+50z=20} \\ 8L'_2-10L'_3 \to & 0-22z=-44 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \\ \\ 8L'_2-10L'_3 \to \end{array} \begin{cases} -x+3y-2z=-4 & L_1 \\ 10y-9z=-8 & L'_2 \\ -22z=-44 & L''_3 \end{cases}$$

Finalement on a : $\begin{cases} -x+3y-2z=-4 & L_1 \\ 10y-9z=-8 & L'_2 \\ z=2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} -x+3\times1-2\times2=-4 \Rightarrow x=3 \\ 10y-9\times2=-8 \Rightarrow y=1 \\ z=2 \end{cases}$

L'ensemble solution est donc $\boxed{S=\{(3,1,2)\}}$.

REMARQUE

- L'utilisation de l'une ou l'autre des deux méthodes ci-dessus ne change pas l'ensemble solution
- La méthode du Pivot de Gauss transforme le système initial ayant la forme d'un rectangle

$\begin{cases} -x+3y-2z=-4 \\ 4x-2y-z=8 \\ x+5y-3z=2 \end{cases}$ en un système final équivalent et ayant la forme d'un triangle :

$\begin{cases} -x+3y-2z=-4 \\ \quad 10y-9z=-8 \\ \quad\quad -22z=-44 \end{cases}$ On dit qu'on a ***triangularisé*** le système.

- Ces deux systèmes sont ***équivalents*** car ils ont le même ensemble solution.

MÉTHODE

La méthode du ***pivot de Gauss*** consiste à :

- Fixer une des équations.
- Choisir une des trois inconnues à éliminer dans les deux autres restantes par combinaisons linéaires avec l'équation fixée.
- A l'aide des opérations usuelles (addition, soustraction, multiplication, division), remplacer les deux autres équations restantes par des nouvelles équations ne dépendant plus de l'inconnue choisie.
- Renouveler le procédé jusqu'à la triangularisation du système initial.

Exercice Résolu 1

On considère le système :(Σ):$\begin{cases} 2x-y+3z=-3 \\ -x+2y+z=4 \end{cases}$.

a) Déterminer les solutions de la forme :$(-1,\beta,\gamma)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système : (Σ):$\begin{cases} 2x-y+3z=-3 \\ -x+2y+z=4 \end{cases}$.

Solution

a) Déterminons les solutions de la forme :$(-1,\beta,\gamma)$. $(-1,\beta,\gamma)$ est solution de (Σ) si et seulement si $\begin{cases} -2-\beta+3\gamma=-3 \\ 1+2\beta+\gamma=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\beta+3\gamma=-1 \\ 2\beta+\gamma=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=3\gamma+1 \\ 2\beta+\gamma=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=3\gamma+1 \\ 2(3\gamma+1)+\gamma=3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \beta=3\gamma+1 \\ 7\gamma=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=3\times\frac{1}{7}+1=\frac{10}{7} \\ \gamma=\frac{1}{7} \end{cases}$ donc $\boxed{S=\left\{\left(-1,\frac{10}{7},\frac{1}{7}\right)\right\}}$.

Scanné avec CamScanner

b) Résolvons dans $\mathbb{R}^3$ le système $(\Sigma)\begin{cases}2x-y+3z=-3\\-x+2y+z=4\end{cases}$. Donnons à l'une des inconnues une valeur *arbitraire* : par exemple $z=\lambda$. Le système (Σ) peut alors s'écrire : (S) $\begin{cases}2x-y+3z=-3\\-x+2y+z=4\\z=\lambda\end{cases}$ on peut alors continuer la résolution par la méthode de substitution, soit par le pivot de Gauss.

$$(\Sigma)\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y+3z=-3 & L_1\\-x+2y+z=4 & L_2\\z=\lambda & L_3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{matrix}\\ L_1+2L_2\rightarrow\\ \\\end{matrix}\begin{cases}2x-y+3z=-3 & L_1\\3y+5z=5 & L'_2\\z=\lambda & L_3\end{cases}\text{ ainsi}$$

$$2x-\frac{5-5\lambda}{3}+3\lambda=-3\Rightarrow 2x+\frac{-5+5\lambda+9\lambda}{3}=-3\Rightarrow x=\frac{1}{2}\left(-3-\frac{-5+14\lambda}{3}\right)\Rightarrow x=\frac{-2-7\lambda}{3}.$$

$$3y+5\lambda=5\Rightarrow y=\frac{5-5\lambda}{3}$$

$$z=\lambda$$

L'ensemble solution de ce système est donc $\boxed{S=\left\{\left(\frac{-2-7\lambda}{3},\frac{5-5\lambda}{3},\lambda\right),\quad \lambda\in\mathbb{R}\right\}}$.

Exercice Résolu 2

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes : $(\Sigma_1)\begin{cases}x-3y+z=2\\-2x+y-3z=-1\\2x+9y+5z=0\end{cases}$ $(\Sigma_2)\begin{cases}2x-3y+z=1\\x+y-z=3\\x-9y+5z=-7\end{cases}$.

Solution

- Résolvons par le Pivot de Gauss le système $(\Sigma_1)\begin{cases}x-3y+z=2\\-2x+y-3z=-1\\-2x-9y-5z=0\end{cases}$

On a $(\Sigma_1)\Leftrightarrow\begin{cases}x-3y+z=2 & L_1\\-2x+y-3z=-1 & L_2\\-2x-9y-5z=0 & L_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}\\2L_1+L_2\rightarrow\\2L_1+L_3\rightarrow\end{matrix}\begin{cases}x-3y+z=2 & L_1\\-5y-z=3 & L'_2\\-15y-3z=4 & L'_3\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{matrix}\\ \\3L'_2-L'_3\rightarrow\end{matrix}\begin{cases}x-3y+z=2 & L_1\\-5y-z=3 & L'_2\\0=5 & L''_3\end{cases}$. L'égalité L''_3 n'a aucun sens donc le système (Σ_1) n'admet pas de solution d'où $\boxed{S=\varnothing}$.

- Résolvons par le Pivot de Gauss le système $(\Sigma_2)\begin{cases}2x-3y+z=1\\x+y-z=3\\x-9y+5z=-7\end{cases}$.

On a $(\Sigma_2)\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3y+z=1 & L_1\\x+y-z=3 & L_2\\x-9y+5z=-7 & L_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}\\L_1-2L_2\rightarrow\\L_1-2L_2\rightarrow\end{matrix}\begin{cases}2x-3y+z=1 & L_1\\-5y+3z=-5 & L'_2\\15y-9z=15 & L'_3\end{cases}$

$\begin{matrix}\\ \\3L'_2+L'_3\rightarrow\end{matrix}\begin{cases}2x-3y+z=1 & L_1\\-5y+3z=-5 & L'_2\\0=0 & L''_3\end{cases}$. L'égalité L''_3 est toujours vraie donc (Σ_2) est équivalent à $\begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ -5y+3z=-5 \end{cases}$ et en posant $z=\lambda$ on a :

$$\begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ -5y+3z=-5 \\ z=\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\lambda \\ -5y+3\lambda=-5 \Rightarrow y=\dfrac{3\lambda+5}{5} \\ 2x-3\times\dfrac{3\lambda+5}{5}+\lambda=1 \Rightarrow 2x=1-\dfrac{-4\lambda-15}{5}=\dfrac{4\lambda+20}{5} \Rightarrow x=\dfrac{2\lambda+10}{5} \end{cases}$$

Ainsi l'ensemble solution de (Σ_2) est $\boxed{S=\left\{\left(\dfrac{2\lambda+10}{5},\dfrac{3\lambda+5}{5},\lambda\right),\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}}$.

Exercice Résolu 3

a) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ et par le pivot de Gauss le système $\begin{cases} x+y-z=8 \\ x+2y-3z=5 \\ 3x-3y-z=2 \end{cases}$.

b) En déduire la valeur du nombre réel m pour que le système $(\Sigma')\begin{cases} x+y-z=8 \\ x+2y-3z=5 \\ 3x-3y-z=2 \\ 2x+4y+\frac{1}{2}m^2z=m+35 \end{cases}$ ait une solution dans $\mathbb{R}^3$.

Solution

a) Résolution du système dans $\mathbb{R}^3$ $\begin{cases} x+y-z=8 & L_1 \\ x+2y-3z=5 & L_2 \\ 3x-3y-z=2 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ L_1-L_2\rightarrow \\ 3L_1-L_3\rightarrow \end{array}\begin{cases} x+y-z=8 & L_1 \\ -y+2z=3 & L'_2 \\ 6y-2z=22 & L'_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ 6L'_2+L'_3\rightarrow \end{array}\begin{cases} x+y-z=8 & L_1 \\ -y+2z=3 & L'_2 \\ 10z=40 & L''_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \frac{1}{10}L''_3\rightarrow \end{array}\begin{cases} x+5-4=8 \Rightarrow x=7 \\ -y+2\times4=3 \Rightarrow y=5 \\ z=4 \end{cases}$ Ainsi on a $\boxed{S=\{(7,5,4)\}}$.

b) Déduction de la valeur de m pour que le système (Σ') ait au moins une solution.
Une solution éventuelle de (Σ') doit vérifier toutes les quatre équations de (Σ') et comme $(7,5,4)$ vérifie déjà trois d'entre-elles, il suffira qu'elle vérifie la quatrième pour être une solution c'est-à-dire : $2\times7+4\times5+\frac{1}{2}\times m^2\times4=m+35 \Leftrightarrow 2m^2-m=1 \Leftrightarrow \boxed{m=1 \text{ ou } m=-\frac{1}{2}}$

REMARQUE

Un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$ peut avoir :

- Une seule solution ;
- Une infinité de solutions ;
- zéro solution.

MÉTHODE

(1) Pour résoudre un système de deux équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$, on peut donner une valeur arbitraire à l'une des inconnues.

(2) Pour résoudre un système de plus de trois équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$, on peut procéder de la manière suivante :

- On extrait du système initial, un sous-système de trois équations que l'on résout.
- Si les solutions obtenues vérifient les autres équations, alors elles constituent les solutions du système initial.
- Si les solutions obtenues ne vérifient pas les autres équations alors le système initial n'a pas de solution.

S'exercer

1.a Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} x-5y-7z=-3 \\ 5x+3y+z=-3 \\ -3x-y+2z=-1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} -\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{z}=-1 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=-1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2+2y^2+5z^2=4 \\ x^2+y^2+2z^2=6 \\ 2x^2+3y^2+7z^2=10 \end{cases}$.

1.b a)Recopier et compléter les pointillés par les nombres de ton choix.

$\begin{cases} \ldots\times(-1)+\ldots\times 2+\ldots\times(-3)=3 \\ \ldots\times(-1)+\ldots\times 2+\ldots\times(-3)=\ldots \\ \ldots\times(-1)+\ldots\times 2+\ldots\times(-3)=\ldots \end{cases}$ Existe-t-il un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$ qui admet une seule solution $(-1\,,2,-3)$?

b) Déterminer un système de trois équations linéaires à trois inconnues ayant pour unique solution $(4\,,-2\,,3)$. Peut-on en déterminer d'autres ?

1.c Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$(\Sigma)\begin{cases} -2y+z=1 \\ -5x+4y-z=-1 \\ x-3z=4 \end{cases}$; et $(\Sigma')\begin{cases} x-y+2z=2 \\ 2x+3y-z=1 \\ -x+y-2z=-2 \\ x+2y+3z=-5 \end{cases}$.

1.d Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes linéaires d'équations suivants :

a) $\begin{cases} -2x+3y-5z=3 \\ x+5y-z=-7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x-y+2z=-3 \\ -6x+3y-z=4 \end{cases}$.

1.e a) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ -4x+y+2z=2 \\ 6x-2y+z=2 \end{cases}$.

b) En déduire dans $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]^3$ les solutions du système $(\Sigma)\begin{cases} 2\sin x-\cos y+\tan z=3 \\ -4\sin x+\cos y+2\tan z=2 \\ 6\sin x-2\cos y+\tan z=2 \end{cases}$.

LEÇON 2 RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE .

- Donner la valeur de vérité d'une assertion mathématique portant sur des entiers naturels.
- Montrer qu'une assertion mathématique est vraie quelle que soit la valeur attribuée à l'entier naturel.

2.1. VALEUR DE VÉRITÉ D'UNE ASSERTION MATHÉMATIQUE, CARACTÈRE HÉRÉDITIARE D'UNE ASSERTION MATHÉMATIQUE.

Prendre un bon départ

Soient les affirmations A_1 : « $1+2+3+....+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ » ; A_2 : « 7^n-1 est divisible par 6 » ;

A_3 : "$2^n \geq n$" ; A_4: "$\dfrac{n^2}{n+1}$ est une fraction irréductible » où n est un entier naturel quelconque.

Activité 1

a. Montrer que ces affirmations sont vraies pour $n \in \{3;4;5;8\}$.

b. Justifier que l'affirmation : « $\dfrac{n}{2n+1}$ est un entier naturel » est fausse pour $n \in \{11;10;4\}$.

c. Soit n un entier naturel tel que l'affirmation A_1 soit vraie.

- Justifier que $1+2+3+....+n+n+1=\dfrac{n(n+1)}{2}+(n+1)$.
- En déduire que $1+2+3+....+n+n+1=\dfrac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$.
- L'affirmation A_1 reste-t-elle vraie si on y remplace n par $n+1$?

Activité 2

a. Soit n un entier naturel tel que l'affirmation A_2 soit vraie.

- Reécrire l'affirmation A_2 en remplaçant n par $n+1$.
- Vérifier que $7^{n+1}-1=7^n\times 7-1=7^n(6+1)-1=7^n\times 6+(7^n-1)$.
- Justifier que $7^{n+1}-1$ est divisible par 6.
- L'affirmation A_2 reste-t-elle vraie si on y remplace n par $n+1$? On dit aussi que A_2 est héréditaire.

b. Montrer en suivant les mêmes étapes que l'assertion A_3 est héréditaire.

Retenir

- ***La valeur de vérité*** d'une affirmation mathématique exprimée à l'aide d'un entier naturel peut être prononcée chaque fois qu'on connaît la valeur de l'entier naturel.
- ***Le successeur d'un entier naturel*** est l'entier naturel qui vient immédiatement après cet entier dans la liste des entiers naturels. Le successeur de l'entier n est $n+1$. Si p est un entier naturel non nul, alors l'entier qui précéde p est $p-1$.
- ***Une propriété est héréditaire*** lorsque chaque fois qu'elle est vraie pour un entier quelconque, elle est aussi vraie pour le successeur de celui-ci.

EXEMPLE

On considère l'affirmation (P) : « $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour $n\geq 2$ ».

a. Montrons que l'affirmation (P) est vraie pour $n=2$ et $n=6$.

Tout comme une fonction à variable réelle, la propriété $\mathcal{P}$ n'est fonctionnelle que pour les entiers naturels au moins égaux à deux.On devra remplacer les pointillés par la somme des carrés des entiers en commençant par celui qui succède à 3 et on s'arrête à celui qui précède n.

- Pour $n=2$: $1^2+2^2=1+4=5$ et $\dfrac{2(2+1)(2\times2+1)}{6}=5$ donc $\boxed{1^2+2^2=\dfrac{2(2+1)(2\times2+1)}{6}}$.
- Pour $n=6$:

$1^2+2^2+3^2+\ldots+6^2=1+4+9+16+25+36=91$ | et $\dfrac{6(6+1)(2\times6+1)}{6}=\dfrac{6\times7\times13}{6}=7\times13=91$.

Donc $\boxed{1^2+2^2+3^2+\ldots+6^2=\dfrac{6(6+1)(2\times6+1)}{6}}$

b. Montrons que cette égalité est héréditaire.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, tel que

$1^2+2^2+3^2+\ldots.+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

Montrons que $1^2+2^2+3^2+\ldots.+(n+1)^2=\dfrac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}=\dfrac{(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)(2\mathrm{n}+3)}{6}$.

Le terme qui précède le dernier de la somme est n^2. On a donc

$$1^2+2^2+3^2+\ldots..+(n+1)^2=(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+(n+1)^2$$

Or on a supposé que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

donc $1^2+2^2+3^2+\ldots..+(n+1)^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\dfrac{(\mathrm{n}+1)}{6}(2\mathrm{n}^2+\mathrm{n}+6\mathrm{n}+6)$

$= \frac{(n+1)}{6}(2n^2+7n+6)$. Si on développe l'expression $(n+1)(2n+3)$, on trouve $2n^2+7n+6$ ou si on Cherche les racines du polynôme du second degré en $n : 2n^2+7n+6$, on trouve -2 et $-\frac{3}{2}$; Ainsi, $2n^2+7n+6 = 2(n+2)(n+\frac{3}{2}) = (n+2)(2n+3)$.

$1^2+2^2+3^2+\ldots.+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

L'égalité (P) est donc héréditaire.

S'exercer

2.a $1+3+5+7=16$ ($16=4^2$ et 4 est la moitié de 8, qui est le successeur de 7).

Conjecturer le résultat de la somme $1+3+5+7+\ldots+25$.

Montrer que l'égalité $1+3+5+\ldots..+n=\frac{(n+1)^2}{4}$ où n est impair est héréditaire.

2.b On définit une suite u par $u_{n+1}=\sqrt{u_n+9}$ et $u_0=2$

- Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.
- Soit l'affirmation : « $u_n \leq u_{n+1}$ ». Montrer que cette affirmation est vraie pour $n \in \{0;1;2;3\}$.
- Montrer que si $u_n \leq u_{n+1}$, alors $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

2.2. PRINCIPE DE LA DÉMONSTRATION PAR RÉCURRECE

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit P une propriété définie pour les entiers naturels supérieurs ou égaux à l'entier naturel n_0 telle que :

(i) P soit vraie pour n_0 ;

(ii) Si P est vraie pour un entier naturel quelconque n, alors P est vraie pour $n+1$.

a. Supposons par exemple que $n_0=0$. Expliquer pourquoi P est vraie pour les entiers 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

b. Peut-on trouver un entier naturel pour lequel P n'est pas vraie ?

c. Que peut-on dire de la valeur de vérité de la propriété P ?

Activité 2

Soit l'égalité $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ pour n entier naturel supérieur ou égal à 5.

a. Donner la valeur de n_0.

b. Montrer que cette égalité a les propriétés (i) et (ii).

c. Que peut-on donc conclure pour cette égalité ?

Retenir

Soit une affirmation portant sur les entiers naturels consécutifs et constitués en un ensemble noté A et telle que :

(i) *L'assertion est vraie pour le plus petit élément de A;*

(ii) *Si l'assertion est vraie pour un élément quelconque n de A, alors elle est aussi vraie pour l'entier (n+1) qui suit l'entier n.*

Alors l'assertion est vraie pour tout entier de A.

Ce principe qui permet de montrer qu'une propriété est vraie sur une partie constituée des entiers naturels consécutifs est dit *principe de récurrence*.

EXEMPLE

a. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $1+2+\dots\dots\dots\dots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Considérons la proposition (P) définie par (P): $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Montrons que (P) est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

Pour $n=2, 1+2=3$ et $\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{2(2+1)}{2}=3$. (P) est donc vraie pour $n=2$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 tel que $1+2+\dots\dots\dots\dots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Montrons alors que $1+2+\dots\dots\dots\dots+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

En effet, $1+2+\dots\dots+(n+1)=(1+2+\ldots+n)+n+1$.

Or $1+2+\dots\dots\dots\dots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

Ainsi, $(1+2+\ldots+n)+n+1=\dfrac{n(n+1)}{2}+n+1=\dfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

On peut en application du principe de récurrence, conclure que pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$1+2+\dots\dots\dots\dots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

b. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 5$, on a :

$1\times 2+2\times 3+\ldots+n(n-1)=\dfrac{n(n-1)(n+1)}{3}$

Désignons par (Q) la proposition :

« Pour tout entier naturel $n \geq 5$, $1\times 2+2\times 3+\ldots+(n-1)n=\dfrac{n(n-1)(n+1)}{3}$ »

- Montrons que cette égalité est vraie pour $n=5$.
  Le terme de gauche est la somme d'entiers produits de nombres consécutifs dont le 1^er^ est 1×2 et le dernier 4×5.

  D'une part, $1\times 2+2\times 3+3\times 4+4\times 5=2+6+12+20=40$;

D'autre part, $\dfrac{n(n-1)(n+1)}{3} = \dfrac{5(5-1)(5+1)}{3} = \dfrac{5\times4\times6}{3} = \dfrac{120}{3} = 40$. L'égalité (Q) est vraie pour $n=5$.

- Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 5 tel que $1\times2+2\times3+\ldots+(k-1)k = \dfrac{k(k-1)(k+1)}{3}$

Montrons que $1\times2+2\times3+\ldots\ldots\ldots+k(k+1) = \dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}$.

$1\times2+2\times3+\ldots+n(n+1) = (1\times2+2\times3+\ldots+(k-1)k)+k(k+1)$ Or

$1\times2+2\times3+\ldots+(k-1)k = \dfrac{k(k-1)(k+1)}{3}$

Ainsi, $(1\times2+2\times3+\ldots+(k-1)k)+k(k+1) = \dfrac{k(k-1)(k+1)}{3}+k(k+1) = \dfrac{k(k-1)(k+1)+3k(k+1)}{3}$

$= \dfrac{k(k+1)[(k-1)+3]}{3} = \dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}$. Donc (Q) reste vraie si on remplace k par $k+1$.

Finalement pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geq5$ on a $1\times2+2\times3+\ldots+n(n-1) = \dfrac{n(n-1)(n+1)}{3}$.

S'exercer

2.c Montrer par récurrence que :

a) $2+4+6+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+2n = n(n+1)$, pour $n\geq6$;

b) Évaluer les sommes : $A = 2+4+6+\ldots+2016$ et $B = 2016+2017\ldots\ldots+3000$.

2.d Montrer par récurrence que :

a) $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, pour $n\geq3$;

b) Cette égalité reste-t-elle vraie pour $n\geq1$?

c) Évaluer la somme des carrés des 99 premiers nombres entiers naturels non nuls.

d) Donner sans aucun calcul la somme des 100 premiers carrés des nombres entiers naturels.

2.e a) Montrer par récurrence :a) $2^n\geq n$, pour $n\geq3$;

b) Sans faire de calcul, comparer 2^{2035} et 2034.

2.f Montrer par récurrence que :

a) $1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, pour $n\geq4$.

b) En déduire que :

$$1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2 = (1+2+3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+n)^2.$$

c) Évaluer la somme $C = 1^3+2^3+\ldots+49^3$. Quelle est la somme des cubes des 50 premiers nombres entiers naturels ?

S'ENTRAÎNER

SYSTÈMES LINÉAIRES DANS $\mathbb{R}^3$

Systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases}(\sqrt{2}-1)x+\sqrt{3}y=-1\\(\sqrt{2}+1)x-\sqrt{3}y=2\end{cases}$; b) $\begin{cases}\dfrac{-1}{x-1}+2\sqrt{y}=5\\\dfrac{3}{x-1}+\sqrt{y}=-1\end{cases}$.

(préciser les contraintes sur chaque inconnue)

2.

On considère le système $(S_m)\begin{cases}mx+2y=-2m\\2x+my=m-2\end{cases}$ où m est un nombre réel.

a) Calculer le déterminant principal D_m de ce système et déterminer ses racines.

b) Résoudre suivant les valeurs de m, le système (S_m) dans $\mathbb{R}^2$.

3.

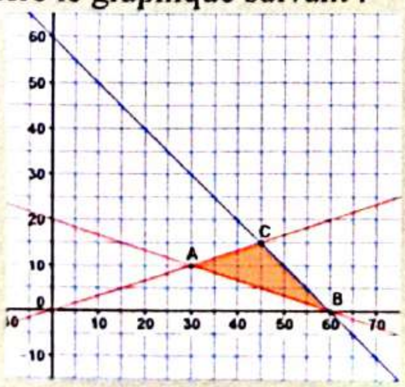
On considère le système d'inéquations de $\mathbb{R}^2$ suivant : $\begin{cases}y<5\\6x>-5y+30\\2y-x\geq 1\end{cases}$.

a) Représenter graphiquement la zone du plan définie par ce système.

b) Déterminez les coordonnées exactes des sommets du polygone ainsi défini.

4.

On considère le graphique suivant :



a) Écrire une équation des droites (AB), (AC) et (BC).

En déduire le système d'inéquations de $\mathbb{R}^2$ dont l'ensemble solution est formé des couples de cordonnées des points du domaine triangulaire colorié sur la figure.

Systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^3$

5.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants par la méthode du pivot de Gauss.

1) $\begin{cases}3x+2y-z=-1\\-2x+y-3=-2\\x-y+z=-2\end{cases}$; 2) $\begin{cases}2x+9y+5z=0\\2x-y+3z=-1\\x-3y+z=-2\end{cases}$;

3) $\begin{cases}x+2y-6z=4\\2x-2y+3z=4\\x+8y-21z=6\end{cases}$.

6.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant par la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{cases}|x|+5|y|-3|z|=2\\4|x|-2|y|-|z|=8\\-|x|+3|y|-2|z|=-4\end{cases}.$$

7.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant par la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{cases}|x|+5|y|-3|z|=2\\4|x|-2|y|-|z|=8\\-|x|+3|y|-2|z|=-4\end{cases}.$$

8.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases}y+z=1\\z+x=4\\x+y=-2\end{cases}$; b) $\begin{cases}2x-y+3z=1\\-4x+2y+z=3\\-2x+y+4z=4\\10x-5y-6z=-10\end{cases}$

9.

Résoudre dans $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[^3$ le système

$$(\Sigma)\begin{cases} \tan x + \sin y + \cos z = -1 \\ \tan x + 2\sin y + 8\cos z = 2 \\ 3\tan x + 4\sin y + 10\cos z = 0 \end{cases}.$$

10.

Une boîte contient des jetons rouges, des jetons bleus et des jetons noirs.

- Si on ajoute deux jetons rouges, les jetons rouges représentent 25% du nouveau total des jetons ;
- Si on retire un jeton rouge les jetons rouges représentent alors 20% du contenu initial de la boîte ;
- Si on enlève quatre jetons noirs, les jetons noirs représentent la moitié du nouveau total des jetons.

Combien la boîte contient-elle de jetons rouges ?

11.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

(S) : $\begin{cases} 2x+3y+z+2=0 \\ 2x-3y-2z=-2 \end{cases}$.

(S_1) : $\begin{cases} x+6y+z+2=0 \\ 2x+12y-2z=-2 \end{cases}$.

(S_2) : $\begin{cases} -x+3y+2z=-1 \\ 2x+4y-2z=-2 \end{cases}$.

12.

Trois plombiers font leurs achats dans une même quincaillerie et achètent chacun les mêmes articles :

- Le premier achète 2 boîtes de colle ; 5 robinets et 4 tuyaux et paye 620 F.
- Le second achète 3 boîtes de colle ; 5 robinets et 1 tuyau et paye 530 F.
- Le troisième achète 2 boîtes de colle ; 7 robinets et 8 tuyaux.

On note S la somme payée par le troisième.

a) Écrire en fonction de S un système de trois équations résumant les achats des trois plombiers.

b) Calculer S ?

13.

Soient f et g deux fonctions numériques définies par $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x-2}$ et $g(x) = -2x^2+x+5$ de courbe représentatives (C_f) et (C_g) dans un repère orthonormé.

Déterminer a, b et c pour que :

- (C_f) admette au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
- (C_f) coupe (C_g) au point d'abscisse 1 et les deux courbes admettent en ce point même la même tangente.

Programmation linéaire

14.

M. Mvondo est propriétaire d'un verger de fruits. Chaque année, il produit du sirop qu'il vend à ses amis. Il verse ce sirop dans des contenants d'un litre et de trois litres respectifs.

Cette année, il en a produit au moins 60 litres.

Au cours des années antérieures, il a observé que le premier format est au moins trois fois plus en demande que le second. Cependant, il ne veut pas dépasser les 60 contenants. On désigne par x le nombre de contenants d'un litre et par y celui de contenants de 3 litres écoulés par an.

1.a) Vérifier que les nombres x et y sont solutions du système d'inéquations :

$$(I)\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+3y-60 \geq 0 \\ x-3y \geq 0 \\ x+y-60 \leq 0 \end{cases}.$$

b) Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble des points M dont les coordonnées sont les solutions de (I).

2) M. Mvondo vend son sirop à 800 frs le contenant de 1 litre et 2000 frs le contenant de 3 litres. Il recherche le nombre de contenants de chaque format qu'il devra écoulés par an pour réaliser un profit maximal.

Soit P sa recette annuelle.

- Montrer que x, y et P vérifient la relation : (D_P) : $y=-\frac{2}{5}x+\frac{P}{2000}$ puis donner en fonction de P l'ordonnée à l'origine de la droite (D_P).
- Représenter sur le graphique précédent la droite (D_0) : $y=-\frac{2}{5}x$. Justifier que quelle que soit la valeur de P on a toujours (D_0) parallèle à (D_P).
- Donner les coordonnées d'un point de S par lequel (D_P) doit passer pour que le quotient $\frac{P}{2000}$ soit le plus grand possible. Calculer alors la valeur de P correspondante.

RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

15.

Soit n un entier naturel non nul.
Exprimer en fonction de n chacun des entiers naturels ci-dessous :

a) $\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n \text{ termes}}$; b) $\underbrace{2+2+2+\cdots+2}_{n \text{ termes}}+1$;

c) $\underbrace{3+3+3+\cdots+3}_{n \text{ termes}}-2$; d) $3\times\left[\underbrace{5+5+5+\cdots+5}_{n \text{ termes}}\right]-7$;

e) $\underbrace{2\times 2\times 2\times\ldots\times 2}_{n \text{ facteurs}}$.

16.

On considère l'affirmation (F) suivante :
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

a) Vérifier que l'affirmation (F) est vraie pour $n\in\{2,3,4,5\}$.

b) Écrire l'affirmation (F) en remplaçant n par $n+1$.

17.

On considère l'affirmation (F') suivante :
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $n!=n(n-1)!$

a) Vérifier que l'affirmation (F) est vraie pour $n\in\{4,5,6\}$.

b) Soit $p\in\mathbb{N}^*$, reécrire l'affirmation en remplaçant n par :
(i) $p+1$; (ii) $p+4$; (iii) $p+5$

18.

Soit l'affirmation $(\mathcal{H})$ suivante :
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

a) Vérifier l'affirmation pour $n\in\{2,3,4\}$.

b) Écrire l'affirmation $(\mathcal{H})$ en remplaçant n par $n+1$.

c) Sachant que l'affirmation $(\mathcal{H})$ est vraie pour un entier naturel non nul p, montrer que : $1+3+5+\ldots+(2p+1)=p^2+2p+1$.

19.

Démontrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

20.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n\geq 3$, $n!=n(n-1)!$

21.

Montrer par récurrence :

a) $2^n\geq n$, pour $n\geq 3$;

b) $n!\geq n$, pour *tout entier naturel n*;
comparer 1024! et 1024

22.

Soit (Q) l'affirmation $3^{2n}-2^n$ est divisible par 7, pour $n\geq 1$.

a) Montrer que pour tout entier naturel $n\geq 1$, $3^{2n}\times 7+2\left(3^{2n}-2^n\right)=3^{2(n+1)}-2^{(n+1)}$.

b) Démontrer (Q) par récurrence.

c) En déduire que $3^{3938}-2^{1969}$ est un multiple de 7

23.

Démontrer par récurrence que

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n}$, pour $n \geq 3$.

En déduire que : $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\frac{1}{2^n}\right)=2$

24.

Démontrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée d'ordre n de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ est

$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

25.

a) Vérifier que pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\cos a.$$

b) Que dévient cette égalité pour

$$a=\frac{k\pi}{2}+x,\quad x \in \mathbb{R} \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

c) Démontrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée d'ordre n de la fonction $f : x \mapsto \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$ est

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right).$$

Chapitre 2

LIMITES ET CONTINUITÉ

LEÇON 1 LIMITES ET CONTINUITÉ.

1-1 LIMITES D'UNE FONCTION.

1-2 CONTINUITÉ.

1-3 THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES.

LEÇON 2 FONCTIONS CONTINUES ET STRICTEMENT MONOTONES.

LEÇON 3 BRANCHES INFINIES DE LA COURBE D'UNE FONCTION.

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1 LIMITES ET CONTINUITTÉ.

- Consolider les notions sur les calculs des limites et sur la continuité d'une fonction ;
- Déterminer graphiquement ou à partir d'un tableau des variations l'image d'un intervalle par une fonction continue ;
- Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour déterminer l'existence des solutions dans un intervalle de $\mathbb{R}$, des solutions de l'équation $f(x)=a$.

1.1. LIMITES D'UNE FONCTION.

Prendre un bon départ

Activité 1

Pour chacune des fonctions ci-dessous définies, déterminer son ensemble de définition et ses limites aux bornes de celui-ci.

1) $f(x)=-2x^3+6x^2+8$;

2) $g(x)=\dfrac{2x-3}{-5x+9}$;

3) $h(x)=\dfrac{3x-5}{-x^2-x+6}$;

4) $l(x)=-2x+1-\dfrac{x^2-3}{2x+4}$.

Activité 2

Soit la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{\dfrac{4x+3}{x+2}}$. on pose $u(x)=\sqrt{x}$ et $v(x)=\dfrac{4x+3}{x+2}$.

1) Vérifier que $f(x)=(u\circ v)(x)$.

2) Déterminer les réels a et b définis par : $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x+3}{x+2}$ et $b=\lim\limits_{X\to a}\sqrt{X}$ puis en déduire la limite de la fonction f en $-\infty$.

3) Déterminer de la même manière les limites de f aux autres bornes de son ensemble de définition.

Activité 3

Soient f et g les fonctions définies par $f(x)=2x-\sqrt{x^2+1}$ et $g(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$.

1) Montrer que $g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$ et en déduire la limite de g en $+\infty$.

2) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

3) Vérifier que $f(x)=2x-|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ et que $f(x)=x\left(2-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)$ si $x>0$; puis en déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

Activité 4

Soient f et g les fonctions définies par $f(x)=2x-\cos(x^2+2)$ et $g(x)=\dfrac{2+\sin(x)}{x^2+3}$.

1) Vérifier que pour tout réel x, $2x-1\leq f(x)\leq 2x+1$.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-1$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+1$ et en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

4) Montrer que $|g(x)|\leq\dfrac{3}{x^2+3}$; calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x^2+3}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

Retenir

Quelques limites de référence.

Soit n en entier naturel.

$$\lim_{x\to-\infty} x^n=\begin{cases}+\infty \text{ si } n \text{ est pair}\\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair}\end{cases} \;;\quad \lim_{x\to+\infty} x^n=+\infty\;;\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0\;;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0\;;\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty \quad \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\;;\quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\;;\quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0.$$

Opérations sur les limites.

Soient f et g deux fonctions, ℓ et ℓ' deux réels ; a réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

limite de f en a	ℓ	ℓ'	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
limite de g en a	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Limite de f g en a	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	On ne peut à priori conclure.	

limite de f en a	ℓ	ℓ	$\ell(\ell\neq0)$	∞	∞	0
limite de g en a	$\ell'(\ell'\neq0)$	∞	0	ℓ'	∞	0
Limite de $\dfrac{f}{g}$ en a	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	∞	∞	On ne peut à priori conclure.	

limite de f en a	ℓ	$\ell(\ell\neq0)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
limite de g en a	ℓ'	∞	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	∞
limite de $f.g$ en a	$\ell\ell'$	∞	$+\infty$		$-\infty$		On ne peut à priori conclure.

Le signe précédant "∞" lorsqu'il n'est pas précisé va dépendre du signe de f et de celui de [...] au voisinage de a.

Limite d'une fonction composée.

Soient u et v deux fonctions numériques. a, b, et c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} v(x) = b \\ et \\ \lim\limits_{x \to b} u(x) = c \end{cases}$ *alors* $\lim\limits_{x \to a} u(v(x)) = c$.

Limites et comparaison.

Soient f, g et h trois fonctions numériques définies sur un même voisinage I de a, a étant un réel ou $+\infty$, ou $-\infty$; ℓ est un réel.

- Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$. (Propriété de minoration).
- Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$. (Propriété de majoration).
- Si pour tout $x \in I$, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.
  Cette propriété est encore connue sous le nom de théorème des gendarmes.
- Si pour tout $x \in I$, $|f(x) - l| \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.
- En particulier, si pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

EXEMPLE 1

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2 + 5) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2 - 2x + 7}{3x^2 + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{3x^2} = -\dfrac{2}{3}$.

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-2x + 1 - \dfrac{3}{x+5}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} -2x + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{x+5} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{x} = 0$.

4) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} \dfrac{2x-5}{x-2} = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} (2x - 5) = -1$, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} x - 2 = 0$ et $x - 2 < 0$ lorsque $x < 2$.

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-2)\sqrt{x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

EXEMPLE 2

1) Calculons $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(3x)}{2x}$. On peut encore écrire $\dfrac{\sin(3x)}{2x} = \dfrac{3x}{2x} \times \dfrac{\sin(3x)}{3x} = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{\sin(3x)}{3x}$

$\lim\limits_{x\to 0} 3x = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\sin X}{X} = 1$, par composition $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{3x} = 1$ et donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{2x} = \dfrac{3}{2}$.

2) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$. Pour tout réel, $-1 \le \sin x \le 1$. Si $x > 0$, alors en divisant chaque membre de la double inégalité par x on obtient $-\dfrac{1}{x} \le \dfrac{\sin x}{x} \le \dfrac{1}{x}$; comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, le théorème "des gendarmes" permet de conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 0$.

EXEMPLE 3

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{x^2+3x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty} 3x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} 3x-|x|\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 3x-x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}\right) \quad car \quad |x| = x \quad quand\ x\to+\infty$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(3-\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}\right) = +\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{x^2-1}\right) = \lim_{x\to-\infty} 2x+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} 2x+|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2x-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) \quad car \quad |x| = -x \quad quand\ x\to-\infty$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(2-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) = -\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x+1}-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+2x+1}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+2x+1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+2x+1}+2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+2x+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}+2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}+2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)+2x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}.$$

Exercice Résolu

Enoncé

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{3-\sin x}$.

1) Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{3-\sin x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-\sin x}{3-\sin x}$.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x}$ puis en déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{\sqrt{2x+1}-1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}-1\right)$.

Solution

1) Pour tout réel x on a : $-1\leq -sinx\leq 1$ et donc $2\leq 3-sinx\leq 4$; par suite $\dfrac{1}{4}\leq\dfrac{1}{3-\sin x}\leq\dfrac{1}{2}$.
f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

2)

- Lorsque x tend vers $+\infty$, $x>1$ et donc $x-1>0$.
L'inégalité $\dfrac{1}{4}\leq\dfrac{1}{3-\sin x}\leq\dfrac{1}{2}$ implique donc $\dfrac{x-1}{4}\leq\dfrac{x-1}{3-\sin x}\leq\dfrac{x-1}{2}$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{4}=+\infty$, par comparaison on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{3-\sin x}=+\infty$.
- Pour tout réel x on a : $-1\leq -sinx\leq 1$ et donc $3x-1\leq 3x-sinx\leq 3x+1$.
Lorsque x tend vers $-\infty$, $x<-\dfrac{1}{3}$ et donc $3x+1<0$.
L'inégalité $\dfrac{1}{4}\leq\dfrac{1}{3-\sin x}\leq\dfrac{1}{2}$ implique donc $\dfrac{-(3x+1)}{4}\leq\dfrac{-(3x-\sin x)}{3-\sin x}\leq\dfrac{-(3x-1)}{2}$
D'où $\dfrac{3x-1}{2}\leq\dfrac{3x-\sin x}{3-\sin x}\leq\dfrac{3x+1}{4}$; Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+1}{4}=-\infty$, par comparaison on a
$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-\sin x}{3-\sin x}=-\infty$.

3)

- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{\sqrt{2\quad+1}+1}=1$
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{\sqrt{2x+1}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5}{\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x}}=\dfrac{5}{1}=5$.
- Posons $X=\dfrac{1}{x}$ *; alors* $\lim\limits_{x\to+\infty}X=0$; $x\left(\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}-1\right)=\dfrac{1}{X}\left(\sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{X}+2}{\dfrac{1}{X}}}-1\right)=\dfrac{1}{X}\left(\sqrt{2X+1}-1\right)$.

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}-1\right)=\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\sqrt{2X+1}-1}{X}=1$

REMARQUE

Soit a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$, et f une fonction définie dans le voisinage de a.

- Si f admet au voisinage de a une limite égale à $+\infty$, alors f n'est pas majorée dans le voisinage de a.
- Si f admet au voisinage de a une limite égale à $-\infty$, alors f n'est pas minorée dans le voisinage de a.

S'exercer

1.a Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

$f(x)=\dfrac{x^2-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{8}}$; $f(x)=\dfrac{-x^2+x-1}{(2-x)(x-1)}$; $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$; $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{3x}}{x-1}$; $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2+2x+1}$; $f(x)=\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}-\dfrac{2}{x}$; $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x}}{x-1}$.

1.b Calculer les limites suivantes :

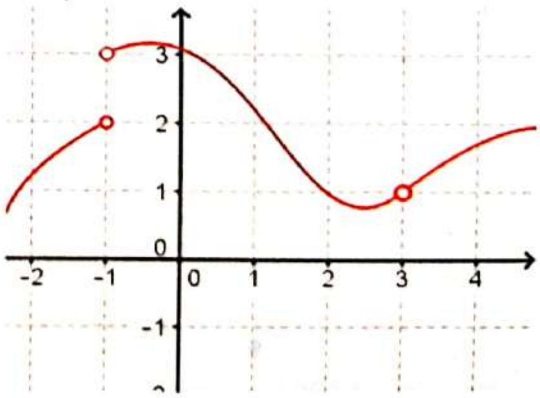
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos(x)-1}{x-\dfrac{\pi}{3}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2+3}-3x$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x-3\sqrt{x^2+3}$; $\lim\limits_{x\to0} x\sin(\dfrac{1}{x})$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin(x)-1}{x-\dfrac{\pi}{6}}$; ; $\lim\limits_{x\to0} x\cos(\dfrac{1}{x})$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+7}-2x$; $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-5\sqrt{x^2+3}$.

1.2. CONTINUITÉ.

Prendre un bon départ

Activité 1



f est une fonction numérique dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

1) Citer deux réels en lesquels f est discontinue.
2) Donner un intervalle sur lequel f est continue.
3) Quelle modification apporter à la fonction f en $x=3$ pour qu'elle soit continue sur l'intervalle $[0;4]$? une telle modification est-elle possible en $x=-1$?

Activité 2

1) Étudier la continuité de la fonction f suivante en x_0 et sur l'intervalle I.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+3 & si\ x<1 \\ \sqrt{2x-1} & si\ x\geq 1 \end{cases}.\ x_0=1 \text{ et } I=[-5;0].$$

2) On donne $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x+3}{2x-3} & si \quad x<0 \\ x^2-1 & si \quad 0\leq x\leq 2 \\ \sqrt{2x^2+x-1} & si \quad x>2 \end{cases}$.

   a) Expliquer pourquoi g est continue sur chacun des intervalles suivants : $]-\infty;0[$; $]0;2[$ et $]2;+\infty[$.

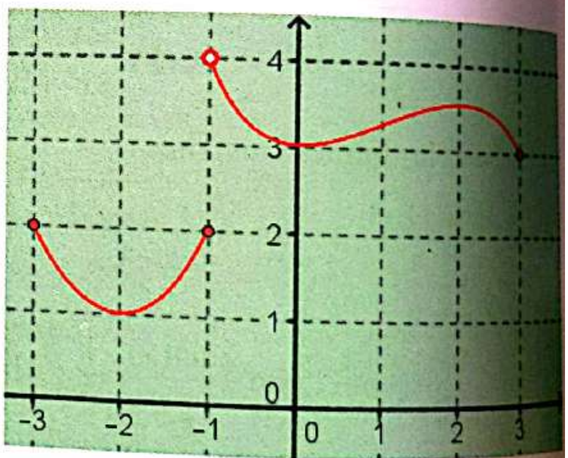
   b) Étudier la continuité de g en 0 et en 2.

   c) g est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Activité 3

1) f est une fonction numérique dont la représentation graphique est donnée sur le graphique ci-contre. Déterminer graphiquement les images par f des intervalles suivants :

   $[-3;3]$; $]-2;0]$; $[-1;3]$; $[-3;-1]$.



2) Dresser le tableau des variations de la fonction f définie par $f(x)=x^3-3x+2$; en déduire les images par f des intervalles suivants : $]-\infty;-1]$; $[-1;1]$; $[1;+\infty[$; $[-2;1]$; $[0;2]$.

Retenir

Définition et propriété

1) Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est continue à gauche en un réel x_0 de I si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x)=f(x_0)$.
- On dit que f est continue à droite en un réel x_0 de I si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x)=f(x_0)$.
- On dit que f est continue en un réel x_0 de I si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.
- On dit que f est continue sur I si f est continue en tout réel x_0 de I.

2) Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors,
- Les fonctions $f+g$, αf, fg sont continues sur I.
- Si g ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.
- Si f est positive sur I, la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I.

3) Si f est continue sur I, et g continue sur J, si de plus $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est continue sur I.
4) Les fonctions polynômes et rationnelles sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition .

Prolongement par continuité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f *définie sur* $I \setminus \{x_0\}$ est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie l en x_0 . La fonction g définie par :

$g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in I \setminus \{x_0\} \\ g(x_0) = l \end{cases}$ est un **prolongement par continuité de f en x_0.**

Image d'un segment par une fonction continue.

Soit f une fonction continue sur le segment $[a;b]$. Alors, f est bornée sur $[a;b]$. et atteint ses bornes. Plus précisément il existe deux réels m et M tels que $f([a;b]) = [m;M]$ avec

$\begin{cases} m = \textit{minimum de } f \textit{ sur} [a;b] \\ M = \textit{maximum de } f \textit{ sur} [a;b] \end{cases}$.

En d'autres termes, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

REMARQUE

Par une fonction continue :
- L'image d'un intervalle borné n'est pas toujours un intervalle borné :
  Pour $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0;1[$, on a $f(]0;1[) =]1,+\infty[$.
- L'image d'un ouvert n'est pas toujours un ouvert :
  Pour $f : x \mapsto \sin x$ sur $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$, on a $f(\mathbb{R}) = [-1;1]$
  ou pour $f : x \mapsto x^2$ sur $]-1;1[$, on a $f(]-1;1[) = [0;1[$.

EXEMPLE

1) Étudions la continuité de la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} -2x+3 \text{ si } x < 2 \\ \frac{1}{2}x - 2 \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$.

Les restrictions de f à $]-\infty;2[$ et à $]2;+\infty[$ sont respectivement définies par :

$f_1(x) = -2x+3$ et $f_2(x) = \frac{1}{2}x - 2$; ces restrictions sont des fonctions affines donc continues sur chaque intervalle de $\mathbb{R}$. f est donc continue sur $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$. Il reste donc à étudier la continuité de f en 2.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} -2x+3 = -1$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+} \frac{1}{2}x - 2 = -1$, comme $f(2) = \frac{1}{2}(2) - 2 = -1$ alors f est continue en 2. Par suite f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Soit la fonction g *définie sur* $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *; montrons que* g est prolongeable par continuité en 0.

Pour tout réel x non nul on a : $-1 \leq sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$; d'où $-x^2 \leq x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$. $\lim\limits_{x\to 0} -x^2 =$

et $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ *; d'après le théorème des* gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Un prolongement par continuité de g est donc possible en 0 ; ce prolongement par continuité est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$.

Exercice Résolu

Enoncé

Étudions sur $\mathbb{R}$ la continuité de la fonction f définie par :

$f(x) = xE(x) - x + 2$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Solution

Soit k un entier relatif. Si $x \in [k;k+1[$ alors $E(x) = k$.

Ainsi $\begin{cases} f(x) = xn - x + 2 = (n-1)x + 2 \ si\, x \in [n;n+1[\\ f(x) = x(n-1) - x + 2 = (n-2)x + 2 si\, x \in [n-1;n[\end{cases}$.

La restriction de f à tout intervalle de la forme $[k;k+1[$, où k est un entier, est une fonction affine donc continue. Étudions la continuité de f en $n \in \mathbb{Z}$.

$\lim\limits_{\substack{x\to n \\ x<n}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to n \\ x<n}} (n-2)x + 2 = n^2 - 2n + 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to n \\ x>n}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to n \\ x>n}} (n-1)x + 2 = n^2 - n + 2$.

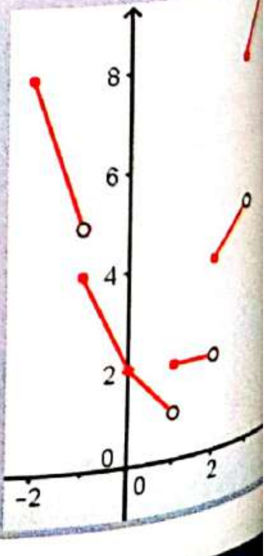
$f(n) = n\ E(n) - n + 2 = n^2 - n + 2$. f est donc continue à droite en n.

Pour que f soit continue à gauche en n on doit avoir

$n^2 - 2n + 2 = n^2 - n + 2$ cest-à-dire $n = 0$.

f est donc continue en tout $x_0 \notin \mathbb{Z}^*, x_0 \in \mathbb{R}$.

ci-contre est un aperçu de la courbe de f.



S'exercer

1.c Indiquer si les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies ci-dessous sont continues sur $\mathbb{R}$.

$$f(x)=2x-3+5x\sqrt{x^2+1}\ ;\ g(x)=\frac{-3x+5}{3x^2+2x+4}\ ;\ h(x)=\begin{cases}x^2-1 \ si\ x<1\\ x-1\ si\ x\geq 1\end{cases};$$

$$k(x)=\left|x^2-3x\right|+2x-9;\ w(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{2x+5} & si \quad x\leq -1\\ \dfrac{x-6}{x+1} & si \quad x>-1\end{cases}.$$

1.d Déterminer parmi les fonctions définies ci-dessous celles qui sont prolongeables par continuité en x_0, puis, définir un prolongement par continuité.

$$a(x)=\frac{1}{x};\ x_0=0\ ;\quad b(x)=\frac{2x-x-1}{2x+1};\ x_0=-\frac{1}{2}\ ;\quad c(x)=\frac{x-1}{x^3-x^2-x+1};\ x_0=1\ ;$$

$$d(x)=\frac{\sqrt{2x}-2}{\sqrt{x+7}-3};\quad x_0=2\ .$$

1.e Déterminer les valeurs des réels a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

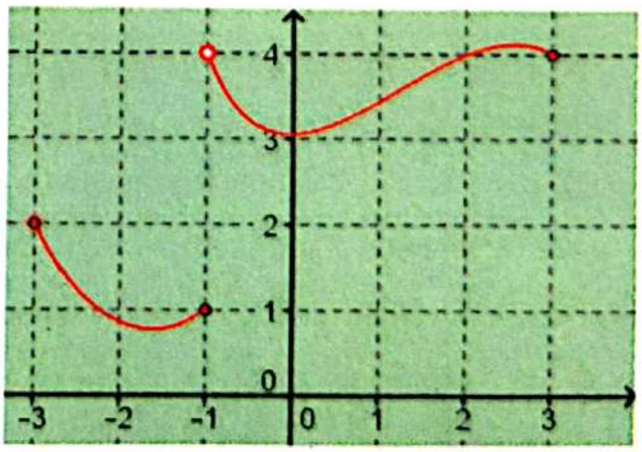
$$f(x)=\begin{cases}ax-2 & si \quad x<0\\ \sqrt{x+3} & si \quad 0\leq x\leq 1\\ \dfrac{2x-b}{-x-1} & si \quad x\succ 1\end{cases}.$$

1.3. THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES.

Prendre un bon départ

Activité 1

f est la fonction dont la courbe est donnée dans le graphique ci-contre.



1) Vérifier que f est continue sur $[-2:-1]$.

2) Lire graphiquement $f(-3)$ et $f(-1)$.

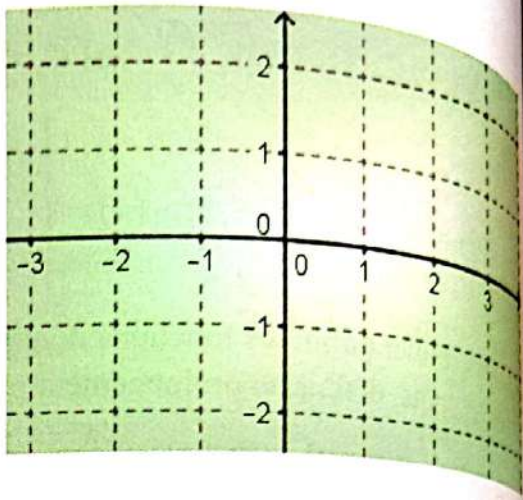
3) Soit k un réel compris entre $f(-3)$ et $f(-1)$; l'équation $f(x)=k$ a-t-elle toujours une solution dans $[-3;-1]$?

4) f est-elle continue sur $[-3;3]$? expliquer pourquoi.

5) Vérifier que $f(-3) < 2,5 < f(3)$.

6) L'équation $f(x) = 2,5$ a-t-elle une solution dans $[-3;3]$?

Activité 2



1) Sur le graphique ci-contre, construire la courbe d'une fonction f continue sur $[-2;3]$ et qui change de signe sur $[-2;3]$.

2) Vérifier que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $[-2;3]$.

3) Construire la coubre d'une fonction g définie sur $[-2;3]$ et telle que l'équation $g(x) = 0$ n'ait pas de solution.

Activité 3

Soit la fonction f dont le tableau des variations est donnée ci-dessous.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-1

1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-\infty;-3[$.

2) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a au-moins une solution sur $]-3;2]$.

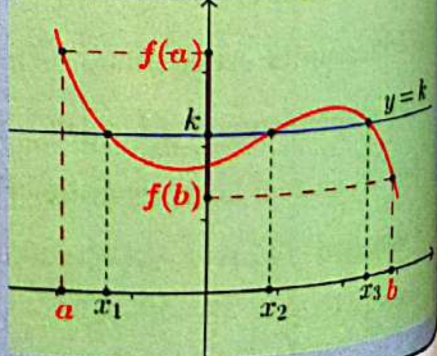
3) Démontrer que l'équation $f(x) = \sqrt{2}$ a au-moins une solution sur $]-\infty;-3[$.

4) Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$.

Retenir

Théorème des valeurs intermédiaires.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b deux éléments de I tels que $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle I, alors, la fonction f prend toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$, c'est-à-dire pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = k$. (ainsi l'équation $f(x) = k$ a au-moins une solution dans l'intervalle I).



Corollaire.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction continue sur I et $a, b \in \mathrm{I}$, $a < b$, tels que $f(a)Cf(b) < 0$. L'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a;b[$. Autrement dit, toute fonction continue qui change de signe s'annule au-moins une fois.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^3+2x-1$. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution $x_0 \in]0,4;0,5[$.

f est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$; en outre $f(0,4)=-0,14$ et $f(0,5)=0,13$; $f(0,5)\times f(0,4)<0$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution $x_0 \in]0,4;0,5[$.

Exercice Resolu

soit $f:[0;1]\to[0;1]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe au-moins $x_0 \in [0;1]$ tel que $f(x_0)=x_0$.

Solution

On pose $g(x)=f(x)-x$; on cherche donc à savoir s'il existe $x_0 \in [0;1]$ tel que $g(x_0)=0$.

La fonction g est continue sur $[0;1]$ comme différence de deux fonctions continues sur $[0;1]$; de plus $g(0)=f(0)\geq 0$ et $g(1)=f(1)-1\leq 0$ car $f(1)\in[0;1]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au-moins $x_0 \in [0;1]$ tel que $g(x_0)=0$, c'est-à-dire $f(x_0)=x_0$.

S'exercer

1.f Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2-10$.

1) Justifier qu'il existe un réel c appartenant à $[-3;0]$ tel que $f(c)=5$.
2) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet au-moins une solution dans $[3;4]$.
3) Soit (C) la représentation graphique de f dans un repère. Démontrer que la droite (D) d'équation $y=-8$ coupe au-moins une fois la courbe (C) sur l'intervalle $[-1;+\infty[$.

LEÇON 2 FONCTIONS CONTINUES ET STRICTEMENT MONOTONES.

- Montrer qu'une fonction réalise une bijection entre deux intervalles de $\mathbb{R}$.
- Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour déterminer le nombre des solutions dans un intervalle de $\mathbb{R}$, de l'équation $f(x) = a$.
- Donner un encadrement des solutions de l'équation $f(x) = a$ par la méthode de dichotomie ou celle du balayage.
- Étudier la continuité et construire dans un plan rapporté à un repère orthonormé les courbes respectives d'une application bijective et de sa réciproque.
- Manipuler les puissances rationnelles d'un nombre positif.

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. soient a et b deux réels distincts appartenant à I. on suppose $a < b$.

1) On suppose que f est strictement croissante sur I. Montrer que $f(a) \neq f(b)$ et en déduire que f est injective sur I.
2) Montrer de même que si f est strictement décroissante sur I, alors f est injective sur I.

Activité 2

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I ; soit $f(I)$ l'image de I par f. Montrer que f est une surjection de I vers $f(I)$.

Activité 3

f est une fonction dont le tableau des variations est donnée ci-dessous.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-5	↗	-1

1) Montrer à l'aide des résultats des deux activités précédentes que la restriction de f à l'intervalle $]-\infty ; -3[$ est une bijection de $]-\infty ; -3[$ vers un intervalle à préciser.
2) En déduire que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution dans l'intervalle $]-\infty ; -3[$.
3) Montrer de même que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans l'intervalle $]-3 ; 2]$.

Retenir

Théorème de la bijection

Si une fonction f est **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I, alors :

1) f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$.
2) De plus, la bijection réciproque : $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et strictement monotone et varie dans le même sens que f.

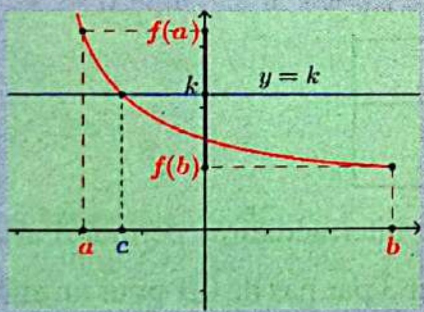
Conséquence.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction **continue et strictement monotone** sur I. Soient $a,b \in$ I, $a<b$, alors :

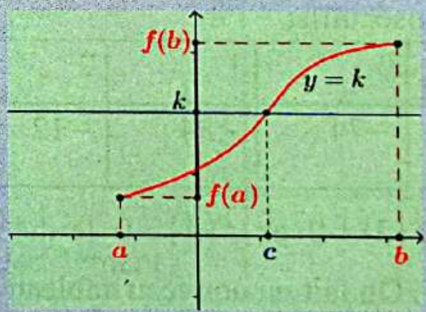
Pour tout réel $\boldsymbol{k}$ **compris entre** $\boldsymbol{f(a)}$ **et** $\boldsymbol{f(b)}$, il existe un unique réel c appartenant à $[a\,;b]$, tel que $f(c)=k$;

autrement dit pour tout réel $\boldsymbol{k}$ **compris entre** $\boldsymbol{f(a)}$ **et** $\boldsymbol{f(b)}$, l'équation $f(x)=k$ a une **unique solution** dans l'intervalle $[a;b]$.

Cas où f est strictement décroissante



Cas où f est strictement croissante



Corollaire.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction **continue et strictement monotone** sur I. soient $a,b \in I$ I, $a<b$, tels que $\boldsymbol{f(a)\mathrm{C}f(b)}<0$. Alors, l'équation $f(x)=0$ admet une **unique solution** dans l'intervalle $[a;b]$.

MÉTHODE

Lorsque qu'on étudie certaines fonctions, il est parfois difficile, voire impossible de donner les solutions exactes de certaines équations associées. Mais on peut avoir besoin (par exemple pour une représentation graphique plus précise) de donner une valeur approchée des solutions. La méthode de dichotomie et la méthode de balayage permettent de donner une valeur approchée.

EXEMPLE 1

Montrons que l'équation $(x-4)^3+3(x-4)+2=0$ admet une unique solution dans ℝ
donner un encadrement de cette solution à 10^{-2} près.

Posons $f(x)=(x-4)^3+3(x-4)+2$.

f est continue et strictement croissante sur ℝ car f est une fonction polynôme et sa fon
dérivée est définie par $f'(x)=3(x-4)^2+3$, le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

D'après le théorème de bijection, f est une bijection de ℝ vers $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Comme l'inter
image contient 0, l'équation $f(x)=0$ a donc une unique solution dans ℝ. Déterminons u
valeur approchée à 10^{-2} de cette solution.

La méthode de balayage.

On commence un balayage des valeurs de x par pas de 1 pour un encadrement à l'aide de de
entiers consécutifs;

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-74	-34	-12	-2	2

Comme $f(3)<0$ et $f(4)>0$ le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer q
$3<x_0<4$. On fait un nouveau tableau qui commence par 3 par pas de 0,1 pour un encadreme
à 10^{-1} près;

x	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
$f(x)$	-2	$-1{,}43$	$-0{,}91$	$-0{,}44$	$-0{,}02$	0,34

Comme $(3,4)$ 0 et $f(3,5)>0$ alors $3,4<x_0<3,5$. On fait un nouveau tableau qui com
mence par 3,4 par pas de 0,01 pour un encadrement à 10^{-2} près.

x	3,4	3,41	3,42
$f(x)$	$-0{,}02$	0,02	0,06

Ce dernier tableau permet de conclure que $3,40<x_0<3,41$.

3,40 et 3,41 sont donc des valeurs approchées de x_0 à 10^{-2} près.

La méthode par dichotomie.

Le balayage est une méthode efficace, mais laborieuse. On s'épargne de nombreux calculs intermédiaires en visant tout de suite le milieu de l'intervalle : c'est le principe de la dichotomie

EXEMPLE 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^n$.

Dressons le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

f est dérivable et $f'(x) = nx^{n-1}$; comme $x \in [0;+\infty[$, $f'(x) \geq 0$.

D'où le tableau de variation.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

f est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$, alors f est une bijection de $[0;+\infty[$ vers $f([0;+\infty[) = [0;+\infty[$.

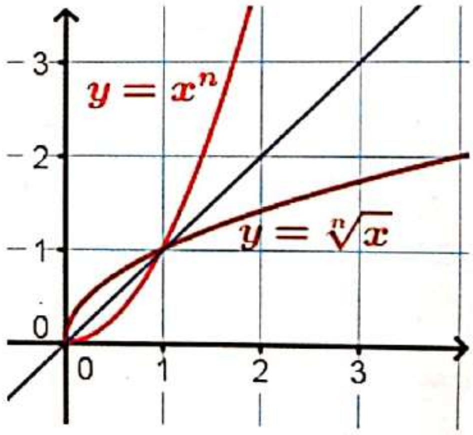
Pour tout réel positif a l'équation $x^n = a$ a donc une unique solution dans $[0;+\infty[$. Cette solution est notée $\sqrt[n]{a}$ (lire racine $n^{ième}$ de a) ou $a^{\frac{1}{n}}$.

Ainsi $x^n = a$ équivaut à $x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $(a \geq 0)$

$x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

$x^3 = a \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$.

$x^4 = a \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$.



Tout comme f la réciproque f^{-1} est continue et strictement croissante.

La courbe de f^{-1} et celle de f sont symétriques par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$).

REMARQUE 1

La fonction $f : x \mapsto x^n$ est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$, car $f'(x) = nx^{n-1}$. Si n est impair, $n-1$ est pair et $x^{n-1} \geq 0$ f est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} x^n = -\infty$, $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x^n = +\infty$.

La fonction $x \mapsto x^n$ (pour n entier naturel impair) est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

REMARQUE 2

Quelques propriétés de la fonction $\sqrt[n]{\ }$

- Pour tout réel positif ou nul x, on a $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$.
- Quels que soient les entiers naturels non nuls n et p et les réels positifs ou nuls a et b,
  - $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$ équivaut à $a = b$ et $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ équivaut à $a > b$,
  - $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$; $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$; $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$; $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$. $(b>0)$

EXEMPLE 1

1) Simplifions le réel $A = \dfrac{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt{\sqrt{64}}}{\sqrt{\sqrt[3]{256}}}$.

$\sqrt[3]{1024} = \sqrt[3]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{3}}$; $\sqrt{\sqrt{64}} = \sqrt[4]{2^6} = 2^{\frac{6}{4}} = 2^{\frac{3}{2}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{256}} = \sqrt[6]{2^8} = 2^{\frac{8}{6}} = 2^{\frac{4}{3}}$;

On a donc $A = \dfrac{2^{\frac{10}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{4}{3}}} = 2^{\frac{10}{3}} \times 2^{-\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{6}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^2 \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^3 \times 2^{\frac{1}{2}} = 8\sqrt{2}.$

2) Etudions le comportement de la fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^4 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 + 3x}$ au voisinage de $+\infty$.
Pour tout réel strictement positif, on a :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^4 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 + 3x} = \sqrt[3]{x^4\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - \sqrt[3]{x^3\left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}$$

$$= x^{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} - x\sqrt[3]{1 + \frac{3}{x^2}} = x^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} - x^{-\frac{1}{3}} \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x^2}}\right).$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{4}{3}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^4} = +\infty; \quad \lim_{x\to+\infty} x^{-\frac{1}{3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0.$$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{1 + \dfrac{1}{x^2}} = 1$. Il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

EXEMPLE 2

1) L'ensemble S des solutions de l'équation $x^4 = 2$ est $S = \left\{\sqrt[4]{2}; -\sqrt[4]{2}\right\}$.
2) L'ensemble S des solutions de l'équation $x^4 = -2$ est $S = \varnothing$.
3) L'ensemble S des solutions de l'équation $x^3 = 2$ est $S = \left\{\sqrt[3]{2}\right\}$.
4) L'ensemble S des solutions de l'équation $x^3 = -2$ est $\left\{-\sqrt[3]{2}\right\}$.
5) L'ensemble S des solutions de l'inéquation $x^4 \geq 2$ est $S = \left]-\infty; -\sqrt[4]{2}\right] \cup \left[\sqrt[4]{2}; +\infty\right[$.
6) L'ensemble S des solutions de l'inéquation $x^3 \geq -2$ est $\left[-\sqrt[3]{2}; +\infty\right[$.

Exercice Résolu

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3+x^2-1$.

1) Dresser le tableau des variations de f.

2) En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α, vérifiant $0,65<\alpha<0,66$.

3) Étudier le signe de $f(x)$ en fonction de x.

Solution

1) f est une fonction polynôme donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x)=6x^2+2x$. D'où le tableau des variations.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{26}{27}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2) Sur l'intervalle $]-\infty;0]$, d'après le tableau des variations $f(x)\leq-\frac{26}{27}$. Donc l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution dans cet intervalle.

Sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction f est continue et strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de $]0;+\infty[$ vers $f(]0;+\infty[)=]-1;+\infty[$. Comme l'intervalle $]-1;+\infty[$ contient 0 l'équation $f(x)=0$ admet exactement une unique solution et cette solution appartient à $]0;+\infty[$. Ainsi l'équation $f(x)=0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$. Soit α cette solution.

$f(0,65)=-0,02825$ et $f(0,66)=0,010592$; comme $f(0,65)\mathrm{C}f(0,66)<0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $0,65<\alpha<0,66$.

3) Signe de $f(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

On obtient le signe de $f(x)$ en parcourant la troisième ligne du tableau de variation de f. (le principe suivant peut être appliqué : une fonction continue qui ne s'annule pas dans un intervalle ne change pas de signe dans cet intervalle, et une fonction continue et strictement monotone change de signe au moment où elle s'annule dans cet intervalle).

S'exercer

2.a a) Donner le nombre de solutions de l'équation $x^3-3x+1=0$.

b) Donner un encadrement de chacune des solutions à 10^{-3} près.

2.b Montrer que l'équation $x^2 = x\sin x + \cos x$ admet deux solutions réelles.

2.c Soit la fonction f définie par $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 3$.

a) Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution que l'on notera α.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x)>0$.

2.d Une fonction f admet le tableau des variations suivant.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	0

Déterminer en justifiant le nombre de solutions de chacune des équations suivantes.

a) $f(x)=1$; b) $f(x)=2$; c) $f(x)=0$.

2.e Simplifier :

a) $2\sqrt[4]{6561}-5\sqrt[3]{27}-3\sqrt{36}$; b) $\dfrac{\sqrt[3]{a^5}\times\left(\sqrt[4]{a^7}\right)^2}{\left(a^2\right)^2\times\sqrt[5]{a^2}\times\sqrt[5]{a^3}}$; c) $\dfrac{10^{\frac{3}{2}}\times 8^{-\frac{4}{3}}}{5\times 4^{-\frac{7}{3}}}$.

2.f Déterminer les limites éventuelles en 0 et en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$f : x \mapsto \dfrac{x^{\frac{2}{5}}+x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{12}{5}}}$; $g : x \mapsto \dfrac{x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{5}}}$.

LEÇON 3 BRANCHES INFINIES DE LA COURBE D'UNE FONCTION.

> Donner en fonction des limites, l'allure des branches infinies de la courbe d'une fonction dans un voisinage donné.

Dans cette partie, nous considérons le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

Prendre un bon départ

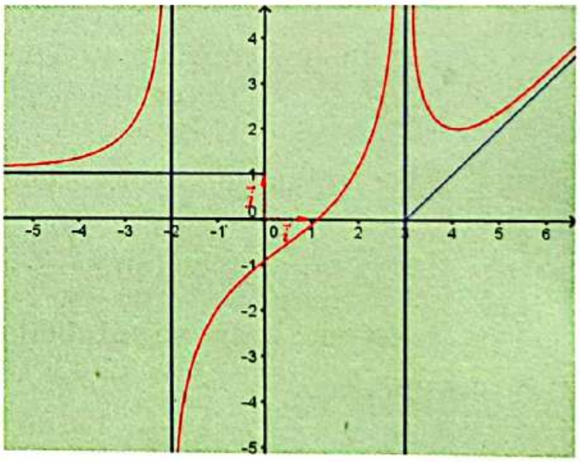
Activité 1

Soit f la fonction définie par $f(x)=x-2-\dfrac{4}{x+1}$.

1) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2) Donner une interprétation graphique des limites de f aux voisinages de -1.
3) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x-2)\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-2)\right)$; interpréter graphiquement les résultats obtenus.

Activité 2

f est une fonction dont la représentation graphique est donnée dans le repère ci-contre.



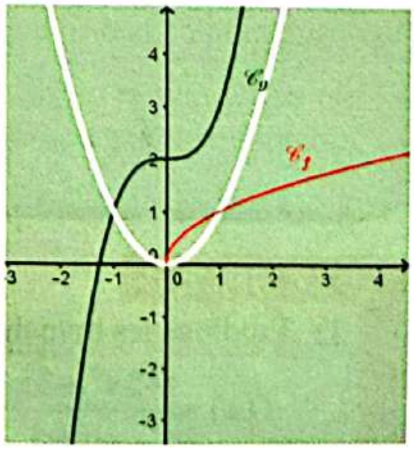
1) Écrire les équations des asymptotes à la courbe représentative de f.
2) Même question avec la fonction g dont le tableau des variations est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		-3			2		$+\infty$
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖	$+\infty$	↘	-5	↗	-1

Activité 3

Soient f et g les fonctions définies par $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=x^3+2$.

La courbe de f et celle de g sont représentées dans le graphique ci-contre.

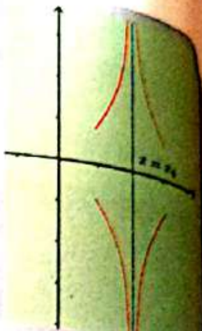


1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$. Que constate-t-on ?

2) Donner les limites suivantes: $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}$.

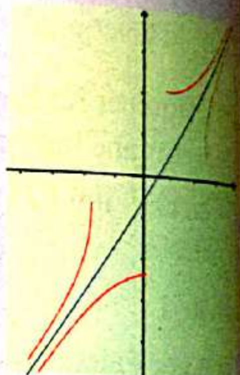
Retenir

Dans le voisinage d'un réel.



Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et C_f la représentation graphique de f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} f(x) = +\infty \; ou -\infty$ respectivement ($\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} f(x) = +\infty \; ou -\infty$) alors la droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote à C_f .

Asymptote dans le voisinage de l'infini

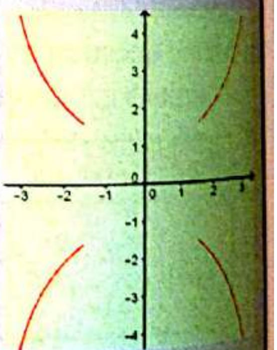


Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$. Soit C_f la représentation graphique de f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

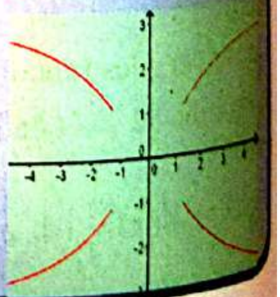
1) Si $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b$ (respectivement $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$) alors la droite d'équation $y = b$ est une asymptote à C_f dans le voisinage de $-\infty$ (respectivement $+\infty$).

2) Si $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ (respectivement $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - (ax+b) = 0$) alors la droite d'équation $y = ax+b$ est une asymptote à C_f dans le voisinage de $-\infty$ (respectivement $+\infty$). (confère figure ci-contre)

Branche parabolique dans le voisinage de l'infini : soit $x_0 \in \{-\infty;+\infty\}$



- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$ alors la branche infinie de C_f en x_0 est une **branche parabolique** ayant pour direction l'axe des ordonnées.



- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{x} = a$, et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) - ax = \pm\infty$ alors la branche infinie de C_f en x_0 est une branche parabolique ayant la direction de la droite d'équation $y = ax$.

En particulier si $a = 0$, C_f admet une branche parabolique ayant la direction de l'axe des abscisses.

EXEMPLE 1

1) Étudions les branches infinies de la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-2x^2+3x+2}{x-1}$.

L'ensemble de définition de f est : $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{-2x^2+3x+2}{x-1}=-\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f\left(-2x^2+3x+2\right)=0, \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x-1)=0$ et $x-1<0$ lorsque $x<1$.

De façon analogue, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{-2x^2+3x+2}{x-1}=+\infty$.

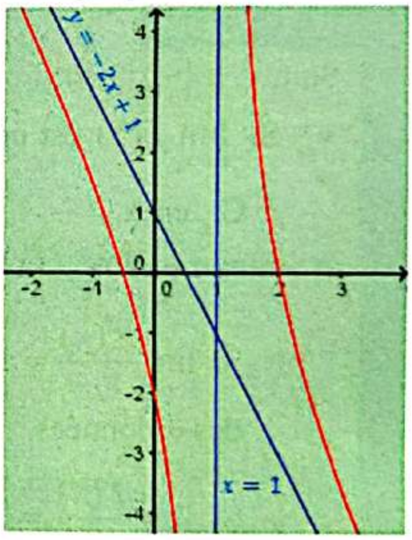
Interprétation graphique : la droite d'équation $x=1$ est une asymptote à la courbe de f.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-2x=+\infty$ on calcule alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^2+3x+2}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^2}{x^2}=-2$. On calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-2x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+2}{x-1}=1$

Interprétation graphique : la droite d'équation $y=-2x+1$ est une asymptote à la courbe de f dans le voisinage de $-\infty$.



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to3\infty}-2x=-\infty$.

On calcule alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2+3x+2}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2}{x^2}=-2$.

On calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(-2x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\quad}{\quad}=1$.

Interprétation graphique : la droite d'équation $y=-2x+1$ est une asymptote à la courbe de f dans le voisinage de $+\infty$. Ci-contre un aperçu de la courbe de f.

2) Soit la fonction f définie par $f(x)=2x-\sqrt{x+1}$. Étudions les branches infinies de la courbe de f. L'ensemble de définition de f est $[-1;+\infty[$. Lorsque x tend vers $+\infty$, x est positif, on peut donc écrire : $x=\left(\sqrt{x}\right)^2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2\left(\sqrt{x}\right)^2-\sqrt{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)=+\infty$; on calcule alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2-\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2-\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2}}=2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-2\right]=-\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $y=2x$ au voisinage de $+\infty$.

EXEMPLE 2

Étudions les branches infinies de la fonction f définie par $f(x)=x+\sqrt{x}$

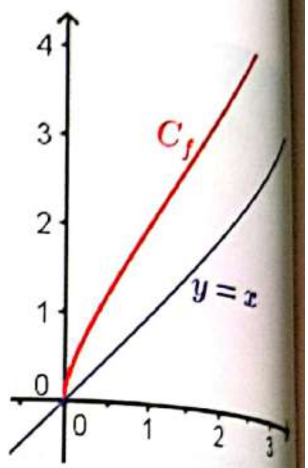
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x}=+\infty$; on calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=1$; on calcule ensuite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$.

Interprétation : la courbe de f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=x$.

Ci-contre un aperçu de la courbe de f.



MÉTHODE

Soit $x_0\in\{-\infty;+\infty\}$.

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ est un réel b alors la droite horizontale d'équation $y=b$ est une asymptote à $\mathbf{C}_f$ en x_0.
- Sinon, si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$ on calcule $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x}$.
  - Si $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$ alors $\mathbf{C}_f$ a en x_0 une branche parabolique ayant la direction de l'axe des ordonnées.
  - Si $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ alors $\mathbf{C}_f$ a en x_0 une branche parabolique ayant la direction de l'axe des abscisses (qui est une direction asymptotique).
  - Si $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x}$ est un réel a différent de 0. On calcule ensuite $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-ax\right)$.
    - Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-ax$ est un réel b alors la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote à $\mathbf{C}_f$.
    - Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-ax=\pm\infty$ alors $\mathbf{C}_f$ a en x_0 une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$.
    - Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-ax$ n'existe pas alors $\mathbf{C}_f$ n'a ni branche parabolique, ni asymptote.
  - Si $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x}$ n'existe pas alors $\mathbf{C}_f$ n'a ni direction asymptotique, ni branche parabolique, ni asymptote.

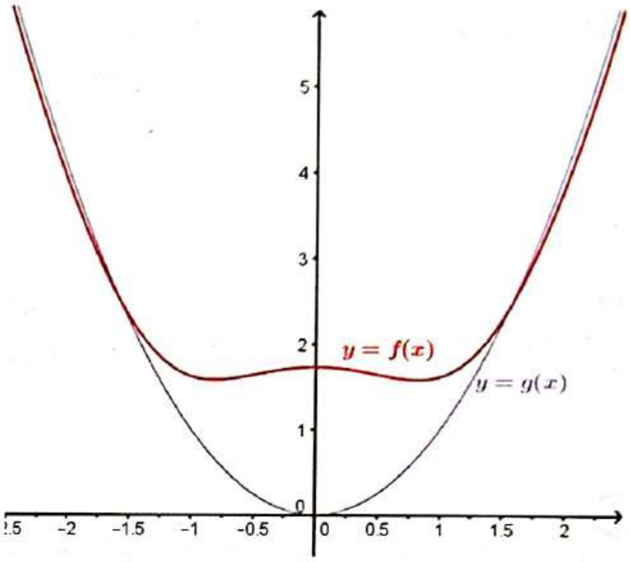
REMARQUE

L'étude des branches infinies de la courbe d'une fonction f pourrait se résumer à la question suivante :

« Existe-t-il une fonction plus simple que f qui se comporte comme f au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$) » ?

Pour répondre à cette question, on cherche donc une fonction g plus simple telle que

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-g(x)=0$. Dans cette leçon, on s'est contenté de comparer f avec des fonctions affines (i.e. des droites). Mais rien n'empêche de comparer f à des fonctions plus complexes.



$f(x)=\sqrt{x^4+\cos x}$ et $g(x)\quad x$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x^4+\cos x}+x^2}=0$$

car $\left|\dfrac{\cos x}{\sqrt{x^4+\cos x}+x^2}\right|\leq\dfrac{1}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

Donc la courbe de g est asymptote à la courbe de f au voisinage ∞.

S'exercer

3.a Étudier les branches infinies si possible aux courbes des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$a(x)=\frac{2x^2+1}{x^2+3}\ ;\quad b(x)=\frac{x^2+1}{2\sqrt{x}-3}\ ;\quad c(x)=\frac{x^4+2x^3-1}{x^2+4}\ ;\quad d(x)=\frac{x\ \ +x+1}{x^2+4};$$

$$l(x)=x\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}\right)\ ;\quad f(x)=\frac{\cos x}{x}\ ;\quad g(x)=\frac{\sqrt{9x^4+3x^3-1}}{x^2+1}\ .$$

S'ENTRAÎNER

LIMITES DE FONCTIONS

1.

Calculer les limites suivantes.

$\lim\limits_{x \to +\infty} 3x - \sqrt{2x^2 + 3}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x - \sqrt{2x^2 + 3}$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x^2 - 3} + x$.

2.

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x + \sqrt{-1 + 5x^3}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{3x^2 - 2} + x$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} x + \sqrt{-2 + 3x^3}$.

3.

Calculer les limites suivantes.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 2x - 2}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} - 3x}{2x - 4}$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - 2\sqrt{x}}{2 + 3x}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^4 - x^2 + 3}{2 - x^2}$.

4.

Déterminer dans chaque cas les limites de la fonction f.

$f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x\cos x}$; *en* 0; *en* $\dfrac{\pi}{2}$.

$f(x) = \dfrac{2\cos x}{2\sin x - 1}$; *en* $\dfrac{5\pi}{6}$; *en* $\dfrac{\pi}{2}$.

$f(x) = \dfrac{-x^2 + 5x}{2x}$; *en* 0; *en* $-\infty$.

$f(x) = \dfrac{x - 3}{5\sin x}$; *en* 0; *en* $\dfrac{\pi}{2}$.

$f(x) = \dfrac{\sin x}{5x^2}$; *en* 0; *en* π.

$f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{2x - \pi}$; *en* 0; *en* $\dfrac{\pi}{2}$.

$f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{\sin x}$; *en* 0; *en* $\dfrac{\pi}{2}$.

5.

Calculer la limite suivante.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(1 + x)^2}{x^2 - 2}$.

6.

Calculer les limites suivantes.

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{3x + 3} - 3}{2 - x}$; $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x - 6}{\sqrt{x + 1} - 2}$;

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x - 4}{\sqrt{x + 7} - 3}$.

7.

Calculer les limites suivantes.

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \dfrac{x^2 + x - 6}{-3x^2 + 7x + 6}$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{x^2 + 3x + 1}{1 - x}$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^4 - x^2 + 1}{-3x^3 - x}$.

8.

Calculer les limites suivantes.

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x + 2)^3}{x^2 - 3}$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{(2 - x)^2}$;

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \dfrac{x^2 + 3}{2 - x}$; $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \dfrac{-2x^2 - x + 6}{x^2 - 2x - 8}$.

9.

Calculer les limites suivantes.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - 2x$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x + 5} - x}{\sqrt{x^2 - x}}$;

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 6} - 3}{x - 3}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$;

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 2}}$.

10.

Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + \frac{1}{x}}{2x^2+1}; \qquad \lim_{x \to +\infty} \cos\frac{1}{x}.$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+4}; \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2-3x+1}{1-3x^2}.$$

$$\lim_{x \to 8} \frac{\sqrt{2x}-4}{\sqrt{x+1}-3}.$$

11.

Calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^2+7x-5}{1+x+x^2} \; ; \quad \lim_{\substack{x \to -1 \\ x<-1}} \frac{-5x}{x+1};$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} \frac{3x^2-5x}{x^2+4x+3} \; ; \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \sqrt{\frac{1-x}{x+2}};$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+4}.$$

12.

Etudier la limite de f dans les cas suivants :

a) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}$ en $+\infty$;

b) $f(x) = x^3\left(\cos\frac{1}{x} - 2\right)$ en $+\infty$;

c) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+3x-10}$ quand x tend vers 2, vers -5, vers $+\infty$, vers $-\infty$.

13.

Déterminer les limites éventuelles de :

a) $f(x) = (x-2)\left(1 + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{(x-2)^2}\right)$ quand x tend vers 2, vers $+\infty$ et vers $-\infty$;

b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ quand x tend vers 1, vers $+\infty$ et vers $-\infty$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{ax}{(x^2-1)^2}$ quand x tend vers 1, vers $+\infty$ et vers $-\infty$. (on discutera éventuellement suivant les valeurs de a).

14.

Déterminer les limites éventuelles de :

a) $\dfrac{\tan 3x}{\sin 3x}$ quand x tend vers 0 ;

b) $\dfrac{1 - cotan\, x}{x - \frac{\pi}{2}}$ quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$;

$\left(cotan x = \dfrac{\cos x}{\sin x}\right)$

c) $\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ quand x tend vers 0;

d) $\dfrac{2\tan x + \sin x}{x}$ quand x tend vers 0;

e) $\dfrac{\sin 2x}{1-\cos x}$ quand x tend vers 0;

f) $\dfrac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{3}}$ quand x tend vers $\frac{\pi}{3}$;

g) $(x+1)\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ quand tend vers $+\infty$.

15.

Déterminer les limites éventuelles respectives en 1 et en $+\infty$ de la fonction f définie par :

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+x^2}}{x-1}$;

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^3-x} - \sqrt[3]{x^3-7x+6}}{x-1}$;

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^4+x^3+2} - \sqrt[5]{x^2+2x}}{x^3-x^2+5}$;

16.

Déterminer la limite en $-\infty$ de

$$f(x) = \sqrt[3]{-8x^3-8x+16} + 2x.$$

17.

Dérminer la limite en 0 de

$f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$.

$h(x)=\sqrt{|x-2|}+2$.

$h(x)=\sqrt{|x|-4}-2$

LIMITES ET COMPARAISONS

18.

On considère la fonction $f: \mapsto \dfrac{2x+\sin x}{x-1}$. .

1) Démontrer que pour tout réel $x>1$, on a :

$\dfrac{2x-1}{x-1}\leq f(x)\leq \dfrac{2x+1}{x-1}$.

2) En déduire la limite de f en $+\infty$.

19.

On considère la fonction $f: \mapsto x^2-3\sin x$..

Détrminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

20.

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $f(x)\geq x^2$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

21.

Calculer les limites suivantes.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x+1}{1+x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2+\cos x}{2+x}$.

22.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$f(x)=\dfrac{E(x)}{x}$ où E désigne la fonction partie entière.

1) Démontrer que pour tout réel x,

$x-1\leq E(x)\leq x$.

2) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

23.

Déterminer la limite éventuelle de la fonction à $+\infty$ dans chacun des cas suivants.

1) $f(x)=(2-\sin x)x^2$;

2) $f(x)=\dfrac{3x}{\cos x-3}$.

24.

Calculer les limites suivantes.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$;

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$;

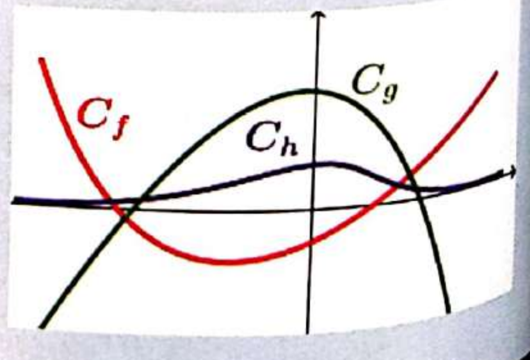
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

LECTURE GRAPHIQUE

25.

Le graphique donne les courbes de trois fonctions f, g et h définie sur $\mathbb{R}$. Conjecturer si possibles les limites à $-\infty$ et à $+\infty$ des fonctions : $f+g$;

$f-g$; fg ; fh ; $g-h$; $\dfrac{f}{g}$; $\dfrac{f}{h}$; $\dfrac{g}{h}$; $f\circ g$.



CONTINUITÉ

26.

Indiquer dans chaque cas si la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 6$;

$f(x) = \dfrac{-3x^2+6}{x^2-2x+5}$;

$f(x) = \begin{cases} -2x+3 \; si \; x < 2 \\ \dfrac{1}{2}x - 2 \; si \; x \geq 2 \end{cases}$;

$f(x) = x|x-3| + 2x - 9$;

$f(x) = \sqrt{4x^2 - 3x + 1}$;

$f(x) = \begin{cases} x - 2 \; si \; x \leq -1 \\ \dfrac{x^2-1}{x+1} si \; x > -1 \end{cases}$.

27.

Même question avec la fonction définie par :

$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\dfrac{1}{x} \quad si \quad x \neq 0 \\ \quad 0 \quad si \quad x = 0 \end{cases}$.

28.

Dans chaque cas, quelle valeur doit prendre le réel m pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = \begin{cases} m \quad si \; x = -1 \\ \dfrac{x^2-1}{x+1} si \; x \neq -1 \end{cases}$;

$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} si \quad x \neq 0 \\ \quad f(0) = m \end{cases}$.

PROLONGEMENT PAR CONTINUITE

29.

Dire si les fonctions suivantes admettent un prolongement par continuité en x_0, si oui la définir.

$f(x) = \dfrac{\sin 2x}{3x}$ et $x_0 = 0$;

$f(x) = 2\dfrac{\cos 2x - 1}{x}$ et $x_0 = 0$.

30.

Même question avec la fonction définie par :

$f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x} \quad en \quad x_0 = 0.$

Même question avec la fonction définie par :

$f(x) = x \tan\dfrac{1}{x} \quad en \quad x = 0.$

31.

Déterminer le prolongement par continuité de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$f(x) = \dfrac{1}{2x^2}\left[(1+x)^n - 1 - nx\right] \quad où \quad n \geq 2.$

32.

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité en 0 ?

$f(x) = x\left|1 + \dfrac{1}{x}\right|$;

$g(x) = \dfrac{x^2 - |x|}{x^2 + |x|}$.

33.

Étudier le prolongement par continuité de la fonction définie par

$f(x) = x\cos\dfrac{1}{x} \quad si \quad x \neq 0.$

FONCTIONS CONTINUES ET SRICTEMENT MONOTONES

34.

Soit f une fonction définie et continue sur $I = [-1;5]$.

On suppose que $f(-1) = -4$; $f(5) = 3$.

1) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans I.
2) Quelle hypothèse supplémentaire faut-il faire pour que cette solution soit unique ?

35.

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$; on suppose que $f(-5)=-1$; $f(-3)=-2$; (0) 1 ; $f(2)=4$; $f((5)=-5$; $f(6)=1$.

Recopier et compléter les phrases suivantes :

- L'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ admet au moins ….. solution(s) dans $\mathbb{R}$.
- L'équation $f(x)=0$ admet au moins ….. solution(s) dans $\mathbb{R}$.
- L'équation $f(x)=4,5$ admet au moins ….. solution(s) dans $\mathbb{R}$.
- L'équation $f(x)=3$ admet au moins ….. solution(s) dans $\mathbb{R}$.

36.

On considère le polynôme p définie pour tout réel x par $p(x)=2x^3-3x^2-1$.

1) Étudier les variations de .
2) Montrer que l'équation $p(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et que $\alpha\in]1,6:1,7[$.
3) Dresser le tableau de signe de $p(x)$.

37.

On considère l'équation $(E): x^3+3x-2=0$.

Justifier que (E) admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, puis donner un encadrement d'amplitude 10^{-3}.

38.

On considère la fonction $f(x)=x^3+4x^2+4$
Démontrer, en rédigeant soigneusement, que l'équation $f(x)=-1$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-3;0]$.

39.

Démontrer que l'équation $3x^4-8x^3+6x^2=1$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0\,;2]$.

40.

Démontrer que l'équation $(3x-1)\sqrt{x}=1$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0\,;1]$.

41.

Montrer que l'équation $x^2=x\sin x+\cos x$ admet deux solutions réelles.

42.

Pour tout entier $n\geq 2$, on considère la fonction f_n définie sur par $f_n(x)=x^3-2nx+1$.
Démontrer que pour tout entier naturel n, l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution dans $[0;1]$.

43.

Le tableau suivant est le tableau des variations d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $I=[-5;8]$.

Déterminer le nombre de solutions dans I de l'équation $f(x)=0$.

x	-5	0	8
$f(x)$	1 ↗	2	↘ -6

IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE.

44.

Dans chacun des cas suivants déterminer $f(K)$.

- $f(x)=x^2-3x+2 \quad K=[1;2]$;
- $f(x)=\dfrac{-2x+5}{x-3} \quad K=[-4;-1]$;
- $f(x)=\sqrt{x^2+3x+2} \quad K=[0;+\infty[$;
- $f(x)=x^3-3x+1 \quad K=[-4;4]$;
- $f(x)=2\cos x \quad K=\mathbb{R}$;
- $f(x)=|3x\ -1| \quad K=]-\infty;0]$.

45.

On donne ci-dessous le tableau des variations d'une fonction f. f est continue sur $]-\infty;8[$ et sur $]8;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		8		$+\infty$
$f(x)$	1	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

1) Dans chacun des cas suivants déterminer $f(I)$.
   $I=]-\infty;0]$; $I=[0;8[$; $I=]8;+\infty[$; $I=]-\infty;8[$.
2) Montrer que la restriction de f à $I=[0;8[$ est une bijection de $I=[0;8[$ vers un intervalle J que l'on précisera.
3) Donner en justifiant le nombre de solution de l'équation $f(x)=0$.
4) Même question avec l'équation $f(x)=3$.

46.

Montrer que la fonction f définie par $f(x)=x^3-3x+2$ est une bijection de $[1;+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

Dresser le tableau de variation de f^{-1}.

47.

1) Montrer que la fonction $f: x\mapsto 1-cosx$ est une bijection de $[0;\pi]$ vers $[0;2]$.
2) Tracer les courbes représentatives de f et f^{-1}.

48.

1) Montrer que la fonction $f: \ \mapsto \dfrac{x}{\sin x}$ est une bijection de $]0;\pi[$ vers un intervalle que l'on précisera.
2) Tracer les courbes représentatives de f et f^{-1}.

49.

Simplifier les expressions :

(1) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{4}\times\sqrt{\sqrt[6]{4}}}$;

(2) $\dfrac{\sqrt[15]{3}\times\sqrt[3]{9}\times\left(\sqrt{9}\right)^2}{\sqrt[3]{27}\times\left(\sqrt{\sqrt{3}}\right)^2}$;

(3) $\left(a^2+a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(b^2+b^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ $(a>0,b>0)$.

(4) $\dfrac{a-a^{\frac{1}{3}}+2a^{\frac{1}{2}}-3a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{6}}-1}$ $(a>0)$.

ÉTUDE DES BRANCHES INFINIES.

50.

Étudier le comportement asymptotique des fonctions suivantes définies par :

$f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$; $f(x)=\dfrac{x^2+\sin x}{x}$;

$f(x)=\dfrac{\sqrt{9x^4+3x^2-1}}{x^2-1}$; $f(x)=\dfrac{2x^3+x-1}{x^2+1}$;

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^9+2x}}{x^2+1}\ ;\ f(x)=\frac{x^2+2x}{|x-1|+x}.$$

51.

Étudier les branches infinies des fonctions suivantes définies par :

$$f(x)=x^2+2\cos 2x\ ;\ f(x)=\frac{x^2+2x}{|x-1|+x};$$

$$f(x)=\sqrt{x^2-4}\ ;\ f(x)=\sqrt{|x^4-x^2|};$$

$$f(x)=2x-\sqrt{4x^2-3x+2}\ ;$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\frac{1}{2}x.$$

52.

Étudier les branches infinies des fonctions suivantes définies par :

$$f(x)=2x-\sqrt{x}\ ;\ f(x)=x\sqrt{\frac{x+1}{x-2}};$$

$$f(x)=2x-2+\frac{x-2}{x^2+2x+5}\ ;$$

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+6}{x^2+1}.$$

53.

Soit la fonction f définie par

$f(x)=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$. On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que f est une fonction impaire.
2) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3) f admet-elle un prolongement par continuité en 0. Justifier votre réponse.
4) On désigne par g la restriction de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
5) Montrer que la droite $(D): y=x$ est un asymptote à la courbe de g.
6) Calculer $\lim\limits_{x\mapsto 0}\frac{g(x)-1}{x}$ et préciser l'allure de la courbe de g au voisinage du point $A(0;1)$
7) Montrer que $g(x)=\sqrt{x^2+1}$ et dresser le tableau de variation de g.
8) Construire C_f.

54.

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x)=x^3+3x-2$.

1) Dresser le tableau de variation de g.
2) Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $g(\alpha)=0$. Vérifier que $0{,}59<\alpha<0{,}60$.

Chapitre 3

NOMBRES COMPLEXES

LEÇON 1 ÉTUDE ALGÉBRIQUE DE ℂ.

1-1 INTRODUCTION DES NOMBRES COMPLEXES-PRÉSENTATION.

1-2 OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES COMPLEXES SOUS FORME ALGÉBRIQUE.

1-3 INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES.

1-4 MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

LEÇON 2 ÉCRITURES TRIGONOMÉTRIQUES ET ÉCRITURES EXPONENTIELLES D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL.

2-1 ARGUMENT ET FORME TRIGONOMÉTRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL.

2-2 TRIGONOMÉTRIE ET NOMBRES COMPLEXES.

2-3 RACINES N-IÈMES D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL.

1-4 MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

LEÇON 3 ÉQUATIONS DANS ℂ.

3-1 ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ ; SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS ℂ.

3-2 ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ DANS ℂ.

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1 ÉTUDE ALGÉBRIQUE DE $\mathbb{C}$

- Reconnaitre l'écriture algébrique d'un nombre complexe
- Effectuer l'addition, le produit, l'inverse, la puissance, le rapport de deux nombres complexes.
- Interpréter géométriquement les nombres complexes.
- Déterminer le conjugué, le module d'un nombre complexe.
- Résoudre certains problèmes de lieux géométriques à l'aide des membres complexes.

1.1. INTRODUCTION DES NOMBRES COMPLEXES - PRÉSENTATION

Prendre un bon départ

Dans l'ensemble $\mathbb{R}$, l'équation $x^2+1=0$ n'a pas de solution, car $x^2+1\geq 1>0$.
Plus généralement on ne peut pas trouver un réel x tel que $x^2+b=0$ avec $b>0$.
On admet l'existence d'un nombre i appartenant à un nouvel ensemble contenant $\mathbb{R}$ tel que $i^2=-1$.
Montrer que dans ce nouvel ensemble, en conservant les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2+1=0$ admet deux racines et que plus généralement il en est de même de toute équation de la forme $x^2+b=0$ avec $b>0$.

Retenir

- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.
- Tout nombre complexe peut s'écrire de manière unique sous la forme $a+ib$ où a et b sont des nombres réels et i le nombre dit imaginaire tel que $i^2=-1$
- L'écriture du nombre complexe z sous la forme $a+ib$ est appelée écriture algébrique (ou cartésienne de z).
  - a est la partie réelle de z notée $R_e(z)$.
  - b est la partie imaginaire de z notée $Im(z)$.

REMARQUE

- Soit $z=a+ib$ un nombre complexe.
  - Si $b=0$, alors z est réel. Donc $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$.

- Si $a=0$ et $b\neq 0$, alors $z=ib$, z est dit imaginaire pur.
- z est nul si et seulement si $R_e(z)=0$ et $\mathcal{I}m(z)=0$.

- Les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe sont des nombres réels. L'ensemble $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{C}$.
- L'ensemble des imaginaire purs est noté $i\mathbb{R}^*$

EXEMPLE

Considérons les nombres complexes suivants :

- $z_1=-2i$; $z_2=-3$; $z_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; $z_4=cos\theta+isin\theta$

  z_1 est imaginaire pur car $\mathcal{I}m(z_1)=-2$ et $R_e(z_1)=0$;

  z_2 est réel car $\mathcal{I}m(z_2)=0$; $R_e(z_3)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\mathcal{I}m(z_3)=-\frac{1}{2}$;

  $R_e(z_4)=cos\theta$ et $\mathcal{I}m(z_4)=sin\theta$.

- Considérons le nombre complexe $z=x^2-x+2+(x+2)i$ où x est un réel.
- z est nul si et seulement si $x^2+x-2=0$ et $x+2=0$.

  Or $x+2=0$ entraine $x=-2$ et $(-2)^2-(-2)-2=4-4=0$

  Donc z est nul si $x=-2$.

S'exercer

1.a

a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous

Nombre complexe z	Partie réelle de z, $R_e(z)$	Partie imaginaire de z, $\mathcal{I}m(z)$
$z=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$		
$z=-\sqrt{3}$		
$z=-\sqrt{3}i$		
	$-\frac{5}{2}$	–

b) Existe-t-il un couple (x, y) de nombres réels tels que $\left(\frac{1}{x}+y^2\right)+\left(\frac{3}{x}-2y^2\right)i$ soit égal à $1+i$?

c) On considère le nombre complexe $z = x^2+x-2+(x+2)i$.
Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles z est un imaginaire pur ?

1.2. ÉGALITÉ ET OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES COMPLEXES SOUS FORME ALGÉBRIQUE

N.B : Les calculs se feront dans $\mathbb{C}$ exactement comme dans $\mathbb{R}$ mais en tenant compte du fait que $i^2=-1$.

Prendre un bon départ

Soient les nombres complexes $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$ où a, b, a' et b' sont des nombres réels.

1) Donner une condition sur a et a', b et b' pour que les nombres complexes z et z' soient égaux.
2) Donner la forme algébrique de $z+z'$.
3) Donner la forme algébrique de $z \times z'$.
4) Montrer que $(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$.
5) Soit $z = a+ib$ un nombre complexe non nul.

   Montrer que l'inverse de peut s'écrire $\frac{a-ib}{a^2+b^2}$.

Retenir

- **Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.**

  $z = z'$ si et seulement si $R_e(z)=R_e(z')$ et $\mathcal{I}m(z)=\mathcal{I}m(z')$.
- **Soient $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$.**
  - $z+z'=(a+a')+i(b+b')$;
  - $z \times z'=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$
- **$z = a+ib$ est un nombre complexe non nul.**

  $\frac{1}{z}=\frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{(-b)}{a^2+b^2}$.

- Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. tels que $z' \neq 0$,

$$\frac{z}{z'} = \frac{a+ib}{a'+ib'} = \frac{aa'+bb'}{(a')^2+(b')^2} + i\frac{a'b-ab'}{(a')^2+(b')^2}.$$

REMARQUE

$i^2 = -1$; $(i^2)^2 = 1$; soit $i^4 = 1$.

Pour tout entier naturel p, $i^{4p} = 1$; $i^{4p+1} = i$; $i^{4p+2} = -1$; $i^{4p+3} = -i$.

S'exercer

1.b Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$a = (2+3i)(1-2i)$; $b = \left(2 - i\sqrt{3}\right)\left(3 + 5\sqrt{3}\right)$; $c = (2+4i)(5+3i)^2$;

$d = (5+4i)(3+5i)(2-3i)$; $e = \dfrac{1-i}{5i}$; $f = \dfrac{4-5i}{6+5i}$; $g = \dfrac{(2-5i)(3+2i)}{3-2i}$.

1.c Donner la forme cartésienne de $(2-i)^2$; $(1+i)^7$;$(2-i)^5$.

1.3. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES

1.3.1 REPRÉSENTATION

Prendre un bon départ

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. $\vec{\mathrm{P}}$ le plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$.

On considère les applications φ et ψ définies par :

$$\varphi : \mathbb{C} \to \vec{P} \qquad \text{et} \qquad \varphi : \vec{P} \to \mathcal{P}$$
$$a + ib \mapsto a\vec{u} + b\vec{v} \qquad a\vec{u} + b\vec{v} \mapsto M(a;b)$$

a) La bijection $\psi \circ \varphi$ permet de placer dans le plan $\mathcal{P}$, l'image du nombre complexe $a+ib$, par le point de coordonnées $(a;b)$, puis de donner aussi l'image réciproque du point $M(x;y)$.

(i) Placer dans le plan $\mathcal{P}$, les images respectives des nombres complexes $2-3i$; $3+4i$;$-5+2i$.

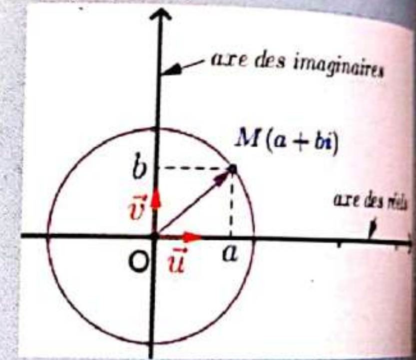
(ii) Donner sous forme algébrique les nombres complexes dont les images sont respectivement les points $A(2;-1)$; $B(\sqrt{2}\ ;3)$;$C(4\ ;0)$

b) Montrer que $\varphi(z+z')=\varphi(z)+\varphi(z')$; $\varphi(xz)=x\varphi(z)$ où x est un nombre réel, z et z' nombres complexes.

Retenir

Le nombre complexe $z=a+ib$ est représenté dans le plan par le point $M(z)$ de coordonnées $(a;b)$.
z est appelée affixe du point M, tandis que $M(z)$ est appelé point image du nombre complexe z dans le plan $\mathcal{P}$. On note aussi $a+ib=z_M$.

Le plan $\mathcal{P}$ est appelé plan complexe ou encore plan de Cauchy. Les droites $(O;\vec{u})$ et $(O;\vec{v})$ sont respectivement l'axe des réels et l'axe des imaginaires du repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.



Le vecteur $\overrightarrow{OM}=a\vec{u}+b\vec{v}$ est le vecteur image du nombre complexe z.

On note aussi $a+ib=Z_{\overrightarrow{OM}}$. Soient $\vec{u},\vec{v}$ deux vecteurs du plan, k un nombre réel.

On a $Z_{\vec{u}+\vec{v}}=Z_{\vec{u}}+Z_{\vec{v}}$ et $Z_{k\vec{u}}=kZ_{\vec{u}}$.

Pour tout bipoint $(M;N)$, $Z_{\overrightarrow{MN}}=Z_N-Z_M$.
Si un point G est le barycentre d'un système des points pondérés $\{(A_1,a_1);(A_2,a_2);\ldots;(A_n,a_n)\}$, alors $Z_G=\dfrac{a_1\times Z_{A_1}+a_2\times Z_{A_2}+\ldots+a_n\times Z_{A_n}}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$.

EXEMPLE

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

1) Déterminer les affixes des points A, B et C de coordonnées respectives $(2,-2)$; $(-3,0)$ et $\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$.

   Désignons par z_A, z_B et z_C les affixes des points A, B et C.

   $z_A=2-2i$; $z_B=-3$; $z_C=\dfrac{5}{2}i$.

2) L'affixe du point A' symétrique de A par rapport à la droite de repère $(O,\vec{u})$ est $z_{A'}=2+2i$.

3) L'affixe du point A'' symétrique de A par rapport à O est $z_{A''}=-2+2i$.

4) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le nombre complexe $z_B-z_A=-3-2+2i$; soit $-5+2i$.

S'exercer

1.d On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_2 = 1 + 2i$;

$z_3 = -2 - 3i$; $z_4 = -1 - 2i$, affixes respectives des points A, B, C et D.

Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AC}$.

1.e On donne les nombres complexes $z = -2 + 3i$ et $z' = 2 + i$.

a) Donner l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes $z + z', zz'$ et z^2.

b) Déterminer le nombre complexe z tel que $3iz + \dfrac{2i - 5}{3i} = -15 + 13i$.

c) Déterminer les nombres complexes z et z' tels que $\begin{cases} iz - z' = 2i \\ (1 - i)z + (2 + i)z' = 1 + 4i \end{cases}$.

1.f Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que le nombre complexe $Z = z^2 + 2z - 3$ soit un réel.

1.3.2 NOMBRES COMPLEXES CONJUGUÉS

Prendre un bon départ

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient M un point d'affixe z = $a + ib$ et M' le symétrique de M par rapport à la droite de repère $(O, \vec{u})$.

1) Montrer que l'affixe z' du point M' est le nombre complexe $z' = a - ib$.
Dans la suite z' sera noté $\overline{z}$. Ainsi $\overline{z} = a - ib$.

2) Calculer $z + \overline{z}$ et $z - \overline{z}$.

3) Comparer $\overline{\overline{z}}$ et z.

4) a) Montrer que $z = -\overline{z}$ si et seulement si, z est un imaginaire pur.
b) Montrer que z est un réel si et seulement si $z = \overline{z}$.

5) Comparer $\overline{z + z'}$ et $\overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{zz'}$ et $\overline{z}\,\overline{z'}$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}$ et $\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z' \neq 0)$.

Retenir

- Soit $a + ib$ un nombre complexe. Le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$ est le conjugué de z.
- Quel que soit le nombre complexe z on a :

- $z+\overline{z}=2R_e(z)$; $z-\overline{z}=2iIm(z)$
- $z=-\overline{z}$ si et seulement si z est un imaginaire.
- $z=\overline{z}$ si et seulement si, z est un réel.

• Quels que soient les nombres complexes z et z' on a :

- $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$; $\overline{zz'}=\overline{z}\times\overline{z'}$.
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}(z'\neq 0)$.

REMARQUE

- Si $z=a+ib$,$(a,b\in\mathbb{R})$ est un nombre complexe, alors $z\times\overline{z}=a^2+b^2$.
- $M(z)$ et $M'(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

EXEMPLE

1) Mettons le nombre complexe $\frac{3-2i}{2-i}$ sous la forme algébrique.

$$\frac{3-2i}{2+i}=\frac{(3-2i)(2-i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{4}{5}-\frac{7}{5}i.$$

2) Mettons $\frac{z}{z'}=\frac{a+ib}{a'+ib'}$ sous la forme algébrique.

