TABLE DES MATIERES

06 769 80 66 / 04 060 94 90

LOGIQUE MATHEMATIQUE

Conjonction, operateur logique ∧ lire « et »

Soient P, Q deux prédicats. On dit que le prédicat $P \wedge Q$ est vrai lorsque $P \wedge Q$ sont tous les deux vrais. Il est faux dans les autres cas.

Exemple :

Exemple : Soit à résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système ci-après,

$$(\boldsymbol{S_1}) : \begin{cases} \boldsymbol{x - y = 4} & (\boldsymbol{P}) \\ \boldsymbol{2x + y = -1} & (\boldsymbol{Q}) \end{cases}$$

Le système $(\boldsymbol{S_1})$ n'est autre qu'une conjonction des prédicats suivants :

$$\boldsymbol{P} : \ \boldsymbol{x - y = 3} \quad \wedge \quad \boldsymbol{Q} : \ \boldsymbol{2x + y = -1}$$

La solution de $(\boldsymbol{S_1})$ ou la valeur de vérité « vraie » de $\boldsymbol{P \wedge Q}$ n'est possible que si $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ sont simultanément vrais. Ou encore que si le couple réel $(\boldsymbol{x, y})$ vérifie les deux équations $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$. L'assertion $\boldsymbol{P(-1, -5)}$ est vraie par contre $\boldsymbol{Q(-1, -5)}$ est fausse. En effet,

$$(\boldsymbol{S_1}) : \begin{cases} \boldsymbol{-1 + 5 = 4} & (\boldsymbol{P}) \\ \boldsymbol{-2 - 7 \neq -1} & (\boldsymbol{Q}) \end{cases}$$

Implication

Soient P et Q deux prédicats. Le prédicat "P ⇒ Q" est appelé implication de P et Q. C'est un prédicat qui est :

- Faux lorsque P est vrai et Q est faux,
- Vrai dans tous les autres cas.

Equivalence

Soient P et Q deux prédicats. Le prédicat "P ⇔ Q" est appelé équivalence de P et Q. C'est un prédicat qui est : -

- Vrai lorsque P et Q sont simultanément vrais ou faux,
- Faux dans tous les autres cas.

Exemple :

$$\boldsymbol{x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2}$$

On peut remarquer la double implication c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{x^2 = 4 \Rightarrow x = -2 \vee x = 2 \ \ et \ \ x^2 = 4 \Leftarrow x = -2 \vee x = 2}$$

Une **conjecture** est un énoncé mathématique que l'on accepte comme vrai, mais dont on ne connait pas la valeur de vérité puisqu'il n'a jamais été démontré ou réfuté.

Exemple : La conjecture de Goldbach

PARTIE

B

ENONCES

BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE				
SERIE : E	DUREE : 04 HUERES	COEF : 5	FEUILLE : 1/2	SESSION : 2021
EPREUVE : DE MATHEMATIQUES Documents autorisés : calculatrice				

Exercice 1 : (4 points)

On considère un plan affine P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, unité de longueur $2cm$. On désigne par (E_m) l'ensemble des points M du plan P dont les coordonnées (x, y) vérifient la relation : $y^2 = m(x^2 - 1) + 2x$, où m est un paramètre réel.

1. Montrer que l'ensemble (E_1) correspondant à $m = 1$ est la réunion de deux courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ dont on donnera l'équation dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2. Quelle est la nature de l'ensemble (E_{-1}) correspondant à $m = -1$. La construire dans le plan P.
3. Montrer que pour tout réel non nul m, l'ensemble (E_m) admet le point $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ pour centre de symétrie.
   Erreur dans l'énoncé, substituer la question par :
   Montrer que pour tout réel non nul m, l'ensemble (E_m) admet le point $\left(-\frac{1}{m}, 0\right)$ pour centre de symétrie.
4. Quel est l'ensemble (Γ) des valeurs de m pour les quelles l'ensemble (E_m) est une ellipse ?

Exercice 2 : (4 points)

P est le plan euclidien rapporte au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et D est la droite d'équation $y = 2x - 1$. On considère le point $\Omega\ (1, 1)$ de P. Soit S la réflexion d'axe $\mathcal{D}$ et h l'homothétie de centre Ω qui transforme le point $E\left(\frac{3}{2}\ ; 2\right)$ en $F(2\ ; 3)$

1. Construire l'image par $h \circ S$ de chacun des points $A\left(0; \frac{3}{2}\right)$ et $B(2; 1)$
2. Définir analytiquement les applications S, h et $f = h \circ S$.
3. Soit $M(x, y)$ le point d'affixe $z = x + iy$ et $M'(x', y')$ d'affixe $z' = x' + iy'$ son image par f. Exprimer Z' en fonction de Z.
4. Déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

Problème : (12 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = ln(e^x - x^2 + x + 1)$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A

Soit h la fonction définie par $h(x) = e^x - x^2 + x + 1$.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction U définie par $U(x) = e^x - 2x + 1$. En déduire le signe de $U(x)$ suivant les valeurs de x.
2. Dresser le tableau de variation de h.
3. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$. Donner un encadrement α de d'amplitude 10^{-1}.
4. Déterminer le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.
5. Etudier les variations de f et tracer (C).

Partie B

Soit (E) l'équation différentielle $y'' + 2y' - 3y = 3x^2 - 7x - 3$.

1. Vérifier que la fonction h est solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E'): $y'' + 2y' - 3y = 0$.
3. Montrer que φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - h$ est solution de (E').
4. En déduire les solutions de (E).

Partie C

Soit g la fonction définie sur $I = [-1; 0]$ par $g(x) = \frac{1}{9}(x^2 - e^x - 1)$

1. Montrer que $g(x) = \frac{1}{9}\alpha$

   Erreur dans l'énoncé, substituer la question par : *Montrer que* $g(\alpha) = \frac{1}{9}\alpha$
2. Montrer que $g''(x) = -\frac{1}{9}U'(x)$. En déduire que pour tout réel x element de I on a : $|g'(x)| \leq \frac{2}{3}$
3. Etudier le sens de variation de g. En déduire que $g(I) \subset I$
4. Soit (U_n) la suite définie par :

   $$\begin{cases} U_0 = -\frac{1}{2} \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = g(U_n). \end{cases}$$

   a. Montrer que pour tout entier n, U_n est élément de I et $\left|U_{n+1} - \frac{1}{9}\alpha\right| \leq \frac{2}{3}|U_n - \alpha|$

   b. Montrer que $\left|U_{n+1} - \frac{1}{9}\alpha\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et en déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.

BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE				
SERIE : E	DUREE : 04 HUERES	COEF : 5	FEUILLE : 1/2	SESSION : 2020
EPREUVE : DE MATHEMATIQUES Documents autorisés : calculatrice				

Exercice 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ unité $3cm$. On considère les points A et I tel que $\overrightarrow{OA} = -2\vec{\imath}$, $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$. La parallèle à l'axe des ordonnées passant par I coupe le cercle de centre O et de rayon OA en B et C tel que le triangle ABC soit dans le sens direct.

1. Placer les points A, I, B et C puis donner la nature du triangle ABC.
2. Détermine les coordonnées des points B et C.
3. On considère deux rotations R_B et R_C de centres respectifs B et C et d'angle $\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$
   a. Caractériser la transformation $f = R_B \circ R_C$
   b. Donner les images des points A, B et C par f.
4. Soit D le milieu du segment $[OB]$ et L un point du plan tel que $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{OD}$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OL}$ sont orthogonaux. Placer le point L et montrer que l'image de O par g est le point B.

Exercice 2

1. Calcule $\int_0^x e^{-t} \sin t \, dt$
2. On pose $B_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)dt$ où k est un entier et $f(t) = e^{-t} \sin t$
   Soit $S_n = B_0 + B_1 + \cdots + B_n$
   Exprimer S_n à l'aide de la fonction F.
   En déduire que la suite (S_n) admet une limite que l'on déterminera.
3.
   a. Donner sans calculer l'intégrale le signe de B_k suivant la parité de k.
   b. Calculer B_0. Puis B_K pour $K \in \mathbb{N}$. Vérifier que $B_k = (-1)^k e^{-k\pi} B_0$
   c. Calculer $T_n = |B_0| + |B_1| + \cdots + |B_n|$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$
   d. On pose $S = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ et $T = \lim\limits_{n \to +\infty} T_n$. Vérifier que $\frac{1}{S} + \frac{1}{T} = \frac{2}{B_0}$

Problème : (09 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique $1\ cm$.

Partie A :

1. **Intégrer l'équation différentielle $(E_a): y'' - 2ay' + a^2y = 0$, avec $a \in \mathbb{R}^*$**
2. **Déterminer la fonction $f_\alpha(x)$ solution de (E_a) dont la courbe (C_a) admet au point $A(0; 1)$ une tangente de pente $1 + a$.**

Partie B :

On considère la fonction numérique f_a définie par : $f_a(x) = (x + 1)e^{ax}$

1. **Montrer que toutes les courbes (C_a) passent par deux points fixes A et B.**
2. **Etudier les variations de f_a suivant les valeurs de a (on examinera deux cas $a < 0$ et $a > 0$).**
3. **Construire les courbes (C_1) et (C_{-1}) puis calculer l'aire limitée par (C_1) et (C_{-1}) et les droites $x = -1$ et $x = 0$.**

Le saviez-vous ? le livre le plus vendu au monde après la bible est un livre de mathématique intitulé les éléments dont l'auteur n'est autre que le célèbre mathématicien Euclide. Toute la Géométrie du secondaire est celle régit par les postulats d'Euclide. D'où l'appellation de Géométrie euclidienne.

BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE				
SERIE : E	DUREE : 04 HUERES	COEF : 5	FEUILLE : 1/2	SESSION : 2019
EPREUVE : DE MATHEMATIQUES Documents autorisés : calculatrice				

Exercice 1 : 5 points

Dans le plan orienté, $OBCA$ est un rectangle tel que $OB = \sqrt{2}, OA = 1$ et $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. I est le milieu de $[OB]$ et K celui de $[BC]$. On note S la similitude directe telle que $S(O) = B$ et $S(A) = I$.

1. Précise son rapport k et son angle θ.
2. Démontre que $S(B) = C$ et $S(I) = K$.
3. On pose $f = SoS$
   a. Prouve que f est une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$ dont le centre est celui de S.
   b. Précise $f(O)$ et $f(A)$ et déduis-en une construction du centre Ω de S.
4. On choisit un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tel que B a pour affixe $\sqrt{2}$ et A a pour affixe i.
   a. Quelle est l'écriture complexe de S ?
   b. Déduis-en l'affixe de Ω.

Exercice 2 : 6 points

Une urne contient quatre dés indiscernables au toucher. Trois dés sont verts et leurs faces sont numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 et un dé est rouge et ses faces sont numérotées 2 ; 2 ; 4 ; 4 ; 6 ; 6.

1. On tire au hasard un dé. Calcule les probabilités des éléments suivants :

A « le dé tiré est rouge »

B « le dé tiré est vert ».

2. Une épreuve consiste à tirer au hasard un dé puis le lancer trois fois de suite. On désigne par ''C'' l'évènement suivant C « Obtenir 3 fois de suite un numéro pair »
   a. Montre que $P\left(\frac{C}{A}\right) = 1$ et $P\left(\frac{C}{B}\right) = \frac{1}{8}$
   b. En déduis $P(C)$
3. Soit x l'alea numérique qui prend pour valeurs le nombre de fois où l'on a obtenu une face dont le numéro est pair.
   a. Détermine la loi de probabilité de x.
   b. Calcule l'Esperance et la variance de x.

Problème : **(9 points)**

Soit f_α la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par $\begin{cases} f_\alpha(x) = x^\alpha e^{1-x} & si\ x > 0 \\ f_\alpha(0) = 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

Où α est un nombre réel non nul. On désigne par $(\mathcal{C}_\alpha)$ la courbe représentative de f_α dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique 2 cm.

1. Etude suivant le signe de α . Les variations de la fonction f_α.
2. Etude des branches infinies à la courbe $(\mathcal{C}_\alpha)$
3. Montre que toutes les courbes $(\mathcal{C}_\alpha)$ passent par un point A dont on déterminera les coordonnées.
4. A l'aide d'une intégration par parties. Calcule $I = \int_0^1 4f_1(x)dx$ et interprète géométriquement ce résultat.
5. Pour tout entier $\alpha \geq 1$. On pose $S_\alpha = \int_0^1 x^\alpha e^{1-x} dx$.
   a. En utilisant un encadrement de e^{1-x} sur l'intervalle $[0;1]$ montre que pour tout $\alpha \geq 1$. On a :
   $$\frac{1}{\alpha+1} \leq S_\alpha \leq \frac{e}{\alpha+1}.$$
   b. A l'aide d'une intégration par parties, montre que pour tout $\alpha \geq 1$. On a :
   $$S_{\alpha+1} = (\alpha+1)S_\alpha - 1$$
6. On pose $K_\alpha = \alpha!\, e - S_\alpha$.
   a. Calcule K_1.
   b. Exprime $K_{\alpha+1}$ en fonction de K_α.
7. Construis les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_{-1})$.

BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE				
SERIE : E	DUREE : 04 HUERES	COEF : 5	FEUILLE : 1/2	SESSION : 2018
EPREUVE : DE MATHEMATIQUES Documents autorisés : calculatrice				

Exercice 1

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, i, j). On considère les points $A(-3, 0)$ et $B(3, 0)$.
f est l'affinité orthogonale d'axe $(O, \vec{i})$ de direction $(o, \vec{j})$ et de rapport 1/3.

1. Détermine puis construis l'ensemble © des points M du plan défini par : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.
2.
   a. Construis la courbe $(\mathcal{C}')$ image de $(\mathcal{C})$ par l'affinité f.
   b. Détermine l'expression analytique de f puis celle de sa transformation réciproque notée f^{-1} .
   c. Détermine l'équation cartésienne de $(\mathcal{C}')$ puis déduis sa nature et ses éléments caractéristiques.

Exercice 2 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé de sens direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Résous dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation suivantes :

$$Z^2 + (\sqrt{3} + i)Z + 1 = 0 \quad (E)$$

Ecris les solutions de Z' et Z'' de (E) sous leurs formes trigonométriques puis représente les.

PROBLEME :

L'objet du problème est d'étudier une fonction f, puis d'examiner des intégrales qui en sont issues le plan est rapporté à un repère orthogonal ; unité graphique : 3cm).

Partie A

On considère la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$, par $f(x) = ln(e^x + e^{-x})$. On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan.

1.
   a. Détermine la limite de f en $+\infty$.
   b. Montre que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on a :
   $$f(x) = x + ln(1 + e^{-2x})$$
   c. Déduis que la courbe $(\mathcal{C})$ admet comme asymptote la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x$.
   d. Etudie la position relative de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$.
2. Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variations. Trace la droite $(\mathcal{D})$ et la courbe $(\mathcal{C})$.

Partie B :

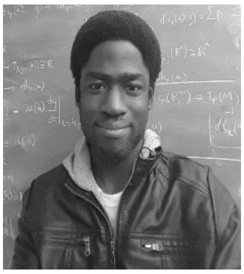
Pour tout $x \in [0; +\infty[$, on pose : $F(x) = \int_0^x ln\,(1 + e^{-2t})dt$. On ne cherchera pas à calculer $F(x)$.

1. Soit x un réel strictement positif. En utilisant la question 1 de la partie A. Donne une interprétation géométrique de $F(x)$.
2. Etudie le sens de variation de F sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
3. On admet que $\forall\ a > 0$; on a : $\frac{a}{1+a} \leq ln(1 + a) \leq a$. En déduis que si $a > 0$:
$$\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t} dt,$$
Puis $\frac{1}{2} ln2 - \frac{1}{2} ln(1 + e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2x}$.
4. On admet que la limite de $F(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$ existe et est un nombre réel noté I. Etablis que $\frac{1}{2} ln2 \leq I \leq \frac{1}{2}$.
5. $\forall\ n \in \mathbb{N}$, on pose : $U_n = \int_n^{n+1} ln(1 + e^{-2t})dt$.
   a. Montre que, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq U_n \leq ln(1 + e^{-2n})$.

(On pourra utiliser le sens de variation de la fonction h. définie sur $[0; +\infty[$ par $h(t) = ln(1 + e^{-2t})$.

   b. Détermine la limite de la suite (U_n).
6. $\forall\ n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots . + U_n$.
   a. Exprime S_n à l'aide de F et n.
   b. La suite (S_n) est-elle convergente ? Dans l'affirmative, donne sa limite.

!!! FIN !!!



''ENCADRE''

Parmi les chercheurs africains les plus prometteurs de l'heure, le Nigérian Hallowed Olaoluwa sort nettement du lot du fait de son parcours scolaire et académique qui force l'admiration.

A 13 ans, il fut le plus jeune élève de la République centrafricaine (RCA) à décrocher le baccalauréat, avec en prime la meilleure note en mathématiques. Fort de ce succès, il est admis à l'université de Bangui dans les filières mathématiques et physique ; obtenant trois ans plus tard simultanément deux licences dans les deux disciplines.

Il poursuit ses études séparément dans les deux filières et obtient à 19 ans deux masters. En cela, il reste à ce jour un cas unique en RCA. En 2011, il retourne alors dans son pays et s'inscrit à l'université de Lagos où il décroche en moins de trois ans (2013) un doctorat en mathématiques.

A seulement 23 ans, il est alors le plus jeune étudiant à obtenir un doctorat en mathématiques sur le sol africain. Il est d'ailleurs le major de sa promotion. Aujourd'hui, il est maître de conférences à l'université de Lagos et poursuit en même temps une carrière de chercheur postdoctoral à l'université de Harvard aux Etats-Unis.

BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE				
SERIE : E	DUREE : 04 HUERES	COEF : 5	FEUILLE : 1/3	SESSION : 2017
EPREUVE : DE MATHEMATIQUES Documents autorisés : calculatrice				

Exercice 1

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini dans la base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\}$ analytiquement par

$$\begin{cases} x' = -x + 3y - z \\ y' = 2x - y + 4z \\ z' = 3x + 2y - 3z \\ t' = x + 4y + 2z + 4t \end{cases}$$

1. Donne la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$
2. Exprime $f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), f(\overrightarrow{e_3}), f(\overrightarrow{e_4})$ en fonction de $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ et $\overrightarrow{e_4}$
3. Trouve le déterminant de M.
4. f est-il un isomorphisme de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 2

1. Montre que $\forall\, x \in \mathbb{R}, \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$
2. Soit f la fonction numérique définie par : $f = e^x \sin x$
   Calcule la dérivée f' de f et résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f'(x) = 0 \quad (1)$
3. Soit(U_n) et (V_n) deux suites numériques définies par :

$$U_n = \pi n - \frac{\pi}{4} \quad et \quad V_n = f(U_n), \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

   a. Montre que (U_n) est une solution de l'équation (1).
   b. Montre que (U_n) est une suite arithmétique et que (V_n) est une suite géométrique. Précise la raison et le premier terme de chaque suite.
   c. Calcule en fonction de n, $S_n = V_0 + V_1 + \cdots .. + V_n$.

BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE				
SERIE : E	DUREE : 04 HUERES	COEF : 5	FEUILLE : 2/3	SESSION : 2017
EPREUVE : DE MATHEMATIQUES Documents autorisés : calculatrice				

Problème

Partie A :

Dans le plan orienté (P), on considère un triangle équilatéral ABC direct de centre O. On note A', B', C' les milieux des segments $[BC]$; $[AC]$; $[AB]$.

1. Démontre qu'il existe une rotation R telle que : $R^{-1}(A) = A'$ et $R(C) = C'$ où R^{-1} est la réciproque de R.
2. Construis le centre de R.
3. Soit la similitude directe de centre B de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$
   a. Démontre que pour tout point M du plan si $M' = S(M)$ alors le triangle BMM' est rectangle en un point que l'on précisera.
   Erreur dans l'énoncé, substituer la question par : **Démontre que pour tout point M du plan distinct de B si $M' = S(M)$ alors le triangle BMM' est rectangle en un point que l'on précisera.**
   b. On considère les points (A_n) défini par $A_0 = A$ et $A_{n+1} = S(A_n)$. Construis les points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6.
4. Soit $d_n = BM_n$. Exprime d_n en fonction de AB et n.
5. *Modifier la question par :* Soit $d_n = BA_n$. Exprime d_n en fonction de AB et n.
6. On pose $S_n = BA_0 + BA_1 + \cdots + BA_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$
   Exprime S_n en fonction de AB et n.
7. On pose $T_n = BA_0^2 + BA_1^2 + \cdots \ldots + \cdots \ldots + BA_n^2$. Démontre que $T_n = BA_0^2 - B_n^2$

   ***Erreur dans l'énoncé** : la relation $T_n = BA_0^2 - BA_n^2$ est fausse, substituer la question par : Démontrer que $T_n = \frac{1}{3}\left(4BA_0^2 - BA_n^2\right)$.*

8. On désigne par E le symétrique de B par rapport à A_1. Démontre que le triangle EAB est équilatéral.
9. Démontre qu'il existe une similitude indirecte S' de centre A qui transforme E est B'.
10. On rapporte le plan au repère orthonormé $(A', \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \overrightarrow{A'C}$. Etablis les expressions analytiques de S et S'.

BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE				
SERIE : E	DUREE : 04 HUERES	COEF : 5	FEUILLE : 3/3	SESSION : 2017
EPREUVE : DE MATHEMATIQUES Documents autorisés : calculatrice				

Partie B

On considère la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 - x + (x-1)\ln(x-1), & si\ x > 1 \\ f(x) = (x-1)^2 e^{1-x}, & si\ x \leq 1 \end{cases}$$

1. **Précise l'ensemble de définition de f .**
2. **Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 1.**
3. **Etudie les variations de f.**
4. **Trace la courbe (C) de f dans le repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j})$**
5. **Calcule l'aire (A) de l'ensemble des points $M(x, y)$ tel que :**
$$\begin{cases} 1 - e \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq f(x). \end{cases}$$
6. **Construis les courbes (C') et (C'') images de (C) respectivement par S et S'.**

BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE				
SERIE : E	DUREE : 04 HUERES	COEF : 5	FEUILLE : 1/3	SESSION :2016
EPREUVE : DE MATHEMATIQUES Documents autorisés : calculatrice				

EXERCICE 1 **(04 pts)**

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$. On considère l'application $f(x)$ qui à tout point $M(x,y)$ associe le point M' (x',y') telle que :

$$\begin{cases} x' = \frac{5}{2}x + y + \frac{5}{2} \\ y' = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{5}{4} \end{cases}$$

1) Montrer que f est une bijection de (P) dans (P) :
2) Déterminer l'expression analytique de l'application réciproque f de f ;
3) Déterminer l'ensemble $Inv(f)$ des points invariants de f :
4) Démontrer que $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe $\vec{v}(a,b)$.
5) Soit (x_h,y_h) le projeté de $M(x,y)$ sur $inv(f)$ parallèlement à v.
   a. Déterminer les coordonnées (x_h,y_h) en fonction de celles de M.
   b. Trouver une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{HM'}$ et $\overrightarrow{HM}$.
6) Déduire que f est une affinité dont on déterminera.

EXERCICE 2 **(4 pts)**

On donne (E) :

$$Z^2 - \frac{2z}{\cos\varphi} + \frac{5}{\cos^2\varphi} = 4, avec\ \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$$

1) Trouver Z' et Z'' les racines de (E) dans $\mathbb{C}$.
2) Soit M'et M les images de Z' et Z'' dans le plan (P). Montrer que M'et M'' décrivent une branche d'hyperbole que l'on déterminera quand φ varie de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE				
SERIE : E	DUREE : 04 HUERES	COEF : 5	FEUILLE : 2/3	SESSION : 2016
EPREUVE : DE MATHEMATIQUES Documents autorisés : calculatrice				

PROBLEME **(12 pts)**

PARTIE I

1) Détermine les solutions h de l'équation différentielle
$$(E) : y'' + 4y' = 0$$
2) On considère l'équation différentielle $(F) : y'' + 4y' + 4y = -4$
Modifier la question, pour des raisons de corrélation entre la PARTIE I et II, par :

On considère l'équation différentielle $(F) : y'' + 4y' + 4y = -4x$

a. Détermine les nombres réels a et b tels que la fonction
$$\varphi : x \longmapsto ax + b \text{ soit une solution de } (F)$$
b. Montre qu'une fonction f est de (F) si et seulement si $f - \varphi$ est solution de (E)
Modifier la question, pour des raisons d'omission, par :
Montre qu'une fonction f est solution de (F) si et seulement si $f - \varphi$ est solution de (E)
c. En déduis toutes les solutions de (F).
d. Donne la solution f de (F) qui vérifie $f(0) = 2$ et $f'(0) = -2$

PARTIE II :

Soit la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f. On se propose d'étudier cette fonction ainsi que l'équation $f(x) = 0$.

1- a)- Calcule la fonction f' dérivé de f. Etudier le signe de f' sur $[0; +\infty[$.
b)- Dresse le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$.

Indique la limite en $+\infty$.

c)- Montre que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote que l'on déterminera. Construire (Δ) et $(\mathcal{C})$ sur un même graphique.

2- a) Etablis que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0; +\infty[$ une solution et une seule. On note α cette solution.

b) Justifie l'encadrement : $1 \leq \alpha \leq 2$.

