Fomesoutra.com
ça soutra !

REPUBLIQUE DE GUINNE

TRAVAIL- JUSTICE- SOLIDARITE

LE GUIDE PRATIQUE

Collection

Cheickna

MON PROF DE PHYSIQUE

Terminale S M / S E

Edition 2022

A votre service pour votre succès

REPUBLIQUE DE GUINEE

Travail-Justice-Solidarité.

Année scolaire 2021 – 2022.

LE GUIDE PRATIQUE DU BAC.

MON PROF DE PHYSIQUE

UN OUTIL DE TRAVAIL :

- PLUS RAPIDE ;
- PLUS PRATIQUE ;
- PLUS EFFICACE

A VOTRE SERVICE POUR VOTRE SUCCÈS.

M. KONATE Cheickna
Ingénieur Electrotechnicien
664 – 66 – 00 – 20
621 – 70 – 03 – 19

M CAMARA N'faly
Ingénieur Electrotechnicien
657 – 61 – 36 – 86
621 – 42 – 92 – 09

Conakry

Martine Loua

MECANIQUE.

Avant-propos

Le succès rencontré dans nos précédentes éditions nous a permis de rédiger avec clarté et rigueur, cet ouvrage conforme au programme en vigueur qui s'articule sur quatre chapitre :

– Mécanique ;

– Electromagnétisme et Electricité ;

– Optique ondulatoire ;

– Physique atomique et nucléaire.

Chaque chapitre est structuré sur trois parties :

* Un résumé de cours comportant les résultats essentiels ;
* Les exercices et problème résolus ;
* Les exercices et problèmes proposés et d'approfondissement suivis des résultats numériques, pour permettre au candidat de s'auto-évaluer.

Pour permettre aux candidats de se familiariser aux **sujets types bac**, l'ouvrage se termine par des sujets et corrigés types déjà proposés au baccalauréat guinéen séries mathématique et expérimentale depuis la **session 2016.**

Nous avons voulu mettre dans les mains des élèves un outil de travail plus pratique, plus rapide et efficace. Nous avons également voulu , à travers ce document aider nos collègues professeurs qui tiennent les cours de physique dans les classe de terminales. Notre souhait est d'avoir réussi dans notre tache et participé ainsi à leur succès.

Nous sommes conscient que malgré les efforts consentis par les auteurs des imperfections demeurent , nous demandons aux utilisateurs de nous signaler, en vue d'une éventuelle amélioration lors d'une prochaine édition.

Nous tenons à exprimer nos très vives **félicitations et nos sincères remerciements** aux inspecteurs disciplinaires de physique **Mr Thierno Oumar Sow** et **Mr Koïkoï Bilivoqui,** qui par leur gentillesse naturelle et leur disponibilité ont bien voulu nous faire bénéficier de leurs expériences.

Nos remerciements vont également au collectif des correcteurs du baccalauréat de la République de Guinée, qui pour leurs remarques et suggestions nous ont facilité la publication de ce présent ouvrage.

Nous dédions cet ouvrage à notre regretté oncle : **El. Cheickna Koné,** que son âme repose en paix. Amen !

Les auteurs.

SOMMAIRE.

Chapitre I. MECANIQUE

Chapitre II. ELECTROMAGNETISME ET ELECTRICITE.

Chapitre III. OPTIQUE ONDULATOIRE.

Chapitre IV : PHYSIQUE ATOMIQUE ET NUCLEAIRE.

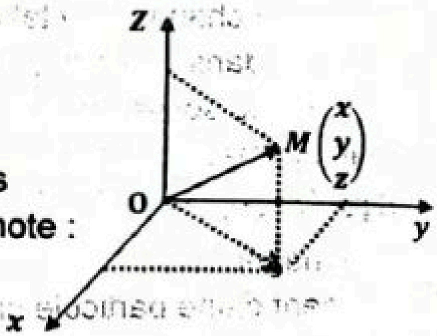
1 – CINEMATIQUE.

1.1 – PARAMÈTRES CINÉMATIQUES D'UN MOUVEMENT.

1.1.1 – Vecteur position et trajectoire.

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ détermine la position d'un mobile M dans un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$$



Si le point M est en mouvement l'une au moins de ses coordonnées est fonction du temps et note :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

Ces fonctions sont appelées équations horaires du mouvement.
La trajectoire est l'ensemble des positions successives occupées par le mobile dans un repère.
L'équation de la trajectoire est la relation indépendante du temps qui lie les coordonnées x, y et z du mobile. Elle s'obtient en éliminant le temps t entre x, y et z.

1.1.2 – VECTEUR VITESSE INSTANTANÉE.

a) Définition. Le vecteur vitesse instantanée est la dérivée du vecteur position par rapport au temps.

$$\boxed{\vec{V} = \frac{d\left(\overrightarrow{OM}\right)}{dt}}$$

b) Coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse.

Dans un repère cartésien $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on a :

$$\vec{V} = \frac{d\left(\overrightarrow{OM}\right)}{dt} = \frac{d\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)}{dt} ;$$

$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ étant des vecteurs constants, on obtient :

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \Longrightarrow \boxed{\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}}$$

avec $\boxed{V_x = \frac{dx}{dt} ;\ V_y = \frac{dy}{dt} ;\ V_z = \frac{dz}{dt}}$

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement. Le module ou la norme du vecteur vitesse est :

$$\boxed{V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}$$

1.1.3 – VECTEUR ACCÉLÉRATION.

a) Définition. Le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps.

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}}$$

b) Coordonnées cartésiennes du vecteur accélération.

Dans le repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k})}{dt} \Longrightarrow \vec{a} = \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k}$$

or : $$\boxed{a_x = \frac{dV_x}{dt}\ ;\ a_y = \frac{dV_y}{dt}\ ;\ a_z = \frac{dV_z}{dt}}$$

D'où $$\boxed{\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}}$$

Le module du vecteur accélération est :

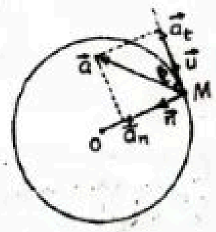
$$\boxed{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

c) Vecteur accélération dans le repère de Frenet.

Le repère de Frenet ou repère mobile est constitué du point mobile M et d'une base orthonormée $(\vec{u}\ ;\ \vec{n})$.

* $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de la tangente ;
* $\vec{n}$ le vecteur unitaire de la normale.

Dans ce repère, le vecteur accélération s'écrit :



$$\boxed{\vec{a} = a_t\vec{u} + a_n\vec{n}}$$

* a_t : est l'accélération tangentielle ;
* a_n : **est** l'accélération normale.

Par définition :

$$\boxed{a_t = \frac{dV}{dt}} \qquad \boxed{a_n = \frac{V^2}{R}}$$

où R est le rayon de courbure de la trajectoire et V le module du vecteur vitesse
Dans le repère de Frenet, le module du vecteur accélération est :

$$\boxed{a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}}$$

N.B : • a_t , caractérise la variation de la norme du vecteur accélération.
• a_n , caractérise la variation de la concavité de la trajectoire.

d) Nature du mouvement.

Un mouvement peut être accéléré, retardé (décéléré) ou uniforme.
Le mouvement est dit :

- accéléré si $\vec{a}.\vec{V} > 0$ **(la vitesse augmente) ;**
- retardé si $\vec{a}.\vec{V} < 0$ **(la vitesse diminue) ;**
- uniforme si $\vec{a}.\vec{V} = 0$ **(la norme de la vitesse est constante).**

1.2 – RAPPELS SUR LES MOUVEMENTS RECTILIGNES.

1.2.1 – MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME.

a) Définition. Un mouvement est dit rectiligne uniforme si sa trajectoire est une droite et sa vitesse est constante.

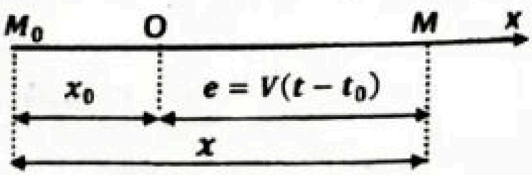
b) Equations caractéristiques.

Les équations caractéristiques du mouvement sont :

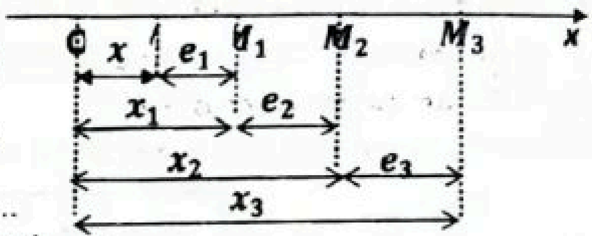
$$\boxed{\begin{aligned} a &= 0 \\ V &= Cste \\ x &= Vt + x_0 \end{aligned}}$$

Si l'origine des temps correspond à un instant initiale t_0, l'équation horaire du mouvement s'écrit :

$$\boxed{x = V(t - t_0) + x_0}$$



Déterminons les espaces parcourus pendant **les intervalles de temps égaux** à θ.



- $e_1 = x_1 - x \Longrightarrow e_1 = at\theta + \frac{1}{2}a\theta^2$
- $e_2 = x_2 - x_1 \Longrightarrow e_1 = at\theta + \frac{3}{2}a\theta^2$
- $e_3 = x_3 - x_2 \Longrightarrow e_3 = at\theta + \frac{5}{2}a\theta^2$

....

- $e_n = x_n - x_{n-1} \Longrightarrow \quad e_n = at\theta + \frac{2n-1}{2}a\theta^2$

Evaluons les différences successives :

- $e_2 - e_1 = a\theta^2$; $e_3 - e_2 = a\theta^2$; .... $e_n - e_{n-1} = a\theta^2$

Nous constatons que : $e_2 - e_1 = e_3 - e_2 = ... = e_n - e_{n-1} = a\theta^2$.

Ces espaces forment une progression arithmétique de raison $\mathbf{r = a\theta^2}$.

Conclusion.

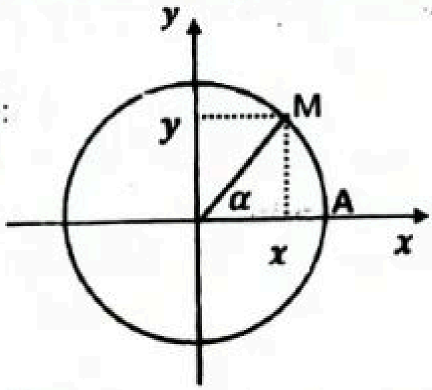
Dans un mouvement rectiligne uniformément varié, les espaces parcourus pendant des intervalles de temps successifs égaux à θ forment une progression arithmétique de raison $r = a\theta^2$.

1.3 – MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME.

a) Définition. Un mouvement est dit circulaire uniforme si sa trajectoire est un cercle et sa vitesse est constante.

b) Repérage du mobile.

La position du point mobile peut être repérée par :



– son abscisse curviligne $S = \widehat{AM}$:

$$\boxed{S = Vt + S_0}$$

– son abscisse angulaire :

$$\boxed{\alpha = \omega t + \alpha_0}$$

– ses coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\begin{cases} x = R\cos\alpha \\ y = R\sin\alpha \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = R\cos(\omega t + \alpha_0) \\ y = R\sin(\omega t + \alpha_0) \end{cases}}$$

c) Relation entre grandeurs linéaires et angulaires.

*** Abscisses curviligne et angulaire.**

Par définition : $\alpha = \frac{\widehat{AM}}{R} = \frac{S}{R} \Longrightarrow \boxed{S = R\alpha}$

• **Vitesse linéaire et angulaire.**

On a : $\mathbf{V} = \frac{dS}{dt} = \frac{d(R.\alpha)}{dt} = \mathbf{R} \cdot \frac{d\alpha}{dt} \Longrightarrow \boxed{V = R.\omega}$

• **Accélération.**

– Accélération normale:

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{(R.\omega)^2}{R} \Longrightarrow \boxed{a_n = \frac{V^2}{R} = R.\omega^2}$$

– Accélération tangentielle:

$$a_t = \frac{dV}{dt} = R \cdot \frac{d\alpha}{dt} \Longrightarrow \boxed{a_t = R.\alpha''}$$

où $\alpha'' = \frac{d\alpha}{dt}$, désigne l'accélération angulaire exprimée en rad/s^2.

Le mouvement étant uniforme : $V = Cste$; alors : $a_t = \frac{dV}{dt} = 0$.

Conclusion .

Dans un mouvement circulaire uniforme, l'accélération est normale et centripète.

$$\boxed{\begin{aligned} a_t &= \frac{dV}{dt} = 0 \\ a = a_n &= \frac{V^2}{R} = R.\omega^2 \end{aligned}}$$

d) Période et fréquence.

• **Période.**

La période d'un mouvement circulaire est le temps mis par le mobile pour effectuer un tour complet.

A un instant t, l'angle balayé est : $\alpha - \alpha_0 = \omega t$

Pour un tour : $\alpha - \alpha_0 = 2\pi$ et $t = T$;

donc : $2\pi = \omega T \Longrightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$

• **Fréquence.**

La fréquence est le nombre de tours effectués par le mobile en une seconde. Elle est égale à l'inverse de la période et s'exprime en hertz (Hz).

$$\boxed{f = N = \frac{1}{T}}$$

EXERCICES ET PROBLEMES RESOLUS.

Problème 1: (Eurin-gié, page 20, exo 1.4).

Le vecteur position d'un point mobile se déplaçant sur un axe $(O, \vec{\imath})$ est $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath}$. L'équation horaire du mouvement de ce mobile est donnée par :

$$x = 5t + 4 \;;$$

où x est en mètres et t en secondes.

1°) Quelle est la position du mobile à l'instant t = 0 ?

2°) Déterminer son vecteur vitesse $\vec{V} = V\,\vec{\imath}$ à chaque instant. Le mouvement est-il uniforme ou accéléré ?

3°) Représenter graphiquement pour t ≥ 0, les fonctions :

$$t \longrightarrow x(t) \;;\; t \longrightarrow v(t).$$

....**Résolution** ....

1°) Position du mobile à l'instant t = 0.

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} \\ x = 5t + 4 \end{cases}$$

A la date $t = 0$: $x_0 = 5(0) + 4 \Longrightarrow \boxed{x_0 = 4\,m}$

2°) Vecteur vitesse instantanée.

On a : $\vec{V} = V\vec{\imath}$

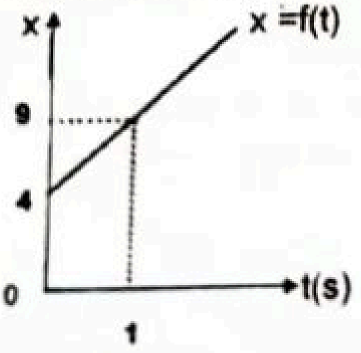
Or : $V = \dfrac{dx}{dt} = (5t+4)' \Longrightarrow V = 5\,m.s^{-1}$

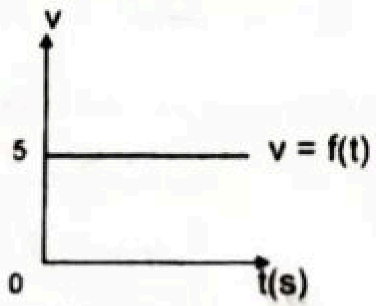
d' où $\boxed{\vec{V} = 5\vec{\imath}}$

Nature du mouvement.

Comme $\vec{V} = \overrightarrow{Cte}$, le mouvement est rectiligne uniforme.

3°) Représentation graphique des fonctions x(t) et v(t).





....

Problème 2 : (Eurin-gié, page 20, exo 1.5).

Un point M d'un mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

1°) Montrer que au cours d'un tel mouvement, les distances parcourues pendant des durées identiques sont égales.

2°) Soit un repère $(O, \vec{\imath})$. Le vecteur vitesse du mobile est $\vec{V} = 10\,\vec{\imath}$.

L'abscisse du mobile à l'instant t = 0 est $x_0 = 5$ m.

Etablir l'équation horaire du mouvement $t \longrightarrow x(t)$.

....**Résolution** ....

1°) Montrons que les distances parcourues sont égales.

A l'instant t : $x = vt + x_0$

$t_1 = t + \theta$: $x_1 = v(t + \theta) + x_0 \Longrightarrow x_1 = vt + v\theta + x_0$

$t_2 = t + 2\theta)$: $x_2 = v(t + 2\theta) + x_0 \Longrightarrow x_2 = vt + 2v\theta + x_0$

$t_3 = t + 3\theta$: $x_3 = v(t + 3\theta) + x_0 \Longrightarrow x_3 = vt + 3v\theta + x_0$

....

$t_n = t + n\theta$: $x_n = v(t + n\theta) + x_0 \Longrightarrow x_n = vt + nv\theta + x_0$

Les espaces parcourus à intervalles de temps successifs égaux à θ sont :

$e_1 = x_1 - x = v\theta$;

$e_2 = x_2 - x_1 = v\theta$;

$e_3 = x_3 - x_2 = v\theta$

....

$e_n = x_n - x_{n-1} = v\theta$

Nous constatons que : $e_1 = e_2 = \ldots = e_n = v\theta$.

Ces distances sont identiques.

2°) Equation horaire du mouvement.

$$x = Vt + x_0\ ;\ \text{avec}\ V = 10\ m.s^{-1}\ \text{et}\ x_0 = 5\ m$$

d' où $\boxed{x = 10t + 5}$

....

Problème 3 : (Eurin-gié, page 20, exo 1.6).

Un point mobile M décrit sur un axe $(O, \vec{\imath})$, un mouvement uniformément varié d'accélération $\vec{a} = 4\vec{\imath}$. A l'instant t = 0, le vecteur vitesse est $\vec{V_0} = -8\,\vec{\imath}$ et le vecteur position est $\overrightarrow{OM_0} = 2\,\vec{\imath}$.

1°) Etablir les équations horaires du mouvement $t \longrightarrow x(t)$ et $t \longrightarrow V(t)$.

2°) Déterminer la date et la position pour lesquelles la vitesse V s'annule.

3°) Entre quelles dates le mouvement est-il accéléré ? Retardé ?

Etudier pour cela le signe du produit scalaire $\vec{a}.\vec{V}$.

..Résolution ....

1°) Equations horaires x(t) et v(t).

- $x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0$

  $a = \|\vec{a}\| = 4\ m.s^{-2}$; $V_0 = -8\ m.s^{-1}$; $x_0 = 2\ m$

  d' où $\boxed{x = 2t^2 - 8t + 2}$

- $V = \frac{dx}{dt} = (2t^2 - 8t + 2)' \Longrightarrow \boxed{V = 4t - 8}$

2°) Date et position pour lesquelles v = 0.

On a : $V = 0 \Longleftrightarrow 4t - 8 = 0 \Longrightarrow t = \frac{8}{4} = 2\ s$

d' où $\boxed{t = 2\ s}$

L'abscisse correspondante est :

$x = 2(2)^2 - 8(2) + 2 = -6\ m$ $\boxed{x = -6\ m}$

3°) Intervalle de temps pendant lesquels le mouvement est accéléré ou retardé.

Etudions le signe de $a.V$.

On a : $a.V = 4(4t - 8) = 0 \Longrightarrow t = 2\ s$

Dressons le tableau de signe :

t(s)	0	2	+∞
$a.V$	−	0	+
Nature	retardé		accéléré

Conclusion :

- $t \in [0\ ;\ 2s[$: mouvement retardé.
- $t \in [2\ ;\ +\infty[$: mouvement accéléré.

....

Problème 4 : (Eurin-gié, page 21, exo 1.7).

Un véhicule animé d'un mouvement rectiligne a une vitesse V_0.

1°) Etablir l'accélération constante qui permet l'arrêt du véhicule sur une distance l.

2°) Calculer la durée du freinage.

Applications numériques : $V_0 = 100\ km/h$; $l = 100$ m.

....Résolution ....

1°) Exprimons l'accélération a

$$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0$$

Pendant le freinage : $V = at + V_0 \Longrightarrow t = -\frac{V_0}{a}$

Alors : $x - x_0 = l = \frac{1}{2}a\left(-\frac{V_0}{a}\right)^2 + V_0t \Longrightarrow l = -\frac{V_0^2}{2a}$

d' où $\boxed{a = -\frac{V_0^2}{2l}}$ AN : $\boxed{a = -3,86\, m.s^{-2}}$

2°) Durée du freinage.

$t = -\frac{V_0}{a} = \frac{100}{3,6.(-3,86)} = 7,19\, s \Longrightarrow \boxed{t \approx 7,2\, s}$

....

Problème 5 : (Eurin-gié, page 21, Exo 1.8,).

Soit $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath}$ le vecteur position d'un point mobile M animé d'un mouvement rectiligne d'équation horaire :

$$t \longrightarrow t^2 - 4t + 3\,; \quad t \geq 0$$

1°) Donner les expressions des vecteurs vitesse et accélération de M.
Quelle est la nature du mouvement ?

2°) Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM_0}$ et le vecteur vitesse $\vec{V}$ du point M à l'instant t = 0.

3°) Montrer que, pour un tel mouvement, le vecteur position de M est de la forme :

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \overrightarrow{V_0}t + \overrightarrow{OM_0}$.

.... Résolution..

1°) Expression du vecteur vitesse.

Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on a :

$$\vec{V} = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt} = \frac{d(t^2-4t+3)}{dt} \Longrightarrow \boxed{\vec{V} = (2t-4)\vec{\imath}}$$

Vecteur accélération.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d[(2t-4)\vec{\imath}]}{dt} = 2\vec{\imath} \Longrightarrow \boxed{\vec{a} = 2\vec{\imath}}$$

Nature du mouvement.

$\vec{a}$ est constant, le mouvement est rectiligne uniformément varié.

2°) A l'instant $t = 0$: $\overrightarrow{OM}_0 = 3\vec{\imath}$ et $\vec{V}_0 = -4\vec{\imath}$

3°) **Montrons que** $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{V_0}t + \overrightarrow{OM_0}$.

On a : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} = (t^2 - 4t + 3)\vec{\imath} \Longrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left[2\vec{\imath}t^2 + (-4\vec{\imath})t\right] + 3\vec{\imath}$

d' où $\boxed{\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{V_0}t + \overrightarrow{OM_0}.}$

Problème 6 : (Eurin-gié, Exo 1.9, page 21).

Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'axe ox horizontal et d'axe oy vertical descendant, la position d'un mobile animé d'un mouvement curviligne de chute libre est donnée par les équations horaires suivantes :

$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 4,9t^2 \end{cases}$$

1°) Exprimer dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les vecteurs position et vitesse du point M.

2°) Montrer que le vecteur accélération $\vec{a}$ est constant. Calculer $\|\vec{a}\|$.

3°) Déterminer les vecteurs positions $\overrightarrow{OM_0}$ et vitesse $\vec{V_0}$ à l'instant initiale.

4°) Montrer que, pour un tel mouvement (vecteur accélération constant), le vecteur positon est de la forme :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{V_0}t + \overrightarrow{OM_0}$$

Résolution

1°) **Vecteur position** OM.

Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{OM} = (3t + 2)\vec{\imath} + 4,9t^2\vec{\jmath}}$

Vecteur vitesse.

$$\begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} = 3 \\ V_x = \frac{dy}{dt} = 9,8t \end{cases} \Longrightarrow \vec{V} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath}$$

d' où $\boxed{\vec{V} = 3\vec{\imath} + 9,8t\vec{\jmath}}$

2°) **Vecteur accélération.**

$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = 9,8\vec{\imath}$ $\boxed{\vec{a} = 9,8\vec{\jmath}}$ soit : $\boxed{\|\vec{a}\| = 9,8\ m.s^{-2}}$

3°) **A l'instant t = 0 :** $\boxed{\overrightarrow{OM_0} = 2\vec{\imath}}$ **et** $\boxed{\vec{V_0} = 3\vec{\imath}}$

4°) Montrons que $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{V_0}t + \overrightarrow{OM_0}$.

On a : $\overrightarrow{OM} = (4,9\vec{j})t^2 + 3\vec{i}t + 2\vec{i} \Longrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(9,8\vec{j})t^2 + 3\vec{i}t + 2\vec{i}$

d' où $\boxed{\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{V_0}t + \overrightarrow{OM_0}}$

....

Problème 7 : (Eurin-gié, page 21, Exo 1.11,).

Un point M décrit une trajectoire circulaire de rayon R = 30 cm et de centre O. Il est repérer par un angle $\alpha = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM})$. Son accélération angulaire α'' est constante et égale à $4\ rad.s^{-2}$. A l'instant t = 0, $\alpha_0 = 0$ et $\omega_0 = 0$.

1°) Etablir les équations horaires du mouvement :

$t \longrightarrow \alpha(t)$, $t \longrightarrow \omega(t)$, $t \longrightarrow V(t)$,

où $V(t)$ est la vitesse linéaire.

2°) Exprimer l'accélération tangentielle a_t et l'accélération normale a_n.

3°) Calculer à l'instant $t = 0,5\ s$ l'angle $\beta = (\vec{V}, \vec{a})$.

.... **Résolution** ....

1°) Equations horaires du mouvement.

*** Abscisse angulaire α(t) :**

$\alpha = \frac{1}{2}\alpha''t^2 + \omega_0 t + \alpha_0 \Longrightarrow \boxed{\alpha = 2t^2}$

*** Vitesse angulaire :**

$\omega = \frac{dx}{dt} = \alpha''t + \omega_0 \Longrightarrow \boxed{\omega = 4t}$

*** Vitesse linéaire :**

$V = R.\omega \Longrightarrow \boxed{V = 1,2t}$

2°) Accélérations tangentielle et normale.

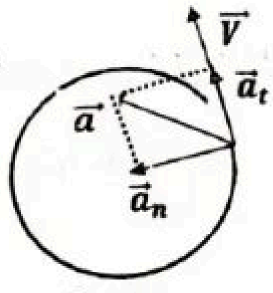
- **Accélération tangentielle :** $a_t = \frac{dV}{dt} \Longrightarrow \boxed{a_t = 1,2\ m.s^{-2}}$
- **Accélération normale :** $a_n = \frac{V^2}{R} \Longrightarrow \boxed{a_n = 4,8t^2\ m.s^{-2}}$

Autre méthode.

- $a_t = R.\alpha'' = 3.10^{-1} \times 4 \Longrightarrow \underline{\underline{a_t = 1,2\ m.s^{-2}}}$
- $a_n = R.\omega^2 = 3.10^{-1} \times (4t)^2 \Longrightarrow \underline{\underline{a_n = 4,8t^2\ m.s^{-2}}}$

3°) Angle $\beta = (\vec{V}, \vec{a})$ à la $t = 0,5\ s$:

$$\tan\beta = \frac{a_n}{a_t} = 4t^2 \Longrightarrow \tan\beta = 4 \times \frac{1}{4} = 1\ ;$$

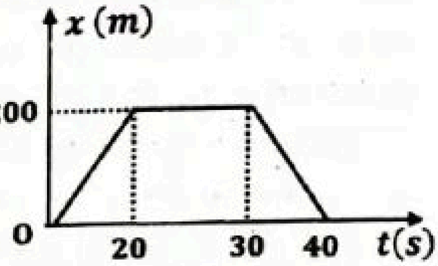


d' où $\boxed{\beta = 45°}$

Problème 8 : (Eurin-gié, page 21, Exo 1.12,).

Un mobile décrit une trajectoire rectiligne. Sa position par rapport à un point O de la trajectoire orientée est repérée à la date t par son abscisse x.

1°) Donner l'équation t ⟶ x(t) du mouvement du mobile durant les diverses étapes du trajet à partir du diagramme des espaces, celui-ci ayant été linéarisé pour simplifier(figure).



2°) Les discontinuités du diagramme linéarisé sont - elles physiquement concevables ?

Résolution

1°) Equations horaires du mouvement durant les diverses étapes du trajet.

1ère phase : $t \in [0\ ;\ 20\ s[$: mouvement rectiligne uniforme.

$$x_1 = V_1 t$$

A l'instant $t = 20\ s$: $x = 200\ m$; alors :

$$V_1 = \frac{x_1}{t} = \frac{200}{20} = 10\ m.s^{-1}$$

d' où $\boxed{x_1 = 10t}$ (m)

2ème phase : $t \in [20\ s\ ;\ 30\ s[$: le mobile est à l'arrêt :

$$\boxed{x_2 = 200\ m}$$

3ème phase : $t \in [30\ s\ ;\ 40\ s[$: mouvement rectiligne uniforme :

$$x_3 = V_3.(t - 30) + 200$$

A l'instant $t = 40\ s$, le mobile revient en O :

$$x = 0 \Longleftrightarrow V_3.t + 200 = 0 \Longrightarrow V_3 = -20\ m.s^{-1}$$

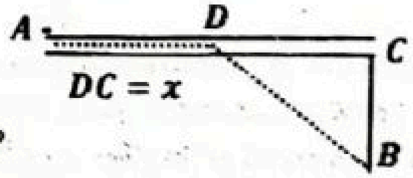
d' où $\boxed{x_3 = -20t + 200}$ (m)

2°) Non, le diagramme n'est qu'une représentation graphique de la fonction $x = f(t)$.

....

Problème 9 : (Eurin-gié, page 22, Exo 1.14,).

Un tracteur partant d'un point A situé sur une route rectiligne doit atteindre un point B situé dans un champ à la distance d = CB de la route, et ce, dans un temps minimal. On suppose les trajets successifs AD et DB rectiligne parcourus à vitesse constante par le tracteur qui va deux fois moins vite dans le champ que sur la route(figure).



1°) Exprimer la relation x ⟶ t(x)

2°) En quel point D le tracteur doit-il quitter la route ?

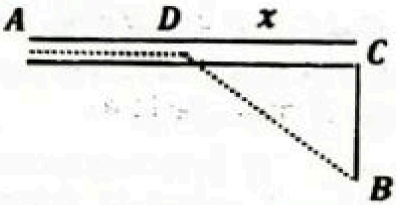
.... **Résolution** ....

1°) Relation x ⟶ t(x) :

La durée totale du trajet est :

$$t = t_1 + t_2$$

Cherchons t_1 et t_2 :



- $AD = Vt_1 \Longrightarrow t_1 = \frac{AD}{V}$

Or : $AD = AC - x$; alors : $t_1 = \frac{AC-x}{V}$

- $DB = V_2 t_2 \Longrightarrow t_2 = \frac{DB}{V_2}$

Mais sur DB, le tracteur va deux fois moins vite : $V_2 = \frac{V}{2}$

Donc : $t_2 = \frac{2DB}{V}$

D'après le théorème de Pythagore :

$$DB^2 = x^2 + d^2 \Longrightarrow DB = \sqrt{x^2 + d^2}$$

d' où $$t_2 = \frac{2\sqrt{x^2 + d^2}}{V}$$

Ainsi, la durée totale du trajet est :

$$t = t_1 + t_2 = \frac{AC-x}{V} + \frac{2\sqrt{x^2 + d^2}}{V} \Longrightarrow \boxed{t = \frac{AC-x+2\sqrt{x^2+d^2}}{V}}$$

2°) Position du point D.

Dérivons t par rapport à x :

$$\frac{dt}{dx} = \left(\frac{AC-x}{V}\right)' + \frac{2}{V}\left(\sqrt{x^2 + d^2}\right)' \Longrightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{V}\left(\frac{2x - \sqrt{x^2 + d^2}}{\sqrt{x^2 + d^2}}\right)$$

t est minimal quand :

$$\frac{dt}{dx} = 0 \iff 2x - \sqrt{x^2 + d^2} = 0 \implies 2x = \sqrt{x^2 + d^2} \quad \text{avec } x > 0$$

$$\iff 4x^2 = x^2 + d^2 \implies 3x^2 = d^2$$

d' où $\boxed{x = \frac{d}{\sqrt{3}}}$

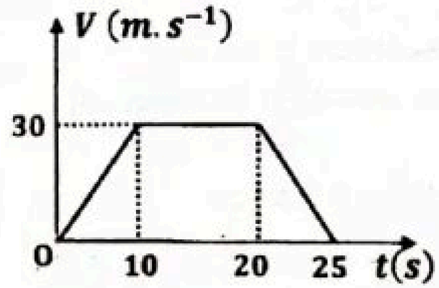
Problème 10 : (Eurin-gié, page 22,Exo 1.17).

Un mobile décrit une trajectoire rectiligne. On a représenté sur la figure le digramme des vitesses, celui-ci ayant été linéarisé pour simplifier.

1°) Donner les équations horaires :

$t \longrightarrow x(t)$; $t \longrightarrow V(t)$;

du mouvement du mobile durant les diverses étapes du mouvement. Déterminer en particulier l'accélération et la distance totale parcourue pour chaque phase du mouvement.



2°) Les discontinuités du diagramme linéarisé sont-elles physiquement concevables ?

....**Résolution** ....

1°) Equations horaires x(t) et V(t) :

1ère phase : $t \in [0\,;\,10s[$: mouvement rectiligne uniformément accéléré.

$$x_1 = \frac{1}{2}a_1t^2 \quad \text{et} \quad V = a_1t$$

Déterminons a_1 :

$$a_1 = \frac{V - V_0}{t - t_0} = \frac{30 - 0}{10 - 0} \qquad a_1 = 3\,m.s^{-2}$$

d' où $\boxed{x_1 = 1,5t^2}$ (m) ; $\boxed{V_1 = 3t}$ $(m.s^{-1})$

2ème phase : $t \in [10\,;\,20s[$: mouvement rectiligne uniforme.

$$x_2 = V_2(t - 10) + x_1\ ;\ V_2 = C^{te} = V_1 = 30\,m.s^{-1}$$

x_1 est la position du mobile à la fin de la 1ère phase.

$$x_1 = 1,5(10)^2 = 150\,m$$

d' où $\boxed{x_2 = 30t - 150}$

Problème 11 : (Eurin-gié, page 22, Exo 1.18).

Une automobile est arrêtée à un feu rouge. Quand le feu passe au vert, l'automobiliste accélère uniformément pendant 8 s avec une accélération de $2\ m.s^{-2}$. Ensuite, l'automobile se déplace à vitesse constante. A l'instant de son démarrage, un camion la dépasse avec une vitesse constante de $12\ m.s^{-1}$ Au bout de combien de temps, et à quelle distance du feu l'automobile rattrapera-t-elle le camion ?

....**Résolution** ....

Temps et distance de rattrapage.

Prenons comme origine des temps l'instant où le feu passe au vert et comme origine des espaces la position du feu tricolore.

*** Equation horaire de l'automobile.**

$$x_A = V_1(t - t_1) + x_1$$

x_1 : position du mobile à la fin de la 1ère phase :

$$x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times (8)^2 = 64\ m$$

La vitesse à la fin de de cette 1ère phase est :

$$V_1 = a_1 t_1 = 2 \times 8 = 16\ m.s^{-1}$$

Donc : $x_A = 16(t - 8) + 64$; d' où $\boxed{x_A = 16t - 64}$ (m)

*** Equation horaire du camion.**

Le camion se déplace à vitesse constante, l'équation horaire de son mouvement s'écrit :

$$x_C = Vt \Longrightarrow \boxed{x_C = 12t \quad (m)}$$

A l'instant où l'automobile rattrape le camion :

$$x_A = x_C \Longrightarrow 16t - 64 = 12t$$

$$4t = 64 \Longrightarrow t = \frac{64}{4} = 16\ s \ ; \text{ d' où } \boxed{t = 16\ s}$$

L'abscisse du lieu de rattrapage est donnée par l'une ou l'autre équation :

Soit : $x = x_C = 12t \Longrightarrow x = 12 \times 16 = 192\ m$

d'où $\boxed{x = 16\ m}$

....

Problème 12 : (Eurin-gié, Exo 1.19, page 22).

Une automobile initialement arrêtée est soumise à une accélération constante égale à $1\ m.s^{-2}$ durant 10 s. Pendant les 20 s qui suivent, l'automobile ralentit avec une décélération constante égale à $5.10^{-2}\ m.s^{-2}$. Enfin l'automobile, freinée, prend un mouvement uniformément varié et s'arrête au bout de 5 s.

Calculer la distance totale parcourue par l'automobile.

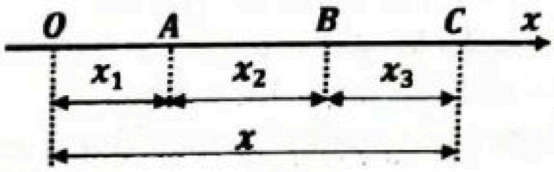
....**Résolution** ....

Distance totale parcourue par l'automobile.

$$x_T = x_1 + x_2 + x_3$$

1ère phase : mouvement accéléré $a_1 > 0$:

$$x_1 = \frac{1}{2}a_1t_1^2 = \frac{1}{2} \times 1(10)^2 = 50\,m$$



$$x_1 = 50\,m$$

La vitesse à la fin de cette 1ère phase est :

$$V_1 = a_1t_1 = 1 \times 10 = 10\,m.s^{-1} \Longrightarrow V_1 = 10\,m.s^{-1}$$

2ème phase : mouvement retardé $a_2 < 0$:

$$x_2 = \frac{1}{2}a_2t_2^2 + V_1t_2 = -\frac{5}{2} \times 10^{-2} \times (20)^2 + 10(20) = 190\,m$$

$$x_2 = 190\,m$$

La vitesse à la fin de cette seconde phase est :

$$V_2 = a_2t_2 + V_1 = -5.10^{-2}(20) + 10 = 9\,m.s^{-1} \Longrightarrow V_2 = 9\,m.s^{-1}$$

3ème phase : mouvement retardé $a_3 < 0$:

$$x_3 = \frac{1}{2}a_3t_3^2 + V_2t_3$$

Déterminons l'accélération a_3.

Au bout de $t_3 = 5\,s$, l'automobile s'arrête :

$$V_3 = a_3t_3 + V_2 = 0 \Longrightarrow a_3 = -\frac{V_2}{t_3} = -\frac{9}{5} \Longrightarrow a_3 = -1,8\,m.s^{-2}$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(-\frac{9}{5}\right) \times (5)^2 + 9(5) = 22,5\,m$$

$$x_3 = 22,5\,m$$

La distance totale parcourue par l'automobile est donc :

$$x_T = x_1 + x_2 + x_3 = 50 + 190 + 22,5 = 262,5\,m$$

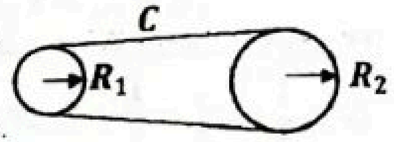
d' où $\boxed{x_T = 262,5\,m}$

....

Problème 13 : (Eurin-gié, page 23, Exo 1.22).

On considère un système de deux poulies reliées par une courroie (figure).

La première poulie a un rayon R_1 = 5 cm et tourne à la vitesse angulaire constante $\omega_1 = 180\ rad.s^{-1}$, la seconde a un rayon R_2 = 30 cm.



1°) Calculer la vitesse angulaire de la seconde poulie.

2°) La courroie porte une marque C.

Calculer l'accélération du point C au cours du mouvement.

.... **Résolution** ....

1°) Vitesse angulaire de la seconde poulie.

La courroie transmet la vitesse :

$$V = \omega_1.R_1 = \omega_2.R_2 \qquad \boxed{\omega_2 = \omega_1 \times \frac{R_1}{R_2}}$$

AN : $\omega_2 = 180 \times \frac{5}{30} = 30\ rad.s^{-1}$

d' où $\boxed{\omega_2 = 30\ rad.s^{-1}}$

2°) Accélération du point C.

On a : $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$

or : • $a_t = \frac{dV}{dt} = 0$; $(V = C^{te})$

• $a_n = \frac{V^2}{R} = 0$ $(R = \infty : M.R.U)$.

d' où $\boxed{a = 0}$

....

Problème 14 : (Eurin-gié, page 23, Exo 1.23).

La Terre tourne uniformément autour de son axe.

Le jour sidéral est égal à $8,616.10^4$ s.

1°) Calculer la vitesse angulaire de rotation de la Terre.

2°) Trouver, en fonction de la latitude, la vitesse et l'accélération d'un point à la surface de la Terre.

3°) Calculer ces grandeurs en un point de l'Equateur.(R= $6,35.10^6$ m).

Pourquoi ne ressent- on pas les effets de cette grande vitesse ?

Réponses : *1°)* $\omega \approx 7,29.10^{-5}\ rad.s^{-1}$; *2°)* $V = R\omega\cos\lambda$; $a = R\omega^2\cos\lambda$;
3°) $V \approx 463\ m.s^{-1}$; $a = 3,4.10^{-2}\ m.s^{-2}$.

..Résolution ....

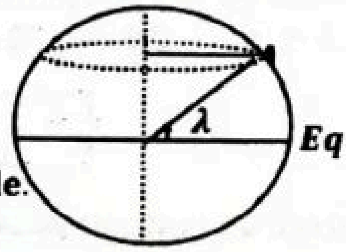
1°) Vitesse angulaire de rotation de la Terre.

Le jour sidéral est le temps que met la Terre pour accomplir un tour complet sur elle-même. Il correspond à la période de rotation de la Terre.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

AN : $\omega = \dfrac{2 \times 3{,}14}{8{,}616.10^4} \approx 7{,}29.10^{-5}\ rad.s^{-1}$

$$\boxed{\omega = 7{,}29.10^{-5}\ rad.s^{-1}}$$



2°) Expression de V et de a en fonction de la latitude.

*** Expression de la vitesse.**

La vitesse du point M situé à la latitude λ est :

$V = \omega r$; or : $\cos\lambda = \dfrac{r}{R} \Longrightarrow r = R\cos\lambda$

d'où $\boxed{V = R\omega\cos\lambda}$

*** Expression de l'accélération**

Le mouvement étant circulaire uniforme :

$$a = a_n = \frac{V^2}{r} = \omega^2 r \Longrightarrow \boxed{a = R\omega^2\cos\lambda}$$

3°) Vitesse et accélération en un point de l'équateur.

A l'équateur : $\lambda = 0° \Longrightarrow \cos\lambda = 1$;

d' où $\boxed{V = R\omega}$ et $\boxed{a = R\omega^2}$

AN : • $V = R\omega = \dfrac{2\pi R}{T} = \dfrac{2 \times 3{,}14 \times 6{,}35.10^5}{8{,}616.10^4} \approx 463\ m.s^{-1}$

• $a = R\omega^2 = \dfrac{4\pi^2 R}{T^2} = \dfrac{4 \times (3{,}14)^2 \times 6{,}35.10^5}{(8{,}616.10^4)^2} = 3{,}4.10^{-2}\ m.s^{-2}$

d' où $\boxed{V \approx 463\ m.s^{-1}}$ $\boxed{a = 3{,}4.10^{-2}\ m.s^{-2}}$

Nous ne pouvons pas ressentir les effets de cette grande vitesse, car nous vivons dans un référentiel lié à la Terre (référentiel terrestre).

....

Problème 15 : (Eurin-gié, page 23 Exo 1.24;).

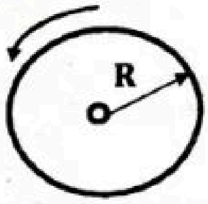
Un rotor est animé d'un mouvement circulaire uniformément varié. On donne, à la date t, l'accélération angulaire $\alpha'' = 40\ rad.s^{-2}$ et la vitesse angulaire $\omega =$

$30\ rad.s^{-1}$. Déterminer les normes des vecteurs vitesse $\vec{V}$ et accélération $\vec{a}$ d'un point M situé à **10 cm** de l'axe du rotor.

....**Résolution**..

Norme du vecteur vitesse $\vec{V}$:

$$V = R\omega = 10^{-1} \times 30 = 3\ m.s^{-1}$$



$$\boxed{V = 3\ m.s^{-1}}$$

Norme du vecteur accélération a :

Dans le repère de Frenet : $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

- $a_t = R\alpha'' = 10^{-1} \times 40 = 4\ m.s^{-2}$
- $a_n = \dfrac{V^2}{R} = \dfrac{(3)^2}{10^{-1}} = 90\ m.s^{-2}$

Donc : $a = \sqrt{(4)^2 + (90)^2} = 90,08\ m.s^{-2} \Longrightarrow \boxed{a = 90,08\ m.s^{-2}}$

....

Problème 16 : (Eurin-gié, page 23, Exo 1.25).

Le mouvement d'une roue, immobile au départ, est accélérée de telle sorte que sa vitesse angulaire croît régulièrement jusqu'à **120 tr.min^{-1}** en **1 min.**
Après avoir tourné un certain temps à cette vitesse, la roue est freinée régulièrement , et il faut **5 *min*** pour l'arrêter.
Le nombre de tours étant de **1 560** , Calculer la durée totale de la rotation.

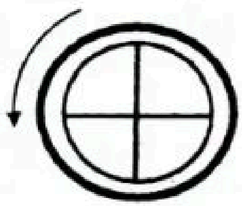
....**Résolution**..

Durée totale de la rotation.

1ère phase :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha'' t^2$$

$$\omega_1 = \alpha'' t_1 \Longrightarrow \alpha'' = \frac{\omega_1}{t_1}$$



Donc: $\alpha_1 = \dfrac{\omega_1}{2} t_1$;

avec $\omega_1 = \dfrac{2\pi N_1}{60} = \dfrac{2 \times 3,14 \times 120}{60} = 12,56\ rad.s^{-1}$;

alors : $\alpha_1 = \dfrac{12,56}{2} \times 60 = 376,8\ rad \Longrightarrow \alpha_1 = 376,8\ rad$

2ème phase :

$$\alpha_2 = \omega_1 t_2 \Longrightarrow t_2 = \frac{\alpha_2}{\omega_1}$$

Déterminons α_2.

3ème phase :

$$\alpha_3 = \frac{1}{2}\alpha'' t_3^2 + \omega_1 t_3$$

$$\omega_3 = \alpha'' t_3 + \omega_1$$

A l'arrêt : $\omega_3 = \alpha'' t_3 + \omega_1 = 0 \Longrightarrow \alpha'' = -\frac{\omega_1}{t_3}$

Alors : $\alpha_3 = \frac{\omega_1}{2} t_3 = \frac{12{,}56}{2} \times 300 \Longrightarrow \alpha_3 = 1\,884\, rad$

On a : $\alpha_2 = \alpha - (\alpha_1 + \alpha_3)$; or : $\alpha = 2\pi n = 9\,796{,}8\, rad$;

donc : $\alpha_2 = 9\,776{,}8 - (376{,}8 + 1\,884) = 7\,536\, rad$

Ainsi : $t_2 = \frac{7536}{12{,}56} = 600\, s \Longrightarrow t_2 = 600\, s = 10\, min$

La durée totale de la rotation est donc :

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 1 + 5 + 10 = 16\, min$$

d' où $\boxed{t = 16\, min}$

....

Problème 17 : (Eurin-gié, page 23, Exo 1.26).

Le rotor d'une machine tourne à $200\, tr.min^{-1}$.

A l'instant t = 0, il est soumis à une accélération angulaire α" supposée constante qui provoque son arrêt en 300 tours.

1°) Exprimer en fonction du temps la vitesse angulaire ω et l(angle α dont tourne le rotor à partir de l'instant t = 0.

2°) Exprimer ω en fonction de α'' et α.

3°) Calculer la valeur de α et la durée du freinage.

....**Résolution** ....

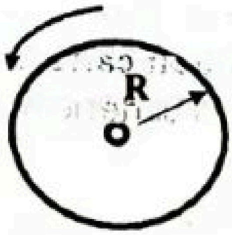
1°) Vitesse angulaire et angle en fonction du temps.

- $\alpha'' = \frac{d\omega}{dt} \Longrightarrow \omega = \alpha'' t + \omega_0$
- $\omega = \frac{d\alpha}{dt} \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{2}\alpha'' t^2 + \omega_0 t + \alpha_0$

2°) Expression de ω en fonction de α'' et α .

En éliminant t entre ω et α, on obtient la relation :

$$\boxed{\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha''(\alpha - \alpha_0)}$$



3°) Valeur de α" et durée du freinage.

A la fin du freinage : $\omega = 0$ et $\alpha - \alpha_0 = 2\pi n$

d' où $$\boxed{\alpha'' = -\frac{\omega_0^2}{4\pi n} = -\frac{\pi . N_0^2}{n}}$$

AN : $\alpha'' = -\frac{3,14 \times (20)^2}{300} = -4,18\, rad.s^{-2}$

d' où $$\boxed{\alpha'' \approx -4,2\, rad.s^{-2}}$$

La durée de freinage est donnée par la relation :

$$\omega = \alpha'' t + \omega_0 = 0 \Longrightarrow \boxed{t = -\frac{\omega_0}{\alpha''}}$$

AN : $t = -\frac{125,6}{-4,2} \approx 30\, s$

d' où $$\boxed{t \approx 30\, s}$$

....

Problème 18.

Les équations paramétriques du mouvement d'un point matériel lancé dans l'espace sont :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = -5t^2 + 4t \end{cases}$$

Les distances sont mesurées en mètres, les durées en secondes et l'axe $(z'z, \vec{k})$ est vertical ascendant. On prendra t ≥ 0.

1°) Trouver l'équation de la trajectoire. Représenter cette trajectoire.

2°) Déterminer le vecteur vitesse du point matériel et sa valeur:

a) lorsque ce point passe par le sommet de la trajectoire ;

b) lorsque ce point rencontre le plan z = 0 ;

c) à la date t = 5 s.

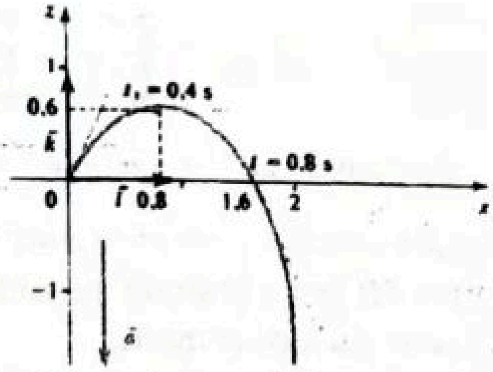
Représenter les vecteurs vitesses correspondants sur la trajectoires.

.... **Résolution** ....

1°) Equation cartésienne de la trajectoire.

L'équation cartésienne de la trajectoire s'obtient en éliminant t entre x et z :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = -5t^2 + 4t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{2} \\ y = 0 \\ z = -5\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases}$$



d' où $$\boxed{z = -\frac{5}{4}x^2 + 2x}$$

La trajectoire est une parabole dont la concavité est tournée vers le bas.

Représentation de la trajectoire.

La courbe $z = f(x)$ est une parabole d'axe vertical et de sommet S $(0,8\,;\,0,6)$.

Elle coupe l'axe des abscisses aux points O $(0\,;\,0)$ et A $(1,6\,;\,0)$.

D'où l'allure de la courbe (figure ci-dessus). :

2°) Vecteur vitesse du mobile au sommet de la trajectoire.

On a : $\vec{V} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}$

avec : $V_x = \frac{dx}{dt} = 2\,;\; V_y = \frac{dy}{dt} = 0\,;\; V_z = \frac{dz}{dt} = -10t + 4$

a) Vecteur vitesse du mobile au sommet de la trajectoire.

Au sommet de la trajectoire :

$$V_z = -10t + 4 = 0 \Longrightarrow t = \frac{2}{5} = 0,4\,s$$

d' où $\boxed{\vec{V}_1 = V_x\vec{\imath} = 2\vec{\imath}} \Longrightarrow \boxed{V_1 = 2\,m.s^{-1}}$

$\vec{V}_1$ est parallèle à l'axe des abscisses.

b) Vecteur vitesse lorsque le mobile rencontre le plan z = 0.

$$z = 0 \Longleftrightarrow -5t^2 + 4t = 0 \Longrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{4}{5} = 0,8\,s \end{cases}$$

D'où les vecteurs vitesses correspondants :

$\boxed{\vec{V}_0 = 2\vec{\imath} + 4\vec{k}}$ et $\boxed{\vec{V}_2 = 2\vec{\imath} - 4\vec{k}}$

Ces vecteurs ont même norme :

$V_0 = V_2 = \sqrt{(2)^2 + (4)^2} \Longrightarrow \boxed{V_0 = V_2 = 4,47\,m.s^{-1}}$

c) Vecteur vitesse à la date t = 5 s.

A la date t = 5 s : $\vec{V} = 2\vec{\imath} + (-10 \times 5 + 4) = 2\vec{\imath} - 46\vec{k}$

d' où $\boxed{\vec{V} = 2\vec{i} - 46\vec{k}}$

Sa norme est : $V_3 = \sqrt{(2)^2 + (-46)^2} \Longrightarrow \boxed{V_3 \approx 46\, m.s^{-1}}$

Ces vecteurs vitesses sont représentés sur la figure.

NB : $\vec{V}$ est à chaque instant tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement.

....

EXERCICES ET PROBLEMES COMPLEMENTAIRES

Problème 19.

Un cycliste suit un parcours qui est formé de 4 parties de longueurs égales. Sur la 1^re^ partie en terrain plein, sa vitesse moyenne est $V_1 = 24$ km/h. Lors de la 2^me^ partie côte à escalader, sa vitesse moyenne est $V_2 = 12$ km/h. Lors de la 3^me^ partie forte descente, sa vitesse moyenne est $V_3 = 72$ km/h. Enfin, dans la dernière partie, faux plat descendant, sa vitesse moyenne est $V_4 = 36$ km/h. Quelle est la vitesse moyenne du cycliste pour l'ensemble du parcours ?

Réponse : $V_m = 24$ km/h.

. ...**Résolution** ....

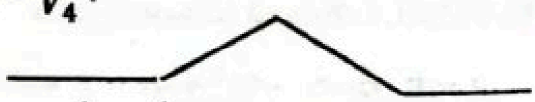
Vitesse moyenne du cycliste.

Par définition :: $V_m = \dfrac{d}{t} \Longrightarrow d = V_m t$

avec : $t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ et $d = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 4l$

or : $t_1 = \dfrac{l}{V_1}$; $t_2 = \dfrac{l}{V_2}$; $t_3 = \dfrac{l}{V_3}$; $t_4 = \dfrac{l}{V_4}$;

donc : $4l = V_m\left(\dfrac{l}{V_1} + \dfrac{l}{V_2} + \dfrac{l}{V_3} + \dfrac{l}{V_4}\right)$



Soit : $4 = V_m\left(\dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{72} + \dfrac{1}{36}\right) \Longrightarrow \dfrac{4}{V_m} = \dfrac{1}{6}$

d' où $\boxed{V_m = 24\, km/h}$

....

Problème 20 :

Lors d'une compétition, trois motocyclistes ont pris le départ simultanément. Le second motocycliste qui faisait 15 km/h de moins que le premier et 3 km/h de plus que le troisième, a franchi la ligne d'arrivée 12 minutes plus tard que le premier et 3 minutes plus tôt que le troisième. On demande :

1°) la longueur du parcours ;

2°) la vitesse de chaque motocycliste ;

3°) le temps mis par chaque motocycliste pour effectuer le parcours.

Réponses : 1°) $x = 90$ km ;

2°) $V_1 = 90$ km/h ; $V_2 = 75$ km/h ; $V_3 = 72$ km/h.

3°) $t_1 = 1$h ; $t_2 = 1$ h12 min ; $t_3 = 1$ h15 min.

....**Résolution** ....

1°) Calcul de la longueur du parcours.

Soit V_2 la vitesse du second motocycliste et x la longueur du parcours.

Par hypothèse : $V_1 = V_2 + 15$ et $V_3 = V_2 - 3$.

Or : $\Delta t_1 = t_2 - t_1 = 12 \text{ min} = \frac{1}{5}$ d'heure $\Longrightarrow \frac{x}{V_2} - \frac{x}{V_2+15} = \frac{1}{5}$ (1)

$\Delta t_2 = t_3 - t_2 = 3 \text{ min} = \frac{1}{20}$ d'heure $\Longrightarrow \frac{x}{V_2-3} - \frac{x}{V_2} = \frac{1}{20}$ (2)

D'où le système : $\begin{cases} \frac{x}{V_2} - \frac{x}{V_2+15} = \frac{1}{5} \\ \frac{x}{V_2-3} - \frac{x}{V_2} = \frac{1}{20} \end{cases} \Longrightarrow 4(V_2 + 15) = 5(V_2 - 3)$

d'où $V_2 = 75$ km/h

En remplaçant V_2 dans l'une ou l'autre équation, on trouve :

$$\boxed{x = 90 \text{ km}}$$

2°) Vitesse de chaque motocycliste.

Les vitesses des motocyclistes étaient donc :

- $V_1 = V_2 + 15 = 75 + 15 = 90$ km/h $\Longrightarrow V_1 = 90$ km/h
- $V_2 = 75$ km/h $\Longrightarrow V_2 = 75$ km/h
- $V_3 = V_2 - 3 = 75 - 3 = 72$ km/h $\Longrightarrow V_3 = 72$ km/h

$$\boxed{V_1 = 90 \text{ km/h}} \quad \boxed{V_2 = 75 \text{ km/h}} \quad \boxed{V_3 = 72 \text{ km/h}}$$

3°) Temps mis par chaque motocycliste.

$t_1 = \frac{x}{V_1} = \frac{90}{90} = 1$ heure $\Longrightarrow t_1 = 1$ h

$t_2 = \frac{x}{V_1} = \frac{90}{75} = 1{,}2$ heure $\Longrightarrow t_2 = 1$ h12 min

$t_3 = \frac{x}{V_3} = \frac{90}{72} = 1{,}25$ heure $\Longrightarrow t_3 = 1$ h15 min

$$\boxed{t_1 = 1 \text{ h}} \quad \boxed{t_2 = 1 \text{ h}12 \text{ min}} \quad \boxed{t_3 = 1 \text{ h}15 \text{ min}}$$

....

Problème 21 .

Les coordonnées d'un mobile ont pour équations horaires :

$$\begin{cases} x = 2\sin\frac{\pi}{2}t \\ y = 2\cos\frac{\pi}{2}t \end{cases}$$

Les unités sont celles du système international (SI).

1°) Quelle est l'équation de la trajectoire du mobile ?

2°) Déterminer le module du vecteur vitesse du mobile à un instant t **quelconque.** Que peut-on conclure ? Représenter le vecteur vitesse aux instants : $t_1 = 1\,s$ et $t_2 = 2,5\,s.$

3°) Calculer à un instant t quelconque le produit $\vec{a}.\vec{V}$ .Que peut- on conclure ?

....**Résolution** ....

1°) Equation de la trajectoire.

Elevons au carré puis ajoutons membre à membre :

$$\begin{cases} x^2 = 4\sin^2\frac{\pi}{2}t \\ y^2 = 4\cos^2\frac{\pi}{2}t \end{cases} \Longrightarrow x^2 + y^2 = 4\left(\sin^2\frac{\pi}{2}t + \cos^2\frac{\pi}{2}t\right)$$

or : $\sin^2\frac{\pi}{2}t + \cos^2\frac{\pi}{2}t = 1$;

d' où $\boxed{x^2 + y^2 = 4}$

La trajectoire est un cercle de centre O et de rayon R = 2 m.

2°) Module du vecteur vitesse à un instant t.

On a : $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$

or : $V_x = \frac{dx}{dt} = \pi.\cos\frac{\pi}{2}t$; $V_y = \frac{dy}{dt} = -\pi.\sin\frac{\pi}{2}t$

donc : $V = \sqrt{\left(\pi.\cos\frac{\pi}{2}t\right)^2 + \left(-\pi.\sin\frac{\pi}{2}t\right)^2} = \pi.\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{2}t + \sin^2\frac{\pi}{2}t}$

d' où $\boxed{V = \pi\, m.s^{-1} \approx 3,14\, m.s^{-1}}$

La norme du vecteur vitesse est constante, le mouvement est uniforme.

Le mobile est donc animé d'un mouvement circulaire uniforme. &

Représentation du vecteur vitesse aux instants $t_1 = 1\,s$ et $t_2 = 2,5\,s.$

A un instant t quelconque le vecteur vitesse est :

$$\vec{V} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} \Longrightarrow \vec{V} = \left(\pi.\cos\frac{\pi}{2}t\right)\vec{\imath} + \left(-\pi.\sin\frac{\pi}{2}t\right)\vec{\jmath}$$

• A la date $t_1 = 1\,s$, on a :

$$\vec{V} = \left(\pi.\cos\frac{\pi}{2}\right)\vec{\imath} + \left(-\pi.\sin\frac{\pi}{2}\right)\vec{\jmath} \Longrightarrow \boxed{\vec{V} = -\pi.\vec{\jmath}}$$

• A la date $t_2 = 2,5\,s = \frac{5}{2}\,s$, on a :

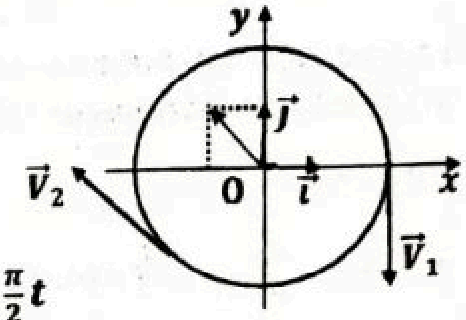
$$\vec{V} = \left(\pi.\cos\frac{5\pi}{4}\right)\vec{\imath} + \left(-\pi.\sin\frac{5\pi}{4}\right)\vec{\jmath}$$

En remarquant que : $\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$; il vient :

$$\vec{V} = \left(-\pi.\cos\frac{\pi}{4}\right)\vec{\imath} + \left(\pi.\sin\frac{\pi}{4}\right)\vec{\jmath} \Longrightarrow \boxed{\vec{V} = \pi\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\jmath}-\vec{\imath})}$$

Les vecteurs vitesses correspondants sont représentés sur la figure ci-dessous.

3°) Calculons le produit scalaire $\vec{a}.\vec{V}$.



Relativement au repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$, on a :

$$\vec{a}.\vec{V} = V_x.a_x + V_y.a_y$$

Déterminons d'abord les coordonnées du vecteur accélération.

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -\frac{\pi^2}{2}\sin\frac{\pi}{2}t \;;\; a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{\pi^2}{2}\cos\frac{\pi}{2}t$$

Ainsi : $\vec{a}.\vec{V} = \left(\pi.\cos\frac{\pi}{2}t\right).\left(-\frac{\pi^2}{2}\sin\frac{\pi}{2}t\right) + \left(-\pi.\sin\frac{\pi}{2}t\right).\left(-\frac{\pi^2}{2}\cos\frac{\pi}{2}t\right)$

d' où $\boxed{\vec{a}.\vec{V} = 0}$

Les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{a}$ sont orthogonaux : le vecteur accélération est normale et centripète. Le mouvement est donc circulaire uniforme.

....

Problème 22 .

Les équations horaires d'un mobile M sont :

$$\begin{cases} x = 2\cos\pi t \\ y = 2\sin\pi t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{(en cm)}$$

1°) Montrer que le mouvement de ce mobile à lieu dans un plan et que sa trajectoire est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

2°) Déterminer :

a) le module du vecteur vitesse du mobile à l'instant t ;

b) le module du vecteur accélération à l'instant t.

3°) Montrer que le vecteur accélération $\vec{a}$ est à chaque instant colinéaire et de sens contraire au vecteur position $\overrightarrow{OM}$ du mobile.

Résolution

1°) Mouvement plan et trajectoire.

La côte $z = C^{te}$, la trajectoire est dans le plan xoy.

L'équation de la trajectoire d'obtient en éliminant t entre x et y :

$$\begin{cases} x = 2\cos\pi t \\ y = 2\sin\pi t \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = 4.\cos^2\pi t \\ y^2 = 4.\sin^2\pi t \\ z = 0 \end{cases}$$

Soit : $x^2 + y^2 = 4(\cos^2\pi t + \sin^2\pi t)$; or : $\cos^2\pi t + \sin^2\pi t = 1$;

d' où $\boxed{x^2 + y^2 = 4}$

La trajectoire est un cercle de centre O et de rayon **R = 2 cm.**

2°) a) Module du vecteur vitesse.

On a : $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$

or : $V_x = \dfrac{dx}{dt} = -2\pi.\sin\pi t$; $V_y = \dfrac{dy}{dt} = 2\pi.\cos\pi t$; $V_z = 0$

donc : $V = \sqrt{(-2\pi.\sin\pi t)^2 + (2\pi.\cos\pi t)^2} = 2\pi\sqrt{\sin^2\pi t + \cos^2\pi t}$

d' où $\boxed{V = 2\pi\ cm.s^{-1} \approx 6,28\ cm.s^{-1}}$

b) Module du vecteur accélération.

On a : $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

or : $a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = -2\pi^2.\cos\pi t$; $a_y = \dfrac{dV_y}{dt} = -2\pi^2.\sin\pi t$; $a_z = 0$

donc : $a = \sqrt{(-2\pi^2.\cos\pi t)^2 + (-2\pi^2.\sin\pi t)^2 + 0^2} = 2\pi^2\ cm.s^{-2}$

d' où $\boxed{a = 2\pi^2\ cm.s^{-2}}$

3°) Colinéarité des vecteurs $\vec{V}$ et $\overrightarrow{OM}$.

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$, on a ::

$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k} \Longrightarrow \vec{a} = (-2\pi^2.\cos\pi t)\vec{\imath} + (-2\pi^2.\sin\pi t)\vec{\jmath}$

soit : $\vec{a} = -\pi^2\ (2\cos\pi t)\vec{\imath} + (2\sin\pi t)\vec{\jmath}$

or : $\overrightarrow{OM} = (2\cos\omega t)\vec{\imath} + (2\sin\omega t)\vec{\jmath}$

d' où $\boxed{\vec{a} = -\pi^2.\overrightarrow{OM}}$

Le vecteur accélération est colinéaire au vecteur position et de sens contraire.

....

Problème 23 .

Sur une voie rectiligne, un véhicule électrique part d'un point A avec une accélération de $0,9\ \mathrm{m.s^{-2}}$. En B, le conducteur coupe le courant et le mouvement devient uniformément retardé d'accélération $0,10\ \mathrm{m.s^{-2}}$ .. En C, à la distance AC = 450 m, le véhicule s'arrête. Calculer :

1°) la vitesse en B ;

2°) la distance AB ;

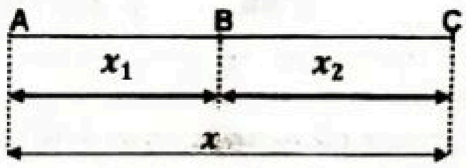
3°) la durée du trajet AC.

....**Résolution** ....

1°) Calcul de la vitesse en B.

1ère phase : $MRUA;\ a_1 > 0.$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}at_1^2 \\ V_1 = a_1t_1 \\ V_1^2 = 2a_1x_1 \end{cases}$$



Soit : $x_1 = \dfrac{V_1^2}{2a_1}$ (1)

2ème phase : $MRUR;\ a_2 < 0.$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}at_2^2 + V_1t_2 \\ V_2 = a_2t_2 + V_1 \\ V_2^2 - V_1^2 = 2a_2x_2 \end{cases}$$

En C, le véhicule s'arrête : $V_2 = V_C = 0 \Longrightarrow V_1^2 = -2a_2x_2$

Soit : $x_2 = \dfrac{V_1^2}{2a_2}$ (2)

La distance totale parcourue est :

$x = x_1 + x_2 \Longrightarrow x = \dfrac{V_1^2}{2a_1} - \dfrac{V_1^2}{2a_1}$; d'où $\boxed{V_1 = \sqrt{\dfrac{2a_1a_2\,x}{a_2 - a_1}}}$

AN : $V_1 = \sqrt{\dfrac{2\times 0,9(-0,1)\times 450}{-0,1 - 0,9}} = 9\ m/s$

d'où $\boxed{V_B = 9\ m/s}$

Calcul de la distance AB.

La distance AB est donnée par la relation :

$$x_1 = \frac{V_1^2}{2a_1} = \frac{(9)^2}{2 \times 0{,}9} = 45\ m \quad ; \quad \text{d' où} \quad \boxed{AB = x_1 = 45\ m}$$

3°) Durée du trajet AC.

La durée totale du trajet est : $t = t_1 + t_2$

Déterminons les durées t_1 et t_2 des deux phases du mouvement.

- $V_1 = a_1 t_1 \Longleftrightarrow t_1 = \frac{V_1}{a_1} \Longrightarrow t_1 = \frac{9}{0{,}9} = 10\ s$
- $V_2 = a_2 t_2 + V_1 = 0 \Longleftrightarrow t_2 = -\frac{V_1}{a_2} \Longrightarrow t_2 = -\frac{9}{-0{,}1} = 90\ s$

Donc : $t = 10 + 90 = 100\ s$;

d'où $\boxed{t = 100\ s = 1min40\ s}$

Problème 24 .

Une automobile démarre lorsque le feu passe au vert avec une accélération $a = 2,5\ m.s^{-2}$ pendant une durée $\theta = 7\ s$, ensuite le conducteur maintient sa vitesse constante. Lorsque le feu passe au vert, un camion roulant à la vitesse $V = 45\ km.h^{-1}$, est situé à une distance $d = 20\ m$ du feu, avant celui-ci.

Il maintient sa vitesse constante.

Dans un premier temps, le camion va doubler l'automobile, puis dans une deuxième phase celle-ci va le dépasser.

En choisissant comme origine des dates l'instant où le feu passe au vert et comme origine des espaces, la position du feu tricolore, déterminer :

1°) les dates des dépassements ;

2°) les abscisses des dépassements ;

3°) les vitesses de l'automobile à ces instants.

……………………………………………**Résolution** ……………………………………………

1°) Temps des dépassements.

* **Phase d'accélération** : dépassement de l'automobile par le camion.

• Equation horaire de l'automobile :

$$x_A = \frac{1}{2} a_1 t^2 \Longrightarrow x_A = 1{,}25t^2$$

• Equation horaire du camion :

$$x_C = Vt - d \Longrightarrow x_C = 12,5t - 20$$

A l'instant où le camion dépasse l'automobile :

$$x_A = x_C \Longrightarrow 1{,}25t^2 = 12,5t - 20 \text{ ; avec } t \le \theta \text{ ;}$$

d' où $\boxed{t = 2\,s}$

• Phase uniforme : dépassement du camion par l'automobile.

• Nouvelle équation horaire de l'automobile :

$$x_A = V_A(t - \theta) + x_1$$

x_1 : position de l'automobile à la fin de la 1ère phase et V_A sa vitesse à la fin de cette phase.