D'après la remarque ci-dessus $z'\times\overline{z'}=a'^2+b'^2$.

$$\frac{z}{z'}=\frac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}}=\frac{(a+ib)(a'-ib')}{(a'+ib')(a'-ib')}=\frac{(aa'+bb')+i(a'b-b'a)}{a'^2+b'^2}.$$

$$\frac{z}{z'}=\frac{aa'+bb'}{(a')^2+(b')^2}+i\frac{a'b-ab'}{(a')^2+(b')^2}.$$

S'exercer

1.g On considère les nombres complexes $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ et $z'=\frac{1}{2\sqrt{3}+2i}$.

a) Calculer les conjugués des nombres complexes z et z'.

b) Calculer sous forme algébrique zz' ; $\frac{z}{z'}$; z'^3 ; $z^6\times z'^{12}$; $\frac{z^8}{z'^{13}}$.

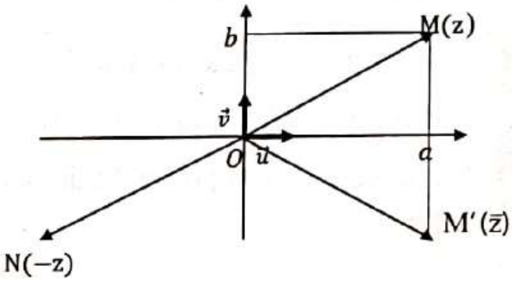
1.4. MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Prendre un bon départ

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe où a et b sont deux réels.

M son point image dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ du plan ; N le point d'affixe $-z$ et M' d'affixe $\overline{z}$.

1) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{OM'}$ en fonction a et b .
2) Comparer OM , ON et OM'.
3) Montrer que $OM^2 = z\times\overline{z}$.



Retenir

- Le module du nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre réel positif ou nul $\sqrt{z\overline{z}}$. On le note $|z|$ et on lit « module de z » .

  $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$.
- Pour tout nombre complexe z, $|z| = |-z| = |\overline{z}|$.
- ($|z| = 0$) équivaut à (z=0).
- Si M a pour affixe z et M' a pour affixe z' alors $|z| = \|\overrightarrow{OM}\|$ et $|z'-z| = \|\overrightarrow{MM'}\|$.

REMARQUE 1

- Quels que soient les nombres complexes z et z',
  - $|zz'| = |z||z'|$.
  - $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ avec $z' \neq 0$.

En effet $|zz'| = \sqrt{(zz')(\overline{zz'})} = \sqrt{z\overline{z}}\times\sqrt{z'\overline{z'}} = |z||z'|$.

D'autre part si $z' \neq 0$, $z'\times\dfrac{1}{z'} = 1$, d'où $\left|z'\times\dfrac{1}{z'}\right| = 1$; $|z'|\times\left|\dfrac{1}{z'}\right| = 1$.

D'où $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|}$. Par suite $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \left|z\times\dfrac{1}{z'}\right| = |z|\times\left|\dfrac{1}{z'}\right| = |z|\times\dfrac{1}{|z'|} = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

- Pour tout entier naturel n non nul, $|z^n| = |z|^n$.
- $|z+z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).

En effet $\|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}\| \leq \|\overrightarrow{OM}\| + \|\overrightarrow{OM'}\|$, par suite $|z+z'| \leq |z| + |z'|$.

- z est dit unitaire si et seulement si $|z| = 1$.

REMARQUE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A et B du plan d'affixes respectives a **et** b

- L'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z-a| = |z-b|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

  En effet $|z-a| = |z-b|$ est équivalent à $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$ ou $MA = MB$. .

- L'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que : $|z-a| = r$ $(r > 0)$ est le cercle de centre A et de rayon r.

  En effet $|z-a| = r$ est équivalent à $\|\overrightarrow{MA}\| = r$ ou $MA = r$.

  La recherche de l'ensemble des points M(z) du plan tels que : $\frac{|Z-a|}{|Z-b|} = r$ $(r > 0)$ se ramène à la ligne de niveau qui à r de $\frac{MA}{MB}$.

EXEMPLE 1

1) Déterminons l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que $|z-1+i| = 2$.

   $|z-1+i| = 2$ équivaut à $|z-(1-i)| = 2$.

   Soit A le point d'affixe $z_A = 1-i$.

   $|z-(1-i)| = 2$ équivaut à $|z-z_A| = 2$, qui est équivalent à $\|\overrightarrow{AM}\| = 2$.

   (Γ) est le cercle de centre $A(1;-1)$ et de rayon 2.

2) Déterminons l'ensemble (D) des points M d'affixe z tels que $|z+2+3i| = |z+1-2i|$.

   $|z+2+3i| = |z+1-2i|$ équivaut à $|z-(-2-3i)| = |z-(-1+2i)|$;

   Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = -2-3i$ et $z_B = -1+2i$.

   $|z-(-2-3i)| = |z-(-1+2i)|$ équivaut à $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BM}\|$.

   $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BM}\|$ signifie que M appartient à la médiatrice de $[AB]$.

   (D) est donc la médiatrice du segment $[AB]$.

EXEMPLE 2

1) Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z\overline{z}+i\left(z-\overline{z}\right)-3=0$.

Posons : $z=x+iy$

On a $z\times\overline{z}=x^2+y^2$ et $z-\overline{z}=x+iy-x+iy=2iy$.

$z\overline{z}+i\left(z-\overline{z}\right)-3=0$ équivaut à $x^2+y^2-2y-3=0$.

$(x)^2+(y-1)^2=4$ est une équation cartésienne de l'ensemble cherché. C'est le cercle de centre $\Omega\ (0;1)$ et de rayon 2.

2) Déterminons l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\dfrac{2z-1}{z^2}$ soit réel.

$\dfrac{2z-1}{z^2}$ est réel si et seulement si $\dfrac{2z-1}{z^2}=\overline{\dfrac{2z-1}{z^2}}$.

On a : $\overline{z}^2(2z-1)=z^2(2\overline{z}-1)$; $2z\overline{z}^2-\overline{z}^2=2z^2\overline{z}-z^2$;

$2z\overline{z}(\overline{z}-z)=(\overline{z}-z)(\overline{z}+z)$; $(\overline{z}-z)\left(2\overline{z}z-(z+\overline{z})\right)=0$;

$z=\overline{z}$ ou $2\overline{z}z-(z+\overline{z})=0$.

Posons : $z=x+iy$

On a : $z\in\mathbb{R}$ ou $2(x^2+y^2)-2x=0$; $z\in\mathbb{R}$ ou $x^2+y^2-x=0$; $z\in\mathbb{R}$ ou $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$.

L'ensemble cherché est la réunion de l'axe réel et du cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$ privé du point O.

3) Déterminons l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que : $\left|\dfrac{z+i}{z-i}\right|=3$.

Considérons $A(-i)$; $B(i)$.

L'ensemble cherché est l'ensemble des points M du plan tels que : $\dfrac{MA}{MB}=3$.

$\dfrac{MA}{MB}=3$ est équivalent successivement à $MA^2-9MB^2=0$;

$\left(\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right)\text{C}\left(\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right)=0$.

Soit $G=bar$

A	B
1	−3

et $H=bar$

A	B
1	3

On a : $-2\overrightarrow{MG}\,\text{C}4\overrightarrow{MH}=0$; soit $\overrightarrow{MG}\,\text{C}\overrightarrow{MH}=0$

L'ensemble cherché est le cercle de diamètre $[GH]$.

$$Z_G=\frac{-3(i)+(-i)}{-2}=\frac{-4i}{-2}=2i$$

$$Z\ =\frac{Z_A\quad Z_B}{4}=\frac{-i+3i}{4}=\frac{1i}{2}=\frac{1}{2}i$$

Soit I le centre de ce cercle : $z_I = \dfrac{2i+\frac{1}{2}i}{2} = \dfrac{5}{4}i$.

Le rayon de ce cercle est $\dfrac{GH}{2} = \dfrac{|Z_H - Z_G|}{2} = \dfrac{\left|2i-\frac{1}{2}i\right|}{2} = \dfrac{3}{4}$.

Exercice Résolu

1) Déterminons l'ensemble (E) des points M du plan d'affixe z tels que le nombre complexe $\dfrac{2z-4}{z-i}$ soit un réel.

1ère méthode :

$\dfrac{2z-4}{z-i}$ est défini si $z \neq i$. Ainsi le point $A(0;1)$ ne peut pas appartenir à l'ensemble (E).

Posons $z = x+iy$.

$$\frac{2z-4}{z-i} = \frac{2(x+iy)-4}{x+iy-i} = \frac{(2x-4)+2iy}{x+(y-1)i} = \frac{[(2x-4)+2iy][x-(y-1)i]}{[x+(y-1)i][x-(y-1)i]}$$

$$\frac{2z-4}{z-i} = \frac{(2x^2-4x+2y^2-2y)}{x^2+(y-1)^2} + i\frac{2x+4y-4}{x^2+(y-1)^2}.$$

$\dfrac{2z-4}{z-i}$ est un réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.

C'est-à-dire $\dfrac{2x+4y-4}{x^2+(y-1)^2} = 0$; soit $2x+4y-4=0 \, avec (x;y) \neq (0;1)$.

(E) est la droite d'équation $x+2y-2=0$ privée du point $A(0;1)$.

2ème méthode

Posons $Z = \dfrac{2z-4}{z-i}$.

Z est un réel si et seulement si $Z = \overline{Z}$.

Or $Z = \overline{Z}$ si et seulement si $\dfrac{2z-4}{z-i} = \dfrac{2\overline{z}-4}{\overline{z}+i}$, soit successivement, avec $z \neq i$.

$(2z-4)(\overline{z}+i) = (z-i)(2\overline{z}-4)$;

$2z\overline{z} + 2iz - 4\overline{z} - 4i = 2z\overline{z} - 4z - 2i\overline{z} + 4i$;

$2i(z+\overline{z}) + 4(z-\overline{z}) = 8i$;

$4iR_e(z) + 4(2i\mathcal{I}m(z)) = 8i$;

$R_e(z) + 2\mathcal{I}m(z) = 2$;

Si $=x+iy$, alors $x+2y=2$.

(E) est la droite d'équation $x+2y=2$ privée du point $A(0;1)$.

2) Déterminons l'ensemble (F) des points M du plan d'affixe z tels que le nombre complexe $\frac{2z-4}{z-i}$ soit un imaginaire pur.

1ère méthode

$\frac{2z-4}{z-i}$ soit un imaginaire pur si et seulement si $\frac{(2x^2-4x+2y^2-2y)}{x^2+(y-1)^2}=0$.

$\frac{(2x^2-4x+2y^2-2y)}{x^2+(y-1)^2}=0$ équivaut à $\begin{cases} 2x^2-4x+2y^2-2y=0 \\ x^2+(y-1)^2\neq 0 \end{cases}$.

$2x^2-4x+2y^2-2y=0$ équivaut à $x^2-2x+y^2-y=0$

$x^2-2x+y^2-y=0$ équivaut à $(x-1)^2-1+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0$.

$(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$. Cette équation est l'équation du cercle de centre le point $B\left(1;\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(F) est le cercle de centre $B\left(1;\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point $A(0;1)$.

2ème méthode :

Z est un imaginaire pur si et seulement si $Z=-\overline{Z}$.

Or $Z=-\overline{Z}$ si et seulement si $\frac{2z-4}{z-i}=-\frac{2\overline{z}-4}{\overline{z}+i}$, soit successivement, avec $z\neq i$.

$(2z-4)(\overline{z}+i)=-(z-i)(2\overline{z}-4)$

$2z\overline{z}+i(z-\overline{z})-2(z+\overline{z})=0.$

En posant $z=x+iy$.

$2z\overline{z}+i(z-\overline{z})-2(z+\overline{z})=0$ est équivalent à $2(x^2+y^2)+i(2iy)-2(2x)=0$;

$x^2+y^2-y-2x=0$. On retrouve l'équation du cercle de la première méthode.

(F) est le cercle de centre $B\left(1;\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point $A(0;1)$.

S'exercer

1.h Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, on associe au point M d'affixe $z = x + iy$ le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que $z' = \dfrac{z + 2i}{z - 2}$.

1) Déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit un réel.
2) Déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit un imaginaire pur.

1.i À tout nombre complexe z, on associe le nombre complexe $z' = (1+i)z + 2$.

On désigne par M le point d'affixe z et M' d'affixe de z'.

i. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que O soit situé sur la médiatrice du segment $[MM']$.
ii. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = 0$.

1.j Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|3z - 9 - 3i| = |\overline{z} + 1 - i|$.

1.k À tout nombre complexe z distinct de $-1 + 2i$, on associe le nombre complexe $z' = \dfrac{z-2+}{z+1-2}$

Déterminer les ensembles des points M d'affixes z vérifiant la condition exigée dans chac des cas suivants :

a) z' est un nombre réel ;
b) z' est un nombre imaginaire pur ;
c) $|z'| = 1$;
d) $|z'| = 2$.

1.l Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants :

a) $|z - 1 + 2i| = 3$; b) $|z - 4| = |z + 2i|$; c) $|z - 5 + 3i| = |z - 4i|$; d) $|\overline{z} + 5 - i| = |z - 4i|$.

1.m Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $|z + z'| = |z| + |z'|$.

LEÇON 2 ÉCRITURES TRIGONOMÉTRIQUES ET ÉCRITURES EXPONENTIELLES D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL.

- Déterminer et interpréter graphiquement un argument d'un nombre complexe non nul ;
- Déterminer des arguments du conjugué et de l'opposé d'un nombre complexe non nul ;
- Déterminer des arguments d'un produit et d'un quotient de deux nombres complexes non nuls ;
- Montrer que :
  - trois points sont alignés ;
  - deux droites sont parallèles ;
  - deux droites sont perpendiculaires ;
  - quatre points sont cocycliques.
- Écrire sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle d'un nombre complexe non nul ;
- Utiliser la formule de Moivre et les formules d'Euler pour faire des linéarisations et des développements.

2.1. ARGUMENT ET FORME TRIGONOMÉTRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

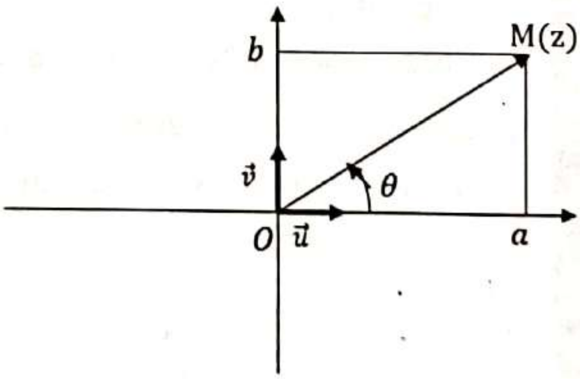
2.1.1 PRÉSENTATION

Prendre un bon départ

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soit M un point du plan d'affixe z non nul et de coordonnées $(a;b)$; M' le point d'affixe $\frac{z}{|z|}$.

Soit θ une mesure de l'angle $\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}}\right)$.



1) Montrer que M' est situé sur le cercle trigonométrique et est le point d'image du réel θ.

2) En déduire que $\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Retenir

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Soit M un point du plan d'affixe non nul z.

- Une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}})$ est appelée argument du nombre complexe z et noté arg(z).
- Le nombre complexe z peut s'écrire $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$. Cette écriture est la forme trigonométrique du nombre complexe z.
- La mesure principale de $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}})$ est l'argument de z et est noté Arg(z)

REMARQUE 1

1) Si θ est un argument d'un nombre complexe non nul z, tout autre argument de z est de la forme $\theta+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

   En effet $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)=|z|(\cos(\theta+2k\pi)+i\sin(\theta+2k\pi))$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

2) Lien entre la forme trigonométrique et la forme algébrique.

   Soit $z=a+ib$ la forme algébrique d'un nombre complexe non nul et $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ sa forme trigonométrique.
   $a=R_e(z)=|z|cos\theta$ et $b=Im(z)=|z|sin\theta$.

   On a donc $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$; $\cos\theta=\dfrac{a}{|z|}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin\theta=\dfrac{b}{|z|}=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

3) Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même module et des arguments qui diffèrent d'un multiple de 2π.

REMARQUE 2

1) Un nombre complexe z est un réel si et seulement si $z=0$ ou $\arg z=k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$.
2) Soit z un nombre complexe non nul. z est un imaginaire pur si et seulement si $\arg z=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
3) $\arg\overline{z}=-\arg z+2k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$.
4) $\arg(-z)=\pi+\arg z+2k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$.
5) Soient M et M' deux points d'affixes respectives z et z'.
   L'affixe de $\overrightarrow{MM'}$ est le nombre complexe $z'-z$. Donc un argument de $z'-z$ est une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{MM'}})$.
6) Deux nombres complexes $\rho(cos\theta+isin\theta)$ et $\rho'(cos\theta'+isin\theta')$ sont égaux si et seulement si $(\rho=\rho'$ et $\theta\equiv\theta'[2\pi])$, c'est-à-dire $(\rho=\rho'$ et $\theta=\theta'+2k\pi,k\in\mathbb{Z})$.

NOTATION

Si $|z| = \rho$, $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ se note $[\rho;\theta]$ où ρ et θ désignent respectivement le module et un argument du nombre complexe z .

EXEMPLE

1) Posons $z_1 = 2-2i$ *et* $z_2 = 1-i\sqrt{3}$;

$|z_1| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $|z_2| = \sqrt{1+3} = 2$

$$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{2\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right);$$

$$z_1 = \left[2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right].$$

$$z_2 = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left[2, -\frac{\pi}{3}\right].$$

2) α est un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$.

Posons $z_1 = 1 + i\tan\alpha$ et $z_2 = 1 - i\tan\alpha$.

$z_1 = 1 + i\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$; comme $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[$, $\cos\alpha > 0$ et $z_1 = \left[\dfrac{1}{\cos\alpha};\alpha\right]$.

$z_2 = 1 - i\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha - i\sin\alpha) = \dfrac{1}{\cos\alpha}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$ et $Z_2 = \left[\dfrac{1}{\cos\alpha};-\alpha\right]$.

3) Prenons $z = \left[2\sqrt{3}; -\frac{\pi}{3}\right]$.

$$z = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - 3i.$$

4) $[1;\pi] = \cos\pi + i\sin\pi = -1$ et $\left[1;\frac{\pi}{2}\right] = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$.

Exercice Résolu

Déterminons en fonction de $0 \le \alpha < 2\pi (\alpha \ne \pi)$, le module et un argument du nombre complexe $z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$.

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$; soit $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$.

Par suite $1 + \cos\alpha = 1 + \cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

D'autre part, $\sin\alpha = \sin 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

$$z = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

Remarque : Pour que cette forme soit la forme trigonométrique de z il faut que $2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)>$ **car le module d'un nombre complexe est toujours positif.**

1^er^ cas : Pour $0 \leq \alpha < \pi, 0 \leq \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ et $2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$, par suite :

$$|z| = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) ; \arg z = \frac{\alpha}{2} + 2k\pi \text{, avec } k \in \mathbb{Z}.\ z = \left[2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) ; \frac{\alpha}{2}\right].$$

2^ème^ cas : Pour $\pi < \alpha < 2\pi, \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$ et $2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 0$,

$$z = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] = -2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[-\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

$z = -2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right)\right]$ avec $-2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$. Par suite,

$$|z| = -2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) ; \arg z = \pi + \frac{\alpha}{2} + 2k\pi \text{, avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et } z = \left[-2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) ; \pi + \frac{\alpha}{2}\right].$$

S'exercer

2.a Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

a) 8 ; b) -8 ; c) $-4\sqrt{3} - 12i$; d) $6 + i\sqrt{12}$.

2.b Écrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

a) $\left[1 ; \frac{\pi}{4}\right]$; b) $\left[2 ; \frac{2\pi}{3}\right]$; c) $\left[\sqrt{3} ; \frac{7\pi}{6}\right]$; d) $\left[1 ; -\frac{\pi}{4}\right]$.

2.c Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

a) $\cos\alpha - i\sin\alpha$; b) $-\sin\alpha + i\cos\alpha$; c) $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$ où $\alpha \in [0, \pi]$

2.d Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $2 + 2i$; $2 - 2i$ et $2 + 2i\sqrt{3}$.

1) Écrire chacun des nombres complexes précédents sous forme trigonométrique.

2) Représenter avec précision les points A, B et C dans ce plan complexe.

2.e z est un nombre complexe d'argument α.

Exprimer en fonction de α un argument de chacun des nombres complexes suivants : $\overline{z}$; $-z$ et $-\overline{z}$.

2.2.2 ARGUMENT D'UN PRODUIT ET D'UN QUOTIENT

Prendre un bon départ

Soient $z=r(cos\theta+isin)$ et $z'=r'(cos\theta'+isin\theta')$.

1) Montrer que $zz'=rr'\left[cos(\theta+\theta')+isin(\theta+\theta')\right]$;

2) Montrer que $\frac{z}{z'}=\frac{r}{r'}\left[cos(\theta-\theta')+isin(\theta-\theta')\right]$.

3) Montrer par récurrence sur n que quels que soient le réel θ et l'entier naturel n,

$(cos\theta+isin\theta)^n=cos(n\theta)+isin(n\theta)$.

Retenir

Soient $z=[r,\theta]$ et $z'=[r',\theta']$ et deux nombres complexes non nuls.

- $zz'=[r,\theta]\times[r',\theta']=[rr',\theta+\theta']$;
- $\frac{z}{z'}=\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']}=\left[\frac{r}{r'},\theta-\theta'\right]$;
- Pour tout entier n et pour tout nombre réel θ ,

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$. **Cette formule est dite de Moivre.**

NOTATION

Le nombre complexe de module 1 dont un argument est θ, est noté $e^{i\theta}$.

Le nombre complexe de module r dont un argument est θ, est noté $re^{i\theta}$.

L'écriture $re^{i\theta}$ est une forme exponentielle du complexe $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ou $r>0$.

Conséquences :

- Pour tous réels θ et θ':

  $[\rho;\theta]=\rho e^{i\theta}$; $[\rho;-\theta]=\rho e^{-i\theta}$; $e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$.

- $e^{i\pi}=-1$;$e^{i\frac{\pi}{2}}=i$;$e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$;$e^{i0}=e^{2i\pi}=1$.
- Pour tout entier naturel $n,(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$.

EXEMPLE

1) Soit $z=[r,\theta]=re^{i\theta}$; $1=[1,0]$. $\frac{1}{z}=\frac{[1,0]}{[r,\theta]}=\left[\frac{1}{r},0-\theta\right]=\left[\frac{1}{r},-\theta\right]=\frac{1}{r}e^{i(-\theta)}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$.

2) $-1=e^{i\pi}$, $-z=-1\times z=e^{i\pi}\times e^{i\theta}=e^{i(\pi+\theta)}$.

3) $1+i=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$; $-1+i\sqrt{3}=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(cos\frac{2\pi}{3}+isin\frac{2\pi}{3}\right)=2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$.

$(1+i)\left(-1+i\sqrt{3}\right)=-1-\sqrt{3}+i\left(-1+\sqrt{3}\right)$.

$(1+i)\left(-1+i\sqrt{3}\right)=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\times 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}=2\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}=2\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}$.

$-1-\sqrt{3}+i\left(-1+\sqrt{3}\right)=2\sqrt{2}\left(cos\frac{11\pi}{12}+isin\frac{11\pi}{12}\right)$.

On en déduit que : $\begin{cases}2\sqrt{2}\cos\frac{11\pi}{12}=-1-\sqrt{3}\\ 2\sqrt{2}\sin\frac{11\pi}{12}=-1+\sqrt{3}\end{cases}$; d'où $cos\frac{11\pi}{12}=\frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $sin\frac{11\pi}{12}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

soit $\cos\frac{11\pi}{12}=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ *et* $\sin\frac{11\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice Résolu 1

Soit le nombre complexe $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) Mettre z sous la forme exponentielle.
2) Donner la forme algébrique de chacun des nombres complexes z^2, z^3.
3) Soit p un entier naturel, donner la forme algébrique de chacun des nombres complexes z^{3p}, z^{3p+1} *et* z^{3p+2}.
4) En déduire la forme algébrique de chacun des nombres complexes z^{2012}, z^{2013} *et* z^{2014}.

Solution

1) $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $|z|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$.

Soit θ un argument de z. $cos\theta=-\frac{1}{2}$, $sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $\theta=\frac{2\pi}{3}$, $z=e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$.

2) $z^2=\left(e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\right)^2=e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}=cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+isin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+isin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$z^2=-cos\frac{\pi}{3}-isin\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z^3=\left(e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\right)^3=e^{i\left(3\times\frac{2\pi}{3}\right)}=e^{i(2\pi)}=cos2\pi+isin2\pi=1$.

3) p étant un entier naturel,

$z^{3p} = 1^p = 1$; $z^{3p+1} = z^{3p} \times z = z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z^{3p+2} = z^{3p} \times z^2 = z^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4) $2012 = 3\times370+2$; $2013 = 3\times671$; $2014 = 3\times671+1$.

La question 3 permet d'écrire : $z^{2012} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z^{2013} = 1$ et $z^{2014} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice Résolu 2

Soient A, B et C trois points distincts du plan d'affixes respectives a, b et c.

Soit le nombre complexe $z = \frac{c-a}{c-b}$.

1) Donner les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2) Donner le module de z en fonction de AC et BC.
3) Montrer qu'un argument de z est une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}}\right)$ ou $\left(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}\right)$.

Solution :

1) L'affixe de $\overrightarrow{AC}$ est $c-a$ et celle de $\overrightarrow{BC}$ est $b-c$.

2) $|z| = \left|\frac{c-a}{c-b}\right| = \frac{|c-a|}{|c-b|} = \frac{AC}{BC}$.

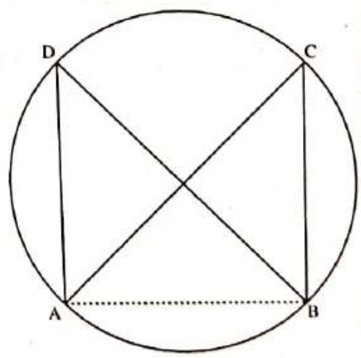
3) $\arg z = \arg(c-a) - \arg(b-c) = mes\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AC}}\right) - mes\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{BC}}\right)$

$\arg z = mes\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \vec{u}}\right) + mes\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AC}}\right) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}}\right)$.

REMARQUE

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$ sont les affixes respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. a, b, c et d sont les affixes respectives des points A, B, C et D .

- $mes\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \arg \frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}$;
- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{c-a}{b-c}$ est réel non nul.
- Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\frac{c-a}{b-a}$ est un imaginaire pur.
- Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} = i$ ou $\frac{c-a}{b-a} = -i$.



- Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{c-a}{b-a} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
- Les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si $\frac{c-b}{c-a} : \frac{d-b}{d-a} \in \mathbb{R}^*$

EXEMPLE

1) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$
On considère les points A, B, C d'affixes respectives $a=1-i$; $b=3+2i$; $c=4-i$ et $d=2-5i$.

Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux

$$\frac{d-c}{b-a}=\frac{2-5i+4+i}{3-2i-1+i}=\frac{6-4i}{2+3i}=\frac{(6-4i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=-\frac{26i}{13}=-2i.$$

$\frac{d-c}{b-a}=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$. $arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)=-\frac{\pi}{2}$; donc $mes\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=-\frac{\pi}{2}$ et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a=2-2i$; $b=2i$; $c=-1+i$ et $d=-1-i$.
Montrons que les points A, B, C et D sont cocycliques.

$$\frac{c-b}{c-a}:\frac{d-b}{d-a}=\left(\frac{-1+i-2i}{-1+i-2+2i}\right):\left(\frac{-1-i-2i}{-1-i-2+2i}\right)=\frac{-1-i}{-3+3i}\times\frac{-1-3i}{-3+i}$$

$$=\frac{-1-i}{-3+3i}\times\frac{-3+i}{-1-3i}=\frac{1+i}{3-3i}\times\frac{3-i}{1+3i}=\frac{4+2i}{12+6i}$$

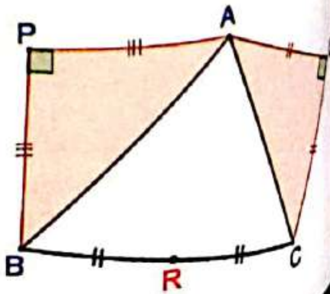
$$=\frac{2+i}{6+3i}=\frac{1}{3} \text{ et } \frac{1}{3}\in\mathbb{R}^*.$$

$\frac{c-b}{c-a}:\frac{d-b}{d-a}\in\mathbb{R}^*$. Donc $mes\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)=mes\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right)\,[\pi]$ et les points A, B, C et D sont cocycliques.

3) a est un nombre complexe non nul et $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
Montrons que les points $A(a)$; $B(ja)$ et $C(j^2a)$ sont les sommets d'un triangle équilatéral. On pose $b=ja$ et $c=j^2a$

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{j^2a-a}{ja-a}=\frac{j^2-1}{j-1}=j+1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

- Le triangle ABC étant donné, on construit les points P et Q tels que les triangles APB et ACQ soient isocèles et rectangles directs de sommets respectifs P et Q. On désigne par R le milieu du segment $[BC]$.



Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.

Démontrer que (PR) et (QR) sont orthogonaux et de meme longueur.

On a $\dfrac{Z_C - Z_Q}{Z_A - Z_Q} = i$ et $\dfrac{Z_A - Z_P}{Z_B - Z_P} = i$ et $Z_R = \dfrac{Z_B + Z_C}{2}$.

$\dfrac{Z_C - Z_Q}{Z_A - Z_Q} = i$ entraine $Z_C - Z_Q = i\left(Z_A - Z_Q\right)$; d'où $Z_Q = \dfrac{Z_A + Z_C}{2} + i\dfrac{Z_C - Z_A}{2}$.

$\dfrac{Z_A - Z_P}{Z_B - Z_P} = i$ entraine $Z_P = \dfrac{Z_A + Z_B + i\left(Z_A - Z_B\right)}{2}$.

$$Z_P - Z_R = \frac{Z_A + Z_B + i\left(Z_A - Z_B\right)}{2} - \frac{Z_B + Z_C}{2} = \frac{Z_A - Z_C + i\left(Z_A - Z_B\right)}{2}$$

$$Z_Q - Z_R = \frac{Z_A + Z_B + i\left(Z_C - Z_A\right)}{2} - \frac{Z_B + Z_C}{2} = \frac{Z_A - Z_B + i\left(Z_C - Z_A\right)}{2} ;$$

$$Z_P - Z_R = i\left[\frac{\left(Z_A - Z_B\right) - i\left(Z_A - Z_c\right)}{2}\right] = i\left[\frac{\left(Z_A - Z_B\right) + i\left(Z_C - Z_A\right)}{2}\right] ;$$

$Z_P - Z_R = i\left[Z_Q - Z_R\right]$ donc $\dfrac{Z_P - Z_R}{Z_Q - Z_R} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$;

$arg\dfrac{Z_P - Z_R}{Z_Q - Z_R} = \dfrac{\pi}{2}$ donc $mes\left(\widehat{\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RP}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ et $(RQ) \perp (RP)$ et $\dfrac{PR}{QR} = 1$.

4) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que le nombre complexe z défini par $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z$ soit imaginaire pur.

z imaginaire pur si et seulement si $argz' = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ $(z' \neq 0)$ or $z' \neq 0$ si $z \neq 0$

Pour $z \neq 0$ posons $z = re^{-i\alpha}$; $z' = re^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)} e^{i\alpha} = re^{i\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}$

$argz' = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ si et seulement si $\alpha + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$

D'où $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}[\pi]$; $mes\left(\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

Le point M est situé sur la droite passant par O et de coefficient directeur $tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ privée du point O.

S'exercer

2.f a) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes :

$z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.

b) Donner un argument et le module du nombre complexe $z=\dfrac{z_1}{z_2}$.

c) Déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

2.g a) Donner la forme exponentielle et la forme cartésienne de chacun des nombres complexes $\left(1+i\sqrt{3}\right)^5$ et de $\left(1-i\sqrt{3}\right)^5$.

b) Donner la forme cartésienne de chacun des nombres complexes

$$u=\left(1+i\sqrt{3}\right)^5+\left(1-i\sqrt{3}\right)^5 \text{ et } v=\left(1+i\sqrt{3}\right)^5-\left(1-i\sqrt{3}\right)^5 .$$

2.h Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\dfrac{iz}{e^{i\frac{\pi}{6}}}$ soit réel.

2.i Écrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes suivants :

a) $\left(\sqrt{3}+i\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)$; b) $(1+i)^4$; c) $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$; d) $\left(\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^{10}$.

2.g Écrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes suivants :

a) $-2ie^{-i\frac{\pi}{4}}$; b) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}e^{-i\frac{\pi}{4}}$; c) $\dfrac{10e^{-i\frac{\pi}{4}}}{5-5i}$; d) $\dfrac{2e^{-i\frac{2\pi}{8}}}{1-i\sqrt{3}}$.

2.k On donne : $z=\left(1+i\sqrt{3}\right)(1+i)$.

1) Écrire z sous forme algébrique.

2) Écrire $1+i$ et $1+i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique.

3) Déterminer les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

2.l Représenter dans le plan complexe les points M d'affixe z tels que $|z|=2$ et $\arg(z+1)=\frac{\pi}{4}[\pi]$

2.m Déterminer et construire l'ensemble les points M d'affixe z vérifiant la condition exigée :

i. $\arg(i-z)=0[\pi]$; ii. $\arg(z+1-i)=\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$; iii. $\arg\dfrac{1}{z+1}=\dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

2.2. TRIGONOMÉTRIE ET NOMBRES COMPLEXES.

Prendre un bon départ

n est un entier relatif.

On rappelle que $e^{i\alpha} = cos\,\alpha + isin\,\alpha$ et $e^{-i\alpha} = cos\,\alpha - isin\,\alpha$

Pour tout entier naturel n, $e^{in\alpha} = cos\,n\alpha + isin\,n\alpha$; $e^{-in\alpha} = cos\,n\alpha - isin\,n\alpha$

a) Exprimer $cos\,\alpha\,et\,sin\,\alpha$ en fonction de $e^{i\alpha}$ et de $e^{-i\alpha}$.

b) Calculer $e^{in\alpha} + e^{-in\alpha}$; $e^{in\alpha} - e^{-in\alpha}$; $e^{in\alpha} \times e^{-in\alpha}$.

Retenir

- Pour tout nombre réel a, $\cos\alpha = \dfrac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$ et $\sin\alpha = \dfrac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$.

  Ces deux formules sont les formules d'Euler.
- Pour tout nombre réel α et pout tout entier naturel n,
  - $e^{in\alpha} + e^{-in\alpha} = 2\cos(n\alpha)$; $e^{in\alpha} - e^{-in\alpha} = 2i\sin(n\alpha)$.
  - $e^{in\alpha}e^{-in\alpha} = 1$.

EXEMPLE

1) Exprimons $cos4x$ en fonction de $cosx$

$cos4x + isin4x = (cosx + isinx)^4$. Posons $A = (cosx + isinx)^4$

$A = (cosx)^4 + 4icos^3xsinx + 6cos^2x(isinx)^2 + 4cosx(isinx)^3 + (isinx)^4$;

$A = (cos^4x - 6cos^2xsin^2x + sin^4x) + i(4cos^3xsinx - 4cosxsin^3x)$.

D'où $cos4x = cos^4x - 6cos^2xsin^2x + sin^4x$ et

$sin4x = 4cos^3xsinx - 4cosxsin^3x$.

$cos4x = cos^4x - 6cos^2x(1-cos^2x) + (1-cos^2x)^2$

$\cos 4x = cos^4x - 6cos^2x + 6cos^4x + 1 - 2cos^2x + cos^4x$:

$cos4x = 8cos^4x - 8cos^2x + 1$.

2) Linéarisons :

a) On rappelle que $\cos a = \left(\frac{1}{2}\right)\left(e^{ia} + e^{-ia}\right)$.

$$\cos a \cos b = \left(\frac{1}{2}\right)\left(e^{ia} + e^{-ia}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)\left(e^{ib} + e^{-ib}\right)$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{4}\left[e^{ia}e^{ib} + e^{ia}e^{-ib} + e^{-ia}e^{ib} + e^{-ia}e^{-ib}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}\right) + \left(e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)}\right)\right]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right].$$

b) $$\sin a \sin b = \left(\frac{1}{2i}\right)\left(e^{ia} - e^{-ia}\right)\times\left(\frac{1}{2i}\right)\left(e^{ib} - e^{-ib}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left[e^{ia}e^{ib} - e^{ia}e^{-ib} - e^{-ia}e^{ib} + e^{-ia}e^{-ib}\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\left(e^{i(a+b)} - e^{-i(a-b)}\right) - \left(e^{i(a-b)} + e^{-i(a+b)}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\left(e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}\right) - \left(e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\left[2\cos(a+b) - 2\cos(a-b)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right].$$

c) $$\sin a \cos b = \left(\frac{1}{2i}\right)\left(e^{ia} - e^{-ia}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(e^{ib} + e^{-ib}\right)$$

$$= \frac{1}{4i}\left(e^{ia} - e^{-ia}\right)\left(e^{ib} + e^{-ib}\right)$$

$$= \frac{1}{4i}\left[e^{ia}e^{ib} + e^{ia}e^{-ib} - e^{-ia}e^{ib} - e^{-ia}e^{-ib}\right]$$

$$= \frac{1}{4i}\left[\left(e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}\right) + \left(e^{i(a-b)} - e^{-i(a-b)}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4i}\left[2i\sin(a+b) + 2i\sin(a-b)\right].$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right].$$

d) Linéarisons $\cos^5 x$ et $\sin^5 x$.

$$\cos^5 x = \frac{1}{2^5}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^5$$

$$=\frac{1}{2^5}\left[e^{5ix}+5e^{4ix}e^{-ix}+10e^{3ix}e^{-2ix}+10e^{2ix}e^{-3ix}+5e^{ix}e^{-4ix}+e^{-5ix}\right]$$

$$=\frac{1}{2^5}\left[e^{5ix}+5e^{3ix}+10e^{ix}+10e^{-ix}+5e^{-3ix}+e^{-5ix}\right]$$

$$=\frac{1}{2^5}\left[\left(e^{5ix}+e^{-5ix}\right)+5\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)+10\left(e^{ix}+e^{ix}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2^5}\left(2cos5x+10cos3x+20cosx\right)$$

$$cos^5x=\frac{1}{16}\left(cos5x+5cos3x+10cosx\right).$$

e) $sin^5x=\frac{1}{2^5}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^5$

$$=\frac{1}{(2i)^5}\left[e^{5ix}-5e^{4ix}e^{-ix}+10e^{3ix}e^{-2ix}-10e^{2ix}e^{-3ix}+5e^{ix}e^{-4ix}-e^{-5ix}\right]$$

$$=\frac{1}{(2i)^5}\left[e^{5ix}-5e^{3ix}+10e^{ix}-10e^{-ix}+5e^{-3ix}-e^{-5ix}\right]$$

$$=\frac{1}{(2i)^5}\left[\left(e^{5ix}-e^{-5ix}\right)-5\left(e^{3ix}-e^{-3ix}\right)+10\left(e^{ix}-e^{ix}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{(2i)^5}\left[\left(2isin5x\right)-5\left(2isin3x\right)+10\left(2isinx\right)\right]$$

$$sin^5x=\frac{1}{16}\left[sin5x-5sin3x+10sinx\right].$$

S'exercer

2.o À l'aide de la formule de Moivre, justifier que le nombre $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{2001}$ est un nombre réel.

2.p Calculer les valeurs exactes des produits

$$cos\frac{\pi}{8}cos\frac{3\pi}{8}\ ;\ sin\frac{\pi}{8}sin\frac{3\pi}{8}\ ;\ sin\frac{\pi}{8}cos\frac{3\pi}{8}\ .$$

2.q On pose : $j=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$

a)Vérifier que $1+j+j^2=0$;

b)Écrire sous forme algébrique $\left(1+j\right)^{1995}$ et $\left(1+j^2\right)^{1995}$.

2.r Linéariser :

a) $cos^3x\,sin^3x$; b) $\sin^5 x$; c) $cos\ x$; d) $\sin^4 2t$.

2.3. RACINES n-ièmes D'UN NOMBRE COMPLEXE

2.3.1 Racines n-ièmes de l'unité.

Prendre un bon départ

1) a) Déterminer les nombres complexes z tels que $z^3 = 1$.

   b) Écrire ces nombres sous les formes trigonométrique et exponentielle, puis placer dans un repère orthonormé direct les images A, B, C de ces nombres.

   c) Quelle est la nature du triangle ABC ?

2) Soit z un nombre complexe tel que $z = \rho e^{i\theta}$ ou $\rho > 0$.

   a) Donner la forme trigonométrique z^n.

   b) Déduire que si $z^n = 1$ alors $|z| = 1 et z$ a pour argument $2\dfrac{k\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

   c) Expliquer pourquoi il y a exactement n nombres complexes z tels que $z^n = 1$ qui sont $w_k = e^{2i\frac{k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0;1;2;\ldots;n-1\}$.

Retenir

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- Tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$ est appelée racine n-ième de l'unité.
- Les racines $n-ièmes$ de l'unité sont les nombres complexes $w_k = e^{2i\frac{k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0;1;2;\ldots;n-1\}$ ou k prenant n valeurs consécutives.
- Si $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, les n racines n-ièmes de l'unité sont $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$.
- La somme des n racines n-ièmes de l'unité est nulle.
  $\omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1} = 0$.

S'exercer

3.m Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les équations suivantes :

i. $z^4 = 1$; $\left(\dfrac{Z-i}{Z+i}\right)^4 = 1$.

2.3.2 Racines n-ième d'un nombre complexe non nul.

Prendre un bon départ

On considère les nombres complexes $Z = re^{i\alpha}$ *et* $z = \rho e^{i\theta}$ avec $r > 0; p > 0$ et $(\alpha;\theta) \in \mathbb{R}^2$.

1) On suppose $z^n = Z$.
   a) Utiliser l'égalité de deux nombres complexes écrits sous la forme trigonométrique pour trouver une relation entre ρ^n *et* r, puis entre $n\theta$ et α.
   b) En déduire que $\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}, avec\, k \in Z \end{cases}$.
   c) Montrer qu'il y a exactement n nombres complexes *tels que* $z^n = Z$.

Retenir

Tout nombre complexe z = $re^{i\alpha}$ admet n racines n-ièmes distinctes qui sont les nombres $z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ *où* $k \in \{0;1;2;\ldots;n-1\}$.

REMARQUE

Les n racines n-ièmes d'un nombre complexe ayant tous le même module, et des arguments qui diffèrent de $\dfrac{2k\pi}{n}$, leurs images dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct sont les n sommets d'un polygone régulier de centre 0.

EXEMPLE

1) Déterminons les racines carrées de $1+i\sqrt{3}$.

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Soit $z = re^{i\alpha}$ où $r > 0$ et α un réel.

z est une racine carrée de $1+i\sqrt{3}$ si et seulement si $\left(re^{i\alpha}\right)^2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$r^2e^{2i\alpha} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ équivaut à $\begin{cases} r^2 = 2 \\ 2\alpha = \dfrac{\pi}{3}+2k\pi\ , k \in Z \end{cases}$; $\begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \alpha = \dfrac{\pi}{6}+k\pi\ , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Les racines carrées de $1+i\sqrt{3}$ sont les nombres complexes $z_k = \sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)}$ avec $k \in \{0;1\}$.

$$z_0 = \sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

2) Déterminons les racines cubiques du nombre complexe $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

$1+i\sqrt{3} = \left[2;\frac{\pi}{3}\right]$ et $1-i\sqrt{3} = \left[2;-\frac{\pi}{3}\right]$; d'où $z = \dfrac{\left[2;\frac{\pi}{3}\right]}{\left[2;-\frac{\pi}{3}\right]} = \left[\frac{2}{2};\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right] = \left[1;\frac{2\pi}{3}\right]$.

Déterminons les nombres complexes $z = [r;\theta]$ *tels* que $z^3 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

$z^3 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ équivaut à $\left[r^3;3\theta\right] = \left[1;\frac{2\pi}{3}\right]$; c'est-à-dire $\begin{cases} r = 1 \\ 3\theta = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z \end{cases}$;

$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3}, k \in Z \end{cases}$.

Les racines cubiques de z sont les nombres complexes $z_k = \left[1;\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right]$, $k \in \{0;1;2\}$. Ce sont donc les nombres complexes :

$z_0 = \left[1;\frac{2\pi}{9}\right], z_1 = \left[1;\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}\right] = \left[1;\frac{8\pi}{9}\right], z_2 = \left[1;\frac{2\pi}{9}+\frac{4\pi}{3}\right] = \left[1;\frac{14\pi}{9}\right]$.

3) Recherchons les racines n-ièmes d'un nombre complexe Z.

Si z_k est l'une d'entre elles, on a $z_k \neq 0$ et $z_k^n = Z$.

$z^n = Z$ équivaut à ($z^n = z_k{}^n$) ; soit $\left(\dfrac{z}{z_k}\right)^n = 1$.

Autrement dit $\dfrac{z}{z_k}$ est une racine n-ième de l'unité.

Par conséquent les racines n-ièmes de z s'obtiennent en faisant les produits de l'une d'entre elles par les n racines n-ième de 1.

Exemple : Cherchons à résoudre $z^4 = (1+3i)^4$. $z^4 = (1+3i)^4$ équivaut à $\left(\dfrac{z}{1+3i}\right)^4 = 1$.

$\dfrac{z}{1+3i}$ est une racine quatrième de 1. Or les racines quatrièmes de 1 sont, $1; i; -1; -i$.

Donc les solutions de l'équation proposée sont :

$1(1+3i) = 1+3i$; $i(1+3i) = i+3i^2 = -3+i$; $-1(1+3i) = -1-3i$ et $-i(1+3i) = 3-i$.

Les racines quatrième de $1+3i$ sont $\boldsymbol{1+3i; -3+i; -1-3i; 3-i}$.

LEÇON 3 ÉQUATIONS DANS $\mathbb{C}$.

- Résoudre les équations du premier degré dans $\mathbb{C}$;
- Résoudre les systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{C}$;
- Résoudre les équations du second degré dans $\mathbb{C}$;
- Déterminer les racines d'un polynôme de degré supérieur ou égal à trois.

3.1. ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ ; SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS $\mathbb{C}$

3.1.1 Équations du type $az+b=0$, où $a\, et\, b\, sont\, des$ nombres complexes et systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{C}$.

Prendre un bon départ

1) Déterminer si possible le nombre complexe z dans chacun des cas suivants:

   a) $(2+3i)z-2+5i=3$;

   b) $(2-3\mathrm{i})\mathrm{z}+1+2\mathrm{i}=2\mathrm{z}-3\mathrm{iz}-2+5\mathrm{i}$;

   c) $(2-i)z=2(z+1)-iz-5i$.

2) Déterminer les nombres complexes $z\, et\, z'$ tels que: $\begin{cases}(1+i)z+2iz'=1+i\\ iz-(3-2i)z'=-i\end{cases}$.

Retenir

- Une équation de la forme $az+b=0$ où a et b sont des nombres complexes dans $\mathbb{C}$:
  - admet une seule solution si $a\neq 0$. Cette solution est $-\dfrac{b}{a}$. Dans ce cas l'équation est dite du premier degré.
  - admet une infinité de solutions si $a=b=0$.
  - n'admet aucune solution si $a=0$ et $b\neq 0$.
- Tout système de la forme $\begin{cases}az+bz'=c\\ a'z+b'z'=c'\end{cases}$ $où\ a,b,c,a',b'et\ c'$ (a' et b' non tous nuls) sont des nombres complexes est un système d'équations linéaire à deux inconnues dans $\mathbb{C}$.

S'exercer

3.a Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnues z :

a) $(2+5i)z = 4-2i$; b) $iz-2 = 2z+1+i$; c.) $(2+i)(z+3+i)\left(iz+\frac{1}{2i}\right)=0$;

d) $\frac{2-i}{1-2i}z = \frac{-1+3i}{2+i}$; e) $(2+3i)z = (1+2i)^2$.

3.b Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système d'équations linéaires $\begin{cases}(2+3i)z-3iz' = 1-i \\ (-1+2i)z+(3-i)z' = i\end{cases}$.

3.2. ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ DANS $\mathbb{C}$

3.2.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Prendre un bon départ

Activité 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : $z^2 = 16$; b) $z^2 = -49$; c) $z^2 = -3$; d) $z^2 = -sin^2 t$.

Activité 2

Soit le nombre complexe $a = 3-4i$. Soit $z = x+iy$ tel que $z^2 = 3-4i$.

1) a) Montrer que l'on a $\begin{cases}x^2-y^2=3 \\ 2xy=-4\end{cases}$.

b) À partir de la deuxième équation du système, exprimer par exemple x en fonction de y puis le remplacer dans la première équation. Résoudre l'équation obtenue d'inconnue y. En déduire les solutions du système, puis les valeurs possibles de z.

2)a) Calculer $|a|$ et montrer que $x^2+y^2=5$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases}x^2-y^2=3 \\ x^2+y^2=5 \\ 2xy=-4\end{cases}$ et en déduire tous les nombres complexes dont les carrés sont égaux à a.

Retenir

Soit un nombre complexe $Z = a+ib$ tel que $|Z| = r$.

- Un nombre complexe $z = x+iy$ est une racine carrée de Z si et seulement si $z^2 = Z$.
- Pour déterminer les valeurs de x et y il suffit de résoudre le système $\begin{cases}x^2-y^2=a \\ x^2+y^2=r \\ 2xy=b\end{cases}$

REMARQUE

- Tout nombre complexe non nul admet toujours deux racines carrées opposées.
- Pour résoudre le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = r \\ 2xy = b \end{cases}$, il suffit de résoudre les deux premières équations et ensuite tenir compte du signe de b pour choisir les couples $(x; y)$.

Si $b > 0$, x et y sont de même signe. Si $b < 0$, x et y sont de signes contraires.

EXEMPLE

1) Déterminons les racines carrées du nombre complexe $Z = -3 - 4i$.

Soit $z = x + iy$ une racine carrée de Z. $z^2 = Z$ équivaut à $(x + iy)^2 = -3 - 4i$;

$x^2 - y^2 + 2ixy = -3 - 4i$. Cette égalité est réalisée si et seulement si $\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = -4 \end{cases}$.

D'autre part $Z = z^2$ entraine $|Z| = |z^2|$. Or $|z^2| = |z||z| = x^2 + y^2$.

$|3 - 4i| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$.

Résolvons le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 2xy = -4 \end{cases}$.

En additionnant membre à membre les deux premières équations on trouve $2x^2 = 2; soit\ x^2 = 1$ d'où $x = 1$ ou $x = -1$.

En multipliant la première équation par -1 et la deuxième par 1 et en additionnant membre à membre les équations obtenues on a $2y^2 = 8$; soit $y^2 = 4$; d'où $y = 2$ ou $y = -2$.

xy étant négatif, x et y sont de signes contraires.

Ainsi pour $x = 1; y = -2$ et pour $x = -1; y = 2$.

Les racines carrées du nombre complexe $-3 - 4i$ sont $1 - 2i$ et $-1 + 2i$.

2) Déterminons les racines carrées de $-\cos^2\theta \, (\theta \in \mathbb{R})$. $(-cos^2\theta) = (i^2cos^2\theta) = (icos\theta)^2 = (-icos\theta)^2$.

Les racines carrées de $(-\cos^2\theta)$ sont $(i\cos\theta)$ et $(-i\cos\theta)$.

S'exercer

3.c Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 48 + 14i$.

3.d Soit b un nombre réel strictement négatif. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 = b$.

3.2.2 Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$.

Prendre un bon départ

Activité 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

a) $Z^2+3=0$; b) $Z^2+4Z+8=0$; c) $Z^3+8=0$ et d) $Z^3-i=0$

Activité 2

Soit à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré à coefficients complexes $az^2+bz+c=0\,(a\neq 0)$.

1) Montrer que $az^2+bz+c=a\left[\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$. Soit δ une racine carré de b^2-4ac.

2) Montrer que l'équation $\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}=0$ admet dans $\mathbb{C}$ soit une racine soit deux racines distinctes qu'on exprimera en fonction de a, b et δ.

Retenir

Pour résoudre une équation du second degré $az^2+bz+c=0$ à coefficients complexes dans $\mathbb{C}$.

- On calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac$.
- On détermine une racine carrée de Δ.
  - si $\Delta=0$, cette équation admet une seule racine qui est $z_0=\dfrac{-b}{2a}$ et $az^2+bz+c=a(z-z_0)^2=a(z-z_0)(z-z_0)$.
  - Si $\Delta\neq 0$ cette équation admet deux racines distinctes $z_1=\dfrac{-b-\delta}{2a}$ *et* $z_2=\dfrac{-b+\delta}{2a}$ où δ est une racine carré du discriminant Δ.
    Dans ce cas $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$.

EXEMPLE

1) Considérons l'équation $2Z^2+2Z+3=0$. On a : $\left[\left(Z+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}\right]=0$; $\left(z+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}=0$

$\left(Z+\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{5}}{2}\right)\left(Z+\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{5}}{2}\right)=0$; $Z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{5}}{2}$ ou $Z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{5}}{2}$

L'équation admet deux racines complexes conjuguées $Z_1=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{5}}{2}$ et $Z_2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{5}}{2}$.

2) Considérons l'équation $iz^2+z-3+i=0$. $\Delta=1^2-4i(-3+i)=1+12i+4=5+12i$.

Déterminons une racine carrée de Δ. Soit $x+iy$ une racine carrée de Δ.

On a : $(x+iy)^2 = 5+12i$. D'où : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{5^2+11^2} = 13 \end{cases}$.

D'où ($x=3$ ou $x=-3$) et ($y=2$ ou $=-2$). Or $xy>0$ donc x et y sont de même signe.
Les racines carrées de Δ sont $3+2i$ et $-3-2i$. Choisissons $\delta = 3+2i$ l'une de ces racines carrées.

$$z_1 = \frac{-1-\delta}{2i} = \frac{-1-3-2i}{2i} = \frac{-4-2i}{2i} = -1+2i\,;\ z_2 = \frac{-1+\delta}{2i} = \frac{-1+3+2i}{2i} = \frac{2+2i}{2i} = \frac{1+i}{i} = 1-i.$$

Les solutions de cette équation sont : $-1+2i$ et $1-i$.
Remarque : En choisissant comme racine carrée du discriminant $-3-2i$, on trouve les mêmes solutions.

3) Soit l'équation $(E): z^3 + (1-i)z^2 + (4-i)z - 4i = 0$

Cherchons une solution de cette équation de la forme $ib\,(b \neq 0$ et $b \in \mathbb{R})$

On a : $(ib)^3 + (1-i)(ib)^2 + (4-i)(ib) - 4i = 0$; $-ib^3 - b^2(1-i) + (4i+1)b - 4i = 0$;

$(-b^2+b) + i(-b^3+b^2+4b-4) = 0$.

D'où $\begin{cases} -b^2+b=0 \\ -b^3+b^2+4b-4=0 \end{cases}$; soit $\begin{cases} b(-b+1)=0 \\ -b^3+b^2+4b-4=0 \end{cases}$ $\begin{cases} b=0\, ou\, b=1 \\ -b^3+b^2+4b-4=0 \end{cases}$.

0 ne vérifie pas l'équation $-b^3+b^2+4b-4=0$, par contre $+1$ est solution de l'équation $-b^3+b^2+4b-4=0$. Le système ci-dessus a donc une seule solution qui est 1. Donc i est une solution de cette équation.

- Trouvons un polynôme $\mathcal{P}$ du second degré tel que : $z^3 + (1-i)z^2 + (4-i)z - 4i = (z-i)\,\mathcal{P}(z)$
  Posons $\mathcal{P}(z) = az^2 + bz + c$. On a : $z^3 + (1-i)z^2 + (4-i)z - 4i = (z-i)(az^2+bz+c)$.
  Par égalité de deux polynômes on a : $\mathcal{P}(z) = z^2 + z + 4$.
- Résolvons (E). (E) est équivalent à $(z-i)(z^2+z+4) = 0$.
  Résolvons $z^2+z+4=0$. Son discriminant est $\Delta = 1-4\times4 = -15 = 15i^2 = (i\sqrt{15})^2$
  Les solutions de l'équation (E) sont : i, $\frac{-1-i\sqrt{15}}{2}$ et $\frac{-1+i\sqrt{15}}{2}$.

Exercice Résolu 1

1) Soit θ un nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (2cos\theta)z + 1 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = (2cos\theta)^2 - 4 = 4cos^2\theta - 4 = 4(cos^2\theta - 1)$.

Or $cos^2\theta + sin^2\theta = 1$ et $cos^2\theta - 1 = -sin^2\theta = i^2 sin^2\theta$. Donc $\Delta = (2isin\theta)^2$.

Une racine carrée de Δ est $2i\sin\theta$.

Les solutions de l'équation (E) sont $z_1 = \dfrac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta$

et $z_2 = \dfrac{2\cos\theta - 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta - i\sin\theta$**.**

2) Pour quelles valeurs de θ ces solutions sont-elles des imaginaires purs.

Ces solutions sont des imaginaires purs si et seulement si $\cos\theta = 0$; soit $\theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) Pour quelles valeurs de θ ces solutions sont-elles des réels.

Ces solutions sont des réels si et seulement si $\sin\theta = 0$; soit $\theta = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice Résolu 2

1) Soit P un polynôme dans $\mathbb{C}$ tel que, pour tout nombre complexe z :

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ avec $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ des réels.

Démontrer que si z_0 est une racine de P, alors $\overline{z_0}$ est aussi une racine de P.

Supposons que z_0 est une racine de P. On a $P(z_0) = 0$.

a) Démontrons que $\overline{P(z_0)} = P(\overline{z_0})$.

$$\overline{P(z_0)} = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} = \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 z} + a_0 .$$

$= a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \ldots + a_1 \overline{z} + \overline{a_0}$ car le conjugué d'un nombre réel est égal à lui-même.

D'autre part $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ pour tout entier naturel n.

On en déduit que $\overline{P(z_0)} = a_n \overline{z}_0^{\,n} + a_{n-1} \overline{z}_0^{\,n-1} + \ldots + a_1 \overline{z}_0 + a_0 = P(\overline{z}_0)$.

b) Déduisons que $\overline{z_0}$ est aussi une solution de $P(z) = 0$.

D'après l'hypothèse z_0 est une solution de l'équation $P(z) = 0$. Donc $P(z_0) = 0$ et par suite $\overline{P(z_0)} = \overline{0}$; soit $\overline{P(z_0)} = 0$. Or $\overline{P(z_0)} = P(\overline{z_0})$, donc $P(\overline{z_0}) = 0$. D'où $\overline{z_0}$ est aussi une solution de $P(z) = 0$; $\overline{z}_0$ est donc une racine de P.

Exemple : Soit l'équation $P(z) = z^4 - 6z^3 + z^2 + 10z - 18$.

$$P(1+i) = (1+i)^4 - 6(1+i)^3 + (1+i)^2 + 10(1+i) - 18 = (2i)^2 - 6(2i)(1+i) + 2i + 10 + 10i - 18$$

$$= -4 - 12i + 12 + 12i - 8 = 0 .$$

$P(1+i) = 0$, donc $1+i$ est une solution de $P(z) = 0$.

Comme $1+i$ est solution de cette équation, $1-i$ l'est aussi car tous les monômes de ce polynôme ont des coefficients réels.

$P(z) = (z-(1+i))(z-(1-i))(az^2 + bz + c)$; $P(z) = (z^2 - 2z + 2)(az^2 + bz + c)$.

Développons $(z^2-2z+2)(az^2+bz+c)$.

$(z^2-2z+2)(az^2+bz+c)= az^4+(b-2a)z^3+(c-2b+2a)z^2+(-2c+2b)z+2c$

Or $P(z)=z^4-6z^3+z^2+10z-18$.

Par identification, on a le système $\begin{cases} a=1 \\ -2a+b=-6 \\ 2b-2c=10 \\ 2a-2b+c=1 \\ 2c=-18 \end{cases}$; Soit $a=1; b=-4$ et $c=-9$.

$P(z)=(z^2-2z+2)(z^2-4z-9)$. $P(z)=0$ équivaut à $(z^2-2z+2)(z^2-4z-9)=0$, qui est équivalent à $z^2-2z+2=0$ ou $z^2-4z-9=0$.

Résolvons l'équation $z^2-4z-9=0$. Son discriminant $\Delta=16+36=52=(2\sqrt{13})^2$.

Les solutions de cette équation sont $\dfrac{4+2\sqrt{13}}{2}$ et $\dfrac{4-2\sqrt{13}}{2}$.

Les solutions de l'équation P(z)= 0 sont $1+i; 1-i; 2+\sqrt{13}$ et $2-\sqrt{13}$.

S'exercer

3.e Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

$a) z^2+9=0$; $b) z^2+4z+29=0$; $c) z^2-2z+3=0$.

3.f Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

$a) z^3+8=0$; $b) z^4-16=0$; $c) z^4+2z^2=0$.

3.g Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

$a) z^2=-4i$; $b) z^2=44+16i\sqrt{3}$; $c) z^2=15+8i$.

3.h Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

$a) z^4-4iz^2-4=0$; $b) z^4+6z^2+25=0$; $c) z^4-10z^2+169=0$.

3.i $\mathcal{P}$ est le polynôme défini par : $\mathcal{P}(z)=z^3-3z^2+(3-i)z-2+2i$.

i. Vérifier que $\mathcal{P}$ admet une racine réelle α.

ii. Déterminer les nombres complexes a et b tels que $\mathcal{P}(z)=(z-\alpha)(z^2+aZ+b)$.

iii. Résoudre alors l'équation $\mathcal{P}(z)=0$ dans $\mathbb{C}$.

3.2.3 SOMME ET PRODUIT DES RACINES

Prendre un bon départ

1) Soit l'équation $az^2+bz+c=0$ à coefficients complexes $(a \neq 0)$.

Soient $z_1=\frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2=\frac{-b-\delta}{2a}$ les solutions de cette équation. Calculer z_1+z_2 et $z_1 z_2$.

2) Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $\begin{cases} z_1+z_2=-\frac{b}{a} \\ z_1 z_2=\frac{c}{a} \end{cases}$. ($a$ est un nombre complexe non nul).

Montrer que z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $(z-z_2)(z-z_2)=0$ et en déduire que z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$.

Retenir

Les solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$ à coefficients complexes $(a \neq 0)$ sont les nombres complexes z_1 et z_2 tels que $\begin{cases} z_1+z_2=-\frac{b}{a} \\ z_1 z_2=\frac{c}{a} \end{cases}$.

REMARQUE

Si S et P sont deux nombres complexes donnés, les nombres complexes z_1 et z_2 tels que $\begin{cases} z_1+z_2=S \\ z_1 z_2=P \end{cases}$ sont les solutions de l'équation $Z^2-SZ+P=0$.

EXEMPLE

1) Soit l'équation du second degré (E) : $z^2+(-5+2i)z+9-7i=0$.

a) Montrons que $3+i$ est une solution de (E).

$(3+i)^2+(-5+2i)(3+i)+9-7i=9+6i-1-15-5i+6i-2+9-7i=0.$

$3+i$ est donc une solution de (E).

b) Sans calculer le discriminant, déterminons la deuxième solution de (E).

Soit z' l'autre racine de (E). On a $z'+3+i=5-2i\,et\,(3+i)z'=9-7i$ car la somme S des racines de cette équation est $\dfrac{-(-5+2i)}{1}=5-2i$ et le produit est $\dfrac{9-7i}{1}=9-7i$.

$z'+3+i=5-2i$; $z'=2-3i$. On peut aussi utiliser le fait que $(3+i)z'=9-7i$ et en déduire que $z'=\dfrac{9-7i}{3+i}=\dfrac{(9-7i)(3-i)}{9+1}=\dfrac{27-7-30i}{10}=2-3i$.

Remarque : L'expression du produit ou de la somme des racines peut permettre de trouver la deuxième racine connaissant la première. Mais il préférable de choisir l'expression la plus simple.

Pour l'exemple ci-dessus l'expression de la somme permet de trouver plus facilement la deuxième racine.

2) Soit m un paramètre réel. À quelle condition nécessaire et suffisante existe-il deux réels $x_1\,et\,x_2$ distincts tels que $x_1+x_2=2\,et\,x_1\,x_2=m^2$?

   Il existe deux réels distincts $x_1\,et\,x_2$ tels que $x_1+x_2=2\,et\,x_1\,x_2=m^2$ si et seulement si $2^2-4m^2>0$. C'est-à-dire $4-4m^2\geq 0$; soit $m\in\,]-1;1[$.

3) Soit m un paramètre réel. À quelle condition nécessaire et suffisante existe-il deux nombres complexes $z_1\,et\,z_2$ distincts tels que $z_1+z_2=2\,et\quad z_1\,z_2=m^2$?

   Il existe deux réels distincts $z_1\,et\,z_2$ tels que $z_1+z_2=2\,et\,z_1\,z_2=m^2$ si et seulement si $2^2-4m^2\neq 0$; soit $m\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$.

S'exercer

3.j Sans déterminer les racines de l'équation à coefficients complexes $(3-2i)z^2+(-1+3i)z+4-5i=0$, déterminer la somme et le produit des racines de cette équation.

3.k Déterminer deux nombres complexes z_1 et z_2 tels que $z_1+z_2=-4+i\,et\,z_1\,z_2=1+13i$

S'ENTRAÎNER

FORME ALGÉBRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1.

Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ définie par :

$f(z)=z^3-2iz^2-(1-i)z-2i$.

Calculer $f(1+i); f(i)$ et $f(2i)$.

2.

Déterminer la forme algebrique de z dans chacun des cas suivants :

a) $z=\dfrac{2-3i}{1+i\sqrt{3}}$; b) $z=(3-i)(5+2i)$;

c) $z=(2-3i)^2$; d) $(1+2i)^4$;

e) $(2i-1)(2+5i)(2-3i)^2$.

3.

Écrire le nombre complexe z sous forme algébrique dans chacun des cas suivants.

a) $z=-3\ (-2+3i)(5-2i)$;

b) $z=\dfrac{\sqrt{3}+3i}{2+i}$; c) $z=\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$;

d) $z=\dfrac{4}{1+i\sqrt{3}}$.

4.

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, on associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' tel que $z'=\dfrac{z+3i}{z-4}$.

1) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z' soit un réel.
2) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z' soit un imaginaire pur.

5.

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, on associe au point M' d'affixe z tel que $z'=(z-3)(z-2i)$.

1) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z' soit un réel.
2) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z' soit un imaginaire pur.

6.

Soit le nombre complexe $z=x+iy$ où x et y sont des réels, et M le point image de z dans le plan complexe. On désigne par $\overline{z}$ le conjugué de z. On considère le nombre complexe

$Z=\dfrac{z+3}{\overline{z}+3}$.

a) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de Z.

b) Construire l'ensemble des points M du plan tels que Z soit un imaginaire pur.

7.

Soit le nombre complexe $z=x+iy$ où x et y sont des réels, et M le point image de z dans le plan complexe. On désigne par $\overline{z}$ le conjugué de z. On considère le nombre complexe

$Z=\dfrac{iz^2}{\overline{z}+1}$.

a) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de Z.

b) Construire l'ensemble des points M du plan tels que Z soit un imaginaire pur.

ÉCRITURE SOUS FORME TRIGONOMÉTRIQUE ET SOUS FORME EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL.

8.

Écrire z sous la forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

a) $z=1-i\sqrt{3}$; b) $z=\dfrac{1-i}{2i}$;

c) $z=\dfrac{2-3i}{7+2i}$; d) $z=\dfrac{(2-3i)(3+i)}{4-3i}$;

e) $z=\dfrac{1}{cos\theta+isin\theta}$; f) $z=\dfrac{cos\theta+isin\theta}{cos\theta-isin\theta}$.

9.

On donne $Z_1=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $Z_2=1-i$.

a) Écrire Z_1 et Z_2 sous forme exponentielle.

b) Écrire $\dfrac{Z_1}{Z_2}$ sous forme exponentielle.

c) En déduire $cos\dfrac{\pi}{12}$ et $sin\dfrac{\pi}{12}$.

10.

Soit $Z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}(1+i)}$.

1) Déterminer le module et un argument de Z et vérifier que le point M d'affixe Z est situé sur le cercle de centre O et de rayon 1.
2) Pour quelles valeurs de l'entier naturel $n: Z^n=1$?
3) Pour quelles valeurs de l'entier naturel $n: Z^n=-i$?
4) Déterminer l'entier naturel p tel que $Z^{n+p}=-Z^n$.

11.

θ est le nombre réel de l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes :

$a)\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}$; $b)\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$; $c)\dfrac{1+itan\theta}{1-itan\theta}$.

12.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $-1, 1 et \sqrt{3}i$.

1) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\dfrac{Z-1}{Z+1}$ ait pour argument $\dfrac{\pi}{3}$.
2) Démontrer que cet ensemble contient C et construire le construire.

13.

On pose $z=\sqrt{3}+i$, $z'=i-1$ et $Z=\dfrac{z}{z'}$.

1) Calculer le module et un argument de chacun des complexes z et z'.
2) a) Déterminer l'écriture algébrique de z et z'.
   b) Déterminer l'écriture trigonométrique et exponentielle de Z.
3) Déterminer l'écriture exponentielle trigonométrique, et algébrique de Z^3.

14.

Soit le nombre complexe :

$z=1+i\sqrt{3}$, démontrer que les images dans le plan complexe des nombres $z, -z, z^2, \dfrac{2}{z}$ sont coçycliques.

15.

Soient les nombres complexes $z_1=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ et $z_2=\dfrac{i}{2i\sqrt{3}-2}$.

Calculer z_1+z_2 , $z_1\times z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $z_1^{\,6}\times z_2^{\,12}$ et $\dfrac{z_1^{\,8}}{z_2^{\,3}}$.

(On donnera tous les résultats sous la forme algébrique la plus simple).

16.

Soit z un nombre complexe de module 1 et d'argument α; $\alpha \in [0, \pi]$.

Calculer, en fonction de α, le module et un argument du nombre complexe $Z = 1 + z + z^2$.
(On discutera suivant les valeurs de α.

1) Représenter dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

a) L'ensemble (E_1) des points $M(z)$ tels que : $argZ = \left(\frac{\pi}{3}\right)(2\pi)$.

b) L'ensemble (E_2) des points $M(z)$ tels que : $argZ = \left(\frac{\pi}{6}\right)(\pi)$.

c) L'ensemble (E_3) des points $M(z)$ tels que : $|Z| = 2 \, et \, R_e = 1$.

d) L'ensemble (E_4) des points $M(z)$ tels que : $|Z| = 1$ et $argZ = \frac{2\pi}{3}(\pi)$.

17.

En utilisant l'égalité qui semble la plus adaptée, déterminer :

a) L'ensemble (F) des points $M(Z)$ tels que : $\frac{Z+1}{\overline{Z}-1}$ soit un réel strictement positif.

b) L'ensemble (G) des points $M(Z)$ tels que : $\frac{iZ+1}{i\overline{Z}-1}$ soit imaginaire pur.

c) L'ensemble (H) des points $M(Z)$ tels que : $\frac{iZ}{e^{i\frac{\pi}{6}}}$ soit imaginaire pur.

18.

α est un réel de l'intervalle $]-\pi, \pi[$ et z le nombre complexe défini par : $z = 1 + e^{-i\alpha}$.

1) Calculer $|z|, \arg z, arg\frac{1}{z}$ en fonction de α.

2) Soient les points $M(z)$ et $M'\left(\frac{1}{z}\right)$.
Déterminer le lieu géométrique de M p... de M' lorsque α d'écrit $]-\pi, \pi[$.

19.

Calculer les racines cubiques du nombre complexe $z = \frac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}$.

20.

Calculer le module et un argument du nombre complexe $z = \frac{1 - \cos\theta + i\sin\theta}{1 + \cos\theta - i\sin\theta}$. $(\pi < \theta < 2\pi)$

21.

Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $4\sqrt{2}(1+i)$.

22.

Déterminer les racines quatrièmes du nombre complexe $8\sqrt{2}(-1-i)$.

23.

Déterminer les racines cinquièmes du nombre complexe $z = 32i$.

24.

Déterminer les racines sixièmes du nombre complexe $z = 32(i - \sqrt{3})$.

25.

Résoudre l'équation :
(E) : $2(1+\cos 2\theta) - 2z(\sin 2\theta) + 1 = 0$, où θ est un paramètre réel donné tel que $0 \leq \theta \leq \pi$.
on discutera suivant les valeurs de θ

26.

Donner la forme algébrique et la forme exponentielle de chaque nombre complexe z.

$$z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ z=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;$$

$$z=\left(1-i\sqrt{3}\right)(1+i)\ ;\ z=2i\left(\sqrt{3}-i\right)\ ;$$

$$z=\frac{1}{i}\ ;z=\frac{1}{2+2i}\ ;z=\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}};$$

$$z=\left(\sqrt{3}+i\right)^2\ ;\ z=\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^2.$$

27.

Écrire le nombre complexe z sous la forme exponentielle.

a) $z=-3$; b) $z=\sqrt{3}+3i$;

c) $z=\frac{\sqrt{2}}{1-i}$; d) $\overline{1 \quad \sqrt{3}}$

28.

Placer les points d'affixes z_1 ; z_2 et z_3 dans un repère orthonormé direct du plan.

a) $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_3 = \sqrt{3}e^{-5i\frac{\pi}{6}}$.

b) $z_1 = 1+i$; $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_3 = \frac{2}{1-i}$.

29.

Soit $z=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$.

1) Calculer z^2.
2) Déterminer le module et un argument de z^2.
3) En déduire un module et un argument de z.

Dans les exercices qui suivent, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct

30.

Soient A, B , C trois points d'affixes respectives $1+4i,-1-i,6+5i$, I le milieu de $[BC]$.

1) Déterminer l'affixe de I.
2) Calculer AB, BC,AC et AI.
3) Vérifier que $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$.

31.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $\left|\frac{2i-z}{z+1+i}\right|=1$.

32.

Soient A, B, C les points d'affixes respectives $1+i, 1+\frac{1}{2}i, \frac{3}{2}+i$.

a) Calculer une mesure de chacun des angles $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)$.
b) Donner la nature du triangle ABC.

33.

Soient A, B, C les points d'affixes respectives $1+2i, 2+i$, $\left(2+\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)$.

Calculer une mesure de chacun des angles $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)$.

34.

Soient A et B les points d'affixes $\frac{1}{2}$ et -1 .

Déterminer l'affixe z du point M tel que

$\frac{MA}{MB}=2$ et mes$\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)=\frac{\pi}{4}$.

35.

Linéariser les expressions suivantes :

a) $\cos^4 x$ et $\sin^4 x$; b) $\sin^4 x+3\sin^2 x\cos^2 x$;

c) $\cos^5 x\sin^3 x$.

36.

On considère le nombre complexe $a=-\sqrt{3}+i$

1) Déterminer de deux façons différentes les racines carrées de a.
2) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

ÉQUATIONS DANS $\mathbb{C}$.

37.

Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{C}^2$.

a) $\begin{cases} z+z'=3 \\ 2z-z'=i \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3z+z'=5+2i \\ -z+z'=1-2i \end{cases}$.

c) $\begin{cases} z-\ \ 2iz'=5i \\ 2z-(1+i)z'=-2+6i \end{cases}$;

d) $\begin{cases} (1+i)z+(1-i)z'=2+i \\ 3z-2iz'=4-i \end{cases}$.

38.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

a) $z^2+z+1=0$; b) $z^2-1=0$;
c) $z^2+2z+2=0$; d) $(z+1)^3=z^3$.
e) $z^3-1=0$; f) $z^4+z^2+1=0$.

39.

Soit P le polynôme défini dans θ par $P(z)=z^3+(6-3i)z^2+(13-18i)z-39i$.

1) Démontrer que P admet une solution imaginaire z_0.
2) Démontrer l'existence de deux réels α et β tels que : $P(z)=(z-z_0)(z^2+\alpha z+\beta)$
3) Résoudre l'équation $P(z)=0$.

40.

P est le polynôme de variable complexe z défini par :

$P(z)=z^4-2z^3+6z^2-27z+5$

1) Établir que pour tout nombre complexe z, $P(\overline{z})=\overline{P(z)}$.
2) En déduire que si z_0 est une racine de P, alors $\overline{z}_0$ l'est aussi.
3) Calculer $P(i)$ et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

41.

On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme P défini par $P(z)=z^3-3z^2-iz+3-i$.

1) Démontrer que l'équation $P(z)=0$ admet une solution réelle que l'on déterminera.
2) Résoudre l'équation $P(z)=0$.
3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On donne : $A(1-i)$; $B(2+i)$ et $C(-1)$.
   a) Démontrer que l'origine du repère est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 1, 1 et 3.
   b) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que :

   $[z-z_A]^2+[z-z_B]^2+[z-z_C]^2=55$

   P est le polynôme défini dans C par

   $P(z)=z^4+3z^3+\frac{9}{2}z^2+3z+1.$

3) Montrer que $P(\overline{z})=\overline{P(z)}$ et en déduire que si z_0 est une solution de l'équation $P(z)=0$ alors $\overline{z}_0$, $\frac{1}{z_0}$, $\frac{1}{\overline{z}_0}$ sont aussi des solutions de cette équation.
4) Montrer que l'équation $P(z)=0$ admet une solution de la forme $a+i$ où a est réel à déterminer.
5) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

42.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{2Z+1}{Z-1}\right)^4=1$.
2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

Pour tout point M du plan d'affixe z on pose $Z'=\frac{z^2}{z+1}(z\neq -i)$.

i) Déterminer et représenter l'ensemble (Γ) des points $M(z)$ tels que Z' soit imaginaire pur.

ii) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(E): z^2+2aiz-2a=0$ où a est un réel.

iii) Démontrer que les points images des solutions de (E) sont les éléments de ( ). Le résultat était-il prévisible ?

3) On considère les équations suivantes :

$(E_1): z^n=\frac{1+ia}{1-ia}$.

$(E_2): \left(\frac{1+iZ}{1-iZ}\right)^n=\frac{1+ia}{1-ia}$.

a) Démontrer que toutes les solutions de (E_1) ont pour module 1.

b) Démontrer que toutes les solutions de (E_2) sont des nombres réels.

c) Résoudre (E_2) pour $a=3$ et $n=4$.

43.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On donne : $A(-1);B(1);C\left(\frac{1}{2}\right)$ et $D(2)$. À tout point $M(z)(z\neq 2)$, on associe le point $M'(Z')$ tel que $Z'=\frac{2z-1}{2-z}$.

1) Démontrer que $|Z'|=\frac{2CM}{DM}$.

2) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$; $|Z'|=1$.

3) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z' est un réel strictement positif.

44.

θ est un réel, $\theta\in[\pi;2\pi]$: calculer z^n pour n entier naturel.

a) $z=1+\cos\theta+i\sin\theta$;

b) $z=1-\cos\theta+i\sin\theta$.

45.

Soit z un nombre complexe non réel ; A, B, C sont les points d'affixes $z, z^2 et z^3$.

Trouver l'ensemble des points A tel que le triangle ABC soit rectangle en C.

46.

θ désigne un réel appartenant à $[0;2\pi]$.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z :
$z^2-\left(2^{\theta+1}\cos\theta\right)z+2^{2\theta}=0$.

b) Donner chaque solution sous forme trigonométrique.

c) Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B dont les affixes sont les solutions de l'équation précédente.

Déterminer θ de manière à ce que OAB soit un triangle équilatéral.

47.

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On désigne par A, B et M les points d'affixes respectives, $-1, -2$ et z, où z représente un nombre complexe différent de -1 et de -2. On pose $Z=\frac{z+2}{z+1}$;

$|Z|$ désigne le module de Z et arg Z désigne un argument de Z appartenant à $[-\pi;\pi[$.

1) Justifier que $|Z|=\frac{BM}{AM}$ et que arg Z est une mesure, en radians de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)$.

2) Utilise la question 1) pour déterminer géométriquement les ensembles suivants :

(E) est l'ensemble des points M d'affixe z telle que Z est un réel.

(F) est l'ensemble des points M d'affixe z telle que Z est un imaginaire pur.

(G) est l'ensemble des points M d'affixe z telle que $\arg Z = +\frac{\pi}{2}$.

(H) est l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|Z| = 1$.

48.

On considère, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^3 - z^2 - (1+i)z - 2 + 2i = 0.$$

1) Sachant que (E) admet une solution réelle, la déterminer puis résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.
2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct, les trois points dont les affixes respectives sont les trois solutions de l'équation (E) définissent un triangle. Démontrer que ce triangle est rectangle isocèle.

49.

Soit dans $\mathbb{C}$ le polynôme défini par :

$$P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1.$$

(E) désigne l'équation $P(z) = 0$.

1) Montrer que si un nombre complexe z est solution de (E), alors le conjugué de z et $\frac{1}{z}$ sont aussi des solutions de (E).
2) Vérifier que $1+i$ est une solution de (E), puis résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.
3) Ecrire $P(z)$ sous forme d'un produit de deux polynômes de deuxième degré à coefficients réels.

50.

On donne $z = -8\left(1 + i\sqrt{3}\right)$.

1) Montrer que $z_1 = \sqrt{3} - i$ est une racine quatrième de z.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 8 + 8i\sqrt{3}$ Donner le module et un argument de chaque solution.

51.

1) Déterminer, sous forme exponentielle les solutions de l'équation $z^2 = 4\sqrt{2}(-1+i)$.
2) En utilisant les racines cubiques de l'unité écrire les solutions de cette équation sous forme algébrique.
3) Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{11\pi}{12}$.

52.

1) Montrer que pour tout nombre complexe z différent de 1 on a l'égalité $\frac{z^4 - 1}{z - 1} = z^3 + z^2 + z + 1$.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$.
3) En déduire l'ensembles des solutions de l'équation dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0$.

Chapitre 4

NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS DU PLAN.

LEÇON 1 ÉCRITURES COMPLEXES DE QUELQUES TRANSFORMATIONS USUELLES DU PLAN.

LEÇON 2 SIMILITUDES DIRECTES.

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1 ÉCRITURE COMPLEXE DE QUELQUES TRANSFORMATIONS USUELLES DU PLAN

- Déterminer l'écriture complexe des transformations usuelles du plan.
- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques d'une transformation à partir de son écriture complexe.
- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques d'une composée de deux transformations du plan.

1.1. ÉCRITURES COMPLEXES DES TRANSFORMATIONS USUELLES.

Prendre un bon départ

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$. Soit f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.

1) On suppose $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ avec $\vec{u}(a;b)$.
   Donner la nature de f et écrire z' en fonction de z.
2) Soit $\Omega(x_0\ ;y_0)$ un point du plan d'affixe ω et k un nombre réel non nul tel que $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$.
   Donner la nature de f et écrire z' en fonction de z.
3) On suppose que $\overrightarrow{\Omega M'}=-\overrightarrow{\Omega M}$. Donner la nature de f et écrire z' en fonction de z.
4) $M(a;b)$ et $M'(a;-b)$. Donner la nature de f et écrire z' en fonction de z.
5) $M(a;b)$ et $M'(-a;b)$. Donner la nature de f et écrire z' en fonction de z.
6) On suppose que $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}=e^{i\theta}$.
   a) Montrer que $\Omega M'=\Omega M$ et $mes\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\theta$.
   b) Donner la nature de l'application f et exprimer z' en fonction de z.

Retenir

Le tableau ci-dessous donne les écritures complexes de quelques transformations usuelles.

Transformation usuelle	Écriture complexe
Translation de vecteur $\vec{u}(b)$	$z'=z+b$

Homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k	$z' - \omega = k(z - \omega)$
Rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle de mesure α	$z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$
symétrie orthogonale d'axe $(O;\vec{e_1})$	$z' = \bar{z}$
symétrie orthogonale d'axe $(O;\vec{e_2})$	$z' = -\bar{z}$
Symétrie de centre $\Omega(\omega)$	$z' = -z + 2\omega$

REMARQUE

L'écriture complexe de l'homothétie de rapport k est $z' = kz + b_1$; celle de la rotation d'angle de mesure α est $z' = e^{i\alpha}z + b_2$ où b_1 *et* b_2 sont des nombres complexes.

EXEMPLE

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$. Donner l'écriture complexe des transformations suivantes :

a) translation de vecteur $\vec{u}(0;-2)$;

b) homothétie de centre $\Omega(-2;1)$ et de rapport -2 ;

c) rotation de centre $\Omega(-2;1)$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$;

d) symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $x = 1$;

e) symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = -2$.

Solution

a) $z' = z - 2i$ **;**

b) $z' - (-2+i) = -2(z + 2 - i)$

$z' = -2z - 4 + 2i - 2 + i$. D'où $\boldsymbol{z' = -2z - 6 + 3i}$ **;**

c) $\dfrac{z' - (-2+i)}{z - (-2+i)} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$; soit $\dfrac{z' + 2 - i}{z + 2 - i} = -i$;

$z' + 2 - i = -i(z + 2 - i)$; $z' = -iz - 2i - 1 - 2 + i$; $\boldsymbol{z' = -iz - 3 - i}$.

d) Soit I le milieu de $[MM']$ d'affixe z_I

$z_I = \dfrac{z + z'}{2} = \dfrac{x + x'}{2} + i\left(\dfrac{y + y'}{2}\right)$; I appartient à la droite d'équation $x = 1$

Donc $\frac{x+x'}{2}=1$; $x'=2-x$ et $y'=y$. D'où $z'=(2-x)+iy$;

$z'=2-x+iy$; $z'=2-(x-iy)$; $z'=-\overline{z}+2$.

c) Le point K milieu de $[MM"]$ est situé sur la droite d'équation $y=-2$

Donc $y+y"=-4$; $y"=-4-y$ et $x"=x$.

D'où $z"=x+i(-4-y)=x-iy-4i$; $z"=\overline{z}-4i$.

S'exercer

1.a Exprimer en fonction de l'affixe z du point M l'affixe z' du point M' où M' est l'image de M par :

i. La translation de vecteur $\vec{u}\left(-1\,;\frac{3}{2}\right)$;

ii. L'homothétie de centre $\Omega(1;3)$ et de rapport $\frac{1}{3}$;

iii. La rotation de centre $\Omega(0\,;1)$ et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$;

iv. La rotation de centre $\Omega(1\,;0)$ et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$.

1.b f est la transformation du plan d'écriture analytique donnée. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe de f .

i. $\begin{cases} x'=2x-3 \\ y'=2y-1 \end{cases}$; ii. $\begin{cases} x'=x+3 \\ y'=y \end{cases}$; iii. $\begin{cases} x'=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y'=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-3 \end{cases}$; iv $\begin{cases} x'=-y+2 \\ y'=x-2 \end{cases}$.

1.c Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$. Déterminer l'écriture complexe de chacune des transformations suivantes :

i. la symétrie orthogonale d'axe (D) d'équation cartésienne $2x+1=0$;

ii. la symétrie orthogonale d'axe (D) d'équation cartésienne $2y+4=0$;

iii. la symétrie orthogonale d'axe (D) d'équation cartésienne $y=x$.

1.2. COMPOSITION DES TRANSFORMATIONS USUELLES

Prendre un bon départ

L'écriture complexe d'une homothétie de rapport k est de la forme $z' = kz + b_1$ et l'écriture complexe d'une rotation d'angle de mesure α est de la forme $z' = e^{i\alpha}z + b_2$ où b_1, b_2 sont des nombres complexes.

Soit r une rotation d'angle α et h une homothétie de rapport k.

a) Justifier que l'écriture complexe de roh est de la forme $z' = ke^{i\alpha}z + c$ où $\in$.

b) roh et hor ont- elles la même écriture complexe ?

c) On suppose que l'homothétie de rapport k et la rotation d'angle α ont le même centre Ω d'affixe b. Démontrer que roh et hor ont la même écriture complexe.

Retenir

- Pour déterminer l'écriture complexe d'une composée, on utilise le principe de composition pour les fonctions définies de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
- Si h est une homothétie de rapport k et r une rotation d'angle de mesure α, alors l'écriture complexe de la composée $r \circ h$ est de la forme $z' = ke^{i\alpha}z + c$ où $c \in \mathbb{C}$.
- $r \circ h$ et $h \circ r$ ont la même écriture complexe si h et r ont même centre.

EXEMPLE

h est une homothétie de centre $\Omega(-2)$ et de rapport -2. r est une rotation de centre $\Omega(-2)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- L'écriture complexe de h est de la forme $z' = -2z + b$ et $\Omega(-2)$ est invariant par h. Donc $-2 = -2(-2) + b$ et $b = -2 - 4 = -6$; L'écriture complexe de h est donnée par $z' = -2z - 6$.
- L'écriture complexe de r est de la forme $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z + b' = iz + b'$.

  Ω est invariant par r, donc $-2 = -2i + b'$ et $b' = 2i - 2$;

  L'écriture complexe de r est donnée par $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z + 2i - 2 = iz + 2i - 2$.
- L'écriture complexe de $r \circ h$ est donnée par : $z'' = i(-2z - 6) + 2i - 2 = -2iz - 4i - 2$.
- L'écriture complexe de $h \circ r$ est donnée par :

  $z'' = -2(iz + 2i - 2) - 6 = -2iz - 4i + 4 - 6 = -2iz - 4i - 2$.

$r \circ h$ et $h \circ r$ ont la même écriture complexe, donc $r \circ h = h \circ r$.

S'exercer

1.d Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$.

- t est la translation de vecteur $\vec{u}(1-i)$;
- r est la rotation de centre $\Omega(-2i)$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$;
- r' est la rotation de centre $\Omega'(-2)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$;
- Déterminer les écritures complexes de chacune des transformations suivantes : $r \circ t$; $r \circ r'$; $r' \circ r$; $r' \circ t \circ r$.

1.e (D_1), (D_2), (D_3) sont des droites d'équations respectives $y=-\frac{1}{2}$; $y=-4$; $y=x$.

- Déterminer les écritures complexes des symétries orthogonales S_{D_1}, S_{D_2}, S_{D_3}.
- En déduire les écritures complexes de chacune des transformations suivantes : $S_{D_1} o S_{D_2}$; $S_{D_2} o S_{D_3}$ et $S_{D_3} o S_{D_1}$.

LEÇON 2 SIMILITUDES DIRECTES.

- Reconnaître une similitude directe par son écriture complexe.
- Déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude directe à partir de son écriture complexe.

2.1. TRANSFORMATION D'ÉCRITURE COMPLEXE

$z' = az + b$ où $(a;b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Prendre un bon départ

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.

Soit f une transformation du plan d'écriture complexe $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$.

1) Montrer que si M et N sont deux points quelconques du plan d'images respectives M' et N', alors M'N' = $|a|$ MN et en déduire que f est une similitude. Donner la valeur de son rapport.
2) a) Donner la nature de f dans le cas où $a = 1$ et $b \neq 0$.

   b) Quelle est l'application f si $a = 1 \, et \, b = 0$?
3) On suppose $a \neq 1$.

   a) Montrer que f admet un seul point invariant d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.

   b) Montrer que si le point M d'affixe z a pour image par f le point M' d'affixe z',

   alors on a $z' - \omega = a(z - \omega)$. En déduire que $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = a$.

   c) Montrer que $\Omega M' = |a| \Omega M$ et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}}\right) = \arg a$.

Retenir

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.

- Toute transformation d'écriture complexe $z' = az + b$ est une similitude directe du plan.
- Soit S une similitude directe du plan d'écriture complexe $z' = az + b$.
  - Si $a = 1$, S est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b .
  - Si $a = 1 \, et \, b = 0$, S est l'application identique du plan.
- Si $a \neq 1$, S a un seul point invariant d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$. S est la similitude directe de centre le point d'affixe ω , de rapport $|a|$ et d'angle de mesure arg a.

EXEMPLE

1) Soit l'application f d'écriture complexe $z' = (-1+i)z + 2i$.

L'écriture complexe de z est de la forme $z' = az + b$ avec $a = -1+i$ et $b = 2i$.

$|a| = |-1+i| = \sqrt{2}$; $1+i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

$\arg z = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Soit ω le nombre complexe tel que $\omega = a\omega + b$; $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{2i}{2-i}$;

$\omega = \frac{2i(2+i)}{4+1} = \frac{-2+4i}{5} = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$.

f est la similitude directe de centre le point d'affixe $\omega = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle dont une mesure est $\frac{3\pi}{4}$.

2) Soit f une application du plan dans le plan d'écriture analytique : $\begin{cases} x' = x - \sqrt{3}y + 1 \\ y' = \sqrt{3}x + y + 1 \end{cases}$

a) Déterminer l'écriture complexe de f.

b) Donner la nature de f ainsi que ses éléments caractéristiques.

Solution :

a) Soient M le point d'affixe z et M' d'affixe z' son image par f .

Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

$z' = x' + iy' = x - \sqrt{3}y + 1 + i\left(\sqrt{3}x + y + 1\right) = x - \sqrt{3}y + 1 + i\sqrt{3}x + iy + i.$

$z' = (x+iy) + i\sqrt{3}x - \sqrt{3}y + 1 + i = z + i\sqrt{3}(x+iy) + 1 + i$;

$z' = z + i\sqrt{3}z + 1 + i = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z + 1 + i$.

L'écriture complexe de f est $z' = \left(1+i\sqrt{3}\right)z + 1 + i$.

b) L'écriture complexe de f est de la forme $z' = az + b$ avec $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = 1+i$. f e[st] donc une similitude directe du plan.

$|a| = \left|1 + i\sqrt{3}\right| = 2.$ $a = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Soit ω l'affixe du point invariant par f.

On a $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{1+i}{i\sqrt{3}} = \frac{(1+i)\left(-\sqrt{3}\right)}{3} = \frac{-\sqrt{3} - i\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i$.

f est donc la similitude directe de centre le point d'affixe $-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i$, de rapport 2 et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{3}$.

S'exercer

2.a Dans chacun des cas suivants déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation d'écriture complexe :

a. $z' = z + \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ b) $z' = -2z + 3i$ c) $z' = iz + 1 - i$

d. $z' = \left(1 - \sqrt{3}i\right)z + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}i$ e) $z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{3}{2}\right)z$.

2.b Soit f une application du plan dans le plan d'écriture analytique : $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \end{cases}$.

1) Déterminer l'écriture complexe de f.
2) Donner la nature de f ainsi que ses éléments caractéristiques.

2.2. SIMILITUDES DIRECTES PARTICULIÈRES

Prendre un bon départ

On considère la similitude directe S d'écriture complexe $z' = az + b$.

1) Montrer que si a est un réel non nul et différent de 1, S est une homothétie.
2) Montrer que si a est un nombre complexe non nul et différent de 1 tel que $|a| = 1$, S est une rotation.
3) On suppose $a \neq 1$. Soit Ω le centre de la similitude S, θ une mesure de son angle et λ son rapport. Soient h l'homothétie de centre Ω et de rapport λ et r la rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ.

   Montrer que $S = h \circ r = r \circ h$.

Retenir

Soit la similitude directe S d'écriture complexe $z' = az + b$, de centre Ω, de rapport $|a|$ et d'angle de mesure θ.

- Si a est un réel non nul différent de 1, alors S est l'homothétie de centre Ω et de rapport a.
- Si a est un nombre complexe non nul et différent de 1 tel que $|a| = 1$, S est la rotation de centre Ω et d'angle dont une mesure est θ.
- Si h est l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$ et r la rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ, $S = h \circ r = r \circ h$.
- $h \circ r = r \circ h$ est la forme réduite de la similitude directe S.

REMARQUE

- Le rapport d'une similitude directe est un nombre toujours positif, alors que le rapport d'une homothétie peut être négatif.
- Si h est une homothétie de rapport k, où k est un réel non nul et différent de 1, h est une similitude directe de rapport $|k|$.

EXEMPLE

1) Dans chacun des cas suivants déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation d'écriture complexe donnée :

i. $z' = -2z + i$; ii. $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)z$; iii. $z' = \left(e^{i\frac{\pi}{3}} + 1\right)z + 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

i. La transformation d'écriture complexe $z' = -2z + i$ est l'homothétie de rapport -2 et de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{i}{3}$

ii. La transformation d'écriture complexe $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)z$ est une rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{6}$ car $\left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right| = 1$ *et* $\arg z = \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

Considérons la transformation d'écriture complexe

iii. $z' = \left(e^{i\frac{\pi}{3}} + 1\right)z + 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Posons $a = e^{i\frac{\pi}{3}} + 1 = \left(\cos\frac{\pi}{3} + 1\right) + i\sin\frac{\pi}{3} = 2\cos^2\frac{\pi}{6} + 2i\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}$

$$= 2\cos\frac{\pi}{6}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Cette transformation est une similitude plane directe de rapport $\sqrt{3}$, d'angle de mesure $\frac{\pi}{6}$ et de centre Ω d'affixe $\omega = -1 - i\sqrt{3}$ car

$$\frac{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}{1 - 1 - e^{i\frac{\pi}{3}}} = -\frac{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = -2e^{i\frac{\pi}{3}} = -2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$. est le point du plan d'affixe i. r est la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et r' la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{-\pi}{3}$.

a) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de $r' \circ r$.

L'écriture complexe de r est de la forme :

$z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + b$; or A est invariant par r donc $i = e^{i\frac{\pi}{3}}i + b$ et

$$b = i\left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = i\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)i = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \; ; \; z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

b) L'écriture complexe de   est donnée par : $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}z$.

c) L'écriture complexe de $r' \circ r$ est donnée par :

$$z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}z + e^{i\frac{\pi}{6}}\right) = e^{-i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}}z + e^{-i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{6}} = z + e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)} = z + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

$r' \circ r$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

S'exercer

2.c Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{e_1};\vec{e_2}\right)$. A est le point d'affixe $2i$ et B le point d'affixe $3+i$.

i. Déterminer l'affixe du point B tel que le triangle OAB soit équilatéral de sens direct.

ii. Déterminer l'affixe du point C tel que le triangle ODC soit équilatéral de sens indirect.

iii. Déterminer l'affixe du point E tel que $BOCE$ soit un parallélogramme.

iv. Réaliser la figure (placer les points A, B, C, D et E).

v. Justifier que le triangle AED est un triangle équilatéral.

2.d S et S' sont les transformations du plan d'écritures complexes respectives

$$z' = \left(2 - 2i\sqrt{3}\right)z + 2\sqrt{3} + i \; ; \qquad z' = \frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{3}}z.$$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $S, S', S'oS$ et SoS'.

S'ENTRAÎNER

NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

1.

Exprimer en fonction de l'affixe z du point M l'affixe z' du point M' où M' est l'image de M par :

i) la translation de vecteur $\vec{u}(-2\,;3)$;

ii) l'homothétie de centre $\Omega(-1;2)$ et de rapport $\sqrt{2}.$;

iii) La rotation de centre $\Omega(0\,;1)$ et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{4}$;

La rotation de centre $\Omega\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{2}{5}\right)$ et d'angle de mesure $\frac{3\pi}{4}$.

2.

f est la transformation du plan d'expression analytique donnée. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe de f.

i) $\begin{cases} x' = -4x+3 \\ y' = -4y-1 \end{cases}$; ii) $\begin{cases} x' = x-5 \\ y' = y+2 \end{cases}$;

iii) $\begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 1 \\ y' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - 3 \end{cases}$. ; iv) $\begin{cases} x' = -x+2 \\ y' = y-2 \end{cases}$.

3.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$. Déterminer l'écriture complexe de chacune des transformations suivantes :

i) la symétrie orthogonale d'axe (D) d'équation cartésienne $-3x+1=0$;

ii) la symétrie orthogonale d'axe (D) d'équation cartésienne $3y-12=0$;

iii) la symétrie orthogonale d'axe (D) d'équation cartésienne $y=-x$.

4.

Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation d'écriture complexe :

a) $z' = z+1-2i$; b) $z' = -3z+1+2i$;

c) $z' = iz+2-3i$;

d) $z' = \left(-1-\sqrt{3}i\right)z + 2 + 5\sqrt{3}i$

e) $z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$.

5.

Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation d'écriture complexe donnée.

a) $z' = z+2i$; b) $z' = \sqrt{2}z+1+i$;

c) $z' = iz$; d) $z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}z$;

e) $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + \frac{3+\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$.

6.

Soit r la rotation de centre A, d'affixe $3-i$ et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.

Donner l'écriture complexe de r.

7.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$. Les point A, B, C, I ont pour affixes respectives $1+i$, $2+i$, $-1+4i$, $-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$.

1) a) Démontrer que IA = IC.

b) Déterminer l'écriture complexe de la rotation r de centre I qui transforme A en C.

2) Déterminer l'écriture de la similitude directe qui transforme A en B et C en D.

8.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.

Soient f et g les applications d'écritures complexes respectives :

$z'=e^{-i\frac{\pi}{6}}z+2$; $z'=\frac{12+5i}{13}z-1+\frac{1}{2}i.$

1) a) Démontrer que f est une rotation ; préciser son angle.

b) Calculer l'affixe du centre Ω de la rotation f.

c) Soient O' et A' les images respectives par f de O et du point A d'affixe $-e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Déterminer les affixes des points O' et A'. Placer les points A, O' et A'.

2) a) Démontrer que g est une rotation.

b) Calculer l'affixe du centre G de la rotation g.

c) Donner l'affixe de l'image O_1 de O par g.

Placer les points G et O_1.

9.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$.

A, A', B et B' sont les points d'affixes respectives $1, -1, i$ et $-i$.

A tout point M d'affixe z distinct des points O, A, A', B et B', on associe les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2, tels que les triangles BMM_1 et AMM_2 soient rectangles et isocèles, avec $mes\left(\widehat{\overrightarrow{M_1B},\overrightarrow{M_1M}}\right)=mes\left(\widehat{\overrightarrow{M_2M},\overrightarrow{M_2A}}\right)=\frac{\pi}{2}$.

1) a) Justifier $z-z_1=i(i-z_1)$ et $1-z_2=i(z-z_2)$.

b) Vérifier que z_1 et z_2 peuvent s'écrire :

$$z_1=\frac{1+i}{2}(z+1)\ et\ z_2=\frac{1-i}{2}(z+i).$$

2) On se propose dans cette question de déterminer les points M pour lesquels le triangle OM_1M_2 est équilatéral.

a) Montrer que $OM_1=OM_2$ équivaut à $|z+1|=|z+i|$.

En déduire l'ensemble (D) des points M tels que $OM_1=OM_2$ et tracer (D).

b) Montrer que $OM_1=M_1M_2$ équivaut à $|z+1|^2=2|z|^2$.

c) En déduire que l'ensemble (Γ) des points M du plan pour lesquels $OM_1=M_1M_2$.

(On pourra montrer que $|z+1|^2=2|z|^2$ équivaut à $|z-1|^2=2$.) Tracer (Γ).

d) En déduire les deux points M pour lesquels OM_1M_2 est un triangle équilatéral et les placer sur la figure.

10.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

(E) : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0.$

b) On considère les nombres complexes $z_1=\sqrt{3}+i$ et $z_2=\sqrt{3}-i$ et on désigne par M et N les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_1 et z_2 ; Placer M et N sur la figure.

c) Déterminer les affixes des points Q et P images respectives de M et N par la translation de vecteur $\vec{w}=-2\vec{u}$. Placer P et Q sur la figure. Montrer que MNPQ est un carré.

2) Soit R le symétrique de P par rapport à O. E l'image de P par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$, S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.
Placer ces points sur la figure.
Calculer les affixes de R et de S. Montrer que S appartient au segment $[MN]$.

3) On pose $a = 2-\sqrt{3}$.
   a) Montrer que $1+a^2 = 4a$ et $1-a^2 = 2a\sqrt{3}$.
   b) Exprimer les affixes Z de $\overrightarrow{RS}$ et Z' de $\overrightarrow{PS}$ en fonction de a.
   c) Montrer que $|Z| = |Z'|$ et $\frac{Z}{Z'} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
   d) Déduire des questions précédentes la nature du triangle PRS.

11.

Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$. O_1 et O_2 sont les points d'affixes respectives –2 et 2. (C_1) et (C_2) sont les cercles de centres respectifs O_1 et O_2 passant par O.

1. Donner l'écriture complexe de :
   a) La translation T de vecteur $\overrightarrow{O_1O_2}$
   b) La rotation R de centre O_2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   c) La composée $f = R \circ T$.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
3. On désigne par O' l'image de O par f et par B le symétrique de O par rapport à O_2.
   Quelle est la nature du triangle $O_2O'B$?
4. On désigne par I le centre de f.
   Déterminer la nature du triangle O_1O_2I.
5. Soit M un point de (C_1). Démontrer que $M' = f(M)$ est un point de (C_2).

12.

Le plan complexe muni d'un repère orthonorm[é] direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $A(4i)$; $B(-1+i)$; $C(3)$. r est la rotation de centre A et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{3}$. On construit à l'extérieur du triangle ABC des triangles équilatéraux directs AEB, BFC et CGA.

1. Faire une figure illustrant les données.
2. Déterminer l'affixe du point E. S désig[ne] l'autre point d'intersection de la droite (BG) et du cercle circonscrit au triangle CGA.
3. Démontrer que S est situé aussi sur les cercle[s] circonscrit aux triangles AEB et BFC.
4. Démontrer que les points C, S et F sont alignés.
5. Démontrer que l'image de S par r appartie[nt] à la droite (BG).
6. En déduire que $SA + SB + SC = BG$

13.

ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AC = 2AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$. D est le barycentre de système $(A,-1)$;$(B,1)$ et $(C,1)$.

1. Faire une figure et placer le point D.
2. Construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que :
$$-MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{AD^2}{4}.$$
3. On désigne par S la similitude plane directe de centre A qui transforme B en C
   a) Déterminer l'angle et le rapport de S.
   b) Déterminer par construction l'image de D par S:
   c) Démontrer que (CE) et (BD) sont perpendiculaires et que CE = 2BD
   d) Évaluer en fonction de AD l'aire de $\Gamma' = S(\Gamma)$.

14.
Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. S est la transformation d'écriture complexe $z' = \frac{1}{2}iz + \frac{1-3i}{2}$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S ; On designe par A son centre.
2. M_0 est le point d'affixe $1+4\sqrt{3}+3i$.
   On pose $M_{n+1} = S(M_n)$.
   a) Calculer AM_n en fonction de n et déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $AM_n \leq 0,05$. Interpréter géométriquement ce résultat.
   b) Soit G_n l'isobarycentre des points $M_0, M_1, M_2 \ldots M_n$. Démontrer que $AG_n \leq \frac{16}{n+1}$ et en déduire la position de G_n quand n tend vers $+\infty$.
   c) On pose $d_n = M_n M_{n+1}$. Montrer que (d_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et calculer $x_n = d_0 + d_1 + \ldots + d_n$ en fonction de n. Calculer $d_0 = M_0M_1$ et en déduire la limite de x_n en $+\infty$.

PROBLÈMES

15.
Dans cet exercice, $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes et Re(z) la partie réelle du nombre complexe z. On note
$P(z) = z^3 - (6+5i)z^2 + (3+20i)z + 10 - 15i = 0$.

1- Déterminer les racines carrées du nombre complexe $w = 2i$.
2- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - (3+3i)z + 5i = 0$.
3- a) Montrer que $P(z) = [z^2 - (3+3i)z + 5i][z - (3+2i)]$.
   b) Déduire dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les solutions de l'équation $(E): P(z) = z^3 - (6+5i)z^2 + (3+20i)z + 10 - 15i = 0$.
   On notera z_1, z_2, z_3 les trois solutions de (E) telles que : $\text{Re}(z_1) < Re(z_2) < Re(z_3)$.

16.
1) Le plan orienté étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ unité de longueur sur les axes : 2cm.
   a) Placer les points M, P et Q d'affixes respectives $2+i; 1+2i; 3+2i$
   b) Montrer que le triangle MPQ est rectangle isocèle de sommet principal M
2) Soit r la rotation de centre M qui transforme P en Q.
   a) Déterminer en radians la mesure principale de l'angle de r .
   b) Donner une écriture complexe de r .

17.
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé directe $(0;\vec{i},\vec{j})$. On considère les points A et B d'affixes respectives : $2-i$ et $5+2i$.

1) Justifier que le point C, image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ a pour affixe $\frac{7-3\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$.
2) On note I le milieu de $[AB]$ et D l'image de A par l'homothétie de centre B et de rapport 2. Déterminer les affixes des points I et D.
3) Calculer $\frac{Z_C - Z_I}{Z_D - Z_I}$ et conclure.
4) On note r la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et h l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$.

a) Donner les écritures complexes de r et de h.

b) Donner la nature de hor et justifier que hor transforme C en I.

18.

Soit θ un nombre réel appartenant à $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et z un nombre complexe. On pose :

$P(z)=z^3-(2sin\theta+icos\theta)z^2+(1+isin2\theta)z-icos\theta.$

1. a) Calculer $P(icos\theta)$.
   b) En déduire que $P(z)=(z-icos\theta)(z^2-2sin\theta z+1)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$ et écrire ses solutions sous la forme exponentielle.
3. On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, les points A,B et C d'affixes respectives :
   $i\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   a) Construire A,B et C.
   b) Préciser la nature du triangle ABC.
   c) Donner la nature exacte et les éléments caractéristiques de la similitude directe de centre O qui transforme C en B.

19.

Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé $(0;\vec{u},\vec{v})$. On définit l'application F de (P) vers (P) qui à tout point M d'affixe $z=x+iy(x,y\in\mathbb{R})$ associe le point M' d'affixe $z'=x'+iy'(x',y'\in\mathbb{R})$ tel que : $\begin{cases}x'=x+y\sqrt{3}-\sqrt{3}\\y'=-x\sqrt{3}+y+\sqrt{3}\end{cases}$.

1) Montrer que $z'=(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}(1-i)$.
2) Quelle est la nature de F ? Donner ses éléments caractéristiques.

20.

a) Calculer $(1+3i)^2$.

b) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :
$z^2+(1-i)z+2-2i=0$

1) Soit φ l'application du plan complexe qui à tout point M d'affixe $z;z\neq-1$ associe le point M' d'affixe z' tel que :
$z'=\frac{iz-2+2i}{z+1}$.
   a) Montrer que l'application φ admet deux points invariants dont on précisera les affixes
   b) Déterminer l'ensemble (D_1) des points M du plan tels que $|z'|=1$
   c) On pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$, x,y,x'et y' réels. Exprimer x'et y' en fonction de $x$et y.
   d) Montrer que l'ensemble (Γ) des points M tels que z' soit réel est un cercle privé d'un point. préciser le centre et le rayon de (Γ).
   e) Montrer que l'ensemble (Δ) des points M tels que z' soit imaginaire pur est une droite privée d'un point. Donner une équation de (Δ).