PARTIE III :

On se propose d'étudier une méthode d'approximation de α. On observe pour cela que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$ où g est la fonction définie sur l'intervalle $J = [1; +\infty[$ par

$$g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1$$

1. Etudie les variations de g sur J. On ne demande pas de construire sa courbe représentative. En déduire que pour tout élément x de J $g(x)$ appartient encore à J .
2. Montre que pour tout x de J , on a : $|g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$
   En déduire que pour tout x de J, on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$
3. Soit (U_n) la matrice d'éléments de J définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = g(U_n)$ pour tout entier n positif ou nul.
   a) Montre que pour tout n, positif ou nul, on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|U_n - \alpha|$
   b) En déduire que pour tout n, positif ou nul, on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$
   c) Détermine la limite de la suite (U_n).
   d) Détermine un indice p pour lequel on est sûr d'avoir $|U_p - \alpha| \leq 10^{-3}$.

   Calcule U_p à l'aie de votre calculatrice (on donnera la partie entière et les trois premières décimales).

Le saviez-vous ? L'exactitude des mathématiques est sujette à débat. En effet, les mathématiques reposent sous des axiomes, des propositions, sans démonstrations, que l'on considère a priori vraies. Pour exemple, un axiome d'Euclide extraite du livre les éléments : « Il est possible de tracer une ligne droite à partir de n'importe quel point à n'importe quel point ». Enoncé trivial non ?

PARTIE
C
CORRIGES

CORRIGE BAC E 2021

Exercice 1 :

1. Etant donnée l'équation (E_m) tel que :

$$(E_m) : y^2 = m(x^2 - 1) + 2x$$

Si le paramètre réel $m = 1$, il vient que : $(E_1) : y^2 = (x^2 - 1) + 2x \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x^2 + 2x - 1}$

Par conséquent (E_1) est la réunion des courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ des fonctions respectives :

$$y_1 = \sqrt{x^2 + 2x - 1} \quad et \quad y_2 = -\sqrt{x^2 + 2x - 1}$$

Equation de (E_1) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$: il s'agit de donner son équation réduite dans le repère indiqué.

$$(E_1) : y^2 - x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$-(x + 1)^2 + y^2 + 1 + 1 = 0$$

$$(x + 1)^2 - y^2 = 2$$

En divisant les deux membres par 2 puis on en remplaçant l'écriture du nombre 2 par $\left(\sqrt{2}\right)^2$, on obtient :

$$\Leftrightarrow \frac{(x + 1)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1$$

2. On sait que :

$$(E_m) : y^2 = m(x^2 - 1) + 2x$$

Si le paramètre réel $m = -1$, il vient que :

$$(E_{-1}) : y^2 = -(x^2 - 1) + 2x$$

$$\Leftrightarrow y^2 = -x^2 + 2x + 1$$

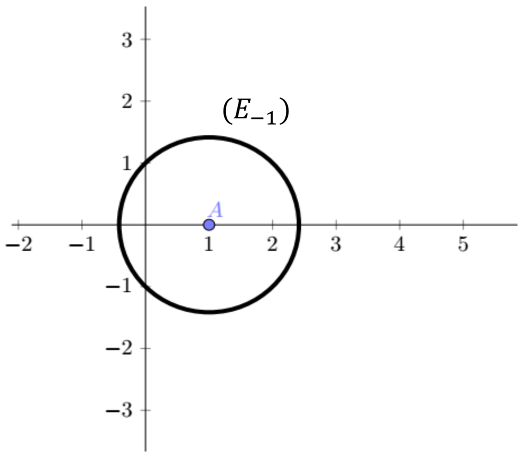
$$x^2 - 2x - 1 + y^2 = 0$$

$$(x^2 - 2x + 1) + y^2 \underbrace{-1 - 1}_{=-2} = 0$$

En factorisant la quantité entre parenthèse puis en transposant -2 dans le membre de droite, on obtient :

$$(E_{-1}) : (x - 1)^2 + y^2 = 2$$

- <u>Nature</u> : L'équation (E_{-1}) est caractéristique d'un cercle de centre $A(1, 0)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$
- <u>Construction</u> : Voir graphique ci-dessous



3. L'ensemble (E_m) n'admet pas le point $\left(-\frac{1}{4};0\right)$ comme centre de symétrie.

En effet, un point $O'\left(-\frac{1}{4},0\right)$, de coordonnées (x_0,y_0) dans le repère $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, est centre de symétrie de (E_m) si et seulement si l'équation de (E_m) dans le repère $\mathcal{R}'(O',\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ne comporte pas de termes du premier degré. Les coordonnées (x',y') dans $\mathcal{R}'(O',\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du point M de coordonnées (x,y) dans $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont données par :

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} x = x' - \frac{1}{4} \\ y = y' \end{cases}$$

L'équation de (E_m) dans $\mathcal{R}'(O',\vec{\imath},\vec{\jmath})$ s'écrit donc :

$$y'^2 = m\left[\left(x'-\frac{1}{4}\right)^2 - 1\right] + 2\left(x'-\frac{1}{4}\right)$$

$$= mx'^2 + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}m+2\right)x'}_{\neq 0} - \frac{1}{2} + \frac{15m}{16}$$

Comme les termes du premier degré sont constants, nous concluons que le point $\left(-\frac{1}{4};0\right)$ n'est pas centre de symétries de l'ensemble (E_m)

En revanche, montrons que le point $\left(-\frac{1}{m}\ ;\ 0\right)$ est point de symétrie de l'ensemble (E_m)

<u>Méthode 1 :</u>

Soit O'le point de coordonné$\left(-\frac{1}{m};0\right)$ dans le $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec m réel non nul.

Le point $O'\left(-\frac{1}{m};0\right)$ est centre de symétrie de (E_m) si et seulement si l'équation de (E_m) dans le repère $\mathcal{R}'(O',\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ne comporte pas de termes du premier degré. Dans $\mathcal{R}'(O',\vec{\imath},\vec{\jmath})$ $\begin{cases} x = x' - \frac{1}{m} \\ y = y' \end{cases}$

$$y'^2 = m\left[\left(x' - \frac{1}{m}\right)^2 - 1\right] + 2\left(x' - \frac{1}{m}\right)$$
$$= mx'^2 - \left(\frac{m^2+1}{m}\right)$$

Comme les termes de premier sont nuls alors le point $\left(-\frac{1}{m}\ ;0\right)$ est alors centre de symétrie de l'ensemble (E_m)

Méthode 2 :

L'écriture générale de (E_m) est : $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

Tel que : $A, B, C, D, E\ et\ F$ sont des nombres réels. Le point de coordonnées (x_0, y_0) est centre de symétrie de la courbe si et seulement si :

$$(S) : \begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases}$$

Comme (E_m): $y^2 - mx^2 + m - 2x = 0$, on déduit, par identification :

$$A = -m\ ; B = 0\ ; C = 1\ ; D = -1\ ; E = 0\ ;\ \ F = m\ ;\ \ \left(x_0 = -\frac{1}{m}\ ; y_0 = 0\right)$$

En appliquant numériquement, on obtient :

$$(S) : \begin{cases} -m \times \left(-\frac{1}{m}\right) + (0 \times 0) - 1 = 0 \\ 0 \times \left(-\frac{1}{m}\right) + (1 \times 0) + 0 = 0 \end{cases}$$

Soit,

$$(s) : \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Comme le point $\left(-\frac{1}{m}\ ; 0\right)$ vérifie le système (S) alors c'est un point de symétrie de l'ensemble (E_m)

Méthode 3 :

L'ensemble (E_m) admet un point de symétrie si et seulement si :

$$B^2 - AC \neq 0\ \ et\ C + B \neq 0$$

Puisque $A = -m\ ; B = 0\ ; C = 1\ ; D = -1\ ; E = 0\ ;\ \ F = m$, il vient :

$$B^2 - AC = 0^2 - (-m)(1)$$
$$= m \neq 0\ car\ m \in \mathbb{R}^*$$

Et,

$$C + B = 1 + 0$$
$$= 1 \neq 0$$

Alors l'ensemble (E_m) admet un centre de symétrie dont les coordonnées sont :

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{CD - BE}{B^2 - AC} \\ y_0 = -\dfrac{(A+B)x_0 + D + E}{C + B} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{-1 - 0}{0 + m} \\ y_0 = -\dfrac{(-m + 0)\left(-\dfrac{1}{m}\right) - 1 + 0}{0 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{-1}{m} \\ y_0 = -\dfrac{1 - 1}{1} = 0 \end{cases}$$

D'où le centre de symétrie de l'ensemble (E_m) est le point $\left(-\frac{1}{m} ; 0\right)$

4. On sait que :

$$(E_m) : y^2 - mx^2 - 2x + m = 0$$

(E_m) est une ellipse si et seulement si :

$$B^2 - AC < 0$$

$$B^2 - AC = m < 0.$$

Par suite,

$$(\Gamma): m =]-\infty; 0[$$

<u>Commentaire</u> : On peut remarquer que pour $m = -1$ de la question 2 le graphe de (Γ) est un cercle. Ce qui est un cas particulier d'une l'ellipse.

<u>Exercice 2</u> :

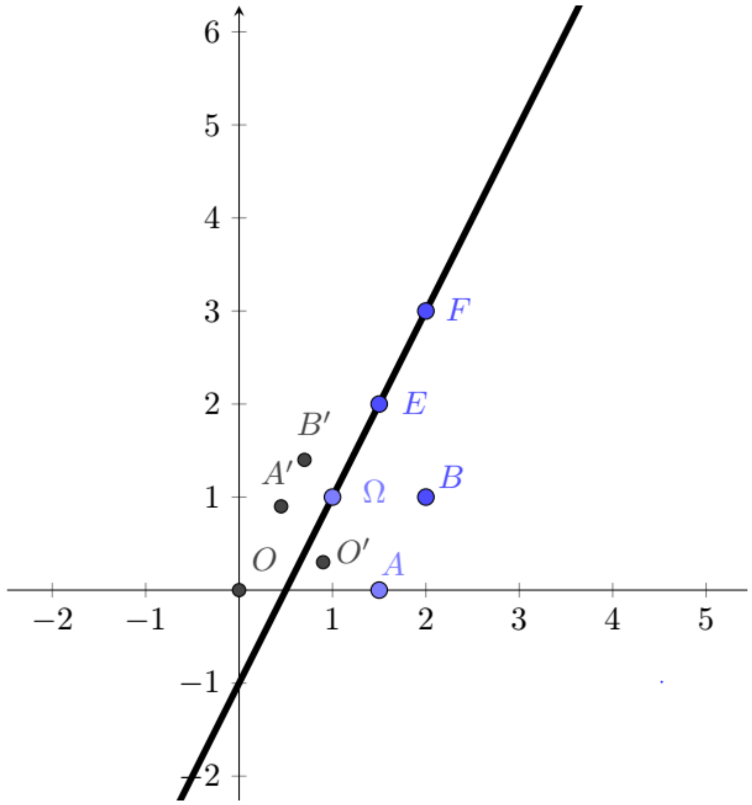
1. <u>Trouvons d'abord le rapport de h</u>.

D'après l'énoncé on a : $\overrightarrow{\Omega E} = k\overrightarrow{\Omega F} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E - x_\Omega = k(x_F - x_\Omega) \\ y_E - y_\Omega = k(y_F - y_\Omega) \end{cases}$ en remplaçant chaque paramètre par sa valeur on obtient :

$$\begin{cases} k = \dfrac{1}{2} \\ k = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

<u>Construction</u> :

Voir graphique



<u>Conseil</u> : Pour ceux qui rencontrent des difficultés, il serait plus judicieux de résoudre d'abord la question 2 et ensuite répondre à la question 1.

2.

- **<u>Expression analytique de la Réflexion S</u> :** $(\mathcal{D}) : y = 2x - 1$

Soit $M\ (x, y)$ et $M'(x', y')$ des points de $(\mathcal{P})$ tel que :

$$S_{\mathcal{D}}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0 \\ milieu\ \overrightarrow{MM'} \in (\mathcal{D}) \end{cases} avec\ \ \vec{u}\ vect.colineaire\ de\ (\mathcal{D})$$

Il vient, $(\mathcal{D}) : y - 2x + 1 = 0$; $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x' - x \\ y - y \end{pmatrix}$; $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $milieu\ \overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} \frac{x'+x}{2} \\ \frac{y'+y}{2} \end{pmatrix}$

Par suite, on a : Par suite, on a : $\begin{cases} \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0 \\ milieu\ \overrightarrow{MM'} \in (\mathcal{D}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \\ -2\left(\frac{x'+x}{2}\right) + \left(\frac{y'+y}{2}\right) + 1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)(x' - x) + (2)(y' - y) = 0 \\ -2(x' + x) + (y' + y) + 2 = 0 \end{cases}$$

En développant, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x' + 2y' = x + 2y & (L_1) \\ y' - 2x' = 2x - y - 2 & (L_2) \end{cases}$$

En calculant $2\times(L_1)+(L_2)$, on trouve x'. Puis, en calculant $(L_1)-2\times(L_2)$, on trouve y'.
Par suite, on a :

$$(S_{\mathcal{D}})\ :\ \begin{cases} x'=\dfrac{1}{5}(-3x+4y+4) \\ y'=\dfrac{1}{5}(4x+3y-2) \end{cases}$$

- **<u>Expression analytique de l'homothétie h</u> :**
  Soient $M\ (x,y)$ et $M'(x',y')$ des points de $(\mathcal{P})$ tel que :

$$\overrightarrow{\Omega M}=k\,\overrightarrow{\Omega M'}\Leftrightarrow h{:}\begin{cases} x'=\dfrac{1}{k}[x+x_\Omega(k-1)] \\ y'=\dfrac{1}{k}[y+y_\Omega(k-1)] \end{cases}$$

En appliquant numériquement les valeurs $k=\frac{1}{2}$ et $\Omega\begin{cases}x_\Omega=1\\y_\Omega=1\end{cases}$, on obtient :

$$h\ :\begin{cases} x'=2x-1 \\ y'=2y-1 \end{cases}$$

- **<u>Expression analytique de $f=h\circ S$</u> :**

Soient $M\ (x,y)$, $M'(x',y')$ et $M''(x'',y'')$ des points de $(\mathcal{P})$ tel que :

$$S(M)=M'\ et\ h(M')=M''\Longrightarrow f(M)=M''$$

$$\Leftrightarrow f{:}\begin{cases} x''=2x'-1 \\ y''=2y''-1 \end{cases} avec\begin{cases} x'=\dfrac{1}{5}(-3x+4y+4) \\ y'=\dfrac{1}{5}(4x+3y-2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x''=\dfrac{2}{5}(-3x+4y+4)-1 \\ y''=\dfrac{2}{5}(4x+3y-2)-1 \end{cases}\Leftrightarrow f{:}\ \begin{cases} x''=\dfrac{1}{5}(-6x+8y+3) \\ y''=\dfrac{1}{5}(8x+6y-9) \end{cases}$$

D'où pour tout point $M\ (x,y)$ et $M'(x',y')$ du plan $(\mathcal{P})$ tel que : $f(M)=M'$, on obtient :

$$f{:}\ \begin{cases} x'=\dfrac{1}{5}(-6x+8y+3) \\ y'=\dfrac{1}{5}(8x+6y-9) \end{cases}$$

3. **D'après la question précédente :**

$$\begin{cases} x'=\dfrac{1}{5}(-6x+8y+3) & (L_1) \\ y'=\dfrac{1}{5}(8x+6y-9) & (L_2) \end{cases}$$

Calculons $(L_1)+i(L_2)\ \Leftrightarrow\ x'+iy'=\frac{1}{5}(-6x+8y+3)+i\frac{1}{5}(8x+6y-9)$

$$\Leftrightarrow x' + iy' = -\frac{6}{5}x + i\frac{6}{5}y + i\frac{8}{5}x + \frac{8}{5}y + \frac{3}{5} - \frac{9}{5}i$$

Or d'après l'énoncé Z' et Z sont des nbres complexes tel que $Z' = x' + iy'$; $Z = x + iy$; $\overline{Z} = x - iy$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x' + iy'}_{=Z'} = -\frac{6}{5}\underbrace{(x - iy)}_{=\overline{Z}} + i\frac{8}{5}\underbrace{(x - iy)}_{=\overline{Z}} + \frac{3}{5} - \frac{9}{5}i$$

En factorisant les expressions en $\overline{Z}$ dans le membre de droite puis ensuite en factorisant tout le membre de droite par $\frac{1}{5}$ on a :

$$\Leftrightarrow Z' = \frac{1}{5}[(-6 + 8i)\overline{Z} + 3 - 9i]$$

4. L'écriture complexe de f est de la forme $Z' = a\overline{Z} + b$ $avec$ $a \in \mathbb{C}^*$
   - Nature : f est une similitude plane indirecte
   - Centre : $Z_\Omega = 1 + i$
   - D'axe : $\mathcal{D}$: $y = 2x - 1$

<u>Problème</u> :

1. Soit x un réel. La fonction U est définie dans $\mathbb{R}$. Ses limites aux bornes de son ensemble de définition sont :

$$\lim_{x\to-\infty} U(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x - 2x + 1 = +\infty \ et \ \lim_{x\to+\infty} U(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x - 2x + 1 = +\infty$$

La fonction U est dérivable comme la somme de trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, sa fonction dérivée f' s'écrit :

$$U'(x) = e^x - 2$$

Le signe de la fonction U' : revient à résoudre l'équation $U'(x) \leq 0$ ou $U'(x) \geq 0$

$$U'(x) \leq 0$$

$$e^x - 2 \leq 0$$

$$e^x \leq 2$$

Par croissance du logarithme naturel on obtient :

$$x \leq ln2$$

Et, on déduit que :

$$U'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq ln2$$

En somme,

$$\begin{cases} \forall\, x \in \,]-\infty\,; ln2], & U'(x) \leq 0 \quad donc \quad U \searrow \\ \forall\, x \in [ln2\,; +\infty[, & U'(x) \geq 0 \quad donc \quad U \nearrow \end{cases}$$

Nous consignons les résultats obtenus dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	$ln2$	$+\infty$
$U'(x)$	$-$	0	$+$
$U(x)$	$+\infty$ ↘	$3-ln4$	↗ $+\infty$

<u>Signe de U :</u>

$$\forall\, x\ \in \mathbb{R}, \boldsymbol{U(x) \geq 3 - ln4 > 0}$$

2. **On sait que pour tout réel x, la fonction h est définie par :**

$$\boldsymbol{h(x) = e^x - x^2 + x + 1}$$

Et pour tout x réel, la fonction h est dérivable comme la somme des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est :

$$\boldsymbol{h'(x) = e^x - 2x + 1 = U(x)}$$

D'après le tableau de variation pour tout réel x, $U(x)$ est minorée par $3 - ln4$, il vient :

$$\boldsymbol{h'(x) \geq 3 - ln4 \Rightarrow h'(x) > 0}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	
$h(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3. **La fonction h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et de plus $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) \times \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) < 0$**

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet pour solution le réel α et seulement ce dernier, tel que : $h(\alpha) = 0$.

<u>Encadrement</u> :

En traçant le graphe de h on remarque que ce dernier coupe l'axe des abscisses entre les valeurs -1 et 0. C'est-à-dire : $-1 \leq \alpha \leq 0$. Ainsi, trouvons un encadrement de α par balayage sur $[-1; 0]$au pas de $0,1$.

x	-1	$-0,9$	$-0,8$
$\varepsilon[h(x)]$	$-$	$-$	$+$

D'où, un encadrement de α à 10^{-1} est :

$$\boldsymbol{-0,9 < \alpha < -0,8}$$

4. **Nous déduisons de la question 3**

$$\begin{cases} si\ ]-\infty;\alpha[\,, & h(x) < 0 \\ si\ ]\alpha;+\infty[\,, & h(x) > 0 \\ si\ \ x = \alpha, & h(\alpha) = 0 \end{cases}$$

5. **La fonction f est définie sur $]\alpha;+\infty[$ et elle est dérivable sur le même intervalle. Pour tout élément de $]\alpha;+\infty[$, sa fonction dérivée est définie par :**

$$f'(x) = \frac{U(x)}{h(x)} = \frac{e^x - 2x + 1}{e^x - x^2 + x + 1}$$

On sait que, d'après la question 4, pour tout $x \in]\alpha;+\infty[$, $h(x) > 0$. En conséquence, f' a le même signe que son numérateur : la fonction U. Or d'après la question 1, pour tout réel x, $U(x) > 0$ donc en particulier :

$$\forall\, x \in]\alpha;+\infty[, \qquad U(x) > 0 \iff \quad \forall\, x \in]\alpha;+\infty[, f'(x) > 0$$

<u>Tableau de variations</u> :

$$\forall\, x \in]\alpha;+\infty[, \qquad f(x) = ln \circ h(x)$$

D'une part,

$$\lim_{x\to\alpha} h(x) = 0 \quad et \quad \lim_{y\to 0} lnx = -\infty$$

D'après le théorème de composition de limites :

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$$

D'autre part,

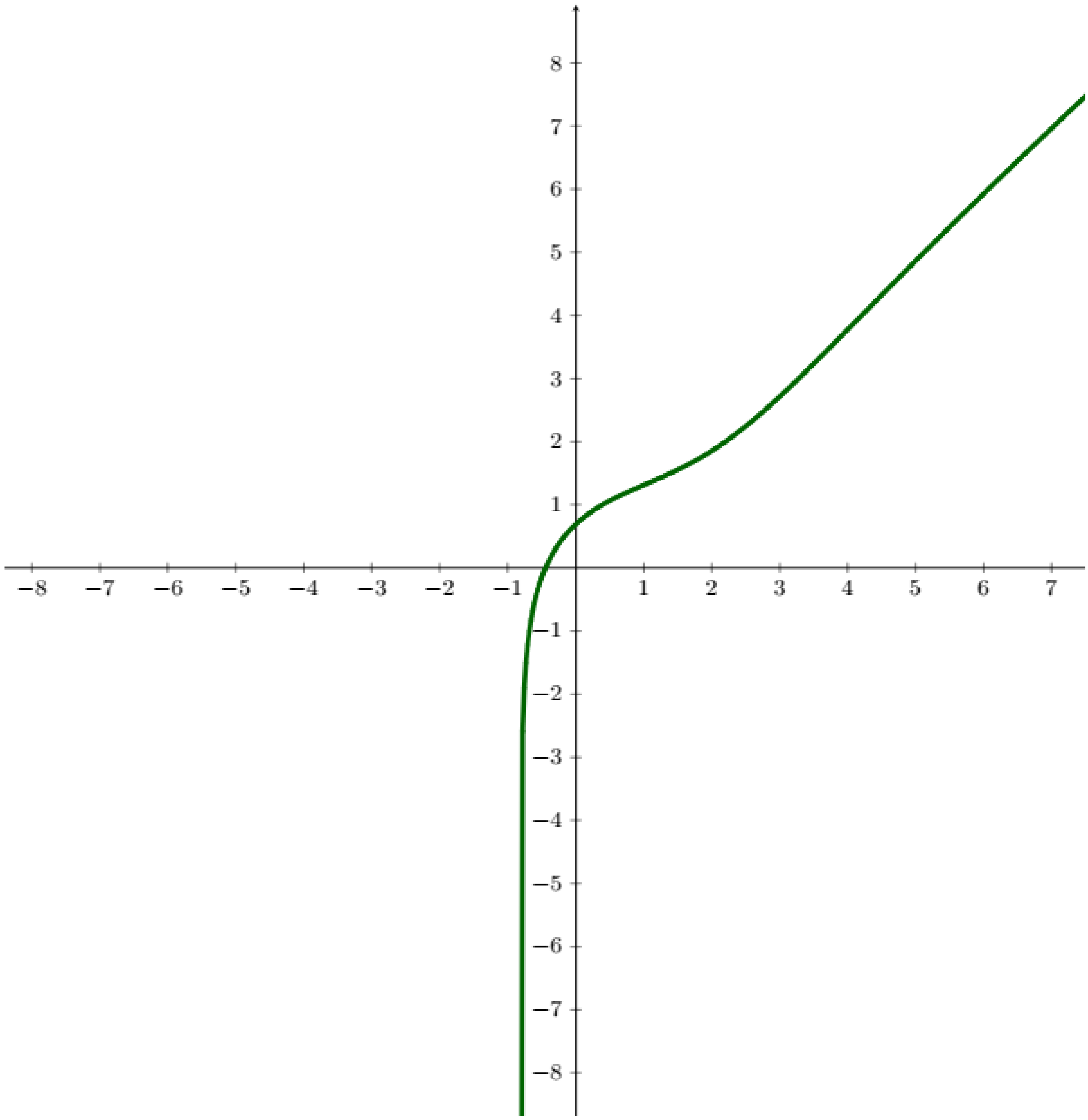
$$\lim_{x\to\alpha} h(x) = 0 \quad et \quad \lim_{y\to 0} lnx = -\infty$$

D'après le théorème de composition de limites :

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$$

Nous consignons les résultats dans le tableau suivant :

x	α $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$



Partie B

1. **La fonction h est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. Par suite, on a :**

$$h(x) = e^x - x^2 + x + 1 \ ; \ h'(x) = e^x - 2x + 1 \ ; \ h''(x) = e^x - 2$$

La fonction h est solution de (E) si et seulement si :

$$h''(x) + 2h'(x) - 3h(x) = 3x^2 - 7x - 3$$

$$(e^x - 2) + 2(e^x - 2x + 1) - 3(e^x - x^2 + x + 1) = 3x^2 - 7x - 3$$

$$(e^x + 2e^x - 3e^x) + (3x^2) + (-4x - 3x) + (-2 + 2 - 3) = 3x^2 - 7x - 3$$

$$3x^2 - 7x - 3 = 3x^2 - 7x - 3$$

D'où : la fonction h est solution de l'équation (E).