• $x_1 = \frac{1}{2} a_1 \theta^2 = 1,25.(7)^2 = 61,25\,m$;

• $V_A = a_1\theta = 2,5 \times 7 = 17,5\,m.s^{-1}$

d' où $x_A = 17,5t - 61,25$

A l'instant où l'automobile dépasse le camion :

$$x_A = x_C \Longrightarrow 17,5t - 61,25 = 12,5t - 20$$

d' où $\boxed{t = 8,25\,s}$

2°) Abscisses des dépassements.

• $x_1 = x_C = 12,5 \times 2 - 20 = 5\,m$

• $x_2 = 12,5 \times 8,25 - 20 = 83,125\,m$

d' où $\boxed{x_1 = 5\,m}$ $\boxed{x_2 = 83,125\,m}$

3°) Vitesses correspondantes de l'automobile.

• $V_1 = a_1 t_1 = 2,5 \times 2 = 5\,m.s^{-1}$

• $V_2 = a_1\theta = 2,5 \times 7 = 17,5\,m.s^{-1}$

d' où $\boxed{V_1 = 5\,m.s^{-1}}$ $\boxed{V_2 = 17,5\,m.s^{-1}}$

....

Problème 25 .

Dans un repère x o y, les coordonnées d'un mobile M sont données par les relations :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 - 2t + 2 \end{cases}$$

(x et y sont évalués en mètres, et t en secondes).

1°) Déterminer la trajectoire du mobile.

2°) Calculer la vitesse et l'accélération du mobile.

3°) En déduire les composantes tangentielle et normale de l'accélération.

Résolution

1°) Equation de la trajectoire.

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 - 2t + 2 \end{cases}$$

On élimine t entre x et y :

$$\boxed{y = x^2 - 2x + 2}$$

La trajectoire est une parabole.

2°) Vitesse et accélération du mobile.

- $V = \sqrt{V_x^2 + V_t^2}$

On a : $V_x = \frac{dx}{dt} = 1$ et $V_y = \frac{dy}{dt} = 2t - 2$

Donc : $V = \sqrt{1 + (2t-2)^2} \Longrightarrow \boxed{V = \sqrt{4t^2 - 8t + 5}}$ (m/s)

- $a = \sqrt{a_x^2 + a_t^2}$

On a : $a_x = \frac{dV_x}{dt} = 0$ et $a_y = \frac{dV_y}{dt} = 2$

Ainsi : $a = \sqrt{(0)^2 + (2)^2} = 2\, m.s^{-2} \Longrightarrow \boxed{a = 2\, m.s^{-2}}$

3°) Composantes tangentielle et normale de l'accélération.

- Accélération tangentielle.

$$a_t = \frac{dV}{dt} = \left(\sqrt{4t^2 - 8t + 5}\,\right)' \Longrightarrow \boxed{a_t = \frac{4(t-1)}{\sqrt{4t^2-8t+5}}} \quad (m.s^{-2})$$

NB : utiliser $(\sqrt{U})' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$.

- Accélération normale.

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2 \Longleftrightarrow a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} \Longrightarrow \boxed{a_n = \frac{2}{\sqrt{4t^2-8t+5}}} \quad (m.s^{-2})$$

Problème 26 .

On donne l'équation horaire d'un mobile M par rapport au repère$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$$\begin{cases} x = A \cos \omega t \\ y = A \sin \omega t \end{cases}$$

avec $A = 10\, cm$ et $= 10\, rad.s^{-1}$.

1°) Montrer que la valeur de la vitesse du mobile est constante et la calculer.
2°) Montrer que la valeur de son accélération est constante et la calculer.
3°) Quelle est la trajectoire du mobile ? Que représente A ?
4°) Quels sont la direction et le sens du vecteur accélération ?

....**Résolution** ....

1°) Montrons que la valeur de la vitesse est constante.

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin \omega t \; ; \; V_y = \frac{dy}{dt} = A\omega \cos \omega t;$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \Longrightarrow \boxed{V = A\omega = 1\, m.s^{-1}}$$

2°) Montrons que la valeur de l'accélération est constante.

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -A\omega^2 \cos \omega t \; ; \; a_y = \frac{dV_y}{dt} = -A\omega^2 \sin \omega t$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \Longrightarrow \boxed{a = A\omega^2 = 10\, m.s^{-2}}$$

3°) Trajectoire du mobile.

On élimine t entre x et y :

$$\begin{matrix} x^2 = A^2 cos^2 \omega t \\ y^2 = A^2 sin^2 \omega t \end{matrix} \Longrightarrow \boxed{x^2 + y^2 = A^2}$$

Cercle de centre O et de rayon R = A.

4°) Direction et sens du vecteur accélération $\vec{a}$.

On a : $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} \Longrightarrow \vec{a} = (-A\omega^2 \cos \omega t)\vec{\imath} + (-A\omega^2 \sin \omega t)\vec{\jmath}$

soit : $\vec{a} = -\omega^2 \, [\![(A \cos \omega t)\vec{\imath} + (A \sin \omega t)\vec{\jmath} \,]\!]$

or : $\overrightarrow{OM} = (A \cos \omega t)\vec{\imath} + (A \sin \omega t)\vec{\jmath}$

d' où $\boxed{\vec{a} = -\omega^2.\overrightarrow{OM}}$

Le vecteur accélération est normale et centripète.

....

Problème 27 .

Soit la relation : $V^2 = k.g(x - x_0)$, exprimant la vitesse instantanée V d'un mobile en mouvement rectiligne, en fonction de sa position $\mathbf{x}$.

$\mathbf{k}$, $\mathbf{g}$ **et** $\mathbf{x_0}$ sont des constantes dans le temps.

Déterminer l'accélération de ce mobile.

Application numérique : $k = \frac{1}{4}$; $g = 10\, m.s^{-2}$.

....**Résolution** ....

Accélération du mobile.

$$V^2 = .k.g(x - x_0)$$

Dérivons V^2 par rapport au temps : ,

$$V^2 = .k.g(x - x_0) \Longleftrightarrow 2V.\frac{dV}{dt} = k.g\frac{dx}{dt}$$

Or : $a = \frac{dV}{dt}$ et $V = \frac{dx}{dt}$

Alors : $2Va = k.g.V \Longrightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}k.g}$

AN : $a = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times 10 = 1,25\, m.s^{-2} \Longrightarrow \boxed{a = 1,25\, m.s^{-2}}$

....

EXERCICES ET PROBLEMES DE PERFECTIONNEMENT

Problème 28.

Les équations horaires d'un mouvement plan sont :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = \sqrt{4(1 - t^2)} \end{cases}$$

Les unités sont celles du système international (SI).

1°) Quelle est la nature de la trajectoire ?

2°) Déterminer le vecteur vitesse et sa valeur. En déduire les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération (repère de Frenet).

3°) Déterminer les coordonnées cartésiennes du vecteur accélération.

En déduire que le module du **vecteur accélération est indépendant du repère d'étude.**

....**Solution abrégée** ....

Nature du mouvement.

Eliminons t entre x et y :

$$\begin{cases} x^2 = 4t^2 \\ y^2 = 4(1 - t^2) \end{cases} \Longrightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 4}$$

La trajectoire est un cercle de centre O et de rayon R = 2 m.

2°) Vecteur vitesse et sa valeur.

On a : $\vec{V} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath}$

avec : $V_x = \frac{dx}{dt} = 2$; $V_y = \frac{dy}{dt} = -\frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}$ (utiliser $(\sqrt{U})' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$) ;

d' où $$\boxed{\vec{V} = 2\vec{\imath} - \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}\vec{\jmath}}$$

Sa valeur est : $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \Longrightarrow \boxed{V = \frac{2}{\sqrt{1-t^2}}}$ $(m.s^{-1})$

Composantes tangentielle et normale du vecteur accélération.

• $a_t = \frac{dV}{dt} \Longrightarrow \boxed{a_t = \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}}$ (utiliser $\left(\frac{1}{U}\right)' = -\frac{U'}{U^2}$

• $a_n = \frac{V^2}{R} \Longrightarrow \boxed{a_n = \frac{2}{1-t^2}}$

3°) Composantes cartésiennes du vecteur accélération.

$\boxed{a_x = \frac{dV_x}{dt} = 0}$ $\boxed{a_y = \frac{dV_y}{dt} = -\frac{2}{\sqrt{(1-t^2)^3}}}$ utiliser : $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'.V - U.V'}{V^2}$

On en déduit que :

$$\boxed{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \frac{2}{\sqrt{(1-t^2)^3}}} \quad (m.s^{-2})$$

....

Problème 29.

Les équations paramétriques du mouvement d'un mobile M sont données ci-dessous :

$$\begin{cases} x = 1 + \sin 2\pi t \\ y = -2 - 3\cos 4\pi t \end{cases}$$

x et y sont mesurés en mètres, t en secondes.

1°) Déterminer l'équation de la trajectoire du mobile.

2°) Représenter cette trajectoire.

3°) Déterminer à la date t = 0,5 s, les coordonnées des vecteurs vitesse et accélération.

....Résolution ....

1°) Equation de la trajectoire.

$$\begin{cases} x = 1 + \sin 2\pi t \\ y = -2 - 3\cos 4\pi t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \sin 2\pi t \\ y = -2 - 3\cos 4\pi t \end{cases}$$

Pour éliminer t entre x et y , remarquons que :

$$\cos 4\pi t = \cos^2 2\pi t - \sin^2 2\pi t = 1 - 2\sin^2 2\pi t$$

Donc : $\begin{cases} x - 1 = \sin 2\pi t \\ y = -2 - 3(1 - 2\sin^2 2\pi) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - 1 = \sin 2\pi t \\ y = -5 + 6\sin^2 2\pi t \end{cases}$

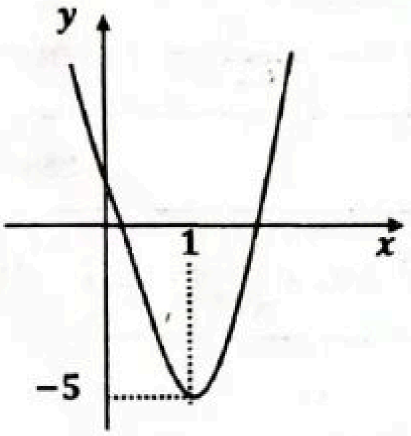
Soit : $y = -5 + 6(x-1)^2$

d' où $\boxed{y = 6(x-1)^2 - 5 \quad \text{ou} \quad y = 6x^2 - 12x + 1}$

La trajectoire est une parabole **(le mobile est animé d'un mouvement parabolique).**

2°) Représentation de la trajectoire.

La trajectoire est une parabole d'axe $x = 1$, de sommet $S(1\,;\,-5)$ et elle passe par les points $A(0\,;1)$, $B\left(1 - \frac{\sqrt{30}}{6}\,;\,0\right)$ et $C\left(1 + \frac{\sqrt{30}}{6}\,;\,0\right)$.



3°) Coordonnées des vecteurs vitesse et accélération à la date t = 0,5 s.

* **Coordonnées du vecteur vitesse :**

$$\begin{cases} V_x = \dfrac{dx}{dt} = 2\pi\cos 2\pi t \\ V_y = \dfrac{dy}{dt} = 12\pi\sin 4\pi t \end{cases}$$

A la date $t = 0,5\,s = \frac{1}{2}\,s$, on obtient :

$$\begin{cases} V_x = 2\pi\cos\pi \\ V_y = 12\pi\sin 2\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} V_x = -2\pi \\ V_y = 0 \end{cases}$$

* **Coordonnées du vecteur accélération. :**

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = -4\pi^2 \sin 2\pi t \\ a_y = \dfrac{dV_y}{dt} = 48\pi^2 \cos 4\pi t \end{cases}$$

A la date $t = 0,5\,s = \frac{1}{2}\,s$, on obtient :

$$\begin{cases} a_x = -4\pi^2 \sin \pi \\ a_y = 48\pi^2 \cos 2\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 48\pi^2 \end{cases}$$

....

Problème 30.

Les coordonnées cartésiennes à l'instant t d'un mobile lancé dans l'espace

sont : $\begin{cases} x = 2a(1 + \cos \omega t) \\ y = a \sin \omega t \end{cases}$

(a et ω sont des constante positives).

1°) Déterminer l'équation de la trajectoire et préciser sa nature.

2°) Donner l'expression et le module **du vecteur vitesse et du vecteur accélération.**

3°) En déduire les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération

4°) Calculer la valeur minimale du rayon de courbure de la trajectoire.

5°) Représenter graphiquement la trajectoire de M et en déduire la vitesse de M aux points particuliers de la trajectoire.

....**Résolution** ....

1°) Déterminons l'équation de la trajectoire et précision sa nature.

Eliminons le temps t entre x et y :

$$: \begin{cases} x = 2a(1 + \cos \omega t) \\ y = a \sin \omega t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2a} - 1 = \cos \omega t \\ \dfrac{y}{a} = \sin \omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{2a} - 1\right)^2 = cos^2 \omega t \\ \dfrac{y^2}{a^2} = sin^2 \omega t \end{cases} \Longrightarrow \left(\frac{x}{2a} - 1\right)^2 + \frac{y^2}{a^2} = cos^2 \omega t + sin^2 \omega$$

Or : $cos^2 \omega t + sin^2 \omega = 1$;

d' où l'équation de la trajectoire :

$$\boxed{\frac{(x - 2a)^2}{(2a)^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

La trajectoire est une ellipse de centre $C(2a\,;\,0)$ de grand axe $4a$ et de petit axe $2a$.

2°) Expression du vecteur vitesse et son module.

On a : $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j}$

Or : $V_x = \frac{dx}{dt} = -2a\omega \sin \omega t$ et $V_y = \frac{dy}{dt} = a\omega \cos \omega t$

d' où $\boxed{\vec{V} = (-2a\omega \sin \omega t\ )\vec{i} + (a\omega \cos \omega t)\vec{j}}$

Le module ou la norme du vecteur vitesse est :

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(-2a\omega \sin \omega t)^2 + (a\omega \cos \omega t)^2} = |a\omega|\sqrt{1 + 3sin^2\omega t}$$

d' où $\boxed{V = a\omega.\sqrt{1 + 3sin^2\omega t}}$

Expression du vecteur accélération et son module.

On a : $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$

Or : $a_x = \frac{dV_x}{dt} = -2a\omega^2 \cos \omega t$ et $a_y = \frac{dV_y}{dt} = -a\omega^2 \sin \omega t$

d' où $\boxed{\vec{a} = (-2a\omega^2 \cos \omega t\ )\vec{i} + (-a\omega^2 \sin \omega t)\vec{j}}$

Le module du vecteur accélération est donné par la relation :

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-2a\omega^2 \cos \omega t\ )^2 + (-a\omega^2 \sin \omega t)^2}$$

d' où $\boxed{a = a\omega^2.\sqrt{1 + 3cos^2\omega t}}$

3°) Composantes tangentielle et normale du vecteur accélération.

*** Accélération tangentielle.**

Par définition : $a_t = \frac{dV}{dt} = \left(a\omega.\sqrt{1 + 3sin^2\omega t}\right)' = a\omega \frac{\left(1 + 3sin^2\omega t\right)'}{2\sqrt{1 + 3sin^2\omega t}}$

$$a_t = a\omega \times \frac{6\omega \cos \omega t.\sin \omega t}{2\sqrt{1 + 3sin^2\omega t}} = 3a\omega^2 \times \frac{2 \cos \omega t.\sin \omega t}{2\sqrt{1 + 3sin^2\omega t}}$$

d' où $\boxed{a_t = \frac{3a\omega^2 \sin 2\omega t}{2\sqrt{1 + 3sin^2\omega t}}}$

*** Accélération normale.**

Dans le repère de Frenet :

$$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n} \Longrightarrow a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

$$a_n^2 = a^2 - a_t^2 = a^2\omega^4(1 + 3cos^2\omega t) - \frac{9a^2\omega^4 cos^2\omega t.sin^2\omega t}{1+3sin^2\omega t}$$

$$a_n^2 = \frac{3a^2\omega^4\left(cos^2\omega t + sin^2\omega t\right)}{1 + 3sin^2\omega t} \Longrightarrow a_n^2 = \frac{4a^2\omega^4}{1 + 3sin^2\omega t}$$

d' où $\boxed{a_n = \frac{2a\omega^2}{\sqrt{1 + 3sin^2\omega t}}}$

4°) Valeur minimale du rayon de courbure de la trajectoire.

Par définition : $a_n = \frac{V^2}{R} \Longrightarrow R = \frac{V^2}{a_n} = \frac{a^2\omega^2\left(1 + 3sin^2\omega t\right)\sqrt{1 + 3sin^2\omega t}}{2a\omega^2}$

Soit : $R = \frac{a}{2}\sqrt{(1 + 3sin^2\omega t)^3} \Longleftrightarrow R = \frac{a}{2}(1 + 3sin^2\omega t)^{\frac{3}{2}}$

Le rayon est minimal lorsque :

$$\frac{dR}{dt} = 0 \Longleftrightarrow \frac{9a\omega}{4}\sqrt{(1 + 3sin^2\omega t)}\sin 2\omega t = 0$$

$$\Longleftrightarrow \sin 2\omega t = 0 \Longrightarrow 2\omega t = \pi$$

d' où $\omega t = \frac{\pi}{2}$ ou $t = \frac{\pi}{2\omega}$

donc : $R_{min} = \frac{a}{2}\sqrt{(1 + 3sin^2\omega t)^3} = \frac{a}{2}\sqrt{\left(1 + 3sin^2\omega.\frac{\pi}{2\omega}\right)^3}$

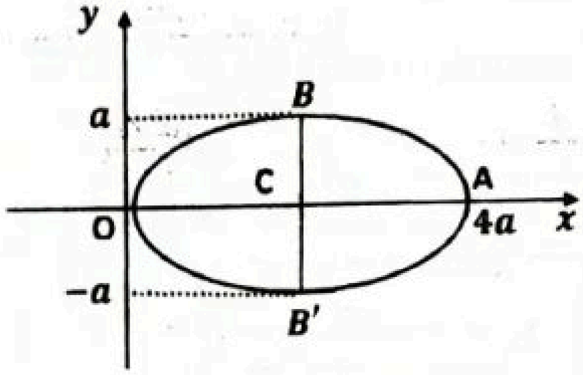
$$R_{min} = \frac{a}{2}\sqrt{\left(1 + 3sin^2\frac{\pi}{2}\right)^3} = \frac{a}{2}\sqrt{(4)^3} = \frac{a}{2}\sqrt{(4)^3}$$

d' où $\boxed{R_{min} = 4a}$

4°) Représentation de la trajectoire.

La trajectoire est une ellipse de centre $C(2a\,;\ 0)$ de grand axe $4a$ et de petit axe $2a$.

Voir figure ci-après.



Vitesse de M aux points particuliers de la trajectoire.

Les 4 sommets de l'ellipse constituent les points particuliers de la trajectoire :

$O(0\,;\,0)$; $A(4a\,;\,0)$; $B(2a\,;\,a)$ et $B'(2a\,;-a)$.

*** Au point $A(4a\,;\,0)$:**

$$\begin{cases} x = 2a(1+\cos\omega t) = 4a \\ y = a\sin\omega t = 0 \end{cases} \Longrightarrow \quad \omega t = 0$$

Alors : $\vec{V} = a\omega\vec{j} \Longrightarrow V = a\omega$

Le vecteur vitesse est colinéaire à $\vec{j}$, de même sens et de module $V = a\omega$.

*** Au point $O(0\,;\,0)$:**

$$\begin{cases} x = 2a(1+\cos\omega t) = 0 \\ y = a\sin\omega t = 0 \end{cases} \Longrightarrow \quad \omega t = \pi$$

Alors : $\vec{V} = -a\omega\vec{j} \Longrightarrow V = a\omega$

Le vecteur vitesse est colinéaire à $\vec{j}$ et de sens opposé, de module $V = a\omega$.

*** Au point $B(2a\,;\,a)$:**

$$\begin{cases} x = 2a(1+\cos\omega t) = 2a \\ y = a\sin\omega t = a \end{cases} \Longrightarrow \quad \omega t = \frac{\pi}{2}$$

Alors : $\vec{V} = -2a\omega\vec{\imath} \Longrightarrow V = a\omega$

Le vecteur vitesse est colinéaire à $\vec{\imath}$ et de sens opposé, de module $V = 2a\omega$.

*** Au point $B'(2a\,;\,-a)$:**

$$\begin{cases} x = 2a(1+\cos\omega t) = 2a \\ y = a\sin\omega t = -a \end{cases} \Longrightarrow \quad \omega t = \frac{3\pi}{2}$$

Alors : $\vec{V} = 2a\omega\vec{\imath} \Longrightarrow V = a\omega$

Le vecteur vitesse est colinéaire à $\vec{\imath}$ et de même sens , de module $V = 2a\omega$.

....

Problème 31 .

Le mouvement d'un point mobile M dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\ \vec{\imath}\,,\vec{j})$ est défini par les équations :

$$\begin{cases} x = 2\sin\omega t \\ y = 2\cos 2\omega t \end{cases}$$

Les unités sont celles du système international (SI).

1°) Montrer que le mouvement est périodique et déterminer la trajectoire du point mobile M.

2°) Déterminer le module du vecteur vitesse à la date t. Exprimer cette vitesse en fonction de l'abscisse x de M à la même date.

3°) Calculer les composantes du vecteur accélération à la date t.

En quels points ce vecteur est-il normal à la trajectoire ?

....**Solution abrégée** ....

1°) Périodicité du mouvement.

On a : $T_x = \frac{2\pi}{\omega}$ et $T_y = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega}$

d' où $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$

Equation de la trajectoire.

On obtient l'équation de la trajectoire en remarquant que :

$\cos 2\omega t = 1 - 2\sin^2\omega t$

d' où $\boxed{y = -x^2 + 2}$ (parabole).

2°) Module du vecteur vitesse.

On a : $V_x = \frac{dx}{dt} = 2\omega\cos\omega t$ et $V_y = \frac{dy}{dt} = -4\omega\sin 2\omega t$

$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ $\quad V = 2\omega\sqrt{\cos^2\omega t + 4\sin^2 2\omega t}$

or : $\sin 2\omega t = 2\sin\omega t.\cos\omega t$;

d' où $\boxed{V = 2\omega|\cos\omega t|.\sqrt{1 + 16\sin^2\omega t}}$

Expression de v en fonction de x.

On a : $V = \omega.\sqrt{4(1 - \sin^2\omega t)} \times \sqrt{1 + 4(2\sin\omega t)^2}$

d' où $\boxed{V = \omega\sqrt{(4 - x^2)(1 + 4x^2)}}$

3°) Composante du vecteur accélération.

$$\boxed{a_x = \frac{dV_x}{dt} = -\omega^2 x \quad \text{et} \quad a_x = \frac{dV_y}{dt} = -4\omega^2 y}$$

Points en lesquels $\vec{a}$ est normal à la trajectoire.

$\vec{a}$ est normal à la trajectoire si $\vec{a}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire :

$$\vec{a}.\vec{V} = a_x.V_x + a_y.V_y = 0$$

On obtient les points suivants :

$$A\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix};\ B\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix};\ C\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{30}}{4}\\ \frac{1}{8}\end{pmatrix};\ D\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{30}}{4}\\ -\frac{1}{8}\end{pmatrix};\ S\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

....

Problème 32 .

Une rame de métro effectue un trajet entre deux stations. Partant de la première station, le conducteur lance sa rame avec une accélération constante $a_1 = 0,85.m.s^{-2}$ au bout d'une durée θ_1. Lorsqu'il juge la vitesse suffisante pour pouvoir atteindre l'autre station, le conducteur coupe définitive le courant. Différentes causes ralentissent le mouvement qui s'effectue alors avec une décélération constante $a_2 = 5.10^{-2}\,m.s^{-2}$ pendant une durée θ_2.

La rame s'arrête à la deuxième station séparée de la première d'une distance $d = 1\,500\,m$.

1°) Ecrire les équations horaires du mouvement **correspondant aux deux phases.**

2°) a) Donner une relation entre a_1, a_2, θ_1 et θ_2.

b) Montrer que $\theta_1 = \sqrt{\frac{2d.\|a_2\|}{\|a_2\|.a_1 + a_1^2}}$

c) En déduire les valeurs de θ_1 **et** θ_2.

3°) Calculer les longueurs l_1 et l_2 de ces deux phases. En déduire la vitesse maximale de la rame et sa vitesse moyenne entre les deux stations.

4°) En utilisant les résultats de la question 3°) représenter graphiquement les fonctions $V = f(t)$ et $a = g(t)$.

....**Résolution** ....

1°) Equations horaires du mouvement correspondant aux deux phases.

1ère phase : MRUA : $a_1 > 0$.

Prenons comme origine des dates le début du mouvement. et comme origine des abscisses la première station.

On a : $x_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 + V_0 t + x_0$ et $V_1 = a_1 t + V_0$

Mais à $t = 0$, $x_0 = 0$ et $V_0 = 0$

d' où $\boxed{x_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2}$ et $\boxed{V_1 = a_1 t}$

2ème phase : MRUR : $a_2 < 0$.

Prenons comme nouvelles origines des dates et d'espaces le début de cette phase.

On a : $x_2 = -\frac{1}{2} |a_2| t^2 + V_1 t$ et $V_2 = a_1 t + V_1$; or : $V_1 = a_1 \theta_1$

d' où $\boxed{x_2 = -\frac{1}{2} |a_2| t^2 + a_1 \theta_1 t}$ et $\boxed{V_2 = -|a_2| t + a_1 \theta_1}$

2°) a) Relation entre a_1, a_2, θ_1 et θ_2.

A l'arrêt : $V_2 = -|a_2|\theta_2 + a_1\theta_1 = 0 \Longrightarrow \boxed{|a_2|\theta_2 = a_1\theta_1}$

b) Montrer que $\theta_1 = \sqrt{\frac{2d.\|a_2\|}{\|a_2\|.a_1 + a_1^2}}$

La distance totale parcourue par la rame est :

$$d = x_1 + x_2 \Longrightarrow d = \frac{1}{2} a_1 \theta_1^2 - \frac{1}{2} |a_2| \theta_2^2 + a_1 \theta_1 \theta_2$$

Or : $|a_2|\theta_2 = a_1\theta_1 \Longrightarrow \theta_2 = \frac{a_1\theta_1}{|a_2|}$

donc: $d = \frac{1}{2} a_1 \theta_1^2 - \frac{1}{2} |a_2| \left(\frac{a_1\theta_1}{|a_2|}\right)^2 + a_1\theta_1 \frac{a_1\theta_1}{|a_2|}$

$$2|a_2|d = a_1|a_2|\theta_1^2 - a_1^2\theta_1^2 + 2a_1^2\theta_1^2 \Longrightarrow 2|a_2|d = (a_1|a_2| + a_1^2)\theta_1^2$$

d' où $\boxed{\theta_1 = \sqrt{\frac{2d.\|a_2\|}{\|a_2\|.a_1 + a_1^2}}}$

c) Déduisons les valeurs de θ_1 et θ_2.

On en déduit :

- $\theta_1 = \sqrt{\frac{2 \times 1\,500 \times 5.10^{-2}}{5.10^{-2} \times 8{,}5.10^{-1} + (8{,}5.10^{-1})^2}} = 14\ s$

- $\theta_2 = \dfrac{a_1\theta_1}{|a_2|} = \dfrac{0{,}85 \times 14}{5.10^{-2}} = 238\ s$

d' où $\boxed{\theta_1 = 14\ s}$ et $\boxed{\theta_2 = 238\ s}$

3°) Calcul des longueurs l_1 et l_2 de ces deux phases.

- $l_1 = \frac{1}{2}a_1\theta_1^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}85 \times (14)^2 = 83{,}3\ m$
- $l_2 = d - l_1 = 1500 - 83{,}3 = 1416{,}7\ m$

d' où $\boxed{l_1 = 83{,}3\ m}$ et $\boxed{l_2 = 1416{,}7\ m}$

Vitesse maximale de la rame.

La vitesse maximale est celle atteinte à la fin de la 1ère phase ($V_{max} = V_1$).

$V_{max} = V_1 = a_1\theta_1 \Longrightarrow V_{max} = 0{,}85 \times (14)^2 = 11{,}9\ m.s^{-1}$

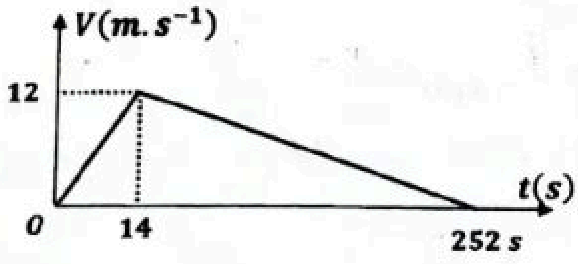
d' où $\boxed{V_{max} \approx 12\ m.s^{-1}}$

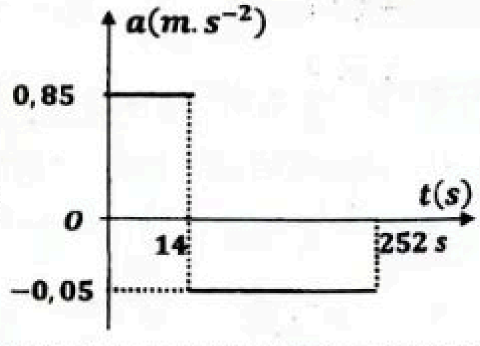
Vitesse moyenne de la rame.

La vitesse moyenne est le rapport de la distance parcourue par la durée du parcours :

$V_m = \dfrac{d}{\theta_1 + \theta_2} = \dfrac{1\,500}{14 + 238} \Longrightarrow \boxed{V_m \approx 12\ m.s^{-1}}$

4°) Représentation graphique des fonctions $V = f(t)$ et $a = g(t)$.





Problème 33 .

La distance Conakry – Kankan est de 662 km par voie ferrée. Le même jour, deux trains ont été dirigés de Conakry vers Kankan. Le 1er train (T_1) est parti à 10 h avec une vitesse de 51 km/h ; le 2me train (T_2) à 10 h20 min avec une vitesse de 45 km/h. Un 3me train (T_3) est parti à 10 h de Kankan vers Conakry avec une vitesse de 54 km/h.

1°) A quelle heure le train (T_1) sera à égales distances des trains (T_2) et (T_3) ?
2°) A quelles distances de Kankan les trois trains se trouveront en ce moment ?

Réponses : 1°) t ≈ 15 h 48 min ;
2°) d_1 = 366,2 km ; d_2 = 416 km ; d_3 = 313,2 km.

..................................**Résolution**..................................

1°) Heure à laquelle T_1 sera à égale distance des trains T_2 et T_3.

Prenons pour origine des espaces Conakry et origine des temps le départ du train T_1 (10 h) et pour sens positif la direction Conakry-Kankan.

Equations horaires des trains :

$$x_1 = V_1 t = 51t \Longrightarrow x_1 = 51t$$
$$x_2 = V_2(t - \Delta t) \Longrightarrow x_2 = 45\left(t - \frac{1}{3}\right)$$
$$x_3 = 662 - V_3 t \Longrightarrow x_3 = 662 - 54t$$

Le train (T_1) sera à égale distance des trains (T_2) et (T_3) si :

$$x_1 = \frac{x_2 + x_3}{2} \Longrightarrow 2x_1 = x_2 + x_3$$

Soit : $102t = 45\left(t - \frac{1}{3}\right) + 662 - 54t$ $\qquad 111t = 647$

d' où $\boxed{t \approx 5{,}8\,h = 5\,h\,48\,min}$

Le train (T_1) sera à égale distance des trains (T_2) et (T_3) à 5 h 48 min après le départ de (T_1), soit à 15 h 48 min :

Autre méthode :

Prenons pour origine des temps l'instant t = 0.

Les équations horaires des mouvements s'écrivent alors :

$$x_1 = V_1(t - t_1) \Longrightarrow x_1 = 51(t - 10)$$
$$x_2 = V_2(t - t_2) \Longrightarrow x_2 = 45\left(t - \frac{31}{3}\right)$$
$$x_2 = 662 - V_3(t - t_3) \Longrightarrow x_3 = 662 - 54(t - 10)$$

Le train (T_1) sera à égale distance des trains (T_2) et (T_3) si :

$$x_1 = \frac{x_2 + x_3}{2} \Longrightarrow 2x_1 = x_2 + x_3$$

On trouve :

$$\boxed{t \approx 15{,}8\,h = 15\,h\,48\,min}$$

2°) Distances des trains de Kankan.

- $d_1 = 662 - x_1 = 662 - 51 \times 5{,}8 = 366{,}2\ km$
- $d_2 = 662 - x_2 = 662 - 45\left(5{,}8 - \frac{1}{3}\right) = 416\ km$
- $d_3 = V_3 t = 54 \times 5{,}8 = 313{,}2\ km$

d' où $\boxed{d_1 = 366{,}2\ km}$ $\boxed{d_2 = 416\ km}$ $\boxed{d_3 = 313{,}2\ km}$

....

Problème 34 .

Sur une route rectiligne , une voiture (1) de longueur l_1 de vitesse V_1 double un autocar de longueur L et de vitesse V. En face, arrive une voiture (2) de longueur l_2 à la vitesse V_2 .

1°) Quelle distance minimum D entre l'avant de la voiture (1) et l'avant de la voiture (2) permet à la voiture (1) de doubler ?

2°) Quelle est alors la distance parcourue sur la route par l'autocar pendant le dépassement ?

On donne : $l_1 = l_2 = 4\ m$; $L = 20\ m$; $V_1 = V_2 = 90\ km/h$; $V = 72\ km/h$.

Réponses : 1°) $D = 240\text{ m}$; **2°)** $x_C = 96\ m$.

.... **Résolution** ....

1°) Calcul de la distance minimum D.

Prenons comme référentiel l'autocar.

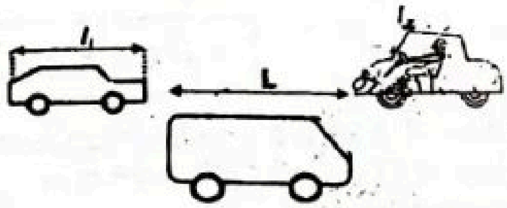
$$x_1 = (V_1 - V)t \quad \text{et} \quad x_2 = (V_2 + V)t$$

La distance minimum est :

$$D = x_1 + x_2 \Longrightarrow D = (V_1 + V_2)t$$

Entre le début et la fin du dépassement :

$$x_1 = (V_1 - V)t = L + l_1 \Longrightarrow t = \frac{L + l_1}{V_1 - V}$$



d' où $$\boxed{D = \left(\frac{V_1 + V_2}{V_1 - V}\right)(L + l_1)}$$

AN : $D = \left(\frac{90 + 90}{90 - 72}\right)(20 + 4) = 240\ m$; d' où $\boxed{D = 240\ m}$

2°) Distance parcourue par l'autocar.

$$\boxed{x_C = \left(\frac{V}{V_1 - V}\right)(L + l_1)}$$ AN : $\boxed{x_C = 96\ m}$

....

Problème 35 .

Une automobile est arrêtée à un feu rouge à une distance $d_1 = 3$ m du feu. Quand le feu passe au vert, l'automobile démarre avec une accélération constante de 3 m.s $^{-2}$. A l'instant de son démarrage, un motard roulant à la vitesse constante de 54 km/h **se trouve à une distance** $d_2 = 24$ m de l'automobile avant celle-ci. Les deux mobiles sont supposés ponctuels.

1°) En choisissant comme origine des dates l'instant où le feu passe au vert et comme origine des espaces la position du feu tricolore, déterminer :

a) les dates des dépassements ;

b) les abscisses des dépassements ;

c) les vitesses de l'automobile à ces instants.

2°) Si le motard roulait à la vitesse de 36 km/h, pourrait-il rattraper **l'automobile ?** Justifier. Quelle serait la distance minimale entre le motard et l'automobile ?

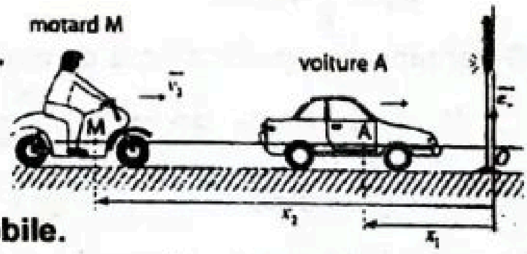
....**Solution abrégée** ....

1°) a) Dates des dépassements.

$$x_A = 1,5t^2 - 3 \quad \text{et} \quad x_M = 15t - 27$$

Il y a rattrapage lorsque :

$$x_A = x_M \Longrightarrow t_1 = 2\,s \quad et \quad t_2 = 8\,s.$$



b) Abscisses des dépassements.

$$x_1 = 15t_1 - 27 \Longrightarrow x_1 = 3\,m$$
$$x_2 = 15t_2 - 27 \Longrightarrow x_2 = 93\,m$$

c) Vitesses correspondantes de l'automobile.

$$V = \frac{dx}{dt} = 3t \Longrightarrow \begin{cases} V_1 = 6\,m/s \\ V_2 = 24\,m/s \end{cases}$$

2°) Si le motard roulait à la vitesse de 36 km/h, l'équation horaire de son mouvement devient :

$$x_M = 10t - 27$$

A l'instant du dépassement : $x_A = x_M \Longrightarrow \Delta = -44 < 0.$

Comme $\Delta < 0$, pas de rattrapage.

Distance minimale entre le motard et l'automobile.

$$x = x_A - x_M \Longrightarrow x = x_A = 1,5t^2 - 10t + 24$$

Cette distance sera minimale si $\dfrac{d(x)}{dt} = 0 \Longrightarrow t = \dfrac{10}{3} = 3,33\,s$

La distance minimale est :

$$\boxed{\Delta x_{min} = 7,33\,m}$$

....

Problème 36 : (Extrait du Bac, SE. 2020),

Un automobiliste roule à la vitesse constante de 120 km.h $^{-1}$ sur une route rectiligne où la vitesse est limitée à 90 km.h $^{-1}$. Un motard de la gendarmerie part à sa poursuite. Il démarre à l'instant où l'automobile passe devant lui. Le motard est animé d'un mouvement uniformément varié tel qu'il atteigne la vitesse de 100 km.h $^{-1}$ en 10 s. Calculer :

1°) la durée de la poursuite ;

2°) la distance parcourue lors de la poursuite ;
3°) la vitesse du motard lorsqu'il rattrape l'automobile.

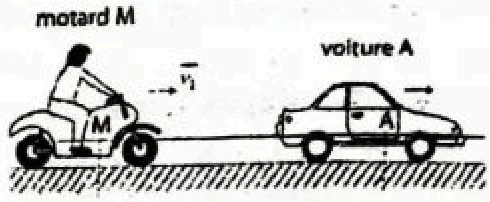
Résolution

a) Calcul de la durée de la poursuite.

Prenons comme origine des espaces la position initiale du motard et comme origine des temps l'instant du démarrage.

• Equation horaire de l'automobile : M.R.U.

$$x_A = V_A t \Longrightarrow x_A = \frac{100}{3} t$$



• Equation horaire du motard : M.R.U.A :

$$x_M = \frac{1}{2} a t^2$$

Déterminons l'accélération a du motard.

$$V_1 = a t_1 \Longrightarrow a = \frac{V_1}{t_1} = \frac{100}{3{,}6 \times 10} = \frac{25}{9} = 2,78\ m.s^{-2}$$

d' où $\quad x_M = \frac{25}{18} t^2$

Le motard rattrapera l'automobile lorsque :

$$x_M = x_A \Longleftrightarrow \frac{25}{18} t^2 = \frac{100}{3} t \Longrightarrow t = 4 \times 6 = 24\ s$$

d' où $\quad \boxed{t = 24\ s}$

b) Distance parcourue lors de la poursuite.

Cette distance s'obtient en remplaçant t dans l'une ou l'autre équation :

Soit : $\quad x = x_A = \frac{100}{3} t \Longrightarrow x = \frac{100}{3} \times 24 = 100 \times 8 = 800\ m$

d' où $\quad \boxed{x = 800\ \mathrm{m}}$

c) Vitesse du motard lorsqu'il rattrape l'automobile.

$$V_M = a t \Longrightarrow V_M = 2,78 \times 24 = 66,66\ m/s$$

d' où $\quad \boxed{V_M \approx 66,7\ m/s}$

Problème 37 .

Deux trains partent à la rencontre l'un de l'autre de deux villes A et B. Ils sont animés de mouvements rectilignes uniformes. Ils se croisent en un point M, alors le 1[er] train achève le reste de son trajet en 1 h 52 min et le deuxième en 2 h 55 min. Calculer :

1°) le temps de rencontre ;

2°) la vitesse de chaque train, sachant que les vitesses des deux trains diffèrent de 12 km/h ;

3°) la distance des villes A et B.

....**Solution abrégée** ....

1°) Calcul du temps de rencontre.

Soit t le temps de rencontre.

On obtient le système :

$$\begin{cases} \dfrac{V_2.t}{V_1} = t_1 = \dfrac{28}{15} & (1) \\ \dfrac{V_1.t}{V_2} = t_2 = \dfrac{35}{12} & (2) \end{cases}$$

On en déduit : $t^2 = \dfrac{49}{9} \Longrightarrow t = \dfrac{7}{3} h$; d'où $\boxed{t = 2\,h20\,min}$

2°) Vitesses des trains.

On a : $\begin{cases} V_1 - V_2 = 12 \\ \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{105}{84} \end{cases}$

d' où $\boxed{V_1 = 60\ km/h}$ $\boxed{V_2 = 48\ km/h}$

3°) Distance AB.

On a : $AB = d = V_1 t + V_2 t \Longrightarrow \boxed{AB = d = (V_1 + V_2)t}$

d' où $\boxed{AB = d = 252\ km}$

....

Problème 38 .

Une route reliant deux localités A et B présente des parties horizontales, des montés et des descentes. La distance AB = 78 km, et quand on marche dans le sens AB la longueur des descentes vaut les $\dfrac{7}{10}$ de la longueur des montés.

Un cycliste, qui a une vitesse de 25 km/h en terrain horizontal, de 15 km/h en monté et de 30 km/h en descente, va de A à B et revient de B à A .

Sachant que la différence du temps qu'il a mis pour faire ces deux trajets est de 24 minutes, on demande :

1°) les longueurs des parties horizontales, des montés et des descentes en allant de A à B ;
2°) les temps employés pour aller de A à B et de B à A.

....**Résolution** ....

1°) Calcul de la longueur des montées, des parties horizontales et des descentes.

Soient x, y et z, les longueurs des parties horizontales, des montés et des descentes.

On a les équations : $x + y + z = 78$ (1) et $z = \frac{7}{10}y$ (2)

Le temps mis pour aller de A à B est : $t_{AB} = \frac{x}{25} + \frac{y}{15} + \frac{z}{30}$;

et celui pour aller de B à A est : $t_{BA} = \frac{x}{25} + \frac{y}{30} + \frac{z}{15}$;

La différence des temps est :

$$\Delta t = t_{AB} - t_{BA} \Longrightarrow \frac{x}{25} + \frac{y}{15} + \frac{z}{30} - \left(\frac{x}{25} + \frac{y}{30} + \frac{z}{15}\right) = \frac{4}{10}$$

Cette équation se réduit à : $y - z = 12$ (3)

D'où le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 78 \\ z = \frac{7}{10}y \\ y - z = 12 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ km} \\ y = 40 \text{ km} \\ z = 28 \text{ km} \end{cases}$$

2°) Calcul des temps mis.

– Le temps mis à l'aller est :

$$t_{AB} = \frac{10}{25} + \frac{40}{15} + \frac{28}{30} \Longrightarrow \boxed{t_{AB} = 4\ h}$$

– Le temps mis au retour est :

$$t_{BA} = \frac{10}{25} + \frac{40}{30} + \frac{28}{15} \Longrightarrow \boxed{t_{BA} = 3\ h36\ min.}$$

....

Problème 39 .

Un automobiliste effectue une liaison entre deux stations A et B sur un tronçon rectiligne d'autoroute. Les deux stations sont séparées par une distance AB = d = 900 m. L'automobiliste démarre de la station A avec une accélération constante $a_1 = 0,4\ m.s^{-2}$. Au bout d'une durée t_1, lorsqu'il juge la vitesse suffisante pour atteindre l'autre station, l'automobiliste coupe définitivement le moteur. Différentes causes ralentissent le mouvement qui s'effectue avec une accélération constante de valeur absolue $0,1\ m.s^{-2}$ -.Calculer :

1°) les durées t_1 et t_2 des deux phases du mouvement ;

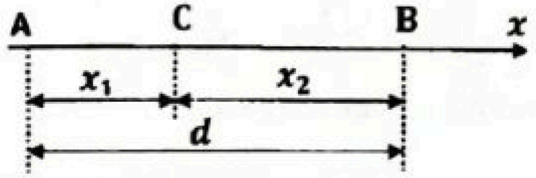
2°) les distances x_1 et x_2 parcourues au cours de ces deux phases ;
3°) la vitesse maximale de **l'automobile et sa vitesse moyenne entre les deux stations.**

Résolution

1°) Durée t_1 et t_2 des deux phases du mouvement ;

1ère phase : MRUA : $a_1 > 0$

Prenons comme origine des dates le début du mouvement. et comme origine des abscisses la station A.



On a : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}a_1t_1^2 \\ V_1 = a_1t_1 \end{cases}$

2ème phase : MRUR : $a_2 < 0$

Prenons comme nouvelles origines le début de cette seconde phase.

On a : $\begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{2}a_2t_2^2 + V_1t_2 \\ V_2 = a_2t_2 + V_1 \end{cases}$

En B, l'automobile s'arrête :

$$V_2 = V_B = 0 \iff a_2t_2 + V_1 = 0 \implies t_2 = -\frac{V_1}{a_2}$$

Soit : $$t_2 = -\frac{a_1}{a_2}t_1 \qquad (1)$$

Donc : $$x_2 = \frac{1}{2}a_2\left(-\frac{a_1}{a_2}t_1\right)^2 + a_1t_1\left(-\frac{a_1}{a_2}t_1\right) \implies x_2 = -\frac{a_1^2}{a_2}t_1^2$$

La distance totale parcourue par l'automobile est :

$$d = x_1 + x_2 \implies d = \frac{1}{2}a_1t_1^2 - \frac{a_1^2}{a_2}t_1^2$$

$$2a_2d = (a_1a_2 - a_1^2)t_1^2 \implies t_1^2 = \frac{2a_2d}{a_1a_2 - a_1^2}$$

d' où $$\boxed{t_1 = \sqrt{\frac{2a_2d}{a_1a_2 - a_1^2}}}$$

AN : $$t_1 = \sqrt{\frac{2\times(-0{,}1)\times 900}{0{,}4\times(-0{,}1) - (0{,}4)^2}} = 30\ s \ ;$$

d' où $$\boxed{t_1 = 30\ s}$$

La durée t_2 est donnée par la relation (1) :

$$t_2 = -\frac{a_1}{a_2}\,t_1 = -\frac{0,4}{(-0,1)} \times 30 = 120\,s$$

d' où $\boxed{t_2 = 120\,s}$

2°) Distances parcourues au cours des deux phases du mouvement ;

On en déduit :

$$x_1 = \frac{1}{2}a_1t_1^2 = \frac{1}{2} \times (0,4)(30)^2 = 180\,m$$

$$x_2 = d - x_1 = 900 - 180 = 720\,m$$

d' où $\boxed{x_1 = 180\,m}$ et $\boxed{x_2 = 720\,m}$

3°) Vitesse maximale de l'automobile.

La vitesse maximale est celle atteinte à la fin de la 1ère phase $(V_{max} = V_1)$.

$$V_{max} = V_1 = a_1t_1 \Longrightarrow V_{max} = 0,4 \times 30 = 12\,m.s^{-1}$$

d' où $\boxed{V_{max} = 12\,m.s^{-1}}$

Vitesse moyenne entre les deux stations.

Par définition : $V_m = \frac{d}{t}$; avec $t = t_1 + t_2$

d' où $\boxed{V_m = \frac{d}{t_1 + t_2}}$

AN : $V_m = \frac{900}{30 + 120} = 6\,m/s \Longrightarrow \boxed{V_m = 6\,m/s}$

Problème 40 .

Un enfant se déplace sur un tapis roulant de longueur 20 m. La vitesse du tapis est de 1 m/s. La différence du temps entre l'aller et le retour est de 5 s.

Calculer la vitesse de l'enfant en admettant qu'elle est constante au cours du mouvement et les temps d'aller et de retour, sachant qu' à l'aller l'enfant va en sens inverse du tapis.

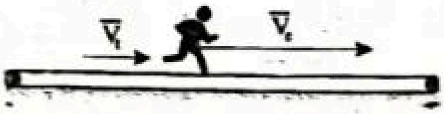
Reponses: $V = 3$ m/s ; $t_1 = 10$ s ; $t_2 = 5$ s.

Résolution

Vitesse de l'enfant.

Prenons comme référentiel le tapis roulant.

- A l'aller : $l = (V_E - V_T)\, t_1 \Longrightarrow t_1 = \dfrac{l}{V_E - V_T}$



- Au retour : $l = (V_E + V_T)\, t_2 \Longrightarrow t_2 = \dfrac{l}{V_E + V_T}$

La différence de temps entre l'aller et le retour est :

$$\Delta t = t_1 - t_2 \Longleftrightarrow \frac{l}{V_E - V_T} - \frac{l}{V_E + V_T} = 5$$

d'où $\boxed{V_E = \sqrt{\frac{2V_T . l}{5} + V_T^2}}$ AN : $\boxed{V_E = 3\ m.s^{-1}}$

Temps d'aller et de retour.

- $t_1 = \dfrac{l}{V_E - V_T} = \dfrac{20}{3-1} \Longrightarrow \boxed{t_1 = 10\ s}$
- $t_2 = \dfrac{l}{V_E - V_T} = \dfrac{20}{3+1} \Longrightarrow \boxed{t_2 = 5\ s}$

Problème 41 .

Un enfant s'amuse à courir sur un tapis roulant d'aéroport, de longueur $L = 100\ m$. Dans le sens de circulation du tapis, il met 16,7 s pour aller d'une extrémité à l'autre, alors que dans l'autre sens il met 25 s.

1°) A quelle vitesse l'enfant court –il ?

2°) Quelle est la vitesse du tapis roulant ?

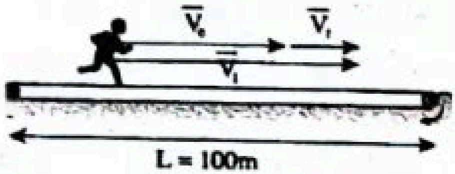
Résolution

1°) Calcul de la vitesse de l'enfant.

Prenons comme référentiel le tapis roulant.

Dans le sens de circulation du tapis :

$l = (V_E + V_T)\, t_1 \Longrightarrow V_E + V_T = \dfrac{l}{t_1}$ (1)



Dans l'autre sens :

$l = (V_E - V_T)\, t_2 \Longrightarrow V_E - V_T = \dfrac{l}{t_2}$ (2)

D'où le système :

$$\begin{cases} V_E + V_T = \dfrac{l}{t_1} \\ V_E - V_T = \dfrac{l}{t_2} \end{cases} \Longrightarrow 2V_E = \frac{l}{t_1} + \frac{l}{t_2}$$

d' où $\boxed{V_E = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)}$ AN : $\boxed{V_E \approx 5\, m.s^{-1}}$

2°) Calcul de la vitesse du tapis.

En retranchant (2) de (1), nous obtenons :

$\boxed{V_T = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)}$ AN : $\boxed{V_T \approx 1\, m.s^{-1}}$

....

Problème 42.

Un canot descend un fleuve. Sa vitesse par rapport à l'eau est égale à 30 km/h. Le courant d'eau à une vitesse constante de 5 km/h. A un certain moment une bouée tombe du canot. Le navigateur s'en aperçoit 1/2 h plus tard et fait demi-tour. Sachant qu'au retour le moteur fonctionne au même régime qu'à l'aller, quelle distance aura parcourue la bouée au fil de l'eau lorsque le navigateur la rattrapera ?

Réponses : $x = 5\ km.$

.... **Résolution** ....

Distance parcourue par la bouée lorsque le navigateur la rattrapera.

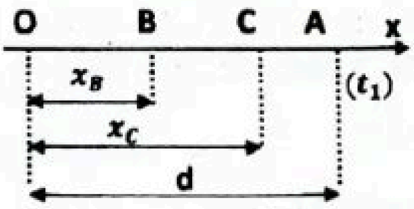
Plaçons-nous dans le référentiel terrestre.

Prenons comme origines des temps et d'espace la tombée de la bouée.

• Distance parcourue par le canot au bout de $t_1 = \frac{1}{2} h$:

$$d = (V_C + V_e)\, t_1 = (30 + 5) \times \frac{1}{2} = 17{,}5\ \text{km}$$

$$d = 17{,}5\ \text{km}$$



• Equation horaire de la bouée :

$$x_B = V_e.t \Longrightarrow x_B = 5t$$

• Equation horaire du canot :

$$x_C = d - (V_C - V_e)(t - t_1) \Longrightarrow x_C = 30 - 25t$$

Le navigateur rattrapera la bouée lorsque :

$$x_C = x_B \Longrightarrow 5t = 30 - 25t$$

$$30t = 30 \Longrightarrow t = 1\ \text{h}$$

La distance parcourue par la bouée a cet instant est donc :

$$x_B = 5 \times 1 = 5\ \text{km} \Longrightarrow \boxed{x_B = 5\ \text{km}}$$

Problème 43 .

Un bateau est en mouvement rectiligne uniforme à la surface de la mer avec le vecteur vitesse $\vec{V}$. Un sous-marin, immobile à la hauteur h, sous la surface, tire un projectile lorsque le bateau passe au-dessus de lui. On suppose que le mouvement du projectile est rectiligne uniforme avec le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_0}$.

On assimile les trois solides à des points.

a) Déterminer l'angle entre $\overrightarrow{V_0}$ **et l'horizontale pour que le projectile atteigne le bateau.**

b) Calculer alors l'instant du choc et les distances parcourues par les deux corps en mouvement. AN : $V = 5\ m.s^{-1}$; $V_0 = 10\ m.s^{-1}$; $h = 50\ m$.

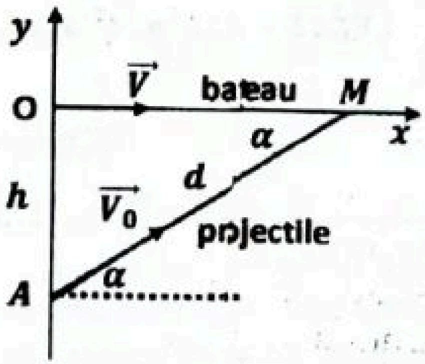
Réponses : a) $\alpha = 60°$; b) $t = 5{,}8\ s$; $d_1 = 29\ m$; $d_2 = 58\ m$.

...Résolution ....

a) Angle entre $\overrightarrow{V_0}$ et l'horizontale.

Choisissons comme origines des dates et d'espace l'instant où le bateau passe à la verticale du sous-marin.

Les équations horaires du bateau et du projectile s'écrivent :



$$\begin{cases} x_B = Vt \\ y_B = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_P = d\cos\alpha \\ y_P = d\sin\alpha - h \end{cases}$$

or : $d = V_0 t$; d' où $\begin{cases} x_P = (V_0\cos\alpha)t \\ y_P = (V_0\sin\alpha)t - h \end{cases}$

Le projectile atteindra le bateau en M lorsque :

$$\begin{cases} x_P = x_B \\ y_P = y_B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (V_0\cos\alpha)t = Vt & (1) \\ (V_0\sin\alpha)t - h = 0 & (2) \end{cases}$$

L'équation (1) donne :

$$(V_0\cos\alpha) = V \Longrightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{V}{V_0}}$$

AN : $\cos\alpha = \dfrac{5}{10} \Longrightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{2}$

d' où $\boxed{\alpha = 60°}$

b) Calcul de l'instant du choc.

L'équation (2) donne :

$$(V_0 \sin\alpha)t - h = 0 \Longrightarrow \boxed{t = \frac{h}{V_0 \sin\alpha}}$$

AN : $t = \frac{50}{10 \sin 60°} = \frac{10}{\sqrt{3}} = 5,77\ s$

d' où $\boxed{t \approx 5,8\ s}$

Calcul des distances parcourues.

Les distances parcourues sont :

- $x_B = Vt = 5 \times 5,8 = 29\ m$
- $d = V_0 t = 10 \times 5,8 = 58\ \mathrm{m}$

d' où $\boxed{x_B = 29\ m}$ $\boxed{d = 58\ \mathrm{m}}$

Autre méthode.

- Dans le triangle rectangle AOM, on a :

$$\cos\alpha = \frac{OM}{AM} = \frac{V.t}{V_0.t} \Longrightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{V}{V_0}}$$

- D'après le théorème de Pythagore :

$$AM^2 = OM^2 + OA^2 \Longleftrightarrow (V_0 t)^2 = (Vt)^2 + h^2$$

$$(V_0^2 - V^2)t^2 = h^2 \Longrightarrow V_0^2\left[1 - \left(\frac{V}{V_0}\right)^2\right]t^2 = h^2$$

$$V_0^2\,(1 - cos^2\alpha)\,t^2 = h^2 \Longrightarrow (V_0^2 sin^2\alpha)t^2 = h^2$$

d' où $\boxed{t = \frac{h}{V_0 \sin\alpha}}$

....

Problème 44 .

Deux automobilistes partent en même temps, le premier du point A, le second du point B, se dirigeant l'un vers l'autre. **A leur point de rencontre C,** ils calculent que le premier a fait 15 km de plus que le deuxième, et que d'après la vitesse de leur marche, il faudra encore au premier 50 min pour atteindre B et au deuxième 1 h 52,5 min pour atteindre A. Calculer :

1°) le temps au bout duquel a lieu la rencontre ;

2°) la vitesse en km/h de chaque automobile ;

3°) la distance AB. (On suppose leurs vitesses constantes).

Résolution

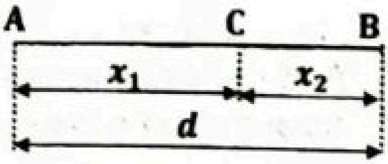
1°) Calcul du temps de rencontre.

Soit t le temps de la rencontre.

Prenons comme origine des espaces pour chaque mobile son point de départ.

On a : $x_1 = V_1 t$ et $x_2 = V_2 t$

Le 1er automobiliste a parcouru 15 km de plus que le deuxième, donc :



$$x_1 - x_2 = 15 \Longrightarrow (V_1 - V_2)t = 15 \quad (1)$$

D'autre part :

$$V_1 t_1 = x_2 \Longrightarrow V_2 t = V_1 t_1 \Longrightarrow \frac{V_2 t}{V_1} = t_1 = 50\ min = \frac{5}{6}\ h$$

donc : $\frac{V_2 t}{V_1} = \frac{5}{6}$ (2)

et $V_2 t_2 = x_1 \Longrightarrow V_1 t = V_2 t_2 \Longrightarrow \frac{V_1 t}{V_2} = t_2 = 1h52,5\ min = \frac{112,5}{60}\ h$

donc : $\frac{V_1 t}{V_2} = \frac{15}{8}$ (3)

D' où le système :

$$\begin{cases} (V_1 - V_2)t = 15 & (1) \\ \frac{V_2 t}{V_1} = \frac{5}{6} & (2) \\ \frac{V_1 t}{V_2} = \frac{15}{8} & (3) \end{cases}$$

On en déduit : $t^2 = \frac{25}{16} \Longrightarrow t = \frac{5}{4}\ h = 1,25\ h$

d' où $\boxed{t = 1\ h15\ min}$

2°) Vitesse en km/h de chaque automobile.

En remplaçant t par sa valeur, le système devient :

$$\begin{cases} V_1 - V_2 = 12 \\ 2V_1 = 3V_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} V_1 = 36 \\ V_2 = 24 \end{cases}$$

d' où $\boxed{V_1 = 36\ km/h}$ $\boxed{V_2 = 24\ km/h}$

3°) Calcul de la distance AB.

La distance AB est :

$$d = AB = x_1 + x_2 \Longrightarrow d = V_1 t + V_2 t$$

d' où $\boxed{d = AB = (V_1 + V_2)t}$ AN : $\boxed{d = AB = 75\ km}$

Problème 45.

Deux villes A et B sont distantes de 900 km. Deux trains partent à la même heure l'un de A vers B, l'autre de B vers A. Ils se croisent au point M.

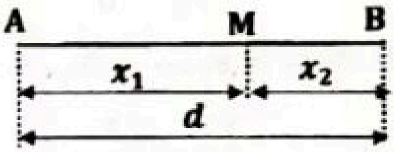
Le premier arrive en B, 4 h après l'instant de croisement et le second arrive en A 16 heures après cet instant. On demande à quelle distance de A a lieu le croisement et quelles sont les vitesses de deux trains (en km/h) ?

Résolution

Calcul de la distance du lieu de croisement.

Prenons comme origine des espaces la ville A et comme origine des dates l'instant des départs. On a les équations horaires :

$x_1 = V_1 t$ et $x_2 = d - V_2 t$



Soit x la distance **AM** : (**AM** $= x$).

Au point de rencontre, on a :

$x_1 = x_2 = x$

On en déduit : $\dfrac{x}{d-x} = \dfrac{V_1}{V_2} \Longrightarrow \dfrac{x}{900-x} = \dfrac{V_1}{V_2}$ (1)

D'autre part :

- $V_1 t_1 = d - x \Longrightarrow V_1 = \dfrac{d-x}{t_1}$
- $V_2 t_2 = x \Longrightarrow V_2 = \dfrac{x}{t_2}$

Donc : $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{(d-x)t_2}{x.t_1} \Longrightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{16(900-x)}{4x}$

soit : $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{4(900-x)}{x}$ (2)

Ainsi, l'équation (1) devient :

$$\frac{x}{900-x} = \frac{4(900-x)}{x} \Longrightarrow x^2 = 4(900-x)^2 \ ; \ (x > 0) ;$$

donc : $x = 2(900 - x) \Longrightarrow 3x = 1\,800$

d' où $\boxed{x = 600\ km}$

Vitesses de deux trains (en km/h).

Remplaçons x par sa valeur dans V_1 et V_2, nous obtenons :

- $V_1 = \frac{d - x}{t_1} = \frac{900 - 600}{4} \Longrightarrow V_1 = 75\ km/h$
- $V_2 = \frac{x}{t_2} = \frac{600}{16} \Longrightarrow V_2 = 37,5\ km/h$

d' où $\boxed{V_1 = 75\ km/h}$ $\boxed{V_2 = 37,5\ km/h}$

....

Problème 46 .

Soit une route rectiligne passant par trois villes A, B et C. B étant le milieu de AC ; on a AB = BC = 40 km.

A midi un cycliste part du point A ; à 13 h un autre cycliste part du point B et à 14 h une automobile part du point ; les trois mobiles se déplaçant d'un mouvement uniforme sur la droite ABC.

1°) Déterminer les vitesses des mobiles sachant que :

a) les vitesses des deux cyclistes sont égales et opposées ;

b) à 15 h, l'automobiliste est à égale distance des deux cyclistes ;

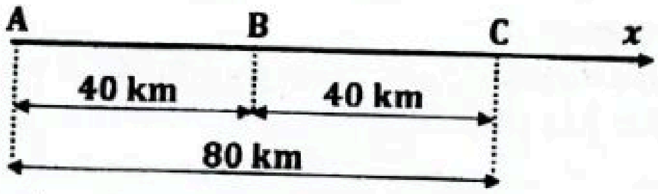
c) à 16 h, l'automobiliste se trouve au même point que le cycliste venu de B.

2°) Préciser alors les abscisses des mobiles à 15 h et à 16 h. Interpréter ?

....**Résolution** ....

Vitesses des mobiles.

Prenons comme origine des abscisses le point A et comme origine des temps midi (12 h).



Les équations horaires du mouvement des cyclistes et de l'automobile sont :

$x_1 = V_1 t$; $x_2 = 40 - V_1(t - 1)$; $x_3 = 80 - V_3(t - 2)$

- A 15 h , c'est-à-dire au temps $t = 3\ h$, on a :

$x_1 = 3V_1$; $x_2 = 40 - 2V_1$; $x_3 = 80 - V_3$

A cet instant : $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} \Longrightarrow x_1 + x_2 = 2x_3$

soit : $V_1 + 2V_3 = 120$ (1)

- A 16 h , c'est-à-dire au temps $t = 4\ h$, on a :

$x_1 = 4V_1$; $x_2 = 40 - 3V_1$; $x_3 = 80 - 2V_3$

A cet instant : $x_3 = x_2 \Longrightarrow 80 - 2V_3 = 40 - 3V_1$

soit : $2V_3 - 3V_1 = 40$ (2)

D' où le système :

$$\begin{cases} V_1 + 2V_3 = 120 \\ 2V_3 - 3V_1 = 40 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} V_1 = 20\ km/h \\ V_3 = 50\ km/h \end{cases}$$

d' où $\boxed{V_1 = V_2 = 20\ \text{km/h}}$ $\boxed{V_3 = 50\ \text{km/h}}$

2°) Abscisses des mobiles à 15 h et à 16 h.

- A 15 h les abscisses des mobiles sont : 60 km ; 0 ; 30 km.
- A 16 h les abscisses des mobiles sont : 80 km ; – 20 km ; – 20 km.

Interprétation .

Nous laissons cette question à la tâche du candidat.

NB. Les temps et les distances sont comptés à partir de l'origine.

....

Problème 47 .

Une automobile de longueur $l = 5\ m$, roulant à la vitesse $V_A = 90\ km.h^{-1}$, arrive derrière un camion de longueur $L = 10\ m$, roulant à la vitesse $V_C = 72\ km.h^{-1}$. Les deux véhicules conservent des vitesses constantes. L'automobile va donc doubler le camion. En admettant que le dépassement commence quand l'avant de l'automobile est à la distance $d_1 = 20\ m$ de l'arrière du camion et se termine quand l'arrière de l'automobile est à la distance $d_2 = 30\ m$ de l'avant du camion, calculer :

1°) la durée du dépassement ;

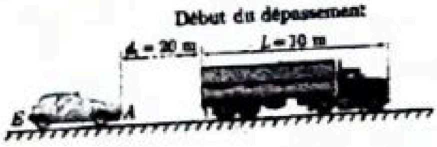
2°) la distance parcourue sur la route par l'automobile **pendant le dépassement**.

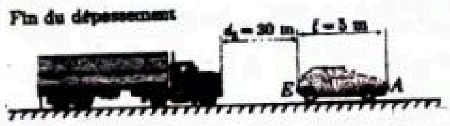
Réponses : *1°)* $t = 13\ s$; *2°)* $d = 325\ m$.

....**Résolution** ....

1°) Durée du dépassement.

Prenons comme référentiel le camion (celui-ci y est immobile).





Dans ce référentiel, l'équation horaire de la voiture est :

$$x = (V_A - V_C)t$$

Entre le début et la fin de dépassement, l'avant A de la voiture a parcouru la distance :

$$x = d_1 + L + d_2 + l = 20 + 10 + 30 + 5 = 65\ m.$$

Donc : $x = (V_A - V_C)t \Longrightarrow \boxed{t = \dfrac{x}{V_A - V_C}}$

AN : $t = \dfrac{65}{25 - 20} = 13\ s$

d' où $\boxed{t = 13\ s}$

2°) Distance parcourue sur la route par l'automobile.

Par rapport à la route, l'automobile se déplace à la vitesse $V_A = 90\ km/h$, elle parcourt ainsi la distance :

$x_A = V_A t = 25 \times 13 = 325\ m \Longrightarrow \boxed{x_A = 325\ m}$

Problème 48.

Sur une autoroute, deux voitures roulent sur la même file avec une vitesse de 40 m/s. Le pare choc avant A de la seconde voiture est à 40 m derrière le pare choc arrière B de la première voiture. **Le véhicule B freine avec une décélération de** 5 m/s². Le conducteur de A distrait freine 2 s après avec la même décélération.

1°) Quelle distance parcourt le deuxième **véhicule avant de commencer à freiner** ?

2°) Quelle distance parcourt le premier véhicule pendant ce temps ?

3°) Quelle est la distance séparant A et B lorsque le second véhicule commence à freiner ?

4°) Quelle est la vitesse du premier véhicule en ce moment ?

5°) En prenant comme origines des dates et d'espace le débute de freinage du second véhicule, établir les équations horaires des mouvement de A et B.

6°) Quand et où le choc entre A et B aura-t-il lieu ?

Rép : 1°) $x_A = 80\ m$; **2°)** $x_B = 110\ m$; **3°)** $d = x_B - x_A = 30\ m$;
4°) $V_B = 30\ m/s$; **5°)** $x_A = -2,5t^2 + 40t$; $x_B = -2,5t^2 + 30t + 30$;
6°) $t = 3\ s$; $x = 97,5\ m$.

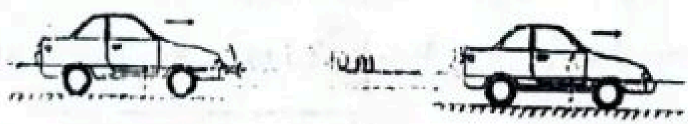
....**Résolution** ....

1°) Distance parcourue par le deuxième véhicule avant de freiner .

Prenons comme origine des dates l'instant où B commence à freiner et comme origine des espaces la position de A à cet instant.

L'équation horaire de A s'écrit :

$x_A = V_A t + x_{0A}$



A l'origine : $x_{0A} = 0$;

donc $x_A = V_A t = 40 \times 2 = 80\ m$

d' où $\boxed{x_A = 80\ m}$

2°) Distance parcourue par le 1er véhicule à cet instant.

Le mouvement de B est uniformément retardé d'équation horaire :

$$x_B = \frac{1}{2} a_B t^2 + V_{0B} t + x_{0B}$$

A l'origine : $V_{0B} = 40\ m/s$ et $x_{0B} = 40\ m$

Donc : $x_B = -2,5t^2 + 40t + 40$

A l'instant $t = 2\ s$: $x_B = -2,5(2)^2 + 40(2) + 40 = 110\ m$

d' où $\boxed{x_B = 110\ m}$

3°) Distance AB lorsque le second véhicule commence à freiner .