21.

Le plan complexe est rapporté à un repère $(o,\vec{u},\vec{v})$. On considère la translation T de P dans P qui à tout point M d'affixe $z=x+iy$ associe le point M' d'affixe $z'=x'+iy'$ tel que $z'=z+i$. $(x,y,x',y'\in\mathbb{R})$.

1) a) Donner l'élément caractéristique de T.
   b) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
2) On désigne par R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Donner l'écriture complexe de R.
3) Soit la transformation $S=RoT$ qui, à tout point $M(x,y)$ d'affixe z associe le point $M_2(x_2,y_2)$ d'affixe z_2.

a) Démontrer que
$$z_2=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right).$$

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.

c) Déterminer l'expression analytique de S.

22.

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(0;\vec{u},\vec{v})$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3-8=0$.

2) On considère dans le plan P les points A,B et C d'affixes respectives :
$z_A=-1+i\sqrt{3}$, $z_B=2$ et $z_C=-1-i\sqrt{3}$

a) Écrire z_A et z_C sous forme trigonométrique.

b) Placer les points A,B et C.

c) Déterminer la nature du triangle ABC.

3) On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=e^{2i\frac{\pi}{3}}z$.

a) Caractériser géométriquement l'application f.

b) Déterminer les images des points A et C par f. En déduire l'image de la droite (AC) par f.

23.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$. On considère la suite des nombres complexes (z_n) définis par
$$\begin{cases} z_0=8 \\ z_{n+1}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}z_n \end{cases}.$$

1) Démontrer par récurrence que :
$z_n=\frac{1}{2^{n-3}}e^{in\frac{\pi}{3}}$.

2) En déduire de ce qui précède que le point M_n d'affixe z_n ne peut être situé sur l'axe des imaginaires quelle que soit la valeur de n.

3) Démontrer que le triangle OM_nM_{n+1} est un triangle rectangle.

4) Calculer $S_n=OM_0+OM_1+OM_2+\ldots+OM_n$ en fonction de n et calculer la limite de S_n en $+\infty$.

24.

Le plan complexe $\mathbb{C}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(0;\vec{u},\vec{v})$. On considère le polynôme complexe défini par :
$p(z)=z^4-4(1+i)z^3+12iz^2+8(1-i)z-20$.

1) On donne les points A,B,C et D d'affixes respectives : $-1+i$; $1-i$; $3+i$ et $1+3i$.
Placer dans le plan complexe les points A,B,C et D.

a) Montrer que les affixes respectives de ces points sont solutions de l'équation $p(z)=0$.

b) Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un carré

2) Soit h l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe M' d'affixe z' telle que : $z'=\frac{\sqrt{2}}{2}z+\frac{\sqrt{2}}{2}+i$.

a) Déterminer l'affixe du point Ω tel que $h(\Omega)=\Omega$.

b) En déduire la nature exacte et les éléments caractéristiques de h.

c) r est la rotation de centre Ω et d'angle dont une mesure est $15°$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de $s=hor$.

25.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(0,\vec{u},\vec{v})$. Unité d'axes 4cm. On considère les points $A,B,C\,et\,D$ d'affixes respectives $a,b,c\,et\,d$ tel que
$a=1, b=e^{i\frac{\pi}{3}}, c=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $d=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

1) Donner la forme exponentielle de c puis la forme algébrique de d.
2) Représenter les points A, B, C et D.
3) a) Démontrer que $OACB$ est un losange.
   b) Démontrer que les points D, A et C sont alignés.
4) S est la transformation d'écriture complexe, $z' = \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$.
   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation S.
5) Quelle est l'image de A par S ? Déterminer les images respectives F et G des points D et C par S.
6) Démontrer sans faire de calcul que les points F, C et G sont alignés.

26.

Dans le plan complexe rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère le polynôme complexe P définie par $P(z) = z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 20$.

1. Déterminer les complexes a et b tels que : $P(z) = (z^2+2i)(z^2+az+b)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3. Dans le plan complexe, placer les points A, B, C, D dont les affixes sont les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
4. Montrer que ces points sont les sommets d'un carré.

27.

Dans $\mathbb{C}$ soit l'équation

$(E): z^3 - 3iz^2 - (3-i)z + 2 + 2i = 0$

Sachant que (E) admet une racine réelle $z_0 = x_0$ et une racine imaginaire $z_1 = iy_1$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)
b) Calculer le module et un argument des racines z_0, z_1 et z_2.
c) Placer dans le plan complexe les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2.
d) Calculer : $\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$ et $\left|\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right|$, en déduire la nature du triangle $M_0M_1M_2$.

28.

Tracer un triangle ABC et construire extérieurement, les triangles équilatéraux ABD, BCE et CAE. On note A', B' et C' les centres de gravité respectifs des triangles BCE, CAF et ABD.

On suppose que mes $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{3}$.

Choisir le repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ tel que les affixes respectives de B et C soient -1 et 1. On note a l'affixe de A.

1) Déterminer l'écriture complexe de la rotation r_1 de centre A qui transforme B en D, puis celle de la rotation r_2 qui transforme C en E ; enfin la rotation r_3 de centre A qui transforme C en F.
2) Déduire de 1) les affixes d, e et f respectives des points D, E et F.
3) a) Déterminer les affixes a', b' et c' respectives des points A', B' et C'.
   b) Démontrer que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ est $\frac{3-i\sqrt{3}}{6}(a + i\sqrt{3}.)$.
4) Calculer $\frac{c'-a'}{b'-a'}$ et conclure.

29.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$ unité d'axe 4cm.

On donne $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1) Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes $-j$; $1+j$; $\frac{i}{1+j}$.
2) f est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -jz + 1$.
   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

Chapitre 5

DÉRIVATION – PRIMITIVES SUR UN INTERVALLE D'UNE FONCTION CONTINUE

LEÇON 1 DÉRIVATION.

1-1 DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE - CALCUL DES DÉRIVÉES.

1-2. DÉRIVÉES DES FONCTIONS COMPOSÉES - DÉRIVÉE DE LA FONCTION RÉCIPROQUE D'UNE FONCTION BIJECTIVE.

1-3 DÉRIVÉES SUCCESSIVES ET LEURS APPLICATIONS.

1-4 INÉGALITÉS DES ACCROISSEMENTS FINIS.

LEÇON 2 ÉTUDE ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE QUELQUES FONCTIONS.

LEÇON 3 PRIMITIVES SUR UN INTERVALLE D'UNE FONCTION CONTINUE.

3-1 PRÉSENTATION ET DÉFINITION.

3-2 RECHERCHE PRATIQUE DES PRIMITIVES SUR DES INTERVALLES DE CERTAINES FONCTIONS CONTINUES.

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1 DÉRIVATION.

- Étudier la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle.
- Calculer et utiliser la dérivée ou les dérivées successives d'une fonction.
- Calculer et utiliser la dérivée de la composée de deux fonctions et de la réciproque d' fonction sur un intervalle.
- Reconnaître et utiliser les inégalités des accroissements finis.

1.1. DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE - CALCUL DES DÉRIVÉES.

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit f la fonction numérique définie par : $f : x \mapsto \sqrt{1-|x|}$.

- Vérifier que f est définie sur l'intervalle $[-1;1]$.
- Montrer que $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{-|x|}{x\left(\sqrt{1-|x|}+1\right)}$. En déduire que n'est pas dérivable en 0
- Étudier la dérivabilité de f à droite en -1 et à gauche en 1.
- Soit $x_0 \in]0\,;1[$, montrer que f est dérivable en x_0.
- Peut-on dire que f est dérivable en tout $x_0 \in [0\,;1[$?
- Déterminer la fonction dérivée de f sur $]0;1[$.

Activité 2

1) Pour chacune des fonctions ci-dessous, préciser le plus grand ensemble sur lequel elle est vable et y définir sa fonction dérivée .

$x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto \cos x$; $x \mapsto \sin(2x - \dfrac{\pi}{4})$.

2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$,
   - La dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^n$ est la fonction $x \mapsto nx^{n-1}$.
   - La dérivée sur $\mathbb{R}^*$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{-n}{x^{n+1}}$.

Retenir

(1) Soit f une fonction. Soient a et b deux réels tels que $a<b$ et f définie sur l'intervalle $[a;b]$.

- On dit que ***f* est dérivable sur l'intervalle** $]a;b[$ si f est dérivable en tout $x_0 \in]a;b[$.
- On dit que ***f* est dérivable sur l'intervalle** $[a;b]$ si f est dérivable sur $]a;b[$, dérivable à droite en a et à gauche en b.
- On dit que ***f* est dérivable sur l'intervalle** $]a;b]$ si f est dérivable sur $]a,b[$ et dérivable à gauche en b. On définit de manière analogue la dérivabilité de f sur l'intervalle semi-ouvert $[a;b[$.

(2) On dit qu'***une fonction est dérivable sur un intervalle K*** si elle est dérivable en tout élément x_0 de K.

(3) Si une fonction est dérivable sur un intervalle K alors elle est continue sur K.

EXEMPLE 1

1. Soit f la fonction numérique définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=(x-1)\sqrt{x-1}$.
   Étudions la dérivabilité de f sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

   a) Soit $x_0 \in]1;+\infty[$.
   $x_0-1 \in]0;+\infty[$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$. Donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x-1}$ est dérivable en x_0. Par ailleurs, la fonction : $x \mapsto x-1$ est dérivable en x_0 ; donc la fonction f est dérivable en x_0 comme produit de fonctions dérivables en x_0. On en déduit que f est dérivable sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

   b) Pour $x \neq 1$ on a $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\sqrt{x-1}$; donc $\lim\limits_{x \to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$ et par conséquent f est dérivable en 1.
   En définitive, d'après a) et b), la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

2. Soit h la fonction numérique définie sur $]-\infty;3]$ par $h(x)=\sqrt{3-x}+1$.
   Étudions la dérivabilité de h sur l'intervalle $]-\infty;3]$.

   a) De la même qu'à 1. a), on montre que la fonction h est dérivable sur l'intervalle $]-\infty;3[$.

b) $\dfrac{h(x)-h(3)}{x-3}=\dfrac{\sqrt{3-x}}{x-3}=\dfrac{-1}{\sqrt{3-x}}$ pour tout $x \neq 3$;donc $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{h(x)-h(3)}{x-3}=-$

h n'est pas dérivable en 3.

Finalement, h n'est pas dérivable sur $]-\infty;3]$.

3. La fonction $f: x \mapsto \sqrt{1-|x|}$ est continue sur $[-1;1]$ mais n' y est pas dérivable car elle n'
pas dérivable en 0, à gauche en 1 et à droite en -1.

REMARQUE 1

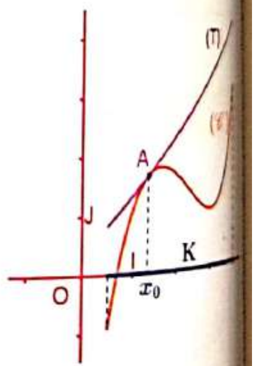
- *Dérivabilité sur un ensemble*

On dit qu'une fonction est dérivable ***sur un ensemble E*** si elle est dérivable en tout élém
de E.

Par exemple, la fonction $f: x \mapsto \sqrt{1-|x|}$ de l'activité 1 ci-dessus est dérivable sur l'ensemble $E=]-1;0[\cup]0;1[$.

- *Dérivabilité sur un intervalle et courbe représentative*

Soit f une fonction continue sur un intervalle K et de courbe représentative ($\mathscr{C}$) sur K dans un repère (O, I, J).



a) Si f est dérivable sur un intervalle K, alors ($\mathscr{C}$) admet en tout point d'abscisse x_0 de K une tangente non parallèle à l'axe (OJ) des ordonnées .

b) On montre également que si ($\mathscr{C}$) admet au point d'abscisse x_0 une tangente non parallèle à l'axe (OJ), alors la fonction f est dérivable en x_0 .

1) Tableau récapitulatif des dérivées et opérations sur les fonctions dérivées.

Dérivée des fonctions usuelles		
Fonction	Fonction dérivée	Ensemble de dérivabilité
$x \mapsto k,\ k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$	$x \mapsto nx^{n-1}$	

Dérivées et opérations sur les fonctions		
Fonctions u et v dérivables sur un intervalle K	dérivée	Contraintes de dérivabilité
$u+v$	$u'+v'$	
ku ;	ku'	
$u \times v$	$u'v+uv'$	
$x \mapsto u(ax+b)$	$x \mapsto a \times u'(ax+b)$	$ax+b \in K$
$u^n, n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$	$nu'u^{n-1}$	

$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	v est non nul sur K
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$, $(n \in \mathbb{N}\, et\, n \geq 2)$	$x \mapsto \frac{-n}{x^{n+1}}$		$\frac{1}{v^n}$ $(n \in \mathbb{N}\, et\, n \geq 2)$	$-n \times \frac{v'}{v^{n+1}}$	
$x \mapsto tanx$	$x \mapsto 1 + tan^2 x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	u strictement positive sur K

S'EN CONVAINCRE

1. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K . Montrons que : *pour tout entier naturel $n \geq 2$,la fonction u^n est dérivable sur K et sa dérivée est $nu'u^{n-1}$* .

   Par récurrence sur n .

   a) Pour $n = 2$, la fonction $u^2 = u \times u$ est dérivable sur K comme produit des fonctions et $(u^2)' = u' \times u + u \times u' = 2u'u = 2u'u^{2-1}$.

   b) Soit k un entier naturel tel que $k \geq 2$. Supposons que la propriété est vraie au rang k et montrons qu'elle l'est aussi au rang $(k+1)$.

- $u^{k+1} = u^k \times u$ et par hypothèse de récurrence u^k est dérivable sur K donc u^{k+1} est dérivable sur K comme produit de deux fonctions dérivables sur K.
- Par ailleurs $(u^{k+1})' = (u^k \times u)' = (u^k)'u + u^k u' = ku'u^{k-1}u + u^k u'$ car par hypothèse de récurrence on a $(u^k)' = ku'u^{k-1}$.

Ainsi $(u^{k+1})' = ku'u^{k-1}u + u^k u' = ku'u^k + u'u^k = (k+1)u'u^{(k+1)-1}$ donc la propriété est vraie au rang $(k+1)$.

D'après le principe de la preuve par récurrence, pour un entier naturel $n \geq 2$, la fonction u^n est dérivable *sur K et sa dérivée est $nu'u^{n-1}$*.

2. Soit v une fonction dérivable et non nulle sur K. est dérivable et non nulle sur K et $\frac{1}{v^n}$ est donc dérivable sur K et on a :

$$\left(\frac{1}{v^n}\right)' = \frac{0 \times v^n - 1 \times (v^n)'}{(v^n)^2} = \frac{-nv'v^{n-1}}{v^{2n}} = \frac{-nv'v^{n-1}}{v^{(n+1)+(n-1)}} = \frac{-nv'v^{n-1}}{v^{(n+1)} \times v^{(n-1)}} = -n \times \frac{v'}{v^{n+1}}.$$

REMARQUE 2

Si u est dérivable et non nulle sur K, alors pour $n \in \mathbb{Z}^*$, *la fonction* u^n *est dérivable sur K et sa dérivée est* $nu'u^{n-1}$.

Pour $n \in \mathbb{Z}^*_-$, on pose $p = -n$ et $u^n = \dfrac{1}{u^p}$ donc $\left(u^n\right)' = \left(\dfrac{1}{u^p}\right)' = -p \times \dfrac{u'}{u^{p+1}} = nu'u^{n-1}$

EXEMPLE 2

1. Calculons la dérivée sur $[1, +\infty[$ de la fonction dérivée de la fonction $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{x-1}$.

$$f'(x) = \sqrt{x-1} + (x-1) \times \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$= \sqrt{x-1} + \frac{(x-1)}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3}{2}\sqrt{x-1} \text{ avec } x \neq 1 \text{ ;soit } \boxed{f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x-1}}.$$

2. Définissons la dérivée sur $E =]-1\,;0[\cup]0\,;1[$ et sur $F = [0\,;1[$ de la fonction dérivée de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-|x|}$

- ***Dérivée sur*** $E =]-1\,;0[\cup]0\,;1[$

Sur $]-1\,;0[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$.

Sur $]0\,;1[$, $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}$.

Donc sur E on a :

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} & si\, x \in]-1,0[\\ f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} & si\, x \in]0,1[\end{cases}$$

- ***Dérivée sur*** $F = [0\,;1[$.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{-|x|}{x(\sqrt{1-|x|}+1)}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{\sqrt{1-x}+1} = -\frac{1}{2}$$

Donc f est dérivable à droite en 0. Ainsi, sur F,

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}.$$

S'exercer

1.a On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - 2|x| + 3$.

- Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f.
- Définir la fonction dérivée de f sur chacun des ensembles suivants : $[0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
- f admet-elle une fonction dérivée sur $\mathbb{R}$? Justifier.

1.b Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f, sur son ensemble de définition et définir sa dérivée.

a) $f(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$; b) $f(x) = (x-3)\sqrt{3-x}$; c) $f(x) = (x-1)\sqrt{x^2 - 1}$

d) $2x^2 + |x| - 1$; e) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{|x| - 1}$.

1.c Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions ci-dessous définies :

$$f(x) = x^3 + 2\sqrt{x^2+1} \ ; \ g(x) = \frac{1}{x^4+1} \ ; \ h(x) = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^3} \ ; \ p(x) = \left(x^2 - 3x + 2\right)^5 \ ;$$

$$t(x) = \cos\left(3x + \frac{2\pi}{5}\right) \ ; \ s(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x + 3}.$$

1.2. DÉRIVÉES DES FONCTIONS COMPOSÉES - DÉRIVÉE DE LA FONCTION RÉCIPROQUE D'UNE FONCTION BIJECTIVE.

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit K un intervalle ; f une fonction dérivable sur un intervalle K et g une fonction dérivable sur $f(K)$.

- Justifier que $f(K)$ est un intervalle.
- Soit $(x_0 ; x) \in K^2$ tels que $x \neq x_0$. Vérifier que si $f(x) \neq f(x_0)$ alors:

$$\frac{(g \circ f)(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- Justifier que g est dérivable en $f(x_0)$.
- Montrer que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \times g' \circ f(x_0)$.
- En déduire que la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 et que son nombre dérivé en x_0 est
$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'[f(x_0)]$.

Activité 2

Soit f la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

- Montrer que f est continue et strictement monotone sur $[0; +\infty[$.
- Monter que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on déterminera.
- Montrer que la bijection réciproque de f est définie sur J par $f^{-1}(x) = \sqrt{x^2-1}$.
- Étudier la continuité et la dérivabilité de f^{-1} en 1.

Retenir

(1) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K et g une fonction dérivable sur $f(\mathrm{K})$, alors $g \circ f$ est dérivable sur K et pour tout $x \in \mathrm{K}$ on a :
$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$.

(2) Soit f une fonction dérivable, strictement monotone sur un intervalle K.

- La fonction f réalise une bijection de K vers $f(K)$.
- Soit a un réel de $f(K)$. f^{-1} est dérivable en a si et seulement si $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$.

  Dans ce cas , on a : $(f^{-1})'(a) = \dfrac{1}{f'[f^{-1}(a)]}$.

(3) Soit r un nombre rationnel non nul ; u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K.

- La fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto rx^{r-1}$.
- La fonction u^r est dérivable sur K et sa dérivée est la fonction $ru'u^{r-1}$.

S'EN CONVAINCRE

Soit f une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle K.

a) f est continue et strictement monotone sur K et donc f réalise une bijection de K vers $f(\mathrm{K})$.

b) Supposons que pour tout $x \in K$, on a $f'(x) \neq 0$ et montrons que f^{-1} est dérivable sur $f(K)$ et $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Soit y_0 *et* y deux réels distincts de $f(K)$. Il existe un unique couple $(x_0 \,;\, x) \in \mathrm{K}^2$ tels que $y_0 = f(x_0)$ et $y = f(x)$.

Comme $y \neq y_0$, $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0)$ car f^{-1} est injective, c'est-à-dire que $x \neq x_0$.

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}.$$

f étant dérivable sur K, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$. De plus, $f'(x_0) \neq 0$ car $x_0 \in K$.

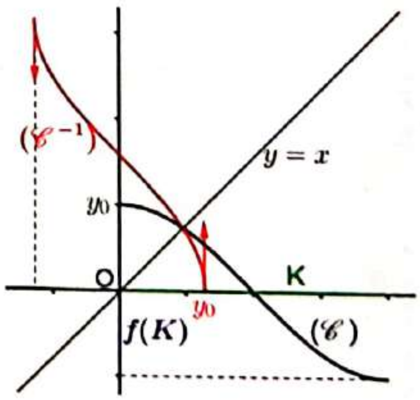
Donc $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$. Ainsi , la fonction $y \mapsto \dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}$ admet une limite finie en tout y_0 *de* $f(\mathrm{K})$ tel que $y_0 = f(x_0)$ et $f'(x_0) \neq 0$.

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y_0)}.$$

REMARQUE

a) S'il existe $y_0 \in f(K)$ tel que $(f' \circ f^{-1})(y_0) = 0$ alors f^{-1} n'est pas dérivable en y_0 et sa courbe $\left(\mathcal{C}^{-1}\right)$ admet au point d'abscisse y_0 une tangente ou une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées dans un repère orthonormé.

b) La fonction $x \mapsto x^r$ avec $r \in \mathbb{Q}^*$ est dérivable en 0 si et seulement si $r \geq 1$.



EXEMPLE

1. Soit la fonction définie par $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$.

Étudions la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et déterminons sa fonction dérivée.

Posons $u : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ et $v : x \mapsto sinx$ on a $f = v \circ u$ et $D_f = \mathbb{R}$

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1$ donc $u(\mathbb{R}) \subset]0,1]$.

v est dérivable sur $]0;1]$; donc $f = v \circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

2. Soit la fonction g définie de $[0\,;\pi]$ vers $[-1;1]$ par : $g(x) = cosx$.

   a) Démontrons que g admet une bijection réciproque.

   g est dérivable sur $[0\,;\pi]$ et $g'(x) = -sinx$;donc g est strictement décroissante.

   $g([0\,;\pi]) = [\cos\pi;\cos o] = [-1;1]$. Ainsi, g réalise une bijection de $[0\,;\pi]$ vers $[-1;1]$ et par conséquent, admet une bijection réciproque.

   b) Déterminons un ensemble J sur lequel g^{-1} est dérivable et déterminons $(g^{-1})'(x)$ pour tout $x \in J$.

   $g'(0) = 0$ et $g'(\pi) = 0$. g^{-1} est donc dérivable sur $J =]-1;1[$ et

   $$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1})(x)} = \frac{1}{-\sin\left[g^{-1}(x)\right]}.$$

   Par ailleurs,

   $$\sin^2\left[g^{-1}(x)\right] = \left[\sin\left(g^{-1}(x)\right)\right]^2 = 1 - \left[\cos\left(g^{-1}(x)\right)\right]^2 = 1 - \left[g\left(g^{-1}(x)\right)\right]^2 = 1 - x^2.$$

   Donc

   $x \in]-1;1[\Rightarrow 1 - x^2 > 0$. $\sqrt{\sin^2\left[g^{-1}(x)\right]} = \sqrt{1-x^2}$. $\left|\sin\left[g^{-1}(x)\right]\right| = \sqrt{1-x^2}$

   Or

   Comme $g^{-1}(x) \in]0;\pi[$, $\sin\left[g^{-1}(x)\right] > 0$ et donc $\sin\left[g^{-1}(x)\right] = \sqrt{1-x^2}$.

   Finalement, $\boxed{(g^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ pour tout } x \in J}$.

3. a)Les fonctions $u : x \mapsto x^{-\frac{1}{3}}$ et $v : x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$ et ont pour dérivées respectives les fonctions $u' : x \mapsto -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$ et $v' : x \mapsto \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.

La fonction $w : x \mapsto x^{\frac{4}{3}}$ est dérivable sur $[0,\ +\infty[$ et sa dérivée est la fonction $w : x \mapsto \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$.

b) Soit $f : x \mapsto (x^3 - 1)^{-\frac{5}{4}}$. Étudions la dérivabilité de f sur D_f et définissons sa dérivée.

$x \in D_f \Leftrightarrow x^3 - 1 > 0$ car $-\frac{5}{4} < 0$. Ainsi, $x > 1$ et donc $D_f =]1; +\infty[$.

La fonction $u : x \mapsto x^3 - 1$ est dérivable et est strictement positive sur D_f. Par conséquent, f est dérivable sur D_f.

$$f'(x) = -\frac{5}{4}(u'(x))(x^3 - 1)^{-\frac{5}{4}-1} = -\frac{5}{4} \times 3x^2 (x^3 - 1)^{-\frac{9}{4}} \text{ où } u(x) = x^3 - 1.$$

$$\underline{\underline{f'(x) = -\frac{15}{4}x^2 (x^3 - 1)^{-\frac{9}{4}}}}$$

Exercice Résolu.

1. Soit la fonction f défnie de $[0;+\infty[$ vers $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Montrer que f réalise une bijection et déterminer l'ensemble de dérivabilité J de f^{-1}.
   b) Définir f^{-1} et déterminer sa dérivée sur J.
2. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^r$ avec $r \in \mathbb{Q}^*$
   a) Écrire g comme composée de deux fonctions puis en déduire que g est dérivable sur $]0, +\infty[$.
   b) Déterminer la dérivée de g sur $]0, +\infty[$.
3. Soit r un nombre rationnel non nul, u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle K. Démontrer que la fonction u^r est dérivable sur K et que sa dérivée est $ru'u^{r-1}$.

Solution

1. $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrons que f réalise une bijection et déterminons l'ensemble de dérivabilité J de f^{-1}.

f est continue et dérivable sur $[0; +\infty[$ et $f'(x) = nx^{n-1}$, donc f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

si $\geq$,alors $n-1 \geq 1$ et donc $f'(0) = 0$. f^{-1} n'est pas dérivable en 0 et alors J$=]0;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

b) Définissons f^{-1} et calculons de $(f^{-1})'$.

Soit $y \in [0, +\infty[$, cherchons $x \in [0; +\infty[$ tel que $y = f(x)$.

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^n \Leftrightarrow y^{\frac{1}{n}} = x \;. \; \underline{\underline{f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \text{ sur } [0\,;+\infty[}}.$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x)} = \frac{1}{f'(\sqrt[n]{x})} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}. \quad \underline{\underline{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}}}$$

pour tout $x \in]0\,;+\infty[$.

2. a) Écrivons g comme composée et étudions sa dérivabilité.

Posons $r=\frac{p}{q}$ avec $p\in\mathbb{Z}^*$ et $q\in\mathbb{N}^*$ alors

$g(x)=x^{\frac{p}{q}}=\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{r}=(v\circ u)(x)$ où $u(x)=x^{\frac{1}{q}}$ et $v(x)=x^{r}$. u est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et

$u(]0\,;+\infty[)=]0\,;+\infty[$, v est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme composée des fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$.

b) Dérivée de g sur $]0\,;+\infty[$.

$$g'(x)=u'(x)\times v'(u(x))=\frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}\times p\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1}=\frac{p}{q}x^{\frac{1}{q}-1+\frac{p}{q}-\frac{1}{q}}=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}.\quad \underline{\underline{g'(x)=rx^{r-1}}}$$

3. On peut écrire $u^{r}=g\circ u$ et par ailleurs, $u(\mathrm{K})\subset]0\,,+\infty[$ et g est dérivable sur $]0\,,+\infty[$. u^{r} est dérivable sur K et pour tout $x\in\mathrm{K}$,

$$(u^{r})'(x)=(g\circ u)'(x)=u'(x)\times(g'\circ u)(x)=u'(x)\times ru^{r-1}(x).$$

$$(u^{r})'=ru'u^{r-1}$$

S'exercer

1.d Étudier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition et déterminer sa fonction dérivée

a) $f:x\mapsto\cos(x^{3}+2x)$; b) $f:x\mapsto x^{-\frac{4}{3}}$; c) $f:x\mapsto\sqrt[3]{x^{4}}$; d) $f:x\mapsto(x-1)^{\frac{3}{2}}$;

e) $f:x\mapsto(1-|x|)^{\frac{2}{5}}$.

1.e Montrer que la fonction $f:x\mapsto\tan\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur l'intervalle $\left]-\frac{2}{\pi}\,;\,\frac{2}{\pi}\right[$.

1.f Soit f la fonction définie de $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x)=\tan(x)$.

a) Montrer que f admet une bijection réciproque.

b) Justifier que est dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) Démontrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, on a $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{x^{2}+1}$.

1.g Soit la fonction numérique g définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x)=x\sqrt{x}$.

a) Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont on déterminera l'ensemble de définition.

b) Déterminer l'ensemble J sur lequel g^{-1} est dérivable.

c) Déterminer de deux façons la dérivée de g^{-1} sur J.

1.3. DÉRIVÉES SUCCESSIVES ET LEURS APPLICATIONS

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x^{\frac{5}{2}}+x^{3}+2x+1$.

Déterminer les fonctions dérivées f' , f'' , $f^{(3)}$ et $f^{(4)}$. Justifier la dérivabilité de chacune de toutes ces fonctions sur $]0;+\infty[$ avant tout calcul.

Activité 2

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle K. Soit $x_0 \in \mathrm{K}$ et

(T) : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point M_0 d'abscisse x_0.

Soit la fonction $h: x \mapsto f(x)-[f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)]$.

a) Justifier que h est dérivable sur K et vérifier que $\forall x \in K$, $h'(x)=f'(x)-f'(x_0)$ et calculer $h'(x_0)$.

b) On suppose que f'' est *strictement négative sur* K.

- Justifier que f' est décroissante sur K.
- Soit $x \in \mathrm{K}$, justifier que : $x > x_0 \Rightarrow h'(x) < 0$ et $x < x_0 \Rightarrow h'(x) > 0$. Dresser le tableau des variations de h sur K. En déduire que sur K, $(\mathcal{C}_f)$ est en dessous de (T).

c) On suppose que f'' est *strictement positive sur* K. Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ est au dessus de (T).

d) Déduire de b) et c) que si f'' s'annule en x_0 en changeant de signe alors M_0 est un point d'inflexion à la courbe $(\mathcal{C}_f)$

Retenir

(1) Soit f une fonction et K un intervalle.

- Si f est dérivable sur K, alors sa dérivée f' est appelée dérivée première de f et on la note aussi $f^{(1)}$.
- Si f' est dérivable sur K, alors sa dérivée f'' est appelée dérivée seconde de f et on la note aussi $f^{(2)}$.
- De manière progressive, alors la fonction dérivée $n-ième$ de f sur K, lorsqu'elle existe est la dérivée de la fonction dérivée d'ordre $n-1$ sur K et on la note $f^{(n)}$ ou encore $\dfrac{d^n f}{dx^n}$

(2) Si f'' s'annule en changeant de signe en x_0, alors le point d'abscisse x_0 est un point *d'inflexion à la courbe de f.*

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto \sin x$

$$f'(x) = cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \;;\; f''(x) = -\sin(x) = \sin(\pi + x) = \sin\left(2\times\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$f^{(\ )}(x) = -cos(x) = \sin\left(3\times - + x\right),\; f^{(4)}(x) = sin(x) = \sin\left(4\times\frac{\pi}{2}+x\right).$$

Démontrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$.

Soit la propriété : « $f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$ ».

- Pour $n=1$, on a $f^{(1)}(x) = cos(x) = \sin\left(\frac{1\times\pi}{2}+x\right)$. La proprité est vraie pour $n=1$.
- Soit $k\geq 1$, tel que la propriété soit vraie pour k . Montrons qu'elle est aussi vraie pour $k+$

Par hypothèse de récurrence $f^{(k)}(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{2}+x\right)$.

$$f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}\right)'(x) = cos\left(\frac{k\pi}{2}+x\right) = 1\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2}+x\right).$$

$f^{(k+1)}(x) = sin\left(\frac{(k+1)\pi}{2}+x\right)$ donc la propriété est vraie pour $k+1$.

En conclusion, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$.

Exercice Résolu

Soit la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f : x \mapsto \frac{1}{2x-1}$. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ la fonction f est n fois dérivable sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et que $f^{(n)}(x) = \frac{n!(-2)^n}{(2x-1)^{n+1}}$.

Solution

Désignons par $\mathcal{P}(n)$ la propriété: "La fonction f est n fois dérivable sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et que $f^{(n)}(x) = \frac{n!(-2)^n}{(2x-1)^{n+1}}$.

- Pour $n=1$, f est dérivable sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ car $2x-1\neq 0$ et

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{-2}{(2x-1)^2} = \frac{1!(-2)^1}{(2x-1)^{1+1}}$$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.

- Supposons que pour $k \geq 1$, la propriété est vraie au rang k et montrons qu'elle l'est aussi au rang $(k+1)$.

Par hypothèse de récurrence, f est k fois dérivable sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!(-2)^k}{(2x-1)^{k+1}} = k!(-2)^k \times \left(\frac{1}{2x-1}\right)^{k+1}$$

La fonction $u : x \mapsto \frac{1}{2x-1}$ est dérivable sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et $u\left(\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[\right) =]0;+\infty[$

La fonction $v : x \mapsto x^{k+1}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc $v \circ u$ est dérivable et comme $f^{(k)} = k!(-2)^k\, v \circ u$ alors $f^{(k)}$ est dérivable sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$. On a alors

$$f^{(k+1)}(x) = k!(-2)^k\,(k+1)\frac{-2}{(2x-1)^{k+1+1}} = \frac{(k+1)!(-2)^{k+1}}{(2x-1)^{(k+1)+1}}$$. $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f est n fois dérivable sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!(-2)^n}{(2x-1)^{n+1}}.$$

S'exercer

1.e Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x + 1$.

Montrer que la fonction g admet deux points d'inflexion sur son ensemble de définition.

1.f Définir la dérivée d'ordre 5 de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que f est n fois dérivable sur $]-\infty; 0[$ et que sa dérivée d'ordre n est définie sur $]-\infty; 0[$ par $f^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

1.g Soit la fonction $h :\ x \mapsto \cos(x)$

- Exprimer les dérivées $h', h'', h^{(3)}$ et $h^{(4)}$ comme composées de h et d'une fonction affine.
- Conjecturer une expression de la dérivée $n^{ième}$ en fonction de n, $(n \geq 1)$.
- Démontrer cette conjecture par récurrence.

1.4. INÉGALITÉS DES ACCROISSEMENTS FINIS

Prendre un bon départ

Activité 1

Le débit d'un robinet est compris entre $15l/min$ et $20l/min$. Déterminer en litres le volumes minimal et maximal d'eau qui s'écoule de ce robinet en 1 heures.

Activité 2

Soit une fonction dérivable sur un intervalle K à dérivée bornée sur K.

Soient a et b deux éléments de K tels que $a<b$; m et M deux nombres réels tels que pour tout $x\in[a\,;b]$, $m\leq f'(x)\leq M$.

On considère les fonctions g et h définies par $\begin{aligned} u: K &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto mx-f(x) \end{aligned}$ et $\begin{aligned} v: K &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto Mx-f(x) \end{aligned}$

- Justifier que u est dérivable sur K et que $u'(x)=m-f'(x)$ pour tout $x\in K$.
- En déduire que u est décroissante sur K et que $m(b-a)\leq f(b)-f(a)$.
- Montrer par la même méthode que $f(b)-f(a)\leq M(b-a)$.
- En déduire que : $m(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M(b-a)$.

Retenir

Soit f une fonction *dérivable sur un intervalle* K. Soient a et b deux éléments de K tels que $a<b$.

- S'il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout $x\in[a\,;b]$, $m\leq f'(x)\leq M$ alors on a l'inégalité : $m(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M(b-a)$. *Ces inégalités sont dites des accroissements finis.*
- Conséquence immédiate
  S'il existe un nombre réel A positif tel que pour tout $x\in[a\,;b]$, $|f'(x)|\leq \mathrm{A}$, alors $|f(b)-f(a)|\leq \mathrm{A}|b-a|$

S'EN CONVAINCRE

Si pour tout $x\in[a\,;b]$, $|f'(x)|\leq \mathrm{A}$ alors $-\mathrm{A}\leq f'(x)\leq \mathrm{A}$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis on a : $-\mathrm{A}(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq \mathrm{A}(b-a)$ d'où $|f(b)-f(a)|\leq \mathrm{A}|b-a|$.

EXEMPLE

Démontrons que $\forall x \in [1\,;2]$ on a :

a) $\sqrt{2}(x-2) \leq \sqrt{x^2+1} - \sqrt{5} \leq \frac{\sqrt{5}}{5}(x-2)$; b) $\left|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}\right| \leq \sqrt{2}(x-1)$.

Considérons la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$. f est dérivable sur $[1; 2]$ et pour tout $x \in [1, 2]$, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. En encadrant $f'(x)$, on a $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq f'(x) \leq \sqrt{2}$.

Soit $x \in [1; 2]$

a) L'intervalle $[x\,;2] \subset [1; 2]$. Ainsi, pour tout $a \in [x\,;2]$ on a $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq f'(a) \leq \sqrt{2}$.

En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[x\,;2]$, on a :

$\frac{1}{\sqrt{5}}(2-x) \leq f(2) - f(x) \leq \sqrt{2}(2-x)$ d'où $\boxed{\sqrt{2}(x-2) \leq \sqrt{x^2+1} - \sqrt{5} \leq \frac{\sqrt{5}}{5}(x-2)}$.

b) L'intervalle $[1\,;x] \subset [1; 2]$; donc pour tout $a \in [1;x]$ on a $-\sqrt{2} \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \leq f'(a) \leq \sqrt{2}$.

Ainsi $|f'(a)| \leq \sqrt{2}$. En appliquant la conséquence de la propriété des inégalités des accroissements finis sur l'intervalle $[1\,;x]$ on a : $|f(x) - f(1)| \leq \sqrt{2}(x-1)$

c'est- à-dire $\left|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}\right| \leq \sqrt{2}(x-1)$.

S'exercer

1. h Démontrer que pour tout nombre réel $x \in [0\,;1]$ on a :

a) $\frac{x\sqrt{2}}{4} + 1 \leq \sqrt{x+1} \leq \frac{x}{2} + 1$; b) $\left|\sqrt{x+1} - 1\right| \leq \frac{x}{2}$.

1.i Soit la fonction $f : x \mapsto \sin x$.

a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, en appliquant les inégalités des accroissements finis sur l'intervalle $[0;\ \alpha]$, montrer que : $-\alpha \leq \sin\alpha \leq \alpha$.

b) Montrer que pour tout couple $(a\,;b)$ des réels, on a : $|\sin a - \sin b| \leq |a-b|$.

LEÇON 2 ÉTUDE ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE QUELQUES FONCTIONS.

- Utiliser les nouvelles propriétés liées aux notions de continuité et de dérivation sur un intervalle pour y étudier les variations d'une fonction.
- Utiliser les branches infinies pour représenter graphiquement la courbe d'une fonction

Prendre un bon départ

On considère les fonctions $f : x \mapsto sin|x| - \frac{1}{2}x^2 + 1$ et $g : x \mapsto \cos(x) - x$. On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Activité 1

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

- Vérifier que $\alpha \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$, puis en déduire le signe de g dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

Activité 2

- Étudier la branche infinie à la courbe de f en $+\infty$.
- Étudier la dérivabilité de f en 0.
- Montrer que f est une fonction paire.
- Dresser le tableau des variations de f sur $[0; +\infty[$ et sur son ensemble de définition.
- Représenter la courbe $(\mathcal{C}_f)$. *On prendra pour la représentation* $\alpha \simeq 0,73$ et $f(1,93) = 0$.

Retenir

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et de courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère du plan.

(1) Pour étudier les variations de la fonction f, il est nécessaire :
- d'étudier éventuellement la parité, la périodicité de f sur D_f.
- d'étudier la continuité et la dérivabilité de f sur chaque intervalle de D_f.
- d' étudier le signe de f'.
- de calculer les limites aux bornes du domaine d'étude, puis de dresser le tableau des variations de f.

(2) Pour représenter la courbe $(\mathcal{C}_f)$, il est nécessaire:
- d'étudier éventuellement les branches infinies à $(\mathcal{C}_f)$.
- de déterminer les points particuliers de $(\mathcal{C}_f)$: les extréma, les points d'intersection avec les axes et les positions relatives avec les tangentes

EXEMPLE

Étudions et représentons la fonction $f : x \mapsto -x^4 + 2x^2 + 2x + 2$.

- *Ensemble de définition et limites aux bornes .*

  $D_f = \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^4\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^4\right) = -\infty$.

- *Continuité et dérivabilité de f sur D_f .*

  f est continue et dérivable sur D_f comme fonction polynôme et $f'(x) = -4x^3 + 4x + 2$.

- *Signe de f' et tableau des variations de f :*

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$+\infty$	↘	$0,46$	↗	$3,54$	↘	$-\infty$

$f''(x) = -12x^2 + 4$ et $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$f'\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{-8\sqrt{3}+18}{9} \simeq 0,46$,

$f'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{8\sqrt{3}+18}{9} \simeq 3,54$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

f' est continue et strictement décroissante de $\left]\dfrac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right[$

vers $]-\infty;3,54[$ et donc réalise une bijection $\left]\dfrac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right[$

vers $]-\infty;3,54[$.

Comme $0 \in]-\infty;3,54[$, il existe un unique $\alpha \in]3,53\,;+\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

$f'\left(\left]-\infty;\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[\right) =]0,46;+\infty[$ qui ne contient pas 0.

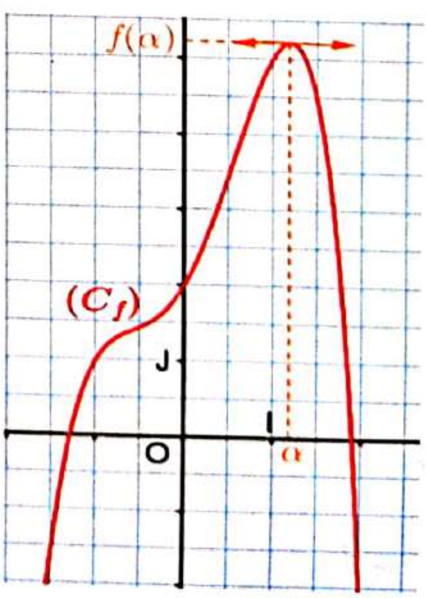
L'équation $f'(x) = 0$ n'a aucune solution dans $\left]-\infty;\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[$. Par conséquent, α est l'unique réel tel que $f'(\alpha) = 0$.

Ainsi $\boxed{f'(x) \geq 0 \text{ si } x \in]-\infty;\alpha]}$ et $\boxed{f'(x) \leq 0 \text{ si } x \in [\alpha\,;+\infty[}$.

- *Représentation graphique*

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = -\infty ; \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ la courbe de f admet une branche parabolique de direction (OJ).

  A l'aide du théorème des valeurs intermédiaires on montre que $\alpha \in]1,5\,;2[$ et que $\alpha \approx 1,19$ à 10^{-2} près. De la même façon, on détermine les points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.



Exercice Résolu 1

Étudier les variations et représenter la courbe de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3x-3}{|x|-1}$

Solution

- ***Ensemble de définition de la fonction f .***

  Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x)$ existe si et seulement si $|x|-1 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq -1$ et $x \neq 1$

  $\mathrm{D}_f =]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

- ***Limites aux bornes de D_f.***

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{-x}\right) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}}\left(\dfrac{x^2+3x-3}{-x-1}\right) = -\infty$;

  $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\left(\dfrac{x^2+3x-3}{-x-1}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\left(\dfrac{x^2+3x-3}{x-1}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = +\infty$.

- ***Continuité et dérivabilité de f sur D_f.***

  Sur $]-\infty,-1[\cup]-1,0[$ on a $f(x) = \dfrac{x^2+3x-3}{-x-1}$ et sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ on a $f(x) = \dfrac{x^2+3x-3}{x-1}$.

  Donc f est continue et dérivable sur $\mathrm{D}_f - \{0\}$ comme fonction rationnelle.

  $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 3 = f(0)$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} \dfrac{x+6}{-x-1} = -6$ et

  $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \dfrac{x}{x-1} = 0$. f est donc continue sur D_f, dérivable à gauche et à droite en 0 mais pas en 0.

- ***Dérivée et tableau des variations***

$f'(x) = \dfrac{-x^2-2x-6}{(x+1)^2}$ si $x \in]-\infty,-1[\cup]-1,0]$

$f'(x) = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ si $x \in [0, 1[\cup]1,+\infty[$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	-6 ‖ 0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	7	↗	$+\infty$

- ***Représentation graphique de f .***

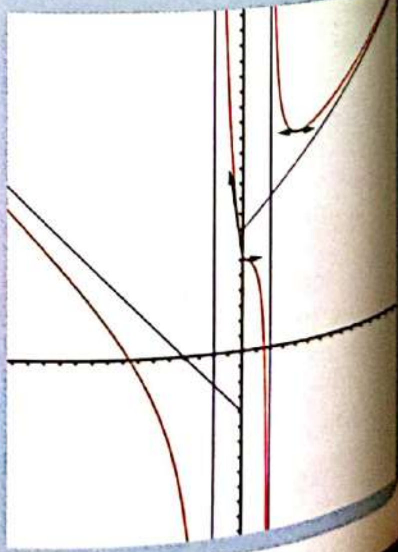
  D'après le calcul des limites, les droites d'équations respectives $x=-1$ et $x=1$ sont les asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$ parallèles à l'axe des ordonnées .

  $\dfrac{x^2+3x-3}{-x-1} = -x-2+\dfrac{5}{x+1}$;

  $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-2)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5}{x+1}\right) = 0$;

  $\dfrac{x^2+3x-3}{x-1} = x+4+\dfrac{1}{x-1}$;

  $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+4)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x-1}\right) = 0$.



Les droites d'équations $y=-x-2$ et $y=x+4$ sont les asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$ non parallèles aux axes du repère, en $-\infty$ et en $+\infty$ respectivement.

Exercice Résolu 2

Étudier les variations et représenter la courbe de la fonction $f: x \mapsto \sin(2x)-2\sin x$

- Ensemble de définition de f : $D_f=\mathbb{R}$.
- Parité et périodicité de f :

Pour tout $x\in D_f$ on a $x+2\pi \in D_f$ et
$$f(x+2\pi)=\sin[2(x+2\pi)]-2sin(x+2\pi)$$
$$=\sin(2x)-2\sin x$$
$$=f(x)$$

f est périodique et de période 2π. On peut donc réduire l'ensemble d'étude de f à un intervalle de longueur 2π (par exemple $[-\pi\,;\pi]$).

Pour tout $x\in D_f$ on a $-x\in D_f$ et $f(-x)=\sin(-2x)-\sin(-x)=-(\sin(2x)+2sinx)$
$$=-f(x).$$

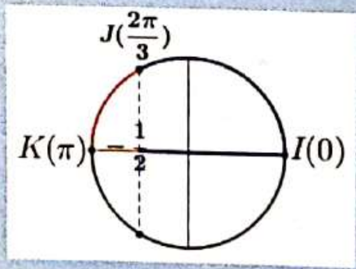
f est impaire. Son ensemble d'étude peut encore être réduit à $[0\,;\pi]$.

- *Continuité, dérivabilité et tableau des variations sur* $[0\,;\pi]$

Les fonctions $x\mapsto \sin(2x)$ et $x\mapsto -2\sin x$ sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$;donc la fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=2\cos(2x)-2cosx$.

$f'(x)=4\cos^2 x-2\cos x-2=4\left(\cos x+\dfrac{1}{2}\right)(\cos x-1)$ donc $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x=0$ ou $x=\dfrac{2\pi}{3})$ dans $[0\,;\pi]$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos x-1\leq 0$ et le cercle ci-dessous permet de déterminer le signe de $\cos(x)+\dfrac{1}{2}$.



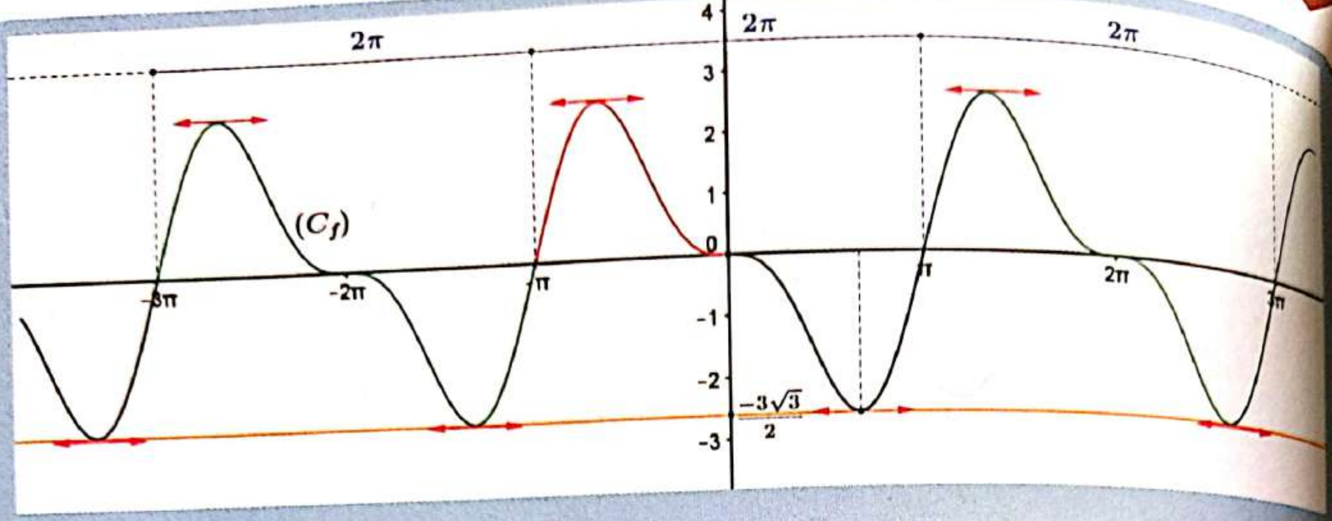
Si $x\in\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$ alors $f'(x)\leq 0$ et si $x\in\left[\dfrac{2\pi}{3};\pi\right]$ alors $f'(x)\geq 0$

Tableau des variations sur $[0\,,\pi]$ *et représentation graphique de la courbe de* f.

- Sur l'intervalle $[-\pi\,;0]$ la courbe de $(\mathcal{C}_f)$ est le symétrique par rapport à l'origine O du repère de celle obtenue sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ car la fonction f est impaire.
- La courbe $(\mathcal{C}_f)$ est complétée sur $\mathbb{R}$ par les translations successives de vecteurs $2\pi\vec{i}$ et $-2\pi\vec{i}$ car f est périodique de période 2π.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	0

Scanné avec CamScanner



Exercice Résolu 3

Étudier ses variations et représenter la courbe de la fonction $f : x \mapsto x - \sqrt{|x^2 - 1|}$

- *Ensemble de définition et limites aux bornes :*

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x^2 - 1| \geq 0$.

$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$ si $x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ et $f(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$ si $x \in [-1;1]$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = -\infty$

$x - \sqrt{x^2 - 1} = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\right) = 0$.

- *Continuité et dérivabilité de f sur D_f.*

La fonction $x \mapsto |x^2 - 1|$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{|x^2 - 1|}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions, donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto x - \sqrt{x^2 - 1}$ est dérivable sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ car $x^2 - 1 > 0$ sur cet ensemble. La fonction $x \mapsto x - \sqrt{1 - x^2}$ est dérivable sur $]-1;1[$ car $1 - x^2 > 0$ sur cet ensemble.

Sur $]-\infty; -1[$ on a $\dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \dfrac{x - \sqrt{x^2 - 1} + 1}{x+1} = 1 - \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = +\infty$

Sur $]1; +\infty[$ on a : $\dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \dfrac{x - \sqrt{x^2 - 1} - 1}{x-1} = 1 - \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = -\infty$

Sur $]-1; 1[$ on a : $\dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \dfrac{x - \sqrt{1 - x^2} + 1}{x+1} = 1 - \dfrac{1-x}{\sqrt{1 - x^2}}$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = -\infty$ et

$\dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \dfrac{x - \sqrt{1 - x^2} - 1}{x-1} = 1 + \dfrac{1+x}{\sqrt{1 - x^2}}$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x-1} = +\infty$

Donc f est dérivable sur l'ensemble $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$.

- *Dérivée et tableau des variations.*

Sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ on a : $\boxed{f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}}$.

- Si $x\in]-\infty;-1[$ alors $\sqrt{x^2-1}-x>0$ car $-x>0$ donc $f'(x)>0$
- Si $x\in]1;+\infty[$ alors $\sqrt{x^2-1}-x\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{x^2-1}\geq x\Leftrightarrow -1\geq 0$. Or l'assertion «$-1\geq 0$» est fausse donc pour tout réel $x\in]1,+\infty[$ on a $f'(x)<0$.

Sur $]-1;1[$, on a : $\boxed{f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}+x}{\sqrt{1-x^2}}}$.

- Si $x\in[0\,;1[$ alors $\sqrt{1-x^2}+x>0$ car $x\geq 0$ donc $f'(x)>0$.
- Si $x\in]-1;0[$ alors $\sqrt{1-x^2}+x\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}\geq -x\Leftrightarrow 1-2x^2\geq 0\Leftrightarrow x\in\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2};0\right[$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

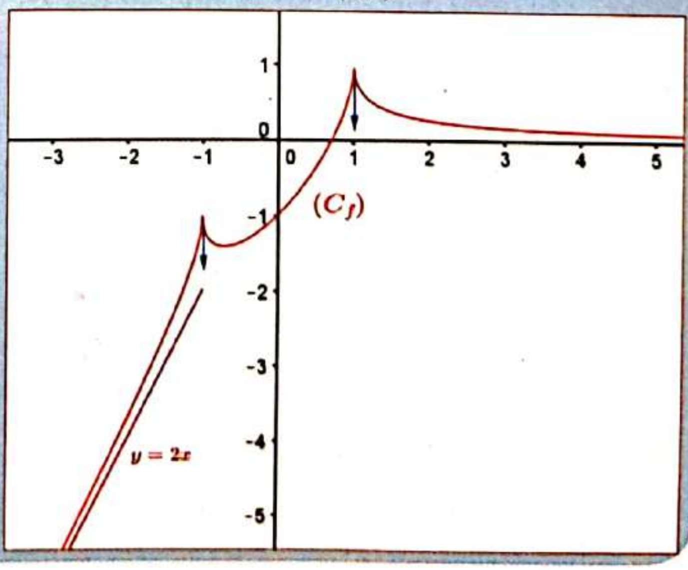
- *Représentation graphique de* $(\mathcal{C}_f)$.

D'après le calcul des limites, la droite d'équation $y=0$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)=2$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{-x+\sqrt{x^2-1}}\right)=0$

la droite d'équation $y=2x$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$.



S'exercer

2.a Étudier et représenter la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^4 + x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x - 1$.

2.b On considère la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{x^2 - 2|x-2|}{x^2 - 1}$.

a) Étudier la dérivabilité de g en 2.

b) Étudier les variations de g et représenter sa courbe $(\mathcal{C}_g)$.

2.c On considère la fonction $h : x \mapsto \cos(2x) - 2\cos(x)$

a) Résoudre dans l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ l'inéquation $sin(2x) - sin(x) \geq 0$.

b) Étudier et représenter la fonction h.

2.d Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x + 1 + \sqrt{|x-1|}$

a) Résoudre dans $]-\infty;1]$ l'inéquation $2\sqrt{1-x} - 1 \geq 0$.

b) Étudier la dérivabilité de f en 1.

c) Étudier les branches infinies à $(\mathcal{C}_f)$

d) Dresser le tableau des variations de f et représenter $(\mathcal{C}_f)$.

LEÇON 3 PRIMITIVES D'UNE FONCTION.

- Définir les primitives d'une fonction continue sur un intervalle.
- Déterminer l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle.
- Calculer les primitives d'une fonction continue sur un intervalle.
- Déterminer les primitives du produit d'une fonction par un réel ; de la somme et de la composée de deux fonctions.

3.1. PRÉSENTATION ET DÉFINITION

Prendre un bon départ

Activité 1

Pour chacune des fonctions suivantes f ci-dessous, déterminer une fonction F dérivable sur un intervalle K que l'on déterminera et ayant pour fonction dérivée f :

$$f:x\mapsto 5\ ;\ f:x\mapsto 2x\ ;\ f:x\mapsto 5x^2\ ;\ f:x\mapsto -\frac{1}{x^2}\ ;\ f:x\mapsto -\sin x\ ;\ f:x\mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Activité 2

- Calculer la dérivée de la fonction $\mathrm{F}:x\mapsto x+\tan x$ sur l'intervalle $\mathrm{K}=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
- On définit les fonctions G et H sur K par : $\mathrm{H}(x)=F(x)+1$ et $\mathrm{G}(x)=F(x)-2$.
  Calculer les dérivées G' et H' sur K. En déduire trois fonctions dérivables sur K et ayant toutes pour dérivée sur K la fonction $x\mapsto 2+\tan^2 x$.
- Déterminer une isométrie du plan qui transforme la courbe de G en celle de H dans un même repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$.
- Soit la fonction $\mathrm{P}:x\mapsto F(x)+k$. Déterminer k pour que la courbe de P passe par le point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$ et d'ordonnée 1. Pour cette valeur de k, que vaut $P\left(\frac{\pi}{4}\right)$?

Retenir

(1) Soit f une fonction définie sur un intervalle K.

- On appelle ***primitive*** de f sur K, toute fonction F dérivable sur K et telle que : pour tout $x\in\mathrm{K}$, on ait : $\mathrm{F}'(x)=f(x)$.
- Si f est une fonction ***continue sur K*** alors f admet une primitive sur K.
  [La continuité est suffisante mais n'est pas nécessaire c'est-à-dire qu'une fonction peut admettre une primitive sur K sans être continue sur K].

(2) Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle K.

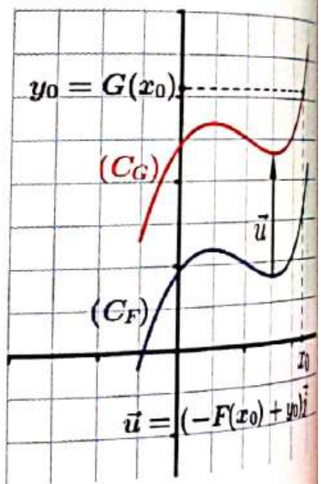
- Pour tout nombre réel m indépendant de x, la fonction: $x \mapsto F(x)+m$ est une primitive de f sur K.
- Toute primitive de f sur K est sous la forme $x \mapsto \mathbf{F}(x)+m$ où m **ne dépend pas de** x.
- Soit $x_0 \in K$ et y_0 un nombre réel. Il existe ***une seule primitive*** F de f sur K, qui prend la valeur y_0 en x_0, c'est-à-dire telle que $F(x_0)=y_0$.

REMARQUE 1

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle K. Si G est une autre primitive de f sur K, alors il existe un réel c tel que $G(x)=F(x)+c$.

- Dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe de G est l'image de celle de F par la translation de vecteur $c\vec{j}$.
- Si $x_0 \in K$ et $y_0 = G(x_0)$ alors $c=-F(x_0)+y_0$.

  x_0 étant fixé dans K et la translation étant bijective, la fonction $x \mapsto F(x)-F(x_0)+y_0$ est l'unique primitive de F sur K qui prend la valeur y_0 en x_0.



EXEMPLE 1

- La fonction $F: x \mapsto x^2+\sin x$ est une primitive de la fonction $f: x \mapsto 2x+\cos x$ sur $\mathbb{R}$.
- L'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions $G: x \mapsto x^2+\sin x+c$ avec $c \in \mathbb{R}$ (c constante).
- Notons H la primitive de f qui prend la valeur 1 en $\frac{\pi}{2}$.

$$G\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\sin\frac{\pi}{2}+c=1 \Leftrightarrow c=-\frac{\pi^2}{4} \text{ donc } \boxed{H(x)=x^2+\sin x-\frac{\pi^2}{4},\ \forall x \in \mathbb{R}}$$

Les fonctions $x \mapsto x \mapsto x^2+\sin x-3$ et $x \mapsto x \mapsto x^2+\sin x+\sqrt{2}$ sont aussi des primitives de f

REMARQUE 2

À l'aide des dérivées des fonctions élémentaires vues à la leçon 1, on peut dresser le tableau des primitives de chacune d'elles. c est une constante réelle.

Fonction f	*Primitives de* f	*Sur l'intervalle*
$x \mapsto a$ avec $a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto ax+c$	$\mathbb{R}$

$x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$	$x \mapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$x \mapsto x^r$ où $r \in \mathbb{Q}\setminus\{-1\}$	$x \mapsto \frac{x^{r+1}}{r+1}+c$	$\begin{cases}[0;+\infty[\text{ si } r \geq 0 \\ ]0;+\infty[\text{ si } r<0\end{cases}$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x+c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x+c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x+c$	$\left](2k-1)\frac{\pi}{2};(2k+1)\frac{\pi}{2}\right[$, $k \in \mathbb{Z}$

EXEMPLE 2

- Une primitive sur $]-\infty;0[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^7}$ est la fonction $x \mapsto -\frac{1}{6x^6}$.
- Les primitives sur $[0;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+c$ avec $c \in \mathbb{R}$. On peut encore les écrire $x \mapsto \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+c$, $c \in \mathbb{R}$.

Exercice Résolu 1

Déterminer les primitives sur $]0,+\infty[$ de la fonction $f: x \mapsto \frac{\cos x + x\sin x}{x^2}$

Solution

Déterminons les primitives de f sur $]0;+\infty[$.

Cherchons une primitive de f sous la forme $\frac{u}{v}$. Or $\left(\frac{u}{v}\right)'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{\left[(v(x))^2\right]}$.

On voudrait que $\left(\frac{u}{v}\right)'(x)=f(x)$. il suffit de prendre $v: x \to x$ et $u(x)=-\cos x$.

On a donc les primitives de f sur $]0;+\infty[$ sont les fonctions $F: x \mapsto \frac{-\cos x}{x}+c$ avec c un réel indépendant de x.

Exercice Résolu 2

On considère les fonctions F et f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} F(x) = x^2\cos\frac{1}{x} - x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x} - 2x & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que F est dérivable en 0. En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f n'est pas continue en 0.
4. Donner l'exemple d'une fonction non continue sur $\mathbb{R}$ et admettant une primitive sur $\mathbb{R}$.

Solution

1. Démontrons que F est dérivable en 0, puis sur $\mathbb{R}$.

$\dfrac{F(x)-F(0)}{x} = x\cos\dfrac{1}{x} - x$. $0 \leq \left|x\cos\dfrac{1}{x} - x\right| \leq |x|\left|\cos\dfrac{1}{x}\right| + |x| \leq 2|x|$ car $\left|\cos\dfrac{1}{x}\right| \leq 1$, pour tout $x \neq 0$

et $\lim\limits_{x\to 0} 2|x| = 0$; donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x} = 0$; donc F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.

La fonction $x \mapsto cos\dfrac{1}{x}$ est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables ; donc la fonction : $x \mapsto x^2cos\dfrac{1}{x}$ est dérivable sur ces intervalles comme produit de fonctions dérivables. On en déduit que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonction dérivables sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrons que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. F étant dérivable sur $\mathbb{R}$, on a :

Pour $x \neq 0$, $F'(x) = 2x\cos\dfrac{1}{x} + x^2\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(-\sin\dfrac{1}{x}\right) - 2x = 2x\cos\dfrac{1}{x} + \sin\dfrac{1}{x} - 2x$

Donc $\begin{cases} F'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x} - 2x & \text{si } x \neq 0 \\ F'(0) = 0 \end{cases}$ donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car $F' = f$ sur $\mathbb{R}$.

3. Montrons que f n'est pas continue en 0.

Si f était continue en 0, alors on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

Or pour $x \neq 0$, $f(x) = 2x\cos\dfrac{1}{x} - 2x + \sin\dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\cos\dfrac{1}{x} - 2x\right) = 2\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cos\dfrac{1}{x} - x\right) = 0$

Par ailleurs $\sin\dfrac{1}{x} = f(x) - \left(2x\cos\dfrac{1}{x} - 2x\right)$. Donc dire que f est continue en 0 signifie que la fonction $x \mapsto \sin\dfrac{1}{x}$ admet une limite en 0, ce qui est absurde car $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x} = \infty$ et la fonction sinus n'admet pas de limite en ∞.

4. f est une fonction discontinue sur $\mathbb{R}$ et admet une primitive F sur $\mathbb{R}$.

S'exercer

3.a Déterminer les primitives F de f sur les intervalles K indiqués dans chacun des cas :

a) $x \quad x$, K=$\mathbb{R}$; b) $x \mapsto -\sqrt{5}$, K=$\mathbb{R}$; c) $x \mapsto x^{\frac{3}{4}}$, $K =]0;+\infty[$;

d) $x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $K =]0;+\infty[$; e) $x \mapsto \dfrac{1}{cos^2 x}$, $K = \left]\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right[$.

3.b On considère la fonction $f : x \mapsto xtan^2 x + tanx + x$ et $g : x \mapsto xtanx$.

a) Justifier que la fonction f admet une primitive sur l'intervalle $I = \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) Calculer la dérivée de g sur I. En déduire une primitive de f sur I.

c) Déterminer la primitive de f qui prend la valeur 0 en $-\dfrac{\pi}{4}$.

3.2. RECHERCHE PRATIQUE DES PRIMITIVES SUR DES INTERVALLES, DE CERTAINES FONCTIONS CONTINUES.

Prendre un bon départ

Activité 1

Soient f et g deux fonctions admettant pour primitives respectives sur un intervalle K, les fonctions F et G.

a. Déterminer la dérivée $(F+G)'$ sur K. En déduire une primitive de $f+g$ sur K.

b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; déterminer la dérivée $(\lambda F)'$ sur K. En déduire une primitive de λf sur K.

Activité 2

a. Déterminer les réels a et a' pour que les fonctions $F : x \to a\cos(7x+\pi)$ et

$G : x \to a'\sin(-3x+2)$ soient des primitives des fonctions

$f : x \mapsto 3\sin(7x+\pi)$ et $g : x \mapsto 5\cos(-3x+2)$ respectivement.

b. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K et g une fonction sur $f(K)$.

Déterminer la dérivée $(g \circ f)'$ sur K. En déduire une primitive sur K de la fonction $f' \times g' \circ f$.

c. Soit la fonction $h : x \mapsto 2x\cos\left(x^2+3\right)$.

(i) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = u'(x) \times \sin'(u(x))$ où u est une fonction à déterminer.

(ii) Déterminer une fonction H dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout réel $x, H'(x) = h(x)$. En déduire une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

Activité 3

Soit à déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$, de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x+2}{\left(x^2+x+1\right)^7}$.

On peut encore écrire $f(x) = (4x+2) \times \left(x^2+x+1\right)^{-7}$. soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Soit u une fonction dérivable telle que $F = au^r$ où r est un nombre rationnel distinct de -1.

a. Calculer la dérivée F' de F en fonction de u.

b. Déterminer les réels r et a, et la fonction u pour que la fonction F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

c. Donner alors une primitive de la fonction : $x \mapsto 3\cos(x)(\sin x)^4$.

Retenir

(1) Soient f et g deux fonctions admettant pour primitives respectives sur un intervalle K, les fonctions F et G.

- La fonction $f + g$ admet ***pour primitive sur K***, la fonction F + G.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf admet ***pour primitive sur K*** la fonction λF.

(2) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K et g une fonction dérivable sur $f(K)$. La fonction $f' \times g' \circ f$ admet ***pour primitive sur K***, la fonction $g \circ f$.

(3) Pour tout triplet $(A;a;b)$ de réels tels que $a \neq 0$, une primitive de la fonction $x \to A\cos(ax+b)$ est la fonction : $x \to \dfrac{A}{a}\sin(ax+b)$; une primitive de la fonction $x \to A\sin(ax+b)$ est la fonction : $x \to -\dfrac{A}{a}\cos(ax+b)$

(4) Si r est un nombre rationnel distinct de -1, alors une primitive de $au'u^r$ est $\dfrac{a}{r+1}u^{r+1}$.

EXEMPLE 1

- Les primitives de la fonction $x \mapsto -5x^6$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F définies par :
$F(x) = -5 \times \frac{1}{6+1}x^{6+1} + c = -\frac{5}{7}x^7 + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

- Les primitives sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto -\sqrt{x} + \frac{3}{x^5} + \frac{5}{4}x^2 - \sqrt{7}$ sont les fonctions G définies par :

$G(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} - 3\frac{1}{(5-1)x^{5-1}} + \frac{5}{4} \times \frac{1}{2+1}x^{2+1} - x\sqrt{7} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ soit finalement

$G(x) = \frac{-2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4x^4} + \frac{5}{12}x^3 - x\sqrt{7} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

REMARQUE

Les (2),(3) et (4) du retenir ci-dessus permettent de déterminer des primitives de certaines fonctions particulières.

Forme de la fonction	*Une primitive*	*Contraintes*
$u'u^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	$\frac{u^n}{n+1}$	Sur tout intervalle où u est dérivable
$u'u^r$ avec $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$	$\frac{u^r}{r+1}$	Sur tout intervalle où u est dérivable et positive. [Si $r < 0$, on doit avoir $u > 0$]
$\frac{u'}{u^n}$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	Sur tout intervalle où u est dérivable et *non nulle*
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	Sur tout intervalle où u est dérivable et *strictement positive*.
$u'\cos u$	$\sin u$	Sur tout intervalle où u est dérivable
$u'\sin u$	$-\cos u$	

EXEMPLE 2

- Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $h : x \mapsto 2x\cos(x^2+3)$ sont les fonctions $H : x \mapsto \sin(x^2+3) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ car $h(x) = (u'(x)\cos(u(x))$ où $u(x) = x^2+3$.

- Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{2x+3}{(x^2+3x-4)^3}$. f est définie et continue sur l'ensemble $D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;4[\cup]4;+\infty[$ et par conséquent admet des primitives sur chacun de ces trois intervalles. Notons les F. On peut écrire

$f(x)=\frac{u'(x)}{(u(x))^3}$ où $u(x)=x^2+3x-4$ donc

$F(x)=-\frac{1}{(3-1)(x^2+3x-4)^{3-1}}+c=-\frac{1}{2(x^2+3x-4)^2}+c$ où $c\in\mathbb{R}$.

- Soit la fonction g : $x\mapsto\frac{3x}{\sqrt{4-x^2}}$. g est continue sur $]-2;2[$ donc y admet des primitives. On peut écrire

$g(x)=(3x)(4-x^2)^{\frac{-1}{2}}$. Posons $u(x)=4-x^2$. $u'(x)=-2x$. D'où $x=\frac{u'}{-2}$.

$g(x)=\frac{-3}{2}\times u'(x)[u(x)]^{\frac{-1}{2}}$; $\frac{-1}{2}+1=\frac{1}{2}$; Une primitive de g est la fonction G définie par:

$$G(x)=\frac{\frac{-3}{2}}{\frac{1}{2}}[4-x^2]^{\frac{1}{2}}=(-3)(4-x^2)^{\frac{1}{2}}=-3\sqrt{4-x^2}$$

Les primitives de g sur $]-2;2[$ sont les fonctions G telles que pour tout $x\in]-2;2[$, $G(x)=-3\sqrt{4-x^2}+c$ avec c est un réel indépendant de x.

MÉTHODE

Pour déterminer une primitive d'une fonction f continue sur un intervalle K, il est important de l'identifier :

- soit à la dérivée d'une fonction élémentaire,
- soit à la dérivée d'une fonction composée,
- ou encore à la dérivée d'une somme, d'un quotient ou d'un produit de deux fonctions.

Dans certains cas une transformation préalable de l'expression de f est nécessaire pour cette identification.

Exercice Résolu 1

Soit la fonction $f:x\mapsto x\sin x$. Déterminer les primitives F de f sur $\mathbb{R}$

Solution

Déterminons les primitives F de f sur $\mathbb{R}$

Posons les fonctions $u:x\mapsto x$ et $v':x\mapsto\sin x$, on a : $u'(x)=1$ et $v(x)=-\cos x$

on a $f(x)=u(x)v'(x)=[uv]'(x)-u'(x)v(x)=[uv]'(x)+\cos x$.

Or la fonction : $x\mapsto\cos x$ a pour primitive la fonction : $x\mapsto\sin x$.

Donc, les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F:x\mapsto -x\cos x+\sin x+c$ avec c constante réelle.

Exercice résolu 2

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions $f : x \mapsto \cos^2 x \sin^4 x$ et $g : x \mapsto \cos^5 x \sin^3 x$.

Solution

- Déterminons les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\cos^2 x\sin^4 x=(\sin x\cos x)^2\sin^2 x=\frac{1}{4}(2\sin x\cos x)^2\times\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{8}(\sin 2x)^2(1-\cos 2x)$$

$$=\frac{1}{8}\left[(\sin 2x)^2-\cos 2x(\sin 2x)^2\right]=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}(1-\cos 4x)-\cos 2x(\sin 2x)^2\right]=\frac{1}{16}\left[1-\cos 4x-2\cos 2x(\sin 2x)^2\right]$$

$=\frac{1}{16}\left[1-\cos 4x-(u'(x)\times(u(x))^2\right]$ $(u(x)=\sin(2x))$; donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F : x \mapsto \frac{1}{16}\left[x-\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{3}(\sin 2x)^3\right]+k$ avec k constante réelle.

- Déterminons les primitives de g sur $\mathbb{R}$.

Remarquons que $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

$$g(x)=16\cos^5 x\sin^3 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3=\frac{16}{-32\times 8i}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^5\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^3$$

$$g(x)=-\frac{1}{16i}\left[\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right]^3\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^2=-\frac{1}{16i}\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)^3\left(e^{2ix}+e^{-2ix}+2\right)$$

$$g(x)=-\frac{1}{16i}\left[\left(e^{8ix}-e^{-8ix}\right)+2\left(e^{6ix}-e^{-6ix}\right)-2\left(e^{4ix}-e^{-4ix}\right)-6\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)\right]$$

$$g(x)=-\frac{1}{16i}\left[2i\sin 8x+4i\sin 6x-4i\sin 4x-12i\sin 2x\right]=-\frac{1}{8}\left[\sin 8x+2\sin 6x-2\sin 4x-6\sin 2x\right]$$

On peut aussi remarquer que $g(x)=\sin x\left(1-\cos^2 x\right)\cos^5 x=\sin x\cos^5 x-\sin x\cos^7 x$ et donc

$$G(x)=-\frac{1}{6}\cos^6 x+\frac{1}{8}\cos^8 x.$$

Donc les primitives de g sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$G : x \mapsto \frac{1}{8}\left[\frac{1}{8}\cos 8x+\frac{1}{3}\cos 6x-\frac{1}{2}\cos 4x-3\cos 2x\right]+k$ avec k constante réelle.

MÉTHODE

Pour déterminer une primitive d'une fonction trigonométrique f du type $x \mapsto \sin^p x\cos^n x$ avec $p, n \in \mathbb{N}$ on peut procéder comme ci-dessous :

- Si $p=n=0$ alors f se ramène à une fonction constante.
- Si $p=1$ ou $n=1$ alors on peut écrire f sous la forme $u'u^q$ où q est un entier naturel.

- Si $p \neq 1$ et $n \neq 1$ alors on peut écrire $f(x)$ sous la forme d'une somme dont les termes sont de la forme $a\sin kx$ ou $a\cos kx$ en utilisant les formules trigonométriques ou les relations d'Euler, $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

Dans ce dernier cas on pourra alors écrire $f(x) = \left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^p \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n$ et utiliser alors les binômes de Newton ou d'autres techniques de pour le développement, puis la réduction.

S'exercer

3.c Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sue les intervalles indiqués.

$f(x) = -3\sin(3x+\frac{\pi}{7})$, $K = \mathbb{R}$; $g(x) = 2\sqrt{2x+1}$, $K = \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

$u(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$, $K = \left]-\frac{\pi}{2};0\right[$; $v(x) = (1+\tan^2 x)\tan x$, $K = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$s(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3x^2-3}}$, $K =]1;+\infty[$; $r(x) = (2x-1)(x^2-x+1)^3$, $K = \mathbb{R}$

3.d Déterminer les primitives sur les intervalles indiqués une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = -x\sin(x^2+1)$, $K = \mathbb{R}$; d) $t(x) = 3x^2\sqrt{x^3+1}$, $K =]-1;+\infty[$

b) $g(x) = \dfrac{-x-2}{(x^2+4x-1)^3}$, $K =]1;+\infty[$; e) $p(x) = \dfrac{3}{(2x+3)^2}$, $K = \left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[$

c) $h(x) = (2x-1)^{-\frac{2}{3}}$, $K = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$; f) $q(x) = 2+2\tan^2(2x)$, $K = \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$

3.e Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et satisfaisant à la condition indiquée.

a) $f(x) = \sin x\cos^3 x$ et $F(\pi) = 2$; c) $f(x) = \cos^4 x$, $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

b) $f(x) = -2x(x+2)^2$, $F(0) = 3$; d) $f(x) = \sin^5 x$, $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$

S'ENTRAÎNER

DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE - DÉTERMINATION DES DÉRIVÉES-DÉRIVÉES DES FONCTIONS COMPOSÉES

1.

On considère la fonction f définie par :

$f(x)=x^2+3|x-1|-2$.

a) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f.

b) Déterminer la fonction dérivée de f sur chacun des ensembles suivants :
$[1, +\infty[$ et $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

c) f admet-elle une fonction dérivée sur $\mathbb{R}$? Justifier.

2.

Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f sur son ensemble de définition et définir sa dérivée.

a) $f(x)=\sqrt{3+x-x^2}$;

b) $f(x)=(x-2)\sqrt{2-x}$;

c) $f(x)=(x-4)\sqrt{x^2-4}$

d) $f(x)=2x^2+|x-2|$;

e) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{|x|-1}$;

f) $f(x)=2x\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+2$.

3.

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions ci-dessous définies :

$f(x)=x^4+\sqrt{x^2+1}$, $g(x)=\dfrac{1}{x^6+1}$,

$h(x)=\dfrac{1}{\left(x^4+1\right)^2}$, $p(x)=\left(x^3-3x^2-2\right)^4$

$t(x)=\sin(\dfrac{2\pi}{3}x+\dfrac{\pi}{5})$; $s(x)=\dfrac{x^3-4}{x^2+3}$.

4.

Étudier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition et déterminer sa fonction dérivée.

a) $f: x \mapsto \sin\left(x^4+2x^2+3\right)$;

b) $f: x \mapsto (2x)^{\frac{4}{3}}$; c) $f: x \mapsto \sqrt[5]{x^4}$;

c) $f: x \mapsto (-2x+1)^{\frac{2}{3}}$;

d) $f: x \mapsto \left(1-x^2\right)^{\frac{2}{5}}$.

5.

Montrer que la fonction $f: x \mapsto 1+\tan^2\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'est pas dérivable sur l'intervalle $\left]-\dfrac{2}{\pi}\ ;\ \dfrac{2}{\pi}\right[$

Pour chacun des exercices de 6 à 9 , étudier la continuité et la dérivabilité de h sur son ensemble de définition.

6.

$h(x)=\sqrt{x-1}-x$.

7.

$h(x)=\sqrt{2-x}+x$.

8.

$h(x)=\sqrt{|x-2|}+2$.

9.

$h(x)=\sqrt{|x|-4}-2$

10.

On considère la fonction f définie par :

$f(x)=\sqrt{2-|x|}$.

1) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.

2) Déterminer la dérivée de f sur chacun des l'intervalles $]-2;\ 0]$ et $[0;2[$.

DÉRIVÉES DES FONCTIONS RÉCIPROQUES.

11.

Soit g la fonction définie de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\sqrt{x^2+1}$.

a) Montrer que g est une bijection de $]0;+\infty[$ vers $]1,+\infty[$.

b) Montrer que $\forall x \in]1;+\infty[,\ g^{-1}(x)=\sqrt{x^2-1}$.

c) g^{-1} est-elle dérivable sur $]1;+\infty[$?

12.

Soit f la fonction définie de $[0;\pi]$ vers $[-1,1]$ par $f(x)=\cos(x)$.

a) Montrer que f admet une bijection réciproque.

b) Justifier que f^{-1} est dérivable sur $]-1;1[$.

c) Démontrer que $\forall x \in]-1;1[$, on a

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

13.

Soit la fonction numérique g définie sur $[1;+\infty[$ par : $g(x)=(x-1)\sqrt{x-1}$.

a) Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont on déterminera l'ensemble de définition.

b) Déterminer l'ensemble J sur lequel g^{-1} est dérivable.

c) Définir $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
Déterminer de deux façons différentes la dérivée de g^{-1} sur J.

DÉRIVÉES SUCCESSIVES

14.

Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{6}x^4+\frac{2}{3}x^3-3x+1$.

a) Montrer que la fonction g admet deux points d'inflexion sur son ensemble de définition.

b) Calculer la dérivée d'ordre 10 de g.

15.

a) Déterminer la dérivée d'ordre 5 de la fonction $f : x \mapsto \sin x$.

b) Vérifier que $f^{(5)}(x)=\sin(x+5.\frac{\pi}{2})$.

c) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée d'ordre n est définie sur $\mathbb{R}$ par $f^{(n)} : x \mapsto \sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

16.

a) Déterminer les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$.

b) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que f est n fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et que sa dérivée d'ordre n est définie sur $]0,+\infty[$ par $f^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^n(n+1)!}{x^{n+2}}$.

17.

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$

a) Démontrer que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$.

b) Définir $f^{(1)}; f^{(2)}; f^{(3)}$ et $f^{(4)}$.

c) Conjecturer en fonction de n et en fonction de x une expression de $f^{(n)}(x)$ pour tout $x \in]-1;+\infty[$.

d) Démontrer cette conjecture par recurrence sur $n (n \geq 1)$

INÉGALITÉS DES ACCROISSEMENTS FINIS

18.
On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} + x$

a) Démontrer que pour tout $t \in [1 ;4]$, on a $\frac{5}{4} \leq f'(t) \leq \frac{3}{2}$.

b) Soit $x \in [1 ;4]$, :

- En appliquant les inégalités des accroissements finis sur l'intervalle $[1 ;x]$, déduire que $\frac{5}{4}(x-1) \leq f(x) - f(1) \leq \frac{3}{2}(x-1)$.

Donner alors un encadrement de x par deux fonctions affines sur $[1 ;4]$.

- En appliquant la conséquence des inégalités des accroissements finis sur l'intervalle $[x ;4]$, déduire que $\left|\sqrt{x} + x - 6\right| \leq \frac{3}{2}|x-4|$.

19.
Soit la fonction $f : x \mapsto \cos x$.

a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, en appliquant les inégalités des accroissements finis à f sur l'intervalle $[0;\ \alpha]$, montrer que : $-\alpha \leq \cos\alpha - 1 \leq \alpha$.

b) Montrer que pour tout $(a ;b)$ de $\mathbb{R}^2$, on a : $|\cos a - \cos b| \leq |a-b|$.

20.
Soit la fonction f définie de $\left[0 ;\frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$ par $f(t) = \tan t$.

a) Montrer que $\forall x \in \left[0 ;\frac{\pi}{2}\right[$ on a $f'(t) \geq 1$.

b) On considère la fonction φ définie de $\left[0 ;\frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = t - f(t)$.

c) Montrer que φ est décroissante sur $\left[0 ;\frac{\pi}{2}\right[$.

d) En déduire que pour tout $x \in \left[0 ,\frac{\pi}{2}\right[$ on a $x \leq \tan x$.

ÉTUDES ET REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES DES FONCTIONS

Pour chacun des exercices de 22 à 27, étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative en repère orthonormé.

21.
$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 1;$$

22.
$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{x^2 - 1};$$

23.
$$f(x) = 1 + 2\sqrt{x^2 - 1};$$

24.
$$f(x) = x\sqrt{|x-3|};$$

25.
$$f(x) = \cos x - \frac{1}{2}\sin 2x;$$

26.
$$f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x};$$

27.
Soit la fonction g définie par :
$$g(x) = \frac{x^2 + 2|x-2|}{x^2 - 1}.$$

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de g en 2.

b) Étudier les branches infinies à $(\mathcal{C}_g)$.

c) Dresser le tableau des variations de g.

d) Construire la courbe de $(\mathcal{C}_g)$.

28.
Soit la fonction g définie par : $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

a) Étudier les branches infinies à $(\mathcal{C}_g)$.

b) Déterminer la dérivée de g et dresser son tableau des variations .

c) Construire la courbe de $(\mathcal{C}_g)$.

29.
Soit f la fonction numérique définie par :

$f(x)=\cos x+\dfrac{1}{2}x^2-2$.

a) Étudier la parité de f.

b) Dresser le tableau des variations de f'. En déduire le signe de $f'(x)$.

c) Dresser le tableau des variations de f et tracer la courbe de f.

30.
On considère la fonction f de courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé et définie par : $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+3}{x^2-2x+2}$.

1) Déterminer la dérivée de f et écrire une équation de la tangente $(\mathcal{D})$ à la courbe de f au point d'abscisse 1.

2) Étudier les positions relatives de la droite $(\mathcal{D})$ et de la courbe $(\mathcal{C}_f)$. En déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

3) Démontrer que le point de coordonnées $(1;2)$ est un centre de symétrie à $(\mathcal{C}_f)$.

4) Dresser le tableau des variations de f et tracer $(\mathcal{C}_f)$ et la tangente $(\mathcal{D})$.

31.
Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\sqrt{|x^2+3x-4|}$ de courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Étudier la continuité et la dérivabilité de f aux points d'abscisses respectives -4 et 1.

2) Étudier les branches infinies à la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de f.

3) Montrer que la droite $(\Delta): x=-\dfrac{3}{2}$ est axe de symétrie à $(\mathcal{C}_f)$.

4) a) Calculer la dérivée de f sur les intervalles où elle est dérivable.

b) Dresser le tableau des variations de f.

5) On considère le point $A\left(-\dfrac{3}{2};0\right)$.

a) Soit $M(x;y)$ un point de $(\mathcal{C}_f)$ tel que $x\in[-4\,;1]$. Montrer que $AM=2{,}5$.

b) Soit g la fonction définie par : $g(x)=-f(x)$. Montrer que $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par S_A symétrie de centre A.

6) a) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère que $(\quad)$.

b) En déduire la construction de l'ensemble (E) des points du plan de coordonnée $(x;y)$ tels que : $y^2-|x^2+3x-4|=0$.

32.
Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=x+\sqrt{|1-x^2|}$ de courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Étudier la continuité et la dérivabilité de f aux points d'abscisses respectives -1 et 1.

2) Étudier les branches infinies à la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de f.

3) Résoudre dans $]0;1[$ l'inéquation $\sqrt{1-x^2}-2x>0$ et l'inéquation $\sqrt{x^2-1}+2x>0$ dans l'intervalle $]-\infty;-1]$

4) a) Calculer la dérivée de f sur les intervalles où elle est dérivable.

b) Dresser le tableau des variations de f.

5) Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = x - \sqrt{|1-x^2|}$.

a) Montrer que $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de $(\mathcal{C}_f)$ par la symétrie de centre O.

b) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère que $(\mathcal{C}_f)$.

PRIMITIVES D'UNE FONCTION

33.

Déterminer les primitives F de f sur les intervalles K indiqués dans chacun des cas :

a) $f: x \mapsto 5x^3$, K=$\mathbb{R}$;

b) $f: x \mapsto -\pi$, K=$\mathbb{R}$;

c) $f: x \mapsto -\dfrac{2}{x^6}$, $K =]-\infty;0[$;

d) $f: x \mapsto -\dfrac{2}{3\sqrt{x}}$, $K =]0;+\infty[$;

e) $f: x \mapsto 8x^{-\frac{3}{4}}$, $K =]0;+\infty[$;

f) $f: x \mapsto -\dfrac{4}{5\cos^2 x}$, $K = \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

34.

On considère la fonction

$f: x \mapsto \cos x - x\sin x$; $g: x \mapsto x\cos x$.

a) Justifier que la fonction f admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer la dérivée de g sur $\mathbb{R}$. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

c) Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 1 en $-\dfrac{\pi}{3}$.

35.

Soient f et g les fonctions définies par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x} \quad si\, x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} g(x) = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, \; si\, x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right) = 0$. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer par l'absurde que g n'est pas continue en 0.

3) Calculer la dérivée de g et en déduire que f est une fonction non continue sur $\mathbb{R}$ qui admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

36.

Pour chacune des fonctions f déterminer un intervalle K sur lequel f admet une primitive puis calculer les primitives de f sur K.

a) $f: x \mapsto 5(x-1)^4$; d) $f: x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$;

b) $f: x \mapsto -\sqrt{2} + \dfrac{1}{x}$; e) $f: x \mapsto \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}$;

c) $f: x \mapsto -\dfrac{1}{(x+2)^5}$; f) $f: x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

37.

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur les intervalles indiqués.

$f(x) = (2x+1)\cos(x^2+x)$, $K = \mathbb{R}$;

$g(x) = 2\sqrt{(2x-1)^3}$, $K = \left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$;

$u(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$, $K =]0;\pi[$;

$v(x) = (1+\tan^2 2x)\tan 2x$, $K = \left]-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right[$;

$s(x) = \dfrac{x}{(2x^2-2)^{\frac{2}{3}}}$, $K =]-1;1[$;

$r(x) = (2x-1)(x^2-x+1)^3$, $K = \mathbb{R}$.

38.
Déterminer sur les intervalles indiqués une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x)=\left(x^2+\frac{1}{3}\right)\sin(x^3+x)$, $K=\mathbb{R}$;

b) $g(x)=\dfrac{4x^3-2x}{(x^4-x^2+1)^3}$, $K=\mathbb{R}$;

c) $h(x)=(2x+3)(x^2+3x+2)^{\frac{4}{3}}$, $K=]-\infty;-1[$;

d) $t(x)=x^2\left(x^3-1\right)^{-\frac{2}{3}}$, $K=]1;+\infty[$;

e) $p(x)=\dfrac{4x+3}{\left(2x^2+3x-5\right)^3}$, $K=]1;+\infty[$;

f) $q(x)=\left(1+\tan^2 x\right)\tan^3 x$, $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

39.
Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et satisfaisant à la condition indiquée.

a) $f(x)=\cos x\sin^3 x$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$;

b) $f(x)=\sin^4 x$, $F(\pi)=0$.

c) $f(x)=-2x^2(x+2)^2$, $F(0)=-1$;

d) $f:x\mapsto\cos^4 x\sin^2 x$ $F(\pi)=0$;

e) $f(x)=\cos^5 x$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$.

40.
Soit $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. En remarquant que $\tan^2 x=-1+\left(1+\tan^2 x\right)$, déterminer la primitive de la fonction $x\mapsto\tan^2 x$ qui prend la valeur 0 en $\frac{\pi}{4}$

41.
Soit la fonction $g:x\mapsto\dfrac{1}{1-\sin x}$.

a) Vérifier que pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\frac{1}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}.$$

b) En déduire les primitives de g sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

42.
Déterminer les primitives des fonctions ci-dessous :

1) $x\mapsto(x-1)\sqrt{x-1}$ sur $]1;+\infty[$

2) $x\mapsto\sin x+x\cos x$ sur $\mathbb{R}$.

3) $x\mapsto x\cos x$ sur $\mathbb{R}$.

4) $x\mapsto\sin^2 x\cos^3 x$ sur $\mathbb{R}$.

5) $x\mapsto\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{3}{(x-2)^3}$ sur $]1;2[$.

6) $x\mapsto\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}$ sur $]0;\pi[$.

43.
Soit la fonction $f:x\mapsto\dfrac{x^3+x^2-5x-2}{(x-1)^2}$.

1) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$,

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{(x-1)^2}$$

2) En déduire les primitives de f sur $]-\infty;1[$

44.
Soit g la fonction définie dans l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par : $g(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$.

1) Déterminer deux réels a et b independents de x tels que $g'(x)=\dfrac{a}{\cos^4 x}+\dfrac{b}{\cos^2 x}$ où g' est la dérivée de g.

2) En déduire la primitive G de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{\cos^4 x}$ qui prend la valeur 1 en $\frac{\pi}{4}$.

Chapitre 6

FONCTIONS LOGARITHMES

LEÇON 1 FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

LEÇON 2 LOGARITHME DE BASE QUELCONQUE.

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1 FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

- Savoir mobiliser et utiliser les propriétés de la fonction logarithme népérien dans diverses opérations et démonstrations. (En particulier le logarithme du produit d'expressions).
- Déterminer l'ensemble de dérivabilité, calculer la dérivée et étudier les variations des fonctions comportant une fonction logarithme, (en particulier ln |u| où u est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$), déterminer sur des intervalles appropriés une primitive de $\frac{u'}{u}$.
- Connaître et savoir utiliser les limites et les limites classiques sur les fonctions logarithmes.

1.1. PRÉSENTATION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DU LOGARITHME NÉPÉRIEN.

1.1.1 Présentation

Prendre un bon départ

Activité 1

1) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet des primitives sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Combien de ces primitives s'annulent-elles en 1 ?

Activité 2

Soit F la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.

a) Donner l'expression de $F'(x)$ et en déduire le sens de variation de F sur $]0;+\infty[$.

b) Donner le signe de $F(x)$ sur chacun des intervalles $]0;1[$, $]1;+\infty[$.

Retenir

- On appelle fonction logarithme népérien et on la note ln ou Log, la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$,qui s'annule en 1.
  $\ln :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$; $x \mapsto \ln x$.
- ln *est dérivable sur* $]0;+\infty[$ et pour tout x *de* $]0;+\infty[$, $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$.
- ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$;
- $\ln 1 = 0$ pour tout réel x *de* $]0;1[$, $\ln x < 0$ et pour tout réel x *de* $]1;+\infty[$, $\ln x > 0$.

REMARQUE

- La fonction ln est continue sur $]0;+\infty[$ car elle est dérivable sur cet intervalle.
- La fonction ln est une bijection de $]0;+\infty[$ vers *un* intervalle J (ln est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$).
- J contient $ln2,5 \approx 0,91$ *et* $ln3 \approx 1,09$; donc J contient 1.
- Le réel e est l'antécédent de 1 par la fonction ln. On a donc $\boxed{\ln e = 1}$.
- Quels que soient les réels strictement positifs a *et* b
  - $lna = lnb$ équivaut à $a = b$.
  - $lna < lnb$ équivaut à $a < b$.
- Soit u une fonction numérique d'une variable réelle et f la fonction : $x \mapsto ln(u(x))$.

  f est définie si et seulement si, u est définie et $u(x) > 0$.

EXEMPLE

1) Déterminons l'ensemble de définition de chacune des fonctions définies ci-après :

$f(x) = ln(x^2 - 4)$; $g(x) = ln(2 - x^2)$; $h(x) = ln|9x^2 - 4|$;

$k(x) = ln\left(\dfrac{3+x}{5-2x}\right)$; $l(x) = ln\sqrt{1-2x^2}$; $i(x) = ln(2x^2 - x + 5)$.

Solution

a) $f(x)$ est définie si et seulement si $x^2 - 4 > 0$;

soit $x \in]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$. L'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$.

b) $g(x)$ est définie si et seulement si $2 - x^2 > 0$; soit $x \in]-\sqrt{2};\sqrt{2}[$.

L'ensemble de définition de g est $D_g =]-\sqrt{2};\sqrt{2}[$.

c) h est définie si et seulement si $|9x^2 - 4| > 0$; or une valeur absolue est toujours positive ou nulle. Donc $|9x^2 - 4| > 0$ équivaut à $9x^2 - 4 \neq 0$;

$9x^2 - 4 \neq 0$ équivaut à $(3x-2)(3x+2) \neq 0$; soit $x \neq \dfrac{2}{3}$ et $x \neq -\dfrac{2}{3}$.

L' ensemble de définition de h est $D_h = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right\}$.

d) $ln\left(\dfrac{3+x}{5-2x}\right)$ n'a de sens que si $\begin{cases} 5-2x \neq 0 \\ \dfrac{3+x}{5-2x} > 0 \end{cases}$; soit $\begin{cases} x \neq \dfrac{5}{2} \\ x \in \left]-3;\dfrac{5}{2}\right[\end{cases}$.

L'ensemble de définition de k est $D_k = \left]-3;\dfrac{5}{2}\right[$.

e) $ln\sqrt{1-2x^2}$ est définie si et seulement si $\begin{cases} 1-2x^2 \geq 0 \\ \sqrt{1-2x^2} > 0 \end{cases}$;

soit $1-2x^2>0$; $x \in \left]-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$. L'ensemble de définition de l est $D_l = \left]-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$

f) $ln(2x^2-x+5)$ est définie si et seulement si $2x^2-x+5>0$.
Le discriminant de $2x^2-x+5$ est $\Delta=(-1)^2-4\times5=-19$. Ce discriminant étant strictement négatif, pour tout réel $x, 2x^2-x+5>0$.
L'ensemble de définition de i est $D_i=\mathbb{R}$.

S'exercer

1.a Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f , g et h :

a) $f(x)=\ln(11-x)$; b) $g(x)=\ln(x^2+5x+6)$;

c) $h(x)=\frac{1}{2}x+2+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$; $k(x)=\ln(x^2)$; $w(x)=\ln\sqrt{x}$; $L(x)=\ln|x^2-4x+3|$.

1.b Résoudre les équations ou inéquations suivantes.

a) $\ln(x-1)\geq\ln(-x+2)$; b) $\ln(x^2-1)<0$;

c) $\ln(-x-1)=\ln(x^2+x+2)$; d) $\ln(-3x+4)\geq1$.

1.1.2 PROPRIÉTÉS ESSENTIELLES DU LOGARITHME NÉPÉRIEN.

Prendre un bon départ

Soit a un réel strictement positif. g la fonction : $x \mapsto ln(ax)$.

1) Montrer que g est la composée de deux fonctions à préciser.

2) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $g'(x)=\frac{1}{x}$.

3) a)En déduire qu'il existe un réel k qui ne dépend pas de x, tel que pour tout réel x strictement positif, $\ln(ax)=lnx+k$.

b) Sachant que $\ln 1=0$, déterminer la constante k.

c) En déduire que quels que soient les réels strictement positifs a et x, on $\ln(ax)=lna+lnx$.

4) Soient a et b deux réels strictement positifs

a) De l'égalité $b\times\frac{1}{b}=1$, déduire que $ln\left(\frac{1}{b}\right)=-ln(b)$, puis que $ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$.

Retenir

Soient a et b deux réels strictement positifs et n un entier relatif.

- $ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$;
- $ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$;
- $ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$;
- $ln(a^n) = nln(a)$;
- $ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$;
- Pour tout r élément de $\mathbb{Q}$, $ln(a^r) = rlna$.

S'EN CONVAINCRE

1) Les trois premières propriétés ont été établies dans l'activité.
2) a)Montrons que pour tout entier naturel, $ln(a^n) = nln(a)$.

   Raisonnons par récurrence.

   - a étant strictement positif, $a^0 = 1$ et $lna^0 = ln1 = 0 = 0 \times \ln(a)$.
   - Soit n un entier naturel quelconque. Supposons $ln(a^n) = nln(a)$.

     $ln(a^{n+1}) = ln(a^n \times a) = ln(a^n) + ln(a) = nln(a) + \ln(a) = (n+1)\ln(a)$.

     On déduit donc que pour tout entier naturel, $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

     On peut aussi écrire $ln(a^{-n}) = ln\left(\frac{1}{a^n}\right) = -ln(a^n) = -nln(a)$.

     Donc Pour tout entier relatif $\boldsymbol{n}$, pour tout nombre réel strictement positif $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{ln(a^n) = nln(a)}$.

   b) $(\sqrt{a})^2 = a$; $ln(\sqrt{a})^2 = 2ln(\sqrt{a}) = ln(a)$. Donc $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

   c) Si p est un entier relatif et q un entier naturel non nul,

   $$\ln\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = \ln\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p\right) = p\ \ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right) = p \times \frac{1}{q}\ln(a) = \frac{p}{q}\ln(a) \text{ car } a = a^{\frac{q}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q.$$

   Par conséquent, $\ln a = q\ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right)$ et $\ln a^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{q}\ln a$.

   En posant $r = \frac{p}{q}$, on a pour tout nombre réel strictement positif a, $\ln(a^r) = r\ln(a)$.

EXEMPLE

1) **Donnons l'écriture simplifiée des expressions suivantes :**

$a = lne^5$; $b = ln\left(\frac{\sqrt{e}}{4}\right)$; $c = lne^2 + ln\sqrt{e}$; $a = lne^5 = 5lne = 5$;

$b = ln\left(\frac{\sqrt{e}}{4}\right) = ln\sqrt{e} - ln4 = \frac{1}{2}lne - ln2^2 = \frac{1}{2} - 2ln2$; $c = \ln e^2 + \ln\sqrt{e} = 2\ln e + \frac{1}{2}\ln e = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

2) **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :** $ln(x+5) = 3 + lnx$.

3) **Contraintes sur l'inconnue:** lnx est définie si et seulement si $x > 0$; donc l'équation $\ln(x+5) = 3 + \ln x$ n'a de sens que si $x+5 > 0$ et $x > 0$; soit $x > 0$.

$\ln(x+5) = 3 + \ln x$ équivaut à $\ln(x+5) = 3\ln e + \ln x$; $\ln(x+5) = lne^3 + \ln x$;

$\ln(x+5) = \ln(xe^3)$; $x + 5 = xe^3$; $5 = x(e^3 - 1)$; $x = \frac{5}{e^3 - 1}$.

Or $\frac{5}{e^3-1} > 0$, donc l'ensemble des solutions de l'équation $ln(x+5) = 3 + lnx$ est

$S = \left\{\frac{5}{e^3 - 1}\right\}$.

4) **Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :** $ln(x^2+5x+6) = ln(x+3)$.

Contraintes sur l'inconnue: $x^2+5x+6>0$ et $x+3>0$.

Or les racines de x^2+5x+6 sont -3 et -2. $x^2+5x+6>0$

équivaut à $x \in]-\infty;-3[\cup]-2;+\infty[$. $x+3>0$ équivaut à $x > -3$.

D'où $x^2+5x+6>0$ et $x+3>0$ équivaut à $x \in]-2;+\infty[$.

Résolution sur $]-2;+\infty[$.

$\ln(x^2+5x+6) = \ln(x+11)$ équivaut à $x^2 + 5x + 6 = x + 11$.

$x^2+5x+6 = x+3 \Leftrightarrow x^2+4x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = -3$.

Or $-3 \notin]-2;+\infty[$ et $-1 \in]-2;+\infty[$. Donc $S = \{-1\}$.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(lnx)^2 + lnx - 6 > 0$.

Solution :

Contraintes sur l'inconnue: $x > 0$

Résolution :

On pose $X = lnx$ et il vient $X^2 + X - 6 > 0$.

Le trinôme $X^2 + X - 6$ a pour racines -3 et 2 donc

L'inéquation $X^2 + X - 6 > 0$ est équivalente à $X \in]-\infty;-3[\cup]2;+\infty[$;

soit $X < -3$ ou $X > 2$; $lnx < -3$ ou $lnx > 2 \Leftrightarrow \ln x < -3\ln e$ ou $\ln x > 2\ln e$;

$\ln x < \ln e^{-3}$ ou $lnx > \ln e^2 \Leftrightarrow x < e^{-3}$ ou $x > e^2$; $x \in]0;e^{-3}[\cup]e^2;+\infty[$.

$S =]0;e^{-3}[\cup]e^2;+\infty[$.

Exercice Résolu 1

f est la fonction définie sur $]-3,3[$ par $f(x)=ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$. Étudier la parité de f.

Solution

Soit $x\in]-3,3[$; $-x\in]-3,3[$ car $]-3,3[$ est centré en 0. De plus

$$f(-x)=ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)=ln\left(\frac{1}{\frac{3-x}{3+x}}\right)=-ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)=-f(x).$$

Donc f est impaire.

Exercice Résolu 2 :

1) Soit la fonction $f: x\mapsto ln(2x-1)^2$. Déterminer l'ensemble de définition de f et montrer que $f(x)=2ln|2x-1|$. L'ensemble de définition de f est $D=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ car $(2x-1)^2\geq 0$.

Pour tout réel x de D, $(2x-1)^2=|2x-1|^2 et |2x-1|>0$.

Donc Pour tout réel x de D, $ln(2x-1)^2=ln|2x-1|^2=2ln|2x-1|$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (1) : $\ln(4x+2)-\ln(x-1)=2\ln x$.

Cette équation n'a de sens que si $\begin{cases}4x+2>0\\ x-1>0\\ x>0\end{cases}$. $\begin{cases}4x+2>0\\ x-1>0\\ x>0\end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases}x>-\frac{1}{2}\\ x>1\\ x>0\end{cases}$; soit $x>1$.

L'ensemble des solutions de cette équation est inclus dans $D=]1;+\infty[$.

Pour tout x appartenant à D, l'équation $ln(4x+2)-ln(x-1)=2lnx$ est équivalente à $ln\frac{4x+2}{x-1}=ln x^2$; soit $\frac{4x+2}{x-1}=x^2$ qui équivaut à $x^2(x-1)=4x+2$ et donc à $x^3-x^2-4x-2=0$.

Soit P le polynôme défini par $P(x)=x^3-x^2-4x-2$.

$P(-1)=0$; -1 est donc une racine de P. Il existe trois réels $a, b et c$ tels que

$P(x)=(x+1)(ax^2+bx+c)$.

$(x+1)(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx+ax^2+bx+c=ax^3+(b+a)x^2+(c+b)x+c.$

$ax^3+(b+a)x^2+(c+b)x+c=x^3-x^2-4x-2.$

Par identification on a $\begin{cases}a=1\\ b+a=-1\\ c+b=-4\\ c=-2\end{cases}$; soit $a=1$; $b=-2 et c=-2$.

$P(x)=(x+1)(x^2-2x-2)$.

L'équation $x^2-2x-2=0$ admet deux solutions $1-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$.

L'équation $x^3-x^2-4x-2=0$ est équivalente à $x=-1\,ou\,x=1-\sqrt{3}$ ou $=1+\sqrt{3}$. Parmi ces solutions, seule $1+\sqrt{3}$ est un élément de D.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (1) est $S=\left\{1+\sqrt{3}\right\}$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation (2) : $ln\dfrac{4x+2}{x-1}=ln\,x^2$.

Cette équation n'a de sens que si $\begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq 0 \\ \dfrac{4x+2}{x-1}>0 \end{cases}$; $soit\begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq 0 \\ x\in\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]1;+\infty\right[\end{cases}$; d'où le domaine

D_2 qui contient les solutions de l'équation (2) est $D_2=\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]1;+\infty\right[$.

Pour tout x de D_2 , (2) équivaut à $x=-1\,ou\,x=1-\sqrt{3}$ ou $x=1+\sqrt{3}$.

Toutes ces solutions ci-dessus appartiennent à D_2.

L'ensemble des solutions de l'équation (2) est $S=\left\{-1;1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right\}$.

Remarque : Les équations (1) et (2) ne sont pas équivalentes.

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $ln\left(x^2-4\right)=4$.

Cette équation n'a de sens que si $x^2-4>0$, soit $x\in\left]-\infty;-2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$.

L'ensemble des solutions de cette équation est inclus dans $D=\left]-\infty;-2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$.

$ln\left(x^2-4\right)=4$ équivaut à $ln\left(x^2-4\right)=4\ln e$, car ln e =1.

D'autre part, $4\ln e=lne^4$. D'où $ln\left(x^2-4\right)=lne^4$; soit successivement $x^2-4=e^4$; $x^2=4+e^4$; $x=\sqrt{4+e^4}\;ou\,x=-\sqrt{4+e^4}$. $\sqrt{4+e^4}$ et $-\sqrt{4+e^4}$ sont tous des éléments de D.

L'ensemble des solutions de l'équation $ln\left(x^2-4\right)=4$ est $S=\left\{\sqrt{4+e^4}\;;-\sqrt{4+e^4}\right\}$.

S'exercer

1.b Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $8(\ln x)^3-(\ln x)^2+\ln x=0$; b) $ln(2x-5)+ln(3x+7)=4\ln 2$;

c) $ln(x+3)+ln(x+2)=ln(x+11)$; d) $ln(x+3)(x+2)=ln(x+11)$.

1.c Donner l'écriture simplifiée des expressions suivantes :

$a = \ln e^2\sqrt{e}$; $b = \dfrac{1}{3}\ln e^{27}$; $c = \ln e + \ln\dfrac{1}{e}$.

1.d Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $\ln x = 2$; b) $\ln x^3 = 27$; c) $\ln(3-5x) = 0$; d) $3\ln\left(\dfrac{1}{5x-1}\right) = 7$;

e) $\ln(5-2x)+\ln(4-3x)=\ln(4)-\ln(3)$;

f) $\ln|x+4| + \ln|x-1| = \ln 6$.

1.e Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\ln(x))^2 - 4\ln(x) - 77 = 0$.

1.f Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :a) $\ln\left(\dfrac{2x-3}{5x+1}\right) < 0$; b) $\ln x - \dfrac{1}{\ln x} < \dfrac{3}{2}$.

1.g Soit n un entier naturel non nul et a un nombre réel strictement positif.
Calculer la somme :

S= $\ln a^n + \ln a^{n-1} + \ldots + \ln a + \ln 1 + \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) + \ln\left(\dfrac{1}{a^2}\right) + \ldots + \ln\left(\dfrac{1}{a^{n-1}}\right) + \ln\left(\dfrac{1}{a^n}\right)$.