2.

$$(E') : y'' + 2y' - 3y = 0$$

Equation caractéristique associée à (E) :

$$r^2 + 2r - 3 = 0 \Rightarrow \Delta' = 1 + 3 = 4 > 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = -3 \\ r_2 = 1 \end{cases}$$

Par suite,

$$x \longmapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}, \qquad avec\ (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

D'où l'équation (E') a pour solution générale les fonctions :

$$x \longmapsto Ae^{-3x} + Be^{x}, \quad avec\ (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

3. φ est solution de (E) , on a :

$$\varphi''(x) + 2\varphi'(x) - 3\varphi(x) = 3x^2 - 7x - 3 \quad (1)$$

Aussi, h solution de (E) : $\qquad h''(x) + 2h'(x) - 3h(x) = 3x^2 - 7x - 3 \quad (2)$

En égalant les relations (1) et (2), nous obtenons :

$$\varphi''(x) + 2\varphi'(x) - 3\varphi(x) = h''(x) + 2h'(x) - 3h(x)$$

$$\Rightarrow \varphi''(x) + 2\varphi'(x) - 3\varphi(x) - [h''(x) + 2h'(x) - 3h(x)] = 0$$
$$\Rightarrow \varphi''(x) - h''(x) + 2\varphi(x) - 2h'(x) - 3\varphi(x) + 3h(x) = 0$$
$$\Rightarrow (\varphi - h)''(x) + 2(\varphi - h)'(x) - 3(\varphi - h)(x) = 0$$

D'où φ est solution de (E) si et seulement si $(\varphi - h)$ est solution de (E')

4. Posons $r = \varphi - h$. Comme $(\varphi - h)$ est solution de (E') alors r est solution de (E').

$r = \varphi - h \Rightarrow \varphi = r + h$ comme φ est solution générale de (E). Il vient :

$$\varphi(x) = r(x) + h(x)$$

D'où l'équation (E) a pour solution générale les fonctions :

$$x \longmapsto Ae^{-3x} + (B + 1)e^{x} - x^2 + x + 1$$

<u>Partie C</u> :

1. Soit x un réel élément de I. On peut remarquer :

$$g(x) = \frac{1}{9}[x - h(x)]$$

Par suite, on a :

$$g(\alpha) = \frac{1}{9}\left[\alpha - \underbrace{h(\alpha)}_{=0}\right]$$

$$= \frac{1}{9}\alpha \blacksquare$$

D'où :

$$g(\alpha) = \frac{1}{9}\alpha$$

2. **La fonction g est deux fois dérivable sur I. Il vient, pour tout x élément sa dérivée est définie par :**

$$g'(x) = \frac{1}{9}\left[1 - \underbrace{h'(x)}_{=U(x)}\right]$$
$$= \frac{1}{9}[1 - U(x)]$$

Par suite, pour tout x élément sa dérivée seconde est définie par :

$$g''(x) = -\frac{1}{9}U'(x)$$

Comme voulu, on a, pour tout réel x élément de I :

$$g''(x) = -\frac{1}{9}U'(x)\blacksquare$$

<u>Déduction de la relation</u> : $|g'(x)| \leq \frac{2}{3}$

D'après la question 2 de la partie A. Pour tout $x \in I$, $U'(x) < 0 \Rightarrow x \in I, -\frac{1}{9}\ U'(x) = g''(x) > 0$
Par conséquent, la fonction g' est continue et strictement croissante sur I car sa dérivée est strictement positive sur I. Elle réalise donc une bijection de I vers J tel que :

$$J = g'([-1;0]) = [g'(-1); g'(0)] = \left[\underbrace{\frac{1-2e}{9e}}_{\approx -0{,}18}; \underbrace{-\frac{1}{9}}_{-0{,}11}\right]$$

Par suite, on a :

$$-\frac{2}{3} \leq \frac{1-2e}{9e} \leq g'(x) \leq -\frac{1}{9} \leq \frac{2}{3}\ \ ou\ encore\ -\frac{2}{3} \leq g'(x) \leq \frac{2}{3}$$

D'où : $\forall\ x\ \in I,\ \ |g'(x)| \leq \frac{2}{3}\ \blacksquare$

3. **Soit $x \in I$.**

$$g'(x) = \frac{1}{9}[1 - U(x)] = \frac{1}{9}(2x - e^x)$$
$$\forall\ x\ \in I, \qquad \frac{1}{9}(2x - e^x) < 0,$$

Par conséquent, la fonction g est strictement décroissante sur I.

<u>Déduction</u> : g est continue et strictement décroissante sur I, elle réalise donc une bijection de

$$g([-1;0]) = [g(0); g(-1)] = \left[\underbrace{-\frac{2}{9}}_{\approx -0{,}22}\ ;\ \underbrace{-\frac{1}{9e}}_{\approx -0{,}04}\right] \subset [-1;0]$$

D'où : $\forall\, x \in I,\ g(I) \subset I$

4.

a. Démonstration de la propriété : $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \in [-1; 0]$ en raisonnant par récurrence.

Initialisation : Soit $n = 0$. On a :

$$U_0 = -\frac{1}{2} \in I = [-1; 0]$$

Comme $U_0 \in [-1; 0]$ d'après la question 3 $U_1 = g(U_0) \in [-1; 0]$

Il y a donc initialisation,

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Supposons que $U_n \in [-1; 0]$ et montrons aussi que $U_{n+1} \in [-1; 0]$.

Comme $U_n \in [-1; 0]$ on déduit que, d'après la question 3 $g(U_n) \in [-1; 0]$. Or $U_{n+1} = g(U_n)$.
Ainsi,

$$U_{n+1} \in [-1; 0]$$

Il y a donc hérédité,

Conclusion : Par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n. C'est-à-dire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad U_n \in I = [-1; 0].$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. g est continue et dérivable sur $[-1; 0]$. De plus, $|g'(x)| \leq \frac{2}{3}$.
D'après le théorème des accroissements finis, on a :

$$\forall\, x \in [-1; 0], \qquad \forall\, y \in [-1; 0], \qquad |f(x) - f(y)| \leq \frac{2}{3}|x - y|$$

Comme U_n et α sont des éléments de I, on peut appliquer l'inégalité établie ci-dessus en $x = U_n$ et en $y = \alpha$. Ce qui nous donne :

$$|g(U_n) - g(\alpha)| \leq \frac{2}{3}|U_n - \alpha|$$

On sait que $U_{n+1} = g(U_n)\ \ et\ g(\alpha) = \frac{1}{9}\alpha$. D'où :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \left|U_{n+1} - \frac{1}{9}\alpha\right| \leq \frac{2}{3}|U_n - \alpha| \blacksquare$$

c. Démonstration de la propriété : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ en raisonnant par récurrence sur n.

Initialisation : Soit $n = 0$. On a :

$$\left|U_0 - \frac{1}{9}\alpha\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$$

Comme $-1 \leq \alpha \leq 0$ alors $0 \leq -\frac{1}{9}\alpha \leq \frac{1}{9} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2} - \frac{1}{9}\alpha \leq -\frac{1}{2} + \frac{1}{9}$

$$\Rightarrow -1 < -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2} - \frac{1}{9}\alpha \leq -\frac{1}{2} + \frac{1}{9} < 1$$

$$\Rightarrow \left|-\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\alpha\right| < 1.$$

Il y a donc initialisation,

Hérédité :

Soit $n \geq 0$. Supposons que $\left|U_n - \frac{1}{9}\alpha\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et montrons aussi que $\left|U_{n+1} - \frac{1}{9}\alpha\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$.

Comme $\left|U_n - \frac{1}{9}\alpha\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ il vient, d'après la question 4.a

$$\begin{aligned}\left|U_{n+1} - \frac{1}{9}\alpha\right| &\leq \frac{2}{3}|U_n - \alpha| \\ &\leq \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

Il y a donc hérédité,

Conclusion : Par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n. C'est-à-dire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \left|U_n - \frac{1}{9}\alpha\right| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Convergence

On sait que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \left|U_n - \frac{1}{9}\alpha\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \ \textit{ou encore}\ \ 0 \leq \left|U_n - \frac{1}{9}\alpha\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \ .$$

Par passage à la limite,

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty}\left|U_n - \frac{1}{9}\alpha\right| \leq \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

Par conséquent,

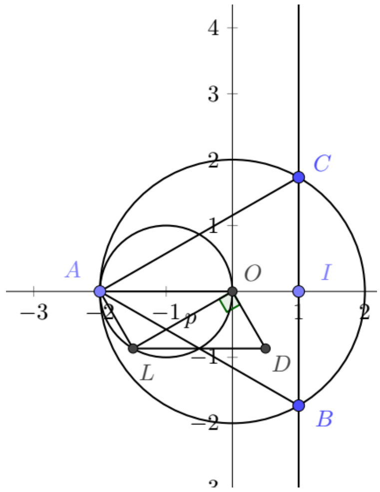
$$\lim_{n\to+\infty}\left|U_n - \frac{1}{9}\alpha\right| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{9}\alpha$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{9}\alpha$$

CORRIGE BAC E 2020

Exercice 1



1. Voir graphique

Raisonnement 1 :

AI est une hauteur de ABC. $OA = \frac{2}{3}AI$ qui est un rayon de (C), (C) cercle circonscrit à ABC en O. Donc O est le centre de gravité de ABC situé à $\frac{2}{3}AI$. Alors ABC est un triangle équilatéral.

Raisonnement 2 :

AI est une hauteur, une bissectrice et aussi une médiane par rapport au sommet A. On constate la même chose en traçant la hauteur issue de C. Un triangle où les droites remarquables se superposent est un triangle équilatéral.

2. Comme le triangle ABC est équilatéral on a :

$$AI = \frac{\sqrt{3}}{2}AB \Longrightarrow AB = \frac{2AI}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times AI = 2\sqrt{3} \;\; car \; AI = 3$$

$$\Longrightarrow AB = AC = BC = 2\sqrt{3}$$

I est un point de la médiatrice du segment $[BC]$. Il vient : $IC = IB = \frac{BC}{2} = \sqrt{3}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB} \\ \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OB} = (\|\overrightarrow{OI}\|)\vec{\imath} - (\|\overrightarrow{IB}\|)\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{OC} = (\|\overrightarrow{OI}\|)\vec{\imath} + (\|\overrightarrow{IC}\|)\vec{\jmath} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OB} = \vec{\imath} - (\sqrt{3})\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{OC} = \vec{\imath} + (\sqrt{3})\vec{\jmath} \end{cases}$$

D'où les coordonnées des points B et C sont :

$$B\left(1; -\sqrt{3}\right) \;\; ; \;\; C\left(1; \sqrt{3}\right)$$

3.

a.

f est la composée deux rotations dont la somme des angles $\left(\theta = \frac{2\pi}{3} \neq 0\right)$ et $\left(\theta = \frac{2\pi}{3} \neq \pi\right)$.

Alors f est une rotation dont les éléments caractéristiques sont :

Angle : $\theta = \frac{2\pi}{3}$

Centre : Décomposons f comme produit de réflexions

$$f = R_B \circ R_C = S_{(OD)} \circ \underbrace{S_{(BC)} \circ S_{(BC)}}_{Id_p} \circ S_{(OC)} = S_{(OD)} \circ S_{(OC)}$$

$$\Longrightarrow \Omega = (OC) \cap (OD) = O$$

D'où le centre de f est le point O

b. Résultat immédiat :

$$f(A) = B \, ; \; f(B) = C \, ; \; f(C) = A$$

4. On sait que :

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(\vec{\imath} - \sqrt{3}\vec{\jmath})\ et\ \overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OA} + \underbrace{\overrightarrow{AL}}_{=\overrightarrow{OD}} = -2\vec{\imath} + \frac{1}{2}(\vec{\imath} - \sqrt{3}\vec{\jmath}) = -\frac{1}{2}(3\vec{\imath} + \sqrt{3}\vec{\jmath})$$

Les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OL}$ sont orthogonaux si et seulement si :

$$\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OL} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OL}$ sont orthogonaux.

<u>Placement du point L</u> : Voir graphique

<u>Montrons que L point du cercle de diamètre OA</u> : D'après ce qui précède on a :

$$\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OL} = 0 \Leftrightarrow Mes(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OL}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

or $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AL}$. Par suite,

$$Mes(\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{OL}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

$$Mes(\overrightarrow{LO}, \overrightarrow{LA}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

D'après le théorème du cercle capable, le point L appartient au cercle de diamètre OA privé des points O et A

<u>Autre approche</u> :

OLD est rectangle en O. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AL}$ donc (AL) et (OD) sont parallèles par conséquent le triangle LOA est aussi rectangle en L par la propriété des angles alternes-internes. Comme LOA est rectangle en L, alors OA est son hypoténuse. Par conséquent le triangle LOA peut être circonscrit par un cercle de diamètre OA.

D'où le point L appartient au cercle de diamètre OA.

5.

$$g = S_{(OL)} \circ S_{(AC)}$$

g est la composée de deux réflexions d'axe sécant. Ainsi, g est la translation de vecteur

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB}\ \ car\ \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OD}$$

D'où : $g = S_{(OL)} \circ S_{(AC)} = t_{\overrightarrow{OB}}$

<u>L'image de O par g</u> : $g(O) = t_{\overrightarrow{OB}}(O) = B$

<u>Exercice 2</u> :

1. $F(x) = \int_0^x e^{-t} \sin t \, dt$
   Si l'on choisit $U' = e^{-t}$ alors $U = -e^{-t}$; et $V = \sin t$ alors $V' = \cos t$

En intégrant par parties, on obtient : $F(x) = [-e^{-t} \sin t]_0^x + \int_0^x e^t \cos t \, dt$. Après une nouvelle intégration, en choisissant $U' = e^{-t}$ alors $U = -e^{-t}$; et $V = \cos t$ alors $V' = -\sin t$, on obtient :

$$F(x) = [-e^{-t} \sin t]_0^x + [-e^{-t} \cos t]_0^x - \underbrace{\int_0^x e^t \cos t \, dt}_{=F(x)}$$

$$\Leftrightarrow 2F(x) = [-e^{-t} \sin t]_0^x + [-e^{-t} \cos t]_0^x \Leftrightarrow F(x) = \frac{1}{2}[-e^{-t}(\cos t + \sin t)]_0^x$$

En appliquant le théorème fondamental de l'intégration, on obtient :

$$F(x) = \frac{1}{2}[1 - e^{-x}(\cos x + \sin x)]$$

<u>Aller plus loin</u> :

$$F(x) = \frac{1}{2}[-e^{-t}(\cos t + \sin t)]_0^x$$

Appliquons la simplification $acosx + bsinx = \sqrt{a^2 + b^2}[\cos(x - \theta)]$ $avec$ θ :

$$\begin{cases} cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[-\sqrt{2}e^{-t} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^x$$

En appliquant le théorème fondamental du calcul intégral, on obtient :

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{2}e^{-x} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] \; ou \; F(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{2}e^{-x} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Puisque $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x - \frac{\pi}{4}\right)$

D'où :

$$F(x) = \frac{1}{2}[1 - e^{-x}(\cos x + \sin x)] \; ou \; F(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{2}e^{-x} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] \; ou \; F(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{2}e^{-x} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

<u>Autre approche : (Hors programme mais intéressante)</u>

$F(x) = \int_0^x e^{-t} \sin t \, dt$ soit $G(x) = \int_0^x e^{-t} \cos t \, dt$. Calculons $Z = G(x) + iF(x)$

$$Z = G(x) + iF(x) = \int_0^x e^{-t} \times e^{it}dt = \int_0^x e^{(i-1)t}dt = \left[\frac{1}{-1+i}e^{(i-1)t}\right]_0^x$$
$$= -\frac{1}{2}\underbrace{(1+i)}_{=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}\left[e^{(i-1)t}\right]_0^x$$

En appliquant le théorème fondamental du calcul intégral, on obtient :

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\left(e^{(i-1)x} - 1\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{i\pi}{4}} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} \times e^{-x}$$

Or $F(x) = Im(Z) = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{4}}_{=\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-x}[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)] = \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{2}\,e^{-x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

Finalement,

$$F(x) = \frac{1}{2}[1 - \sqrt{2}e^{-x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)]$$

2.

$$S_n = B_0 + B_1 + B_2 + \cdots. + B_n \quad avec\ B_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)dt$$
$$\Leftrightarrow S_n = \int_0^{\cancel{\pi}} f(t)dt + \int_{\cancel{\pi}}^{\cancel{2\pi}} f(t)dt + \int_{\cancel{2\pi}}^{\cancel{3\pi}} f(t)dt \cancel{+} \cdots \ldots \cancel{+} \int_{\cancel{n\pi}}^{(n+1)\pi} f(t)dt$$

La simplification ci-dessus a été possible par la relation de Chasles

$$S_n = \int_0^{(n+1)\pi} f(t)dt \Rightarrow S_n = F[(n+1)\pi]$$

Comme :

$$F(x) = \frac{1}{2}[1 - \sqrt{2}e^{-x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)] \Rightarrow S_n = F[(n+1)\pi]$$
$$= \frac{1}{2}[1 - \sqrt{2}e^{-(n+1)\pi}\underbrace{\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{4} + \pi\right)}_{=-\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right)}]$$

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{2}e^{-(n+1)\pi}\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$ou\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \frac{1}{2}\left[1 + e^{-(n+1)\pi}(\cos n\pi + \sin n\pi)\right]$$

Calcul de la limite :

$$\begin{cases}|\cos n\pi| \leq 1 \\ |\sin n\pi| \leq 1\end{cases} \Rightarrow |\cos n\pi| + |\sin n\pi| \leq 2$$

En appliquant l'inégalité triangulaire des valeurs absolues, on a :

$\Longrightarrow |\cos n\pi + \sin n\pi| \leq |\cos n\pi| + |\sin n\pi| \leq 2 \Leftrightarrow |\cos n\pi + \sin n\pi| \leq 2$

Puisque $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $e^{-(n+1)\pi} > 0$ on peut écrire :

$$\left|e^{-(n+1)\pi}(\cos n\pi + \sin n\pi)\right| \leq 2e^{-(n+1)\pi}$$

Par suite,

$$\lim_{n\to+\infty} 2e^{-(n+1)\pi} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left|e^{-(n+1)\pi}(\cos n\pi + \sin n\pi)\right| = 0$$

D'après le théorème des comparaisons des limites, on déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$$

3.

$$B_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t}\sin t\, dt$$

a.

Si k est pair, alors k peut s'écrire sous la forme $k = 2k'\ avec\ k' \in \mathbb{N}\ et\ \ \forall\, t \in [2k'\pi; (2k' + 1)\pi]$

C'est-à-dire que t une mesure du 1[er] et 2[e] cadran, on a :

$$\sin t \geq 0 \Longrightarrow B_{2k'} = \int_{2k'\pi}^{(2k'+1)\pi} e^{-t}\sin t\, dt \geq 0\ donc\ B_k \geq 0$$

Si k est impair, alors k peut s'écrire sous la forme $k = 2k' + 1\ avec\ k' \in \mathbb{N}\ et\ \ \forall\, t \in [(2k' + 1)\pi; (2k' + 2)\pi]$

C'est-à-dire que t une mesure du 3[e] et 4[e] cadran, on a :

$$\sin t \leq 0 \Longrightarrow B_{(2k'+1)} = \int_{2k'\pi}^{(2k'+1)\pi} e^{-t}\sin t\, dt \leq 0\ donc\ B_k \leq 0$$

b.

$$B_0 = S_0 = \frac{1}{2}(1 + \cancel{\sqrt{2}}e^{-(0+1)\pi}\underbrace{\sin\left(0 + \frac{\pi}{4}\right)}_{=\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}} = \frac{1}{2}(1 + e^{-\pi})$$

$$B_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t}\sin t\, dt \Leftrightarrow$$

$$B_k = \frac{1}{2}\left[-\sqrt{2}e^{-t}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right]_{k\pi}^{(k+1)\pi}$$

En appliquant le théorème fondamental du calcul intégral, on obtient :

$$B_k = \frac{1}{2}\left[-\sqrt{2}e^{-(k+1)\pi}\underbrace{\cos\left(k\pi+\pi-\frac{\pi}{4}\right)}_{-\cos\left(k\pi-\frac{\pi}{4}\right)}\right]+\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}e^{-k\pi}\cos\left(k\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)}_{=B_0}\left[\sqrt{2}e^{-k\pi}\cos\left(k\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= B_0\cancel{\sqrt{2}}e^{-k\pi}\left(\underbrace{\cos k\pi\cos\frac{\pi}{4}}_{=\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-1)^k}+\underbrace{\sin k\pi\sin\frac{\pi}{4}}_{=0}\right)$$

$$= (-1)^k B_0 e^{-k\pi}$$

D'où

$$B_k = (-1)^k B_0 e^{-k\pi}$$

c.

<u>Méthode 1</u> :

$$T_n = |B_0|+|B_1|+\cdots+|B_n| = B_0 + e^{-\pi}B_0 + e^{-2\pi}B_0+\cdots\ldots+e^{-n\pi}B_0$$

$$T_n = B_0(1+e^{-\pi}+e^{-2\pi}+\cdots.+e^{-n\pi}) = B_0[(e^{-\pi})^0+(e^{-\pi})^1+(e^{-\pi})^2+\cdots..+(e^{-\pi})^n]$$

On reconnait une progression géométrique de $n+1$ termes et de raison $r = e^{-\pi}$. Ainsi, on a :

$$T_n = B_0\times\frac{1-\left(e^{-(n+1)\pi}\right)}{1-e^{-\pi}}$$

<u>Méthode 2</u> :

$$T_n = |B_0|+|B_1|+\cdots+|B_n| \Leftrightarrow T_n = \sum_{k=0}^{n}|B_k| = \sum_{k=0}^{n}\left|(-1)^k B_0 e^{-k\pi}\right|$$

$$= B_0\sum_{k=0}^{n}e^{-k\pi}\ car\ \forall\ k\in\mathbb{N},\qquad \left|(-1)^k\right| = 1$$

$$T_n = B_0\times\frac{1-\left(e^{-(n+1)\pi}\right)}{1-e^{-\pi}}$$

<u>Calcul de la limite</u> :

$$\left(\lim_{n\to+\infty}e^{-(n+1)\pi} = 0\ \ car\ \left|e^{-(n+1)\pi}\right| < 1\right)$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty}T_n = \frac{B_0}{1-e^{-\pi}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}\right)$$

d.

$$S=\frac{1}{2}\Longrightarrow\frac{1}{S}=2\ \ et\ T=\frac{B_0}{1-e^{-\pi}}\Longrightarrow\frac{1}{T}=\frac{1-e^{-\pi}}{B_0}$$
$$\frac{1}{S}+\frac{1}{T}=\frac{1+e^{-\pi}+1-e^{-\pi}}{B_0}$$

$$=\frac{2}{B_0}$$

D'où :

$$\frac{1}{S}+\frac{1}{T}=\frac{2}{B_0}$$

PROBLEME :

Partie A

1.

$$(E_a): y''-2ay'+a^2y=0$$

L'équation caractéristique de (E_a) est : $r^2-2ar+a^2=0\Leftrightarrow(r-a)^2=0\Rightarrow r_0=a$

Les fonctions solutions de (E_a) sont les fonctions :

$$f_{a,A,B}(x)=(Ax+B)e^{ax}\ avec\ (A,B)\in\mathbb{R}^2\ et\ a\in\mathbb{R}^*$$

2. D'après l'énoncé on a les relations suivantes : $f(0)=1\ \ et\ f'(0)=1+a$

Les fonctions $f_{a,A,B}$ sont dérivables dans $\mathbb{R}$ comme étant le produit deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x et pour tout paramètre réel A, B, a avec $a\neq 0$, leurs expressions sont de la forme :

$$f'_{a,A,B}(x)=e^{ax}[A(1+ax)+aB]$$

Par suite, on a le système ci-après :

$$\begin{cases}f(0)=1\\f'(0)=1+a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=1\\A+aB=1+a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=1\\A=1\end{cases}$$

Partie B

1. Calculons

$$f_{a+1}(x)=f_a(x)\Leftrightarrow(x+1)e^{(a+1)x}-(x+1)e^{ax}=0\Leftrightarrow(x+1)(e^x-1)e^{ax}=0$$
$$\Leftrightarrow(x+1)(e^x-1)=0\ \ car\ \ e^{ax}>0\Leftrightarrow x=-1\ ou\ x=0$$

Ainsi les points $A\big(-1,f_a(-1)\big)\ et\ B\big(0,f_a(0)\big)$ soit $A(-1,0)\ \ et\ B\ (0,1)$

2.