On a : $d = AB = x_B - x_A \Longrightarrow d = 110 - 80 = 30\ m$

d' où $\boxed{d = 30\ m}$

4°) Vitesse du premier véhicule à cet instant.

On a : $V_B = \frac{dx_B}{dt} \Longrightarrow V_B = a_B t + V_{0B}$

AN : $V_B = -5 \times (2) + 40 = 30\ m/s$

d' où $\boxed{V_B = 30\ m/s}$

5°) Equations horaires des mouvement de A et B.

- **Equation horaire de A** : MRUR :

$$x_A = \frac{1}{2} a_A t^2 + V_{0A} t + x_{0A}$$

A l'origine, on a : $V_{0A} = 40\ m/s$ **et** $x_{0A} = 0$;

d' où $\boxed{x_A = -2,5t^2 + 40t}$

- **Equation horaire de B** : MRUR :

$$x_B = \frac{1}{2} a_B t^2 + V_{0B} t + x_{0B}$$

A l'origine, on a : $V_{0B} = 30\ m/s$ **et** $x_{0A} = 30\ m$;

d' où $\boxed{x_B = -2,5t^2 + 30t + 30}$

5°) Date et lieu du choc entre A et B.

Le choc entre A et B a lieu lorsque :

$$x_A = x_B \iff -2,5t^2 + 40t = -2,5t^2 + 30t + 30$$

d' où $\boxed{t = 3\,s}$

Le lieu du choc est donné par l'une ou l'autre équation :

soit : $x = x_A = -2,5t^2 + 40t \Longrightarrow x = -2,5(3)^2 + 40(3) = 97,5\,m$

d' où $\boxed{x = 97,5\,m}$

....

Problème 49.

Un automobiliste parcourt une distance $\mathbf{d = 1,25\ km}$ sur une route rectiligne. Son mouvement est uniformément accéléré, puis uniforme, puis uniformément retardé. L'accélération $\boldsymbol{a}$ est égale en valeur absolue à **0** ou à $\mathbf{2,5\ m.s^{-2}}$ et la vitesse moyenne vaut 75 $\mathbf{km/h}$ .Déterminer :

1°) la vitesse maximale de l'automobile ;

2°) la durée de la phase d'accélération ;

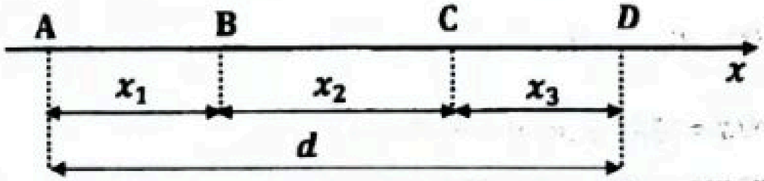
3°) la distance parcourue au cours de chaque phase du mouvement.

Réponses : 1°) $V_{max} = 25\,m.s^{-1}$; **2°)** $t_1 = 10\,s$;

3°) $x_1 = 125\,m$; $x_2 = 1\,km$; $x_3 = 125\,m$.

....**Résolution** ....

1°) Vitesse maximale de l'automobile.



La vitesse maximale est celle atteinte à la fin de la 1ère phase :

$$V_{max} = V_1$$

1ère phase : M.R.U.A : $a_1 > 0$:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}a_1t_1^2 \\ V_1 = a_1t_1 \\ V_1^2 = 2a_1x_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{V_1}{a_1} \\ x_1 = \dfrac{V_1^2}{2a_1} \end{cases}$$

2ème phase: M.R.U : $a_2 = 0$:

$$x_2 = V_1t_2$$

3ème phase : MRUA : $a_3 < 0$:

$$\begin{cases} x_3 = \frac{1}{2} a_3 t_3^2 + V_1 t_3 \\ V_3 = a_3 t_3 + V_1 \\ V_3^2 - V_1^2 = 2a_3 x_3 \end{cases}$$

A l'arrêt : $V_3 = 0$, de plus, d'après l'énoncé $a_3 = a_1$, alors :

$$t_3 = \frac{V_1}{a_1} = t_1 \quad \text{et} \quad x_3 = \frac{V_1^2}{2a_1}$$

La distance totale parcourue par l'automobile est :

$$d = x_1 + x_2 + x_3 \Longrightarrow d = \frac{V_1^2}{2a_1} + V_2 t_2 + \frac{V_1^2}{2a_1} \text{ ; soit : } d = \frac{V_1^2}{a_1} + V_1 t_2$$

Déterminons t_2.

La durée totale du trajet est :

$$t = t_1 + t_2 + t_3 \Longrightarrow t_2 = t - (t_1 + t_3)$$

$$\Longrightarrow t_2 = t - 2t_1$$

D'autre part : $V_m = \frac{d}{t} \Longrightarrow t = \frac{d}{V_m} = \frac{1{,}25}{75} \times 3\,600 = 60\ s$

Ainsi : $d = V_1 t - \frac{V_1^2}{a_1} \Longrightarrow a_1 d = a_1 V_1 t - V_1^2$

D'où l'équation du second degré :

$$V_1^2 - a_1 V_1 t + a_1 d = 0 \Longleftrightarrow V_1^2 - 150 V_1 + 3\,125 = 0$$

$$\Delta' = 2\,500 \Longrightarrow \sqrt{\Delta'} = 50$$

- $V_1 = \frac{75 - 50}{1} = 25\ m/s = 90\ km/h$
- $V_1 = \frac{75 + 50}{1} = 125\ m/s = 540\ km/h$ (à rejeter)..

D' où $\boxed{V_{max} = 25\ m/s = 90\ km/h}$

2°) Durée de la phase d'accélération ;

On a : $t_1 = \frac{V_1}{a_1} = \frac{V_{max}}{a_1} \Longrightarrow t_1 = \frac{25}{2{,}5} = 10\ s$

d' où $\boxed{t_1 = 10\ s}$

3°) Distance parcourue pendant chaque phase du mouvement..

On a : • $x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \frac{1}{2} \times 2,5 \times (10)^2 = 125\, m$

d' où $\boxed{x_1 = 125\, m}$

• $x_2 = V_1 t_2$; or : $t_2 = t - 2t_1 = 60 - 10 = 40\, s$;

donc : $x_2 = 25 \times 40 = 1\,000\, m$

d' où $\boxed{x_2 = 1\, km}$

• $x_3 = \frac{V_1^2}{2a_1} = \frac{(25)^2}{2 \times 2,5} = 125\, m$; d' où $\boxed{x_3 = 125\, m}$

Vérification : $x_1 + x_2 + x_3 = 125 + 1\,000 + 125 = 1\,250\, m = 1,25\, km$

....

Problème 50.

Un point M, animé d'un mouvement rectiligne, part sans vitesse initiale.
Le démarrage se fait avec une accélération égale à 0,8 m.s $^{-2}$, puis le point M, dès qu'il a atteint la vitesse de 8 m.s $^{-1}$ parcourt 24 m à cette vitesse. Enfin au **cours du freinage, M, d'un mouvement uniformément retardé parcourt 8 m jusqu'à l'arrêt.**

1°) Quelle est la durée du mouvement ?

2°) Quelle est la distance totale parcourue ?

3°) Représenter le diagramme des accélérations, vitesses et espaces.

Réponses : 1°) t = 15 s ; 2°) x = 72 m.

....**Résolution** ....

1°) Calcul de la durée du mouvement.

La durée totale du trajet est : $t = t_1 + t_2 + t_3$.

Déterminons t_1 , t_2 et t_3.

1ère phase : mouvement accéléré :

$$V_1 = a_1 t_1 \Longrightarrow t_1 = \frac{V_1}{a_1} = \frac{8}{0,8} = 10\, s$$

2ème phase : mouvement uniforme :

$$x_2 = V_1 t_2 \Longrightarrow t_2 = \frac{x_2}{V_1} = \frac{24}{8} = 3\, s$$

3ème phase : mouvement retardé :

$$x_3 = \frac{1}{2} a_3 t_3^2 + V_1 t_3 \quad \text{et} \quad V_3 = a_3 t_3 + V_1$$

A l'arrêt : $V_3 = 0 \Longleftrightarrow a_3 t_3 + V_1 = 0 \Longrightarrow a_3 = -\frac{V_1}{t_3}$

Alors : $x_3 = \frac{1}{2}\left(-\frac{V_1}{t_3}\right) t_3^2 + V_1 t_3 \Longrightarrow x_3 = \frac{V_1}{2} t_3$

$$t_3 = \frac{2x_3}{V_1} = \frac{2 \times 8}{8} = 2\ s$$

La durée totale du trajet est donc :

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 10 + 3 + 2 = 15\ s$$

d' où $\boxed{t = 15\ s}$

2°) Distance totale parcourue par le mobile.

La distance totale parcourue par le mobile est :

$$x = x_1 + x_2 + x_3$$

Déterminons x_1.

$$x_1 = \frac{1}{2}\, a_1 t_1^2 = \frac{1}{2}\,(0{,}8) \times (10)^2 = 40\ m$$

La distance totale parcourue est donc:

$$x = x_1 + x_2 + x_3 = 40 + 24 + 8 = 72$$

d' où $\boxed{x = 72\ m}$

3°) Diagramme des accélérations

- $t \in [0\,;10\,s]$: $a = 0{,}8\ m.s^{-2}$
- $t \in [10\,;13\,s]$: $a = 0$;
- $t \in [13\,;15\,s]$: $a = -4\ m.s^{-2}$

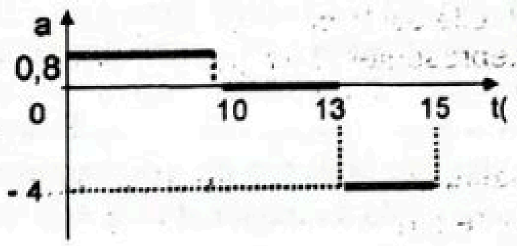


Diagramme des vitesses.

- $t \in [0\,;10\,s]$: $v = 0{,}8t$ (droite passant par O).
- $t \in [10\,;13\,s]$: $v = cte = 8\ m.s^{-1}$ (droite parallèle à l'axe des abscisses).
- $t \in [13\,;15\,s]$: $v = a_3(t - 13) + v_1 \Longrightarrow v = -4t + 60$ (droite affine) .

D'où le diagramme des vitesses :

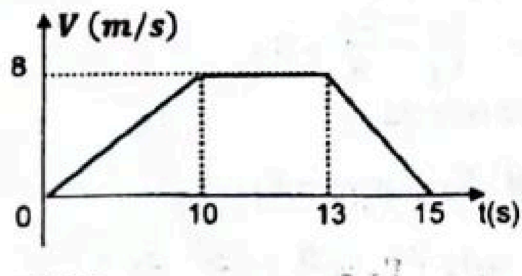


Diagramme des espaces.

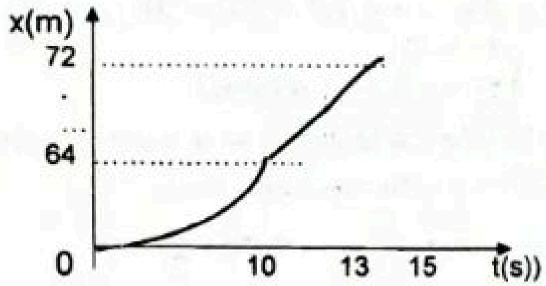
- $t \in [0\,;10\,s]$: $x = \frac{1}{2}a_1t^2 \Longrightarrow x = 0{,}4t^2$ (parabole).

• $t \in [10\,;13\,s]$: $x = V_1(t - 10) + x_1 \Longrightarrow x = 8t - 40$ (droite)

• $t \in [13\,;15\,s]$: $x = \frac{1}{2}a_3(t - 13)^2 + V_1(t - 13) + x_1 + x_2$

soit : $x = -2t^2 + 20t - 378$ (parabole)

D'où le diagramme des espaces :



Problème 51.

Deux automobilistes se suivent à 28 m l'un de l'autre à la vitesse constante de 86,4 km/h. La première voiture freine avec une décélération de 7,7 m/s², la seconde manquant d'adhérence freine avec une décélération de 4,2 m/s².

On suppose que les deux conducteurs commencent à freiner simultanément.

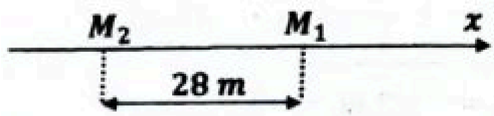
1°) Montrer que les véhicules se heurtent.

2°) Déterminer leur vitesse respective au moment du choc.

3°) Quelle aurait dû être la décélération minimale du second véhicule pour éviter le choc ?

....**Résolution** ....

1°) Montrons que les véhicules se heurtent.



Déterminons les équations horaires du mouvement des deux mobiles M_1 et M_2, en prenant comme origine des dates le début du freinage et comme origine des espaces la position de M_1.

• Equation horaire de M_1 : M.R.U.R : $a_1 < 0$:

$$x_1 = \frac{1}{2}a_1t^2 + V_0t + x_0$$

A l'origine, on a : $V_0 = 86{,}4\ km/h = 24\ m/s$ et $x_0 = 0$.

Donc : $x_1 = \frac{1}{2}a_1t^2 + V_0t \Longrightarrow x_1 = -3{,}85t^2 + 24t$

• Equation horaire de M_2 : M.R.U.R : $a_2 < 0$:

$$x_2 = \frac{1}{2} a_2 t^2 + V_0 t + x_0$$

A l'origine, on a : $V_0 = 24\ m/s$ et $x_0 = -28\ m$.

Donc : $x_2 = \frac{1}{2} a_2 t^2 + V_0 t + x_0 \Longrightarrow x_2 = -2,1t^2 + 24t - 28$

Les deux véhicules se heurtent si :

$$x_1 = x_2 \Longleftrightarrow -3,85t^2 + 24t = -2,1t^2 + 24t - 28$$

Soit : $1,75t^2 = 28 \Longrightarrow \begin{cases} t_1 = 4\ s \\ t_2 = -4\ s \text{ (à rejeter).} \end{cases}$

Donc, les deux véhicules se heurtent à la date $t = 4\ s$ après le freinage.

2°) Vitesse des deux véhicules au moment du choc.

On a : • $V_1 = \frac{dx_1}{dt} = a_1 t + V_0 \Longrightarrow V_1 = -7,7t + 24$

• $V_2 = \frac{dx_2}{dt} = a_2 t + V_0 \Longrightarrow V_2 = -4,2t + 24$

A la date $= 4\ s$, on a :

• $V_1 = -7,7 \times 4 + 24 = -6,8\ m/s$

• $V_2 = -4,2 \times 4 + 24 = 7,2\ m/s$

d' où $\boxed{V_1 = -6,8\ m/s}$ $\boxed{V_2 = 7,2\ m/s}$

3°) Décélération minimale du second véhicule pour éviter le choc.

Soit a la nouvelle accélération de M_2.

Pour éviter le choc, il faut que : $x_2 < x_1$.

Posons : $x_2 = x_1. \Longrightarrow (a + 7,7)t^2 - 56 = 0$

On a doit avoir : $\Delta = 224\ (a + 7,7) < 0 \Longrightarrow a < -7,7\ m/s^2$;

d' où $\boxed{a_{min} = -7,7\ m/s^2}$

Problème 52.

Un avion vole à haute altitude entre deux villes A et B distantes de 6 000 km. A l'aller et au retour, il vole à la même vitesse V par rapport à l'air. Le vent en haute altitude souffle toujours dans la direction de B vers A à la vitesse V_m = 100 km/h. L'avion met une heure et demie de plus à l'aller qu'au retour pour effectuer le trajet.

1°) En déduire la vitesse V à laquelle l'avion vole par rapport à l'air.

2°) Combien de temps dure l'aller A-B ?

3°) Combien de temps dure le retour B-A ?

Réponses : 1°) $V = 900\ km.h^{-1}$; 2°) $t_1 = 7,5\ h = 7\ h30\ min$; 3°) $t_2 = 6\ h$.

.... **Résolution** ....

1°) Vitesse de l'avion par rapport à l'air.

Prenons comme référentiel la Terre.

• A l'aller : $d = (V - V_m)t_1 \Longrightarrow t_1 = \frac{d}{V - V_m}$

• Au retour : $d = (V + V_m)t_2 \Longrightarrow t_2 = \frac{d}{V + V_m}$

La différence de temps entre l'aller et le retour est :

$$\Delta t = t_1 - t_2 \Longrightarrow \Delta t = \frac{d}{V - V_m} - \frac{d}{V + V_m}$$

$$\Delta t = \frac{2d.V_m}{V^2 - V_m^2} \Longrightarrow V^2 - V_m^2 = \frac{2d.V_m}{\Delta t}$$

d' où $\boxed{V = \sqrt{\frac{2d.V_m}{\Delta t} + V_m^2}}$

AN : $V = \sqrt{\frac{2 \times 6000 \times 100}{1,5} + (100)^2} = 900\ km/h$

d' où $\boxed{V = 900\ km/h}$

2°) Temps d'aller AB.

La durée d'un aller est :

$$t_1 = \frac{d}{V - V_m} = \frac{6\,000}{900 - 100} = 7,5\ h = 7\ h30\ min$$

d' où $\boxed{t_1 = 7\ h30\ min}$

3°) Temps du retour B-A.

La durée du retour est :

$t_2 = \frac{d}{V + V_m} = \frac{6\,000}{900 + 100} = 6\ h$; d' où $\boxed{t_2 = 6\ h}$

Remarque :

On pouvait également utiliser la relation :

$\Delta t = t_1 - t_2 \Longrightarrow t_2 = t_1 - \Delta t$

$t_2 = 7,5 - 1,5 \Longrightarrow t_2 = 6\ h$

....

Problème 53.

1°) Une fusée décolle verticalement, sa vitesse par rapport au sol à une date t est $\vec{V}_{F/T}$. La vitesse des gaz par rapport à la Terre est $\vec{V}_{G/T}$. La vitesse des gaz par rapport à la fusée $\vec{V}_{G/F}$. Trouver la relation qui lie ces trois vecteurs vitesses. En déduire la relation entre les normes.

2°) Un jour de pluie, les gouttes tombent verticalement à la vitesse de 28,8 km/h par rapport à la vitre d'un train en mouvement rectiligne uniforme, elles semblent tomber obliquement à la vitesse de 57,6 km/h.

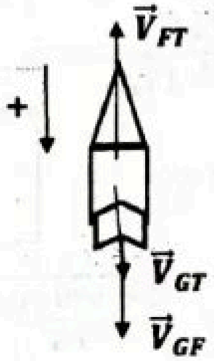
Déterminer cette direction et la vitesse du train.

……………………………………**Résolution** ……………………………………

1°) Relation entre les vecteurs vitesses.

La composition des vitesses donne :

$$\boxed{\vec{V}_{GT} = \vec{V}_{GF} + \vec{V}_{FT}}$$



Relation entre les normes des vecteurs vitesses.

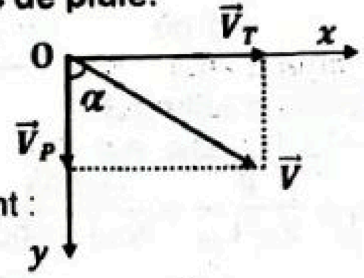
En projetant sur la verticale descendante on obtient :

$$\boxed{V_{GT} = V_{GF} - V_{FT}} \quad \text{ou} \quad \boxed{V_{GF} = V_{GT} + V_{FT}}$$

2°) Direction des vecteurs vitesses des gouttes de pluie.

Si V_T est la vitesse du train par rapport à la Terre, V_P la vitesse des goutes par rapport au train, la vitesse V des gouttes par rapport à la Terre est :

$$\vec{V} = \vec{V}_P + \vec{V}_T$$



En projetant sur les axes de coordonnées on obtient :

$$\begin{cases} V \sin\alpha = V_T & (1) \\ V \cos\alpha = V_P & (2) \end{cases}$$

De (2) on tire :

$$V \cos\alpha = V_P \Longrightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{V_P}{V}}$$

AN : $\cos\alpha = \frac{28,8}{57,6} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{\alpha = 60°}$

Vitesse du train.

La vitesse du train est donnée par la relation (1) :

$$\boxed{V_T = V \sin\alpha}$$

AN : $V_T = 57,6.\sin 60° = 57,6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 49,8\ km/h$

d' où $\boxed{V_T = 49,8\ km/h \approx 13,8\ m/s}$

Problème 54.

Un train A de 150 m de long roule à la vitesse de 108 km/h parallèlement à un train B de longueur 250 m se déplaçant avec une vitesse de 72 km/h.

Quelles seront :

1°) la durée de dépassement complet si les trains roulent dans le même sens .

2°) la durée de croisement complet si les trains roulent dans des sens opposés

Résolution

1°) Durée de dépassement si les trains roulent dans le même sens.

Au début de dépassement les arrières des trains coïncident (fig 1).

Prenons comme référentiel le train B.

Dans ce référentiel, l'arrière de A parcourt la distance :

$$x_A = (V_V - V_b)t$$

A la fin de dépassement :

$$x_A = L \Longrightarrow (V_A - V_B)t = L$$

d' où $\boxed{t = \frac{L}{V_A - V_B}}$

AN : $t = \frac{250}{30 - 20} = \frac{250}{10} = 25\ s \Longrightarrow \boxed{t = 25\ s}$

2°) Durée de dépassement si les trains roulent en sens opposés.

Au début de croisement l'arrière de A et l'avant de B coïncident (fig 2).

Dans le référentiel lié à B, l'arrière de A parcourt la distance :

$$x_A = (V_V + V_b)t$$

A la fin de croisement :

$$x_A = L \Longrightarrow (V_A + V_B)t = L$$

d' où $\boxed{t = \frac{L}{V_A + V_B}}$

AN : $t = \frac{250}{30 + 20} = \frac{250}{50} = 5\ s \Longrightarrow \boxed{t = 5\ s}$

Problème 55. * .**

Un automobiliste qui roule à 30 m/s aperçoit soudain un camion à 60 m devant lui roulant dans la même direction à 10 m/s. La décélération minimale de l'automobile a un module de 5 m/s^2.

a) Une collision va-t-elle se produire si le temps de reflexe de l'automobiliste est nul ? Si oui quand ?

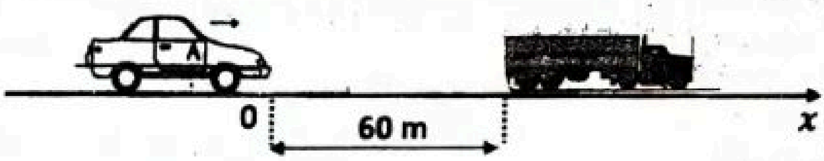
b) Si l'on tient compte du temps de reflexe de l'automobiliste qui est de 0,5 s ; quel est le module de la décélération minimale nécessaire pour éviter la collision ?

Réponses : a) $\boldsymbol{Non}$ **; b)** $\boldsymbol{a = -4\ m.s^{-2}\ ;\ \|\vec{a}\| = 4\ m.s^{-2}}$ **.**

..Résolution ....

a) Une collision va-t-il se produire si le temps de reflexe est nul ($\theta = 0$) ?

Prenons comme origine des temps l'instant où l'automobiliste aperçoit le camion et comme origine des espaces la position de l'automobile à cet instant.



On a , les équations horaires :

- $x_A = \frac{1}{2} at^2 + V_0 t \Longrightarrow x_A = -2,5t^2 + 30t$
- $x_C = V_C t + x_0 \Longrightarrow x_C = 10t + 60$

1ère méthode.

Temps mis par l'automobile jusqu'à l'arrêt :

$$V_A = \frac{dx_A}{dt} = -5t + 30 = 0 \Longrightarrow t = 6\,s$$

Distance parcourue par chacun des mobiles à cet instant :

- $x_A = -2,5(6)^2 + 30(6) = 90\,m \Longrightarrow \boxed{x_A = 90\,m}$
- $x_C = 10(6) + 60 = 120\,m \Longrightarrow \boxed{x_C = 120\,m}$

Comme $x_A < x_C$, il n' y a pas de collision.

2ème méthode.

La collision se produira lorsque : :

$$x_A = x_C \Longleftrightarrow -2,5t^2 + 30t = 10t + 60$$

$$2,5t^2 - 20t + 60 = 0 \Longrightarrow t^2 - 8t + 24 = 0$$

$\Delta = 64 - 4(24) = -32 < 0$. pas de solution.

Donc, il n' y a pas de collision.

b) Décélération minimale si le temps de reflexe est $\theta = 0,5\,s$.

• Distance parcourue par l'automobile avant le freinage :

$x_1 = V_A\theta = 30.(0,5) = 15\ m.$

L'équation horaire de l'automobile est alors :

$$x_A = \frac{1}{2}a(t-0,5)^2 + 30(t-0,5) + 15$$

La collision se produira si :

$$x_A = x_C \Longrightarrow \frac{1}{2}a(t-0,5)^2 + 30(t-0,5) + 15 = 10t + 60$$

Soit : $at^2 + (40-a)t + 0,25a - 120 = 0$

$\Delta = 1600 + 400a$

La décélération minimale pour éviter la collision correspond à :

$\Delta = 0 \Longleftrightarrow 1600 + 400a = 0 \Longrightarrow a = -4\ m.s^{-2}$

d' où $\boxed{|a| = 4\ m.s^{-2}}$

....

Problème 56.

Un véhicule doit aller de A à B avec une vitesse de $64\ \mathrm{km.h^{-1}}$. Pendant **3 heures** il va à cette vitesse. Puis un accident l'oblige à s'arrêter 50 *minutes* et ensuite à emprunter une autre voie qui augmente le trajet de **31 km**. D'autre part, la vitesse horaire après l'accident est augmentée de **6 km** et finalement le retard est de **1 h 5 min**. Trouver la distance AB et la durée du déplacement.

Réponse : $AB = x = 336\ km$; $t = 6\ h 20\ min.$

....**Résolution** ....

Trouvons la distance AB.

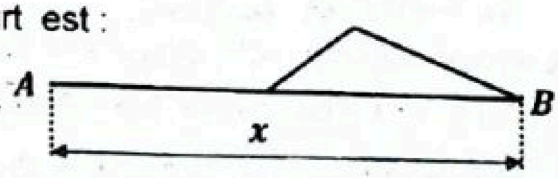
Soit x la distance AB, exprimée en km.

• S'il n' y a pas eu d'accident, la durée du trajet serait :

$$t_1 = \frac{x}{64}$$

• Par suite d'accident, la durée du parcourt est :

$$t_2 = 3 + \frac{50}{60} + \frac{x - 3\times 64 + 31}{70}$$



Le retard accusé est de :

$$\Delta t = t_2 - t_1 \Longrightarrow 3 + \frac{50}{60} + \frac{x - 3\times 64 + 31}{70} - \frac{x}{64}$$

Or : $\Delta t = 1\ h\ 5\ min = 1 + \frac{1}{12}$

Donc : $$1 + \frac{1}{12} = 3 + \frac{50}{60} + \frac{x - 3\times 64 + 31}{70} - \frac{x}{64}$$

Soit : $\left(\frac{1}{64}-\frac{1}{70}\right)x = 3+\frac{5}{6}-\frac{1}{12}-1-\frac{161}{70} \Longrightarrow \frac{3x}{2240}=\frac{126}{280}$

d' où $\boxed{x = 336\ km}$

Durée du déplacement.

La durée du déplacement est :

$$t=\frac{x}{64}+\Delta t=\frac{336}{64}+1\,h\,5\,min = 5\,h\,15\,min + 1\,h\,5\,min$$

d' où $\boxed{t = 6\,h\,20\,min}$

Problème 57.

Deux cyclistes tournent à vitesse constante sur la piste circulaire du vélodrome. Quand ils se déplacent en sens contraire, ils se rencontrent toutes les 10 secondes. Quand ils se déplacent dans le même sens l'un atteint l'autre toutes les 170 secondes. Quelle est la vitesse de chaque cycliste si la longueur de la piste est de 170 m ?

Reponses : V_1 = 9 m/s ; V_2 = 8 m/s.

. ...**Résolution** ....

Vitesse de chaque cycliste.

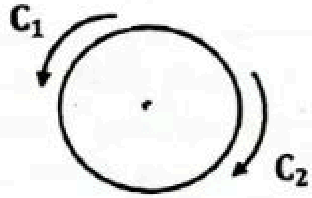
* Lorsque les cyclistes roulent en sens contraire :

$S_1 = v_1t_1$ et $S_2 = v_2t_1$

Alors : $S_1 + S_2 = 170 \Longrightarrow v_1t_1 + v_2t_1 = 170$

$(v_1 + v_2)t_1 = 170 \Longrightarrow v_1 + v_2 = \frac{170}{t_1} = \frac{170}{10} = 17$

soit : $v_1 + v_2 = 17$ (1)



* Lorsque les cyclistes roulent dans le même sens :

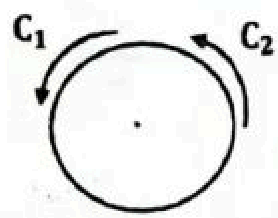
$S_1 = v_1t_2$ et $S_2 = v_2t_2$

Si le premier cycliste roule plus vite que le second :

$S_1 = 170 + S_2 \Longrightarrow v_1t_2 = 170 + v_2t_2$

$v_1t_2 - v_2t_2 = 170 \Longrightarrow v_1 - v_2 = \frac{170}{t_2} = \frac{170}{170} = 1$

soit : $v_1 - v_2 = 1$ (2)



D'où le système :

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 17 \\ v_1 - v_2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2v_1 = 18 \\ 2v_2 = 16 \end{cases}$$

d'où $\boxed{V_1 = 9\ m.s^{-1}}$ $\boxed{V_2 = 8\ m.s^{-1}}$

Problème 58.

Deux coureurs parcourent une piste circulaire, chacun d'eux ayant une vitesse constante. Partis simultanément de deux points A et B diamétralement opposés, et se déplaçant en sens contraire, ils se croisent une première fois en M à 40 m de B, puis une deuxième fois en P à 20 m de A. Sachant qu'il s'est écoulé 20 secondes entre les deux croisements, on demande :

1°) la longueur de la piste circulaire ;

2°) la vitesse de chaque coureur en m/s.

Réponses : 1°) l = 200 m ; 2°) V_1 = 6 m/s ; V_2 = 4 m/s

Résolution

1°) Calcul de la longueur de la piste circulaire.

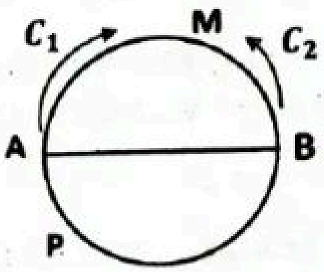
Soit x la demi-circonférence.

• A l'instant t_1, les deux coureurs se croisent en M et ont parcouru chacun :

$$S_1 = x - 40 \text{ et } S_2 = 40$$

Or : $S_1 = V_1 t_1 \Longrightarrow t_1 = \frac{S_1}{V_1} = \frac{x-40}{V_1}$

et $S_2 = V_2 t_1 \Longrightarrow t_1 = \frac{S_2}{V_2} = \frac{40}{V_2}$



donc : $$\frac{x-40}{V_1} = \frac{40}{V_2} \qquad (1)$$

• Entre le 1er et le 2ème croisement :

$S_1 = 40 + x - 20 \Longrightarrow S_1 = x + 20$

et $S_2 = x - 40 + 20 \Longrightarrow S_2 = x - 20$

Or : $S_1 = V_1 \Delta t \Longrightarrow \Delta t = \frac{S_1}{V_1} = \frac{x-40}{V_1}$

et $S_1 = x - 40 + 20 \Longrightarrow S_1 = x - 20$

Or : $S_1 = V_1 \Delta t \Longrightarrow \Delta t = \frac{S_1}{V_1} = \frac{x \mp 20}{V_1}$

$S_2 = V_2 \Delta t \Longrightarrow \Delta t = \frac{S_2}{V_2} = \frac{x-20}{V_2}$

donc : $$\frac{x+20}{V_1} = \frac{x-20}{V_2} \qquad (2)$$

D'où le système :

$$\begin{cases} \dfrac{x-40}{V_1} = \dfrac{40}{V_2} \\ \dfrac{x+20}{V_1} = \dfrac{x-20}{V_2} \end{cases} \Longleftrightarrow \quad \frac{x-40}{x+20} = \frac{40}{x-20}$$

Soit : $(x-40)(x-20) = 40(x+20) \Longleftrightarrow x^2 - 100x = 0$

Après résolution on trouve : $x = 100\ m$

La longueur de la piste est donc :

$L = 2x = 2 \times 100 = 200\ m$; d'où $\boxed{L = 200\ m}$

2°) Vitesse de chaque coureur.

D'après ce qui précède :

- $\Delta t = \dfrac{x+20}{V_1} \Longrightarrow V_1 = \dfrac{x+20}{\Delta t}$
- $\Delta t = \dfrac{x-20}{V_2} \Longrightarrow V_2 = \dfrac{x-20}{\Delta t}$

d' où $\boxed{V_1 = 6\ m/s}$ $\boxed{V_2 = 4\ m/s}$

Autre méthode :

- $t_1 = \dfrac{x-40}{V_1} = \dfrac{40}{V_2}$ (3) et
- $t_2 = \dfrac{2x-20}{V_1} = \dfrac{x+20}{V_2}$ (4)

3°) Durées t_1 et t_2 des deux croisements.

On en déduit les durées t_1 et t_2 des deux croisements :

- $t_1 = \dfrac{40}{V_2} = \dfrac{40}{4} = 10\ s$
- $t_2 = t_1 + \Delta t = 10 + 20 = 30\ s$

d' où $\boxed{t_1 = 10\ s}$ $\boxed{t_2 = 30\ s}$

Remarque :

Pour déterminer t_1 et t_2 on pouvait utiliser les relations (3) et (4).

....

Problème 59 .

Un motocycliste effectue un virage de rayon R = 50 m. Sa vitesse à l'entrée du virage est $\overrightarrow{V_1}$ telle $V_1 = 60\ km/h$. Sa vitesse à la sortie est $\overrightarrow{V_2}$ telle que $V_2 = 80\ km/h$. Les deux vitesses font entre eux un angle de 90°. L'accélération angulaire est constante pendant le virage. Calculer :

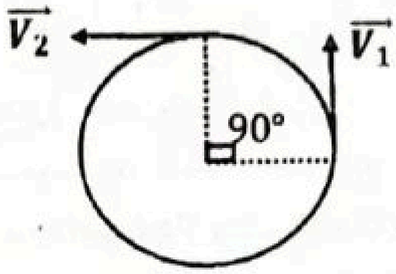
a) la valeur de cette accélération angulaire ;

b) la durée du virage.

Résolution

a) Valeur de l'accélération angulaire.

Le mouvement est circulaire uniformément varié :



$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = 2\alpha''\alpha \Longrightarrow \alpha'' = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\alpha}$$

Or : $\omega_1 = \frac{V_1}{R}$; $\omega_2 = \frac{V_2}{R}$ et $\alpha = 90° = \frac{\pi}{2}$ rad

d' où $$\boxed{\alpha'' = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2\alpha.R^2}}$$

AN : $\alpha'' = \frac{(22{,}222)^2 - (16{,}666)^2}{2 \times \frac{\pi}{2} \times (50)^2} = 0{,}0275\, rad/s$

d' où $$\boxed{\alpha'' \approx 2{,}8.10^{-2}\, rad/s}$$

b) Durée de virage.

On a : $\omega_2 = \alpha'' t + \omega_1 \Longrightarrow t = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\alpha''}$

d' où $$\boxed{t = \frac{V_2 - V_1}{R\alpha''}}$$

AN : $t = \frac{22{,}222 - 16{,}666}{50 \times 2{,}8.10^{-2}} = 3{,}96\text{ s} \Longrightarrow \boxed{t \approx 4\, s}$

Problème 60.

Une piste circulaire de centre O a un rayon de 100 m. Un cycliste M part d'un point A de la piste à l'instant t = 0. Un autre cycliste N part au même instant d'un point B situé à 100 m en avant.

1°) Les deux cyclistes M et N roulent dans le sens direct respectivement à des vitesses V_1 et V_2 (exprimées en m/s).

a) Calculer l'angle $\theta = Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}\right)$ en fonction de t.

b) Le cycliste M passe au point B à l'instant t = 10 s et double N à l'instant t = 60 s. Quelles sont les vitesses respectives de M et N ?

c) Au bout de combien de temps les cyclistes seront-ils diamétralement opposés sur la piste ?

2°) V_1 et V_2 ont les valeurs trouvées précédemment, mais M roule dans le sens indirect et N dans le sens direct. Au bout de **combien de temps vont-ils se croiser ?**

Rép : 1°) a) $\theta = \frac{(V_1-V_2).t}{100} - 1$; **b)** $V_1 = 10\,m/s$; $V_2 = \frac{25}{3}\ m/s \approx 8,3\,m/s$;

c) $t = 60(\pi + 1) \approx 4\,min\,8\,s$; **2°)** $t \approx 29\,s.$

....**Résolution**..

1°) a) Calcul de l'angle $\theta = Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right)$ en fonction de t..

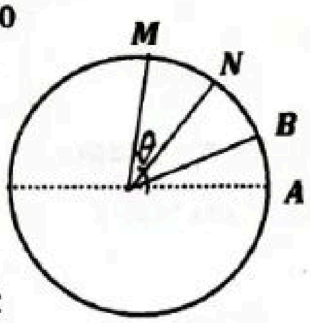
Choisissons A comme origine.

- Distance parcourue par M : $S_1 = V_1 t$
- Distance parcourue par N : $S_2 = V_2 t + 100$

La longueur algébrique de l'arc MN est :

$$MN = S_1 - S_2 \Longrightarrow MN = (V_1 - V_2)t - 100$$

Donc : $\theta = Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right) = \frac{MN}{R} \Longrightarrow \theta = \frac{(V_1-V_2)t-100}{100}$



d'où $\boxed{\theta = \frac{(V_1-V_2)t}{100} - 1}$

b) Vitesses respectives de M et N

- A l'instant $t_1 = 10\,s$, le cycliste M est au point B, donc :

$$S_1 = 100\,m \Longrightarrow 10V_1 = 100$$

d' où $\boxed{V_1 = 10\,m/s}$

- A l'instant $t_2 = 60\,s$, les deux cyclistes sont au même endroit :

$$S_1 = S_2 \Longrightarrow V_1 t_2 = V_2 t_2 + 100$$

$$60V_1 = 60V_2 + 100 \Longrightarrow V_2 = \frac{500}{60} = \frac{50}{6}$$

d' où $\boxed{V_2 = \frac{25}{3}\ m/s \approx 8,3\,m/s}$

c) Temps au bout duquel les cyclistes seront diamétralement opposés.

Les deux cyclistes seront diamétralement opposés sur la piste lorsque :

$$\theta = \pi \Longleftrightarrow \frac{(V_1-V_2)t}{100} - 1 = \pi \Longrightarrow t = 60(\pi + 1)$$

d' où $\boxed{t = 248,4\ s \approx 4\ min\ 8\ s}$

2°) Temps de croisement, lorsque M et N roulent en sens inverse.

Les deux cyclistes se croisent lorsque :

$$S_1 + S_2 = 2\pi R \Longrightarrow V_1 t_2 + V_2 t_2 + 100 = 200\pi$$

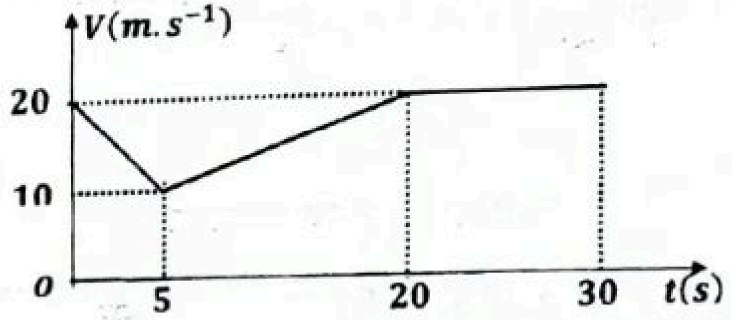
Soit : $\left(\frac{25}{3} + 10\right) t + 100 = 200\pi \Longrightarrow t = \frac{60}{11}(2\pi - 1) = 28,8\ s$

d' où $\boxed{t \approx 29\ s}$

....

Problème 61.

Le digramme de vitesse d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne est donné ci-dessous :



1°) Déduire la nature du mouvement sur les différents intervalles de temps.

2°) a) Calculer les accélérations du mobile au cours des trois phases du mouvement.

b) Tracer la représentation graphique $a = f(t)$ de l'accélération en fonction du temps pour $t \in [0\ ;\ 30]$ secondes.

3°) Calculer la distance totale parcourue par le mobile.

....**Résolution** ....

1°) Nature du mouvement dans chaque phase.

1ère phase : $t \in [0\ ;\ 5\ s]$; V décroit : **mouvement rectiligne uniformément retardé.**

2ème phase : $t \in [5\ ;\ 20\ s]$; V croît : **mouvement rectiligne uniformément accéléré.**

3ème phase : $t \in [20\ ;\ 30\ s]$; $V = cste$: **mouvement rectiligne uniforme.**

2°) a) Calculons l'accélération du mobile dans chaque phase.

Pour chaque phase, on applique la formule : $a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_f - V_i}{t_f - t_i}$

1ère phase : $[0\ ;\ 5\ s[$: $a_1 = \frac{10 - 20}{5 - 0} = -\frac{10}{5}$

d' où $\boxed{a_1 = -2\,m.s^{-2}}$

2ème phase : [5 ; 20 s[: $a_2 = \dfrac{20-10}{20-5} = \dfrac{2}{3}$

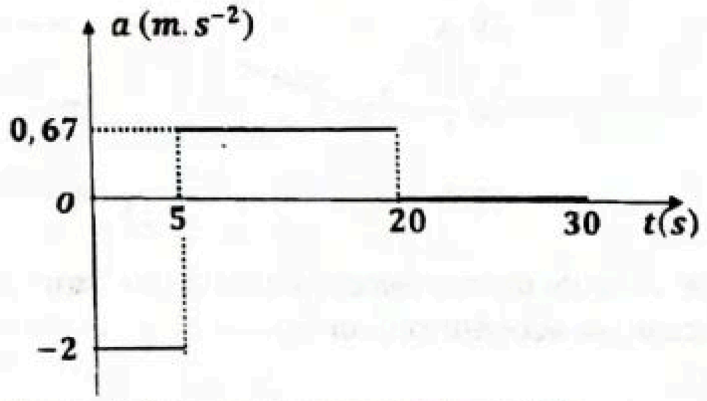
d' où $\boxed{a_2 \approx 0,67\,m.s^{-2}}$

3ème phase : ⟦20 ; 30 s⟧: $a_3 = \dfrac{20-20}{30-20} = 0$; $(V = cste = V_{max})$;

d' où $\boxed{a_3 = 0}$

b) Représentation du diagramme de l'accélération.:

Echelles : 1 cm pour 5 s et 1 cm pour $1\,m.s^{-2}$.



3°) Calculons la distance totale parcourue par le mobile.

1ère méthode.

La distance totale est : $d = x_1 + x_2 + x_3$

- 1ère phase : $x_1 = \frac{1}{2}a_1t_1^2 + V_0t_1 \Longrightarrow x_1 = \frac{1}{2}(-2)(5)^2 + 20(5)$

  $\underline{\underline{x_1 = 75\,m}}$

- 2ème phase : $x_2 = \frac{1}{2}a_2t_2^2 + V_0t_2 \Longrightarrow x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(15)^2 + 10(15)$

  $\underline{\underline{x_2 = 225\,m}}$

- 3ème phase : $x_3 = V_0t_3 = 20 \times 10 = 200\,m$

  $\underline{\underline{x_3 = 200\,m}}$

Ainsi : $d = 75 + 225 + 200 = 500\ m$

d'où $\boxed{d = 500\ m}$

2ème méthode :

Cette distance totale est égale à l'aire de la figure engendrée par le graphe $V = f(t)$, c'est-à-dire les aires des trapèzes et celle du rectangle.

$$d = \mathcal{A} = \frac{(20+10)\times 5}{2} + \frac{(20+10)\times 15}{2} + 20 \times 10 = 500 \text{ (unités)} ;$$

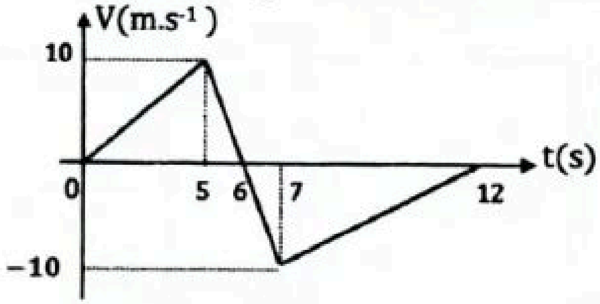
d'où $\boxed{d = 500\ m}$

Rappel : :

- aire d'un trapèze : $\mathbf{A} = \dfrac{(B+b)\times h}{2}$
- aire d'un rectangle : $\mathbf{A} = L \times l$

Problème 62.

La représentation graphique de la vitesse V = f(t) d'un mobile en mouvement rectiligne sur un axe x'ox est donnée à la figure ci-dessous :



1°) a)Calculer les accélérations du mobile au cours des trois phases.

b) Tracer la représentation graphique a = g(t) de l'accélération en fonction du temps, avec t ∈ [0 ;12] en seconde.

2°) Déterminer les équations horaires de la vitesse $V(t)$ et de la position $x(t)$ du mobile pour chaque phase, sachant qu'à la date $t = 0$, il passe à l'origine de l'axe.

3°) Calculer la distance parcourue par le mobile durant ces 12 s.

Rep.: a) $a_1 = 2 m.s^{-2}$; $a_2 = -10\ m.s^{-2}$; $a_3 = 2\ m.s^{-2}$; 3) d = 0 .

Résolution

1°) a) Accélération du mobile au cours des trois phases du mouvement.

Pour chaque phase, on applique la formule : $a = \dfrac{V_f - V_i}{t_f - t_i}$

1ère phase : [0 ; 5 s[: $a_1 = \dfrac{10-0}{5-0} = 2\ m.s^{-2}$

d' où $\boxed{a_1 = 2\,m.s^{-2}}$

2ème phase : $[5\,;\,7\,s[$: $a_2 = \dfrac{-10-10}{7-5} = -10\,m.s^{-2}$

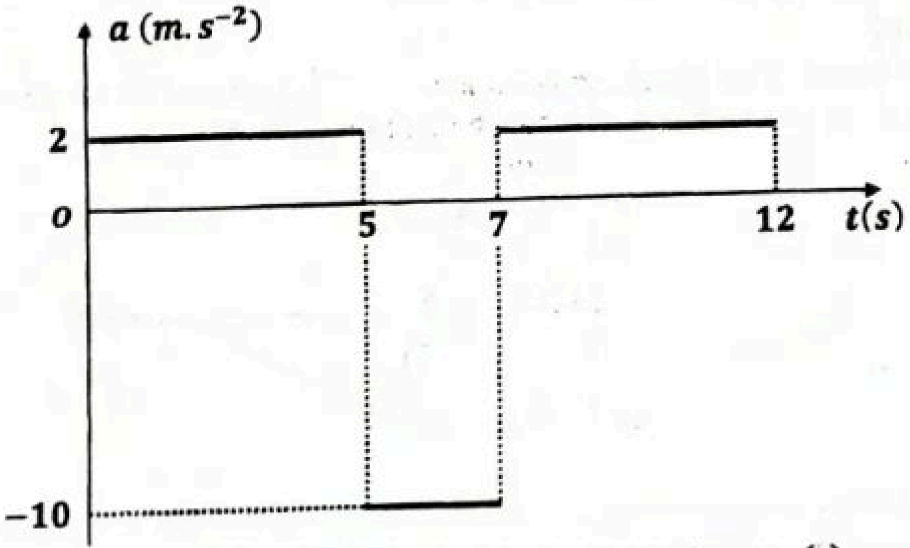
d' où $\boxed{a_2 = -10\,m.s^{-2}}$

3ème phase : $[7\,;\,12\,s]$: $a_3 = \dfrac{0+10}{12-7} = 2\,m.s^{-2}$;

d' où $\boxed{a_3 = 2\,m.s^{-2}}$

b) Représentation graphique de l'accélération.

Echelles : 1 cm pour 1 s et 1 cm pour $2\,m.s^{-2}$



2°) Equations horaires de la vitesse $V(t)$ et de l'abscisse $x(t)$.

1ère phase : $[0\,;\,5\,s[$: $a_1 = 2\,m.s^{-2}$:

- $V_1(t) = a_1 t + V_0$; or : $V_0 = 0$;

d' où $\boxed{V_1(t) = 2t}$

- $x_1(t) = \dfrac{1}{2}a_1 t^2 + V_0 t + x_0$; or : $V_0 = 0$ et $x_0 = 0$;

d' où $\boxed{x_1(t) = t^2}$

2ème phase : $[5\,;\,7\,s[$: $a_2 = -10\,m.s^{-2}$:

• $V_2(t) = a_2(t-5) + V_1$; or : $V_1 = 10\,m.s^{-1}$;

d' où $\boxed{V_2(t) = -10t + 60}$

• $x_2(t) = \frac{1}{2}a_2(t-5)^2 + V_1(t-5) + x_1$;

or : $x_1 = (5)^2 = 25\,m$;

donc : $x_2(t) = -5(t-5)^2 + 10(t-5) + 25$

d' où $\boxed{x_1(t) = -5t^2 + 60t + 25}$

3ème phase : $[7\,;\,12\,s]$: $a_3 = 2\,m.s^{-2}$:

• $V_3(t) = a_3(t-7) + V_2$; or : $V_2 = -10\,m.s^{-1}$;

d' où $\boxed{V_3(t) = 2t - 24}$

• $x_3(t) = \frac{1}{2}a_3(t-7)^2 + V_2(t-7) + x_2$; on a : $x_2 = 25\,m$;

d' où $\boxed{x_3(t) = t^2 - 24t + 144}$

3°) Distance totale parcourue par le mobile.

1ère méthode.

La distance totale parcourue est la position du mobile à la fin de la 3ème phase, c'est-à-dire à la date $t = 12\,s$:

$d = (12)^2 - 24(12) + 144 = 144 - 288 + 144$

d' où $\boxed{d = 0}$

2ème méthode.

La distance totale parcourue est la somme des distances parcourues au cours de chaque phase : $d = x_1 + x_2 + x_3$

• $x_1 = 25\,m$; • $x_2 = 0$; • $x_3 = -25\,m$;

d' où $\boxed{d = 0}$

3ème méthode.

La distance totale est l'aire de la figure engendrée par le graphe $V = f(t)$, c'est-à-dire les aires des triangles ;

$d = \text{A} = \frac{1}{2}(6)\times(10) + \frac{1}{2}(6)\times(-10) = 0$

d' où $\boxed{d = 0}$.

Rappel :

L'aire d'un triangle : $A = \frac{1}{2} b \times h$.

EXERCICES ET PROBLEMES PROPOSES.

Problème 1 .

Les équations paramétriques (en unités SI) du mouvement d'un mobile se déplaçant dans un plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -4t^2 + 5t \end{cases}$$

1°) Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire.

2°) Donner les caractéristiques du vecteur vitesse lorsque le mobile passe par son ordonnée maximale.

3°) Calculer l'abscisse du mobile lorsque celui-ci repasse par l'ordonnée $y = 0$.

4°) Calculer la valeur de la vitesse à la date t = 6 s.

Réponses : 1°) $y = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{5}{3}x$; 2°) $v_x = 3m.s^{-1}$; $v_y = 0$

3°) x = 3,75 m ; 4°) v ≈ 43 m.s -1.

Problème 2 .

Les équations paramétriques du mouvement d'un mobile M sont :

$$\begin{cases} x = 2\sin 4\pi t \\ y = 2\cos 4\pi t + 5 \end{cases}$$

x *et* y sont évalués en mètres et t en secondes.

1°) Déterminer t l'équation cartésienne de la trajectoire du mobile ? Représenter cette trajectoire.

2°) Déterminer le vecteur vitesse du mobile à un instant t t quelconque.

3°) a) Montrer que la norme du vecteur vitesse est constante.

b) Représenter le vecteur vitesse aux instants : $t_1 = 0,25\ s$ et $t_2 = 1\ s$.

Réponses : 1°) $x^2 + (y-5)^2 = 4$; **2°)** $\vec{V} = (8\pi\cos 4\pi t)\vec{\imath} - (8\pi \sin 4\pi t).\vec{\jmath}$

3°) a) $V = 25,1\ m/s.$

Problème 3 .

Les équations paramétriques (en unités SI) du mouvement d'un mobile se déplaçant dans un plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont :

$$\begin{cases} x = 2\sin\omega t \\ y = 3\cos\omega t \end{cases}$$

1°) Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire.

2°) Trouver les coordonnées du vecteur vitesse et celles du vecteur accélération à l'instant t..

3°) Montrer que le mouvement du mobile est à accélération centrale.

Réponses : 1°) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ **; 2°)** $V_x = 2\omega\cos\omega t$; $V_y = -3\omega\sin\omega t$;

$a_x = -\omega^2 x$; $V_y == -\omega^2 y$.

....

Problème 4 .

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne. L'équation horaire de son mouvement est : $x = t^3 - 12t.$

x est en mètres et t en secondes.

1°) Donner l'équation de la trajectoire du mobile.

2°) Déterminer l'équation horaire de la vitesse et celle de l'accélération.

3°) A quelles dates le mouvement change-t-il de sens ?

Représenter sur un axe le cheminement du mobile entre les dates $t = -3\ s$ et $t = +3\ s$. En déduire la distance parcourue par le mobile pendant ces 6 s.

3°) Sur quels intervalles de temps, le mouvement est-il accéléré ? Retardé ?

Réponses : 1°) $y = C^{te}$ **ou** $y = 0$ **; 2°)** $V = 3t^2 - 12$; $a = 6t$;

3°) $t_1 = -2\ s$; $t_2 = +2\ s$;

....

Problème 5.

Une automobile est en mouvement rectiligne uniforme et parcourt 100 m en 4 s. Elle aborde une pente inclinée et son mouvement devient uniformément retardé avec une accélération de 5 m/s^2.

1°) Déterminer sa vitesse initiale au bas de la pente.

2°) Calculer la durée de la montée jusqu'à l'arrêt.

3°) Quelle distance aura-t-elle parcourue sur la pente ?

Réponses : 1°) $V_0 = 25\ m.s^{-1}$ **; 2°)** $t = 5\ s$; **3°)** $x_2 = 62,5\ m.$

....

Problème 6. ***

Un cycliste part à 14 h, d'une ville A pour se rendre dans une ville B. Il se déplace avec une vitesse moyenne de 24 km/h. Arrivé en B, il s'y repose 20 min, puis revient en A avec une vitesse moyenne de 20 km/h.

Il est de retour en A à 18 h.

1°) Calculer la distance AB.

2°) Un automobiliste est parti de A à 16 h sur la même route, avec une vitesse de 60 km/h. A quelle heure et à quelle distance de A rencontrera-t-il le cycliste ?

Réponses : 1°) $x = AB = 40\ km$; **2°)** $16\ h30\ min$; $30\ km.$

....

X **Problème 7. *****

Un automobiliste parcourt un chemin ABCD, **puis revient de D en A par la même route.**

AB est un palier parcouru à 50 km/h ;

BC est une descente parcourue à 60 km/h ;

CD est une montée parcourue à 20 km/h.

Au retour, les vitesses en palier, descente et montée, restent les mêmes.

On demande de calculer :

1°) **les distance AB, BC, CD sachant que le retour de D vers A dure 10 min** de plus que l'aller de A vers D, que CD = $\frac{2}{3}$ BC et que le parcours ABCD est de 100 km ;

2°) les temps mis pour aller de A à D et de D à A.

Réponses : 1°) $AB = 75\ km$; $BC = 15\ km$; $CD = 10\ km.$

2°) $t_1 = 2\ h15\ min$; $t_2 = 2\ h25\ min.$

....

Problème 8. ***

Deux cycliste partent à 8 h d'une ville A sur une même route dans le même sens, l'un à 14 km/h et l'autre à 21 km/h. Un automobiliste part de A sur la même route et dans le même sens une heure après à la vitesse de 56 km/h.

1°) A quelles heures et à quelles distance de A l'automobiliste rencontrera-t-il chacun des deux cyclistes ?

2°) **Au bout de combien de temps l'automobiliste sera à égale distance de chacun d'eux ?**

Réponses : 1°) $9\ h\ 20\ min$ **et** $9\ h\ 36\ min$; $x_1 \approx 18,7\ km$; $x_2 = 33,6\ km$;

2°) $t = 1\ h\ 27\ min.$

....

Problème 9. ***

Deux cyclistes roulant sur la même route et dans la même direction partent à 6 h du matin de deux points A et B. Ils se dirigent vers le point C qu'ils ne dépassent pas. La distance AB est de 40 km et celle BC de 120 km.

Le cycliste partant de A fait en moyenne 18 km/h, celui qui part de B fait 12 km/h.
1°) A quelle heure et à quelle distance de C le cycliste parti de A rejoindra-t-il celui qui est parti de B ?
2°) A quelle heure les cyclistes se trouverons à égale distance de B ? Quelle est cette distance ?
3°) A quelle heure et à quelles distances de A seront-ils à 20 km l'un de l'autre ?

Réponses : 1°) $12\,h\,40\,min$; $40\,km\ de\ C$; **2°)** $7\,h\,20\,min$; $16\,km$;
3°) 9 h 20 min ; 60 km et **80 km** de A.

....

Problème 10. ***

Un voyageur se propose de remonter un fleuve avec un canot à moteur dont la vitesse est 18 km/h en eau calme. La vitesse du courant est 3 km/h.
Le voyageur quitte l'embarcadère en A à 14 h.
1°) A quelle heure et à quelle distance de A doit-il faire demi-tour s'il veut être de retour à l'embarcadère 4 h plus tard ?
2°) Représenter graphiquement, en fonction du temps t, la distance x du canot à l'embarcadère.
3°) A quelles heures le canot se trouvera à 25 km de A ?
NB : Le candidat utilisera au choix, la méthode graphique ou la méthode par le calcul).

Réponses : 1°) 35 km ; 16 h20 min ; 3°) $15\,h40\,min$ **et** $16\,h49\,min.$

....

Problème 11 .

L'équation horaire de l'abscisse x d'un mobile en mouvement rectiligne est :

$$x = t^4 - 2t^2$$

où x est en mètres et t en secondes.
1°) Comment peut-on repérer le mouvement de ce mobile ?
2°) Déterminer :
a) le module du vecteur vitesse à l'instant t = 0,5 s ;
b) le module du vecteur accélération à l'instant t = 0.
3°) Donner l'équation de la trajectoire du mobile
4°) Déterminer les intervalles de temps pendant lesquels le mouvement est accéléré ou retardé.

Réponses : 2°) a) $V = 1,5\,m.s^{-1}$; **b)** $a = 4\,m.s^{-2}$;

4°)

t (s)	0 $\quad 1/\sqrt{3}$	1	$+\infty$
$\vec{a}\cdot\vec{v}$	+	-	+
Nature	Accéléré	retardé	accéléré

Problème 12.

Un voyageur en retard, court le long d'un quai à la vitesse constante de valeur $V = 5\ m/s$. Quand il est à 15 m du dernier wagon, le train démarre avec une accélération constante de 1 m/s^2.

1 - Ecrire dans un même repère les équations horaires du voyageur et du dernier wagon considérés comme des points matériels.

2 – Montrer que le voyageur ne peut pas rattraper le train.

3 – Quelle sera la distance minimale entre le voyageur et le dernier wagon ?

Rép : 1°) $x_1 = 5t$; $x_2 = 0,5t^2 + 15$; **2°)** $\Delta = -5 < 0$; **3°)** $x_{min} = 2,5\ m$.

Problème 13.

Un élève en retard pour son cours de Physique **alors qu'il se trouve à la distance** d = 20 m de la station, voit son autobus démarré. L'autobus est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié d'accélération $0,8\ m.s^{-2}$.

L'élève court à la vitesse de $6\ m.s^{-1}$.

1°) Ecrire dans un même repère **les équations horaires de l'élève et de l'autobus** considérés comme des points matériels.

2°) L'élève rattrapera-t-il l'autobus ? Si oui, calculer la durée de sa course et la distance qu'il a parcouru.

Réponses : 2°) t = 5 s ; x = 30 m.

Problème 14.

Deux mobiles M_1 et M_2 partent au même instant d'un point A ; M_1 va vers l'est et M_2 vers le sud. Leurs mouvements sont supposés rectilignes.

M_1, initialement au repos en A effectue un mouvement uniformément accéléré d'accélération $a = 2\ m.s^{-2}$. M_2 part du point A avec une vitesse constante $V = 15\ m.s^{-1}$.

1°) Au bout de combien de temps, M_1 et M_2 **se trouvent-t-ils à 500 m l'un de l'autre ?**

2°) Quelle est la distance parcourue par chacun des deux **mobiles à cet instant ?**

Réponses : 1°) t = 20 s ; 2°) x_1 = 400 m ; x_2 = 300 m .

Problème 15 : (Extrait du Bac, SM, 2012).

Un automobiliste roule à la vitesse de 126 km/h sur un tronçon de l'autoroute. Soudain un obstacle fixe apparaît sur la voie à une distance D = 100 m.

Le conducteur freine immédiatement et réduit sa vitesse à 90 km/h au bout d'un temps t = 1,6 s.

a) Calculer la valeur de la décélération (supposée constante).
b) Si l'on suppose que la décélération reste constante, à quelle distance de l'obstacle la voiture va-t-elle s'arrêter?
c) On suppose maintenant que le conducteur ne réagit pas tout de suite et commence à freiner une seconde après l'apparition de l'obstacle. S'il maintient la décélération calculée en a) ; à quelle distance de l'obstacle la voiture va-t-elle s'arrêter ? Conclusion.

Réponses : a) $a = -6,25\,m.s^{-2}$ **; b)** $d_1 = 2\,m$ **; c)** $d_2 = -33\,m$ **(choc).**

....

Problème 16 :

Une rame de métro pénètre dans un tunnel avec un vecteur vitesse $\vec{V}_0$.
Son mouvement est rectiligne uniformément varié avec le vecteur accélération $\vec{a}$. Elle parcourt 30 m en 2 s puis 60 m en 3 s.

1°) Calculer a et V_0.

2°) Le mouvement devient rectiligne uniforme pendant 38 s.
Quelle est la distance parcourue ?

3°) Enfin, le métro freine, son mouvement devient rectiligne uniformément retardé jusqu'à l'arrêt avec un vecteur accélération opposé à celui de la **première** phase. Calculer la distance **totale parcourue depuis l'entrée dans le tunnel.**

Réponses : 1°) $a = 2\,m.s^{-2}$; $V_0 = 13\,m.s^{-1}$;
2°) $x_2 = 874\,m$; **3°)** $x_T \approx 1\,096\,m.$

....

Problème 17.

Une automobile A se déplace à la vitesse constante $V = 72\,km/h$ sur une route rectiligne. Une deuxième automobile B, initialement immobile, démarre et se déplace dans le même sens que A, avec une accélération constante $a = 1\,m.s^{-2}$. Au moment de son démarrage, l'automobile A se trouve à la distance $d = 150\,m$ derrière B.

1°) Déterminer les équations horaires $x_A(t)$ et $x_B(t)$ en prenant comme origine des dates et d'espaces la position initiale de B,

2°) Montrer graphiquement et quantitativement que deux dépassements peuvent se produire.

3°) Déterminer :

a) les dates des dépassements ;

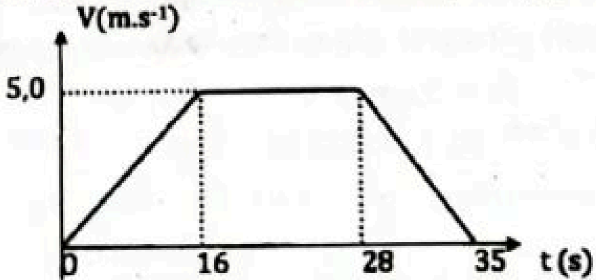
b) les abscisses des dépassements ;

c) les vitesses de l'automobiles B à ces instants.

Réponses : 1°) $x_A = 20t - 150$; $x_B = 0,5t^2$; 3°) a) $t_1 = 10\,s$; $t_2 = 30\,s$;
b) $x_1 = 50\,m$; $x_2 = 450\,m$; c) $V_1 = 10\,m/s$; $V_2 = 30\,m/s$.

Problème 18.
Sur une autoroute rectiligne, un automobiliste roule à la vitesse constante de 180 km/h, un motard averti par radio démarre à la distance d = 400 m devant la voiture. Son mouvement est uniformément varié et il atteint la vitesse de 100 km/h après une durée de 10 s.
1°) Calculer l'accélération du motard.
2°) Montrer qu'il existe deux instants pour lesquels les deux véhicules sont côte à côte. Déterminer ces instants et les abscisses correspondantes.
Réponses : 1°) $a \approx 2,8\,m.s^{-2}$; 2°) $\Delta = \sqrt{V^2 - 2ad} > 0$
$t_1 = \dfrac{V - \sqrt{\Delta}}{a} = 12\,s$ et $t_2 = \dfrac{V + \sqrt{\Delta}}{a} = 24\,s$;
$x_1 = 200\,m$; $x_2 = 800\,m$.

Problème 19.
Un mobile décrit une trajectoire rectiligne. On donne la représentation graphique de sa vitesse en fonction du temps. (figure)



a) Calculer son accélération au cours des trois phases du mouvement. Préciser la nature du mouvement dans chaque cas.
b) Calculer la distance parcourue par le mobile **jusqu'à son arrêt à la date** t = 35 s.
c) Montrer que cette distance est représentée par l'aire de la figure engendrée par le graphe $V = f(t)$.
Rep :a) $a_1 \simeq -0,313\,m.s^{-2}$; $a_2 = 0$; $a_3 \approx -714\,m.s^{-2}$; b) $d = 117,5\,m$.

Problème 20. (Extrait du bac blanc, SM, Victor Hugo. 2019).
Un mobile est animé d'un mouvement de translation rectiligne dans un repère $(O, \vec{i})$. Le mouvement comporte deux phases dont la 1ère dure 30 s.
Un chronométreur a relevé la vitesse en fonction du temps. Après conversion, on obtient le tableau suivant :

t (s)	0	10	20	30	40	50	100	150
V (m.s^{-1})	0	4	8	12	11	10	5	0

1°) Tracer le graphique $V = f(t)$. Echelle : 1 cm pour 4 m.s^{-1} ; 1 cm pour 10 s.

2°) Etablir l'équation horaire du mouvement pour chaque phase.

Préciser la nature du mouvement pendant chaque phase. La position du mobile est repérée à chaque instant par son abscisse x comptée à partir de l'origine O du repère.

3°) a) Calculer la longueur du trajet parcouru par le mobile pendant toute la durée du mouvement.

b) Montrer que cette distance est représentée par l'aire de la figure donnée par le graphique $V = f(t)$.

4°) Quelle est la distance parcourue par le mobile à la date t = 60 s ?

Quelle est alors sa vitesse ?

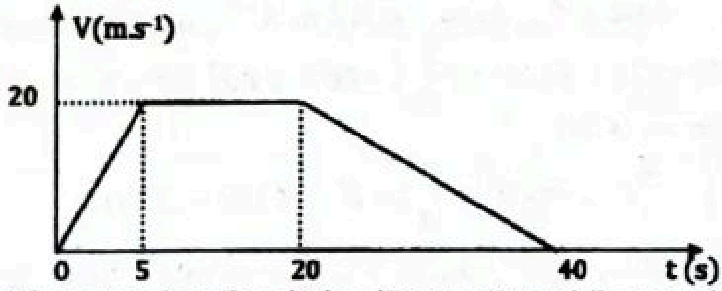
Réponses : 2°) $x = 0,2t^2$ **et** $x = -0,05t^2 + 15t - 225$ **;**

3°) a) $x_T = 900\,m$ **; b)** $\mathscr{A} = 900\,m^2$ **; 4°)** $x = 495\,m$ **;** $V = 9\,m.s^{-1}$.

....

Problème 21.

On donne ci-dessous le diagramme de la vitesse d'un mobile M animé d'un mouvement rectiligne le long de l'axe x'x.



1°) Déterminer l'équation horaire de la vitesse du mobile sur chaque phase.

2°) En déduire l'accélération du mouvement durant chaque phase et tracer le diagramme de l'accélération.

3°) Ecrire l'équation horaire du mouvement $x(t)$, sachant qu'à la date t = 0 le mobile passe par l'origine de l'axe.

4°) a) Calculer la distance parcourue par le mobile durant ces 40 s.

b) Montrer que cette distance est représentée par l'aire de la figure engendrée par le graphe $V = f(t)$.

Réponses : 1°) $V_1(t) = 4t$ **;** $V_2(t) = 20\,m.s^{-1}$ **;** $V_3(t) = -t + 40$ **;**

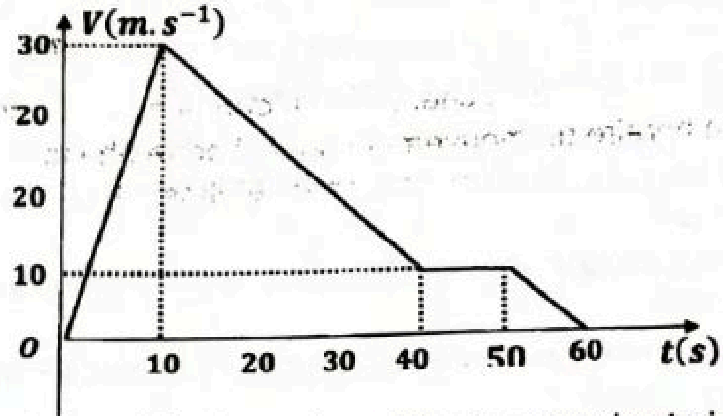
2°) $a_1 = 4\,m.s^{-1}$ **;** $a_2 = 0$ **;** $a_3 = -1\,m.s^{-1}$ **;**

3°) $x = -0,5t^2 + 40t - 250$ **; 4°)** $d = 550\,m$.

....

Problème 22 .