1.1.3 LIMITES DES EXPRESSIONS COMPORTANT $\ln$; COURBE de $\ln$.

Prendre un bon départ

1) On admet que $\lim\limits_{u\to+\infty} \ln u = +\infty$.

a. Posons $t = \dfrac{1}{x}$; calculer la limite de t quand x tend vers $+\infty$,

b. Exprimer $\ln x$ *en fonction de* t et en déduire la limite de $\ln x$ lorsque x tend vers 0, par valeurs supérieures.

2) En remarquant que $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1}{x}\times\ln x$, justifier que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$.

3) En posant X= $\dfrac{1}{x}$, démontrer que $\dfrac{\ln x}{x} = -X\ln X$. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$ et que $\lim\limits_{x\to0+} x\ln x = 0$.

4) a) Montrer que $\ln$ est dérivable en 1 et que le nombre dérivé de $\ln$ en 1 est 1.

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ et que $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de $\ln$ au point d'abscisse 1.

5) Dresser le tableau de variation de $\ln$.

Retenir

Quelques limites classiques.

- $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ >}} \ln u = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ >}} u\ln u = 0$; $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$; $\lim\limits_{u\to 1} \dfrac{\ln u}{u-1} = 1$;
- $\lim\limits_{u\to +\infty} \ln u = +\infty$; $\lim\limits_{u\to +\infty} \dfrac{\ln u}{u} = 0$.

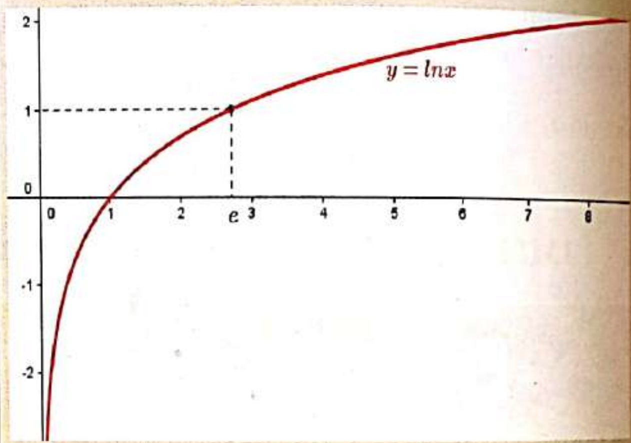
Représentation graphique.

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Tableau de variation de *ln*

x	0	1	e	$+\infty$
$ln'x$		$+$		
lnx	$-\infty$	0 ↗	1	$+\infty$

Courbe de *ln*



- L' axe des ordonnées est asymptote à la courbe de ln.
- L' axe des abscisses est la direction de la branche parabolique de la courbe de ln quand x tend vers $+\infty$.

REMARQUE

- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur I, alors , la fonction g définie sur I par $g(x) = ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I et on a pour tout $x \in$ I, $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

En effet :

Si $u(x) > 0$, alors $g(x) = ln(u(x))$. Pour tout x tel que $u(x) > 0$, $g(x) = (ln \circ u)(x)$

Et $g'(x) = (ln\circ u)'(x) = (ln)'(u(x)) \times u'(x)$. Or pour tout réel x, $(\ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$. D'où

$g'(x) = \dfrac{1}{u(x)} \times u'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$. De même si $u(x) < 0$, alors $g(x) = ln(-u(x))$.

Pour tout x, $-u(x) > 0$, $g(x) = (ln\circ u)(x)$

et $g'(x) = (\ln\circ u)'(x) = (\ln)'(-u(x)) \times (-u'(x)) = \dfrac{1}{-u(x)} \times (-u'(x))$; $g'(x) = \dfrac{-u'(x)}{-u(x)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Si u ne s'annule pas sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, les primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions $x \mapsto \ln|u(x)| + k$, où k est un réel qui ne dépend pas de x.

EXEMPLE 1

1) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-\ln x)$.

$$\lim_{x\to+\infty}(2x-\ln x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(2-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}x=+\infty.$$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}x^2(\lim x)^2=\lim\limits_{x\to\infty}x(\lim x)^2=0$ car $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}x\ln x=0$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}\times\dfrac{\ln x}{x}\right]=0$. Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2x+1)}{x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2x+1)}{2x+1}\times\dfrac{2x+1}{x-3}=0$. Car $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(2x+1)}{2x+1}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-3}=2$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+3}{3x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{2x+3}{3x-1}\right)=\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

6) Calculer les limites suivantes :

a) $f(x)=2x-1+ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ en $+\infty$; b) $g(x)=\dfrac{2lnx+1}{2x}$ en $+\infty$;

c) $h(x)=xln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ en 0^+ ; d) $l(x)=\dfrac{lnx}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$.

Solution :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=1$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty}ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=ln1=0$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}2x-1=+\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

b) $\dfrac{2lnx+1}{2x}=\dfrac{lnx}{x}+\dfrac{1}{2x}$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{2x}\right)=0$. Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2x}\right)=0$

c) $h(x)=xln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=xln(x+1)-xlnx=0$ car $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(x+1)=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$.

d) En posant $X=\sqrt{x}$, $l(x)=\dfrac{lnx}{\sqrt{x}}=\dfrac{lnX^2}{X}=\dfrac{2lnX}{X}$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty}l(x)=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{2\ln X}{X}=0$.

EXEMPLE 2

Définir la fonction dérivée de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=2x+ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ et étudier ses variations.

Solution

$ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ n'a de sens que si $\begin{cases}x\neq0\\ \dfrac{x+1}{x}>0\end{cases}$;

Or $\dfrac{x+1}{x}>0$ si et seulement si $x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]0;+\infty\right[$.

Donc l'ensemble de définition de f est $D_f=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]0;+\infty\right[$.

La fonction $x \mapsto ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ est dérivable sur D_f comme composée de fonctions dérivables.

Posons $u(x)=\frac{x+1}{x}$. Pour tout x de $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$, $u'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

Pour tout x de D_f, $f'(x)=2+\frac{u'(x)}{u(x)}=2+\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}=2-\frac{1}{x^2}\times\frac{x}{x+1}=2-\frac{1}{x(x+1)}$.

Pour tout x de D_f, $f'(x)=\frac{2x^2+2x-1}{x(x+1)}$.

Pour tout x de D_f, $x(x+1)>0$. $f'(x)$ est donc du signe de $2x^2-2x+1$.

$2x^2+2x-1$ a pour racines $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ *et* $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$. $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\in]0;+\infty[$ et $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\in]-\infty;-1[$.

Pour tout x appartenant à $\left]-\infty;\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right[\cup\left]\frac{-1+\sqrt{3}}{2};+\infty\right[$, $f'(x)>0$; donc f est croissante sur les intervalles $\left]-\infty,\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right[$ et $\left]\frac{-1+\sqrt{3}}{2};+\infty\right[$.

Pour tout x appartenant à $\left]\frac{-1-\sqrt{3}}{2};\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right[$, $f'(x)<0$.

Donc f est décroissante sur les intervalles $\left]\frac{-1-\sqrt{3}}{2};-1\right[$ et $\left]0;\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right[$.

Exercice Résolu 1:

Déterminer les primitives F de la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$.

Solution :

f est continue sur $]1+\infty[$, donc elle admet des primitives sur $]1+\infty[$.

Posons $u(x)=x^2-1$, $u'(x)=2x$, donc $f(x)=\frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u(x)}$. D'où

Les primitives de la fonction f sont les fonctions F définies sur $]1;+\infty[$ par

$F(x)=\frac{1}{2}ln|u(x)|+K=\frac{1}{2}ln|x^2-1|=\frac{1}{2}ln(x^2-1)+K$ où K est un réel qui ne dépend pas de x car dans $]1+\infty[$ $x^2-1>0$.

S'exercer

1.h Déterminer l'ensemble de définition de la fonction numérique de la variable réelle f dans chacun des cas suivants ; calculer les limites aux bornes de son domaine de définition, définir sa dérivée.

a) $f(x)=2x\ln(3-x)$; b) $f(x)=\ln(2x^2-3x)$; c) $f(x)=x+1+\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)$.

1.i Étudier les variations de la fonction numérique de la variable réelle x f dans chaque cas.

a) $f(x)=ln(-x+3)$; b) $f(x)=ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$; c) $f(x)=2+ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

1.j Définir la fonction dérivée de la fonction f définie par $f(x)=\frac{x+lnx}{x^2}$.

1.k Déterminer la forme générale des primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle proposé :

a) $f(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}$ sur $]0+\infty[$; b) $f(x)=x-1+\frac{lnx}{x}$ sur $]1+\infty[$ c) $f(x)=x\frac{1}{x\ln x}$;

d) $f(x)=\frac{3}{x}(\ln x)^r$ où r est un nombre rationnel distinc de -1.

1.1.4 Étude et représentation de quelques fonctions.

EXEMPLE 1

$f: x \mapsto x-1-ln(2x-1)$.

a) **Ensemble de définition.**

$f(x)$ est défini si et seulement si $2x-1>0$; soit $x>\frac{1}{2}$.

L'ensemble de définition de f est donc $D_f=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

b) **Limites de f aux bornes de D_f**

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}(x-1)=-\frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}(2x-1)=0^+$; donc $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}\ln(2x-1)=-\infty$;d'où $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(2x-1)=+\infty$; $f(x)=x\left[\frac{x-1}{x}-\frac{2x-1}{x}\ln\frac{2x-1}{2x-1}\right]$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

c) **Étude des branches infinies.**

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}f(x)=+\infty$. **La droite d'équation $x=1$ est asymptote à la courbe de f.**

Pour tout x de $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, $\frac{f(x)}{x}=\frac{x-1}{x}+\frac{ln(2x-1)}{x}=\frac{x-1}{x}+\frac{ln(2x-1)}{(2x-1)}\times\frac{(2x-1)}{x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x} = 2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(2x-1)}{2x-1} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-1 - \ln(2x-1)) = -\infty$.

La courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$.

d) **Dérivée et sens de variation**

La fonction f est dérivable sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ comme somme de fonctions dérivables.

Pour tout x de $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$, $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{2x-1} = \dfrac{2x-1-2}{2x-1} = \dfrac{2x-3}{2x-1}$, comme $2x-1>0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $2x-3$.

$f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$; pour tout x de $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$ $f'(x) > 0$, f est croissante sur $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$;

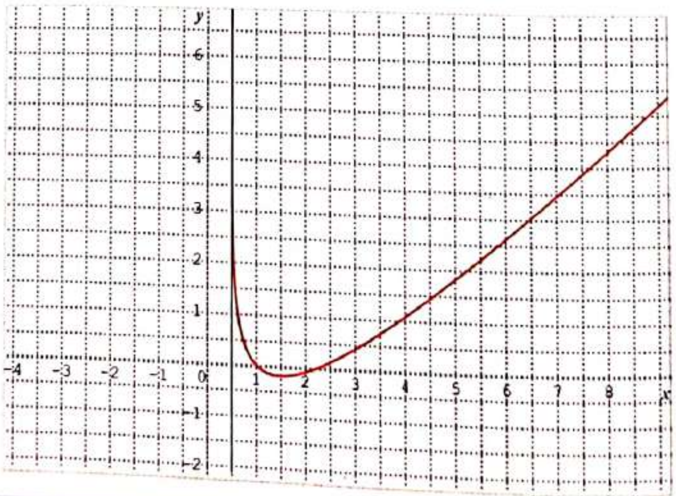
pour tout x de $\left]\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right[$ $f'(x) < 0$, f est décroissante sur $\left]\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right[$.

Tableau des variations

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$			0		
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	↗	$+\infty$

$f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{2} - 1 + ln(3-1) = \dfrac{1}{2} - ln2 \cong -0,19$.

e) **Courbe représentative de f**



Exercice Résolu 1 :

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = ln|2-5x|$.

Étudier la fonction f et tracer sa courbe dans un repère orthonormé du plan.

Solution

Ensemble de définitions D_f de f.

Pour tout réel x $|2-5x| \geq 0$ donc $ln|2-5x|$ existe si et seulement si $2-5x \neq 0$; c'est-à-dire $x \neq \frac{2}{5}$.

D'où $D_f = \left]-\infty; \frac{2}{5}\right[\cup \left]\frac{2}{5}; +\infty\right[= \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{5}\right\}$.

Dérivée de f.

f est dérivable sur D_f comme la composée de deux fonctions dérivables sur D_f ; d'où pour tout $x \in \left]-\infty; \frac{2}{5}\right[\cup \left]\frac{2}{5}; +\infty\right[$, $f'(x) = \frac{-5}{2-5x} = \frac{5}{5x-2}$.

Limites aux bornes de D_f.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln|2-5x| = +\infty$; $\lim\limits_{x \to \frac{2}{5}} f(x) = \lim\limits_{X \to 0} \ln X = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln|2-5x| = +\infty$.

Tableau des variations de f.

$f'(x) = \frac{5}{5x-2}$. $f'(x)$ a le signe de $5x-2$; donc pour x appartenant à $\left]-\infty; \frac{2}{5}\right[$ $f'(x) < 0$, donc f est décroissante sur $\left]-\infty; \frac{2}{5}\right[$;

pour x appartenant à $\left]\frac{2}{5}; +\infty\right[$, $f'(x) > 0$, donc

f est croissante sur $\left]\frac{2}{5}; +\infty\right[$.

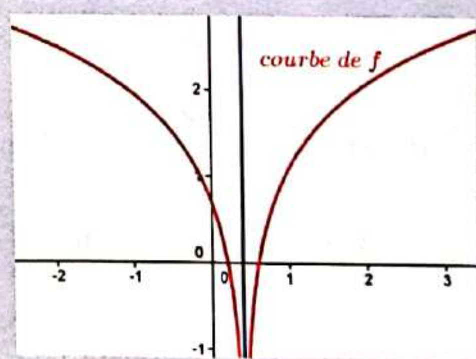
x	$-\infty$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	||	$-\infty \nearrow +\infty$

Courbe de f.

Dans un repère orthonormé,

- la droite d'équation $x = \frac{2}{5}$ est asymptote pour la courbe de f.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln(2-5x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln(2-5x)}{2-5x} \frac{2-5x}{x} = 0.$

  $\lim\limits_{X \to +\infty} -\frac{5 \ln X}{X} = 0$; donc l'axe des abscisses est la direction de la branche parabolique de la courbe de f à $-\infty$.



Exercice Résolu 2 :

Étudier et représenter la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{4}(2\ln x - 3)$.

L'ensemble de définition de f est $D_f =]0; +\infty[$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x^2}{4}(2\ln x - 3) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[\frac{1}{2}x(x\ln x) - \frac{3}{4}x^2\right] = 0;$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{4}(2\ln x - 3) = +\infty.$

La fonction f est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de deux fonctions continues et dérivables.

Pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{1}{2}x(2lnx-3)+\frac{2}{x}\times\frac{x^2}{4}=xlnx-\frac{3}{2}x+\frac{x}{2}=x\ln x-x=x(\ln x-1)$.

Pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, $f'(x)=0$ si et seulement si $lnx-1=0$. $\ln x=1$ équivaut à $x=e$.

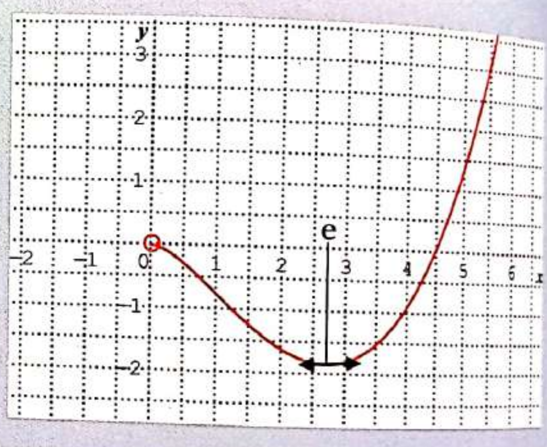
$f'(x)>0$ est équivalent à $\ln x-1>0$, soit $\ln x>1$ et $\ln x>\ln e$; d'où $x>e$.

Pour tout x appartenant à $]0;e[, f'(x)\quad 0$ et pour tout x appartenant à $]e;+\infty[$, $f'(x)>0$. f est donc décroissante sur $]0;e[$ et croissante sur $]e;+\infty[$. $f(e)=\frac{e^2}{4}(2lne-3)=-\frac{e^2}{4}$.

Branches infinies : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2}(2\ln x-3)=+\infty$. La courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Tableau des variations

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{e^2}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$



S'exercer

1.l Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+x^2)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+\frac{1}{x^2})$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\<}}\ln(3-2x-x^2)$; d) $\lim\limits_{x\to-1}\ln(\frac{2x+3}{x+1})$;

e) $\lim\limits_{x\to0}\ln(\cos x)$; f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{x+1}$.

1.m a) Soit $f : x\mapsto\frac{5lnx}{x^2+x+1}$. Calculer la limite de f quand x tend vers $+\infty$ et étudier les branches infinies.

b) Soit $g : x\mapsto x^2-ln(x)$. Étudier la limite de g quand x tend vers $+\infty$ puis étudier les branches infinies.

1.n Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{3lnx+1}{x}$. Déterminer l'ensemble de définition de f, puis calculer les limites à ses bornes.

Préciser les asymptotes à la courbe représentive de f.

LEÇON 2 LOGARITHME DE BASE QUELCONQUE.

- Utiliser le lien entre le « logarithme népérien » et « le logarithme de base a » ($a>0$ et $a\neq 1$) pour : résoudre des équations et inéquations contenant « log_a » et manipuler les expressions comportant log_a.
- Déterminer les dérivées et des primitives des fonctions comportant « $\log_a$ ».
- Calculer les limites les fonctions comportant « log_a ».

2.1. PRÉSENTATION ET QUELQUES PROPRIÉTÉS

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit a un réel strictement positif et différent de 1, f_a la fonction numérique réelle d'expression $f_a(x)=\dfrac{lnx}{lna}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f_a.
2. Montrer que f_a est dérivable sur $]0;+\infty[$ et vérifier que $f_a(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$.
3. a) Déterminer suivant les valeurs de a, le signe de $f_a(x)$.

   b) En déduire que : $\begin{cases} si\ \ 0<a<1\ ,\ f_a\ est\ strictement\ décroissante\ sur\ ]0;+\infty[. \\ si\ a>1\ ,\quad f_a\ est\ strictement\ croissante\ sur\ ]0;+\infty[. \end{cases}$
4. Vérifier que $f_a(1)=0$; $f_a(a)=1$ et que $f_e(x)=lnx$.

Activité 2

Soient a et b deux réels strictement positifs et tous différents de 1 on pose $log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$.

1. Démontrer que quels que soient les réels strictement positifs x et x', on a $log_a(xx')=log_a x+log_a x'$;
2. a) Montrer que pour tout réel strictement positif, $log_a x=\dfrac{lnb}{lna}\times\dfrac{lnx}{lnb}$;

   b) En déduire que $\forall\ x\in\ ]0;+\infty[\ \ log_a x=log_a b\times log_b x$.

Retenir

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

- On appelle fonction logarithme de base a, la fonction notée log_a définie sur $]0;+\infty[$ par :
  $\forall\ x\in\ ]0;+\infty[\ ,\ log_a(x)=\dfrac{lnx}{lna}$.

➢ La fonction log_a est continue et strictement monotone sur $]0;+\infty[$; $\log_a$ est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$;

➢ La fonction log_a est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $(log_a)'(x)=\frac{1}{xlna}$ $\forall x \in]0;+\infty[$;

- si $a>1$ alors log_a est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
- si $0<a<1$ alors log_a est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

➢ Quels que soient les réels strictement positifs x *et* x',

$log_a(xx')=log_a x+log_a x'$	$log_a\left(\frac{x}{x'}\right)=log_a x-log_a x'$;
$log_a\left(\frac{1}{x}\right)=-log_a x$	$\forall\ r\in\mathbb{Q}, log_a(x^r)=rlog_a x$.

➢ Changement de base : Soit $a,b \in]0;+\infty[-\{1\}$, $\forall\ x \in]0;+\infty[$, $log_a x=log_a b\times log_b x$

REMARQUE

- Le logarithme népérien est le logarithme de base e : $log_e(x)=lnx$
- Le logarithme de base 10 est appelé logarithme décimal et est noté log :

  $\log(x)=\log_{10}(x),\ \forall x>0$.

  Le potentiel d'hydrogène d'une solution est donné par $pH=-log[H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ est sa concentration en ions H_3O^+.
- $log_a 1=0$ et $log_a a=1$.

EXEMPLE 1

Calculons : a) $log_5 25$; b) $log_{\frac{3}{2}}\frac{27}{8}$; c) $log_{\frac{5}{2}}\frac{4}{25}$; d) $log 0,001$; e) $log\ 3$.

Solution :

a) $log_5 25=log_5 5^2=2log_5 5=2$; car $log_a a=1$.

b) $\log_{\frac{3}{2}}\frac{27}{8}=\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^3=3\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)=3$; *car* $\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)=1$;

c) $log_{\frac{5}{2}}\frac{4}{25}=log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{2}{5}\right)^2=2log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{2}{5}\right)=2log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{\frac{2}{5}}\right)=-2log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{5}{2}\right)=-2$; car $\log_a\left(\frac{1}{x}\right)=-\log_a x,\ \forall x>0$.

d) $log 0,001=log\frac{1}{10^3}=-log 10^3=-3log 10=-3$; car $\log(x)=\log_{10}(x),\forall x>0$.

e) $log_9 3=log_9\sqrt{9}=log_9 9^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}log_9 9=\frac{1}{2}$; car $\log_9(9)=1$.

EXEMPLE 2

Déterminer la valeur de x dans chacun des cas suivants :

a) $log_2 x = 3$; b) $log_{\frac{3}{4}} x = -1$; c) $log_x \dfrac{9}{4} = 2$; d) $log_x \dfrac{16}{25} = -2$; e) $log x = 1$.

Solution :

a) $log_2 x = 3$ équivaut à $log_2 x = 3 log_2 2$ avec $x > 0$.

soit $log_2 x = log_2 2^3$; $x = 2^3 = 8$; donc $x = 8$.

b) $log_{\frac{3}{4}} x = -1$ équivaut à $log_{\frac{3}{4}} x = -1 log_{\frac{3}{4}} \left(\dfrac{3}{4}\right)$ avec $x > 0$; $log_{\frac{3}{4}} x = log_{\frac{3}{4}} \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1}$; $x = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1} = \dfrac{4}{3}$.

c) $log_x \dfrac{9}{4} = 2$ est équivalent à $log_x \dfrac{9}{4} = 2 log_x x$ et $x > 0$; $log_x \dfrac{9}{4} = log_x x^2$ et

$x > 0$; $\dfrac{9}{4} = x^2$ et $x > 0$; $x = \dfrac{3}{2}$.

d) $log_x \dfrac{16}{25} = -2$ est équivalent à $log_x \left(\dfrac{16}{25}\right) = -2 log_x x$ et $x > 0$;

$log_x \dfrac{16}{25} = log_x x^{-2}$ et $x > 0$; $\dfrac{16}{25} = x^{-2}$ et $x > 0$; $x^2 = \dfrac{25}{16}$ et $x > 0$; $x = \dfrac{5}{4}$.

e) $log x = 1$ équivaut à $log x = log 10 \Leftrightarrow x = 10$.

Exercice Résolu

Soit f la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définit par $f(x) = log_{\frac{3}{2}} x$.

1) a) Donner l'ensemble de définition de f. b) Étudier les variations de $f = log_a$.

c) Étudier le signe de $log_{\frac{3}{2}} x$. d) Montrer que f est une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle J qu'on précisera.

e) Étudier les branches infinies. f) Résoudre l'équation $f(x) = 1$.

2. Dans un repère orthonormé, représenter la courbe de f et celle de : $x \mapsto log_{\frac{2}{3}} x$.

Solution

1. **Déterminons :**

a) Domaine D de $log_{\frac{3}{2}}$. $D =]0;+\infty[$. en effet pour tout $a > 0$ *et* $a \neq 1$, log_a est défini sur $]0;+\infty[$.	d) Ensemble image J par $log_{\frac{3}{2}}$ de $]0;+\infty[$. pour tout $a > 1$, log_a est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$; donc l'ensemble image de $]0;+\infty[$ par f est J= $\mathbb{R}$.

b) Variations de $log_{\frac{3}{2}}$.	
$a=\frac{3}{2}$ et $\frac{3}{2}>1$ donc f est croissante sur $]0;+\infty[$	$log_{\frac{3}{2}}x=0$ équivaut à x 1 ;
c) Signe de $log_{\frac{3}{2}}x$.	e) Asymptote
$log_{\frac{3}{2}}$ est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$; de plus $log_{\frac{3}{2}}1=0$. Donc sur $]0;1[$, $log_{\frac{3}{2}}$ est négative ; et sur $]1;+\infty[$, $log_{\frac{3}{2}}$ est positive .	l'ensemble image de $]0;+\infty[$ par $log_{\frac{3}{2}}$ est $]-\infty;+\infty[$ et $log_{\frac{3}{2}}$ est continue et croissante sur $]0;+\infty[$; donc $\lim\limits_{x\to 0} log_{\frac{3}{2}}x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} log_{\frac{3}{2}}x=+\infty$. $\lim\limits_{x\to 0} log_{\frac{3}{2}}x=-\infty$ d'où la droite d'équation $x=0$ est asymptote à la courbe de $log_{\frac{3}{2}}$.

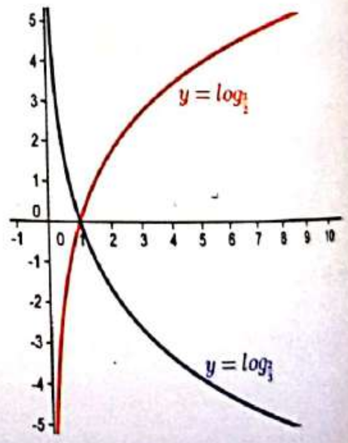
2. **Représentons les Courbes de $\log_{\frac{3}{2}}$ et de $\log_{\frac{2}{3}}$**

Courbes.

$log_a x = log_a b \times log_b x$; donc

$log_{\frac{2}{3}}x = log_{\frac{2}{3}}\frac{3}{2}\times log_{\frac{3}{2}}x = -log_{\frac{2}{3}}\frac{2}{3}log_{\frac{3}{2}}x = -log_{\frac{3}{2}}x$.

Comme $log_{\frac{2}{3}}x = -log_{\frac{3}{2}}x$, la courbe de $log_{\frac{2}{3}}$ est le symétrique de celle de $log_{\frac{3}{2}}$ par rapport à l'axe des abscisses.



S'exercer

2.a Donner l'espression simplifiée de chacun des réels : a) $log_2 8$; b) $log_{\frac{2}{3}}\frac{8}{27}$; c) $log_5\frac{1}{125}$; d) $log_3\sqrt[5]{3}$; e) $log_{\frac{2}{3}}\frac{9}{4}$; f) $log_8 2$; g) $log100$; h) $log0,1$; i) $log10^6$; ; j) $log_2 16\sqrt[3]{2}$.

2.b Déterminer la valeur de x dans chacun des cas suivants :
a) $log_2 x=0$; b) $logx=1$; c) $log_5 x=7$; d) $log_x e=1$; e) $logx=-2$.

2.c 1) Étudier les fonctions numériques f et g définie par $f(x)=logx$ et $g:x\mapsto log_{\frac{1}{10}}x$.

2) Dans un même repère orthonormé, représenter la courbe de f et celle de g.

S'ENTRAINER

FONCTION LOGARITHME NÉPERIEN.

1.

Simplifier les expressions suivantes

$a = \ln e^2 \sqrt{e}$; $b = \frac{1}{3} \ln e^{27}$; $c = \ln e^2 - \ln e^{-2}$.

2.

a) Exprimer en fonction de $\ln 2$ ou $\ln 3$

$\ln 72$; $\ln \frac{1}{3}$; $\frac{1}{8} \ln 256$.

b) Exprimer en fonction de $\ln 2$ ou $\ln 5$:

$\ln 250$; $\ln 200$; $\ln 1,25$; $\ln 10^5$.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln \frac{1}{x} = 3$; b) $\ln(2x+1) = \ln(-2x-3)$;

c) $\ln(x+2) = 1 + \ln(x - 3)$;

d) $\ln(2x+3) + \ln(x-2) = \ln(x+11)$;

e) $\ln(x+4) + \ln(x-1) = \ln 6$;

f) $2\ln(x-4) = \ln x - 2\ln 2$.

4.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $\ln^2 x - 2\ln x - 3 = 0$; b) $\ln^3 x + 2\ln^2 x - \ln x - 2 = 0$.

5.

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a) $\ln x > 2$; b) $2\ln x - 1 < 5$;

c) $\ln(2x-1) - \ln(2x+1) \leq \ln(x+2)$.

6.

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} x + y = 2 \\ \ln x - \ln y = \ln 2 \end{cases}$.

7.

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur l'ensemble D par :

a) $f(x) = \ln(-x)$; $D =]-\infty; 0[$.

b) $f(x) = \ln \sqrt{x}$; $D =]0; +\infty[$.

c) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$; $D =]-\infty; -1[$.

8.

Déterminer une primitive de la fonction numérique f sur le plus grand intervalle I à proposer dans dans chaque cas.

a) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$; b) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$;

c) $f(x) = 4 - \frac{2}{x-1}$; d) $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$;

e) $f(x) = \frac{2x^2+5x-1}{x+1}$; f) $f(x) = \frac{x^2+x-5}{x^3+3x^2-15x+7}$;

g) $f(x) = \frac{3}{(x+7)\ln(x+7)}$.

h) $f(x) = \frac{(\ln x)^r}{x}$ où $r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$.

9.

f est la fonction définie sur $]-3;3[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)$. Etudier la parité de f.

10.

On considère la fonction f définie sur $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + 2 + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

1) Montrer que le point A(0;2) est un centre de symétrie de la courbe de f.

2) Déterminer l'asymptote oblique à la courbe de f

11.

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par: $g(x) = 1 - x - \ln x$

1) Calculer la dérivée de la fonction g et étudier son signe. En déduire les variations de g.

2) Calculer g(1). En déduire le signe de $g(x)$ dans l'intervalle $]0;+\infty[$, suivant les valeurs de x.

12.

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln^2 x}$. Étudier la fonction f (domaine, dérivée, limites, tableau des variations, et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan).

13.

Soit f la fonction $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x\ln x-x$.

Étudier la fonction f (domaine, dérivée, limites, tableau des variations, puis tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan).

14.

Soit f la fonction numérique de variable réelle définie par $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Étudier la fonction f (domaine, dérivée, limites, tableau des variations, et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan).

15.

Soit n un entier naturel non nul.

1) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^n}$.
2) Déterminer la limite en 0 de la fonction $g_n : x \mapsto x^n \ln x$.
3) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}$.
4) Déterminer la limite en 0 de la fonction $h_n : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x^n}$.

16.

On désigne par f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=-x+(x+1)\ln x$.

1) a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x\ln x+1$.
   b) En déduire que $g(x)>0$ pour tout $x\in\,]0,+\infty[$.
2) a) Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Pour la limite en $+\infty$, vérifier que l'on peut écrire $f(x)$ sous la forme $f(x)=x(-1+\ln x)+\ln x$;
   b) Montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$; en déduire les variations de f.
3) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$.
   b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α. en Justifiant.

17.

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=-x+3+\ln x$.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites de f à ses bornes.
2) Étudier les variations de f, puis dresser son tableau des variations.
3) Etudier les branches infinies de la courbe repésentative de f.
4) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.
5) Soit la fonction G définie par $G(x)=x(-1+\ln x)\,(x>0)$.

Calculer la dérivée de G et en déduire une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

18.

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=1-\dfrac{1}{x}+\ln x$.

1) a) Calculer $f(1)$;
   b) Étudier les variation de f et déduire le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$ suivant les valeurs de x.
2) Soit la fonction g définie par $g(x)=|x-1|\ln x$.
3) Déterminer l'ensemble de définition de g et calculer les limites de g aux bornes de cet ensemble.
4) Étudier les variations de g et dresser son tableau des variations.
5) Représenter la courbe (C_g) dans un repère orthonormé du plan.

19.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln|x|<1$.
2) On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=2x-x\ln|x| \text{ pour } x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

b) Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites à ses bornes.

c) Étudier les variations de f et dresser son tableau des variations.

d) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

20.

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-\ln x}$.

1) Montrer que pour tout réel $x, x \neq \ln x$. En déduire l'ensemble de définition de f.

2) Déterminer la limite de $\dfrac{f(x)}{x-1}$ quand x tend vers 1.

3) Étudier les variations de f et dresser son tableau des variations.

4) a) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

b) Préciser éventuellement les asymptotes à la courbe représentative de f.

5) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

FONCTION LOGARITHME DE BASE QUELCONQUE.

21.

Donner l'écriture simplifiée des reéls suivants :

a) $\log_5 5$; b) $\log_3 3^5$; c) $\log_2 \dfrac{1}{2}$;

d) $\log_2 32$; e) $\log_2 \dfrac{1}{8}$; f) $log_{16} 4$;

g) $\log_5 \dfrac{1}{25}$; h) $\log 100$; i) $log_{\frac{3}{4}} \dfrac{16}{9}$.

22.

Déterminer la valeur de x dans chacun des cas suivants :

a) $log_5 x=2$; b) $log_x 9=2$; c) $log_x 2=2$;

d) $log_x 125=3$; e) $log_x \dfrac{9}{16}=2$; f) $log x=-3$.

23.

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par $f(x)=\log_5 x$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites de f à ses bornes.

2) Étudier les variations de f et dresser son tableau des variations.

3) Dans un repère orthonormé, représenter la courbe de f et celle de $g: x \mapsto log_{\frac{1}{5}} x$.

24.

Dans chacun des cas suivants, le point A appartient à la courbe d'une fonction logarithme de base a ($a>0$, $a \neq 1$).

Déterminer pour chaque point A la base a de la fonction logarithme et dire si elle est croissante ou décroissante.

a) A (4 ;2) ; b) A (100 ;2) ; c) A (8 ; 3) ;

d) A (5 ;1) ; e) A ($\dfrac{4}{9}$;2) ; f) A (e ;1) ;

g) A (10 ;−1) .

25.

La courbe représentative d'une fonction logarithme de base a passe par le point $A\left(\dfrac{1}{3};-1\right)$.

Quelle est l'ordonnée du point B appartenant à C_f si l'abscisse de B est 9?

26.

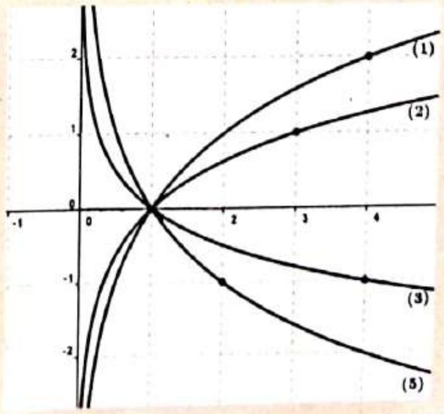
Déterminer dans chaque cas le signe de $log_a x$.

a) $a>1$ et $x>1$; b) $a>1$ et $0<x<1$;

c) $a<1$ et $x>1$; d) $a<1$ et $0<x<1$.

27.

Déterminer une équation de chacune des courbes des fonctions logarithmes de base a du graphique ci-dessous. (1) ,(2) , (3) et (4).



28.

a) Montrer que $log_{a^{-1}}(x) = -log_a(x)$.

b) Comment peut-on déduire la courbe de la fonction $\log_{\frac{1}{a}}$, à partir de celle de log_a ?

29.

Donner l'expression à l'aide d'un seul logarithme des expressions suivantes :

a) $\log x + \log(x-2)$;

b) $2\log x - \log(x-1) + \log(x+3)$;

c) $\log(x+3) - 2\log x^2 - 5\log(x+1)$;

d) $\log(x^2+2x-3) - \log(x+3) - \log(x+1)$;

30.

Soient a, b et M trois nombres réels strictement positifs différents de 1.

Montrer que $log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$.

31.

Déterminer l'ensemble des solutions des équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

a) $log_2 x = log_2 3$; b) $ln(x+1) = log_2 3$.

32.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $\log x = \log 2$; b) $\log x = \log 5 + \log 2 - \log 3$;

c) $\log x = 3\log 2 - \log 5$;

d) $\log x = \dfrac{1}{2}\log 9 - \dfrac{2}{3}\log 8$;

e) $\log x = \dfrac{3}{2}\log 9 - \dfrac{2}{3}\log 8 + \dfrac{1}{4}\log 16$.

f) $2\log x = \log 18 - \log 2$.

33.

On considère l'équation:

$\log(x+1) + \log(x-2) = \log 5 + \log 2$.

a) Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels cette égalité est possible ?

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation a).

34.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $log(2x+1) + log(x-3) = 2log 3$;

b) $log(x+1) = log 3 + log(x-2)$;

c) $2log(x+1) = 2log(2x-3)$;

d) $2log_2(x+1) = 4$; e) $log_2(x-3) + log_2 x = 2$

35.

Déterminer le ou les racines de chacune des fonctions définies ainsi qu'il suit :

a) $f(x) = log\, x - 2$;

b) $f(x) = log(x+1) - log(x-1) - log 2$;

c) $f(x) = log_2(x^2-9) - log_2(x+3)$;

d) $f(x) = \dfrac{log(x^2-4)}{log(x+2)} - 1$

36.

En chimie, le «pH» (potentiel d'hydrogène) est défini par :

$pH = -log\left[H_3O^+\right]$ où $\left[H_3O^+\right]$ est la concentration en ions H_3O^+, exprimée en mole. L^{-1} d'une solution aqueuse.

La concentration en H_3O^+ d'une solution aqueuse est 2,4 x 10^{-10} moles par litre.

Calculer le pH de cette solution arrondi à 10^{-2}.

Le pH d'une solution est 3. Établir que la concentration en H_3O^+ est 10^{-3} mole par litre.

Démontrer que si la concentration d'une solution aqueuse est divisée par 100, son pH augmente de 2.

37.

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes :

a) $\begin{cases} x + y = 65 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \log x + \log y = \dfrac{3}{2} \\ \log x - \log y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Chapitre 7

FONCTIONS EXPONENTIELLES

LEÇON 1 FONCTION EXPONENTIELLE NÉPERIEN.

1-1 PRÉSENTATION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DE *exp*.

1-2 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE.

1-3 ETUDE DES FONCTIONS COMPORTANT LA FONCTION EXPONENTIELLE « *exp* ».

LEÇON 2 FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE QUELCONQUE.

2-1 PRÉSENTATION.

2-2 QUELQUES PROPRIETÉS DE exp_a.

LEÇON 3 FONCTIONS PUISSANCES : $f_a : x \to x^\alpha$ OÙ x EST UN RÉEL STRICTEMENT POSITIF ET α EST UN RÉEL.

3-1 PRÉSENTATION ET PROPRIÉTÉS DE f_α.

3-2 CROISSANCES COMPARÉES DE x x ; *exp* et In en $+\infty$
CALCULS DE CERTAINES LIMITES.

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1 FONCTION EXPONENTIELLE NÉPERIEN

- Présenter la fonction exponentielle, ainsi que ses propriétés. (En particulier l'image d'une somme et le produit des images).
- Exploiter les propriétés de la fonction exponentielle pour résoudre des équations et inéquations comportant la fonction exponentielle.
- Manipuler les fonctions dont les expressions comportent la fonction exponentielle : Dérivabilité, sens des variations, connaître les limites classiques pour la levée des indéterminations.
- Étudier et représenter graphiquement des fonctions dont les expressions possèdent la fonction exponentielle.

1.1. PRÉSENTATION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DE *exp*

Prendre un bon départ

a) Montrer que la fonction logarithme népérien "ln" est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty ;+\infty[$.

b) Dresser le tableau des variations de ln^{-1}. (Bijection réciproque de ln).

Retenir

- On appelle fonction exponentielle la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien. On la note **exp**.
- Si u est une fonction d'une variable réelle,
  - $\exp(u(x))$ existe si et seulement si $u(x)$ existe ;
  - $\exp(u(x))$ est toujours strictement positive.
- Pour tout réel x et pour tout réel strictement positif y ,($y = \exp x$) équivaut à ($\ln y = x$).
- La fonction *exp* est une bijection croissante.

CONSÉQUENCES

- De l'égalité $\ln 1 \quad 0$, il résulte que $\exp 0 = 1$;
- De l'égalité $\ln e = 1$, il en résulte que $\exp 1 = e$
- Pour tout réel u, $ln(\exp u) = u$.
- Pour tout réel v strictement positif, $\exp(\ln v) = v$.

- Quels que soient les réels a et b, $(\exp a = \exp b)$ équivaut à $(a = b)$.
- Quels que soient les réels a et b, $(\exp a < \exp b)$ équivaut à $(a < b)$.

Exemple : $x > 0$ équivaut à $\exp x > \exp 0$ qui est équivalent à $\exp x > 1$, puis $x < 0$ équivaut à $0 < \exp x < 1$.

NOTATION

Quel que soit le nombre rationnel r, $\ln e^r = r \ln e = r$.

Or $\ln e^r = r$ équivaut à $\exp r = e^r$.

Pour tout nombre rationnel r, $\exp \boldsymbol{r} = \boldsymbol{e^r}$.

On convient que pour tout réel x, ***exp* x = *e*^x^**$\;$: $\boldsymbol{\exp x = e^x}$.

EXEMPLE

1) Déterminer les ensembles de définition des fonctions définies ci-après :

a) $f(x) = e^{2x^2-3x+1}$; b) $g(x) = e^{\frac{x^2-2}{x}}$; c) $h(x) = e^{\sqrt{4-x^2}}$; d) $k(x) = e^{\ln(2x-1)}$.

a) La fonction : $x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme. D'où l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

b) La fonction : $x \mapsto \dfrac{x^2-2}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$; d'où l'ensemble de définition de g est $\mathbb{R}^*$.

c) La fonction : $x \mapsto \sqrt{4-x^2}$ est définie si et seulement si $4 - x^2 \geq 0$; *soit* $x \in [-2;2]$. D'où l'ensemble de définition de h est $[-2;2]$.

d) La fonction : $x \mapsto \ln(2x-1)$ est définie si et seulement si $2x - 1 > 0$; soit $x > \dfrac{1}{2}$.

D'où l'ensemble de définition de k est $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

a) $e^{2x} = e^{-3}$; b) $e^x = 2$; c) $e^x = 0$.

Solution :

a) $(e^{2x} = e^{-3})$ équivaut $(2x = -3)$; donc l'ensemble des solutions de l'équation $e^{2x} = e^{-3}$ est $S=\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.

b) ($e^x = 2$)équivaut à ($e^x = e^{\ln 2}$); soit $x = \ln 2$. Donc l'ensemble des solutions de l'équation $e^x = 2$ est $S=\{ln2\}$.

c) On ne peut pas trouver un réel x tel que $e^x = 0$ car $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$; l'ensemble solution de l'équation $e^x = 0$ est $S=\emptyset$.

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

a) $e^x > 3$; b) $e^x > -1$; c) $e^{2x-\ln 5} < 5$.

Solution :

Pour chacune de ces inéquations, nous noterons S l'ensemble des solutions.

a) $(e^x > 3)$équivaut à $(e^x > e^{\ln 3})$; soit $x > ln3$; donc $S =]ln3;+\infty[$.

b) Pour tout réel x,la proposition $e^x > -1$ est toujours vraie car $e^x > 0$; donc $S = \mathbb{R}$.

c) $e^{2x-\ln 5} < 5$équivaut à $e^{2x-\ln 5} < e^{\ln 5}$; soit $2x - \ln 5 < \ln 5$, par suite $x < \ln 5$; donc $S =]-\infty;\ln 5[$

4) Étudions le signe de $f(x) = e^{3x} - e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$.

$e^{3x} - e^{2x} > 0$ équivaut à $e^{3x} > e^{2x}$; soit $3x > 2x$ et $x > 0$. Donc pour tout x de $]0;+\infty[$ $f(x) > 0$ et pour tout x de $]-\infty;0[$, $f(x) < 0$.

Exercice Résolu

Résoudre l'équation : $e^{2x+5} = e^{\frac{3}{x}}$.

Solution

L'expression $2x+5$ est définie pour tout réel x, et l'expression $\frac{3}{x}$ est définie pour $x \neq 0$. On résoud alors l'équation sur E= $\mathbb{R}^*$.

Sur E= $\mathbb{R}^*$, $e^{2x+5} = e^{\frac{3}{x}}$ est équivalent à $2x+5 = \frac{3}{x}$; soit $2x^2 + 5x - 3 = 0$; par suit ; $x = -3$ ou $x = \frac{1}{2}$.

Les solutions -3 et $\frac{1}{2}$ appartiennent à E, donc l'ensemble des solutions de l'équation $e^{2x+5} = e^{\frac{3}{x}}$ est $S = \left\{-3;\ \frac{1}{2}\right\}$.

S'exercer

1.a Écrire plus simplement les nombres suivants :

a) $e^{-\ln 5} + e^{2ln3}$; b) $e^{-2+3ln2}$; c) $e^{1-2ln3}e^{1+2ln3}$.

1.b Montrer que pour tout réel x, $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$.

1.c Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

a) $e^{2x-16} \quad e^{-3x}$; b) $e^{3x+ln2} = 2$; c) $e^x = ln\frac{1}{3}$.

1.d Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

a) $e^{2\cos x} > e^{\sqrt{3}}$; b) $e^{-x+3} > -e$; c) $e^{x^2-9} \leq 1$.

1.e Résoudre l'inéquations $e^{x^2-4} \leq e^{-3x}$.

1.2. REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Prendre un bon départ

1) Sachant que la fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction ln, donner la transformation qui permet de déduire la représentation graphique de la fonction exp, de celle de ln dans un même repère orthonormé du plan ?
2) En utilisant le tableau des variations de la fonction exp, déduit de celui de ln, déterminer en justifiant les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)$.
3) Construire dans un même repère orthonormé les courbes représentatives de ln et de exp.

Retenir

➤ Représentation graphique.

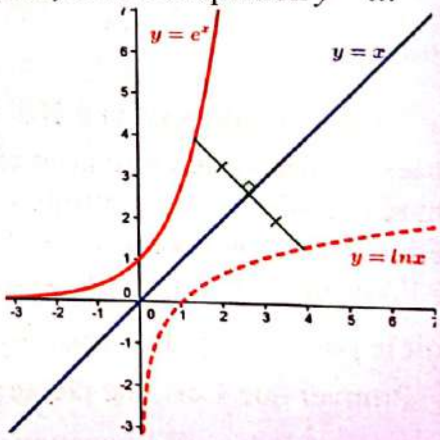
Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Tableau de variation de exp

x	$-\infty$		$+\infty$
$exp'(x)$		$+$	
$exp(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- L'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de exp en $-\infty$.
- L'axe des ordonnées est la direction de la branche parabolique pour la courbe représentative de exp quand x tend vers $+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

La courbe représentative de exp est symétrique de celle de ln par rapport à la première bissectrice du repère, droite d'équation $y = x$.



PROPRIÉTÉS

- Quels que soient les réels a et b, $exp(a+b) = (\exp a)\times(\exp b)$. ($e^{a+b} = e^a \times e^b$)
- Pour tout réel a, $\exp(-a) = \frac{1}{expa}$. ($e^{-a} = \frac{1}{e^a}$).
- Quels que soient les réels a et b, $exp(a-b) = \frac{\exp a}{esp\, b}$. $\left(e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}\right)$.
- Pour tout réel a et pour tout nombre rationnel r, $(\exp a)^r = exp(ra)$. $\left[(e^{ra}) = (e^a)^r\right]$.

S'EN CONVAINCRE

- $x = e^a$ équivaut à $a = \ln x$; $y = e^b$ équivaut à $b = \ln y$.
  $a + b = \ln x + \ln y = \ln(xy)$. $a + b = \ln(xy)$ équivaut à $xy = e^{a+b}$; soit $(e^a) \times (e^b) = e^{a+b}$.
- $x = e^a$ *équivaut à* $a = \ln x$; $-a = -\ln x$; $-a = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$; $e^{-a} = \frac{1}{x}$; $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$.
- $e^{a-b} = e^{a+(-b)} = e^a \times e^{-b} = e^a \times \frac{1}{e^b} = \frac{e^a}{e^b}$.
- $x = e^a$ *équivaut à* $\ln x = a$; $r\ln x = ra$; $\ln x^r = ra$; $e^{ra} = x^r$. Donc $e^{ra} = (e^a)^r$.

EXEMPLE

Écrire plus simplement les nombres suivants :

a) $e^{\ln 5} + e^{-\ln 3}$ 3 b) $e^{1+\ln 2}$ c) $e^{-2\ln 3}$

Solution :

a) $e^{\ln 5} + e^{-\ln 3} = 5 + \frac{1}{e^{\ln 3}}$; car $e^{-a} = \frac{1}{e^a} = 5 + \frac{1}{3} = \frac{16}{3}$.

b) $e^{1+\ln 2} = e^1 e^{\ln 2}$; car $e^{a+b} = e^a e^b = 2e^1 = 2e$; car $e^1 = e$.

c) $e^{-2\ln 3} = \left(e^{\ln 3}\right)^{-2}$; car $(e^a)^r = e^{ra} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $2e^{2x} + 8e^x + 6 = 0$.

Solution :

$2e^{2x} + 8e^x + 6 = 0$ équivaut à $2(e^x)^2 + 8e^x + 6 = 0$. En posant $X = e^x$, on obtient $2X^2 + 8X + 6 = 0$ et les solutions de cette nouvelle équation sont -1 et -3.
On résout alors les équations $e^x = -1$ et $e^x = -3$. Mais comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, on en déduit que les équations $e^x = -1$ et $e^x = -3$ n'ont pas de solution. D'où l'ensemble des solutions de l'équation $2e^{2x} + 8e^x + 6 = 0$ est $S = \varnothing$.

Soit le polynôme p défini par $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$.

a) Prouver que 1 est une racine de p.
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$.
c) Déduire des questions a) et b) les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $2e^{3x}$ $3e^{2x}$ $-3e^x - 2 = 0$.

Solution

$p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$.

a) $p(1) = 2 \times 1 + 3 - 5 - 2 = 0$. 1 est donc une racine de p.

b) $p(x)$ peut donc se mettre sous la forme $p(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
Après développement et identification, on a $p(x) = (x-1)(2x^2 + 5x + 2)$.
$p(x) = 0$ *équivaut à* $(x-1)(2x^2 + 5x + 2) = 0$; soit $x = 1$ *ou* $x = -2$ *ou* $x = -\frac{1}{2}$.

L'ensemble des solutions de l'équation $2x^3+3x^2-3x-2=0$ est $\left\{-2;-\frac{1}{2};1\right\}$.

c) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $2e^{3x}+3e^{2x}-3e^x-2=0$.

Posons $X=e^x$.

$2e^{3x}+3e^{2x}-3e^x-2=0$ équivaut à $2\left(e^x\right)^3+3\left(e^x\right)^2-3e^x-2=0$ qui est équivalent à

$2X^3+3X^2-3X-2=0$; soit $X=-2$ ou $X=-\frac{1}{2}$ ou $X=1$.

$e^x=-2$ n'est pas possible car $e^x>0$, pour tout réel x.

$e^x=-\frac{1}{2}$ n'est pas possible car $e^x>0$, pour tout réel x.

$e^x=1$ équivaut à $x=0$.

L'ensemble des solutions de l'équation $2e^{3x}+3e^{2x}-3e^x-2=0$ est $S=\{0\}$.

S'exercer

1.f Simplifier les expressions :

a) $e^{4\ln 2}$; b) $\ln e^{-\frac{1}{2}}$; c) $e^{-4\ln 3}$; d) $e^{3\ln 2}\times\ln\left(\sqrt{e}\right)$.

1.g Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations :

a) $e^{2x}-e^x-2=0$; b) $e^{2x}-6e^x+5=0$; c) $e^x-e^{-x}=8$;

d) $e^x-e^{-x}=\frac{15}{4}$; e) $e^x-7+100e^{-x}=0$; f) $e^{4x}-13e^{2x}+36=0$.

1.h Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

a) $e^x-e^{-x}>8$; b) $e^x-7+100e^{-x}<0$; c) $e^{3x+1}-e^{2x+1}+-e^{x+1}>0$; d) $e^{-3x+5}>e^{2x}$.

1.i Donner l'expression reduite de :

$A(x)=2\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-1$ et $b(x)=2\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2+1$.

1.3. ÉTUDE DES FONCTIONS COMPORTANT LA FONCTION EXPONENTIELLE « *exp* ».

Prendre un bon départ

On rappelle que si f réalise une bijection de K vers $f(K)$ et si pour tout $x\in K$, $f'(x)\neq 0$, alors f^{-1} est dérivable sur $f(K)$ et $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{(f'\circ f^{-1})(x)}$.

1) Pour tout réel x, donner l'expression de $ln'\left(e^x\right)$.

2) En déduire que pour tout réel x, $(exp)'(x) \quad \exp(x)$.
3) Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

   Déterminer la dérivée de la fonction : $x \mapsto e^{u(x)}$.

Retenir

- La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour fonction dérivée la fonction : $x \mapsto e^x$ définie sur $\mathbb{R}$.
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

  La fonction : $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction : $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.
- La fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ admet pour primitives les fonctions $x \quad e^{u(x)} \quad k$ où k est un réel quelconque qui ne dépend pas de x.

REMARQUE

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0 \ ; \ \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

S'EN CONVAINCRE

- Posons $X = -x$; $\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty$;

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{X \to +\infty} \left(-Xe^{-X}\right) = \lim_{X \to +\infty} \left(-X \times \frac{1}{e^X}\right) = \lim_{X \to +\infty} \left(-\frac{1}{\frac{e^X}{X}}\right) = 0; \text{ car } \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x - 0} = e^0 = 1$ car $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x - 0}$ est le nombre dérivé de $x \mapsto e^x$ en 0.

EXEMPLE

1) Déterminer l'ensemble des primitives de chacune des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

   a) $f(x) = xe^{x^2}$; b) $g(x) = e^{\sin x}\cos x$; c) $h(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

Solution:

a) Posons $u(x) = x^2$. $u'(x) = 2x$, par suite $f(x) = \dfrac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$.

D'où les primitives de f sur $]-\infty;+\infty[$ sont les fonctions F : $x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{u(x)} + K$.

Donc $F : x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{x^2} + K$ où K est un réel qui ne dépend pas de x.

b) Posons $v(x)=\sin x$. $v'(x)=\cos x$; $g(x)=v'(x)e^{v(x)}$.
Les primitives de f sur $]-\infty;+\infty[$ sont les fonctions G : $x \mapsto e^{v(x)}+K$; soit G : $x \mapsto e^{\sin x}+K$ où K est un réel qui ne dépend pas de x.

c) Posons $w(x)=\frac{1}{x}$; pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $w'(x)=-\frac{1}{x^2}$
$h(x)=-w'(x)e^{w(x)}$. Les primitives de h sur $]0;+\infty[$ sont les fonctions G : $x \mapsto e^{w(x)}+K$;
soit G : $x \mapsto -e^{\frac{1}{x^2}}+K$ où K est un réel qui ne dépend pas de x.

2) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-5e^x)$.
Pour tout réel $x>0$, $2x-5e^x=-e^x\left(2\left(-xe^{-x}\right)+5\right)$. or $\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x)=0$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(-xe^{-x})=0$;
d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-5e^x)=-\infty$.

Exercice Résolu

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(x+1)^2e^{-x}$.

Soit (C) la représentation graphique de la fonction g dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Étudier les variations de g et dresser son tableau des variations.
2) Tracer la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Solution

1) Variations et tableau des variations de g.

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet , elle est la composée des fonctions $x \mapsto -x$ et $x \mapsto e^x$ qui sont des fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
Donc g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $g'(x)=2(x+1)e^{-x}-(x+1)^2e^{-x}=(x+1)(2-(x+1))e^{-x}$.
$g'(x)=(x+1)(-x+1)e^{-x}$.

Or pour tout réel x, $e^{-x}>0$; donc $g'(x)$ a le signe de $(x+1)(-x+1)$. $(x+1)(-x+1)$ est négatif pour $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ et positif pour $x\in]-1;1[$.

D'où g est décroissante sur les intervalles $]-\infty;-1[$ et $]1;+\infty[$ puis croissante sur $]-1;1[$.

Limites aux bornes de $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)^2=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$. Il en resulte que $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{+\infty}g(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}$. En posant $X=e^x$, on a $x=\ln X\to+\infty$; X tend vers $+\infty$.

$$\frac{x^2}{e^x}=\frac{(\ln X)^2}{X}=\frac{(\ln X)^2}{\left(\sqrt{X}\right)^2}=\frac{\left(\ln\left(\sqrt{X}\right)^2\right)^2}{\left(\sqrt{X}\right)^2}=4\left(\frac{\ln\sqrt{X}}{\sqrt{X}}\right)^2\to 0$$

quand $X\to 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0.$

Tableau de variations de g.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$			0		0		
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0

2. Courbe de g.

Branches infinies.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{g(x)}{x}\right)=a=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(x+1)^2e^{-x}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x+1}{x}e^{-x}=\lim_{x\to-\infty}\left[x+2+\frac{1}{x}\right]e^{-x}=-\infty.$$ donc

l'axe des ordonnées est une branche parabolique pour la courbe de g .

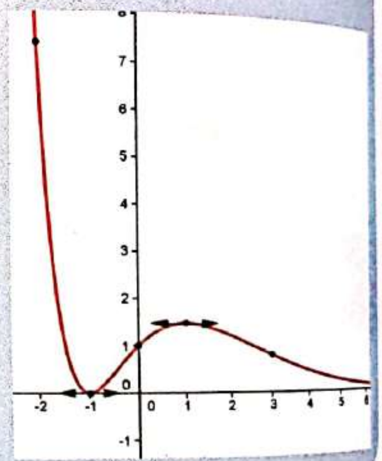
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$; donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe de g en $+\infty$.

Extrema.

Le point de coordonnées (-1 ;0) est le minimum absolu (C).
Le point d'abscisse 1 est un maximum relatif de (C).

Quelques points de la courbe C.

$g(-2)=e^2$; $g(0)=1$; $g(3)=\frac{16}{e^3}$: (C) passe par les points de cordonnées (-2 ; e^2) ,(0 ;1) et (3 ; $\frac{16}{e^3}$).



S'exercer

1.j Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} xe^{\frac{1}{x}}$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} xe^{\frac{1}{x}}$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)e^x$; d) ; $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)e^x$.

1.k Soit $f: x\mapsto\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$. Donner l'ensemble de définition de la fonction f, puis calculer les limites à ses bornes.

Étudier les branches infinies de la courbe représentative de f.

1.l On considère la fonction f définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x)=\left(1-x^2\right)e^x$.

a) Calculer la limite de f en $+\infty$, puis en $-\infty$.

b) Étudier les variations de f. Dresser son tableau des variations.

c) Étudier les branches infinies à la courbe représentative de

d) Tracer la courbe de f dans un repère orthonormal.

LEÇON 2 FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE QUELCONQUE.

- Utiliser le lien entre « exponentielle de base e » et « exponentielle de base a » pour résoudre des équations et inéquations contenant « exp_a », où $a \in \mathbb{R}^{*+} - \{1\}$.
- Déterminer des dérivées et des primitives des fonctions comportant « exp_a ».

2.1. PRÉSENTATION

Prendre un bon départ

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

a) Montrer que log_a admet une bijection réciproque.

b) Dresser le tableau des variations de $\log_a^{-1}$ dans le cas $a > 1$ et le cas $0 < a < 1$.

Retenir

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. On appelle fonction exponentielle de base a la fonction réciproque de la fonction logarithme de base a. On la note $\boldsymbol{exp_a}$. Elle est définie de $\mathbb{R}$ vers $]0;+\infty[$. Pour tout réel x, ($y = exp_a x$) équivaut à $(x = log_a y)$.

EXEMPLE

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

$log_a 1 = 0$ équivaut à $exp_a 0 = 1$.

$log_a a = 1$ équivaut à $exp_a 1 = a$.

$log_a x = 2$ équivaut à $exp_a 2 = x$.

$log_a x = -1$ équivaut à $exp_a(-1) = x$.

S'exercer

2.a Déterminer si possible dans chaque cas le ou les réels x tels que :

a) $log_a x^2 = -2$; b) $exp_a 2 = x^2$; c) $exp_a(-x^2) = -3$.

2.2. QUELQUES PROPRIETÉS DE exp_a

Prendre un bon départ

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

a) À partir de la relation $x = log_a y = \dfrac{\ln y}{\ln a}$, montrer que $y = e^{x\ln a}$.

b) En déduire que pour tout réel , $exp_a x = e^{x\ln a}$.

c) On pose $\alpha = log_a x$; Exprimer $-\alpha$ comme $log_a y$ où y est à déterminer en fonction de x.

En déduire que $exp_a(-x) = \dfrac{1}{exp_a x}$.

Retenir

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

- Pour tout réel x, $exp_a x = e^{x\ln a}$.
- Pour tout réel x, $\log_a(\exp_a x) = x$.
- Pour tout réel x strictement positif, $exp_a(log_a x) = x$.
- $exp_a 0 = 1$ *et* $exp_a 1 = a$.
- Pour tout réel x, $exp_a(-x) = \dfrac{1}{exp_a x}$.
- Pour tous réels x *et* y, $exp_a(x+y) = (exp_a x)\times(exp_a y)$.
- Pour tous réels x *et* y, $exp_a(x-y) = \dfrac{exp_a x}{exp_a y}$

S'EN CONVAINCRE

Montrons que $exp_a(x+y) = (exp_a x)\times(exp_a y)$.

Posons $\alpha = exp_a x$ *et* $\beta = exp_a y$.

$\alpha = exp_a x$ est équivalent à $x = \log_a \alpha$.

$\beta = exp_a y$ est équivalent à $y = \log_a \beta$.

$x + y = log_a\alpha + log_a\beta = log_a(\alpha\beta)$.

$x + y = log_a(\alpha\beta)$ équivaut à $\alpha\beta = exp_a(x+y)$;Soit $(exp_a x)(exp_a y) = exp_a(x+y)$.

D'autre part $exp_a(x-y) = exp_a(x+(-y)) = (exp_a x)(exp_a(-y))$

$$= (exp_a x)\times\frac{1}{(exp_a y)} = \frac{(exp_a x)}{(exp_a y)}.$$

NOTATION

Pour tout réel a strictement positif et différent de 1,

Pour tout r de $\mathbb{Q}$, $log_a a^r = r log_a a = r$ car $log_a a = 1$.

On a donc $exp_a\left(log_a a^r\right) = exp_a r$; soit $a^r = exp_a r$.

Ainsi, pour tout réel a strictement positif et différent de 1, or $\ln_a\left(a^r\right) = r \Leftrightarrow a^r = exp_a(r)$.

Pour tout r de $\mathbb{Q}$, $exp_a r = a^r$.

Par convention, pour tout réel x, pour tout réel a strictement positif et différent de 1, $exp_a x = a^x$.

Ainsi pour tout réel x, pour tout réel strictement positif et différent de 1, $exp_a x = a^x = e^{xlna}$.

REMARQUE

La notation ci-dessus nous permet d'écrire :
Pour tout a, réel strictement positif et différent de 1,

- $a^0 = 1$; $a^1 = a$.
- Pour tous réels x et y,
  - $a^{x+y} = a^x \times a^y$; $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$; $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$;
  - $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$.
- Pour tout réel x , $a^x = e^{xlna}$.

Par convention on admet que pour tout réel , $1^x = 1$.

EXEMPLE

1) a) $exp_2(3) = 2^3 = 8$; b) $exp_3(-2) = 3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$;

c) $exp_{\frac{1}{2}}(3) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$; d) $exp_{\frac{1}{2}}(-3) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = \dfrac{1}{2^{-3}} = 2^3 = 8$.

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $3^x = 5.2^x$.

$3^x = 5.2^x$ est équivalent successivement à

$ln3^x = ln\left(5.2^x\right)$; $xln3 = ln5 + ln2^x \Leftrightarrow xln3 = ln5 + xln2$;

$x(\ln 3 - \ln 2) = \ln 5; x\ln\dfrac{3}{2} = \ln 5$; $x = \dfrac{\ln 5}{\ln\dfrac{3}{2}}$. $S = \left\{\dfrac{\ln 5}{\ln 3 - \ln 2}\right\}$.

Exercice Résolu 1 : Etude de la Fonction $f : x \mapsto a^x$.

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. Désignons par (C_a) la courbe de f dans un repère orthonormé du plan. $f(x) = e^{xlna}$.

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = (lna)e^{xlna} = a^x lna$.

Pour tout réel x, $a^x > 0$; donc $f'(x)$ a le même signe que $\ln a$.

Premier cas : $0 < a < 1$.

$\ln a < 0$ et pour tout réel x, $f'(x)$ est strictement négatif. La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a = -\infty$ car $\ln a < 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a^x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{x\ln a}}{x} = -\infty$; car $\dfrac{e^{x\ln a}}{x} = (\ln a)\times\dfrac{e^{x\ln a}}{(\ln a)x}$.

La courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

D'autre part $a^0 = 1$. Dressons le tableau des variations de f.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↘ 0

Deuxième cas : $a > 1$

$\ln a > 0$. Pour tout réel x, $f'(x)$ est strictement positif. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

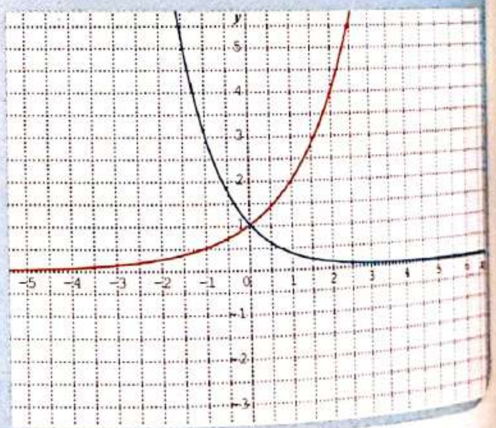
Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln a = -\infty$ car $\ln a > 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a = +\infty$ car $\ln a > 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = +\infty$.

D'autre part $a^0 = 1$. Dressons le tableau des variations de f.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	0 ↗	1	↗ $+\infty$



$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{x\ln a}}{x} = +\infty$; La courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Exercice Résolu 2

Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2^x$.

Solution

Pour tout réel x, $f(x) = xe^{x\ln 2}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = e^{x\ln 2} + x\ln 2e^{x\ln 2} = (1 + x\ln 2)2^x$.

Or $2^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, et $1 + x\ln 2 > 0$ lorsque $x > -\dfrac{1}{\ln 2}$.

Donc $f'(x) > 0$ pour $x > -\dfrac{1}{\ln 2}$ et $f'(x) < 0$ pour $x < -\dfrac{1}{\ln 2}$.

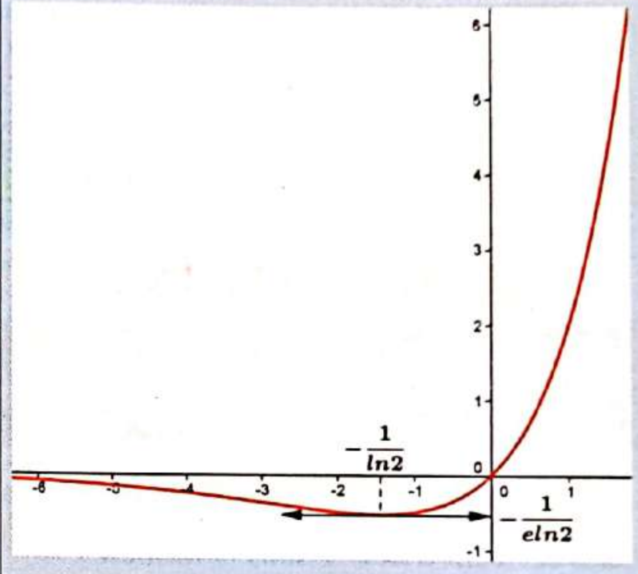
$\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln 2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

En $-\infty$, on est en présence d'une forme indéterminée. En posant $X = x\ln 2$, on obtient $xe^{x\ln 2} = \dfrac{Xe^X}{\ln 2}$ or $\lim\limits_{x\to-\infty} X = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Tableau des variations de f

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\ln 2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e\ln 2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe de f



Branches infinies

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$; donc l'axe des ordonnées est la direction de la branche parabolique pour la courbe de f à $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe de f.

S'exercer

2.m Donner les nombres réels suivants sous forme simplifiée :

a) $exp_5(2)$; b) $exp_2(5)$; c) $exp_5(-2)$; d) $exp_2(-5)$; e) $exp_{\frac{1}{2}}(-5)$.

2.n Déterminer le réel x dans chacun des cas suivants :

a) $exp_2(x) = 8$; b) $exp_3(x) = \dfrac{1}{9}$; c) $exp_{\frac{1}{2}}(x) = \dfrac{1}{16}$; d) $exp_9(x) = 3$;

2.o Déterminer la base a dans chacun des cas suivants :

a) $exp_a(2) = 16$; b) $exp_a(-3) = \dfrac{1}{125}$; c) $exp_a(-2) = \dfrac{1}{9}$.

2.p Déterminer la base de chacune des fonctions exponentielles suivantes, puis indiquer si la fonction est croissante ou décroissante.

a) $y = \left(\dfrac{5}{2}\right)^x$; b) $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$; c) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$; d) $y = \left(\dfrac{16}{9}\right)^{-\frac{x}{2}}$.

2.q Résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation $2^{x+3} = 3^{x-7}$.

2.r On donne une suite géométrique de raison $q = 0,4$; son terme initial est $u_0 = 24.4140625$ et le terme $u_n = 0.0000262\ 144$. Calculer n.

LEÇON 3 FONCTIONS PUISSANCES : $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ OÙ x EST UN RÉEL STRICTEMENT POSITIF ET α EST UN REEL.

Utiliser le lien entre la fonction puissance et la fonction « *exp* » pour :

- déterminer la dérivée et des primitives des fonctions $x \mapsto x^\alpha$;
- calculer les limites des fonctions comportant la fonction puissance.
- résoudre des équations et inéquations comportant des fonctions puissances.

3.1. PRÉSENTATION ET PROPRIÉTÉS DE f_α .

Prendre un bon départ

1. u et v sont deux fonctions. On note u^v la fonction : $x \mapsto u(x)^{v(x)}$.

En écrivant $u(x)^{v(x)}$ sous la forme $e^{v(x)lnu(x)}$,

Donner les contraintes pour que u^v soit définie.

Retenir

Soient u et v deux fonctions.

On note u^v la fonction : $x \mapsto (u(x))^{v(x)}$, c'est –à-dire la fonction : $x \mapsto e^{v(x)\ln u(x)}$.

Si D_v désigne l'ensemble de définition de v et D_u l'ensemble des réels x pour lesquels $u(x)$ est défini et strictement positif, alors l'ensemble de définition de u^v est $D_u \cap D_v$.

EXEMPLE

Étudions et représentons la fonction $f : x \mapsto (x)^{\frac{1}{x}}$.

L'ensemble de définition de f est $]0;+\infty[$.

Pour tout réel x strictement positif, $(x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$; f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Posons pour tout réel x strictement positif, $v(x) = \frac{1}{x} lnx$.

$v'(x) = -\frac{1}{x^2} lnx + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x)$.

Pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x)e^{\frac{1}{x}\ln x}$.

$f'(x)$ a le signe de $1 - \ln x$ car $e^{\frac{1}{x}\ln x} > 0$ et $\frac{1}{x^2} > 0$.

$1-\ln x>0$ équivaut à $\ln x<1$; soit $\ln x<\ln e$; $x<e$; $x\in\left]0;e\right[$.

On en déduit que $f'(x)>0$ si et seulement si $x\in\left]0;e\right[$. $f'(x)<0$ si et seulement si $x\in\left]e;+\infty\right[$.

f est donc strictement croissante sur $\left]0;\mathrm{e}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\mathrm{e};+\infty\right[$.

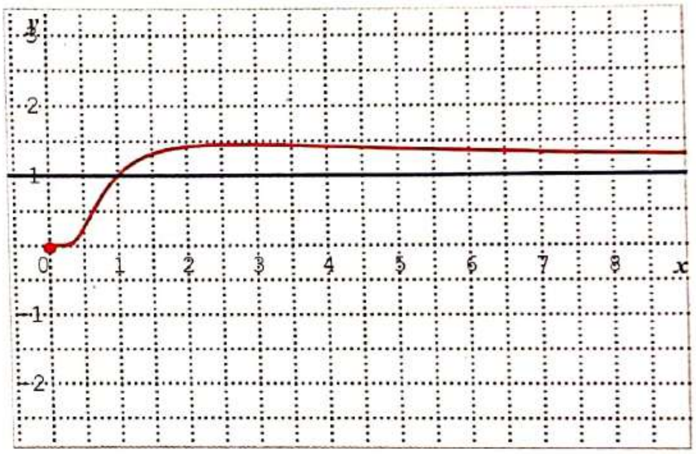
$f(e)=e^{\frac{1}{e}\ln e}=e^{\frac{1}{e}}$.

Calcul des limites : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\frac{1}{x}\ln x=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=0$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^{0}=1$.

Le point de coordonnées $(0;0)$ est un point d'arrêt de la courbe de f et la droite d'équation $y=1$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

Tableau des variations de f.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	1



Exercice Résolu 1

1) Exprimons plus simplement, en fonction de e, le nombre : $\left(ee^{\sqrt{2}}\right)^{1-\sqrt{2}}$.

$$\left(ee^{\sqrt{2}}\right)^{1-\sqrt{2}}=\left(e^{1+\sqrt{2}}\right)^{1-\sqrt{2}}=e^{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=e^{1-2}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

2) Simplifions le nombre : $\dfrac{\sqrt{9}\sqrt{27}\left(\sqrt[3]{9}\right)^2}{\sqrt[3]{\sqrt{3}}}$.

$$\frac{\sqrt{9}\sqrt{27}\left(\sqrt[3]{9}\right)^2}{\sqrt[3]{\sqrt{3}}}=\frac{\text{ü}\sqrt{\ ^{\text{¤}}}\left(\sqrt{\ }\right)^2}{\sqrt[3]{3^{\frac{1}{2}}}}=\frac{3\left(3^3\right)^{\frac{1}{2}}\left(\left(3^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2}{\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{3\,\text{C}3^{\frac{3}{2}}\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^2}{3^{\frac{1}{2}\text{C}\frac{1}{3}}}=\frac{3^{1+\frac{3}{2}}3^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{1}{6}}}=\frac{3^{\frac{5}{2}}3^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{1}{6}}}=3^{\frac{5}{2}+\frac{4}{3}-\frac{1}{6}}=3^{\frac{11}{3}}.$$

3) Résolvons l'inéquation : $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\geq\frac{3}{2}$.

$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \frac{3}{2}$ est équivalente à l'inéquation $x\ln\frac{1}{2} \geq \ln\frac{3}{2}$.

$x \leq \dfrac{\ln\frac{3}{2}}{\ln\frac{1}{2}}$ car $\ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$. $\dfrac{\ln\frac{3}{2}}{\ln\frac{1}{2}} = \dfrac{\ln 3 - \ln 2}{-\ln 2} = 1 - \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \frac{3}{2}$ est $\left]-\infty; 1 - \frac{\ln 3}{\ln 2}\right]$

Exercice Résolu 2 :

Etudier f et tracer la courbe de $f : x \mapsto \left(x^2 - 1\right)^{-\pi}$ dans un repère orthonormé.

Solution :

Ensemble de définition D_f : Par définition d'une fonction puissance, $f(x) = e^{-\pi\ln\left(x^2-1\right)}$ existe pour $x^2 - 1 > 0$. Donc $D_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

Ensemble d'étude E de f : f est paire ; donc on peut l'étudier sur E$=]1; +\infty[$ et déduire l'étude sur $]-\infty; -1[$ par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées.

Limites en 1 et $+\infty$; interprétations.

Lorsque tend vers 1^+, $x^2 - 1$ tend vers 0^+ et $\pi\ln\left(x^2 - 1\right)$ tend vers $-\infty$.

Donc en posant X$= \pi\ln\left(x^2 - 1\right)$, on obtient : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{X \to -\infty} e^{-X} = +\infty$. On déduit que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe de f. Lorsque x tend vers $+\infty$, $x^2 - 1$ tend vers $+\infty$ et $\pi\ln\left(x^2 - 1\right)$ tend vers $+\infty$.

Donc en posant X$= \pi\ln\left(x^2 - 1\right)$, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = 0$.

On déduit que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe de f.

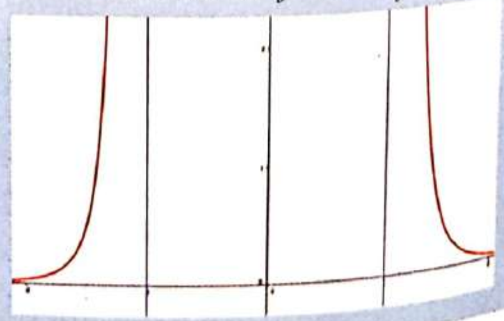
La fonction : $x \mapsto -\pi\ln\left(x^2 - 1\right)$ est dérivable sur $]1; +\infty[$ et $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; donc f est dérivable sur $]1; +\infty[$ comme la composée de fonctions dérivables sur leurs ensembles de définition.

$\forall x \in]1; +\infty[$, $f'(x) = -\pi\left(\dfrac{2x}{x^2 - 1}\right)f(x)$ et $f'(x) < 0$; donc f est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$ car $x > 1$ *et* $x^2 - 1 > 0$.

Tableau des variations sur E

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

Courbe de f sur D_f



Exercice Résolu 3

Dans un milieu donné, toutes les 12 heures, le nombre de bactéries est multiplié par 17 millions à taux constant et suivant la relation horaire $P(t)=P_0 r^t$.

a) Quel est le taux horaire de croissance ?

b) En combien de temps une population de bactéries est-elle multipliée par 10 ?

Solution

a) Soit i le taux horaire de croissance. Après une heure, $P(1)=P_0+iP_0=(1+i)P_0$.

Or $P(t)=P_0 r^t$; donc $P(12)=17\times10^6 P_0=P_0 r^{12}$.

$17\times10^6 P_0=P_0 r^{12} \Leftrightarrow 17\times10^6=r^{12} \Leftrightarrow 12\ln r=\ln17+6\ln10. \Leftrightarrow \ln r=\dfrac{\ln17+6\ln10}{12} \Leftrightarrow r=e^{\frac{\ln17+6\ln10}{12}}$.

$1+i=r$; donc $i=r-1=e^{\frac{\ln17+6\ln10}{12}}-1 \approx 3{,}0044=300{,}44\%$.

b) $P(t)=10P_0 \Leftrightarrow P(t)=P_0 r^t=10P_0 \Leftrightarrow r^t=10 \Leftrightarrow t\ln r=\ln10$. Or $r=e^{\frac{\ln17+6\ln10}{12}}$.

Donc $\ln r=\dfrac{\ln17+6\ln10}{12}$; d'où $t=\dfrac{\ln10}{\frac{\ln17+6\ln10}{12}}=\dfrac{12\ln10}{\ln17+6\ln10}\approx 1{,}65965\approx$ 1h 39min 35s

S'exercer

3.a Exprimer, en fonction de e, le nombre $\left(\dfrac{e^{\sqrt5}}{e^{\sqrt3}}\right)^{\sqrt3+\sqrt5}$.

3.a Simplifier le nombre : $5^{\frac{2}{3}}\times\sqrt[6]{25}$.

3.c Dans le film "Mémoires en fuite", on parle d'un capital de 200 000 francs qui, 60 ans plus tard, vaut 3 500 000 francs. Quel est le taux moyen sur cette période?

3.2. CROISSANCES COMPARÉES DE $x\to x^\alpha$; *exp* et ln EN $+\infty$; CALCULS DE CERTAINES LIMITES .

Prendre un bon départ

1. a) Démontrer que pour tout réel $x>0$, $\dfrac{e^x}{x^\alpha}=e^{x\left(1-\alpha\frac{\ln x}{x}\right)}$. $(\alpha>0)$

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^\alpha}=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{e^x}=0$.

2. a) Démontrer que pour tout réel $x>1$; $\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\ln x^\alpha}{x^\alpha}$; $(\alpha>0)$

b) En posant $X=x^\alpha$, déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0$.

Retenir

Pour tout réel α, $(\alpha > 0)$		Pour tout réel α un réel strictement positif,	
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^\alpha \ln x = 0$

REMARQUE

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} |x|^\alpha e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^{x} = 0.$

  On dit que la fonction : $x \mapsto |x|^\alpha$ est négligeable devant la fonction : $x \mapsto e^x$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ ou encore que la fonction $x \mapsto e^x$ est prépondérante devant la fonction : $x \mapsto |x|^\alpha$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$.

  On dit que la fonction : $x \mapsto \ln x$ est négligeable devant la fonction : $x \mapsto x^\alpha$ au voisinage de 0 et de $+\infty$ ou encore que la fonction : $x \mapsto x^\alpha$ est prépondérante devant la fonction : $x \mapsto \ln x$ au voisinage de 0 et de $+\infty$.

EXEMPLE

1) Déterminons la limite de la fonction : $x \mapsto \sqrt{x} - \ln x^2$ en $+\infty$.

   Pour tout réel x strictement positif, $\sqrt{x} - \ln x^2 = \sqrt{x}\left(1 - 2\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} - \ln x^2\right) = +\infty$, Car $1 - 2\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \to 1$.

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x(x\ln x)^3 = \lim\limits_{x\to 0^+} x\left(x^{\frac{1}{3}} \ln x\right)^3 = 0.$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\pi}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{\pi^{\frac{1}{2}}} = +\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty.$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\pi}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\pi}{\left(x^{\frac{1}{2\pi}}\right)^\pi} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{2\pi}}}\right)^\pi = 0$;

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{1000}}{(1{,}01)^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{1000}}{e^{x\ln(1{,}01)}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^{\frac{1000}{\ln 1{,}01}}}{e^x}\right)^{\ln 1{,}01} = 0$.

4) Calculons la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto x^2 e^{-\sqrt{x}}$.

On pose $X = \sqrt{x}$ on a alors $x^2 e^{-\sqrt{x}} = X^4 e^{-X}$. $\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} X^4 e^{-X} = 0$; donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

.

Exercice Résolu

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \ln 2^x - \ln x^2$.

1) Démontrer que $f(x) = x\ln 2 - 2\ln x$.
2) Calculer $f(2)$ et $f(4)$.
3) Calculer la dérivée f' de f. En déduire les variations de f.
4) À l'aide des questions 2 et 3, préciser le signe de $f(x)$.
5) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels on a $2^n \geq n^2$.

Solution

1) D'après les règles de calculs avec le logarithme, $\ln a^r = r\ln a$, $\forall\ a > 0$ et $r \in \mathbb{R}$.

Donc $f(x) = \ln 2^x - \ln x^2 = x\ln 2 - 2\ln x$.

2) $f(2) = \ln 4 - \ln 4 = 0$ et $f(4) = \ln 16 - \ln 16 = 0$.

3) $f'(x) = \ln 2 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{x\ln 2 - 2}{x}$. Comme $x > 0$, on a $f'x) > 0 \Leftrightarrow x\ln 2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{2}{\ln 2}$.

On en déduit les variations de f : sur $\left]0;\dfrac{2}{\ln 2}\right[$, f est décroissante et sur $\left]\dfrac{2}{\ln 2};+\infty\right[$, f est croissante.

4) On déduit : $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2;4]$.

5) Recherche des entiers n tel que $2^n \geq n^2$.

$2^n \geq n^2 \Leftrightarrow \ln 2^n \geq \ln n^2 \Leftrightarrow \ln 2^n - \ln n^2 \geq 0 \Leftrightarrow f(n) \geq 0 \Leftrightarrow n \in \mathbb{N} - \{3\}$

S'exercer

3.d Calculer les limites , si elles existent des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$.

a) $x \mapsto e^x - e^{-x}$; b) $x \mapsto \ln(e^x + 1)$; c) $x \mapsto \dfrac{xe^x}{3^x}$; d) $\mapsto \dfrac{x}{e^x}$.

3.e Calculer les limites , si elles existent des fonctions suivantes en 0 et en $+\infty$.

a) $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; b) $x \mapsto \dfrac{(\ln x)^2}{x^{0,1}}$; c) $x \mapsto \dfrac{e^{(1+\ln x)^2}}{x}$.

S'ENTRAÎNER

FONCTIONS EXPONENTIELLES.

1.

Ecrire plus simplement les nombres suivants :

a) $e^{\ln 3} - e^{3ln2}$; b) $e^{-1+2ln3}$;

c) $e^{2-ln3}e^{-1+ln3}$.

2.

Écrire plus simplement les nombres suivants :

a) $e^{1-\ln 5} - e^{1+ln3}$; b) $e^{1+ln2}e^{1-ln2}$;

c) $\left(e^{-2ln3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

a) $e^{2x-16} = e^{-3x^2}$; b) $e^{2x-ln3} = 3$

c) $e^x = cos\dfrac{7\pi}{10}$; d) $e^{2-7x} = 12$.

4.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1) $2e^{4x} - 5e^{2x} - 3 = 0$;

2) $e^{3x+5} - 2e^{2x+5} - 3e^{x+5} = 0$;

3) $\dfrac{e^{2x} + 2e^x - 4}{3e^x - 2} = 1$;

4) $\left(2e^x + 3\right)\left(e^x - 3e^x + 2\right)\left(e^{-x} - 2e^x\right) = 0$

5) $4e^{2x} + 15e^{-x} = 19$;

6) $4e^{-5x} + 3e^{-3x} - e^{-x} = 0$;

7) $e^{4x+2} - \dfrac{e^2}{e^{4xx+2}} = e^2 - 1$;

8) $e^{6x+2} + e^{3x+1} = 2$.

5.

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, les systèmes d'équations suivantes :

$$\begin{cases} e^x e^{2y} = a \\ 2xy = 1 \end{cases} \left(a \in \mathbb{R}\right); \begin{cases} e^x e^y = a^2 \\ xy = 1 \end{cases} \left(a \in \left]0;+\infty\right[\right).$$

6.

Résoudre et discuter dans suivant les valeurs du paramètre m, l'équation, où x est l'inconnue. $e^{2x} + 4me^x - 2m + 2 = 0$.

Étudier le cas particulier où $m = -1$.

7.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$e^{2x-1} - \sqrt{e^{2x+2}} - 2e^3 = 0$.

8.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$\left(x^2 - 1\right)e^{\ln(x-2)} = \ln e^{x+1}$.

9.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

1) $2\left(\ln x\right)^4 - 5\left(\ln x\right)^2 - 3 = 0$;

2) $4\left(\ln x\right)^{-5} - 5\left(\ln x\right)^{-3} - \left(\ln x\right)^{-1} = 0$.

10.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

a) $e^{2cosx} > \sqrt{3}$; b) $e^{2x-3} > sin\dfrac{9\pi}{2}$;

c) $e^{2x^2-8+ln7} \leq 7$.

11.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

a) $e^{x^2} \leq e^{x+2}$; b) $e^{2x^2} \leq e^{7x-3}$;

c) $e^{2x^2-2} \leq \dfrac{1}{e}$.

12.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations
a) $3e^{2x}+7e^{x}+2<0$;
b) $3e^{2x}-4e^{x}-4>0$;
c) $4e^{2x}-11e^{x}+6\leq 0$.

13.
Simplifier:
$B=\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}-\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}$.

14.
Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{8}{1-e^{x}}$.
a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
b) Vérifier l'égalité $f(-x)=8-f(x)$, pour tout x de D_f.
c) En déduire que le point A(0,4) est un centre de symétrie la courbe représentative de f.

15.
Déterminer le signe de $f(x)=e^{3x-1}-e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$.

16.
Pour chacune des fonctions f définies ci-après, déterminer sa fonction dérivée f'.
a) $f(x)=e^{\frac{1}{2}x+1}$; b) $f(x)=e^{x}\left(e^{x}-2\right)$;
c) $f(x)=(2x+1)e^{x}$.

17.
Soient f et g les fonctions de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définies par :
$f(x)=2x+\frac{1}{2}\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$ et $g(x)=2e^{2x}-5e^{x}+2$.
a) Démontrer que
$$f(x)=2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{x}-1}=2x-\frac{1}{2}+\frac{e^{x}}{e^{x}-1}.$$
b) Factoriser $g(x)$.
c) Déterminer le signe de la dérivée de f.

18.
Démontrer que quel que soit le réel x, on a :
$ln\left(e^{x}+1\right)-ln\left(1+e^{-x}\right)=x$.

19.
Résoudre $\mathbb{R}^2$ le système :
$$\begin{cases} lnx+lny=-2ln4 \\ e^{x}e^{y}=\frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}.$$

20.
Déterminer les limites suivantes :
a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} xe^{-\frac{1}{x}}$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} xe^{-\frac{1}{x}}$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{x-1}}$;
d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}}$.

21.
Soit la fonction $f : x\mapsto\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$. Calculer les limites de la fonction f, en $-\infty$, puis en $+\infty$.

22.
Soit la fonction $f : x\mapsto\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$.
1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, puis étudier les limites de f aux bornes de cet ensemble.
2) Préciser les asymptotes à la courbe de f dans un repère orthonormé du plan.

23.
Soit la fonction $f : x\mapsto e^{x}-x$.
1) Étudier les variations de f et en déduire que $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{x}>x$.

2) Démontrer par récurrence pour tout réel x, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $e^x > \frac{x^n}{n!}$.

3) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

24.

On considère la fonction f définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{-x}$.

a) Calculer les limites de f en $+\infty$ puis en $-\infty$.

b) Étudier les variations de f et dresser son tableau des variations.

25.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3e^{2x} - 4e^x + 2$.

Dresser le tableau des variations de f.

26.

Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, déterminer sa fonction dérivée f' sur l'intervalle I, puis étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in$ I et dresser le tableau des variations de f.

a) $f(x) = xe^x$, I = $\mathbb{R}$;

b) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, I=$\mathbb{R}^*$.

27.

On considère la fonction numérique f de la variable x définie par $f(x)=(2x-4)e^x$.

On note C_f sa courbe représentative f dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, d'unité graphique 1 cm.

1) a) Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

b) Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$. On pourra écrire $f(x)$ sous la forme $f(x)=2xe^x - 4e^x$.

2) a) Montrer que la dérivée f' de f est définie par $f'(x)=2(x-1)e^x$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x . Dresser le tableau des variations de f.

3) Écrire une équation de la tangente T à la courbe C_f de f en son point d'abscisse nulle.

4) Tracer la tangente T et la courbe C_f.

28.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 3e^x + x + 2$. C sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.

1) a) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

b) Démontrer que la droite Δ d'équation $y=x+2$ est une asymptote à C.

c) Étudier les positions relatives de la courbe C et de la droite D.

2) a) Vérifier que pour tout réel x,

$$f(x) = e^x\left(e^x - 3 + \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}\right).$$

b) En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3) a) Calculer $f'(x)$.

b) Vérifier que

$$f'(x) = (2e^x - 1)(e^x - 1).$$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$, puis déduire le signe de $f'(x)$.

d) Dresser le tableau des variations de f.

4) a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C en son point d'abscisse $ln\left(\frac{2}{3}\right)$.

Que peut-on dire des droites T et D ?

b) Tracer, dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, les droites D, T et la courbe C.

29 Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=ln(e^{2x}-e^{x}+1)$.

1) Montrer que $e^{2x}-e^{x}+1$ est strictement positif pour tout réel x.

2) Étudier les variations de la fonction f.

3) Soit (C) la courbe représentative de f, dans un repère orthonormé du plan.

a) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Vérifier que $f(x)-2x=\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$ et calculer la limite de $f(x)-2x$ lorsque x tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat obtenu.

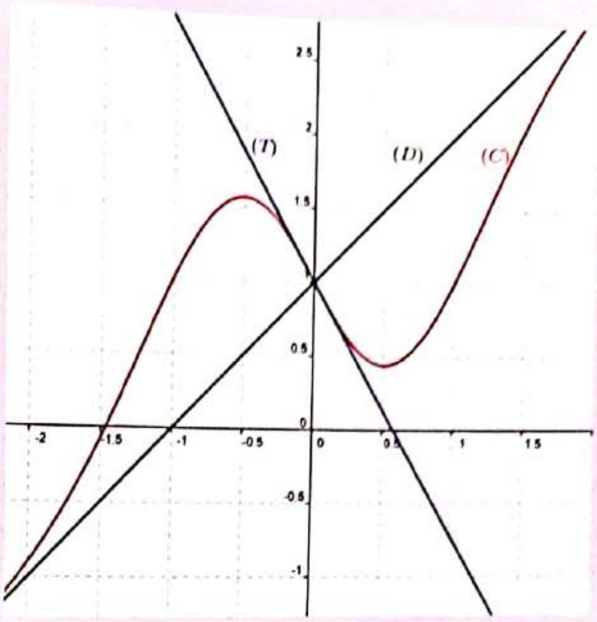
c) Construire la courbe (C). (On représentera la tangente au point de (C) d'ordonnée nulle).

4) Déterminer, le nombre de solutions réelles de l'équation d'inconnue x : $e^{2x}-e^{x}+1=3$:

a) Algébriquement;

b) Graphiquement.

30 Ci-après on a la courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, son asymptote (D) et sa tangente (T) au point d'abscisse 0.



Sachant que le point J(0 ; 1) est le centre de symétrie de la courbe (C), que l'asymptote (D) passe par les points $K(-1\,;0)$ et J, puis que la tangente (T) a pour équation : $y=(1-e)x+1$.

1) Déterminer une équation de (D).

2) On suppose qu'il existe deux réels m et p et une fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,
$$f(x)=mx+p+\phi(x) \text{ avec } \lim_{x\to+\infty}\phi(x)=0.$$

a) Démontrer que $m=p=1$.

b) En utilisant le point J, montrer que, pour tout réel x, on a $f(x)+f(-x)=2$.

c) En déduire, après avoir exprimé $f(x)$ et $f(-x)$, que la fonction ϕ est impaire.

d) Déduire de la question b. que $f\,'$, dérivée de f, est paire.

3) On suppose maintenant que, pour tout réel x, $\phi(x)=(ax+b)e^{-x^2}$ où a et b sont des réels.

a) En utilisant la parité de ϕ, démontrer que $b=0$.

b) Calculer $f\,'(x)$.

c) En utilisant le coefficient directeur de (T), démontrer que $a=-e$.

d) Démontrer que : $f(x)=x+1-xe^{-x^2+1}$.

31.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x}{e^x-x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$. L'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$g(x)=e^x-x-1$.

1) Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g.

2) Justifier que pour tout réel x, $e^x-x>0$.

Partie B

1) a. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

b) Interpréter graphiquement ces résultats.

2) a. Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.

b) Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau des variations.

3) a. Écrire une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

b) À l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

4) Tracer la droite (T), les asymptotes à (C) et la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE QUELCONQUE

32.

Donner l'écriture simplifiée des nombres réels suivants :

a) $exp_{\frac{1}{4}}(2)$; b) $exp_{\frac{1}{4}}(-2)$;

c) $exp_4\left(\frac{1}{2}\right)$; d) $exp_4\left(-\frac{1}{2}\right)$;

e) $exp(2)$; f) $exp(-1)$.

33.

Déterminer x dans chaque cas.

a) $exp_{\frac{2}{3}}(x)=\frac{8}{27}$; b) $exp_{\frac{3}{4}}(x)=\frac{10}{9}$;

c) $exp(x)=1000$; d) $exp(x)=0{,}01$;

e) $exp(x)=1$; f) $exp_{\frac{1}{2}}(x)=4$;

g) $exp_{\frac{1}{4}}(x)=4$; g) $exp_4(x)=\frac{1}{2}$.

34.

Déterminer la base de chacune des fonctions exponentielles définies ci-dessous. puis indiquer si la fonction est croissante ou décroissante.

a) $f(x)=\left(\frac{16}{9}\right)^{-\frac{x}{2}}$; b) $f(x)=2^{2x}$;

c) $f(x)=4^{\frac{x}{2}}$; d) $f(x)=2^{-x}$.

35.

Dans chacun des cas suivants, le point A appartient au graphique de la fonction exp_a. Déterminer l'expression de cette fonction.

a) A(2 ; 16) ; b) $A\left(\frac{1}{2};3\right)$;

c) $A\left(-\frac{1}{2};3\right)$; d) $A\left(-\frac{3}{2};\frac{125}{27}\right)$.

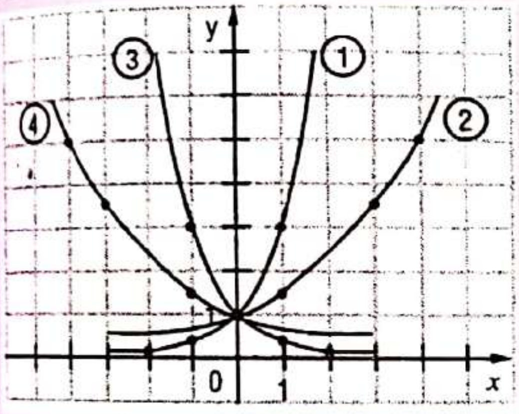
36.

La courbe d'une fonction exponentielle passe par le point $A\left(2;\frac{9}{16}\right)$. Quelle est l'ordonnée du

...oint B appartenant à ce graphique si l'abscisse ...e B est -3?

37
...es points A(2, 9) et B(4, 16) sont-ils situés sur ... même courbe d'une fonction exponentielle? ...stifier la réponse.

38
Déterminer une équation cartésienne de chaque courbe d'une fonction exponentielle représentée au graphique ci-dessous.

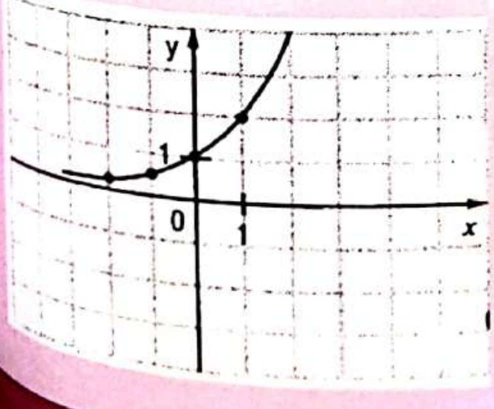


39
a) Montrer que si a est strictement positif, pour tout réel x $exp_{\frac{1}{a}}(x)=exp_a(-x)$.

b) Comment peut-on déduire le graphique de la fonction $exp_{\frac{1}{a}}$ à partir du graphique de la fonction exp_a?

40
À partir du graphique de $y=2^x$, tracer le graphique de:

a) $y=2^{-x}$; b) $y=-2^x$; c) $y=-2^{-x}$



41.
Soit $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

a) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous

x	1	2	10	20	100	1 000	10 000	100 000
y								

b) Vérifier qu' au fur et à mesure que x croît, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ se rapproche de plus en plus du nombre 2, 718 28 .

42.
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a) $3^x=3^2$; b) $3^x=27$;

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{81}{16}$; d) $16^x=2$.

43.
Donner une expression simplifiée des nombres réels suivants :

a) $log_2 1$; b) $2^{log_2 5}$; c) $log 10$;

d) $log_2 2^6$; e) $log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$; f) $log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3$;

g) $10^{log 2}$; h) $log_{\frac{1}{3}}1$; i) $ln e^5$.

44.
Donner la forme simplifiée des nombres réels suivants :

a) lne ; b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{log_{\frac{3}{4}}2}$; c) $log 10^2$; d) $ln 10^0$;

e) $log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; f) e^{lne} ; g) $-log 0,1$;

h) $2^{lon_2 1}$; i) $e^{ln 2}$.

45.
Déterminer l'ensemble solution des équations suivantes.

a) $5^x=2$; b) $2^x=2^{-1}$;

c) $5^{x-2}=2$; d) $2^{x+1}=2^{-1}$.

46.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $2^x = 9$; b) $2^{x+1} = 7$;

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} = 3$; d) $2^{-3x} = 64$.

47.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $2^{3x} = 3^{x+1}$; b) $3^{x-1} = 2^{x+1}$;

c) $3^{2x+1} = 9^{x-2}$; d) $\frac{2^{x+1}}{3^x} = 5$.

48.

Résoudre dans $[0;+\infty[$, les inéquations suivantes.

a) $3(0,8)^x \leq 1,5$;

b) $0,004(2,2)^x \geq 0,8$;

c) $5,2 - 3,5(1,02)^x \geq 6$.

49.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $5^{2x} - 8 \cdot 5^x + 15 = 0$;

b) $4^x - 7 \cdot 2^x + 12 = 0$.

50.

Résoudre $\mathbb{R}^2$ les systèmes : $\begin{cases} 2^x - 3^y = 5 \\ 3 \times 2^x + 3^y = 24 \end{cases}$.

51.

Le but de l'exercice est l'étude de la désintégration du corps radioactif : le carbone 14.

1) Soit N_o le nombre d'atomes de carbone 14 à l'instant $t = 0$, N_1 le nombre d'atomes de carbone 14 un siècle après, N_k le nombre d'atomes de carbone 14 après k siècles (k entier). On sait que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement au cours du temps : environ 1,24 % par siècle.

2) a) Donner l'expression de N_1 en fonction de N_0. puis de en fonction de N_{k-1}

b) En déduire la nature de la suite (N_k) et l'expression de N_k en fonction de N_0 et k.

c) Donner, en le justifiant, le sens de variation de la suite (N_k).

3) Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants ; à la mort de ceux-ci, l'assimilation cesse et le carbone 14 présent se désintègre.

Des archéologues ont trouvé des fragments d'os donc la teneur en carbone 14 est 40 % de celle d'un fragment d'os actuel de même masse, pris comme témoin.

Calculer l'âge de ces fragments. On arrondira le résultat au siècle près.

FONCTIONS PUISSANCES : $f_\alpha : x \to x^\alpha$ OÙ $x > 0$.

52.

Soit x un réel strictement positif. Mettre sous la forme x^α les nombres réels suivants :

$\sqrt{\sqrt{x}}$; $\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$; $\sqrt[5]{x^3}$; $\frac{1}{\sqrt{x^{0,6}}}$; $\sqrt[3]{x} \times \sqrt[4]{x}$.

53.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{2}{3}} = 2$;

b) $x^\pi - 42\mathrm{C}x^{-\pi} = 1$.

54.

Calculer les limites, si elles existent des fonctions suivantes en $+\infty$ et $-\infty$.

a) $x \mapsto (2x+1)e^x$; b) $x \mapsto xe^{-x}$;

c) $x \mapsto x^2 e^{-x} - x$;

d) $x \mapsto \frac{3e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$.

55. Calculer les limites , si elles existent des fonctions suivantes en α.

a) $x \mapsto \frac{\ln(1+3x)}{x}$, $\alpha = 0$;

b) $x \mapsto \frac{e^{x^2}-1}{x}$, $\alpha = 0$;

c) $x \mapsto \frac{\ln x - 1}{x-e}$, $\alpha = e$;

d) $x \mapsto \frac{e^{3x}-1}{x}$, $\alpha = 0$;

e) $x \mapsto \frac{2^x - 32}{x-5}$, $\alpha = 5$;

f) $x \mapsto \frac{2^{2x}-1}{2x-1}$, $\alpha = \frac{1}{2}$.

56. Une organisation humanitaire dispose aujourd'hui d'un capital C_o de 3 000000F. Déterminer à quel taux elle doit le placer aujourd'hui pour que la valeur acquise par C_o dans cinq ans soit égale à 3600000 F.

57.

a) On a rempli un aquarium avec 90 litres d'eau claire et 10 litres de produit colorant capable de se mélanger instantanément à l'eau claire de façon homogène. Chaque jour, un système de renouvellement fait écouler 10 litres du mélange remplacés par 10 litres d'eau claire sans adjonction de produit colorant. Soit $v_0=10$ le volume initial de produit colorant (exprimé en litres).

1) Calculer le volume v_1 de produit colorant après 1 renouvellement.

2) Calculer le volume v_2 de produit colorant après 2 renouvellements.

3) a) Calculer le volume v_n de produit colorant après n renouvellements.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) Pour un autre aquarium muni d'un autre système de renouvellement, on a $v_n = 150{,}8^n$. Après combien de renouvellements le volume de produit colorant sera-t-il pour la première fois inférieur à 1 litre ?

Chapitre 8

SUITES NUMÉRIQUES

LEÇON SUITES NUMÉRIQUES.

1 CALCULS DES LIMITES DES SUITES : SUITES CONVERGENTES.

2 CONVERGENCE DE LA SUITE (a^n) OÙ a EST UN NOMBRE RÉEL DONNÉ.

3 SUITES CROISSANTES ET MAJORÉES OU DÉCROISSANTES ET MINORÉES.

4 SUITES DÉFINIES PAR LA RELATION $u_{n+1} = f(u_n)$. Où f EST UNE FONCTION NUMÉRIQUE.

S'ENTRAÎNER

LEÇON CALCULS DES LIMITES DES SUITES : SUITES CONVERGENTES.

- Calculer la limite d'une suite ;
- Montrer qu'une suite est convergente en utilisant les calculs des limites, et les théorèmes de convergence des suites ;
- Montrer qu'une suite u définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente en utilisant les inégalités des accroissements finis.

1. CALCULS DES LIMITES DES SUITES : SUITES CONVERGENTES.

Prendre un bon départ

Chacune des suites suivantes est définie par son terme général :

$u_n = \dfrac{n^2+n-1}{4n+3}$; $v_n = \dfrac{\ln(n+2)}{n}$; $w_n = e^{-n^2+3}$; $T_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$;

$x_n = n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$; $y_n = n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Calculer la limite de chacune de ces suites quand n tend vers $+\infty$. Citer celles dont les limites respectives sont des nombres réels.

Retenir

- Une suite de terme général u_n est convergente lorsque la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ est un nombre réel. Si le réel ℓ est cette limite, alors on dit que la suite u converge vers ℓ.
- Si une suite admet une limite qui n'est pas un réel ou si elle n'admet pas de limite, alors on dit que cette suite diverge.
- Si α est la limite de la suite, alors on note : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \alpha$ ou $u \to \alpha$ quand $n \to +\infty$.

EXEMPLE

Soit $u_n = e^{-n+1}$. $\lim\limits_{n\to+\infty}(-n+1) = -\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

La suite u est convergente et converge vers 0.

La suite v telle que $v_n = \ln\left(n^2+n-1\right)$ a pour limite $+\infty$.

La suite v est donc divergente.

La suite w telle que $w_n = a^n$ pour $a \leq -1$ n'admet pas de limite en $+\infty$. Elle prend en effet des

valeurs alternées quand n change de parité.
w est ainsi une suite divergente.

REMARQUE

- Les propriétés sur les limites des fonctions restent valables pour les limites des suites. En effet,
  - la limite d'une suite lorsqu'elle existe est unique.
  - Soient u et v deux suites convergentes qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ' alors,
    - les suites $u+v$ et uv sont convergentes et convergent respectivement vers $\ell+\ell'$ et $\ell\ell'$;
    - si $\ell' \neq 0$, alors la suite $\frac{u}{v}$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$;
    - si $u_n \leq v_n$ pour tout entier $n \geq n_0$ où n_0 est un entier naturel donné, alors $\ell \leq \ell'$;
    - si w est une suite telle que $u_n \leq w_n \leq v_n$ et si $\ell = \ell'$, alors w est convergente et converge vers ℓ . (Théorème des gendarmes).
- u est une suite numérique et ℓ un réel .
  Si $|u-\ell|$ converge vers 0, alors u converge vers ℓ.
  Soit une suite v telle que $|u_n - \ell| \leq v_n$ à partir d'un certain rang .
  Si v converge vers 0, alors u converge vers ℓ .
- Toute suite convergente est bornée.
  En conséquence, une suite qui n'est ni majorée, ni minorée est divergente.

S'exercer

1.a Étudier la convergence de la suite u définie par :

$$u_n = \frac{e^n + n}{e^n - n^2} \; ; u_n = \frac{n + ln2^n}{ln3^n - n^2} \; ; u_n = n\left(1 + \cos n\frac{\pi}{12}\right) \; ; \; u_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2+n} - n\sqrt{2}} \; ;$$

$$u_n = \sqrt{2n^2 + 5n + 1} - n\sqrt{2} \; ; u_n = \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n} \; ; \; u_n = \frac{n^5 + e^n}{n^5 - e^n} \; .$$

1.b La suite u est définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + \ldots + \frac{n}{n^2+2n} + \frac{n}{n^2+2n+1}.$$

i) Calculer les trois premiers termes de la suite u.

ii) De combien de termes est constituée l'expression de u_n ?

iii) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2n}{n+1} \leq u_n \leq \frac{2(n+1)}{n}$.

iv) En déduire que la suite u converge, puis calculer sa limite.

2. CONVERGENCE DE LA SUITE (a^n) OU a EST UN NOMBRE RÉEL DONNÉ.

Prendre un bon départ

1) Soit t un nombre réel donné, u la suite définie par $u_n = t^n$.
Justifier que si $t > 0$, alors pour tout entier naturel n, $u_n = e^{n\ln t}$.
Justifier que si $0 < t < 1$, alors u_n a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$.
Justifierque si $t > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2) Soit a un nombre réel de l'intervalle $]-1;0]$ et n un entier naturel quelconque.
Montrer que $|a|$ appartient à l'intervalle $[0;1[$.
En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(|a^n|) = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}(a^n) = 0$.
Calculer alors les limites des suites ayant respectivement le terme général :
$x_n = \left(\frac{-2}{3}\right)^n$; $y_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$; $z_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n$; $t_n = \left(\frac{e-1}{e}\right)^{n+3} + 7$.

Retenir

- Soit a un nombre réel.La suite (a^n) converge dans le seul cas où $-1 < a \leq 1$.
  - *si* $-1 < a < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(a^n) = 0$;
  - si $a = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(a^n) = 1$;
  - si $a > 1$, alors la limite de (a^n) est $+\infty$.
  - si $a \leq -1$, alors (a^n) n'admet pas de limite.

EXEMPLE

a) Soit la suite u définie par $u_n = \frac{e^n}{3^n} + 1$. Déterminons la limite éventuelle de la suite u.