- Limites aux bornes

$$\lim_{x\to-\infty}f_a(x)=\begin{cases}-\infty & si\ a<0\\0, & si\ a>0\end{cases}\quad;\quad\lim_{x\to+\infty}f_a(x)=\begin{cases}0, & si\ a<0\\+\infty, & si\ a>0\end{cases}$$

- **Dérivée :**

La fonctions f_a est dérivable dans $\mathbb{R}$ comme étant le produit deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x et pour tout paramètre réel no nul a, l'expression de f' s'écrit :

$$f'_a(x) = e^{ax}[a(x+1)+1]$$

- **Signe de la dérivée :**

$$f'_a(x) = e^{ax}[a(x+1)+1]$$

Posons : $f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow e^{ax}[a(x+1)+1] = 0 \Leftrightarrow [a(x+1)+1] = 0 \ (car\ e^{ax} > 0)$**. Par suite,**

$$f'_a(x) = 0 \Rightarrow x = -\left(1+\frac{1}{a}\right)$$

<u>Raisonnons par disjonction des cas</u> :

1^er cas : $a > 0$

$$\begin{cases} \forall\, x \in \left[-\left(1+\frac{1}{a}\right); +\infty\right[, & f'_a(x) \geq 0 \quad donc \quad f \nearrow \\ \forall\, x \in \left]-\infty; -\left(1+\frac{1}{a}\right)\right], & f'_a(x) \leq 0 \quad donc \quad f \searrow \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\left(1+\frac{1}{a}\right)$		$+\infty$
$f'_a(x)$		$-$	0	$+$	
$f'_a(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{a}e^{-(1+a)}$	$\nearrow$	$+\infty$

2^e cas : $a < 0$

$$\begin{cases} \forall\, x \in \left[-\left(1+\frac{1}{a}\right); +\infty\right[, & f'_a(x) \leq 0 \quad donc \quad f \searrow \\ \forall\, x \in \left]-\infty; -\left(1+\frac{1}{a}\right)\right], & f'_a(x) \geq 0 \quad donc \quad f \nearrow \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\left(1+\frac{1}{a}\right)$		$+\infty$
$f'_a(x)$		$+$	0	$-$	
$f'_a(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{a}e^{-(1+a)}$	$\searrow$	0

3.

Construction des courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_{-1})$

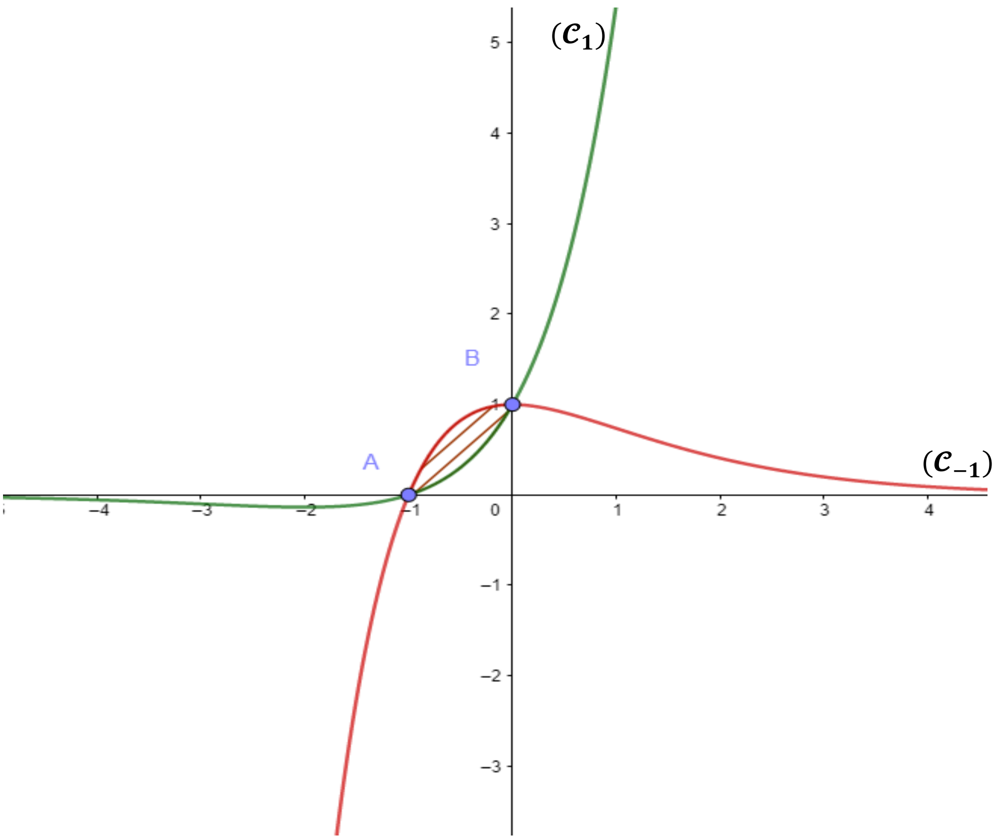
$f_1(x) = (x+1)e^x$

$f_{-1}(x) = (x+1)e^{-x}$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'_1(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	0	↘	$-e^{-2}$	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_{-1}(x)$		$+$	0	$-$	
$f_{-1}(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0

Voir graphique ci-dessous



Calcul d'aire :

$$A = \int_{-1}^{0} [f_1(x) - f_{-1}(x)]dx \Leftrightarrow A = \int_{-1}^{0} (x+1)(e^x - e^{-x})dx$$

Si l'on choisit $U' = e^x - e^{-x}$ alors $U = e^x + e^{-x}$

$$V = x + 1 \text{ alors } V' = 1$$

$$A = (x+1)(e^x + e^{-x})\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}(e^x - e^{-x})dx \Leftrightarrow A = (x+1)\,(e^x + e^{-x})\Big|_{-1}^{0} - (e^x + e^{-x})\Big|_{-1}^{0}$$

$$A = \left(2 + \frac{1}{e} - e\right)u.a \Leftrightarrow A = \left(2 + \frac{1}{e} - e\right)\ cm^2\ (car\ unité\ graphique = 1\ cm)$$

CORRIGE BAC E 2019

Exercice 1

1. D'après l'énoncé on a les relations suivantes :

$$OA = 1 \,; OB = \sqrt{2}\,; \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\,; KB = \frac{1}{2}BC\,;\ \left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]\,;\ \begin{cases} S(O) = B \\ S(A) = I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IB = kOA \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{BI}}\right) = \theta[2\pi] \end{cases}$$

- __Rapport__ :

  $IB = kOA \Leftrightarrow \frac{1}{2}OB = kOA \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}\times\frac{OB}{OA} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{2}$

  D'où :

$$k = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- __Angle__ :

$$\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{BI}}\right)[2\pi]$$

Transformons cette écriture en utilisant les propriétés des angles orientés et la relation $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{BI}}\right)[2\pi] &= \left(\widehat{\overrightarrow{OA};-\overrightarrow{IB}}\right)[2\pi] \\
&= \left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{IB}}\right) + \pi\ [2\pi] \\
&= \left(\widehat{\overrightarrow{OA};\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}}\right) + \pi\ [2\pi] \\
&= \left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right) + \pi[2\pi] \\
&= -\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}}\right) + \pi\ [2\pi] \\
&= -\frac{\pi}{2} + \pi\ [2\pi] \\
&= \frac{\pi}{2}[2\pi]
\end{aligned}$$

D'où :

$$\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{BI}}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Finalement :

$$S_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{2};\Omega\right)}$$

2.

$$\begin{cases} S(B) = C \\ S(I) = K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} CK = \frac{\sqrt{2}}{2}BI & (1) \\ \left(\widehat{\overrightarrow{BI};\overrightarrow{CK}}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi] & (2) \end{cases}$$

Vérification de la relations (1)

D'après l'énoncé on a les relations suivantes : $BC = OA = 1$; $\overrightarrow{KC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$$\frac{CK}{BI} = \frac{\frac{1}{2} \times BC}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times OA}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

D'où

$$CK = \frac{\sqrt{2}}{2}BI$$

Vérification de la relations (2)

$$\left(\widehat{\overrightarrow{BI};\overrightarrow{CK}}\right)[2\pi] = \left(\overrightarrow{BI};-\overrightarrow{KC}\right)[2\pi]$$

$$= \left(\widehat{\overrightarrow{BI};\overrightarrow{KC}}\right) + \pi[2\pi]$$

$$= \left(\overrightarrow{BI};\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) + \pi[2\pi]$$

$$= -\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BI}\right) + \pi[2\pi]$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \pi$$

$$= \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{BI};\overrightarrow{CK}}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Comme (1) et (2) ont été vérifié. Nous affirmons que $\begin{cases} S(B) = C \\ S(I) = K \end{cases}$

3.

a.

$$f = S_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\,;\,\Omega\right)} \circ S_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\,;\,\Omega\right)} = S_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\,;\,\Omega\right)} = S_{\left(\Omega\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\pi\right)} = h_{\left(\Omega\,;\,-\frac{1}{2}\right)}$$

Ainsi

$$f = h_{\left(\Omega\,;\,-\frac{1}{2}\right)}$$

b.

$$\begin{cases} f(O) = S \circ \underbrace{S(O)}_{=B} = S(B) = C \\ f(A) = S \circ \underbrace{S(A)}_{=I} = S(I) = K \end{cases}$$

- **<u>Construction de Ω</u>**

$$\begin{cases} f(O) = C \\ f(A) = K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega C = -\dfrac{1}{2}\Omega O \\ \Omega K = -\dfrac{1}{2}\Omega A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega \in (CO) \\ \Omega \in (KC) \end{cases} \Leftrightarrow \Omega = (CO) \cap (KA)$$

4.

a. L'écriture complexe d'une similitude d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et de rapport $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est :

$$Z' = ke^{i\theta}Z + b \Leftrightarrow Z' = \frac{\sqrt{2}}{2}\underbrace{e^{\frac{i\pi}{2}}}_{=i}Z + b \Leftrightarrow Z' = i\frac{\sqrt{2}}{2}Z + b$$

$$or\ S(O) = B \Leftrightarrow Z_B = i\frac{\sqrt{2}}{2}\underbrace{Z_O}_{=0} + b \Leftrightarrow Z_B = i\frac{\sqrt{2}}{2}(0) + b \Leftrightarrow Z_B = b = \sqrt{2}$$

$$Z' = i\frac{\sqrt{2}}{2}Z + \sqrt{2}$$

D'où l'écriture complexe de S est donnée par :

$$Z' = i\frac{\sqrt{2}}{2}(Z - 2i)$$

b.

$$S(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow Z_\Omega = \frac{i\sqrt{2}}{2}Z_\Omega + \sqrt{2} \Leftrightarrow Z_\Omega = \frac{2}{3}\left(\sqrt{2} + i\right)$$

$$Z_\Omega = \frac{2}{3}\left(\sqrt{2} + i\right)$$

<u>Exercice 2</u>

1. Il y a au total 4 dés dont 3 sont verts et un seul est rouge. Les dés sont indiscernables au toucher : on est en situation d'équiprobabilité. Par suite,

A « le dé tiré est rouge » il y a une chance sur 4 de tirer un dé rouge.

Par conséquent,

$$P(A)=\frac{1}{4}$$

B « « le dé tiré est vert » il y a trois chances sur 4 de tirer un dé vert.

Par conséquent,

$$P(B)=\frac{3}{4}$$

2.

a.

- <u>Montrons</u> $P_A(C)=1$

<u>Dé rouge</u>

Au dé rouge tous les chiffres sont pairs. Par contre l'on a $2, 4, 6$ qui se répètent deux fois.

$$P(2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\ ;\ P(4)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\ ;\ P(6)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

A la 1ere lancée l'on a : $l_1=P(2)+P(4)+P(6)=3\times\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1\Rightarrow l_1=1$

Au 2e lancée l'on a : $l_2=P(2)+P(4)+P(6)=3\times\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1\Rightarrow l_2=1$

Au 3e lancée l'on a : $l_3=P(2)+P(4)+P(6)=3\times\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1\Rightarrow l_3=1$

Par suite :

$$P_A(C)=l_1\times l_2\times l_3=1^3=1\blacksquare$$

<u>Remarque</u> : Le résultat est immédiat. En effet l'évènement obtenir un chiffre pair lorsqu'on tire un dé rouge est toujours réalisé car le dé rouge n'est constitué que des chiffres pairs. Ainsi c'est un évènement certain. Par suite, on aura à chaque lancer un chiffre pair d'où le résultat $P_A(C)=1$.

- <u>Montrons</u> $P_B(C)={}^{1}/_{8}$

<u>Dé Vert</u>

$$P(2)=\frac{1}{6}\ ;\ P(4)=\frac{1}{6}\ ;\ P(6)=\frac{1}{6}$$

A la 1ère lancée l'on a : $l_1=P(2)+P(4)+P(6)=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow l_1=\frac{1}{2}$

Au 2e lancée l'on a : $l_2=P(2)+P(4)+P(6)=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow l_2=\frac{1}{2}$

Au 3e lancée l'on a : $l_3 = P(2) + P(4) + P(6) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \Longrightarrow l_3 = \frac{1}{2}$

Par suite :

$$P_B(C) = l_1 \times l_2 \times l_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \blacksquare$$

b.

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A \cap C) + P(B \cap C) \\ &= P_A(C) \times P(A) + P_B(C) \times P(B) \\ &= \left(1 \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} \times \frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{11}{32} \end{aligned}$$

D'où :

$$P(C) = \frac{11}{32}$$

3.

a.

Lors du lancer du dé le nombre de fois que l'on peut obtenir un chiffre pair sont : (00) fois, (01) fois, (02) fois et (03) fois. Par suite, la variable x peut prendre les valeurs suivantes : $x = \{0, 1, 2, 3\}$

- **<u>Calculons</u> :** $P(X = 0)$

L'évènement « $X = 0$ » est l'évènement « obtenir aucun chiffre pair" équivalent à l'évènement « obtenir de suite 3 chiffres impairs ». On remarquera que le résultat ne tient pas compte de l'ordre.

<u>Au niveau du dé rouge</u> :

Cet évènement est incertain car le dé rouge n'est constitué que des chiffres pairs. Par conséquent :

$$P_A(X = 0) = 0$$

<u>Au niveau du dé Vert</u> :

A la 1ère lancée l'on a : $l_1 = P(1) + P(3) + P(5) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \Longrightarrow l_1 = \frac{1}{2}$

Au 2e lancé l'on a : $l_2 = P(1) + P(3) + P(5) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \Longrightarrow l_2 = \frac{1}{2}$

Au 3e lancé l'on a : $l_3 = P(1) + P(3) + P(5) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \Longrightarrow l_3 = \frac{1}{2}$

$$P_B(X = 0) = l_1 \times l_2 \times l_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \Longrightarrow P_B(X = 0) = \frac{1}{8}$$

Finalement, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(X=0)=P_A(X=0)\times P(A)+P_B(X=0)\times P(B)=\left(0\times\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}\times\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{32}$$

$$P(X=0)=\frac{3}{32}$$

- **<u>Calculons</u> :** $P(X=1)$

L'évènement « $X=1$ » est l'évènement « obtenir un chiffre pair et 2 chiffres impairs ». On remarquera que cet évènement tient compte de l'ordre. Ainsi nous introduirons les anagrammes du mot (P,I,I) que nous noterons A. **(N.B : P mis pour pair et I pour Impair)**

<u>Au niveau du dé rouge</u> :

A la 1ère lancée l'on a : $l_1=P(2)+P(4)+P(6)=3\times\frac{1}{3}=1\Rightarrow l_1=1$

Au 2e lancé l'on a : $l_2=P(1)+P(3)+P(5)=0\Rightarrow l_2=0$

Au 3e lancé l'on a : $l_3=P(1)+P(3)+P(5)=0\Rightarrow l_3=0$

$$P_A(X=1)=l_1\times l_2\times l_3\times A=0$$

<u>Au niveau du dé Vert</u> :

A la 1ère lancée l'on a : $l_1=P(2)+P(4)+P(6)=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow l_1=\frac{1}{2}$

Au 2e lancé l'on a : $l_2=P(1)+P(3)+P(5)=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow l_2=\frac{1}{2}$

Au 3e lancé l'on a : $l_3=P(1)+P(3)+P(5)=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow l_3=\frac{1}{2}$

$$P_B(X=0)=l_1\times l_2\times l_3\times A=\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{3!}{2!\times 1!}=3\times\frac{1}{8}\Rightarrow P_B(X=0)=\frac{3}{8}$$

Finalement, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(X=1)=P_A(X=1)\times P(A)+P_B(X=1)\times P(B)=\left(0\times\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{8}\times\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{32}$$

$$P(X=1)=\frac{9}{32}$$

- **<u>Calculons</u> :** $P(X=2)$

L'évènement « $X=2$ » est l'évènement « obtenir deux (02) chiffres pairs et un (01) chiffre impair ». On remarquera que cet évènement tient compte de l'ordre. Ainsi nous introduirons les anagrammes de (PPI) que nous noterons A.

<u>Au niveau du dé rouge</u> :

A la 1ère lancée l'on a : $l_1 = P(2) + P(4) + P(6) = 3 \times \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow l_1 = 1$

Au 2e lancé l'on a : $l_2 = P(1) + P(3) + P(5) = 0 \Rightarrow l_2 = 0$

Au 3e lancé l'on a : $l_3 = P(1) + P(3) + P(5) = 0 \Rightarrow l_3 = 0$

$$P_A(X = 1) = l_1 \times l_2 \times l_3 \times A = 0$$

<u>Au niveau du dé Vert</u> :

A la 1ère lancée l'on a : $l_1 = P(2) + P(4) + P(6) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow l_1 = \frac{1}{2}$

Au 2e lancé l'on a : $l_2 = P(2) + P(4) + P(6) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow l_2 = \frac{1}{2}$

Au 3e lancé l'on a : $l_3 = P(1) + P(3) + P(5) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow l_3 = \frac{1}{2}$

$$P_B(X = 0) = l_1 \times l_2 \times l_3 \times A = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{3!}{2! \times 1!} = 3 \times \frac{1}{8} \Rightarrow P_B(X = 0) = \frac{3}{8}$$

Finalement, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(X = 2) = P_A(X = 2) \times P(A) + P_B(X = 2) \times P(B) = \left(0 \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{8} \times \frac{3}{4}\right) = \frac{9}{32}$$

$$P(X = 2) = \frac{9}{32}$$

- **<u>Calculons</u> :** $P(X = 3)$

L'évènement « $X = 3$ » est l'évènement « Obtenir trois (03) fois de suite un chiffre pair ». Ce qui n'est autre que l'évènement C. Par conséquent :

$$P(X = 3) = P(C) = \frac{11}{32}$$

Ainsi la loi de probabilité est donnée par :

x_i	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
$P(X = x)$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{11}{32}$

b.

- **<u>Esperance Mathématique</u> :** $E(X)$

$$E(X) = \left(0 \times \frac{3}{32}\right) + \left(1 \times \frac{9}{32}\right) + \left(2 \times \frac{9}{32}\right) + \left(3 \times \frac{1}{32}\right) = \frac{30}{32} \Leftrightarrow E(X) = \frac{30}{32}$$

D'où

$$E(X) = \frac{30}{32}$$

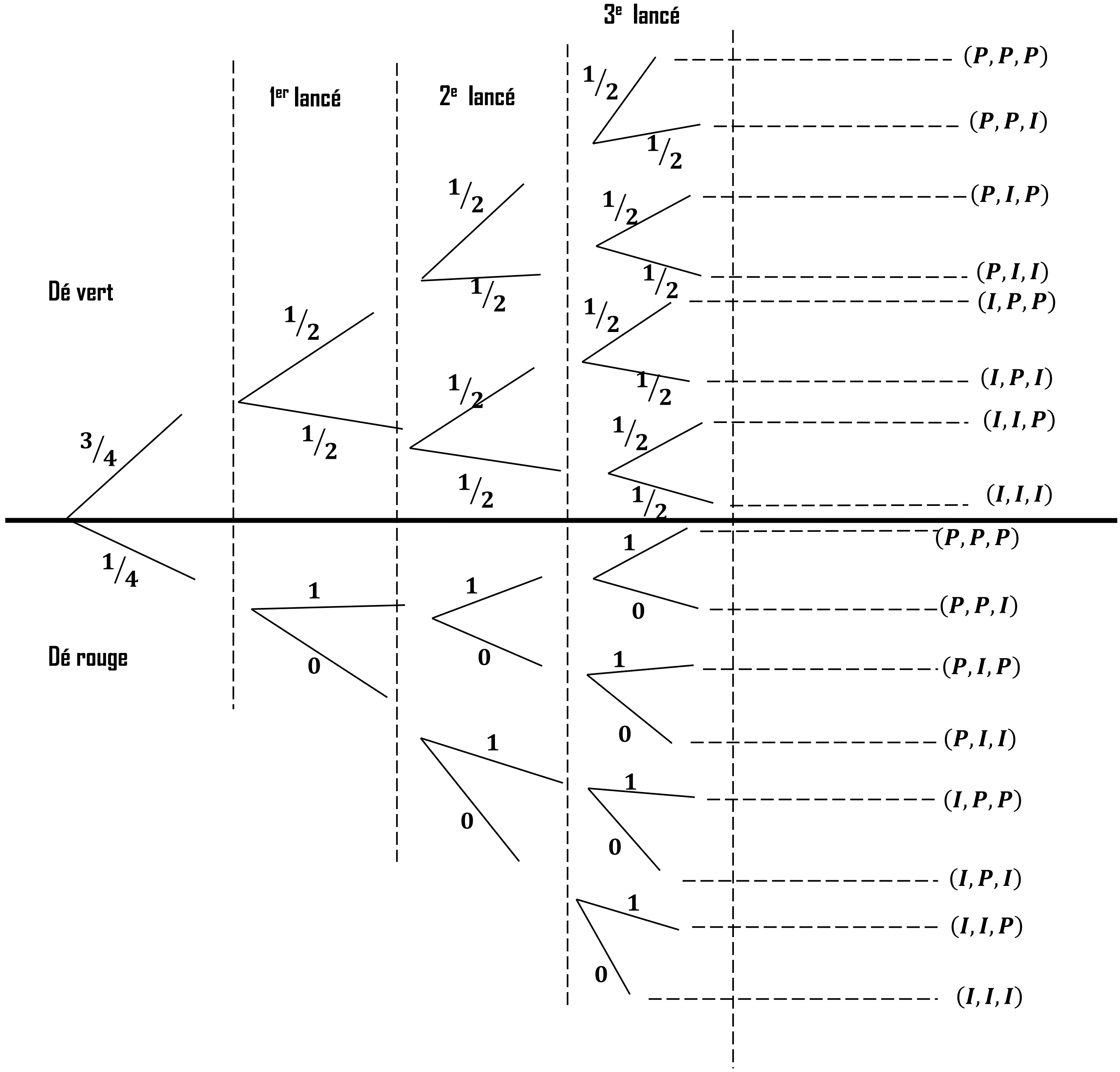
- **Variance :** $V(X)$

$$V(X) = \left(0 \times \frac{3}{32}\right) + \left(1 \times \frac{9}{32}\right) + \left(4 \times \frac{9}{32}\right) + \left(9 \times \frac{1}{32}\right) - \left(\frac{30}{32}\right)^2 = \frac{448}{1024} - \frac{900}{1024} = \frac{113}{256}$$

D'où

$$V(X) = \frac{113}{256}$$

Autre approche pour répondre à la question 3a :



L'évènement « $X = 0$ » est l'évènement « obtenir aucun chiffre pair » équivalent à l'évènement « obtenir de suite 3 chiffres impairs ». La probabilité de cet évènement, d'après notre arbre de probabilité, correspond à la somme des produits des branches aboutissant à (I, I, I). Par suite, on a :

$$P(X = 0) = \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} \times 0 \times 0 \times 0\right) = \frac{3}{32}$$

L'évènement « $X = 1$ » est l'évènement « obtenir un chiffre pair et 2 chiffres impairs ». La probabilité de cet évènement, d'après notre arbre de probabilité, correspond à la somme des produits des branches aboutissant à (I, I, P), (I, P, I) et (P, I, I). Par suite, on a :

$$P(X=1)=\left[\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$+\left[\left(\frac{1}{4}\times 0\times 0\times 1\right)+\left(\frac{1}{4}\times 0\times 1\times 0\right)+\left(\frac{1}{4}\times 1\times 0\times 0\right)\right]$$
$$=\frac{9}{32}$$

L'évènement « $X=2$ » est l'évènement « obtenir deux (02) chiffres pairs et un (01) chiffre impair ». La probabilité de cet évènement, d'après notre arbre de probabilité, correspond à la somme des produits des branches aboutissant à (P,P,I), (P,I,P) et (I,P,P). Par suite, on a :

$$P(X=2)=\left[\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$+\left[\left(\frac{1}{4}\times 1\times 1\times 0\right)+\left(\frac{1}{4}\times 1\times 0\times 1\right)+\left(\frac{1}{4}\times 1\times 1\times 0\right)\right]$$
$$=\frac{9}{32}$$

L'évènement « $X=3$ » est l'évènement « Obtenir trois (03) fois de suite un chiffre pair ». La probabilité de cet évènement, d'après notre arbre de probabilité, correspond à la somme des produits des branches aboutissant à (P,P,P). Par suite, on a :

$$P(X=3)=\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}\times 1\times 1\times 1\right)$$
$$=\frac{11}{32}$$

<u>Problème</u> :

1.