Le diagramme de vitesses d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne est représenté par le graphe ci-dessous :



1°) a)Calculer les accélérations du mobile au cours des trois phases.

b) En déduire la nature du mouvement dans chaque phase.

c) Tracer la représentation graphique a = g(t) de l'accélération en fonction du temps, avec $t \in [0\ ;60\ s]$.

2°) Déterminer les équations horaires de la vitesse $V(t)$ et de la position $x(t)$ du mobile pour chaque phase, sachant qu'à la date $t = 0$, $x = 0$ et $V = 0$.

3°) Calculer la distance totale parcourue par le mobile .

Rép : 1°) a) $a_1 = 3\ m.s^{-2}$; $a_2 \approx -0,67\ m.s^{-2}$; $a_3 = 0$; $a_4 = -1\ ms^{-2}$;

2°) • $V_1(t) = 3t$; $V_2(t) = \frac{1}{3}(-2t + 110)$; $V_3(t) = 10\ m.s^{-1}$; $V_4(t) = -t + 60$;

• $x_1(t) = \frac{2}{3}t^2$; $x_2(t) = \frac{1}{3}(-t^2 + 110t - 550)$;

$x_3(t) = 10t + 350$; $x_4(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 60t - 900$; **3°)** $d = 900\ m$.

Problème 23 .

Sur une portion rectiligne ABCD de voie ferrée où s'effectuent des travaux, un train arrivant en A avec une vitesse de **module égal à 54 km/h a la marche suivante :**

– De A à B, tel que AB = 125 m, un mouvement uniformément retardé réduisant la vitesse en B à la valeur de 36 km/h ;

– De B à C, pendant une minute, un mouvement uniforme ;

– De C à D, un mouvement uniformément accéléré tel que la vitesse reprenne la valeur de 54 km/h en 20 secondes.

1°) En prenant pour origine des abscisses le point A, pour sens positif le sens de la marche et pour instant initial t = 0 l'instant du passage en A, déterminer les équations horaires des trois phases et calculer l'espace parcouru de A à D.

2°) Tracer les diagrammes de l'espace x = f(t), de la vitesse V = g(t) et de l'accélération a= h(t) pour l'ensemble des trois phases.

Echelles : 1 cm pour x = 50 m , V = 2 m/s, a = 0,1 m/s2 , t = 10 s.

Réponses : 1°) $x_1 = -0,25t^2 + 15t$; $x_2 = 10t + 25$;

$$x_3 = \frac{1}{8}(t^2 - 60t + 5\,100) \ ; \ AD = 975\,m$$

2°) $V_1 = -0,5t + 15$; $V_2 = V_B = 10\,m/s$; $V_3 = \frac{1}{4}(t - 30)$.

....

Problème 24. ***

Un mobile partant du repos se déplace sur une droite. On note ses abscisses toutes les secondes et on obtient le tableau ci-dessous :

t (s)	0	1	2	3	4
x (cm)	0	75	300	675	1200

1°) Montrer que le mouvement **est uniformément varié et calculer son accélération.**

2°) **Etablir l'équation horaire du mouvement et calculer la vitesse** du mobile à la date t = 4 s.

Réponses : 1°) $a = 1,5\,m.s^{-2}$; **2°)** $x = 0,75t^2$; $V = 6\,m.s^{-1}$.

....

Problème 25 : (Extrait du Bac, SM, 2011).

Un dispositif permet d'enregistrer à des intervalles de temps égaux, les positions d'un point matériel en mouvement rectiligne.

Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau ci-dessous :

t(s)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
X(cm)	5	15	29	47	69	95	124,5	154,5	184,5	214,5	244,5

1- Montrer que le mouvement admet une première phase uniformément **accélérée et calculer son accélération. Etablir l'équation du mouvement dans cette phase.**

2 – Montrer que le mouvement devient uniforme vers la fin de l'enregistrement. **Etablir l'équation horaire pour cette phase. On considère qu'a l'instant initial** $V = V_0 = 0$.

Réponses : 1°) $a = 4\,m.s^{-2}$; $x = 2t^2 + 0,05\ \ (m)$; **2°)** $x = 3t - 0,555\ \ (m)$.

....

Problème 26 .

On enregistre une partie du mouvement d'une bille sur un plan incliné. Elle est lâchée sans vitesse d'un point A et glisse le long de la ligne de plus grande pente AB. On prend comme origine des abscisses la première position enregistrée et comme origine des dates $t = 0$ la date correspondante.

Les résultats obtenus sont consignés sur le tableau suivant :

$t(s)$	0	0,25	0,50	0,75	1,0	1,25
$x(m)$	0	0,17	0,40	0,69	1,04	1,45

1°) Montrer que les espaces parcourus pendant des intervalles de temps successifs égaux sont en progression arithmétique.
2°) En déduire la valeur numérique de l'accélération.
3°) Déterminer la vitesse de la bille au moment du premier enregistrement.
4°) Calculer la distance parcourue par la bille **entre le point A et l'origine O de l'axe.**

Réponses : 1°) $e_2 - e_1 = e_3 - e_2 = \ldots\ldots = e_n - e_{n-1} = 0,06\ m$
$r = 0,06\ m$; *2°)* $a = 0,96\ m/s^2$; *3°)* $V_0 = 0,56\ m/s$;
4°) $x_0 - x_A = 0,16\ m.$

Problème 27.

Partant du repos, un mobile en mouvement rectiligne acquiert une vitesse de 10 m.s^{-1} après 25 m de parcours. Il parcourt ensuite 50 m avec cette vitesse et s'arrête à 125 m de son point de départ. On considère les mouvements de la première et de la troisième phases comme uniformément varié.
1°) Etablir les équations horaires des trois phases du **mouvement en prenant pour origine des espaces le point de départ et pour origine des dates le moment de ce départ.**
2°) Quelle est la durée du trajet ?
3°) Construire les diagrammes de l'espaces $x = f(t)$, de la vitesse $V = g(t)$ et de l'accélération $a = h(t)$ pour l'ensemble des trois phases-

Réponses : 1°) $x_1(t) = t^2$; $x_2(t) = 10t - 25$; $x_3(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 20t - 75$;
2°) $t = 20\ s$; ***3°)*** $V_1(t) = 2t$; $V_2(t) = 10\ m/s$; $V_3(t) = -t + 20$

Problème 28 .

1°) Une rame de métro, partant du repos, parcourt 155 m en 22 s. En supposant le mouvement uniformément varié, calculer l'accélération, et en tenant compte de l'incertitude des mesures (longueur connue à 0,5 m près ; temps connu à 1/ 10 s près) donner le résultat avec la précision convenable.
2°) Partant de la station A, le conducteur lance la rame avec une accélération constante $a_1 = 0,9\ m.s^{-2}$. Au bout d'un temps t_1, quand il juge la vitesse suffisante pour pouvoir atteindre, simplement en vertu de la vitesse acquise, la station suivante B, le conducteur coupe le courant . Différentes causes ralentissent alors le mouvement qui s'effectue avec une accélération a_2 de valeur absolue $0,1\ m.s^{-2}$. La distance AB est de 450 m. Calculer :
a) les durées t_1 et t_2 des deux phases du parcours ;
b) les longueurs l_1 et l_2 de ces deux parcours ;
c) la vitesse maximale du train et sa vitesse moyenne entre les deux stations.

3°) Représenter graphiquement, en fonction du temps, la vitesse et la position du convoi à chaque instant.
4°) Si le conducteur avait coupé le courant une seconde plus tard, de quelle longueur aurait-il manqué l'arrêt en B, en admettant pour la phase de freinage les mêmes caractères ?

Réponses : 1°) $a = 0,64 \pm 0,01\ m.s^{-2}$; **2°)a)** $t_1 = 10\ s$; $t_2 = 90\ s$;
b) $l_1 = 45\ m$; $l_2 = 405\ m$;**c)** $V_{max} = 9\ m.s^{-1}$; $V_m = 4,5\ m.s^{-1}$;
4°) $\Delta x = 94,5\ m.$

Problème 29 .

La période d'un satellite géocentrique en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre est de 24 heures.
1°) Calculer sa vitesse angulaire.
2°) A quelle altitude se trouve-t-il lorsque sa vitesse est de 3,08 km. s^{-1} ?
Quelle est alors son accélération ?
On donne le rayon de la Terre : R = 6400 km.

Rép : 1°) $\omega \approx 7,27.10^{-5}\ rad.s^{-1}$; **2°)** $h \approx 36\,000\ km$; $a = 0,22\ m.s^{-2}$.

Problème 30 .

Un motocycliste décrit à la vitesse de 36 km/h un virage assimilable à un arc de cercle de rayon r. L'accélération du mouvement a une norme constante égale à $2,5\ m/s^2$.
1°) Trouver le rayon r du virage.
2°) A l'entrée du virage, le vecteur vitesse est $\vec{V}_1$ à la sortie du virage, 4 s plus tard **le vecteur vitesse est $\vec{V}_2$. Déterminer l'angle formé par les deux vecteurs vitesses.**

Réponses : 1°) $r = 40\ m$; **2°)** $\theta = 57,3°$.

Problème 31.

Dans un relais 4 x 100, un coureur arrive avec un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $V = 9,9\ m/s$. A 15 m devant lui son coéquipier s'élance avec un mouvement uniformément varié d'accélération $3\ m.s^{-2}$.
On suppose que le passage s'effectue sur une ligne droite.
1°) En prenant comme origine des espaces la position du coéquipier et comme origine de temps l'instant où il s'élance, écrire les équations horaires des deux coureurs et déterminer l'instant du témoin.
2°) Déterminer l'abscisse de ce point de rencontre. En déduire les distances respectives parcourues par les deux coureurs.

3°) A quel instant le coéquipier aura la vitesse $V = 9,9\ m/s$?
Quelle distance aurait-il parcouru ?

Réponses : 1°) $x_1(t) = 9,9t - 15$; $x_2(t) = 1,5t^2$; $t \approx 2,36\ s$;
2°) $x \approx 8,3\ m$; 3°) $d_1 = 23,3\ m$ et $d_2 = 8,3\ m$.
3°) $t = 3,3\ s$; $d \approx 16,34\ m$.

....

Problème 32. ***

Un mobile ayant une vitesse initiale de 4 m/s, effectue en passant à la $5^{ème}$ seconde de son parcours une distance de 5,8 m. Trouver l'accélération du mobile et la distance parcourue au bout de 10 s.

Réponses : $a = 0,4\ m.s^{-2}$; $x = 60\ m$.

....

Problème 33.

Deux voitures A et B roulent dans le même sens et dans le même couloir sur une autoroute rectiligne. Elles roulent toutes deux à la même vitesse 108 km/h, la distance qui les sépare est de 50 m. La voiture A se trouve devant B.
A la date t = 0, le chauffeur de la voiture A freine avec **une accélération constante** de valeur absolue 5 m/s^2. Le chauffeur de la voiture B, un peu distrait ne freine que 2 s plus tard avec la même décélération que A.

1°) Ecrire l'équation horaire du mouvement de la voiture A. L'origine des espaces est la position de A à la date t = 0.

2°) Ecrire les équations horaires du mouvement de B (ce mouvement comporte deux phases).

3°) Trouver la durée du freinage de la voiture A.

4°) Montrer que la voiture B en restant dans le même couloire ne peut éviter de heurter la voiture A.

5°) Trouver la vitesse de chacune des voitures au moment où le choc se produit

Réponses : 1°) $x_A(t) = -2,5t^2 + 30t$;
2°) $x_{1B}(t) = 30t - 50$; $x_{2B}(t) = -2,5t^2 + 40t - 60$;
3°) $t = 6\ s$; 4°) $x_B = 100\ m > x_A = 90\ m$ (choc);
5°) $t = 6\ s \Longrightarrow V_A = 0$ (immobile) ; $V_B = 10\ m.s^{-1}$.

....

Problème 34 *.**

On considère deux trains A et B. Le train A de longueur L = 1 km, roule à 50 m/s. Le train B de longueur l = 0,5 km démarre juste à l'instant où l'arrière du train A passe devant l'avant du train B. Le train B a une accélération constante de 3 m/s^2 et une vitesse maximale de 60 m/s.

1°) Déterminer l'instant où B **dépasse A, c'es-à-dire l'arrière de B dépasse l'avant de A.**
2°) Quelle distance le train A a-t-il parcouru pendant ce temps ?
Réponses : 1°) $\mathbf{t = 210\ s}$ **; 2°)** $\mathbf{x = 10,5\ km}$ **.**

....

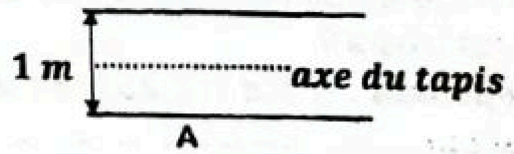
Problème 35. ***

Deux coches partent à midi, l'un d'une ville A vers une ville B, l'autre de la ville B vers la ville A. La distance entre les deux villes est AB= d = 75 km.
Les deux coches vont à la vitesse V = 25 km/h dans le référentiel terrestre.
1°) A quelle heure les deux cochent se croisent-ils ?
2°) Une mouche posée sur l'un des chevaux s'envole lorsque le coche situé en A démarre (donc à midi) et vole vers l'autre coche ; lorsqu'elle l'atteint, elle fait demi-tour et revient vers le premier, puis refait demi-tour, et ainsi de suite...
Elle vole à la vitesse constante V_m = 50 km/h. Quelle distance a-t-elle parcourue lorsque les deux coches se croisent ?
Réponses : 1°) $\mathbf{T = 13\ h30\ min}$ **; 2°)** $\mathbf{x = 75\ km}$**..**

....

Problème 36. ***

Un tapis roulant, de 1 m de largeur et suffisamment long, a une vitesse uniforme par rapport au sol $V_1 = 0,5\ m.s^{-1}$. En A, on pose sur le tapis une voiture électrique dont la vitesse uniforme par rapport au tapis est $V_2 = 1,5$ m/s. Elle se déplace sur une trajectoire rectiligne qui fait un angle de 45° par rapport à l'axe du tapis roulant, dans le sens de déplacement du tapis.
1°) Déterminer les caractéristiques du vecteur vitesse $\vec{V}$ de la voiture par rapport à la Terre.
2°) Combien de temps faudra-t-il à la voiture pour traverser la largeur du tapis ?



Réponses : 1°) $\boldsymbol{V \approx 1,9\ m.s^{-1}}$ **;** $\boldsymbol{\theta \approx 34,2°}$ **par rapport à l'axe du tapis ;**
2°) $\mathbf{= 0,94\ s}$ **.**

....

Problème 37. ***

Une course d'automobiles se déroule sur une piste de 12,5 km pendant 40 tours. Le vainqueur a effectué cette course à la vitesse moyenne de 160 km/h avec un tour d'avance sur le second. Calculer la vitesse moyenne de ce dernier et la durée de la course.
Réponses : $\boldsymbol{V_2 = 156\ km.h^{-1}}$ **;** $\boldsymbol{t = 3,125\ h = 3\ h\ 7\ min\ 30\ s.}$

....

Problème 38. ***

On considère un tapis roulant, dont la longueur est $l = 50\ m$ et qui avance à la vitesse $V_t = 1,25\ m.s^{-1}$.

1°) Un voyageur utilise le tapis roulant en restant immobile par rapport au tapis. Quel temps mettra-t-il pour effectuer le trajet ?

2°) Un autre voyageur marche à la vitesse $V_2 = 1,11\ m.s^{-1}$ dans le même sens que le tapis . Quelle est la durée de son trajet ?

3°) A quelle vitesse doit-il se déplacer, par rapport au tapis,pour effectuer un trajet de $50\ s$?

Réponses : 1°) $t_1 = 40\ s$ **; 2°)** $t_2 = 21\ s$ **; 3°)** $V_3 = 0,25m.s^{-1}$.

....

Problème 39. ***

Un explorateur descend un fleuve à l'aide d'un canot à moteur. La vitesse du courant d'eau est $V_e = 6\ km.h^{-1}$, et le moteur communique au bateau une vitesse $V = 15\ km.h^{-1}$ par rapport à l'eau. A un moment donné, le caisson hermétique contenant les vivres tombe à l'eau et dérive au gré du courant. Il ne s'en rend compte que 5 minutes plus tard.

1°) A quelle distance se trouve-t-il alors du caisson des vivres ?

2°) Il fait demi-tour et utilise son moteur pour remonter le courant. Combien de temps va-t-il mettre pour revenir au niveau du caisson ?

3°) Quelle distance aura parcourue le caisson des vivres lorsque le navigateur le rattrapera ?

Réponses : 1°) $d = 1,25\ km$ **; 2°)** $t_2 = 5\ min$ **; 3°)** $x_C = 1\ km.$

....

Problème 40. * : (Extrait du Bac blanc, SM, KINDIA, 2019).**

Deux mobiles M_1 (le plus rapide) et M_2 bougent en même temps (à 8 h 30 min) respectivement des villes A et B **situées le long d'une route rectiligne et horizontale. Ils roulent l'un vers l'autre d'un mouvement uniforme. Quand le plus rapide atteint le milieu du parcours** AB, l'**autre est à** 48 km ; alors ils se croisent **24 minutes plus tard. Lorsque M_2 atteint le milieu du parcours AB alors 80 km lui sépare de M_1.**

1°) Déterminer les vitesses V_1 et V_2 (en km/h) de M_1 et M_2.

2°) Calculer (en km) la distance AB.

3°) Déterminer les heures d'arrivées à destination de chaque mobile.

Réponses : 1°) $V_1 = 75\ km/h$; $V_2 = 45\ km/h$; **2°)** $AB = x = 240\ km$;

3°) $T_1 = 11\ h\ 42\ min$; $T_2 = 13\ h\ 50\ min$.

....

Problème 41 : (Extrait du Bac, SS, Guinée 2002).

Deux oranges O_1 et O_2 tombent en chute libre sans vitesse initiale. L'orange O_1 tombe d'une hauteur h_1 ; une seconde plus tard, l'orange O_2 tombe à son tour d'une hauteur h_2. $h_1 - h_2 = 10$ m. Les oranges O_1 et O_2 arrivent en même temps au sol. Si t_1 et t_2 sont les durées de chute de O_1 et de O_2.

1°) Ecrire les équations horaires des mouvements de chute de O_1 et de O_2 en précisant les origines choisies.

2°) Calculer t_1 et déduire h_1 , h_2 et t_2.

3°) Calculer les modules des vecteurs vitesses $\overrightarrow{V_1}$ de O_1 et $\overrightarrow{V_2}$ de O_2 à l'arrivée au sol. ($\boldsymbol{g = 10\ m.s^{-2}}$).

Réponses : 1°) $h = 5t^2$; $h = 5t^2 - 10t + 15$.

2°) $t_1 = 1,5$ s ; $h_1 = 11,25$ m ; $h_2 = 1,25$ m $t_2 = 0,5$ s.

3°) $v_1 = 15$ m.s -1 ; $v_2 = 5$ m.s -1.

....

Problème 42.

Deux billes A et B assimilables à des points matériels sont disposées sur une même verticale à 0,4 m l'une de l'autre, A au-dessus de B.

A l'instant t = 0, on lâche A sans vitesse initiale. Quand A a parcouru 0,2 m, on lâche B sans vitesse initiale.

1°) Ecrire les équations des mouvements de A et B en prenant pour origine des espaces le point de départ de A et pour origine des dates le moment de ce départ.. ($\boldsymbol{g = 10\ m.s^{-2}}$).

2°) A quelle date et à quelle position la rencontre entre A et B aura-t-elle lieu ?

Réponses : 1°) $h_A = 5t_2$; $h_B = 5t2 - 2t + 0,6$ (m).

2°) t = 0,3 s ; h = 0,45 m.

....

LA PHYSIQUE AU SERVICE DE L'HOMME MODERNE

(Konaté Cheickna).

2 – DYNAMIQUE.

2.1 – MOUVEMENT DU CENTRE D'INERTIE D'UN SOLIDE.

2.1.1 – CENTRE D'INERTIE.

Le centre d'inertie d'un solide est le point G où toute la masse du solide se trouve concentrer. C'est le barycentre des points A_i de masse m_i **qui le constitue.**

$$\boxed{m_1\overrightarrow{GA_1}+m_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots+m_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}} \iff \boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}}$$

Le centre d'inertie G d'un solide coïncide avec son centre de gravité (**point d'application du poids du solide).**

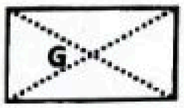
– Si un solide possède un axe de symétrie, G se situe sur cet axe.

– Si un solide possède un centre de symétrie, G coïncide avec ce centre de symétrie.

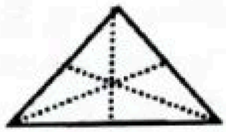
Centre d'inertie de quelques solides homogènes.

- **Disque, cerceau**
- **Rectangle, carré, parallélogramme**
- **Triangle.**

G est au centre



G est l'intersection des diagonales.



G est l'intersection des médianes.

METHODE.

Pour déterminer le centre d'inertie G d'un solide quelconque :

- **on le décomposé en des solides simples dont on sait déterminer le centre d'inertie ;**
- **on remplace chaque solide par son centre d'inertie G_i ;**
- **on exprime que G est le barycentre des points G_i de masses m_i .**

2.1.2 – QUANTITE DE MOUVEMENT.

a) Quantité de mouvement d'un point matériel.

Définition. Le vecteur quantité de mouvement d'un point matériel est le produit de sa masse par son vecteur vitesse.

$$\boxed{\vec{P}=m.\vec{V}}$$

b) Quantité de mouvement d'un système.

La quantité de mouvement d'un système est la somme des vecteurs quantités de mouvement de chaque point du système.

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \cdots + \vec{P}_n \Longrightarrow \boxed{\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i}$$

Propriété.

La quantité de mouvement d'un système est égale à celle de son centre d'inertie.

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{V}_G}$$

où $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$, est la masse totale du système.

2.1.2 – RELATION FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE : (2ème LOI DE NEWTON).

Enoncé : « Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un solide est égale à la dérivée par rapport au temps de son vecteur quantité de mouvement ».

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ex} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

2.1.3 – THEOREME DU CENTRE D'INERTIE.

Comme $\vec{P} = m\vec{V}_G$; on a :

$$\sum \vec{F}_{ex} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = m\frac{d\vec{V}}{dt}; \quad \text{or : } \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt};$$

d'où $\boxed{\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a}}$

Enoncé : « Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un solide est égale au produit de sa masse par le vecteur accélération de son centre d'inertie ».

2.1.4 – PRINCIPE D'INERTIE (1ère LOI DE NEWTON).

Dans le cas d'un système isolé ou pseudo-isolé :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{0} \Longleftrightarrow \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{V} = Cste$$

d'où $\boxed{\vec{V} = Cste}$

Enoncé : « Dans un référentiel galiléen, le mouvement du centre d'inertie d'un système isolé ou pseudo-isolé est rectiligne uniforme ».

2.1.5 – REFERENTIELS GALILEENS.

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le principe d'inertie est valable en toute rigueur.

Dans la pratique on utilise :

– le référentiel terrestre, pour l'étude des mouvements qui s'effectuent au voisinage de la Terre ;

– le référentiel géocentrique, pour l'étude des mouvements des satellites de la Terre ;

– le référentiel héliocentrique, pour l'étude des mouvements des planètes autour du soleil.

2.1.6 – THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE.

Enoncé : « Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un système est égale à la somme algébrique des travaux des forces extérieures qui s'exercent sur le système pendant la durée de la variation ».

$$\boxed{\Delta E_C = \sum W(\vec{F}ex)}$$

2.1.7 – PRINCIPE DES INTERACTIONS OU PRINCIPE DE L'ACTION ET DE LA REACTION : (3ème LOI DE NEWTON).

Enoncé : « Quand un corps A exerce une force $\vec{F}_{A/B}$ sur un corps B, B exerce sur A une force $\vec{F}_{B/A}$, ces forces sont égales et directement opposées ».

$$\boxed{\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}}$$

2.1.8 – APPLICATIONS DU THEOREME DU CENTRE D'INERTIE.

a) Méthode générale de résolution d'un problème de dynamique.

La résolution d'un problème de dynamique nécessite les étapes suivantes :

1 – Choix du système ;

2 – Choix du référentiel (galiléen);

3 – Bilan des forces extérieures appliquées au système (schéma) ;

4 – Ecrire le théorème du centre d'inertie (T. C.I) et ou le théorème de l'énergie cinétique (T.E.C.) ;

5 – Projeter le T. C. I. dans un repère d'axes orthonormés.

Dans le cas d'un mouvement circulaire choisir le repère de Frenet.

b) APPLICATIONS DU THEOREME DU CENTRE D'INERTIE.

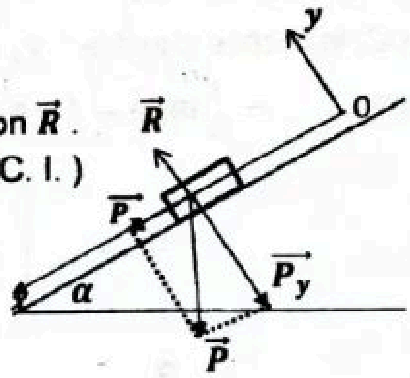
Application 1. Solide glissant sur un plan incliné avec ou sans frottement.
Un solide supposé ponctuel, de masse m = 0,10 kg, glisse le long de la ligne de plus grande pente AB d'un plan incliné d'un angle α = 20° avec le plan horizontal ($g = 10\ m/s^2$).
1°) Le solide est abandonné en A sans vitesse initiale.
a) En considérant les frottements négligeables, déterminer la nature du mouvement du solide et calculer la durée du parcours AB = 2 m.
b) En réalité, cette durée est égale à 1,3 s. En admettant l'existence des forces de frottement de somme constante $\vec{f}$, opposée au vecteur vitesse, déterminer la valeur de cette force de frottement.
2°) Le mobile est maintenant lancé de B vers A. Lors de son passage en B sa vitesse est égale à 3 m.s $^{-1}$. Déterminer la position du point C où la vitesse du solide s'annule. **On suppose que la force de frottement est constamment égale à 0,10 N.**

Réponses : 1°) $a = g\sin\alpha = 3,35\ m\cdot s^{-2}$; $t \approx 1,1\ s$;
b) $f = 0,10\ N$; **2°)** $BC \approx 1\ m$.

.... **Résolution** ....

1°) a) Nature du mouvement du solide.
– Système : le solide.
– Référentiel : terrestre (supposé galiléen).
– Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$.
– Appliquons le théorème du centre d'inertie (T. C. I.)

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$



Projetons sur l'axe ox :

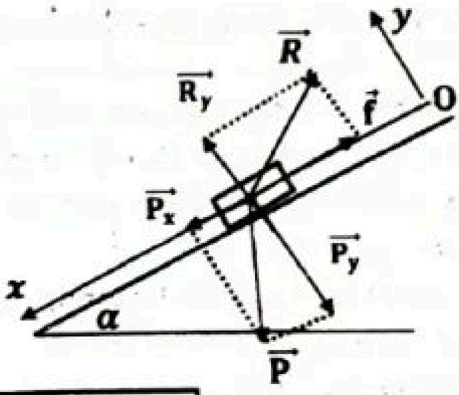
$$mg\sin\alpha = ma \implies \boxed{a = g\sin\alpha}$$

AN : $a = 10\sin 20° = 3,35\ m.s^2 \implies \boxed{a = 3,35\ m.s^{-2}}$

L'accélération est constante, le mouvement est rectiligne uniformément varié.
Calcul de la durée du parcours AB.
L'équation horaire du mouvement est :

$$x = l = \frac{1}{2}at^2 \implies \boxed{t = \sqrt{\frac{2l}{a}}}$$

AN : $t = \sqrt{\frac{2 \times 2}{3{,}35}} = 1{,}09\ s \approx 1{,}1\ s$



$$\boxed{t \approx 1{,}1\ s}$$

b) Calcul des forces de frottement.

Projetons le T. C. I. sur l'axe ox :

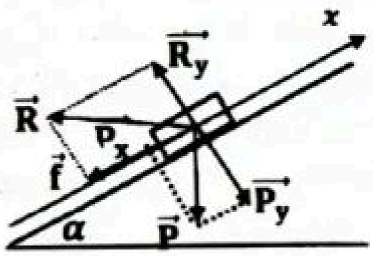
$$mg \sin\alpha - f = ma \Longrightarrow \boxed{f = m(g \sin\alpha - a)}$$

La nouvelle accélération est :

$l = \frac{1}{2}at^2 \Longrightarrow a = \frac{2.l}{t^2} = \frac{2 \times 2}{(1{,}3)^2} = 2{,}36\ m.s^{-2}$

AN : $f = 0{,}10 \times (3{,}35 - 2{,}36) = 0{,}99\ N$

d'où $\boxed{f \approx 0{,}10\ N}$



2°) Position du C où la vitesse du solide s'annule.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre B et C.

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}ex) \Longleftrightarrow \frac{1}{2}mV_C^2 - \frac{1}{2}mV_B^2 = -(mg \sin\alpha + f).x$$

En C, le mobile s'arrête : $V_C = 0$;

alors : $-\frac{1}{2}mV_B^2 = (mg \sin\alpha - f).x$;

d'où $$\boxed{x = \frac{V_B^2}{2\left(g \sin\alpha + \frac{f}{m}\right)}}$$

AN : $x = \frac{9}{2\left(3{,}35 + \frac{0{,}10}{0{,}10}\right)} = 1{,}03\ m$ d'où $\boxed{x \approx 1\ m}$

....

Application 2 : Pendule dans un véhicule.

On dispose d'un pendule constitué d'une bille assimilable à un point matériel de masse m = 50 g attachée à un fil inextensible, de masse négligeable.

Ce pendule est suspendu au plafond d'un véhicule. Ce véhicule démarre en translation rectiligne horizontale, il atteint la vitesse de 18 km/h après un parcours de 10 m.

1°) Déterminer la position du fil par rapport à la verticale au cours de ce démarrage et la

tension du fil. ($g = 9,81\ m.s^{-2}$).

2°) Un repère d'espace lié au véhicule est-il galiléen ?

.... **Résolution** ....

1°) Déterminons la position du fil par rapport à la verticale.

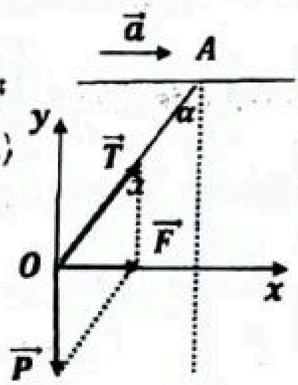
– Système : la bille.

– Référentiel : terrestre (supposé galiléen).

– Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$

– Appliquons le théorème du centre d'inertie (T. C. I.)

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$



Projetons sur les axes de coordonnées :

* sur l'axe ox : $T\sin\alpha = ma$ (1)

* sur l'axe oy : $T\cos\alpha - mg = 0$

soit : $T\cos\alpha = mg$ (2)

En divisant (1) par (2), on obtient :

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{g} \Longrightarrow \tan\alpha = \frac{a}{g} \qquad (3)$$

Déterminons l'accélération a du véhicule.

Le mouvement est rectiligne uniformément accéléré :

$$V^2 - V_0^2 = 2ax \Longrightarrow a = \frac{V^2 - V_0^2}{2.x}$$

AN : $V_0 = 0$; $V = 18\,km/h = \frac{18}{3,6} = 5\,m/s$;

alors : $a = \frac{(5)^2 - 0}{2 \times 10} = 1,25\,m.s^{-2}$

Ainsi : $\tan\alpha = \frac{1,25}{9,81} = 0,127 \Longrightarrow \boxed{\alpha \approx 7,27° = 7°16'}$

Autre méthode.

Dans le triangle des forces, on a :

$$\tan\alpha = \frac{F}{P} = \frac{ma}{mg} \Longrightarrow \boxed{\tan\alpha = \frac{a}{g}}$$

Calcul de la tension du fil.

1ère méthode. La tension du fil est donnée par :

$$T\cos\alpha = mg \Longrightarrow \boxed{T = \frac{mg}{\cos\alpha}}$$

AN : $T = \dfrac{5.10^{-2} \times 9{,}81}{\cos 7{,}27°} \approx 0{,}494\ N$; d'où $\boxed{T \approx 0{,}494\ N}$

2ème méthode. Dans le triangle des forces, on a :

$$\cos\alpha = \frac{P}{T} \Longrightarrow \boxed{T = \frac{mg}{\cos\alpha}}$$

3ème méthode. Le théorème de Pythagore appliqué au triangle des forces donne :

$$T^2 = P^2 + F^2 \Longrightarrow T = \sqrt{P^2 + F^2} = \sqrt{m^2g^2 + m^2a^2}$$

d'où $\boxed{T = m\sqrt{g^2 + a^2}}$

AN : $T = 5.10^{-2}\sqrt{(9{,}81)^2 + (1{,}255)^2} = 0{,}494\ N.$; $\boxed{T = 0{,}494\ N}$

Remarque.:

$$T = m\sqrt{g^2 + a^2} = m\sqrt{g^2\left[1 + \left(\frac{a}{g}\right)^2\right]} \Longrightarrow T = mg\sqrt{1 + \left(\frac{a}{g}\right)^2}$$

or : $\tan\alpha = \frac{a}{g}$; alors : $T = mg\sqrt{1 + \tan^2\alpha}$.

En remarquant que $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; on en déduit :

$$\boxed{T = \frac{mg}{\cos\alpha}}$$

2°) Repère d'espace lié au véhicule est-il galiléen ?

La bille est immobile dans ce repère, son vecteur accélération $\vec{a}_V = \vec{0}$.

Le théorème du centre d'inertie par rapport au véhicule s'écrit :

$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_V = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$ **(principe de l'inertie).**

or $\vec{P} + \vec{T} \neq \vec{0}$; le principe n'est pas vérifié, alors, le repère d'espace lié au véhicule n'est pas galiléen.

Application 3 : Pendule oscillant..

Une bille de masse m = 100 g est suspendue en un point O par un fil inextensible de longueur l = 1 m et de masse négligeable. Le pendule ainsi constitué peut effectuer des oscillations de part et d'autre de sa position d'équilibre. On l'écarte de la verticale d'un angle $\theta_0 = 45°$ et on l'abandonne sans vitesse initiale. On suppose les frottement négligeables. ($g = 10\ m.s^{-2}$).

1°) A l'instant t, le fil fait un angle θ avec la verticale.

Exprimer les coordonnées du vecteur accélération dans le repère de Frenet en fonction de θ, θ_0 et g.

2) Calculer $\|\vec{a}\|$ et représenter sur un schéma le vecteur $\vec{a}$ dans les trois cas : $\theta = \theta_0$; $\theta = 30°$; $\theta = 0$.

3°) Exprimer la norme de la tension du fil en fonction de θ, θ_0 et g ; la calculer dans les trois cas précédents.

Résolution

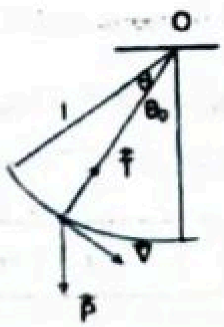
1°) Coordonnées du vecteur accélération dans le repère de Frenet.

- Système : la bille.
- Référentiel : terrestre (supposé galiléen).
- Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$.
- Appliquons le théorème du centre d'inertie (T. C. I.)

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

- suivant la tangente : $mg\sin\theta = ma_t \Longrightarrow a_t = g\sin\theta$
- suivant la normale : $T - mg\cos\theta = ma_n \quad (1)$

D'autre part : $a_n = \dfrac{V^2}{l}$; $(R = l)$.



D'après le théorème de l'énergie cinétique.

$$\frac{1}{2}mV^2 - 0 = W(\vec{P}) + W(\vec{T})$$

On a : $W(\vec{P}) = mgh = mgl(\cos\theta - \cos\theta_0)$

$W(\vec{T}) = 0$; $(car\ \vec{T} \perp \vec{V})$

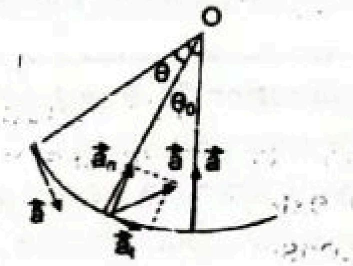
Le théorème de l'énergie cinétique devient :

$$\frac{1}{2}mV^2 = mgl(\sin\theta - \cos\theta_0) \Longrightarrow V^2 = 2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

Ainsi : $a_n = \dfrac{2.g.l(\cos\theta - \cos\theta_0)}{l} \Longrightarrow a_n = 2g(\cos\theta - \cos\theta_0)$

D'où les coordonnées du vecteur accélération :

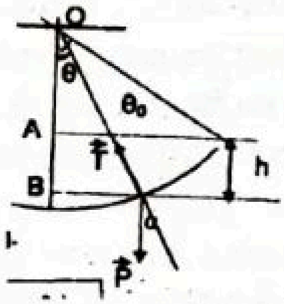
$$\boxed{\begin{cases} a_t = g\sin\theta \\ a_n = 2g(\cos\theta - \cos\theta_0) \end{cases}}$$



2°) Calcul de $\|\vec{a}\|$ et représentation de $\vec{a}$.

Dans le repère de Frenet, le module du vecteur accélération est :

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$



1er cas $\theta = \theta_0$:

$$\begin{cases} a_t = g\sin\theta_0 = 10\sin 45° = 7,07\ m.s^{-2} \\ a_n = 2g(\cos\theta_0 - \cos\theta_0) = 0 \end{cases}$$

d'où $\boxed{a = a_t = 7,07\ m.s^{-2}}$

2ème cas $\theta = 30°$:

$$\begin{cases} a_t = g\sin 30° = 10\sin 45° = 5\ m.s^{-2} \\ a_n = 2g(\cos 30° - \cos 45°) = 3,18\ m.s^{-} \end{cases}$$

d'où $a = \sqrt{(5)^2 + (3,18)^2} = 5,9\ m.s^{-2} \Longrightarrow \boxed{a = 5,9\ m.s^{-2}}$

3ème cas $\theta = 0°$:

$$\begin{cases} a_t = g\sin 0° = 0 \\ a_n = 2g(1 - \cos\theta_0) = 5,86\ m.s^{-2} \end{cases}$$

d'où $\boxed{a = a_n = 5,86\ m.s^{-2}}$

3°) Exprimons la tension en fonction de θ, θ_0 et g.

La tension T est donnée par la relation (1) :

$$T - mg\cos\theta = ma_n = m\frac{V^2}{l} \Longrightarrow \boxed{T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)}$$

D'où les valeurs de T pour $\theta = \theta_0$, $\theta = 30°$, $\theta = 0°$:

$\boxed{T_1 = 0,71\ N}$ $\boxed{T_2 = 1,18\ N}$ $\boxed{T_3 = 1,59\ N}$

....

Application 4 : Pendule conique..

Un axe vertical zz' peut entraîner dans un mouvement de rotation un fil inextensible de longueur l et de masse négligeable, à l'extrémité duquel on a fixé un solide ponctuel (S) de masse m = 0,2 kg.

1°) Montrer que le fil ne s'écarte de l'axe qu'à partir d'une certaine vitesse angulaire ω_0 qui ne dépend que de l et du lieu de l'expérience.

2°) La vitesse angulaire de rotation étant $2\omega_0$, déterminer l'angle θ d'écart du fil ainsi que le module de la tension $\vec{T}$ de ce dernier. $(g = 10\ N.kg^{-1})$.

.... Résolution ....

1°) Montrons que le fil ne s'écarte de l'axe qu'à partir d'une vitesse angulaire ω_0.

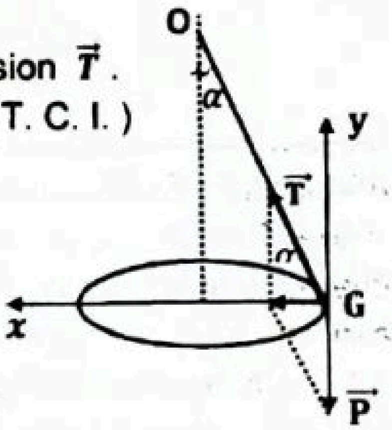
– Système : le solide.

– Référentiel : terrestre (supposé galiléen).

– Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$.

– Appliquons le théorème du centre d'inertie (T. C. I.)

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$



Projetons sur les axes de coordonnées :

* sur Gx ; $T\sin\theta = ma_n = m\dfrac{V^2}{r}$

Le centre d'inertie du solide décrit une circonférence de rayon : $r = l.\sin\theta$.

alors : $T\sin\theta = m\omega^2\sin\theta \Longrightarrow T = m\omega^2 l$ (1)

* sur Gy : $T\cos\theta - mg = 0 \Longrightarrow T\cos\theta = mg$ (2)

En divisant (2) par (1), on obtient :

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2.l}$$

Le fil ne s'écarte de l'axe que si :

$$\cos\theta < 1 \Longleftrightarrow \frac{g}{\omega^2.l} < 1 \Longrightarrow \omega^2 > \frac{g}{l}$$

soit : $\omega > \sqrt{\dfrac{g}{l}}$; d'où $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}}$

Autre méthode.. Le triangle des forces donne :

$$\tan\theta = \frac{F}{P} = \frac{ma_n}{mg} \Longrightarrow \tan\theta = \frac{a_n}{g}$$

or : $a_n = \omega^2 r = \omega^2 l \sin\theta$, avec $r = l\sin\theta$:

alors : $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\omega^2 l \sin\theta}{g} \Longrightarrow \cos\theta = \frac{g}{\omega^2 . l}$

2°) Calcul de l'angle d'écart θ du fil avec la verticale quand $\omega = 4\omega_0$.

On a : $\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 . l} = \frac{g}{4.\omega_0^2 . l} \Longrightarrow \cos\theta = \frac{1}{4.} = 0,25$

d'où $\boxed{\theta \approx 75,5°}$

Calcul de la tension T du fil.

La tension du fil est donnée par l'une ou l'autre relation (1) ou (2) : :

$$T = m\omega^2 l = 4m\omega_0^2 . l \Longrightarrow T = 4m\frac{g}{l} = l = 4mg$$

d'où $\boxed{T = 8\ N}$

Application 5 : Solide glissant sur une sphère..

Un solide (S) de masse m, assimilable à un point matériel est placé au sommet A d'une sphère de rayon $r = 1\ m$. On déplace le point matériel de sorte qu'il quitte A avec une vitesse que l'on considère comme nulle, puis glisse sans frottement le long de la sphère.

1°) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, la position du point étant repérée par l'angle **θ,** exprimer le module du vecteur vitesse de (S) en fonction de θ avant qu'il quitte la sphère.

2°) En utilisant la relation fondamentale de la dynamique, exprimer en fonction de θ le module de la réaction exercée par la sphère sur (S).

3°) En déduire l'angle θ lorsque le solide quitte la sphère.

Quelle est sa vitesse en ce point ? ($g = 10\ m.s^{-2}$).

.... **Résolution** ....

1°) Exprimons la vitesse de (S) en fonction de θ.

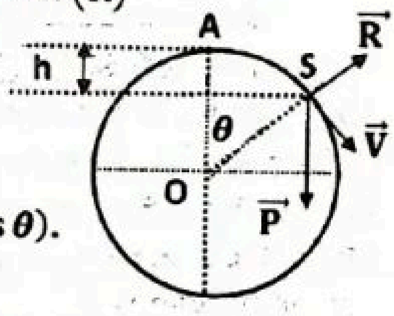
– Système : le solide.

– Référentiel : terrestre (supposé galiléen).

– Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$.

– Appliquons le théorème de l'énergie cinétique(T. E. C.).

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}ex) \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\ mV^2 - \frac{1}{2} mV_0^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$$



Mais $V_0 = V_A \approx 0$ et $W(\vec{R}) = 0$; $(car\ \vec{R} \perp \vec{V})$

et $W(\vec{P}) = mgh$.

Déterminons la hauteur h.

$$h = OA - OH = r - r\cos\theta \Longrightarrow h = r(1-\cos\theta).$$

Le théorème de l'énergie cinétique devient :

$$\frac{1}{2}\ mV^2 = mgr(1-\cos\theta) \Longrightarrow V^2 = 2gr(1-\cos\theta)$$

d'où $\boxed{V = \sqrt{2gr(1-\cos\theta)}}$

2°) Exprimons en fonction de θ, le module de la réaction $\vec{R}$.

Appliquons au solide la relation fondamentale de la dynamique :

$$\sum \vec{F}ex = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a} \Longleftrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

Projetons cette relation sur la normale **(repère de Frenet) :**

$$mg\cos\theta - R = m\,a_n = m\ \frac{V^2}{r} \Longrightarrow R = mg\cos\theta - m\ \frac{V^2}{r}$$

Soit : $R = mg\cos\theta - 2g(1-\cos\theta)$;

d'où $\boxed{R = mg(3\cos\theta - 2)}$

3°) Valeur de θ lorsque le solide quitte la sphère.

Le solide quitte la sphère lorsque :

$$R = 0 \Longleftrightarrow mg(3\cos\theta - 2) = 0 \Longrightarrow 3\cos\theta - 2 = 0$$

d'où $\boxed{\cos\theta = \frac{2}{3}} \Longrightarrow \boxed{\theta \approx 48°}$

Vitesse correspondante.

On a : $V = \sqrt{2gr(1-\cos\theta)} = \sqrt{2gr\left(1-\frac{2}{3}\right)} \Longrightarrow V = \sqrt{\frac{2}{3}gr}$

AN: $V = \sqrt{\frac{2}{3} \times 10 \times 1} = 2,58\ m.s^{-1} \approx 2,6\ m.s^{-1}$

d'où $\boxed{V \approx 2,6\ m.s^{-1}}$

EXERCICES ET PROBLEMES RESOLUS.

Problème 1.

On assimile, le Soleil et la Terre à des boules homogènes de centres S et T et de masses respectives $M_S = 2.10^{30}\ kg$ et $M_T = 6.10^{24}\ kg$. La distance ST est, en moyenne égale à 1,5.10⁸ km. Quelle est la distance SG entre le centre du Soleil et le centre d'inertie du système formé par les deux astres. Conclure.

.... **Résolution** ....

Position du centre d'inertie G du système formé par les deux astres.

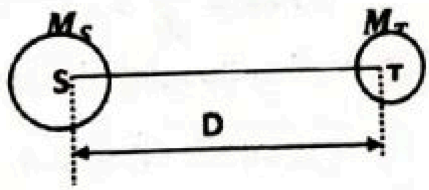
G est le barycentre des points S et T :

$$M_S\overrightarrow{GS} + M_T\overrightarrow{GT} = \vec{0} \Longleftrightarrow \quad (M_S + M_T)\overrightarrow{OG} = M_S\overrightarrow{OS} + M_T\overrightarrow{OT}$$

Pour déterminer la distance SG, prenons comme origine le point S :

$$(M_S + M_T)\overrightarrow{SG} = M_T\overrightarrow{ST} \Longrightarrow \quad \overrightarrow{SG} = \frac{M_T}{(M_S+M_T)}\overrightarrow{ST}$$

Soit : $SG = \frac{M_T}{(M_S+M_T)} ST$



Comme $M_T << M_S$, alors $M_S + M_T \approx M_S$;

d' où $\boxed{SG \approx \frac{M_T}{M_S} D}$

AN : $SG \approx \frac{6.10^{24}}{2.10^{30}} \times 1,5.10^8 = 4,5.10^2\ km$; d' où $\boxed{SG \approx 450\ km}$

Conclusion. : G est voisin du centre du soleil (du côté de la plus grande masse).

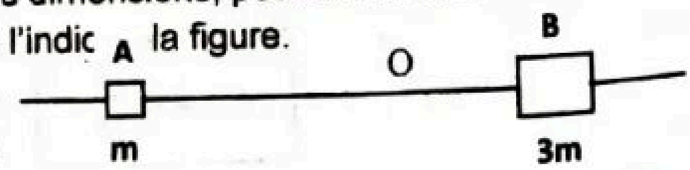
....

Problème 2.

Deux masselottes A et B, de faibles dimensions, peuvent coulisser sur une tige x'Ox. Elles sont disposées comme l'indic la figure.

OA = 1 m ; masse m = 100 g ;

OB = 20 cm ; masse 3m = 300 g.



a) Déterminer la position du centre d'inertie G du système formé par les deux masselottes (donner la distance OG).

b) Dans quel sens, et de combien, faut-il déplacer la masselotte A pour que G coïncide avec le point O ?

.... **Résolution** ....

a) Position du centre d'inertie G du système formé par les masselottes.

Le centre d'inertie G est donné par la relation :

$$m_1\overrightarrow{GA} + m_2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \iff (m_1 + m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB}$$

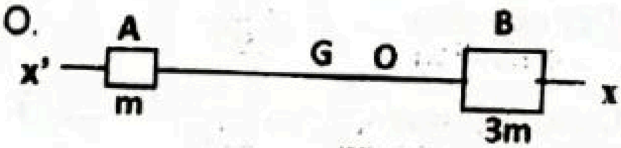
Soit : $4\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$

La projetons sur l'axe ox donne :

$$4\overline{OG} = 3\overline{OB} - \overline{OA} \Longrightarrow \boxed{\overline{OG} = \frac{3\overline{OB} - \overline{OA}}{4}}$$

AN : $\overline{OG} = \frac{3 \times 20 - 100}{4} = -10\ cm$;

G est à gauche de O et situé à 10 cm de O.



d'où $\boxed{OG = 10\ cm}$

b) Sens et déplacement de la masselotte A pour que G coïncide avec O.

Soit A' la nouvelle position de A.

G coïncide avec O, lorsque :

$$m_1\overrightarrow{OA'} + m_2\overrightarrow{OB} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{OA'} + 3\overrightarrow{OB} = \vec{0}$$

La projetons sur l'axe ox donne :

$$3\overline{OB} - \overline{OA'} = 0 \Longrightarrow \overline{OA'} = 3\overline{OB} = 60\ cm$$

Comme OA'< OA, il faut rapprocher A de B.

Le rapprochement est de : AA' = OA – OA'=100 cm – 60 cm = 40 cm ;

d'où $\boxed{AA' = 40\ cm}$

....

Problème 3 : (Eurin-gié, Exo 2.5 , page 38).

Une tondeuse à gazon sur coussin d'air de masse m = 20 kg, est initialement immobile sur un plan horizontal. A partir de l'instant t = 0, on lui applique un ensemble de forces de somme $\vec{F}$ constante horizontale et de norme F = 10 N.

1°) Calculer l'accélération du centre d'inertie de la tondeuse.

2°) Exprimer le vecteur quantité de **mouvement à l'instant t en fonction de $\vec{F}$ et de t.**

3°) Exprimer le travail de la force $\vec{F}$ durant l'intervalle de temps [0 , t] en fonction de F, t et m.

Application numérique : calculer le travail lorsque t = 10 s.

Réponses : 1°) a = 0,5 m.s-1 ; 3°) W = 250 J.

..................................**Résolution**..

1°) Calculer de l'accélération.

D'après le théorème du centre d'inertie :

$$\sum\vec{F}_{ex} = m\vec{a} \qquad \vec{F} = m\vec{a}$$

Projetons sur l'axe xx' :

$$F = ma \Longrightarrow \boxed{a = \frac{F}{m}}$$

AN : $a = \frac{10}{20} = 0,5\, m.s^{-1} \Longrightarrow \boxed{a = 0,5\, m.s^{-1}}$

2°) Vecteur quantité de mouvement en fonction de $\vec{F}$ et de t..

Par définition : $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$

Donc : $\vec{F} = m.\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} \Longleftrightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Longrightarrow \vec{P} = \int \vec{F}.dt = \vec{F}.t$

d' où $\boxed{\vec{P} = \vec{F}.t}$

3°) Travail de la force $\vec{F}$ en fonction de F, t et m.

On a : $W = \vec{F}.\vec{l} = F.l$; $l = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2$

d' où $\boxed{W = \frac{1}{2}\frac{(F.t)^2}{m}}$ AN : $\boxed{W = 250\, J}$

....

Problème 4 : (Eurin-gié, page 38 , Exo 2.6,).

Un camion de masse 15 t , initialement immobile, est mis en mouvement de translation rectiligne par un ensemble de forces de somme $\vec{F}$ parallèle à la trajectoire. Il acquiert une vitesse $V = 72\, km.h^{-1}$ en 2 min.

1°) L'accélération du camion est-elle nulle à l'instant du démarrage? Varie- t-elle au cours du mouvement ?

2°) Exprimer le vecteur vitesse du camion à l'instant t en fonction de $\vec{F}$, m et t. En déduire $\|\vec{F}\|$.

3°) Calculer l'énergie cinétique du camion à l'instant t = 2 min. En déduire la puissance mécanique moyenne de la force $\vec{F}$.

4°) Exprimer la puissance instantanée de la force $\vec{F}$ en fonction de F, t et m. Calculer cette puissance aux instants t_1 = 1 min et t_2 = 2 min.

Réponses : 2°) $\|\vec{F}\|$ =2500 N ; 3°) Ec = 3.106 J ; 4°) P = 25kW ; P = 50 kW.

....Résolution ....

1°) Variation de l'accélération du camion.

Au démarrage $V = 0$, donc $a = 0$

Au cours du mouvement : $\vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$

Comme $\vec{F} = C^{te}$, alors $\vec{a} = C^{te}$.

2°) Vecteur vitesse en fonction F, m et t.

On a : $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \Longrightarrow \vec{V} = \vec{a}t$

d' où $\boxed{\vec{V} = \frac{\vec{F}}{m}t}$

En module : $V = \frac{\|\vec{F}\|}{m}t$ $\boxed{\|\vec{F}\| = \frac{mV}{t}}$ AN : $\boxed{F = 2\,500\ N}$

3°) Energie cinétique du camion.

$\boxed{E_C = \frac{1}{2}mV^2}$ AN : $\boxed{E_C = 3.10^6\ J}$

Puissance moyenne de $\vec{F}$.

Par définition : $P_m = \frac{W}{t}$

D'après le théorème de l'énergie cinétique : $W = E_C$;

d' où $\boxed{P_m = \frac{E_C}{t}}$ AN : $\boxed{P_m = 1,5.10^6\ J}$

4°) Puissance instantanée de $\vec{F}$ en fonction de F, t et m.

$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d(\vec{F}.\vec{l})}{dt}$ $P = \vec{F}\frac{d\vec{l}}{dt}$; or : $\vec{V} = \frac{d\vec{l}}{dt}$

Donc : $P = \vec{F}.\vec{V} = \vec{F}.\frac{\vec{F}}{m}t$; d' où $\boxed{P = \frac{F^2.t}{m}}$

- Pour $t_1 = 1\,min = 60\,s$: $P = 25\,000\ W$
- Pour $t_2 = 2\,min = 120\,s$: $P = 25\,000\ W$

....

Problème 5 : (Eurin-gié, page 39 , Exo 2.7,).

1°) Un ascenseur de masse $m_1 = 250$ kg transporte trois personnes de masse totale $m_2 = 250$ kg. Lorsque l'ascenseur est en mouvement, le câble exerce sur lui une force $\vec{F}$ verticale constante, dirigée vers le haut, d'intensité **F = 4 800 N.**

a) Déterminer l'expression littérale de l'accélération de l'ascenseur. Préciser le sens du vecteur accélération.

b) Calculer l'accélération de l'ascenseur (on prendra g = 10 m.s-2).

2°) a) L'ascenseur démarre sans vitesse initiale. Donner les expressions littérales de sa vitesse et de la variation d'altitude à l'instant t.

b) Calculer la vitesse et l'altitude à l'instant t = 6 s.

c) Calculer la puissance développée par la force $\vec{F}$ à l'instant t = 6 s.

Réponses:1°) b) a = 0,4 m.s-2; 2°) b) v = 2,4 m.s-1; h = 7,2 m ; c)P = - 11,5 kW

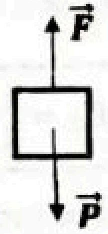
………………………………………**Résolution** ………………………………………

1°) a) Expression littérale de l'accélération de l'ascenseur.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la force $\vec{F}$.

D'après le théorème du centre d'inertie :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$$



Suivant la verticale descendante :

$$mg - F = ma \Longrightarrow \boxed{a = \frac{mg - F}{m} = g - \frac{F}{m}}$$

Sens du vecteur accélération

Comme $\frac{F}{m} < g$, le vecteur accélération est descendant.

b) Calcul de l'accélération de l'ascenseur.

On a : $a = g - \frac{F}{m} = a = 10 - \frac{4800}{500} = 0,4\ m.s^{-2}$

d' où $\boxed{a = 0,4\ m.s^{-2}}$

2°) a) Expression littérale de la vitesse.

$$V = at \Longrightarrow \boxed{V = \left(g - \frac{F}{m}\right)t}$$

Expression littérale de h.

On a : $h = \frac{1}{2}at^2 \Longrightarrow \boxed{h = \frac{1}{2}\left(g - \frac{F}{m}\right)t^2}$

b) Vitesse et l'altitude à l'instant t = 6 s.

- $V = \left(g - \frac{F}{m}\right)t = (10 - 9,6) \times 6 \Longrightarrow \boxed{V = 2,4\, m.s^{-1}}$

- $h = \frac{1}{2}\left(g - \frac{F}{m}\right)t^2 = \frac{1}{2}(0,4) \times (6)^2 \Longrightarrow \boxed{h = 7,2\, m}$

c) Puissance développée par $\vec{F}$ à l'instant t = 6 s.

On a : $P = \vec{F}.\vec{V} = F.V\cos\theta$; or : $\theta = \pi \Longrightarrow \cos\theta = -1$;

d' où $\boxed{P = -F.V}$ AN : $\boxed{P = -11,5\, kW}$

Problème 6 : (Eurin-gié, page 39 , Exo 2.9,).

Un solide de masse m = 20 kg glisse le long d'une ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle α = 30° avec l'horizontale. La somme $\vec{R}$ supposée constante des forces de contact réparties en surface exercée par le plan sur le solide fait un angle β avec la normale au plan.

1°) Exprimer le vecteur accélération en fonction de α , β , m , R et g.

2°) Lâché sans vitesse initiale, le mobile parcourt une distance l = 5 m en une durée t = 1,7 s. Calculer l'accélération. (g = 10 m.s $^{-2}$).

3°) Calculer l'angle β et la norme de $\vec{R}$.

Réponses : 1°) $\vec{a} = (g\sin\alpha - \frac{R\sin\beta}{m})\vec{i}$; **2°)** $a = \frac{2 \cdot l}{t^2} = 3,46\, m.s^{-2}$

3°) $\tan\beta = \frac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha} \Longrightarrow \beta \approx 10°$; $R = \frac{mg\cos\alpha}{\cos\beta} = 176\, N.$

Autre procédé : $\tan\beta = \frac{R_X}{R_Y}$ et $R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2}$

..Résolution ....

1°) Vecteur accélération en fonction de α , β , m, R et g.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$ du plan.

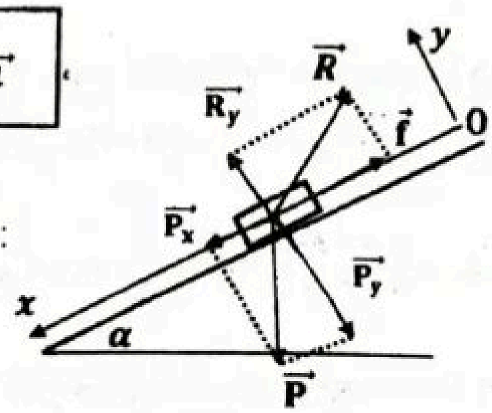
Appliquons le théorème du centre d'inertie

$$\Sigma\vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

Projetons sur l'axe Ox :

$$mg\sin\alpha - R\sin\beta = ma \qquad (1)$$

d' où $$\boxed{a = \left(g\sin\alpha - \frac{R\sin\beta}{m}\right)\vec{\imath}}$$



2°) Calcul de l'accélération :

Le mouvement est uniformément accéléré :

$$x = l = \frac{1}{2}at^2 \qquad \boxed{a = \frac{2\cdot l}{t^2}}$$

AN : $a = \frac{2\times 5}{(1{,}7)^2} = 3{,}46\ m\cdot s^{-2}$ $\boxed{a = 3{,}46\ m\cdot s^{-2}}$

3°) l'angle β et la norme de R.

De (1) nous tirons : $R\sin\beta = m(g\sin\alpha - a)$ (2)

Projetons le T.C.I. sur l'axe Oy **:**

$R\cos\beta - mg\cos\alpha = 0$ $R\cos\beta = mg\cos\alpha$ (3)

En divisant (2) par (3) ; on obtient :

$$\boxed{\tan\beta = \frac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha}}$$

AN : $\tan\beta = \frac{10\sin 30° - 3{,}46}{10\cos 30°} = 0{,}178 \Longrightarrow$ $\boxed{\beta = 10°}$

La norme de $\vec{R}$ est donnée par :

$R\cos\beta = mg\cos\alpha \Longrightarrow$ $\boxed{R = \frac{mg\cos\alpha}{\cos\beta}}$

AN : $R = 20\times 10\times \frac{\cos 30°}{\cos 10°} = 176\ N. \Longrightarrow$ $\boxed{R = 176\ N}$

Autre méthode : on utilise les relations :

$\boxed{\tan\beta = \frac{R_x}{R_y}}$ et $\boxed{R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2}}$

Déterminer R_x et R_y puis vérifier les résultats.

....

Problème 7 : (Eurin-gié, page 39 , Exo 2.10,).

Un solide est tiré le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné par un câble parallèle à ce plan qui fait un angle α avec l'horizontale.

La masse m du solide est égale 980 kg.

1°) Le mouvement comporte trois phases.

1ère phase: Le mouvement est d'abord uniformément accéléré durant le temps Δt.

2ème phase : le mouvement est uniforme durant 6 s, sur une distance de 36 m.

3ème phase : le mouvement est uniformément retardé pendant une même durée Δt jusqu'à l'arrêt. Sachant que la distance parcourue est de 60 m, calculer la durée totale du trajet effectué par le solide.

2°) Le déplacement se fait sans frottement. Déterminer la force de traction du câble et la réaction du sol sur le solide au cours des trois phases du mouvement. Données : α = 20° ; g = 9,8 m.s^{-2}.

3°) Déterminer la puissance exercée par la force de traction pendant la deuxième phase.

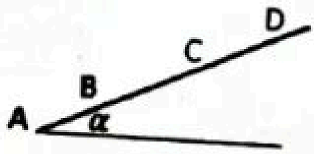
Réponses : 1°) $t = 14\,s$; **2°)** $T_1 = 4755\,N$; $T_2 = 3285\,N$; $T_3 = 1815\,N$; $R \approx 9025\,N$; **3°)** $\mathcal{P} \approx 19,7\,kW$.

....**Résolution** ....

1°) Durée total du trajet effectué par le solide.

1ère phase : M.R.U.A : $a_1 > 0$:

$$x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \ ; \ V_1 = a_1 t_1 \Longrightarrow a_1 = \frac{V_1}{t_1}$$



alors : $x_1 = \frac{V_1}{2} t_1$

2ème phase : M.R.U : $a_2 = 0$; $V_2 = V_1 = C^{te}$ et $t_2 = 6\,s$.

$$x_2 = V_1 t_1 \Longrightarrow V_1 = \frac{x_2}{t_2} = \frac{36}{6} = 6\,m.s^{-1}$$

3ème phase : M.R.U.R : $a_3 < 0$ a3 < 0 et $t_3 = \Delta t = t_1$.

$$x_3 = \frac{1}{2} a_3 t_1^2 + V_1 t_1 \ ; \ V_3 = a_3 t_1 + V_1 \ ; (t_3 = t_1 = \Delta t).$$

Quand l'ascenseur s'arrête :

$$V_3 = a_3 t_1 + V_1 = 0 \Longrightarrow a_3 = -\frac{V_1}{t_1};\ \text{alors :}\ x_3 = \frac{V_1}{2} t_1$$

La distance totale parcourue est telle que :

$$x = x_1 + x_2 + x_3 \Longrightarrow x_1 + x_3 = x - x_2$$

$$\frac{V_1}{2} t_1 + \frac{V_1}{2} t_1 = 60 - 36 \Longrightarrow V_1 t_1 = 24$$

$$t_1 = \frac{24}{V_1} = 4\,s\ ;\ \text{donc :}\ \Delta t = t_1 = 4\,s$$

La durée totale du trajet est donc :

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 2t_1 + t_2 = 2 \times 4 + 6$$

d' où $\boxed{t = 14\ s}$

2°) Force de traction du câble.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$, la réaction $\vec{R}$ et la tension $\vec{T}$ du câble.

Appliquons le théorème du centre d'inertie

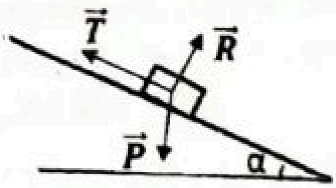
$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Projetons sur l'axe Ox :

$$-mg\sin\alpha + T = ma \Longrightarrow \boxed{T = m(g\sin\alpha + a)}$$

1ère phase : $a_1 = \frac{V_1}{t_1} = \frac{6}{4} = 1,5\ m.s^{-2}$

$$T_1 = 980 \times (9,8\sin 20° + 1,5) \approx 4\,755\ N$$



$$\boxed{T_1 \approx 4\,755\ N}$$

2ème phase : $a_2 = 0$:

$$T_2 = mg\sin\alpha = 980 \times 9,8\sin 20 = 3\,285\ N$$

$$\boxed{T_2 \approx 3\,285\ N}$$

3ème phase : $a_1 = -\frac{V_1}{t_1} = -\frac{6}{4} = -1,5\ m.s^{-2}$

$$T_3 = 980 \times (9,8\sin 20° - 1,5) \approx 1\,815\ N$$

$$\boxed{T_3 \approx 1\,815\ N}$$

Réaction du sol sur le solide

Projetons le T.C.I. sur l'axe Oy :

$$-mg\cos\alpha + R = 0 \Longrightarrow \boxed{R = mg\cos\alpha}$$ AN : $\boxed{R = 9\,025\ N}$

3°) Puissance de la force de traction pendant la 2ème phase.

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \vec{T}.\vec{V} \Longrightarrow \mathcal{P} = T.V$$

d' où $\boxed{\mathcal{P} = T.a_1t_1}$ $\boxed{\mathcal{P} \approx 19,7\ kW.}$

Problème 8 : (Eurin-gié, Exo 2.11, page 39).

Une bille d'acier de masse m **est suspendue en un point fixe par un fil inextensible de** longueur l. Le pendule ainsi constitué est écarté d'un angle α_0 de sa position d'équilibre, puis abandonné sans vitesse initiale, il effectue alors **des oscillations de part et d'autre de sa position d'équilibre. On néglige les frottements.**

1°) A l'instant où la bille passe par sa position d'équilibre, **déterminer l'expression littérale de sa vitesse en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.**

En déduire l'accélération normale de la bille.

2°) En appliquant le théorème du centre d'inertie, montrer que l'accélération tangentielle est alors nulle.

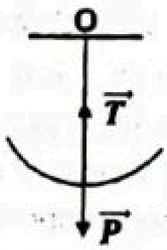
3°) Exprimer la vitesse de la bille et la tension du fil lorsque celui-ci fait un angle α avec la verticale.

....**Résolution** ....

1°) Expression littérale de la vitesse de la bille .

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$ du fil.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique :



$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{ex}) \Longrightarrow \frac{1}{2}mV^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{T})$$

On a : • $W(\vec{T}) = 0$; $(car\ \vec{T} \perp \vec{V})$;

• $W(\vec{P}) = mgh = mgl(1 - \cos\alpha_0)$.

Ainsi, le théorème de l'énergie cinétique devient :

$$\frac{1}{2}mV^2 = mgl(1 - \cos\alpha_0) \Longrightarrow \boxed{V = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha_0)}}$$

Déduisons l'accélération normale de la bille.

$$a_n = \frac{V^2}{l} = \frac{2gl(1 - \cos\alpha_0)}{l} \Longrightarrow \boxed{a_n = 2g(1 - \cos\alpha_0)}$$

Montrons que l'accélération tangentielle est nulle.

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\sum\vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Projetons suivant la tangente :

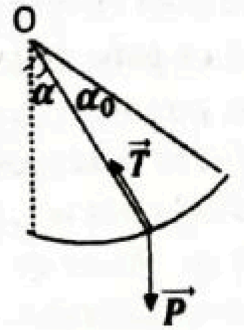
$$0 + 0 = ma_t \Longrightarrow \boxed{a_t = 0}$$

3°) • Vitesse de la bille à la position définie par l'angle α.

D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$\frac{1}{2}mV^2 = mgl(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$

d' où $\boxed{V = \sqrt{2gl(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}}$



• **Tension du fil à la position définie par l'angle α.**

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

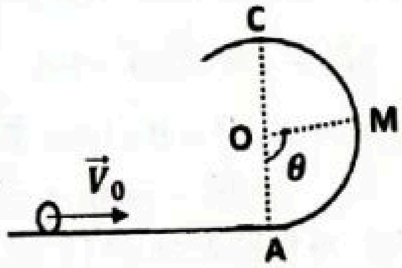
$\sum\vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

Projetons suivant la normale :

$T - mg\cos\alpha = m\frac{V^2}{l} \Longrightarrow \boxed{T = mg(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_0)}$

Problème 9 : (Eurin-gié, Exo 2.12, page 39).

Un solide ponctuel de masse m est lancé avec une vitesse $\vec{V_0}$ sur une glissière circulaire de rayon r et de centre O (figure). Les frottements sont négligeables. La position du mobile sur la portion de trajectoire est repérée par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.



1°) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, exprimer la vitesse V du solide en fonction de r et θ.

2°) Appliquer le théorème du centre d'inertie et en projeter l'expression dans la base de Frenet.

Déterminer la norme R de la réaction $\vec{R}$ exercée par la glissière sur le solide.

3°) Montrer que R s'annule pour une valeur θ_m qui est fonction de V_0. Quelle est la valeur minimale de V_0 pour que le mobile atteigne le sommet C de la trajectoire ? Quelle est alors la vitesse en C ?

Réponses : 1°) $V = \sqrt{V_0^2 - 2gr(1-\cos\theta)}$; **2°)** $R = mg(3\cos\theta - 2) + m\frac{V_0^2}{r}$;

3°) $\cos\theta_m = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{V_0^2}{gr}\right)$; $V_0 = \sqrt{5gr}$; $V_C = \sqrt{gr}$.