Soit n un entier naturel, $u_n = \left(\frac{e}{3}\right)^n + 1$.

On sait que $0 < e < 3$ et alors $0 < \frac{e}{3} < 1$. Il vient que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^n = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^n + 1 = 1$.

La suite u est convergente et converge vers 1.

b) v est la suite définie par $v_n = \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$. Calculons la limite de la suite (v_n).

Pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 1\right]}{\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 1\right]}$. Or $0 \leq \dfrac{2}{3} < 1$.

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ converge vers 0 et ainsi (v_n) converge vers $\dfrac{1}{-1}$ soit vers -1.

c) On définit la suite u par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ 4u_{n+1} = u_n + 5 \text{ , } \textit{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$

(i) Calculons u_1 et u_2.
De la relation de définition de la suite u, On a $4u_1 = u_0 + 5$ et $4u_2 = u_1 + 5$.
D'où $u_1 = 2$ et $u_2 = \dfrac{7}{4}$.

(ii) Soit a un réel et v une suite définie par $v_n = u_n + a$. Déterminons la valeur du réel pour que v soit géométrique. Soit n un entier naturel quelconque.

$$v_{n+1} = u_{n+1} + a = \frac{1}{4}u_n + \frac{5}{4} + a = \frac{1}{4}(v_n - a) + \frac{5}{4} + a = \frac{1}{4}v_n - \frac{a}{4} + \frac{5}{4} + a$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + \frac{3a+5}{4}.$$

v est géométrique si et seulement si $\dfrac{3a+5}{4} = 0$; soit $a = -\dfrac{5}{3}$.

Dans ce cas, v est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

(iii) Exprimons v_n, puis u_n en fonction de n.

$$v_0 = u_0 - \frac{5}{3} = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}.$$

$$v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-0} \times v_0 = \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{4}{3} \quad \text{et } u_n = v_n - a = \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{4}{3} + \frac{5}{3}.$$

Puisque $\dfrac{1}{4}$ est dans l'intervalle $]-1;1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{5}{3}$.
Les suites u et v sont ainsi convergentes.

(iv) On pose $V = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ et $U = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

$$V = \frac{4}{3} \times \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{4}{3} \times \left(-\frac{4}{3}\right) \times \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{1}{4} - 1\right) = -\frac{16}{9} \times \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{1}{4} - 1\right).$$

Par ailleurs, $U = \left(v_0 - \dfrac{5}{3}\right) + \left(v_1 - \dfrac{5}{3}\right) + \ldots + \left(v_n - \dfrac{5}{3}\right)$

$$= (v_0 + v_1 + \ldots + v_n) - \left(\frac{5}{3} + \frac{5}{3} + \ldots + \frac{5}{3}\right)$$

$$= V - \frac{5}{3} \times (n+1) = -\frac{16}{9} \times \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{1}{4} - 1\right) - \frac{5}{3} \times (n+1)$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} V = \frac{16}{9}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U = -\infty$.

REMARQUE

- Une suite géométrique est convergente si et seulement si sa raison appartient à l'intervalle $]-1;1]$.

S'exercer

1.c Soient les suites v et w définies par : $\begin{cases} v_0 = -\frac{3}{2} \\ v_n = \frac{2}{3}v_{n-1} - 1 \end{cases}$; $w_n = 2v_n + 6$.

a) Démontrer que la suite w est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b) Donner les expressions de w_n et de v_n en fonction de n.

c) Calculer les limites des suites v et w.

d) Exprimer $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ en fonction de n et calculer la limite de S_n .

1.d On considère la suite u définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier non nul n, $u_n = \quad u_n \quad --$.

Déterminer le réel a de façon que la suite v définie par $v_n = u_n + a$ soit une suite géométrique .

Exprimer v_n en fonction de n et calculer : $V_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ et $U_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

Calculer les limites des suites u, U et V .

3. SUITES CROISSANTES ET MAJORÉES OU DÉCROISSANTES ET MINORÉES.

Prendre un bon départ

Soit la suite u définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$.

a) Montrer par récurrence que la suite u est croissante et majorée par 4 .

Montrer que la suite u est minorée par 0.

b) On définit la suite par $v_n = 4 - u_n$.

Montrer que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} < \frac{1}{4}v_n$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $0 < v_n < \left(\frac{1}{4}\right)^n \times v_0$.

En déduire les limites des suites v et u .

Retenir

On admettra la propriété suivante :
Toute suite croissante et majorée ou décroissante et minorée est convergente.

EXEMPLE

La suite u est définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$.

a) Montrons par récurrence que u est strictement croissante et majorée par 3.

(i) Montrons que u est strictement croissante. Montrons en effet que pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1}$.

$u_1 = \sqrt{6+u_0} = \sqrt{6}$; $u_0 = 0$. Donc $u_0 < u_1$.

Soit k un entier naturel quelconque tel que $u_{k-1} < u_k$; $(k \geq 1)$.

Montrons que $u_k < u_{k+1}$.

Puisque $u_{k-1} < u_k$, on a $6+ u_{k-1} < 6+u_k$ et donc $\sqrt{6+u_{k-1}} < \sqrt{6+u_k}$. soit $u_k < u_{k+1}$.

D'après le principe de la récurrence, pour tout entier naturel $n, u_n < u_{n+1}$.

La suite u est donc croissante.

(ii) Montrons par récurrence que u est majorée par 3. Montrons que pour tout entier naturel n , $u_n < 3$.

$u_0 = 0$ et $u_0 < 3$.

Soit un entier naturel k tel que $u_k < 3$. Montrons que $u_{k+1} < 3$.

De $u_k < 3$, on a $6+u_k < 6+3$; $6+u_k < 9$.

D'où $\sqrt{6+u_k} < \sqrt{9} = 3$. $u_{k+1} < 3$.

La suite u est donc majorée par 3.

La suite u étant croissante et majorée , on peut conclure que u est convergente.

b) Montrons que pour tout entier naturel n , $3-u_{n+1} < \dfrac{3-u_n}{3}$.

$$3-u_{n+1} = 3-\sqrt{6+u_n} = \frac{\left(3-\sqrt{6+u_n}\right)\left(3+\sqrt{6+u_n}\right)}{3+\sqrt{6+u_n}}$$

$$= \frac{9-(6+\mathrm{u_n})}{3+\sqrt{6+u_n}} = \frac{3-\mathrm{u_n}}{3+\sqrt{6+u_n}}.$$

Puisque $3+\sqrt{6+u_n} > 3$, $3-u_{n+1} \leq \dfrac{3-u_n}{3}$.

c) Calculons la limite de la suite u .

Soit n un entier naturel. $3-u_n \leq \dfrac{3-u_{n-1}}{3} \leq \dfrac{3-u_{n-2}}{3^2} \leq \dfrac{3-u_{n-3}}{3^3} \leq \ldots \leq \dfrac{3-u_0}{3^n}$. .

Finalement, $3-u_n \leq \dfrac{3}{3^n}$.

Puisque u est majorée par 3, $0 \le 3-u_n \le 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

$\lim\limits_{n\to\infty}(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$. $\lim\limits_{n\to+\infty}(3-u_n) = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 3$.

REMARQUE

- Si une suite est croissante et non majorée, alors sa limite est $+\infty$.
- Si une suite est décroissante et non minorée, alors sa limite est $-\infty$.

S'exercer

1.e La suite u est définie par $u_0 = -2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

(i) Calculer les cinq premiers termes de la suite u .
(ii) Montrer par récurrence que la suite u est croissante et majorée par 6.
(iii) Conclure.
(iv) Montrer que la suite v définie par $v_n = u_n - 6$ est géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
(v) Exprimer en fonction de n, v_n et u_n en fonction de n. Calculer les limites respectives de v, puis de u.

1.f Soit f définie sur $]-\infty;6[$ par $f(x) = \dfrac{2x-16}{x-6}$.

(i) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;6[$.
(ii) Donner l'image de l'intervalle $]-\infty;6[$ par f.

On définit la suite u par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 16}{u_n - 6}$.

(ii) Calculer u_1 et u_2.
(iii) Montrer que la suite u est strictement croissante.
(iv) Montrer que la suite u est majorée par 4. Que peut-on dire de la suite u?

Soit la suite v définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 4}$.

(v) Montrer que v est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
(vi) Exprimer pour tout entier naturel n, v_n, u_n en fonction de n. Calculer alors la limite de la suite u .

4. SUITES DÉFINIES PAR LA RELATION $u_{n+1} = f(u_n)$. Où f EST UNE FONCTION NUMÉRIQUE.

Prendre un bon départ

La suite u est définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$.
Soit la fonction f définie en x par $f(x) = \sqrt{6+x}$.

a. En remarquant que $u_{n+1} = f(u_n)$, représenter les cinq premiers termes de la suite u sur l'axe des abscisses d'un repère orthonormé du plan.
b. Peut-on conjecturer graphiquement la convergence de la suite u ? Donner une valeur approchée de cette limite si elle existe, par rapport à l'abscisse d'un des points communs à la courbe de f et la droite d'équation $y = x$.
c. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = x$.
d. Quelle peut être graphiquement la limite de la suite u ?

Retenir

Soit u la suite définie par la donnée de u_0 et de la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Si la suite u est convergente et converge vers a, et si f est continue en a , alors a est une solution de l'équation $f(x) = x$.

EXEMPLE

En admettant que la suite u définie par $u_0 = 2$ et $3u_{n+1} = u_n + 6$ est convergente,calculons la limite de la suite u.

$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$. La fonction pour laquelle u_{n+1} est l'image de u_n, est la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$.

La limite de u est solution de l'équation $f(x) = x$. Cette équation a pour solution 3.
La suite u converge vers 3.

Exercice Résolu

Enoncé :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)e^{-x}$

1) Étudier les variations et dresser le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2) Soit I l'intervalle $\left[1;\frac{5}{4}\right]$.

a) Montrer que $f(I)\subset I$.

b) Montrer que pour tout réel x de I, $|f'(x)|\leq \frac{3}{2e}$.

c) En étudiant les variations de la fonction g définie par $g(x)=f(x)-x$, montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une seule solution a dans I.

d) Montrer que si x et y sont deux réels quelconques de I, $|f(x)-f(y)|\leq \frac{3}{2e}|x-y|$.

e) En déduire que pour tout réel x de I, $|f(x)-a|\leq \frac{3}{2e}|x-a|$.

3) On définit la suite u par $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.

a) Montrer que pour tout entier naturel, $u_n\in I$.

b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

(i) $|u_{n+1}-a|\leq \frac{3}{2e}|u_n-a|$; (ii) $|u_n-a|\leq\left(\frac{3}{2e}\right)^{n+2}$.

c) En déduire que la suite u converge vers a.

d) Déterminer alors le plus petit entier naturel p tel que u_p soit la limite de u à 10^{-4} près.

Solution.

1) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$f'(x)=2e^{-x}-e^{-x}(2x+1)=e^{-x}(2-(2x+1))=(1-2x)e^{-x}$.

Puisque e^{-x} est toujours positif, $f'(x)$ est du signe de $1-2x$.

f est croissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

$f(\frac{1}{2})=2e^{\frac{-1}{2}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2xe^{-x}+e^{-x})=0+0=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1)e^{-x}=-\infty$.

2) $I=\left[1;\frac{5}{4}\right]$.

a) Puisque l'intervalle I est contenu dans $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$, f est décroissante sur I et ainsi,

$f(I)=\left[f\left(\frac{5}{4}\right);f(1)\right]$.

Or $f(1)=3e^{-1}=\frac{3}{e}$; $f\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{7}{2}e^{-\frac{5}{4}}=\frac{7}{2}e^{-1,25}$.

$f(1)$ et $f\left(\frac{5}{4}\right)$ sont tous dans l'intervalle I ; donc, $f(I)\subset I$.

b) Montrons que $\left|f'(x)\right| \leq \frac{3}{2e}$ sur I. De $1 \leq x \leq \frac{5}{4}$, on a : $-\frac{5}{2} \leq -2x \leq -2$; $-\frac{3}{2} \leq 1-2x \leq -1$;

soit $-\frac{3}{2}e^{-x} \leq (1-2x)e^{-x} \leq -e^{-x}$; $\frac{-5}{4} \leq -x \leq -1$ entraîne que $-\frac{3}{2}e^{\frac{-5}{4}} \geq -\frac{3}{2}e^{-x} \geq -\frac{3}{2}e^{-1}$ et

$-e^{-\frac{5}{4}} \geq -e^{-x} \geq -e^{-1}$.

Finalement $-\frac{3}{2}e^{-1} \leq f'(x) \leq -e^{-\frac{5}{4}}$ entraîne que $\left|f'(x)\right| \leq max\left(\frac{3}{2}e^{-1};e^{-\frac{5}{4}}\right) = \frac{3}{2}e^{-1} = \frac{3}{2e}$;

donc, $\left|f'(x)\right| \leq \frac{3}{2e}$ avec $3 < 2e$ et $0 < \frac{3}{2e} < 1$.

Considérons la fonction g définie en x par $g(x) = f(x) - x$. $g'(x) = f'(x) - 1$.

Puisque $f'(x) \leq 0$ sur I ($car\ f$ décroissante), $g'(x) \leq 0$.

g est donc décroissante sur I . g est une bijection de I sur $g(I)$.

$g(1) = f(1) - 1 = \frac{3}{e} - 1 = \frac{3-e}{e}$; $g(\frac{5}{4}) = f\left(\frac{5}{4}\right) - \frac{5}{4} = \frac{7}{2}e^{-1,25} - 1,25 \approx -0,247$.

$g(1) \geq 0$; $g\left(\frac{5}{4}\right) \leq 0$. L'intervalle $g(I)$ contient 0 et donc l'équation

$g(x) = 0$ admet une unique solution a dans l'intervalle I.

a) f est continue et dérivable sur l'intervalle I et à dérivée bornée par $\frac{3}{2e}$.

b) D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout couple $(x;y)$ de réels de I, $\left|f(x) - f(y)\right| \leq \frac{3}{2e}|x-y|$. (1)

c) En remplaçant dans l'inégalité (1) y par a, on a $\left|f(x) - a\right| \leq \frac{3}{2e}|x-a|$.(2)

d) On définit la suite u par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

e) Montrons par récurrence que $u_n \in I$.

- $u_0 \in I$;
- Soit n un entier naturel tel que $u_n \in I$. Montrons que $u_{n+1} \in I$. On sait que l'image par f d'un élément de I appartient à I. Par hypothèse $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. D'où $u_{n+1} \in I$.

  D'après le principe de démonstration par récurrence, $u_n \in I$, pour tout entier naturel n.

a) En utilisant l'inégalité (2), en remplaçant x par u_n , on a $\left|u_{n+1} - a\right| \leq \frac{1}{2e}\left|u_n - a\right|$. (3)

b) Montrons par récurrence que $\left|u_n - a\right| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^n$, pour tout entier naturel n.

- $\left|u_0 - a\right| = \left|1 - a\right| \leq \left|\frac{5}{4} - 1\right|$; $\left|u_0 - a\right| \leq \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^0$.

- *Soit n* un entier naturel tel que $|u_n - a| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^n$.

Montrons que $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^{n+1}$. D'après l'inégalité (3), $|u_{n+1} - a| \leq \frac{3}{2e}|u_n - a|$ et d'après l'hypothèse de récurrence, $|u_n - a| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^n$. Il vient que $|u_{n+1} - a| \leq \frac{3}{2e} \times \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^n$; Soit $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^{n+1}$. D'après le principe de démonstration par récurrence, $|u_n - a| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^n$, pour tout entier naturel n. L'inégalité (4) est équivalente aux inégalités $-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^n \leq u_n - a \leq \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^n$ et donc $a - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^n \leq u_n \leq a + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^n$.

De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{3}{2e}\right)^n = 0$ car $\frac{3}{2e} \in]0;1[$. De $\lim\limits_{n \to +\infty}(a - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^n) = \lim\limits_{n \to +\infty}(a + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^n) = a$, la suite (u_n) a pour limite a. Cette suite est donc convergente et converge vers a.

c) Déterminons alors le plus petit entier naturel p tel que u_p est la limite de u à 10^{-4} près. Dire que u_p est la limite de u à 10^{-4} près, c'est aussi dire que a est une valeur approchée de u_p à 10^{-4} près. Ainsi, $|u_p - a| \leq 10^{-4}$. Or $|u_p - a| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^p$.

Il suffit que $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2e}\right)^p \leq 10^{-4}$; soit $4 \times \left(\frac{2e}{3}\right)^p \geq 10^4$.

$\ln\left(4 \times \left(\frac{2e}{3}\right)^p\right) \geq \ln(10^4) \Leftrightarrow \ln(4) + p\,ln\left(\frac{2e}{3}\right) \geq 4\ln(10)$;

soit $p(\ln(2e) - \ln(3)) \geq 4\ln(10) - \ln(4)$; $p\left(1 + ln\left(\frac{2}{3}\right)\right) \geq 4\ln(10) - \ln(4)$; $p \geq \frac{4ln10 - ln4}{1 + ln\left(\frac{2}{3}\right)}$; soit $p \geq 5{,}35$. Le plus petit entier naturel plus grand que $5{,}35$ est 6.

Tous les u_p où $p \geq 6$ sont les valeurs approchées de la limite de la suite u avec une incertitude de 0,0001.

On peut calculer u_6 de proche en proche, plus rapidement par une programmation faite par certains logiciels à l'instar de « sinéquanon »

S'exercer

1.g Soit f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}$.

1) a. Étudier les variations de f sur $[0;+\infty[$.

b. Étudier les variations de la fonction $g: x \to f(x)-x$ pour $x \in [0;+\infty[$.

c. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une seule solution α dans $[0;+\infty[$ et que $\frac{3}{5}<\alpha<\frac{3}{4}$.

Soit $J=\left[\frac{3}{5};\frac{3}{4}\right]$.

d. Montrer que $f(J)\subset J$.

e. Montrer que pour tout réel x de J, $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$.

f. En déduire que pour tout réel x de , $|f(x)-\alpha|\leq\frac{1}{2}|x-\alpha|$.

2) On définit la suite u par $u_0=\frac{3}{5}$ et pour tout entier naturel , $u_{n+1}=f(u_n)$.

a. Démontrer par u_n est un élément de J.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

c. En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n-\alpha|\leq\frac{1}{2^{n+2}}$.

d. Montrer que la suite u est convergente et converge vers α.

e. Déterminer un entier naturel n_0 pour que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

f. Calculer cette valeur approchée.

1.h On considère la suite u définie par $u_0=9$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{8u_n-6}{u_n+1}$.

1) Etudier graphiquement la monotonie et la convergence de la suite u (On représentera la courbe de la fonction : $x\to\frac{8x-6}{x+1}$).

2) Démontrer que la suite u est décroissante et minorée par 6.

3) En utilisant les propriétés de la fonction f, montrer que $|u_{n+1}-6|\leq\frac{2}{7}|u_n-6|$, $|u_n-6|\leq 3\times\left(\frac{2}{7}\right)^n$, puis montrer que la suite la suite u est convergente et converge vers 6.

4) Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_n=\frac{u_n-6}{u_n-1}$.

a. Montrer que la suite v est géométrique.

b. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

c. Démontrer alors que la suite u converge vers 6.

S'ENTRAÎNER

SUITES ARITHMÉTIQUES ET SUITES GÉOMÉTRIQUES.

1.
Le premier terme d'une progression arithmétique est -11, sa raison est 13. Calculer tous ses termes compris entre 1983 et 2050.

2.
Une suite arithmétique de 80 termes a pour somme -16360 et pour dernier terme -402. Calculer le premier terme et la raison de cette suite.

3.
Soient a et b deux réels, (u_n) une suite réelle telle que l'on ait : $u_0 + u_1 + \ldots + u_{p-1} = p(ap+b)$.
a) Montrer que la suite u est arithmétique.
b) Calculer le premier terme et la raison de cette suite.

4.
Déterminer une suite de cinq termes sachant que leur somme est 285, leur produit 451715880, et que leur raison r est comprise entre -20 et 20.

5.
Déterminer la suite géométrique u décroissante, telle que $u_1 \times u_3 = 144$ et $u_1 + u_2 + u_3 = 63$, et donc tous les termes sont positifs.

6.
Une suite géométrique v est telle que :
$8v_0 = 27v_3$ et $v_2 = \dfrac{20}{9}$.
Calculer v_0, v_n, la raison de v et $T_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$.

7.
Les réels a,b,c vérifient les conditions suivantes :
- a,b,c sont dans cet ordre , trois termes consécutifs d'une progression arithmétique.
- b, c, a sont dans cet ordre , trois termes consécutifs d'une progression géométrique.

$a+b+c=12$.
Calculer a,b,c.

8.
Une personne a placé une somme S auprès d'une banque. À la fin de chaque année, l'intérêt de ce placement est égal au $\dfrac{1}{25}$ ième de la somme placée en début d'année. Les intérêts ne sont pas retirés et produisent eux-aussi les autres intérêts.
a) Quelle est la somme due à ce placement à la fin de la n-ième année ?
b) Pendant combien de temps au moins devra durer ce placement pour que la somme due soit supérieure à 2S ?

9.
u est une progression géométrique .
a) Montrer que $u_1 \times u_5 = (u_3)^2$.
b) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 sachant que :
$$\begin{cases} u_3 > 0 \\ u_1 \times u_5 = 81 \\ u_2 + u_3 + u_4 = 39 \end{cases}$$

10.
Soient x, y, z trois réels distincts deux à deux tels que
$$\begin{cases} x \neq 0; \\ (x,y,z)\ \textit{est géométrique.} \\ (3x, 2y, z)\ \textit{est arithmétique.} \end{cases}$$
Calculer la raison de la suite géométrique.

11.
$u_0 = 1; u_1 = 4$; pour tout entier naturel $n, u_{n+2} = -3u_{n+1} + 4u_n$.
a) Montrer que la suite v, définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est géométrique .
b) Calculer v_n en fonction de n.

(On évaluera d'abord $s_n = v_{n-1} + v_{n-2} + \ldots + v_0$ en fonction de n, puis en fonction de $u_n - u_0$ et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

12.

Un litre de super coûtait 375 francs cfa au premier janvier 1987.

a) En supposant une augmentation régulière de 10% , calculer le prix du litre de super au premier janvier 1990.

b) En quelle année le prix du litre de super sera-t-il au moins le double de ce qu'il était au premier janvier 1987 ?

13.

Soient les suites définies par : $a_0 = 2; b_0 = 3$; et

pour tout entier naturel n, $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n) \end{cases}$.

1) Soit u définie par $u_n = a_n + b_n$.

a) Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

b) Calculer u_n .

2) Soit v la suite définie par $v_n = a_n - b_n$.

a) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n.

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c) Exprimer a_n et b_n en fonction de n, puis calculer les limites si elles existent des suites (a_n) et (b_n).

14.

1) n étant un entier naturel, résoudre l'équation $\ln(7^n x) = 2n$.

2) On considère la suite v définie par $\ln(7^n v_n) = 2n$.

a) Calculer v_0.

b) Montrer que la suite v est géométrique et déterminer sa raison.Calculer la limite de la suite v.

c) Déterminer un entier n_0 tel que, pour tout entier $n > n_0$, $v_n > 100$.

15.

La suite u est définie par $u_0 = -2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

Soit a un réel et v la suite définie par $v_n = u_n - a$.

a) Déterminer la valeur de a pour que la suite v soit géométrique, puis préciser sa raison.

On pose $w_n = u_n - 6$.

b) Montrer que la suite w est géométrique puis précisser son premier termer et sa raison.

c) Exprimer w_n et u_n en fonction de n.

d) Calculer les limites des suites w, u , S et T sachant que $S = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$ et $T = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. (On exprimera S et T en fonction de n).

SUITES DÉFINIES PAR UNE RELATION DE RÉCURRENCE DU TYPE $u_{n+1} = f(u_n)$.

16.

Soit la fonction f définie par $f(x) = 4x + 1 - xe^x$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β dans l'intervalle $\left[\frac{3}{2};2\right]$.

2) Soit h la fonction définie sur $\left[\frac{3}{2};2\right]$ par $h(x) = \ln\left(4 + \frac{1}{x}\right)$.

a) Montrer que β est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$.

b) Étudier les variations de la fonction h sur $\left[\frac{3}{2};2\right]$.

c) Montrer que l'image de $\left[\frac{3}{2};2\right]$ est une partie de $\left[\frac{3}{2};2\right]$ et que pour tout réel $x \in \left[\frac{3}{2};2\right]$, $|h'(x)| \leq \frac{1}{10}$.

d) En déduire que pour tout réel x de $\left[\frac{3}{2};2\right]$, $|h(x) - \beta| \leq \frac{1}{10}|x - \beta|$.

3) Soit u la suite définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = h(u_n)$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n,

$u_n \in \left[\frac{3}{2};2\right]$;

- $|u_n - \beta| \leq \frac{}{10}|u_n - \beta|$;
- $|u_n - \beta| \leq \frac{1}{2\times 10^n}$.

b) Montrer que la suite u converge vers β.

c) Trouver le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout entier naturel $n \geq n_0, u_n$ est une valeur approchée de β à 10^{-6} près.

17.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+\frac{3}{4}}$ et la suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + \frac{3}{4}}$ pour tout entier naturel n.

1) En utilisant la courbe représentative de la fonction f, conjecturer que u est croissante et convergente vers un réel de $\left[0;\frac{3}{2}\right]$.

2) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

3) Montrer que pour tout réel x de $\left[0;\frac{3}{2}\right]$, $\frac{1}{3} \leq f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

4) En utilisant la propriété de l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout réel x de $\left[0;\frac{3}{2}\right]$, $\left|f(x) - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left|x - \frac{3}{2}\right|$.

5) Montrer que pour tout entier naturel n,

- $u_n \in \left[0;\frac{3}{2}\right]$;
- $\left|u_{n+1} - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left|u_n - \frac{3}{2}\right|$;
- $\left|u_n - \frac{3}{2}\right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \times \frac{3}{2}$.

6) Montrer que la suite u converge vers $\frac{3}{2}$.

18.

On se propose d'étudier la suite u définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{u_n + 2}$.

1) Soit f l'applicataion définie dans $]-2;+\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.

b) Étudier les variations de f, puis donner l'image de $[0;1]$ par la fonction f.

c) Démontrer que : pour tout réel de $[0;1], \cdot\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$.

d) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution a dans l'intervalle $[0;1]$.

2) Démontrer que pour tout en entier naturel n.

- $u_n \in [0;1]$;
- $|u_{n+1} - a| \leq \frac{2}{3}|u_n - a|$;
- $|u_n - a| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
- En déduire que la suite est convergente, puis calculer sa limite.

19.

Soit f est la fonction définie par : $f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$.

1) a. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

b) Construire la courbe (C) de f, la droite d'équation $y = x$, et la tangente en (C) au point d'abscisse 0.

2) a. Montrer que la fonction $g : x \to f(x) - x$ est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution positive notée b telle que $\frac{1}{2} < b < 1$.

3) a. Montrer que pour tout réel x de $\left[\frac{1}{2};1\right]$, $f(x) \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.

b) Montrer que sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

4) Soit (u_n) la suite définie par

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ et } u_0 = \frac{1}{2}.$$

a) Montrer que pour tout entier naturel n,

- $u_n \in \left[\frac{1}{2};1\right]$; ▪ $|u_{n+1} - b| \leq \frac{1}{2}|u_n - b|$;
- $|u_n - b| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

b) Montrer que la suite u converge vers b.

c) Déterminer le plus petit entier k, tel que u_k soit une valeur approchée de b à 10^{-3} près.

AUTRES SUITES.

20.

Pour chaque suite (u_n), étudier la convergence ou la divergence.

1) $u_n = \sqrt{\dfrac{2n+3}{7n+5}}$; 2) $u_n = exp\left(\dfrac{2n}{7n^2+n}\right)$;

3) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2-n}}{n-2}$; 4) $u_n = exp\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)$;

5) $u_n = ln\left(\sqrt{n^2+4n} - n\right)$; 6) $u_n = \dfrac{2n+\cos n}{4n+\sin n}$;

7) $u_n = \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{3}$; 8) $u_n = ln\left|n\sin\dfrac{1}{n}\right|$.

21.

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

1) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a l'encadrement :

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

2) En déduire que la suite (u_n) converge.

22.

La suite u est définie par :

$$u_n = \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + \ldots + \frac{n}{n^2+2n} + \frac{n}{n^2+2n+1}$$

a) Donner le nombre de termes de u_n.

b) Démontrer que pour tout entier non nul n,

$$\frac{2n}{n+1} \leq u_n \leq \frac{2(n+1)}{n}.$$

c) Montrer que la suite$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

23.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2\times 3}} \\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}} \text{ si } n > 0. \end{cases}$$

1) Calculer une valeur approchée à 10^{-4} près des réels u_1, u_2 et u_3.

2) Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est égal à

$$\frac{1}{\sqrt{2n+2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+3}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+4}}\right)$$ et en déduire que la suite (u_n) est strictement croissante.

3) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $\dfrac{n}{\sqrt{2n(2n+1)}} \leq u_n \leq \dfrac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$.

4) En déduire que la suite (u_n) est majorée par 1.

5) Etudier la convergence de la suite (u_n).

Que peut-on dire de sa limite ?

24.

Calculer la limite de chacune des suites définies comme suit :

$a_n = \dfrac{n+sin}{n^2}$; $b_n = \dfrac{n^2+(-1)^n}{n^2}$; $c_n = \sqrt{n}$;

$d_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$; $e_n = \left(\dfrac{n}{n+3}\right)^n$; $d_n = n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$;

$f_n = \dfrac{5^n - 3^n}{5^n + 3^n}$.

25.

On définit la suite u par : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$

et la fonction f par : $f(x) = e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)$.

1) a. Montrer que $f'(x) = -e^{-x} \times \frac{x^n}{n!}$ sur $[0;1]$.

b) En déduire que, pour tout réel x de $[0;1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{n!}$.

c) En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[0;1]$, montrer que $\left|\frac{1}{e}u_n - 1\right| \leq \frac{1}{n!}$.

d) En déduire que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.

2) La suite v est définie par : $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$

a) Montrer que la suite v converge vers e.

b) Montrer que la suite u est croissante et la suite v est décroissante.

c) En déduire que pour tout entier naturel $n, u_n < e < v_n$.

26.

Soit la suite (u_n) définie par la donnée de u_0 tel que $0 < u_0 < 1$ et pour tout entier naturel $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$.

a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$.

b) (i) Étudier le signe du polynôme $x \to -2x^2 + x + 1$ *pour* $x \in [0;1]$.

(ii) Exprimer $u^2_{n+1} - u^2_n$ en fonction de u_n .

(iii) En déduire la monotonie de la suite u.

(iv) En déduire que la suite u est convergente, puis calculer sa limite.

27.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln x$.

a) Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[n;n+1]$ où n est un entier naturel non nul, $\frac{1}{n+1} \leq f'(x) \leq \frac{1}{n}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n)) \leq \frac{1}{n}$.

On définit la suite u par : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

c) Montrer par récurrence que $\frac{1}{n} + \ln(n) \leq u_n \leq 1 + \ln(n)$.

d) En déduire les limites de u_n et de $\frac{u_n}{\ln(n)}$.

28.

On donne deux suites u et v telles que $u_0 = 5$ *et* $v_0 = 1$, et pour tout entier naturel ,
$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{2u_n \times v_n}{u_n + v_n}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel, $v_n < u_n$.

b) Démontrer que la suite u est strictement decroissante

c) Démontrer que la suite est strictement croissante.

d) En déduire que les suites u et v sont convergentes.

e) Montrer que $(u_n - v_n) < \frac{1}{2}(u_{n-1} - v_{n-1})$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

f) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$.

Vocabulaire : Lorsque deux suites vérifient *a),b),c)et e)*, elles sont dites adjacentes.

g) Montrer que $u_n \times v_n = 5$ et en déduire que $\sqrt{5}$ est la limite de (u_n) .

29.

Soit la suite (u_n) définie par son premier terme u_n et pour tout entier naturel n non nul, par $u_{n+1} = \frac{u_n}{n}$.

1) On suppose que l'on a $u_1 > 0$.

a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée.

b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a on a : $0 \leq u_n \leq \frac{u_1}{n}$.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

2) On suppose que l'on a $u_1 < 0$.
S'inspirer de la question 1) pour étudier la convergence de la suite (u_n).

30.

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n^2}{n!}$.

1) Calculer les six premiers termes de la suite.
2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}-\{0;1\}$.
3) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
4) Montrer que pour tout entier naturel n distinct de1, on a $0 < u_n \leq \dfrac{2n}{(n-1)^2}$.

En déduire la limite de la suite (u_n).

31.

On considère les deux suites u et v définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} u_1 = 1 \, et \, u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \\ v_1 = 12 \, et \, v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$.

1) On pose $w_n = v_n - u_n$.
   a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique.
   b) Exprimer pour tout entier naturel n non nul w_n en fonction de n.
   c) En déduire la limite de la suite (w_n).
2) Montrer que la suite u est croissante et majorée par v_1 et la suite v est décroissante et minorée par u_1.
3) Que peut-on déduire des questions précédentes des suites $u \, et \, v$?
4) On pose $t_n = 3u_n + 8v_n$.
   Montrer que la suite (t_n) est stationnaire.
5) En déduire la limite de $u \, et \, de \, v$.

32.

On considère la suite (u_n) de nombres réels positifs définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$u_1 = e^2$,et pour tout entier naturel n non nul, $(u_{n+1})^2 \times e = u_n$.

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = \dfrac{1+\ln u_n}{2}$.

1) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer v_{n+1} en fonction de $\ln u_n$ puis en fonction de v_n.
2) En déduire que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.
3) Déterminer la limite de chacune des suites (v_n) et (u_n).

33.

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 > 2$ et par $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1) Démontrer que la suite (u_n) est minorée par 2.
2) a) Montrer que pour tout entier naturel, on a $u_{n+1} - 2 = \dfrac{u_n - 2}{\sqrt{2+u_n}+2}$.
   b) En déduire que : $u_n - 2 \leq \dfrac{u_n - 2}{4}$.
3) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n - 2 \leq \dfrac{u_0 - 2}{4^n}$.
4) Déduire que la suite (u_n) converge vers 2.

34.

On considère la suite ( ) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 4}{u_n + 3}$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n, u_n est positif.
2) Montrer que si la suite (u_n) admet une limite ℓ, alors on a $\ell = 2$.
   On pose $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$.
3) Montrer que (v_n) une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison. Est-elle convergente ?
4) Exprimer u_n en fonction de n et en déduire que (u_n) est convergente.

35.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2} \, et \, u_{n+1} = u_n{}^2 + \dfrac{3}{16}$.

1) Tracer la courbe C d'équation $y = x^2 + \frac{3}{16}$ et la droite (D) d'équation $y = x$.
Construire géométriquement les cinq premiers termes de la suite ( ).
Que suggère cette construction ?

2) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\frac{1}{4} \leq u_n \leq \frac{3}{4}$.

3) Montrer que pour tout entier naturel n, non nul $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - u_{n-1}$ sont de même signe. Déduire le sens de variation de la suite (u_n).

4) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

36

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = \frac{\pi}{4}$ et $u_{n+1} = -ln(\cos u_n)$.

1) Étudier les variations de la fonction f de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$f(x) = -ln(\cos x)$.

2) a) Étudier le sens de variation de la fonction g de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$g(x) = f(x) - x$.

b) Déduire que l'équation $f(x)$ x admet une solution unique α dans $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.
Donner un encadrement de α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}.

3) a) Tracer dans un même repère orthonormé, la courbe C de f et la droite (D) d'équation $y = x$.

b) Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite (u_n).

4) a) Montrer par récurrence que, tous les termes de la suite (u_n) sont dans $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Montrer que (u_n) est convergente et trouver sa limite.

37

On définit la suite (u_n) par la donnée de ses deux premiers termes $u_1 = 6, u_2 = 1$ et la relation de récurrence :
$u_{n+1} = -\frac{1}{6}u_n + \frac{1}{6}u_{n-1}$.

1) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N} - \{0;1\}$ par : $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n$. Montrer que cette suite est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

2) Démontrer que la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N} - \{0;1\}$ par $w_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

3) Calculer v_2 et w_2. Exprimer v_{n+1} et w_{n+1} en fonction de n. La suite (v_n) est-elle convergente ?

4) On pose : $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

Démontrer que la suite (S_n) est convergente et déterminer sa limite.

38

Au bout de la première semaine de fonctionnement, la production de boîtes d'un médicament générique est de 200 000 unités. Par suite, on envisage d'augmenter cette production de 3 % par semaine.
On note :

- U_1 la production, en unités, à la fin de la première semaine, (U_1 = 200 000),
- U_2 la production, en unités, à la fin de la 2ème semaine,
- U_n la production, en unités, à la fin de la n-ième semaine.

1) Calculer U_2 et U_3.

2) Quelle est la nature de la suite de terme général U_n ? Préciser la raison de cette suite.

3) a) Exprimer U_n en fonction de n.

b) En déduire la production au bout de la 12ème semaine. (arrondir le résultat à l'unité).

4) L'équation $300000 = 200000 \times (1,03)^{n-1}$ permet de déterminer le nombre n de semaines nécessaires pour que la fabrication atteigne 300 000 boîtes.

Résoudre cette équation en faisant figurer les différentes étapes du calcul et arrondir le résultat à l'unité.

39.

Une suite géométrique (C_n) est définie par : $C_0 = 1\ 000$ et, pour tout entier naturel n,

$C_{n+1} = 1,0225\ C_n$.

Dans ce qui suit, arrondir les valeurs approchées à 10^{-2}.

1) Calculer C_1, C_2, C_3.
2) Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, exprimer C_n en fonction de n.
3) Déterminer le sens de variation de la suite (C_n)
4) Déterminer le plus petit nombre entier n tel que : $C_n \geq 2C_0$.

40.

Une entreprise fabriquant du matériel pour les laboratoires augmente chaque année sa production d'un certain type de pièces de 6 %. La production P_1 de la première année est de 45 000 pièces.

1) Déterminer la nature de la suite des productions annuelles en précisant le premier terme et la raison.
2) Calculer la production P_2 pour la deuxième année, P_3 pour la troisième année, P_4 pour la quatrième année ; les valeurs seront arrondies à l'unité.
3) On désigne par P_n la production de l'année n. Exprimer P_n en fonction de n.
4) Calculer la production de la douzième année (arrondir à l'unité).
5) Déterminer en quelle année la production P_n, dépassera 100 000 pièces.

41.

Le 1^er^ Janvier 2012, la population d'un pays s'élevait à 30 millions d'habitants. On estime que l'augmentation de la population pour les 15 ans à venir sera de 2 % par an.

1) Calculer la population au 1^er^ Janvier 2013, puis au 1^er^ Janvier 2019. Les résultats seront donnés en millions et arrondis à 10^{-3}.
2) Quelle est l'augmentation en pourcentage, entre la population au 1^er^ Janvier 2012 et la population au 1^er^ Janvier 2019 ? Le résultat sera arrondi à 0,1 %.
3) Résoudre dans l'ensemble des nombres réels, l'inéquation : $1,02^x \geq 1,2$.
4) Déterminer l'année à partir de laquelle la population dépassera 36 millions d'habitants.

42.

Deux capitaux sont placés simultanément à intérêts composés :
le premier de 2 500000 F à 4,5 % l'an ; le second de 3 000000 F à 3,5 % l'an.

Calculer le nombre d'années de placement à partir duquel la valeur acquise par le premier capital dépassera celle acquise par le second.

43.

On a injecté un centimètre cube de produit calmant à un malade.
Toutes les demi-heures, son organisme élimine 10 % de ce produit.

1) Quel volume de ce produit calmant a-t-il au bout de six heures ? Arrondir le résultat à 10^{-2}.
2) Sachant que ce produit n'est plus efficace lorsque le volume restant est inférieur à 500 millimètres cubes, au bout de combien de temps le produit sera-t-il inefficace ?

Chapitre 9

CALCUL INTÉGRAL

LEÇON 1 CALCUL PRATIQUE DES INTÉGRALES.

1-1 PRÉSENTATION-NOTATION.

1-2 PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES.

1.2.1 Linéarité.

1.2.2 Relation de Chasles.

1.2.3 Autres propriétés des intégrales.

1.2.4 Fonction définie à l'aide une intégrale

1-3 CHANGEMENT DE VARIABLE AFFINE.

1-4 INTÉGRALES DES FONCTIONS PAIRES, IMPAIRES OU PÉRIODIQUES.

1-5 INTÉGRATION PAR PARTIES

LEÇON 2 QUELQUES APPLICATIONS DU CALCUL INTÉGRAL.

2-1 CALCULS D'AIRES.

2.1.1 Généralités.

2.1.2 Aires des portions du plan délimitées par des courbes simples.

2-2 VALEUR APPROCHÉE D'UNE INTÉGRALE PAR LA MÉTHODE DES RECTANGLES.

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1 CALCUL PRATIQUE DES INTÉGRALES.

- ➢ Calcul des intégrales en utilisant :
  - Les primitives usuelles ;
  - La linéarité ou la relation de Chasles ;
  - Une intégration par parties ;
  - Un changement de variable affine ;
  - La parité, la périodicité d'une fonction.
- ➢ Obtenir les inégalités à partir des intégrales.
- ➢ Étudier les fonctions ou suites définies à l'aide d'une intégrale.

1.1. PRÉSENTATION-NOTATION.

Prendre un bon départ

Soit f une fonction continue sur intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient F *et* G deux primitives de f sur I.

a) Écrire pour tout x élément de I, une relation entre $F(x)$ *et* $G(x)$.

b) Soient a et b deux éléments quelconques de I . Comparer $F(b)-F(a)$ et $G(b)-G(a)$ et en déduire que le réel $F(b)-F(a)$ est indépendant du choix de la primitive de f.

Retenir

Soient f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, F une primitive de f sur I , a *et* b deux éléments de I.

- Le réel $\boldsymbol{F(b)-F(a)}$ est indépendant du choix de la primitive de f.
- Ce réel est appelé intégrale de a à b de f .

NOTATION

L'intégrale de a à b de f se note $\int_a^b f(t)\,dt$ et se lit « somme de a à b de $f(t)dt$ ».
Dans cette notation, le réel t est la variable d'intégration de f, *et* n'intervient pas dans le résultat de l'intégrale. Il peut donc être remplacé par n'importe quelle lettre.

On peut donc écrire : $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du = \ldots$

F étant une primitive quelconque de f, $\int_a^b f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_a^b = F(b)-F(a)$.

REMARQUE

- Pour tout élément a de I, on a $F(a)-F(a)=0$. D'où $\int_a^a f(t)dt=0$.
- Pour tous a et b de I, $F(a)-F(b)=-[F(b)-F(a)]$. Par suite $\int_b^a f(t)dt=-\int_a^b f(t)dt$.
- Soit a un élément de I. Pour tout x de I, $\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$.

Soit G l'application de I vers $\mathbb{R}$ définie par $G(x)=F(x)-F(a)$.
G est dérivable sur I et $G'(x)=F'(x)=f(x)$ et G( ) 0.
G est donc la primitive de f sur I telle que $G(a)=0$.
Si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un élément de I, alors la fonction : $x\mapsto\int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

EXEMPLE

1) Calculons l'intégrale $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx$.
La fonction $f\ :\ x\mapsto cos^2x$ est continue sur $\mathbb{R}$. 0 et $\frac{\pi}{2}$ étant des éléments de $\mathbb{R}$, l'intégrale A est définie.
D'autre part $cos2x=2cos^2x-1$; par suite $cos^2x=\frac{1}{2}(1+cos2x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos2x\right]dx=\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{4}sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

2) Calculons $B=\int_{\frac{\pi}{4}}^0\sin^3x\cos^2x\,dx$.
On peut vérifier comme pour 1) que B est définie.

$$sin^3xcos^2x=sin^2x(sinx)(\cos^2x)=(1-cos^2x)cos^2x\,sinx$$
$$=cos^2x(sinx)-cos^4x(sinx)$$

$$B=\int_{\frac{\pi}{4}}^0\left(cos^2xsinx-cos^4xsinx\right)dx=\left[-\frac{1}{3}cos^3x+\frac{1}{5}cos^5x\right]_{\frac{\pi}{4}}^0$$

$$B=\left[-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right]-\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5\right]=\left[-\frac{2}{15}-\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{8}+\frac{1}{5}\times\frac{4\sqrt{2}}{32}\right]=-\frac{2}{15}-\frac{7\sqrt{2}}{120}.$$

3) $$C=\int_{\frac{\pi}{4}}^0\tan x\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^0\frac{\sin x}{\cos x}dx=\left[-ln|\cos x|\right]_{\frac{\pi}{4}}^0=[-\ln(\cos o)]+\left[ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$C=ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left[\ln(2)^{\frac{1}{2}}-ln2\right]=\left(\frac{1}{2}ln2-ln2\right)=-\frac{1}{2}ln2.$$

Exercice Résolu

1) Calculer $I=\int_0^\pi(\cos t-t\sin t)dt$.
En posant $f(t)=t$ et $g(t)=\cos t$, on a $f'(t)=1\,et\,g'(t)=-\sin t$.
$\cos t-tsint=f'(t)g(t)+f(t)g'(t)=(fg)'(t)$.
Une primitive de : $t\mapsto\cos t-tsint$ est la fonction : $t\mapsto tcost$. Par suite

$$I=\int_0^\pi(\cos t-t\sin t)dt=[t\cos t]_0^\pi=[\pi\cos\pi-0\cos 0]=-\pi.$$

2) Calculer $J = \int_1^x t\sqrt{1-t^2}dt$ pour tout x de $[-1;1]$.

Posons $u(t) = 1-t^2$; $u'(t) = -2t$; $t = -\frac{1}{2}u'(t)$

$t\sqrt{1-t^2} = -\frac{1}{2}u'(t)(u(t))^{\frac{1}{2}}$. Une primitive de la fonction $t \mapsto -\frac{1}{2}u'(t)(u(t))^{\frac{1}{2}}$ est la fonction :

$t \mapsto -\frac{1}{3}[u(t)]^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}[1-t^2]^{\frac{3}{2}}$.

$J = \int_1^x t\sqrt{1-t^2}dt = -\frac{1}{3}[1-x^2]^{\frac{3}{2}}$.

S'exercer

1.a Justifier l'existence de chacune des intégrales ci-dessous et la calculer :

$A = \int_{\ln 3}^{0} e^{-3x}dx$; $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$; $C = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \sin^4 x\, dx$; $D = \int_{-2}^{-1} \frac{4x-3}{2x^2-3x+1}dx$.

1.b Calculer les intégrales suivantes :

i) $\int_0^1 \frac{e^u}{e^u+1}du$; ii) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$; iii) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}dx$.

1.c Calculer les intégrales suivantes :

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 x sin^2 x dx$; ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx cosx dx$; iii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sinx e^{3cosx} dx$; iv) $\int_1^2 \frac{x-2}{x^2-4x+1}dx$.

1.d Calculer les intégrales suivantes :

i) $\int_0^2 \frac{x}{x+1}dx$; ii) $\int_0^1 xe^{-x}dx$; iii) $\int_{-2}^{1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$; iv) $\int_{-1}^{2}(x-1)^2 dx$.

1.2. PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES

1.2.1 Linéarité

Prendre un bon départ

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux éléments de I.

1) Montrer que $\int_a^b [f(t)+g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.

2) Soit α un réel quelconque. Montrer que $\int_a^b \alpha f(t)dt = \alpha\int_a^b f(t)dt$.

Retenir

Soient α un réel, f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux éléments de I. On a :

- $\int_a^b [f(t)+g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$
- $\int_a^b \alpha f(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt.$
- Si α et β deux réels, alors $\int_a^b [\alpha f(t)+\beta g(t)]dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt.$

EXEMPLE

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$. Déduisons l'intégrale de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

2) $$J = \int_2^1 \frac{x+3}{x+1}dx = \int_2^1 \frac{(x+1)+2}{x+1}dx \int_2^1 1dx + \int_2^1 \frac{2}{x+1}dx = [x]_2^1 + 2[ln|x+1|]_2^1 = -1+2ln2-2ln3 =$$

$$-1+2ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

S'exercer

1.e Calculer l'intégrale $H = \int_{-1}^{2}\left(e^{-\frac{x}{2}} + 2x - 1\right)dx;\ k = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(2x)\sin(x)dx$.

1.2.2 Relation de Chasles.

Prendre un bon départ

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient a, b et c trois éléments de I, F une primitive de f sur I.

Montrer que $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt.$

Retenir

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. a, b et c trois éléments de I.
On a $\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt.$ (Relation de Chasles).

EXEMPLE

1) $K=\int_0^2|x-1|\,dx=\int_0^1(-x+1)\,dx+\int_1^2(x-1)\,dx=\left[-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2=1.$

2) $L=\int_0^3|x-2|\,dx=\int_0^2(-x+2)\,dx+\int_2^3(x-2)\,dx.$

3) $L=\left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^2+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3=(-2+4)+\left(\frac{9}{2}-6-2+4\right)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$

Exercice Résolu 1 :

Calculons $\int_0^2\frac{2x^2+3x-5}{x+2}dx$

Soit f la fonction : $x\mapsto\frac{2x^2+3x-5}{x+2}$ est continue sur l'intervalle $[0;2]$.

Écrivons $f(x)$ sous forme $ax+b+\frac{c}{x+2}$.

À l'aide de la division euclidienne, on a: $f(x)=2x-1-\frac{3}{x+2}$. Ainsi :

$$\int_0^2\frac{2x^2+3x-5}{x+2}dx=\int_0^2\left(2x-1-\frac{3}{x+2}\right)dx=\left[x^2-x-3ln(x+2)\right]_0^2=2-3\ln2.$$

Exercice Résolu 2:

1) On donne $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2x\,dx$ *et* $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x\,dx$. Calculons $I+J$, $I-J$, déduire I et J.

* $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 2x+\sin^2 2x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx.$

$I+J=[x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$.

* $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 2x-\sin^2 2x\right)dx$;

$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4x\,dx=\left[\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0$.

On a $\begin{cases}I+J=\frac{\pi}{2}\\ I-J=0\end{cases}$ *donc* $I=J=\frac{\pi}{4}$.

2) Calculons $\int_1^e lnx\,dx+\int_1^e\left(x+ln\frac{1}{x}\right)dx$.

D'après la linéarité de l'intégrale on a:

$\int_1^e\ln x\;dx+\int_1^e\left(x+\ln\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^e(\ln x+x-\ln x)\,dx=\int_1^e x\,dx$;

$\int_1^e\ln x\;dx+\int_1^e\left(x+\ln\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}.$

3) ***n*** **étant un entier naturel, calculons en utilisant la relation de Chasles**

$I_n=\int_{-1}^2\left(1-|x-1|\right)^n dx$.

$$\int_{-1}^{2}(1-|x-1|)^n\,dx=\int_{-1}^{1}(1-(1-x))^n\,dx+\int_{1}^{2}(1-(x-1))^n\,dx.$$
$$=\int_{-1}^{1}x^n dx+\int_{1}^{2}(2-x)^n\,dx=\frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}\right]_{-1}^{1}-\frac{1}{n+1}\left[(2-x)^{n+1}\right]_{1}^{2}$$
$$=\frac{1}{n+1}\left[1-(-1)^{n+1}\right]-\frac{1}{n+1}\left[0-1\right]=\frac{1}{n+1}\left[1-(-1)^{n+1}+1\right]=\frac{1}{n+1}\left[2-(-1)^{n+1}\right].$$

- Si n est pair, $n+1$ est impair et $(-1)^{n+1}=-1$; par suite $I_n=\frac{3}{n+1}$.
- Si n est impair, $n+1$ est pair et $(-1)^{n+1}=1$; par suite $I_n=\frac{1}{n+1}$.

S'exercer

1.f Calculer $\int_{-1}^{3}\left|(x-1)^3\right|dx$.

1.g Calculer au moyen de la relation de Chasles les intégrales suivantes:

i) $\int_{-1}^{2}(|x|-|x-1|)\,dx$; ii) $\int_{0}^{\pi}|\cos 2x|\,dx$; iii) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|\,dx$.

1.2.3 Autres propriétés des intégrales

Prendre un bon départ

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. a et b deux réels tels que $a\leq b$.

1) On suppose que pour tout x de I, $f(x)\geq 0$. Soit F une primitive de f sur I.
Donner le sens de variation de F et comparer $F(a)$ et $F(b)$. Déduire le signe de $\int_a^b f(t)\,dt$.
2) Répondre aux mêmes questions qu'en 1) si pour tout x de I, $f(x)\leq 0$.
3) A-t-on les mêmes résultats si a et b sont deux éléments quelconques de I ?

Retenir

Soient a et b deux réels tels que $a\leq b$; f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$.

- Si pour tout x de $[a;b]$, $f(x)\geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$.
- Si pour tout x de $[a;b]$, $f(x)\leq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx\leq 0$.
- Si pour tout x de $[a;b]$, $f(x)\leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx$.

REMARQUE 1

- Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$ et f une fonction continue sur $[a;b]$. Soient m et M deux réels tels que, pour tout x de $[a;b]$, $m \leq f(x) \leq M$. On a $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Des inégalités $m \leq f(x) \leq M$ sur $[a;b]$, on déduit $\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx$ et par suite $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Si f est une fonction continue sur $[a;b]$ telle que pour tout x de $[a;b]$, $|f(x)| \leq M$, alors $\left|\int f(x)dx\right| \leq M(b-a)$

REMARQUE 2

- Soient a et b deux réels tels que : $a < b$ et f une fonction continue sur $[a;b]$. Il existe un réel c de $[a;b]$ tel que l'on ait $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$
- Le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est appelé valeur moyenne de f sur $[a;b]$.

En effet f étant une fonction continue sur $[a;b]$, elle est bornée. Il existe donc deux réels m et M tels que pour tout x de $[a;b]$, $m \leq f(x) \leq M$. D'après la remarque 1, on a $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$. Comme $a < b$, on peut écrire $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$. Par suite, il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$

EXEMPLE

1) Soient α, β deux réels et f la fonction définie sur $[a;b]$ par $f(x) = \alpha x + \beta$.
Déterminons la valeur moyenne de f sur $[a;b]$.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{b-a}\left[\alpha\frac{x^2}{2} + \beta x\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left[\left(\alpha\frac{b^2}{2} + \beta b\right) - \left(\alpha\frac{a^2}{2} + \beta a\right)\right]$$
$$= \frac{1}{b-a}\left[\alpha\frac{b^2}{2} - \alpha\frac{a^2}{2} + \beta b - \beta a\right] = \alpha\left(\frac{a+b}{2}\right) + \beta.$$

La valeur moyenne de l'application affine f sur $[a;b]$ est le réel $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, c'est la valeur de f en $\frac{a+b}{2}$ qui est le centre de l'intervalle $[a;b]$.

2) Calculons la valeur moyenne de la fonction : $x \mapsto \sin x$ sur $[0;\pi]$.
$\int_0^\pi \sin x\,dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$
La valeur moyenne de la fonction : $x \mapsto \sin x$ sur $[0;\pi]$ est $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x\,dx = \frac{2}{\pi}.$

Exercice Résolu :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$.

1) Montrer que la suite (u_n) est minorée par 0.

2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

3) a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

b) Montrer que pour tout $t \in [0;1]$, on a $0 \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$ et en déduire la limite de (u_n).

Solution :

1) La fonction $f_n : t \mapsto \frac{t^n}{1+t^2}$ est continue sur $[0;1]$. Pour tout t de $[0;1]$, on a $f_n(t) \geq 0$. Il en résulte $\int_0^1 f_n(t)\,dt \geq 0$ car $0 < 1$. Par suite $u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n non nul. La suite (u_n) est donc minorée par 0.

2) Etudions le sens de variation de la suite (u_n).

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2}\,dt - \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}(t-1)\,dt.$$

Pour $t \in [0;1]$, $t-1 \leq 0$ et $\frac{t^n}{1+t^2} \geq 0$. Par conséquent $\frac{t^n}{1+t^2}(t-1) \leq 0$ et comme $0 < 1$, $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}(t-1)\,dt \leq 0$. Par suite $u_{n+1} - u_n \leq 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

3) a) La suite (u_n) est décroissante et minorée. Elle est donc convergente.

b) Pour $t \geq 1, 1+t^2 \geq 1$; on a alors $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$ et $\frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$ et $0 \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$. Il en résulte que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^1 t^n\,dt. \text{ D'où } 0 \leq u_n \leq \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \text{ ; soit } 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

D'autre part $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. La suite (u_n) est encadrée par deux suites qui convergent vers 0. On en déduit que la suite (u_n) converge vers 0.

S'exercer

1.h Calculer la valeur moyenne de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

a) $f : x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$ sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$; b) $g : x \mapsto \sin x - 2\cos x$ sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right]$;

c) $h : x \mapsto \frac{1}{x^3}$ sur $[1;2]$; d) $k : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

1.2.4 Fonction définie par une intégrale

Prendre un bon départ

Soit la fonction F : $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ où f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un élément de I.

a) Soit G une Primitive de f sur I. Exprimer F(x) en fonction de G(x)

b) Montrer que F est dérivable sur I et donner l'expression de $F'(x)$ pour tout x élément de I.

Retenir

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un élément de I.

- La fonction F : $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est définie et dérivable sur I et pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.
- Pour étudier le sens de variation de F, il suffit d'étudier le signe de f.

EXEMPLE

Soit la fonction F : $x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

a) Donnons le domaine de définition de F.

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ est définie sur $\mathbb{R}$ car pour tout t de $\mathbb{R}$, $1+t^4 > 0$. f est donc définie sur $\mathbb{R}$. f est en plus continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0; x]$ pour $x \geq 0$ et sur $[x,0]$ pour $x \leq 0$.

$\forall_{\mathbb{R}}^{x}$ F est donc définie sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer la dérivée de F et donner le sens de variation de F.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$. $F'(x) > 0$.

F est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice Résolu: *Fonction définie à l'aide d'une intégrale*

F est la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $F(x) = \int_0^x \frac{t^2+1}{t^2+t+1}\,dt$.

1) Préciser l'ensemble de définition de F et donner son sens de variation sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2) On définit sur l'intervalle $[0;+\infty[$ les fonctions G et H par $G(x) = F(x) - x$ et $H(x) = F(x) - \frac{2}{3}x$

   a) Étudier sur l'intervalle $[0;+\infty[$, les variations des fonctions G et H.

   b) En déduire que pour tout réel $x \geq 0$, on a : $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$.

   c) En déduire la limite de F en $+\infty$.

3) Dresser le tableau de variation de F sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

4) a) Démontrer que l'équation $F(x) = \pi$ admet une solution unique $\alpha \in [0;+\infty[$.

   b) Montrer que $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$.

Solution

1- Variation de F

La fonction $t \mapsto \dfrac{t^2+1}{t^2+t+1}$ est continue sur $[0;+\infty[$

F est par définition la primitive de : $t \mapsto \dfrac{t^2+1}{t^2+t+1}$ sur $[0;+\infty[$ qui s'annule en 0.

F est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $F'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$,

Pour $x \geq 0, F'(x) \geq 0$; donc F est croissante sur $[0;+\infty[$

2- a) Variations de G et H

G et H sont dérivables sur l'intervalle $[0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$ $G'(x) = F'(x) - 1 = f(x) - 1 = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1} - 1 = \dfrac{-x}{x^2+x+1} \leq 0$ car $x \geq 0$.

$$H'(x) = F'(x) - \frac{2}{3} = f(x) - \frac{2}{3} = \frac{x^2+1}{x^2+x+1} - \frac{2}{3} = \frac{(x+1)^2}{3(x^2+x+1)} \geq 0 \text{ pour tout réel } x.$$

- $G'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1} - 1 = \dfrac{x^2+1-x^2-x-1}{x^2+x+1} = \dfrac{-x}{x^2+x+1}$ *or* $x \geq 0$; donc $\dfrac{-x}{x^2+x+1} \leq 0$.

$G'(x) \leq 0$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$; donc G est décroissante.

Pour tout $x \geq 0, H'(x) \geq 0$; donc H est croissante sur $[0;+\infty[$.

b) Obtention des inégalités

- Pour tout $x \geq 0$, on a : $G(x) \leq G(0)$; d'où $F(x) - x \leq 0$ (car $G(0) = 0$) et par suite $f(x) \leq x$.
- Pour tout $x \geq 0$, on a : $H(x) \geq H(0)$; d'où $F(x) - \dfrac{2}{3}x \geq 0$ et par suite $F(x) \geq \dfrac{2}{3}x$.
  D'où $\dfrac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$.

c) Calcul de la limite de en $+\infty$; $\dfrac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$. ·

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{2}{3}\right] x = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ d'après les propriété des comparaisons.

3- Tableau de variation de F

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$F'(x)$	$+$
$F(x)$	$0 \nearrow +\infty$

4- F est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$; donc F réalise une bijection de $[0;+\infty[$ vers $F([0;+\infty[) = [0;+\infty[$; $\pi \in [0;+\infty[$ et par conséquent, admet un antécédent unique α dans l'intervalle $[0;+\infty[$.

On a : $\frac{2}{3}x \le F(x) \le x$. Donc $\frac{2}{3}\pi \le F(\pi) \le \pi$ et $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\pi \le F\left(\frac{3}{2}\pi\right) \le \frac{3}{2}\pi$.
Ainsi, $\frac{2}{3}\pi \le F(\pi) \le \pi$ et $\pi \le F\left(\frac{3}{2}\pi\right) \le \frac{3}{2}\pi$ d'où $F(\pi) \le \pi \le F\left(\frac{3}{2}\pi\right)$ et $\alpha \in \left[\pi;\frac{3}{2}\pi\right]$.

S'exercer

1.i En étudiant les variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\ln x}$ sur $[e;2e]$, donner un encadrement d
$I = \int_e^{2e} \frac{x}{lnx}dx$.

1.j On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{x^2+1}dx$.
a) Calculer u_0.
b) Préciser le sens de variation de (u_n)
c) En déduire que (u_n) est convergente.
d) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$, $0 \le \frac{x^{2n+1}}{x^2+1} \le x^{2n+1}$ et en déduire la limite de la suite (u_n).

1.k On considère la suite (I_n) définie par $I_n = \int_1^e x(lnx)^n dx$.
a) Calculer I_0 et I_1.
b) Établir la relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} et calculer I_2 puis I_3.
c) Préciser le sens de variation de la suite (I_n)
d) Établir que pour tout entier naturel n, on a : $\frac{e^2}{n+3} \le I_n \le \frac{e^2}{n+2}$.
En déduire la limite de la suite (I_n).

1.l (u_n) est la suite définie par $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.
a) Préciser le sens de variation de la suite (u_n).
b) Établir que pour tout t de l'intervalle $[0;1]$, on a : $(1-t)^n \le (1-t)^n e^t \le (1-t)^n e$.
c) En déduire la limite de la suite (u_n).

1.m Dans chacun des cas suivants, justifier que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'($

a) $F : x \mapsto \int_{-x}^{x} \frac{1}{1+t^2}dt$;
b) $F : x \mapsto \int_{-x}^{x} t^3\sqrt{1+t^3}dt$;
c) $F : x \mapsto \int_{-x}^{x^2} \sqrt{1+t^2}dt$;
d) $F : x \mapsto \int_{x+1}^{x+2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$.

1.n On considère sur l'intervalle $]0;+\infty[$, la fonction $F : x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t}dt$.
a) Prouver que pour $x \ge 1, \frac{e^x - e}{x} \le F(x) \le e^x - e$.
En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x^n}$, n étant un entier naturel.
b) Prouver que l'on a pour $0 \le x \le 1, -e^x \ln x \le \int_x^1 \frac{e^t}{t}dt \le -e\ln x$.

En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{F(x)}{\ln x}$.

c) Dresser le tableau de variation de F sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

d) Donner l'allure de la représentation graphique de F

1.o Justifier les inégalités suivantes sans calculer les intégrales :

a) $1 \leq \int_1^2 \dfrac{1}{1+t^2}\,dt \leq 2$; b) $\dfrac{\ln 2}{2} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \dfrac{\cos t}{t}\,dt \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln 2$; c) $\dfrac{\ln 2}{2} \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \dfrac{\sin t}{t}\,dt \leq \ln 2$

1.p Soit la fonction numérique de la variable réelle : $F : x \mapsto \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.

a) Déterminer le domaine de définition de F.

b) Déterminer la dérivée de F et donner le sens de variation de F.

1.3. CHANGEMENT DE VARIABLE AFFINE

Prendre un bon départ

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, φ une fonction affine non constante définie sur I et f une fonction G : $t \mapsto F(\varphi(t))$ définie sur I où F est une primitive de f sur I.

c) Donner l'expression de $G'(t)$ pour tout t élément de I.

d) Soit la fonction $g : t \mapsto f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)$. Que représente G pour la fonction g ?

e) Montrer que pour tout a, b de I, $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$.

f) Déduire que $\int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du$.

Retenir

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, φ une fonction affine non constante définie sur I et f une fonction continue sur l'intervalle ouvert $\varphi(I)$.

Pour tout couple $(a;b)$ d'éléments de I, on a : $\int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du$.

REMARQUE

En posant $u = \varphi(t)$, on a $du = \varphi'(t)\,dt$; soit $\dfrac{du}{dt} = \varphi'(t)$. L'égalité $du = \varphi'(t)\,dt$ permet de trouver facilement la formule du changement de variable affine.

Calculons l'intégrale $J = \int_0^1 \dfrac{1}{(2t+1)^3}\,dt$.

EXEMPLE

Posons $u=2t+1$, $du=2dt$; $dt=\frac{du}{2}$. Pour $t=0, u=1$ et pour $t=1, u=3$.

$$J=\int_0^1 \frac{1}{(2t+1)^3}dt=\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{u^3}du=\frac{1}{2}\int_1^3 u^{-3}du=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2u^2}\right]_1^3=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{9}+1\right]=\frac{1}{4}\times\frac{8}{9}=\frac{2}{9}$$

Exercice Résolu 1 :

Calculer l'intégrale $K=\int_0^{-1}\frac{t^2+t-1}{(3t-2)^2}dt$.

Posons $u=3t-2$.

$t=\frac{u+2}{3}$; $du=3dt$; $dt=\frac{du}{3}$. $t^2+t-1=\frac{1}{9}(u+2)^2+\frac{1}{3}(u+2)-1=\frac{1}{9}(u^2+7u+1)$.

Pour $t=0, u=-2$ et pour $t=-1, u=-5$.

$$K=\int_0^{-1}\frac{t^2+t-1}{(3t-2)^2}dt=\int_{-2}^{-5}\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}\frac{u^2+7u+1}{u^2}du=\frac{1}{27}\int_{-2}^{-5}\left(1+\frac{7}{u}+\frac{1}{u^2}\right)du\ ;$$

$$K=\frac{1}{27}\left[u+7ln|u|-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-5}=\frac{1}{27}\left[\left(-5+7ln5+\frac{1}{5}\right)-\left(2+7ln2+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$K=\frac{1}{27}\left(-5+7\ln5+\frac{1}{5}+2-7\ln2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{27}(7\ln5-7\ln2-3{,}3).$$

Exercice Résolu 2 : *Changement de variable affine*

1- Calculer $\int_0^1 sin\pi(t-1)dt$ en posant $u=t-1$.

2- F et G les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\int_{-x}^{x}e^{t^2}dt$ et $G(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$.

   a) En posant $u=-t$, Exprimer F en fonction de G.

   b) Montrer que G est une fonction impaire.

Solution

1- Calculons $\int_0^1 sin\pi(t-1)dt$

Posons $u=t-1$, $\frac{du}{dt}=1$; donc $du=dt$.

Pour $t=0, u=-1$ *et pour* $t=1\ u=0$ On a alors $\int_0^1 sin\pi(t-1)d=\left[-\frac{1}{\pi}cos\pi u\right]_{-1}^{0}=-\frac{1}{\pi}(1-1)=0$.

2- a) $F(x)=\int_{-x}^{0}e^{t^2}dt+\int_0^x e^{t^2}dt$.

On a $G(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$ et avec $u=-t$, $du=-dt$:

$\int_{-x}^{0}e^{-t^2}dt=\int_0^x -e^{-u^2}du=+\int_0^x e^{-u^2}du=G(x)$ donc $F(x)=2G(x)$.

b) Déduction

On a : $G(-x)=\int_0^{-x}e^{-t^2}dt=-\int_{-x}^{0}-e^{-t^2}dt=-G(x)$. et G est impaire.

S'exercer

1.p Calculer les intégrales suivantes en utilisant des changements de variable affine.

$I=\int_{2}^{3}\frac{t^{3}+t+1}{(t-1)^{3}}dt$; $J=\int_{0}^{1}\frac{x+2}{(x+2)^{4}}dx$; $K=\int_{0}^{1}u(1-u^{n})\,du$ $(n\in\mathbb{N})$.

1.4. INTÉGRALES DES FONCTIONS PAIRES, IMPAIRES OU PÉRIODIQUES.

Prendre un bon départ

Activité 1

1) Soit f une fonction continue sur $[-a;a]$ et paire avec $a>0$.

D'après la relation de Chasles, on peut écrire pour tout t de $[-a;a]$,

$\int_{-a}^{a}f(t)dt=\int_{-a}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{a}f(t)dt$.

a) Justifier que $\int_{-a}^{0}f(t)dt=\int_{-a}^{0}f(-t)dt$.

b) On pose $u=-t$. Montrer que $\int_{-a}^{0}f(-t)dt=-\int_{a}^{0}f(u)du$.

c) En déduire que $\int_{-a}^{a}f(t)dt=2\int_{0}^{a}f(t)dt$.

Activité 2

2) Soit f une fonction continue sur $[-a;a]$ et impaire avec $a>0$.

a) Montrer que $\int_{-a}^{a}f(t)dt=-\int_{-a}^{0}f(-t)dt+\int_{0}^{a}f(t)dt$.

b) En posant $u=-t$, montrer que $\int_{-a}^{a}f(t)dt=\int_{a}^{0}f(u)du+\int_{0}^{a}f(t)dt$.

c) En déduire que $\int_{-a}^{a}f(t)dt=0$.

Activité 3

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T.

a) Utiliser la relation de Chasles pour montrer que pour tout réel a,

$I=\int_{a}^{a+T}f(x)dx=\int_{0}^{T}f(x)dx-\int_{0}^{a}f(x)dx+\int_{T}^{a+T}f(x)dx$.

b) Utiliser le changement de variable $u=x+T$ et la périodicité de f pour montrer que

$\int_{a}^{0}f(x)dx=\int_{a+T}^{T}f(u)du$.

c) En déduire que $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$.

Retenir

- Soit f une fonction continue sur $[-a;a]$ avec $a>0$.
  - Si f est paire, alors $\int^{a} f(t)dt \quad 2\int^{a} f(t)dt$.
  - Si f est impaire, alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.
- Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T. $\int_{a}^{a+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt$.

EXEMPLE

1) Calculons $\int_{-1}^{1} \frac{x}{|x|-3}dx$. La fonction : $x \to \frac{x}{|x|-3}$ est impaire sur $[-1;1]$. Donc $\int_{-1}^{1} \frac{x}{|x|-3}dx = 0$.

2) Soit l'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\, dx$. Soit la fonction f définie par $f(x) = x\sin x$.

Pour tout réel x, $f(-x) = -x\sin(-x) = x\sin x$ car $\sin(-x) = -\sin x. f$ est donc paire.

Par suite $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\, dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\, dx$.

3) Soit l'intégrale $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin 4x\, dx$. La fonction $f: x \mapsto \sin 4x$ est périodique de période $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

D'autre part $\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}$. On en déduit que $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin 4x\, dx = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}} \sin 4x\, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x\, dx$.

S'exercer

1.q Sans calculer les intégrales justifier les égalités suivantes :

i) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = 0$; ii) $\int_{-1}^{+1} \frac{x^3}{x^4 - x^2 + 3}dx = 0$; iii) $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = 2\int_{0}^{1} \frac{dt}{1+t^2}$; iv) $\int_{-1}^{2} \frac{xdx}{1+|x|} = \int_{1}^{2} \frac{xdx}{x+1}$

v) $\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (\sin 2x - \cos 2x)dx = -2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x dx$.

1. r Calculer $\int_{-1}^{1} t^3\sqrt{1+t^2dt}$.

1.5. INTÉGRATION PAR PARTIES.

Prendre un bon départ

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On sait que $(uv)' = u'v + v'u$.

a) Que représente la fonction (uv) pour la fonction $u'v + v'u$.

b) Soient a et b deux éléments de I. Montrer que

$[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t)\,dt + \int_a^b v'(t)u(t)\,dt$ et en déduire que

$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b v'(t)u(t)\,dt$.

Retenir

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tous réels a et b de I, on a : $\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b v'(t)u(t)\,dt$.

Cette méthode de calcul s'appelle intégration par parties.

EXEMPLE

(1) Calculons au moyen d'une intégration par parties $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin x$

Ainsi $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\cos x$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

(2) Calculons au moyen de deux intégrations par parties $F(x) = \int_0^x e^t \sin t\,dt$

Posons $u_1(t) = e^t$ et $v_1'(t) = \sin t$, on a $u_1'(t) = e^t$ et $v_1(t) = -\cos t$

D'où $F(x) = [e^t \cos t]_0^x + \int_0^x e^t \cos t\,dt$

Posons $u_2(t) = e^t$ et $v_2'(t) = \cos t$, on a : $u_2'(t) = e^t$ et $v_2(t) = \sin t$

Donc $\int_0^x e^t \cos t = [e^t \sin t]_0^x - \int_0^x e^t \sin t\,dt = e^x \cos x - 1 + e^x \sin x - F(x)$

D'où $2F(x) = e^x(\cos x + \sin x) - 1$ c'est-à-dire $F(x) = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) - \frac{1}{2}$

Exercice Résolu 1

On pose $I_n = \int_0^1 t^n e^t dt$ où n est un entier naturel.

1) Calculer I_0 et I_1 en utilisant une intégration par parties.

2) Montrer que pour tout entier naturel $I_{n+1} = e - (n+1) I_n$.

Solution :

1) $I_0 = \int_0^1 t^0 e^t dt = \int_0^1 e^t dt = \left[e^t \right]_0^1 = \left[e^1 - e^0 \right] = e - 1.$

$I_1 = \int_0^1 t^1 e^t dt = \int_0^1 te^t dt.$ Posons $u(t) = t$ et $v'(t) = e^t$. On a $u'(t) = 1$ et $v(t) = e^t$.

$\int_0^1 te^t dt = \int_0^1 u(t) v'(t) dt = \left[u(t) v(t) \right]_0^1 - \int_0^1 u'(t) v(t) dt$

$I_1 = \left[te^t \right]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = 1 - \left[e^t \right]_0^1 = 1 - (e - 1) = 2 - e.$

2) $I_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} e^t dt.$ Posons $u'(t) = e^t$ et $v(t) = t^{n+1}$. $u(t) = e^t$ et $v'(t) = (n+1) t^n$

$I_{n+1} = \left[t^{n+1} e^t \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1) t^n e^t dt = e - (n+1) I_n.$

Exercice Résolu 2 :

Déterminer la primitive de la fonction : $t \mapsto \ln t$ qui s'annule en 1.

Solution :

Calculons l'intégrale $F(x) = \int_1^x \ln t \, dt$.

Posons $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$. $u(t) = t$ et $v'(t) = \frac{1}{t}$.

$F(x) = \int_1^x \ln t \, dt = \int_1^x u'(t) v(t) dt = \left[u(t) v(t) \right]_1^x - \int_1^x u(t) v'(t) dt.$

$F(x) = [t \ln t]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} dt = x \ln x - x + 1.$

La primitive de la fonction $t \mapsto \ln t$ qui s'annule en 1 est la fonction : $x \mapsto x \ln x - x + 1$.

S'exercer

1.s Par une intégration par parties, calculer chacune des intégrales :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$; b) $\int_{-1}^2 x e^{-x} dx$; c) $\int_1^e x^3 \ln x dx$; d) $\int_e^3 x \ln x dx$.

1.t En utilisant la méthode d'intégration par parties, calculer :

a) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx$; b) $\int_3^1 x^2 e^x dx$; c) $\int_\pi^{-\frac{\pi}{2}} x \sin^3 x dx.$

LEÇON 2 QUELQUES APPLICATION DU CALCUL DES INTÉGRALES.

- Utiliser l'outil "intégrale" pour calculer les aires des surfaces planes.
- Donner une valeur approchée d'une intégrale par la méthode des médianes, des trapèzes ou des rectangles.

2.1. CALCULS D'AIRES

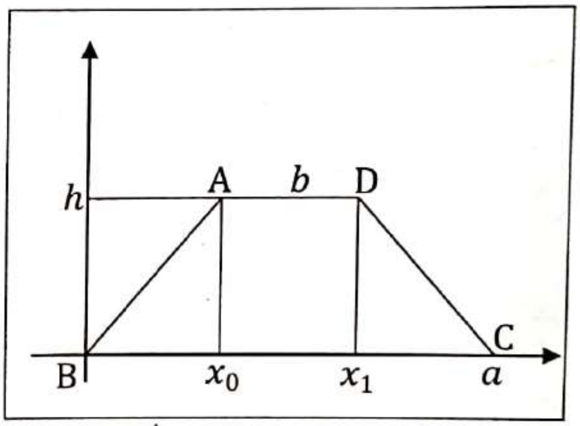
2.1.1 Généralités

Nous supposerons le plan muni d'un repère orthogonal.

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit h un réel strictement positif et $0 < x_0 \leq x_1 < a$. On se propose de calculer l'aire du trapèze de sommets $A(x_0;h)$, $B(0;0)$, $C(a;0)$ et $D(x_1;h)$.



1) Montrer que les droites (AB), (AD) et (DC) ont pour équations respectives :
$y=\frac{h}{x_0}x$; $y=h$ et $y=\frac{h(x-a)}{x_1-a}$.

2) Calculer $\mathcal{A}=\int_0^{x_0}\frac{h}{x_0}x\,dx+\int_{x_0}^{x_1}h\,dx+\int_{x_1}^{a}\frac{h(x-a)}{x_1-a}dx$.

3) En utilisant le fait que $AD = x_1 - x_0 = b$ et BC = a, vérifier que
$\mathcal{A}=\int_0^{x_0}\frac{h}{x_0}x\,dx+\int_{x_0}^{x_1}h\,dx+\int_{x_1}^{a}\frac{h(x-a)}{x_1-a}dx=\frac{a+b}{2}h$.

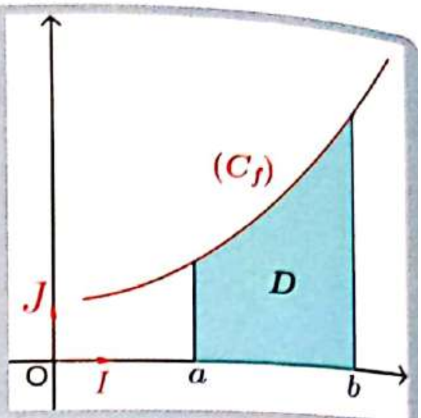
4) Comparer $\mathcal{A}$ à l'aire du trapèze ABCD.

5) Vérifier que si $x_1 = x_0$, alors on obtient un triangle ABC et son aire est $\frac{ah}{2}$.

Retenir

- Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;I,J)$, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est ***l'aire du domaine limité*** par les droites d'équations respectives $x=a$ et $x=b$, la courbe (C_f) et l'axe des abscisses.

- L'unité d'aire est l'aire du rectangle de dimensions respectives OI et OJ.



REMARQUE

1) Soit M un réel positif tel que, pour tout réel x de l'intervalle I on a : $|f(x)| \leq M$. Soit a,b deux réels de I, alors $|f(x)| \leq M$.

D'après l'inégalité de la moyenne, on a : $-M(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.

D'où $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M(b-a)$.

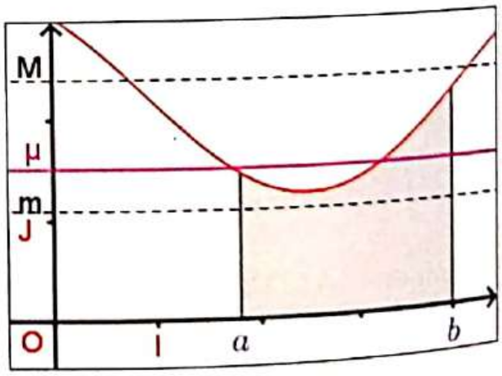
2) L'inégalité de la moyenne appliquée à f sur l'intervalle $[a;b]$ n'est rien d'autre que l'inégalité des accroissements finis appliquée à une primitive de f sur $[a;b]$.

3) $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$ signifie que $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$.

La valeur $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ est ***la valeur moyenne*** de f sur l'intervalle $[a;b]$.

Interprétation graphique de μ

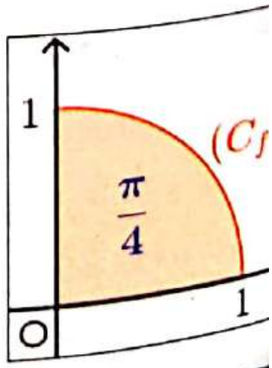
Graphiquement lorsque m est positif, l'aire du domaine plan délimité par les droites d'équations $x = a$, $x = b$, l'axe de abscisses et la courbe représentative de f est comprise entre les aires des rectangles de même base $b-a$ et de hauteurs respectives m et M.



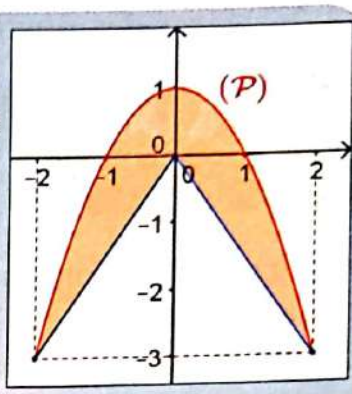
EXEMPLE

- $\int_0^1 x^2\,dx$ représente l'aire du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$, l'axe des abscisses et la courbe de la fonction $x \mapsto x^2$.
- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
La courbe de la fonction f est un quart de cercle de centre O et de rayon 1.

D'où $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{\pi}{4}u.a$



Exercice Résolu



Le plan muni est d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j}),(\mathcal{P})$ est la parabole d'équation $y=-x^2+1$. Unité graphique : $2\,cm$.
Calculer l'aire du domaine colorié.

Solution

Les deux segments représentés sur la figure coupent la parabole aux points d'abscisses respectives $-2\,et\,2$ et ont l'origine comme extrémité commune.

Notons (Δ) celui dont une extrémité est le point de coordonnées $(-2\,;-3)$.

L'équation de (Δ) est sous la forme : $\begin{cases} y=ax \\ x\in[-2\,;0] \end{cases}$

$-3=-2a$; donc $a=\dfrac{3}{2}$ et (Δ) est la droite d'équation $y=\dfrac{3}{2}x$ avec $x\in[-2\,;0]$.

On démontre de même que l'autre segment (Δ') a pour équation $y=-\dfrac{3}{2}x$ avec $x\in[0\,;2]$.

Soit (D) l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x\,;y)$ tels que $\begin{cases} 0\le x\le 2 \\ -\dfrac{3}{2}x\le y\le -x^2+1 \end{cases}$ et

(D') l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x\,;y)$ tels que $\begin{cases} -2\le x\le 0 \\ \dfrac{3}{2}x\le y\le -x^2+1 \end{cases}$.

Le domaine colorié est la réunion des deux domaines (D) et (D'). (D) et (D') sont symétriques par rapport à $(O,\vec{j})$ et par conséquent ont la même aire. D'où l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachurée est :

$\mathcal{A}=2\int_0^2\left[\left(-x^2+1\right)-\left(-\dfrac{3}{2}x\right)\right]dx\times u.a$ où $u.a$ représente l'unité d'aire.

$$\mathcal{A}=2\times 4cm^2\times\int_0^2\left(-x^2+1+\frac{3}{2}x\right)dx=8\left[-\frac{1}{3}x^3+x+\frac{3}{4}x^2\right]_0^2 cm^2=8\times\left[-\frac{8}{3}+2+\frac{3\times 4}{4}-0\right]cm^2=\underline{\underline{\frac{56}{3}cm^2}}$$

S'exercer

2.a Déterminer la valeur de l'intégrale $\int_0^1\sqrt{4-x^2}dx$ en utilisant la courbe d'équation $y=\sqrt{4-x^2}$.

2.b À partir des considérations graphiques, déterminer l'aire du domaine plan délimité par les courbes d'équations respectives $y=\sqrt{1-x^2}$ et $y=x$ sur l'intervalle $[0;1]$.

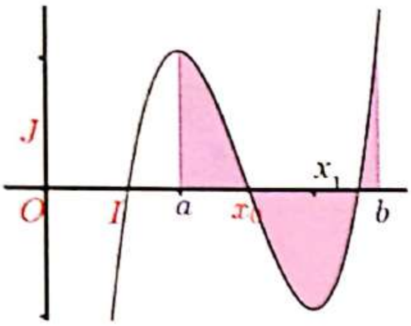
2.c i) Représenter sur l'intervalle $[0;1]$ la courbe de la fonction $f:x\mapsto|2x-1|$.

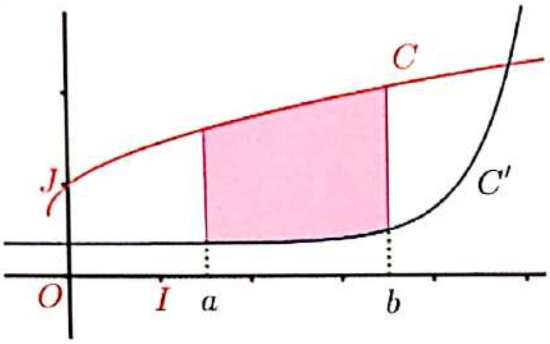
ii) Déterminer l'aire de la partie du plan définie par la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0;1]$ est l'axe des abscisses.

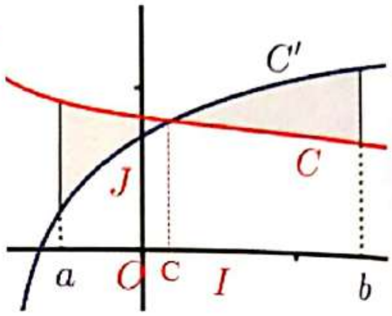
2.1.2 Aires des portions du plan délimitées par des courbes simples.

Prendre un bon départ

f et g sont deux fonctions définies continues sur $[a;b]$.On connait leurs représentations graphiques sur $[a;b]$ notées C et C'.
Dans chacun des cas suivants, donner à l'aide d'une intégrale, l'expression de l'aire du domaine hachurée







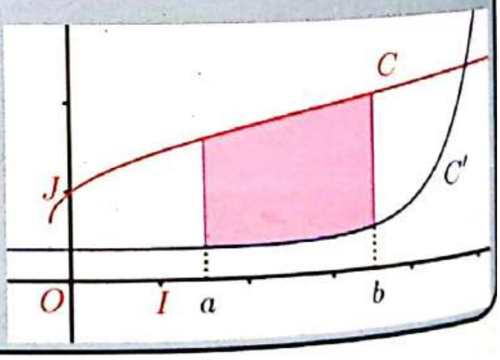
Retenir

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

1) f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$.

- Si f est une fonction négative sur $[a;b]$, alors l'aire de la portion du plan délimitée par les droites d'équations respectives $x=a, x=b$ la courbe représentative de la fonction f est $\left(\int_a^b -f(x)dx\right)u.a$.

- f et g deux fonctions définies continues sur $[a;b]$.
  Si $f \geq g$ sur $[a;b]$ alors l'aire du domaine plan délimité par les droites d'équations $x=a, x=b$ les courbes représentatives des fonctions f et g est : $\left[\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right]u.a$



EXEMPLE

$A(a)$ est l'aire de la partie du plan contenant les points $M(x;y)$ tels que $0 \leq x \leq a$ et $2x^2 \leq y \leq 2x^2 + e^{-x}$ où a est un nombre réel positif donné.

$$A(a)=\int_0^a \left[\left(2x^2+e^{-x}\right)-2x^2\right]dx.ua=\left(\int_0^a e^{-x}dx\right).ua$$

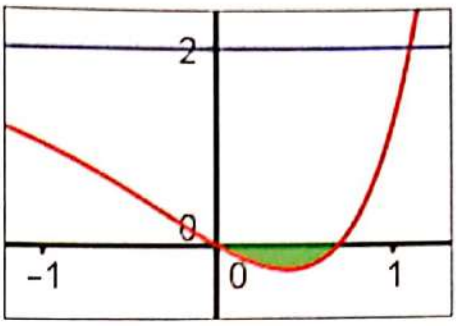
$$A(a)=\left[-e^{-x}\right]_0^a u.a=\left(1-e^{-a}\right)ua \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} A(a)=1.ua$$

x	$-\infty$		$ln\left(\frac{3}{2}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

- $f : x \mapsto e^{2x} - 3e^x + 2$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
$f'(x) = 2e^{2x} - 3e^x = e^x\left(2e^x - 3\right)$.

$f'(x) = 0$ équivaut à $x = ln\frac{3}{2}$. Le tableau des variations de f est donné ci-contre.



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2 \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\left(e^x - 3\right) + 2\right) = +\infty$

$f(x) = 0$ *équivaut* à $e^x = 1\,ou\; e^x = 2$ D'où $x = 0\;$ *où* $x = ln2$.

Unité d'axe $2cm$.

Calculons l'aire du domaine délimité par les droites d'équations $x = 0$, $x = \ln 2$, la courbe de f et l'axe des abscisses

$$A = -\int_0^{\ln 2} f(x)\,dx \times u.a = -\int_0^{\ln 2}\left(e^{2x} - 3e^x + 2\right)dx \times 4cm^2$$

$$= -\left[\frac{1}{2}e^{2x} - 3e^x + 2x\right]_0^{ln2} \times 4cm^2 = -\left[\left(\frac{1}{2}\times 4 - 3\times 2 + 2ln2\right) - \left(\frac{1}{2} - 3\right)\right]4cm^2$$

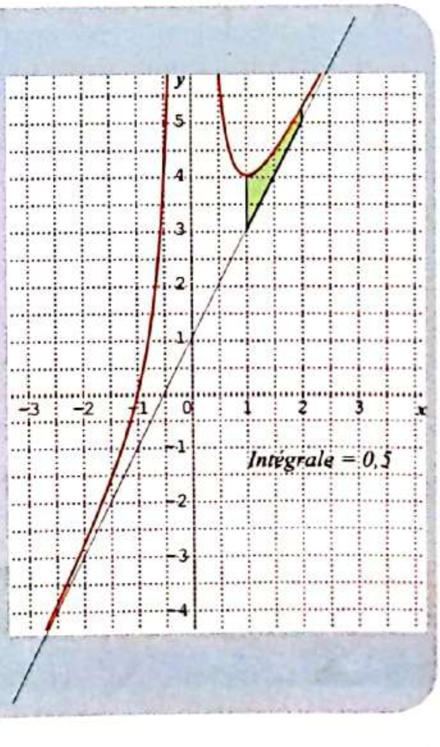
$$= -\left[-4 + 2ln2 + 5/2\right]4cm^2 \quad = \left(6 - 8ln2\right)cm^2.$$

Exercice Résolu :

Soit la fonction $f\ :\ x \mapsto 2x + 1 + \dfrac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Déterminer l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C) de f, son asymptote oblique et les droites d'équations $x = 1\,et\,x = 2$.

Solution :



La courbe de f dans un repère orthonormé est donné ci –contre.

L'aire demandée est celle de la partie hachurée en vert.

Notons A cette aire.

$$A = \int_1^2\left[f(x) - (2x+1)\right]dx\,ua.$$

$$A = \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx\,u.a = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = \left[-\frac{1}{2} + 1\right]ua$$

$A = 0,5$ ***ua***

S'exercer

2.a $f : x \mapsto \dfrac{x^3 - x + 4}{x+1}$ et $g : x \mapsto x^2 - x$

a) Montrer que sur l'intervalle $[0;3], f \geq g$.

b) Déterminer les réels $a, b\, et\, c$ tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

c) Déduire des questions précédentes l'aire du domaine délimité par les courbes des fonctions $f\, et\, g$ sur l'intervalle $[0;3]$.

2.b (P) désigne la parabole d'équation $y = x^2 - 4x + 3$,

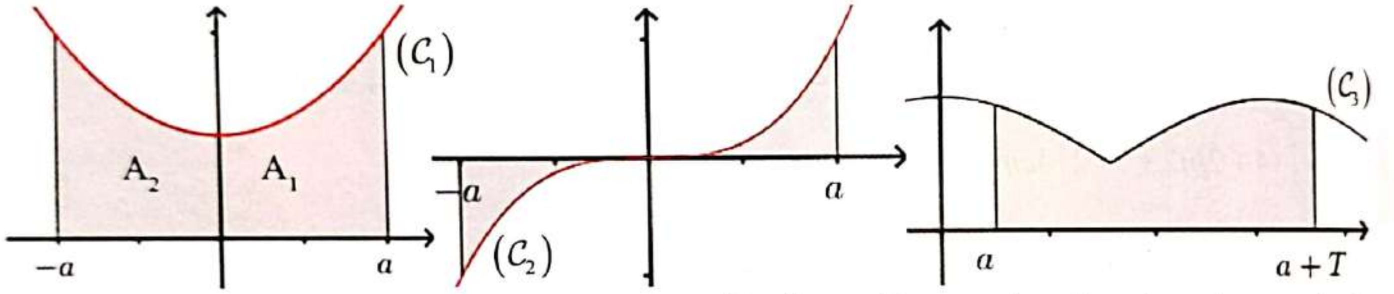
(D) est la droite d'équation $y = \frac{4}{3}x$ (unité d'axe $2cm$)

a) Représenter (D) et (P) dans un repère orthonormal.

b) Déterminer, $en\, cm^2$, l'aire du domaine plan délimité par (P), les droites d'équations respectives $x = 0\, et\, x = 4$, et l'axe des abscisses.

c) Déterminer, $en\, cm^2$, l'aire du domaine plan délimité par (P) et (D).

2.c On considère les courbes $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$ des fonctions $f_1,\ f_2\ et\ f_3$ ci-dessous.



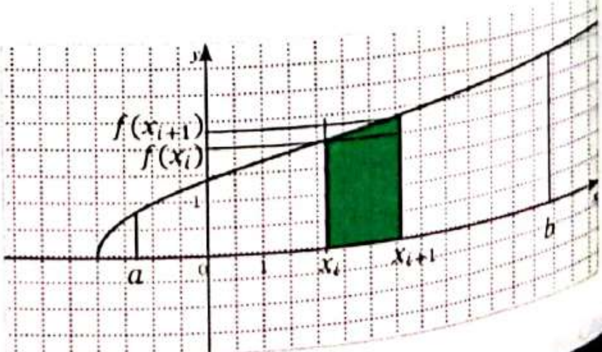
- On admet que f_1 est paire et positive sur $[0;a]$. Justifier que les aires A_1 et A_2 sont égales, et déduire que $\int_{-a}^{a} f_1(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f_1(x)\,dx$
- On admet que f_2 est impaire sur $[-a,a]$. Justifier que $A_1 - A_2 = 0$ et donc $\int_{-a}^{a} f_2(x)\,dx = 0$
- On admet que f_3 est périodique de période T. Justifier que : $\int_{a}^{a+T} f_3(x)\,dx = \int_{0}^{T} f_3(x)\,dx$.

2.2. VALEUR APPROCHÉE D'UNE INTÉGRALE PAR LA MÉTHODE DES RECTANGLES

Prendre un bon départ

1) Soit f une fonction continue croissante sur $[a;b]$ n'ayant pas de primitive connue sur $[a;b]$.

Désignons par Δ l'ensemble des points $M(x;y)$ dans un repère orthogonal vérifiant à $\begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$.



Notons $A(\Delta)=\int_a^b f(x)\,dx$.

Soit n un entier naturel non nul. On subdivise l'intervalle $[a;b]$ en n intervalles $[x_i;x_i\ ]$ de même amplitude $\frac{b-a}{n}$.

On suppose $(a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b)$.

a) Soit $x\in[x_i;x_{i+1}]$. Encadrer $f(x)$ et en déduire que $(x_{i+1}-x_i)f(x_i)\le\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx\le(x_{i+1}-x_i)f(x_{i+1})$.

b) On note E_i du domaine plan représenté en vert.
Donner les dimensions de chacun des rectangles dont les aires encadrent l'aire de E_i.

c) En déduire que $\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right)\le\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx\le\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\right)$. Puis encadrer $\int_a^b f(x)\,dx$.

2) Donner un encadrement de $\int_a^b f(x)\,dx$ dans le cas où f est décroissante.

Retenir

Soient f une fonction continue et monotone sur $[a;b]$ et n un entier naturel non nul. On subdivise l'intervalle $[a;b]$ en n intervalles $[x_i;x_{i+1}]$ de même amplitude $\frac{b-a}{n}$ tels que $(a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b)$.

- Si f est croissante sur $[a;b]$, alors $\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right)\le\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx\le\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\right)$.
- Si f est décroissante sur $[a;b]$, alors $\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\right)\le\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx\le\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right)$.

REMARQUE

- $\left|\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right)-\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\right)\right|<\varepsilon$.

Quand n croit, $\frac{b-a}{n}\left|f(b)-f(a)\right|$ décroît. De plus $\lim_{x\to+\infty}\frac{b-a}{n}|f(b)-f(a)|=0$.

Ainsi pour un réel ε strictement positif, pour avoir l'inégalité $|-|<\varepsilon$, il suffit que $\frac{b-a}{n}\left|f(b)-f(a)\right|<\varepsilon$. Donc choisir un entier naturel n tel que $n>\frac{b-a}{\varepsilon}\left|f(b)-f(a)\right|$.

Cette méthode de calcul est appelée méthode des rectangles. Elle permet de donner quelle que soit la précision ε, une valeur approchée à ε près de $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right|$ pour une fonction f monotone sur $[a;b]$.

Le réel $\frac{1}{2}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})+\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\right]$ est une valeur approchée de $\int_a^b f(t)\,dt$ à $\frac{b-a}{2n}\left|f(b)-f(a)\right|$ près.

- Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{n}\left[f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + 2\frac{b-a}{n}\right) + \ldots + f\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right)\right].$$

La suite (u_n) converge vers la valeur moyenne $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$ de f sur $[a;b]$.

EXEMPLE

- Déterminons par la méthode des rectangles, une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^6}}dx$ à 10^{-1} près.

Considérons la fonction : $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^6}}$.

$f'(x) = \frac{-6x^5}{2\sqrt{1+x^6}} = -\frac{3x^5}{\sqrt{1+x^6}}$. Pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x) \leq 0$. La fonction f est donc décroissante sur $]0;+\infty[$, donc sur $[0;2]$.

Choisissons $a = 0$ et $b = 2$.

Cherchons un entier naturel n tel que un entier naturel n tel que $n > \frac{2}{2\times 10^{-1}}|f(2) - f(0)|$.

$n > 10\left|1 - \frac{1}{\sqrt{1+2^6}}\right|$; soit $n > 9,84$. On peut donc choisir $n = 10$.

On divise $[0;2]$ par des intervalles d'amplitude 0,2.

Nous avons $x_0 = 0; x_1 = 0,2$; $x_2 = 0,4$;…; $x_9 = 1,8$; $x_{10} = 2$.

Posons $s_{10} = 0,2(f(0) + f(0,2) + f(0,4) + \ldots + f(1,8))$ et

$S_{10} = 0,2(f(0,2) + f(0,4) + f(0,6) + \ldots + f(1,8) + f(2))$.

f étant décroissante on a $S_{10} < \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^6}}dx < s_{10}$; soit $1,189 < \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^6}}dx < 1,365$.

Une valeur approchée de $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^6}}dx$ à 10^{-1} près est $\frac{1,189 + 1,365}{2} = 1,28$.

- Déterminons une valeur approchée de $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$. En subdivisant $[0;1]$ en intervalles de même amplitude $S_5 = \frac{1}{5}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{5}\right) + \ldots + f\left(\frac{4}{5}\right)\right)$ où $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

On obtient par calcul $S_5 \cong 0,83$.

- On pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sin\left(\frac{i\pi}{n}\right)$. Étudions la convergence de la suite (S_n).

  f est la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = sin(\pi x)$ subdivisons l'intervalle $[0;1]$ en n intervalles de même amplitude $\frac{1}{n}$.

  $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i\pi}{n}\right)$.

(S_n) converge vers $\int_0^1 \sin(\pi x)dx = \frac{-1}{\pi}[cos\pi x]_0^1 = \frac{2}{\pi}$. (S_n) converge vers $\frac{2}{\pi}$.

• On donne $I = \int_{3/5}^{4/5} \sqrt{1-x^2}dx$

On subdivise l'intervalle $\left[\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right]$ en n intervalles de même amplitude. Déterminons par la méthode des rectangles le nombre d'intervalles nécessaires pour obtenir un encadrement d'amplitude inférieure à 10^{-3}.

Soit $f: x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $\left[\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right]$.

f est définie dérivable sur $]-1;1[$ et $\left[\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right]$ est contenu dans cet intervalle donc f est dérivable sur $\left[\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right]$.

On a : $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$; f' est dérivable sur $\left[\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right]$;

$f''(x) = \frac{-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ et $f'' \leq 0$ sur $\left[\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right]$, donc f' décroît sur l'intervalle $\left[\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right]$.

$f'\left(\left[\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right]\right) = \left[f'\left(\frac{4}{5}\right);f'\left(\frac{3}{5}\right)\right] = \left[-\frac{4}{5};\frac{-3}{4}\right]$. Donc $|f'(x)| \leq \frac{4}{5}$.

L'erreur commise est de $\frac{4}{5\times 2n} \times \left(\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{125n}$.

On a $\frac{2}{125n} < 10^{-3}$ D'où $n > \frac{2000}{125}$ c'est à-dire $n > 16$. On prend $n = 17$.

S'exercer

2.e on donne $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1+x^2}dx$.

En subdivisant $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ en 5 intervalles de même amplitude, déterminer, un encadrement de I .

2.f i) À l'aide de la méthode des rectangles, justifier que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leq \int_1^2 \frac{1}{t}dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$.

ii) Déduire de l'inégalité précédente que $0 \leq \int_1^2 \frac{1}{t}dt - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n+k)}$.

iii) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

S'ENTRAÎNER

TECHNIQUE DU CALCUL INTÉGRAL « INTÉGRALE ET PRIMITIVE »

Dans les exercices de 1 à 10 calculer les intégrales.

1.

a) $\int_0^1 e^{1-t}dt$; b) $\int_1^{-1}\left(e^{-2t}-e^{-t}\right)dt$.

2.

a) $\int_0^1 \frac{e^u}{2+e^u}du$; b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^1 e^{-2t+3}dt$.

3.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxcosxdx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x(\cos x)^5\,dx$.

4.

a) $\int_1^e xcosx^2dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tanx}{cosx}dx$.

5.

a) $\int_1^e \frac{lnx}{x}dx$; b) $\int_1^e \frac{ln^2x}{x}dx$.

6.

a) $\int_1^2 \frac{x-2}{x^2-4x+1}dx$; b) $\int_{-1}^1 \frac{x}{\left(x^2-4\right)^2}dx$.

7.

a) $\int_1^3\left(t+1-\frac{1}{1+t}\right)dt$; b) $\int_{-1}^0 \frac{x}{x-1}dx$.

8.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(3x-sin\frac{x}{2}+2cos2x\right)dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^2 2xdx$.

9.

a) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}(cos2t-sin3t+tan^2 5t)dt$; b) $\int_0^1(2^x-3^x)dx$.

10.

a) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$; b) $\int_2^{\pi}(1+cost+cos^2t)dt$.

INTÉGRATIONS PAR PARTIES.

Pour les exercices de 11 à 14 calculer au moyen d'une intégration par parties

11.

a) $\int_0^{\pi} xcosxdx$; b) $\int_0^{\pi} xsinxdx$.

12.

a) $\int_0^1 te^{2t}dt$; b) $\int_0^1 (t+1)e^{2t}dt$.

13.

a) $\int_1^e lntdt$; b) $\int_1^e tlntdt$.

14.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{cos^2x}dx$; b) $\int_1^e x^2lnxdx$.

Pour les exercices de 15 à 18 calculer en intégrant deux fois par parties

15.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2sinxdx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2cosxdx$.

16.

a) $\int_0^x (1+t)^2 e^{-t}dt$; b) $\int_0^x t^2e^{1-t}dt$.

17.

a) $\int_0^x e^t \sin t\,dt$; b) $\int_0^x e^t \cos t\,dt$.

18.

On donne $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx$.

1. calculer I + J et I – J à l'aide d'une intégration par parties.
2. en déduire I et J.

19.

On donne $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cox^4 x\,dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx$;

$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^2 x\,dx$.

1. Calculer I – J.
2. Calculer I + J + K.
3. En déduire la valeur de I + J + 3K, puis celles de I, J et K.

20.

Calculer au moyen de la relation de Chasles

a) $\int_0^2 \left(1-|x-1|\right)^3 dx$;

b) $\int_0^5 \left(x|2x-5|-x|x-3|\right)dx$.

INTÉGRALES DES FONCTIONS PAIRES, IMPAIRES OU PÉRIODIQUES.

21.

Justifier les égalités suivantes :

1) $\int_{-\pi}^{\pi}(x-\sin x)dx = 0$; 2) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan x - x^3\right)dx = 0$;

3) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x\,dx$;

4) $\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,dx = 2\int_0^{\pi} |\sin x|\,dx$.

22.

A l'aide d'un changement des variables, démontrer que :

a) Si f est une fonction continue et paire sur un intervalle $[-a; a]$, alors

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^{a} f(t)\,dt$$

b) Si f est une fonction continue et impaire sur un intervalle $[-a, a]$ alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$

c) Si f est une fonction continue et périodique de période P alors $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^{T} f(t)\,dt$.

23.

On pose $I = \int_7^9 \dfrac{du}{5-6u+u^2}$.

a) Vérifier que $u^2 - 6u + 5 = (u-3)^2 - 4$.

b) On pose $t = u - 3$; justifier que $I = \int_4^6 \dfrac{dt}{t^2-4}$

c) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\frac{1}{t^2-4} = \frac{a}{t-2} + \frac{b}{t+2} .$$

d) Calculer I.

INTÉGRALES DES FONCTIONS RATIONNELLES ET DES POLYNÔMES TRIGONOMÉTRIQUES

24.

1) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \neq -3$, $\dfrac{x^2+2x-1}{x+3} = ax + b + \dfrac{c}{x+3}$

Calculer alors $\int_{-2}^{2} \dfrac{x^2+2x-1}{x+3}dx$

2) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \neq -2$: $\dfrac{x}{(x+2)^2} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{(x+2)^2}$.

Calculer $\int_{-1}^{0} \dfrac{x}{(x+2)^2}dx$.

3) Déterminer trois réels $a, b\, et\, c$ tels que

pour tout réel
$x \neq 0$ et $x \neq -1$ $\frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}$

Calculer $\int_1^2 \frac{dx}{x(1+x)^2}$.

25.

Calculer chacune des intégrales suivantes après avoir linéarisé la fonction sous intégrale :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 3x dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxcos3xdx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cosxcos3xcos4xdx$; d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxsin3xsin4xdx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3xdx$; f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3xdx$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^5xdx$; h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^5xdx$

INTÉGRALES ET INÉGALITES

26.

Trouver un encadrement pour chacune des intégrales suivantes après avoir déterminé les extrémums de la fonction sans intégrales sur l'intervalle considéré.

$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{cost} dt$; $J = \int_e^{2e} \frac{1}{\ln t} dt$.

27.

On admet que $sinx \leq x$ pour $x \geq 0$. Montrer par plusieurs intégrations successives les inégalités suivantes :

a) $1 - \frac{x^2}{2} \leq cosx \leq 1$; b) $x - \frac{x^3}{6} \leq sinx \leq x$;

c) $1 - \frac{x^2}{2} \leq cosx \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

28.

On donne $I = \int_0^1 \ln(1+x) dx$

a) Établir que pour tout $t \in [0;1]$, $\frac{t^2}{1+t} = 1 - t + \frac{1}{1+t}$ et calculer $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt$.

b) Montrer que pour tout $t \in [0;1]$, $\frac{t^2}{2} \leq \frac{t^2}{1+t} \leq t^2$; en déduire un encadrement de $ln2$.

29.

Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout réel x positif, on a :

$e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$.

30.

1) Calculer $I = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$ au moyen de deux intégrations par parties.

2) On pose $J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2e^{-x}} dx$.

a) Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0;1]$, $0 \leq x^2 e^{-x} \leq 1$.

b) Vérifier que pour tout u de l'intervalle $[0;1]$, $1 - u \leq \frac{1}{1+u} \leq 1 - \frac{u}{2}$.

c) En-déduire que $1 - I \leq J \leq 1 - \frac{I}{2}$ et donner un encadrement de J à 10^{-1} près.

31.

p est un entier naturel non nul, (U_n) est la suite définie par : $U_n = 1^p + 2^p + \ldots + n^p$.

1) Montrer que pour $k \geq 1$, $\int_{k-1}^{k} t^p dt \leq k^p \leq \int_k^{k+1} t^p dt$.

2) En déduire que $\int_0^n t^p dt \leq U_n \leq \int_1^{n+1} t^p dt$.

3) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \frac{U_n}{n^{p+1}}$.

32.

Soit α un réel strictement positif.

1) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^\alpha}$.

2) On pose $S_n = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$. Montrer que

(S_n) est croissante et que $\int_1^{n+1}\frac{dx}{x^\alpha} \le S_n \le \int_1^{n}\frac{dx}{x^\alpha}$, pour $n \ge 1$

3) En déduire que pour $\alpha \ge 1$, la suite (S_n) converge et pour $0 \le \alpha \le 1$, la limite de S_n en $+\infty$ est $+\infty$

FONCTIONS ET SUITES DÉFINIES À L'AIDE DES INTÉGRALES

33.