<u>Dérivée</u> :

La fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Et pour tout réel x positive, f'_α est définie par :

$$f'_\alpha(x)=x^{\alpha-1}e^{1-x}(\alpha-x)$$

<u>Signe de la dérivée</u> : Soit à résoudre l'équation

$$f'_\alpha(x)=0$$
$$x^{\alpha-1}e^{1-x}(\alpha-x)=0$$

Pour tout réel strictement positive $x^{\alpha-1}e^{1-x}>0$, il vient :

$$(\alpha-x)=0$$
$$x=\alpha$$

<u>Raisonnons par disjonction des cas</u> :

<u>1er cas</u> $\alpha<0$:

f'_α n'a aucune racine, car $x=\alpha<0$ alors que f'_α est définie pour des $x\in\mathbb{R}_+$

Par suite, on a :

$$\forall\, x > 0, \qquad f'_{\alpha<0}(x) < 0 \;\; donc \;\; f_\alpha \searrow$$

<u>2^e cas</u> $\alpha > 0$:

$$f'_\alpha \text{ admet pour racine } x = \alpha$$

Par suite, on a :

$$\forall\, x > 0, \qquad \begin{cases} f'_{\alpha>0}(x) \leq 0 \;,\;\; si\; 0 < x \leq \alpha \quad donc \quad f_\alpha \searrow \\ f'_{\alpha>0}(x) \geq 0 \;,\;\; si\; x \geq \alpha \qquad donc \quad f_\alpha \nearrow \end{cases}$$

2. **<u>Limites aux bornes</u> :**

$$\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{1-x}$$
$$= 0 \quad \text{(Par prépondérance de la fonction } exp \text{ sur la fonction puissance)}$$

Ainsi la courbe $(\mathcal{C}_\alpha)$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.

3. **Soient $(\mathcal{C}_\alpha)$ et $(\mathcal{C}_{\alpha+1})$ les courbes représentatives des fonctions f_α et $f_{\alpha+1}$. Ces deux courbes ont un point fixe si et seulement s'il existe un réel x qui vérifie l'équation :**

$$f_{\alpha+1}(x) - f_\alpha(x) = 0$$
$$x^{\alpha+1}e^{1-x} - x^\alpha e^{1-x} = 0$$
$$x^\alpha e^{1-x}(x-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \; (\; car\; \forall\, x > 0, \quad x^\alpha e^{1-x} > 0)$$
$$x = 1$$

Ainsi les courbes $(\mathcal{C}_\alpha)$ passent par un point fixe $A\big(1; f_\alpha(1)\big)$ ou $A(1;1)$ car $f_\alpha(1) = 1$

4.

CORRIGE BAC E 2018

Exercice 1 :

1.

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_A - x \\ y_A - y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_B - x \\ y_B - y \end{pmatrix} = 0 \ avec \begin{cases} x_A = -3 \\ y_A = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x_B = 3 \\ y_B = 0 \end{cases}$$

$$(x_A - x)(x_B - x) + (y_A - y)(y_B - y) = 0 \Leftrightarrow (-3 - x)(3 - x) + (-y)(-y) = 0$$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$$

L'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M du plan tel que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de centre $O(0\,;0)$ et rayon $R = 3$

2.

a.

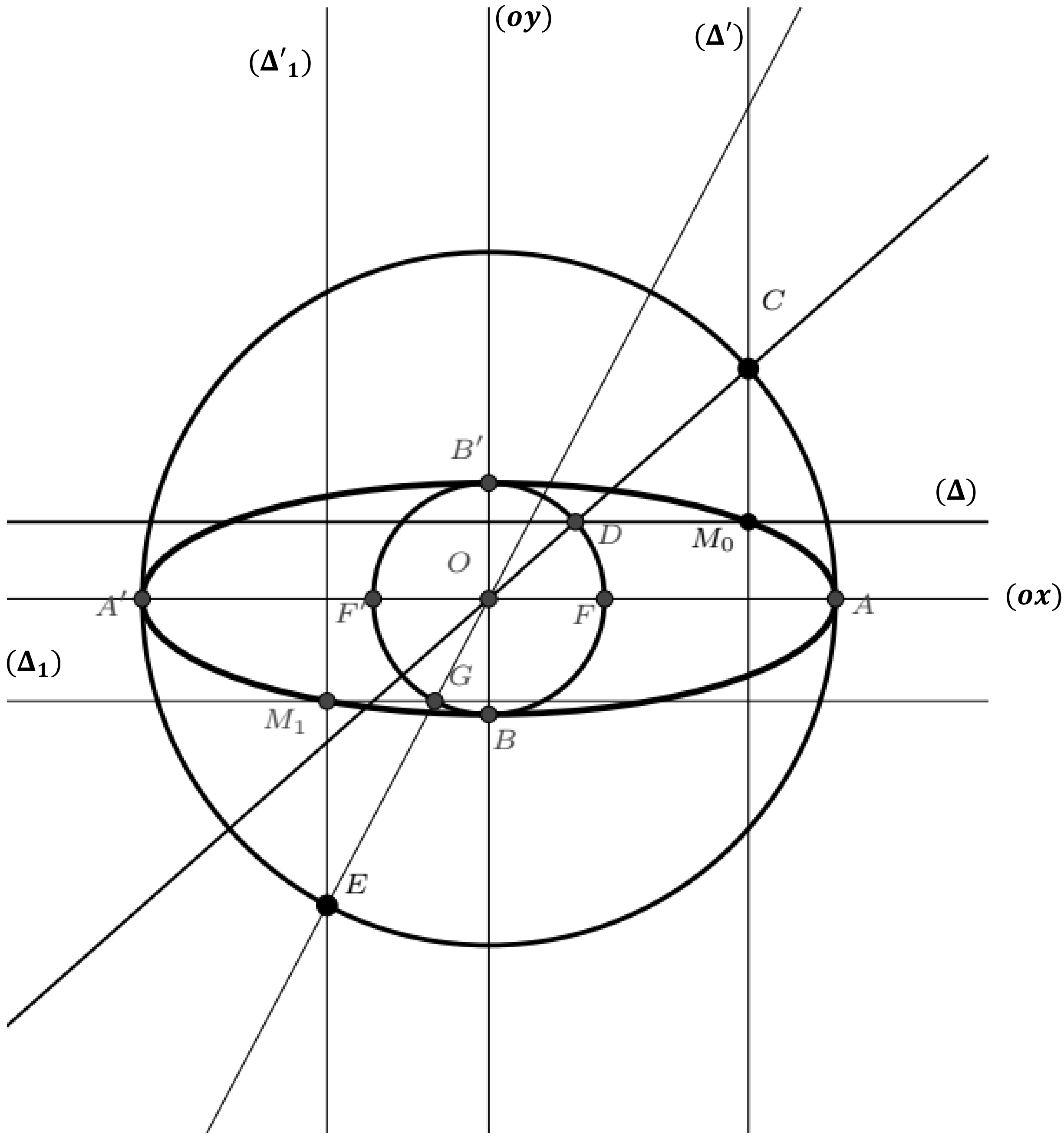
L'image d'un cercle par une affinité orthogonale est une ellipse. Par conséquent $(\mathcal{C}')$ est une ellipse dont le centre est le point O. il en découle que $(\mathcal{C})$ est le cercle principal de l'ellipse $(\mathcal{C}')$. Comme f a pour rapport :

$$k = \frac{1}{3} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow a = 3 \ et \ b = 1$$

Le cercle secondaire $(\mathcal{C}_1)$ de $(\mathcal{C}')$ a pour centre O et pour rayon $r = b = 1$. Les points d'intersection F' et F de $(\mathcal{C}_2)$ et l'axe des abscisses sont les foyers de $(\mathcal{C}')$.

<u>Construction par la méthode du paramétrage</u> :

Après avoir tracé au préalable les cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}_1)$ les points O, A et B. Plaçons un point C sur $(\mathcal{C})$ et traçons la droite (OC) puis nommons D le point d'intersection entre (OC) et $(\mathcal{C}_1)$. Menons en D , (Δ) la droite parallèle à (ox). Menons en C, (Δ') la droite perpendiculaire à (Δ). Le point d'intersection entre (Δ) et (Δ') est un point de $(\mathcal{C}')$ que nous nommons M_0. Reprenons le même algorithme on place les points M_n de $(\mathcal{C}')$.



b. Etant donné f une affinité de base l'axe $(O\vec{i})$, de direction $(O\vec{j})$ et de rapport $\frac{1}{3}$ soit $f\left((O\vec{i}),(O\vec{j}),\frac{1}{3}\right)$

$$f:\begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases} \Leftrightarrow f:\begin{cases} x' = x \\ y' = \dfrac{1}{3}y \end{cases}$$

- **<u>Expression analytique réciproque de f</u> :**

Toute affinité est une application bijective. La réciproque de $f\left((O\vec{i}),(O\vec{j}),\frac{1}{3}\right)$ noté f^{-1} est l'affinité de même base, de même direction et de rapport inverse soit $f^{-1}((O\vec{i}),(O\vec{j}),3)$. Pour tout point M et M' son

image associée par f tel que $f(M) = M'\ et\ f^{-1}(M') = M$, les formules analytiques de f^{-1} dans le repère $\mathcal{R}\ (O, \vec{i}, \vec{j}\ )$ sont :

$$f: \begin{cases} x = x' \\ \frac{1}{3}y = y' \end{cases} \Leftrightarrow f^{-1}: \begin{cases} x = x' \\ y = 3y' \end{cases}$$

c.

$$x^2 + y^2 = 9 \Longrightarrow (x')^2 + (3y')^2 = 9 \Longrightarrow x'^2 + 9y'^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{9} + y'^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x'^2}{(3)^2} + \frac{y'^2}{(1)^2} = 1$$

Nature	Eléments Caractéristiques	
Ellipse	Centre	Le point $O\ (0,0)$
	Les Sommets	$A(3,0)$; $A'(-3,0)$; $B(0,1)$; $B(0,-1)$
	Axe focal	Comme $a = 3 > b = 1$ et que le centre est le point O. Alors l'axe focal est l'axe des abscisses (Ox)
	Excentricité	$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
	Les Foyers	$F'\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}; 0\right)$; $F''\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}; 0\right)$
	Les Directrices	$x = \frac{a^2}{c} = \frac{27}{4}\sqrt{2}\quad et\quad x' = -\frac{27}{4}\sqrt{2}$

__Exercice 2__ :

L'équation $Z^2 + (\sqrt{3} + i)Z + 1 = 0$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$ a pour discriminant :

$$\Delta = \left(\sqrt{3} + i\right)^2 - 4(1)(1) = -2 + 2i\sqrt{3}$$

Cette équation possède deux solutions à savoir $Z'\ et\ Z''$, telle que :

$$\begin{cases} Z' = \dfrac{-\sqrt{3} - i + \sqrt{\Delta}}{2} \\ Z'' = \dfrac{-\sqrt{3} - i - \sqrt{\Delta}}{2} \end{cases}$$

Trouvons les racines carrées de Δ . Posons : $\Delta = \delta^2 = x + iy\ (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$; on a :
D'une part,

$$\delta^2 = (x + iy)^2 + 2ixy\ \ et\ \ |\delta^2| = x^2 + y^2$$

D'autre part,

$$\delta^2 = -2 + i\sqrt{3} \ \ et \ |\delta^2| = 2\left|-1 + i\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{4} = 4$$

.

Donc $\delta^2 = -2 + i\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 - y^2 = -2 \\ 2xy = 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 3 \\ xy > 0 \end{cases}$ **. Le dernier système a deux solutions** $\left(1; \sqrt{3}\right)$ et $\left(-1; -\sqrt{3}\right)$**. Donc** $\sqrt{\Delta} = \delta_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ou $\sqrt{\Delta} = \delta_2 = -1 - i\sqrt{3}$ **.**

Par suite,

$$\begin{cases} Z' = \dfrac{-\sqrt{3} - i + 1 + i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\left(1 - \sqrt{3}\right) + i(-1 + \sqrt{3})}{2} \\ Z'' = \dfrac{-\sqrt{3} - i - 1 - i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\left(-1 - \sqrt{3}\right) - i(1 + \sqrt{3})}{2} \end{cases}$$

Ecriture trigonométrique de $Z' et\ Z''$ **:**

On sait que $Z' \in \mathbb{C}^*$**, son module est :**

$$|Z'| = \left|\frac{\left(1 - \sqrt{3}\right) - i\left(1 + \sqrt{3}\right)}{2}\right| = \frac{1}{2} \times \sqrt{2\left(1 - \sqrt{3}\right)^2} = \frac{\left|1 - \sqrt{3}\right|}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

Factorisons l'écriture algébrique de Z' **par** $|Z'|$ **:**

$$Z' = \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) + i\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)$$
$$= \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right) \times \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + i\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Trouvons un argument $\theta \in [-\pi; \pi]$ **de** Z' **:**

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right) \times \left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right)} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right) \times \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$$

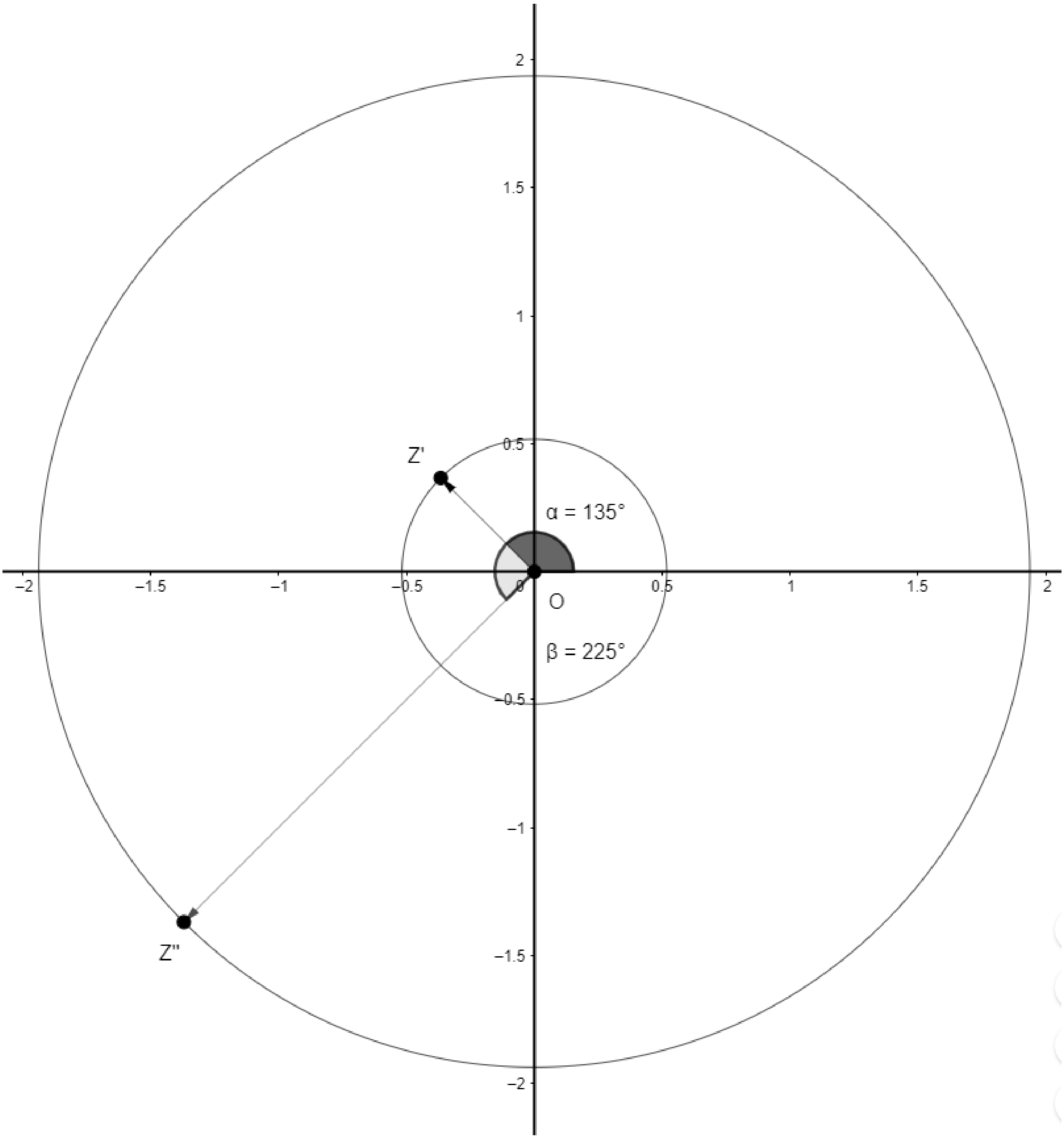
Comme $\theta \in [-\pi; \pi]$**. On en déduit que** $\theta = \frac{3\pi}{4}$**.**

Finalement, l'écriture trigonométrique de Z' **s'écrit :**

$$Z' = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

Le nombre complexe $Z'' \in \mathbb{C}^*$. En procédant de manière analogue comme pour Z', l'écriture trigonométrique de Z'' s'écrit :

$$Z'' = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4}\right)$$



Problème :

1.

a. Soit $x \in [0; +\infty[$. Considérons deux fonctions u et v définies par :

$$u(x) = e^x + e^{-x} \ \ et\ v(x) = lnx$$

Ainsi,

$$f(x) = v \circ u(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = \lim_{x \to +\infty} (e^x + e^{-x}) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} v(x) = \lim_{x \to +\infty} lnx = +\infty$$

Donc, par composition de limite, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

b. Soit $x \in [0; +\infty[$. Transformons la fonction U définie par :

$$\begin{aligned} u(x) &= e^x + e^{-x} \\ &= e^x + e^{x-2x} \\ &= e^x(1 + e^{-2x}) \end{aligned}$$

Comme définie dans la question 1, on a :

$$f(x) = v \circ u(x) \Leftrightarrow f(x) = v[u(x)]$$

Il vient,

$$\forall\ x \in [0; +\infty[, \qquad f(x) = ln[e^x(1 + e^{-2x})]$$

En utilisant les propriétés $ln(ab) = lna + lnb$ et $lne^c = c$, on obtient :

$$\forall\ x \in [0; +\infty[, \qquad f(x) = x + ln(1 + e^{-2x})$$

c. La courbe $(\mathcal{C})$ admet comme asymptote la droite $(\mathcal{D})$ si et seulement si :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - y = 0$$

Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - y$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) - y &= \lim_{x \to +\infty} x + ln(1 + e^{-2x}) - x \\ &= \lim_{x \to +\infty} ln(1 + e^{-2x}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme voulu on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - y = 0$. Ainsi la courbe $(\mathcal{C})$ admet comme asymptote la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x$

d. La position relative de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$ revient à étudier le signe de la quantité $f(x) - y$.

Soit $x \in [0\ ; +\infty[$. Résolvons l'équation $f(x) - y = 0$

$$\Leftrightarrow ln(1 + e^{-2x}) = 0$$

$$1 + e^{-2x} = 1$$

$$e^{-2x} = 0$$

La dernière égalité est absurde car exp n'est jamais nul pour tout réel x donc en particulier pour tout $x \in [0\,;+\infty[$.

2. Etudions le sens de variation de F sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ comme la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[0\,;+\infty[$. Pour tout réel positif x , sa fonction dérivée est :

$$f'(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

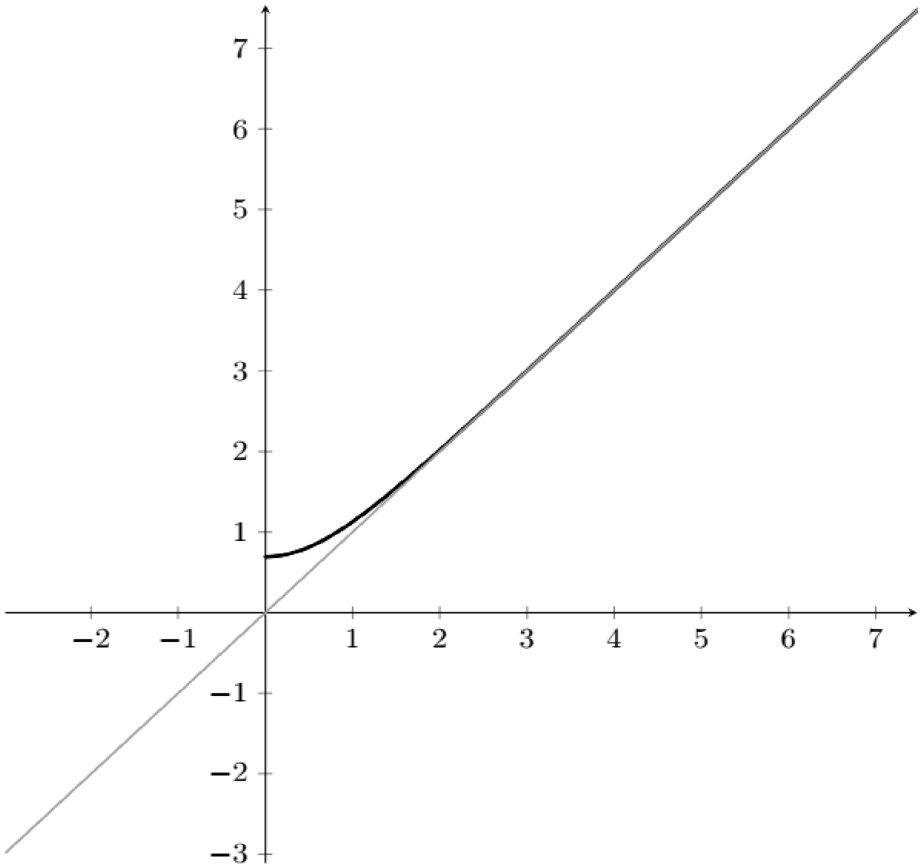
<u>Signe de f'</u> :

Pour tout réel positif x, $1 + e^{-2x} > 0$. Par conséquent, f' a le même signe que son numérateur $x \mapsto 1 - e^{-2x}$. Soit $x \geq 0$ ou encore $-2x \leq 0$ par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}_+$: $e^{-2x} \leq e^0 = 1$ ou encore $-e^{-2x} \geq -1$. En additionnant les deux membres par 1, on obtient : $1 - e^{-2x} \geq 0$. Par suite, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Nous consignons ces résultats dans le suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$ln2$ $\nearrow$	$+\infty$

Voir graphique



Partie B :

1. Soit x un réel strictement positif. On sait que d'après la question 1 de la partie A,
$ln(1+e^{-2x}) = f(x) - y$ soit $F(x) = \int_0^x [f(t) - y(t)]dt$

Comme $0 \leq x$ et la quantité $f(x) - y$ est positive sur $[0; +\infty[$. Ainsi, F exprime, dans l'unité d'aire choisie, l'aire formée entre la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite $(\mathcal{D})$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2.
Soit x un réel positif. $F'(x) = ln(1+e^{-2x})$. En outre la fonction $x \longmapsto ln(1+e^{-2x}) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$ comme établit dans la question 1 de la partie A.

Par suite,

Pour tout réel x positif la fonction F est croissante sur $[0; +\infty[$

3. Soit a un réel strictement positif. Soit $t \in [0; +\infty[$. Soit $x \in [0; +\infty[$.
On sait que $\frac{a}{1+a} \leq ln(1+a) \leq a$. En posant $a = e^{-2t} > 0$, il vient :

$$\frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} \leq ln(1+e^{-2t}) \leq e^{-2t}$$

Par intégration sur $[0; x]$, on a :

$$\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t}dt$$

Soit

$$\left(\frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\right)\Big|_0^x \leq F(x) \leq \left(-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)\Big|_0^x$$

En appliquant le théorème fondamental de l'intégration, on obtient comme voulu :

$$\frac{1}{2}ln2 - \frac{1}{2}ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$$

4. On sait que :

$$\frac{1}{2}ln2 - \frac{1}{2}ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}ln2 - \frac{1}{2}ln(1+e^{-2x})\right]}_{=\frac{1}{2}ln2} \leq I \leq \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}\right)}_{=\frac{1}{2}}$$

Comme voulu, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = I \quad tel\ que\ \frac{1}{2}ln2 \leq I \leq \frac{1}{2}$$

5.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit h la fonction définie pour tout réel positif t tel que $h(t) = ln(1+e^{-2t})$.
h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout réel t positif on a :

$$h'(t) = \frac{-e^{-2t}}{1+e^{-2t}} < 0$$

Par conséquent, la fonction h est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Si $t \in [n; n+1]$ on a nécessairement :

$$0 \leq h(n+1) \leq h(t) \leq h(n) \Leftrightarrow 0 \leq ln(1+e^{-2t}) \leq ln(1+e^{-2n})$$

En appliquant l'inégalité de la moyenne sur $[n; n+1]$, on obtient :

$$0 \leq U_n \leq ln(1+e^{-2n})$$

b. D'après ce qui précède, on a :

$$0 \leq U_n \leq ln(1+e^{-2n})$$

Par passage à la limite, on a :

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} U_n \leq \underbrace{\lim_{n\to+\infty} ln(1+e^{-2n})}_{=0}$$

D'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$$

6.

a.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que :

$$S_n = \int_0^{\cancel{1}} ln(1+e^{-2t})dt + \int_{\cancel{1}}^{\cancel{2}} ln(1+e^{-2t})dt + \int_{\cancel{2}}^{\cancel{3}} ln(1+e^{-2t})dt + \cancel{\cdots ..} + \int_{\cancel{n}}^{n+1} ln(1+e^{-2t})dt$$

D'après la relation de Chasles on a :

$$S_n = \int_0^{n+1} ln(1+e^{-2t})dt$$

Soit :

$$S_n = F(n+1)$$

On sait que pour n entier naturel,

$$S_n = F(n+1)$$

Il vient,

$$\lim_{n\to+\infty} F(n+1) = I \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = I$$

Comme $I \in \left[\frac{1}{2}ln2\,;\frac{1}{2}\right]$ la série (S_n) est convergente. Elle converge vers I.