Résolution

1°) Expression de la vitesse du solide en fonction de r et θ.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$ de la glissière..

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{ex}) \Longrightarrow \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$

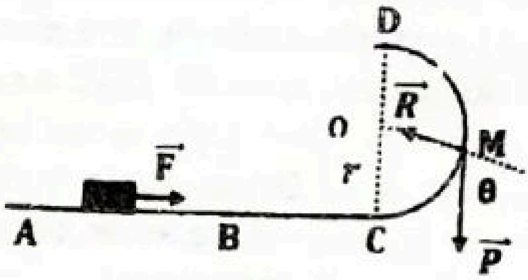
On a : • $W(\vec{R}) = 0$; $(car\ f \approx 0)$;

- $W(\vec{P}) = -mgh = -mgr(1-\cos\theta)$

Le théorème de l'énergie cinétique devient :

$$\frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = -mgr(1-\cos\theta)$$

d' où $\boxed{V = \sqrt{V_0^2 - 2gr(1-\cos\theta)}}$



2°) Norme de la réaction $\vec{R}$..

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\sum\vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

Projetons sur la normale (repère de Frenet) :

$$-mg\cos\theta + R = m\frac{V^2}{r} \Longrightarrow \boxed{R = mg(3\cos\theta - 2) + m\frac{V_0^2}{r}}$$

3°) Valeur θ_m de θpour laquelle R = 0.

Lorsque le solide quitte la glissière :

$$R = 0 \Longrightarrow mg(3\cos\theta - 2) + m\frac{V_0^2}{r} = 0$$

d' où $\boxed{\cos\theta_m = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{V_0^2}{gr}\right)}$

Valeur minimale de V_0 pour que le mobile atteigne le sommet C.

Pour que le mobile arrive le sommet C (θ = π), il faut que :

$$\begin{cases}\theta = \pi \\ R \geq 0\end{cases} \Longrightarrow mg(3\cos\pi - 2) + m\frac{V_0^2}{r} \geq 0$$

Soit : $V_0^2 \geq 5gr \Longrightarrow V_0 \geq \sqrt{5gr}$

Le cas limite correspond à la valeur de V_0 pour laquelle $R = 0$;

d' où $\boxed{V_0 = \sqrt{5gr}}$

Vitesse du mobile en C.

$$V_C = \sqrt{V_0^2 - 2gr(1-\cos\pi)} = \sqrt{V_0^2 - 4gr} \Longrightarrow V_C = \sqrt{5gr - 4gr}$$

d' où $\boxed{V_C = \sqrt{gr}}$

Problème 10 : (Eurin-gié, Exo 2.13, page 40)

Un ascenseur de masse totale 1 800 kg s'élève d'une hauteur h entre le rez-de- chaussée et d'un étage élevé d'une tour. ($g = 9,8\ m.s^{-2}$).

1°) La montée comporte trois phases. Durant 2,5 s, le mouvement est uniformément accéléré. Les 6 s suivantes, le mouvement est uniforme sur une distance de 42 m. Enfin, le mouvement est uniformément retardé durant 4 s jusqu'à l'arrêt. Déterminer la hauteur h.

2°) Calculer la force exercée par le câble sur l'ascenseur au cours de chacune des phases du mouvement.

3°) Exprimer pour chaque phase, la puissance développée par cette force en fonction du temps t. Quel est le travail de la force sur la distance h?

Réponses : 1°) $h \approx 65\ m$; 2) $T_1 = 2{,}27.10^4$ N ; $T_2 = 1{,}76.10^4$ N ; $T_3 = 14490$ N

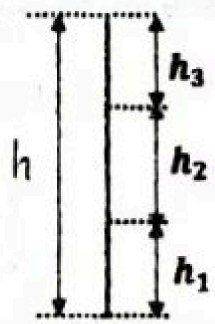
$W \approx 1{,}14.10^6$ J.

....**Résolution** ....

1°) Détermination de la hauteur h.

On a : $\mathbf{h = h_1 + h_2 + h_3}$

Déterminons h_1 et h_3.



1ère phase : M.R.U.A : $a_1 > 0$.

$$h_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2$$

$$V_1 = a_1 t_1 \Longrightarrow a_1 = \frac{V_1}{t_1} \text{ ; donc : } h_1 = \frac{V_1}{2} t_1$$

2ème phase : M.R.U : $a_2 = 0$:

$$h_2 = V_1 t_2 \Longrightarrow V_1 = \frac{h_2}{t_2} = \frac{42}{6} = 7\ m.s^{-1}$$

Donc : $h_1 = \frac{7}{2} \times 2,5 = 8,75\ m \Longrightarrow \boxed{h_1 = 8,75\ m}$

3ème phase: M.R.U.R : $a_3 < 0$:

$$h_3 = \frac{1}{2} a_3 t_3^2 + V_1 t_3 \quad \text{et} \quad V_3 = a_3 t_3 + V_1$$

Lorsque l'ascenseur s'arrête :

$$V_3 = a_3 t_3 + V_1 = 0 \Longrightarrow a_3 = -\frac{V_1}{t_3} = -\frac{7}{4} = -1,75\ m.s^{-2}$$

$$a_3 = -1,75\ m.s^{-2}$$

Alors : $h_3 = \frac{1}{2}\left(-\frac{V_1}{t_3}\right) t_3^2 + V_1 t_3 \Longrightarrow h_3 = \frac{V_1}{2} t_3 = \frac{7}{2} \times 4 = 14\ m$

$$\boxed{h_3 = 14\ m}$$

La hauteur h est donc :

$h = h_1 + h_2 + h_3 = 8,75 + 42 + 14 = 64,75$ m

d' où $\boxed{h \approx 65\, m}$

2°) Tension du câble au cours de chaque phase du mouvement.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$ du câble.

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\sum\vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Projetons sur la verticale descendante :

$$T - mg = ma \Longrightarrow \boxed{T = m(g + a)}$$

AN : $\boxed{T_1 = 2,27.10^4\, N}$ $\boxed{T_2 = 1,76.10^4\, N}$ $\boxed{T_3 = 14\,490\, N}$

3°) Expression de la puissance de la tension en fonction du temps.

La puissance développée par la tension du câble est :

$$\mathcal{P} = \vec{T}.\vec{V} = T.V\cos 0° \Longrightarrow \mathcal{P} = T.V$$

$\boxed{\mathcal{P}_1 = 63\,560t}$ $\boxed{\mathcal{P}_2 = 1,232.10^5\, W}$ $\boxed{\mathcal{P}_3 = -25357,5t + 3,169.10^2\, W}$

Travail de la tension sur la distance h.

$$W = T_1.h_1 + T_2.h_2 + T_3.h_3 \Longrightarrow \boxed{W = 1,14.10^6\, J}$$

Problème 11 : (Eurin-gié, Exo 2.14, page 40)

Un mobile de masse m = 20 kg, lancé avec une vitesse $V_0 = 4\, m.s^{-1}$, monte, en un mouvement de translation rectiligne, le long d'une ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un α = 20° avec l'horizontale. ($g = 9,8\, m.s^{-2}$).

Les forces de frottements sont équivalentes à une force $\vec{f}$ opposée à la vitesse et de norme supposée constante f = 40 N.

1°) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer la distance parcourue par le mobile avant qu'il ne s'arrête.

2°) Arrivé au sommet de sa trajectoire, le mobile redescend. Indiquer sur un schéma les forces extérieures appliquées à ce mobile au cours de la descente. Qu' y a– t- il de changé par rapport à la montée ?

3°) Calculer la vitesse avec laquelle le mobile repasse par sa position initiale. Quelle serait cette vitesse si les frottements étaient négligeables ?

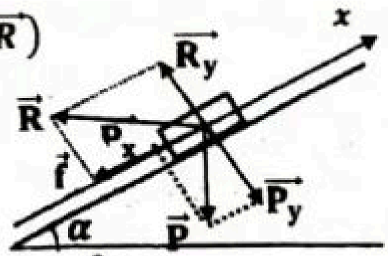
Résolution

1°) Distance parcourue par le mobile avant de s'arrêter.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$ du plan..

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{ex}) \Longrightarrow 0 - \frac{1}{2}mV_0^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$$



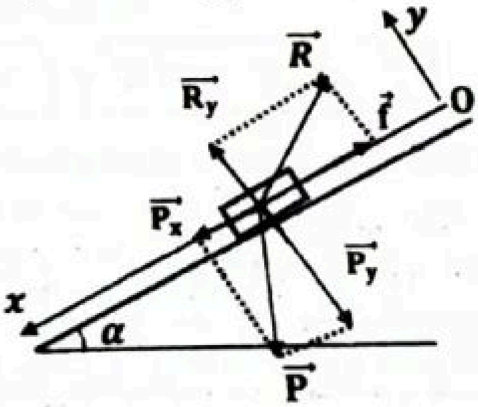
On a : • $W(\vec{P}) = -mgh = -mgl\sin\pi$

• $W(\vec{R}) = -f.l$

Le théorème de l'énergie cinétique devient :

$$-\frac{1}{2}mV_0^2 = -mgl\sin\pi - f.l \Longrightarrow V_0^2 = 2l\left(g\sin\alpha + \frac{f}{m}\right)$$

d' où $$\boxed{l = \frac{V_0^2}{2\left(g\sin\alpha + \frac{f}{m}\right)}}$$



AN : $l = \dfrac{16}{2\left(9{,}8\times0{,}34 + \frac{40}{20}\right)} = 1{,}5\,m$

d' où $\boxed{l = 1{,}5\,m}$

2°) Forces extérieures appliquées au cours de la descente.

Le mobile est encore soumis aux même forces, mais cette fois la réaction change d'orientation ($\vec{f}$ toujours opposée à $\vec{V}$).

3°) Vitesse du mobile au passage par la position initiale.

Le théorème de l'énergie cinétique au cours de la descente donne :

$$\frac{1}{2}mV^2 - 0 = mgl\sin\pi - f.l \Longrightarrow V = \sqrt{2l\left(g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)}$$

AN : $\boxed{V = 1{,}99\,m.s^{-1} \approx 2\,m.s^{-1}}$

Si $f = 0$, on trouve : $\boxed{V = \sqrt{2gl\sin\alpha}}$ d' où $\boxed{V = 4\,m.s^{-1}}$

Problème 12 : (Eurin-gié, Exo 2.15, page 40)

Un traîneau peut glisser en suivant la plus grande pente d'un plan incliné d'un angle α. La réaction $\vec{R}$ somme des forces de contact du sol sur le traîneau, comporte une composante $\vec{R_n}$ normale au plan et une composante $\vec{R_t}$ parallèle au plan incliné et de sens opposé au vecteur vitesse du traîneau.

On montre expérimentalement que lorsqu'il y a mouvement $\frac{R_t}{R_n} = f$, où f est le coefficient de frottement qui dépend de l'état des surfaces en contact. S'il n' y a pas de mouvement : $\frac{R_t}{R_n} < f$.

1°) Exprimer l'accélération du traîneau en fonction de α , f et g (accélération de la pesanteur).

2°) Calculer la valeur α_m minimale pour que le glissement ait lieu.

Données : $g = 9,8\ m.s^{-2}$; $f = 0,15$; $m = 2\ kg$.

3°) Calculer l'accélération pour $\alpha = 2\alpha_m$.

4°) Calculer l'angle $\beta = (\vec{R_n}, \vec{R})$ et la norme de $\vec{R}$.

Rép : 1°) $a = g(\sin\alpha - f\cdot\cos\alpha)$;

2°) $a = 0 \Longleftrightarrow \tan\alpha_m = f = 0,15 \Longrightarrow \alpha_m = 8,5°$;

3°) $a = g(\sin 2\alpha_m - f\cos 2\alpha_m) = 1,46\ m\cdot s^{-2}$;

4°) $\tan\beta = f = 0,15 \Longrightarrow \beta = 8,5°$; $R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2}$

……………………………………Résolution ……………………………………

1°) Expression de l'accélération en fonction de α , f et g.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$ du plan.

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\sum\vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

- Suivant la tangente :

$$mg\sin\alpha - R_t = ma \Longrightarrow R_t = m(g\sin\alpha - a) \quad (1)$$

- Suivant la normale :

$$R_n - mg\cos\alpha = 0 \Longrightarrow R_n = mg\cos\alpha \quad (2)$$

En divisant (1) par (2) nous obtenons :

$$f = \frac{R_t}{R_n} = \frac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha} \Longrightarrow fg\cos\alpha = g\sin\alpha - a$$

d' où $\boxed{a = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}$

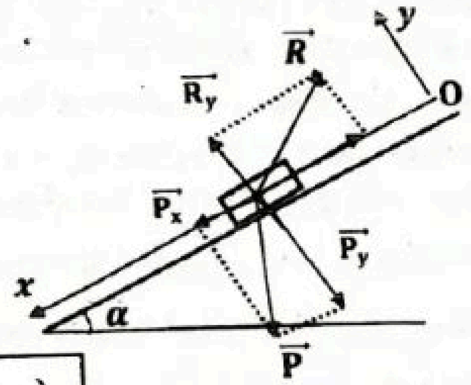
2°) Valeur minimale α_m pour que le glissement ait lieu :

La valeur minimale α_m correspond à :

$a = 0 \Longrightarrow \sin\alpha_m - f\cos\alpha_m = 0$

Soit : $\dfrac{\sin\alpha_m}{\cos\alpha_m} = f \Longrightarrow \tan\alpha_m = f$

AN : $\tan\alpha_m = 0,15 \Longrightarrow$ $\boxed{\alpha_m = 8,5°}$



3°) Calcul de l'accélération pour $\alpha = 2\alpha_m$.

Pour $\alpha = 2\alpha_m$, on obtient :

$$\boxed{a = g(\sin 2\alpha_m - f\cos 2\alpha_m)}$$

AN : $a = g(\sin 17° - 0,15\cos 17°) = 1,459\ m.s^{-2}$

d' où $\boxed{a \approx 1,46\ m.s^{-2}}$

4°) Calcul de l'angle β.

D'après le schéma : $\tan\beta = \dfrac{R_t}{R_n} = f \Longrightarrow \tan\beta = \tan\alpha_m$

d' où $\boxed{\beta = \alpha_m = 8,5°}$

Calcul de la norme de $\vec{R}$.

On a : $R = \sqrt{R_t^2 + R_n^2}$;

- $R_t = m(g\sin\alpha - a) = 2 \times (9,8\sin 17° - 1,46) = 2,81\ N$
- $R_n = mg\cos\alpha = 2.\times 9,8 \times \cos 17° = 18,74\ N$

D' où $\boxed{R \approx 38,95\ N}$

Problème 13 : (Eurin-gié, Exo 2.16, page 40).

Un traîneau de masse m = 200 kg est tiré suivant une ligne de plus grande pente d'un plan incliné par l'intermédiaire d'un câble faisant un angle β avec celle-ci.

1°) La tension du câble vaut **1 000** ***N***. Le mouvement étant uniforme de vitesse $\mathbf{10\ km.h^{-1}}$, déterminer la réaction $\vec{R}$ somme des forces de contact exercées par le sol par le traîneau (norme et inclinaison par rapport à la normale au plan incliné).

Données : $\alpha = 20°$; $\beta = 30°$; $g = 10\ m.10^{-2}$.

2°) On augmente la tension, et le mouvement du traîneau devient uniformément accéléré.

a) Les forces de frottements exercées par le sol restant identiques, la réaction $\vec{R}$ est – elle modifiée ?

b) La vitesse du traîneau passe de $10\ \mathbf{km.h^{-1}}$ à $20\ \mathbf{km.h^{-1}}$ sur une distance de $10\ m$. Calculer la puissance exercée par la tension du câble lorsque la vitesse vaut $15\ \mathbf{km.h^{-1}}$.

Réponses : 1°) $R_x = 182\ N$; $R_y \approx 1380\ N$; $R \approx 1392\ N$;

$\theta \approx 7,5°$ avec la normale.

2°) a) Si T augmente, $\theta' > \theta \Longrightarrow R' < R$, avec $R_x = cte$;

b) $\mathcal{P} \approx 4,58\ kW$.

……………………………………**Résolution** ……………………………………

1°) Déterminons la réaction $\vec{R}$ (norme et inclinaison).

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ la réaction $\vec{R}$ et la tension $\vec{T}$ du câble.

Appliquons le principe de l'inertie impose :

$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}$$

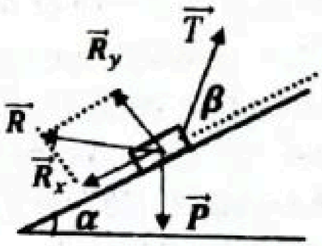
Projetons sur les axes de coordonnées :

- Suivant l'axe Ox : $-mg\sin\alpha - R_x + T\cos\beta = 0$

Soit : $R_x = T\cos\beta - mg\sin\alpha = 182\ N$

- Suivant l'axe Oy : $-mg\cos\alpha + R_y + T\sin\beta = 0$

Soit : $R_y = mg\cos\alpha - T\sin\beta = 1380\ N$



La norme de la réaction $\vec{R}$ est donnée par la relation :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(180)^2 + (1380)^2} = 1391,9\ N$$

d' où $\boxed{R \approx 1392\ N}$

L'inclinaison β ou l'angle de frottement est donné par la relation :

$$\tan\theta = \frac{R_x}{R_y} = \frac{182}{1380} = 0,132 \Longrightarrow \theta = arc\tan(0,132)$$

d' où $\boxed{\theta \approx 7,5°}$

2°) a) Modification de la réaction $\vec{R}$:

Si T augmente, on a : $R'_y < R_y$, R_x étant constante : $\theta' > \theta$ et $R' < R$.

Donc , la réaction diminue et s'écarte de la normale.

b) Puissance de la tension du câble.

On a : $\mathcal{P} = \vec{T}.\vec{V} \Longrightarrow \mathcal{P} = T.V\cos\beta$

Déterminons la tension T du câble au cours de cette phase

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\Sigma\vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longleftrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} \Longrightarrow -mg\sin\alpha - R_x + T\cos\beta = ma$$

d' où $$\boxed{T = \frac{m}{\cos\beta}\left(g\sin\alpha + \frac{R_x}{m} + a\right)}$$

L'accélération est donnée par la relation :

$$V_2^2 - V_1^2 = 2ax \Longrightarrow a = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2x}$$

AN : $a = 1,16\, m.s^{-2}$; $T = 1\,268\, N.$

D'où $$\boxed{\mathcal{P} = 4,58\, kW}$$

....

Problème 14 : (Eurin-gié, Exo 2.19, page 41).

Une bille de masse m = 100 g est suspendue en un point O par fil inextensible de longueur l = 1 m et de masse néglgeable. Le pendule ainsi constitué peut effectuer des oscillations de part et d'autre de sa position d'équilibre. On l'écarte de la verticale d'un angle $\theta_0 = 45°$ et on l'abandonne sans vitesse initiale. On suppose les frottement négligeables. (g = 10 m.s-2).

1°) A l'instant t, le fil fait un angle θ avec la verticale. Exprimer les coordonnées du vecteur accélération dans le reère de Frenet en fonction de θ, θ_0 et g.

2) Calculer $\|\vec{a}\|$ et représenter sur un schéma le vecteur $\vec{a}$ dans les trois cas :

$\theta = \theta_0$; $\theta = 30°$; $\theta = 0$.

3°) Exprimer la norme de la tension du fil en fonction de θ, θ_0 et g. ; la calculer dans les trois cas précédents.

....**Résolution**...

Voir application 3 : Pendule oscillant..

....

Problème 15 : (Eurin-gié, Exo 2.20, page 41).

Une bille de masse m est suspendue en un point O par un fil inextensible de longueur l et de masse négligeable. Le pendule ainsi constitué est écarté de la verticale d'un angle θ_0. On lance alors la bille fil tendu avec un vecteur vitsse V_0 tangent au cercle de centre O et de rayon l dirigé vers le bas. Au cours du mouvement, la position du pendule est repérée par l'angle θ d'inclinaison du fil avec la verticale (figure).On suppose les frottements négligeables.

1°) Calculer la valeur minimale de la norme de V_0 .pour que la bille effectue un tour complet, le fil devant rester tendu au cours du mouvement circulaire.

2°) Avec cette valeur minimale de $\vec{V}_0$, exprimer la vitesse de la bille lorsque celle - ci passe à la verticale du point O.

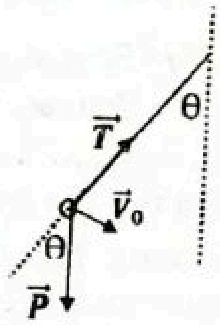
....Résolution ....

1°) Valeur minimale de la norme de $\vec{v}_0$.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$ du fil.

Appliquons le théorème du centre d'inertie:

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$



Projetons sur la normale (repère de Frenet :

$$T - mg\cos\theta = m\frac{V^2}{l} \Longrightarrow T = mg\cos\theta + m\frac{V^2}{l}$$

Le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$V^2 = 2gl(3\cos\theta - 2\cos\theta_0) + V_0^2$$

Donc : $T = mg\big((3\cos\theta - 2\cos\theta_0)\big) + m\frac{V_0^2}{l}$

Pour que la bille effectue un tour complet, il faut que :

$$\begin{cases} T > 0 \\ \theta = \pi \end{cases} \Longrightarrow mg\big((3\cos\pi - 2\cos\theta_0)\big) + m\frac{V_0^2}{l} > 0$$

$$V_0^2 > gl(3 + 2\cos\theta_0) \Longrightarrow V_0 > \sqrt{gl(3 + 2\cos\theta_0)}$$

D'où la valeur minimale de V_0 :

$$\boxed{V_0 = \sqrt{gl(3 + 2\cos\theta_0)}}$$

2°) Vitesse de la bille au passage à la verticale.

Au passage à la verticale $\theta = 0$ et en ce point la vitesse de la bille est :

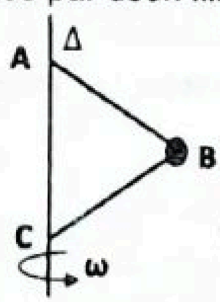
$$V = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta_0) + gl(3 + 2\cos\theta_0)}$$

d' où $\boxed{V = \sqrt{gl}}$

....

Problème 16 : (Eurin-gié, Exo 2.21, page 41).

Une bille assimilable à un point matériel B, de masse m, est reliée par deux fils de masse négligeable par deux points A et C d'un axe Δ (figure). On note : $AB = BC = l$ et $AC = a$.



1°) La bille tourne à vitesse angulaire ω constante autour de l'axe Δ. Les fils restent constamment tendus. Calculer les tensions T_1 et T_2 des fils en fonction de m, l, a, ω et g.

2°) Montrer que le fil BC n'est tendu qu'à partir d'une certaine

Valeur ω_0 de la vitesse angulaire.

3°) Calculer T_1 et T_2 pour $\omega = 8\,rad.s^{-1}$, puis $\omega = 4\,rad.s^{-1}$,

AN : $m = 0,6\,kg$; $l = 0,7\,m$; $a = 1\,m$; $g = 9,8\,m.s^{-2}$.

Réponses : 1°) $T_1 = \frac{m.l}{2}\left(\omega^2 + \frac{2g}{a}\right)$; $T_2 = \frac{m.l}{2}\left(\omega^2 - \frac{2g}{a}\right)$;

2°) $\omega > \omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{a}} \approx 4,4\,rad.s^{-1}$;

3°) • Pour ω_1 : $T_1 = 17,6\,N$; $T_2 = 9,3\,N$;

• Pour ω_2 : $T_1 \approx 6,7\,N$; $T_2 = 0$.

....**Résolution** ....

1°) Tension des fils en fonction de ω .

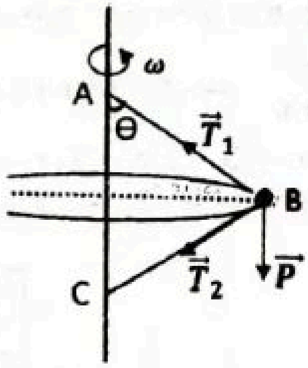
Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et les tensions $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ des fils.

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\sum\vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m\vec{a}$$

Projetons sur les axes de cordonnées :

- suivant Ox : $(T_1 + T_2)\sin\theta = ma_n = m\omega^2 r$ (1)
- suivant Oy : $(T_1 - T_2)\cos\theta = mg$ (2)



Or : $r = l\sin\theta$ et $\cos\theta = \frac{a}{2l}$

Les équations (1) et (2) deviennent :

$$\begin{cases} T_1 + T_2 = m\omega^2 l \\ T_1 - T_2 = \frac{2mgl}{a} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2T_1 = m\omega^2 l + \frac{2mgl}{a} \\ 2T_2 = m\omega^2 l - \frac{2mgl}{a} \end{cases}$$

d' où $\boxed{T_1 = \frac{ml}{2}\left(\omega^2 + \frac{2g}{a}\right)}$ $\boxed{T_2 = \frac{ml}{2}\left(\omega^2 - \frac{2g}{a}\right)}$

2°) Valeur ω_0 de ω.

Le fil BC n'est tendu que si :

$$T_2 > 0 \Longrightarrow \frac{ml}{2}\left(\omega^2 - \frac{2g}{a}\right) > 0$$

soit : $\omega^2 > \frac{2g}{a} \Longrightarrow \omega > \sqrt{\frac{2g}{a}}$

La valeur minimale ω_0 de ω est celle qui annule T_2 ;

d' où $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{a}} = 4,4\,rad.s^{-1}}$

3°) Valeur numériques de T_1 et T_2.

• Si $\omega = \omega_1 = 8\, rad.s^{-1}$:

$$T_1 = \frac{0,6\times0,7}{2}\left(64 + \frac{2\times9,8}{1}\right) = 17,556\, N \Longrightarrow \boxed{T_1 \approx 17,6\, N}$$

$$T_2 = \frac{0,6\times0,7}{2}\left(64 - \frac{2\times9,8}{1}\right) = 9,324\, N \Longrightarrow \boxed{T_2 \approx 9,3\, N}$$

• Si $\omega = \omega_2 = 4\, rad.s^{-1} < \omega_0$:

$$T_1 = \frac{0,6\times0,7}{2}\left(16 + \frac{2\times9,8}{1}\right) = 6,7\, N \Longrightarrow \boxed{T_1 \approx 6,7\, N \quad \text{et} \quad T_2 = 0}$$

....

Problème 17 : (Eurin-gié, Exo 2.22, page 42).

Une bille de masse m = 50 g est suspendue en un point O par un fil inextensible de longueur l = 50 cm et de masse négligeable. Le système est mis en mouvement de rotation uniforme autour de l'axe (Δ) contenant le point O avec une vitesse angulaire $\omega = 5\, rad.s^{-1}$. ($g = 9,8\, m.s^{-2}$).

1°) Calculer l'angle α dont le fil s'écarte de l'axe (Δ).

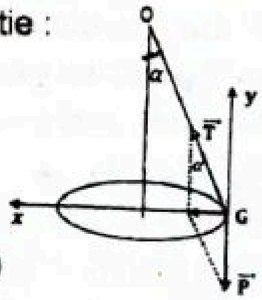
2°) Calculer la tension du fil.

....**Résolution** ....

1°) Calcul de l'angle α :

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$ du fils.

1ère méthode : appliquons du théorème du centre d'inertie :



$$\sum\vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Projetons sur les axes de coordonnées :

- sur Gx : $T\sin\alpha = ma_n = m\omega^2 r$

or : $r = l\sin\alpha$; alors : $T = m\omega^2 l$ (1)

- sur Gy : $T\cos\alpha - mg = 0 \Longrightarrow T\cos\alpha = mg$ (2)

En divisant (2) par (1), on obtient :

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 l}}$$

AN : $\cos\alpha = \dfrac{9,8}{25\times5.10^{-1}} = 0,784 \Longrightarrow \boxed{\alpha \approx 38,4°}$

2ème méthode : construction graphique .

Le triangle des forces donne :

$$\tan\alpha = \frac{F}{P} = \frac{a_n}{g} \Longleftrightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\omega^2 l\sin\alpha}{g} \Longrightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 l}}$$

2°) Tension du fil.

1ère méthode . D'après le théorème du centre d'inertie :

$$\boxed{T = m\omega^2 l}$$

AN : $T = 5.10^{-2} \times 25 \times 5.10^{-1} = 0,625\,N \Longrightarrow \boxed{T = 0,625\,N}$

2ème méthode : le triangle des forces donne :

$$\sin\alpha = \frac{F}{T} = \frac{ma_n}{T} \Longleftrightarrow T = \frac{m\omega^2 l \sin\alpha}{\sin\alpha} \Longrightarrow \boxed{T = m\omega^2 l}$$

3ème méthode : d'après le théorème de Pythagore :

$$T^2 = F^2 + P^2 \Longrightarrow T^2 = P^2(1 + tan^2\alpha)$$

or : $1 + tan^2\alpha = \dfrac{1}{cos^2\alpha}$

donc : $T^2 = \left(\dfrac{P}{\cos\alpha}\right)^2 \Longrightarrow T = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$

Comme $\cos\alpha = \dfrac{g}{\omega^2 l}$; alors : $\boxed{T = m\omega^2 l}$

....

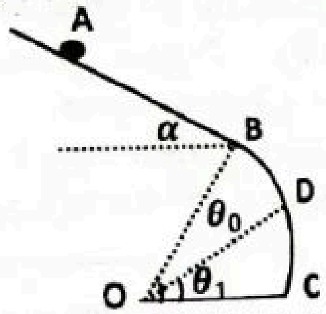
Problème 18 : (Eurin-gié, Exo 2.23, page 42).

Une glissière est constituée d'une partie rectiligne $AB = l = 1\,m$ inclinée de $\alpha = 30°$ sur l'horizontale et d'un arc de cercle BC de centre O et de rayon $r = 2\,m$ (figure). **Un solide ponctuel (S), est lâché du point A sans vitesse initiale..**

1°) Calculer la vitesse du solide en B, si les frottements sont négligeables. ($g = 10\,m.s^{-2}$).

2°) Montrer que le solide quitte la piste en un point D.

Calculer l'angle $\theta_1 = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$ sachant que $\theta_0 = 60°$.



Réponses : 1°) $V = \sqrt{2gl\sin\alpha} \approx 3,16\,m.s^{-1}$;

2°) $\theta_1 \approx 48°$

....**Résolution** ....

1°) Vitesse du solide en B.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$ de la glissière..

Le théorème de l'énergie cinétique entre A et B donne ;

$$\frac{1}{2}mV_B^2 = mgl\sin\alpha \Longrightarrow \boxed{V_B = \sqrt{2gl\sin\alpha}}$$

AN : $V_B = \sqrt{2 \times 10 \times 1 \times \sin 30°} = 3,16\,m.s^{-1}$

d' où $\boxed{V_B = 3,16\,m.s^{-1}}$

2°) Valeur θ_0 de θ où le solide quitte la sphère.

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\sum\vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

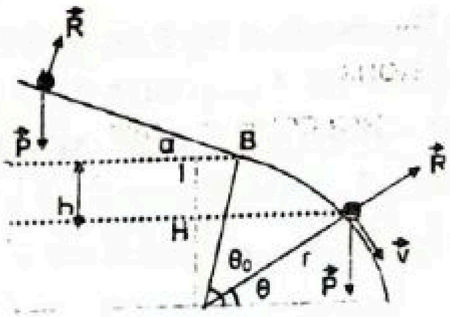
Suivant la normale (repère de Frenet) :

$$mg\sin\theta - R = ma_n \Longrightarrow R = mg\sin\theta - m\frac{V^2}{r} \qquad (1)$$

Le théorème de l'énergie cinétique entre B et M donne ;

$$\frac{1}{2}mV^2 - mgl\sin\alpha = mgh \Longrightarrow V^2 = 2g(h + l\sin\alpha)$$

or : $h = r(\sin\theta_0 - \sin\theta)$



donc : $V^2 = 2g\,[r(\sin\theta_0 - \sin\theta) + l\sin\alpha]$

Ainsi : $R = mg\left(3\sin\theta_0 - \sin\theta - \frac{2l}{r}\sin\alpha\right)$

Le solide quitte la piste quand :

$$R = 0 \Longrightarrow 3\sin\theta_0 - \sin\theta - \frac{2l}{r}\sin\alpha = 0$$

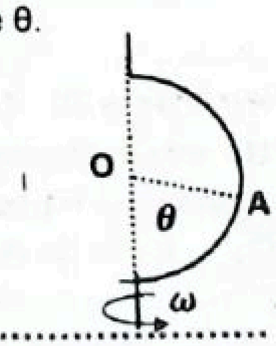
d' où $$\boxed{\sin\theta = \frac{2}{3}\left(\sin\theta_0 + \frac{l}{r}\sin\alpha\right)}$$

AN : $\sin\theta = \frac{2}{3}\left(\sin 60° + \frac{1}{2}\sin 30°\right) = 0,74 \Longrightarrow \boxed{\theta = 47,7° \approx 48°}$

NB: **Un solide quitte son support lorsque la réaction exercée par ce dernier s'annule.**

Problème 19 : (Eurin-gié, Exo 2.24 , page 42).

Un petit manchon A de masse m peut glisser sans frottement le long d'un guide lisse en forme de demi-cercle de centre O et de rayon r (figure). L'ensemble est mis en rotation à la vitesse angulaire constate ω autour d'un axe vertical (Δ). Le manchon A décrit alors une trajectoire circulaire dans un plan horizontal. Sa position sur le guide est repérée par l'angle θ.



1°) Exprimer la norme R de la réaction $\vec{R}$ du guide sur le manchon en fonction de la vitesse angulaire ω.

2°) Montrer que l'angle θ est fonction de ω.

Déterminer la valeur minimale de ω.

3°) Le plan de la trajectoire peut-il contenir le point O ?

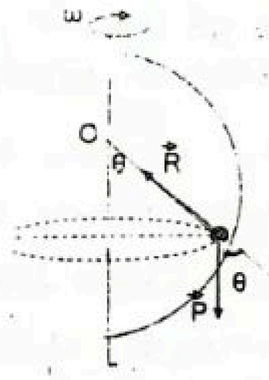
Résolution

1°) Expression de la réaction R en fonction de ω.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$.

Appliquons le théorème du centre d'inertie .

$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}$$



Projetons sur la normale (repère de Frenet) :

$$R\sin\theta = ma_n = m\omega^2 r'$$

or : $r' = r\sin\theta$; alors : $R\sin\theta = m\omega^2 r\sin\theta$

d' où $\boxed{R = m\omega^2 r}$

2°) Expression de θ en fonction de ω.

Projetons le T.C.I. suivant AO :

$$R - mg\cos\theta = m\omega^2 r sin^2\theta \Longrightarrow m\omega^2 r - mg\cos\theta = m\omega^2 r sin^2\theta$$

$$\omega^2 r(1 - sin^2\theta) = g\cos\theta \Longrightarrow \omega^2 r cos^2\theta = g\cos\theta$$

En supposant que $\cos\theta \neq 0$ c'est-à-dire $\left(\theta \neq \frac{\pi}{2}\right)$, on obtient :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 r}}$$

Autre méthode : le triangle des forces donne :

$$\cos\theta = \frac{P}{R} = \frac{mg}{m\omega^2 r} \Longrightarrow \cos\theta = \frac{g}{\omega^2 r}$$

Valeur minimale de ω.

Le fil ne s'écarte de la verticale que si :

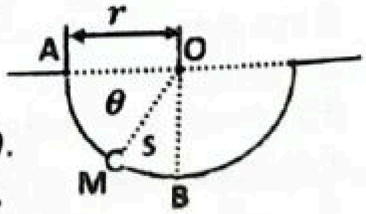
$$\cos\theta < 1 \Longleftrightarrow \frac{g}{\omega^2 r} < 1 \Longrightarrow \omega > \sqrt{\frac{g}{r}} \;;$$

d' où $\boxed{\omega_m = \sqrt{\frac{g}{r}}}$

Problème 20 : (Eurin-gié, Exo 2.25 , page 42).

Un solide (S) assimilable à un point matériel de masse $m = 10\,g$, peut glisser à l'intérieur d'une demi-sphère de centre O et de rayon $r = 1,25\,m$.

On le lâche du point A sans vitesse initiale. Sa position à l'intérieur de la demi-sphère est repérée par l'angle θ.



1°) On admet que le solide (S) glisse sans frottement.

a) Exprimer sa vitesse au point M en fonction de g, r et θ. Calculer sa valeur numérique au point B ($g = 10\,m.s^{-2}$).

b) Quelles sont en M, les caractéristiques de la forces exercée par la demi-sphère sur le solide ? Exprimer son intensité en fonction de g, r et θ. Calculer sa valeur numérique au point B.

2°) En réalité, le solide (S) arrive en B avec une vitesse de $4,5\ m.s^{-1}$. Il est donc soumis à une force de frottement $\vec{f}$ dont on admettra qu'elle est de même direction que la vitesse $\vec{V}$ du mobile, mais de sens opposé et d'intensité constante.
En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, calculer l'intensité de cette force $\vec{f}$.

Réponses : 1°) a) $V = \sqrt{2gr\sin\theta}$; $V_B = 5\ m.s^{-1}$;

b) $R = 3mg\sin\theta$; $R = 0,3\ N$;

2°) $f = \frac{m}{\theta}\left(g\sin\theta - \frac{V_B^2}{2r}\right)$; $f = 1,27.10^{-2}\ N \approx 1,3.10^{-2}\ N$.

....**Résolution** ....

1°) a) Expression de la vitesse de S en fonction de r , θ et g.

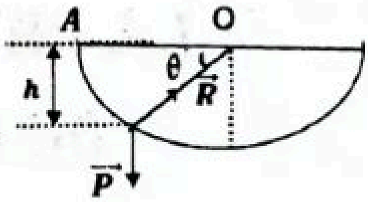
Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$ de la piste.
Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au solide entre A et M :

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{ex}) \Longrightarrow \frac{1}{2}mV^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$$

On a : • $W(\vec{P}) = mgh$;

car : $h = r\sin\theta$; donc : $W(\vec{P}) = mgr\sin\theta$

• $W(\vec{R}) = 0$; car, il n'y a pas de frottement.



Le théorème de l'énergie cinétique devient :

$$\frac{1}{2}mV^2 = mgr\sin\theta \Longrightarrow \boxed{V = \sqrt{2gr\sin\theta}}$$

Calcul de la vitesse en B :

En B, $\theta = \frac{\pi}{2}$; donc : $V = \sqrt{2 \times 10 \times 1,25 \times \sin\frac{\pi}{2}}$

d' où $\boxed{V = 5\ m.s^{-1}}$

b) Caractéristiques de la réaction en M.

- point d'application : le point de contact ;
- direction : la droite OM ;
- sens : centripète ;
- intensité : norme de $\vec{R}$.

Intensité de la réaction en fonction de g , r et θ.

Intensité de la réaction en fonction de g , r et θ.

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$$

Suivant la normale (repère de Frenet) :

$$-mg\sin\theta + R = ma_n = m\frac{V^2}{r} \Longrightarrow R = mg\sin\theta + m\frac{V^2}{r}$$

Or : $V^2 = 2gr\sin\theta$

Donc : $R = mg\sin\theta + 2mg\sin\theta$; d' où $\boxed{R = 3mg\sin\theta}$

Intensité de la réaction en B.

$$R = 3 \times 10^{-2} \times 10 \times \sin\frac{\pi}{2} = 0,3\,N \Longrightarrow \boxed{R = 0,3\,N}$$

2°) Intensité de la force de frottement.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au solide entre A et B :

$\frac{1}{2}mV_B^2 - 0 = mgr\sin\theta - f.\widehat{AB}$; or : $\widehat{AB} = r\theta$ et $h = r\sin\theta$

Donc : $\frac{1}{2}mV_B^2 = mgr\sin\theta - f.r\theta \Longrightarrow \boxed{f = \frac{m}{\theta}\left(g\sin\theta + \frac{V_B^2}{2r}\right)}$

AN : $f = 1,27.10^{-2}\,N \Longrightarrow \boxed{f \approx 1,3.10^{-2}\,N}$

....

LA PHYSIQUE AU SERVICE DE L'HOMME MODERNE

(Konaté Cheickna).

EXERCICES ET PROBLEMES COMPLEMENTAIRES

Problème 21.

Un solide S_1 supposé ponctuel. de masse $m_1 = 50\ g$ est abandonné sans vitesse initial d'un point A et glisse sur un plan incliné de l'angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale. Après un parcours $AB = l = 1\ m$, il aborde un plan horizontal sur lequel il continue de glisser avant de heurter un solide S_2, immobile, supposé ponctuel, de masse $m_2 = 150g$.

1°) En négligeant les frottements et en posant $g = 10\ m.s^{-2}$, calculer juste avant le choc :

a) la vitesse V_1 du solide S_1 ;

b) sa quantité de mouvement ;

c) son énergie cinétique.

2°) Au moment du choc il y a accrochage des deux solides.

Appliquer la loi de la conservation de quantité de mouvement au système formé des deux solides S_1 et S_2. En déduire la vitesse V_G de son centre d'inertie, juste après le choc. On prendra $g = 10\ m.s^{-2}$.

.... **Résolution** ....

1°) a) Calcul de la vitesse V_1 de S_1

– Système : solide S1.

– Référentiel : terrestre (supposé galiléen).

– Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$ du plan.

– Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre A et B :

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}ex) \Longrightarrow \frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$$

Or : $V_A = V_0 = 0$;

$W(\vec{P}) = mgh = mgl\sin\alpha$;

$W(\vec{R}) = 0$, car $f = 0$ (*glissement sans frottement*);

Donc : $\frac{1}{2}mV_B^2 - 0 = mgl\sin\alpha \Longrightarrow \boxed{V_B = \sqrt{2gl\sin\alpha}}$

AN : $V_B = \sqrt{2\times 10\times 1\times \frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3,16\ m.s^{-1} \Longrightarrow V_B = 3,16\ m.s^{-1}$

Lorsque le solide S_1 aborde le plan horizontal : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$, d'après le principe de l'inertie, le mouvement est rectiligne uniforme ;

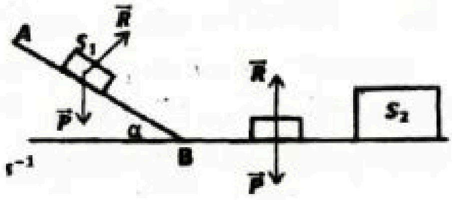
d' où $\boxed{V_1 = V_B = 3,16\, m.s^{-1}}$

b) Calcul de la quantité de mouvement.

$$P_1 = mV_1 = 50.10^{-3} \times 3,16 = 0,158\, kg.m.s^{-1}$$

d' où $\boxed{P_1 \approx 0,16\, kg.m.s^{-1}}$

c) Calcul de l'énergie cinétique.



On a : $E_{C_1} = \frac{1}{2} mV_B^2 = \frac{1}{2} m \cdot 2gl \sin\alpha$

$$\boxed{E_{C_1} = mgl \sin\alpha}$$

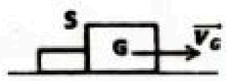
AN: $E_{C_1} = 5.10^{-2} \times 10 \times 1 \times \frac{1}{2} = 0,25\, J$

d' où $\boxed{E_{C_1} = 0,25\, J}$

2°) Calcul de la vitesse V_G du système formé des deux solides.

D'après la loi de conservation de la quantité de mouvement :

$$m_1V_1 = (m_1 + m_2)V_G \Longrightarrow V_G = \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_1$$



AN : $V_G = \frac{50}{50 + 150} \times 3,16 = 0,79\, m.s^{-1}$

d' où $\boxed{V_G \approx 0,8\, m.s^{-1}}$

Problème 22. (Extrait du Bac, série D, Bordeaux 1986).

Dans un stand de fête foraine, un solide (S) de masse $m = 5\, kg$ assimilable à un point matériel, est placé sur des rails horizontaux de longueur AB.

Pour tester sa force, une personne pousse cet objet avec une force $\vec{F}$ constante horizontale pendant une durée $t = 3\, s$.

1°) a) Déterminer la nature du mouvement du solide (S), en supposant qu'il glisse sans frottement sur les rails en partant du repos.

b) Sachant qu'à la fin de la période de lancement, le solide (S) a une vitesse égale à $6\, m.s^{-1}$. Calculer la valeur numérique de la force $\vec{F}$.

c) Calculer la distance de lancement AB et le travail effectué par la personne.

2°) Arrivé en B, le solide (S) doit s'élever sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport au plan horizontal.

a) En supposant les frottements négligeables, quelle longueur devrait parcourir le solide (S) sur le plan incliné jusqu'à ce que sa vitesse s'annule ?

b) En réalité, on constate que (S) parcourt une distance $BC = l = 3\,m$ le long du plan incliné. En supposant que les frottements sont équivalents à une force unique $\vec{f}$ parallèle au plan incliné et dirigée en sens contraire du vecteur vitesse $\vec{V}$, calculer la norme de $\vec{f}$.

3°) A l'extrémité C du plan incliné BC, le mobile (S) aborde sans vitesse une piste circulaire CD de centre B et de rayon $r = BC = 3\,m$.

La position de (S) sur la piste circulaire CD **est repérée par l'angle** $\beta = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM})$.

En négligeant les frottements, exprimer en fonction de r, α, β et g, la vitesse de (S) au point M. Calculer cette vitesse pour $\beta = 20°$. **On rendra** $g = 10\,m.s^{-2}$

.... **Résolution** ....

1°) a) Nature du mouvement du solide (S).

– Système : solide S1.

– Référentiel : terrestre (supposé galiléen).

– Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$, la réaction $\vec{R}$ **du plan et la force motrice** $\vec{F}$.

– Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}$$

Or, dans le plan horizontal et en absence de frottement :

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

alors : $\vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$

Puisque $\vec{F}$ est constant, l'accélération $\vec{a}$ est un vecteur constant :

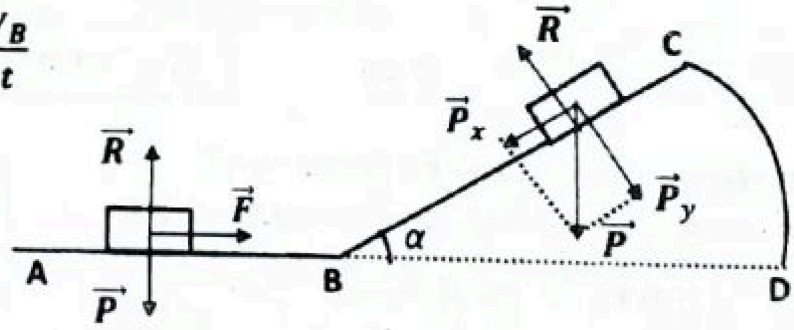
le mouvement du solide (S) sur les rails est donc rectiligne uniformément accéléré $(\vec{a} \cdot \vec{V} > 0)$.

b) Valeur de la force $\vec{F}$.

D'après ce qui précède : $\vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow F = ma$

Or : $V_B = at \Longrightarrow a = \dfrac{V_B}{t}$

d'où $$\boxed{F = \frac{m.V_B}{t}}$$



AN : $F = \frac{5 \times 6}{3} = 10\ N \Longrightarrow \boxed{F = 10\ N}$

c) Calcul de la distance de lancement $AB = l$.

Appliquons au solide le théorème de l'énergie cinétique entre A et B : :

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}ex) \Longrightarrow \frac{1}{2}mV_B^2 - 0 = W(\vec{F}) = F.l$$

car : $W(\vec{P}) = W(\vec{R}) = 0$ **(** $\vec{P}$ *et* $\vec{R}$ *étant normal* à $\overrightarrow{AB}$ **)** **et** $V_A = V_0 = 0.$

Donc : $\frac{1}{2}mV_B^2 = F.l \Longrightarrow l = \frac{1}{2}\frac{m.V_B^2}{F}$

AN : $l = \frac{1}{2}\frac{m.V_B^2}{F} = \frac{1}{2} \times \frac{5.(6)^2}{10} = 9\ m$; d'où $\boxed{l = 9\ m}$

Autre méthode.

Le mouvement étant rectiligne uniformément accéléré :

$$l = \frac{1}{2}at^2 \ ; \text{ or : } a = \frac{V_B}{t}; \text{ d' où } l = \frac{V_B}{2}t = \frac{6}{2} \times 3 = 9\ m.$$

Travail effectué par la personne.

$$W(\vec{F}) = F.l = 10 \times 9 = 90\ J \Longrightarrow \boxed{W(\vec{F}) = 90\ J}$$

2°) a) Longueur parcourue sur le plan incliné jusqu'à l'arrêt.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre B et C où la vitesse s'annule :

$$0 - \frac{1}{2}mV_B^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) \ ;$$

Or : $W(\vec{P}) = -mgh = -mgl_1 \sin\alpha$ **: et** $W(\vec{R}) = 0$ **(pas de frottement).**

Donc : $-\frac{1}{2}mV_B^2 = -mgl_1 \sin\alpha \Longrightarrow \boxed{l_1 = \frac{V_B^2}{2g\sin\alpha}}$

AN : $l_1 = \frac{(6)^2}{2 \times 10 \times \sin 30°} = 3,6\ m$

d' où $\boxed{l_1 = 3,6\ m}$

b) Norme de la force de frottement.

D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$-\frac{1}{2}mV_B^2 = -mgl_1 \sin\alpha - f.l_1$$

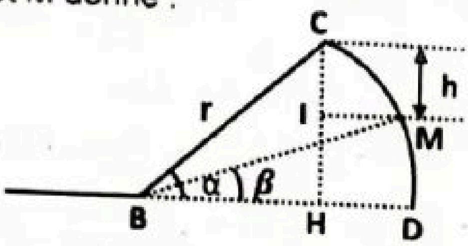
d' où $$\boxed{f = \frac{m(V_B^2 - 2gl_1.\sin\alpha)}{2l_1}}$$

AN : $f = \frac{5.(36 - 2 \times 10 \times 3 \times 0,5)}{2 \times 3} = 5\,N \Longrightarrow \boxed{f = 5\,N}$

3°) Expression de la vitesse du solide en fonction r, α, β et g.

Le théorème de l'énergie cinétique entre C et M donne :

$$\frac{1}{2}mV_M^2 - 0 = mgr(\sin\alpha - \sin\beta)$$



$$\boxed{V_M = \sqrt{2gr(\sin\alpha - \sin\beta)}}$$

AN : $V_M = \sqrt{2 \times 10 \times 3(\sin 30° - \sin 20°)} = 3,1\,m.s^{-1}$

d' où $\boxed{V_M = 3,1\,m.s^{-1}}$

....

Problème 23.

Une automobile de masse m = 600 kg aborde à la vitesse de 72 km/h, une côte dont la pente est de 4 % (on se lève de 4 cm par mètre de route).

1°) En supposant les frottements négligeables, quelle est la force supposée constante que devra exercer le moteur pour conserver la vitesse de 72 km/h ?

2°) A un moment donné, le conducteur arrête son moteur sans serrer les freins. En supposant que les résistances passives à l'avancement soit de 300 N par tonne, quelle sera la distance parcourue par l'automobile avant de s'arrêter sur la rampe de 4 % ? Au bout de combien de temps après l'arrêt du moteur se produit l'arrêt du véhicule ?

3°) Quelle serait alors la force de freinage constante qui permettrait un arrêt de la voiture sur une distance de 20 m ? Durée de ce freinage ? ($g = 10\,m.s^{-2}$).

Rép : 1°) F = 240 N ; 2°) x = 286 m ; t = 28,6 s ; 3°) f' = 5 580 N ; t = 2 s.

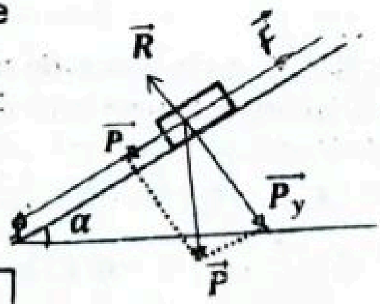
....**Résolution** ....

1°) Calcul de la force motrice.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$, la réaction $\vec{R}$ de la route et la force motrice $\vec{F}$ exercée par le moteur.

La vitesse est constante, le principe d'inertie impose:

$\sum \vec{F}ex = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$



Projetons sur un axe parallèle à la route (l'axe ox) :

$0 - mg\sin\alpha + F = 0 \Longrightarrow F = mg\sin\alpha$

d' où $\boxed{F = mg\sin\alpha} \Longrightarrow \boxed{F = 240\,N}$

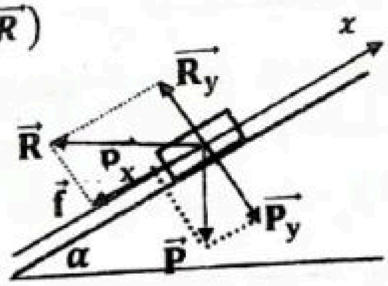
2°) Distance parcourue par l'automobile avant de s'arrêter.

1ère méthode. Appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

Le moteur étant arrêté la force motrice est nulle $F = 0$.

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}ex) \Longrightarrow \Delta E_C = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$$



$$0 - \frac{1}{2}mV_0^2 = -(mg\sin\alpha + f).x$$

Or : $k = \frac{f}{m} \Longrightarrow f = km$

d' où $\boxed{x = \frac{V_0^2}{2(g\sin\alpha + k)}}$ AN : $\boxed{x = 285,7\ m \approx 286\ m}$

2ème méthode. Appliquons le théorème du centre d'inertie.

La moteur étant arrêté , la force motrice est nulle ($F = 0$) et le théorème du centre d'inertie s'écrit ;

$$\sum\vec{F}ex = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

Suivant l'axe ox : $-mg\sin\alpha - f = ma \Longrightarrow a = -(g\sin\alpha + \frac{f}{m})$

$$a = -0,7\ m.s^{-2}$$

Le mouvement est uniformément retardé, l'abscisse du mobile est donnée par :

$$V^2 - V_0^2 = 2ax \Longrightarrow x = \frac{V^2 - V_0^2}{2a}$$

A l'arrêt : $V = 0$

d' où $\boxed{x = \frac{-V_0^2}{2a}}$ AN : $\boxed{x \approx 286\ m}$

Calcul du temps mis d'arrêt .

On a : $V = at + V_0 \Longrightarrow t = \frac{V - V_0}{a}$

A l'arrêt : $V = 0$

d' où, $\boxed{t = \frac{-V_0}{a}}$ AN : $\boxed{t \approx 28,6\ s}$

3°) Calcul de la force de freinage.

Aux forces précédentes s'ajoute la force de freinage F'.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique jusqu'à l'arrêt :

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}ex) \Longrightarrow \Delta E_C = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{F}')$$

$$0 - \frac{1}{2}mV_0^2 = -mg\,l\sin\alpha - f.l - F'.l$$

d' où $\boxed{F' = m\left(\frac{V_0^2}{2.l} - g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)}$ AN : $\boxed{F' = 5\,580\ N}$

Durée du freinage.

On a : $V = a't + V_0 \Longrightarrow t = \frac{V - V_0}{a'}$

A l'arrêt : $V = 0$

d' où $\boxed{t = \frac{-V_0}{a'}}$

La nouvelle accélération est donnée par le théorème du centre d'inertie:

$\sum\vec{F}ex = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F'} = m\vec{a'}$

Sur l'axe ox : $-mg\sin\alpha - f - F' = ma' \Longrightarrow a' = -(g\sin\alpha + \frac{f + F'}{m})$

$a = -9,7\ m.s^{-2}$

Donc : $t = \frac{-20}{-9,7} = 2,06\ s$; d' où $\boxed{t \approx 2\ s}$

....

Problème 24.

Un plan est incliné d'un angle α = 20° sur le plan horizontal. Un solide de masse m = 200 g, part sans vitesse initiale, du sommet A de ce plan et glisse le long d'une droite (AB) de plus grande pente AB = l = 5 m.

1°) Quelle est la vitesse de S à son arrivée en B ,si l'on suppose les frottements négligeables ? Quelle est alors la durée t de la descente ?

2°) En réalité cette durée est t = 2 s. En admettant une force de frottement constante pendant cette descente, préciser les caractéristiques de la force de réaction $\vec{R}$ exercée par le plan incliné sur S pendant le mouvement de celui-ci.

Réponses : 1°) $V_B = \sqrt{2gl\sin\alpha} \approx$ **5,8 m.s⁻¹ ; t** $= \sqrt{\frac{2l}{a}} \approx$ **1,7 s,** $(a = g\sin\alpha)$ **;**

2°) $\tan\beta = \frac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha} \Longrightarrow \beta \approx 5,14°$; $R = \frac{mg\cos\alpha}{\cos\beta} = 1,849\ N.$

....**Résolution** ....

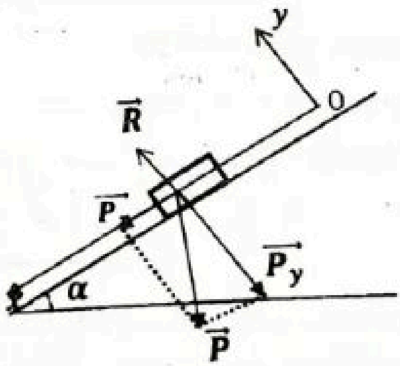
1°) Vitesse du solide en B.

- Système : le solide S.
- Référentiel : terrestre (supposé galiléen).
- Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$ du plan.
- Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre A et B :

$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}ex) \Longrightarrow \Delta E_C = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$

$$\frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = mgl\sin\alpha \Longrightarrow V_B^2 = gl\sin\alpha + V_A^2$$

Comme $V_A = V_0 = 0$;



d' où $\boxed{V_B = \sqrt{2gl\sin\alpha}}$

AN : $V_B = \sqrt{2 \times 9,8 \times 5 \times \sin 20°} = 5,8\ m.s^{-1}$

d' où $\boxed{V_B = 5,8\ m.s^{-1}}$

Durée de la descente.

Le mouvement est uniformément accéléré :

$$x = l = \frac{1}{2}at^2 \quad \text{et} \quad V_B = at \Longrightarrow a = \frac{V_B}{t}$$

Donc : $x = l = \frac{V_B.t}{2} \Longrightarrow \boxed{t = \frac{2l}{V_B}}$

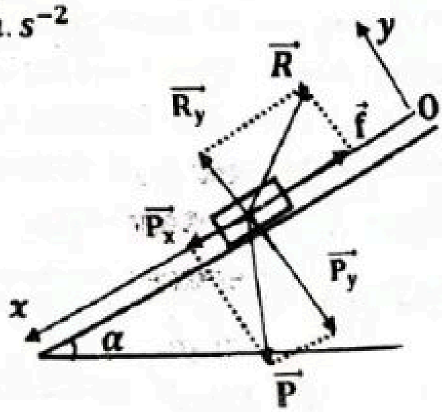
AN : $t = \frac{2 \times 5}{5,8} \approx 1,7\ s \Longrightarrow \boxed{t \approx 1,7\ s}$

NB. On aurait pu calculer l'accélération a à l'aide du théorème du centre d'inertie et l'on trouverait : $a = g\sin\alpha$:

2°) Caractéristiques de la réaction $\vec{R}$ du plan incliné sur S.

L'accélération réelle du mouvement est donnée par la relation:

$$x = l = \frac{1}{2}at^2 \Longrightarrow a = \frac{2l}{t^2} = \frac{2 \times 5}{(2)^2} = 2,5\ m.s^{-2}$$



Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\sum\vec{F}ex = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

Projetons sur les axes de coordonnées :

– Sur ox : $mg\sin\alpha - R\sin\beta = ma$

Soit : $R\sin\beta = mg\sin\alpha - ma$ (1)

– Sur oy : $R\cos\beta - mg\cos\alpha = 0$

Soit : $R\cos\beta = mg\cos\alpha$ (2)

En divisant (1) par (2), on obtient :

$$\boxed{\tan\beta = \frac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha}}$$

AN : $\tan\beta = \frac{9,8\sin 20° - 2,5}{9,8\cos 20°} \approx 0,09 \Longrightarrow \beta = 5,14°$

L'intensité de la réaction est donnée par :

$$R = \frac{mg\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{2.10^{-1} \times 9{,}8 \times \cos 20°}{\cos 5{,}14°} = 1{,}849\ N.$$

d' où $\boxed{\beta = 5{,}14°}$ $\boxed{R \approx 1{,}85\ N}$

La réaction a donc pour caractéristiques : **point d'application :** point de contact ; **direction** : inclinée de $\beta = 5{,}14°$ par rapport à la normale ; **sens** : ascendant ; **intensité** : $R = 1{,}85\ N$.

Autre procédé : $\tan\beta = \frac{R_x}{R_y}$ et $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$

Les composantes R_x et R_y se déterminent à l'aide du T.C.I.

Déterminer R_x et R_y à l'aide du T.C.I. puis vérifier les résultats.

....

Problème 25. (Extrait du Bac, SM , Guinée. 2018).

Un mobile de masse m est astreint à se déplacer sur un plan incliné dont la ligne de plus grande pente forme un angle α avec l'horizontale. La surface du plan engendre des frottements que l'on peut assimiler à une force dont la valeur est fonction du poids du mobile et de l'angle α : $f = k.P\cos\alpha$.

1°) A partir de quelle valeur α_0 de l'angle α, le mobile se met-il à glisser ?

2°) Pour une inclinaison $\alpha > \alpha_0$, donner les expressions des accélérations de montée a_m et de descente a_d du mobile.

....**Résolution** ....

1°) Valeur α_0 de α à partir de laquelle le glissement ait lieu.

– Système : le solide (mobile).

– Référentiel : terrestre (supposé galiléen).

– Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$ du plan incliné.

Le solide reste immobile tant qu'elle est pseudo-isolé (principe d'inertie) :

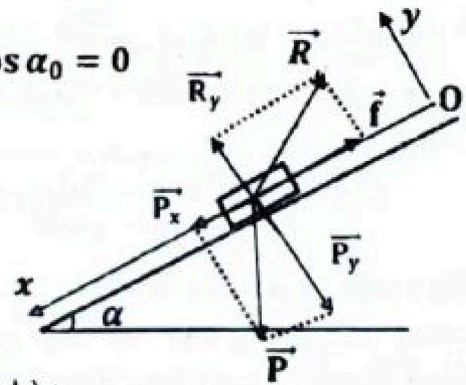
$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

Par projetons sur l'axe OX, on obtient :

$$P\sin\alpha_0 - F = 0 \Longrightarrow P\sin\alpha_0 - k.P\cos\alpha_0 = 0$$

$$\sin\alpha_0 = k.\cos\alpha_0 \Longrightarrow \frac{\sin\alpha_0}{\cos\alpha_0} = k$$

d'où $\boxed{\tan\alpha_0 = k}$



2°) • Accélération a_m de la montée.

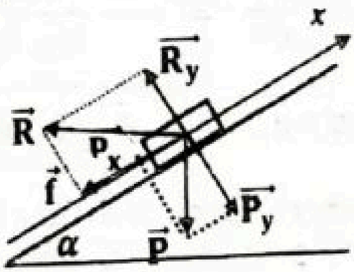
D'après le théorème du centre d'inertie (T.C.I.) :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a}_m \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_m$$

Projection suivant l'axe Ox (sens du mouvement):

$$-P\sin\alpha - k.P\cos\alpha = ma_m$$

d'où $\boxed{a_m = -g(\sin\alpha + k.\cos\alpha)}$



*** Accélération a_d de la descente.**

$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a}_d \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_d$

Projection suivant l'axe Ox (sens du mouvement):

$P\sin\alpha - k.P\cos\alpha = ma_d$ d'où $\boxed{a_d = g(\sin\alpha - k.\cos\alpha)}$

Remarque.

A la descente, les frottements s'inversent (ils s'opposent au mouvement).

....

Problème 26.

Un parachute de masse m = 20 kg porte une charge de masse M (kg).

Il est abandonné sans vitesse initiale dans un air calme à une hauteur de 250 m au-dessus du sol.

1°) Si le parachute ne s'ouvrait pas, avec quelle vitesse arriverait-il au sol, la résistance de l'air étant négligeable ($g = 9{,}8\ m.s^{-1}$) ?

2°) Quelle doit être la valeur de la charge M pour que, si le parachute s'ouvre, la vitesse limite atteinte soit dix fois plus petite que la vitesse précédente ?

La force de résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse $R = kV^2$ avec $k = 20\ S.I.$

....**Résolution** ....

1°) Vitesse du parachute à son arrivée au sol.

La résistance de l'air étant négligeable, le parachute est soumis à la seule action de son poids (la chute est libre) :

$$V^2 = 2gh \Longrightarrow V = \sqrt{2gh}$$

AN : $V = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 250} = 70\ m.s^{-1}$

d' où $\boxed{V = 70\ m.s^{-1}}$

2°) Valeur de la masse M.

– Système : le parachute muni de sa charge.

– Référentiel : terrestre (supposé galiléen).

– Bilan des forces : le poids $\vec{P} = (M+m)\vec{g}$ et la $\vec{R}$ de l'air..

– Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

Projetons sur la verticale descendante :

$$(M+m)g - kv^2 = m\frac{dV}{dt}$$

La vitesse limite est atteinte quand $V = C^{te}$, alors :

$$a = \frac{dV}{dt} = 0 \Longrightarrow (M+m)g - kv^2 = 0$$

$$(M+m)g = kV_l^2 \Longrightarrow M + m = \frac{k.V_l^2}{g}$$

d' où $\boxed{M = \frac{k.V_l^2}{g} - m}$

AN : $M = \frac{20 \times .(7)^2}{9,8} - 20 = 80\ kg \Longrightarrow \boxed{M = 80\ kg}$

....

Problème 27.

On considère un solide de masse m = 10 kg animé d'un mouvement de translation uniforme de direction horizontale. Le solide est tiré par une ficelle faisant un angle θ = 30° avec le plan horizontal avec une force de traction F = 50 N. Déterminer la direction et l'intensité de la réaction $\vec{R}$ du plan sur le solide et de la force de frottement $\vec{f}$ entre plan et solide.(g = 10 m.s $^{-2}$).

Réponses : $\tan\alpha = \frac{F\cos\theta}{mg - F\sin\theta} \Longrightarrow \alpha = 30°$; $R = 86,6\ N$; $f = 43,3\ N$

....**Résolution** ....

Caractéristiques de la force de réaction $\vec{R}$ (direction et intensité).

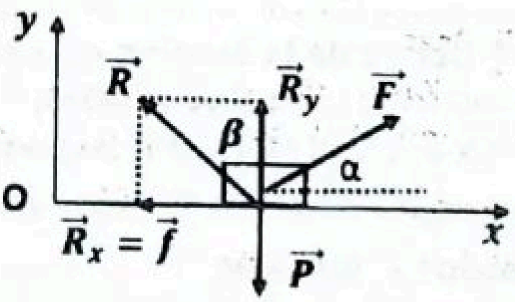
– Système : le solide .

– Référentiel : terrestre (supposé galiléen).

– Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$, la réaction $\vec{R}$ du plan incliné et la force de traction $\vec{F}$ de la ficelle.

Le mouvement est uniforme le principe d'inertie impose :

$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$$



Projetons sur les axes de coordonnées :

- sur ox : $-R\sin\beta + F\cos\theta = 0$

Soit : $R\sin\beta = F\cos\theta$ (1)

- sur oy : $-mg + R\cos\beta + F\sin\theta = 0$

Soit : $R\cos\beta = mg - F\sin\theta$ 2)

En divisant (1) par (2), on obtient :

$$\boxed{\tan\beta = \frac{F\cos\theta}{mg - F\sin\theta}}$$

AN : $\tan\beta = \dfrac{50\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{100 - 50\times\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow \boxed{\beta = 30°}$

L'intensité de la réaction est donnée par:

$$R\sin\beta = F\cos\theta \Longrightarrow \boxed{R = \frac{F\cos\theta}{\sin\beta}}$$

AN : $R = \dfrac{50\times\cos 30°}{\sin 30°} = \dfrac{50\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 50\sqrt{3} \Longrightarrow \boxed{R = 86,6\ N}$

Calculons l'intensité de la force de frottement.

Dans le triangle des forces on a :

$$\sin\beta = \frac{f}{R} \Longrightarrow \boxed{f = R\sin\beta}$$

AN : $f = 86,6\times\dfrac{1}{2} = 43,3\ N \Longrightarrow \boxed{f = 43,3\ N}$

....

Problème 28.***

Un traîneau de masse m = 200 kg monte une côte de pente 10 % .
Les frottements représentent 0,2 N par kg en mouvement. Ce traîneau est tiré par l'intermédiaire d'un câble faisant un angle constant β = 30° avec la pente.

1°) Partant du repos, le traîneau d'un mouvement uniformément varié arrive à la vitesse V = 18 km/h à 25 m. Déterminer la tension du câble au cours de ce mouvement. ($g = 10\ m.s^{-2}$).

2°) Lorsque le traîneau atteint la **vitesse de 18 km/h, le câble casse brusquement.**

a) Déterminer la nature du mouvement ultérieur du traîneau.

b) Quelle sera la distance parcourue par le traineau avant de s'arrêter ?

Rép : 1°) T = 393 N ; 2°) a) a = – 1,2 m.s $^{-2}$; b) x = 10,4 m.

....**Résolution** ....

1°) Calcul de la tension du câble.

– Système : le solide (mobile).

– Référentiel : terrestre (supposé galiléen).

– Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$, la réaction $\vec{R}$ du plan incliné et la tension $\vec{T}$ du câble.

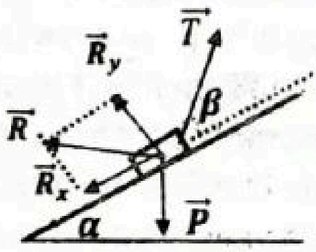
- Appliquons le T.C.I.

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}$$

- Projetons sur l'axe ox :

$$-mg\sin\alpha - f + T\cos\beta = ma$$

d' où $$\boxed{T = \frac{m\left(a + g\sin\alpha + \frac{f}{m}\right)}{\cos\beta}}$$



Déterminons la valeur de $\vec{f}$ et de l'accélération a.

On a : $k = \frac{f}{m} \Longrightarrow f = k.m$

$f = 0,2 \times 200 = 40\ N.$

Le mouvement est uniformément accéléré, son accélération est donnée la relation :

$$V^2 = 2ax \Longrightarrow a = \frac{V^2}{2x}$$

$$a = \frac{(5)^2}{2 \times 25} = 0,5\ m.s^{-2}$$

$$T = \frac{200 \times (0,5 + 10 \times 10^{-1} + 0,2)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 392,6\ N$$

d' où $$\boxed{T \approx 393\ N}$$

2°) a) Nature du mouvement ultérieur du traîneau.