(U_n) est une suite définie par $U_n = \int_0^n \frac{dt}{1+t^3}$

1) Préciser le sens de variation de la suite (U_n)

2) Démontrer que $U_1 \le 1$ et $\int_1^n \frac{dt}{1+t^3} \le \int_1^n \frac{dt}{t^3}$

3) En déduire que (U_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

34.

(U_n) est une suite définie par : $U_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^x}dx$

1) Établir que pour tout x de l'intervalle $[0,1]$, $\frac{e^{nx}}{1+e} \le \frac{e^{nx}}{e^x+1} \le \frac{e^{nx}}{2}$

2) Déterminer un encadrement de U_n

3) En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} \text{Un}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\text{Un}}{e^n}$

35.

(U_n) est la suite définie par : $U_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$

1) Montrer que (U_n) est croissante et majorée par 1.

2) Établir que $1-U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx$

3) Déduire des questions précédentes que : $0 \le 1-U_n \le \frac{1}{n+1}$.

En déduire la limite de la suite (U_n).

36.

Soit (I_n) la suite définie par :

$I_n = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)^n}dx$; $n \ge 2$

1) Montrer que (I_n) est décroissante et qu'elle converge.

2) Établir l'encadrement :

$\frac{1}{n-1}(1-\frac{1}{2^{n-1}}) \le I_n \le \frac{e}{n-1}(1-\frac{1}{2^{n-1}})$.

3) Soit f_n la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = \frac{e^x}{(1+x)^n}$.

a) Exprimer f_n' en fonction de $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$

b) En déduire une relation entre I_{n+1} et I_n

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_{n+1}) = 1$.

d) En déduire que la suite de terme général nI_n converge vers une limite que l'on précisera.

37.

Soit $\text{Un} = \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n e^x dx$; $n \ge 1$

1) À l'aide d'une intégration par parties calculer U_1 et établir que $U_n = \frac{e}{n!} - U_{n-1}$

2) En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence que l'on a :

$$U_n = (-1)^n\left[e\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{2}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\right)-1\right]$$

3) Montrer que : $0 \le U_n \le \frac{e}{(n+1)!}$.

4) En déduire que la suite (S_n) de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ converge vers $\frac{1}{e}$.

38.

Soit (I_n) une suite définie par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}dx$.

a) Calculer I_0.

b) Pour n entier naturel, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n, à l'aide d'une intégration par parties.

c) En déduire la valeur de I_4.

d) Montrer que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{e(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{n+1}$.

e) Montrer que (I_n) est convergente, puis calculer sa limite.

39.

Soit n un entier naturel, on pose :

$$I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx.$$

1) Calculer I_n à l'aide de deux intégrations par parties succesives.
2) Montrer que la suite (I_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

40.

Pour tout entier non nul n, on définit :

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx.$$

1) a. Justifier l'existence de cette intégrale .
   b) Calculer I_1.
   c) Démontrer que pour tout entier naturel $n > 2, I_{n+1} = e - nI_n$.
2) L'entier naturel non nul n, on note F_n une primitive de la fonction $x \to (\ln x)^n$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   a) Démontrer que la fonction h définie par $H(x) = F_n(e^x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $H'(x)$.
   b) Montrer que
   $$I_n = F_n(e) - F_n(1) = \int_0^1 F_n(t)\, dt.$$
   c) En déduire que $0 \le I_n \le \dfrac{e}{n+1}$.
   d) Montrer alors que la suite I est convergente, et préciser sa limite.

41.

F est la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

1) Préciser le sens de variation de F.
2) Démontrer que pour tout réel $t \ge 1$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}} \le \dfrac{1}{t^2}$ et en déduire que pour tout réel $x \ge 1, \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \le 1$
3) Démontrer que pour tout réel $x \ge 0$, on a : $F(x) \le F(1) + 1$. En déduire que F admet une limite l en $+\infty$
4) Dresser le tableau de variation de F. Donner l'allure générale de la courbe C de F en prenant $l = 1{,}8$

42.

F est la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$

1) Déterminer le sens de variation de F sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
2) Démontrer que pour tout $t \ge 1$, on a $e^{-t^2} \le e^{-1}$ et en déduire que pour tout nombre réel $x \ge 1$, $\int e \quad dt \le -$.
3) Démontrer que pour tout nombre réel positif x, on a : $F(x) \le F(1) + \dfrac{1}{e}$.
   En déduire que F admet une limite finie l.
4) Dresser le tableau de variation de F et donner l'allure générale de la courbe de F. Prendre $l = 0.89$.

43.

F est la fonction défini sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t+t^2}}$.

1) Démontrer que pour tout réel $t \ge 0$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{1+t+t^2}} \ge \dfrac{1}{1+t}$ et en déduire que pour tout réel x, positif, $F(x) \ge \ln(1+x)$
2) a) Calculer la limite de F en $+\infty$.
   b) Étudier la variation de F et dresser le tableau de variation.
3) Démontrer que pour tout réel t, positif on a $\dfrac{1}{\sqrt{1+t+t^2}} \le 1$ et en déduire que pour tout réel x on a $F(x) \le x$.
4) a) Démontrer que pour tout réel t de l'intervalle $[1,+\infty[$ on a $\dfrac{1}{\sqrt{1+t+t^2}} \le \dfrac{1}{t}$

b) En déduire que pour tout réel $x \geq 1$, on a $F(x) \leq \int_0^1 f(t)\,dt + \ln x$.

c) Démontrer que la courbe C de F admet une branche parabolique de direction (OI).

4) Tracer la droite $(D): y = x$ et donner l'allure générale de (C).

44

On considère la fonction F de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$.

1) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que F est une fonction impaire (on pourra utiliser un changement de variable).
3) a)Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa fonction dérivée.

b) Étudier le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$

4) On se propose dans cette question d'étudier le comportement de F au voisinage de $+\infty$.

a) Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$.
Étudier le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$.

b) Soit x un réel strictement positif.
Utiliser la question 4)a) pour montrer que, pour tout t de $[x;2x]$, on a $0 \leq f(t) \leq f(x)$.
Déduire que $0 \leq F(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$.

c) Donner la limite de F en $+\infty$.

5) Avec la méthode des rectangles, déterminer une valeur approchée du réel $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ à 10^{-1} près.

6) Donner l'allure de la courbe représentative de F dans un repère orthonormé.

CALCULS D'AIRES.

45.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J)

1) Étudier et représenter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)e^{-2x}$. Unité d'axe 2cm
2) Soit a un réel plus grand que -1
   a) Calculer en fonction de a l'aire $A(a)$ du domaine délimité par les droites d'équations $x = 0, x = a$, l'axe des abscisses et la courbe $(\mathcal{C})$ de f.
   b) Déterminer la limite de $A(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

46.

1) Étudier su $]0,+\infty[$ la fonction $f : x \to \frac{1}{x}e^{-x}$ et dresser son tableau de variations.
2) a) Trouver une équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ de f au point A d'abscisse 1 notée (T).
   b) T coupe l'axe des abscisses au point C. Préciser l'abscisse de C.
3) Construire la courbe $(\mathcal{C})$.
4) Calculer l'aire du domaine (D) délimité par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.
5) On désigne par B le point $(\mathcal{C})$ d'abscisse 3. Calculer l'aire (D') ; (D') étant le domaine délimité par (C) et les droites (AC) et (BC).

47.

1) Démontrer que la courbe (T) de la fonction $x \mapsto e^x$ rencontre la droite D : $y = 3x$ en deux pont A et B. d'abscisses respectives α et β ($\alpha < \beta$).
2) Calculer l'aire du domaine délimité par les droites d'équation $x = \alpha$, $x = \beta$, la droite (D) et la courbe (T) et montrer que cette aire est égale à $-(\beta - \alpha)(\beta + \alpha - \ )$.

48.

1) Étudier et représenter en repère orthonormé la fonction $f : x \to x\ln x$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Unité sur les axes : 5cm.
2) Soit $A(\alpha)$ l'aire du domaine délimité par la courbe (C) de f, l'axe des abscisses et les droites $x=\alpha$ et $x=1$.
3) Déterminer la limite de $A(\alpha)$ $(0<\alpha<1)$ quand α tend vers 0.

CALCULS APPROCHÉS

49.

Soit f une fonction continue et croissante sur l'intervalle $[0,1]$. On pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(k)$ et $S'_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k)$.

1) Interpréter graphiquement S_n *et* S_n' en termes de rectangles.
2) Justifier que $S_n \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq S'_n$.
3) Montrer que pour tout entier naturel non nul, l'amplitude de cet encadrement est $\frac{1}{n}\left(f(1)-f(0)\right)$.
4) ***Applications***. En subdivisant l'intervalle $[0,1]$ en cinq intervalles de même amplitude, donner un encadrement de $\int_0^1 e^{t^2}dt$ et préciser l'amplitude de cet encadrement.

50.

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$.

1) Montrer que f est décroissante sur l'intervalle $[0,1]$.
2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $1 \leq k \leq n-1$,
$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right).$$
3) Pour tout $n \in N^*$, on pose : $U_n = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$. Montrer que
$$U_n - \frac{f(0)}{n} \leq \int_0^1 f(t)\,dt \leq U_n - f\left(\frac{1}{n}\right)$$
4) Déterminer un encadrement de pour et déterminer un encadrement de à 10^{-2} près.

51.

En utilisant la méthode des rectangles, calculer dans chacun des cas la limite de la suite de terme général donné :

a) $u_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$ b) $u_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

52.

f est la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par
$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln x$.

1) Étudier les variations de f et tracer sa courbe. Unité graphique = 5 cm.
2) λ désigne un réel strictement positif. Calculer au moyen d'une intégration par parties $I(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)\,dx$. Déterminer $\lim_{\lambda\to 0} I(\lambda)$
3) Pour tout $n \geq 2$ on pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)$
   a) Montrer que pour tout entier naturel p, tel que $1 \leq p \leq n-1$ on a :
   $$\frac{1}{n}f\left(\frac{p+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x)\,dx \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{p}{n}\right)$$
   b) Déduire que
   $S_n - \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$. Puisque
   $I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$
   c) En déduire que la limite de S_n en $+\infty$ est $\frac{1}{3}$.

Chapitre 10

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

LEÇON 1 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

1 GÉNÉRALITÉS ET EXEMPLES.

2 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES : $y' = ay$.

3 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES : $ay'' + by' + cy = 0$ OÙ a EST UN RÉEL NON NUL, b ET c DEUX RÉELS

3.1 Cas où $b^2 - 4ac = 0$.

3.2 Cas où $b^2 - 4ac > 0$.

3.3 Cas où $b^2 - 4ac < 0$.

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

> ➢ Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre et une équation linéaire du second ordre à coeficients constants.

1. GÉNÉRALITÉS ET EXEMPLES.

Prendre un bon départ

Situation 1 : Dans une culture bactérienne, le nombre de bactéries passe de 400 à 1000 en trois heures,et à tout instant, le taux de croissance est proportionnel au nombre de bactéries présentes.

Situation 2 :Un solide de masse m est accroché au bout d'un ressort vertical , de constante de raideur k et fixé à un point.Ce solide assimilé à un point matériel est tiré , puis relâché. Le solide effectue des mouvements verticaux.

Activité 1

1.a) Montrer que si N désigne le nombre de bactéries présentes dans la culture à l'instant t, alors il existe un réel k tel que $\frac{\Delta N}{\Delta t} = kN(t)$.

b) En déduire que , pour tout t, N vérifie $N'(t) = kN(t)$.

c) Si t est exprimé en heures, alors donner les valeurs de $N(0)$ et de $N(3)$.

2. Soit (D) la droite confondue à l'axe du ressort et passant par le centre de la masse. Soit O la position du solide au repos et I sa position au moment où il est lâché. On peut ainsi orienter la droite (D) par le repère (O,I). On pose $OI = a$.

a) En désignant par x l'abscisse du mobile dans le repère (O,I), à l'instant t, montrer que $mx'(t) + kx(t) = 0$.

b) Donner la valeur de $x(0)$.

c) Donner la valeur maximale et la valeur minimale de x .

Activité 2

a) Montrer que la fonction : $x \to ae^{2x}$ vérifie la relation (E_1) : $f'(x) = 2f(x)$.

b) Montrer que la fonction : $x \to lnx$ vérifie la relation $(E_2) : h''(x) + \frac{1}{x}h'(x) + xh(x) = xlnx$.

c) Déterminer le polynôme du second degré P tel que : $(E_3) : 3P''(x) - 2P'(x) + \frac{5}{4}P(x) = x^2 + 1$.

Retenir

- Une équation différentielle est une relation liant une fonction plusieurs fois dérivable et certaines de ses dérivées.
- Les expressions qui multiplient les différentes dérivées sont appelées coefficients de l'équation différentielle. Elles peuvent être constantes pour les unes et variables pour d'autres.
- Le plus grand ordre de dérivation de la fonction inconnue, ayant un coefficient non nul dans l'équation , est l'ordre de cette équation différentielle.

REMARQUE

- La notation $\frac{d^n f}{dx^n}$ est la dérivée d'ordre n de la fonction f considérée comme fonction de la variable x. Ainsi, $\frac{df}{dx}=f'; \frac{d^2 f}{dx^2}=f''; \frac{d^3 f}{dx^3}=f'''\dots\frac{d^n f}{dt^n}=f^{(n)}$. Si le plus souvent, on ne fait pas ressortir explicitement la variable de la fonction inconnue dans une équation différentielle, elle devrait se sous-entendre par rapport au problème à resoudre. La fonction cherchée peut être une loi horaire, et alors elle sera fonction du temps.
- La fonction inconnue peut-être invariablement notée $f;g;x;y;\alpha;\theta$, *etc.*
- Si l'équation s'écrit $\sum_{i=0}^{n} a_i f^{(i)}(x)=g(x)$, alors $g(x)$ est son second membre. Une équation différentielle dont le second membre est nul est dit sans second membre ou équation homogène.
- Si l'application $f \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i f^{(i)}$ est linéaire, alors l'équation différentielle (E) est dite linéaire et les coéfifficients a_i $(0 \le i \le n)$ sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- L'équation linéaire (E) est à coefficients constant si les a_i sont des fonctions constantes.

EXEMPLE

L'équation différentielle : $4y'+7y=x+2$ est du premier ordre, avec second membre et à coefficients constants.

L'équation différentielle : $mx'(t)+kx(t)=0$ est du second ordre , à coefficients constants et sans second membre.

L'équation différentielle : $x^2 f'''(x)+f''(x)-3f'(x)+f(x)=x$ est du troisième ordre , à coefficients variables et avec second membre.

Toutes les équations précédentes sont linéaires.Par contre, l'équation $f''(x)\times f'(x)+2f(x)=e^{-x}$ est une équation différentielle du second ordre, avec second membre et non linéaire.

S'exercer

a Montrer que la fonction $x \to 1-x^2e^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle $f''(x)+2f'(x)+f(x)=-2e^{-x}+1$.

b Soit l'équation différentielle (E) : $f''(x)-3f'(x)+2f(x)=8x^2-24x$.
Déterminer les trois nombres réels a,b,c pour que la fonction g définie par $g(x)=ax^2+bx+c$ soit une solution de (E).

c Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=(4-x)e^{\frac{1}{2}x}$ est une solution de l'équation différentielle $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$.
En déduire la forme générale des primitives de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

REMARQUE

- La notation $\frac{d^n f}{dx^n}$ est la dérivée d'ordre n de la fonction f considérée comme fonction de la variable x. Ainsi, $\frac{df}{dx} = f'; \frac{d^2 f}{dx^2} = f''; \frac{d^3 f}{dx^3} = f'''...\frac{d^n f}{dt^n} = f^{(n)}$. Si le plus souvent, on ne fait pas ressortir explicitement la variable de la fonction inconnue dans une équation différentielle, elle devrait se sous-entendre par rapport au problème à resoudre. La fonction cherchée peut être une loi horaire, et alors elle sera fonction du temps.
- La fonction inconnue peut-être invariablement notée $f; g; x; y; \alpha; \theta, etc.$
- Si l'équation s'écrit $\sum_{i=0}^{n} a_i f^{(i)}(x) = g(x)$, alors $g(x)$ est son second membre. Une équation différentielle dont le second membre est nul est dit sans second membre ou équation homogène.
- Si l'application $f \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i f^{(i)}$ est linéaire, alors l'équation différentielle (E) est dite linéaire et les coéfifficients a_i $(0 \leq i \leq n)$ sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- L'équation linéaire (E) est à coefficients constant si les a_i sont des fonctions constantes.

EXEMPLE

L'équation différentielle : $4y' + 7y = x + 2$ est du premier ordre, avec second membre et à coefficients constants.

L'équation différentielle : $mx'(t) + kx(t) = 0$ est du second ordre , à coefficients constants et sans second membre.

L'équation différentielle : $x^2 f'''(x) + f''(x) - 3f'(x) + f(x) = x$ est du troisième ordre , à coefficients variables et avec second membre.

Toutes les équations précédentes sont linéaires.Par contre, l'équation $f''(x) \times f'(x) + 2f(x) = e^{-x}$ est une équation différentielle du second ordre, avec second membre et non linéaire.

S'exercer

a Montrer que la fonction $x \to 1 - x^2 e^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = -2e^{-x} + 1$.

b Soit l'équation différentielle (E) : $f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 8x^2 - 24x$.
Déterminer les trois nombres réels a, b, c pour que la fonction g définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit une solution de (E).

c Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (4 - x)e^{\frac{1}{2}x}$ est une solution de l'équation différentielle $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$.
En déduire la forme générale des primitives de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

2. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES : $y' = ay$

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit a un réel donné.On se propose de chercher les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f' = af$ (1), c'est-à-dire telles que, pour tout réel x, $f'(x) = af(x)$. Soit S l'ensemble de telles fonctions.

1) Montrer que la fonction nulle appartient à S.
2) Soient α et β deux réels, f et g deux éléments de S.
   Montrer que $\alpha f + \beta g$ appartient à S.

Activité 2

Soit la fonction $f_1 : x \mapsto e^{ax}$.

1) a)Montrer que f_1 est un élément de S.
   b) Justifier que pour tout réel λ, λf_1 est aussi un élément de S.
2) Soit f un élément de S. Soit g la fonction définie par $f = gf_1$.
   a) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et exprimer pour tout réel x, $g(x)$ en fonction de $f(x)$.
   b) Montrer que pour tout réel x, on a $g'(x) = \dfrac{f'(x) - af(x)}{e^{ax}}$.

Utiliser le fait que $f' = af$ pour déduire que g est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Montrer alors qu'il existe un réel μ tel que $f = \mu f_1$.

Retenir

Soit a un réel.
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto \lambda e^{ax}$, où λ est un réel arbitraire ne dépendant pas de x.

REMARQUE

1) Si $a = 0$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = 0$ est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.
2) Soit a, x_0, y_0 trois réels. L'équation différentielle $y' = ay$ admet une seule solution qui prend la valeur y_0 en x_0. C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\to y_0 e^{a(x-x_0)}$.
   En effet $f : x \mapsto \lambda e^{ax}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

$f(x_0)=y_0$ équivaut à $\lambda e^{ax_0}=y_0$ qui est équivalent à $\lambda=\dfrac{y_0}{e^{ax_0}}$; soit $\lambda=y_0e^{-ax_0}$. D'où pour tout réel x $f(x)=y_0e^{-ax_0}e^{ax}=y_0e^{a(x-x_0)}$.

EXEMPLE

Soit à résoudre l'équation différentielle $y'+2y=0$.

L'équation $y'+2y=0$ est équivalente à $y'=-2y$. Cette équation différentielle a pour solution $y=\lambda e^{-2x}$.

L'ensemble des solutions S de cette équation est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\lambda e^{-2x}$.

Déterminons la solution de cette équation qui prend la valeur 2 en 0.

$f(0)=2$ équivaut à $\lambda e^{-2\times 0}=2$; soit $\lambda=2$.

La solution de l'équation différentielle $y'+2y=0$ qui prend la valeur 2 en 0 est la fonction $f_1 : x\mapsto 2e^{-2x}$.

Exercice Résolu :

Soit l'équation différentielle du premier ordre (1) : $2y'+3y=6x^2-7x+2$.

1) Résolution de l'équation différentielle sans second membre.

(2) : $2y'+3y=0$ est une équation différentielle du premier ordre de la forme $y'=-\dfrac{3}{2}y$.

L'ensemble S_1 des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R} : x\mapsto \lambda e^{-\frac{3}{2}x}$ (λ constante réelle).

2) Recherchons une solution particulière de l'équation (1), polynôme du second degré . Soit P cette solution, pour tout réel x, $P(x)=ax^2+bx+c$. $a,b,c\in\mathbb{R}$; $a\neq 0$.

$P'(x)=2ax+b$. P solution de (1) signifie que pour tout réel x,

$2P'(x)+3p(x)=6x^2-7x+2$.

$2(2ax+b)+3(ax^2+bx+c)=6x^2-7x+2$.

Pour tout réel x, $3ax^2+(4a+3b)x+2b+3c=6x^2-7x+2$.

Par identification on a $\begin{cases} 3 \quad 6 \\ 4a+3b=-7 \\ 2b+3c=2 \end{cases}$; c'est-à-dire $a=2$; $b=-5$; $c=4$.

$P(x)=2x^2-5x+4=0$.

3) Résolution de l'équation différentielle avec second membre.

Déterminons l'ensemble S des solutions de l'équation (1).

$P\in S$, donc pour tout réel x , $2P'(x)+3p(x)=6x^2-7x+2$.

Soit f une solution de (1).

Montrons que f est solution de (1) si et seulement si $2f'+3f=2P'+3P$.

$2f'+3f=2P'+3P$ équivaut successivement à $2f'-2P'=3P-3f$;

$2(f-P)'=3(P-f)$; $2(f-P)'-3(f-P)=\tilde{0}$ où $\tilde{0}$ désigne l'application nulle ; $f-P\in S$.

f est solution de (1) si et seulement si f est de la forme $f=g+P$ où g est solution de l'équation (2).

L'ensemble S des solutions de l'équation $2y'+3y=6x^2-7x+2$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto \lambda e^{-\frac{3}{2}x} + 2x^2 - 5x + 4$.

4) Déterminer la solution de l'équation (1) qui prend la valeur $\sqrt{2}$ en 0.
Soit f une solution de (1).
On a $f(x) = \lambda e^{-\frac{3}{2}x} + 2x^2 - 5x + 4$.
$f(0) = \sqrt{2}$ équivaut à $\lambda e^{-\frac{3}{2}\times 0} + 2\times 0^2 - 5\times 0 + 4 = \sqrt{2}$; Soit $\lambda = \sqrt{2} - 4$.
La solution de l'équation (1) qui prend la valeur $\sqrt{2}$ en 0 est la fonction f définie par : pour tout réel x, $f(x) = \left(\sqrt{2} - 4\right)e^{-\frac{3}{2}x} + 2x^2 - 5x + 4$.

S'exercer

d Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $3y' + 5y = 0$; b) $\frac{2}{3}y' - \frac{4}{5}y = 0$; c) $y' + 2y = 0$; d) $-2y' + 3y = 0$.
Déterminer pour chacune des équations ci-dessus la solution qui prend la valeur -1 en 0.

e En vous inspirant de l'exercice résolu ci-dessus, résoudre l'équation différentielle
$5y' + 3y = 3x^2 - 2x - 4$.

1.3. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES : $ay'' + by' + cy = 0$ OÙ *a* EST UN RÉEL NON NUL, *b et c* DEUX RÉELS

1.3.1 Cas où $b^2 - 4ac = 0$.

Prendre un bon départ

Actvité 1

Soit a un réel donné.On se propose de chercher les fonctions f au moins deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de $ay'' + by' + cy = 0$ (1), c'est-à-dire telles que, pour tout réel $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$. Soit S l'ensemble de telles fonctions.

1) Montrer que la fonction nulle appartient à S.
2) Soient α et β deux réels ; f et g deux éléments de S.
Montrer que $\alpha f + \beta g$ appartient à S.

Activité 2

Soit r un réel et f la fonction : $x \mapsto e^{rx}$.

a) Montrer que pour tout réel x, $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$ est équivalent à $ar^2 + br + c = 0$.
b) Supposons que $b^2 - 4ac = 0$.
L'équation $ar^2 + br + c = 0$ admet une seule racine réelle $r_0 = -\frac{b}{2a}$.

La fonction $f_1 : \ \mapsto \ {}^{r_0 x}$ est élément de S d'après l'activité 1 et quel que soit le réel λ, λf_1 est un élément de S.

Soit f une fonction au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$; g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(gf_1)(x)$.

- Montrer que pour tout réel x, $f(x)=g(x)e^{r_0x} \Leftrightarrow g(x)=f(x)e^{-r_0x}$.
- Déduire que g est au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ et montrer que
  $af''(x)+bf'(x)+cf(x)= e^{r_0x}\left(ag''(x)+(2r_0a+b)g'(x)+\left(ar_0^2+br_0+c\right)g(x)\right)$.
- Utiliser le fait que r_0 est solution de l'équation $ar^2+br+c=0$ pour déduire que
  $af''(x)+bf'(x)+cf(x)=e^{r_0x}\left(ag''(x)+(2r_0a+b)g'(x)\right)$
- Déduire que f appartient à S si et seulement si $ag''+(2r_0a+b)g'=\widetilde{0}$.
  - Posons $z=g'$.
    Calculer $2r_0a+b$ et en déduire que l'équation $ag''+(2r_0a+b)g'=\widetilde{0}$. équivaut à $z'=0$.
    En déduire que g est une fonction affine : $x \mapsto \lambda x+\mu$, où $(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2$.
  - En déduire qu'une solution f de $ay''+by'+cy=0$ est définie par : pour tout réel x, $f(x)=(\lambda x+\mu)e^{r_0x}$ où $(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Retenir

- Une équation de la forme $ay''+by'+cy=0$ où a est un réel non nul , b et c deux réels est appelée équation différentielle du second ordre homogène ou sans second membre.
- L'équation $ar^2+br+c=0$ est appelée équation caractéristique associée à l'équation différentielle $ay''+by'+cy=0$.
- Si $\Delta=b^2-4ac=0$ alors, l'équation $ar^2+br+c=0$ admet une racine double $r_0=-\dfrac{b}{2a}$, et l'ensemble S des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f : x\mapsto(\lambda x+\mu)e^{r_0x}$ où $(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2$.

REMARQUE

- Si l'on a $b=c=0$, alors l'ensemble S des solutions de l'équation $y''=0$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$: $x\mapsto\lambda x+\mu$ avec $(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2$.
- Si l'équation $ar^2+br+c=0$ admet une seule racine $r_0=-\dfrac{b}{2a}$, l'équation différentielle $ay''+by'+cy=0$ admet une unique solution g qui satisfait aux conditions $g(x_0)=y_0$ et $g'(x_0)=y'_0$. (Conditions initiales).

EXEMPLE

1) Résolvons l'équation différentielle $4y''-4y+1=0$.
   L'équation caractéristique de cette équation est $4r^2-4r+1=0$.

Son discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4\times4\times1 = 16-16 = 0$.

Le discriminant étant nul, l'équation $4r^2 - 4r + 1 = 0$ admet une racine double $r_0 = -\dfrac{(-4)}{2\times4} = \dfrac{1}{2}$.

L'ensemble S des solutions de l'équation différentielle $4y'' - 4y + 1 = 0$ est l'ensemble des fonctions : $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{\frac{1}{2}x}$.

2) Déterminons la solution g de cette équation qui vérifie $g(0) = 2$ et $g'(0) = -1$.

$g(x) = (\lambda x + \mu)e^{\frac{1}{2}x}$.

$g'(x) = \lambda e^{\frac{1}{2}x} + \dfrac{1}{2}(\lambda x + \mu)e^{\frac{1}{2}x} = \left[\lambda + \dfrac{1}{2}(\lambda x + \mu)\right]e^{\frac{1}{2}x}$.

$g(0) = 2$ équivaut à $\mu = 2$;

$g'(0) = -1$ équivaut à $2\lambda + \mu = -2$; soit $2\lambda = -2-2$; $\lambda = -\dfrac{4}{2}$ et $\mu = 2$; $\lambda = -2$ et $\mu = 2$.

La solution g de l'équation différentielle $4y'' - 4y + 1 = 0$ qui vérifie $g(0) = 2$ et $g'(0) = -1$ est la fonction : $x \mapsto (-2x+2)e^{\frac{1}{2}x}$

Exercice Résolu :

Trouver la solution de l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 0$ telle que $\begin{cases} (1) & 0 \\ '(0) & 1 \end{cases}$.

L'équation caractéristique associée à (E) est $r^2 + 2r + 1 = 0$; soit $(r+1)^2 = 0$.

Cette équation admet une racine double qui est -1.

Les solutions de l'équation $y'' + 2y' + y = 0$ sont les fonctions : $x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{-x}$.

La dérivée de la fonction : $x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{-x}$ est la fonction :

$x \mapsto \mu e^{-x} - (\lambda + \mu x)e^{-x}$; soit $x \mapsto (\mu - \lambda - \mu x)e^{-x}$.

La condition initiale $\begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ permet d'écrire : $\begin{cases} (\lambda + \mu)e^{-1} = 0 \\ \mu - \lambda = 1 \end{cases}$; soit $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -\lambda + \mu = 1 \end{cases}$;

ce qui donne $\mu = \dfrac{1}{2}$ et $\lambda = -\dfrac{1}{2}$.

La solution de $y'' + 2y' + y = 0$ avec $\begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ est la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{2}(-1+x)e^{-x}$.

S'exercer

f a) Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 4y = 0$.

b) Déterminer la solution y qui satisfait aux conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$

3.2 Cas où $b^2-4ac>0$.

Prendre un bon départ

Soient $r_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ et $r_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

1) Montrer que $2r_1+\dfrac{b}{a}=r_2-r_1$, avec $r_2-r_1\neq 0$.

2) Soit à résoudre l'équation différentielle $g''=(r_2-r_1)g'$.

Posons $z=g'$.

a) Montrer que résoudre $g''=(r_2-r_1)g'$ revient à résoudre $z'=(r_2-r_1)z$.

b) En déduire que $z=\lambda e^{(r_2-r_1)x}$, et que $g(x)=\dfrac{\lambda}{r_2-r_1}e^{(r_2-r_1)x}+A$ où A est une constante réelle.

3) La fonction $f_1:x\mapsto e^{r_1x}$ est un élément de S d'après l'activité 1, quel que soit le réel λ, λf_1 est un élément de S.

- Soit f une fonction au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(gf_1)(x)$. D'après le même raisonnement qu'à l'activité 2 du 1.2, déduires que f est solution de $ay''+by'+cy=0$ si et seulement si pour tout réel x,
$$f(x)=f_1(x)g(x)=e^{r_1x}\left(\frac{\lambda}{r_2-r_1}e^{(r_2-r_1)x}+A\right)$$ où A est une constante réelle.
- En posant $B=\dfrac{\lambda}{r_2-r_1}$, montrer que les solutions de l'équation $ay''+by'+cy=0$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$; A et B sont deux constantes réelles.

Retenir

Si l'équation caractéristique $ar^2+br+c=0$ associée à l'équation différentielle du second ordre $ay''+by'+cy=0$ admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors l'ensemble S des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$, où A et B sont des constantes réelles.

REMARQUE

Si l'équation caractéristique $ar^2+br+c=0$ associée à l'équation différentielle du second ordre $ay''+by'+cy=0$ admet deux racines réelles distinctes $\forall(y_0,y_0')\in\mathbb{R}^2$, l'équation différentielle $ay''+by'+cy=0$ admet une unique solution f telle que $\forall x_0\in D_f$: $f(x_0)=y_0$ et $f'(x_0)=y_0'$

EXEMPLE

1) Résolvons l'équation différentielle (E) : $2y'' + y' - 6y = 0$.

(E) admet pour équation caractéristique $2r^2 + r - 6 = 0$.

Son discriminant est $\Delta = 1^2 - 4(2)(-6) = 49 = 7^2$.

Les racines de l'équation caractéristique sont $r_1 = \frac{-1-7}{4} = -2$ et $r_2 = \frac{-1+7}{4} = \frac{3}{2}$.

L'ensemble S des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions $f : x \mapsto Ae^{-2x} + Be^{\frac{3}{2}x}$. $(A, B \in \mathbb{R})$.

2) Déterminons la solution de (E) qui vérifie $y(0) = -3$ et $y'(0) = 1$.

$f(x) = Ae^{-2x} + Be^{\frac{3}{2}x}$; $f'(x) = -2Ae^{-2x} + \frac{3}{2}Be^{\frac{3}{2}x}$.

$f(0) = -3$ équivaut à $Ae^{-2\times 0} + Be^{\frac{3}{2}\times 0} = -3$; soit $A + B = -3$.

$f'(0) = 1$ équivaut à $-2Ae^{-2\times 0} + \frac{3}{2}Be^{\frac{3}{2}\times 0} = 1$; soit $-2A + \frac{3}{2}B = 1$; ce qui revient à $-4A + 3B = 2$. On obtient le système : $\begin{cases} A + B = -3. \\ -4A + 3B = 2 \end{cases}$

La résolution de ce système donne $A = -\frac{11}{7}$ et $B = -\frac{10}{7}$.

La solution de (E) qui vérifie $y(0) = -3$ et $y'(0) = 1$ est la fonction $f : x \mapsto -\frac{11}{7}e^{-2x} - \frac{10}{7}e^{\frac{3}{2}x}$.

Exercice Résolu :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' - 3y' - 4y = 0$ avec $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$.

L'équation caractéristique associée à (E) est $r^2 + 3r - 4 = 0$.

Son discriminant est $\Delta = 3^2 - 4\times 1\times(-4) = 9 + 16 = 25$.

Cette équation admet deux solutions réelles $r_1 = \frac{3-5}{2} = -1$ et $r_2 = \frac{3+5}{2} = 4$.

Les solutions de l'équation $y'' + 3y' - 4y = 0$ sont les fonctions : $x \mapsto Ae^{-x} + Be^{4x}$ où A et B sont des constantes réelles.

La fonction : $x \mapsto Ae^{-x} + Be^{4x}$ a pour dérivée la fonction : $x \mapsto -Ae^{x} + 4Be^{4x}$.

La condition initiale $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$ permet d'avoir le système $\begin{cases} A + B = 2 \\ -A + 4B = 4 \end{cases}$.

D'où B = $\frac{6}{5}$ et A = $\frac{4}{5}$.

La solution y de l'équation différentielle (E) : $y'' - 3y' - 4y = 0$ avec $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$ est la fonction : $x \mapsto \frac{4}{5}e^{-x} + \frac{6}{5}e^{4x}$.

S'exercer

1) Résoudre l'équation différentielle $2y'' - 7y' - 4y = 0$.

2) Déterminer la solution y de cette équation qui vérifie $y(1) = -2$ et $y'(1) = 3$.

3.3 Cas où $b^2 - 4ac < 0$.

Prendre un bon départ

Montrer que l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ admet deux racines complexes conjuguées l'une de l'autre.

Retenir

Si le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ associée à l'équation caractéristique de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ admet deux racines complexes conjuguées distinctes $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ où α est un réel et β un réel non nul, alors l'ensemble S des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}$ avec $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

REMARQUE

Si l'équation $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, alors $\forall (u_0, y_0, y_0') \in \mathbb{R}^3, x_0 \in D_f$, l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ admet une unique solution f qui satisfait aux conditions suivantes : $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_0'$.

En d'autres termes, parmi les fonctions solutions de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$, il en existe une unique dont la courbe passe par le point de coordonnées $(x_0 ; y_0)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur y_0'.

EXEMPLE

1) Résolvons l'équation différentielle $y'' - 4y' + 7y = 0$.

Son équation caractéristique est $r^2 - 4r + 7 = 0$. Son discriminant est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 16 - 28 = -12 = 12i^2 = (2i\sqrt{3})^2$.

Ses racines sont $\frac{4 + 2i\sqrt{3}}{2} = 2 + i\sqrt{3}$ et $\frac{4 - 2i\sqrt{3}}{2} = 2 - i\sqrt{3}$.

L'ensemble S des solutions de l'équation différentielle $y''-4y'+7y=0$ est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :
Pour tout réel x, $f(x)=e^{2x}\left(A\cos\sqrt{3}x+B\sin\sqrt{3}x\right)$, $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

2) Déterminons la solution y de cette équation qui vérifie : $y(0)=0$ *et* $y'(0)=1$.

$f'(x)=2e^{2x}\left(A\cos\sqrt{3}x+B\sin\sqrt{3}x\right)+\left(-\sqrt{3}A\sin\sqrt{3}x+\sqrt{3}B\cos\sqrt{3}x\right)e^{2x}$.

$f(0)=0$ équivaut à A $=0$;

$f'(0)=1$ équivaut à $\sqrt{3}\text{B}=1$; soit B $=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3) La fonction $x\mapsto\dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{2x}\sin\sqrt{3}x$ est l'unique solution de l'équation différentielle $y''-4y'+7y=0$ qui vérifie : $y(0)=0$ *et* $y'(0)=1$.

Exercice Résolu

Déterminer la solution y de l'équation différentielle (E) : $4y''+4y'+65y=0$ telle que $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

L'équation caractéristique de (E) est $4r^2+4r+65=0$.

Son discriminant réduit est $\Delta=4-4\times65=-256=256i^2=(16i)^2$.

Ses racines sont $r_1=\dfrac{-2+16i}{4}=-\dfrac{1}{2}+4i$ *et* $r_2=\dfrac{-2-16i}{4}=-\dfrac{1}{2}-4i$.

Les solutions de (E) sont les fonctions $f : x\mapsto e^{-\frac{1}{2}x}\left(A\cos4x+B\sin4x\right)$.

$f'(x)=-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\left(A\cos4x+B\sin4x\right)+e^{-\frac{1}{2}x}\left(-4A\sin4x+4B\cos4x\right)$.

$f(0)=1$ équivaut à A = 1 ; $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$ équivaut à $-\dfrac{1}{2}A+4B=-\dfrac{1}{2}$.

On a donc le système $\begin{cases} A=1 \\ -A+8B=-1 \end{cases}$; soit $A=1$ et B=0.

La solution de $4y''+4y'+65y=0$ telle que $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ est la fonction : $x\mapsto-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\cos4x$.

S'exercer

h a) Résoudre l'équation différentielle $y''+2y'+3y=0$.

b) Déterminer la solution de $y''+2y'+3y=0$ qui satisfait aux conditions suivantes : $y'(0)=-2$ *et* $y(0)=1$.

S'ENTRAÎNER

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

1.

Résoudre les équations différentielles :

a) $2y'+3y=0$; b) $y'+\frac{1}{2}y=0$; c) $3y'-5y=0$.

2.

1) Déterminer la solution f de l'équation différentielle $y'+5y=0$ qui prend la valeur 7 en 0.
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(1)+f(x+1)=0$.

3.

1) Résoudre l'équation différentielle $y'+yln2=0$.
2) Déterminer la solution particulière f telle que sa courbe représentative (C), dans un repère orthonormé passe par le point de coordonnées $(3;4)$.

4.

1) Résoudre les équations différentielle : (i) : $2y'=3y$ et (ii) : $3y'=2y$.
2) Déterminer les solutions respectives f_1 et f_2 des équations (1) et (2) telles que $f_1'(0)=1$ et $f_2'(0)=1$.
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f_1(x)=f_2(x)$.

5.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que, pour tout réel x on ait $f'(x)+2f(x)=x^2+x+1$.

1) Démontrer qu'il existe une fonction polynôme f_0 de degré 2 qui appartient à $\mathcal{F}$.
2) Soit S l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'+2y=0$.
   a) Démontrer que $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fonctions $g+f_0$ où g décrit S.
   b) Déterminer S.
   c) En déduire $\mathcal{F}$.
3) Déterminer l'élément f_1 de $\mathcal{F}$ tel que $f_1(0)=3$.

6.

Soit l'équation différentielle (E) : $y'-y=x+2$.

1) Déterminer une fonction affine g solution de (E).
2) Montrer que si f est solution de (E), alors $f-g$ est solution de $y'-y=0$. Résoudre cette équation.
3) Déterminer toutes les solutions de (E).
4) Déterminer la solution particulière h de (E) telle que sa courbe représentative dans un repère du plan admette au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

7.

Soit l'équation différentielle (E) : $y'+y=e^{-x}$.

1) Démontrer qu'il existe un réel a tel que la fonction $f_0 : x \mapsto ae^{-x}$ est une solution de (E).
2) Soit S l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'+y=0$. Résoudre cette équation.
3) Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si f s'écrit sous la forme $f=f_0+g$ où g est un élément de S.
4) Résoudre (E).

8.

Soit (E) l'équation différentielle $y'-5y=sinx$.

1) Déterminer deux réels A et B tels que la fonction g définie par $g(x)=A\cos x+B\sin x$ soit solution de (E).

2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $h = f - g$. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si h est solution de l'équation $y' - 5y = 0$.
3) Résoudre l'équation (E).

9.

Soit (E) l'équation différentielle $y' + 2y = 3e^{-3x}$.

1) Démontrer que toute fonction u, telle que la fonction $x \mapsto u(x)e^{-3x}$ soit solution de (E), vérifie l'équation différentielle (E') : $y' - y = 3$.
2) a)Démontrer que la fonction constante $x \mapsto -3$ est solution de (E').
   b) Démontrer qu'une f est solution de (E') si et seulement si la fonction $g : x \mapsto f(x) + 3$ est solution de l'équation $y' - y = 0$.
   c) Résoudre l'équation différentielle $y' - y = 0$, puis l'équation (E').
   d) Déterminer la solution de (E) qui s'annule en 0.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE.

10.

Déterminer la solution particulière f de l'équation $4y'' - 12y' + 9y = 0$ qui satisfait aux conditions initiales suivantes : $f(0) = 5 \text{ et } f'(0) = -2$.

Même question qu'au N° 10 pour les exercices de 11 à 17:

11.

$y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$; $f(0) = 0 \, et \, f'(0) = 1$.

12.

$y'' - 4y' + 3y = 0$; $f(0) = 2 \, et \, f'(0) = -3$.

13.

$y'' + 4y = 0$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

14.

$2y'' + y' - y = 0$; $f(1) = 1 \, et \, f'(1) = 0$.

15.

$y'' - 2y' + 5y = 0$; $f(\pi) = 0 \, et \, f'(\pi) = -1$.

16.

$\left(2 - \sqrt{3}\right)y'' + 2y = 0$; $f(0) = 1 \, et \, f'(0) = \sqrt{3}$.

17.

$5y'' - 3y' = 0$ et telle que $f(0) = 1 \, et \, f'(0) = 1$

18.

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
2) Déterminer la solution particulière f de cette équation telle que la courbe représentative de f, dans un repère orthonormé, passe par le point de coordonnées $(0;1)$ et admette en ce point une tangente de coefficient directeur nul.

19.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que, pour tout réel x, on ait $f''(x) + f(x) = x^3 + 2$.

1) Démontrer qu'il existe une fonction polynôme f_0 de degré 3 qui appartient à $\mathcal{F}$.
2) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
3) Déduire l'ensemble $\mathcal{F}$.
4) Déterminer l'élément f_1 de $\mathcal{F}$ tel que $f_1(0) = 3 \, et \, f_1'(0) = -7$.

20.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que, pour tout réel x, $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$.

1) Démontrer qu'il existe une fonction polynôme P de quatrième degré telle que la fonction $f_0 : x \mapsto P(x)e^{-x}$ appartient à $\mathcal{F}$.
2) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 0 = 0$.
3) Soit g une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que g appartient à $\mathcal{F}$ si et seulement si $g - f_0$ est solution de (E).

4) Déduire l'ensemble $\mathcal{F}$.

21.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définies et dérivables deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$, solutions de l'équation différentielle

(1): $y''+3y'+2y=\frac{x-1}{x^2}e^{-x}$.

1) Vérifier que la fonction $f: x\mapsto e^{-x}\ln x$ appartient à $\mathcal{F}$.
2) Résoudre l'équation différentielle (2) : $y''+3y'+2y=0$.
3) Soit g la fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que g appartient à $\mathcal{F}$ si et seulement si $g-f$ est solution de (2).
4) En déduire l'ensemble $\mathcal{F}$.

22.

Soit l'équation différentielle

(E): $y''+2y'+5y=30\cos x$.

1) Déterminer deux réels a et b tels que la fonction : $x\mapsto a\cos x+b\sin x$ soit une solution de l'équation (E).
2) Résoudre l'équation différentielle $y''+2y'+5y=0$.
3) Résoudre l'équation (E).

23.

Soit l'équation différentielle

(E): $3y''-2y'-y=2\cos^2 x$.

1) Déterminer trois réels a,b,c tels que la fonction $x\mapsto a\cos 2x+b\sin 2x+c$ soit une solution de (E).
2) Résoudre l'équation différentielle $3y''-2y'-y=0$.
3) Résoudre (E).

24.

1) Résoudre l'équation différentielle : $y''+16y=0$.
2) Déterminer la fonction f, solution de cette équation, telle que $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2$ et $f'(\pi)=8$.
3) Montrer que, pour tout réel x, cette solution particulière peut s'écrire : $f(x)=2\sqrt{2}\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)$.
4) Résoudre dans $[0;\pi]$, l'équation $f(x)=\sqrt{2}$.

25.

Soit (E) l'équation différentielle :

(E) : $y''+4y=0$.

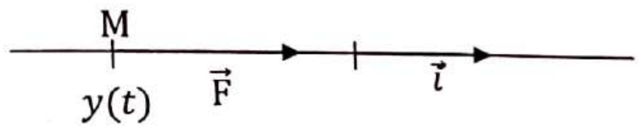
1) Résoudre l'équation (E).
2) Déterminer la fonction f, solution particulière de (E), telle que $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$.
3) Déterminer deux réels A et φ tels que, pour tout réel t, $f(t)=A\cos(2t+\varphi)$.

26.

Une masse m, mobile sur un axe $(O,\vec{i})$ a sa position représentée sur cet axe par le point M. Cette masse est soumise à une force d'attraction $\vec{F}$, telle que l'abscisse y(t) du point M en fonction de t vérifie l'équation différentielle

$y''+\frac{\pi^2}{4}y=0$.

1) Résoudre cette équation différentielle.



Pour la suite de l'exercice, on suppose que $y(0)=1$ et $y'(0)=\frac{\pi}{2}$.

2) a) Montrer que y s'exprime en fonction de t, pour $t\geq 0$, par $y(t)=\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

b) Déterminer le réel α, compris entre 0 et 1, tel que pour $t\geq 0$:

$$y(t)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}(t+\alpha)\right).$$

3) a) Donner la valeur positive de t pour laquelle le point M se trouve pour la première fois au point O.

b) Combien de fois le point M se trouve-t-il en O, dans l'intervalle $[0;6]$?

27.

On se propose de chercher les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x, on ait :

$$f''(x)-f'(x)+3f(x)=6x^2+5x.$$

1) On désigne par g une fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g(x)=ax^2+bx+c$, où a, b et c sont des réels.
Déterminer a, b, c pour que pour tout réel x,
$$g''(x)-g'(x)+3g(x)=6x^2+5x.$$

2) On pose F = $f-g$.

a) Montrer que si f vérifie, pour tout réel x, la relation (1), alors F est solution de l'équation différentielle : (2) : $y''-4y'+3y=0$.

b) Réciproquement, établir que si F est une solution de (2), f est définie par $f=F+g$ vérifie (1).

c) Résoudre l'équation (2) et en déduire les solutions de l'équation $y''-4y'+3y=6x^2+5x$.

28.

1) Résoudre l'équation différentielle : (1) : $y''+2y'+2y=0$.

2) On considère l'équation différentielle :
(2) : $y''+2y'+2y=e^{-x}\left(-x+\dfrac{1}{2}\right)$.

a) Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie par : $g(x)=e^{-x}(ax+b)$ soit une solution de (2).

b) h désignant une solution quelconque de l'équation (1), montrer que la fonction f telle que $f(x)=g(x)+h(x)$ est solution de (2).

c) Déterminer parmi les fonctions f définies au 2)b) celle qui vérifie $f(0)=1$ et $f'(0)=-\dfrac{3}{2}$.

29.

Le but de l'exercice est l'étude de l'intensité i dans un circuit comprenant en série un générateur de force électromotrice E (en Volts) et une bobine de résistance R (en Ohms) et l'inductance L (en henrys). À l'instant t (en secondes), l'intensité i (en ampères) est solution de l'équation différentielle (1) :

$Ly'+Ry=E$.

On donne $E=10V, R=100V, L=0,2H$

1) Vérifier que l'équation (1) s'écrit : $y'+500y=50$.

2) a) On pose pour tout t, $i(t)=I(t)+0,1$. Démontrer que la fonction i est solution de l'équation différentielle (2) : $y'+500y=0$.

b) Résoudre l'équation différentielle (2).

c) Déterminer alors la solution i de (1) telle que $i(0)=0$.

3) Déterminer à 1 milliseconde près par excès, l'instant t_0 à partir duquel l'intensité $i(t_0)$ est supérieure à 95 mA.

Chapitre 11

CALCULS DES PROBABILITÉS

LEÇON 1 RÉSOLUTION DE CERTAINS PROBLÈMES DE DÉNOMBREMENT.

1-1 UTILISATION DES DIAGRAMMES ET DES TABLEAUX.

1-2 ARBRES DE CHOIX : NOTION DE LISTES.

LEÇON 2 PROBABILITÉ D'UN ÉVÉNEMENT.

2-1 INTRODUCTION DE LA PROBABILITE D'UN ÉVÉNEMENT.

2.1.1 Vocabulaire en probabilité.

2.1.2 Probabilité d'un événement

2-2 QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION DE PROBABILITÉ « *P* ».

2-3 PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

LEÇON 3 VARIABLES ALÉATOIRES.

3-1 PRÉSENTATION.

3-2 LOI DE PROBABILITÉ ET CARACTÉRISTIQUES D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE.

3-3 FONCTION DE RÉPARTITION D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE.

3-4 ÉPREUVES RÉPETÉES DE BERNOULLI.

3.4.1 Présentation.

3.4.1 Espérance mathématique et variance de la variable aléatoire associée à une épreuve répétée de Bernoulli.

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1 RÉSOLUTION DE CERTAINS PROBLÈMES DE DÉNOMBREMENT.

➢ Résoudre quelques problèmes de dénombrement en utilisant des diagrammes ou des tableaux

1.1. UTILISATION DES DIAGRAMMES ET DES TABLEAUX.

Prendre un bon départ

Activité 1

Un magasin souhaite faire une promotion sur des lampes de bureau et des lampes de salon. Ces lampes sont de trois couleurs : blanche, noire ou rouge.

Sur ces 200 lampes, 25 % sont des lampes de salon ; 30 % des lampes sont blanches ; 60 lampes sont rouges et parmi elles, 20 % sont des lampes de salon. Le quart des lampes noires sont des lampes de salon.

1) Représenter les données de cet énoncé dans un tableau de « CARROLL ».
2) Calculer le nombre de lampes noires.
3) Déterminer le nombre de lampes de bureau ayant la couleur blanche .

Activité 2

1) Dans un groupe d'individus, 45 aiment le cinéma, 30 le sport, 10 à la fois le cinéma et le sport, 5 n'aiment ni le cinéma, ni le sport. Calculer le nombre total d'individus.
2) L'exploitation des relevés des notes d'un jury de baccalauréat littéraire comptant 108 candidats tous présents a donné les informations suivantes :

   37 candidats ont eu la moyenne en anglais, 25 en deuxième langue vivante et 26 en mathématiques. 5 ont eu la moyenne dans les trois matières, 6 en maths et en deuxième langue vivante, 7 en maths et en anglais, 10 en anglais et en deuxième langue.

   a) Utiliser un diagramme pour illustrer la situation décrite dans l'énoncé précédent.
   b) Déterminer le nombre de candidats n'ayant pas eu la moyenne dans les trois matières que sont l'anglais, les mathématiques et la deuxième langue vivante.

Activité 3

1) On lance simultanément une pièce de monnaie et un dé cubique dont les faces portent respectivement les numéros 1 ; 2 ;3 ;… ; 6. On s'intéresse à la face supérieure de la pièce de monnaie et au numéro de la face supérieure du dé. Donner le nombre total des possibilités distinctes.

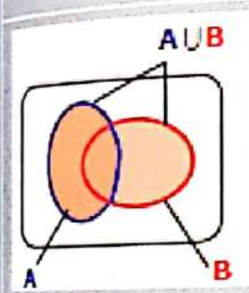
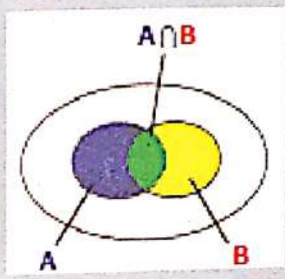
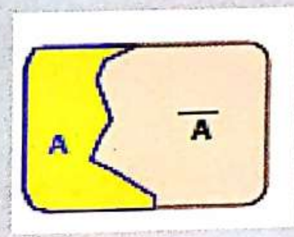
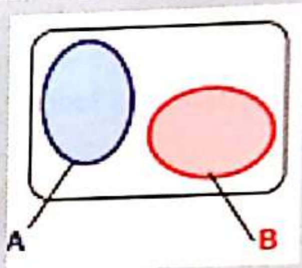
2) Lors d'une rentrée parlementaire, les 180 députés qui constituent la chambre doivent se saluer indépendamment de leurs chapelles politiques.

a) Déterminer le nombre de poignées de mains qu'un député pris au hasard doit passer avec les autres.

b) Déterminer le nombre total de poignées que doivent se donner tous ces députés.

Retenir

• Pour résoudre certains problèmes de dénombrement, on peut utiliser les tableaux ou les diagrammes .

Réunion de A et B	Intersection de A et B	Complémentaire de A dans E est noté $\overline{A}$	A et B sont disjoints
			

$Card(A\cup B)=Card(A)+Card(B)-Card(A\cap B)$; $Card(A)+Card(\overline{A})=Card(E)$

On utilise un tableau à double entrée dans le cas où on veut avoir un résultat composé de deux éléments appartenant respectivement à deux ensembles.

A×B est l'ensemble des éléments (a ;b) où $a\in A$ et $b\in B$.

$Car(A\times B)=Card(A)\times Card(B)$

EXEMPLE

Huit amis vont à une soirée et devraient être normalement accompagnés chacun de son épouse. À la dernière minute, une des femmes est indisponible et ne peut accompagner son mari à cette soirée. À l'ouverture de la soirée dansante, ils forment des couples (composés d'un homme et d'une femme) pour danser.

Combien de possibilités a-t-on de former des couples ?

Combien de possibilités a-t-on de former des couples tels qu'aucun homme ne danse avec sa femme ?

Solution.

Un couple est un élément de $H\times F$ où H est l'ensemble des hommes et F celui des femmes.

$Card(H\times F)=8\times 7=56$.

Il y a $56-7=49$ possibilités de former un couple dont l'homme n'est pas le mari de la femme.

On devrait avoir aisément ces résultats à partir d'un tableau à double entrée dont une entrée est formée des hommes et une autre des femmes

S'exercer

1.a On interroge 50 enfants à propos du sport qu'ils pratiquent. 25 enfants pratiquent le football, 22 le tennis et 16 le basketball 5 pratiquent les trois sports, 12 pratiquent le football et le basketball, 8 le tenis et le football, 7 le tenis et le basketball.
Peut-on affirmer que chacun de ces enfants pratique au moins un de ces trois sports ?
Déterminer le nombre d'enfants

a) qui pratiquent uniquement le football ;
b) qui ne pratiquent pas le football ;
c) qui pratiquent le tennis et le basketball, mais ne pratiquent pas le football ;
d) qui pratiquent uniquement le tennis ou uniquement le basketball.

1.b Dans un camp de vacances hébergeant 80 personnes, 55 personnes aiment la lecture , 33 les voyages et 16 n'aiment aucun des deux loisirs. Combien de personnes aiment-ils à la fois le voyage et la lecture ?

1.2. ARBRES DE CHOIX : NOTION DE LISTES.

Prendre un bon départ

1) Un buffet est composé de trois entrées, de 5 résistances et de 4 desserts.
Combien de plats différents comportant une entrée, une résistance et un dessert peut-on constituer à partir de ce buffet ?

2) Dix huit chevaux sont au départ d'une course.
On s'intéresse aux quatre premiers chevaux ayant franchi la ligne d'arrivée.
   a) Déterminer le nombre total de quartés dans l'ordre possibles à l'issue de cette course.
   b) Déterminer le nombre de quartés dans l'ordre possibles comportant le cheval numéro « 11 »

3) Un sac contient 10 boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 10, dont 4 rouges , 5 vertes et une noire.
   a) On effectue quatre tirages successifs d'un jeton chacun, en remettant chaque fois le jeton ti dans le sac avant le tirage suivant.
      (i) Calculer le nombre de résultats possibles.
      (ii) Déterminer le nombre total de résultats lorsque le jeton tiré n'est plus remis dans le sac
   b) On tire maintenant et de manière simultanée 4 jetons de ce sac. Calculer le nombre total résultats possibles et distincts deux à deux.

Retenir

Soit E un ensemble non vide de n éléments ; p un entier naturel non nul .

Une p-liste ou p-uplet d'éléments de E est une suite ordonnée de p éléments de E non nécessairement tous distincts deux à deux. C'est un élément de l'ensemble

$E^p = \underbrace{E \times E \times E \ldots \times E}_{p \text{ fois}}$. Le nombre de p-listes de E est n^p.

Un arrangement de p $(p \leq n)$ éléments de E est une suite ordonnée de p éléments de E tous distincts. Le nombre d'arrangements de p éléments de E est :

$\underbrace{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. Ce nombre est noté A_n^p .

- Par convention $A_n^0 = 1$.

Une permutation d'éléments de E est une suite ordonnée de tous les éléments de E . Le nombre de permutations d'éléments d'un ensemble à n élément est $n!$.

Une combinaison de p éléments parmi n éléments d'un ensemble E est un choix de p éléments de E dans un ordre indifférent. C'est donc un sous-ensemble de E contenant p éléments. Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est : $\dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$ ce nombre est noté C_n^p . $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$.

- $C_n^0 = 1$; $C_n^1 = n$; $C_n^n = 1$; $C_n^{n-p} = C_n^p$; $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$.

MÉTHODE DE DÉNOMBREMENT

Comment dénombrer les tirages de p éléménts d'un ensemble E fini à n éléments.

	Condition	Le nombre de tirages possible est :	Exemple usuel
$p \geq 1$	Les p éléments ne sont pas nécessairement tous distincts mais sont ordonnés.	Le nombre de p listes d'un ensemble E à n éléments est de n^p .	Tirage successif avec remise de p objets parmi n objets.
$p \leq n$	Les p éléments sont tous distincts et ordonnés.	Le nombre d'arrangements de p *éléments* d'un ensemble E à n éléments est $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.	Tirage successif sans remise de p objets parmi n objets.
$p = n$	Les n éléments sont tous distincts et ordonnés.	Le nombre de permutations des *élément*s d'un ensemble E à n éléments. C'est-à-dire $n!$	Anagramme d'un mot formé de n lettres toutes distinctes.

$p \leq n$	Les p éléments sont tous distincts et mais non ordonnés.	Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble E à n éléments est $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$	Tirages simultanés de p objets parmi n objets.

REMARQUE

Savoir quand additionner ou multiplier

Présentation	Opération :	Observation
$x \in A_1$ ou $x \in A_2$. C'est-à-dire $E = A_1 \cup A_2$.	Addition . $card\, E = card\, A_1 + card\, A_2 - card\left(A_1 \cap A_2\right)$.	Si $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, alors $\text{card}\left(A_1 \cup A_2\right) = \text{card } A_1 + \text{card } A_2$
$x = (x_1; x_2; \ldots ; x_p)$ avec $x_1 \in A_1$ et $x_2 \in A_2$ et… et $x_p \in A_p$. C'est-à-dire $E = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_p$	Multiplication. $card\, E = card\, A_1 \times card\, A_2 \times \ldots card\, A_P$	Un résultat est la composition des éléments venus de plusieurs ensembles :tirages simultanés.

EXEMPLE

Enoncé :1

Une femme a dans sa garde-robe 2 jupes, 3 chemisiers et 2 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. Enumerer (à l'aide d'un arbre),puis dénombrer les différentes façons qu'a cette femme de s'habiller ?

Solution :1

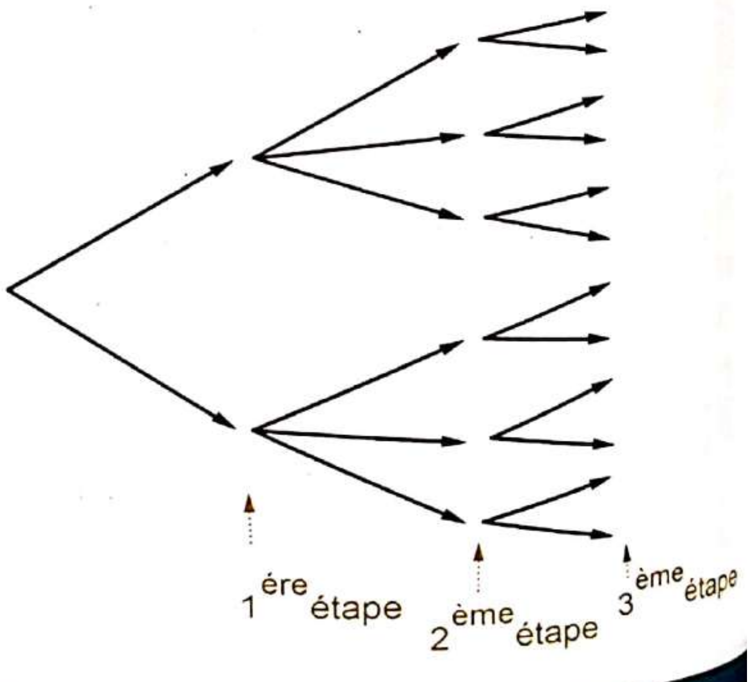
Cette situation à

3 étapes(choix de la jupe, du chemisier, et de la vestes) offrant
2 possibilités à la 1$^{\text{ère}}$ étape,
3 possibilités à la 2$^{\text{nde}}$ étape puis
2 possibilités à la 3$^{\text{ème}}$ étape sera représentée par l'arbre ci-contre.
On dénombre

$2 \times 3 \times 2 = 12$ *possiblités*.

$2 \times 3 \times 2 = 12$ branches

Soit 12 façons de s'habiller.



Enoncé 2 :
Un code comporte deux lettres distinctes de l'alphabet français, suivies d'un chiffre non nul. Combien peut-on former de codes distincts ?

Solution 2 :
Les trois étapes : choix de la première lettre, de la deuxième, puis du chiffre offrent respectivement 26, 25 et 9 possibilités. Le nombre cherché est donc $26\times25\times9=5850$ codes distincts.

Enoncé 3 :
1) Au loto sportif, on coche l'une des trois cases

1	N	2

pour chacun des 18 matches sélectionnés.
Dénombrer les grilles distinctes.
2) Combien y a-t-il de numéros de téléphone à 8 chiffres commençant chacun par 9 ?

Solution 3 :
1) Il y en a autant que de 18-listes de l'ensemble $\{1 ; N ; 2\}$
soit $3^{18}=387\,420\,489$
2) Les 7 numéros qui suivent sont des 7-listes de l'ensemble $\{0 ; 1 ; ... ; 9\}$. Il y en a $10^{7}=10\,000\,000$.

Enoncé 4 :
1) Une course de chevaux comporte 20 partants. Combien peut-il y avoir de résultats possibles de tiercés dans l'ordre ?
2) De combien de façons peut-on faire asseoir 7 personnes sur 7 chaises numérotées de 1 à 7 ?
3) Combien de mots (ayant un sens ou non) de 5 lettres distinctes peut-on écrire en utilisant les lettres de l'alphabet français ?
4) Une urne contient 10 boules numérotées respectivement 1, ... , 10. On en tire successivement trois sans remise. Combien de possibilités différentes peut-on obtenir ?

Solution 4 :
1) Soit E l'ensemble des numéros des chevaux. On a $Card(E)=20$. Un tiercé correspond à un arrangement de 3 éléments de E, il y en a $A_{20}^{3}=6840$.
2) Désignons par p_1, p_2, ..., p_7 les 7 personnes et posons $E=\{p_1, p_2, ..., p_7\}$. Une répartition peut se voir comme un arrangement des 7 éléments de E c'est-à-dire une permutation de E, il y en a $7! = 5040$.
3) A_{26}^{5}
4) A_{10}^{3}

Enoncé 5 :
1) On tire au hasard 6 boules parmi 49. Combien de tirages possibles peut-on avoir?
2) Dans un jeu de 32 cartes, on choisit 5 cartes au hasard (l'ensemble des 5 cartes s'appelle une "main"), calculer.
a) Nombre de mains au total.
b) Nombre de mains qui contiennent exactement 3 as.

c) Nombre de mains qui contiennent au moins 3 as :

3) Nombre de comités de 3 personnes que l'on peut élire dans une assemblée de 20 personnes :

Solution 5 :

1) C'est le nombre de façons de choisir 6 objets parmi 49, soit $C_{49}^{6} = \dfrac{49!}{6!43!} = 13983816$.

2) a) Nombre de mains au total : $C_{32}^{5} = \dfrac{32!}{5!27!} = 201\ 376$

b) Nombre de mains qui contiennent exactement 3 as : le nombre de façons de choisir 3 as parmi 4 est C_4^3 , le nombre de façons de choisir 2 cartes parmi 28 "non as" est : C_{28}^{2} On applique le principe multiplicatif car on prend une main de 3 as et une main de deux cartes « non as ». $C_4^3 \times C_{28}^2 = 1\ 512$

3) Nombre de mains qui contiennent au moins 3 as : $C_4^3 \times C_{28}^2 + C_4^4 \times C_{28}^1 = 1\ 540$

4) $C_{20}^{3} = 1140$.

S'exercer

1.c Une série de dix affirmations est proposée à un candidat à un concours. Le candidat doit répondre par « oui » ou « non » à chaque affirmation. Combien de grilles de réponses différentes peut-il donner à cette série d'affirmations ?

1.d Un park automobile comprend 20 parkings. De combien de possibilités peut-on garer 14 voitures dans ce parking ?

1.e On tire au hasard une main de 6 cartes d'un jeu de 32 cartes.

(i) Donner le nombre de mains possibles.

(ii) Donner le nombre de mains de cartes ayant exactement deux piques.

(iii) Donner le nombre de mains de cartes ayant les quatre « as ».

(iv) Donner le nombre de mains de cartes ayant au moins deux trèfles.

1.f Huit athlètes prennent le départ d'une course et franchissent tous la ligne d'arrivée ; Calculer le nombre de classements possibles à l'issue de cette course en supposant qu'il n'ya pas d'ex aequo.

1.g En utilisant l'arbre multiplicatif de choix, déterminer le nombre de parties qu'on peut former avec 4 éléments.

1.h On lance cinq fois de suite une pièce de monnaie. Donner le nombre de résultats possibles à l'issue de ces lancers.

Calculer le nombre de résultats possibles ayant trois fois « pile ».

LEÇON 2 PROBABILITÉ D'UN ÉVÉNEMENT.

- Utiliser le langage adéquat en relation avec une épreuve
- Calculer la probabilité de réalisation d'un événement dans le cas où tous les événements élémentaires ont la même probabilité d'être obtenus.

2.1. INTRODUCTION DE LA PROBABILITE D'UN ÉVÉNEMENT

2.1.1 VOCABULAIRE EN PROBABILITÉ.

Prendre un bon départ

On lance un dé parfaitement équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé.

1) a) Peut-on être fixé sur le résultat avant que le dé ne se stabilise complètement ? Une telle expérience est dite aléatoire.

b) Citer trois exemples d'expériences aléatoires dans la vie courante ?

2) Donner l'ensemble Ω des résultats possibles.

3) Donner les résultats qui sont favorables aux contraintes suivantes :

A : « Le chiffre obtenu est pair » ; B : « Le chiffre obtenu est inférieur à 5 » ;

C : « Le chiffre obtenu est supérieur ou égal à 5 » ;

Retenir

Une expérience ou épreuve aléatoire, est une expérience dont on ne peut prévoir l'issue avant qu'elle ne soit terminée.

Un résultat possible à l'issue d'une expérience est appelée une éventualité liée à cette expérience.

L'univers des possibilités est l'ensemble de tous les résultats possibles à l'issue d'une expérience aléatoire. On le note souvent Ω.

Un événement est un objectif ou un vœu à réaliser à l'issue d'une expérience aléatoire

L'événement certain est l'événement qui contient toutes les éventualités.

L'événement impossible est l'événement qui ne peut être réalisé. Il est noté $\emptyset$

Un événement élémentaire est un événement qui n'est réalisé que par une seule éventualité.

Soit A et B deux événements.

- On dit que A est inclus dans B et on note $A \subset B$, si toutes les éventualités qui réalisent A, réalisent aussi B.

- On note par $A \cap B$ l'ensemble des éventualités qui réalisent à la fois A et B.
- On note par $A \cup B$ l'ensemble des éventualités qui réalisent A ou B .
- On dit que A et B sont deux événements incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.
- On dit que A et B sont deux événements contraires si B est l'ensemble des éventualités de l'univers qui ne réalisent pas A. On note $B = \overline{A}$ ou $B = C_{\Omega}^{A}$.
- Deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un n'est pas liée ou conditionnée par celle de l'autre.

EXEMPLE

- On lance un dé dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6 et on s'intéresse au numér porté par la face supérieure du dé .L'univers est $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

  « Obtenir un nombre pair » est un événement. Il est réalisé par les éventualités 2,4 et 6. On écrit aussi A=$\{2;4;6\}$. $\overline{\text{A}} = \{1;3;5\}$. A et $\overline{\text{A}}$ sont incompatibles.

  « Obtenir un nombre à deux chiffres » est un événement impossible car il n'est réalisé par aucune des éventualités.

  « Obtenir un nombre inférieur à 10 » est un événement certain.

  « obtenir un nombre premier et pair » n'est satisfait que par l'éventualité 2. C'est donc un événement élémentaire.

  Si on lance deux dés, alors les résultats obtenus respectivement par ces dés sont indépendants. En revanche si on effectue deux tirages successifs sans remise des objets, l'objet tiré au premier tirage influence celui qui sera tiré au second tirage puisque la configuration des objets est modifiée d'un tirage à l'autre.

  <u>Remarque</u>. L'univers est toujours associé à une expérience aléatoire, et pas forcément à l'objet manipulé.

  Tout dé n'a pas nécessairement 6 faces ;les faces d'un dé peuvent porter d'autres numéros en dehors de ceux qu'on connaît d'un dé usuel.

- On lance un dé usuel et on s'intéresse à la parité du nombre obtenu : $\Omega = \{P\,;I\}$
- On lance une pièce de monnaie : $\Omega = \{P\,;F\}$
- On lance deux fois de suite une pièce de monnaie : $\Omega = \{PP\,;PF\,;FP\,;FF\}$
- On lance simultanement deux dés identiques de couleurs différantes dont les faces sont num rotées $\Omega_{S} = \{(1\,;1)\,;(1\,;2);(1\,;3)\,;(1\,;4)\,;\,......\}$. $\text{card}\Omega = 36$.

S'exercer

2.a On tire simultanément 4 jetons parmi 32 indiscernables au toucher , numérotés de 1 à 32 contenus dans un sac opaque .

Soit Ω l'univers associé à ce tirage.

Calculer CardΩ.

Soit l'événement A : « tirer exactement trois jetons dont les numéros sont inférieurs ou égaux à 9 ». Calculer Card(A).
Définir l'événement $\overline{A}$, puis en déduire card($\overline{A}$).

2.1.2 Probabilité d'un événement.

Prendre un bon départ

On lance un dé parfaitement équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé.

a) Quel est le nombre total de possibilités ?

b) Avec l'univers Ω lié à cette épreuve, on vient de constituer une population statistique et un événement en constitue une modalité. Désignons par $p(E)$ la fréquence de réalisation de l'événement E .

(i). Donner comme en statistique le mode de calcul de $p(B)$ et $p(A)$ où :.

B : « le numéro obtenu est inférieur à 4 »

A : « le numéro obtenu est impair et divise 10 »

(ii). Calculer sous forme de fractions irréductibles, $p(A); p(B), p(A\cap B)$, $p(A\cup B), p(\overline{A}), p(\Omega), p(\varnothing)$.

Retenir

Soit une expérience aléatoire dont l'univers est fini et est noté **Ω**.
En supposant que tous les résultats ont la même chance d'être obtenus ou encore que le poids d'un événement ne dépend que de l'effectif des éventualités qui le réalisent, sa fréquence de réalisation est encore appelée « probablité de sa réalisation ».
Si $p(A)$ désigne la probabilité de réalisation de l'événement A, alors $p(A)=\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$.
$p(\varnothing)=0$ et $p(\Omega)=1$.

REMARQUE

- On reconnaît qu'il y a équiprobabilité par l'emploi des expressions telles que : « parfaitement équilibré » ; « non truquée» ; « indiscernables au toucher » ; « au hasard » ,…
- Pour dénombrer **les cas favorables ou les cas possibles**, on peut utiliser des arbres , des tableaux ou des diagrammes .
- Si une éventualité peut être obtenue plus d'une fois, dans le langage ensembliste elle apparaît une seule fois, mais dans le calcul de la probabilité d'obtention de cette éventualité, on tiendra compte du nombre des possibilités d'apparition de cette éventualité.

EXEMPLE

- Pour un dé bien équilibré, il y a 6 événements élémentaires qui ont tous la même probabilité. La probabilité d'apparition d'un numéro est $\frac{1}{6}$. Si A est l'événement : « le numéro obenu est pair », les éventuallités qui réalisent A sont 2, 4 et 6. On a : $p(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.
- Deux des 6 faces d'un dé équilibré portent le numéro 1, une porte le numéro 2 et trois portent le numéro 3. On lance une fois le dé et on s'intéresse au numéro obtenu.
  1) Quelle est la probabilité d'obtenir 1 ? ; 2 ? ; 3 ?
  2) Quelle est la probabilité d'obtenir un numéro impair ?

Solution :

1) Soit $p(1)$ la probabilité d'obtenir le numéro 1.Il y a en réalité 6 éventualités dont le nombre peut se réduire à 3 compte tenu du caractère repétitif de certaines d'entre elles.
   Ainsi, $p(1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; $p(2)=\frac{1}{6}$; $p(3)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.
2) L'événement A : « le résultat obtenu est impair » . $p(A)=\frac{5}{6}$.

- On tire au hasard une main de 4 cartes d'un jeu de 32cartes indiscernables au toucher. Calculons la probabilité de l'événement A : « Obtenir exactement deux as »
  $card(\Omega)=C_{32}^{4}$; $Card(A)=C_4^2\times C_{28}^2$; $p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{C_4^2\times C_{28}^2}{C_{32}^4}$. On pourra simplifier l'expression de $p(A)$.

S'exercer

2.g Sur 27 convives, 10 ont apprécié l'entrée et le plat de résistance, 11 ont apprécié l'entrée et la sortie et 12 ont apprécié le plat de résistance et la sortie. Par ailleurs, 6 ont apprécié uniquement l'entrée, 3 ont apprécié uniquement le plat de résistance et 1 a apprécié uniquement la sortie.
Déterminer :

a) Le nombre de convives qui ont apprécié :
   i. L'entrée ; ii. Le plat de résistance ; iii. La sortie ; iv. rien du tout.
b) Le pourcentage des convives qui ont apprécié :
   i. L'entrée ; ii. Le plat de résistance ; iii. La sortie ; iv. Le menu tout entier ;
   v. Deux des composants du menu ; vi. Un seul des composants du menu ;
   vii. Rien du tout du menu.

2.h Une urne contient 5 boules rouges, 4 noires, 5 vertes.

A) On tire trois boules dans cette urne, successivement et sans remise.
   1) Quel est le nombre de tirages possibles ?
   2) Calculer la probabilité :
      a) d'obtenir trois boules rouges ; b) d'obtenir deux boules rouges exactement ;

c) d'obtenir au moins une boule rouge ; d) d'obtenir deux boules vertes et une noire ;
e) d'obtenir trois boules de la même couleur ; f) d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes.

B) Répondre aux questions précédentes sachant qu'on tire trois boules simultanément de cette urne.

2.2. QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION DE PROBABILITÉ « *P* ».

Prendre un bon départ

Activité 1

Soit p une fonction de probabilité sur les événements de Ω ; A et B deux événements.

a) Exprimer $Card(\overline{A})$ en fonction de $Card(A)$; $Card(A\cup B)$ en fonction des cardinaux des ensembles $A ; B$ et $A\cap B$.

b) En déduire que $p(A)+p(\overline{A})=1$; $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$.

c) Montrer alors que si A et B sont incompatibles alors $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$.

Activité 2

Un sac opaque contient huit boules indiscernables au toucher, dont 4 sont rouges ,3 vertes et une jaune. On tire trois fois de suite une boule de ce sac sans remettre la boule tirée avant d'effectuer le titrage qui suit.

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire.

a) Calculer Card(Ω).

b) Calculer la probabilité de l'événement A : « Les trois boules tirées sont de même couleur » .

Soient B : « les trois tirées sont toutes vertes » ; C : « les trois boules tirées sont de couleur rouge » ; D: « les trois boules tirées sont toutes jaunes ».

c) Calculer $p(B);p(C);p(D)$.

d) Montrer que $p(A)=P(B)+p(C)+p(D)$.

Retenir

Soit p une fonction de probabilité sur les événèments de Ω.

- Pour tout événement A de Ω, $p(\overline{A})=1-p(A)$.
- Pour tous événements A et B de Ω, $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$.
- Si $A\cap B=\varnothing$, alors $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$.

- La probabilité d'un événement A notée $p(A)$, est la somme des probabilités des événements élémentaires qui constituent A. En effet si $A=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\dots,w_s\}$ avec $\omega_i \neq \omega_j$ pour $i \neq j$, alors $p(A)=p(\{\omega_1\})+p(\{\omega_2\})+\dots+p(\{\omega_s\})$
- La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1

EXEMPLE

- Si on lance un dé bien équilibré, chaque face a la probabilité $\frac{1}{6}$ de sortir.
- De même, si on lance une pièce non truquée, pile et face ont la même probabilité (soit $\frac{1}{2}$) d'apparaître.
- On tire une carte au hasard d'un jeu ordinaire de 32 cartes . Quelle est la probabilité d'obtenir un as ?

Il y a 32 événements élémentaires donc $n=32$. L'événement A : « tirer un as » est formé de 4 événements élémentaires dont $k=4$. Donc : $p(A)=\frac{k}{n}=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$.

Exercices Résolus

Enoncé 1:

François dispose de 4 chemises bleues, 3 chemises rouges et 2 chemises vertes. Un matin, il choisit une chemise au hasard.

1) Quelle est la probabilité pour qu'il prenne une chemise rouge ?
2) S'apercevant que la chemise rouge qu'il a choisie a une tâche, il décide d'en prendre une autre. Quelle est la probabilité pour que ce soit encore une chemise rouge ?

Solution 1 :

1) François possède au total 9 chemises. Puisqu'il choisit au hasard, il y a équiprobabilité. Comme il a trois chemises rouges, la probabilité demandée vaut : $p=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.
2) François choisit maintenant entre 8 chemises et il y a toujours équiprobabilité. Puisqu'il reste deux chemises rouges, la probabilité cherchée vaut : $=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

Enoncé 2:

Une urne contient 2 boules rouges, 3 boules blanches et 5 boules noires, indiscernables au toucher. On en extrait au hasard et simultanément 2 boules.

Calculer la probabilité d'obtenir :

a) A : « Deux boules de même couleur »

b) B « Au moins une boule noire ».

Solution 2 :

Cardinal de l'univers des possibilités : $Card(\Omega)=C_{10}^2=\frac{10!}{2!(10-2)!}=\frac{10\times 9}{2}=45$

a) Probabilité d'obtenir deux boules de même couleur : $p(A)=\frac{(C_2^2C_8^0+C_3^2C_7^0+C_5^2C_5^0)}{45}$

b) $\overline{B}$ est: «Aucune boule tirée n'est noire». $p(\overline{B})=\frac{C_5^2C_5^0}{45}=\frac{10}{45}$ et $p(B)=1-p(\overline{B})=1-\frac{10}{45}=\frac{35}{45}=\frac{7}{9}$

Enoncé 3:

Une urne contient 5 boules rouges, 4 noires, 3 vertes. On tire trois boules dans cette urne, successivement, en remettant chaque boule tirée dans l'urne avant de prendre les suivantes.

1) Quel est le nombre de tirages possibles ?

2) Calculer la probabilité :

a) d'obtenir trois boules rouges ; b) d'obtenir deux boules rouges exactement ;

c) d'obtenir au moins une boule rouge ; d) d'obtenir deux boules vertes et une noire ;

e) d'obtenir trois boules de la même couleur ;

f) d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes.

Solution 3 :

1) Il faut imaginer que les boules portent des numéros permettant de les différencier. Si nous supposons par exemple que les boules rouges portent les numéros de 1 à 5, il n'est pas équivalent de tirer 1-1-5 que 1-1-1 alors qu'au résultat on a trois boules rouges.
Puisqu'il y a remise, il y a l'ordre. Un tirage est donc une 3-listes de l'ensemble de 12 éléments. Il y a donc $12^3 = 1728$ tirages possibles.

2) a) Chaque tirage a la même probabilité d'être réalisé. La probabilité d'un tirage est donc égale au nombre de cas favorables à ce tirage sur le nombre de cas possibles.
Un tirage de 3 boules rouges correspond à une 3-listes dans un ensemble à 5 éléments. Il y a $5^3=125$ tirages de ce type.
Donc la probabilité cherchée est égale à : $p(A)=\frac{125}{1728}$

b) Pour avoir un tirage comprenant deux boules rouges exactement, on commence par choisir la place des deux boules rouges. Il y a donc C_3^2 façons de le faire. Ensuite, on associe aux deux places choisies une des 5 boules rouges, ce qui revient à une 2 -listes d' un ensemble à 5 éléments. Il y a 5^2 de telles 2- listes.
Enfin ,on associe à la place libre une boule qui n'est pas rouge parmi les 7 boules restantes. Il y a bien sûr 7 façons de le faire.

On a donc $C_3^2\times5^2\times7=525$ tirages avec exactement deux boules rouges.

On a donc $p(B)=\frac{525}{1728}=\frac{175}{576}$.

c) Plutôt que de chercher la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge, il vaut mieux chercher celle de l'événement contraire : "obtenir aucune boule rouge". Il s'agit donc aux trois tirages de n'avoir que des boules noires ou vertes. Chaque tirage correspond alors à une 3-listes d'un ensemble à 7 éléments. Il y a $7^3=343$ de telles 3-listes.

Par conséquent, la probabilité de n'obtenir aucune boule rouge est égale à $P(\overline{C})=\frac{343}{1728}$.

Donc la probabilité cherchée est égale à : $p(C)=1-p(\overline{C})=1-\frac{343}{1728}=\frac{1385}{1728}$.

d) On a, en raisonnant comme dans les questions précédentes : C_3^2 façons de placer les deux vertes, 3^2 choix pour associer à chaque place choisie une boule verte et D choix pour mettre une boule noire dans la place prévue. On a donc $C_3^2 \times 3^2 \times 4 = 108$ tirages possibles.

On a donc $p(D)=\frac{108}{1728}=\frac{1}{16}$.

e) En reprenant ce que l'on a vu au a), on a 5^3 tirages de trois boules rouges, 3^3 tirages de trois boules vertes et 4^3 tirages de 5 boules noires.

Donc $5^3+3^3+4^3=216$ tirages de trois boules de même couleur.

On a donc $p(E)=\frac{216}{1728}=\frac{1}{8}$.

f) On a 3! façons de déterminer les places respectives des trois boules. Ensuite on a 5 façons de placer une boule rouge à sa place, 3 façons de placer une boule verte et 4 façons de placer une boule noire.

On a donc : $3!\times5\times3\times4=360$ tirages possibles. La probabilité demandée est $\frac{360}{1728}$

S'exercer

2.f.

x_i \ y_i	6	10	14	18
2	21	24	18	0
3	12	15	12	3
4	0	9	27	9

Une boîte non transparente contient 150 boutons de 10 types différents, indiscernables au toucher, destinés à la confection des vêtements. Le tableau donne leur répartition en fonction du nombre de trous (x_i) et de leur diamètre en m (y_i). On tire au hasard un bouton de la boîte. Calculer la probabilité d'obtenir :

a. Un bouton à 3 trous de 10 mm de diamètre ;

b. Un bouton de 14 mm de diamètre ;

c. Un bouton à 2 trous ;

d. Un bouton de diamètre égal à 6 ou à 10 mm.

2.h On suppose que l'univers est formé de 5 événements élémentaires a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 ayant pour probabilités : $p_1=\frac{1}{6}$, $p_2=\frac{1}{6}$, $p_3=\frac{1}{6}, p_4=\frac{1}{4}, p_5=\frac{1}{4}$.

Soit $A=\{a_1;a_3;a_4\}$. Calculer la probabilité de A.

2.g Dans un univers, on considère deux événements incompatibles A et B tels que $p(A)=0,2$ et $p(B)=0,7$.

Déterminer $p(A\cap B)$, $p(A\cup B)$, $p(\overline{A})$, $p(\overline{B})$.

2.3. PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Prendre un bon départ

Activité 1

Les statistiques des performances dans un jury de baccalauréat scientifique ont donné les résultats suivants par sexe.

	Garçons	Filles	Total
Admis	60	90	
Refusés	20	30	
Total			

a) Compléter ce tableau, puis calculer le pourcentage de réussite des candidats pour ce jury.

b) On tire au hasard un candidat de ce jury. Calculer les probabilités des événements suivants :

A :"le candidat est admis" ; B : « le candidat est une fille et est admis" ;

C : « le candidat est un garçon et est refusé »

c) On suppose que le candidat est admis. Calculer la probabilité qu'il soit un garçon.

d) On suppose que le candidat est une fille. Calculer la probabilité qu'il soit refusé.

Activité 2

Un sac contient 8 jetons dont 3 portent le numéro 1 ; 4 le numéro 2 et le dernier porte le numéro 3. On tire deux jetons du sac l'un après l'autre. Soient A : « le premier jeton porte le numéro 2 » et B : « le deuxième jeton porte le numéro 2 », deux événements liés à cette expérience aléatoire.

a) À partir d'un tableau à double entrée , calculer les probabilités des événements A, B et $A \cap B$ dans les cas de tirage avec remise et de tirage sans remise.

b) Dans quel cas les événements A et B sont-ils indépendants ?

c) Dans ce cas, montrer que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Retenir

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire et p une fonction de probabilité définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$.Soit A un événement distinct de l'événement impossible et B un autre événement.

- L'événement noté (B / A) est l'ensemble des éventualités qui réalisent B sachant qu'elles réalisent A. On l'appelle l'événement B conditionné par A et il se lit « B sachant A ».
- $p(B / A) = \dfrac{card(B \cap A)}{card(A)} = \dfrac{p(B \cap A)}{p(A)}$; $p(A \cap B) = p(B / A) \times P(A)$

$p(B/A)$ est encore noté $p_A(B)$.

- A et B sont indépendants si et seulement si (B/A) et B sont réalisés par les mêmes éventualités et ainsi $p(B/A)=p(B); soit \ \ p(B\cap A)=p(B)\times p(A)$.

EXEMPLE

On tire d'un sac contenant dix jetons dont 4 sont de couleur rouge et 6 sont de couleur blanche, deux jetons du sac l'un après l'autre sans remettre dans le sac le premier jeton tiré.

Calculons la probabilité de tirer un jeton rouge au premier tirage et un jeton blanc au deuxième tirage.

Si Ω est l'univers de toutes les éventualités liées à cette expérience aléatoire, alors card $(\Omega)= {}_{10} = 10\times 9 = 90$.

Soit les événements A : « le jeton tiré au premier tirage est rouge » et B : « le jeton tiré au deuxième tirage est blanc ».

Card $(A\cap B)=4\times 6=24$. $\quad p(A\cap B)=\dfrac{24}{90}=\dfrac{4}{15}$.

Calculons autrement $p(A\cap B)$.

$P(A\cap B)=p(B/A)\times p(A)$. Or $p(B/A)=\dfrac{6}{9}$ et $p(A)=\dfrac{4}{10}$.

$p(A\cap B)=\dfrac{6}{9}\times\dfrac{4}{10}=\dfrac{24}{90}=\dfrac{4}{15}$.

Le jeton tiré au deuxième tirage est blanc. Calculons la probabilité pourque le jeton tiré au premier tirage ait été rouge.

On demande de calculer la probabilité de l'événement (A/B).

Soit Ω_1 l'ensemble des éventualités pour lesquelles le deuxième tirage est un jeton blanc.

Card$(\Omega_1)=24+(6\times 6-6)=54$. Soit A l'événement formé des éventualités de Ω_1 telles que le jeton rouge soit tiré au premier tirage. Card(A)=24.

$p(A)=\dfrac{24}{54}=\dfrac{4}{9}$. D'où $p(A/B)=\dfrac{4}{9}$.

Si le tirage avait été avec remise, les événements A et B auraient été indépendants et alors $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$.

REMARQUE

- Les affirmations suivantes sont équivalentes :

(a) A et B sont indépendants ; (b) $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants ;

(c) A et $\overline{B}$ sont indépendants ; (d) $\overline{A}$ et B sont indépendants.

- Si $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ est un système d'événements qui forment une partition de l'univers, alors pour tout événement A,

$$p(A)=P(E_1)\times p(A/E_1)+p(E_2)\times p(A/E_2)+\ldots+p(E_n)\times p(A/E_n).$$

Cette relation est appelée formule des probabilités totales ou encore le théorème des Bayes ou théorème des probabilités totales.

S'exercer

2.i Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules blanches. On tire au hasard et sans remise, 2 boules de l'urne.

a) Déterminer la probabilité d'avoir deux boules rouges.

b) On tire au hasard deux boules et on constate qu'elles sont rouges.
Quelle est la probabilité de tirer à nouveau deux boules et de trouver deux boules rouges ?

2.j Une machine est constituée de deux éléments A et B. La défectuosité d'un seul élément suffit à mettre hors service la machine et on exclut toute éventualité de panne. Les avaries éventuelles relatives aux éléments A et B sont deux événements indépendants de probabilités respectives $a=0{,}1$ et $b=0{,}2$.
Calculer la probabilité pour que la machine soit hors service.

2.k Un atelier de montage reçoit des pièces qui proviennent soit de l'usine A, soit de l'usine B, soit de l'usine C. Les proportions sont 45% pour A, 30% pour B, 25% pour C.

Parmi les pièces provenant de A, il y en a 3% de défectueuses ; parmi celles provenant de B, il y en a 5% de défectueuses et parmi celles provenant de C, il y en a 2% de défectueuses.

Calculer le pourcentage de pièces défectueuses dans l'ensemble des pièces reçues.

LEÇON 3 VARIABLES ALÉATOIRES.

- ➢ Établir la loi de probabilité d'une variable aléatoire ;
- ➢ Calculer les différents paramètres liés à une variable aléatoire ;
- ➢ Reconnaître une expérience aléatoire liée aux épreuves répétées de Bernoulli, puis calculer des probabilités dans ce cas.

3.1. PRÉSENTATION

Prendre un bon départ

Un joueur jette trois fois de suite une pièce de monnaie parfaite et s'intéresse à la nature de la face supérieure de la pièce de monnaie après qu'elle se soit stabilisée.

Soit Ω l'univers de toutes les possibilités.

a) Donner cinq éventualités, puis donner le nombre de toutes les éventualités liées à cette épreuve.
La sortie de « Face » fait gagner 1000 francs alors celle de « Pile » fait perdre 600 francs.
On désigne par X l'application définie sur (Ω), qui à un résultat fait correspondre le gain algébrique du joueur.

b) Calculer $X(FFF);X(PFP);X(FPP)$.

c) Donner en extension l'ensemble Ω de toutes les valeurs prises par X sur Ω.

Retenir

Soit Ω l'univers de toutes les possibilités issues d'une épreuve aléatoire.

Toute relation X qui associe une valeur réelle à chacune des éventualités issue de l'épreuve est appelée variable aléatoire sur Ω.

L'ensemble des valeurs possibles de X sur Ω est appelé univers image de Ω par X et est noté $X(\Omega)$.

EXEMPLE

Un sac contient 6 boules indiscernables au toucher dont 4 boules rouges et deux vertes. Un joueur tire simultanément 3 boules du sac. L'obtention d'une boule rouge donne $-3\,points$ et celle d'une boule verte donne 5 points.

Soit Y le gain algébrique du joueur.

Donner les valeurs possibles de Y.

Si Ω est l'univers de tous les résultats possibles à l'issue de ce tirage, alors card(Ω)=C_6^3=20.

S'il n'y avait pas jusqu'à 20 possibilités, alors on les citerait et on calculerait la valeur de Y sur chacune d'elle.

À l'issue de cette épreuve, le joueur peut avoir :

- trois boules rouges(RRR) ;
- deux boules rouges et une boule verte(RRV) ;
- une boule rouge et deux boules vertes(RVV).

$Y(RRR)=-9; Y(RRV)=-1; Y(RVV)=7$.

Les valeurs possibles de Y sur Ω sont $-9;-1$ et 7. L'unité ici étant le point.

S'exercer

3.a On lance deux fois de suite un dé parfait dont les faces portent respectivement les numéros 1,2,3,4,5,6.

X est la variable aléatoire qui à un résultat obtenu, associe $|a-b|$ où a et b sont les numéros obtenus respectivement au premier et au deuxième lancer de ce dé.

Donner les valeurs possibles de X.

3.2. Loi de probabilité et caractéristiques d'une variable aléatoire.

Prendre un bon départ

Un joueur tire au hasard et simultanément quatre cartes d'un jeu de 32. X est la variable aléatoire donnant le nombre d'« as » contenues dans la main de cartes tirées.

a) Déterminer l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut pendre X.

Soit a un réel quelconque. L'événement $(X=a)$ est l'ensemble des éventualités dont l'image par X donne a.

b) Calculer la probabilité de chacun des événements : $(X=2)$;$(X<3)$;$(X\geq 3)$; $(X=7)$.

c) Calculer toutes les probabilités $p(X=a)$ où a est une valeur de $X(\Omega)$.

d) Dresser et compléter un tableau à deux lignes dont la première est constituée des valeurs possibles de X (classées par ordre croissant de préférence), et la deuxième, des probabilités $p(X=a)$ où a est le nombre réel de la première ligne de la colonne correspondante.

e) En assimilant ce tableau à un tableau des fréquences d'une série statistique X, calculer la moyenne $\overline{X}$, la variance V(X), l'écart-type $\sigma(X)$ de X.

Retenir

Soit X une variable aléatoire sur un espace de probabilité (Ω ,$\mathcal{P}(\Omega)$,p) ; $x_1;x_2;\ldots;x_n$ les valeurs possibles de X sur Ω ; $p_i = p(X = x_i)$.

- Déterminer la loi de probabilité ou encore la distribution de probabilité de la variable X est équivalente à déterminer les valeurs possibles de X et toutes les probabilités p_i .
- Après calculs, les résultats peuvent être consignés dans un tableau comme suit :

x_i	x_1	x_2	x_3	.	x_n
$p_i = p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3		p_n

- $\overline{X} = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \ldots + x_n \times p_n$; La moyenne $\overline{X}$ notée encore E(X), de la série (x_i) ,est appelée l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
- $V(X) = p_1 \times (x_1 - \overline{X})^2 + \ldots + p_n \times (x_n - \overline{X})^2$;
- $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = (p_1 \times (x_1)^2 + \ldots + p_n \times (x_n)^2) - (E(X))^2$ est la variance de X
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ est l'écart type de X.

REMARQUE

- Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω.

  $X + Y$ et aX sont aussi des variables aléatoires sur Ω et,
  - $E(a) = a$;
  - $E(aX) = aE(X)$;
  - $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$;
  - $V(a) = 0$;
  - $V(aX) = a^2V(X)$;
  - Si X et Y sont indépendantes, alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.
- Pour la série ($x_i ; p_i$), $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

EXEMPLE

On tire simultanément 4 boules d'un sac contenant 10 boules dont 4 sont de couleur verte et le reste de couleur rouge. Soit X le nombre de boules vertes tirées.

Si Ω est l'univers de toutes les possibilités, alors $card(\Omega) = C_{10}^4 = 210$.

$X(\Omega) = \{0;1;2;3;4\}$

$p(X=0) = \frac{C_6^4}{210} = \frac{15}{210} = \frac{5}{70}$; $p(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_6^3}{210} = \frac{80}{210} = \frac{8}{21}$;

$p(X=2)=\dfrac{C_4^2\times C_6^2}{210}=\dfrac{90}{210}=\dfrac{3}{7}$; $p(X=3)=\dfrac{C_4^3\times C_6^1}{210}=\dfrac{24}{210}=\dfrac{8}{70}$;

$p(X=4)=\dfrac{C_4^4}{210}=\dfrac{1}{210}$.

Voici le tableau de distribution de probabilité de X.

a	0	1	2	3	4
$P(X=a)$	$\dfrac{5}{70}$	$\dfrac{8}{21}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{8}{70}$	$\dfrac{1}{210}$

$E(X)=0\times\dfrac{15}{210}+1\times\dfrac{80}{210}+2\times\dfrac{90}{210}+3\times\dfrac{24}{210}+4\times\dfrac{1}{210}=\dfrac{336}{210}=\dfrac{56}{35}$.

$E(X^2)=0^2\times\dfrac{15}{210}+1^2\times\dfrac{80}{210}+2^2\times\dfrac{90}{210}+3^2\times\dfrac{24}{210}+4^2\times\dfrac{1}{210}=\dfrac{660}{210}=\dfrac{22}{7}$.

$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\dfrac{22}{7}-\left(\dfrac{56}{35}\right)^2=\dfrac{22}{7}-\dfrac{3136}{1225}=\dfrac{22}{7}-2,56=\dfrac{4,08}{7}$.

$\sigma(X)=\sqrt{\dfrac{4,08}{7}}$.

S'exercer

3.b Une urne opaque contient 5 boules indiscernables au toucher : deux boules sont rouges et portent le nombre 1, deux boules sont vertes et portent le nombre 2 ; la dernière boule est blanche et porte le nombre 3.

On tire simultanément trois boules de l'urne.

a) Déterminer le nombre de tirages possibles.

b) Calculer les probabilités respectives des événements :

A : « tirer exactement deux boules rouges » ;

B : « tirer trois boules de couleurs différentes » ;

C : « tirer une boule blanche ».

c) On note par X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage, la somme des nombres inscrits sur les boules tirées.

(i) Donner les valeurs possibles de X.

(ii) Déterminer la loi de probabilité de la variable X.

(iii) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X.

3.c Une usine rectifie des pièces d'horlogerie. À l'issue du processus de fabrication, une pièce peut présenter 0,1,2 ou 3 défauts d'aspect.

Soit X la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de défauts d'une pièce tirée au hasard dans un lot. La loi de X est définie par le tableau suivant :

P(X=0)	P(X=1)	P(X=2)	P(X=3)
0,920	0,06	0,016	0,004

Calculer l'espérance mathématique de X.

Calculer la variance et l'écart type de X.

Le prix de vente d'une pièce dépend du nombre de défauts qu'elle présente.

Nombre de défauts	0	1	2	3
Prix de vente (en francs)	15 000	10 000	7 500	2 500

Soit Y la variable aléatoire ayant pour valeur le prix de vente d'une pièce tirée au hasard dans un lot.

Déterminer la loi de probabilité de Y.

Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de Y.

3.3. FONCTION DE RÉPARTITION D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE.

Prendre un bon départ

Soit X une variable aléatoire dont la loi de distribution est présentée dans le tableau suivant :

a	0	1	2	3	4
$P(X=a)$	$\frac{5}{70}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{8}{70}$	$\frac{1}{210}$

a) Calculer les probabilités des événements suivants :
$(X \leq a)$ pour a pris dans l'ensemble $\{0;1;2;3;4\}$.

b) Montrer que *la fonction F* définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = p(X \leq x)$ est constante sur les intervalles $]-\infty;0[;[0;1[;[1;2[;[2;3[;[3;4[;\ [4;+\infty[$.(On précisera la valeur de la constante sur chacun de ces intervalles).

c) Construire la représentation graphique de la fonction F dans un repère orthogonal (O,I,J) en prenant les unités convenables sur les axes de ce repère.

Retenir

Soit X une variable aléatoire sur l'univers Ω telle que $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$

- La fonction de répartition de X est la fonction F définie de $\mathbb{R}$ vers $[0;1]$ par : $F(x) = p(X \leq x)$.
- F est constante sur les intervalles $]-\infty;x_1[;[x_1;x_2[;[x_2;x_3[;\ldots;[x_n;+\infty[$.
- F est une fonction en escalier.
- Si la distribution des probabilités de X est

x_i	x_1	x_2	x_3	x_n
$p_i = p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	p_n

alors, Sur $]-\infty;x_1[$, $F(x) = 0$; sur $[x_1;x_2[$, $F(x) = p_1$; sur $[x_2;x_3[$, $F(x) = p_1 + p_2$;..... ; sur $[x_n;+\infty[$, $F(x) = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + P_n = 1$.

EXEMPLE

Un sac contient 6 boules indiscernables au toucher dont 4 boules rouges et deux vertes. Un joueur tire simultanément 3 boules du sac. L'obtention d'une boule rouge donne -3 *points* et celle d'une boule verte donne 5 points. Soit Y le gain du joueur.

Y peut prendre les valeurs $-9;-1\,ou\,7$. Déterminons la loi de probabilité de Y.

$p(Y=-9) = p(\{R;R;R\}) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$; $p(Y=-1) = p(\{R;R;V\}) = \frac{C_4^2 \times C_2^1}{C_6^3} = \frac{3}{5}$;

$p(Y=7) = p(\{R;V;V\}) = \frac{C_4^1 \times C_2^2}{C_6^3} = \frac{1}{5}$.

Soit F la fonction de répartition de Y. F est définie par :

pour $x < -9$, $F(x) = 0$; pour $-9 \leq x < -1$, $F(x) = -$; $pour -1 \leq x < 7$, $F(x) = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$; pour $x \geq 7$, $F(x) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1$.

S'exercer

3.e Une boîte contient 4 ampoules de 40 watts, 6 ampoules de 60 watts et 10 ampoules de 100 watts. On tire au hasard une ampoule de la boîte. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe la puissance exprimée en watts.

a) Donner sous forme d'un tableau, la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X.

c) Définir, puis construire la représentation graphique la fonction de repartition de X dans un repère orthogonal.

3.f Le président d'un club décide d'organiser une Tombola. Tous les billets , au nombre 500, sont vendus.

L'un des billets permet de gagner un lot d'une valeur de 62 000 francs, 9 billets permettent de gagner 7 000 francs, 50 billets sont remboursés, et les autres sont perdants.

1) Un joueur achète un billet. Exprimer en pourcentages :

a) La probabilité de gagner un lot de 7000 francs ;
b) La probabilité d'avoir un billet perdant.

2) Des billets sont vendus 500 francs l'unité. Calculer le gain de la trésorerie.
3) Le gain du joueur est la différence entre le montant du lot et le prix d'achat du billet. Ainsi, pour des billets remboursés, le gain est nul et, pour un billet perdant, le gain est négatif.
Soit X le gain algébrique du joueur.
a) Donner les valeurs possibles de X.
b) Donner la loi de probabilité de X.
c) Définir la fonction de répartition de X, ainsi que sa représentation graphique.

3.4. ÉPREUVES RÉPETÉES DE BERNOULLI.

3.4.1 Présentation.

Prendre un bon départ

Soit A un événement issu d'une épreuve aléatoire, dont la probabilité de réalisation est p.

a) Calculer la probabilité de l'événement $\overline{A}$.
b) On répète la même épreuve 7 fois de manières indépendantes et dans les mêmes conditions.
Soit l'événement E : « réaliser trois fois l'événement A ».
Une possibilité est par exemple $A\overline{A}\overline{A}\overline{A}A\overline{A}A$ qui signifie que A a été réalisé aux lancers 1 ; 5 et 7.

i) Donner cinq autres listes contenant trois fois A. Montrer qu'il y autant de listes contenant trois A que d'anagrammes de « $A\overline{A}\overline{A}\overline{A}A\overline{A}A$ » et que le nombre de telles listes est C_7^3.

ii) En déduire que $p(E) = C_7^3 \times p(A\overline{A}\overline{A}\overline{A}A\overline{A}A)$.

iii) Les épreuves étant indépendantes, montrer que $p(A\overline{A}\overline{A}\overline{A}A\overline{A}A) = (p(A))^3 \times (p(\overline{A}))^4 = p^3 \times (1-p)^4$.

iv) En déduire que $p(E) = C_7^3 \times p^3 \times (1-p)^4$.

Retenir

Soit A un événement issu d'une épreuve aléatoire dont la probabilité de réalisation est p.
Si on répète cette épreuve n fois de suite, de manières indépendantes et dans les mêmes conditions, alors la probabilité p_k de réaliser k fois l'événement A est $p_k = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$ où $0 \leq k \leq n$.
Cette épreuve répétée est dite de Bernoulli, et le couple $(n; p)$ en est le paramètre.

EXEMPLE

Un sac contient 8 jetons indiscernables au toucher dont 5 jetons de couleur noire. On tire simultanément 6 jetons du sac.

Calculons la probabilité d'avoir exactement trois jetons noirs.

Soit p cette probabilité. $p=\frac{C_5^3\times C_3^3}{C_8^6}=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$.

On remet les jetons tirés dans le sac, puis on recommence le tirage simultané de 6 jetons. En refaisant un tel tirage 10 fois de suite, calculons la probabilité d'avoir obtenu 6 fois « trois jetons noirs exactement ».

On a ici une épreuve répétée de paramètre $\left(10;\frac{5}{14}\right)$.

Soit p la probabilité d'avoir 10 fois « trois jetons noirs ».

$p=C_{10}^6\times\left(\frac{5}{14}\right)^6\times\left(1-\left(\frac{5}{14}\right)\right)^4=C_{10}^6\times\left(\frac{5}{14}\right)^6\times\left(\frac{9}{15}\right)^4$ (qu'on pourra au besoin calculer et avoir le résultat sous la forme d'une fraction irréductible ou avoir une valeur approchée de p).

On effectue maintenant cette épreuve n fois de suite et on note par p_n la probabilité de E : « obtenir au moins une fois trois jetons de couleur noire ».

L'événement contraire de E est $\overline{\mathrm{E}}$ « obtenir zéro fois trois jetons de couleur noire ».

$p(E)+p(\overline{E})=1$. Or $p(\overline{E})=C_n^0\times\left(\frac{5}{14}\right)^0\times\left(\frac{9}{14}\right)^n=\left(\frac{9}{14}\right)^n$ et donc $p(E)=1-\left(\frac{9}{14}\right)^n$.

Déterminons le nombre minimum de fois de répéter ce tirage de 6 jetons pour que la probabilité de E soit au moins égale à $0,95$.

On veut avoir $p(E)\geq 0,95$. Il faut que $1-\left(\frac{9}{14}\right)^n\geq 0,95;\,soit\ \left(\frac{9}{14}\right)^n\leq 0,05$.

D'où $\ln\left(\left(\frac{9}{14}\right)^n\right)\leq\ln(0,05)$ on encore $n\times ln\left(\frac{9}{14}\right)\leq ln(0,05)$.

$n\geq\frac{ln(0,05)}{ln\left(\frac{9}{14}\right)}$; soit $\geq 6,78$.

La valeur minimale de n est 7.

S'exercer

3.a On tire simultanément au hasard quatre cartes d'un jeu de 32 cartes.

Calculer la probabilité d'obtenir au moins un as.

On répète cette expérience 5 fois de suite dans les mêmes conditions.

Calculer la probabilité d'avoir :

(i) exactement deux fois "au moins un as."

(ii) au moins une fois "au moins un as."

(iii) aucune fois "au moins un as."

3.f On lance 10 fois de suite un dé cubique équilibré dont 2 faces portent le numéro 3. Calculer la probabilité d'obtenir trois fois une face portant le numéro 3.

3.g Un sac contient dix boules rouges et 2 boules blanches.
On tire simultanément trois boules du sac.
Calculer la probabilité d'avoir les boules de couleurs différentes.
On répète cette expérience trois fois de suite . Calculer la probabilité d'avoir exactement deux fois des boules de couleurs différentes.

3.h Combien de fois faut-il lancer un dé cubique, équilibré , dont une seule face porte le numéro 5 pour que la probabilité d'obtenir la face portant le numéro 5 au moins une fois soit supérieure ou égale à 0,9 ?

3.4.2 Espérance mathématique et variance de la variable aléatoire associée à une épreuve répétée de Bernoulli.

Prendre un bon départ

On répète une épreuve n fois de suite de manières indépendantes et soit A un événement issu de cette épreuve, de probabilité p .

Soit X la variable aléatoire qui à la suite de ces épreuves, associe le nombre de fois que l'événement A a été réalisé.

a) Donner les valeurs possibles de X.

b) Donner en fonction de $k, n\, et\, p$ l'expression de la probabilité de l'événement $(X=k)$ où $0 \leq k \leq n$.

c) Soit X_i le nombre de fois que l'événement A a été obtenu à la $i-ième$ épreuve.

i) Montrer que les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots et\, X_n$ sont indépendantes.

ii) Montrer que $E(X_i)=p$ et $V(X_i)=p(1-p)$.

iii) Montrer que $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$.

iv) En déduire que $E(X)=n\times p$ et que $V(X)=n\times p\times(1-p)$.

Retenir

On répète une épreuve n fois de suite de manières indépendantes et soit A un événement issu d'une telle épreuve, de probabilité p .

Soit X la variable aléatoire qui à la suite de ces épreuves, associe le nombre de fois que l'événement A a été réalisé.