CORRIGE BAC E 2017

EXERCICE 1 :

1. Etant donné f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini analytiquement dans la base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\}$ par :

$$f : \begin{cases} x' = -x + 3y - z \\ y' = 2x - y + 4z \\ z' = 3x + 2y - 3z \\ t' = x + 4y + 2z + 4t \end{cases} \Leftrightarrow$$

La matrice associée à l'expression analytique de son est :

$$M_f = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2. On sait que la matrice de l'application f est :

$$M_f = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \longleftarrow \text{Coordonnée selon } \overrightarrow{e_1} \\ \longleftarrow \text{Coordonnée selon } \overrightarrow{e_2} \\ \longleftarrow \text{Coordonnée selon } \overrightarrow{e_3} \\ \longleftarrow \text{Coordonnée selon } \overrightarrow{e_4} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) & f(\overrightarrow{e_3}) & f(\overrightarrow{e_4}) \end{array} & \end{array}$$

Par identification, on a $f(\overrightarrow{e_1})$ le vecteur colonne $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui en vecteur ligne, dans la base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}; \overrightarrow{e_4}\}$ s'écrit :

$$f(\overrightarrow{e_1}) = -\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}$$

En procédant de manière analogue, on trouve :

$$f(\overrightarrow{e_2}) = 3\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3} + 4\overrightarrow{e_4}$$

Puis,

$$f(\overrightarrow{e_3}) = -\overrightarrow{e_1} + 4\overrightarrow{e_2} - 3\overrightarrow{e_3} + 2\overrightarrow{e_4}$$

Enfin,

$$f(\overrightarrow{e_4}) = 4\overrightarrow{e_4}$$

3. Calculons le déterminant de M_f

$$det(M_f) = a_{1,4} \times C_{1,4} + a_{24} \times C_{2,4} + a_{3,4} \times C_{3,4} + a_{4,4} \times C_{4,4}$$

Où $a_{i,j}$ désigne les coefficient, $C_{i,j} = (-1)^{i+j} \times M_{i,j}$ désigne le cofacteur de la matrice M_f , $M_{i,j}$ son mineur, et i, j des entiers naturels.

<u>Cherchons d'abord les coefficient $a_{i,j}$</u>

$$M_f = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow M_f = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}$$

Par identification, on a :

$$a_{1,4} = 0\ ;\ a_{2,4} = 0\ ;\ a_{3,4} = 0\ ;\ a_{4,4} = 4$$

D'où :

$$\begin{aligned} det(M_f) &= 0 \times C_{1,4} + 0 \times C_{2,4} + 0 \times C_{3,4} + 4 \times C_{4,4} \\ &= 4 \times C_{4,4} \end{aligned}$$

D'où,

$$det(M_f) = 4 \times C_{4,4}$$

<u>Calculons le cofacteur $C_{4,4}$</u>

$$C_{i,j} = (-1)^{i+j} \times M_{i,j} \Leftrightarrow C_{4,4} = (-1)^{4+4} \times M_{4,4}$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^{4+4} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 1 \times \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= 52 \end{aligned}$$

Finalement :

$$det(M_f) = 4 \times 52 = 208$$

4.

On a montré dans la question $\mathbf{1}$ que l'application linéaire f est un endomorphisme bijectif soit un automorphisme de $\mathbb{R}^4$. Un automorphisme est un isomorphisme.

Par conséquent, f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2 :

1.

Soit x un réel. D'après la propriété de linéarisation on peut écrire :

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\cos x \cos\frac{\pi}{2}}_{=0} - \underbrace{\sin x \sin\frac{\pi}{2}}_{=\sin x} = -\sin x$$

En effet, $\cos\frac{\pi}{2} = 0 \ et \sin\frac{\pi}{2} = 1$,

D'où :

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

2. Soit x un réel. f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) = e^x \sin x$$

- Dérivée de f :

f est dérivable dans $\mathbb{R}$ comme le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Par suite, pour tout réel x sa fonction dérivée f' est donnée par l'expression :

$$f'(x) = e^x(\cos x + \sin x) \ \ ou\, f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[e^x \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

- Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $f'(x) = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(\cos x + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x + \sin x = 0 \ \ car \ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad on\ a \ \ e^x > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\sin x$$

$$= \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = -x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

D'où

$$S = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi\right\} \ avec\ k \in \mathbb{Z}$$

3.

a. Soit n un entier naturel. Le réel U_n est une solution de l'équation (1) si et seulement si :

$$f'(U_n) = 0 \Leftrightarrow e^{U_n}\left[\cos\left(n\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right] = 0$$

Soit,

$$\left[\cos\left(n\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right] = 0 \;\; car\; \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad e^{U_n} > 0$$

<u>Raisonnons par disjonction des cas</u> :

<u>Cas où n est pair</u> : $n = 2p$ où p est entier naturel

$$\cos\left(2p\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2p\pi - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} + \underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}_{=-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$0 = 0$$

<u>Cas où n est impair</u> : $n = 2p + 1$ où p est entier naturel

$$\cos\left(2p\pi + \pi - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2p\pi + \pi - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\underbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}_{=-\frac{1}{\sqrt{2}}} + \underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$0 = 0$$

En somme,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad f'(U_n) = 0$$

b.

Soit n un entier naturel.

- **La suite (U_n) est une suite arithmétique si et seulement si :**

$$U_{n+1} - U_n = r \quad (avec\;\; r \in \mathbb{R})$$

Soit,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \pi(n+1) - \frac{\pi}{4} \\ &= \pi n + \pi - \frac{\pi}{4} \\ &= \underbrace{\pi n - \frac{\pi}{4}}_{=U_n} + \pi \\ &= U_n + \pi \end{aligned}$$

Comme $U_{n+1} - U_n = \pi$ alors la suite (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = \pi$ et de premier terme $U_0 = -\frac{\pi}{4}$

La suite (U_n) est une suite arithmétique si et seulement si :

$$U_{n+1} - U_n = r \quad (avec\ r \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= e^{U_{n+1}} \sin(U_{n+1}) \\ &= e^{U_n+\pi} \underbrace{\sin(U_n + \pi)}_{=-\sin U_n} \\ &= -e^{\pi} \times \underbrace{e^{U_n} \sin U_n}_{f(U_n)=V_n} \\ &= -e^{\pi} \times V_n \end{aligned}$$

Comme $V_{n+1} = -e^{\pi} \times V_n$ alors la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q = -e^{\pi}$ et de premier terme $V_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}$

c. Soit n un entier naturel. On sait que :

$$\begin{aligned} S_n &= V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n \\ &= V_0 + qV_0 + q^2V_0 + q^3V_0 + \cdots + q^nV_0 \\ &= V_0 \times (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n) \\ &= V_0 \times \frac{1-(q)^{n+1}}{1-q} \end{aligned}$$

En remplaçant $q = -e^{\pi}$ et $V_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}$ par leurs valeurs respectives, on a :

$$S_n = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}} \times \left[\frac{1-(-e^{\pi})^{n+1}}{1+e^{\pi}}\right]$$

Problème :

1.

$$\begin{cases} R^{-1}(A) = A' \\ R(C) = C' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R(A') = A \\ R(C) = C' \end{cases} \quad on\ a \begin{cases} A'C = AC' \\ AC' \neq 0 \end{cases}$$

D'où il existe une rotation R de centre Ω et d'angle $\theta = (\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{AC'})$

2.

$$\begin{cases} R(A') = A \\ R(C) = C' \end{cases} \Longrightarrow Med[A'A] \cap Med[CC'] = \{\Omega\} = \{B'\}$$

Le centre Ω de R n'est autre que le point d'intersection des médiatrices $[A'A]$ et $[CC']$ qui n'est autre que le point B'

3. Supposons que $S(M) = M'et\ M \neq B$ et montrons alors que BMM' est rectangle.

Soient M et M' deux points du plan $(\mathcal{P})$. On sait que $S(M) = M'et\ M \neq B$. En outre S est la similitude de centre B d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$ et de rapport $k = \frac{1}{2}$. Il vient,

$$\begin{cases} S(M) = M' \\ S(B) = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BM' = \dfrac{1}{2}BM & (1) \\ \theta = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}\right) = \dfrac{\pi}{3}[2\pi] & (2) \end{cases}$$

Dans le triangle BMM' on a : $BM' = BM \times \cos\theta$

D'où, pour tout point M du plan $(\mathcal{P})$, le triangle BMM' tel que $S(M) = M'\ et\ M \neq B$ est rectangle en M'

<u>Démonstration par l'absurde de la nécessité que tout point M du plan soit distinct du centre de S qui est B.</u>

Pour que le triangle BMM' existe il est nécessaire que M soit distinct de B ceci découle de la définition de S.

En effet si $M = B$ alors,

$$\begin{cases} BM' = \dfrac{1}{2}BB \\ \theta = \left(\overrightarrow{BB}, \overrightarrow{BM'}\right) = \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BM' = 0 \\ \theta = \left(\overrightarrow{BB}, \overrightarrow{BM'}\right) = \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = M' \\ \theta = \left(\overrightarrow{BB}, \overrightarrow{BB}\right) = \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

$\left(\overrightarrow{BB}, \overrightarrow{BB}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ce qui est absurde. En conséquence, le triplet des points B, M, M' ne forme pas un triangle il est réduit au singleton B car $M = M' = B$. En conclusion pour que BMM' soit un triangle, il est nécessaire que tout point M du plan soit distinct du centre B de M.

4. Soit n un entier naturel. La suite (d_n) définie par $d_n = BA_n$ est une suite géométrique de premier terme $d_0 = AB$ et de raison $q = \frac{1}{2}$. Sa définition explicite est donnée par la relation :

$$d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times AB$$

5. Soit n un entier naturel. On sait que :

$$S_n = BA_0 + BA_1 + \cdots + BA_n$$

Il vient,

$$= AB + \frac{1}{2} \times AB + \cdots \ldots \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \times AB$$
$$= AB \times \left[1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$= AB \times \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= AB \times \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}\right)$$

D'où :

$$S_n = 2 \times AB \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

- **Limite de la série** (S_n)

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 2 \times AB \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{n\to+\infty} 2 \times AB\right)}_{=2\times AB} \times \underbrace{\left(\lim_{n\to+\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]\right)}_{=1}$$

$$= 2 \times AB$$

Finalement,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 2 \times AB$$

6.

$$T_n = BA_0^2 + BA_1^2 + \cdots \ldots + BA_n^2$$

$$= BA^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 BA^2 + \cdots \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n BA^2$$

$$T_n = BA^2\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots \ldots \ldots \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]$$

$$\frac{1}{2} \times T_n = BA^2\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots \ldots \ldots . + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right]$$

$$T_n + \frac{1}{2}T_n = BA^2\left[1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots \ldots \ldots \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right] (*)$$

$$\frac{3}{2}T_n = BA^2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}}{1-\frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow T_n = \frac{2}{3} \times BA^2 \times \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow T_n = BA^2 \times \frac{4}{3} \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}\right]$$

$$= BA^2 \times \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \left[4\underbrace{BA^2}_{=BA_0^2} - \underbrace{BA^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}_{=BA_n^2}\right]$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(4 \times BA_0^2 - BA_0^2\right) \blacksquare$$

D'où :

$$T_n = \frac{1}{3} \times \left(4 \times BA_0^2 - BA_n^2\right) \blacksquare$$

(*) On reconnait une somme géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et dont le nombre de termes est $k = 2n + 2$

7. A_1 et C' sont des milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BE]$ d'après le théorème des milieux :

$$(C'A_1) \parallel (AE) \text{ et } C'A_1 = \frac{1}{2}AE$$

<u>D'après Thalès dans le triangle BAE</u> :

$$\frac{BC'}{BA} = \frac{BA_1}{BE} = \frac{C'A_1}{AE}$$

D'après l'énoncé et/ou les questions précédentes :

$$BC' = \frac{1}{2}AB \ ; \quad BA_1 = \frac{1}{2}BE \quad ; \quad C'A_1 = \frac{1}{2}AE$$

$$\frac{\frac{1}{2}BA}{BA} = \frac{\frac{1}{2}AE}{BE} = \frac{\frac{1}{2}AE}{AE} \Leftrightarrow AB = BE = AE$$

Par conséquent le triangle EAB est équilatéral.

8.

$$\begin{cases} S'(A) = A \\ S'(E) = B' \end{cases} \Rightarrow \frac{B'A}{AE} = \frac{\frac{1}{2}AB}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$S' = h_{\left(A,\frac{1}{2}\right)} \circ S_\Delta$$

Où la droite (Δ) est bissectrice intérieure de l'angle $(\widehat{EAB'})$. Il vient, $(\Delta) = (\mathrm{AB})$

Finalement,

$$S' = h_{\left(A,\frac{1}{2}\right)} \circ S_{(AB)} \ \text{ ou } \ S' = S_{(AB)} \circ h_{\left(A,\frac{1}{2}\right)}$$

9.

- **<u>Expression analytique de la similitude directe S</u>**

Dans le nouveau repère $(A', \vec{i}, \vec{j})$ les points B, A et C ont respectivement pour affixes :

$$Z_A = i\sqrt{3} \quad ; \quad Z_B = -1 \ ; \quad Z_C = 1$$

Soit Z un nombre complexe et Z' son image associée par S. S est la similitude de centre B et rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$. Ce qui se traduit par l'écriture complexe suivante :

$$Z' - Z_B = \frac{1}{2}e^{\frac{i\pi}{3}}(Z - Z_B) \Leftrightarrow Z' = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(Z - Z_B) + Z_B$$

$$\Leftrightarrow Z' = \left(\frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4}\right)Z - \frac{3}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4}$$

Posons $Z' = x' + iy' \quad et \quad Z = x + iy$, par suite, on a :

$$x' + iy' = \left(\frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4}\right)(x + iy) - \frac{3}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4}$$

En développant, puis en prenant le soin de regrouper les parties réelles et imaginaires, dans le membre de gauche, on obtient :

$$x' + iy' = \left(\frac{1}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{3}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

En identifiant membre à membre les parties réelles et imaginaires, nous obtenons :

$$(S) : \begin{cases} x' = \frac{1}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{3}{4} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

- **<u>Expression Analytique de la similitude indirecte S'</u>:**

$$S' = S_{(AB)} \circ h_{\left(A,\frac{1}{2}\right)}$$

<u>Déterminons l'expression analytique de $S_{(AB)}$</u>

Pour tout point $M(x, y)$ du plan rapporté au repère (A', i, j) on associe $M'(x', y')$ tel que :

$$S_{(AB)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ milieu\ \overline{MM'} \in (AB) \end{cases}$$

Dans ce même repère les points A et B ont pour coordonnées : $A(0, \sqrt{3})$; $B(-1, 0)$

Il vient, $(AB) : -\sqrt{3}x + y - \sqrt{3} = 0$; $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x' - x \\ y - y \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$; $milieu\ \overline{MM'}\begin{pmatrix} \frac{x'+x}{2} \\ \frac{y'+y}{2} \end{pmatrix}$

Par suite, on a : $\begin{cases} \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ milieu\ \overline{MM'} \in (AB) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} = 0 \\ -\sqrt{3}\left(\frac{x'+x}{2}\right) + \left(\frac{y'+y}{2}\right) - \sqrt{3} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-1)(x' - x) + (-\sqrt{3})(y' - y) = 0 \\ -2\sqrt{3}(x' + x) + (y' + y) - 2\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x' - \sqrt{3}y' = -x - \sqrt{3}y & (1) \\ -\sqrt{3}x' + y' = \sqrt{3}x - y + 2\sqrt{3} & (2) \end{cases}$$

$$(1) + \sqrt{3} \times (2) : x' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{3}{2}$$

$$-\sqrt{3} \times (1) + (2) : y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{(AB)}:\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y - \dfrac{3}{2} \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Expression analytique de h :

Homothétie de centre A et de rapport $k = \frac{1}{2}$ se traduit par l'écriture complexe suivante :

$$Z' - Z_A = \frac{1}{2}(Z - Z_A) \Leftrightarrow Z' = \frac{1}{2}Z + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Posons $Z' = x' + iy' \quad et \quad Z = x + iy$, par suite, on a :

$$x' + iy' = \frac{1}{2}(x + iy) + \frac{i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x' + iy' = \frac{1}{2}x + i\left(\frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow h_{\left(A,\frac{1}{2}\right)} : \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x \\ y' = \dfrac{1}{2}y + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$S_{(AB)} \circ h_{\left(A,\frac{1}{2}\right)}:\begin{cases} x'' = -\dfrac{1}{2}x' + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y' - \dfrac{3}{2} \\ y'' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x' + \dfrac{1}{2}y' + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}x\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1}{2}y + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - \dfrac{3}{2} \\ y'' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1}{2}x\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}y + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow S_{(AB)} \circ h_{\left(A,\frac{1}{2}\right)}: \begin{cases} x'' = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}y - \dfrac{3}{4} \\ y'' = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x + \dfrac{1}{4}y + \dfrac{3\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

PARTIE B :

1. La fonction f ne présente aucun problème de définition mathématique. Alors elle est définie dans $\mathbb{R}$.
2. La fonction f est continue si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = l$, $(l \in \mathbb{R})$

D'une part,

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} (x-1)^2 e^{1-x} = 0$$

D'autre part,

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} [1 - x + (x-1)\ln(x-1))]$$

Posons : $X = x - 1$ *et si x proche* 1^+, *X proche de* 0^+. **Il vient,**

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} [1 - x + (x-1)\ln(x-1))] =$$

$$= \lim_{X \to 0^+} (-X + XlnX)$$

$$= 0$$

Comme $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$ **, Alors** f **est une fonction continue en** $x_0 = 1$

La fonction f **est dérivable en** $x_0 = 1$ **si et seulement si :**

$$f'_g(1) = f'_d(1) = l \ (l \in \mathbb{R})$$

$$f'_g(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left[\frac{(x-1)^2 e^{1-x}}{(x-1)} \right]$$

Comme $x \neq 1$ **on peut prolonger** $f'_g(1)$ **par continuité et on obtient :**

$$f'_g(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} (x-1)e^{1-x}$$

$$= 0$$

Par conséquent, f **est dérivable à gauche de** $x_0 = 1$

$$f'_d(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{-x + (x-1)ln(x-1)}{x-1}$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to 1^+} \frac{-x}{x-1}}_{=-\infty} + \underbrace{\lim_{x \to 1^+} ln(x-1)}_{=-\infty}$$

$$= -\infty$$

La fonction f **n'est pas dérivable à droite de** $x_0 = 1$

<u>Conclusion</u> : la fonction f **n'est pas dérivable en** $x_0 = 1$**.**

3. **D'une part, pour tout réel** x **strictement supérieur à** 1**,**

$$f : x \mapsto 1 - x + (x-1)ln(x-1)$$

$x \mapsto (x-1)ln(x-1)$ **est dérivable comme étant le produit deux fonctions dérivable sur** $[1, +\infty[$ **.**
f **est dérivable comme étant la somme de deux fonctions dérivable sur** $[1, +\infty[$ **. Sa fonction dérivée est :**

$$f'(x) = ln(x-1), \quad si\ x > 1$$

Par suite, pour tout réel $x > 1$

$$\begin{cases} f'(x) \leq 0, & si\ x \geq 2 \\ f'(x) \geq 0, & si\ \ 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

D'autre part, pour tout réel x inferieur à 1,

$$f : x \mapsto (x-1)^2 e^{1-x}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $]-\infty, 1]$ comme étant le produit de deux fonctions dérivables sur $]-\infty, 1]$. Et, l'expression de sa fonction dérivée est donnée par :

$$\forall\ x \leq 1\ , \qquad f'(x) = (x-1)e^{1-x}[2-(x-1)]$$

Par suite,

Pour tout réel $x \leq 1$, $f'(x) \leq 0$

En outre,

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x-1)^2 e^{1-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)[-1 + ln(x-1)] = +\infty \end{cases}$$

Nous consignons les résultats obtenus dans le tableau ci-après :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$			-1	$\nearrow$	$+\infty$

4. **Voir graphique**
5. **Calculons l'aire (A)**

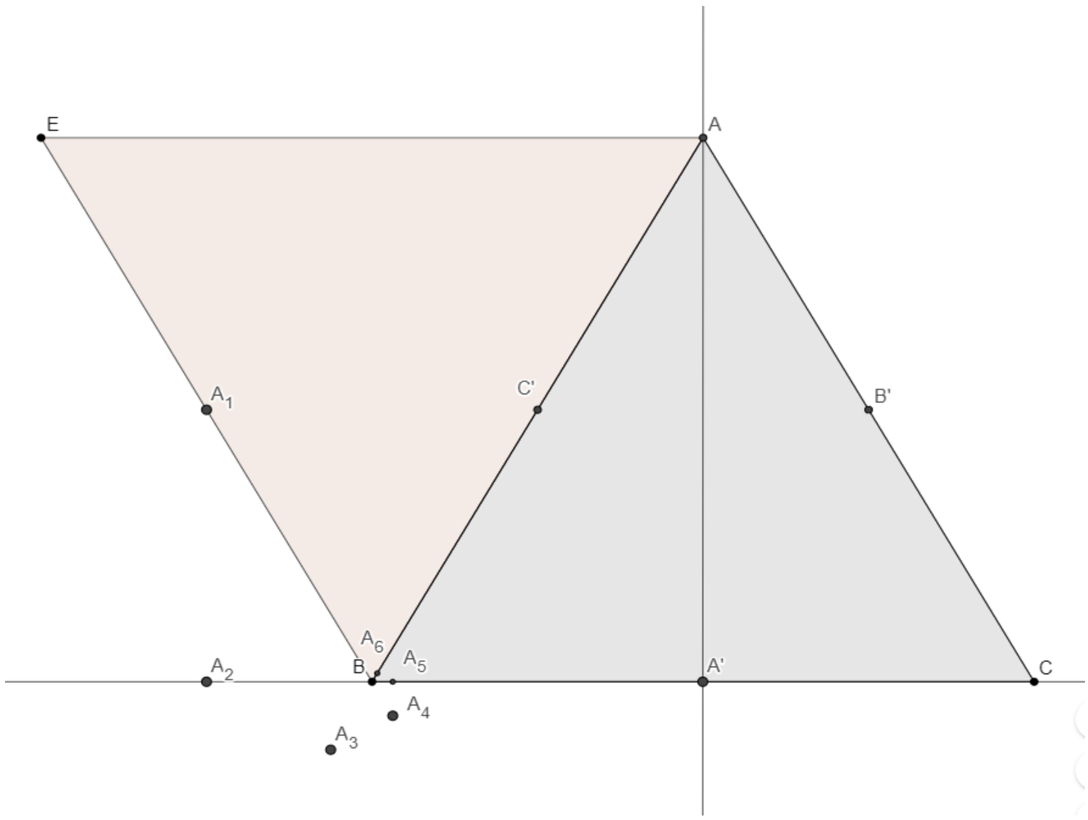
$$(A) = \int_{1-e}^{0} (x-1)^2 e^{1-x} dx$$

Effectuons une double intégration en choisissant : $U' = e^{1-x}$ alors $U = -e^{1-x}$ et $V = (x-1)^2$ il vient $V' = 2(x-1)$. Puis à nouveau en choisissant $W' = e^{1-x}$ alors $W = -e^{1-x}$ et $Z = x - 1$ il vient $Z' = 1$. Par double intégration par partie, on obtient :

$$= [-e^{1-x}(x-1)^2\ ]\Big|_{1-e}^{0} + 2[(1-x)(e^{1-x})]\Big|_{1-e}^{0} + 2\int_{1-e}^{0} e^{1-x} dx$$

$$= \underbrace{[-e^{1-x}(x-1)^2\ ]\Big|_{1-e}^{0}}_{=e^{2+e}-e} + \underbrace{2[(1-x)(e^{1-x})]\Big|_{1-e}^{0}}_{=2(e+e^{1+e})} - \underbrace{2(e^{1-x})\Big|_{1-e}^{0}}_{=2e^{e}-2e}$$

$$(A) = [e^e(e^2 - 2e + 2) - e\ ]u.a$$


E
A
C'
B'
A1
A6
A2
B
A5
A'
C
A4
A3

SOLUTION BAC E 2016

EXERCICE 1

1) L'expression analytique de l'endomorphisme φ associé à l'application f est :

$$\begin{cases} x' = \frac{5}{2}x + y \\ y' = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y \end{cases} \text{dont la matrice est : } M_\varphi = \begin{vmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

f est bijective si et seulement si la matrice M_φ est inversible. C'est-à-dire : $det\,(M_\varphi) \neq 0$

$$det\,(M_\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(\frac{5}{2} \times \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{3}{4} \times 1\right) = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} = 2 \neq 0$$