Lorsque le câble casse, la tension s'annule :

$$T = 0 \Longrightarrow \frac{m\left(a' + g\sin\alpha + \frac{f}{m}\right)}{\cos\beta} = 0$$

Soit : $a' = -\left(g\sin\alpha + \frac{f}{m}\right) = -(10 \times 10^{-1} + 0,2) = -1,2\ m.s^{-2}$

Le traîneau continue son mouvement d'ascension pour parcourir une distance x_1 avec une accélération $a' = -1,2\ m.s^{-2}$ jusqu'à l'arrêt, **puis rebourse chemin.** Le mouvement est donc rectiligne uniformément retardé.

b) Distance parcourue par le traineau avant de s'arrêter.

On a : $0 - V_0^2 = 2a'x_1 \Longrightarrow \boxed{x_1 = -\frac{V_0^2}{2a'}}$ **AN :** $\boxed{x_1 = 10,4\ m}$

....

Problème 29.* .**

Une automobile avec son conducteur a une masse de 1 000 kg.

On admettra que les forces de frottement sont constantes, parallèles au déplacement et égales à 150 N.

1°) Calculer la puissance que doit développer le moteur pour maintenir une vitesse de 72 km/h sur une route horizontale.

2°) L'automobile monte une pente de 2,5 %, calculer la nouvelle puissance pour maintenir la même vitesse de 72 km/h.

3°) Au cours de cette montée, la voiture roulant à 72 km/h, le chauffeur débraye A quelle distance du point où a commencé le débrayage, la voiture s'arrête-t-elle ?

4°) Au cours de cette montée, la voiture roulant toujours à 72 km/h, le chauffeur débraye et freine en même temps. La voiture s'arrête après avoir parcouru le dixième trouvée ci-dessus. Calculer la force résistante due au freinage et le dégagement de chaleur qui en résulte. On prendra $g = 10\ m.s^{-2}$.

Réponses : 1°) $\mathcal{P} = 3\ kW$ **; 2°)** $\mathcal{P} = 8\ kW$ **; 3°)** $x = 500\ m$ **;**

4°) $F' = 3,6.10^3\ N$ **;** $Q = 180\ kJ$**.**

....**Résolution** ....

1°) Calcul de la puissance motrice.

La puissance du moteur est celle développée par la force motrice :

$$\mathcal{P} = \vec{F}.\vec{V} \Longrightarrow \mathcal{P} = F.V$$

Déterminons cette force motrice.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$, la réaction $\vec{R}$ de la route et la force motrice $\vec{F}$ exercée par le moteur.

La vitesse étant constante, le principe d'inertie impose:

$$\sum\vec{F}ex = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$$

Projetons sur un axe parallèle à la route (l'axe ox) :

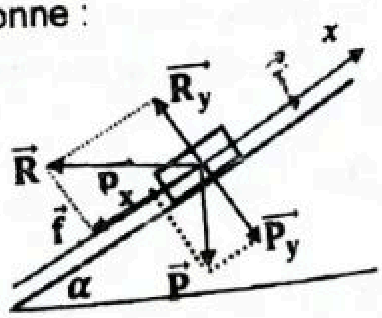
$$0 - f + F = 0 \Longrightarrow F = f$$

d' où $\boxed{\mathcal{P} = f.V}$ AN : $\boxed{\mathcal{P} = 3.10^3\ W}$

2°) Calcul de la nouvelle puissance motrice.

Le mouvement est uniforme, le principe de l'inertie donne :

$$\sum\vec{F}ex = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$$



En projetant sur ox on obtient :

$$-mg\sin\alpha - f + F = 0 \Longrightarrow F = mg\sin\alpha + f$$

d' où $\boxed{\mathcal{P} = (mg\sin\alpha + f).V}$

AN : $\boxed{\mathscr{P} = 8.10^3\ W}$

3°) Calcul de la distance d'arrêt.

1ère méthode. Appliquons le théorème du centre d'inertie.

La voiture étant débrayée, la force motrice est nulle ($F = 0$) :

$$\sum \vec{F}ex = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

Suivant l'axe ox : $-mg\sin\alpha - f = ma \Longrightarrow a = -(g\sin\alpha + \frac{f}{m})$

$$a = -0,4\ m.s^{-2}$$

Le mouvement est uniformément retardé, l'abscisse du mobile est donnée par :

$$V^2 - V_0^2 = 2ax \Longrightarrow x = \frac{V^2 - V_0^2}{2a}$$

A l'arrêt : $V = 0$

d' où $\boxed{x = \frac{-V_0^2}{2a}}$ AN : $\boxed{x = 500\ m}$

2ème méthode. Appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}ex) \Longrightarrow \Delta E_C = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$$

$$0 - \frac{1}{2}mV_0^2 = -(mg\sin\alpha + f).x \Longrightarrow \boxed{x = \frac{-V_0^2}{2a}}$$

4°)Calcul de la force de freinage.

Aux forces précédentes s'ajoute la force de freinage F'.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique jusqu'à l'arrêt :

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}ex) \Longrightarrow \Delta E_C = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{F'})$$

$$0 - \frac{1}{2}mV_0^2 = -mg\ \mathrm{lsin} - f.l - F'.l$$

d' où $\boxed{F' = m\left(\frac{V_0^2}{2.l} - g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)}$ AN : $\boxed{F' = 3,6.10^3\ N}$

Remarque. On pouvait utiliser le théorème du centre d'inertie ; mais ici il vaut mieux appliquer le théorème de l'énergie cinétique : on obtient le résultat plus rapidement.

Calcul de la quantité de chaleur dégagée.

Le dégagement de chaleur dû au freinage est égal au travail de cette force constante :

$$Q = W(F') = -F'.l \Longrightarrow Q = -3,6.10^3 \times 50 = -180.10^3 J$$

La chaleur dégagée à l'extérieur vaut donc :

$$\boxed{Q = 180\ kJ}$$

....

EXERCICES ET PROBLEMES DE PERFECTIONNEMENT

Problème 30.

Sur un plan incliné d'un angle α avec l'horizontale, un solide S de masse m = 10 kg lancé vers le haut avec une vitesse initiale $V_1 = 9{,}8\ m.s^{-1}$, parcourt le long d'une ligne de plus grande pente, une distance AB = 6 m avant de s'arrêter et de redescendre ensuite. On donne : $\sin\alpha = 0{,}6$; $g = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$.

1°) L'énergie mécanique du solide est-elle constante au cours du mouvement ?

2°) On admet que les frottements sur le plan incliné et la résistance de l'air ont une somme constante parallèle au plan de même direction que le vecteur vitesse mais de sens contraire. Quelle est l'intensité de cette somme $\vec{f}$?

3°) Quelle est la vitesse de S lorsqu'il repasse en A, si on admet que la somme $\vec{f}$ conserve la même intensité au cours de la descente, mais change de sens ?

Réponses : 1°) $\Delta E_m = -127\ J \neq 0$, donc $E_m \neq Cste$;
2°) $f \approx 21\ N$; 3°) $V_A \approx 6{,}7\ m \cdot s^{-1}$.

....**Résolution**..

1°) Conservation de l'énergie mécanique.

L'énergie mécanique d'un système est la somme de son énergie cinétique et son énergie potentielle : $E_m = E_C + E_P$

Sa variation est : $\Delta E_m = \Delta E_C + \Delta E_P$

- $\Delta E_C = 0 - \frac{1}{2}mV_1^2 \Longrightarrow \Delta E_C = -\frac{1}{2}mV_1^2$
- $\Delta E_P = -W(\vec{P}) = mgl\sin\alpha$

D' où : $$\boxed{\Delta E_m = m\left(gl\sin\alpha - \frac{1}{2}V_1^2\right)}$$

AN : $\Delta E_m = 10 \times \left(9{,}8 \times 6 \times 0{,}6 - \frac{1}{2} \times (9{,}8)^2\right) = -127{,}4\ J$

$$\Delta E_m = -127{,}4\ J$$

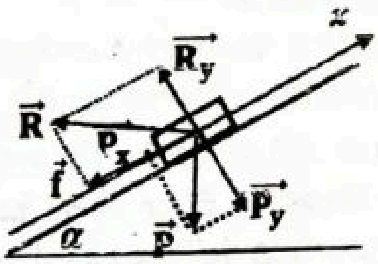
Comme $\Delta E_m \neq 0$, l'énergie mécanique n'est pas constante.

2°) Calcul de l'intensité des forces de frottement.

1ère méthode.

La variation de l'énergie mécanique est égale au travail des forces de frottement :

$$\Delta E_m = -f.l \Longrightarrow \boxed{f = -\frac{\Delta E_m}{l}}$$



AN: $f = \frac{127,4}{6} = 21,2\ N \Longrightarrow \boxed{f \approx 21\ N}$

2ème méthode.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{ex}) \Longrightarrow \Delta E_C = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$

Or : $W(\vec{P}) = -\Delta E_P$ et $W(\vec{R}) = -f.l$

Donc : $\Delta E_C = -\Delta E_P - f.l \Longrightarrow f = -\frac{\Delta E_C + \Delta E_P}{l}$

d' où $\boxed{f = -\frac{\Delta E_m}{l} \approx 21\ N}$

3°) Vitesse de S lorsqu'il repasse en A.

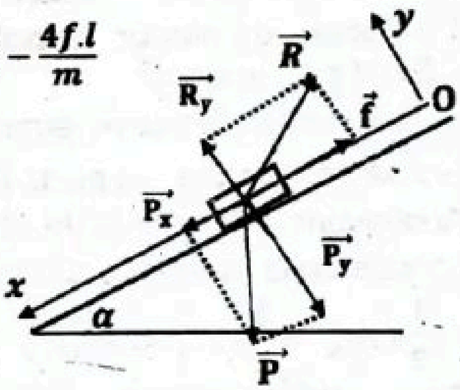
Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au solide entre son allée et son retour en A :

$$\frac{1}{2}mV_A^2 - \frac{1}{2}mV_1^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$$

or : $W(\vec{P}) = 0$ et $W(\vec{R}) = -2f.l$

donc : $\frac{1}{2}mV_A^2 - \frac{1}{2}mV_1^2 = -2f.l \Longrightarrow V_A^2 = V_1^2 - \frac{4f.l}{m}$

d'où $\boxed{V_A = \sqrt{V_1^2 - \frac{4f.l}{m}}}$



AN : $V_A = \sqrt{(9,8)^2 + \frac{4 \times 21 \times 6}{10}} = 6,7\ m.s^{-1}$;

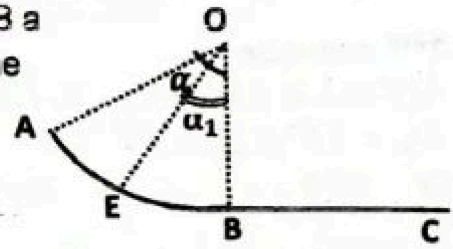
d' où $\boxed{V_A = 6,7\ m.s^{-1}}$

NB . On pouvait appliquer le T.E.C. entre le point d'arrêt et le point A.

....

Problème 31 ***

Un skieur assimilé à un point G, de masse m = 80 kg, glisse sur une piste formée de deux parties AB et BC situé dans un même plan vertical.



L'arc $\widehat{AB}$ de centre O situé sur la verticale de B a un rayon r = 50 m et BC est une partie rectiligne horizontale de longueur $l = 50\ m$.

Le skieur part sans vitesse initiale du point A tel que : $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = \alpha = \frac{\pi}{3}$ rad.

1°) En négligeant les frottements, calculer la vitesse du skieur au point E tel que : $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OA}) = \alpha_1 = \frac{\pi}{6}$, puis calculer sa vitesse en B.

2°) En fait, sur le trajet ABC, existent des forces de frottements assimilables à une force $\vec{f}$ tangente à la trajectoire et d'intensité constante f. Si le skieur arrive sans vitesse en C, quelle est la valeur f de cette force de frottement ? On prendra $g = 9,8\ m.s^{-2}$.

Rép : 1°) $V_E \approx 19\ m.s^{-1}$; $V_B \approx 22\ m.s^{-1}$; 2°) $f = \frac{mg(1-\cos\alpha)}{\alpha + 1} \approx 191\ N$

....**Résolution**..

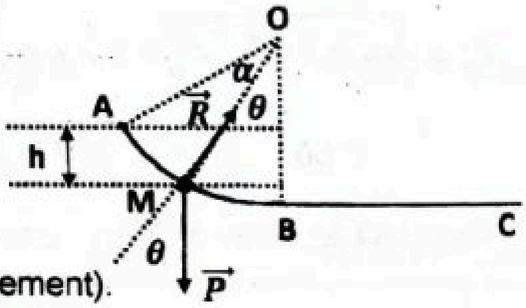
1°) Vitesse du skieur au point E.

– Système : le skieur.

– Référentiel : terrestre (supposé galiléen).

– Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$ de la piste.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre A et un point M quelconque de la trajectoire circulaire AB : .



$$\frac{1}{2}mV_M^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$$

On a : $W(\vec{P}) = mgh$;

or : $h = r(\cos\theta - \cos\alpha)$

Donc : $W(\vec{P}) = mg\,r(\cos\theta - \cos\alpha)$

et $W(\vec{R}) = 0$ (car, il n' y a pas de frottement).

Le théorème de l'énergie cinétique devient :

$$\frac{1}{2}mV_M^2 = mg\,r(\cos\theta - \cos\alpha)\ ; \quad (V_A = 0)$$

$$V_M^2 = 2g\,r(\cos\theta - \cos\alpha) \Longrightarrow V_M = \sqrt{2gr(\cos\theta - \cos\alpha)}$$

• Au point E $\theta = \frac{\pi}{6}$:

$$V_E = \sqrt{2 \times 9,8 \times 50\left(\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3}\right)} \approx 19\ m.s^{-1}$$

$$\boxed{V_E \approx 19\ m.s^{-1}}$$

• Au point B $\theta = 0$:

$$V_B = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 50\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right)} \approx 22\ m.s^{-1}$$

$$\boxed{V_B \approx 22\ m.s^{-1}}$$

2°) Valeur des forces de frottement.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre A et C :

$$\frac{1}{2}mV_C^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$$

Comme $V_C = V_A = 0$, alors : $W(\vec{P}) + W(\vec{R}) = 0$

• $W(\vec{P}) = W_{AB}(\vec{P}) + W_{BC}(\vec{P})$

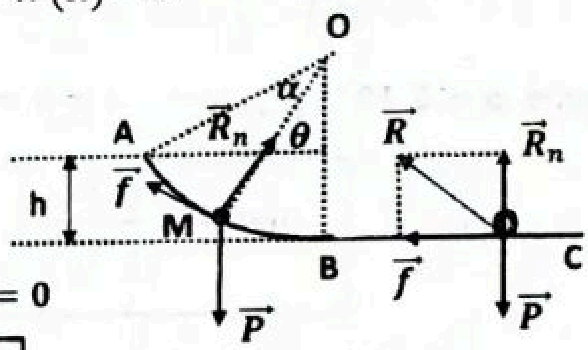
or : $W_{AB}(\vec{P}) = mg\,r(1 - \cos\alpha)$

et $W_{BC}(\vec{P}) = 0$, car $\vec{P} \perp BC$.

• $W(\vec{R}) = -f.(AB + BC)$

$W(\vec{R}) == -f.(r.\alpha + l)$

Donc : $mg\,r(1 - \cos\alpha) - f.(r.\alpha + l) = 0$



d' où $$\boxed{f = \frac{mg(1 - \cos\alpha)}{\alpha + 1}}$$

AN : $f = \dfrac{80 \times 9{,}8.\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3} + 1} = 191{,}5\ N \Longrightarrow \boxed{f = 191{,}5\ N}$

....

Problème 32. ***

Un train démarre sur une voie rectiligne descendante dans le sens de la marche du train, de pente 0,5 %. Son accélération est a = 0,05 g et l'on donne (g = 10 m.s $^{-2}$). Quelle est l'inclinaison **β** d'un pendule suspendu au plafond d'un wagon par rapport à la normale au plancher du wagon.

Réponse : β = 2°35'.

....**Résolution** ....

Inclinaison du pendule par rapport à la normale au plancher du wagon.

– Système : le solide .

– Référentiel : terrestre (supposé galiléen).

– Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$ du fil.

- Appliquons le théorème du centre d'inertie (T.C.I.) :

$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

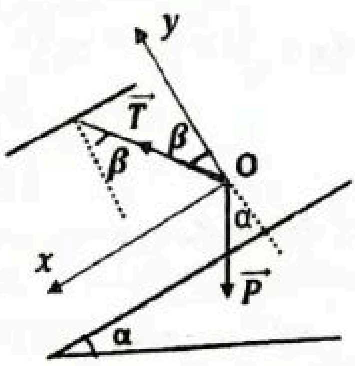
- Projection sur les axes :

• sur l'axe ox : $mg\sin\alpha + T\sin\beta = ma$

soit : $T\sin\beta = ma - mg\sin\alpha$ **(1)**

• sur l'axe oy : $T\cos\beta - mg\cos\alpha = 0$

soit : $T\cos\beta = mg\cos\alpha$ **(2)**



En divisant (1) par (2) on obtient :

$$\tan\beta = \frac{a - g\sin\alpha}{g\cos\alpha}$$

α étant petit, on a : $\sin\alpha \approx \alpha$ et $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$

donc : $$\tan\beta = \frac{a - g.\alpha}{g\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)}$$

Comme $a = 5.10^{-2}.g$; alors : $$\tan\beta = \frac{5.10^{-2}.g - g.\alpha}{g\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)}$$

d' où $$\boxed{\tan\beta = \frac{5.10^{-2}.-.\alpha}{\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)}}$$

AN : $$\tan\beta = \frac{5.10^{-2}.-.5.10^{-3}}{\left(1-\frac{(5.10^{-3})^2}{2}\right)} \approx 5.10^{-2}.(1-0,1)$$

$\tan\beta \approx 0,045 \Longrightarrow \boxed{\beta \approx 0,045\,rad}$

Exprimons β en degré et minutes d'angle.

$$\frac{\beta}{180} = \frac{0,045}{\pi} \Longrightarrow \beta = \frac{180\times 0,045}{\pi} \approx 2,58°$$

d' où $\boxed{\beta \approx 2°35'}$

Problème 33. ***

Un solide ponctuel (S) de masse m est initialement au repos en A. On le lance sur la piste ACD, en faisant agir sur lui, le long de la partie AB de sa trajectoire une force $\vec{F}$ horizontale et de valeur F constante. On pose $AB = l$.

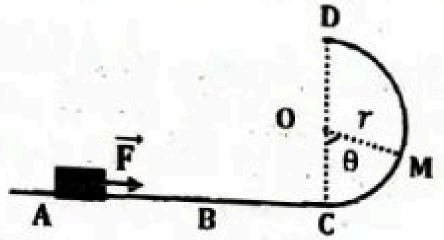
La portion AC de la trajectoire est horizontale et la portion CD est un demi-cercle de centre O et de rayon r. Ces deux portions sont dans un même plan vertical. On suppose que la piste ACD est parfaitement lisse et que la résistance de l'air négligeable.

1°) Déterminer, en fonction de F, l et m, la valeur V_B de la vitesse de (S) en B.

2°) Au point M défini par l'angle $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OM}) = \theta$, établir en fonction de F, l, m, r, θ et g, l'expression de :

a) la valeur V de la vitesse de (S) ;

b) l'intensité R de la réaction $\vec{R}$ de la piste.



3°) De l'expression de R, déduire, en fonction de m, g, r et l, la valeur minimale F_0 de F pour que (S) atteigne D. Calculer F_0 sachant que $m = 0,5\,kg$; $r = 1\,m$; $l = 1,50\,m$; $g = 10\,m.s^{-2}$.

4°) En fait, sur la piste AM, les frottements sont équivalents à une force unique constante f.

a) Déterminer l'expression de la vitesse V_M au point M en fonction de F, L (distance AC), l, m, f, θ et g.

b) Sachant que si $F = 1\,N$, $V_M = 0,5\,m.s^{-1}$ pour $\theta = 30°$, déterminer l'intensité de la force de frottement $\vec{f}$ et l'accélération du mobile sur la portion AB.

Réponses : 1°) $V_B = \sqrt{\frac{2F.l}{m}}$; **2°) a)** $V = \sqrt{\frac{2F.l}{m} - 2gr(1-\cos\theta)}$;

b) $R = \frac{2Fl}{r} + mg(3\cos\theta - 2)$; **3°)** $F_0 = \frac{5mgr}{2l} = 8,3\,N$;

4°) a) $V_M = \sqrt{\frac{2}{m}[Fl - f(L + r\theta) - mgr(1-\cos\theta)]}$;

b) $f = \frac{2F.l - m\left[V_M^2 + 2gr(1-\cos\theta)\right]}{2(L + r\theta)} = 0,22\,N$; $a \approx 1,56\,m.s^{-2}$.

....**Résolution** ....

1°) Expression de la vitesse V_B en fonction de F, l et m,

– Système : le solide (S).

– Référentiel : terrestre (supposé galiléen).

– Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$, la réaction $\vec{R}$ de la piste et la force motrice $\vec{F}$.

· Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre A et B :

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}ex) \Longrightarrow \frac{1}{2}mV_B^2 - 0 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{F})$$

On a : $W(\vec{P}) = W(\vec{R}) = 0$ et $W(\vec{F}) = F.l$

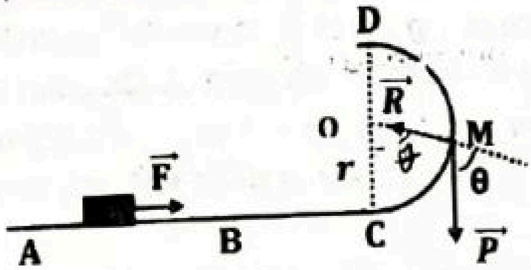
Le théorème de l'énergie cinétique devient :

$$\frac{1}{2}mV_B^2 = F.l \Longrightarrow \boxed{V_B = \sqrt{\frac{2F.l}{m}}}$$

2°) a) Expression de la vitesse V, en fonction de F, l, m, r, θ et g.

Sur la portion BC, la force motrice F est nulle, la vitesse est constante $V_C = V_B$.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique sur le solide entre C et M :



$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}ex)$$

$$\frac{1}{2}mV_M^2 - \frac{1}{2}mV_C^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$$

On a : $W(\vec{P}) = -mgh$

Or : $h = r(1 - \cos\theta)$;

Donc : $W(\vec{P}) = -mgr(1 - \cos\theta)$

et $W(\vec{R}) = 0$, car la piste est liste (pas de frottement).

Le théorème de l'énergie cinétique devient :

$$V_M^2 = V_B^2 - 2gr(1 - \cos\theta) \Longrightarrow V_M = \sqrt{V_B^2 - 2gr(1 - \cos\theta)}$$

d' où $\boxed{V_M = \sqrt{\frac{2F.l}{m} - 2gr(1 - \cos\theta)}}$

b) Expression de la réaction R en fonction de F, l, m, r, θ et g.

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

- Projetons sur la normale orientée :

$$-mg\cos\theta + R = ma_n \Longrightarrow R = mg\cos\theta + m\frac{V_M^2}{r}$$

$$R = mg\cos\theta + \frac{2F.l}{r} - 2mg(1 - \cos\theta)$$

d' où $\boxed{R = mg(3\cos\theta - 2) + \frac{2F.l}{r}}$

3°) Valeur minimale F_0 de F pour que S atteigne le point D.

Pour que le solide (S) atteigne le sommet D, il faut que :

$$\begin{cases} R \geq 0 \\ \theta = \pi \end{cases} \Longleftrightarrow mg(3\cos\pi - 2) + \frac{2F.l}{r} \geq 0$$

$$5mg \leq \frac{2F.l}{r} \Longrightarrow F \geq \frac{5mgr}{2l}$$

d' où $\boxed{F_0 = \frac{5mgr}{2l}}$

AN : $F_0 = \frac{5 \times 0{,}5 \times 10 \times 1}{2 \times 1{,}5} = 8{,}3\ N \Longrightarrow \boxed{F_0 = 8{,}3\ N}$

4°) a) Expression de la vitesse V_M , en fonction de F, L , l , m, f, θ et g.

On applique le théorème de l'énergie cinétique entre A et M :

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}ex) \Longrightarrow \frac{1}{2} m V_M^2 - 0 = W(\vec{P}) + W(\vec{F}) + W(\vec{R})$$

On a : $W(\vec{P}) = -mgr(1 - \cos\theta)$; $W(\vec{F}) = Fl$; $W(\vec{R}) = -f.(L + r\theta)$.

Donc : $\frac{1}{2} m V_M^2 = -mgr(1 - \cos\theta) + Fl - f.(L + r\theta)$

D' où $$\boxed{V_M = \sqrt{\frac{2F.l}{m} - \frac{2f.(L + r\theta)}{m} - 2gr(1 - \cos\theta)}}$$

b) Intensité f de la force de frottement.

Le mobile arrive en M avec la vitesse V_M telle que :

$$V_M^2 = \frac{2F.l}{m} - \frac{2f.(L + r\theta)}{m} - 2gr(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{2f.(L + r\theta)}{m} = \frac{2F.l}{m} - 2gr(1 - \cos\theta) - V_M^2$$

d' où $$\boxed{f = \frac{2F.l - m.\left[V_M^2 + 2gr(1 - \cos\theta)\right]}{2(L + r\theta)}}$$

AN : $f = \frac{2 \times 1 \times 1{,}5 - 0{,}5.\left[(0{,}5)^2 + 2 \times 10 \times 1.(1 - \cos 30°)\right]}{2 \times \left(3 + \frac{\pi}{6}\right)} = 0{,}217\ N$

d' où $\boxed{f \approx 0{,}22\ N}$

Accélération du solide sur la portion AB.

Appliquons le T.C.I. au solide sur la portion AB :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}$$

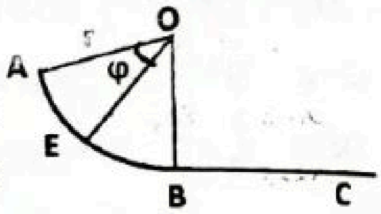
Projetons suivant la direction AB :

$-f + F = ma \Longrightarrow a = \frac{F - f}{m} = \frac{1 - 0{,}22}{0{,}5}$; d' où $\boxed{a = 1{,}56\ m.s^{-2}}$

Problème 34. ***

Un cube M de masse 1 kg assimilable à un point matériel glisse sur une piste formée de deux parties AB et BC qui sont dans un même plan vertical.

AB représente $\frac{1}{6}$ de circonférence de centre O et de rayon r = 15 m. Le point O est situé sur la verticale de B. BC est une partie rectiligne horizontale de longueur l = 15 m. Le cube est lancé en A vers le bas avec une vitesse initiale $\vec{V}_A$ telle que $V_A = 6\,m.s^{-1}$.



1°) On néglige les frottements. Calculer la vitesse en un point E défini par l'angle φ= $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE}) = \frac{\pi}{6}$ rad.

Quelles sont les caractéristiques de la réaction $\vec{R}$ de la piste sur le cube en ce point ?

2°) En fait, sur le trajet ABC existent des forces de frottement assimilables à une force $\vec{f}$, tangente à la trajectoire, d'intensité f supposée constante.

Le mobile arrive en C avec une vitesse $\vec{V}_C$. Calculer l'intensité f sachant que $V_C = 12,5\,m.s^{-1}$.

Réponses : 1°) $V_E = 11,98\,m.s^{-1} \approx 12\,m.s^{-1}$; $R = 18,06\,N$;

2°) $f \approx 0,44\,N$.

....**Résolution** ....

1°) Calcul de la vitesse du cube en E.

– Système : le cube (M).

– Référentiel : terrestre (supposé galiléen).

– Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$ de la piste

- Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au cube entre A et E :

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}ex) \Longrightarrow \frac{1}{2}mV_E^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$$

On a : $W(\vec{R}) = 0$ (pas de frottement).

$W(\vec{P}) = mgh$;

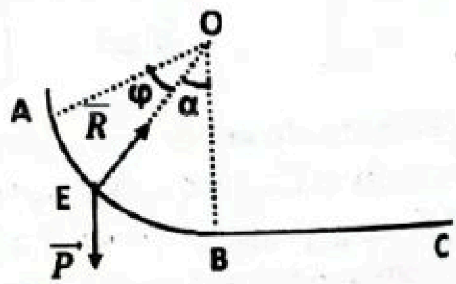
or : $h = r(\cos\alpha - \cos\theta)$; $\theta = \alpha + \varphi$

alors : $W(\vec{P}) = mgr(\cos\alpha - \cos\theta)$

Le théorème de l'énergie cinétique devient :

$$\frac{1}{2}mV_E^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = mgr(\cos\alpha - \cos\theta)$$

d' où $$\boxed{V_E = \sqrt{V_A^2 + 2gr(\cos\alpha - \cos\theta)}}$$



AN : $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{6} \times 2\pi = \frac{\pi}{3}$ rad

et $\alpha = \theta - \varphi = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ rad

Ainsi : $V_E = \sqrt{(6)^2 + 1 \times 9{,}8 \times 15\left(\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3}\right)} = 11{,}98\, m.s^{-1}$

d' où $\boxed{V_E \approx 12\, m.s^{-1}}$

Caractéristiques de la réaction $\vec{R}$ de la piste sur le cube en E.

Appliquons le théorème du centre d'inertie au cube sur la portion AB :

$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$

Projetons suivant la normale (repère de Frenet) :

$$-mg\cos\alpha + R = m\frac{V_E^2}{r} \Longrightarrow R = mg\cos\alpha + m\frac{V_A^2}{r} + 2mg(\cos\alpha - \cos\theta)$$

$$\boxed{R = mg(3\cos\alpha - 2\cos\theta) + m\frac{V_A^2}{r}}$$

AN : $R = 1 \times 9{,}8 \times \left(3\cos\frac{\pi}{6} - 2\cos\frac{\pi}{3}\right) + 1 \times \frac{(6)^2}{15} = 18{,}06\, N$

d' où $\boxed{R \approx 18\, N}$

La réaction a donc pour caractéristiques : **point d'application :** le point de contact ; **direction :** la normale OE ; **sens :** centripète ; **intensité :** $R = 18\, N$.

2°) Calcul de l' intensité f de la force de frottement.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au cube entre A et C :

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}ex) \Longrightarrow \frac{1}{2}mV_C^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$$

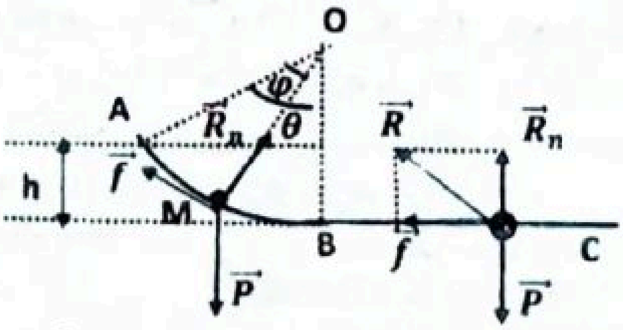
On a : $W(\vec{P}) = mgr(1 - \cos\theta)$

$W(\vec{R}) = -f.AC$;

or : $AC = AB + BC$

alors : $W(\vec{R}) = -f.(r\theta + l)$

Le théorème de l'énergie cinétique devient :



$$\frac{1}{2}mV_C^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = mgr(1 - \cos\theta) - f.(r\theta + l)$$

On a : $V = \frac{dx}{dt} = -8t + 4$

En C : $V_C = -8t + 4 \Longrightarrow t = \frac{4 - V_C}{8} = \frac{4 - 0}{8} = 0,5\ s$

Alors : $BC = x = -4(0,5)^2 + 4(0,5) = 1\ m$

D'où $\boxed{BC = 1\ m}$

2ème méthode.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre B et C :

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}ex) \Longrightarrow 0 - \frac{1}{2}mV_B^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$$

$$-\frac{1}{2}mV_B^2 = 0 - f.BC \Longrightarrow BC = \frac{mV_B^2}{2.f} = \frac{0,05 \times (4)^2}{2 \times 0,4} = 1\ m$$

D'où $\boxed{BC = 1\ m}$

3°) a) Expression de la vitesse V_E de la bille en fonction de g, r et θ.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre C et E :

$$\frac{1}{2}mV_E^2 - 0 = mgh = mgr(1 - \sin\theta)$$

d' où $\boxed{V_E = \sqrt{2gr(1 - \sin\theta)}}$

b) Expression de l'intensité de la réaction $\vec{R}$ au point E en fonction de m g, r et θ.

Appliquons à la bille le T.C.I.

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

Projetons sur la normale :

$$-mg\sin\theta + R = ma_n \qquad R = mg\sin\theta + m\frac{V_E^2}{r}$$

$$R = mg\sin\theta + 2mg(1 - \sin\theta)$$

d' où $\boxed{R = mg(3\sin\theta - 2)}$

c) L'angle θ_0 pour lequel la bille quitte la piste.

La bille quitte la piste quand :

$$R = 0 \Longrightarrow mg(3\sin\theta_0 - 2) = 0$$

$3\sin\theta_0 - 2 = 0 \Longrightarrow \sin\theta_0 = \frac{2}{3}$; d' où $\boxed{\theta_0 \approx 42°}$

Vitesse de la bille en ce point.

La vitesse correspondante est :

$$V_0 = \sqrt{2gr(1-\sin\theta_0)} \Longrightarrow V_0 = \sqrt{2gr\left(1-\frac{2}{3}\right)}$$

d' où $$\boxed{V_0 = \sqrt{\frac{2}{3}gr}}$$

AN : $V_0 = \sqrt{\frac{2}{3} \times 10 \times 0,6} = 2\ m.s^{-1} \Longrightarrow \boxed{V_0 = 2\ m.s^{-1}}$

....

Problème 36. ***

Une tige horizontale OA est fixée sur un axe vertical (Δ). Sur cette tige est enfilé un ressort de longueur à vide $l_0 = 15\ cm$ et de raideur k. Une des extrémités du ressort est fixée sur l'axe (Δ), l'autre est attachée à un solide de masse m = 10 g pouvant coulisser sans frottement sur la tige.

1°) Calculer la valeur de la constante k, sachant que le ressort s'allonge de 2 cm pour une traction de 0,20 N.

2°) L'ensemble tourne autour de l'axe (Δ) à raison de N trs/s.

a) Exprimer l'allongement x du ressort en fonction de l_0 , k, m et N.

b) Déterminer la valeur maximale que l'on peut donner à N pour que l'élasticité du ressort ne soit pas dépassée.

Réponses : 1°) $k = 10\ N/m$ **; 2°) a)** $x = \frac{4m.\pi^2N^2l_0}{k - 4m.\pi^2N^2}$ **; b)** $N_{max} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

....**Résolution** ....

1°) Valeur de la constante k du ressort.

L'allongement est proportionnel à la force de traction :

$$F = k.\Delta l \Longrightarrow k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{0,20}{0,02} = 10\ N.m^{-1}$$

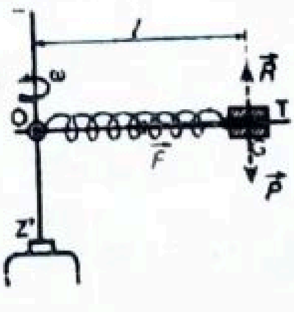
d' où $$\boxed{k = 10\ N.m^{-1}}$$

2°) Exprimons l'allongement x en fonction de l_0, k, m et N.

– Système : le solide (S).

– Référentiel : terrestre (supposé galiléen).

– Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$, la réaction $\vec{R}$ de la tige et la tension $\vec{T}$ du ressort.



Appliquons le T.C.I.

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Projetons suivant la normale :

$$T = ma_n \Longrightarrow kx = m\omega^2 r$$

Le centre d'inertie décrit une circonférence de centre O et de rayon : $r = l_0 + x$.

Donc : $kx = m\omega^2(l_0 + x.) \Longrightarrow (k - m\omega^2).x = m\omega^2 l_0$

$$x = \frac{m\omega^2 l_0}{k - m\omega^2} \text{ ; or : } \omega = 2\pi N \text{ ;}$$

d' où $$\boxed{x = \frac{4m.\pi^2 N^2 l_0}{k - 4m.\pi^2 N^2}}$$

b) Valeur maximale de N pour que l'élasticité du ressort ne soit pas dépassée.

La limite d'élasticité est telle que :

$$k - 4m.\pi^2 N^2 > 0 \Longrightarrow N < \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

N doit etre inferieur à la valeur maximale N_{max} telle que :

$$\boxed{N_{max} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}} \Longrightarrow \boxed{N_{max} = 5\ tr/s}$$

....

Problème 37.

Un solide (S) de masse $m = 80\ kg$ **est tiré sur un sol horizontal par l'intermédiaire** d'un câble faisant avec la verticale un angle $\alpha = 60°$. La force de tension du câble a pour module $F = 200\ N$. Le mouvement du solide est rectiligne et uniforme. Déterminer l'intensité et la direction de la force de réaction $\vec{R}$ exercée par le sol sur (S).

Réponses : $\tan\theta = \frac{F\sin\alpha}{mg - F\cos\alpha} \Longrightarrow \theta \approx 14°$; $R = \frac{F\sin\alpha}{\sin\theta} = 701,2\ N.$

....

LA PHYSIQUE AU SERVICE DE L'HOMME MODERNE

(Konaté Cheickna).

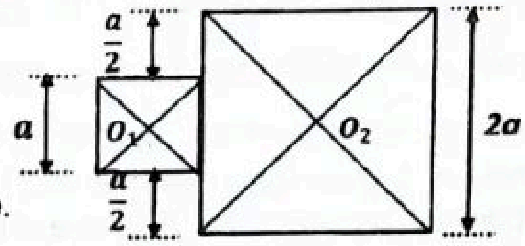
EXERCICES ET PROBLEMES PROPOSES.

CENTRE D'INERTIE

Problème 1.

Dans une plaque de carton bien homogène, on découpe le solide, représenté ci-dessous, qui est formé d'un carré de côté a = 5 cm accolé à un carré de côté 2a = 10 cm (figure). Où O_1 et O_2 sont les centres de ces deux carrés.

Déterminer le centre d'inertie G de ce solide.



Réponse : O_1G = 6 cm.

Problème 2.

Une petite boule homogène de centre A, de masse m = 20 g, est placée à l'intérieur d'une sphère creuse de masse M = 100 g, de centre O et de rayon intérieur R = 20 cm. On donne OA = 5 cm. Quelle est la position du centre d'inertie G du système formé par les deux sphères ?

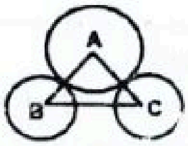
Réponse : $OG = \dfrac{m}{M+m}OA \approx$ **8,3 mm.**

Problème 3. (Exo 6 Tomasino, page 38).

La figure ci-dessous représente une molécule d'eau H_2O. La distance entre les centres des atomes O et H est : d = AB = AC = 96 pm (1 pm = 10^{-12} m).

L'angle entre les directions des liaisons O – H vaut :

$$2\alpha = \widehat{BAC} = 105°.$$



Déterminer la position du centre d'inertie de la molécule sachant que les masses atomiques molaires sont, en g.mol^{-1} : M(H) = 1 ; M(O) = 16.

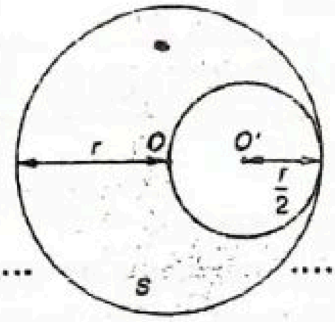
Réponse : $OG = \dfrac{2M_H}{M_O + 2M_H} d \cos\alpha \approx$ **6,5 pm.**

Problème 4.

On dessine sur une plaque métallique homogène d'épaisseur constante deux cercles de centres O et O' de rayon R et R' = R/ 2, tangents intérieurement comme l'indique la figure et on découpe la plaque de façon à ne garder que la partie limitée par les deux cercles. Soit S le solide ainsi obtenu.

a) Montrer que le centre d'inertie G de S est situé sur la droite OO'.

b) Déterminer la distance x = OG en précisant si G est placé à droite ou à gauche de O.
Application numérique : R = 0,40 m.

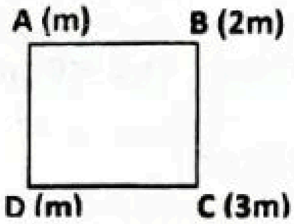


Réponses : b) $OG = \frac{R}{6} = 6,7cm$; à gauche de O.

....

Problème 5.

Un carré ABCD est formé de quatre fils métalliques rigides de masse $\frac{m}{2}$.
Aux quatre sommets de ce carré sont placées des masselottes qui ont respectivement pour masse : m , $2m$, $3m$ **et** m.
Déterminer la position du centre d'inertie de cette distribution de masses.



Réponse : OG $\left(\frac{3a}{15} \; ; -\frac{a}{15}\right)$;
où O est le centre du carré.

....

Problème 6.

Deux tiges homogènes cylindriques et de même section sont collées l'une au bout de l'autre. La longueur de chaque tige vaut $l = 35\ cm$. La première est en laiton de masse volumique $\rho_1 = 8\,000\ kg \cdot m^{-3}$ et **la** deuxième en aluminium de masse volumique $\rho_2 = 2\,700\ kg \cdot m^{-3}$.
Déterminer la position du centre d'inertie G de la tige ainsi obtenue.

Réponse : $x_G = \frac{\rho_2 - \rho_1}{2(\rho_1 + \rho_2)} l \approx -8,7\ cm.$

....

Problème 7.

On assimile la Terre et la Lune à deux sphères homogènes dont les centres sont à une distance moyenne de 3,84 .10^5 km.

1°) Sachant que le rapport des masses $\frac{M_T}{M_L}$ est égale à 81,5, déterminer la position du centre d'inertie du système (Terre – Lune).

2°) La masse du Soleil est environ égale à 2.10^{30} kg ; la distance Terre – Soleil est environ 1,5.10^8 km. Déterminer la position du centre d'inertie du système (Terre – Soleil). Données : R_T = 6 400 km ; M_T = 6.10^{24} kg.

Réponses : 1°) $TG \approx 4,65.10^3$ **km** ; $LG \approx 3,79.10^5$ **km** ; **2°)** $SG \approx 450$ **km.**

....

Problème 8.

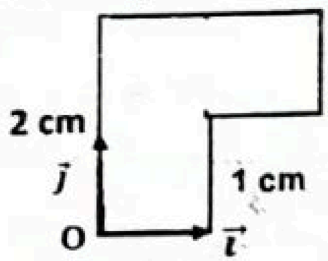
La molécule de monoxyde de carbone CO est l'un des constituants du gaz d'échappement. La distance entre les centres des atomes C et O est de 113 pm ($1\ pm = 10^{-12}\ m$). Déterminer la position du centre d'inertie de cette molécule, sachant que les masses atomiques molaires sont, en $g.mol^{-1}$:

$M(C) = 12$; $M(O) = 16$.

Réponse : **GC = 65 pm et GO = 48 pm.**

Problème 9.

Une pièce à usiner a la forme d'une équerre. Elle est découpée dans une plaque métallique homogène d'épaisseur constante Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, déterminer la position du centre d'inertie de cette pièce (figure).



Réponse $\begin{cases} x_G = 0,83\ cm \\ y_G = 1.17\ cm. \end{cases}$

Problème 10.

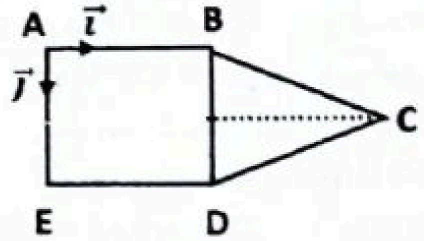
Une plaque homogène et d'épaisseur constante ABCDE est formée d'une partie carré ABDE de côté a = 3 cm, et d'une partie triangulaire (BD = CC' = a = 3 cm), (figure).

1°) Déterminer le rapport des masses des deux parties de la plaque.

2°) Déterminer la position du centre d'inertie de cette plaque. :

a) graphiquement

b) par le calcul [on utilisera le repère $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$



Réponse 1°) $\frac{m_1}{m_2} = \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2,31$ 2°) $\begin{cases} x_G = 1,5\ cm \\ y_G = 2,2\ cm \end{cases}$

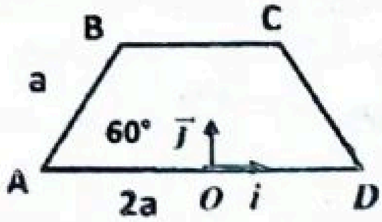
Problème 11.

Une plaque homogène et d'épaisseur constante ABCD (figure) a une forme **trapézoïdale, avec** AB = BC = CD = a et la base AD = 2a.

Déterminer la position du centre d'inertie de cette plaque :

1°) graphiquement ;

2°) par le calcul, on utilisera le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec O milieu de AD.



Réponse : $\overrightarrow{OG} = \frac{2\sqrt{3}}{9} a.\vec{\jmath}$.

Problème 12.

Deux mobiles se déplacent l'un vers l'autre sur un aérotabanc ; le premier de masse M_1 = 100 g à la vitesse V_1 = 1 m.s $^{-1}$; le deuxième, de masse M_2 = 65 g. à la vitesse V_2 = 2 m.s $^{-1}$. Après le choc, le deuxième mobile repart en sens opposé avec une vitesse V'_2 = 1,6 m.s $^{-1}$.

a) Déterminer les caractéristiques du vecteur vitesse $\vec{V}'_1$ du premier mobile après le choc.

b) Y a-il conservation de l'énergie cinétique du système au cours du choc ? Interpréter.

Réponses : a) V'_1 = – 1,34 m.s $^{-1}$; b) Non

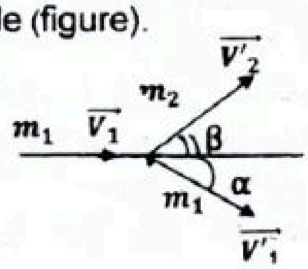
Problème 13.

Un projectile de masse m_1 = 100 g glisse sur la surface d'un lac gelé et rencontre une pierre de masse m_2 = 70 g qui est immobile. Le projectile rebondit sur la pierre, sa nouvelle direction faisant un angle α = 30° avec la direction de sa trajectoire initiale, tant dis que la pierre part dans une direction faisant l'angle β = 50° avec la direction initiale du projectile (figure).

La vitesse du projectile avant le choc est V_1 = 10 m.s $^{-1}$.

a) Calculer sa vitesse V'_1 et celle de la pierre V'_2 après le choc.

b) Y a-il conservation de l'énergie cinétique du système au cours du choc ? Interpréter.



Réponses : a) $V'_1 \approx$ 7,74 m.s $^{-1}$; $V'_2 \approx$ 7,2 m.s $^{-1}$; b) Non

---

Problème 14.

Deux automobiles se heurtent au croisement de deux routes perpendiculaires. La première de masse m_1 = 1 000 kg roulait à la vitesse V_1 = 40 km.h $^{-1}$; la deuxième, de masse m_2 = 800 kg, se déplaçait à la vitesse V_2. Après le choc, les deux automobiles restent accrochées et la direction prise par l'ensemble forme un angle α = 57° avec la direction initiale du premier véhicule. La vitesse sur ces deux routes étant limitée à 45 km.h $^{-1}$; le deuxième véhicule était-il en infraction pour excès de vitesse ?

Rép : $V_2 = \frac{m_1}{m_2} V_1 \tan\alpha \approx$ 77 km/h ; (il y a infraction au code de la route).

Problème 15.

Un solide (S) de masse $m = 80\ kg$ **est tiré sur un sol horizontal par l'intermédiaire** d'un câble faisant avec la verticale un angle $\alpha = 60°$. La force de tension du câble a pour module $F = 200\ N$. Le mouvement du solide est rectiligne et uniforme. Déterminer l'intensité et la direction de la force de réaction $\vec{R}$ exercée par le sol sur (S).

Réponses : $\tan\theta = \dfrac{F\sin\alpha}{mg - F\cos\alpha} \Longrightarrow \theta \approx 14°$; $R = \dfrac{F\sin\alpha}{\sin\theta} = 701,2\ N.$

....

Problème 16. (Bac, D, Reims 1982).

Un solide supposé ponctuel, de masse m = 0,10 kg, glisse le long de la ligne de plus grande pente AB d'un plan incliné d'un angle α = 20° **avec le plan horizontal.**

1°) Le solide est abandonné en A sans vitesse initiale.

a) En considérant les frottements négligeables, déterminer la nature du mouvement du solide et calculer la durée du parcours AB = 2 m ($g = 10\ m/s^2$).

b) En réalité, cette durée est égale à 1,3 s. En admettant l'existence des forces de frottement de somme constante $\vec{f}$, opposée au vecteur vitesse, déterminer la valeur de cette force de frottement.

2°) Le mobile est maintenant lancé de B vers A. Lors de son passage en B sa vitesse est égale à 3 $m.s^{-1}$. Déterminer la position du point C où la vitesse du solide s'annule. **On suppose que la force de frottement est constamment égale à 0,10 N.**

Réponses : 1°) $a = g\sin\alpha = 3,35\ m\cdot s^{-2}$; $t \approx 1,1\ s$; b) $f = 0,10\ N$;

2°) $BC \approx 1\ m$.

....

Problème 17. ***

Un traîneau de masse m = 200 kg est tiré selon une de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle **α** = 20° par rapport à l'horizontale, par l'intermédiaire d'un câble faisant un angle constant **β** = 30° avec celle-ci. La tension du câble vaut 1250 N. Sachant que le mouvement est rectiligne et uniforme, déterminer :

1°) la réaction $\vec{R}$,somme des forces de contact **exercée par le câble sur le traineau :**

2°) la puissance de la force exercée par le câble sur le traineau, la puissance du poids et celle de la réaction $\vec{R}$, sachant que la vitesse du traîneau vaut 20 km/h. Conclusion.

Rép: 1°) $R = 1285\ N$; $\theta = 18,7°$;

2°) $\mathcal{P}_T = 6014\ W$; $\mathcal{P}_P = -3725\ W$; $\mathcal{P}_R = -2289\ W$.

Problème 18. ***

Un pendule est constitué d'un fil inextensible, de masse négligeable et d'une bille assimilable à un point matériel de masse m = 5 g. Le pendule est suspendu au plafond d'un véhicule animé d'un mouvement rectiligne d'abord horizontal puis ascendant.

1°) Dans la partie horizontale, le véhicule est soumis à une accélération constante $a = 5\ m.s^{-2}$. Déterminer l'angle d'inclinaison du pendule par rapport à la verticale ainsi que le module de la tension $\vec{T}$ du fil. ($g = 10\ m.s^{-2}$).

2°) Dès qu'il aborde la côte inclinée d'un angle $\beta = 20°$ par rapport à l'horizontale, le véhicule n'est plus soumis à l'action du moteur et il continue sur sa lancée sans frottements le long de la côte.

a) Calculer l'accélération du véhicule et la distance parcourue avant l'arrêt, sachant que sa vitesse au bas de la pente est égale à $20\ m.s^{-1}$.

b) Déterminer l'angle d'inclinaison du pendule par rapport à la verticale (on l'exprimera en fonction de l'angle β du plan incliné).

Réponses : 1°) $\alpha_1 = 26,6°$; $T = \frac{mg}{\cos\alpha}$

2°)a) $a = -3,42\ m.s^{-1}$; $x = 58,5\ m$; b) $|\alpha_2| = 16°$; $|\alpha_2| = \frac{4}{5}\beta$.

....

Problème 19. ***

Un ascenseur de masse totale $m = 250\ kg$ démarre vers le haut d'un mouvement de translation uniformément accéléré, il atteint la vitesse de $6\ m.s^{-1}$ après un parcours de 6 m. Ensuite, il conserve cette vitesse sur une certaine distance, puis s'arrête en 2,5 s d'un mouvement uniformément retardé.

1°) Calculer la force exercée par le câble sur l'ascenseur au cours de chacune des trois phases du mouvement. ($g = 10\ m.s^{-2}$).

2°) On suspend au plafond de l'ascenseur un ressort de longueur à vide $l_0 = 20\ cm$ et de raideur $k = 30\ N.m^{-1}$, à l'autre extrémité du ressort est accroché un solide (S) de masse m = 300 g. Déterminer la longueur du ressort au cours de chacune des phases du mouvement. On néglige la masse du ressort et on considère qu'il n'y a pas d'oscillations.

Réponses : 1°) $T_1 = 3250\ N$; $T_2 = 750\ N$; $T_3 = 1900\ N$.

2°) $l_1 = 33\ cm$; $l_2 = 30\ cm$; $l_3 = 27,6\ cm$.

....

Problème 20.*.**

Un solide (S) de masse m = 10 kg assimilable à un point matériel est en mouvement sur un rail AB horizontal sous l'effet d'une force $\vec{F}$ constante et parallèle au rail.

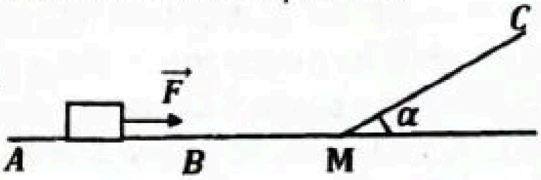
1°) En négligeant les frottements, exprimer l'accélération a de (S) sur le trajet AB, en fonction de F et m, **puis déterminer la nature du mouvement de (S) sur ce trajet**

2°) Le mobile part de A sans vitesse initiale et arrive en B après 6 s avec une vitesse $V_B = 3\ m.s^{-1}$.

a) Calculer l'accélération a du solide (S).

b) En déduire l'intensité de la $\vec{F}$.

c) Déterminer la distance AB.



Le solide parcourt BM en 3 s puis aborde un plan incliné d'angle $\alpha = 10°$.

a) Sachant que les frottements sont négligeables pendant tout le mouvement de (S), déterminer la vitesse de (S) en M.

b) Calculer la distance d = MC, sachant que le solide s'arrête en C.

On donne : $g = 10\ m.s^{-2}$; $\sin 10° = 0,174$.

Réponses : 1°) $a = \frac{F}{m}$; **2°) a)** $a = 0,5\ m.s^{-2}$; **b)** $F = 5\ N$; **c)** $AB = 9\ m$;

3°) a) $V_M = V_B = 3\ m.s^{-1}$; **b)** $MC \approx 2,6\ m$.

....

Problème 21. *.**

La cabine d'un ascenseur dont le plancher se trouve à 100 m au-dessus du sol se met à descendre en partant du repos ; après 5 s de descente elle acquiert une vitesse de 2 m/s avec laquelle elle parcourt 85 m et finalement elle arrive au sol avec une vitesse nulle.

1°) Etudier les trois phases du mouvement de la cabine et calculer la durée totale de la descente.

2°) Un fil élastique de masse négligeable est fixé par un bout au plafond de la cabine et porte attaché à l'autre bout, une masse marquée de 100 g.

On suppose que l'allongement du fil est proportionnel à la force de traction, et cet allongement est de 1 cm lorsque la force de traction est de 10 gf.

Quel est l'allongement du fil pendant chaque **phase de la descente de l'ascenseur ?**

3°) Ce même fil élastique muni de la masse, est suspendu à l'intérieur d'une voiture qui démarre sur une voie horizontale avec une accélération constante et égale à $1\ m.s^{-2}$. Quelle est la position d'équilibre du fil **et quel est son allongement** pendant la période de démarrage de la voiture ?

On prendra $g = 9,8\ m.s^{-2}$ et on négligera sa variation lorsqu'on s'élève de 100 m.

Réponses : 1°) $a_1 = 0,4\ m.s^{-2}$; $a_2 = 0$; $a_3 = -0,2\ m.s^{-2}$; $t = 57,5\ s$;

2°) $\Delta l_1 - 9,6\ cm$; $\Delta l_2 = 10\ cm$; $\Delta l_3 = 10,2\ cm$;

3°) $\alpha \approx 5°50'$; $\Delta l = 10,05\ cm$.

Problème 22. *.**

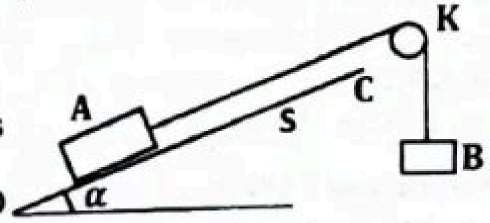
On considère le système constitué par :

- un solide A de masse $m_A = 400\ g$ pouvant glisser sur un plan incliné OC suivant la ligne de plus grande pente ;
- un solide B de masse $m_B = 300\ g$ relié à A par un fil inextensible passant sur la gorge d'une poulie K de masse négligeable. **L'inclinaison du plan OC est de 30°.**

A la date t = 0, le système est libéré sans vitesse, le solide A partant du point O.

1°) Calculer l'accélération du mouvement du système.

2°) Calculer le temps mis par A pour atteindre le point S tel que OS = 2 m. Calculer la vitesse de A au passage en S.



3°) Au moment où le solide A passe en S, le fil casse brusquement. Décrire qualitativement les mouvements ultérieurs des solides A et B. Calculer le temps écoulé entre la date 0 et et l'instant où le solide A repasse par sa position initiale en O. ($g = 10\ m.s^{-2}$).

Réponses : 1°) $a = \dfrac{(m_B - m_A \sin\alpha).g}{m_A + m_B} \approx 1,43\ m.s^{-2}$;

2°) $t_1 \approx 1,7\ s$; $V \approx 2,4\ m.s^{-1}$; 3°) $t \approx 3,2\ s$.

Problème 23. *.**

Sur une table horizontale repose un corps A de masse M_1 ayant la forme d'un parallélépipède. A est relié à un corps B de masse M_2 pouvant se déplacer verticalement par l'intermédiaire d'un fil horizontal qui passe ensuite sur la gorge d'une poulie légère, de masse négligeable, pouvant tourner sans frottement appréciable autour de son axe horizontal.

1°) Le frottement entre A et la table étant négligé, calculer l'accélération a du système abandonné à lui-elle, en fonction de M_1, M_2 et g.

Donner sa valeur numérique si $M_1 = M_2 = 0,700\ kg$; ($g = 9,8\ m.s^{-2}$).

2°) En fait, il y a frottement entre le corps A et la table, c'est-à-dire que la force de contact que la table exerce sur A au cours du mouvement peut se résoudre en deux composantes : l'une $\vec{R}_N$ perpendiculaire à la table, l'autre $\vec{R}_T$ supposée **constante, horizontale et opposée à la vitesse de A.**

a) Calculer l'accélération a' de A en fonction de M_1, M_2 , g et R_T.

b) Sachant que lorsqu'on place le corps B, à une distance h = 60 cm du sol, à partir du moment où B touche le sol, A parcourt une distance d = 27,5 cm avant de s'arrêter ; calculer $\mathbf{R_T}$ et l'accélération $\boldsymbol{a'}$ précédente.

Réponses : 1°) $a = \frac{M_2 \cdot g}{M_1 + M_2} = 4,9\ m.s^{-2}$; **2°) a)** $a' = \frac{M_2 \cdot g - R_T}{M_1 + M_2}$

b) $R_T = \frac{M_2 \cdot g}{1 + \frac{M_1 + M_2}{M_1} \cdot \frac{d}{h}} = 3,58\ N$; $a' = \frac{M_2 \cdot g}{M_1\left(1 + \frac{h}{d}\right) + M_2} = 2,3\ m.s^{-2}$.

....

Problème 24. *.**

Un pendule simple est constitué d'un fil inextensible de longueur l , de masse négligeable, portant à l'extrémité inferieur une bille ponctuelle de masse m. On écarte le pendule de sa position d'équilibre d'un angle $\alpha_0 = 60°$ puis on l'abandonne sans vitesse initiale.

1°) Déterminer l'expression de la vitesse de la bille :

a) au moment où le fil fait avec la verticale un angle α ;

b) au moment où le fil passe par la verticale.

AN : $l = 1\ m$, $\alpha = 30°$, $g = 10\ m.s^{-2}$.

2°) Exprimer la norme de la tension du fil en fonction de α , α_0 et g.

Calculer sa valeur numérique dans les deux cas précédents, si m = 200 g.

Réponses : 1°) a) $V_1 = \sqrt{2gl(\cos\alpha - \cos\alpha_0)} \approx 2,7\ m/s$;

b) $V_2 = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha_0)} \approx 3,16\ m.s^{-1}$;

2°) $T = mg(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_0)$; $T_1 \approx 1,6\ N$; $T_2 = 2\ N$.

....

Problème 25. *.**

Une bille supposée ponctuelle de masse m est attachée à l'extrémité d'un fil inextensible de masse négligeable, de longueur l. L'autre extrémité du fil est fixée en un point A d'un axe vertical (Δ). L'ensemble tourne autour de (Δ) à raison de N tours par seconde.

1°) Exprimer en fonction de l , N et g (intensité de pesanteur) l'angle α que fait le fil avec la verticale. Donner l'allure de la courbe $\alpha = f(N)$.

2°) Exprimer la tension T du fil.

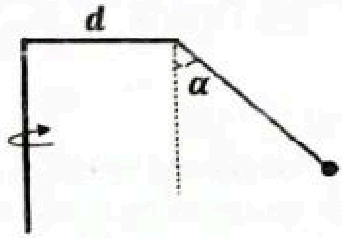
3°) Quelle doit être la valeur de N pour que la tension du fil soit égale au triple du poids de la bille ? On donne : $l = 20\ cm$; $g = \pi^2\ m.s^{-2}$.

Réponses : 1°) $\cos\alpha = \frac{g}{4\pi^2 N^2 l}$; **2°)** $T = 4\pi^2 N^2 m l$; **3°)** $N \approx 1,94\ tr/s$.

....

Problème 26. *.**

Une personne de masse M = 50 kg est assise sur une nacelle d'un manège forain. La nacelle est constituée d'un siège de masse m = 10 kg suspendu à une chaîne de longueur ℓ = 2,20 m dont on néglige la masse. Cette chaîne est elle-même accrochée par son extrémité à la distance d = 2,50 m de l'axe de rotation du manège.



Quand le manège tourne à N $tr.s^{-1}$, la chaîne s'écarte d'un angle α de sa position d'équilibre. On assimilera l'ensemble personne-nacelle à un point matériel. $g = 10\ m.s^{-2}$.

1°) Déterminer en fonction de α , ℓ , d et g, la valeur de N. Calculer N en tours par minute si $\alpha = 30°$.

2°) Quelle est, dans ces conditions, l'intensité de la force avec laquelle la personne appuie sur la nacelle?

Réponses : 1°) $N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\tan\alpha}{d + l\sin\alpha}} = 0,2\ tr.s^{-1}$; **2°)** $F = 577\ N.$

....

Problème 27. *.**

Une locomotive de masse m décrit un virage relevé. Le centre d'inertie de la locomotive décrit un arc de cercle de rayon R avec une vitesse constante $V = 36\ km/h$. Les deux rails sont distants de d = 1,44 m. La différence de hauteur entre le rail extérieur et le rail intérieur (dévers) est h = 72 mm.

. La locomotive est soumise en plus de son poids à un ensemble de forces pouvant se ramener à une force unique $\vec{F}$ perpendiculaire au plan des rails.

1°) **Représenter les forces qui s'exercent sur la locomotive et le vecteur** accélération $\vec{a}$.

2°) Déterminer l'expression de l'angle α que fait le plan de la voie ferrée avec le plan horizontal.

3°) Calculer le rayon de courbure R. ($g = 10\ m.s^{-2}$).

Réponses : 2°) $\tan\alpha = \frac{V^2}{gR}$; **3°)** $R = 200\ m.$

....

Problème 28. *.**

On dispose d'un ressort à spires non jointives de masse négligeable, de raideur $k = 10\ N/m$ et de longueur à vide $l_0 = 20\ cm$.

Le ressort est enfilé sur une tige AB soudé en A à un axe vertical (Δ) et inclinée obliquement par rapport à la verticale descendante d'un angle $\alpha = 60°$.
L'une des extrémités du ressort est fixée en A l'autre porte un anneau de masse m = 100 g pouvant coulisser sans frottement sur la tige AB.
1°) Le système est au repos.
Calculer la longueur l_1 du ressort et la réaction R_1 de la tige sur l'anneau.
2°) L'ensemble tourne autour de l'axe (Δ) **avec une vitesse angulaire** $\omega = 4\ rad/s$.
Déterminer la longueur l_2 du ressort et la réaction R_2 de la tige sur l'anneau.
3°) **Montrer que la réaction de la tige sur l'anneau peut s'annuler pour une certaine valeur** ω_0 de la vitesse angulaire que l'on calculera. ($g = 10\ m.s^{-2}$).

Rép : 1°) $l_1 = \frac{mg\cos\alpha}{k} + l_0 = 25\ cm$; $R_1 = mg\sin\alpha \approx 0,87\ N$;

2°) $l_2 = \frac{mg\cos\alpha + kl_0}{k - m\omega^2\sin^2\alpha} = 28,4\ cm$; $R_2 = m(g - \omega^2 l_2\cos\alpha)\sin\alpha \approx 0,67\ N$

3°) $\omega_0^2 = \frac{g}{\left(\frac{mg}{k.\cos\alpha} + l_0\right)\cos\alpha} \Longrightarrow \omega_0 \approx 7,1\ rad/s.$

....

Problème 29. ***

Un train circule sur une courbe de 1 500 m de rayon à la vitesse constante de 120 km/h. Calculer la tangente du petit angle que doit faire le plan de la voie ferrée avec le plan horizontal pour que le train n'ait pas tendance à dérailler.
En déduire la hauteur dont un des rails est surélevé, la largeur de la voie étant 1,44 m. On prendra $g = 10\ m.s^{-2}$.

Réponses : $\tan\alpha = 0,074$; $h = 10,7\ cm$.

....

Problème 30. ***

On considère une bille sphérique de rayon R en métal de masse volumique ρ.
Cette bille est plongée dans un réservoir de grande dimension rempli d'un liquide de masse volumique $\rho_0 < \rho$. On admettra que dans les conditions de l'expérience trois forces s'exercent sur cette bille :
- le poids de la bille ;
- la poussée d'Archimède ;
- la force de résistance $\vec{f} = -k.\vec{V}$ due aux frottements exercés par le liquide **sur la sphère ; où k est une constante positive et V la vitesse instantanée de la** sphère.

A la date 0, on lâche la sphère sans vitesse, celle-ci se déplace vers le bas.
1°) Ecrire la relation fondamentale de la dynamique pour la bille.

2°) Montrer que la bille atteint une vitesse limite de mesure V_L dont on établira l'expression en fonction de k, R, ρ, ρ_0 et g. Calculer cette vitesse limite pour :
$\rho = 8.10^3\ kg.m^{-3}$; $\rho_0 = 1,3.10^3\ kg.m^{-3}$; $R = 2.10^{-3}\ m$;
$g = 10\ m.s^{-2}$; $k = 3,1.10^{-2}\ kg.10^{-1}$.
3°) Avant que cette limite ne soit atteinte, la vitesse de la bille $V = f(t)$ varie au cours du temps. Vérifier que l'expression $V = V_L\left(1 - e^{-\frac{t}{\theta}}\right)$ est une solution de l'équation du mouvement avec pour condition initiale $V_0 = 0$.
Donner l'expression de θ en fonction de k, ρ, R et calculer sa valeur numérique avec les données précédentes.

Rép : 1°) $mg - F - f = m\frac{dV}{dt} \Longrightarrow \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)g - \frac{3k}{4\pi R^3\rho}V = \frac{dV}{dt}$

2°) $V_L = \frac{4}{3}\pi R^3 g\left(\frac{\rho - \rho_0}{k}\right)$; $V_L = 7,2.10^{-2}\ m.s^{-1}$;

3°) $\theta = \frac{4}{3}\pi R^3\frac{\rho}{k} = 8,64.10^{-3}\ s.$

....

Problème 31. ***

Une automobile, de masse 1 000 kg, arrive au sommet d'une côte avec une vitesse de 36 km/h. Le moteur cesse alors de fonctionner et l'auto aborde la descente AB de pente 8 % et de longueur 375 m.
1°) On suppose qu'il n'existe aucune résistance à l'avancement, calculer la vitesse de l'automobile lorsqu'elle arrive en B. ($g = 10\ m.s^{-2}$).
2°) En réalité la vitesse de l'automobile en B est 65 km/h. Calculer l'intensité de la force, supposée constante, qui équivaut aux diverses résistances à l'avancement.
3°) Au cours de cette descente, l'automobile croise un motocycliste qui monte de B vers A à la vitesse constante 45 km/h. Le motocycliste est passé en B quand l'automobile est en A. A quel instant et à quelle distance de B a lieu le croisement ?
4°) Lorsque l'automobile passe en B avec la vitesse de 65 km/h, on remet le moteur en marche ; l'automobile gravit alors une côte BC, de pente 4 % et de longueur 200 m et passe en C avec une vitesse de 90 km/h. Les résistances à l'avancement sont représentées par une force ayant la même intensité que celle calculée dans la questions 2°). La force motrice étant supposée constante, calculer la puissance du moteur lorsque l'automobile passe en B, puis lorsqu'elle est en C.

Réponses : 1°) $V_B \approx 26,5\ m.s^{-1} = 95,4\ km.h^{-1}$; **2°)** $f \approx 500\ N$;
3°) $t \approx 15,1\ s$; $x \approx 189\ m$; **4°)** $\mathcal{P} = 29,7\ kW$; $\mathcal{P} = 41,2\ kW$.

Problème 32. * .**

Un train se compose de deux locomotives identiques (de 100 tonnes chacune et développant la même puissance) et de 20 wagons ayant chacun une masse de 50 tonnes. La résistance au mouvement de ce train est une force constante et égale à 100 N par tonne.

Le train démarre sur une voie rectiligne et horizontale sous l'action d'une force de traction $\vec{F}$ constante et atteint 72 km/h après un parcours de 1,2 km.

Calculer pendant cette phase de démarrage :

a) l'accélération de ce mouvement ;

b) la valeur de la force de traction $\vec{F}$ développée par l'ensemble des moteurs des deux locomotives ;

c) la tension de la barre d'attelage qui relie les deux locomotives ;

d) la puissance mécanique moyenne développée par les deux locomotives.