- X peut prendre les valeurs entières de l'intervalle $[0;n]$.
- Pour tout entier $k\, de [0;n]$, $p(X=k)=C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$.

- La loi de probabilité de est appelée loi binomiale de paramètre $(n; p)$.
- Si une variable aléatoire suit la loi binomiale de paramètre $(n; p)$, alors
  $E(X) = n \times p$, $V(X) = n \times p \times (1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{n \times p \times (1-p)}$

EXEMPLE

On lance un dé cubique , dont les faces portent respectivement les numéros 1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6 et tel que la probabilité d'obtenir un numéro k est proportionnelle à k .

a) Calculons la probabilité d'obtenir la face portant le numéro 5.

Notons par p_k la probabilité d'obtenir la face portant le numéro k .

On a $\frac{p_1}{1} = \frac{p_2}{2} = \ldots = \frac{p_6}{6}$ et $p_1 + p_2 + \ldots + p_6 = 1$.

On peut écrire aussi : $\frac{p_1}{1} = \frac{p_2}{2} = \ldots = \frac{p_6}{6} = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_6}{1+2+3+4+5+6} = \frac{1}{21}$.

Il vient que $p_5 = \frac{5}{21}$.

On lance ce dé 15 fois de suite de manière identique et indépendante et X est la variable aléatoire qui donne le nombre de fois au cours desquelles le nombre 5 a été obtenu.

b) Calculons l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

X suit la loi binomiale de paramètre $\left(15; \frac{5}{21}\right)$.

$E(X) = 15 \times \frac{5}{21} = \frac{75}{21}$; $V(X) = 15 \times \frac{5}{21} \times \frac{16}{21} = \frac{1200}{21^2}$; $\sigma(X) = \sqrt{\frac{1200}{21^2}} = \frac{20}{21} \times \sqrt{3}$

S'exercer

3.e À chaque tir, la probabilité qu'un joueur touche la cible est 0,7.Un joueur effectue 10 tirs successifs avec le même matériel. Soit X la variable aléatoire qui associe le nombre de fois qu'il atteint la cible.

i) Donner les valeurs possibles de X.

ii) Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de X.

3.f On a constaté que dans une famille monogame , la probabilité lors d'une naissance d'avoir un garçon est de $\frac{5}{9}$.

i) Calculer la probabilité d'avoir trois garçons exactement après 6 naissances ;

ii) Calculer le nombre moyen de filles que cette famille peut espérer avoir après 5 naissances (on suppose qu'il y a un seul nouveau né au cours d'une naissance).

S'ENTRAÎNER

PROBLÈMES DE DÉNOMBREMENT.

1.

De combien de manières peut-on garer 2 voitures dans un parking qui a 5 places ?
De combien de manières peut-on garer 5 voitures dans un parking qui a 5 places ?

2.

Une commune compte 20 conseillers municipaux parmi lesquels madame Koné et on voudrait former un bureau comprenant un maire et ses trois adjoints. Sachant qu'il n y a pas de cumul de postes, déterminer le nombre de possibilités qu'on a de constituer un tel bureau.
Combien de possibilités a-t-on de constituer un bureau dans lequel madame Koné est maire ?

3.

Combien de nombres à quatre chiffres peut-on former avec les chiffres 2,6,7,8,9 ?

Combien de tels nombres sont-ils pairs ?

4.

Une marque d'automobiles produit 4 modèles A,B,C et D. Les modèles A et B se font en quatre carrosseries : berlines,coupé,cabriolet et utilitaire.Les modèles C et D se font en deux carrosseries :coupé et berlines
Chaque modèle est vendu en sept coloris. Calculer le nombre de choix qui s'offrent à un client désirant d'acheter une voiture de cette marque.

5.

Un touriste doit visiter les villes B,C,D,E partant de la ville A.

1) Déterminer le nombre total de possibilités d'itinéraires pour ce touriste.
2) Combien a-t-il d'itinéraires s'il doit passer par la ville C avant la ville D ?

6.

On tire au hasard une boule d'une urne contenant une boule jaune J, une boule verte V et une boule rouge R. On remet la boule tirée dans l'urne avant d'effectuer le prochain tirage.
Un résultat est un couple dont le premier élément est la boule tirée au premier tirage et le deuxième celle tirée au deuxième tirage.

a) Déterminer le nombre de résultats possibles.
b) Énumérer tous ces résultats.
c) Le tirage d'une boule jaune fait perdre 300 francs, celui d'une boule verte fait gagner 100 francs et celui d'une boule jaune fait gagner 200 francs. Donner les différents gains possibles pour celui qui effectue ces tirages.

7.

Combien de nombres à six chiffres peut-on former dans lequel figure 2 fois le chiffre 4, 3 fois le chiffre 7 et une fois le chiffre 1.

8.

On tire simultanément 6 cartes parmi 32.
Déterminer le nombre de mains de cartes qui contiennent au plus 3 as.

9.

Un étudiant possède 14 livres de quatre matières différentes : 4 livres de mathématiques, 5 d'économie, 3 de philosophie, 2 d'anglais.
Il veut ranger ces livres sur une étagère.

1) De combien de façons peut-il le faire s'il ne tient pas compte des matières ?
2) De combien de façons peut-il le faire s'il range d'abord les livres d'anglais, puis ceux d'économie,puis ceux de mathématiques, et enfin ceux de philosophie ?

3) De combien de façons peut-il le faire s'il range les livres par matière ?

10.

Une urne contient 13 boules indiscernables au toucher dont six blanches et 7 noires.On tire simultanément trois boules du sac.
Déterminer le nombre de possibiltés d'avoir ;
a) 3 boules blanches ;
b) 2 boules noires ;
c) au moins une boule blanche ;
d) au plus deux boules noires.

11.

Un chef d'entreprise doit choisir 4 employés parmi 20 candidats dont 13 femmes et 7 hommes.
a) Combien de choix s'offrent à ce chef ?
b) De combien de manières peut-il faire son choix sachant qu'il doit choisir au moins un homme et au moins une femme ?

12.

Une assemblée qui compte 20 hommes et 15 femmes dont madame Ada et monsieur Stephen, veut élire un comité de six membres.
a) Combien de comités peuvent-ils être constitués ?
b) Déterminer le nombre de comités possibles si mme ADA refuse de siéger avec Mr Stephen dans un même comité.

13.

De combien de façons peut-on ranger 4 livres dans 6 étagères sachant qu'une étagère peut avoir 0,1,...,10 livres ?

14.

Quatre personnes se donnent rendez-vous au café du quartier.Ce quartier compte malheureusement quatre cafés. Déterminer le nombre de possibilités qu'ont ces personnes d'aller chacun dans un café pourqu'aucune d'entre elle ne rencontre aucune autre.

15.

Deux véhicules A et B se présentent à une aire de péage comportant trois voies de passage ouvertes numérotées 1,2,3 de la gauche à la droite.
Déterminer grâce à un arbre de choix, le nombre de possibilités de passage de ces deux voitures .

CALCULS DES PROBABILITÉS

16.

On lance une fois deux dés cubiques normaux dont les faces sont numérotés de 1 à 6 : l'un est blanc et l'autre est vert.
Le résultat d'un lancer est un couple $(x;y)$ où x est le numéro apparu sur le dé vert et y selui apparu sur la face supérieure du dé blanc.

a) Combien y-a-t-il de possibiltés différentes ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir chacune de ces possibilités ?
c) Soit S la somme des numéros obtenus.
   i) Donner les valeurs possibles de S.
   ii) Calculer la probabilité pour que S soit égale à 7.

17.

Dans un jeu de 32 cartes, on appelle "main" toute combinaison de 5 cartes.On tire simultanément cinq cartes parmi les 32.
1) Combien de mains possibles contiennent-elles 3 rois ?
2) Combien de mains possibles contiennent-elles 3 piques ?
3) Combien de mains possibles contiennent-elles 3 cartes de la même couleur ?
4) Calculer la probabilité d'avoir une main contenant au moins un as.
5) Calculer la probabilité d'avoir une main contenant exactement un as et un pique.

18.

Le personnel d'un hopital est réparti en trois

catégories : les médecins,le personnel soignant, le personnel adminstratif et technique .
Parmi les 350 membres du personnel de cet hopital, 70 sont des hommes, 28 sont des médecins.De plus il y a deux fois moins de femmes médecins que d'hommes médecins.

1) Recopier et compléter ce tableau.

	hommes	femmes	total
Médecins			
Personnel soignant		230	250
Personnel technique et administratif			
Total			350

2) On choisit un personnel au hasard.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « Il s'agit d'un soignant » ;
B : « Il s'agit d'une femme médecin » ;
C ; « Il s'agit d'une femme ou d'un médecin »

19.

Un sac contient 5 jetons :un bleu, deux rouges et deux verts. Le jeton bleu vaut 3 points, le rouge 2 points et le vert 1 point.

a) On tire au hasard un jeton du sac.
i) Calculer la probabilité de tirer un jeton rouge.
ii) Calculer la probabilité d'avoir au moins deux points.
b) On tire un jeton, puis un deuxième sans remettre le premier jeton dans le sac.
Dénombrer toutes les possibilités.
Calculer la probabilité de chacun des événements :

A : « Tirer deux jetons de couleurs différentes »
B : « Obtenir 4 points »
C : « Obtenir 4 points avec deux jetons de couleurs différentes »
D : « Obtenir au moins 4 points ».

20.

Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. On tire une boule de l'urne. On note :
A : « Tirer une boule blanche »
B : « Tirer une boule qui n'est ni blanche, ni rouge »
C : « Tirer une boule noire ou une boule rouge »

1) A et B sont-ils incompatibles ?
2) B et C sont-ils incompatibles ?
3) A et C sont-ils incompatibles ?
4) A et C sont-ils contraires?

21.

Dans une classe de terminale scientifique, 10 élèves ont les livres de Mathématiques et d'Anglais, 9 élèves ont uniquement le livre de d'anglais et 5 n'ont pas du tout de livre.
Déterminer :

a) L'effectif de cette classe.
b) Le pourcentage des élèves qui n'ont que le livre d'Anglais.
c) Le pourcentage des élèves qui n'ont pas le livre d'Anglais.
d) Le pourcentage des élèves qui ont au moins un des deux livres.

22.

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie. Le résultat de cette expérience est égal au nombre de fois où la pièce tombe sur pile, moins le nombre de fois où elle tombe sur face. Exemple : si la pièce est tombée sur « pile » au premier et au troisième lancer et sur « face »au deuxième, le résultat est égal à : $2-1$ qui est égal à 1.

1) Énumérer (à l'aide d'un arbre de choix), toutes les éventualités puis déterminer le nombre de possibilités au total?
2) Pour chacune de ces éventualités , calculer le résultat de l'expérience.
On fait l'hypothèse que la pièce est bien équilibrée et que les huit éventualités trouvées ci-dessus ont la même probabilité.

3) Quelle est la probabilité pour que le résultat soit égal à +3 ?, +1 ?, -1 ?, –3 ?

4) Le joueur gagne si pile a apparu plus de fois que face. Quelle est la probabilité pour que le joueur gagne ?

23.

Un dé est truqué. La probabilité d'apparition de chaque face est donnée par le tableau :

Numéro	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,4	0,15	0,15	0,05	a	b

1) Quelle est la probabilité de voir apparaître un nombre n inférieur ou égal à 4 ?
Un nombre n strictement supérieur à 4 ?

2) Calculer a et b, sachant que l'apparition du n° 5 est 4 fois plus probable que celle du n°6.

24.

Un objet en série a un coût de production de 950 francs.Il peut présenter , à l'issue de sa fabrication , un défaut A, un défaut B, ou en même temps les défauts A et B. La garantie permet de faire les réparations aux frais du fabricant avec les coûts suivants :

100 francs pour le défaut A,

150 francs pour le défaut B,

250 francs pour les deux défauts.

On prélève un lot de 200 objets . Le défaut A est observé sur 16 objets, le défaut B sur les 12 objets et 180 n'ont aucun défaut. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Nombre d'objets	Avec défautA	Sans défaut A	total
Avec défaut B			
Sans défaut B			
Total			

Calculer le prix de revient d'un objet selon ses défauts éventuels.

Calculer la probabilité pour que le prix de revient d'un objet soit de 1200 francs.

25.

On a administré un vaccin aux souris et aux lapins.Ces cobailles sont au nombre de 100. La probabilité pour que le vaccin réussisse sur une souris est 0,65 ; la probabilité pour que le vaccin réussisse sur un lapin est 0,5 ; la probabilité pour que le vaccin réussisse sur les souris uniquement est 0,35 ; la probabilité pour que le vaccin réussisse uniquement sur les lapins est 0,2 . Par ailleurs la probabilité que le vaccin ne réussisse pas du tout est 0,15.
Déterminer :

a) L'effectif de chaque espèce de cobaille.

b) La probabilité pour que le vaccin réussisse sur les deux espèces de bêtes.

c) La probabilité pour que le vaccin réussisse sur une seule espèce de cobaille

26.

Les 37 élèves d'une classe de Terminale se répartissent de la façon suivante :

	Filles	Garçons
Apprennent l'anglais	18	10
N'apprennent pas l'anglais	5	4

1) On choisit un élève de cette classe au hasard. Quelle est la probabilité pour que ce soit un garçon ? Une fille ? Une fille apprenant l'anglais ?

2) L'élève choisie étant une fille, quelle est la probabilité quelle apprenne l'anglais ?

27.

Un lot de pièces fabriquées contient 5% de pièces défectueuses. Un contrôleur choisit au hasard une pièce dans le lot. Quelle est la probabilité pour quelle soit en bon état ?

28.

Les organisateurs d'une tombola émettent 200 billets. Parmi ces billets, 2 donnent droit à un prix de 1000 francs, 100 à un prix de 200 francs, et 20 à un prix de 50 francs

Les autres ne rapportent rien. Le premier participant choisit un billet, de manière équiprobable, parmi les 200.

1) Quelle est la probabilité pour qu'il gagne un lot de 1000 francs ?
2) Quelle est la probabilité pour qu'il ne gagne rien ?
3) Sachant que le prix du billet est de 100 francs, quelle est la probabilité pour que le joueur fasse un bénéfice ?

29.

Le livreur d'une maison de vente par correspondance vous apporte un colis au 3e étage. Vous fouillez dans votre poche et lui donnez une pièce au hasard. Sachant que votre poche contenait exactement 2 pièces de 200 F, 3 de 500 F, 6 de 1000 F, 3 de 2000 F, 2 de 5000 F et 2 de 10000 F, quelle est la probabilité que le livreur vous dise merci ?

N.B. Le livreur ne remercie que si le pourboire est au moins égal à 2000 F.

30.

On lance deux fois de suite un dé bien équilibré et on gagne si l'écart entre les points marqués est 1 ou 2. Quelle est la probabilité de gagner ?

31.

Au restaurant du lycée, les tables sont rondes et ont 5 places chacune. Pierre et Jean, choisissent leurs places au hasard autour d'une table.
Quelle est la probabilité pour qu'ils soient assis l'un à côté de l'autre ?
Indication : on peut utiliser un tableau pour représenter les positions respectives de Pierre et Jean.

NB : On distinguera 2 cas : Les chaises sont numérotées et le cas où les chaises ne sont pas numérotées

32.

On jette trois fois de suite une pièce de monnaie. On note, à chaque jet, la face visible : P pour Pile, F pour Face. On obtient ainsi une suite de trois lettres, par exemple FPF ou PFF, ou bien d'autres…

1) Combien de suites de trois lettres peut-on obtenir ?Indication : on peut faire un arbre.
2) Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « obtenir trois fois la même lettre ».

B : « obtenir une seule fois la lettre P ».

C : « obtenir la lettre P suivi de la lettre F ».

33.

Un enfant de 6 ans joue avec 5 cartes sur lesquelles sont écrites les lettres A, B, C, D, E. Il dispose trois de ces cartes devant lui, au hasard, formant ainsi un « mot » de trois lettres. Quelle est la probabilité pour que, pensant déjà à son avenir, il ait ainsi écrit le mot BAC ?
Suggestion : on peut construire un arbre (ou du moins en esquisser quelques branches…)

34.

Fabrice, Sébastien, Stéphanie, Caroline et Clara passent 4 jours au camping. Chaque soir, on tire à pile ou face pour savoir qui fera la vaisselle :si on tire « pile », c'est les garçons qui feront la vaisselle et les filles feront la vaisselle si on tire « face ».
Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « les garçons font la vaisselle le premier soir » ;

B : « les garçons font la vaisselle trois fois durant le séjour » ;

C : « Aucun groupe ne fait la vaisselle deux soirs consécutifs ».

35.

Une urne contient trois boules : une rouge, une verte, une bleue. On tire successivement deux boules de l'urne. Avant de tirer la deuxième boule, on remet dans l'urne la première boule obtenue. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1) Donner la liste de tous les tirages possibles.
2) Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « obtenir deux boules rouges »;
B : « obtenir deux boules de même couleur »;
C : « obtenir deux boules de couleurs différentes ».

36

Un jeu de construction est constitué de cubes et de cylindres de couleur rouge, bleue ou verte. Il y a en tout 80 pièces dont 25 cylindres ;
15% des pièces sont des cubes rouges.
20% des cylindres sont bleus.
Il y a 5 fois plus de cubes bleus que de cylindres bleus et deux fois moins de cylindres verts que de cubes verts.

1) Combien y a-t-il de cubes ?
2) Recopier et compléter ce tableau :

	Bleu	Rouge	Vert	Total
Cubes				
Cylindres				
Total				80

3) On tire au hasard une pièce du jeu de construction ; calculer la probabilité des événements suivants :

A : « la pièce est rouge »,
B : « la pièce est cubique et verte ».

37

Un sondage est effectué auprès de 1 200 personnes partant en vacances à propos du lieu de séjour qu'elles préfèrent : mer, campagne ou montagne. On distingue deux catégories d'âges : moins de 35 ans, 35 ans et plus.
45% des personnes interrogées ont moins de 35 ans ; 22% des personnes interrogées préfèrent la campagne.
Parmi les « moins de 35 ans », 310 préfèrent la mer et 120 préfèrent la montagne.
Parmi les « 35 ans et plus », 180 préfèrent la montagne.

1) Calculer le nombre de personnes interrogées ayant moins de 35 ans.
Calculer le nombre de personnes interrogées qui préfèrent la campagne.
2) Reproduire et compléter le tableau suivant, en remplissant d'abord la dernière colonne.

	Mer	Campagne	Montagne	Total
Moins de 35 ans				
35 ans et plus				
Total				1200

3) On interroge une personne au hasard.
   a) Calculer la probabilité p_1 qu'elle préfère la mer.
   b) Calculer la probabilité p_2 qu'il s'agisse d'une personne de moins de 35 ans préférant la mer.
4) La personne interrogée déclare préférer la montagne. Calculer la probabilité p_3 quelle ait 35 ans ou plus.

38

Dans un grand magasin, il y a 120 pantalons à vendre dans les quatre tailles : S, M, L ou XL et dans les trois coloris : vert, bleu ou rouge.
50% des pantalons sont bleus et 20% des pantalons sont de taille S.

En taille S, il y a le même nombre de pantalons dans les trois coloris.

Il y a trois fois plus de pantalons dans la taille S que dans la taille XL.

En taille XL, il n'y a que des pantalons bleus.

D'autres informations figurent dans le tableau ci-dessous.

	S	M	L	XL	Total
Vert		10			
Bleu			20		
Rouge		12	15		
Total					120

1) Recopier et compléter le tableau en justifiant les résultats obtenus.
2) Dans cette question, les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles. Un pantalon étant pris au hasard, calculer la probabilité des événements suivants :

A : « le pantalon est vert »,

B : « le pantalon est de taille L ».

C : « le pantalon est vert et de taille L ».

On choisit un pantalon au hasard parmi les verts. Quelle est la probabilité pour qu'il soit de taille L ?

39

Une usine d'horlegerie fabrique une série de montres.Certaines montres peuvent présenter un défaut x ou un défaut y.
Des études statistiques menées sur 10000 montres ont donné les informations suivantes :

10% des montres ont le défaut x;

Parmi les montres ayant le défaut x, 12% ont le défaut y;

Parmi les montres ne présentant pas de défaut x, 5% présentent le défaut y.

1) Compléter le tableau suivant après l'avoir reproduit.

Nombre de montres	Ayant le défaut x	N'ayant pas le défaut x	Totaux
Ayant le défaut y			
N'ayant pas le défaut y			
Totaux			

2) On choisit au hasard une de ces 10000 montres, chacune de ces montres ayant la même probabilité d'être choisie.

   Déterminer la probabilité de chacun des événements :

   A : « La montre choisie présente le défaut x »

   B : « la montre a le défaut y »

   C : « la montre est sans défaut »

   D= $A \cup B$ et E = $A \cap B$

40

Dans une entreprise , le tableau suivant repartit des salaires mensuels.

Salaires	6000	7000	10000	20000	35000
Effectis	300	100	50	40	10

1) Calculer le salaire mensuel moyen.
2) On interroge une personne au hasard dans cette entreprise.

   Calculer la probabilité des événements :

   A : « son salaire mensuel est de 6000 »

   B : « elle gagne au moins 10000 »

   C : « son salaire n'atteint pas le salaire moyen »
3) On interroge , au hasard une personne dont le salaire mensuel est supérieur à 10000 francs.

   Calculer la probabilité de l'événement : « elle ne fait pas partie des personnels les plus renumérés ».

41

Dans un collège comptant 600 élèves, chaque élève étudie comme première langue vivante soit l'anglais, soit l'allemand, soit l'espagnol. Dans ce collège, il n'y a pas d'internes mais exclusivement des externes et des demi-pensionnaires. La repartition de l'ensemble des élèves est la suivante :

- 20% étudient l'allemand en première langue et parmi eux le quart sont demi-pensionnaires ;
- 70% étudient l'anglais en première langue et parmi eux, un septième sont demi-pensionnaires ;
- Le reste des élèves sont des externes qui ont choisi l'espagnol pour première langue.

1) Recopier et compléter le tableau suivant :

Première langue vivante	Nombre d'externes	Nombre de demi-pensionnaires	Total
Anglais			
Allemand			
Espagnol			
Total			600

2) On prend au hasard un élève dans ce collège.
Calculer la probabilité de chacun des événements :
A : « l'élève est demi-pensionnaire » ;
B : « l'élève est externe et apprend comme première langue vivante l'anglais ou l'Espagnol »
C : « l'élève apprend comme première langue l'espagnol et est externe »
D : « l'élève apprend comme première langue l'anglais et est demi-pensionnaire ».

42.

Dans un aquarium, on prend un premier poisson, puis un second sans remettre le premier pris.

1) L'aquarium contient 4 poissons rouges et 2 poissons noirs.
   a) Combien de couples de poissons peut-on obtenir ?
   b) Quelle est la probabilité de l'événement A : « Obtenir deux poissons noirs ».
   c) Calculer la probabilité de l'événement B : « Obtenir deux poissons noirs »
   d) Calculer la probabilité des événements $A \cup B$.
   e) En déduire la probabilité d'obtenir deux poissons de couleurs différentes.
2) Il y a maintenant dans l'aquarium 4 poissons rouges et x poissons noirs $(x \geq 2)$.

Calculer la probabilité de chacun des événements :
A : « obtenir deux boules noires »;
B : « obtenir deux boules rouges »;
C : « obtenir deux boules de couleurs différentes »
Montrer que $p(C) = \dfrac{8x}{(x+4)(x+3)}$.

43.

On lance un dé cubique équilibré dont les faces portent les numéros 1,2,…,6 respectivement et on tire une carte parmi quatre différentes .

a) Déterminer le nombre de possibilités d'avoir une carte et un numéro provenant d'une face de dé.
b) Calculer la probabilité d'avoir une carte et un nombre supérieur ou égal à trois.

44.

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher dont 4 boules rouges, 5 boules noires et 3 boules vertes. On tire simultanément trois boules de cette urne.

a) Calculer le nombre de possibilités pour le résultat de ce tirage.
b) Calculer la probabilité d'avoir :
   i) des boules de même couleur ;
   ii) des boules de couleurs distinctes deux à deux ;
   iii) des boules de couleurs différentes.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES.

45.

Une classe de 36 élèves âgés de 16, 17 ou 18 ans comprend 22 garçons dont 18 âgés de 17 ans et 3 âgés de 18 ans.Il y a dans cette classe 6 filles âgées de 18 ans et une fille âgée de 16 ans.

1) Consigner les informations ci-dessus dans un tableau dont les deux entrées sont constituées des âges et du sexe respectivement.
2) Un élève est choisi au hasard.
   Calculer la probabilité que ce soit :
   – un garçon ;
   – un élève âgé de 16 ans ;
   – une fille âgée de 17 ans ;
3) Sachant que l'élève choisi est un garçon. Calculer la probabilité qu'il ait 16 ans ; 17 ans ; 18 ans.

46.

On lance trois fois une pièce de monnaie bien équilibrée.

1) Quelle est la probabilité d'avoir trois fois pile ?
2) Quelle est la probabilité d'avoir deux fois pile sachant qu'on a obtenu pile au premier lancer ?

47.

Une urne contient trois boules vertes, 2 jaunes, et 4 bleues. On tire au hasard une boule de l'urne, que l'on ne remet pas dans l'urne, puis on tire au hasard une seconde boule.

1) Calculer la probabilité de tirer ainsi successivement :
   a) Deux boules vertes ;
   b) Une boule jaune, puis une boule verte ;
   c) Une boule bleue, puis une boule verte.
2) Calculer la probabilité de tirer une boule verte au second tirage.
3) Calculer la probabilité de tirer une boule jaune au second tirage.
4) Calculer la probabilité de tirer une boule bleue au second tirage.

48.

On lance un dé non truqué.
Calculer la probabilité d'obtenir le chiffre 6 :
1) sachant que l'on a obtenu un résultat pair,
2) sachant que l'on a obtenu un multiple de 3.

49.

Un joueur utilise un dé à six faces qui a été truqué. La probabilité de voir apparaître chacune des six faces est donnée par le tableau suivant :

numéro	1	2	3	4	5	6
probabilité	0,4	0,15	0,15	0,05	a	b

1) Calculer a et b , sachant que l'apparition du numéro 5 est quatre fois plus probable que celle du 6.
2) Calculer la probabilité de voir apparaître un numéro pair.
3) Calculer la probabilité de voir apparaître un numéro impair.
4) Calculer la probabilité que le numéro soit 1 sachant que c'est un numéro impair.
5) On considère les événement suivants :

A : voir apparaître un numéro pair.

B : voir apparaître un multiple de 3.

C : voir apparaître un nombre inférieur ou égal à 3.

Dire si les événements Aet B d'une part, A et C d'autre part sont indépendants.

50.

On tire au hasard et simultanément 4 cartes dans un jeu de 32.
Calculer la probabilité d'avoir exactement un pique , sachant qu'on a 3 cartes noires et une rouge.

On lance deux fois de suite un dé bien équilibré. Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?

a) A :2 sort le premier ;B :3 sort en second.
b) A :6 sort le premier ; B :6 sort deux fois.
c) A :6 sort une fois ; B :1 sort une fois

51.

L'éclairage d'une pièce nécessite l'emploi de deux lampes A et B différentes. Les probabilités de défaillance de ces lampes pour un laps de temps déterminé sont respectivement 0,12 pour A et 0,18 pour la lampe B.
On admet que ces événements sont indépendants.

1) Calculer la probabilité pour que les deux lampes tombent en panne .
2) En déduire la probabilité pour avoir au moins une lampe qui fonctionne.
3) Calculer la probabilité pour qu'une lampe , et une seule tombe en panne.

Les résultats seront donnés avec quatre décimales.

52.

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes, puis, sans remettre, on en tire une seconde.
Soien A et B les événements :

A : « la première carte tirée est un pique »
B : « la seconde carte tirée est un pique »
C : « la seconde carte tirée est un cœur ».

Calculer les probabilités des événements A,B,C, $A \cap B$, $A \cap C, B \cap C$.
Les événements A et B, A et C, B et C sont-ils indépendants ?

53.

Deux urnes A et B contiennent chacune 3 boules vertes et 2 jaunes.

1) On tire simultanément une boule de chaque urne. Calculer la probabilité de tirer deux boules vertes.
2) On tire une boule de l'urne A que l'on remet dans l'urne B, puis on tire une boule de l'urne B. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules vertes.

54.

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. S'il s'agit d'un as, on la remet dans le jeu et on tire une seconde. S'il ne s'agit pas d'un as, on ne la remet pas dans le jeu.
On tire alors une seconde carte.
En utilisant la formule des probabilités totales, Calculer les probabilités des événements suivants :

A : « la première carte tirée est un as » ;
B : « la deuxième carte tirée est un as ».

55.

Deux grossistes produisent des bulbes de tulipes ;

- Le premier , des bulbes à fleurs rouges dont 90% donnent une fleur ;
- Le second, des bulbes à fleurs jaunes dont 80% donnent une fleur.

Un horticulteur achète 70% des bulbes qu'il cultive au premier grossiste et le reste au second .
Un bulbe de tulipe donne au plus une fleur.
L'horticulteur plante un bulbe choisi au hasard.

Déterminer les probabilités des événements suivants :

a) obtenir une fleur rouge ;
b) obtenir une fleur jaune ;
c) ne pas obtenir de fleur.

VARIABLES ALÉATOIRES.

56.

Une boîte contient six boules numérotées de 1 à 6. Une deuxième boîte contient quatre boules numérotées de 1 à 4.

1) On prélève au hasard une boule de la première boîte, puis une autre de la deuxième boîte. Dénombrer les éléments de l'univers associé cette épreuve.
2) Soit X la variable aléatoire représentant la valeur absolue des numéros portés par les boules tirées respectivement dans les deux boîtes.
   a) Donner la distribution des probabilités de X.
   b) Calculer la probabilité pour que les deux numéros soient identiques.
   c) Calculer l'espérance mathématique, la variance de X.
   d) Définir, puis représenter graphiquement la fonction de répartition de X.
   e) On prélève une boule de la première boîte ; on note son numéro, puis on la remet dans la deuxième boîte .On tire ensuite une boule de la deuxième boîte, et on note son numéro.

   Calculer la probabilité pour que les deux numéros notés soient identiques.

57.

On dispose de trois urnes opaques A, B et C contenant respectivement :
A : une boule rouge, une boule bleue et une boule verte ;
B : une boule rouge et deux vertes ;
C : deux boules bleues et une boule verte.

On tire au hasard une boule de chaque urne ; si une boule exactement est verte, on gagne un point ; si zéro ou deux boules sont vertes, on perd deux points ; si les trois boules sont vertes, on gagne n points où n est un entier naturel non nul.

Le nombre de points obtenus définit une variable aléatoire X.

1) Donner dans un tableau, la loi de probabilité de X.
2) Construire la représentation graphique de la fonction de fonction de réparation de X pour $n = 5$.
3) Calculer l'espérance mathématique, la variance de X.
4) Déterminer n pour que l'espérance mathématique soit nulle.
5) Calculer alors la variance et l'écart type de X

58.

Une cible circulaire est composée de 3 zones concentriques rapportant 5,3,1 points. Les probabilités d'atteinte de ces trois zones sont dans l'ordre $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$.
Les résultats de deux tirs sont indépendants.
On tire deux fois. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur la somme des points obtenus.

a) Définir la loi de probabilité de X
b) Calculer l'espérance et la variance de X

59.

On lance deux fois de suite un dé cubique parfait dont les faces portent respectivement les numéros 1, 2, 3, 4, 5,6.
Soit X la variable aléatoire qui donne 0 si les numéros obtenus sont identiques, et le plus grand de ces numéros sinon.

a) Donner les valeurs possibles de X.
b) Donner dans un tableau à double entrée, la loi de X.
c) Calculer l'espérance mathématique, la variance de X.
d) Calculer la probabilité de l'événement : $2 \leq X \leq 5$.

60.

Au cours d'une expérience sur le comportement des animaux, des rats doivent choisir entre 4 portes d'apparence identique, dont l'une est dite bonne et trois autres dites mauvaises. Chaque fois qu'il choisit une porte mauvaise, il reçoit une décharge électrique désagréable et est ramené à son point de départ, et cela jusqu'à ce qu'il choisisse la bonne porte.

1) Le rat n'a aucune mémoire.
   Il choisit à chaque essai de façon équiprobable entre 4 portes.
   Déterminer la probabilité des événements :
   a) Le rat sort au bout de trois essais ;
   b) Le rat sort au bout de 7 essais ;
   c) Le rat en moins de 8 essais.
4) Cette fois-ci le rat a une mémoire parfaite.
   À chaque nouvel essai, il évite les mauvaises portes choisies précédemment et il choisit de façon équiprobable entre celles qu'il n'a pas encore choisies. Le nombre d'essais définit ainsi une variable aléatoire.
   a) Déterminer les valeurs possibles de X.
   b) Déterminer la loi de X.
   c) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X.

61.

Un sac opaque contient dix boules indiscernables au toucher dont 3 bleues, deux vertes, cinq rouges. On tire 3 boules l'une après l'autre, en remettant à chaque fois la boule tirée dans le sac.
Soit Y la variable aléatoire qui prend la valeur 2 si le tirage est unicolore, 1 s'il est bicolore et 0 s'il est tricolore.

Donner la loi de Y, puis calculer son espérance mathématique, sa variance et son ecart type.

62

Une urne contient 4 boules bleues, 2 boules vertes et n boules rouges, indiscernables au toucher. On tire au hasard deux boules de manière simultanée.
On désigne par X la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de boules rouges tirées.

1) Déterminer la loi de probabilité de X lorsque $n = 0$, *puis lorsque* $n = 1$.
2) On suppose désormais que $n \geq 2$.
Déterminer la loi de probabilité de X.
Montrer que l'espérance mathématique de X est : $E(X) = \frac{2n}{n+6}$.

Déterminer n de façons à obtenir $E(X) = 1$.

63

1) X est une variable aléatoire ayant la loi de probabilité suivante :

a	0	1	2	3
$P(X=a)$	–	$\frac{1}{4}$	b	$\frac{3}{8}$

a) Montrer que $b = \frac{1}{8}$.
b) Définir , puis construire la représentation graphique de la fonction de répartition de X.
c) Calculer la probabilité de l'événement : « $X < 1 \, ou \, X \geq 3$ »

En déduire $p(1 \leq X < 3)$
d) Calculer $E(X)$, puis $E(X^2)$.

2) Soit Y une nouvelle variable aléatoire définie par $Y = 2X + 5$.
c) Donner la loi de probabilité de la variable Y .
d) Calculer $E(Y)$, $V(Y)$.

64

On considère un dé cubique dont les faces portent les nombres $-2; -2; 1; 1; 2; x$.
Chaque face a la même probabilité d'apparition.
On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque lancer du dé fait correspondre le nombre apparu.

1) Donner la loi de probabilité de X en fonction de x .
2) Déterminer l'espérance mathématique de X.
Pour quelle valeur de x , cette espérance est-elle nulle ?

65.

Une partie de loterie consiste à lâcher une bille dans un appareil qui comporte six portes de sortie, numérotées de 1 à 6. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la porte de sortie franchie par la bille.
Sa loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Un joueur mise 200 francs.
Il reçoit 1200 francs si la bille franchit les portes 1 ou 6 ; 200 francs si cette bille franchit les portes 3 ou 4. Les portes 2 et 5 ne rapportent rien.
Le gain d'un joueur est la différence entre sa mise et ce qu'il reçoit ; soit (ce qu'il reçoit – sa mise).
Soit Y la variable aléatoire représentant le gain d'un joueur à l'issue d'une partie.

1) Donner les valeurs pmossibles de Y.
2) Déterminer la loi de Y.
3) Le jeu est dit équitable si l'espérance de Y est nulle. Ce jeu est-il équitable ?

66.

Une boîte contient 6 boules vertes et x boules blanches.
Un jeu consiste à tirer simultanément deux boules de la boîte . Si deux boules sont de même couleur, le joueur gagne 100 francs ; si elles sont de couleurs différentes , le joueur perd 100 francs.

Calculer la probabilité d'obtenir :

a) deux boules de même couleur ;

b) deux boules de couleurs différentes.

On note par X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules , associe le gain algébrique du joueur.

Exprimer en fonction de x , les probabilités des événements (X=100) et (X=−100).

Exprimer l'espérance mathématique E(X) à l'aide de l'entier x .

Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles le jeu est équitable ?

ÉPREUVES RÉPETÉES DE BERNOULLI.

67.

A chaque tir, la probabilité pour que le tireur touche la cible est 0,7.Il tire trois fois de suite et les trois tirs sont supposés indépendants et identiques.

Calculer les probabilités :

- pour qu'il touche la cible trois fois ;
- pour qu'il touche la cible deux fois exactement.

68.

On lance deux dés cubiques usuels , puis on totalise les points marqués.

1) Calculer la probabilité d'avoir un total de points supérieur ou égal à 8.
2) Au bout de 20 lancers, calculer la probabilité d'avoir obtenu exactement 10 fois un total supérieur ou égal à 8.

69.

Une urne contient trois boules blanches et trois boules noires. On tire deux boules simultanément .

1) Calculer la probailité de tirer deux boules blanches.
2) On procède à cinq tirages consécutifs de deux boules , les boules étant remises dans l'urne après chaque tirage.

   Calculer la probabilité de tirer une fois et une seule deux boules blanches.

70.

On lance six fois un dé ; quelle est la probabilité d'obtenir au moins trois fois un 1 ?

71.

Combien de fois faut-il lancer un dé(non pipé) pour avoir un (ou plusieurs) six avec une chance sur deux au moins.

72.

On jette une pièce de monnaie parfaite 6 fois.

1) Trouver la probabilité pour obtenir autant de faces que de piles.
2) En déduire que la probabilité pour obtenir plus de faces que de piles.

73.

L'expérience prouve qu'un certain canon a une chance sur deux de toucher un objectif.

1) On tire n coups de ce canon. Calculer la probabilté pour que l'objectif soit touché au moins une fois.
2) Calculer le nombre de projectiles qu'il faut tirer afin que l'objectif soit touché au moins une fois avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

74.

On répartit au hasard n boules dans cinq urnes : on suppose que la probabilité que la boule a d'aller dans une urne est la même quelle que soit la boule et quelle que soit l'urne.

1) Calculer la probabilité pour qu'une urne donnée reçoive deux boules.
2) Calculer la probabilité pour qu'une urne donnée reçoive k boules ($0 \leq k \leq n$).

75.

Une urne contient 7 boules noires et une boule blanche.

1) On repète n fois le tirage d'une boule en remettant à chaque fois cette boule dans l'urne.

   Comment choisir n pour tirer au moins une boule blanche avec au moins une chance sur deux ?

2) Même question dans le cas où la boule tirée n'est pas remise dans l'urne.

76.

Un jeu consiste à lancer six fois de suite un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On suppose que chaque face a la même probabilité de sortir en position supérieure.On désigne par S la variable aléatoire égale à la somme des numéros sortis.

1) Calculer les probabilités des événements suivants :
A : « $S \geq 8$ » ; B : « le numéro du premier lancer est 4 ».
2) Calculer la probabilté de l'événement (A/B).
3) Définir et représenter la fonction de répartition de S.
4) Le gain algébrique X de la partie est de : -500 francs si $S \leq 4$; n francs si $5 \leq S \leq 8$; 1000 francs si $S \geq 9$.
   a) Déterminer l'entier relatif n sachant que l'espérance mathématique X est nulle.
   b) Quelle est la probabilité qu'un joueur gagne 5000 francs en jouant cinq parties consécutives.

77.

On dispose de 3 dés cubiques (vert, jaune et rouge).
Le dé vert est normal :ses faces sont numérotées de 1 à 6 et elles ont la même probabilité d'apparition.
Le dé jaune porte sur deux faces le nombre 6, sur les quatre autres le nombre 1 ;toutes les faces ont la même probabilité d'apparition.
Le dé rouge est pipé, de façon que la probabilité d'apparition de chaque face soit proportionnelle au nombre marqué sur cette face :les faces sont numérotées de 1 à 6.

1) Calculer pour chacun des dés , les probabilités d'apparition de chaque numéro.
2) On lance simultanément les trois dés.
   a) Montrer que la probabilité d'obtenir trois « 6 » est $\frac{1}{63}$.
   b) Calculer les probabilités d'obtenir :
      - les nombres 1,3,5 ;
      - trois nombres deux à deux distincts.
3) On lance 4 fois de suite les trois dés simultanément.Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où les trois dés ont leur face apparente sur 6.
   Déterminer la loi de X.
   Calculer E(X), V(X) et $\sigma(X)$.

78.

Un joueur de tennis effectue une mise en jeu. Pour cela, il a droit à deux tentatives :un prmier service,suivi,s'il n'est pas réussi, d'un deuxième service.
La probabilité pour que le premier service réussisse est $\frac{2}{3}$; s'il a échoué, la probabilité pour que le deuxième service réussisse est $\frac{4}{5}$.
Lorsque les deux services échouent ,on dit qu'il y a « double faute » ; sinon la mise en jeu est réussie.

1) a.Déterminer la probabilté pour que, sur une mise en jeu, ce joueur fasse une double faute.
   b) Déterminer la probabilté pour que la mise en jeu soit réussie.
2) Ce joueur participe à un entraîment organisé par son club et patronné par un magasin de sport. Il s'agit , pour lui, d'effectuer 10 mises en jeu successives (dont les résultats sont indépendants les uns des autres).Chaque mise en jeu réussie lui permet de gagner une balle. Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de balles gagnées.
   a) Donner les valeurs numériques approchées de $p(X=9)$, $p(X=10)$, $p(X \geq 1)$.

b) Déterminer la probabilité pour que ce joueur gagne au moins 9 balles.

c) Calculer $E(X), V(X) et \sigma(X)$.

79

Un sac contient 9 jetons indiscernables au toucher : ce qui rend les tirages équiprobables. Quatre boules sont blanches et numérotées de 1 à 4 et cinq boules sont noires et numérotées de 1 à 5.

1) On tire simultanément trois boules du sac. Calculer la probabilité de chacun des événements :

A : « Toutes les boules sont blanches » ;

B : « Les boules sont de couleurs différentes » ;

C : « Il y a plus de boules blanches que de boules noires » ;

D : « les numéros sont impairs »

E : « il y a au moins un numéro pair »

2) L'épreuve est maintenant la suivante :

Du sac qui contient les neuf boules, on en tire au hasard une et on la replace dans le sac. On effectue ainsi 7 tirages successifs.

Déterminer la probabilité pour qu'au cours d'un tirage , on ait un numéro pair .

En déduire la probabilité d'obtenir exactement deux fois une boule portant un numéro pair au cours des 7 tirages.

Chapitre 12

SÉRIES STATISTIQUES À DEUX CARACTÉRES.

LEÇON 1 ORGANISATION DES DONNEES-NUAGE DE POINTS.

1-1 PRÉSENTATION D'UNE SÉRIE À DEUX CARACTÈRES-SÉRIES MARGINALES.

1-2 NUAGE DE POINTS D'UNE SÉRIE DOUBLE.

LEÇON 2 AJUSTEMENT LINÉAIRE D'UNE SÉRIE DOUBLE PAR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS.

S'ENTRAÎNER

LEÇON 1 ORGANISATION DES DONNÉES- NUAGE DE POINTS.

- Exploiter et regrouper les résultats d'une enquête portant sur deux caractères.
- Construire un tableau à double entrée ; puis les tableaux marginaux d'une série double. Interpréter un tableau à double entrée.
- Construire le nuage des points d'une série double ;
- Calculer les coordonnées du point moyen d'un nuage.

1.1. PRÉSENTATION D'UNE SÉRIE À DEUX CARACTÈRES- SÉRIES MARGINALES

Prendre un bon départ

Dans une maternité de Niamey, une étude statistique a porté sur une population de nouveau-nés. Pour un nouveau-né, deux caractères sont étudiés : sa masse en kg notée X et sa taille en cm notée Y.

Voici la fiche dressée dans cette maternité :

$Masse(X)$	2,7	2,9	2,7	3,5	2,9	2,7	3,8	2,9	3,5	2,7	2,9	2,7	3,8	3,8
$Taille(Y)$	47	53	48	48	47	51	51	53	47	48	48	48	53	51

$Masse(X)$	2,9	3,5	2,9	3,8	3,5	2,9	2,9	2,9	3,8	2,9	3,8	2,9	3,8
$Taille(Y)$	51	48	48	51	48	51	47	51	48	48	53	51	53

$Masse(X)$	2,9	3,8	2,9	3,5	2,7	2,9	3,8	2,7	3,5	2,9	3,8	2,7	2,9
$Taille(Y)$	48	51	47	48	48	53	48	51	53	53	51	51	48

Activité 1

a) Dresser la liste des modalités x_i du caractère X, puis la liste des modalités y_i du caractère Y.

b) Dresser la liste de tous les couples distincts $(x_i ; y_i)$? Par analogie à une série statistique à *un caractère*, quel nom commun peut-on donner aux couples de cette liste ?

c) Quel est le nombre de nouveau-nés ayant une masse de 2,9 kg et une taille de 51 cm ? Par quel vocable statistique peut-on désigner ce nombre ?

d) Quelle est l'effectif des nouveau-nés ayant une masse de 3,8 kg et une taille de 48 cm ?

e) Dresser le tableau des effectifs de chaque caractère.

Activité 2

a) Compléter le tableau à double entrée suivant par les effectifs de chacun des couples $(x_i; y_i)$ et les totaux.

Combien de nouveaux nés pesant 3,5 kg et mesurant 48 cm ont été dénombrés ?

Masse x_i \ Taille y_j	47	48	51	53	Total
2,7					
2,9					
3,5					
3,8					
Total					

b) Combien de nouveaux nés mesurant 47 cm ont-ils été dénombrés ?

Combien de nouveaux nés pesant 2,7 kg ont-ils été dénombrés ?

c) Retrouve-t-on les tableaux de l'activité 1 (e) ?

Retenir

1) Les résultats d'une enquête portant sur l'étude de deux caractères de chaque individu d'une population constituent une série statistique appelée *série statistique à deux caractères* ou *série double*.

Si on désigne par X et Y les caractères étudiés alors :

- Les ***différentes modalités de la série double*** sont des couples (x_i, y_j) où x_i est une modalité du caractère X et y_j celle du caractère Y. ***L'effectif*** de la modalité (x_i, y_j) est notée n_{ij} et la *série statistique double* est notée (x_i, y_j, n_{ij}).
- ***Les séries statistiques simples*** (x_i, n_i) et (y_j, n_j) où n_i et n_j sont les effectifs respectifs des modalités x_i et y_j, sont appelées ***séries marginales*** de la série double (x_i, y_j, n_{ij}).

2) Pour mieux exploiter les données d'une série double (x_i, y_j, n_{ij}), on peut les regrouper dans un tableau à double entrée aux marges duquel figurent les séries simples (x_i, n_i) et (y_j, n_j). Ceci justifie leur dénomination de *séries marginales*.

Tableau à double entrées

x_i \	y_1	y_2	……	y_p	Total
x_1		$n_{1,2}$			***Somme des $n_{1,j}$***
x_2				$n_{2,p}$	
⋮					⋮
x_k	$n_{k,1}$				
Total	***Somme des $n_{i,1}$***		……		***Somme des $n_{i,j}$***

EXEMPLE

On a interrogé 50 familles de la ville de Yaoundé sur le nombre de personnes vivant dans une même maison et le nombre de chambres disponibles.

dans la maison. On note X la variable désignant le nombre de personnes et Y celle désignant le nombre de chambres. Cette enquête a fourni les données partiellement regroupées ci-contre :

y_j \ x_i	3	4	5	6	7
2	3	6	7	2	4
3	1	5	3	8	5
4	1	1	2	2	0

a) Complétons ce tableau par ses séries marginales. On obtient :

y_j \ x_i	3	4	5	6	7	total
2	3	6	7	2	4	**22**
3	1	5	3	8	5	**22**
4	1	1	2	2	0	**6**
total	**5**	**12**	**12**	**12**	**9**	50

b) Les séries marginales simples de cette série sont :

x_i	3	4	5	6	7	total
Effectif	5	12	12	12	9	50

et

y_j	2	3	4	total
Effectif	22	22	6	50

c) Déterminons les résultats obtenus de chacune des 50 familles.

x_i	3	4	5	7	3	4	5	7	3	7	4	5	4	7	4	5	7	4
y_i	2	2	2	2	3	3	2	3	2	3	2	2	3	2	2	2	3	2

x_i	5	6	5	4	6	4	5	7	3	6	4	6	4	5	6	4	5	4
y_i	2	3	3	2	3	3	2	3	4	3	3	2	2	2	3	3	3	4

x_i	5	7	3	6	5	5	6	6	6	6	7	6	7	6				
y_i	4	3	2	3	3	4	3	4	2	3	2	3	2	4				

S'exercer

1.a Voici les notes sur 20 obtenues par les élèves d'une classe de Terminale D en physiques (x) et en Mathématiques(y).

x_i	8	9	12	6	6	9	15	3	8	15	12	14
y_j	11	10	13	8	10	13	17	6	10	13	16	16

a) Regrouper ces données dans un tableau à double entrée.

b) Dresser les tableaux des effectifs des séries marginales associées.

c) Calculer la moyenne de la classe dans chacune des deux matières

1.b On a relevé dans un centre hospitalier le nombre d'accouchements et le nombre de césariennes effectuées par jour dans une semaine. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant.

Nombre d'accouchements (x_i)	3	5	4	7	4	6	8
Nombre de césariennes (y_i)	1	2	4	3	1	5	3

Répondre aux mêmes questions qu'au 1.a

1.2. NUAGE DE POINTS D'UNE SÉRIE DOUBLE

Prendre un bon départ

On a recueilli auprès des élèves d'une classe Terminale D, la pointure chaussée (x_i) et l'âge (y_j) de chacun des élèves. Voici ci-contre les résultats obtenus à la suite de cette enquête.

x_i \ y_j	14	15	16	17	18	19	20
37	2	0	0	3	0	0	0
39	0	7	0	0	0	2	0
40	0	0	0	0	8	0	4
41	0	0	6	0	0	0	0
43	0	0.	4	0	3	0	1

a) Déterminer les séries marginales associées à cette série double, puis calculer leurs moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$. En déduire la pointure moyenne et l'âge moyen d'un élève de cette classe.

b) Construire un repère orthogonal et placer chaque point du tableau de coordonnées $(x_i; y_j)$ en affectant à chacun de ces points son effectif.

Placer également le point $G(\overline{x};\overline{y})$.

Retenir

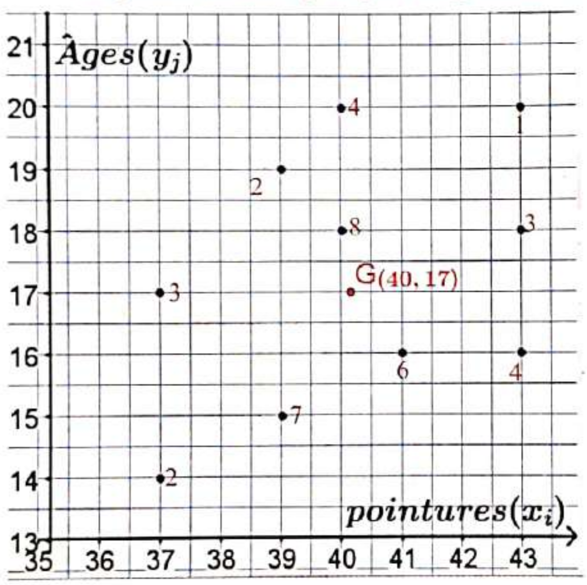
Soit (x_i, y_i, n_{ij}) une série double à caractères quantitatifs.

- L'ensemble des points $M_{ij}(x_i, y_j)$ est appelé *nuage de points* associé à cette série.
- Lorsque les effectifs n_{ij} ne sont pas tous égaux, on peut représenter le nuage de points de deux façons :
  - En indiquant à côté de chaque point M_{ij} son effectif n_{ij} : on parle alors de *représentation par points pondérés*.
  - Chaque point M_{ij} est représenté par un disque dont l'aire est proportionnelle à l'effectif n_{ij} : on parle alors de *représentation par tâches*.
- On appelle *point moyen du nuage de points* de la série double (x_i, y_i, n_{ij}), le point d'abscisse $\overline{x}$ et d'ordonnée $\overline{y}$, moyennes respectives des séries marginales (x_i, n_i) et (y_j, n_j). C'est aussi le ***barycentre*** des points pondérés (M_{ij}, n_{ij}).

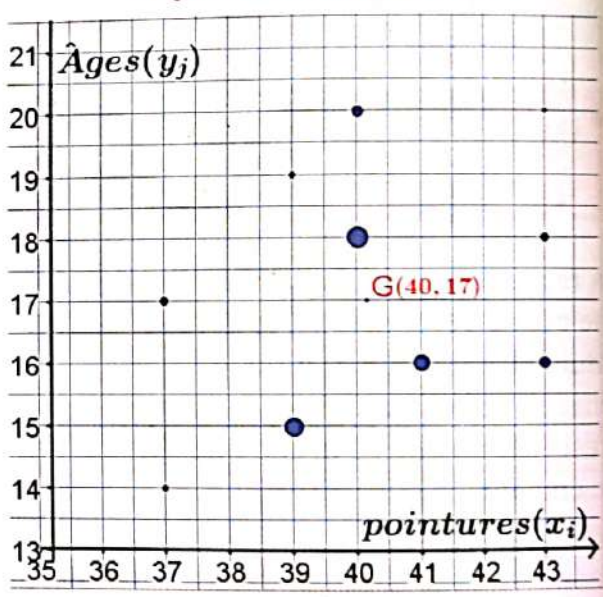
EXEMPLE

Pour la série double de l'activité ci-dessus, voici son nuage de points représenté par les deux méthodes.

Représentation par points pondérés



Représentation par tâches



Le point moyen G de cette série a pour coordonnées (40 ,17)

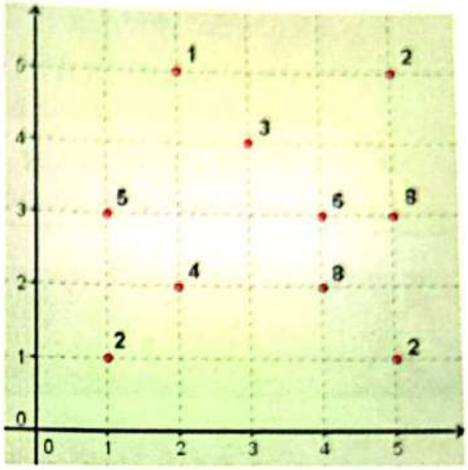
S'exercer

1.c Le tableau ci-dessous représente l'évolution du nombre d'un certain type d'animal dans un parc à partir de l'année 2000 :

Année	2000	2002	2004	2006	2008	2010
Rang de l'année : x_i	0	2	4	6	8	10
Effectif : y_i	144	164	210	238	266	316

1) Écrire l'ensemble des modalités du Caractère X.
2) Écrire l'ensemble des modalités du Caractère Y.
3) Déterminer les coordonnées du point moyen de cette série statistique.
4) Représenter le nuage de points de cette série statistique.

1.d Voici le nuage de points d'une série statistique double :



a) Calculer les coordonnées du point moyen de ce nuage de point.

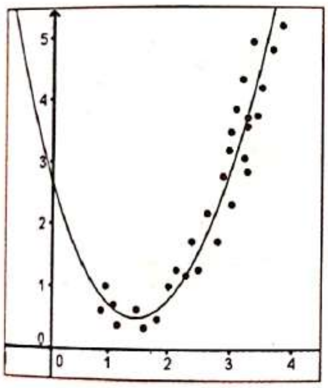
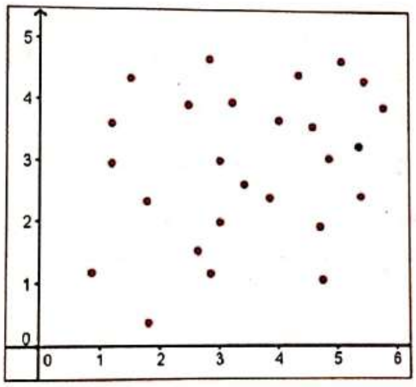
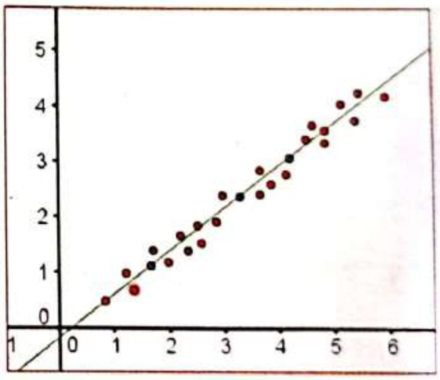
b) Déterminer les séries marginales associées à cette série double.
Vérifier que les moyennes de ces séries sont les coordonnées du point moyen.

c) Représenter par tâche ce nuage de point

1.e Représenter le nuage de points de la série double des exercices 1.a et 1.b

REMARQUE

- Il existe plusieurs types de nuages de points.

- Lorsqu'il est possible de construire une courbe qui passe le plus près possible des points du nuage, on dit qu'un ajustement est possible (c'est le cas pour la première et la troisième figure) ;
- Lorsque cette courbe est une droite, on parle d'ajustement affine ou linéaire. (cas de la troisième figure) ladite droite est alors appelée la droite d'ajustement affine.
- Il existe de nombreuses manières d'obtenir une droite d'ajustement : entre autres, la méthode dite de Mayer et la méthode dite des moindres carrés. Nous admettrons que les meilleures solutions sont obtenues quand la droite d'ajustement passe par le point moyen du nuage.

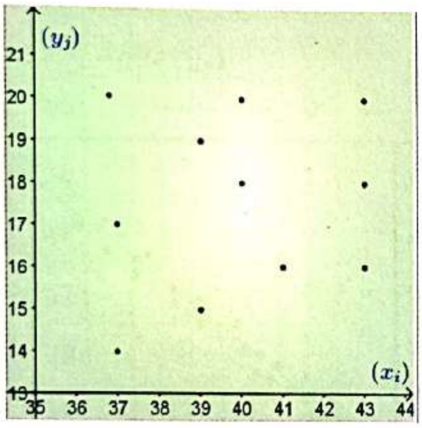
LEÇON 2 AJUSTEMENT LINÉAIRE D'UNE SÉRIE DOUBLE PAR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS.

- Calculer les paramètres d'une série double.
- Reconnaître à partir d'un nuage de points l'opportunité d'un ajustement linéaire d'une série double; déterminer une équation de la droite d'ajustement.
- Utiliser le coefficient de corrélation linéaire d'une série double pour évaluer le lien entre les deux caractères étudiés.

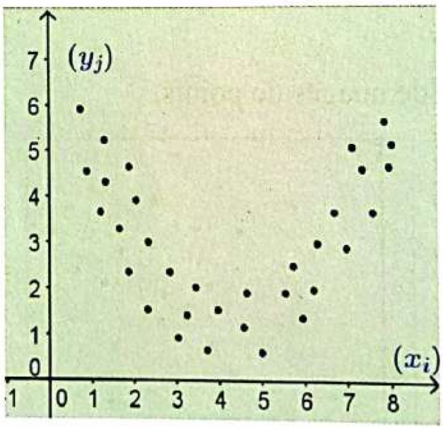
Prendre un bon départ

Activité 1

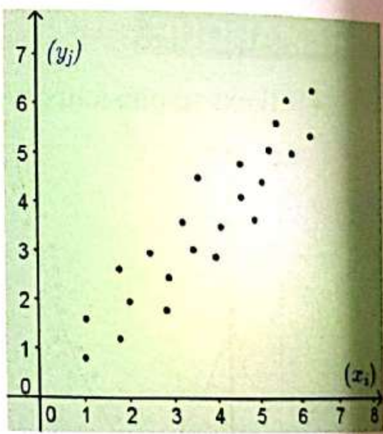
On considère trois séries doubles S_1 , S_2 et S_3 dont les nuages de points sont représentés ci-dessous.



Nuage 1



Nuage 2



Nuage 3

Sur les nuages de points ci-dessus, les points semblent regroupés sur deux d'entre-eux, lesquels ?

- Conjecturer sur la nature de la courbe autour de laquelle les points sont regroupés dans chacun de ces deux cas.

Activité 2

Pour mieux maîtriser les maladies cardio-vasculaires, on a relevé la tension artérielle moyenne en fonction de l'âge d'une population.

Age (x_i)	36	42	48	54	60	66
Tension (y_i)	11,8	14	12,6	15	15,5	15,1

a) Représenter le nuage de points de cette série ainsi que son point moyen.

b) Recopier et compléter le tableau suivant :

x_i^2							Total
y_i^2							
$(x_i - \overline{x})$							
$(y_i - \overline{y})$							
$(x_i - \overline{x})(x_i - \overline{x})$							
$x_i y_i$							

Donner l'effectif total N des individus sur lequel a porté l'enquête.

c) Calculer et comparer les nombres $C = \frac{1}{N}\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$ et $C' = \frac{1}{N}\left(\sum x_i y_i\right) - \overline{x}.\overline{y}$.

d) Déterminer les variances V_x et V_y puis les écarts types σ_x et σ_y de chacune des séries (x_i, n_i) et (y_i, n_i).

e) Soit (D) la droite d'équation $y = ax + b$ où $a = \frac{C}{V_x}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$. Écrire une équation ... puis la représenter sur le même graphique que le nuage de points.

Retenir

Soit une série statistique à deux caractères x et y.

- ***La covariance*** du couple $(x; y)$ est le réel noté $\text{Cov}(x; y)$ et défini par :
  $\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{N}\sum n_{ij}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \frac{1}{N}\left(\sum n_{ij} x_i y_i\right) - \overline{x}.\overline{y}$ où n_{ij} représente l'effectif de la modalité $(x_i; y_j)$. Lorsque toutes les modalités ont le même effectif 1, on a :
  $$\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{N}\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \frac{1}{N}\left(\sum x_i y_i\right) - \overline{x}.\overline{y}.$$
- Le ***coefficient de corrélation linéaire*** est le réel noté r qui est donné par $r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \times \sigma_y}$ où σ_x et σ_y représentent respectivement l'écart type de x et l'écart type de y.
- Lorsque les points d'un nuage semblent regroupés autour d'une droite, on dit qu'on peut ajuster ce nuage à cette droite : ce type d'ajustement est appelé ***ajustement linéaire.*** Les relations entre x et y sont de la forme $y = ax + b$ ou $x = ay + b$. Cette relation permet d'exprimer la valeur d'un caractère en fonction de celle de l'autre caractère.
- La méthode des moindres carrés permet de trouver deux de ces relations.

La droite de régression de y en x.

$y = ax + b$ avec $a = \dfrac{Cov(x,y)}{V_x}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$

La droite de régression de x en y.

$x = ay + b$ avec $a = \dfrac{Cov(x,y)}{V_y}$ et $b = \overline{x} - a\overline{y}$

REMARQUE 1

- La covariance de x et de y permet d'étudier l'interaction entre les caractères x et y.
- Le coefficient de corrélation linéaire r permet d'évaluer le degré de rapprochement entre les caractères x et y.
- $-1 \leq r \leq 1$.
  - Si $|r| \geq \dfrac{3}{4}$, alors on dit que la corrélation est forte et aussi les points du nuage semblent alors alignés, les droites de régression sont très proches l'une de l'autre. L'ajustement linéaire est justifié. Si $r = 1$ ou $r = -1$, les points du nuages sont alignés. La correlation est dite parfaite.
  - Dans le cas contraire, la corrélation est dite faible, L'ajustement linéaire n'est pas justifié mais le nuage de points peut être ajusté par une autre courbe.
- Les droites d'ajustement linéaire passent toutes par le point moyen.
- L'utilisation de la variance et la covariance pour déterminer les équations des droites de régression ou droites d'ajustement est appelée « ***méthode des moindres carrés*** ».

  Il existe cependant une autre méthode de détermination de ces droites dite ***méthode de MAYER***.

EXEMPLE

Afin d'orienter ses investissements, une chaîne d'hôtels réalise des analyses sur le taux d'occupation des chambres. Une analyse établit un lien entre le taux d'occupation, exprimé en %, et le montant des frais de publicité (en centaines de milliers de francs).

Frais de publicité (x_i)	30	27	32	25	35	22	24	35
Taux d'occupation (y_i)	52	45	67	55	76	48	32	72

1) Représenter le nuage de points de cette série.
2) Déterminer les coordonnées du point moyen.
3) Déterminer la covariance du couple $(x; y)$, ainsi que le coefficient de corrélation.
4) Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation cartésienne de la droite de régression de y en x.
5) Quelle estimation peut-on faire du taux d'occupation des chambres de cette hôtel si les frais de publicité étaient de 4000 000 francs ?

Solution

									Total
x_i	30	27	32	25	35	22	24	35	**230**
y_i	52	45	67	55	76	48	32	72	**447**
x_i^2	900	729	1024	625	1225	484	576	1225	**6788**
y_i^2	2704	2025	4489	3025	5776	2304	1024	5184	**26531**
$x_i y_i$	1560	1215	2144	1375	2660	1056	768	2520	**13298**

1) Construisons le nuage de points.(voir figure ci-contre)

2) Déterminons les coordonnées du point moyen.

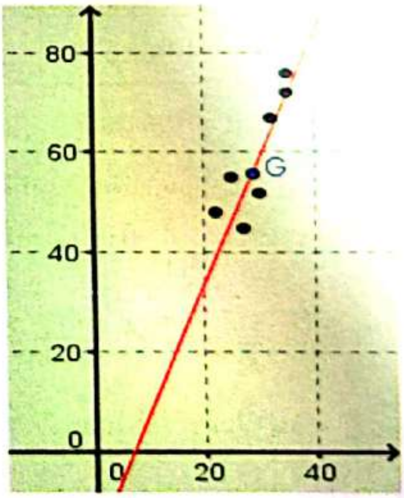
$\overline{x}=\frac{1}{8}\sum x_i=\frac{230}{8}=28,75$ et $\overline{y}=\frac{1}{8}\sum y_i=\frac{447}{8}\approx 55,88$ et donc $G(28,75\,;55,88)$.

3) Déterminons la variance de x et de y.

$V_x=\frac{1}{8}\sum x_i^2-\overline{x}^2=\frac{6788}{8}-(28,75)^2\approx 21,94$ et alors $\sigma_x=\sqrt{V_x}=\sqrt{21,94}\approx 4,68$

$V_y=\frac{1}{8}\sum y_i^2-\overline{y}^2=\frac{26531}{8}-(55,88)^2\approx 193.80$ et alors $\sigma_y=\sqrt{V_y}=\sqrt{193,80}\approx 13,92$

4) Déterminons la covariance $Cov(x;y)$ du couple $(x;y)$, ainsi que le coefficient de corrélation r.



$Cov(x,y)=\frac{1}{8}\left(\sum x_i y_i\right)-\overline{x}.\overline{y}=\frac{13298}{8}-28,75\times 55,88\approx 55,70$

par suite le coefficient de corrélation est :

$r=\frac{\text{cov}(x\,;y)}{\sigma_x\times\sigma_y}=\frac{55,70}{4,68\times 13,92}\approx 0,86$. Il existe donc une forte corrélation entre les frais de publicité et le taux d'occupation des chambres de cet hôtel.

5) Déterminons par la méthode des moindres carrés une équation cartésienne de la droite de régression de y en x.

Cette équation s'écrit $y=ax+b$ avec :

$a=\frac{Cov(x,y)}{V_x}=\frac{55,70}{21,94}\approx 2,54$ et $b=\overline{y}-a\overline{x}=55,88-2,54\times 28,75\approx -17,14$.

On a donc : $y=2,54x-17,14$.

6) Si les frais de publicité étaient de 4000 000 francs, soit $x=40$ (centaines de millions), alors la valeur estimative du taux d'occupation de l'hôtel serait : $y=2,54\times 40-17,14=84,46\ \%$.

Exercice Résolu : ***Ajustement par la méthode de Mayer***

Un responsable des ventes des produits laitiers analyse l'évolution de son chiffre d'affaires sur dix dernières années. Il relève pour cela le montant des frais de publicité engagés sur la même période.

Il dresse le tableau suivant (les montants sont exprimés en dizaine de millions)

Frais de publicité x_i	10	6	6,5	11,5	11	8	7	6,5	11	9
Chiffre d'affaires y_i	250	220	228	262	268	244	240	222	259	246

Solution

1) Déterminons les coordonnées du point moyen G de cette série.

Les coordonnées de G notées $\overline{x}$ et $\overline{y}$, sont respectivement les moyennes des valeurs x_i du premier caractère et des valeurs y_i du deuxième caractère.

$$G\begin{cases}\overline{x}=\dfrac{6+6,5+6,8+7+7,8+9+10,5+11+11,3+11,5}{10}=8,74\\[2mm] \overline{y}=\dfrac{220+229+225+237+235+247+250+268+258+264}{10}=243,3\end{cases}, \text{ donc } G(8,74;243,3).$$

On partage la série en deux groupes de points.

- le premier groupe est formé des 5 points d'abscisses les plus petites;
- le deuxième groupe formé des 5 points d'abscisses les plus grandes.

Pour cela, on obtient le tableau suivant

	1er groupe					2e groupe				
Frais de publicité x_i	6	6,5	6,8	7	7,8	9	10,5	11	11,3	11.5
Chiffre d'affaires y_i	220	229	225	237	235	247	250	268	258	264

2) Calculer les coordonnées de G_1, point moyen du premier groupe.

$$G_1\begin{cases}\overline{x_1}=\dfrac{6+6,5+6,8+7+7,8}{5}=6,82\\[2mm] \overline{y_1}=\dfrac{220+229+225+237+235}{5}=229,2\end{cases}, \text{ donc } G_1(6,82;229,2).$$

3) Calculer les coordonnées de G_2, point moyen du deuxième groupe.

$$G_2\begin{cases}\overline{x_2}=\dfrac{9+10,5+11+11,3+11,5}{5}=10,66\\[2mm] \overline{y_2}=\dfrac{247+250+268+258+264}{5}=257,4\end{cases}, \text{ donc } G_2(10,66;257,4).$$

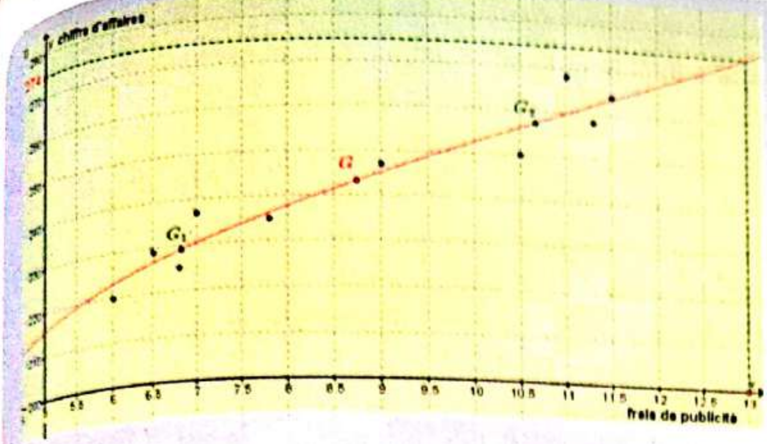
4) Déterminer une équation de la droite (G_1G_2).

L'équation est de la forme: $y=ax+b$ d'où $a=\dfrac{257,4-229,2}{10,66-6,82}\approx 7,34$ et $b=y_{G_1}-ax_{G_1}=179,14$

l'équation de (G_1G_2) est donc $y=7,34x+179,14$.

5) Représentons cette série double dans un repère orthogonal, en plaçant les 10 points dont les coordonnées sont les couples $(x_i;y_i)$.

Plaçons les points G, et G_1, G_2 dans le repère puis traçons la droite (G_1G_2).



On observe que le point moyen du nuage $G(8{,}65;243{,}9)$ appartient à la droite (G_1G_2).

Sur le graphique, l'ordonnée du point de la droite qui a pour abscisse 13 (13 millions) est environ 274 ; autrement dit, le responsable peut espérer un chiffre d'affaires de l'ordre de 274 000 000 de francs s'il investit environ 13 000 000 de francs dans la publicité. Cette valeur n'est qu'une estimation.

En utilisant l'équation de la droite, on obtient $y=7{,}34\times 13+179{,}14=274{,}56$

Soit un chiffre d'affaires de 274 560 000 francs.

REMARQUE 2

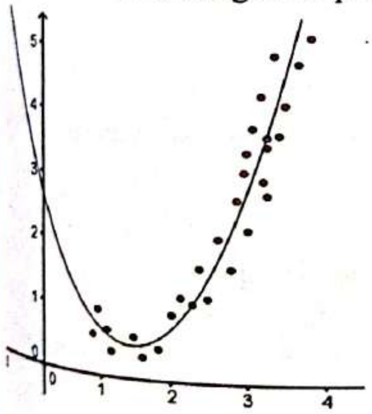
La méthode de Mayer

Elle consiste à :

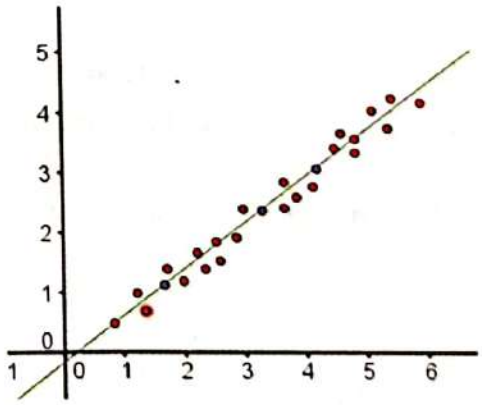
- Fractionner le nuage en deux nuages dont les effectifs sont égaux ou diffèrent de 1 ;
- Calculer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 des deux parties du nuage.
- Déterminer une équation de la droite $(G_1\,G_2)$.

Intérêt d'un ajustement

Considérons les nuages de points ci-dessous :



Un ajustement permet d'étendre les résultats d'une enquête menée sur un échantillon représentatif de population à des individus en dehors de cette population et par ricochet de faire des prévisions



Équation de la courbe d'ajustement :
$y=\alpha x^2+\beta x+c\gamma$

Équation de la courbe d'ajustement :
$y=ax+b$ **ou** $x=a'y+b'$

La connaissance de la courbe et d'une valeur x_i permet de calculer la valeur y_i correspondante et vice-versa.

S'exercer

3.a Le tableau suivant donne la tension artérielle moyenne Y en fonction de l'âge X d'une population :

Age (x_i)	36	42	8	54	60	66
Tension (y_i)	11,8	14	12,6	15	15,5	15,1

1) Représenter le nuage des points associé à cette série.
2) Déterminer et placer le point G de ce nuage.
3) Déterminer par la méthode de Mayer la droite d'ajustement affine de cette série.
4) Quelle estimation peut-on faire de la tension artérielle d'une personne âgée de 70 ans ?

3.b Madame Kouamé statisticienne à la retraite a créé une petite entreprise de fabrication de colliers traditionnels. Dans l'intention de faire des prévisions pour la production de colliers de l'année 2013, elle a fait l'état des ventes des huit types de colliers fabriqués en 2012. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Types de colliers	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix x_i de vente en centaines de francs CFA	54	60	66	72	84	90	96	102
Nombre y_i de dizaines de colliers vendus au prix x_i	18	16	15	13	10	9	8	7

1) Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série statistique double de caractère $(x_i;y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I,J). On prendra 2 cm pour 10 centaines de francs sur (OI) et 2 cm pour 2 dizaines de colliers sur (OJ).
2) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage.
3) Calculer la variance $V(X) de X$.
4) Calculer la covariance $COV(X\,;Y)$ de la série $(X\,;Y)$.
5) On admet que $V(Y)=14,50$.
   a) Démontrer que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire est égale à -0,99 et interpréter ce résultat.
   b) Démontrer qu'une équation de la droite de régression (D) de $Y en X$ par la méthodes des moindres carrés est $y=ax+b$ où $a et b$ ont pour arrondis respectifs d'ordre 2 les nombres $-0,23 et 29,94$. Pour l'année 2013, Madame Kouamé souhaite réaliser un nouveau type de collier qu'elle vendrait à 11500 francs CFA l'unité. Combien de colliers de ce type pourrait-elle vendre selon l'ajustement linéaire ainsi réalisé?

S'ENTRAÎNER

1.

Pour les emplois analogues, plusieurs entreprises hôtelières proposent des salaires x_i. Pour chaque salaire x_i le nombre de candidats y_i se sont présentés tels que consignés dans le tableau ci-dessous.

x_i	44000	45000	46000	470000	480000
y_i	10	13	17	19	21

1) Représenter graphiquement cette série par un nuage de points.
2) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.
3) Estimer le nombre de candidats qui se seraient présentés si on avait proposé le salaire de 50000 francs.

2.

Une firme a relevé dans 8 pays :

- X : le nombre de spots publicitaires hebdomadaires pour la promotion du dernier titre de leur chanteur vedette.
- Y : le nombre de « singles » vendus.

Elle obtient la série double suivante :

X	5	12	14	16
Y	60000	210000	270000	340000
X	20	22	25	30
Y	49000	52000	780000	1100000

1) Représenter graphiquement le nuage de points de la série $(X;Y)$.
2) Déterminer les coordonnées du point moyen de ce nuage.
3) Calculer la Covariance de X et de Y.
4) Déterminer par la méthode des moindres carrés la droite de régression de y en x et la représenter.

3.

Pour sept élèves d'une classe de première, on a, durant une année, mesuré :

- X : le nombre d'heures quotidiennes passées à regarder la télévision.
- Y : la moyenne obtenue à l'examen

On a obtenu :

X	0,5	1	1,5	2	2,5	[illegible]
Y	17,2	15	12,5	10,8	8,5	[illegible]

1) Établir une équation de la droite de régression de y en x.
2) Wilfried a regardé la télévision durant 2h 45. Quelle moyenne pouvait-il espérer à l'examen ?

4.

Une entreprise envisage la fabrication d'un nouveau produit pour lequel une étude a permis d'établir le tableau suivant, où x_i désigne la quantité de produit (en milliers d'unités) que la clientèle est disposée à payer, et y_i le prix de vente (en milliers de francs) d'une unité :

x_i	1,5	3	5	8	11	12
y_i	120	110	100	90	80	70

Ainsi, pour que la clientèle soit disposée à acheter 5000 unités, le prix de vente d'une unité doit être fixé à 100000 francs.

1) Représenter le nuage de points associé à cette série statistique : on prendra 1 cm pour 1 millier d'unités en abscisse et 1 cm pour 10000 francs en ordonnée.
2) Dans les questions suivantes, le résultat sera donné à 10^{-2} près.
   a) Donner une équation de la droite de régression de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.
   b) En utilisant ce modèle, quel doit être le

prix de vente d'une unité si l'on veut pouvoir vendre un minimum de 6500 unités ?

5.

Le prix de vente des terrains à bâtir dans une même commune est donné par le tableau suivant :

x_i = Rang

y_i = Prix du m² en milliers de francs

Année	1990	1995	1997	2000	2005	2007	2010
x_i	0	5	7	10	15	17	20
y_i	58,8	60,9	62,1	67,5	71,7	73	73,8

1) Quelle est, en pourcentage, l'augmentation du prix du m² entre 1990 et 2010 ?
2) Représenter le nuage de point associé à cette série dans un repère orthogonal où 5cm représentent 10 ans en abscisse, 5cm représentent 10000 francs en ordonnées.
3) Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.
4) Écrire une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés.
5) Estimer à 1000000 de francs près le prix d'un terrain de 1500 m² en 2013.

6.

Un relevé statistique des tailles X (en cm) et des poids Y (en kg) d'un échantillon de 100 élèves a permis de construire le tableau suivant :

X \ Y	45	50	55	60
155	18	10	2	0
160	3	16	5	1
165	0	5	13	5
170	0	2	6	14

1) Donner la distribution marginale de X et la distribution marginale de Y.
2) Calculer $\overline{X}$; $\overline{Y}$; V (X) ; V(Y) ; $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$

7.

On donne la série double suivante, relative aux voitures selon leur puissance Y et la durée des pneumatiques X (en milliers de Km).

X \ Y	2	3	4	total
20	0	8	30	**38**
25	5	20	7	**32**
30	25	3	2	**30**
total	**30**	**31**	**39**	**100**

1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire.
2) Un ajustement par la méthode des moindres carrés est-il justifié?

8.

L'indice moyen d'un salaire a évolué de la façon suivante :

	1	2	3	4	5	6	7
y_i	165	176	193	202	222	245	253

a) Représenter cette série statistique par un nuage de points.
b) En utilisant la méthode des moindres carrés, écrire une équation de la droite représentant l'indice en fonction de l'année.
c) À combien pourrait-on prévoir l'indice à l'année numéroté 9 ?

9.

On a étudié un échantillon de taille (100) sur lequel ont été mesurés deux caractères x et y, on a observé les résultats suivants :

$\sum_{i=1}^{100} x_i = 800$; $\sum_{i=1}^{100} y_i = 1200$; $\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 7200$;

$\sum_{i=1}^{100} y_1^2 = 16000$; $\sum_{i=1}^{100} x_i y_i = 10200$;

1) Écrire une équation de la droite de régression linéaire de la variable y sur x.
2) Écrire une équation de la droite de régression linéaire de la variable x sur y.

10.

On cherche à étudier la relation entre le nombre d'enfants d'un couple et son salaire. On dispose de la série bidimensionnelle suivante :

Salaire en euros (Y)	Nombre d'enfants (X)
510	4
590	3
900	2
1420	1
2000	0
600	5
850	6
1300	7
2200	8

1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre ces deux variables statistiques. Conclure.
2) Un expert en démographie affirme que les deux caractéristiques sont indépendantes. Qu'en pensez-vous ?

11.

x_i	$\left[0;\frac{1}{4}\right[$	$\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right[$	$\left[\frac{1}{2};1\right[$	$\left[1;\frac{5}{2}\right[$	$\left[\frac{5}{2};5\right[$	$[5;10[$
y_i	137	106	112	154	100	33

x_i = chiffre d'affaires ; y_i = nombre d'entreprises.

1) Calculer le chiffre d'affaires moyen et l'écart-type de la série.
2) Construire l'histogramme des fréquences.
3) Construire les deux polygones des fréquences cumulées.
4) Calculer la médiane et la proportion d'entreprises dont le chiffre d'affaires est supérieur à 3 millions d'euros.

12.

À un poste de péage, on compte l[illegible] voitures se présentant sur une p[illegible]
Sur 100 observations de 5min, [illegible] résultats suivants :

Nombre de voitures	1	[illegible]
Nombre d'observations	2	[illegible]

5	6	7	8	9	10	11	12
19	15	9	6	2	3	1	1

1) Construire le tableau des fréquences et le diagramme en bâtons en fréquences de la série du nombre de voitures.
2) Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série.
3) Déterminer la médiane.

13.

Le tableau suivant donne le nombre d'adhérents fréquentant une salle de sport en 2001 :

Mois x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre d'adhérents y_i	1100	1160	1220	1370	1620	1550	1600	1500	1790	1940	2060	1980

1) Représenter le nuage de points dans un repère orthogonal.
(abscisse : 1 cm pour 1 mois ; ordonnée : 1 cm pour 200 adhérents)
On partage l'ensembles des points du nuage en deux sous-ensemble correspondant chacun au 1^er^ et au 2^ème^ semestre.
   a) Calculer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 de chacun de ces sous-ensembles (abscisses arrondies au dixième, ordonnées arrondies à l'unité).
   b) Placer les points G_1 et G_2 dans le repère orthogonal.

2) Déterminer une équation de la droite d'ajustement passant par les points G_1 et G_2. (On écrira l'équation sous la forme $y = ax + b$ et on arrondira a et b au centième).
3) En déduire le nombre prévisible d'adhérents en :
   a) Janvier 2002 ;
   b) Juin 2002.

14.

Le Centre Textile de Conjoncture et d'Observation Économique (CTCOE) a étudié l'évolution des ventes de vêtements féminins entre 1991 et 2000. Pour des tee-shirts, on obtient les résultats suivants en milliers de pièces.

Années x_i	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Ventes y_i	100	102	124	147	197	226	250	305	334	330

1) Représenter le nuage de points dans un repère orthogonal.
2) On partage l'ensemble des points du nuage en deux sous-ensembles de même effectif.
   a) Calculer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 de chacun de ces sous-ensembles.
   b) Placer les points G_1 et G_2 dans le repère précédent.
3) Déterminer une équation de la droite d'ajustement passant par les points G_1 et G_2.
4) On suppose que les ventes évoluent de la même façon qu'en 2001. Déterminer graphiquement le nombre, en milliers, de tee-shirts susceptibles d'être vendus en 2001. (Faire apparaître les traits permettant la lecture du résultat).

15.

La société « LACREME » indique le nombre de crèmes vendues chaque mois pendant une année :

Mois x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre de crèmes y_i	90	105	105	117	119	128	120	130	140	135	140	155

1) Construire le nuage de points associé à cette série dans un repère orthogonal.
2) On partage l'ensemble des points du nuage en deux sous-ensembles de même effectif.
   a) Calculer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 de chacun de ces sous-ensembles.
   b) Placer les points G_1 et G_2 dans le repère précédent.
3) Déterminer une équation de la droite d'ajustement passant par les points G_1 et G_2.
4) On suppose que la tendance observée se prolonge pendant quelques mois.
   a) À l'aide du graphique, donner une estimation du nombre de crèmes qui devraient être vendues au mois de février de l'année suivante.
   b) Retrouver le résultat par le calcul en admettant que la droite $(G_1 G_2)$ a pour équation : $y=4,7x+93$

16.

Le tableau suivant précise le nombre d'établissements de «soins de corps» s'ouvrant de 1999 à 2005

Années	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Nombre d'établissements « soin corps »	170	190	207	200	180	250	225

1) Représenter par un nuage de points les établissements « soins de corps ». (abscisse : 2 cm pour 1 an ; ordonnée : 1 cm pour 25 établissements)

2) Déterminer les coordonnées du point moyen G.

3) Déterminer une équation de la droite de tendance passant par le point Moyen G et de coefficient directeur 7.

4) Tracer la droite de tendance passant par le point moyen G et par le point P (2005 ;225).

5) Déterminer graphiquement et par le calcul la prévision du nombre d'établissements de soins corps s'ouvrant pour 2006.

17.

Dans le tableau ci-dessous, on donne la pluviométrie moyenne mensuelle sur une région au cours des 12 derniers mois.

Mois	Janv	Fev	Mar	Avr	Mai	Juin	Juil	Aoû	Sept	Oct	Nov	Dec
Pluviométrie(mm)	102	82	85	69	75	82	81	68	80	97	97	124

1) Représenter le nuage de points dans un repère orthogonal en prenant comme unités :
   - en abscisse : 1 cm pour un mois (numéroter les mois de 1 à 12).
   - en ordonnée : 1 cm pour 10 mm de pluie.

2) On se propose de tracer la droite d'ajustement de ce nuage de points.
   - Calculer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 correspondant respectivement au premier et au second semestre.
   - Tracer la droite d'ajustement passant par les points G_1 et G_2.

3) Déterminer l'équation de la droite d'ajustement.

18.

Considérons la série statistique double suivante donnant dans les mêmes conditions de charge et de temps la consommation d'essence y_i en litres d'une voiture de modèle déterminé ... la vitesse x_i en Km/ h.

x_i en Km/h	80	85	90	95	100	105	110
y_i en litres	4,8	5,4	6,2	6,6	7	7,8	8,2

1) a) Représenter le nuage de points associé à la série (x_i , y_i) .dans un repère orthogonal.
   b) Calculer les coordonnées du point moyen G, puis le placer dans le repère.

2) a) Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y. Peut-on envisager un ajustement affine entre x et y ?
   b) Déterminer une équation de la droite de régression (D) de Y en X par la méthode des moindres carrés.
   c) Tracer la droite (D) dans le même repère.

19.

On se propose d'étudier l'influence de la température sur la durée d'incubation des œufs des grenouilles. On choisit 6 échantillons de 200 œufs chacun. Le nombre x d'éclosions au 22-ème jour est le suivant :

t_i = température d'incubation en degrés Celsius.

x_i = nombre d'éclosions à la température t_i.

t_i	6	6.4	6.8	7.2	7.6	8
x_i	131	144	157	170	190	189

1) Construire le nuage des données et tracer à l'œil nu une droite (D) qui a l'air de bien approcher ce nuage.

2) Calculer le coefficient de corrélation observé et écrire une équation de la droite de régression de x en t. Étudier la qualité de l'ajustement.

3) Calculer le nombre d'éclosions qu'on peut prévoir pour un échantillon de 200 œufs au 22-ème jour pour une température de 7,5 degrés.

20.

Les performances réalisées par 10 coureurs à pied sur un semi-marathon et un marathon (les temps sont donnés en minutes) sont données dans le tableau suivant :

x_i = Temps au semi-marathon.

y_i =Temps au marathon.

N° coureur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	68	70	76	80	90	96	104	110	125	138
y_i	145	150	170	185	200	220	250	285	320	345

1) Représenter le nuage des points dans un repère orthogonal.
2) Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de la série des temps (x_i) réalisés au semi-marathon, puis de la série des temps (y_i) réalisés au marathon.
3) Calculer la covariance de x et y, et le coefficient de corrélation linéaire.
4) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. Représenter cette droite sur le graphique de la question a).
5) Estimer le temps mis sur un marathon par un coureur ayant réalisé 1h 56 min au semi-marathon.

21.

Le tableau suivant donne l'âge X et la tension artérielle Y de 10 personnes.

X	58	40	74	34	65	49	53	51	36	40
Y	16.5	13.1	17.2	11.6	15.5	15.1	14.2	14.4	13.0	14.2

1) Construire le nuage de points de cette série statistique.
2) Déterminer la moyenne et la variance de chacune des variables X et Y.
3) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r des variables X et Y. Un ajustement linéaire entre X et Y est-il justifié?
4) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés.
5) Estimer la tension artérielle d'une personne âgée de 45 ans.

22.

Une banque a enregistré les nombres de retraits opérés dans un guichet automatique pendant une journée. Le tableau suivant donne les montants (en milliers de francs) des retraits et leurs effectifs.

x_i =Montant en milliers de francs

y_i = Effectifs de retraits

x_i	40	35	30	25	20	15	10	5
y_i	19	20	17	11	13	6	7	2

1) a) Construire, dans un repère orthogonal, le nuage des points représentant cette série statistique.
   b) Quelle particularité peut –on remarquer au sujet de la forme du nuage ?
   c) Déterminer, les coordonnées du point moyen G de ce nuage. Placer G.
2) On partage l'ensemble des points du nuage en deux parties. La première partie (P_1) correspond aux retraits inférieurs ou égaux à 25000 et la deuxième partie (P_2) correspond aux autres retraits.
   a) Déterminer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 respectifs des parties (P_1) et (P_2). Placer G_1 et G_2 dans le même repère.
   b) Donner une équation cartésienne de la droite (G_1G_2).
   c) Vérifier que la droite (G_1G_2) passe par le point G.
3) Quel est le nombre de retraits de 50 000 peut-on prévoir en une journée ?

SUJETS DE SYNTHÈSE

SUJET 1

Exercice 1

On définit une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1 \end{cases}.$$

1) Calculer $u_1, u_2, et\, u_3$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est-elle croissante ou décroissante ?

2) On pose $t_n = 4n - 10$ *et* $v_n = u_n - t_n$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est géométrique, et que la suite $(t_n)_{n\geq 0}$ est arithmétique.

3) Montrer alors que $v_n = \frac{11}{2^n}$.

4) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$?

5) On pose $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$,
$T_n = t_0 + t_1 + \ldots + t_n$ et $W_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$
Donner l'expression de T_n, W_n et S_n en fonction de n.

Exercice 2 :

1) Écrire sous forme algébrique :

a) $A = (3-i)(2i-5) - 2i(3-2i) + 4i$.

b) $B = \frac{5i-4}{2i+3}$.

2) On donne $z = x + iy$, x *et* y étant des réels. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $(2+i)(2i - \overline{z})$.

3) Une solution de l'équation $z^2 - 2z + 26 = 0$ est le nombre complexe $1 - 5i$. Sans aucun calcul, donner la deuxième solution en expliquant votre démarche.

4) a) Déterminer les racines carrées de $192 - 256i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $8(1+i)z^2 + 16iz - 3 + 11i = 0$. Après avoir rappelé les formules de Moivre et d'Euler, linéariser $sin^5(x)$.

PROBLÈME

On se propose de résoudre l'équation $(E) : x^2 + lnx - 2 = 0$.

1) a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 + lnx - 2$ et prouver que l'équation (E) admet une solution unique α.

b) Établir l'encadrement : $1,30 \leq \alpha \leq 1,35$.

2) a) Montrer que (E) est équivalente à l'équation $h(x) = x$ où h est la fonction définie sur $I = [1,30;1,35]$ par : $h(x) = \sqrt{2 - lnx}$.

b) Justifier que h est décroissante sur I et que $h(I) \subset I$.

c) Établir que, pour tout $x \in I, -\frac{1}{3} \leq h'(x) \leq 0$.

d) En déduire que, pour tout $x \in I$,
$|h'(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3}|x - \alpha|$.

3) Soit (u_n) la suite d'éléments de I définie par la relation : $u_{n+1} = h(u_n)$ et $u_0 = 1,30$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel n,
$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n,
$|u_n - \alpha| \leq \frac{5}{100}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et déterminer la limite de la suite (u_n).

c) Déterminer un entier naturel n_0 tel que : $|u_{n_0} - \alpha| \leq 10^{-6}$.
Déterminer l'entier a tel que : $a.10^{-6} < \alpha < (a+1)10^{-6}$.

SUJET 2

Exercice 1

Une urne contient une boule blanche, une boule rouge et trois boules noires toutes indiscernables au toucher.

1) On en tire une boule. Calculer la probabilité p_1 pour qu'il reste dans l'urne exactement deux couleurs.

2) On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. Calculer la probabilité pour qu'il reste dans l'urne exactement deux couleurs.

3) On tire simultanément deux boules de l'urne. On désigne par X la variable aléatoire numérique qui prend pour valeur le nombre de couleurs qui restent dans l'urne.

   a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.

   b) Déterminer la loi de probabilité de X.

   c) Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=-2i$, $z_B=-\sqrt{3}+i$, $z_C=\sqrt{3}+i$.

1) a) Écrire z_A, z_B *et* z_C sous forme exponentielle.

   b) En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C.

   c) Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle Γ puis placer les points B et C.

2) a) Écrire le quotient $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

   b) En déduire la nature du triangle ABC.

3) a) On note r la rotation de centre A et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$ radian.

   b) Montrer que le point O', image de O par r a pour affixe $-\sqrt{3}-i$.

   c) Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que $|z|=\left|z+\sqrt{3}+i\right|$.

   d) Montrer que les points A et B appartiennent à (E).

4) Soit l'application f définie dans le plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z'\ \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}z+\ -\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

Déterminer la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.

PROBLÈME

Le problème comporte deux parties indépendantes

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0;1[$ par $f(x)=\ln\left(1-\sqrt{x}\right)$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty$, f est-elle dérivable en 0 ? donner la nature de la tangente en O à la courbe de f.

   b) On donne ci-dessous le tableau de variation de f. Tracer (C). on précisera la demi-tangente à (C) en O.

x	0		1
$f'(x)$	||	$-$	||
$f(x)$	0	↘	$-\infty$

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0;1[$ sur $]-\infty;0]$. On notera f^{-1} la fonction réciproque de f et (Γ) la courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ de f^{-1}.

   b) Tracer (Γ). On précisera la demi-tangente à (Γ) en O.

2) a) Montrer que pour tout $x\in]-\infty\,;0]$, $f^{-1}(x)=\left(e^x-1\right)^2=e^{2x}-2e^x+1$.

   b) Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) de f^{-1} et les droites d'équations $x=-ln2;\ x=0;\ y=0$. Hachurer cette partie sur la figure.

Partie B

On considère l'équation différentielle

$(E): y'+y=e^x$.

1) Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x)=xe^{x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

2) On considère l'équation différentielle $(E'):y'+y=0$. Résoudre l'équation différentielle (E').

3) Soit v une fonction définie et dérivable sur . Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v-u$ est solution de l'équation différentielle (E').

4) En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

5) Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0)=2$.

SUJET 3

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. (unité : 1 cm).

On fera une figure que l'on complétera progressivement.

On considère les points A,B,S et Ω d'affixes respectives : $a=-2+4i, b=-4+2i$, $s=-5+5i$ et $\omega=-2+2i$.

Soit h l'homothétie de centre S et de rapport 3.

On appelle C l'image du point A par h et D l'image du point B par h.

1) a) Déterminer l'écriture complexe de h.

b) Démontrer que le point C a pour affixe $c=4+2i$ et que le point D a pour affixe $d=-2-4i$.

2) Démontrer que les points A,B,C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3) a) Déterminer l'affixe z_I du point I milieu du segment [AB].

b) Montrer que les points S, Ω et I sont alignés.

c) Démontrer que la droite $(S\Omega)$ est la médiatrice du segment [AB].

4) Soit P le milieu du segment $[AC]$.

a) Déterminer l'affixe p du point P.

b) Démontrer que $\dfrac{\omega-p}{d-b}=-\dfrac{1}{2}i$

c) En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{P\Omega})$

5) Soit Q le milieu du segment $[BD]$.

Que représente le point Ú pour le triangle PQS ? Justifier votre réponse.

Exercice 2

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_0=\dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{2}{u_n}\right)$.

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{2}{x}\right)$

1) Étudier le sens de variation de f ,

2) Vérifier que la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}x$ est une asymptote à la courbe de f et tracer cette courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(0,\vec{i},\vec{j})$, (On prendra comme unité 2 cm).

3) Utiliser le graphique précédent pour construire les points A_0, A_1, A_2, et A_3 de l'axe $(O,\vec{i})$, d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2, et u_3 .

4) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n>\sqrt{2}$

5) Montrer que pour tout $x>\sqrt{2}$, $f(x)<x$.

6) En déduire que la suite $(\ )_{\geq}$ est décroissante.

7) Prouver qu'elle converge.

8) Soit l la limite de la suite (u_n). Montrer que l vérifie la relation $2l=l+\dfrac{2}{l}$ et en déduire sa valeur.

PROBLÈME

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+1}$.
Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité : 2 cm)

Partie A .

Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x^3+3x-2$

1) Dresser le tableau de variation de g.
2) Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $g(\alpha)=0$. Vérifier que $0.59<\alpha<0,60$.
3) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B.

Étude de la fonction f

4) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
5) Montrer que pour tout réel x,
$$f'(x)=\frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}.$$
6) Étudier le sens de variation de la fonction f.
7) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
8) Montrer que pour tout réel x,
$$f(x)=x-\frac{x-1}{x^2+1}.$$
9) En déduire que la courbe C admet une asymptote oblique D aux voisinages de $-\infty$ et $+\infty$.
10) Étudier la position de la courbe C par rapport à D.
11) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 1.
12) Tracer les droites D et T ainsi que la courbe C.

SUJET 4

Exercice 1

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit l'équation
$$(E):\ 2z^2+(\sqrt{3}-i)z+(1-i\sqrt{3})=0$$

1) Calculer $(\sqrt{3}+3i)^2$.
2) Résoudre l'équation (E) et écrire ses solutions sous forme algébrique et exponentielle.
3) On considère dans le plan complexe les points A et B d'affixes respectives $z_A=i$ et $z_B=e^{-\frac{5\pi}{6}i}$.
Soit r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$, soit C l'image de B par r.
   a) Déterminer l'écriture complexe de r.
   b) Montrer que l'affixe de C est $z_C=e^{-\frac{\pi}{6}i}$.
   c) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
4) Soit D le barycentre des points pondérés $(A,2)$, $(B,-1)$, et $(C,2)$
   a) Montrer que l'affixe de D est $z_D=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; placer le point D dans le repère.
   b) Montrer que $\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A}=-i\sqrt{3}$.
   c) En déduire la nature du triangle ABD.

Exercice 2

Un sac contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Une épreuve consiste à tirer au hasard et simultanément deux boules de ce sac. On gagne lorsqu'on obtient au moins une boule blanche.

1) Calculer la probabilité p de gagner.
2) On suppose que chaque boule blanche dans un tirage fait gagner 1000FCFA et chaque boule noire dans le tirage fait perdre 500FCFA. Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique obtenu après un tirage.
   a) Donner la loi de probabilité de X.

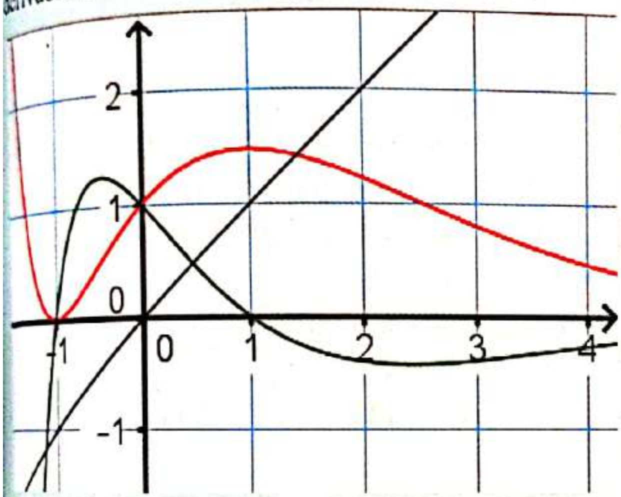
b) Calculer l'espérance mathématique de X et l'écart-type.

) On répète l'épreuve 5 fois de manière identique en remettant après chaque tirage les deux boules obtenues dans l'urne. Quelle est la probabilité de gagner toutes les cinq fois.

PROBLÈME

Partie A

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, les courbes $(\mathcal{C})$ et (Γ), représentatives d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et de sa fonction dérivée f'.



1) Reconnaître en justifiant la courbe représentative de f et celle de f'.

2) Déterminer $f(0), f'(0), f(-1) et f'(-1)$.

3) Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe de f', l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1 et x=0$.

4) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)^2 e^{-x}$.

a) À l'aide d'une double intégration par parties, montrer que $\int_{-1}^{0} f(x)dx = 2e-5$.

b) Déterminer l'aire A' de la partie du plan limitée par les courbes $(\mathcal{C})$, (Γ) et les droites d'équations $x=-1$ *et* $x=0$.

5) Soit g la restriction de à l'intervalle $[1;+\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Construire la courbe de g et celle de sa réciproque dans un même repère.

Partie B

On admet dans cette partie les résultats suivants :

- Il existe un unique réel $\alpha \in [1,2]$ tel que $f(\alpha)=\alpha$, avec $1,41<\alpha<1,42$
- $\forall x \in [1,2]$, $|f(a)-f(b)| \leq \frac{1}{2}|a-b|$

Soit la suite (U_n) définie par
$$\begin{cases} U_0 = 1,1 \\ U_{n+1} = f(U_n), n \geq 0 \end{cases}$$

1) Montrer par récurrence que $1 \leq U_n \leq 2$ *pour tout* $n \geq 0$.

2) Montrer que $|U_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n-\alpha|$.

3) Montrer que $|U_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ *pour tout* $n \geq 0$.

4) En déduire que la suite (U_n) converge et préciser sa limite.

Partie C

On considère les équations différentielles (E): $y''+2y'+y=2e^{-x}$ et $(E'): y''+2y'+y=0$

1) Montrer que la fonction f définie dans la partie A est une solution de (E).

2) Résoudre l'équation (E').

3) Montrer qu'une fonction h est solution de l'équation (E) si et seulement si la fonction $h-f$ est une solution de (E').

4) En déduire les solutions de (E).

SUJET 5

Exercice 1

1) On donne $Z = 2-2i\sqrt{3}$, déterminer sous forme algébrique et sous forme trigonométrique les racines carrées de Z.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+\left(\sqrt{3}-5i\right)z-6-2i\sqrt{3}=0$.

3) Soient les points Ω, A et B d'affixes respectives $z_\Omega=-\sqrt{3}+i$, $z_A=2i$ et $z_B=-\sqrt{3}+3i$.

a) Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixes z tels que $\left|z+\sqrt{3}-i\right|=2$.

b) Vérifier que les points A et B appartiennent à l'ensemble Γ.

c) Placer correctement les points Ω, A et B dans un repère orthonormé (on pourra s'aider de la forme trigonométrique de Ω et B).

4) Montrer que ΩAB est un triangle équilatéral.

5) Soit r l'application du plan complexe ayant pour expression complexe $z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+2i$.

a) Déterminer l'image du point A par r.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de r.

c) Retrouver le résultat de la question 4) précédente.

Exercice 2

1) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{4u_n}{1+u_n} \text{ pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

a) Calculer u_1 et u_2.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0<u_n<3$.

2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=\dfrac{u_n-3}{u_n}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de la suite (u_n).

3) On considère la suite (w_n) définie par $w_n=\dfrac{3}{u_n}$ et on pose $S_n=\sum_{k=0}^{n}w_k$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n=1-v_n$.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$S_n=n+1+\frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right).$$

c) Calculer la limite de $\dfrac{S_n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

PROBLÈME

Partie A

Soit la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=x^2(x+2)-4$

1) Étudier les variations de g sur $[0;+\infty[$.

2) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur $[0;+\infty[$ une unique solution α qui vérifie $1,1<\alpha<1,2$.

3) En déduire la résolution de l'inéquation $g(x)>0$ sur $[0;+\infty[$.

4) On pose $h(x)=g(x^2)$. Déduire de la question précédente que pour $x\in[0;+\infty[$, $h(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left]\sqrt{\alpha};+\infty\right[$ et dresser le tableau de signe de h sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x}+x$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité 1cm).

1) Étudier la parité de f.

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)$.

3) Peut-on en déduire une ou plusieurs droites asymptotes à la courbe (C_f)?

4) Démontrer que la droite (D) d'équation

$y=x+1$ est asymptote à la courbe (C_f) en $+\infty$. En déduire l'équation réduite d'une droite asymptote à la courbe (C_f) en $-\infty$.

4) a) Démontrer que f est dérivable sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ puis que

$$f'(x)=\frac{h(x)}{x^2\left(\sqrt{x^6+2x^4}+2\right)\sqrt{x^2+2}}.$$

b) Dresser le tableau de variation complet de f sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

5) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $\sqrt{2}$.

6) Tracer la courbe (C_f) en vous aidant de tous les renseignements obtenus précédemment.

SUJET 6

Exercice 1

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. Déterminer l'ensemble (C) des points M de (P) d'affixe z vérifiant : $\left|\left(1-i\sqrt{3}\right)z-\sqrt{3}-i\right|=4$.

On pourra poser $z=x+iy$ avec $x,y\in\mathbb{R}$.

1) Soit s la transformation du plan qui a pour écriture complexe : $z'=\left(1-i\sqrt{3}\right)z-\sqrt{3}-i$

a) Déterminer les éléments caractéristiques de s. on notera Ω son centre.

b) Déterminer l'image du point A d'affixe i et en déduire la relation entre $O\Omega$ et $A\Omega$

2) En utilisant les résultats établis au 2), retrouver l'ensemble (C) défini au 1).

3) On considère l'équation $(E): z^4=-4$ où z est un nombre complexe.

Montrer que si le nombre complexe z est solution de l'équation (E) alors les nombres complexes $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de l'équation (E).

4) On considère le nombre complexe $z_0=1+i$.

a) Écrire le nombre complexe z_0 sous forme exponentielle.

b) Vérifier que z_0 est solution de l'équation (E).

c) Déduire des deux questions précédentes trois autres solutions z_1, z_2 et z_3 de l'équation (E).

d) Soient B, C, D les points d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2. Vérifier que BCD est un triangle rectangle isocèle.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+n-2$ pour $n\geq 0$

1) Calculer u_1, u_2, et u_3.

2) a) Démontrer que pour tout entier naturel $n\geq 4$, $u_n\geq 0$.

b) En déduire que pour tout entier naturel $n\geq 5$, $u_n\geq n-3$.

c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1) On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=-2u_n+3n-\frac{21}{2}$.

a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

b) En déduire que : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}$.

Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$

c) Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

PROBLÈME

Partie 1

Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-3x-3$

1) Étudier son sens de variation.

2) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution α, et que $2{,}10\leq\quad\leq 2{,}11$.

3) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit la fonction $f(x)=\frac{2x^3+3}{x^2-1}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

1) Démontrer que $f'(x)=\frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$ et étudier le signe de $f'(x)$.
2) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3) Montrer que $3=\alpha^3-3\alpha$ et en déduire que $f(\alpha)=3\alpha$, puis donner un encadrement de $f(\alpha)$.

1) Déterminer les équations des asymptotes à la courbe de f. (on pourra calculer les limites de $f(x)-2x$ lorsque x tend vers $\pm\infty$.).
2) Étudier le signe de $f(x)-2x$ et en déduire la position de la courbe de f par rapport à la droite d'équation $y=2x$.
3) Construire dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe de la fonction f et ses asymptotes.

Partie 3

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{x+1};\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x-1}-2x\ ;$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos(3x)-1}{x^2}.$$

SUJET 7

Exercice 1

(La question 6 peut être traitée indépendamment des autres questions.)

L'observation de l'effort subi par un élève de terminale durant les six mois selon ses notes en mathématiques et ses notes en physique donne les résultats suivants.

	Nov.	Déc.	Jan.	Fév.	Mars	Avr.
Notes en maths (X)	5	7	9	11	12	14
Notes en phy. (Y)	8	7	10	12	11	13

1) Construire le nuage de points de la série (X,Y).
2) Donner la moyenne de chacune des séries X et Y.

   On veut procéder à un ajustement affine de ce nuage.
3) Préciser et déterminer le paramètre qui permet de justifier un tel choix.
4) Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de Y en X par la méthode des moindres carrés.
5) Quelle sera la note estimative de cet élève en physique s'il estime avoir 15.5 en Mathématiques à l'examen du bac ?
6) Dans la suite, on place ces 12 devoirs dans un classeur puis on tire au hasard et simultanément 2 devoirs.