Comme la matrice M_φ est inversible alors l'application f est une bijection de (P) dans (P)

2) On sait que f est bijective. Alors elle admet une application réciproque f^{-1} de f tel que pour tout point M de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $M(x,y)$ on associe par f son image $M'(x',y')$ par la relation $f(M) = M'$ ce qui équivaut à $M' = f^{-1}(M)$.

$$\begin{cases} x' = \frac{5}{2}x + y + \frac{5}{2} \\ y' = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x' = 5x + 2y + 5 \\ 4y' = -3x + 2y - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x' - 5 = 5x + 2y & (L_1) \\ -4y' - 5 = 3x - 2y & (L_2) \end{cases}$$

$$(L_1) + (L_2) : 8x = 2x' - 4y' - 10 \Rightarrow x = \frac{1}{4}(x' - 2y' - 5)$$

$$\begin{cases} 2x' = 5x + 2y + 5 & (L'_1) \\ 4y' = -3x + 2y - 5 & (L'_2) \end{cases}$$

$$3 \times (L'_1) + 5 \times (L'_2) : \ 16y - 10 = 6x' + 20y' \Rightarrow y = \frac{1}{8}(3x' + 10y' + 5)$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}(x' - 2y' - 5) \\ y = \frac{1}{8}(3x' + 10y' + 5) \end{cases}$$

3) L'ensemble des points invariants de f

EXERCICE 2

1) Déterminons Z' et Z''

$$Z^2 - \frac{2}{\cos\varphi}Z + \frac{5}{\cos^2\varphi} = 4, avec\ \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$$

$$\Leftrightarrow Z^2 - \left(\frac{2}{\cos\varphi}\right)Z + \frac{5}{\cos^2\varphi} - 4 = 0, avec\ \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = \left(\frac{1}{\cos\varphi}\right)^2 - (1)\left(\frac{5}{\cos^2\varphi} - 4\right) = \frac{1}{\cos^2\varphi} - \frac{5}{\cos^2\varphi} + 4$$

$$= 4 - \frac{4}{\cos^2\varphi} = 4\left(1 - \frac{1}{\cos^2\varphi}\right) = 4\left(\frac{\cos^2\varphi - 1}{\cos^2\varphi}\right)$$

$$= \underbrace{-}_{=i^2} 4\left(\frac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)^* = 4i^2\left(\underbrace{\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}}_{=tan^2\varphi}\right) = 4i^2\tan^2\varphi$$

$$\Rightarrow \Delta' = 4i^2\tan^2\varphi \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{4i^2\tan^2\varphi} = 2i\tan\varphi$$

$$\begin{cases} Z' = \dfrac{1}{\cos\varphi} - 2i\tan\varphi \\ Z'' = \dfrac{1}{\cos\varphi} + 2i\tan\varphi \end{cases}$$

$$S = \left\{\left(Z' = \frac{1}{\cos\varphi} - 2i\tan\varphi\right);\ \left(\frac{1}{\cos\varphi} + 2i\tan\varphi\right)\right\}$$

(*) Commentaire : le théorème fondamental de la trigonométrie énonce que :

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \Rightarrow \sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$$

2) Montrons que M' et M'' les images respectives de Z' et Z'' décrivent une hyperbole.

$$Z'' = x + iy = \frac{1}{\cos\varphi} + 2i\tan\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos\varphi} \\ y = 2\tan\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos\varphi} & (1) \\ y = 2\left(\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) & (2) \end{cases}$$

En remplaçant (1) dans (2) nous aurons :

$$y = 2\left(\frac{1}{\cos\varphi}\right)\sin\varphi \Rightarrow y^2 = 4 \times x^2 \times \sin^2\varphi\ \ (3)$$

Or, $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$ Et d'après le (1)

$$x = \frac{1}{\cos\varphi} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{x} \Rightarrow \sin^2\varphi = 1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{x^2-1}{x^2}\ \ (4)$$

En remplaçant (4) dans (3) nous aurons :

$$y^2 = 4 \times x^2 \times \frac{x^2-1}{x^2} = 4(x^2-1) \Leftrightarrow y^2 = 4x^2 - 4 \Rightarrow y^2 - 4x^2 = -4$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$$

De même en procédant de façon analogue pour $Z' = \frac{1}{\cos\varphi} - 2i\tan\varphi$ on trouve :

$$-x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

AUTRE APPROCHE

Une hyperbole d'équation $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ admet pour représentations paramétriques

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos\varphi} + \alpha \\ y = b\ \tan\varphi + \beta \end{cases}$$

Et réciproquement, la représentation paramétrique (1)

$$Z'' = x + iy = \frac{1}{\cos\varphi} + 2i\tan\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos\varphi} & (1) \\ y = 2\tan\varphi \end{cases}$$

Par identification : $a = 1$; $\alpha = 0$; $b = 2$; $\beta = 0$; admet pour équation cartésienne :

$$\frac{(x-0)^2}{1^2} - \frac{(y-0)^2}{2^2} = 1 \Rightarrow x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$$

PROBLEME

PARTIE I

1)

$$(E) : y'' + 4y' + 4y = 0$$

Equation caractéristique associée à (E) :

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow \Delta' = 4 - 4 = 0 \Rightarrow r_0 = -\frac{b'}{a} = -2$$

D'où l'équation (E) a pour solution générale les fonctions :

$$h_{A,B}(x) = (Ax + B)e^{-r_0 x} = (Ax + B)e^{-2x}$$

$$h_{A,B}(x) = (Ax + B)e^{-2x}$$

2)

5. La fonction φ est solution de (E) si et seulement si :

$$\varphi(x) = ax + b \ ; \ \ \varphi'(x) = a \ ; \ \ \varphi''(x) = 0$$
$$\Rightarrow 0 + 4(a) + 4(ax + b) = -4x$$

$$\Rightarrow 4a + 4ax + 4b = -4x \Rightarrow 4ax + 4(a+b) = -4x$$

Par identification, on obtient :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4ax = -4x \\ 4(a+b) = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a = -4 \\ b = -a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Ainsi, $\varphi: x \longmapsto ax + b$ est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \varphi: x \longmapsto 1 - x$$

6. **f est solution de (F) , nous aurons :**

$$f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = -4x \quad (1)$$

Aussi, φ solution de (F) :

$$\varphi''(x) + 4\varphi'^{(x)} + 4\varphi(x) = -4x \quad (2)$$

En égalant les relations (1) et (2), nous obtenons :

$$f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = \varphi''(x) + 4\varphi'(x) + 4\varphi(x)$$

$$\Rightarrow f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) - \left[\varphi''(x) + 4\varphi'^{(x)} + 4\varphi(x)\right] = 0$$

$$\Rightarrow f''(x) - \varphi''(x) + 4f'(x) - 4\varphi'(x) + 4f(x) - 4\varphi(x) = 0$$

$$\Rightarrow (f - \varphi)''(x) + 4(f - \varphi)'(x) + 4(f - \varphi)(x) = 0$$

D'où f est solution de (F) si et seulement si $(f - \varphi)$ est solution de (E)

7. **Déduisons toutes les solutions de f**

$$h = f - \varphi \Rightarrow f = h + \varphi$$

D'après les questions précédentes : $\varphi: x \longmapsto 1 - x$ et $h_{A,B}: x \longmapsto (Ax + B)e^{-2x}$

$$f_{A,B}(x) = (Ax + B)e^{-2x} - x + 1$$

8. Donnons la solution f de (F) qui vérifie $f(0) = 2$ et $f'(0) = -2$

$$f(x) = (Ax + B)e^{-2x} - x + 1 \; et \; f'(x) = Ae^{-2x} - 2e^{-2x}(Ax + B) - 1$$

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B + 1 = 2 \\ A - 2B - 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1 \\ A = 1 \end{cases}$$

Ainsi cette solution est :

$$f(x) = (x + 1)e^{-2x} - x + 1$$

PARTIE II :

1)

a. Calculons la dérivée de la fonction f

$x :\longmapsto (x+1)e^{-2x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et de même $x :\longmapsto -x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par conséquent la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0;+\infty[$ comme la somme de deux fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$. Sa dérivée est :

$$f'(x) = -(2xe^{-2x} + e^{-2x} + 1)$$

- **Etudions son signe**

Soit à résoudre l'équation $f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow -(2xe^{-2x} + e^{-2x} + 1) = 0 \Leftrightarrow 2xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 = 0$$

$\Rightarrow e^{-2x}(2x+1) = -1$ **absurde car** $\forall\, x \in \mathbb{R}_+ \begin{cases} 2x+1 > 0 \\ e^{-2x} > 0 \end{cases} \Longrightarrow e^{-2x}(2x+1) > 0$

Par conséquent,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+ , f'(x) < 0$$

b. Dressons le tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	2 $\searrow$ $-\infty$

Limites aux bornes de E_f

$$\lim_{x\to+\infty}(xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x) = \underbrace{\lim_{x\to+\infty}(xe^{-2x})}_{=0} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}(e^{-2x})}_{=0} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}(1-x)}_{=-\infty} = -\infty$$

c. Montrons que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote (Δ) et $(\mathcal{C})$

On remarque que :

$$\lim_{x\to+\infty}(xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x) - (1-x) = \lim_{x\to+\infty}(xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - 1 - x + x)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\lim_{x\to+\infty}(xe^{-2x})}_{=0} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}(e^{-2x})}_{=0} = 0$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \underbrace{\phi(x)}_{=1-x} = 0$ alors la droite (Δ): $y = 1 - x$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$

$$(\Delta): y = 1 - x \text{ est asymptote oblique à } (\mathcal{C}) \text{ en } +\infty$$

Autre approche :

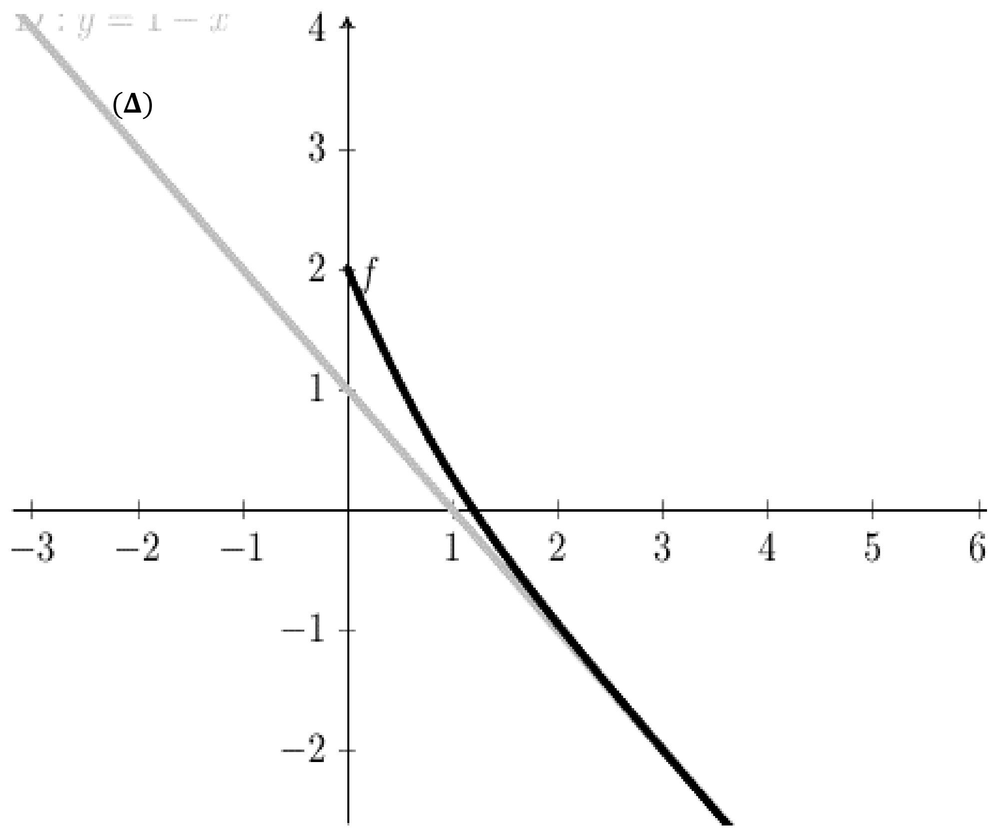
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-2x} + \frac{e^{-2x}}{x} + \frac{1}{x} - 1 = \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{2x}} + \frac{1}{xe^{2x}}\right)}_{=0} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - 1\right)}_{=-1} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(-x) = \lim_{x\to+\infty}(xe^{-2x}+e^{-2x}+1-x+x)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\lim_{x\to+\infty}(xe^{-2x})}_{=0} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}(e^{-2x})}_{=0} + 1 = 1$$

D'où :

$(\Delta): y = 1 - x$ **est asymptote oblique à** $(\mathcal{C})$ **en** $+\infty$



2) **a.** f **est continue et strictement décroissante sur** $\mathbb{R}_+$ **et de plus** $f(0)=2$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$$\Rightarrow f(0) = 2 \times \lim_{x\to+\infty} f(x) < 0$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ **admet une solution et une seule sur** $\mathbb{R}_+$ **tel que :**

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \exists!\ \alpha \mid f(\alpha) = 0$$

b. Justifions que $1 \le \alpha \le 2$

On sait que la fonction f **est strictement décroissante. Par suite, on a :**

$$1 \le \alpha \le 2 \Rightarrow f(2) \le f(\alpha) \le f(1) \quad car\ f\ est\ décroissante$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(2) \approx -0,95 \\ f(\alpha) = 0 \\ f(1) = 0,27 \end{cases} \Rightarrow -0,95 \leq 0 \leq 0,27$$ **(Ce qui est cohérent)**

PARTIE III

1.

- **Limite de g en $+\infty$**

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (xe^{-2x} + e^{-2x} + 1) = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} (xe^{-2x})}_{=0} + \underbrace{\lim_{x \to +\infty} (e^{-2x})}_{=0} + 1 = 1$$

- **Dérivée**

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme la somme des fonctions dérivables, et, en particulier sur $[1; +\infty[$. sa fonction dérivée est :

$$g'(x) = -e^{-2x}(1 + 2x)$$

- **Signe de la dérivée : $g'(x) \leq 0 \; ou \; g'(x) \geq 0$**

Soit à résoudre sur $[1; +\infty[$, l'équation $g'(x) = 0 \Leftrightarrow -e^{-2x}(1 + 2x) = 0$

$$\forall\, x \in [1; +\infty[\,, -e^{-2x} < 0, donc\; -e^{-2x}(1 + 2x) = 0 \Leftrightarrow (1 + 2x) = 0 \Rightarrow 2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2} \notin [1; +\infty[$$

Par conséquent, la fonction g' est non nulle sur $[1; +\infty[$. Ainsi pour tout réel $x \geq 1$, $g'(x) < 0$

- **Tableau de variations**

x	1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$\frac{2}{e^2} + 1 \searrow 1$

- **Déduction**

g est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$, il réalise donc une bijection de J vers I tel que :

$$g(J) = I \Leftrightarrow g([1; +\infty[) = \left[1\,; \frac{2}{e^2} + 1\right[$$

On remarque : $I = \left[1\,; \frac{2}{e^2} + 1\right] \subset [1; +\infty[$. Nous concluons que :

$$\forall\, x \in J \;\; on\; a \;\; g(x) \in J$$

2.

a. **Montrons sur J l'inégalité $|g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$**

Tout d'abord étudions la monotonie de la g'. La fonction g' est dérivable sur J et sa dérivée est :

$$g''(x) = 4e^{-2x}$$

1ère Méthode

$g''(x) = 4e^{-2x} > 0$ **donc pour tout x élément de J, la fonction g' est strictement croissante c'est-à-dire :**

$$x \in [1\,;+\infty[\ \Leftrightarrow x \geq 1 \Rightarrow g'(x) \geq g'(1)$$

$$or\ \forall\ x \in\ [1\,;+\infty[\,, g'(x) = -e^{-2x}(1+2x) < 0 \quad et\ g'(1) = -\frac{3}{e^2} < 0$$

Par conséquent, $|g'(x)| \leq \left|-\frac{3}{e^2}\right| \Longrightarrow, |g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$ ■

2ème Méthode

$g''(x) = 4e^{-2x} > 0$. **Pour tout x élément de J, la fonction g' est strictement croissante et continue donc elle réalise une bijection de J vers K tel que :**

$$K = g'(\,[1;+\infty[\,) = \left[g'(1); \lim_{x\to+\infty} g'(x)\right[= \left[-\frac{3}{e^2}; 0\right[$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{e^2} \leq g'(x) \leq 0 \Rightarrow -\frac{3}{e^2} \leq g'(x) \leq 0 \leq \frac{3}{e^2} \Rightarrow |g'(x)| \leq \left|\frac{3}{e^2}\right| \blacksquare$$

Ainsi,

$$\forall\ x\ \in J, |g'(x)| \leq \left|\frac{3}{e^2}\right|$$

- **Déduisons-en que**

Pour tout x élément de J. D'une part, on a $x \in [\alpha\,; x] \subset J$. Et d'autre part $\forall\ x\ \in J, |g'(x)| \leq \left|\frac{3}{e^2}\right|$

En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction g sur $[\alpha; x]$ on obtient :

$$|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$$

Pour remarque : $f(x) = g(x) - x \Longrightarrow g(x) = f(x) + x \Longrightarrow g(\alpha) = \underbrace{f(\alpha)}_{=0} + \alpha = \alpha$

Par suite,

$$\forall\ x\ \in J, |g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$$

3.

a. $U_n \in J\ et\ U_{n+1} = g(U_n)$

En raisonnant de façon analogue que précédemment mais à la différence on pose $x = U_n$. Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction g sur $[\alpha; U_n]$, on obtient :

$$|g(U_n) - g(\alpha)| \leq \frac{3}{e^2}|U_n - \alpha| \Leftrightarrow |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|U_n - \alpha| \blacksquare$$

$$\forall\ x\ \in J, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|U_n - \alpha|$$

b. Déduisons-en que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{3}{e^2}\right)^n$

<u>1ère Méthode</u>

<u>Initialisation</u> : Pour $n = 1$,

PARTIE C

BONUS BAC C 2021

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT PRESCOLAIRE, PRIMAIRE
SECONDAIRE ET DE L'ALPHABETISATION
---------- -
CABINET

DIRECTION DES EXAMENS ET CONCOURS
SERVICE DU BACCALAUREAT

REPUBLIQUE DU CONGO
Unité*Travail*Progrès

BACCALAUREAT SESSION DE	: Juillet 2021
Epreuve de	: MATHEMATIQUES
SERIE	: C
Durée	: 04 heures
Coefficient	: 05
Documents autorisés	: Néant

Exercice 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): Z^2-(1+2e^{i\theta})Z-(1+2e^{i\theta})e^{i\theta}=0, avec\ \theta\in[0;2\pi]$,
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O,u,v) unité graphique : 2cm.
   On considère le point A d'affixe $Z_A=1$. Pour tout θ de l'intervalle $[0;2\pi]$, on désigne par M, P, et Q les points d'affixes respectives $Z=e^{i\theta}$, $Z_P=1+Z$, $Z_Q=Z^2$.
   a. Montrer que l'ensemble $(\mathcal{C})$ décrit par le point M lorsque θ varie sur $[0;2\pi]$, est le cercle de centre O et de rayon 1.
   b. Le point M est sur le premier quadrant. Placer les points P et Q. (on pourra remarquer que $Z_{\overrightarrow{OP}}=Z_{\overrightarrow{OA}}+Z_{\overrightarrow{OM}}$).
3. Soit B le point d'affixe $Z_B=1+Z+Z^2$, où Z est l'affixe du point M.
   a. Placer le point B dans le plan en justifiant la construction.
   b. Montrer que $\frac{Z_B}{Z}$ est un réel.
   c. En déduire que les points O, B et M sont alignés.

Exercice 2 :

Le plan est orienté. On considère un triangle ABC rectangle en A, de sens direct, tel que $AC=2AB$. On désigne par K le projeté orthogonale de A sur la droite (BC).

Soit I et J les symétriques orthogonaux respectifs du point K par rapport aux droites (AB) et (AC). $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ désignent respectivement le cercle de diamètre $[AB]$, de centre O et le cercle de diamètre $[AC]$, de centre O'.

1.a. Faire une figure. (On prendra $AB=3$ cm). (1 pt)

b. Montrer que les droites (BI) et (AI) sont perpendiculaires. (0,5 pt)

c. Montrer que les droites (CJ) et (AJ) sont perpendiculaires. (0,5 pt)

2. On note S_1 et S_2 les symétries orthogonales d'axes (AB) et (AC) respectivement.

a. Caractériser la transformation ponctuelle g, définie par : $g = S_2 \circ S_1$ (01 pt)

b. En déduire que A est milieu du segment $[IJ]$. (0,5 pt)

3. Soit f la similitude plane directe de centre A, qui transforme le cercle $(\mathcal{C}_1)$ en $(\mathcal{C}_2)$.

a. Préciser le rapport k_1 de f. (0,5 pt)

b. Donner une mesure θ de l'angle de f.

4.a. En utilisant la tangente de l'angle $\widehat{C}$ dans les triangles ABC et ACK, vérifie que : $\frac{AB}{AC} = \frac{AK}{CK}$ (0,5 pt)

b. En déduire que $CJ = JI$. (0,5 pt)

c. Soit D le projeté orthogonal de C sur la droite (BI).

Montrer que le quadrilatère $CJID$ est un carré. (0,5 pt)

5. On désigne par E le symétrique de D par rapport à C. Soit $(\mathcal{P})$ la parabole de foyer C., passant par D et E, et admettant comme tangente, les droites (JE) et (JD) respectivement en E et D.

a. Montrer que les droites (JE) et (JD) sont perpendiculaires. (0,5 pt)

b. En déduire que (IJ) est la directrice de $(\mathcal{P})$. (0,5 pt)

c. Tracer (Γ), l'arc de la parabole $(\mathcal{P})$ d'excentricité E et D. (1 pt)

<u>Exercice 3</u> : (5 points)

F est la fonction numérique, dérivable sur $I = [2; 3]$, définie par : $f(x) = 1 + ln(1 + x)$.

1. **Calculer la dérivée f' de f. (0,5 pt)**
2. **Montrer que $\forall\, x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{3}$. (0,5 pt)**
3. **Montrer que l'équation f(x)=x admet une solution unique $\alpha \in]2; 3[$. (0,5 pt)**
4. **Montrer que $\forall\, x \in I$, on a $f'(x) \in I$. (0,5 pt)**
5. **On considère la suite (U_n) définie par :**

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

a. **Montrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \in I$. (0,5 pt)**

b. **En utilisant les inégalités des accroissements finis, montrer que**

$$\forall\, x \in I, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3}|x - \alpha| \ (0,5\ pt)$$

c. **En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|U_n - \alpha|$. (0,5 pt)**

d. **Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$. (0,5 pt)**

e. **En admettant que la suite (U_n) est convergente. Calculer sa limite L quand n tend vers $+\infty$. (0,5 pt)**

f. **Déterminer le plus petit entier n_0 tel que : $|U_n - \alpha| \leq 10^{-3}$. (0,5 pt)**

Exercice 4 :

On teste un médicament sur un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé. Pour cela, 60 des individus prennent le médicament. Les autres reçoivent une substance neutre et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie.

Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse du taux de glycémie, avec une probabilité égale à $0,8$.

On ne constate aucune baisse de ce taux pour 90% des personnes ayant reçu la substance neutre. On désigne par M et B les évènements suivants :

M : « avoir pris le médicament »

B : « avoir une baisse du taux de glycémie »

1. **Représenter la situation par un arbre pondéré. (1 pt)**
2. **Démontrer que la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie est égale à $0,52$. (0,5 pt)**
3. **On soumet au test un individu pris au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament, sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie. (0,5 pt)**
4. **On contrôle 5 individus au hasard.**
   Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé ? (1 pt)

CORRIGE BAC C 2021

Exercice 1 :

1. L'équation $Z^2 - (1 + 2e^{i\theta})Z + (1 + e^{i\theta})e^{i\theta} = 0$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$, avec $\theta \in [0; 2\pi]$ a pour discriminant :

$$\Delta = (-1 - 2e^{i\theta})^2 - 4(1)(1 + e^{i\theta})e^{i\theta}$$
$$= 1 + 4\underbrace{(e^{i2\theta} - e^{i2\theta} + e^{i\theta} - e^{i\theta})}_{=0}$$
$$= 1 > 0$$

Cette équation possède deux solutions complexes à savoir $Z'\, et\, Z''$, telle que :

$$\begin{cases} Z' = \dfrac{1 + 2e^{i\theta} - 1}{2} = e^{i\theta} \\ Z'' = \dfrac{1 + 2e^{i\theta} + 1}{2} = 1 + e^{i\theta} \end{cases}$$

2.
   a. On sait que :

$$Z = e^{i\theta}$$
$$\Longrightarrow |Z| = \underbrace{|e^{i\theta}|}_{=1}$$
$$ou\ encore\ |Z - Z_0| = 1$$

En termes de distance la relation ci-dessus s'écrit :

$$OM = 1$$

Par conséquent, le point M appartient au cercle de centre O et de rayon $R = 1$.