Réponses : a) $a = 0,17\ m.s^{-2}$ **; b)** $F = 3,24.10^5\ N$ **; c)** $T = 1,35.10^5\ N$ **;**

d) $P_m = 6,48.10^3 kW$ **.**

....

Problème 33. ***

1°) Un voyageur en retard court le long d'un quai à la vitesse constante de valeur $V = 6\ m.s^{-1}$; quand il est à 20 m du dernier wagon, le train démarre avec une accélération constante de $1\ m.s^{-2}$.

a) Ecrire, dans un même repère, les équations horaires du voyageur et du dernier wagon, considérés comme des points matériels.

b) Montrer que le voyageur ne peut pas rattraper le train.

c) Quelle sera la distance minimale entre le voyageur et le dernier wagon ?

2°) Ce train est constitué d'une locomotive de masse M = 60 tonnes et de 10 wagons dont les masses respectives sont m = 5 tonnes.

L'ensemble des forces de frottement est équivalent à une force parallèle aux rails et de valeur 0,1 N par kg de véhicule. En négligeant les masses des roues et des crochets d'attelage, déterminer :

a) la force $\vec{F}$ de traction des moteurs de la locomotive lors du démarrage avec une accélération constante de valeur $a = 1\ m.s^{-2}$;

b) l'intensité de la tension d'attelage entre les deux derniers wagons ;

c) la vitesse du train quand il a parcouru 100 m.

3°) On arrête le train sur une voie montante rectiligne de pente 4%. Le dernier wagon étant à 150 m du bas de la pente, on le détache. Il descend entièrement le plan incliné et parcourt 50 m sur une voie horizontale puis aborde une voie montante de même pente que la précédente. Les forces de frottement ont la même intensité que dans la questions 2°). On donne $g = 10\ m.s^{-2}$.

a) Calculer l'énergie cinétique maximale du wagon.

b) Quelle distance va-t-il parcourir sur la voie montante ?

Réponses : 1°) a) $x_1 = 6t$; $x_2 = 0,5t^2 + 20$; **b)** $\Delta < 0$; **c)** $d_m = 2\ m$;

2°) a) $F = 1,21.10^5\ N$; **b)** $T = 5,5.10^3\ N$; **c)** $V = 14,1\ m.s^{-1}$;

3°) a) $E_{Cmax} = 2,25.10^5\ J$; **b)** $L = 80\ m$.

....

Problème 34. ***

1°) Un camion de masse M = 10 tonnes, démarre dans une descente à 5 %, la force de traction sur le véhicule reste constante ; déterminer l'intensité de cette force, sachant qu'au bout d'un parcours de 400 m, la vitesse est de 72 km/h.

Dans les questions 1°) , 2°) , 3°) , l'ensemble des forces de résistance sera assimilé à une force constante, parallèle à la route et d'intensité 1 500 N.

2°) Le camion aborde maintenant une côte à 10 % qu'il gravit à la vitesse de 36 km/h. Quelle est la puissance fournie par le moteur ?

3°) Au cours de la montée, un obstacle surgit à 40 m devant le véhicule ; à partir de cet instant la force motrice est supprimée.

Quelle est l'intensité de la force de freinage constante qui devra s'exercer sur le véhicule pour obtenir l'arrêt juste avant l'obstacle ?

4°) Le véhicule aborde maintenant un virage horizontal de 100 m de rayon, à la vitesse constante de 36 km/h (on néglige tout frottement).

De quel angle doit être relevé le plan de la route, par rapport à l'horizontale pour que le virage soit possible sans risque de dérapage ?

5°) Un objet de masse m = 100 g, est accroché à l'extrémité d'un ressort de 20 cm de longueur, l'autre extrémité est fixée au plafond du camion ; le ressort s'allonge de 5 cm, lorsque le véhicule est à l'arrêt.

Quel sera sa longueur pendant le virage précédent ? On donne $g = 10\ m.s^{-2}$.

Réponses : 1°) $F = 1,5.10^3\ N$; **2°)** $\mathcal{P} = 115\ kW$; **3°)** $F' = 10^3\ N$;

4°) $\alpha \approx 5,73°$; **5°)** $l = 25,025\ cm$.

....

LA PHYSIQUE AU SERVICE DE L'HOMME MODERNE.

(Konaté Cheickna)

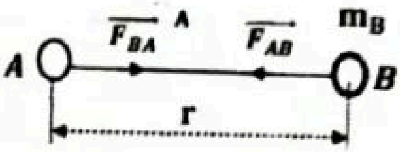
INTERACTION ET CHAMPS GRAVITATIONNELS MOUVEMENTS DES SATELLITES ET DES PLANETES.

.1 – INTERACTION GRAVITATIONNELLE.

Loi de la gravitation universelle (4ème loi de Newton).

Enoncé : « Deux corps ponctuels exercent l'un sur l'autre des forces d'interaction gravitationnelles attractives, dont l'intensité commune est proportionnelle au produit de leurs masses et inversement proportionnelle au carré de leur distance ».

$$\boxed{F = K \cdot \frac{m_A \cdot m_B}{r^2}}$$



K, est la constante de gravitation universelle.

$$\boxed{K = 6,67.10^{-11}\ S.I}$$

La forme vectorielle de la loi de Newton s'écrit :

$$\boxed{\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{BA} = -K \cdot \frac{m_A \cdot m_B}{r^2}\vec{u}}$$

où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de la droite (AB).

2 – CHAMP GRAVITATIONNEL.

Champ gravitationnel.

a) Définition. On appelle champ gravitationnel toute région de l'espace dans laquelle une masse est soumise à une force gravitationnelle.

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{G} \Longrightarrow \vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}}$$

L'intensité du champ $\vec{G}$ s'exprime en $N.kg^{-1}$.

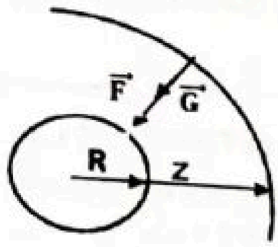
b) Champ de gravitation terrestre.

La Terre a pour masse M ; elle est supposée sphérique de rayon **R.**

Soit m, une masse ponctuelle placée à l'altitude Z; elle est soumise à la force d'attraction terrestre :

$$F = K \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = mG \Longrightarrow G = K \cdot \frac{M}{r^2}$$

d'où $$\boxed{G = K \cdot \frac{M}{(R+z)^2}} \quad (r = R + Z)$$



Soit G_0 l'intensité du champ de gravitation à l'altitude0 :

$$\boxed{G_0 = K \cdot \frac{M}{R^2}}$$

On obtient finalement :

$$\boxed{G = G_0 \cdot \frac{R^2}{(R+Z)^2}}$$

c) Champ de gravitation terrestre $\vec{G}$ et champ de pesanteur $\vec{g}$.

Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ d'un corps est la résultante de deux forces :

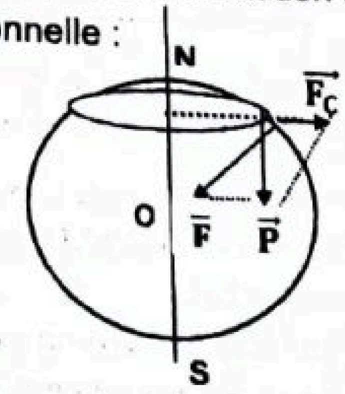
– la force gravitationnelle terrestre $\vec{F} = m\vec{G}$, dirigée vers le centre O de la Terre ;

– et la force d'inertie centrifuge $\vec{F}_C = -m\omega^2 r.\vec{n}$, due à la rotation de la Terre.

$\vec{F}_C$ étant négligeable devant la force gravitationnelle :

$$\vec{P} = \vec{F} + \vec{F}_C \approx \vec{F} \Longrightarrow m\vec{g} \approx m\vec{G}$$

d'où $$\boxed{G \approx g}$$



Ce qui permet d'écrire :

$$\boxed{g = g_0 \frac{R^2}{(R+Z)^2}}$$

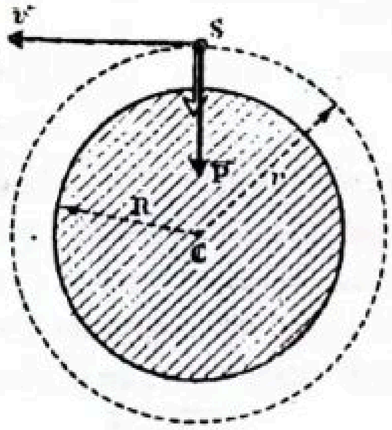
L'intensité de la pesanteur diminue quand l'altitude augmente. Pour des faibles altitudes $(Z \leq R)$, on a :

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+Z)^2} = g_0 \left(1 + \frac{Z}{R}\right)^{-2} \approx g_0 \left(1 - 2.\frac{Z}{R}\right)$$

$$\boxed{g \approx g_0 \left(1 - 2.\frac{Z}{R}\right)}$$

La présence de minerais denses dans l'écorce terrestre se manifeste par une augmentation locale de g d'où l'interêt des mesures gravimétriques dans les recherches minières et dans la prospection pétrolière.

3 – MOUVEMENT DES SATELLITES.



a) Nature du mouvement.

– Système : le satellite (S).

– Référentiel : géocentrique (supposé galiléen)..

– Bilan des forces extérieures : le satellite est soumis à la seule force gravitationnelle $\vec{F} = m\vec{g}$.

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow m\vec{g} = m\vec{a}$$

d'où $\vec{a} = \vec{g}$

* Suivant la tangente : $a_t = \frac{dV}{dt} = 0 \Longrightarrow V = Cste.$

* Suivant la normale : $a_n = g$

d'où $\begin{cases} a_t = 0 \\ a = a_n = g \end{cases}$

Le mouvement du satellite est circulaire uniforme.

b) Expression de la vitesse du satellite.

On a : $a_n = g \Longrightarrow V^2 = gr$

Soit : $V = \sqrt{g_0 \frac{R^2}{(R+z)^2}(R+z)} \Longrightarrow \boxed{V = R\sqrt{\frac{g_0}{R+Z}}}$

V est indépendante de la masse m du satellite, elle est une fonction décroissante de son altitude.

c) Période de révolution du satellite.

1ère méthode. Par définition : $T = \frac{2\pi}{\omega}$

or : $\omega = \frac{V}{r}$; alors : $T = \frac{2\pi r}{V} = \frac{2\pi(R+Z)}{V} = \frac{2\pi(R+Z)}{R\sqrt{\frac{g_0}{R+Z}}}$;

d'où $\boxed{T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+Z)^3}{g_0}}}$

2ème méthode. Le mouvement est circulaire uniforme :

$$S = VT = 2\pi r \Longrightarrow T = \frac{2\pi r}{V} = \frac{2\pi(R+Z)}{V} = \frac{2\pi(R+Z)}{R\sqrt{\frac{g_0}{R+Z}}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+Z)^3}{g_0}}}$$

d) Satellites géostationnaires.

Un satellite est dit géostationnaire si sa période de révolution est égale à la période de rotation de la Terre en tournant dans le même sens avec la même vitesse angulaire **(il parait immobile pour un observateur terrestre).**

Déterminons l'altitude d'un satellite géostationnaire.

$$T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+Z)^3}{g_0}} \Longrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{R^2}\cdot\frac{(R+Z)^3}{g_0}$$

$$R + Z = \sqrt[3]{\frac{g_0.T^2.R^2}{4\pi^2}} \Longrightarrow \boxed{Z = \sqrt[3]{\frac{g_0.T^2.R^2}{4\pi^2}} - R}$$

AN : **T = 23 h 56 min 4 s = 86164 s ; R = 6370 km ;** $g_0 = 9{,}81\ m.s^{-2}$ **;**

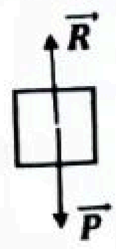
$$Z = \sqrt[3]{\frac{9{,}81 \times (86164)^2 \times (637\cdot10^4)^2}{4\cdot(3{,}14)^2}} - 637\cdot10^4 = 3{,}58.10^7 m \approx 3{,}6.10^7 m$$

Soit : $\boxed{Z \approx 36\,000\ km}$

Tous les satellites géostationnaires évoluent dans le plan équatorial à une altitude de **36 000 *km*.** C'est une altitude gigantesque, d'où la nécessité de fusées porteuses puissantes pour mettre en orbite de tels satellites.

Les satellites géostationnaires sont utilisés en télécommunications, ils servent à transmettre des communications téléphoniques et des images de télévision entre deux continents.

e) Notion d'impesanteur ou d'apesanteur.



Soit un cosmonaute à l'intérieur d'un satellite en orbite.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$ du plancher.

D'après le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} \Longrightarrow m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{g}\ ;\ \text{car : } \vec{a} = \vec{g}.$$

d'où $\boxed{\vec{R} = \vec{0}}$

Donc, le cosmonaute n'a besoin d'aucun appui pour rester en équilibre, il flotte :on dit qu'il est en état d'impesanteur ou d'apesanteur.

4 – MOUVEMENT DES PLANETES : LOIS DE KEPLER.

1ère loi : « Dans un repère de Copernic, la trajectoire d'une planète est une ellipse dont le soleil occupe un foyer ».

2ème loi : « Le segment de droite reliant le soleil et la planète balaie des aires égales pendant des durées égales. »

3ème loi : « Le rapport du carré de la période de révolution au cube du demi-grand axe de l'orbite est constant pour toutes les planètes.»

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{k.M} = Cste}$$

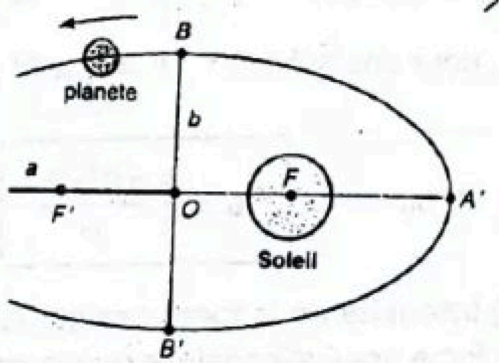
Démonstration de la 3ème loi de Kepler.

Chaque planète est soumise à la force gravitationnelle due au soleil. Cette force est normale et centripète :

$$F = k \cdot \frac{M.m}{r^2} = m\omega^2 r \Longrightarrow \omega^2 = k \cdot \frac{M}{r^3}$$

Or : $T = \frac{2\pi}{\omega} \Longrightarrow \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$

donc : $\frac{4\pi^2}{T^2} = k \cdot \frac{M}{r^3} \Longrightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{k.M}$



d'où $\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{k.M} = Cste}$

Ce qui constitue la 3ème loi de Kepler.

NB : La relation $T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{r^3}{g_0}} \Longrightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{g_0.R^2} = \frac{4\pi^2}{k.M} = Cste$, n'est qu'une simple déduction et non une démonstration de la 3ème loi de Kepler.

....

EXERCICES ET PROBLEMES RESOLUS.

Problème 1 : (Eurin-gié, Exo 3.4 , page 58).

Une sphère homogène en fonte, de centre O de rayon R =1 m a pour masse volumique ρ = 7800 kg.m^{-3}.

1°) Calculer la norme du champ gravitationnel crée par cette sphère en un point A situé à la distance d = 2 m de son centre.

2°) Calculer l'intensité de la force d'interaction gravitationnelle qui s'exerce sur un corps ponctuel de masse m = 10 g placé en A.

3°) Donner les caractéristiques de la force exercée par le corps ponctuel sur la sphère. Donnée : $k = 6,67.10^{-11}\ S.I.$

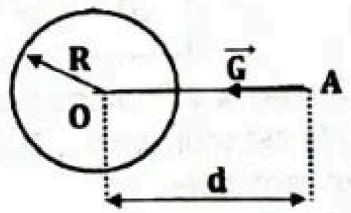
....**Résolution** ....

1°) Norme du champ gravitationnel crée par la sphère en A.

D'après la loi de gravitation :

$$F = k\,\frac{m \cdot M}{d^2}$$

Par définition : $F = mG$



Ainsi : $mG = k\,\frac{m \cdot M}{d^2} \Longrightarrow G = k\,\frac{m \cdot M}{d^2}$

Déterminons la masse de la sphère.

Par définition : $\rho = \frac{M}{V}$ $\qquad M = \rho . V$

Or, pour une sphère : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$; alors : $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

D' où $\boxed{G = \frac{4}{3}\,\frac{\pi R^3 \rho . k}{d^2}}$ AN : $\boxed{G = 5,45.10^{-7}\ N}$

2°) Intensité de la force gravitationnelle.

La force gravitationnelle exercée par la sphère sur le corps est :

$$F = mG = 10^{-2} \times 5,45.10^{-7} = 5,45.10^{-9}\ N$$

d' où $\boxed{F = 5,45.10^{-9}\ N}$

3°) Caractéristique de la force exercée par le corps sur la sphère.

Cette force a pour caractéristiques :

- point d'application : le centre O de la sphère ;
- direction : la droite OA ;

- sens : de O vers A ;
- intensité : $F = 5,45.10^{-9}\ N$.

....

Problème 2 : (Eurin-gié, Exo 3.5 , page 58).

Soit d = 3,8410⁸ m la distance qui sépare les centres respectifs O_1 et O_2 de la Terre et de la Lune, assimilées à des sphères homogènes de masses $M_1 = 5{,}98.10^{24}$ kg et $M_2 = 7{,}34.10^{22}$ kg.

1°) Comparer les champs gravitationnels créés par la Terre et la Lune en un point A du segment $[O_1, O_2]$ tel que $O_1A = 10^4$ km.

2°) Quelle est l'influence du champ gravitationnel lunaire sur le mouvement d'un satellite artificiel de la Terre ?

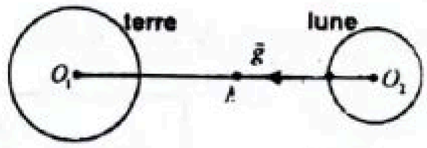
....**Résolution** ....

1°) Comparons les champs gravitationnels terrestre et lunaire.

- Champ gravitationnel terrestre :

$$G_T = k\ \frac{M_1}{d_1^2} \Longrightarrow G_T = 6,67.10^{-11} \times \frac{5{,}98.10^{24}}{(10^7)^2} = 3,98\ N.kg^{-1}$$

$$\boxed{G_T \approx 4\ N.kg^{-1}}$$



- Champ gravitationnel lunaire.

$$G_L = k\ \frac{M_2}{d_2^2}\ ;\text{ avec } d_2 = d - d_1$$

Donc : $G_L = k\ \dfrac{M_2}{(d-d_1)^2} = 6,67.10^{-11} \times \dfrac{7{,}34.10^{22}}{(3{,}84.10^8 - 10^7)^2} = 3,5.10^{-5}\ N.kg^{-1}$

$$\boxed{G_L = 3,5.10^{-5}\ N.kg^{-1}}$$

On en déduit :

$$\frac{G_T}{G_L} = \frac{4}{3{,}5.10^{-5}} \approx 1,14.10^5 \Longrightarrow \boxed{G_T \approx 114.10^3 G_L}$$

Le champ gravitationnel terrestre en est $114.10^3 G_L$ fois plus intense que celui de la Lune.

2°) Influence du champ lunaire sur un satellite artificiel.

Bien que faible, l'action du champ lunaire doit être prise en compte, elle est responsable d'un grand nombre de correction dans les calculs de trajectoires.

....

Problème 3 : (Eurin-gié , Exo 3.6 , page 58).

La Terre est supposée sphérique de rayon R = 6370 km. La répartition de masses est à symétrie sphérique.

On considère un satellite artificiel de la Terre, décrivant une trajectoire circulaire de centre O, de rayon r = 7000 km.

1°) Définir le référentiel d'étude du mouvement du satellite.

2°) Exprimer le champ gravitationnel à la distance r du centre de la Terre.

3°) Déterminer l'accélération du satellite. Montrer que le mouvement est uniforme et calculer la vitesse du satellite.

4°) Calculer la période du satellite. On prendra : $g_0 = 9,8\ m.s^{-2}$.

……………………………………Résolution ……………………………………

1°) Référentiel d'étude.

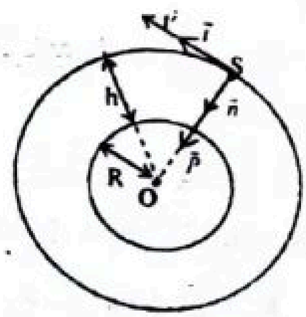
Le référentiel d'étude est le référentiel géocentrique supposé galiléen.

2°) Expression du champ gravitationnel à la distance r.

D'après la loi de la gravitation :

$$F = k\frac{m\cdot M}{r^2} \Longrightarrow F = k\frac{m\cdot M}{(R+h)^2}\ ;\ (r = R+h)$$

Par définition : $g = \frac{F}{m} \Longrightarrow g = k\frac{M}{(R+h)^2}$



A la surface de la Terre : $h = 0$; donc :

$$g_0 = k\frac{M}{R^2} \Longrightarrow k.M = g_0R^2$$

d' où $$\boxed{g = g_0\frac{R^2}{(R+h)^2}}$$

3°) Accélération du satellite.

Bilan des forces : l'attraction géocentrique $F = m\vec{g}$

D'après le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

d' où $\boxed{a = g_0\frac{R^2}{(R+h)^2}}$ AN : $\boxed{a = 8,1\ m.s^{-2}}$

Montrons que le mouvement est uniforme.

Projetons le T.C.I. suivant la tangente (repère de Frenet) :

$$ma_t = 0 \Longrightarrow a_t = 0$$

or : $a_t = \frac{dV}{dt} = 0 \Longrightarrow V = C^{te}$

Comme $V = C^{te}$, donc, le mouvement du satellite est uniforme.

Vitesse du satellite.

L'accélération est normale et centripète :

On a : $a = a_n = g \Longrightarrow V^2 = gr$

Soit : $V = \sqrt{g_0 \frac{R^2}{(R+Z)^2}(R+z)} \Longrightarrow \boxed{V = R\sqrt{\frac{g_0}{R+Z}}}$

AN : $V = 637.10^4 \times \sqrt{\frac{9,8}{7.10^5}} = 7540\ m.s^{-1} \Longrightarrow \boxed{V = 7540\ m.s^{-1}}$

4°) Période de révolution du satellite.

Par définition : $T = \frac{2\pi}{\omega}$

or : $\omega = \frac{V}{r}$; alors : $T = \frac{2\pi r}{V} = \frac{2\pi(R+Z)}{V} = \frac{2\pi(R+Z)}{R\sqrt{\frac{g_0}{R+Z}}}$;

d'où $\boxed{T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+Z)^3}{g_0}}}$

AN : $T = \frac{6,28}{637.10^4}\sqrt{\frac{(7.10^5)^3}{9,8}} = 5,832.10^3\ s \Longrightarrow \boxed{T \approx 1\ h37\ min}$

....

Problème 4 : (Eurin-gié , Exo 3.10 , page 59).

1°) A quelle distance de la Terre le champ gravitationnel de celle-ci compense t-il celui de la Lune. ? La distance entre la Terre et la Lune est 3,84.10⁸ m.

Le rapport des masses vaut : $\frac{M_T}{M_L} = 81$

2°) Jules verne pensait que c'était seulement au point ainsi déterminer que des voyageurs se dirigeant vers la Lune dans un véhicule spatial, moteur arrêté, seraient en état d'impesanteur. Avait – il raison ?

.................................**Résolution** ....

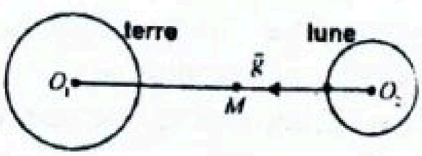
1°) Point neutre.

Les champs de gravitation créés par chacun des deux astres sont :

$G_T = k\ \frac{M_T}{d_T^2}$ et $G_L = k\ \frac{M_L}{d_L^2}$

Au point neutre on a :

$G_T = G_L \Longleftrightarrow k\ \frac{M_T}{d_T^2} = k\ \frac{M_L}{d_L^2}$



Soit : $\frac{d_T}{d_L} = \sqrt{\frac{M_T}{M_L}} = 9 \Longrightarrow d_T = 9d_L$

Or : $d_L = d - d_T$;

donc : $d_T = 9(d - d_T) \Longrightarrow 10d_T = 9d$

d' où $\boxed{d_T = 0,9d}$

d_T représente 90% de la distance totale Terre – Lune.

2°) Hypothèse de Jules Verne.

Cette hypothèse est fausse ; en effet :

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} \Longrightarrow m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{g}$$

d' où $\vec{R} = \vec{0}$

Donc, l'état d'impesanteur ne s'observe pas seulement au point neutre.

....

Problème 5 : (Eurin-gié , Exo 3.11 , page 59).

Un satellite, placé sur une orbite circulaire de rayon R = 20000 km, dans le plan équatorial de la Terre, se déplace d'ouest en est. Par rapport au repère géocentrique, sa période est 7,82 h. Calculer la masse de la Terre.

Données : $k = 6,67.10^{-11}\ S.I.$

....**Résolution**..

1°) Masse de la Terre.

Appliquons la 3ème loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{k.M_T} \Longrightarrow \boxed{M_T = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \times \frac{R^3}{k}}$$

AN : $M_T = \left(\frac{6,28}{7,82 \times 3600}\right)^2 \times \frac{\left(2.10^7\right)^3}{6,67.10^{-11}} = 5,96.10^{24}\ kg$

d' où $\boxed{M_T \approx 6.10^{24}\ kg}$

....

Problème 6 : (Eurin-gié , Exo 3.14 , page 59).

Un satellite artificiel décrit une orbite circulaire de même centre que la Terre dans le référentiel géocentrique.

1°) Préciser la nature et les caractéristiques de la force responsable du mouvement.

2°) La vitesse angulaire est égale à $8,055.10^{-4}\ rad.s^{-1}$. Calculer :

a) l'altitude à laquelle évolue le satellite ;

b) sa vitesse linéaire ;

c) l'intensité du champ gravitationnel à l'altitude considérée.

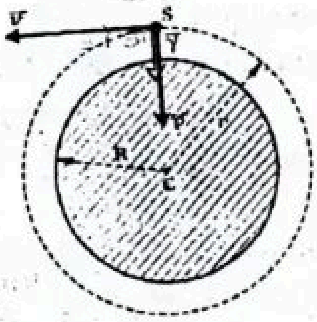
Données : $R_T = 6370\ km$; $g_0 = 9,8.m.s^{-2}$.

....Résolution ....

1°) Nature et caractéristiques de la force responsable du mouvement.

$\vec{F}$, est la force gravitationnel due à la Terre et a pour caractéristiques :

- point d'application : le satellite S ;
- direction : la droite OS ;
- sens : centripète ; (de S vers O).
- intensité : F = mg (m : masse du satellite).



2°) a) Altitude du satellite.

On a : $a = a_n = g \Longleftrightarrow \omega^2 r = g$

Or : $r = R_T + h$ et $g = g_0 \dfrac{R^2}{(R+h)^2}$

Donc : $\omega^2(R_T + h) = g_0 \dfrac{R^2}{(R+h)^2} \Longrightarrow (R_T + h)^3 = g_0 \dfrac{R^2}{\omega^2}$

d' où $\boxed{h = \sqrt[3]{g_0 \left(\frac{R_T}{\omega}\right)^2} - R_T}$ AN : $\boxed{h \approx 2\,124\ km}$

b) Vitesse linéaire du satellite.

On a : $V = \omega r = \omega(R_T + h) \Longrightarrow V = 8,055.10^{-4} \times (637 + 212,4.) \times 10^4$

d' où $\boxed{V \approx 6\,842\ m.s^{-1}}$

c) Intensité du champ gravitationnel à l'altitude h.

On a : $g = \omega^2(R_T + h) = (8,055.10^{-4})^2 \times (637 + 212,4.) \times 10^4$

d' où $\boxed{g = 5,5\ m.s^{-2}}$

....

Problème 7 : (Eurin-gié , Exo 3.15 , page 59).

Un satellite artificiel S_1, de masse m_1 est assimilé à un point matériel. Dans un repère géocentrique, supposé galiléen, son orbite est assimilée à un cercle de rayon r et de même centre que la Terre. Le satellite n'est soumis qu'à l'attraction terrestre.

1°) Exprimer la valeur V_1 de la vitesse de ce satellite en fonction de la constante de gravitation k , de la masse m_T de la Terre et de r.
AN : $k = 6,67.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$; $m_T = 6.10^{24}\ kg$; $r = 7\,000\ km$.
2°) Un véhicule spatial S_2 masse m_2 sur la même orbite que S_1, ses moteurs étant éteints. A – t –il la même vitesse que S_1 ?
3°) L'astronaute de S_2 cherchent à rejoindre S_1 en restant sur la même orbite de rayon r. **Pour cela, ils allument un moteur auxiliaire, faisant passer la vitesse de V_1 à V_2.**
a) Indiquer la direction et l'orientation de la force $\vec{f}$ exercée par le moteur.
b) Exprimer la norme f en fonction de m_2, r, V_1 et V_2 .
Dans le cas où $V_1 - V_2$. est très inférieur à V_1 , on utilisera l'approximation :

$$V_2^2 - V_1^2 \approx 2V_1(V_2 - V_1)$$

Application numérique : $V_2 - V_1 = 5\ m.s^{-1}$; $m_2 = 2.10^3\ kg$.

……………………………………Résolution ……………………………………

1°) Expression de V_1 en fonction de k , m_T et r.

La force gravitationnelle est centripète :

$$F = k\frac{m \cdot m_T}{r^2} = m\frac{V^2}{r} \Longrightarrow \boxed{V_1 = \sqrt{k \cdot \frac{m_T}{r}}}$$

$$\text{AN : } V_1 = \sqrt{6,67.10^{-11} \times \frac{6.10^{24}}{7.10^6}} \approx 7\,600\ m.s^{-1}$$

d' où $\boxed{V_1 \approx 7\,600\ m.s^{-1}}$

2°) S_2 et S_1 étant sur une même orbite, ils ont la même vitesse.

3°) a) Direction et orientation de $\vec{f}$.

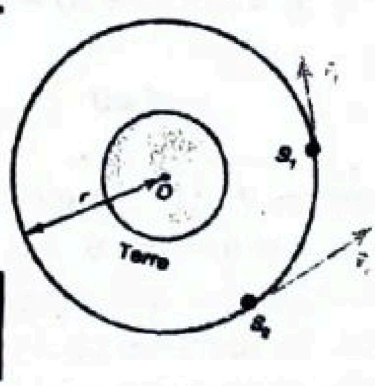
Pour maintenir S_2 sur l'orbite choisie, $\vec{f}$ doit être centripète.

b) Expression de f en fonction de m_2 , r , V_1 et V_2.

Appliquons le théorème du centre d'inertie sur S_2 :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m_2\vec{a} \Longrightarrow \vec{F} + \vec{f} = m_2\vec{a}$$

Projetons sur la normale orientée(repère de Frenet) :



$$F + f = m_2\frac{V_2^2}{r} \Longrightarrow f = m_2\frac{V_2^2}{r} - F$$

$$f = m_2\frac{V_2^2}{r} - m_2\frac{V_1^2}{r} \Longrightarrow \boxed{f = \frac{m_2}{r}\left(V_2^2 - V_1^2\right)}$$

Si $V_1 - V_2 << V_1$, on a : $V_2^2 - V_1^2 \approx 2V_1(V_2 - V_1)$

d' où $\boxed{f = \frac{2m_2 \cdot V_1(V_2 - V_1)}{r}}$

Valeur numérique de f .

$$f = \frac{2\times2.10^3\times7600\times5}{7.10^6} = 21,7\ N \Longrightarrow \boxed{f \approx 22\ N}$$

....

Problème 8 : (Eurin-gié , Exo 3.16 , page 60).

La Lune décrit une trajectoire quasi circulaire autour de la Terre, de rayon 384000 km. **Le champ gravitationnel à la surface de la Terre est égal à $9,8\ m.s^{-2}$ et le rayon terrestre est 6370 km.**

1°) Calculer la valeur du champ gravitationnel terrestre au centre de la Lune.

2°) Appliquer le théorème du centre d'inertie à la Lune dans le référentiel géocentrique. En déduire :

a) la vitesse de la Lune sur son orbite

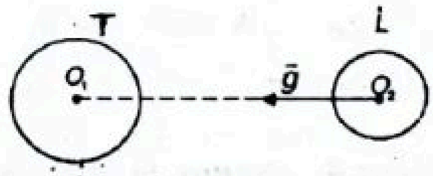
b) la période de révolution de la Lune autour de la Terre ; la comparer au mois lunaire.

....**Résolution** ....

1°) Champ gravitationnel au centre de la Lune.

D'après la loi de la gravitation :

$$F = k\frac{M_T \cdot m_L}{r^2} = m_L g \Longrightarrow g = k \cdot \frac{M_T}{r^2}$$



or : $g_0 = k\frac{M}{R^2} \Longrightarrow k.M = g_0R^2$

d' où $\boxed{g = g_0\left(\frac{R_T}{r}\right)^2}$ AN : $\boxed{g \approx 2,7.10^{-3}\ m.s^{-2}}$

2°) a) Vitesse de la Lune sur son orbite.

D'après le théorème du centre d'inertie :

$$F = m_L a_n \Longrightarrow m_L g = m_L\frac{V^2}{r}$$

d' où $\boxed{V = \sqrt{gr}}$ AN : $\boxed{V = 1018\ m.s^{-1}}$

b) Période de révolution de la Lune autour de la Terre.

Appliquons sur la Lune la 3ème loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{k \cdot M_T} = \frac{4\pi^2}{g_0 R_T^2} \Longrightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{R_T}\sqrt{\frac{r^3}{g_0}}}$$

AN : $T = \frac{6{,}28}{637.10^4}\sqrt{\frac{(384.10^6)^3}{9{,}8}} = 2{,}37.10^6\ s \Longrightarrow \boxed{T \approx 27{,}4\ jours}$

EXERCICES ET PROBLEMES COMPLEMENTAIRES

Problème 9.

1°) Montrer que la valeur du champ de pesanteur à la surface d'un astre ne dépend que du rayon R et de la masse volumique moyenne ρ de cet astre.

2°) Quelle est la valeur de g :

a) à la surface de la Lune ;

b) à la surface de Mars ?

On donne : Lune : $R_L = 1\,740\ km$; $\rho_L = 3\,360\ kg.m^{-3}$;

Mars : $R_M = 3\,380\ km$; $\rho_M = 3\,900\ kg.m^{-3}$;

Rép : 1°) $g_0 = \frac{4}{3}k.\pi\rho R \approx 2{,}79 \cdot 10^{-10}.\rho.R$;

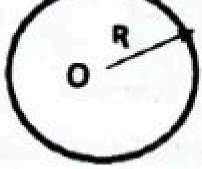
2°) a) $g_L = 1{,}6\ N/kg$; $g_M = 3{,}7\ N/kg$.

Résolution

1°) Valeur du champ de pesanteur à la surface d'un astre.

A la surface de l'astre ($z = 0$) :

$$g = k\frac{M}{R^2}$$



On a : $\rho = \frac{M}{V} \Longrightarrow M = \rho.V$

Le volume de l'astre est : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (sphère).

Donc : $M = \frac{4}{3}\rho\pi R^3$

d' où $\boxed{g = \frac{4}{3}k\pi\rho R}$ AN : $\boxed{g \approx 2{,}79.10^{-10}\rho R}$

2°) Valeur de g à la surface de la Lune et de Mars.

On trouve :

$$\boxed{g_L = 1,6\ N/kg} \qquad \boxed{g_M = 3,7\ N/kg}$$

Problème 10.

1°) Rappeler la loi de la gravitation universelle et, en admettant que le poids d'un corps est dû à l'attraction terrestre, exprimer l'intensité de la pesanteur au niveau du sol g_0, en fonction de R (rayon terrestre), M (masse de la terre) et k constante de gravitation.

2°) a) Exprimer g à l'altitude h en fonction de R, g_0 et h.

b) A quelle altitude h, l'intensité du poids d'un corps n'est-elle plus égale qu'à la moitié de sa valeur à la surface de la Terre ? (R = 6 400 km).

3°) a) Montrer que si h est petit devant R, g est une fonction linéaire de h.

b) De quelle altitude doit-on s'élever pour que l'intensité de la pesanteur diminue du millième de sa valeur ?

Rép: 1°) $g_0 = k\dfrac{M_T}{R_T^2}$; **2°) a)** $g = g_0\left(\dfrac{R_T}{R_T+h}\right)^2$; **b)** $h = R(\sqrt{2}-1) \approx 2650\ km$

3°) a) $g \approx g_0\left(1 - \dfrac{2h}{R_T}\right)$; **b)** $h = \dfrac{10^{-3}R}{2} = 3\,200\ m$

.. Résolution ....

1°) Rappelons la loi de la gravitation universelle.

Enoncé : « Deux corps ponctuels exercent l'un sur l'autre **des forces d'interaction** gravitationnelles attractives, dont l'intensité commune est proportionnelle au produit de leurs masses et inversement proportionnelle **au carré de leur distance »**.

$$\boxed{F = k\cdot\frac{m\cdot M}{r^2}}$$

où k, est la constante de gravitation : $k = 6,67.10^{-11}\ S.I$

Expression de l'intensité de la pesanteur au niveau du sol.

La force gravitationnelle terrestre est égale au poids d'un corps de masse m :

$$F = k\cdot\frac{m\cdot M}{r^2} = mg \Longrightarrow g = k\frac{M}{r^2} \quad ;\text{avec } r = R_T + h$$

Au niveau du sol ($h = 0$) d'où :

$$\boxed{g_0 = k\frac{M}{R_T^2}}$$

2°) a) Expression de g en fonction de R_T , g et h.

A l'altitude zéro ($h = 0$) :

$$g_0 = k\frac{M}{R_T^2} \Longrightarrow kM = g_0 . R_T^2$$

Finalement on obtient :

$$\boxed{g = g_0 \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2}}$$

b) Altitude à laquelle $P = \frac{P_0}{2}$.

L'intensité du poids d'un corps de masse m vaut :

- à la surface de la Terre : $P_0 = mg_0$;
- à l'altitude h : $P = mg$.

Comme $P = \frac{P_0}{2}$, on a : $g = \frac{g_0}{2}$

donc : $g_0 \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{g_0}{2} \Longrightarrow \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$$\left(\frac{R+h}{R}\right)^2 = 2 \Longrightarrow R + h = R\sqrt{2}$$

d' où $\boxed{h = R(\sqrt{2} - 1)}$ $\boxed{h = 2\,649,6\ km \approx 2\,650\ km}$

3°) a) Montrons que si $h << R_T$, g est linéaire.

A une altitude h : $g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2} = g_0\left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2}$

Si l'altitude est faible : $h << R$, on a : $\frac{h}{R} << 1$, on peut appliquer l'approximation :

$$(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$$

d' où $\boxed{g \approx g_0\left(1 - 2.\frac{h}{R}\right)}$

b) Altitude à laquelle g diminue du millième de sa valeur.

La variation de g étant très faible, alors l'altitude demandé est faible devant R

donc : $g \approx g_0\left(1 - 2.\frac{h}{R}\right) \Longrightarrow g_0 - g = 2g_0\frac{h}{R}$

or : $g_0 - g = \frac{1}{1\,000} g_0$;

donc : $\frac{1}{1\,000} g_0 = 2 g_0 \frac{h}{R} \Longrightarrow$ $\boxed{h = \frac{10^{-3} R}{2}}$ $\boxed{h = 3\,200\ m}$

Problème 11.

1°) On considère un point A situé sur l'équateur terrestre, lieu où l'accélération centripète est maximale. On suppose que la valeur du champ gravitationnel en ce point est $G = 9,80\ N.kg^{-1}$.

Calculer la valeur du champ de pesanteur en A.

On donne le rayon terrestre : $R = 6370\ km$.

2°) On considère un point A' situé à la latitude $\lambda = 45°$.

Calculer la mesure ε de l'angle aigu que fait la direction du champ gravitationnel $\vec{G}$ avec la direction du champ de pesanteur en ce point A'.

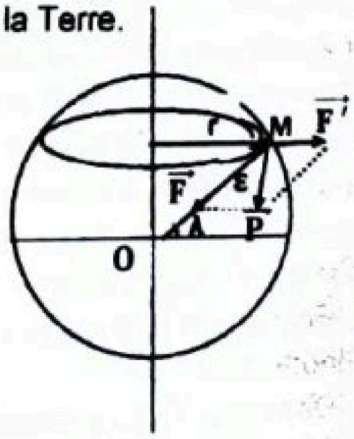
Pour l'application numérique de cette question, on prendra $g = 9,80\ m.s^{-2}$.

Résolution

1°) Calcul de la valeur du champ de pesanteur en A.

Le poids d'un corps situé à la latitude λ, est la résultante de deux forces :

- la force gravitationnelle $\vec{F} = m\vec{G}$, due à la Terre (attraction géocentrique) ;
- la force centrifuge $\vec{F}' = -m\vec{a}_n$, due à la rotation de la Terre.



On a : $\vec{P} = \vec{F} + \vec{F}' \Longrightarrow m\vec{g} = m\vec{G} - m\omega^2 r.\vec{n}$

Soit : $\vec{g} = \vec{G} - \omega^2 r.\vec{n}$

Le rayon du cercle décrit est : $r = R\cos\lambda$.

Donc : $\vec{g} = \vec{G} - \omega^2 R\cos\lambda.\vec{n}$

En projetant cette relation sur OM, on obtient :

$$g\cos\varepsilon = G - \omega^2 R\cos\lambda$$

A l'équateur : $\lambda = \varepsilon = 0°$, **alors** $\cos\lambda = \cos\varepsilon = 1$;

d' où $\boxed{g = G - R\omega^2}$

AN : • $\omega = \frac{2\pi}{T} \approx 7,27.10^{-5}\ rad.s^{-1}$.

• $g = 9,80 - 637.10^4.\ (7,27.10^{-5})^2 = 9,77\ N.kg^{-1}$

d' où $\boxed{g = 9,77\ N.kg^{-1}}$ $(1\ N.kg^{-1} = 1\ m.s^{-2})$.

2°) Calcul de la mesure de l'angle aigu ε .

D'après le théorème des sinus :

$$\frac{\sin\varepsilon}{F'} = \frac{\sin\lambda}{P} \Longrightarrow \sin\varepsilon = \frac{F'}{P}\sin\lambda$$

Or : $F' = m\omega^2 R\cos\lambda$ et $P = mg$

d' où $$\boxed{\sin\varepsilon = \frac{R\omega^2 \sin 2\lambda}{2g}}$$

AN : $\sin\varepsilon = \dfrac{637.10^4 \times (7{,}27.10^{-5})^2 \sin 90°}{2 \times 9{,}80} \approx 1{,}72.10^{-3}$

d' où $$\boxed{\varepsilon \approx 9{,}86°.10^{-2} \approx 6'}$$

....

Problème 12. (Bac, C, Lyon 1982).

Une fusée de masse m_0 = 100 tonnes est destinée à placer un satellite en orbite autour de la Terre.

1°) Calculer l'accélération de la fusée lorsqu'elle quitte le sol, sachant que les moteurs exercent une force verticale d'intensité $F = 2.10^6$ N. On néglige les forces de frottement ; au niveau du sol on prendra $g_0 = 9{,}8\ m.s^{-2}$.

2°) Le satellite de masse m a une orbite circulaire de rayon r dans le plan équatorial terrestre à l'altitude Z = 36000 km. On considère que la Terre est une **sphère de rayon R pour laquelle la répartition de la masse possède la symétrie sphérique.**

a) Calculer la valeur de l'intensité g du champ de pesanteur à l'altitude Z, en fonction de g_0, R et r. AN : R = 6400 km.

b) En précisant le référentiel d'étude, calculer la vitesse du satellite et sa période de révolution.

c) Déterminer le travail élémentaire de la force de pesanteur s'exerçant sur le satellite quand il s'éloigne d'une distance dr du centre de la Terre (dr est assez petit pour que la force soit considérée comme constante). En déduire l'expression de l'énergie potentielle E_P du satellite placé dans le champ de pesanteur terrestre. On choisira $E_P = 0$ à l'infini.

.... **Résolution** ....

1°) Accélération de la fusée lorsqu'elle quitte le sol.

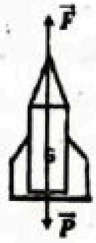
– Système : la fusée .

– Référentiel : terrestre (supposé galiléen).

- Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la force motrice $\vec{F}$.
- Appliquons le théorème du centre d'inertie (T.C.I.) :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m_0\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{F} = m_0\vec{a}$$

- Projection sur la verticale ascendante : :



$$F - m_0 g = m_0 a \Longrightarrow a = \frac{F - m_0 g}{m_0}$$

d' où $\boxed{a = \frac{F}{m_0} - g}$ AN : $\boxed{a = 10,2\, m.s^{-2}}$

2°) a) Expression de g en fonction de g_0, R et r.

Au sol (altitude zéro) : $g_0 = k\frac{M}{R^2} \Longrightarrow k.M = g_0.R^2$

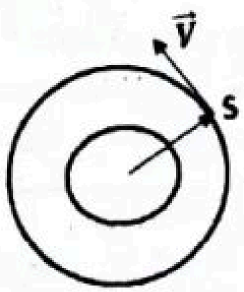
A l'altitude Z : $g = k\frac{M}{r^2}$;

d' où $\boxed{g = g_0\left(\frac{R}{r}\right)^2}$ AN : $\boxed{g = 0,22\, m.s^{-2}}$

b) Vitesse du satellite.

On étudie le mouvement des satellites au tour de la Terre dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.

Le mouvement étant circulaire uniforme :



$$a = a_n = g \Longleftrightarrow \frac{V^2}{r} = g \Longrightarrow V^2 = g\,r$$

Or : $g = g_0 \cdot \frac{R^2}{(R+z)^2}$ et $r = R + z$

d' où $\boxed{V = R\sqrt{\frac{g_0}{R+Z}}}$ AN : $\boxed{V = 3,08\, m.s^{-1}}$

Période de révolution du satellite.

La période T du satellite est la durée d'une révolution au tour de Terre :

$$S = 2\pi(R+Z) = V\,T \Longrightarrow T = \frac{2\pi(R+Z)}{V}$$

d' où $\boxed{T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+Z)^3}{G_0}}}$ AN : $\boxed{T = 86600\, s \approx 1\, jour}$

c) Travail élémentaire de la force de pesanteur.

Quand le satellite s'éloigne d'une distance dr du centre de la Terre, le travail élémentaire de la force de pesanteur est :

$$dW = -P.dr \;;\; \text{or : } P = mg = mg_0\frac{R^2}{r^2}\;;$$

d' où : $\boxed{dW = -mg_0R^2 \cdot \frac{dr}{r^2}}$

Expression de l'énergie potentielle du satellite.

La variation de l'énergie potentielle de pesanteur est égale à l'opposée du travail du poids :

$$dE_P = -dW \Longrightarrow dE_P = mg_0R^2 \cdot \frac{dr}{r^2}$$

Soit : $E_P = mg_0R^2\int\frac{dr}{r^2} \Longrightarrow E_P = -mg_0R^2\int d\left(\frac{1}{r}\right)$

$$E_P = -mg_0R^2\frac{1}{r} + C$$

Déterminons la constante C.

Quand $r \to \infty$, $E_P = 0 \Longrightarrow C = 0.$

L'énergie potentielle de pesanteur a donc pour expression :

$\boxed{E_P = -mg_0\frac{R^2}{r}}$ ou $\boxed{E_P = -mg_0\frac{R^2}{R+Z}}$

Problème 13 *. (Extrait du Bac, SM , Guinée 2010).**

Un satellite artificiel de centre d'inertie S tourne autour de la Terre. Son orbite est assimilable à un cercle de même centre O que celui de la Terre. Le point S est à une altitude constante h.

a) Montrer que le mouvement circulaire de S est uniforme.

Dans quel repère ce résultat est-il valable ?

b) Donner le module V de la vitesse de S en fonction de R_T, rayon de la Terre, h et g_0 intensité du champ gravitationnel à la surface de la Terre.

c) Exprimer la période T de révolution du satellite en fonction de R_T, h et g_0.

Montrer que :: $\frac{T^2}{(R_T+h)^2} = constate$;

ce qui constitue un cas particulier de la 3ème loi de Kepler.

d) On donne : $g_0 = 10$ m/s² ; $R_T = 6400$ km ; h = 1 000 km. Calculer V et T.

.... **Résolution** ....

a) Montrons que le mouvement circulaire du satellite est uniforme.

– Système : le satellite .

– Référentiel : géocentrique (supposé galiléen).

– Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ est seule force appliquée.

- Appliquons le théorème du centre d'inertie (T.C.I.) :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow m\vec{g} = \vec{a}$$
$$\vec{a} = \vec{g}$$

- Projection dans le repère de Frenet: :

$$a_t = 0 \text{ et } a_n = g$$

Or : $a_t = \frac{dV}{dt} = 0 \Longrightarrow V = C^{te}$

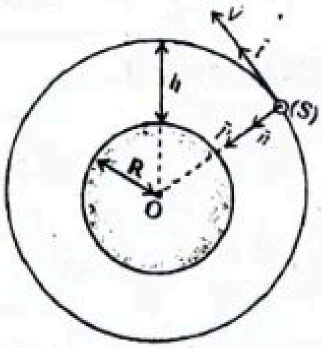
Le mouvement circulaire de S est bien uniforme.

Ce resultat n'est valable que dans le repère géocentrique, supposé galiléen.

b) Expression du module V de la vitesse en fonction de R_T , h et g_0.

Le mouvement étant circulaire uniforme :

$$a = a_n = g \Longleftrightarrow \frac{V^2}{r} = g \Longrightarrow V^2 = g\,r$$



Or : $g = g_0 \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2}$ et $r = R + h$

d' où $$\boxed{V = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}}$$

b) Expression de la période de S en fonction de R_T , h et g_0.
1ère méthode.

Le mouvement étant circulaire uniforme :

$$S = 2\pi(R+h) = V\,T \Longrightarrow T = \frac{2\pi(R+h)}{V}$$

d' où $$\boxed{T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{G_0}}}$$

2ème méthode.

Par définition : $T = \frac{2\pi}{\omega}$;

or : $\omega = \frac{V}{r} = \frac{V}{R+h}$; donc : $T = \frac{2\pi(R+h)}{V}$

En remplaçant V par son expression, on obtient :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g_0}}}$$

Montrer que ; $\frac{T^2}{(R_T+h)^2} = constate$;

En élevant T au carré on obtient :

$$T^2 = \frac{4\pi^2(R+h)^3}{g_0 R^2} \Longrightarrow \frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{g_0 R^2}$$

or : $r = R + h$ et $g_0 R^2 = k.M$;

d' où $$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{k.M} = C^{te}}$$ **(3ème loi de Kepler).**

d) Calcul de V et de T.

- $V = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}} \Longrightarrow \boxed{V = 7\,440\, m.s^{-1}}$
- $T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g_0}} \Longrightarrow \boxed{T \approx 1\,h\,44\,min\,10\,s}$

....

Problème 14. (Bac, série C, Caen 1982).

1°) Un satellite assimilé à un point matériel, décrit d'un mouvement uniforme une orbite circulaire à l'altitude h = 400 km. **L'orbite est dans le plan de l'équateur.**

a) Déterminer la vitesse V du satellite dans le repère géocentrique.

b) Déterminer **dans le même repère, la période** T **et la vitesse angulaire** ω_0 du satellite.

c) Le satellite se déplace vers l'est. Déterminer l'intervalle de temps qui sépare deux passages successifs du satellite à la verticale d'un point donné de l'Equateur (la vitesse angulaire de rotation de la Terre dans le repère géocentrique est $\omega_T = 7,29.10^{-5}\, rad.s^{-1}$, et on rappelle que dans ce repère, la vitesse d'un point de l'équateur est dirigée vers l'est).

2°) Un satellite géostationnaire reste en permanence à la verticale d'un même point du globe. Son orbite est dans le plan de l'Equateur.

a) Quelle est la vitesse angulaire de ce satellite dans le repère géocentrique ?

b) Calculer le rayon de son orbite. Données : rayon de la Terre R = 6370 km ; $g_0 = 9{,}8\ m.s^{-2}$.

.... **Résolution** ....

1°) a) Déterminons la vitesse V du satellite.

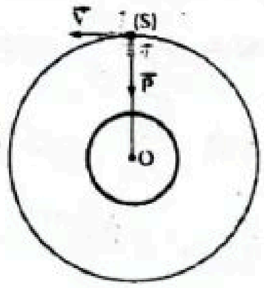
Le mouvement étant circulaire uniforme :

$$a = a_n = g \iff \frac{V^2}{r} = g \implies V^2 = g\,r$$

Or : $g = g_0 \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2}$ et $r = R + h$

d' où $\boxed{V = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}}$ AN : $\boxed{V = 7{,}66\ km.s^{-1}}$

a) Déterminons la période T du satellite.



Par définition : $T = \frac{2\pi}{\omega}$;

or : $\omega = \frac{V}{r} = \frac{V}{R+h}$; donc : $T = \frac{2\pi(R+h)}{V}$

En remplaçant V par son expression, on obtient :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g_0}}}$$ **AN :** $\boxed{T \approx 5\,550\ s = 1\ h32\ min\ 30\ s\ ;}$

Vitesse angulaire ω_0 du satellite.

On a : $\omega_0 = \frac{V}{r} = \frac{V}{R+h} \implies \boxed{\omega_0 = \frac{V}{R+h}}$

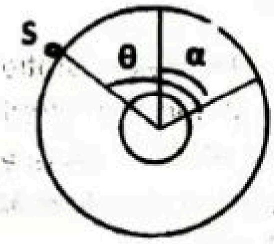
$$\boxed{\omega_0 \approx 1{,}13 \cdot 10^{-3}\ rad \cdot s^{-1}}$$

c) Intervalle de temps qui sépare deux passages du satellite à la verticale d'un point de l'Equateur.

Soit Δt le temps correspondant.

Pendant ce temps :

- la Terre tourne de : $\alpha = \omega_T.\Delta t$;
- le satellite tourne de : $\theta = \omega_0.\Delta t$.



On a : $\theta = \alpha + 2\pi \Longrightarrow \omega_0.\Delta t = \omega_T.\Delta t + 2\pi$

d' où $\boxed{\Delta t = \dfrac{2\pi}{\omega_0 - \omega_T}}$ AN : $\boxed{\Delta t \approx 5\,940\ s}$

2°) a) Vitesse angulaire d'un satellite géostationnaire.

Pour que le satellite paraisse immobile à un observateur terrestre, il faut que le satellite et la Terre tournent dans le même sens autour de l'axe des pôles avec la même vitesse angulaire.

d' où $\boxed{\omega = \omega_T = 7{,}29.10^{-5}\ rad.s^{-1}}$

b) Calcul du rayon de son orbite.

On a : $\omega = \omega_T = \dfrac{V}{r} \Longrightarrow V = r.\omega_T \Longleftrightarrow V^2 = r^2.\omega_T^2$

Or : $V = R\sqrt{\dfrac{g_0}{r}} \Longleftrightarrow V^2 = \dfrac{g_0.R^2}{r}$

donc : $r^2.\omega_T^2 = \dfrac{g_0.R^2}{r} \Longrightarrow r^3 = \dfrac{g_0.R^2}{\omega_T^2}$

d' où $\boxed{r = \sqrt[3]{\dfrac{g_0.R^2}{\omega_T^2}}}$ AN : $\boxed{r \approx 42\,100\ km}$

Problème 15. * .**

1°) Un satellite décrit au tour de la Terre une trajectoire circulaire à une altitude h = 650 km. On prendra : $g_0 = 9{,}8\ m.s^{-2}$.

a) Montrer que la vitesse du satellite est constante.

b) Calculer dans le repère géocentrique la vitesse linéaire V et la période T de révolution de ce satellite.

2°) Par suite des frottements dans l'atmosphère l'altitude du satellite décroît de

Après le $n^{ième}$ tour, le satellite est à l'altitude h_n , à la fin de l$(n+1)^{ième}$ tour l'altitude devient :

$$h_{n+1} = h_n - \frac{h_n}{1000} \Longrightarrow h_{n+1} = \frac{999}{1000} h_n$$

Les altitudes décroissent en progression géométrique de 1^er^ terme h_0 et de raison $q = \frac{999}{1000}$

Donc : $h_n = h_0 \left(\frac{999}{1000}\right)^n$; avec $h_0 = h.$

3°) Nombre de tours effectués pour que $h_n = 620\ km.$

On a : $lnh_n = lnh_0 + n.ln\frac{999}{1000} \Longrightarrow n = \frac{1}{ln0,999}(lnh_n - lnh_0)$

d' où $$\boxed{n = \frac{1}{ln0,999} ln\left(\frac{h_n}{h_0}\right)} \Longrightarrow \boxed{n = 47\ tours}$$

....

Problème 16. * (Extrait du Bac, SE, Guinée 2002).**

1°) Un corps de masse m décrit à vitesse constante autour d'un astre de masse M, une orbite circulaire de rayon R.

Trouver une relation entre la période T de ce corps et le rayon R (loi de Kepler).

2°) Application. La Terre décrit autour du soleil une orbite sensiblement circulaire de 150.10^6 km de rayon en 365 jours. La Lune décrit autour de la Terre une orbite de 380.10^3 km de rayon en 28 jours environ.

Déduire de ces données, un ordre de grandeur de la masse du soleil.

On donne : masse de la Terre *:* $M_T = 6.10^{24}\ kg.$

Réponses : 1°) $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{k.M} = cste$; ***2°)*** $M_S \approx 2.10^{30}\ kg.$

.... **Résolution** ....

Relation entre la période T et le rayon R de l'orbite.

La masse m est soumise à la force de gravitation due à l'astre. Cette force est normale et centripète :

$$F = k.\frac{M.m}{R^2} = m\frac{V^2}{R} = m\omega^2 R \Longrightarrow \omega^2 = \frac{k.M}{R^3}$$

Or : $T = \frac{2\pi}{\omega} \Longrightarrow \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$

Donc : $\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k.M}{R^3} \Longrightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{k.M}$

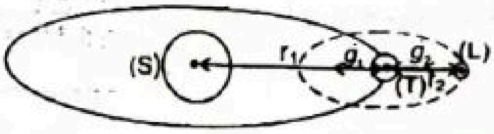
d' où $\boxed{\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{4\pi^2}{k.M} = C^{te}}$ **(3ème loi de Kepler).**

2°) Masse du soleil.

Appliquons la 3ème loi de Kepler à la Terre et à la Lune.

• La Terre tourne autour du soleil :

$$\frac{T_T^2}{R_T^3} = \frac{4\pi^2}{k.M_S} \Longrightarrow \frac{4\pi^2}{k} = M_S \cdot \frac{T_T^2}{R_T^3} \quad (1)$$



• La Lune est un satellite naturel de la Terre :

$$\frac{T_L^2}{R_L^3} = \frac{4\pi^2}{k.M_T} \Longrightarrow \frac{4\pi^2}{k} = M_T \cdot \frac{T_L^2}{R_L^3} \quad (2)$$

En identifiant (1) et (2) on obtient :

$$M_S \cdot \frac{T_T^2}{R_T^3} = M_T \cdot \frac{T_L^2}{R_L^3} \Longrightarrow \boxed{M_S = M_T \times \left(\frac{R_T}{R_L}\right)^3 \times \left(\frac{T_L}{T_T}\right)^2}$$

AN: $M_S = 6.10^{24} \times \left(\dfrac{150.10^6}{380.10^3}\right)^3 \times \left(\dfrac{28}{365}\right)^2 = 2,17.10^{30}\ kg.$

d' où $\boxed{M_S \approx 2,.10^{30}\ kg}$

....

Problème 17. ***

Les planètes et le Soleil sont considérés comme des corps **à symétrie sphérique.** Venus est une **planète de masse $M_V = 4,83.10^{24}$ kg, de rayon $R_V = 6,26.10^6\ m$,** elle décrit autour du Soleil une trajectoire circulaire de rayon $r_V = 1,08.10^{11}\ m$.

1°) Calculer la norme du vecteur champ de gravitation à la surface de Venus.

2°) Sachant que la trajectoire circulaire de la Terre autour du Soleil a un rayon $r_T = 1,5.10^{11}\ m$, calculer en appliquant la 3ème loi de Kepler ;

a) la période de révolution de Venus autour du Soleil ;

b) la masse M_S du Soleil.

3°) Comparer le champ de gravitation dû au Soleil sur la surface de Venus au champ de gravitation dû à la planète elle-même.

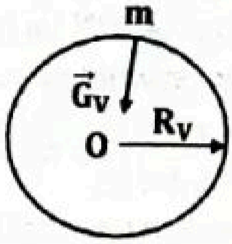
Rép : **1°)** $G_V = 8,22\ m.s^{-2}$; **2°) a)** $T_V = 223,15\ jours$; **b)** $M_S \approx 2.10^{30}\ kg$.

…………………………………… **Résolution** ……………………………………

1°) Champ de gravitation à la surface de Venus.

Soit m une masse placée à la surface de Venus ; elle est soumise à la force gravitationnelle :

$$F = k\ \frac{M_V \cdot m}{R_V^2} = mG_V \Longrightarrow \boxed{G_V = k \cdot \frac{M_V}{R_V^2}}$$



AN : $G_V = 6,67.10^{-11} \times \dfrac{4,83.10^{24}}{(6,26.10^6)^2} = 0,822\ m.s^{-2}$

$$\boxed{G_V = 0,822\ m.s^{-2}}$$

2°) a) Période de révolution de Venus .

Appliquons la 3ème loi de Kepler à la Terre et au Venus..

• La Terre tourne autour du soleil :

$$\frac{T_T^2}{r_T^3} = \frac{4\pi^2}{k.M_S} \Longrightarrow \frac{4\pi^2}{k} = M_S \cdot \frac{T_T^2}{r_T^3} \qquad (1)$$

• Venus tourne autour du soleil ::

$$\frac{T_V^2}{r_V^3} = \frac{4\pi^2}{k.M_S} \Longrightarrow \frac{4\pi^2}{k} = M_S \cdot \frac{T_V^2}{r_V^3} \qquad (2)$$

Par identification, on obtient :

$$\frac{T_V^2}{R_V^3} = \frac{T_T^2}{R_T^3} \Longrightarrow \boxed{T_V = T_T \cdot \sqrt{\left(\frac{r_V}{r_T}\right)^3}}$$

AN : $T_V = 365,25 \times \sqrt{\left(\dfrac{1,08.10^{11}}{1,5.10^{11}}\right)^3} = 223,146\ jours$

d' où $\boxed{T_V \approx 223,15\ jours}$

b) Calcul de la masse du soleil.

D'après la 3ème loi de Kepler :

$$\frac{T_V^2}{r_V^3} = \frac{4\pi^2}{k.M_S} \Longrightarrow \boxed{M_S = \frac{4\pi^2 . r_V^3}{k \cdot T_V^2}}$$

AN : • Exprimons T_V en secondes : $T_V = 223,15 \times 86400 = 19\,280\,160\ s.$

• $M_S = \dfrac{4(3,14)^2 \times (1,08.10^{11})^3}{6,67.10^{-11} \times (19\,280\,160)^2} = 2.10^{30}\ kg$

d' où $\boxed{M_S = 2.10^{30}\ kg}$

3°) Comparons les deux champs de gravitation à la surface de Venus.

On a : $\dfrac{G_V}{G_S} = \dfrac{M_V}{M_S} \times \left(\dfrac{r_V - R_V}{R_V}\right)^2$

Comme $R_V << r_V$, alors : $r_V - R_V \approx r_V$;

d' où $\dfrac{G_V}{G_S} = \dfrac{M_V}{M_S} \times \left(\dfrac{r_V}{R_V}\right)^2 = 720 \Longrightarrow \boxed{G_V = 720 G_S}$

Le champ créé par le Soleil est 720 fois plus faible que le champ créé par la planète elle-même à sa surface. On peut donc négliger l'attraction solaire par rapport à l'attraction de la planète.

....

Problème 18. *.**

Un satellite de masse $m = 1\,600$ kg décrit une orbite circulaire située dans le plan équatorial **de rayon** $r = 7\,000$ **km,**

1°) Calculer la vitesse V_1 du satellite.

2°) Le satellite se déplace toujours sur la même orbite, mais avec une vitesse constante V_2 ($V_2 > V_1$) , le satellite est alors soumis en plus de l'attraction terrestre à une force $\vec{f}$ produite par un moteur auxiliaire.

a) Préciser la direction et le sens de $\vec{f}$.

b) Exprimer f, en fonction de m, V_1 et V_2.

c) Calculer la valeur numérique de f sachant que $V_2 - V_1 = 120\ m.s^{-1}$.

On donne : • constante de gravitation $k = 6,67.10^{-11}\ SI$;

• masse de la Terre $M = 6.10^{24}\ kg$

Réponses : 1°) $V_1 = \sqrt{\dfrac{K.M}{r}} = 7,6\ km.s^{-1}$;

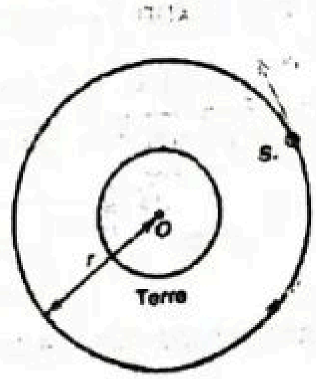
2°) b) $f = \dfrac{m \cdot \Delta V.(V_2 + V_1)}{r}$; **c)** $f \approx 420\ N$.

.... **Résolution** ....

1°) Vitesse V_1 du satellite.

Le satellite est soumis à la force gravitationnelle terrestre. Cette force est centripète :

$$F = k.\frac{M.m}{r^2} = m\frac{V_1^2}{r} \Longrightarrow V_1^2 = k.\frac{M.}{r}$$



d' où $$\boxed{V_1 = \sqrt{\frac{k.M}{r}}}$$

AN : $V_1 = \sqrt{\frac{6{,}67.10^{-11} \times 6.10^{24}}{7.10^6}} = 7{,}56.10^3\ m.s^{-1}$

d' où $$\boxed{V_1 \approx 7{,}6.10^3\ m.s^{-1}}$$

2°) a) Précisons la direction et le sens de $\vec{f}$.

Si la vitesse croît, le satellite à tendance à se placer sur une autre orbite plus éloignée. Pour le maintenir sur son orbite, il faut accroître la force centripète.

D'où on en déduit :

- la direction de $\vec{f}$: celle de la normale ;
- le sens : centripète.

b) Exprimons f en fonction de m , V_1 et V_2 .

Appliquons le théorème du centre d'inertie au satellite :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Projetons sur la normale orientée :

$$F + f = m\frac{V_2^2}{r} \Longrightarrow f = m\frac{V_2^2}{r} - F$$

$$f = m\frac{V_2^2}{r} - m\frac{V_1^2}{r} \Longrightarrow f = \frac{m}{r}(V_2^2 - V_1^2)$$

d' où $$\boxed{f = \frac{m \cdot \Delta V}{r}(V_2 + V_1)}$$

c) Calculons la valeur numérique de f .

AN : $f = \frac{1\,600 \times 120}{7.10^6}(7720 + 7600) = 420{,}20\ N$

d' où $$\boxed{f \approx 420\ N}$$

....

Problème 19. ***

On considère un satellite en rotation sur une orbite circulaire autour de la Terre.
L'altitude du satellite est h = 3 200 km.

1°) Calculer la vitesse de ce satellite.

2°) Calculer le temps nécessaire pour faire un tour de la Terre.

3°) Quelle devrait être l'altitude h' du satellite pour qu'il paraisse immobile à un observateur terrestre ? Le plan de l'orbite est celui de l'équateur.

4°) L'énergie potentielle de pesanteur du système (Terre-satellite) est :

$$E_P = -\frac{mg_0.R^2}{R+h}$$

si m est la masse du satellite ; $E_P = 0$ quand $h = \infty$.

a) **Donner en fonction de** m, g_0, R et h, **l'expression de l'énergie mécanique du système.**

b) Quelle énergie faut-il fournir au satellite de masse 1 tonne, pour le faire passer de l'orbite d'altitude h à l'orbite d'altitude h' ?

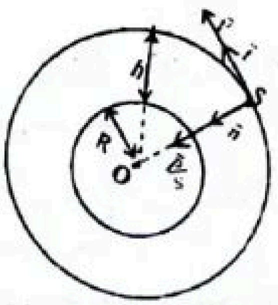
On donne : Rayon de la Terre : R = 6 400 km ; $g_0 = 9,81\ m.s^{-2}$.

.... **Résolution** ....

1°) Vitesse du satellite.

Le mouvement étant circulaire uniforme :

$$a = a_n = g \Longleftrightarrow \frac{V^2}{r} = g \Longrightarrow V^2 = g\,r$$



Or : $g = g_0 \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2}$ et $r = R + h$

d'où $\boxed{V = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}}$ AN : $\boxed{V \approx 6,47.10^3\ m.s^{-1}}$

2°)Temps nécessaire pour faire un tour de la Terre.

Le temps mis pour faire un tour de la Terre correspond à la période de révolution du satellite.

Le mouvement étant circulaire uniforme :

$$S = 2\pi(R+h) = V\,T \Longrightarrow T = \frac{2\pi(R+h)}{V}$$

d'où $\boxed{T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g_0}}}$ AN : $\boxed{T \approx 9\,320\ s = 2\ h\ 35\ min\ 20\ s}$

3°) L'altitude h' du satellite pour qu'il paraisse immobile à un observateur terrestre.

Pour que le satellite paraisse immobile , il faut que sa période de révolution soit égale à la période de rotation de la Terre. Il s'agit alors d'un satellite géostationnaire de période $T' = 24\ h = 86\,400\ s$:

$$T' = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h')^3}{g_0}} \Longrightarrow \boxed{h' = \sqrt[3]{\frac{g_0 . T^2 . R^2}{4\pi^2}} - R}$$

$$\text{AN : } h' = \sqrt[3]{\frac{9{,}8 \times (86\,400)^2 \times (640 \cdot 10^4)^2}{4 \cdot (3{,}14)^2}} - 64 \cdot 10^5 \approx 36.10^6\ m$$

d' où $\boxed{h' \approx 36\,000\ km}$

4°) a) Expression de l'énergie mécanique en fonction de m, g_0, R et h.