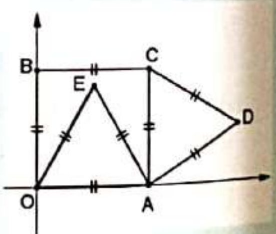
   Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

   A : «obtenir deux devoirs de la même matière».

   B : « obtenir deux devoirs dont la note de chacun est supérieur ou égal à10 ».

   C : « obtenir deux devoirs de la même matière tels que la note de chacun est supérieur ou égal à 10 ».

Exercice 2



Dans la figure ci-contre OACB est un carré direct. OAE et ADC sont deux triangles équilatéraux. Le plan complexe étant rapporté au repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$.

1) Déterminer les affixes des points A, C et B.
2) Montrer que l'affixe de E est $z_E=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3) Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z'=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}z+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

   a) Montrer que f est la rotation de centre A et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$.

b) En déduire que l'affixe du points D est $z_D = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

c) Montrer $\frac{z_E - z_B}{z_D - z_B} = \frac{1}{4+2\sqrt{3}}$. Que peut-t-on dire des points B, E et D ?

PROBLÈME **Les deux parties du problème sont indépendantes**

Partie A.

1) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y''+2y'+2y=0$ et en déduire la solution u qui est telle que $u(0)=0$ et la tangente à la courbe de u en 0 est parallèle à la droite d'équation $y=x$.

2) Vérifier que si une fonction h est solution de (E) alors $h = -\frac{1}{2}(h''+2h')$.

3) En déduire la valeur de l'intégrale $H(x) = \int_0^x e^{-t}\sin t dt$.

Partie B

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x-1+e^{x-1} \; si \; x \le 1 \\ x+\ln\left(\frac{1+x}{2x}\right) \; si \; x > 1 \end{cases}$$

Calculer $f(0)$, $f(-1)$, $f(1)$ puis verifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

1) Étudier la continuité de f en 1.

2) Étudier la dérivabilité de f en 1 puis interpréter le résultat.

3) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

4) Démontrer que la droite $(D_1): y = x-1$ est asymptote de C_f, courbe représentative de f, au voisinage de $-\infty$.

5) Démontrer que la droite $(D_2): y = x - ln2$ est asymptote de C_f au voisinage de $+\infty$.

6) Déterminer les positions relatives de (D_1) et (D_2) respectivement par rapport à C_f.

7) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

8) Tracer C_f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 1cm.

9) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

10) Tracer $C_{f^{-1}}$, courbe de f^{-1}, réciproque de f, dans le repère précédent.

11) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine déllimité par la courbe C_f, la première bissectrice et les droite d'équation respective $x=1$ et $x=3$.

SUJET 8

Exercice 1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère le polynôme complexe $p(z) = z^4 - 8iz^3 - 24z^2 + 32iz + 15$

1) Calculer $p(i)$, $p(3i)$, puis résoudre l'équation complexe $p(z)=0$.

2) a) Placer les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_1 = -1+2i, z_2 = 3i, z_3 = 1+2i \; et \; z_4 = i$.

b) Quelle est la nature exacte du quadrilatère $ABCD$? Justifier.

c) Déterminer une mesure de l'angle et le rapport de la similitude directe du plan de centre D qui transforme $A \; en \; B$.

3) On écrit chacun des nombres complexes z_1, z_2, $z_3 \; et \; z_4$ sur l'une des faces latérales d'un dé tétraédrique pipé.
On lance ce dé et on admet que la probabilité qu'une face soit cachée est proportionnelle au carré du module du nombre complexe inscrit sur cette face.

a) Montrer que $p_1 = p_3 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{9}{20}, \; p_4 = \frac{1}{20}$.

b) Soit X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe la somme des parties imaginaires des nombres complexes inscrits sur les faces latérales.

i) Montrer que X prend exactement trois valeurs.

ii) Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 2 :

Lors d'une épidémie, on a relevé, à intervalles de temps réguliers, le nombre de cas déclarés.

Numéros du relevé= x_i ; Nombre de cas déclarés= y_i.

x_i	1	2	3	4
y_i	94	221	446	1050

1) Représenter le nuage de points associé à cette série. Un ajustement affine peut-il être justifié ?
2) On pose $z_i = ln y_i$. Représenter les points de coordonnées $(x_i; z_i)$ dans un repère, sur un papier millimétré. (Déterminer les valeurs décimales approchées à 10^{-2} près de z_1, z_2, z_3 et z_4).
3) On admet qu'un ajustement affine conduit, pour la série $(x_i; z_i)$ à la droite $z = 0,798x + 3,764$.
   a) Tracer cette droite sur le graphique de la question 2).
   b) Utiliser cet ajustement affine pour obtenir une formule donnant une approximation de y_i en fonction de x_i.
   c) Déduire de la question précédente le nombre de cas prévisibles au 5ème relevé.

PROBLÈME

N.B : ce problème comporte deux parties indépendantes A et B.

Partie A :

1) Résoudre l'équation différentielle $(E): y' - 2y = 0$.
2) On se propose de déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : pour tout réel x, $f'(x) - 2f(x) = e^x \cos x$ (E_1).
   a) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout réel x, $f(x) = g(x)e^{2x}$.
   Calculer f' en fonction de g et g'.
   b) Montrer que f et solution de (E_1) si et seulement si g vérifie pour tout réel x, $g'(x) = e^{-x}\cos x$ (E_2)
   c) À l'aide de deux intégrations par parties, calculer $\int_0^x e^{-t} cost dt$.
   En déduire les fonctions g solutions de (E_2).
   d) Quelles sont les solutions de (E_1) ?
   e) Trouver les solutions de (E_1) vérifiant $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Partie B :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

I- f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{(x+1)^2}$.

C est la représentation de graphique de f.

1) Déterminer les réels a, b, c tels que C passe par O en y admetant une tangente d'équation $y = 2x$, puis la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote
2) Vérifier que $f(x) = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$.
3) Étudier les variations de f et représenter C.
4) Calculer l'aire du domaine D ensemble des points M de coordonnées $(x ; y)$ telles que $0 \le x \le 2$ et $f(x) \le y \le 1$.

II- On considère la suite (u_n) de terme général $u_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

1) Démontrer que pour tout naturel n, u_n est élément de $[0;1[$.
2) Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?
3) On pose pour $n \ge 1$, $X_n = u_1 \times u_2 \times u_3 \ldots\ldots \times u_n$. Montrer par récurrence que $X_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.
4) (v_n) est la suite de terme général $v_n = ln u_n$.
   a) La suite (v_n) est-elle définie pour tout n ?
   b) Quelle est le sens de variation de (v_n) ? Quelle est sa limite ?
   c) Étudier le signe de v_n.
5) Soit $Y_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$. Exprimer Y_n en de fonction de n.

Quelle est la limite de la suite (Y_n) ?.

SUJET 9

Exercice 1 :

On appelle S l'ensemble des suites de nombres complexes dont le terme général U_n vérifie pour tout entier naturel n : $U_{n+2} = \frac{1}{5}U_{n+1} - \frac{1}{10}U_n$.

1) Trouver les 2 valeurs complexes non nulles Z_1 et Z_2 telles que les suites de terme général $U_n = (Z_1)^n$ et $V_n = (Z_2)^n$ soient des éléments de S.

2) Soit θ le nombre réel compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et tel que $\arg(Z_1) = \theta$.
Calculer $w_n = (Z_1)^n + (Z_2)^n$ en fonction de θ. Quelle est la limite de (w_n) en $+\infty$?

Exercice 2 :

On considère les intégrales : $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$; $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$.

1) Soit la fonction f définie sur [0 ; 1] par : $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$
   a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$.
   b) En déduire la dérivée f' de f.
   c) Calculer la valeur de I.
2) a) Sans calculer explicitement J et K, vérifier que : J + 2I = K.
   b) À l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, montrer que $K = \sqrt{3} - J$.
   c) En déduire les valeurs de J et de K.

Exercice 3 :

Un professeur d'éducation sportive s'adresse aux trente élèves d'une classe de terminale au sujet de l'intérêt qu'ils portent au sport en général. Parmi ces trente élèves vingt lisent la rubrique sportive d'un journal, quatorze pratiquent un sport et huit font les deux.

1) Montrer qu'il y a exactement quatre élèves de cette classe qui ne s'intéressent pas au sport (ne lisent pas de journal et ne pratiquent aucun sport).
2) Le professeur interroge au hasard six élèves de cette classe. Quelle est la probabilité de chacun des évènements suivants :
   a) « Chacun des six élèves s'intéresse au sport. »
   b) Aucun des six élèves ne pratiquent un sport »
   c) Un élève et un seul parmi les élèves interrogés pratiquent un sport »

Exercice 4

1) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-8i$.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2z + 2i + 1 = 0$.

PROBLÈME

I- Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x + x + 1$.

1) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$ ainsi que ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$, une solution unique α. Justifier que $-1,28 \leq \alpha \leq -1,27$.
3) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

II- Soit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Vérifier que : $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$ et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 et étudier les positions relatives de (C) et de (T).

4) Déterminer la limite de f en $-\infty$. Interpréter géométriquement le résultat.

5) Calculer la limite de f en $+\infty$.

6) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à (C). Étudier les positions relatives de (C) et de (Δ).

SUJET 10

Exercice 1

Soit $p(z) = z^3 - (8 + i\sqrt{3})z^2 + (21 + 5i\sqrt{3})z - 18 - 6i\sqrt{3}$, où $z \in \mathbb{C}$.

1) a) Démontrer que le polynôme complexe $p(z)$ admet deux racines réelles que l'on précisera.

   b) En déduire la résolution de l'équation $P(z) = 0$.

Dans tout ce qui suit, on considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 1cm, les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 3$ et $z_C = 3 + i\sqrt{3}$.

2) a) Placer les points A, B et C.

   b) Déterminer en justifiant la nature du triangle ABC.

3) Soit D le point tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme. On note S la similitude plane directe de centre A et qui transforme C en D.

   a) Déterminer l'affixe z_D de D.

   b) Déterminer l'expression complexe de S, puis donner ses éléments caractéristiques.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{2x+1}$

1) Dresser le tableau de variation de f définie sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer sur $\mathbb{R}$, la primitive F de f qui prend la valeur e en 0.

3) On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = e + \int_0^n f(x)\,dx$.

   a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique de raison $q = e^2$.

   b) Calculer en fonction de n la somme $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$ et calculer la limite de S_n en $+\infty$.

4) Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = lnU_n$.

   a) Démontrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique. Préciser la raison et le premier terme.

   b) Calculer en fonction de n la somme $S_n' = V_0 + V_1 + \ldots + V_n$.

   c) Donner une expression simplifiée du produit $P_n = U_0 \times U_1 \times \ldots \times U_n$ en fonction de n.

PROBLÈME

Les parties A, B, C et D de ce problème sont liées.

On considère la onction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1+x}{x+e^{-x}}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique $4cm$.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x) = x + 2 - e^x$

1) Étudier les variations de g et déteminer sa limite en $+\infty$.

2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0;+\infty[$. On la note α.

   b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

1) a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{e^{-x}g(x)}{(x+e^{-x})^2}$.

   b) En déduire le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$.

2) a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$,on a : $f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}} + 1$.

b) En déduire la limite f en $+\infty$, puis interpréter graphiquement le résultat trouvé.

c) Dresser le tableau de variation de f.

1) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

2) a) Établir que pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, on a : $f(x)-(x+1)=\dfrac{(x+1)u(x)}{x+e^{-x}}$, où $u(x)=1-x-e^{-x}$.

b) Étudier les variations de sur $[0;+\infty[$, et en déduire le signe de $u(x)$.

c) Déduire des questions précédentes la position relative de (C) par rapport à ( )

3) Tracer (C) et (T). On prendra $\alpha \approx 1,2$.

Partie C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $I=[0;\alpha]$.

1) Justifier que h réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
Soit h^{-1} la bijection réciproque de h.

2) a) Sur quel intervalle h^{-1} est-elle dérivable ? Justifier.

b) Sans expliciter h^{-1}, calculer $(h^{-1})'(1)$.

3) Construire la courbe représentative de h^{-1} dans le repère précédent.

Partie D

1) Pour tout entier naturel n, on pose $w_n=\displaystyle\int_{n+2}^{n+3} f(x)dx$.

a) Calculer w_0.

(On rappelle que $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}+1$).

b) En déduire la valeur exacte de l'aire du domaine plan limité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=2$ *et* $x=3$.

2) a) Interpréter graphiquement w_n.

b) Montrer que tout entier naturel n, on a :

$$f(n+3)\leq \int_{n+2}^{n+3} f(x)dx \leq f(n+2).$$

En Déduire le sens de variation de la suite (w_n).

c) Déterminer la limite de la suite (w_n).

SUJET 11

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\cos x$.

1) Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ *et* $f^{(3)}(x)$.
2) Soit n un entier naturel non nul. Montrer par récurrence sur n que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$f^{(n)}(x)=x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+n\cos\left[x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right].$$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie pour $n\geq 1$, par $u_n=1+\dfrac{1}{n(-2)^n}$.

1) Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2) Montrer que pour tout $n\geq 1$, $-1<\dfrac{1}{(-2)^n}<1$
3) En déduire que pour tout $n\geq 1$, $1-\dfrac{1}{n}<u_n<1+\dfrac{1}{n}$.
4) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. (*unité graphique* : 2cm).

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation d'inconnue z : $4z^2-(8-6i)z+1-5i=0$.
2) On considère les A, B, C *et* D d'affixes respectives $Z_A=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$, $Z_B=\dfrac{3}{2}-i$, $Z_C=i$, et $Z_A=1+\dfrac{1}{2}i$.
   a) Placer les points A, B, C *et* D dans le plan.
   b) Quelle est la nature du triangle ABD ?

3) Soit f l'application du plan dans le plan d'écriture complexe : $z' = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z+1-i$.

Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

4) On considère les suites des nombres complexes (z_n) et (a_n) définies par :

$z_0 = 2+i$ et $z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z_n+1-i$, $\forall n \in \mathbb{N}$; $a_n = z_n - 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer que (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme a_0.

b) Donner l'expression du terme général de la suite (z_n) en fonction de n.

c) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels P_n, point image de z_n est sur l'axe des réels.

PROBLÈME

Partie A

I- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = 1+x+lnx$.

1) Dresser le tableau de variation de g.

2) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$. On la note α . Vérifier que α appartient à l'intervalle $[0,2;0,3]$.

3) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) Établir que $ln\alpha = -1-\alpha$.

II- On considère la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{xlnx}{x+1} \; si\, x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}.$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2) a) Étudier la dérivabilité de f en 0.

b) Interpréter graphiquement le résultat précédent.

3) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4) Exprimer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, en fonction de $g(x)$, puis donner le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

5) Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$.

6) Dresser le tableau de variation de f.

7) Représenter graphiquement f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. (unité sur les axes 5cm). Prendre $\alpha = 0,3$.

Partie B

On considère la fonction h définie par $h(x) = ln(e^{-x}+x)$ et C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique $2cm$.

1) a) En étudiant la fonction $x \mapsto e^{-x}+x$, justifier que h est définie sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+xe^x > 0$.

c) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h(x) = ln(1+xe^x)-x$.

2) Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}$.

3) a) Calculer la limite de $h\, en -\infty$.

b) Montrer que la droite d'équation $y=x$ est asymptote oblique à la courbe représentative de $h\, en -\infty$.

c) Montrer, pour tout $x \leq 0$: $h(x)+x \leq 0$.

4) On définit maintenant la fonction $g\, sur$ $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x) = h(x) - lnx$.

a) Étudier la limite de g en $+\infty$.

b) Étudier le signe de la fonction $g\, sur$ $\mathbb{R}_+^*$.

c) Interpréter graphiquement les résultats des questions 4-a) et 4-b).

Représenter C et son asymptote oblique.

SUJET 12

Exercice 1

Soit les deux suites (I_n) *et* (J_n) définies pour tout entier naturel n *par :*

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} sinx dx \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} cosx dx.$$

1) Calculer I_0 et J_0.

2) En intégrant par parties I_n puis J_n, montrer que : $I_n + nJ_n = 1$ et $-nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}$.

3) En déduire les expressions de I_n et de J_n en fonction de n. Déterminer les limites des suites (I_n) et (J_n).

Exercice 2

Soit la suite des poins (M_n) du plan complexe. M_n est d'affixe Z_n telle que $Z_0 = 8$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} Z_n$.

1) Déterminer le module et un argument de : $\frac{1+i\sqrt{3}}{4}$.

2) En déduire que pour tout n, M_{n+1} est l'image de M_n par la composée d'une rotation et d'une homothétie que l'on caractérisera.

3) Calculer les affixes Z_1, Z_2 *et* Z_3 des points M_1, M_2 *et* M_3 que l'on placera dans le plan complexe. Vérifier que Z_3 est réel.

4) Pour quelles autres valeurs de *n*, Z_n est il aussi réel ?

5) Soit $\theta_n = arg(Z_n)[2\pi]$. Montrer que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite périodique.

6) Calculer le rapport $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}}$. En déduire que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et que $M_nM_{n+1} = \sqrt{3}OM_{n+1}$.

7) Pour tout entier *n*, on pose $U_n = |Z_{n+1} - Z_n|$

a) Montrer que la suite (U_n) est géométrique. Donner son premier terme et sa raison.

b) En déduire la longueur L_n de la ligne brisée formée par les points $M_0, M_1, .., M_n$. Déterminer la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$.

PROBLÈME

Partie A

On considère l'équation différentielle :
$y'' - 2y' + y = 4e^x$ (1)

1) On pose $u(x) = 2x^2e^x$ pour tout réel x. Vérifier que la fonction u est une solution de l'équation (1).

2) On pose : $Z = f - u$. Montrer que f est solution de (1) si et seulement si Z est solution de l'équation $y'' - 2y' + y = 0$ (2)

3) a) Résoudre l'équation (2).

b) En déduire l'ensemble des solutions de (1)

c) Déterminer la solution particulière de (1) vérifiant : $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = -3$.

Partie B

Soit *f* la fonction définie par: $f(x) = (2x^2 - 3x)e^x$

1) a) Déterminer les limites de f *en* $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Étudier les variations de f.

2) Tracer la courbe (C) représentant la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{I}, \vec{J})$.

3) En remarquant que f est une solution de l'équation (1) de la partie A, démontrer qu'il existe une primitive F de f vérifiant pour tout réel x, $f'(x) - 2f(x) + F(x) = 4e^x$. En déduire l'expression explicite de F.

4) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$. Calculer en cm^2 l'aire $A(\alpha)$ du domaine plan limité par la courbe *(C)*, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = \alpha$ *et* $x = 0$.

Partie C

Soit $f_{a,b}$ la fonction définie par :
$f_{a,b}(x) = (2x^2 + ax + b)e^x$ où a et b sont 2 réels.

1) Étudier les variations de $f_{a,b}$ (discuter suivant les valeurs des réels a et b).

2) Les réels a et b sont déterminés par deux lancers successifs d'un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et ont la même probabilité d'apparition.

a) Calculer la probabilité de l'évènement A : « $f_{a,b}(1) = 10e$ »

b) Calculer la probabilité de l'évènement B : « $f_{a,b}$ admet un maximum et un minimum ».

c) Calculer la probabilité de l'évènement B sachant que l'événement A est réalisé.

SUJET 13

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique: 1cm).

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante : $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0$

I- Résolution de l'équation (E).

1) Montrer que $-i$ est une solution de (E).
2) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

II- On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4+i, 4-i, -i$.

3) Placer ces points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.
4) Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$. Calculer l'affixe de S.
5) Démontrer que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon.

   À tout point M d'affixe différente de 2, on associe le point M' d'affixe $z'=\dfrac{iz+10-2i}{z-2}$.
6) Déterminer les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B et C.
7) Vérifier que A', B', C' appartiennent à un cercle (C') de centre P, d'affixe i. Déterminer son rayon.
8) Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle (C). Démontrer que $|z'-i|=2\sqrt{5}$.

   En déduire auquel l'ensemble appartiennent les points M' associés aux points M du cercle (C).

Exercice 2

Une enquête est faite dans un supermarché pour évaluer la fidélité des clients.

Au cours du premier mois de l'enquête, 8 000 personnes sont venues faire leurs achats dans ce supermarché. On constate que, chaque mois, 70% des clients du mois précédent restent fidèle à ce supermarché et que 3 000 nouveaux clients apparaissent.

On note U_n le nombre de clients venus au cours du n-ième mois.

Ainsi, $U_1=8000$.

1) Calculer U_2 et U_3.
2) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.
3) On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel non nul n par : $V_n=10000-U_n$.
   a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
   b) Exprimer V_n, puis U_n en fonction de n.
   c) Quelle est la limite de la suite (U_n) ?
   d) Déterminer le petit plus entier n tel que $U_n>9000$.
   e) Interpréter les résultats précédents en termes de nombre de clients du supermarché.

PROBLÈME

N.B : ce problème comporte deux parties indépendantes A et B.

Partie A

On considère les équations différentielles :

(E) : $4y''-4y'+y=(x^2+4x)e^x$;

(E') : $4y''-4y'+y=0$.

1) Résoudre l'équation (E') sur $\mathbb{R}$ puis déterminer la solution h de (E') telle que la courbe représentative de h passe par le point $A(0;1)$ et admet au point $A(0;1)$ une tangente T parallèle à la droite D d'équation $y=\dfrac{3}{2}x-1$.
2) Justifier l'égalité $h(x)=-4h''(x)+4h'(x)$, puis trouver toutes les primitives de h sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer les réels a,b,c pour que la fonction $g: x \mapsto (ax^2+bx+c)e^x$ soit une solution de (E).

4) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f-g$ est solution de (E').

Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit la fonction numérique, définie pour tout $x \geq 0$, par : $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=\dfrac{2x}{x+2}\ln x\ ,\ x>0 \end{cases}$ et (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) On considère la fonction φ définie sur $]0;+\infty[$ par $\varphi(x)=x+2+2\ln x$.
   a) Étudier les variations de φ sur $]0;+\infty[$.
   b) Démontrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet une unique solution sur $]0;+\infty[$. On la note α. Vérifier que $\dfrac{1}{e^2}<\alpha<\dfrac{1}{e}$.
   c) En déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.
2) On considère maintenant la fonction f définie en début de cette partie.
   a) Démontrer que f est continue à droite de zéro.
   b) Étudier la dérivabilité de f à droite en zéro, et l'interpréter graphiquement.
   c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement ces résultats.
   d) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x)=\dfrac{2\varphi(x)}{(x+2)^2}$.
   e) Montrer que $f(\alpha)=-\alpha$.
   f) Dresser le tableau de variation de f.
   g) Déterminer l'abscisse β du point A (autre que O) intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses.
   h) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point A.
   i) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I=]\alpha;+\infty[$.
   Montrer que h réalise une bijection de I sur un intervalle à préciser.
   j) On désigne par (C') la courbe représentative de h.

   Tracer T, (C) et (C') dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

SUJET 14

Exercice 1

On donne le nombre complexe $u=\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1) a) Calculer u^2 et u^4. Calculer le module et un argument de u^4. En déduire le module et un argument de u.
   b) Déduire de la question précédente les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$ *et* $\sin\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$.
2) On considère dans un plan complexe P muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$. À tout point $M(x;y)$ on associe le point son affixe $z=x+iy$. Déterminer l'ensemble des points M de P pour lesquels le module de uz est égal à 8.

Exercice 2

Une urne contient cinq boules noires et quinze boules rouges toutes indiscernables au toucher. On suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirée.

1) Le jeu se déroule de la façon suivante : un joueur tire simultanément 3 boules.
   a) Calculer les probabilités des évènements suivants :

   A : « Le joueur a tiré exactement une boule noire »

   B : « Le joueur a tiré exactement deux boules noire »

   C : « Le joueur a tiré exactement trois boules noire »
   b) Le joueur gagne 500frs pour chaque boule

noire obtenue. On appelle X la variable aléatoire qui est la somme gagnée. Établir la loi de probabilité de X et calculer son expérience mathématique.

2) Le contenu de l'urne étant inchangé, le jeu se déroule maintenant de la façon suivante :

Le joueur tire une boule ;

- Si elle est noire, il gagne 500 frs et la partie est terminée ;
- Si elle est rouge, il la remet dans l'urne et procède à un nouveau tirage dans les mêmes conditions.

La partie s'arrête impérativement après le 3e tirage.

a) Quelle est la probabilité que le joueur gagne au 1er tour ?

b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne au 2e tour ?

c) Quelle est la probabilité que le joueur gagne au 3e tour ?

d) Quelle est la probabilité que le joueur n'ait rien gagné à la fin de la partie ?

PROBLÈME

Partie A

1) Déterminer la solution f_0 vérifiant la condition initiale $f_0(0)=1$ de l'équation $(E): y'+y=0$.

2) On veut déterminer les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation $(E_1): y'+y=e^{-x}lnx$.

a) Montrer que quelque soit la fonction f de dans $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, il existe une unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que : $f(x)=g(x)f_0(x)$.

b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur g' pour que f soit solution de l'équation (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) En déduire toutes les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Montrer qu'il existe une solution f de (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$ et une seule qui admet une limite 0 en 0.

Expliciter cette solution.

Partie B

I-1-On considère la fonction g définie sur $[1;+\infty[$ par $g(x)=\ln(2x)-x+1$.

Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation de la production.

Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur $[1\,;+\infty[$ une unique solution notée α.
Démontrer que $\ln(2\alpha)+1=\alpha$.

2) Soit la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1}=\ln(2u_n)+1$

On désigne par (T) la courbe d'équation $y=\ln(2x)+1$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Construire (T).

b) En utilisant la courbe (T), construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite.

c) Démontrer que pour tout entier naturel n, $1\le u_n\le u_{n+1}\le 3$.

d) Démontrer que la suite (u_n) converge vers α.

II- On considère la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(x)=(x-1)e^{1-x}$

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un orthonormal$(O;\vec{i};\vec{j})$. Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on pose :

$$F(x)=\int_1^x (t-1)e^{1-t}dt.$$

a) Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la fonction F est croissante sur $[1;+\infty[$.

b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que tout réel x appartenant à $[1;+\infty[, F(x)=-xe^{1-x}+1$.

c) Démontrer que sur $[1;+\infty[$, l'équation

$F(x)=\frac{1}{2}$ est équivalente à l'équation $\ln(2x)+1=x$.

d) Soit un réel β supérieur ou égal à 1. On considère la partie D_β du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=\beta$

Déterminer β tel que l'aire, en unités d'aires, de D_β, soit égale à $\frac{1}{2}$ et hachurer D_β sur le graphique.

SUJET 15

Exercice 1 :

On considère les intégrales $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos^2 x dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin^2 x dx$.

1) Calculer I+J.
2) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x)=\frac{1}{4}e^{2x}(\cos 2x+\sin 2x)$
   a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
   b) En déduire I – J. Calculer I et J.

Exercice 2 :

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, tracer la courbe de la fonction u définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par $u(x)=\frac{2x+1}{x+2}$.

1) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=\frac{2U_n+1}{U_n+2} \end{cases}$
   a) Représenter sur l'axe des abscisses du repère précédent les termes U_1, U_2 et U_3 de la suite U.
   b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.
   c) Montrer que pour tout entier naturel n, $0\le U_n<2$.
   d) En déduire que la suite (U_n) est convergente.
2) Soit la suite (V_n) définie par $V_n=\frac{1+U_n}{2-2U_n}$
   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
   b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
   c) En déduire la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$.
3) On pose $S_n=V_0+V_1+V_2+...+V_n$. Exprimer S_n en fonction de n et déterminer la limite de V_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 :

1) On donne. $I=\int_n^{n+1}(x+1)e^{-x}dx$. Calculer I.
2) On considère la suite (U_n) définie par
   $U_n=-(n+3)e^{-n-1}+(n+2)e^{-n}$, $n\in N$
   a) Étudier la convergence de la suite (U_n)
   b) Soit $S_n=U_0+U_1+U_2+...+U_n$; Calculer S_2.
   c) Exprimer S_n en fonction de n et calculer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

PROBLÈME

Partie A :

Soir f la fonction défini sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=x+\frac{2}{x}$

1) Montrer que f est impaire et étudier ses variations sur $\mathbb{R}^*$.
2) Soit (C) la courbe de f dans un repère orthonormé du plan.
   a) Déterminer les branches infinies à la courbe (C) de f.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
   c) Tracer la courbe (C)
3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}/\{1\}$ par $g(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$.
   a) Montrer que, pour tout réel x différent de 1, $g(x)=f(x-1)+2$.
   b) En déduire que le point I de coordonnées (1 ; 2) est centre de symétrie de la courbe

Cg de la fonction g.

4) Sans étudier la fonction g, construire Cg dans le même repère. On précisera les asymptotes à la courbe (Cg).

5) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe Cg, les droites d'équations respectives $x=2$, $x=a$ et $y=x+1$ où a est un réel supérieur à 2.

Partie B :

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=x+\dfrac{4}{1+e^{x}}$. On note (Γ) la courbe de h dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1) Montrer que pour tout réel x,

$h(x)=x+$ ——

2) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[h(x)-(x+4)\right]$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[h(x)-x\right]$ et en déduire les asymptotes à la courbe (Γ).

3) Préciser les positions relatives de (Γ) et de chaque asymptote.

4) Montrer que le point A (0 ; 2) est centre de symétrie de (Γ).

5) Étudier les variations de h et dresser son tableau de variation.

6) Construire la courbe (Γ) de h et ses asymptotes.

7) Soit α un réel inférieur ou égal à 0.

   a) Calculer en cm² l'aire A(α) de la partie du plan limitée par la courbe (Γ). Son asymptote oblique en $-\infty$ et les droites d'équation $x=\alpha$ et $x=0$.

   b) Calculer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$.

8) a) Montrer que h est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et en déduire le tableau de variation de sa bijection réciproque h^{-1}.

   b) Tracer la courbe de h^{-1} dans le même repère.

SUJET 16

Exercice 1

1) Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système $\begin{cases} xy=-2 \\ x+y=1 \end{cases}$.

2) On donne dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système suivant :

$$(S)\begin{cases} \dfrac{\ln x}{\ln y}+\dfrac{\ln y}{\ln x}=-\dfrac{5}{2} \\ xy=e \end{cases}$$

   a) Montrer que le système (S) est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} 2\left(\ln(x)+\ln(y)\right)^2+\left(\ln(x)\right)\left(\ln(y)\right)=0 \\ xy=e \end{cases}$$

   b) En déduire que les solutions $(x\,;y)$ du système (S) vérifient :

$$\begin{cases} \left(\ln(x)\right)\left(\ln(y)\right)=-2 \\ \ln(x)+\ln(y)=1 \end{cases}$$

   c) Donner alors la solution du système (S).

Exercice 2

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$

1) a) Déterminer le domaine de définition de f.

   b) Montrer que f admet en 0 un prolongement par continuité g.

2) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$,

$$f(x)=x^2\left[\frac{1}{x^2e^{\frac{1}{x^2}}}\right].$$

   b) Montrer que g est dérivable en 0.

   c) Déterminer pour tout $x\neq 0$, $g'(x)$.

Exercice 3

Soit f et g les fonctions définies par :

$f(x)=e^{-x}\cos x$ et $g(x)=e^{-x}\sin x$

1) Déterminer $f'(x)$ et $g'(x)$

2) En déduire que :

$f(x)+g(x)=-f'(x)$ et $f(x)-g(x)=g'(x)$

3) a) Déterminer une primitive de f et une primitive de g.

b) En déduire alors les primitives F de f et G de g telles que :
$F(0)=\frac{3}{2}$; $G(0)=\frac{3}{2}$.

PROBLÈME

Partie A :

Soit f la fonction définie par :
$f(x)=x^2+1-\frac{\ln(x^2)}{2}$

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f et donner les limites aux bornes de cet ensemble de définition.
   b) Étudier la parité de f et déterminer le domaine d'étude D de f. Donner l'expression simplifiée de f sur D.
2) a) Étudier les variations de f sur D et dresser le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.
   b) Déterminer alors le signe de $f(x)$.

Partie B :

Soit g la fonction définie par : $g(x)=x+\frac{\ln(|x|)}{x}$

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f et les limites aux bornes
   b) Montrer que g est impaire et en déduire le domaine d'étude D'.
2) a) Montrer que $g'(x)=\frac{f(x)}{x^2}$ sur D'.
   b) En déduire les variations de g et dresser le tableau de variation sur Dg
3) Montrer que la courbe de g coupe l'axe des abscisses en deux points dont les abscisses sont α et $-\alpha$ tels que $\alpha \in \left]\frac{1}{2};1\right[$.
4) Montrer que la courbe de g admet en $-\infty$ et en $+\infty$ une même asymptote (Δ) dont l'équation est : $y=x$.
5) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x)-x=0$.
   b) Déterminer alors suivant les valeurs de x le signe de $g(x)-x$.
   c) Déterminer les points d'intersection de l'asymptote oblique et de la courbe de g.
6) Tracer soigneusement la courbe de g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1,5cm$.

Partie C :

On donne $H(x)=[\ln(x)]^2$. Déterminer $H'(x)$

Déterminer dans $\mathbb{R}^*_+$ la primitive G de g qui prend la valeur 9 + ln2 en – 4.

SUJET 17

Exercice 1

Soit f lafonctiondéfiniepar: $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

Déterminer l'ensemble de définition de f

1) Montrer que f admet en 0 un prolongement par continuité g à déterminer.
2) Montrer que g est dérivable en 0. Déterminer la dérivée g' de g.

Exercice 2

On donne dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$(E): \ln\sqrt{2x-3}=\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$

1) Déterminer l'ensemble de définition de l'équation (E).
2) Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation (E).

Exercice 3

Soit f et g les fonctions définies par :

$f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$; $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

1) Déterminer $f'(x)$.
2) Montrer que : pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :
   $a)\ x+\sqrt{x^2+1}>0$; $b)\ \sqrt{x^2+1}-x>0$
3) Montrer que
   $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.
4) Déterminer alors la primitive G de –g qui prend la valeur 1 en 0.

PROBLÈME

Partie A :

Soit f la fonction définie de R dans R par : $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}$

1) a) Déterminer le domaine de définition de f.
   b) Étudier la parité de f et donner le domaine d'étude D de f.
2) a) Étudier la dérivabilité de f en 0 ; conclure.
   b) Donner les équations des tangentes à gauche et à droite à la courbe de f, au point d'abscisse 0. On notera (Tg) pour tangente à gauche et pour tangente à droite (Td).
3) a) Déterminer la dérivée de f sur $D\setminus\{0\}$
   b) Donner les variations de f sur D et dresser le tableau de variation sur D_f.
4) Montrer que l'équation $f(x)=0$ a deux solutions α *et* $-\alpha$ *telles que* $\alpha \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$.
5) Tracer soigneusement la courbe f, les droites (Tg) et (Td) dans un même repère.

Partie B :

Soit f_1 et f_2 les restrictions de f sur $]-1;0]$ *et* $[0;1[$ respectivement.

1) Montrer que f_1 et f_2 sont bijectives : on notera f_1^{-1} *et* f_2^{-1} leurs bijections réciproques respectives.
2) a) Déterminer $D_{f_1^{-1}}$ *et* $D_{f_2^{-1}}$
   b) Déterminer les limites aux bornes de $D_{f_1^{-1}}$ *et de* $D_{f_2^{-1}}$.
   c) Donner les équations des asymptotes aux courbes de f_1^{-1} *et* f_2^{-1}
3) a) Déterminer $f_1^{-1}(0)$; $f_2^{-1}(0)$.
   b) Donner la solution de l'équation $f_1^{-1}(x)=0$.
4) Tracer soigneusement les courbes de f_1^{-1} et f_2^{-1} dans un même repère différent du précédent.
5) Montrer que :
   a) $f_2^{-1}(x)=\frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$;
   b) $f_1^{-1}(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

Partie C :

1) Déterminer une primitive F_1 de f_1 et une primitive F_2 de f_2.
2) Donner alors les primitives F et F' de f_1 et f_2 respectivement telles que :
$$\begin{cases} F(0)+F'(0)=0 \\ F(0)-F'(0)=2 \end{cases}$$

SUJET 18

Exercice 1

On considère dans l'ensemble C des nombres complexes, le polynôme $p(z)=z^3-8$.

1) Factoriser P(z) puis résoudre dans C l'équation p(z)=0.
2) On considère dans un plan complexe les points A ; B ; C d'affixes respectives $z_0=2$; $z_1=-1+i\sqrt{3}$ *et* $z_2=-1-i\sqrt{3}$
   a) Calculer $|z_0|;|z_1|;|z_2|$.
   b) Calculer $|z_0-z_1|;|z_0-z_2|;|z_2-z_1|$ et en déduire la nature du triangle ABC.
   c) Donner l'écriture complexe de la transformation S du plan telle que : S(A)=B ; S(B)=C ; S(C)=A puis donner sa nature et ses éléments caractéristiques.

Exercice 2

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} U_0=3 \\ U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n-4 \end{cases}$$

1) Montrer par récurrence que (U_n) est minorée par −8 et est décroissante.
2) En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

PROBLÈME

I) On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^2-\ln x$.

1) Étudier les variations de la fonction g.
2) Déduire de cette étude le signe de g(x).

II) On considère la fonction f définie sur R* par : $f(x)=x+\frac{1+\ln|x|}{x}$. Soit C la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que f est impaire.
2) Soit f_1 la restriction de f à $]0;+\infty[$ et C_1 sa courbe.
   a) Déterminer les limites de f_1 en 0 et en $+\infty$
   b) Montrer que C_1 a une asymptote verticale et une asymptote oblique (D) d'équation $y=x$.
   c) Déterminer la position de C_1 par rapport à (D) sur $]0,+\infty[$
   d) Démontrer que (D) coupe C_1 en un point B dont on donnera les coordonnées.
3) Étudier les variations de f_1 et dresser son tableau des variations.
4) Déterminer le point A de C_1 où la tangente (T) est parallèle à (D).
5) Construire avec soin la courbe C_1 de f_1 et en déduire celle de f.

C) Soit la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x)=x^2+\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2+2$.

1) Calculer pour tout x de $]0;+\infty[$ la dérivée F'(x).
2) Calculer l'aire de la portion du plan délimitée par C_1, (D) et les droites d'équations respectives $x=\frac{1}{e}$ *et* $x=1$.

SUJET 19

Exercice 1

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E):(iZ+1)^3=8$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3=8$.

a) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).
b) Montrer que les points A, B et C d'affixes respectives $-i$, $\sqrt{3}+2i$ *et* $-\sqrt{3}+2i$ sont les sommets d'un triangle équilatéral.
c) Construire l'isobarycentre G du triangle ABC, puis construire l'image de ce triangle par la similitude S=hor où r est la rotation de centre G et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et h l'homothétie de centre G et de rapport 2.

2) α est un nombre réel appartenant à $[-\pi;\pi]$.
   a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^2-4Z\sin\alpha+4=0$. Les solutions Z_1 et Z_2 seront trouvées en fonction de α.
   b) Calculer les complexes $S=\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}$ *et* $S'=Z_1^4+Z_2^4$.

Exerçice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$2iZ+(1-i)\overline{Z}+4=0$ ($\overline{Z}$ est le conjugué de Z)

1) On considère dans P la transformation t d'écriture complexe $Z'=Z+1+i\sqrt{3}$
   a) Soit $Z'=x'+iy'$ *et* $Z=x+iy$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de t.
   c) Soit r la transformation d'écriture complexe $Z_1=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de *t*.
2) Soit Z un complexe différent de -2 ; M le point d'affixe Z. On donne $Z=\frac{Z-2i}{Z+2}$. Soit $Z=X+iY$ et $z=x+iy$
   a) Exprimer X et Y en fonction de x *et* y
   b) Déterminer l'ensemble (D) des points M du plan tels que Z soit réel.

c) Déterminer l'ensemble (C) des points M du plan tels que Z soit imaginaire.

d) Construire (D) et (C) dans le plan. (On prendra $\sqrt{2} \approx 1,4$)

PROBLÈME

Partie A :

1) P est le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = -8x^3 - 15x^2 - 4$

a) Vérifier que $P(x) = (-x-2)(8x^2 - x + 2)$

b) Dresser le tableau de signe de $P(x)$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = 2 + \dfrac{4x+5}{x^3-1}$ et (C) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

c) Calculer les limites aux bornes de son ensemble de définition puis donner les asymptotes à (C).

d) Montrer que $f'(x) = \dfrac{P(x)}{(x^3-1)^2}$ puis étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

e) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-1;-0,5[$. Donner une valeur approchée d'ordre 1 de α.

3) a) Construire la courbe de f dans le plan et en déduire celle de $g(x) = \dfrac{4x+5}{x^3-1}$

b) Résoudre l'équation $f(x) = -m$ (m étant un paramètre réel).

Partie B :

Soit h la fonction numérique de la variable réelle x définie par $h(x) = (x+1)\sqrt{|x^2-1|}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de h.

2) Écrire h(x) sans les barres de valeur absolue puis calculer les limites de h.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x}$ puis interpréter le résultat.

4) Étudier la dérivabilité de h en -1 et en 1, puis conclure.

5) Étudier les variations de h et dresser son tableau de variation.

6) a) Montrer que h est bijective de $I = \left[\frac{1}{2};1\right]$ sur J à déterminer.

b) h^{-1} est-elle dérivable en $h\left(\frac{1}{2}\right)$? Justifier.

c) Calculer $h\left(\frac{3}{4}\right)$ et en déduire le calcul de $(h^{-1})'\left(\frac{7\sqrt{7}}{16}\right)$.

7) a) Tracer la courbe de h dans un repère d'unité 2cm.

b) Tracer dans le même repère la courbe de h^{-1} dans J.

SUJET 20

Exercice 1

On donne le nombre complexe $u = 2 - i$

1) Déterminer u^3.

2) On définit de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ l'application f par :
$f(z) = z^3 - z^2(4-i) + 2z(3-i) - 2(2-i)$
Déterminer $f(u)$.

3) a) Déterminer les réels a et b tels que :
$f(z) = (z-2+i)(z^2 + az + b)$.

b) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet trois solutions dont deux conjuguées l'une de l'autre.

c) Déterminer alors les solutions de $f(z) = 0$: on notera z_0 , z_1 et z_2 ces solutions telles que $z_2 = \overline{z_1}$ et $\operatorname{Im}(z_1) > 0$

4) soit A, B et C les points du plan d'affixes respectives z_0 , z_1 et z_2.

a) Montrer que ABC est un triangle rectangle en un point à nommer.

b) Déterminer z_D affixe du point D telle que ADBC soit un parallélogramme.

c) Quelle est la nature exacte de ce parallélogramme ?

Exercice 2

Soit $f(x)=\sin x+\sin 3x$

1) Déterminer une primitive F_1 de f.
2) a) Montrer que $f(x)=4\sin x\cos^2 x$.
   b) En déduire une autre primitive F_2 de f.
3) En calculant $F_1(0)$ et $F_2(0)$, montrer que :
   $3\cos x+\cos 3x=4\cos^3 x$

Exercice 3

Soit $(U_n)_{n\in N}$ la suite définie par $U_0=0$ et $U_{n+1}=\sqrt{6+U_n}$.

1) Calculer U_1, U_2.
2) a) Montrer que pour tout $n\in N$, $U_n<3$.
   b) Montrer que $(U_n)_{n\in N}$ est croissante.
   c) Montrer que $3-U_{n+1}<\frac{3-Un}{3}$.
   d) En déduire que $3-U_{n+1}<\frac{1}{3^n}$.

PROBLÈME

Partie A :

Soit f la fonction définie par :
$f(x)=\ln\left(e^x+1\right)-x$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f et les limites aux bornes de cet ensemble.
2) a) Montrer que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ (On pourra montrer que $f(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)$)
   b) Montrer que la droite $(\Delta): y=-x$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$.
3) Étudier les variations de f et dresser le tableau de variation.
4) Montrer que sur $]-\infty;0[$ la courbe de f est au-dessus de (Δ).
5) Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie B :

Soit $g(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)-x$.

1) Déterminer Dg et les limites aux bornes.
2) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3) En déduire le signe de g suivant les valeurs de x.

Partie C :

Soit la suite U définie par : $U_0=1$ et $U_{n+1}=\ln\left(1+e^{-U_n}\right)$.

1) Montrer que pour tout $n\in N^*$, $0<U_n<1$.
2) a) Montrer que $(U_n)_{n\in N}$ est décroissante.
   b) En déduire que $(U_n)_{n\in N}$ est convergente. Déterminer la limite de $(U_n)_{n\in N}$.

SUJET 21

Exercice 1

On pose $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x\,dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x\,dx$

1) Calculer $I+J$.
2) Calculer $I-J$ (on pourra utiliser la méthode d'intégrations par parties).
3) Calculer I et J.

Exercice 2

I- Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, Ω le point de coordonnées $(2;1)$. S est la similitude de centre Ω, de rapport $\sqrt{2}$ et d'anglede mesure $\frac{\pi}{4}$; (D) est la droite d'équation $3x+3y-4=0$ et $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 3.

1) Soit $M(x;y)$ un point du plan et $M'(x;y)$ son image par S. exprimer x' et y' en fonction de x et de y.
2) Soit l'expression analytique d'une similitude directe du plan S suivante : $\begin{cases} x'=x-y+1 \\ y'=x+y-2 \end{cases}$.

a) Déterminer une équation de (D') droite image de la droite (D) par S.

b) Déterminer une équation de C', image de C par S.

II-Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2000 \\ u_{n+1} = 1{,}05u_n + 1000 \end{cases}$$

1) Pour tout nombre entier naturel n, on pose : $v_n = u_n + a$ où $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer le nombre réel a sachant que la suite (v_n) est une suite géométrique.

1) Dans toute la suite, $a = 20\,000$.
2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
3) La suite (v_n) est-elle convergente ? justifier votre réponse.
4) Au 1[er] janvier de l'année 1 992, une ville possède 20 000 habitants. À partir de cette année la population de cette ville augmente de 5% par an. De plus, durant la même période, 1 000 personnes viennent s'installer dans cette ville chaque année.

   Quelle sera la population de la ville le 1[er] janvier de d'année 2 000 ?
5) Dans cette ville, l'ensemble des élèves de l'enseignement primaire représente 20% de la population totale. On estime qu'il faut un enseignant pour 40 élèves. Quel devra être le nombre d'enseignants au 1[er] janvier 2 000 ?(on prendra pour population totale 39 099 habitants le premier janvier 2 000)

PROBLÈME

Les parties A et B de ce problème sont indépendantes.

Partie A :

L'étude de la croissance de la racine d'un plant de fève a conduit à construire des modèles mathématiques de cette croissance. Dans les modèles considérés, t désigne le temps et y(t) la longueur des racines. t et y(t) sont des nombres réels positifs et y une fonction de t ; on l'appellera « fonction de croissance ». dans un modèle dit de Blackmann, on suppose que la fonction de croissance est deux fois dérivable et qu'à chaque instant de l'accélération de croissance par des engrais chimique on a la loi suivante : pour tout réel positif t, $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 4e^t$ (I)

1) Les spécialistes en biologie végétale trouvent une fonction de croissance particulière $u(t) = 2t^2e^t$.

   Vérifier que la fonction de croissance u est solution de l'équation (I).

2) Soit $z(t) = y(t) - u(t)$. Montrer que y est une solution de l'équation (I) si et seulement si z est une solution de l'équation (II) suivante $z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 0$.
3) Déterminer la fonction de croissance qui est solution de l'équation (II).
4) Déterminer la fonction de croissance solution de l'équation (I) telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 3$.

Partie B :

I- Soit g la fonction définie numérique de la variable réelle x définie sur $]-2;+\infty[$ par $g(x) = (x+2)^2 - 1 + \ln(x+2)$.

1) Calculer $g'(x)$, en déduire le sens de variation de g.
2) Calculer $g(-1)$, en déduire le signe de g suivant les valeurs de x.
3) Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de g, l'axes des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

II-On considère la fonction f définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln(x+2)}{x+2}$.

1) a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   b) Démontrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+2)^2}$ et dresser son tableau de variation.

2) On appelle C la courbe représentative de f et (D) la droite d'équation $y = x$:

   a) Démonter que C admet une asymptote

verticale et la droite (D) comme asymptote oblique.

b) Démontrer que C rencontre (D) en un seul point A, dont on déterminera les coordonnées.

c) Démontrer qu'il existe un unique point B de C, où la tangente (T) est parallèle à (D), préciser les coordonnée de B et une équation de (T).

d) Tracer avec soin la courbe C, sans oublier ses asymptotes et la tangente (T), dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J)(unité sur les axes : 2cm)

3) On désigne par h la restriction de f à l'intervalle $[-1;+\infty[$.

a) Montrer que h réalise une bijection de $[-1;+\infty[$ vers $[-1;+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de h^{-1} .

Tracer la courbe représentative C' de h^{-1} dans le même repère que C.

SUJET 22

Exercice 1

A)1- Résoudre l'équation complexe :

$z^3+(4+5i)z^2+(8-20i)z-40i=0$

sachant qu'elle admet racine imaginaire pure.

2) On donne $A(3+i)\,;B(2i)\,;C(2-2i)$.

a) Placer les points A, B, C dans le plan et démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.

b) Déterminer l'affixe du point D telle que ABCD soit un parallélogramme. Placer le point D.

3) a) On donne $\Omega(1;0), k=\sqrt{2}\ et\ \alpha=\dfrac{\pi}{2}$.

Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s de centre Ω de rapport et d'angle de mesure α .

b) Déterminer l'image par s de la droite (D) d'équation $x-y+1=0$.

B) Soit $A=\int_0^1 e^{\frac{t^2}{2}}dt$.

En subdivisant l'intervalle $[0;1]$ en 5 intervalles de même amplitude, déterminer un encadrement de A. Majorer l'erreur commise en prenant S_5 pour valeur approchée de A.

Exercice 2

1) a) Démontrer que pour tout x de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$, $\dfrac{sinx}{1+\pi^2}\leq\dfrac{sinx}{1+x^2}\leq\dfrac{sinx}{\pi^2}$.

b) En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{sinx}{1+x^2}dx$

2) a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{4}\right]$, $1\leq\dfrac{1}{sinx}\leq\sqrt{2}$.

b) En déduire que $\dfrac{\pi}{4}\leq\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{sinx}dx\leq\frac{\pi}{4}\sqrt{2}$.

3) Soit $A=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}sin^2xcos^4xdx\ et\ B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}cos^2xsin^4xdx$

a) Calculer A+B et A-B.

b) En déduire les valeurs exactes de A et de B.

PROBLÈME

Les parties A et B de ce problème sont liées.

Dans tout ce problème, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$: on prendra 2cm comme unité sur les axes et on placera l'axe des abscisses au milieu de la feuille et l'axe des ordonnées sur le bord gauche de la feuille millimétrée

Partie A :

Étude d'une fonction *f* et de sa courbe représentative (C).

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(lnx-2)$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer les limites de f en $+\infty\,et\,en\,0$.

2) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $f'(x)$.
3) Soit u la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $u(x)=lnx+x-3$.
   a) Étudier les variations de u.
   b) Montrer que l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]2;3[$. Montrer que $2,20<\alpha<2,21$.
   c) Étudier le signe de $u(x)$ sur $]0;+\infty[$.
4) a) Étudier les variations de f.
   b) Exprimer $ln\alpha$ comme polynôme en α puis montrer que $f(\alpha)=\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$.
   En déduire un encadrement de α d'amplitude 2×10^{-2}.
5) a) Étudier le signe de $f(x)$.
   b) Tracer (C).

Partie B :

Étude d'une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

Soit F la primitive de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.

On appelle Ã la courbe de F relativement au repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Sans calculer $F(x)$, étudier les variations de F sur $]0;+\infty[$.
   b) Que peut-on dire des tangentes à Ã aux points dabscisses $1\,et\,e^2$?
2) Calcul de $F(x)$.
   a) x étant un réel strictement positif, calculer l'intégrale $\int_1^x lnt\,dt$. (On pourra faire une intégration par parties)
   b) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $f(x)=\ln x\left(x+2-\frac{1}{2}\ln x\right)-3x+3$.
   c) En déduire l'expression de F(x) en fonction de x.
3) a) Calculer la limite de F en 0.
   b) Montrer que pour tout réel x strictement supérieur à 1, $F(x)=lnx\left(\frac{1}{2}\times\frac{lnx}{x}+\frac{2}{x}\right)+3$.
   En déduire la limite de F en $+\infty$.
   c) Dresser le tableau de variation de F.
   d) Tracer Γ sur le même graphique que (C).
4) Calcul d'une aire.
   Calculer, en cm², l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1\,et\,x=e^2$.

SUJET 23

Exercice 1

A) On considère la suite (U_n) pour tout entier naturel non nul par : $U_n=\int_0^1(1-t)^n e^t dt$.

1) Montrer que la fonction f définie par $f(t)=(2-t)e^t$ est une primitive de la fonction g définie par $g(t)=(1-t)e^t$ sur $[0;1]$. En déduire la valeur de U_1.
2) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que , pour tout entier naturel non nul $n, U_{n+1}=(n+1)U_n-1$.
   a) Sachant que pour tout réel t de l'intervalle $[0;1]$ et pour tout entier naturel non nul n $0\le(1-t)^n e^t\le(1-t)^n e$, montrer que pour tout entier naturel non nul n, $0\le U_n\le\dfrac{e}{n+1}$.
   b) Déterminer alors la limite de la suite (U_n).

B) On lance 04 fois de suite une pièce parfaite à deux faces portant les nombres $+1\,et-1$, en notant à chaque fois le nombre affiché sur la face supérieure lorsque la pièce s'immobilise. Calculer la probabilité pour que
   a) La somme des nombres soit nulle.
   b) Le même nombre n'apparaisse pas deux fois de suite.

Exercice 2

Le plan $\wp$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On désigne par I, A et B les points d'affixes respectives $1, 1-2i$ et $-2+2i$ et par (C) le cercle de diamètre $[AB]$

1) Déterminer le centre Ω de (C) et calculer son rayon.
2) Soit D le point d'affixe $z_D = \dfrac{3+9i}{4+2i}$.
   Écrire z_D sous forme algébrique, puis démontrer que D est sur le cercle (C).
3) On considère un point E du cercle (C) d'affixe z_E telle que $mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega E}}\right)$ est $\dfrac{\pi}{4}$.
   a) Préciser le module et un argument de $z_E + \dfrac{1}{2}$.
   b) En déduire que $z_E = \dfrac{5\sqrt{2}-2}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{4}i$.
4) Soit l'application r du plan $\wp$ dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' + \dfrac{1}{2} = e^{\frac{i\pi}{4}}\left(z + \dfrac{1}{2}\right)$.
   Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.

PROBLÈME

Partie A :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0,I,J)$.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = (x+1)e^{-2x} + 1 - x$.

On appelle (C) sa courbe représentative.

1) Calculer la fonction dérivée f' de f.
2) a) Calculer la limite de f' en $+\infty$ et dresser le tableau de variation de de f' sur $[0;+\infty[$.
   b) En déduire le signe de f' sur $[0;+\infty[$.
3) Calculer la limite de f en $+\infty$ et dresser son tableau de variation sur $[0;+\infty[$.
4) Montrer que (C) admet une asymptote (D) que l'on précisera.
5) Construire (C) et (D) sur un même graphique.

Partie B :

1) Quels doivent être les coefficients a et b pour que la fonction f (de la partie A) vérifie l'équation différentielle du second ordre (E) : $y'' + ay' + by = -4x$?
2) Montrer qu'une fonction g est solution de de (E) si et seulement si $g - f$ est solution de (F) : $y'' + ay' + by = 0$.
3) En déduire toutes les solutions de (E) après avoir résolu (F).

SUJET 24

Exercice 1.

(Les volets I et II de cet exercice sont indépendants)

I Soit le nombre complexe $z = -\sqrt{2-\sqrt{3}} + i\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

1) Déterminer le module et un argument de z^2.
2) En déduire l'écriture exponentielle de z.
3) Déterminer alors les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(0;\vec{u},\vec{v})$.

1) On donne $z = a + ib$ où a et b sont des nombres réels. On note $^{-}$ le nombre complexe défini par $\overline{z} = a - ib$.
   Démontrer que pour tout nombre complexe z et z', $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z}'$
2) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $\overline{z}^n = (\overline{z})^n$.
3) On considère l'équation (E) : $z^4 = -4$ où z est un nombre complexe. Montrer que si le nombre complexe z est solution de l'équation(E), alors les complexes $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de (E).
4) On considère le complexe $z_0 = 1 + i$.
   a) Écrire z_0 sous forme exponentielle.
   b) Vérifier que z_0 est une solution de (E).
   c) Déduire de *b)* trois autres solutions de l'équation(E).

5) Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = 1+i$, $z_B = -1+i$, $z_C = -1-i$ *et* $z_D = 1-i$.

Soit r la rotation du plan de centre C et d'angle d'une mesure $-\frac{\pi}{3}$. On appelle *E l'image de B* par r et F celle de D par r:

a) Déterminer l'écriture complexe de r.

b) Démontrer que l'affixe du point E est $z_E = -1+\sqrt{3}$..

c) Déterminer l'affixe z_F du point F.

d) Déduire que le quotient $(z_A - z_E)/(z_A - z_F)$ est un réel.

e) Que peut-on dire des points A, E et F ?

Exercice 2.

Une entreprise spécialisée dans l'industrie du bois envisage de faire des prévisions pour l'année 2013 du coût de production des feuilles de contre plaqués en fonction du chiffre d'affaires. Elle dispose à cet effet des données statistiques résumées dans le tableau suivant.

X= Chiffres d'affaires *(en million de francs)*

Y= Coût de production (en *million de francs)*

Années	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
X	350	380	500	450	580	650	700
Y	40	45	50	55	60	65	70

1) Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série double *(X,* Y) dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(0, I, J)$. On prendra *1cm* pour 50 millions de francs en abscisses et 1cm pour 5 millions de francs en ordonnées.

2) Déterminer les coordonnées du point moyen *G*.

3) Vérifier qu'un arrondi de la covariance *cov(X,* Y) de cette série statistique est 1193.

4) a) Justifier l'existence d'un ajustement linéaire entre X et Y.

b) Déterminer une équation de la droite d'ajustement *(D)* de Y en X par la méthode des Moindres Carrés.

c) Construire *(D)* dans le même repère.

d) Prévoir le coût de production de cette entreprise pour l'année 2014 son chiffre d'affaires est de 800.000.000 F.

Exercice 3.

I- On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ *et pour tout entier naturel n*

$$u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 1.$$

1) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, représenter sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2 *et* u_3. *(Unité graphique : 2cm)*

2) a) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par $\frac{5}{2}$.

b) En déduire que (u_n) converge.

II- Une urne contient 10 jetons dont 6 noirs et 4 blancs. On tire au hasard et simultanément 5 jetons de l'urne. On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus lors d'un tirage.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Déterminer la fonction de repartions *de* X et la représenter graphiquement.

3) Caleuler l'écart-type de X.

PROBLÈME

(les parties A et B sont indépendantes)

Partie A

On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E): y' + 2y = x + 1$. On pose

$$F(x) = \int_{-1}^{x} e^{2t}(t+1)\,dt.$$

1) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties $F(x)$.

2) Pour tout nombre réel x, on pose $S(x) = g(x)e^{-2x}$ où g est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

a) Montrer que S est solution de *(E)* si et seulement pour tout réel x, $g'(x)=e^{2x}(x+1)$.

b) En utilisant la question 1), déterminer toutes les fonctions g vérifiant pour tout réel x, $g'(x)=e^{2x}(x+1)$.

3) a) En déduire alors que les solutions de *(E)* sont les fonctions $x\mapsto\frac{1}{4}(2x+1)+\frac{1}{4}e^{-2-2x}+ke^{-2x}$ où k est un réel, independent de x.

b) Déterminer la solution de *(E)* qui prend la valeur $\frac{1}{4}$ en 0.

Partie B

Dans toute cette partie, f désigne la fonction de la variable réelle x définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x)=(e^{-2x}+1)(x+1)$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité *1cm* sur les axes.

1) Soit g la fonction définie par $g(x)=e^{2x}-2x-1$.
Étudier les variations de g et en déduire le signe de *g(x)* pour tout réel x.

2) Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=e^{-2x}g(x)$.

3) En déduire de 1), le sens de variations de f et dresser son tableau de variation.

SUJET 25

Exercice 1 :

A/ On lance deux fois de suite un dé cubique équilibré dont deux faces portent le numéro 3, trois faces le numéro 1 et une face porte le numéro 2.

1) Déterminer le nombre de toutes les éventualités.

2) Calculer la probabilité de l'évènement :
A : « Les numéros obtenus sont impairs ».
On définit par X la variable aléatoire qui au résultat (numéro obtenu au 1er lancer i numéro obtenu au 2ème lancer j) associe $|i-j|$

3) i- Donner les différentes valeurs possibles de X.
ii Déterminer la loi de probabilité de X.

B/ Soit Y la variable aléatoire dont la distribution de probabilité se présente de la manière suivante :

y	0	1	2
$P(Y=y)$	$\frac{7}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{3}$

4) Calculer l'espérance mathématique $E(Y)$ et la variance $V(Y)$ de Y.
Calculer la probabilité de l'évènement B : "$Y<2$".

5) On répète l'expérience 6 fois de suite de manière indépendante.
Calculer la probabilité de réaliser au moins une fois l'évènement B.

Exercice 2 :

P est le polynôme de la variable complexe z, défini par : $P(z)=z^3-5(1+i)z^2+18iZ+10(1-i)$.

1) Calculer $P(1+i)$.

2) Écrire $P(z)$ sous la forme : $(z-1-i)(z^2+az+b)$ où a et b sont deux nombres complexes à déterminer.

3) a) Calculer $(1+i)^2$.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :
i) $z^2-(4+4i)z+10i=0$;
ii) $P(z)=0$.

4) A, B et C sont les points du plan complexe, d'affixes respectives : $1+i$; $3+i$ et $1+3i$.
a) Écrire sous forme algébrique, puis exponentielle le quotient $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.
b) S est la similitude directe de centre A, transformant B en C.
i) Déterminer le rapport et une mesure en radians de l'angle de S.
ii) Déterminer l'écriture complexe de S.

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(0,\vec{i},\vec{j})$ tel que : $\|\vec{i}\|=2cm$ et $\|\vec{j}\|=1cm$.
$f : x \mapsto (x-1)(e^{2x}+1)$ une fonction, (C) sa représentation graphique dans le plan.

Partie A :

1) Résoudre l'équation différentielle $(E_1) : y''-4y'+4y=0$.
2) Montrer que f est solution de l'équation $(E_2) : y''-4y'+4y=4x-8$
3) a) Montrer qu'une fonction g est solution de (E_2)si et seulement si la fonction $g-f$ est solution de (E_1).
   b) Donner alors la forme générale des solutions de (E_2).
   c) En déduire la solution de (E_2) dont la représentation graphique passe par le point de coordonnées (0 ; –2) et y admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Partie B :

1) Étudier les variations de f', fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
2) Dresser le tableau des signes de f' sur $\mathbb{R}$ et en déduire que f' est toujours positive sur $\mathbb{R}$.
3) Donner le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$.
4) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
5) Justifier que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J à préciser, puis dresser le tableau de variations de f^{-1}, bijection réciproque de f.

Partie C :

1) Montrer que la droite $(D) : y=x-1$ est asymptote à (C) en $-\infty$.
2) Étudier la nature de la branche infinie à (C) en $+\infty$.
3) Étudier la position de (C) et de (D).
4) Construire (C).

Partie D :

1) À l'aide d'une intégration par parties, calculer : $I(a)=\int_1^a (x-1)e^{2x}dx$ où a est un réel donné.
2) a) Calculer en cm^2, l'aire du domaine plan limité par les droites d'équations respectives : $x=1; x=\beta; y=x-1$ et la courbe (C) où $\beta \leq 1$.
   b) Étudier la limite de cette aire quand β tend vers $-\infty$.

SUJET 26

Exercice 1

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis lancer le dé :

- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 et gagne lorsque le lancer du dé ne donne pas 6 ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6 et perd lorsque le lancer du dé ne donne pas 6. À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'évènement " *le jeton tiré est blanc* " et G l'évènement " *le joueur gagne le jeu* ". L'évènement contraire d'un évènement E sera noté E. La probabilité d'un évènement E sera notée p(E).

Partie A

3) Montrer que $p(G)=7$. Déduire $p(\overline{G})$ (On pourra s'aider d'un arbre pondéré).
4) Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?
5) Un joueur fait quatre parties de façon indépendante.

6) Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

7) Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,99 ?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- chaque joueur paie 100 FCFA par partie ;
- si le joueur gagne la partie, il reçoit 500 FCFA ;
- si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1) On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie. *NB : Le gain étant la différence entre* ce que le joueur *reçoit et ce qu'il paie,*

a) Donner la loi de probabilité de X et son espérance E(X).

b) On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $E(X) < 0$. Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?

2) L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc.

a) Donner en fonction de n la valeur $p(G)$

b) Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

Exercice 2

Partie A

On considère l'équation :

$(E): z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=0$ où z est un nombre complexe.

3) Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation

4) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z, si : $p(z)=z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i$, alors $p(z)=(z-i)(az^2+bz+c)$. En déduire les solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormal direct , on considère les points d'affixes respectives i, 2 + 3i et 2 – 3i.

5) Soit r la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe du point A', image du point A par la rotation r.

6) Démontrer que les points A', B et C sont alignés et déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B qui transforme C en A'.

PROBLÈME

Les parties A et B sont independantes.

Parti A

On pose $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{6}} sin(3x)dx$ et, pour tout nombre n entier naturel non nul, $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin(3x)dx$.

1) a) Calculer I_0.

b) En utilisant une intégration par parties, calculer I_1.

2) a) En effectuant deux intégrations par parties successives, exprimer, lorsque $n \geq 1$, I_{n+2} en fonction de I_n.

b) Vérifier que $I_3=\frac{\pi^2}{108}-\frac{2}{27}$.

3) Sans calculer l'intégrale I_n.

a) Montrer que (I_n) est décroissante.

b) Pour tout nombre n entier naturel non nul, montrer que : $0 \leq I_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n dx$.

c) Déterminer la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie B

Le but de l'exercice est de montrer que l'équation (E) : $e^x = \frac{1}{x}$, admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

I- Existence et unicité de la solution

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-e^{-x}$.

1) Démonter que x est solution de l' équation (E) si et seulement si $f(x)=0$
2) Étude du signe de la fonction f
   a) Étudier le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   b) En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α
   c) Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$.
   d) Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0\ ;\alpha]$.

Partie C

I- Deuxième approche

On note g la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par : $g(x)=\frac{1+x}{1+e^x}$

1) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ est équivalente à l'équation $g(x)=x$.
2) En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha)=\alpha$.
3) Écrire $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\alpha]$.

II-Construction d'une suite de réels ayant pour limite α.

On considéra la suite (u_n) définie par : $u_0=0$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1}=g(u_n)$.

1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n, 0\leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
2) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite.
3) Justifier l'égalité : $g(l)=l$. En déduire la valeur de l.
4) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la troixième décimale.

SUJET 27

Exercice 1 :

I- On place 5 pions blancs et 5 pions noirs sur 10 cases deux à deux distinctes d'un échiquier carré de 64 cases.

1) Combien y a-t-il de configurations possibles ?
2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants

A : « les pions noirs sont tous sur une même ligne »

B : « les pions d'une même couleur sont tous sur une même ligne.

II- Le tableau ci-dessous donne pour six années, les montants x des frais de publicité d'une entreprise et y de son chiffre d'affaires exprimé en millions de francs.

x_i	5,8	4	6,4	4,6	5,2	7
y_i	128	102	138	116	118	142

Représenter le nuage de points associé à $(x_i; y_i)$.

1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série et interpréter le résultat.
2) Déterminer la droite de régression de y en x.
3) En déduire une estimation du chiffre d'affaires si l'on envisage 9 millions de francs de publicité.

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

(Γ) est J'ensemble des points M d'affixe z telle que $\left|z+\frac{1}{2}\right|=\frac{5}{2}$.

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ).

2) Démontrer que le point A d'affixe $3+3i$ est un point de (Γ).

3) On désigne par Ω, I les points du plan d'affixes respectives $-\frac{1}{2}$ et 1.

N est le point de (Γ) d'affixe z_N tel que $mes(\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega N})=\frac{3\pi}{2}$.

Préciser le module et argument de $z_N+\frac{1}{2}$.

En déduire que $z_N=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$.

4) Déterminer l'écriture complexe de la rotation de centre Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{2}$.

PROBLÈME

Partie A

(E_m) désigne l'équation différentielle suivante : $y''-2y'+my=0$, où $m\in\mathbb{R}$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E_m) en prenant $m=0$.

2) Résoudre l'équation différentielle (E_m) en prenant $m=1$.

3) Déterminer suivant les valeurs de m, les solutions de (E_m).

Partie B

(U_n) et (V_n) sont les suites définies par :

$$\begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=\dfrac{3U_n+1}{4} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} V_0=2 \\ V_{n+1}=\dfrac{3V_n+1}{4} \end{cases}.$$

1) Calculer U_1 et V_1.

2) (S_n) est la suite définie par : $S_n=U_n+V_n$. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que (S_n) est une suite constante et que la valeur de la constante est 2.

3) On considère la suite (d_n) définie par : $d_n=U_n-V_n$. Démontrer que (d_n) est une suite géométrique et exprimer d_n en fonction de n.

4) a) À l'aide des questions 2) et 3) exprimer U_n et V_n en fonction de n.

b) Étudier la convergence des suites (U_n) et (V_n).

Partie C :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J) d'unité d'axe égale à 2cm. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$.

Dresser le tableau de variations de f et en déduire l'ensemble de définition de f^{-1}.

1) Déterminer deux réels a et b tels que : $f(x)=a+b\frac{e^x}{e^x+1}$. En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

2) Construire soigneusement les courbes (C) et (C^{-1}) des fonctions f et f^{-1} dans le même repère.

3) a) Calculer l'aire S(λ) du domaine délimité par les droites d'équations $x=0, x=\lambda$, la courbe C de f et la droite d'équation $y=1$.

b) Déterminer la limite de $S(\lambda)$ en $+\infty$.

4) Démontrer que pour $x\in]-1;1[$ on a, $f^{-1}(x)=ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

SUJET 28

Exercice 1

1) Calculer la limite de $\frac{x-\sqrt{x}}{x+3}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1-7x+x|x|$ est dérivable en 0 et calculer son nombre dérivé en 0.

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\frac{10}{1+e^{2-0,5t}}$.

a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Déterminer le sens de variation de f.

c) Montrer que la courbe de f admet le point $\Omega(4 ; 5)$ comme centre de symétrie.

d) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $f'(t)=\frac{1}{20}f(t)\left(10-f(t)\right)$.

4) Calculer l'aire du domaine fermé délimité par les courbes des fonctions carré et racine carrée.

5) Soit (u_n) la suite définie par u_0 et $u_{n+1}=au_n+b$ avec $a\neq 1$ et $b\neq 0$.

a) Si (u_n) converge, que vaut sa limite ℓ ?

b) Montrer que $(u_n-\ell)$ est géométrique.

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B, C, P d'affixes respectives $z_A=\frac{3}{2}+6i$, $z_B=\frac{3}{2}-6i$, $z_C=-3-\frac{1}{4}i$ et $z_P=3+2i$, ainsi que le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_{\vec{w}}=-1+\frac{5}{2}i$.

1) a) Calculer l'affixe z_Q de Q, image de B par la translation t de vecteur $\vec{w}$.

b) Calculer l'affixe z_R de R, image de P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.

c) Déterminer l'affixe z_S du point S, image du point P par la rotation r de centre A et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.

2) a) Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

b) Calculer $\frac{z_R-z_Q}{z_P-z_Q}$. En déduire la nature précise du parallélogramme PQRS.

c) Montrer que les points P, Q, R, S appartiennent à un même cercle, noté Γ, dont on calculera l'affixe du centre et le rayon.

3) La droite (AP) est-elle tangente à Γ ?

PROBLÈME

Dans tout le problème, le plan P est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{x+2+\ln x}{x}$. La courbe représentative C de la fonction f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est tracée ci-dessous (à reproduire et à compléter au fur et à mesure).

Partie 1 : (Étude de la fonction f)

1) D'après le graphique, il semble que l'axe des ordonnées soit asymptote à la courbe C. Le prouver par calcul.

2) a) Vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f(x)=1+\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}$.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) En déduire l'existence d'une asymptote (D) à la courbe C. Donner une équation de (D) et la tracer dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ ci-dessus.

3) a) Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Prouver que, pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\frac{-1-\ln x}{x^2}$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$, et montrer que $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en $\frac{1}{e}$.

c) Établir le tableau de variation de f. Dans ce tableau, on donnera la valeur exacte du maximum de f.

Partie 2 : (Position relative de deux courbes)

1) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\frac{x+2}{x}$ et H la courbe représentative de g dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Calculer les limites de g aux bornes de son intervalle de définition.

b) Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0\ ;+\infty[$.

c) En déduire le tableau de variation de la fonction g.

2) Donner les équations des deux asymptotes de la courbe H.

3) a) Calculer $f(x)-g(x)$ et étudier son signe.

b) Montrer que les deux courbes C et H se coupent en un point K d'abscisse 1.

c) Étudier la position relative des deux courbes C et H.

4) Placer le point K et construire la courbe H dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessus.

Partie 3 (Calcul d'une aire)

On note A l'aire du domaine plan limité par les courbes C et H et par les droites d'équations $x=1$ et $x=e^2$.

1) Hachurer le domaine correspondant sur le graphique.

2) Soit u la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $u(x)=\frac{1}{2}(lnx)^2$.

Vérifier que u est une primitive de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

3) Calculer A en cm^2.

SUJET 28

Exercice 1

1) Calculer la limite de $\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+4}}{x-1}$ lorsque x tend vers 1.

2) Soit f la fonction définie sur R par $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$.

a) Montrer que f est impaire.

b) Étudier les variations de f.

c) Montrer que la courbe de f possède trois points d'inflexion (points M_0 d'abscisse x_0 telle que f'' s'y annule en changeant de signe).

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+1-xe^{-x^2+1}$.

a) Montrer que $f'(x)=1+(2x^2-1)e^{-x^2+1}$ puis que f' est paire.

b) Établir le tableau de variation de f'.

c) Montrer que f' possède une unique racine α sur $\mathbb{R}_+$, comprise entre 0, 51 et 0, 52.

d) Étudier les variations de f.

e) Exprimer $f(\alpha)$ sous la forme d'une fraction rationnelle en α.

4) Calculer l'aire du domaine fermé délimité par les paraboles d'équations respectives $y=-x^2+3x+16$ et $y=x^2+3x-16$.

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soient A(-1) et B$(3i)$.

Soit f : M(z) $\neq$ A $\mapsto$ M'(z') où $z'= i\frac{z-3i}{z+1}$.

1) Soit C$(2-i)$. Montrer que C possède un unique antécédent D par f.

2) Déterminer la nature du triangle ABC.

3) Montrer que, pour M $\neq$ A, B, on a OM'$=\frac{\text{BM}}{\text{AM}}$ et $(\vec{u},\overrightarrow{OM'})=\frac{\pi}{2}+(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$.

4) Déterminer l'ensemble E des points M tels que M′ soit sur le cercle trigonométrique.

5) Déterminer l'ensemble F des points M tels que M′ soit sur l'axe des réels.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{3u_n}{1+2u_n}$.

1) a. Calculer u_1 et u_2.

b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

2) On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b) Démontrer que la suite (u_n) converge.

3) Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

b) Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.

d) Déterminer la limite de la suite (u_n).

PROBLÈME

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x>0$ et $f(0)=0$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\ ;\vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 5 cm.

Partie 1

1) Démontrer que la droite (D) d'équation $y=1$ est asymptote à (C).

2) a) Pour $x>0$, calculer $\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

b) Étudier la limite de cette expression quand x tend vers 0

c) Que peut-on déduire pour la fonction f en 0 ? pour la courbe (C) à l'origine du repère ?

3) Démontrer que, pour tout x de $]0\ ;+\infty[$, on a : $f'(x)=\frac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$.

4) Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.

Partie 2

On note g la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $g(x)=f(x)-xf'(x)$

1) Montrer que, dans $]0\ ;+\infty[$, les équations $g(x)=0$ et $x^3+x^2+2x-1=0$ sont équivalentes.

2) Démontrer que l'équation $x^3+x^2+2x-1=0$ admet une seule racine réelle α dont on justifiera un encadrement à 10^{-2} près.

3) Montrer que α vérifie : $f'(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{\alpha}$.

4) Pour tout $x_0>0$, on note (T_{x_0}) la tangente à (C) au point d'abscisse

Montrer que (T_α) a pour équation $y=\frac{f(\alpha)}{\alpha}x$.

Tracer (T_α), puis la courbe (C).

5) Déduire des questions précédentes que, de toutes les tangentes à (C) (en des points d'abscisses non nulles), seule (T_α) passe par l'origine O.

6) On admettra que (T_α) est au-dessus de (C) sur $]0\ ;+\infty[$.

Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$, suivant le réel m donné.

SUJET 29

Exercice 1

1) Calculer la limite de $\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\, x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ est dérivable en 0 et calculer son nombre dérivé.

3) (Thermodynamique). La variation de température (en °C) d'un matériau est proportionnelle à la défférence entre sa température et la température extérieure.

a) Montrer que $\frac{dT}{dt}=-k\left(T-T_{ext}\right)$ où k est une constante positive.

b) On suppose que la température extérieure est de 30°C et qu'à $t=0$, le matériau est à 100°C. Montrer que $T=30+70e^{-kt}$.

4) Calculer l'aire comprise entre la courbe du ln et l'axe des abscisses entre e^{-1} et e.

Exercice 2

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=-3-\ln x+2(\ln x)^2$. On note C sa courbe.

1) a) Résoudre l'équation $f(x)=0$.

b) Résoudre l'inéquation $f(x)>0$.

2) a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau.

3) Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse $e^{\frac{5}{4}}$.

4) On veut étudier la position relative de C par rapport à T.

On pose $\Delta(x)=f(x)-\left(4e^{\left(-\frac{5}{4}\right)}x-\frac{41}{8}\right)$.

a) Montrer que $\Delta'(x)=\dfrac{4\ln x-1}{x}-4e^{\left(-\frac{5}{4}\right)}$ puis calculer $\Delta''(x)$.

b) Étudier le sens de variation de Δ' et en déduire que $\Delta'(x)\leq 0$.

c) Déterminer le signe de $\Delta(x)$ et en déduire la position de C par rapport à T.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+u_{n-1})$ pour $n\geq 1$.

1) Placer quelques termes de cette suite sur le segment $[0\ ;\ 1]$.

2) On pose $v_n=u_n-u_{n-1}$ pour $n\geq 1$.
Montrer que la suite (v_n) est géométrique, puis calculer son terme général.

3) Calculer $S_n=v_1+\cdots+v_n$ et en déduire u_n.

4) Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+6z+18=0$.

2) On note respectivement A et B les points d'affixes $z_1=-3+3i$ et $z_2=-3-3i$.

3) a) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.
Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

b) Représenter les points A et B dans le plan.

c) Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle.

4) On appelle C le point d'affixe $z_3=-\sqrt{3}+3i$.

a) Déterminer le module et un argument de z_3. En déduire la forme trigonométrique du produit z_1z_3.

b) Déterminer la forme algébrique du produit z_1z_3.

c) Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\frac{17\pi}{12}$ et $\sin\frac{17\pi}{12}$.

5) a) Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

b) Représenter les points C et D dans le repère précédent.

PROBLÈME

L'entreprise Conservcam fabrique des confitures qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination «confiture allégée ». La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la confiture, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de confiture est conforme.

L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1. Elle est cependant moins rapide.

Ainsi, dans la production totale, 70% des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30% de la chaîne F_2.

La chaîne F_1 produit 5% de confitures non conformes et la chaîne F_2 en produit 1%.

On prélève au hasard un petit pot dans la production totale. On considère les évènements :

E : « Le petit pot provient de la chaîne F_2 »

C : « Le petit pot est conforme. »

1) Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2) Calculer la probabilité de l'évènement : « Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1. »
3) Déterminer la probabilité de l'évènement C.
4) Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'évènement E sachant que l'évènement C est réalisé.

SUJET 30

Exercice 1

1) Soit $x(t)=A\sin(\omega t+\phi)$. Vérifier que $x''+\omega^2 x=0$ (équation différentielle linéaire du second ordre d'un oscillateur libre).
2) Étudier graphiquement puis rigoureusement la convergence de la suite (u_n) définie par : $u_0=0$ et $u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n+1$.
3) Calculer la probabilité qu'au moins deux élèves aient le même jour d'anniversaire dans une classe de 30.

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On note $j=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Résoudre l'équation $P(z)=z^2+z+1=0$.
2) Montrer par réductions successives que $j^3=1$.
3) Montrer que $j^2=\overline{j}$ en prouvant que j^2 est une racine de P.
4) Montrer que le triangle formé par les points d'affixes 1, j et j^2 est équilatéral.

PROBLÈME

On considère la fonction f définie sur R par $f(x)=(x+2)e^{-x}$. On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1) Étude de la fonction f.

a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C avec les axes du repère.

b) Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe C.

c) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2) Calcul d'une valeur approchée d'un aire.

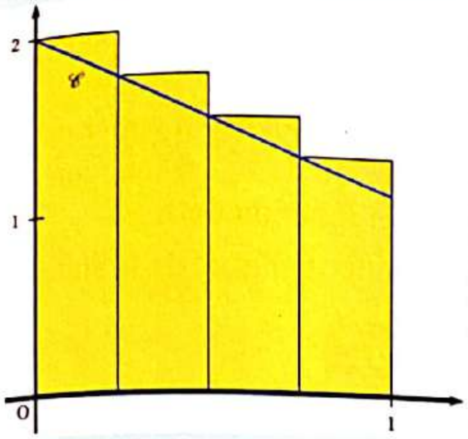
On note D le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.

On approche l'aire du domaine D en calculant une somme d'aires de rectangles.

a) Dans cette question, on subdivise l'intervalle [0 ; 1] en quatre intervalles de même longueur :

- Sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$.
- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{4}\right)$.
- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
- Sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4};1\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{3}{4}\right)$.

Cette construction est illustrée ci-dessous.



Calculer une valeur approchée de l'aire du domaine D et la somme des aires des quatre rectangles précédents :

3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(-x-3)e^{-x}$.
On admet que g est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   a) Calculer l'aire A du domaine D, exprimée en unités d'aires.
   b) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de l'erreur commise en remplaçant A par la valeur approchée trouvée au moyen de la question 2. c'est-à-dire l'écart entre ces deux valeurs.

SUJET 31

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur R par

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+3x-2}{x^2+1}.$$

1) Montrer qu'il existe des réels a, b, c et d tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{x^2+1}$.
2) En déduire que C_f admet une asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.
3) Étudier les positions relatives de C_f et de cette asymptote.

Exercice 2

Soit $P(x)=2x^3+x^2-5x+2$.

1) Trouver une racine évidente de P, puis le factoriser.
2) Établir le tableau de signe de P(x).
3) Résoudre sur $]-\pi ; \pi]$ l'inéquation 2 $2\cos^3 x+\cos^2 x-5\cos x+2\leq 0$.

Exercice 3 : (Loi logistique continue)

Pour certaines populations vivant dans un milieu clos (bactéries dans une coupelle de culture par exemple), la croissance est dans un premier temps exponentielle, mais ensuite freinée par surpopulation (manque de nourriture, d'oxygène, etc...). Le mathématicien P. Verhulst a proposé vers 1840 le modèle suivant :

La population ne peut dépasser un seuil critique, et on note $y(t)$ la fraction de la population à l'instant t sur cette population maximale. L'équation $y'=\lambda y(1-y)$ est alors supposée vérifiée, et est appelée équation logistique continue.

1) Résoudre cette équation, en posant $z=\dfrac{1}{y}$.
2) Si $y(0)=0{,}01$ et $\lambda=1$, exprimer $y(t)$ en fonction de t, puis tracer la courbe de y.

Exercice 4

Dans un atelier, deux machines produisent les mêmes pièces, au nombre total de 1000. La première en fournit les $\frac{4}{5}$. De plus, 5% des pièces produites par la première machine sont défectueuses et 4% pour la seconde.

1) Construire le tableau des effectifs.
2) On tire une pièce au hasard. Soient

A : « la pièce est produite par la première machine »,
B : « la pièce est produite par la seconde » et
C : « la pièce est défectueuse ». Calculer
P(A), P(B), P(C), P(A∩C) et P(A∪C).

Exercice 5

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soient A(6 ; 0 ; 0) et B(0 ; 6 ; 0).

1) Déterminer le barycentre G du système de points {(O, 1), (A, 2), (B, 3)}.
2) Soit C(0 ; 0 ; 4) et soit S l'ensemble des points M(x ; y ; z) vérifiant l'équation vectorielle $\left(\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right)\cdot\overrightarrow{MC}=0$.

Déterminer (S) en utilisant 2 méthodes différentes.

Exercice 5

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique égale à 1 cm.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-4z+16=0$.
On notera z_A et z_B les solutions, z_A étant la solution dont la partie imaginaire est positive.
b) Déterminer le module et un argument des nombres z_A et z_B.
c) Placer dans le plan les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B. (On laissera des traces des constructions.)

2) On considère les deux nombres complexes $z_C=-4$ et $z_D=-4+i\sqrt{3}$.
a) Calculer le module et un argument de chacun de ces deux nombres complexes.
b) Placer dans le plan complexe les points C et D d'affixes respectives z_C et z_D.

3) a) Démontrer que les points A, B et C appartiennent, à un même cercle de centre O.
b) Démontrer que D est le milieu du segment [AC].
c) Démontrer que le triangle BDA est rectangle.
d) Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

PROBLÈME

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\sqrt{2u_n}$.

1) a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0<u_n\leq 2$.
b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

2) On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n=\ln u_n-\ln 2$.
a) Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0=-\ln 2$.
b) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.
c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

SUJET 32

Exercice 1

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=\sqrt{x^2+x}$.
Montrer que C_f possède une asymptote en $+\infty$ et donner son équation.

2) Soit (u_n) la suite définie par $=\frac{1}{4}$ et $u_{n+1}=\frac{2+3u_n}{4+u_n}$.
a) Construire graphiquement les premiers termes de (u_n). Quelles sont les valeurs possibles de l'éventuelle limite de (u_n) ?
b) Montrer que la suite (v_n) de terme général $\frac{2+u_n}{1-u_n}$ est géométrique.
c) En déduire l'expression de u_n puis sa limite. Pouvait-on déterminer cette limite sans passer par l'expression du terme général ?

3) Soit $S=1+e^{ix}+e^{i2x}+\ldots+e^{inx}$ avec $e^{ix}\neq 1$.
a) Montrer que $S=\frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1}$.
b) En déduire que $S=e^{i\frac{n}{2}x}\left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}\right)$.
c) Calculer les sommes $1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx$ et $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx.$,
d) En posant $n=4$ et $x=\frac{2\pi}{5}$, calculer $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\sin\frac{\pi}{5}$.

4) Un lycée compte 410 élèves dont 15% de

filles. Seuls 30% des garçons et 40% des filles savent où se trouve le mont Coupé. On interroge un élève pris au hasard.

a) Calculer la probabilité que cet élève soit une fille qui sait où se trouve le mont Coupé.

b) Sachant que l'élève interrogé sait où se trouve le mont Coupé, calculer la probabilité que ce soit une fille.

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère le point A d'affixe $z_A = 1$ et le point B d'affixe $z_B = i$.

À tout point M d'affixe $z_M = x+iy$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z_{M'} = -iz_M$.

On désigne par I le milieu du segment [AM]. Le but de l'exercice est de démontrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM' (propriété 1) et que BM' = 2OI (propriété 2).

1) Dans cette question uniquement, on prend $z_M = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

a) Déterminer la forme algébrique de z_M.

b) Montrer que $z_{M'} = \sqrt{3} - i$.

Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.

c) Placer les points A, B,M,M' et I dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ en prenant 2 cm pour unité graphique.

Tracer la droite (OI) et vérifier les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.

2) On revient au cas général en prenant $z_M = x+iy$ avec $y \neq 0$.

a) Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.

b) Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y.

c) Écrire les coordonnées des points I , B et M'.

d) Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM'.

e) Montrer que BM' = 2OI.

PROBLÈME

On s'intéresse à l'évolution du parc automobile d'un pays.

Années	Rang de l'année : x_i	Nombre de Voitures : y_i (en millions)
2008	1	11 ,8
2009	5	14,6
2010	11	18,4
2011	16	24,7
2012	21	26,7
2013	27	27,8
2014	28	25,5

1) Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$, associé à la série statistique double $(x_i, y_i)_i$ dans le plan muni d'un repère orthogonal, où une année est représentée par 0,5cm sur l'axe des abscisses ; un million de voitures est représenté par 1cm sur l'axe des ordonnées (en commençant la graduation à 10 millions).

2) a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire à 10^{-3} près par défaut et justifier un ajustement linéaire.

b) Par la méthode des moindres carrés , déterminer une équation de la droite de régression de y en x. On donnera les coefficients à 10^{-1} près par excès.

Tracer cette droite sur le graphique de la question 1.

c) En supposant que ce modèle mathématique reste valable jusqu'en l'an 2017, faire une estimation du nombre de voitures dans ce pays en 2017.

3) On considère un ajustement logarithmique par la courbe (C) de la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = a + b\ln x$. On impose à la courbe (C) de passer par les points

A(1 ;0,5) et B(25 ;25,5).

a) En déduire les valeurs exactes de a et b, puis la valeur approchée de b à 10^{-1} près par défaut.

b) En déduire l'expression de $f(x)$ en prenant pour b la valeur approchée précédente.

c) Étudier les variations de f et tracer (C) sur $[1;35]$ dans le graphique précédent.

d) Se servir de ce nouvel ajustement pour estimer le nombre de voitures dans ce pays en 2017.

SUJET 33

Exercice 1

1) Le professeur principal d'une terminale D estime que sa classe de 30 élèves mérite 90% de réussite au bac. Quelle est la probabilité pour que le taux de réussite soit supérieur à 95% ?

2) Trois chasseurs tirent de façon indépendante sur trois singes. Ils sont sûrs d'atteindre leur cible. Calculer les probabilités que les trois singes soient touchés, puis qu'un seul singe soit touché.

3) Dix singes, dont un nommé Monky , vaquent à leurs banales occupations de singes. Dix chasseurs tirent, de façon indépendante, sur ce groupe de singes. Chacun d'eux est sûr d'atteindre sa cible. Calculer la probabilité que Monky soit touché.

Exercice 2

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x+1}$.

a) La courbe de la fonction f possède-t-elle une asymptote en $+\infty$?

b) Montrer qu'il existe des réels a, b, c et d tels que $f(x)=ax^2+bx+c+\dfrac{d}{x+1}$.

c) En déduire une fonction polynômiale asymptote à C_f en $+\infty$.

2) Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_0=12$ et $=\dfrac{u_n+2v_n}{3}$; $v_0=1$ et $v_{n+1}=\dfrac{u_n+3v_n}{4}$.

a) Montrer que la suite (w_n) définie par $w_n=u_n-v_n$ est géométrique.

b) Peut-on déduire leur limite commune des relations de récurrence les définissant ?

c) Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n=3u_n+8v_n$ est constante.

d) En déduire les termes généraux de (u_n) et (v_n), puis leur limite.

3) On considère le polynôme $P(x)=x^3-5x^2-x+5$.

a) Calculer P(1).

b) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout x réel, on ait : $P(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$

c) Déduire des questions précédentes que les solutions de l'équation $P(x)=0$ sont 1, −1 et 5.

d) Résoudre en utilisant les résultats précédents :

i) $(ln x)^3-5(ln x)^2-ln x+5=0$;

ii) $e^{3x}-5e^{2x}-e^x+5=0$.

Exercice 3

1) Déterminer algébriquement l'ensemble des points M(z) ($z\neq i$) tels que $\dfrac{z+i}{z-i}$ soit imaginaire pur.

2) Retrouver géométriquement le résultat à la question précédente.

PROBLÈME

Partie A

Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]1\ ;+\infty[$ par

$g(x)=1-\dfrac{x-1}{e^x}$

1) Déterminer la valeur exacte de $g(2)$.
2) Calculer la limite de la fonction g en 1.
3) a) En remarquant que $g(x)=1-\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}$, calculer la limite de la fonction g en $+\infty$.
   b) Déduire de 3.a) que la courbe représentative de la fonction g admet une asymptote horizontale en $+\infty$, dont on précisera une équation.
4) a) On note g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$.
   b) Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]1 ; +\infty[$.
   c) Dresser le tableau des variations de g.
   d) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]1; +\infty[$. (On ne demande pas de tracer la courbe représentative de la fonction g.)

Partie B

Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative.

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $]1 ; +\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{e^x}-\frac{1}{e^2}+\ln(x-1)$.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique 5 cm.

1) a) Calculer la limite de la fonction f en 1; et en déduire l'existence d'une asymptote D à la courbe C, dont on précisera une équation.
   b) Calculer la limite de f en $+\infty$.
2) a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
   b) Montrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{x-1}$.
   c) En déduire le sens de variation de f sur $]1 ; +\infty[$. Dresser la tableau de variation de f.
3) a) Calculer $f(2)$.
   b) Tracer la droite D et la courbe C dans le repère défini précédemment.

Partie C

Calcul d'aire.

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur $]1 ; +\infty[$ par

$$F(x)=-\frac{1}{e^x}+(x-1)\ln(x-1)-\left(1+\frac{1}{e^2}\right)x.$$

1) Montrer que F est une primitive de f sur $]1 ; +\infty[$.
2) a) On désigne par A l'aire en cm^2 de la partie de plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x=2$ et $x=3$.
   Déterminer la valeur exacte de A.
   b) Donner une valeur de A en cm^2 à 10^{-2} près.

SUJET 34

Exercice 1

1) Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{u_n}$. On admet que $u_n>0$ quel que soit n. Montrer que (u_n) est croissante puis déterminer sa limite.
2) Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x)=x^3+x^2-3x+1$.
   a) Dresser le tableau de variations de P.
   b) En déduire le nombre de racines de P.
   c) Retrouver directement ces racines en factorisant P(x).
3) a) Montrer que $|z+1|^2=2|z|^2$ équivaut à $|z-1|^2=2$.
   b) En déduire l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z+1|=|\sqrt{2}z|$.

Exercice 2

1) On définit, pour $n\geq 1$, $I_n=\int_0^1 t^n e^{-t}dt$.
   a) Montrer, sans calculer I_n, que la suite (I_n) est décroissante. Converge-t-elle ?

b) Montrer que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de (I_n).

2) On donne l'équation différentielle : $y'' + 36y = 0$.

a) Donner la forme des solutions de cette équation différentielle.

b) Déterminer la fonction f solution de cette équation différentielle satisfaisant aux conditions suivantes : $f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = 6$;

c) Vérifier que pour tout x réel, $f(x) = 2\sin\left(6x + \frac{\pi}{3}\right)$.

d) Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{6}]$.

Exercice 3

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par s l'application qui à tout point M de P de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') tel que : $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y + 2 \end{cases}$

1) Déterminer l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M.

2) Démontrer que s est une similitude plane directe. Préciser une mesure de son angle, son rapport et son centre I.

3) Soit g l'application qui à tout point M de P associe l'isobarycentre G des points M, M'=s(M) et M''=s(M').

a) Calculer, en fonction de l'affixe z de M, les affixes des points M'' et G.

b) Démontrer que g est une similitude plane directe.
Quel est son centre ?

c) Déterminer l'affixe du point M_o tel que $g(M_o)$ soit le point O.

Exercice 4

Thomas possède un lecteur MP3 sur lequel il a stocké plusieurs milliers de morceaux musicaux. L'ensemble des morceaux musicaux qu'il possède se divise en trois genres distincts selon la répartition suivante :

30 % de musique classique, 45 % de variété, le reste étant du jazz. Thomas a utilisé deux qualités d'encodage pour stocker ses morceaux musicaux : un encodage de haute qualité et un encodage standard. On sait que :

- Les $\frac{5}{6}$ des morceaux de musique classique sont encodés en haute qualité.
- Les $\frac{5}{9}$ des morceaux de variété sont encodés en qualité standard.

On considérera les évènements suivants :

C : « Le morceau écouté est un morceau de musique classique » ;

V : « Le morceau écouté est un morceau de variété » ;

J : « Le morceau écouté est un morceau de jazz » ;

H : « Le morceau écouté est encodé en haute qualité » ;

S : « Le morceau écouté est encodé en qualité standard ».

Thomas décide d'écouter un morceau au hasard parmi tous les morceaux stockés

sur son MP3 en utilisant la fonction « lecture aléatoire ».

On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

1) Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un morceau de musique classique encodé en haute qualité ?

2) On sait que $P(H) = \frac{13}{20}$.

a) Les évènements C et H sont-ils indépendants ?

b) Calculer $P(J \cap H)$ et $P_J(H)$.

PROBLÈME

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$. On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité 1 cm.

1) On pose la $g(x)=x^3+3x+8$.

a) Étudier le sens de variation de g.
Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 0, 1.

b) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

2) a) Calculer $f'(x)$ puis étudier le sens de variation de f.

b) Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$, puis dresser le tableau de variation de f.

c) En déduire que C admet une asymptote oblique Δ.

3) a) Étudier la position de C par rapport à Δ.

b) Vérifier que C rencontre Δ en un unique point A.

4) Déterminer les abscisses des points B, B′ de C où C admet une tangente parallèle à Δ.

5) a) Vérifier que $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$, puis en déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$.

b) Construire C.

SUJET 35

Exercice 1

1) Pour un 8 mars , deux couleurs de pagne sont proposées : le bleu et le rose. La moitié des femmes camerounaises préfère le bleu ; l'autre moitié, le rose. On effectue un sondage sur 1000 femmes camerounaises pour connaître leur couleur préférée de pagne. Quelle est la probabilité qu'au moins 52% des femmes sondées préfèrent le bleu ?

2) Déterminer la suite arithmétique (u_n) sachant que $u_3=5$ et $u_5=3$.

3) Calculer la somme des 500 premiers termes de la suite arithmétique de premier terme −5 et de raison 10.

4) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=x^2+\sqrt{x}-3$. Montrer que f possède une unique racine puis en donner un encadrement d'amplitude 0, 01.

5) Soient A(2), B$(-3+5i)$, C$\left(\sqrt{3}+\left(2-\sqrt{3}\right)i\right)$ et D$(6i)$.

a) Montrer que A, B et C sont alignés.

b) Le triangle ABD est-il rectangle ? isocèle ?

Exercice 2

1) Si $\in \mathbb{N}^*$, montrer que $\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{n}$.

2) En déduire que $\int_1^N \frac{1}{x}dx<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N-1}$, où $N\in\mathbb{N}^*$.

3) Que vaut la somme infinie $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$?

Exercice 3

Lors d'une épidémie, on a relevé, à intervalles de temps réguliers, le nombre de cas déclarés. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau suivant.

Rang du relevé : x_i	0	1	2	3	4	5
Nombre de cas déclarés : y_i	600	690	794	913	1 045	1 205

1) a) On pose $Y_i=\log(y_i)$. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-3}.

b) Construire le nuage de points $M_i(x_i,y_i)$ associé à cette série statistique dans un repère orthonormal. Prendre comme unité graphique : 2 cm.

2) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points de coordonnées (x_i,y_i). On note $(\overline{x};\overline{y})$ les coordonnées du point G. Donner la valeur exacte de $\overline{x}$ et la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de $\overline{y}$.

x_i	0	1	2	3	4	5
$Y_i=\log(y_i)$	600	690	794	913	1 045	1 205

3) a) On désigne par Δ la droite d'équation : $Y=0,06x+2,78$.

Construire la droite Δ sur la figure de la question 1. b).

b) Le point de coordonnées (2,5 ; 2,93) appartient-il à la droite Δ ?

4) On admet que la droite Δ constitue un bon ajustement affine du nuage des points de coordonnées (x_i, y_i). Déterminer une estimation du nombre de cas déclarés lors du sixième relevé.

PROBLÈME

Partie 1

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps.

Le graphique en annexe 1 représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps en jours.

On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type : $h(t)=\dfrac{a}{1+be^{-0,04t}}$ où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres.

On sait qu'initialement, pour $t=0$, le plant mesure $0,1m$ et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de $2m$.

Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

Partie 2

On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur [0 ; 250] par $f(t)=\dfrac{2}{1+19e^{-0,04t}}$.

1) Déterminer $f'(t)$ en fonction de t (f' désignant la fonction dérivée de la fonction f).

   En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 250].

2) Calculer le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à 1,5 m.

3) a. Vérifier que pour tout réel t appartenant à l'intervalle [0 ; 250], on a $f(t)=\dfrac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19}$.

   Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle [0 ; 250] par $F(t)=50\ln(e^{0,04t}+19)$ est une primitive de la fonction f.

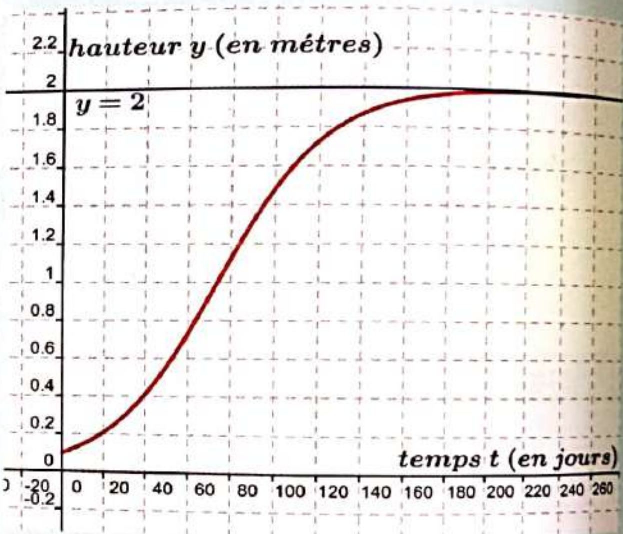
   b) Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle [50 ; 100].

   En donner une valeur approchée à 10^{-2} près et interpréter ce résultat.

4) On s'intéresse à la vitesse de croissance du plant de maïs ; elle est donnée par la fonction dérivée de la fonction f.

   La vitesse de croissance est maximale pour une valeur de t.

   En utilisant le graphique donné ci-dessous, déterminer une valeur approchée de celle-ci. Estimer alors la hauteur du plant.



SUJET 36

Exercice 1

1) Déterminer la suite géométrique (u_n) sachant que $u_5 = 100$ et $u_8 = 12,5$.

2) Calculer $2^3+2^4+2^5+\ldots+2^{1789}$.

3) Soit g la fonction définie par $g(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$.

   a) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1\ ;\ 1[$.

   b) Démontrer que $g^{-1}(x)=\dfrac{x}{1-|x|}$ pour tout x de $]-1\ ;\ 1[$.

Exercice 2

On considère le point A d'affixe $z_A = 2+i$ et le cercle Γ de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

1) a) Déterminer les affixes des points d'intersection de Γ avec l'axe réel.

b) On désigne par B et C les points d'affixes $z_B = 1$ et $z_C = 3$.

Déterminer l'affixe z_D du point D diamétralement opposé au point B sur Γ.

2) Soit M le point d'affixe $\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i$.

a) Calculer $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$ et en déduire son argument principal.

b) Montrer que M appartient au cercle Γ.

Exercice 3

Un objet produit en série a un coût de production de 95 000 F. Il peut présenter, à l'issue de sa fabrication, un défaut A, un défaut B, ou les deux défauts en même temps. La garantie permet de faire les réparations aux frais du fabricant avec les coûts suivants :

10000 F pour le seul défaut A, 15000 F pour le seul défaut B, 25000 F pour les deux défauts A et B.

1) On prélève un lot de 200 objets. Le défaut A est observé sur 16 objets, le défaut B sur 12 objets et 180 objets n'ont aucun défaut. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Nombre d'objets	avec le défaut A	sans le défaut A	Total
avec le défaut B			
sans le défaut B			
Total			200

Nombre d'objets avec le défaut A sans le défaut A Total avec le défaut B sans le défaut B Total 200

2) Pour la suite de l'exercice, on admettra que, sur l'ensemble de la production, 90 % des objets n'ont aucun défaut, 4 % ont le seul défaut A, 2 % ont le seul défaut B, et 4 % ont les deux défauts A et B.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard dans la production, associe son prix de revient, c'est à dire le coût de production, augmenté éventuellement du coût de réparation.

Présenter cette variable aléatoire et sa loi de probabilité sous la forme d'un tableau. (On pourra reproduire le tableau ci-dessous et le compléter).

Valeur de X; x_i				120000
$p(X = x_i)$				

3) a) Calculer l'espérance mathématique E(X) et l'écart-type σ(X) de cette variable aléatoire. Que représente E(X) pour l'usine ?

On suppose désormais que tous les objets produits sont vendus.

b) L'usine peut-elle espérer faire des bénéfices en vendant 96000 F chaque objet produit ?

c) L'usine veut faire un bénéfice moyen de 10000 F par objet. Expliquer comment on doit alors choisir le prix de vente de chacun d'eux.

PROBLÈME

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1+\ln x}{x^2}$ et soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe C est donnée ci-dessous :

1) a. Étudier la limite de f en 0.

b) Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe .

2) a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-1-2\ln x}{x^3}$.

b) Résoudre sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x)>0$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

c) Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3) a. Démontrer que la courbe C a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

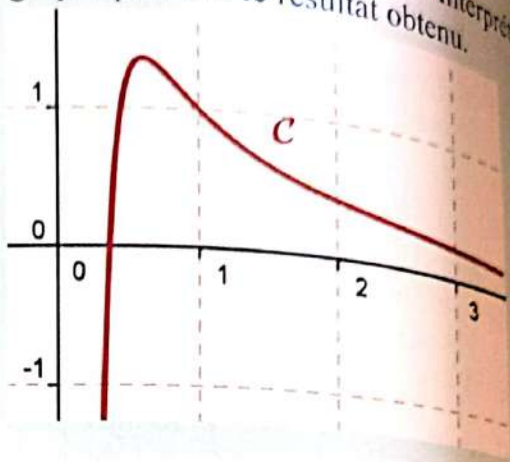
b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

4) Pour tout entier $n>1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations respectives $x=\dfrac{1}{e}$ et $x=n$.

a) Démontrer que $0\leq I_2\leq e-\dfrac{1}{2}$. Montrer que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=\dfrac{-2-\ln x}{x}$, est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b) Calculer I_n en fonction de n.

c) Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.



L'importance des Mathématiques exige une stricte conformation au système d'enchâssement logique et continu des connaissances à tous les niveaux d'apprentissage.

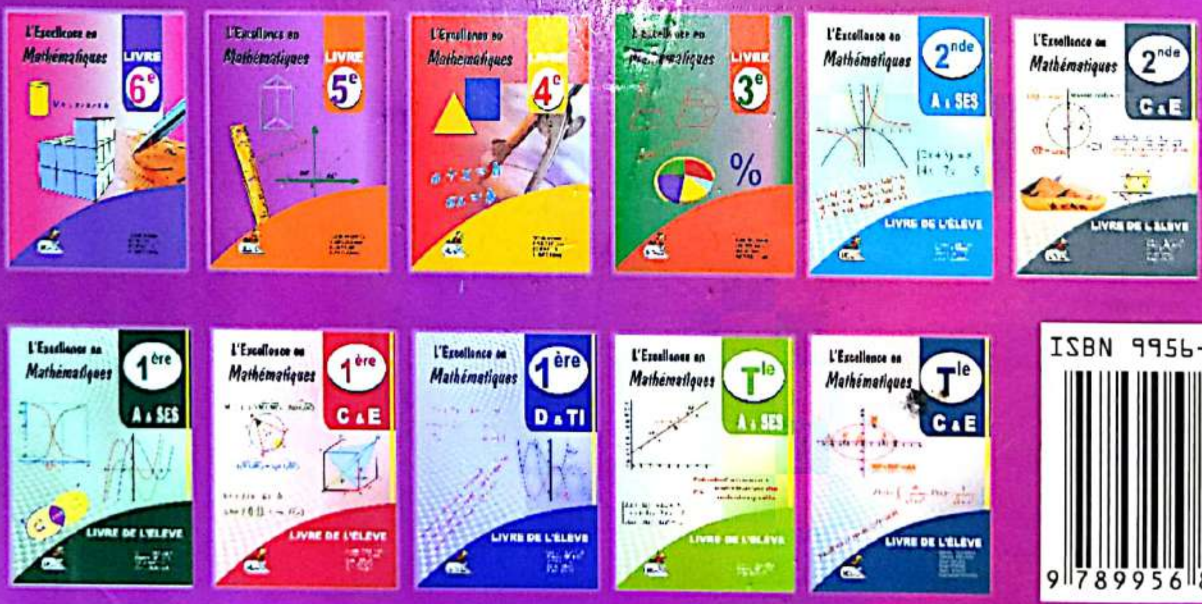
Cette exigence aura présidé à la conception et à l'élaboration des ouvrages de la collection **« L'Excellence en Mathématiques »**, ouvrages rédigés dans l'esprit des principaux objectifs visés pour l'enseignement des Mathématiques, à savoir :

- Affirmer et affiner les facultés latentes d'ordre et de méthode inhérentes à chaque apprenant ;
- Favoriser le développement des capacités de travail individuel de l'élève, de son aptitude à la communication, à la créativité et à la gestion rationnelle du quotidien.

L'ordre des chapitres de chacun des ouvrages de la collection est en lui-même une suggestion d'un plan de progression dans le programme du niveau concerné, plan qui demeure cependant indicatif.

La pertinence du contenu des ouvrages de la collection **« L'Excellence en Mathématiques »** contribuera au bonheur des apprenants et à celui d'autres utilisateurs des ouvrages de l'Enseignement Secondaire.

La collection « L'Excellence en Mathématiques » est l'œuvre d'un groupe d'enseignants ayant une longue pratique de l'enseignement des Mathématiques, doublée d'une expérience appréciable dans la formation des formateurs.



ISBN 9956-802-94-8

9 789956 802944