Autre Approche

On sait que :

$$Z_{\overrightarrow{OM}} = e^{i\theta} \quad et\ \overrightarrow{OA} = \vec{u}$$

Par suite,

$$arg\left(Z_{\overrightarrow{OM}}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)[2\pi] = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)[2\pi] = \theta[2\pi]$$

Ainsi lorsque θ varie sur $[0, 2\pi]$ le point M parcourt un cercle de centre O et rayon $\left|Z_{\overrightarrow{OM}}\right| = |Z - Z_0| = 1$.

Conclusion : l'ensemble $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre O et de rayon 1.

   b. D'après l'énoncé :

$$Z_{\overrightarrow{Op}} = Z_{\overrightarrow{OA}} + Z_{\overrightarrow{OM}} \quad et\; Z_Q = Z^2$$

Interprétation de $Z_{\overrightarrow{Op}}$: le point P est la translation du point M par le vecteur $\overrightarrow{OA}$.

Pour placer P, on trace l'ensemble $(\mathcal{C})$ puis on place le point M au 1er quadrant. Enfin, on translate M par le vecteur $\overrightarrow{OA}$. (Voir figure)

Le point Q est un point de l'ensemble car $|Z_Q - Z_O| = |e^{2i\theta}| = 1$. Cependant son argument est le double de celui du point M. Pour placer Q, on double l'argument du point M ou encore on double l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et l'axe des abscisses. (Voir figure)

3.

a. On sait que :

$$Z_B = 1 + Z + Z^2 \; ou\; encore\; Z_{\overrightarrow{OB}} = Z_{\overrightarrow{OP}} + Z_{\overrightarrow{OQ}}$$

Le point B est la translation du point P par le vecteur $\overrightarrow{OQ}$ ou la translation du point Q par le vecteur $\overrightarrow{OP}$.

b.

Le rapport :

$$\frac{Z_B}{Z} = 1 + Z + \frac{1}{Z}$$

est réel si et seulement si :

$$\frac{Z_B}{Z} = \overline{\left(\frac{Z_B}{Z}\right)} = \frac{\overline{Z_B}}{\overline{Z}}$$

Comme Z est un nombre complexe de module 1, il vient

$$|Z| = 1 \Rightarrow \overline{Z} = \frac{1}{Z}$$

Par suite,

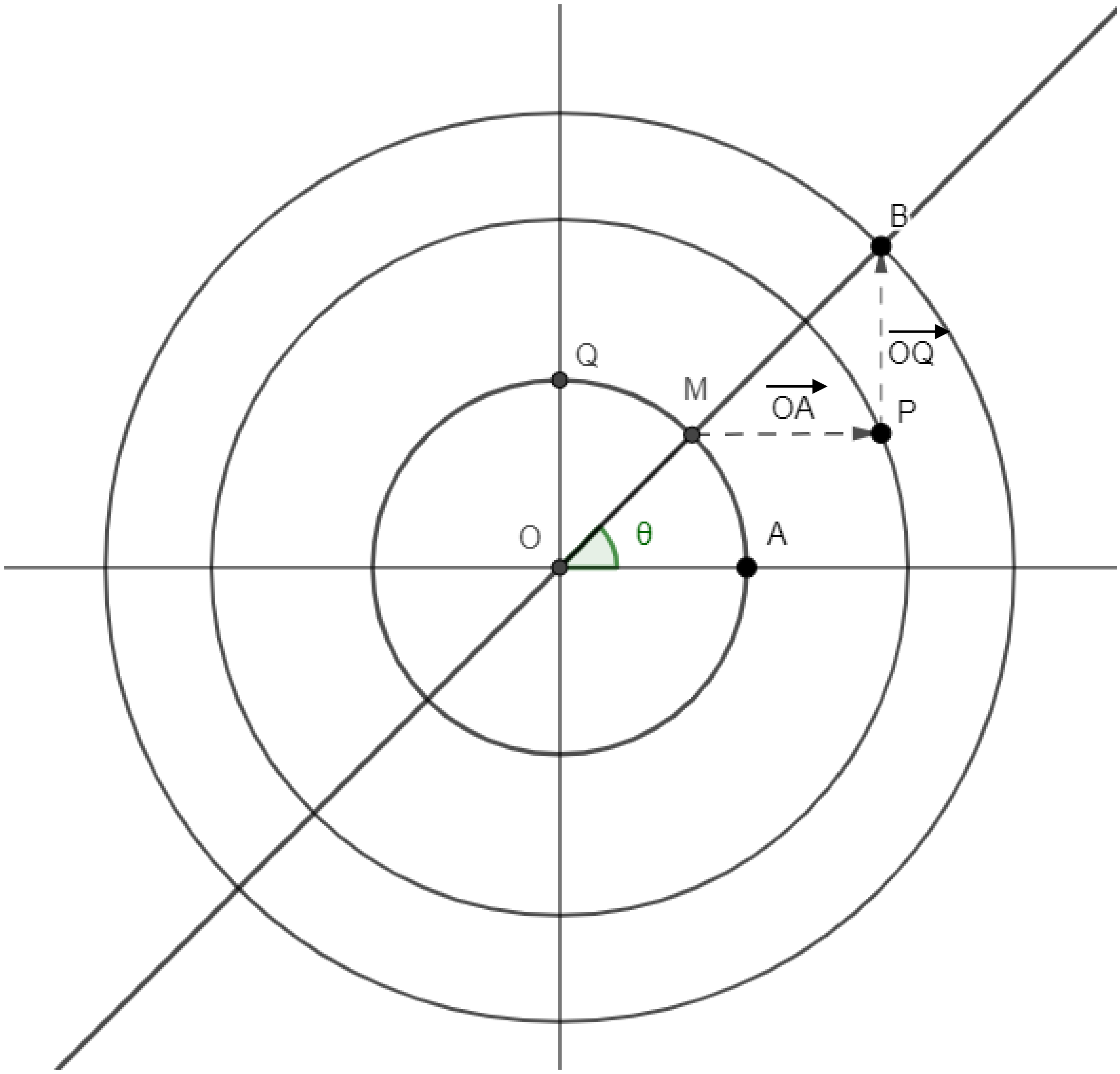
$$\frac{\overline{Z_B}}{\overline{Z}} = \frac{\overline{1 + Z + Z^2}}{\overline{Z}} = \frac{1 + \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z^2}}{\frac{1}{\overline{Z}}} = Z\left(1 + \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z^2}\right) = Z + 1 + \frac{1}{Z} = \frac{Z_B}{Z}$$

Comme $\frac{Z_B}{Z} = \frac{\overline{Z_B}}{\overline{Z}}$, alors le rapport $\frac{Z_B}{Z}$ est réel

c. On sait que :

$$\frac{Z_B}{Z} = \frac{Z_B - Z_O}{Z - Z_O} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow arg\left(\frac{Z_B - Z_O}{Z - Z_O}\right) = 0[2\pi] \Leftrightarrow (OB$$

On déduit que les points O, B et M sont alignés



Exercice 2 :

1.

a. Voir graphique

b. On sait que K est le projeté orthogonal de A sur (BC). Il vient,

$$Mes(\widehat{\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KB}}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Comme I est le symétrique orthogonal de K par rapport à (AB), il vient :

$$Mes(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ ou encore } Mes\ \overline{(AI,BI)} = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

Car la symétrie orthogonale est un antidéplacement, il transforme les angles orientés en leurs opposées.

Ainsi : les droites (AI) et (BI) sont perpendiculaires

c. On peut raisonner de façon analogue comme précédemment (question 1.b) ou comme suit :

Dans le cercle $(\mathcal{C}_1)$ l'angle au centre formé par l'arc $\widehat{CA}$ est plat ou encore $\left(\widehat{\overrightarrow{O'C}, \overrightarrow{O'A}}\right) = \pi[2\pi]$

Comme l'angle $(\widehat{\overrightarrow{KC}, \overrightarrow{KA}})$ est un angle inscrit, en conséquence, d'après la propriété de l'angle inscrit, on a :

$$(\widehat{\overrightarrow{KC}, \overrightarrow{KA}}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

D'après la propriété des angles opposés, on a :

$$\underbrace{(\widehat{\overrightarrow{KC}, \overrightarrow{KA}})}_{=\frac{\pi}{2}} + (\widehat{\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JC}}) = \pi\,[2\pi] \Longrightarrow (\widehat{\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JC}}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Par conséquent : $\overline{(JC, JA)} = \frac{\pi}{2}[\pi]$

Ainsi, les droites (CJ) et (AJ) sont perpendiculaires

2.

a. On sait que : $g = S_2 \circ S_1 = S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$ et $(AB) \cap (AC) = \{A\}$. g est la composée de deux réflexions d'axe sécant. Elle est une rotation de centre A et d'angle $2(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) = 2 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right)[2\pi] = -\pi[2\pi]$

g est une symétrie centrale de centre A : $g = S_2 \circ S_1 = S_{(AB)} \circ S_{(AC)} = R_{(A, -\pi)} = S_A$

b. On peut remarquer que : $g(J) = S_{(AB)} \circ S_{(AC)}(J) = S_{(AB)}(K) = I$ $ou\ encore$ $S_A(J) = I$

Puisque $S_A(J) = I$ alors, il vient que A est milieu du segment $[IJ]$.

3.

a. D'après l'énoncé f transforme le cercle $(\mathcal{C}_1)$ de centre A en $(\mathcal{C}_2)$.

$$\begin{cases} f(O) = O' \\ f(A) = A \end{cases} \Longrightarrow k_1 = \frac{O'A}{OA}\ or\ OA = \frac{1}{2}AB\ ;\ O'A = \frac{1}{2}AC\ \ et\ AC = 2AB$$

Ainsi, $k_1 = 2$

b. On sait que f transforme le cercle $(\mathcal{C}_1)$ de centre A en $(\mathcal{C}_2)$.

$$\begin{cases} f(O) = O' \\ f(A) = A \end{cases} \Longrightarrow (\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

4.

a. Dans les triangles ABC et ACK, il est immédiat d'avoir pour résultat :

$$\tan \widehat{C} = \frac{AB}{AC} = \frac{AK}{CK}$$

b. On sait que :

D'une part,

$$S_{(AB)}(K) = I \Longrightarrow AK = AI$$
$$S_{(AC)}(K) = J \Longrightarrow CK = CJ$$
$$S_A(J) = I \Longrightarrow AI = \frac{1}{2}JI$$

$$AB = 2AC$$

D'autre part,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AK}{CK}$$

En remplaçant les relations établies plus haut, on a :

$$\frac{AB}{2AB} = \frac{AI}{CJ}$$
$$\frac{AI}{CJ} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{\frac{1}{2}\times JI}{CJ} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{JI}{CJ} = 1$$

Finalement, $CJ = JI$

c. On sait que :

D'une part,

$$(CJ) \perp (AJ) \text{ ou encore } (CJ) \perp (JI) \text{ angle droit en } J$$

$$(AI) \perp (IB) \text{ ou encore } (AI) \perp (ID) \text{ angle droit en } I$$

$$(CD) \perp (IB) \text{ ou encore } (CD) \perp (ID) \text{ angle droit en } D$$

On déduit que :

$$(CD) \perp (CJ) \text{ angle droit en } C$$

Puisque la somme des angles d'un quadrilatère vaut $360°$.

D'autre part, d'après la question 4.c :

$$CJ = JI$$

Par conséquent, on a nécessairement :

$$CJ = JI = DC = DI$$

Nous concluons que le quadrilatère $CJID$ est un carré, car un quadrilatère ayant quatre côtés égaux est un carré.

5.

a. Considérons les triangles JDE et JCE respectivement rectangle en J et C. D'après le théorème de Pythagore on a :

$$ED^2 = JD^2 + JE^2 \quad \text{et } JE^2 = CE^2 + CJ^2$$

Comme CJID est un carré et, E le symétrique de D par rapport à C, il vient :

$$CE = CD = CJ \ ; \ ED = 2CD \text{ et } JD = \sqrt{2}CD$$

D'où :

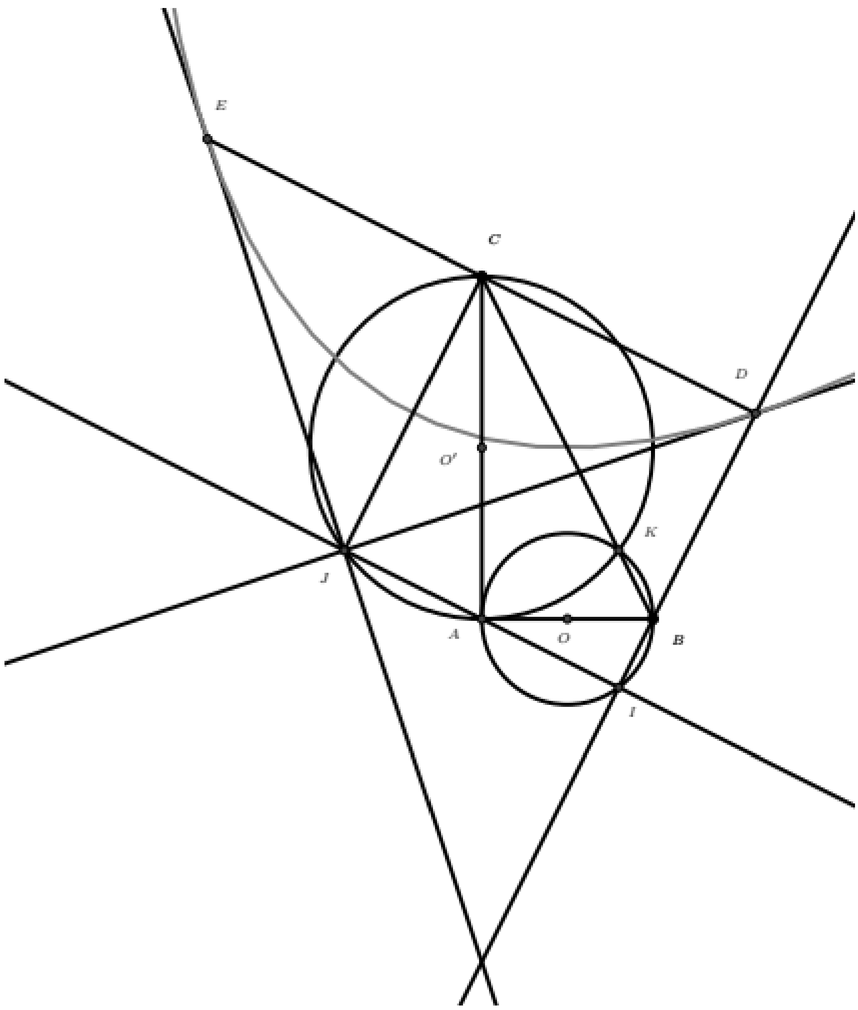
$$ED^2 = JD^2 + JE^2$$
$$\Leftrightarrow (2CD)^2 = \left(\sqrt{2}CD\right)^2 + CD^2 + CD^2$$
$$4CD^2 = 4CD^2$$

D'où le triangle JDE est rectangle en J. Par conséquent les droites (JE) et (JD) sont perpendiculaires.

b.

La droite (IJ) est perpendiculaire à (CJ) car le quadrilatère $CJID$ est un carré et de plus (CJ) est perpendiculaire à (ED). On remarque que $[ED]$ est un lactus rectum de (P) . En effet : le foyer $C \in [ED]$. Par conséquent (CJ) est un axe de symétrie de (P). Puisque $(IJ) \perp (CJ)$ on a nécessairement (IJ) directrice de (P). Car la directrice d'une parabole est perpendiculaire à son axe de symétrie.

c.



Exercice 3 :

1. La fonction $f: x \longmapsto 1 + ln(1 + x)$ est dérivable sur $I = [2; 3]$. Et sur I sa fonction dérivée s'écrit :

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x}$$

2. La fonction $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est : $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ qui est une fonction continue et strictement décroissante sur I. Par conséquent, d'après le théorème de la bijection la fonction f' réalise une bijection de I vers $f(I) = J$ ou encore :

$$f'([2;3]) = [f'(3); f'(2)] = \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$$

Par suite,

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{1}{3}$$

$$ou\ encore\ -\frac{1}{3} \leq f'(x) \leq \frac{1}{3}$$

Finalement, on a :

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{3} \blacksquare$$

3. Soit x un élément de I et α un élement de I dont les bornes sont adhérentes. Posons :

$$g(x) = f(x) - x$$

La fonction g est dérivable sur I et sa fonction dérivée est : $g'(x) = f'(x) - 1$ qui est une quantité strictement négative sur I. Par suite, l'équation :

$$f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 2} g(x) = -1 + ln3 > 0 \quad et \quad \lim_{x\to 3} g(x) = -2 + 2ln2 < 0$$

Comme la fonction g est continue et strictement décroissante sur $]2;3[$ et de plus $\lim_{x\to 2} g(x) \times \lim_{x\to 3} g(x) < 0$ D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]2;3[$ tel que : $g(\alpha) = 0$.

Ainsi, par équivalence des deux équations, l'équation $f(x) = x$ admet $\alpha \in]2;3[$ comme solution unique. C'est-à-dire :

$$\exists!\ \alpha\ \in\ [2;3]\ |\ \ f(\alpha) = \alpha$$

4. On sait que la fonction f est continue et strictement croissante sur I (Car sa dérivée est une quantité strictement positive sur I). D'après le théorème de la bijection f réalise une bijection de I vers J tel que :

$$\begin{aligned} J &= f(I) \\ &= f([2;3]) \\ &= [f(2); f(3)] \\ &= \left[\underbrace{1 + ln3}_{\approx 2{,}09}; \underbrace{1 + ln4}_{\approx 2{,}38}\right] \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall\ x \in I,\ \ on\ \ a\ \ \ f(x) \in I$$

5.

a. Démonstration de la propriété : $\forall\ n \in \mathbb{N}, U_n \in [2;3]$ en raisonnant par récurrence.

<u>Initialisation</u> : Soit $n = 0$. On a :

$$U_0 = 2 \in I = [2;3]$$

Comme $U_0 \in [2;3]$ d'après la question 4 $U_1 = f(U_0) \in [2;3]$

Il y a donc initialisation,

<u>Hérédité</u> : Soit $n \geq 0$. Supposons que $U_n \in [2;3]$ et montrons aussi que $U_{n+1} \in [2;3]$.

Comme $U_n \in [2;3]$ on déduit que, d'après la question 4 $f(U_n) \in [2;3]$. Or $U_{n+1} = f(U_n)$.
Ainsi,

$$U_{n+1} \in [2;3]$$

Il y a donc hérédité,

<u>Conclusion</u> : Par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n. C'est-à-dire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad U_n \in I = [2;3].$$

b.

f est continue et dérivable sur $[2;3]$. De plus, $|f'(x)| \leq \frac{1}{3}$. D'après le théorème des accroissements finis, on a :

$$\forall\, x \in [2;3], \qquad \forall\, y \in [2;3], \qquad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{3}|x - y|$$

Comme x et α sont des éléments de I, on peut appliquer l'inégalité établie ci-dessus en un quelconque x et en $y = \alpha$. Ce qui nous donne :

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{3}|x - \alpha|$$

Or d'après la question 3, $f(\alpha) = \alpha$. Il vient :

$$\forall\, x \in I, \qquad |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3}|x - \alpha| \blacksquare$$

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans la question précédente, on a établi, à l'aide du théorème des accroissements fini que :

$$\forall\, x \in [2;3], \qquad \forall\, y \in [2;3], \qquad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{3}|x - y|$$

Comme U_n *et* α sont des éléments de I, on peut appliquer l'inégalité établie ci-dessus en $x = U_n$ et en $y = \alpha$.
Ce qui nous donne :

$$|f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{3}|U_n - \alpha|$$

On sait que $U_{n+1} = f(U_n)$ *et* $f(\alpha) = \alpha$. D'où :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|U_n - \alpha| \blacksquare$$

d. Démonstration de la propriété : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ en raisonnant par récurrence sur n.

<u>Initialisation</u> : Soit $n = 0$. On a :

$$|U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$$

Comme $2 < \alpha < 3$ alors $-1 < 2 - \alpha < 0 \Rightarrow |2 - \alpha| < 1$.

Il y a donc initialisation,

<u>Hérédité</u> : Soit $n \geq 0$. Supposons que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et montrons aussi que $|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$.

Comme $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ il vient, d'après la question 5.c

$$\begin{aligned}|U_{n+1} - \alpha| &\leq \frac{1}{3}|U_n - \alpha| \\ &\leq \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &\leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

Il y a donc hérédité,

<u>Conclusion</u> : Par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n. C'est-à-dire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

e. On sait que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \; \textit{ou encore} \;\; 0 \leq |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n .$$

Par passage à la limite,

$$0 \leq \lim_{n \to +\infty} |U_n - \alpha| \leq \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \to +\infty} |U_n - \alpha| = 0 \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = \alpha$$

D'où :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = L = \alpha$$

f. Soit n un entier naturel. Comme $|U_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ et que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ On cherche un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n_0} \leq 10^{-3}$$

Par croissance de fonction logarithme népérien, on a :

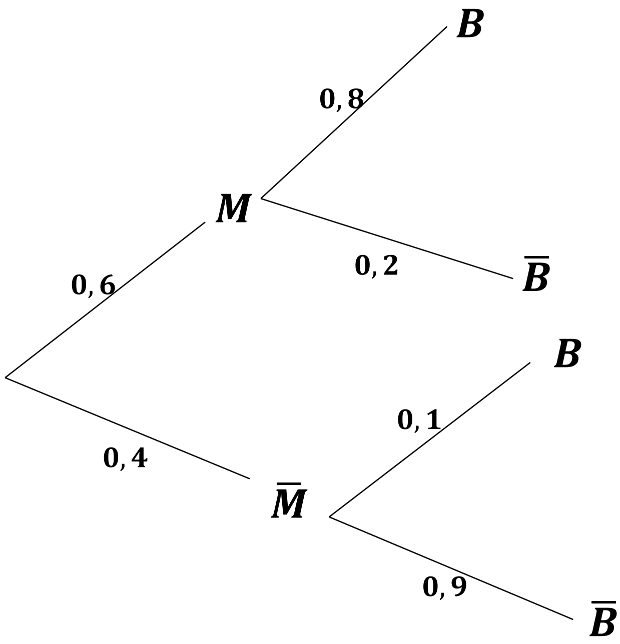
$$-n_0 \times ln3 \leq -3 \times ln10$$
$$n_0 \geq 3 \times \frac{ln10}{ln3} \approx 6{,}28$$

On a nécessairement :

$$n_0 = 7$$

Exercice 4 :

1.



2. **En s'appuyant sur la question 1, on a :**

$$\begin{aligned} P(B) &= 0,6 \times 0,8 + 0,4 \times 0,1 \\ &= 0,04 + 0,48 \\ &= 0,52 \end{aligned}$$

D'où :

$$P(B) = 0,52$$

3.

$$\begin{aligned} P_M(B) &= \frac{P(M \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{0,48}{0,52} \\ &= 0,92 \end{aligned}$$

D'où :

$$P_M(B) = 0,92$$

4. **Soit P cette probabilité.**

$$\begin{aligned} P &= C_5^2 \times (0,52)^2 \times (0,48)^3 \\ &= 10 \times (0,52)^2 \times (0,48)^3 \\ &= 0,299 \end{aligned}$$

D'où

$$P \cong 0,3$$

LES MATHEMATIQUES SOUS UN AUTRE ANGLE

Introduction

> J'ai profondément regretté de ne pas avoir été assez loin pour au moins comprendre un petit peu des grands principes fondamentaux des mathématiques : car les hommes qui les ont acquis semblent avoir un sens supplémentaire – un sixième sens. Charles Darwin

Comment un si grand nom de la science qui est Charles Darwin a émis des regrets au fait de n'avoir pas été si loin dans la compréhension des outils mathématiques ? Lui, qui par sa théorie de l'évolution a bousculé nos croyances, déchirés bons nombres de religions, Eteins plusieurs dogmes…

Paradoxalement, au Congo Brazzaville, la hausse du désintéressement ou mieux du dégout des élèves à cette discipline s'en va crescendo proportionnellement à la fuite du temps. Elle, la science mathématique, apparait comme réservée à quelques surdoués du fait de son caractère alambiquant. Parce que son objet est fait d'abstractions (les nombres, les figures, les fonctions), qu'elle exige beaucoup de la pensée pure et, elle apparaît comme ayant peu de besoins. Ce constat se résume en la question : à quoi vont me servir les maths ? Au quotidien, nous ne savons que faire les maths, nous sommes bon qu'à cela. Du boutiquier qui rend la différence à son client, du couturier en train de découper un tissu à la taille de son propriétaire, de l'ingénieur qui applique ces concepts mathématiques.

Dans l'engouement ou dans le rejet vis-à-vis de la science mathématique, dans les questions liées à sa diffusion, son usage, sa vulgarisation, sa valorisation, on voit l'amplification des phénomènes et des problèmes concernant toutes les sciences. Qu'il s'agisse des domaines comme est donc

06 769 80 66 / 04 060 94 90

Les mathématiques, jamais dans l'histoire, n'ont été aussi exploité cette ère où par l'humanité n'a jamais autant les théories mathématiques.

Qu'est ce que les mathématiques ?

Quelle place pour les mathématiques ?