L'énergie mécanique du satellite est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle : $E_m = E_C + E_P$

On a : $E_P = -\dfrac{mg_0 . R^2}{R+h}$ et $E_C = \dfrac{1}{2}mV^2$

or : $V^2 = g_0 \cdot \dfrac{R^2}{R+h}$; alors : $E_C = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{mg_0 . R^2}{R+h}$

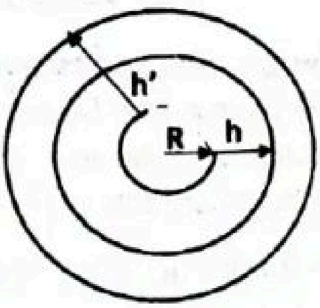
d'où $\boxed{E_m = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{mg_0 . R^2}{R+h}}$

b) Energie à fournir au satellite pour qu'il passe de l'orbite d'altitude h à l'orbite d'altitude h'.

Le système étant conservatif, l'énergie ΔE fournie est telle que :

$$E_m + \Delta E = E'_m \Longrightarrow \Delta E = E'_m - E_m$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot \frac{mg_0 . R^2}{R+h} - \frac{1}{2} \cdot \frac{mg_0 . R^2}{R+h'}$$



d' où $\boxed{\Delta E = \dfrac{1}{2} mg_0 R^2 \left(\dfrac{1}{R+h} - \dfrac{1}{R+h'}\right)}$

$$\text{AN : } \Delta E = \frac{1}{2} 10^3 \times 9{,}8 \times (64.10^5)^2 \times 10^{-6} . \left(\frac{1}{6{,}4+3{,}2} - \frac{1}{6{,}4+36}\right) \approx 1{,}62.10^{10} J$$

d' où $\boxed{\Delta E \approx 1{,}62.10^{10}\,J}$

Problème 20. ***.

1°) Un satellite supposé ponctuel, de masse m = 10^3 kg, décrit une orbite circulaire d'altitude h autour de la Terre assimilée à une sphère de rayon R

a) Etablir l'expression de la norme g du vecteur champ de gravitation à l'altitude h en fonction de sa valeur g_0 au niveau du sol, de R et de h.

b) Montrer que le mouvement de ce satellite est uniforme.

c) Etablir l'expression de la vitesse V du satellite et celle de sa période T, en fonction de g_0, R et h.

Calculer V et T, sachant que $g_0 = 9{,}80\ m.s^{-2}$; $R = 6\,400\ km$; $h = 600\ km$.

2°) Déterminer l'expression de l'énergie cinétique du satellite en fonction de m, R, g_0 et h.

3°) L'énergie potentielle de pesanteur du satellite est :

$$E_P = -\ \frac{k\,m.M}{R+h}$$

avec k constante de gravitation universelle et M la masse de la terre.

a) Justifier le signe négatif de l'énergie potentielle.

b) Déterminer l'expression de l'énergie mécanique du satellite ; la comparer à celle de l'énergie potentielle puis à celle de l'énergie cinétique.

4°) On fournit au satellite un supplément d'énergie $\Delta E = +7\,697.10^5 J$. Il prend alors une nouvelle orbite circulaire. Déterminer :

a) sa nouvelle énergie cinétique et sa vitesse ;

b) sa nouvelle énergie potentielle et son altitude.

Peut-il être considéré comme géostationnaire ? Justifier.

Résolution

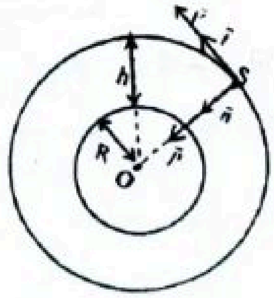
1°) a) Expression de g , en fonction de R, g_0 et h.

Le satellite (S) n'est soumis qu'à la seule attraction terrestre.

$$F = k\cdot\frac{m\cdot M}{r^2} = mg \Longrightarrow g = k\frac{M}{r^2} \quad ; \text{avec } r = R+h$$

Au niveau du sol ($h = 0$) donc :

$$g_0 = k\frac{M}{R^2} \Longrightarrow k.M = g_0R^2$$



d' où $\boxed{g = g_0\,\frac{R^2}{(R+h)^2}}$

b) Montrons que le mouvement du satellite est uniforme.

Appliquons au satellite le théorème du centre d'inertie (T.C.I.) :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow m\vec{g} = \vec{a}$$
$$\vec{a} = \vec{g}$$

- Projection dans le repère de Frenet : :

$$a_t = 0 \text{ et } a_n = g$$

Or : $a_t = \dfrac{dV}{dt} = 0 \Longrightarrow V = C^{te}$

Le mouvement circulaire de S est uniforme.

c) Expression de la vitesse et celle de la période.

On obtient :

$$\boxed{V = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}} \quad \text{et} \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g_0}}}$$

AN : $\boxed{V = 7,57.10^3\ m.s^{-1}}$ $\boxed{T = 5,805.10^4\ s \approx 16\ h\ 7\ min\ 30\ s}$

2°) Expression de l'énergie cinétique en fonction de m, R, g_0 et h.

On a : $E_C = \dfrac{1}{2}mV^2$

or : $V^2 = g_0 \cdot \dfrac{R^2}{R+h}$; alors : $\boxed{E_C = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{mg_0.R^2}{R+h}}$

3°) a) Justification du signe négatif de l'énergie potentielle.

Le signe négatif de l'énergie potentielle résulte de la convention $E_P(\infty) = 0$ et du fait que l'énergie potentielle d'un corps pesant décroît quand il se rapproche du sol.

b) Expression de l'énergie mécanique du satellite.

On a : $E_m = E_C + E_P \Longrightarrow E_m = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{mg_0.R^2}{R+h} - \dfrac{mg_0.R^2}{R+h}$

d'où $\boxed{E_m = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{mg_0.R^2}{R+h}}$

Comparons E_m à E_C et E_m à E_P.

Il en résulte que : $E_m = -E_C$ et $E_m = \dfrac{1}{2} E_P$

d' où $\boxed{E_m = -E_C = \frac{1}{2} E_P}$ ou $\boxed{E_P = -2E_C = 2E_m}$

4°) a) **Nouvelle énergie cinétique .**

• $E'_C = -E'_m = -E_m - \Delta E \Longrightarrow E'_C = (286720 - 7697).10^5$

d' où $\boxed{E'_C = 2,79.10^{10} J}$

• **Vitesse correspondante :**

$$V' = \sqrt{\frac{2E'_C}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 2,79.10^{10}}{10^3}} \Longrightarrow \boxed{V' \approx 7,47.10^3\ m.s^{-1}}$$

b) Nouvelle énergie potentielle.

• $E'_P = 2E'_m = -2E'_C \Longrightarrow E'_P = -5,58.10^{10} J$

d'où $\boxed{E'_P = -5,58.10^{10} J.}$

• **Nouvelle altitude h' :**

$$E'_P = -\frac{mg_0.R^2}{R+h'} \Longrightarrow h' = -\frac{mg_0.R^2}{E'_P} - R$$

$$h' = -\frac{10^3 \times 9,8 \times .(64.10^5)^2}{-5,58.10^{10}} - 64.10^5 = 793,69.10^3\ m$$

d' où $\boxed{h' \approx 794\ km}$

Ce satellite ne peut être considéré comme géostationnaire, car les satellites géostationnaire évoluent dans le plan équatorial à une altitude de **36 000 *km*.**

....

Problème 21. * .**

Un satellite (S) de masse m décrit d'un mouvement uniforme une orbite circulaire de rayon r autour de la Terre, assimilée à une sphère homogène de centre O, de masse M et de rayon R. On suppose que (S) n'est soumis qu'à la seule attraction terrestre.

1°) Etablir, dans le référentiel géocentrique, l'expression de la vitesse V du satellite et celle de sa période T en fonction de g_0 , R et r. Calculer V et T.
On donne : $R = 6400\ km$; $r = 8\,000\ km$; $g_0 = 9,80\ m.s^{-2}$.

2°) a) A partir du travail élémentaire $dW = \vec{F}.\vec{dr}$ de la force de gravitation terrestre sur le satellite, montrer que le travail de cette force, lors du **déplacement** du sol jusqu'à l'orbite de rayon r est donné par :

$$W = mg_0R^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

b) En déduire l'expression de l'énergie potentielle du système Terre-satellite en fonction de m, g_0, R et r. (On choisira le niveau du sol comme état de référence pour l'énergie potentielle).

c) Exprimer l'énergie cinétique E_C de (S) en fonction de m, g_0, R et r.
En déduire l'expression de l'énergie mécanique E_m.

3°) Il se produit une très faible variation **dr** du rayon **r**, telle que la trajectoire puisse toujours être considérée comme circulaire.

a) Exprimer la variation **dV** de la vitesse qui en résulte et montrer que l'on a :

$$dV = -\frac{\pi}{T}dr.$$

b) La variation dr est en réalité due au travail $dW(\vec{f})$ des forces de frottement exercée par les couches raréfiées de l'atmosphère pendant le déplacement. Du signe de $dW(\vec{f})$, déduire l'effet de ces forces sur l'altitude et la vitesse et la vitesse de (S).

.... **Résolution** ....

1°) Expression de la vitesse et celle de la période.

On obtient :

$$\boxed{V = R\sqrt{\frac{g_0}{r}}} \quad \text{et} \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{r^3}{g_0}}}$$

AN : $\boxed{V = 7\,083\ m.s^{-1}}$ $\boxed{T \approx 70930\ s \approx 19\ h\ 42\ min\ 9\ s}$

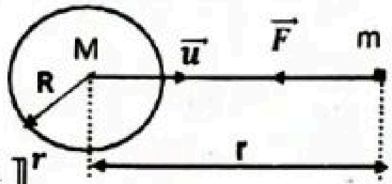
2°) a) Montrons que $W = mg_0R^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$.

La force de gravitation terrestre sur le satellite est : $\vec{F} = -k\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{u}$

Pour un déplacement élémentaire de dr, $\vec{F}$ effectue le travail :

$dW = \vec{F}.\vec{dr} = -k\dfrac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}.\vec{dr}$

$dW = -k\dfrac{M\cdot m}{r^2}dr \Longrightarrow W = -kM.m\iint_R^r \dfrac{dr}{r^2}$



$W = kM.m\iint_R^r d\left(\dfrac{1}{r}\right) \Longrightarrow W = kM.m\left[\!\left[\dfrac{1}{r}\right]\!\right]_R^r$

$W = kM.m\left[\!\left[\dfrac{1}{r}\right]\!\right]_R^r = kM.m\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R}\right)$;

or : $g_0 = k\dfrac{M}{R^2} \Longrightarrow k.M = g_0R^2$;

d' où $\boxed{W = mg_0R^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)}$

b) Déduisons l'expression de l'énergie potentielle.

On a : $W = -\Delta E_P = E_P(R) - E_P(r)$

or : $E_P(R) = 0$ (état de référence) ;

donc : $W = -E_P(r) \Longrightarrow E_P(r) = -W$

d' où $\boxed{E_P = mg_0R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)}$

c) Expression de l'énergie cinétique, en fonction de m, g_0 , R et r.

On a : $E_C = \dfrac{1}{2}mV^2$, or : $V^2 = g_0 \cdot \dfrac{R^2}{r}$;

d' où $\boxed{E_C = \dfrac{mg_0R^2}{2r}}$

Déduisons l'expression de l'énergie mécanique E_m du système.

$E_m = E_C + E_P = \dfrac{mg_0R^2}{2r} + mg_0R^2\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{r}\right) \Longrightarrow E_m = mg_0R^2\left(\dfrac{1}{2r} + \dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{r}\right)$

d' où $\boxed{E_m = mg_0R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2r}\right)}$

3°) a) Expression de la variation dV de la vitesse.

On a : $V = R\sqrt{\frac{g_0}{r}} \Longrightarrow V = R\sqrt{g_0}.r^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{dV}{dr} = R\sqrt{g_0}.r^{-\frac{3}{2}} \Longrightarrow \boxed{dV = -\frac{1}{2}R\sqrt{g_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^3}}dr}$$

Montrons que $dV = -\frac{\pi}{T}dr$.

On a : $T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{r^3}{g_0}} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{r^3}} = \frac{2\pi}{T.R\sqrt{g_0}}$

Donc : $dV = -\frac{1}{2}R\sqrt{g_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^3}}dr = -\frac{1}{2}R\sqrt{g_0}\cdot\frac{2\pi}{T.R\sqrt{g_0}}dr$

d' où $\boxed{dV = -\frac{\pi}{T}dr}$

b) Effet des forces de frottement sur l'altitude et la vitesse de (S).

Sous l'effet des frottements l'altitude du satellite diminue, sa vitesse augmente.

....

Problème 22. (Extrait du Bac, Cambodge).

On se propose de placer, au moins d'une fusée porteuse, un satellite artificiel S à la distance $SC = d = 1,25R$ du centre C de la Terre. S devra décrire une trajectoire circulaire d'un mouvement uniforme à la vitesse V.

L'intensité de la pesanteur g, dont on rappelle qu'elle est inversement proportionnelle au carré de la distance d au centre de la Terre, a pour valeur $g_0 = 10\ m.s^{-2}$ en un point situé à la surface de le Terre.

1°) A quelle condition doit satisfaire la vitesse V pour que S soit en équilibre sur sa trajectoire ?

Application : **Calculer V lorsque $d = 1,25R$; R, rayon terrestre, a pour valeur 6400 km.**

2°) On suppose pour simplifier les calculs , que le satellite a une masse de 1 kg Calculer son énergie mécanique E_m , lorsqu'il est installé sur sa trajectoire.

On prendra comme niveau zéro de l'énergie potentielle la surface terrestre et l'on admettra que, durant toute la montée, la fusée se déplaçait dans un champ de gravitation uniforme de valeur $g = 0,8g_0$.

3°) En réalité, le rayon de l'orbite n'est pas constant et varie entre la valeur d et la valeur $d_1 = d + h$, h étant petit devant d. Montrer, en appliquant le principe de la conservation de l'énergie mécanique, que la vitesse du satellite varie pendant sa révolution. Calculer cette variation de vitesse si $h = 50\ km$.

4°) On dit parfois que « dans un satellite artificiel la pesanteur est nulle ». Expliquer ce que cela veut dire et étudier en particulier ce qui se passe si l'on tente de faire osciller un pendule accroché par un fil à la paroi de S.

Rép : 1°) $V = \sqrt{0,8g_0.R} = 7\,150\ m.s^{-1}$ **; 2°)** $E_m = 0,6mg_0R = 3,84.10^7\ J$;

3°) $|\Delta V| = V\dfrac{h}{1,25R} \approx 45\ m.s^{-1}$.

.... **Résolution** ....

1°) Condition vérifier par la vitesse V pour que S doit en équilibre.

– Système : le satellite de masse m .

– Référentiel : géocentrique (supposé galiléen).

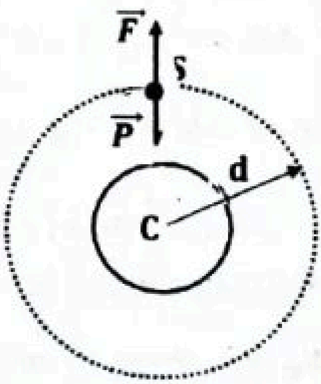
– Bilan des forces : **le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la force d'inertie centrifuge $\vec{F} = -m\dfrac{V^2}{d}\vec{n}$.**

La condition d'équilibre s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$$

Projetons sur SC :

$$mg - m\frac{V^2}{d} = 0 \Longrightarrow V^2 = gd$$



or : $g.d^2 = g_0.R^2 \Longrightarrow g = g_0\dfrac{R^2}{d^2}$

donc : $V^2 = g_0.\dfrac{R^2}{d^2} \times d \Longrightarrow V^2 = g_0\dfrac{R^2}{d}$

Comme $R = 1,25R$, on obtient alors :

$$V^2 = g_0\frac{R}{1,25} = 0,8g_0.R$$

D'où la condition d'équilibre satisfaite par la vitesse V :

$$\boxed{V = \sqrt{0,8g_0.R}}$$

AN : $V = \sqrt{0,8 \times 10 \times 6,4.10^6} = 7,15.10^3\ m.s^{-1}$

d' où $\boxed{V = 7\,150\ m.s^{-1}}$

2°) Energie mécanique du satellite sur sa trajectoire.

L'énergie mécanique du satellite est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle :

$$E_m = E_C + E_P$$

- Son énergie cinétique est :

$$E_C = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}\,m \times 0,8g_0R \Longrightarrow E_C = 0,4mg_0R$$

- Son énergie potentielle (par rapport à la surface terrestre) est :

$$E_P = mg(d - R) = m \times 0,8g_0(1,25R - R) \Longrightarrow E_P = 0,2mg_0R$$

Son énergie mécanique est donc :

$$E_m = 0,4mg_0R + 0,2mg_0R = 0,6mg_0R$$

d' où $\boxed{E_m = 0,6mg_0R}$

AN : $E_m = 0,6 \times 1 \times 10 \times 6,4.10^6 = 38,4.10^6\,J$

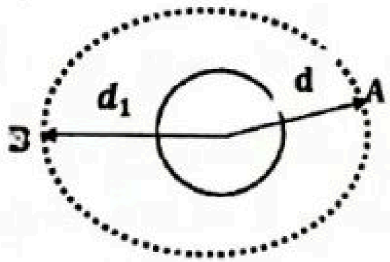
d' où $\boxed{E_m = 3,84.10^7\,J}$

3°) Montrons que la vitesse du satellite varie pendant sa révolution.

On a : $E_m = E_C + E_P \Longrightarrow \Delta E_m = \Delta E_C + \Delta E_P$

Or : $\Delta E_C = \frac{1}{2}m(V_1^2 - V^2)$

et $\Delta E_P = -W(\vec{P}) = mg(d_1 - d) = mg_0.\frac{R^2}{d^2}h$



donc : $\Delta E_m = \frac{1}{2}m(V_1^2 - V^2) + mg_0.\frac{R^2}{d^2}h$

L'énergie mécanique étant constante :

$$\Delta E_m = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2}m(V_1^2 - V^2) + mg_0.\frac{R^2}{d^2}h = 0$$

$$V^2 - V_1^2 = 2g_0\frac{R^2}{d^2}h \Longrightarrow V_1^2 = V^2 - 2.V^2\frac{h}{d} \Longrightarrow V_1 = V\sqrt{1 - 2\frac{h}{d}}.$$

Comme h est petit devant d, on a :

$$V_1 = V\sqrt{1 - 2\frac{h}{d}}. \approx V\left(1 - \frac{h}{d}\right) \Longrightarrow V_1 - V = -V\frac{h}{d}$$

d' où $\boxed{|\Delta V| = V\frac{h}{1,25R}}$

AN : $|\Delta V| = 7150 \times \frac{50}{1,25 \times 6,4..10^3} = 44,68\,m.s^{-1}$

d' où $\boxed{|\Delta V| \approx 45\, m.s^{-1}}$

4°) Impesanteur.

Dire que « la pesanteur est nulle » cela signifie que le poids apparent est nul , **c'est-à-dire que l'accélération de la pesanteur compense l'accélération centrifuge.**
Un pendule simple accroché à la paroi de S n'oscille pas et garde la même position même si l'on coupe le fil.

....

LA PHYSIQUE AU SERVICE DE L'HOMME MODERNE.

(Konaté Cheickna)

EXERCICES ET PROBLEMES PROPOSES.

Problème 1 :

1°) a) Rappeler la loi de la gravitation universelle et, en admettant que le poids d'un corps est dû à l'attraction terrestre, exprimer l'intensité de la pesanteur g_0 au niveau du sol, en fonction de k (constante de gravitation), du rayon R et de la masse M de la terre, en supposant celle-ci concentrée en son centre.

b) Sachant que R = 6 400 km, calculer M.

c) Exprimer, en fonction de g_0, R et Z, l'accélération g de la pesanteur à une altitude Z quelconque. Que devient cette expression si Z est très faible devant R ?

2°) On considère un satellite en rotation sur une orbite circulaire autour de la Terre. L'altitude du satellite est 3 200 km. Calculer la vitesse de ce satellite et le temps nécessaire pour faire un tour de la Terre.

3°) Quelle devrait être l'altitude du satellite pour qu'il paraisse immobile à un observateur terrestre ? On suppose que le plan de l'orbite est celui de l'équateur terrestre.

On donne : $g_0 = 9{,}81\ m.s^{-2}$; $k = 6{,}67.10^{-11}\ S.I.$

Réponses : 1°) a) $g_0 = k\dfrac{M}{R^2}$; **b)** $M = \dfrac{g_0R^2}{k} = 6{,}02.10^{24}\ kg$;

c) $g = g_0\dfrac{R^2}{(R+Z)^2}$; $g \approx g_0\left(1 - \dfrac{2Z}{R_T}\right)$

2°) $V = 6{,}47.10^3\ m.s^{-1}$; $T = 9\,320\ s \approx 2\ h\ 35\ min\ 20\ s$;

3°) $Z \approx 36\,000\ km.$

....

Problème 2. ***

Le télescope spatial Hubble, supposé ponctuel, de masse $m = 1{,}2.10^4\ kg$, décrit une orbite circulaire autour de la Terre, à l'altitude $h = 600\ km$.

On suppose que la Terre possède une distribution de masse sphérique.

1°) A partir de la loi de la gravitation, établir l'expression de la valeur du champ de gravitation terrestre à l'altitude h, en fonction de k, M_T, R_T et h.

2°) Déduire de la relation précédente l'expression de la valeur du champ de gravitation à l'altitude h, en fonction de g_0, R et h, g_0 étant la valeur du champ de gravitation au niveau du sol.

3°) Déterminer les caractéristiques du vecteur champ de gravitation en un point de la trajectoire du satellite. En déduire la valeur de la force de gravitation qui s'exerce sur Hubble.

4°) Le mouvement du télescope est étudié dans le repère géocentrique d'origine O.

a) Montrer que son mouvement circulaire est uniforme.

b) Etablir l'expression de sa vitesse V et celle de sa période T, en fonction de g_0, R_T et h. Calculer V et T. On donne :
masse de la Terre : $M = 5,89.10^{24}\ kg$; rayon de la Terre : $R = 6\ 380\ km$;
constante de gravitation universelle : $k = 6,67.10^{-11}\ S.I.$;

Réponses : 1°) $g = k \cdot \frac{M \cdot m}{(R+h)^2}$; 2°) $g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$;

3°) $g = 8,19\ m.s^{-2}$; $F \approx 9,83.10^4\ N$;

4°) b) $V = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}} = 7,50.10^3\ m.s^{-1}$;

$T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g_0}} = 5\ 842,816\ s \approx 1\ h\ 37\ min\ 23\ s.$

Problème 3. *.**

1°) Dans le repère de Copernic, la Terre décrit une orbite assimilable à un cercle de rayon $r = 1,49.10^8\ km$, centré sur le Soleil. La période de cette révolution est T = 1 an $\approx 3,16.10^7\ s.$

a) Etablir la relation liant T, r, M_S (masse du Soleil) et k (**constante de gravitation**).

b) Calculer la masse du Soleil.

2°) La planète Mars possède deux satellites naturels : Phobos et deimos. Phobos décrit autour de Mars une orbite circulaire de rayon r_P = 9 380 km avec une période de 7 h 39 min. Deimos a une trajectoire quasi circulaire de rayon r_D = 23 460 km et une période de 30 h 18 min.

Calculer la masse de la planète Mars à partir des caractéristiques du mouvement de Phobos, puis de celles de Deimos. **Comparer les résultats obtenus.**

3°) Quelle est la période de révolution de la planète Mars, dont le rayon de l'orbite vaut $2,28.10^8$ km ?

Réponses : 1°) a) $T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{K.M_S}$; b) $M_S = \frac{4\pi^2 r^3}{K.T^2} = 1,96.10^{30} kg \approx 2.10^{30}\ kg$;

2°) $M_M \approx 6,5.10^{23}\ kg$; 3°) $T' = 5,38.10^7 \approx 1,9\ an.$

Problème 4. ***

1°) Deux satellites de la Terre S_1 et S_2 sont en gravitation autour de la Terre de masse M et de rayon R. Les deux satellites gravitent à la même distance r_1 du centre de la Terre et ont **pour masses respectives** m_1 et m_2 telles que $m_2 = 2m_1$.

a) En appliquant le théorème du centre d'inertie, exprimer la vitesse V_1 du satellite S_1 en fonction de r_1, g_0 (intensité du champ de gravitation à la surface de la Terre) et R.

b) Exprimer la vitesse V_2 du satellite S_2 en fonction de V_1.

2°) **En réalité, les rayons des orbites sont r_1 pour S_1 et r_2 pour S_2 tels que $r_1 = 2r_2$.**

a) Montrer que les périodes des satellites sont telles que $T_2 = \frac{T_1}{2\sqrt{2}}$.

b) Exprimer l'altitude z_1 de S_1 en fonction de l'altitude z_2 de S_2 et du rayon R de la Terre.

c) **Calculer le rayon** R **de la Terre sachant que** $z_1 = 35,8.10^6 m$ et $z_2 = 14,71.10^4 m$.

d) Si la période d'un satellite géostationnaire est $T = 86\,140$ s, montrer que l'un des satellites ci-dessus peut être considéré comme géostationnaire.

On prendra $g_0 = 9,81\ m.s^{-2}$.

Rép : 1°) a) $V_1 = R\sqrt{\frac{g_0}{r_1}}$ **; b)** $V_1 = V_2$ **; 2°) a)** $T_2 = \frac{T_1}{2\sqrt{2}}$ **; b)** $z_1 = 2z_2 + R$ **;**

c) $R = 6\,400\ km$; **d)** $z \approx z_1 = 35,8.10^6\ m \Longrightarrow S_1$ géostationnaire.

....

Problème 5. *.**

1°) Un satellite artificiel de masse m, décrit une orbite circulaire ayant pour centre le centre de la Terre à une altitude h = 600 km.

Calculer la valeur de l'intensité g du champ de pesanteur à l'altitude h.

2°) Un satellite évolue à une altitude h' = 300 km.

Calculer la vitesse de ce satellite.

3°) On suppose que le centre de l'orbite du satellite est déplacé par rapport au centre de la Terre. Le point A de cette orbite le plus rapproché de la Terre a une altitude de 300 km, le point B le plus éloigné est à une altitude de 900 km.

Calculer la variation de vitesse entre les passages aux points A et B du satellite.

Données : $k = 6,67.10^{-11}$ u.SI ; rayon de la Terre : R = 6400 km ;

masse de la Terre : $M = 6.10^{24}$ kg. On prendra sur toute l'orbite une valeur moyenne de g égale à celle trouvée dans la question 1°).

Réponses : 1°) a) $g = 8,17\ m.s^{-2}$; 2°) $V \approx 7,73\ km.s^{-1}$;

3°) $|\Delta V| = 0,66\ km.s^{-1}$.

....

Problème 6. ***

Un satellite artificiel, assimilé à un point matériel de masse m, décrit à l'altitude $Z = 36\,000\ km$ un cercle concentrique à la Terre.

1°) Quelle est la nature du mouvement du satellite ?

2°) Calculer la valeur numérique de son accélération.

3°) En précisant le référentiel d'étude, calculer la vitesse du satellite et sa période de révolution.

On donne : : rayon terrestre $R = 6\,400\ km$; au niveau du sol : $g_0 = 9,8\ m.s^{-2}$

Réponses : 2°) $a = 0,22\ m.s^{-2}$; **3°)** $V \approx 3,08\ km.s^{-1}$; $T = 86\,600\ s.$

....

Problème 7.

Un satellite supposé ponctuel de masse m, décrit selon un mouvement circulaire uniforme une trajectoire concentrique à la Terre,

1°) Rappeler la loi de la gravitation universelle puis, exprimer la vitesse V du satellite en fonction de son altitude z et de la masse M de la Terre,

AN : rayon terrestre $R = 6\,400\ km$; $z = 900\ km.$

2°) Si l'altitude du satellite diminue de moitié, trouver sa nouvelle vitesse.

Réponses : 1°) $V = \sqrt{\frac{K \cdot M}{R + Z}} = 7400\ m.s^{-1} = 26\,640\ km.h^{-1}$,

2°) $V' = 7\,640\ m.s^{-1}.$

....

Problème 8. ***

1°) Un satellite de masse $m = 2$ **tonnes**, tourne autour de la Terre à l'altitude $h_1 = 600\ km$; sa vitesse linéaire est $V_1 = 27\,600\ km.h^{-1}$. Calculer les énergies cinétique, potentielle et mécanique totale du satellite.

On donne : $g_0 = 9,8\ m.s^{-2}$; rayon terrestre $R = 6\,400\ km.$

2°) En réalité, le périgée du satellite, point de l'orbite le plus proche de la surface terrestre, est situé à 600 km d'altitude ; l'apogée, point le plus éloigné, est situé à 900 km. Calculer la vitesse du satellite à l'apogée.

On néglige les frottements. ($g \approx 8\ m.s^{-2}$).

Rép : 1°) $E_C \approx 5,878.10^{10}\ J$; $E_P = 1,075.10^{10}\ J$; $E_m = 6,953.10^{10}\ J$.

2°) $V_2 \approx 7,3\ km.s^{-1}.$

....

Problème 9. ***

Un satellite tourne autour de la Terre dans le plan de l'Equateur. Il survole une ville A située sur l'équateur en passant d'ouest en est à 20 h. On le revoie le même jour passant dans le même sens à 21 h 30 min.

1°) Quelle est la période de rotation du satellite, sachant que sa trajectoire est circulaire et la période de rotation de la Terre vaut 24 heures ?

2°) A quelle distance de la Terre se trouve-t-il ?

3°) Quelle est sa vitesse linéaire ? On rappelle que la Terre considérée comme sphérique a pour rayon $R = 6\,370\ km$; $g_0 \approx 10\ m.s^{-2}$.

Réponses : 1°) $T = \frac{24\Delta t}{\Delta t + 24} \approx 5082 = 1\,h\,24\,min\,42\,s$; **2°)** $h \approx 85,4\ km$;

3°) $V \approx 8\ km.s^{-1}$.

Problème 10. ***

1°) Lors de son trajet Terre-Lune, une fusée destinée à placer un satellite autour de la Terre passe par le point neutre. A cet endroit, les champs de gravitation terrestre et lunaire se compensent.

a) Quelle fraction du parcours a été effectuée quand se produit le phénomène ?

b) A quelle distance la fusée se trouve-t-elle de la Terre ?

2°) Un satellites géostationnaires est placé sur une orbite circulaire autour de la Terre à l'altitude $Z = 36\,000\ km$.

a) Calculer la valeur du champ de gravitation terrestre qui agit sur le satellite.

b) Calculer les valeurs extrêmes du champ de gravitation lunaire. Quelles fractions de la valeur du champ terrestre représentent-elles ? Conclure.

On donne : masse et rayon terrestre : $M_T = 5,97.10^{24}\ kg$; $R_T = 6\,378\ km$;

masse et rayon lunaire : $M_L = 7,35.10^{22}\ kg$; $R_l = 1\,738\ km$;

distance Terre-Lune : $d = 384,4.10^3\ km$.

Réponses : 1°) a) 90 % ; **b)** $d_T \approx 346.10^3\ km$; **2°) a)** $g = 0,22\ m.s^{-2}$;

b) $G_{max} = 4.10^{-5}\ m.s^{-2}$; $G_{min} = 2,8.10^{-5}\ m.s^{-2}$.

Problème 11 : (Extrait du Bac, Dakar).

La loi de l'attraction universelle est de la forme :

$$F = \varepsilon\,\frac{M_1 \times M_2}{d^2}$$

ε est une constante, valant $6,67.10^{-11}$ unités SI et d la distance en mètres de deux corps de masses M_1 et M_2 exprimées en kilogrammes. F est alors exprimée en newtons.

1°) a) Evaluer l'accélération g_0 de la pesanteur au niveau du sol, en fonction de ε, du rayon R de la Terre et de la masse M de la Terre, en supposant celle-ci concentrée en son centre.

b) Sachant que $R = 6\,400\ km$, calculer M.

2°) a) Exprimer, en fonction de g_0, R et z , l'accélération g de la pesanteur à une altitude z quelconque.

b) Montrer que, si z est petit devant R, g est une fonction linéaire de z.

c) Dans ce dernier cas, calculer l'erreur relative que l'on commet en prenant $g = g_0$ à 3 200 m d'altitude.

3°) Un satellite artificielle évolue à très haute altitude, où l'accélération g est celle trouvée au a) de la question 2°), en **décrivant un cercle concentrique à la Terre.**

a) Calculer sa vitesse en fonction de g_0, R et z.

b) Quelle est cette vitesse si $z = 36\,000\ km$?

c) Quelle est alors la durée d'une révolution ? L'**exprimer en secondes et en heures.**

d) Quelle réflexion vous inspire ce dernier résultat, lorsque l'orbite est dans le plan de l'équateur ? On donne : $g_0 = 9,80\ m.s^{-2}$.

Rép : 1°) a) $g_0 = \varepsilon\ \frac{M}{R^2}$; **b)** $M = \frac{R_0R^2}{\varepsilon} \approx 6,02.10^{24}\ kg$;

2°) a) $g = g_0 \frac{R^2}{(R+Z)^2}$; **b)** $g \approx g_0\left(1 - \frac{2z}{R}\right)$; **c)** $\frac{\delta g}{g} = 10^{-3}$;

3°) a) $V = R\sqrt{\frac{g_0}{R+Z}}$; **b)** $V \approx 3\,080\ m.s^{-1}$; **c)** $T = 86\,580\ s \approx 24\ h\ 3\ min.$

....

Problème 12 :

On veut créer un satellite artificiel de la Terre en fait tourner un corps de masse m = 1 000 kg à une altitude de 1 600 km autour de la Terre sur une orbite circulaire décrite d'un mouvement uniforme.

1°) Calculer la vitesse linéaire que doit avoir ce satellite sur sa trajectoire.

2°) Calculer la durée d'une rotation autour de la Terre.

3°) Calculer l'énergie cinétique du satellite et son énergie potentielle par rapport à la surface terrestre. Pour ce dernier calcul, on supposera l'accélération de la pesanteur constante égale à $8\ m.s^{-2}$ entre l'altitude zéro et l'altitude 1600 km.

4°) Calculer la quantité de combustible qu'il serait nécessaire de dépenser pour donner au satellite son énergie mécanique totale. On ne tiendra pas compte de la résistance de l'air dans le mouvement d'ascension à travers l'atmosphère. Le combustible dégage en brûlant une quantité de chaleur égale à $4,2.10^7\ J/kg$ de combustible ; d'autre part, 10 % seulement de la chaleur produite est transformée en énergie mécanique.

Réponses : 1°) $V \approx 7,16\ km.s^{-1}$; **2°)** $T \approx 1\ h\ 57\ min\ 5\ s$;

3°) $E_C \approx 2,56.10^{10}\ J$; $E_P \approx 1,28.10^{10}\ J$;

4°) $m = 9,14\ tonnes.$

....

Problème 13. *.**

La Terre est assimilée à une sphère de rayon R, de masse M possédant une répartition de masse à symétrie sphérique.

1°) Montrer que l'intensité du champ de gravitation terrestre à l'altitude h peut se mettre sous la forme : $g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$;

où g_0 est l'intensité du champ de gravitation au niveau du sol.

2°) Un satellite a une orbite circulaire, dont le centre est celui de la Terre à l'altitude h.

a) Montrer que le mouvement de ce satellite est uniforme.

b) Etablir l'expression de la vitesse de ce satellite et celle de sa période en fonction de g_0, R et h.

c) On donne : $g_0 = 9,80\ m.s^{-2}$; h = 300 km ; R = 6370 km. Calculer V et T.

3°) L'énergie potentielle de gravitation d'un corps de masse m situé à une altitude h est donnée par la relation :

$$E_P = -k\frac{m.M}{R+h}$$

où k est la constante de gravitation.

a) Donner l'expression de l'énergie mécanique E_m du satellite à l'altitude h, en fonction de m, g_0, R et h. Comparer cette énergie mécanique à l'énergie cinétique E_C du satellite.

b) Le satellite se trouvant dans les hautes couches de l'atmosphère est soumis à des forces de frottement. Comment va évoluer son énergie mécanique ?
En déduire qualitativement l'évolution de la vitesse et de l'altitude du satellite.

Réponses : 2°) b) $V = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}$; $T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g_0}}$;

c) $V = 7,7\ km.s^{-2}$; $T \approx 1\ h\ 30\ min$.

....

Problème 14. * (Extrait du Bac, C-E, Toulouse 1984).**

1°) On considère un point A de l'espace situé à la distance z du sol planétaire. Exprimer la norme g du champ de gravitation créé en ce point, par la planète, en fonction de R (rayon de la planète), g_0 et z.

2°) L'énergie potentielle du système formé par la planète de masse M et un objet de masse m situé en A, à la distance z du sol planétaire, a pour expression :

$$E_P = -k\frac{m.M}{R+z}$$

a) L'énergie potentielle s'annule-t-elle ? Pour quelle valeur de z ? En déduire une justification du signe négatif.

La trajectoire est une parabole dont la concavité est tournée vers le bas.

e) Caractéristiques de la trajectoire.

La trajectoire présente les caractéristiques suivantes :

* **La flèche :** est l'altitude maximale atteinte par le projectile. Elle correspond à l'ordonnée du sommet de la trajectoire.
* **La portée :** est la distance entre le point de lancement et le point d'impact sur le sol horizontal.

Calcul de la flèche.

Au sommet de la trajectoire :

$$V_y = \frac{dy}{dt} = 0 \Longrightarrow -gt + V_0 \sin\alpha = 0$$

$$\text{soit :} \quad t = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$$

Remplaçons t dans y :

$$y_S = h = -\frac{1}{2} g \left(\frac{V_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + (V_0 \sin\alpha)t) \left(\frac{V_0 \sin\alpha}{g}\right)$$

Soit : $h = -\dfrac{V_0^2 \cdot Sin^2\alpha}{2g} + \dfrac{V_0^2 \cdot Sin^2\alpha}{g}$

$$\text{d'où} \quad \boxed{h = \frac{V_0^2 \cdot Sin^2\alpha}{2g}}$$

Remarque.

la flèche est maximale lorsque :

$$\sin\alpha = 1 \Longrightarrow \alpha = 90° = \frac{\pi}{2} \quad (tir\ vertical)$$

La hauteur correspondante est :

$$\boxed{h = \frac{V_0^2 \cdot}{2g}}$$

Le tir vertical est formellement déconseillé en artillerie, car le projectile risque de retomber sur le tireur.

* ***Calcul de la portée.***

A l'arrivée sur le sol horizontal :

$$y = 0 \Longrightarrow -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin\alpha)t = 0$$

$$t\left(-\frac{1}{2}gt + V_0 \sin\alpha\right) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ -\frac{1}{2}gt + V_0 \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} t = 0 \ (départ) \\ t = \dfrac{2V_0 \sin\alpha}{g} \end{cases}$$

Remplaçons t dans x :

$$x_C = d = (V_0 \cos\alpha)\left(\frac{2.V_0.\sin\alpha}{g}\right) \Longrightarrow \quad d = \frac{V_0^2(2.\cos\alpha.\sin\alpha)}{g}$$

d'où $$\boxed{d = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}}$$

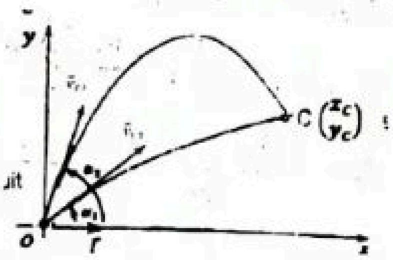
Remarque. La portée est maximale lorsque :
$\sin 2\alpha = 1 \Longrightarrow 2\alpha = 90°$

d'où $$\boxed{\alpha == 45°}$$

C'est le tir à 45° qui permet d'atteindre la cible la plus éloignée.

f) Problème de tir.

Une cible C $\binom{x_C}{y_C}$ sera atteinte lorsqu'elle est située sur la trajectoire du projectile, c'est-à-dire lorsque ses coordonnées vérifient l'équation de cette trajectoire :



$$y_C = -\frac{1}{2}\cdot\frac{g}{V_0^2 Cos^2\alpha}\,x_C^2 + x_C \tan\alpha$$

En remarquant que : $\frac{1}{Cos^2\alpha} = 1 + tan^2\alpha$; on en déduit :

$$\boxed{\frac{g.x_C^2}{2.V_0^2}.tan^2\alpha \; - \; x_C tan\alpha \; + \; \frac{g.x_C^2}{2V_0^2} + y_C = 0}$$

Cette équation donne en général deux valeurs de **tan α,** donc deux angles de tir possible ; le plus petit α_1 correspond au tir tendu et le plus grand α_2 au tir en cloche. Si l'équation n'admet pas de solution, **c'est que la cible ne peut être atteinte.**

Remarque : α_1 et α_2 sont complémentaires :

$$\boxed{\alpha_1 + \alpha_2 = 90°}$$

g) Vitesse instantanée du projectile.

On a : $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$. ; or : $\begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} = V_0 \cos\alpha \\ V_y = \frac{dy}{dt} = -gt + V_0 \sin\alpha \end{cases}$

b) $V \approx 6,47.10^3\ m.s^{-1}$; $T \approx 2\ h\ 35\ min 18\ s$; 3°) $h' \approx 36\ 000\ km$;

4°) a) $E_m = -\dfrac{mg_0R^2}{2(R+h)}$; b) $\Delta E = 1,62.10^{10}\ J$;

5°) $V_S = 7,9\ km/s$; $V_L \approx 11,2\ km/s$.

LA PHYSIQUE AU SERVICE DE L'HOMME MODERNE.

(Konaté Cheickna)

MOUVEMENTS DANS UN CHAMP UNIFORME

1 – MOUVEMENT D'UN PROJECTILE DANS LE CHAMP DE PESANTEUR.

Données préliminaires.

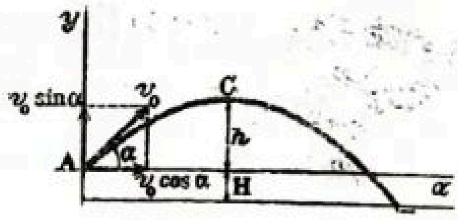
Un projectile de masse m, est lancé dans le vide avec une vitesse initiale $\vec{V}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale. Faites une étude complète de son mouvement.

a) Accélération du centre d'inertie du projectile.

– Système : le projectile.

– Référentiel : terrestre (supposé galiléen).

– Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$.



Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} = m\vec{a} \Longrightarrow m\vec{g} = m\vec{a}$$

d'où $\boxed{\vec{a} = \vec{g}}$

b) Equations vectorielles du mouvement.

Soit $\vec{V}$ le vecteur vitesse du projectile et $\overrightarrow{OM}$ son vecteur position à la date t. :

On a : $\begin{cases} \vec{a} = \vec{g} \\ \vec{V} = \vec{a}t + \vec{V}_0 \\ \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{V}_0 t + \overrightarrow{OM}_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{a} = \vec{g} \\ \vec{V} = \vec{g}t + \vec{V}_0 \\ \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{V}_0 t + \overrightarrow{OM}_0 \end{cases}$

c) Equations horaires du mouvement.

Projetons le vecteur $\vec{a}$ sur les axes de coordonnées, on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} V_x = V_0 \cos\alpha \\ V_y = -gt + V_0 \sin\alpha \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = (V_0 \cos\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin\alpha)t \end{cases}}$$

d) Equation de la trajectoire.

On élimine t entre x et y :

$$\begin{cases} x = (V_0 \cos\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin\alpha)t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{V_0 \cos\alpha} \\ y = -g\left(\frac{x}{V_0 \cos\alpha}\right)^2 + (V_0 \sin\alpha)\left(\frac{x}{V_0 \cos\alpha}\right) \end{cases}$$

d'où $\boxed{y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{V_0^2 Cos^2\alpha} x^2 + x \tan\alpha}$

b) Exprimer E_P en fonction de m, g_0 , R et z.

3°) On veut calculer la valeur minimale de la norme V_0 de la vitesse $\vec{V}_0$ qu'il faut communiquer à un objet de masse m placer sur le sol planétaire pour qu'il se libère de l'attraction planétaire et aille ainsi à l'infini.

a) Donner les expressions de l'énergie mécanique du système objet-planète, quand l'objet part du sol, quand l'objet est à la distance z du sol planétaire animé de la vitesse $\vec{V}$ de norme V.

b) En déduire l'expression de V en fonction des données.

c) Calculer les valeurs numériques de V_0 dans les deux cas suivants : objet – Terre ; objet – Lune.

Données : – Terre : $g_0 = 9,80\ m.s^{-2}$; $R = 6\,500 km$;

– Lune : $g_0 = 1,67\ m.s^{-2}$; $R = 1\,750\ km$.

Réponses : 1°) $g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$; 2°) b) $E_P = -mg_0 . \frac{R^2}{R+Z}$;

3°) a) $E_{m0} = \frac{1}{2} mV_0^2 - mg_0R$ et $E_m = \frac{1}{2} mV^2 - mg_0 . \frac{R^2}{R+Z}$;

b) $V = \sqrt{V_0^2 - 2g_0 \cdot \frac{Z}{R+Z}}$;

c) Terre : $V_0 = 11,3.10^3\ m.s^{-1}$; Lune : $V_0 = 2,42.10^3\ m.s^{-1}$.

....

Problème 15. * .**

Un satellite supposé ponctuel, de masse m, décrit une orbite circulaire d'altitude h autour de Terre assimilée à une sphère de rayon R. On fera l'étude dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.

1°) Etablir l'expression de l'intensité g du vecteur champ de gravitation à l'altitude h, en fonction de sa valeur g_0 au sol, de R et h.

2°) Déterminer l'expression de la vitesse V du satellite, celle de sa période T et celle de son énergie cinétique E_C.

AN : $m = 1\,020$ kg ; $R = 6\,400$ km ; $h = 400$ km ; $g_0 = 9,81\ m.s^{-2}$.

3°) L'énergie potentielle du satellite dans le champ de gravitation à l'altitude h est donnée par la relation :

$$E_P = -k\frac{m.M}{R+h}$$

où M est la masse de la Terre k est la constante de gravitation universelle.

a) Justifier le signe négatif et exprimer E_P en fonction de m, R, g_0 et h.

b) Déterminer l'expression de l'énergie mécanique E_m du satellite. Comparer cette énergie mécanique à l'énergie cinétique E_C puis à l'énergie potentielle E_P.

4°) On fournit au satellite un supplément d'énergie $\Delta E = +5.10^8\,J$. Il prend alors une nouvelle orbite circulaire. Déterminer :

a) sa nouvelle énergie cinétique et sa vitesse ;

b) sa nouvelle énergie potentielle et son altitude.

Rép : 1°) $g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$; 2°) $V = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}} = 7{,}68.10^3\ m.s^{-1}$

$$T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g_0}} = 5{,}56.10^3\ s \approx 1\,h32\,min\,40\,s\ ;$$

$$E_C = \frac{1}{2}\cdot\frac{m.g_0.R^2}{R+h} = 3.10^{10}\,J\ ;\ 3°)\ a)\ E_P = -\frac{mg_0.R^2}{R+h}\ ;$$

$$b)\ E_m = -\frac{1}{2}\cdot\frac{m.g_0.R^2}{R+h}\ ;\ E_C = -E_m\ ;\ E_P = 2E_m\ ;$$

4°) a) $E'_C = 3{,}148.10^{10}\,J$; $V \approx 7{,}86.10^3\ m.s^{-1}$;

b) $E'_P = -6{,}296.10^{10}\,J$; $h' \approx 103\ km$.

Problème 16. ***

On considère un satellite en rotation sur une orbite circulaire de rayon r autour de la Terre de masse M et de rayon $R = 6\,400\ km$.

L'altitude du satellite est $\mathbf{h = 3\,200\ km}$.

1°) Déterminer l'expression de l'intensité g du vecteur champ de gravitation à l'altitude h, en fonction de sa valeur g_0 au sol, de R et h.

2°) a) Etablir l'expression de la vitesse V du satellite et celle sa période T en fonction de g_0 , **R et h.**

b) Calculer V et T, sachant que $g_0 = 9{,}81\ m.s^{-2}$.

3°) Quelle devrait être l'altitude $\mathbf{h'}$ du satellite pour qu'il paraisse immobile à un observateur terrestre ?

4°) L'énergie potentielle du système satellite-Terre s'écrit : $E_P = -\frac{mg_0R^2}{R+h}$

si m est la masse du satellite ; $E_P = 0$, quand $h = \infty$.

a) Donner l'expression de l'énergie mécanique du système en fonction de m, g_0 ,R et h

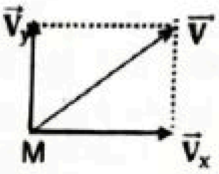
b) Quelle énergie faut-il fournir au satellite de masse 1 tonne pour le faire passer de l'orbite d'altitude h à l'orbite d'altitude h'.

5°) Qu'appelle-t-on première vitesse cosmique ? Vitesse de libération ?

Calculer ces vitesses.

Rép : 1°) $g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$;2°) a) $V = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}$; $T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g_0}}$

alors : $V = \sqrt{(V_0 \cos\alpha)^2 + [-gt + (V_0 \sin\alpha)]^2}$



$$V = \sqrt{V_0^2 cos^2\alpha + g^2t^2 - (2gV_0 \sin\alpha)t + V_0^2 sin^2\alpha}$$

$$V = \sqrt{V_0^2(cos^2\alpha + sin^2\alpha) - 2g\left[-\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin\alpha)t\right]}$$

or : $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$ et $y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin\alpha)t$;

d'où $\boxed{V = \sqrt{V_0^2 - 2gy}}$

La vitesse d'un projectile est indépendante de sa masse, elle ne dépend que de son altitude.

h) Etude énergétique.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au projectile qui passe d'un point A d'altitude Z_A à un point B d'altitude Z_B :

$$\Delta E_C = W(\vec{P}) \Longrightarrow \frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = mg(Z_A - Z_B)$$

soit : $\frac{1}{2}mV_B^2 + mgZ_B = \frac{1}{2}mV_A^2 + mgZ_A \Longrightarrow E_{CB} + E_{PB} = E_{CA} + E_{PA}$

d'où $\boxed{E_{m.B} = E_{m.A} = cste.}$

L'énergie mécanique totale du projectile est constante.

Cette conservation de l'énergie mécanique donne des calculs plus rapides.

....

Application 1 : calcul de la vitesse du projectile.

Un projectile est lancé dans le champ de pesanteur avec une vitesse initiale $\vec{V}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale.

En utilisant une méthode énergétique. déterminer la vitesse du projectile en un point M situé à l'altitude Z du point de lancement,

....**Solution** ....

Appliquons la conservation de l'énergie mécanique entre le point de départ O et le point M.

On a : $E_m(O) = \frac{1}{2}mV_0^2$; $(Z = 0)$. et $E_m(M) = \frac{1}{2}mV^2 + mgy$; $(Z = y)$.

Ainsi : $E_m(M) = E_m(O) \Longleftrightarrow \frac{1}{2}mV^2 + mgy = \frac{1}{2}mV_0^2$

soit : $V^2 = V_0^2 - 2gy \Longrightarrow \boxed{V = \sqrt{V_0^2 - 2gy}}$

....

Application 2 : calcul de la flèche du tir.

Un projectile est tiré sous un angle α, avec une vitesse initiale V_0.
En appliquant la conservation de l'énergie mécanique ou le théorème de l'énergie cinétique, déterminer la hauteur maximale atteinte par le projectile (flèche du tir).

....**Solution** ....

1ère méthode : conservation de l'énergie mécanique.

Appliquons la conservation de l'énergie mécanique entre le point de départ O et le sommet S.

Au point O : $E_m = \frac{1}{2} mV_0^2$. ***Au sommet S :*** $E_m = \frac{1}{2} mV_0^2 . \cos^2\alpha + mgh$;

car au sommet : $V_y = 0$ et $V_S = V_x = V_0 \cos\alpha$.

La conservation de l'énergie mécanique s'écrit :

$$\frac{1}{2} mV_0^2 . \cos^2\alpha + mgh = \frac{1}{2} mV_0^2 \Longrightarrow h = \frac{V_0^2}{2g}(1 - \cos^2\alpha) ;$$

or : $1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$

d'où $$\boxed{h = \frac{V_0^2 . \sin^2\alpha}{2g}}$$

2ème méthode : théorème de l'énergie cinétique.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre le point O et le sommet S.

$$\Delta E_C = \sum W(\overrightarrow{Fex}) \Longleftrightarrow \frac{1}{2} mV_S^2 - \frac{1}{2} mV_0^2 = -mgh$$

Or, au sommet: $V_y = 0$ et $V_S = V_x = V_0 \cos\alpha$;

donc: $$\frac{1}{2} mV_0^2 . \cos^2\alpha - \frac{1}{2} mV_0^2 = -mgh \Longrightarrow V_0^2 - V_0^2 . \cos^2\alpha = 2gh$$

$$V_0^2(1 - \cos^2\alpha) = 2gh \Longrightarrow h = \frac{V_0^2}{2g}(1 - \cos^2\alpha) ;$$

d'où $$\boxed{h = \frac{V_0^2 . \sin^2\alpha}{2g}}$$

....

LA PHYSIQUE AU SERVICE

DE L'HOMME MODERNE.

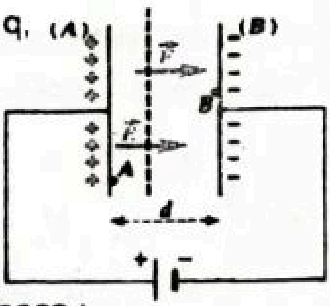
(Konaté Cheickna)

2.3.2 – MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGEE DANS UN CHAMP ELECTROSTATIQUE UNIFORME.

Réalisation d'un champ électrostatique uniforme ($rapel$).

On obtient un champ électrostatique uniforme en appliquant une d.d.p (tension) entre deux plaques conductrices, parallèles, séparées par une distance d.

Un tel dispositif constitue un condensateur.



Dans un champ électrostatique, une particule de charge q, est soumise à la force électrostatique : $\vec{F} = q\vec{E}$.

- Si $q > 0$: $\vec{F}$ et $\vec{E}$ ont même sens.
- Si $q < 0$: $\vec{F}$ et $\vec{E}$ sont de sens contraires.

Le poids de la particule est négligeable devant cette force, qui est constante si le champ électrostatique est uniforme. En chaque point de cet espace :

- le vecteur $\vec{E}$, est orthogonal aux armatures du condensateur ;
- dirigé vers l'armature négative (potentiels décroissants) ;
- En posant $V_A - V_B = U$, l'intensité du champ $\vec{E}$ est donnée par la relation :

$$\boxed{E = \frac{U}{d}} \quad \begin{cases} U \text{ en volt } (V) \\ d \text{ en mètre } (m) \\ E \text{ en volt par mètre } (V/m) \end{cases}$$

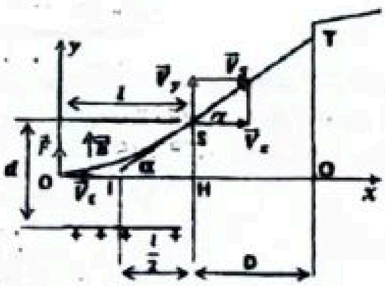
ETUDE DU MOUVEMENT DE LA PARTICULE.

Données préliminaires.

Une particule de masse m et de charge q pénètre en O, dans une région de l'espace où règne un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$ avec une vitesse initiale $\vec{V}_0$ orthogonale à $\vec{E}$. La particule en sort et va heurter un écran vertical situé à une distance D du point de sortie S.

Faites une étude complète de son mouvement.

a) Accélération de la particule.



- Système : la particule.
- Référentiel : terrestre (supposé galiléen).
- Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la force électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}$.
- Théorème du centre d'inertie :

$$\sum \vec{F}ex = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$$

Or : $P \ll F$; le théorème du centre d'inertie devient :

$$\vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

d'où $$\boxed{\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}}$$

b) Equations vectorielles du mouvement.

Soit $\vec{V}$ le vecteur vitesse de la particule et $\overrightarrow{OM}$ son vecteur position à la date t.

On a : $$\begin{cases} \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} \\ \vec{V} = \vec{a}t + \vec{V}_0 \\ \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{V}_0 t + \overrightarrow{OM}_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} \\ \vec{V} = \frac{q\vec{E}}{m} t + \vec{V}_0 \\ \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\frac{q\vec{E}}{m} t^2 + \vec{V}_0 t + \overrightarrow{OM}_0 \end{cases}$$

c) Equations horaires du mouvement.

Les équations horaires s'obtiennent par projection des équations vectorielles :

$$\boxed{\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \frac{qE}{m} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} V_x = V_0 \\ V_y = \frac{qE}{m} t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = V_0 t \\ y = \frac{1}{2}\frac{qE}{m} t^2 \end{cases}}$$

d) Equation cartésienne de la trajectoire.

On élimine t entre x et y :

$$\begin{cases} x = V_0 t \\ y = \frac{1}{2}\frac{qE}{m} t^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{V_0} \\ y = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}\left(\frac{x}{V_0}\right)^2 \end{cases}$$

d'où $$\boxed{y = \frac{1}{2}\frac{q.E}{m.V_0^2} x^2} \quad (0 \leq x \leq l).$$

La trajectoire est une parabole **(le mouvement est parabolique)**.

Si U est la tension entre les plaques et d leur distance, l'équation de la trajectoire devient :

$$\boxed{y = \frac{1}{2}\frac{q.U}{md.V_0^2} x^2}$$

e) Coordonnées de la particule à la sortie du champ.

A la sortie du champ :

$$\boxed{x_S = l \quad et \quad y_S = \frac{1}{2}\frac{q.U}{md.V_0^2}l^2}$$

f) Vitesse de la particule à la sortie du champ.

On a : $V_S = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = V_0 \quad \text{et} \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{qE}{m}\text{t}$$

La durée de la traversée du champ est :

$$x_S = l = V_0 t \Longrightarrow t = \frac{l}{V_0} \quad ; \quad \text{alors :} \quad V_y = \frac{qE.l}{m.V_0}$$

d'où $$\boxed{V_S = \sqrt{V_0^2 + \left(\frac{qE.l}{m.V_0}\right)^2}}$$

Remarque ;

Le théorème de l'énergie cinétique, appliqué à la particule entre O et S, permet de retrouver ce résultat.

g) Nature et équation de la trajectoire après la sortie du champ.

Au-delà de S, la particule n'est soumise à aucune force **($F = 0$ *et* $P \approx 0$)**, alors son mouvement est rectiligne uniforme **(principe de l'inertie)** ; la trajectoire est donc une droite tangente en S à la parabole d'équation :

$$y = f'(x_S)(x - x_S) + y_S \; ; \quad \text{avec} \quad f'(x_S) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_S = \frac{q.E.l}{m.V_0^2} \; ;$$

alors : $$y = \frac{q.E.l}{m.V_0^2}(x - l) + \frac{1}{2}\frac{q.E}{m.V_0^2}l^2 \Longrightarrow y = \frac{q.E.l}{m.V_0^2}\left(x - l + \frac{l}{2}\right)$$

d'où $$\boxed{y = \frac{q.E.l}{m.V_0^2}\left(x - \frac{l}{2}\right)}$$

Remarque.

Cette droite coupe l'axe des abscisses au point I tel que :

$$y = 0 \Longrightarrow x - \frac{l}{2} = 0 \Longrightarrow x = \frac{l}{2}$$

d'où $$\boxed{x_I = \frac{l}{2}}$$

Donc , le point I est au milieu des armatures.

h) Déviation et déflexion électrostatiques.

*** Déviation électrostatique.**

La déviation électrostatique est l'angle α que font les vecteurs vitesses à l'entrée et à la sortie du champ.

Déterminons la valeur α de cette déviation.

1ère méthode : Dans le triangle rectangle ISH, on a :

$$\tan\alpha = \frac{SH}{IH} = \frac{y_S}{l/2} \Longrightarrow \boxed{\tan\alpha = \frac{q.E.l}{m.V_0^2}}$$

2ème méthode. $\tan\alpha$, est la pente de la tangente à la parabole au point S d'abscisse $x = l$.

$$\tan\alpha = f'(x_S) = \left(\frac{dy}{dt}\right)_S = \frac{q.E.l}{m.V_0^2}$$

d'où $\boxed{\tan\alpha = \frac{q.E.l}{m.V_0^2}}$

3ème méthode.

On a : $\tan\alpha = \frac{V_y}{V_x} = \frac{\frac{qE.l}{m.V_0}}{V_0} \Longrightarrow \boxed{\tan\alpha = \frac{q.E.l}{m.V_0^2}}$

*** Déflexion électrostatique.**

La déflexion est le déplacement vertical que subit la particule sur l'écran. Elle correspond à l'ordonnée du point d'impact sur l'écran fluorescent.

Déterminons la déflexion (déviation linéaire).

1ère méthode. Dans le triangle ITO', on a :

$$\tan\alpha = \frac{y_T}{D + \frac{l}{2}} \Longrightarrow y_T = \left(D + \frac{l}{2}\right)\tan\alpha$$

d'où $\boxed{y_T = \frac{q.E.l}{m.V_0^2}\left(D + \frac{l}{2}\right)}$

2ème méthode.

Appliquons le théorème de Thales dans les triangles ISH et ITO'.

$$\frac{y_T}{y_S} = \frac{IO'}{IH} \Longrightarrow y_T = y_S \cdot \frac{D + \frac{l}{2}}{\frac{l}{2}} \Longrightarrow y_T = \frac{2}{l} \cdot \frac{1}{2}\frac{q.E}{m.V_0^2}\, l^2 \left(D + \frac{l}{2}\right)$$

d'où $\boxed{y_T = \frac{q.E.l}{m.V_0^2}\left(D + \frac{l}{2}\right)}$

3ème méthode.

On exprime que le point T appartient à la droite tangente, c'est-à-dire :

$$y_T = \frac{q.E.l}{m.V_0^2}\left(x_T - \frac{l}{2}\right) \Longrightarrow y_T = \frac{q.E.l}{m.V_0^2}\left(D + l - \frac{l}{2}\right)$$

d'où $$\boxed{y_T = \frac{q.E.l}{m.V_0^2}\left(D + \frac{l}{2}\right)}$$

i) Etude énergétique.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à la particule entre deux points A et B :

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}ex) \Longleftrightarrow \frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = q\,(V_A - V_B)$$

Soit : $\frac{1}{2}mV_B^2 + q\,V_B = \frac{1}{2}mV_A^2 + q\,V_A \Longleftrightarrow E_{CB} + E_{PB} = E_{CA} + E_{PA}$

d'où $$\boxed{E_m = Cste.}$$

Cette relation traduit la conservation de l'énergie totale de la particule.

Remarque.

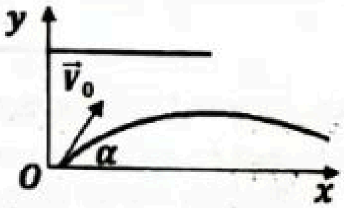
L'énergie potentielle de pesanteur n'intervient pas, le poids de la particule étant négligeable.

ETUDE DU CAS GENERAL.

La particule pénètre dans le champ avec une vitesse initiale $\vec{V}_0$, faisant l'angle α avec le plan horizontal.

Accélération de la particule.

Le poids étant négligeable, la particule n'est soumise qu'à la seule force électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}$.



Donc, le théorème du centre d'inertie s'écrit :

$$\vec{F} = m\vec{a} \Longleftrightarrow q.\vec{E} = m\vec{a}$$

d'où $$\boxed{\vec{a} = \frac{q.\vec{E}}{m}}$$

On en déduit les équations horaires : :

$$\boxed{\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \frac{qE}{m} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} V_x = V_0 \cos\alpha \\ V_y = \frac{qE}{m}t + V_0 \sin\alpha \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = (V_0 \cos\alpha)t \\ y = \frac{1}{2}\cdot\frac{qE}{m}t^2 + (V_0 \sin\alpha)t \end{cases}}$$

En éliminant le temps t entre x et y, on obtient l'équation de la trajectoire :

$$\boxed{y = \frac{1}{2}\frac{qE}{mV_0^2 Cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha}$$

Trois cas sont particulièrement intéressants par leurs applications :

$\vec{V}_0 = \vec{0}$; $\vec{V}_0 \mathbin{/\!/} \vec{E}$; $\vec{V}_0 \perp \vec{E}$.

1er cas : vitesse initiale négligeable ($\vec{V}_0 \approx \vec{0}$).

•Si $\vec{V}_0 = \vec{0}$: les particules ont un mouvement rectiligne uniformément accéléré dont la direction est celle de $\vec{E}$ et les équations horaires du mouvement peuvent s'écrire ::

$$\boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \cdot \frac{qE}{m} t^2 \end{cases}}$$

C'est ce qui se passe dans le canon à électrons.

2ème cas : vecteur vitesse initiale colinéaire au vecteur champ $\vec{E}$.

• Si $\vec{V}_0 \mathbin{/\!/} \vec{E}$, les particules ont un mouvement rectiligne uniformément varié (accéléré ou retardé) dont la direction est celle de $\vec{E}$ et les équations horaires peuvent s'écrire ::

$$\boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \cdot \frac{qE}{m} t^2 + V_0 t \end{cases}}$$

C'est ce qui se produit dans les étages de l'accélérateur linéaire.

3ème cas : vecteur vitesse initiale $\vec{V}_0$ orthogonal à $\vec{E}$ ($\vec{V}_0 \perp \vec{E}$).

Dans ce cas l'angle $\alpha = 0$ et les lois horaires s'écrivent :

$$\boxed{\begin{cases} x = V_0 . t \\ y = \frac{1}{2} \cdot \frac{qE}{m} t^2 \end{cases}}$$

La trajectoire est une portion de parabole d'équation : $\boxed{y = \frac{1}{2} \cdot \frac{q.E}{m} x^2}$

C'est ce qui se passe dans l'oscilloscope électronique.

N.B : Il faut être très attentif au signe de la charge, au nombre de charges élémentaires portées par la particule et au sens de $\vec{E}$.

....

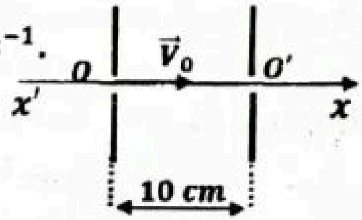
LA PHYSIQUE AU SERVICE DE L'HOMME MODERNE.

(Konaté Cheickna)

EXERCICES ET PROBLEMES RESOLUS.

Problème 1 : (Eurin-gié , Exo 4. 7 , page 76).

Un proton H^+ est animé d'une vitesse $V_0 = 1\,500\ \mathbf{km.s^{-1}}$. Il pénètre entre deux électrodes A et B, sous tension et distantes de 10 cm, parallèlement aux lignes de champ électrostatique. Il décrit un mouvement rectiligne suivant OO' (figure).
On admettra que le champ est uniforme entre les deux plaques et que le poids du proton est négligeable.



1°) Le proton arrive en O' avec la vitesse de $2\,000\ \mathbf{km.s^{-1}}$.
Calculer la tension $U_{AB} = V_A - V_B$.

2°) Quelle est la durée du trajet OO' ?

Donnée : $m_p = 1,66.10^{-27} kg$.

....**Résolution** ....

1°) Calcul de la tension U_{AB}.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au proton entre A et B :

$$\frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = qU_{AB}. \Longrightarrow \boxed{U_{AB} = \frac{m(V^2 - V_0^2)}{2q}}$$

$$\text{AN : } U_{AB} = \frac{1{,}66.10^{-27}\left[(2.10^6)^2 - (15.10^5)^2\right]}{2 \times 1{,}6.10^{-19}} = 9078\ V$$

d' où $\boxed{U_{AB} = 9078\ V}$

2°) Durée du trajet OO'.

Le mouvement est rectiligne uniformément accéléré :

$$\begin{cases} V = at + V_0 \\ x = d = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t \end{cases} \Longrightarrow d = \frac{(V + V_0)t}{2}$$

d' où $\boxed{t = \frac{2d}{V + V_0}}$ AN : $\boxed{t \approx 57.10^{-9}\ s = 57\ ms}$

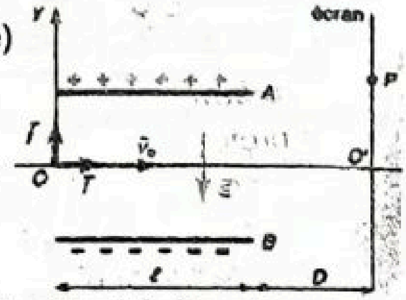
....

Problème 2 : (Eurin-gié , Exo 4. 8 , page 76).

On maintient entre les plaques (figure) une différence de potentiel $U = 100\ V$.
La longueur de ces plaques est $l = 2\ cm$ et leur distance est $d = 1\ cm$.
Un électron est injecté dans une direction perpendiculaire au champ avec une vitesse initiale $\vec{V_0} = V_0\,\vec{\imath}$ $(V_0 = 10^7\ m.s^{-1})$ au point O milieu des plaques.

1°) Calculer le champ électrique (supposé uniforme) entre les deux plaques.

2°) L'électron sort de la région où règne le champ électrique en un point S. Calculer les coordonnées de S et celles du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_S}$ en ce point. En déduire V_S. On néglige le poids de l'électron.



3°) On place un écran à la distance $D = 50\ cm$ de l'extrémité des plaques. Quelle est la position du point d'impact de l'électron sur l'écran ?

On donne : $m_e \approx 9,1.10^{-31}\ kg$; $e = 1,6.10^{-19}\ C$.

Réponses : 1°) $E = 10^4\ V/m$; **2°)** $x_S = 2.10^{-2}\ m$; $y_S = 3,5.10^{-3}\ m$;

$V_x = V_0 = 10^7\ m.s^{-1}$; $V_y = 3,5.10^6\ m.s^{-1}$;

$V_S \approx 1,0610^7\ m.s^{-1}$; **3°)** $y_P \approx 1,8\ cm$.

....**Résolution**..

1°) Champ électrique entre les plaques.

Le champ électrique qui règne entre les plaques est :

$$E = \frac{U}{d} = \frac{100}{10^{-2}} = 10^4\ V \Longrightarrow E = 10^4\ V$$

2°) Coordonnées du point de sortie.

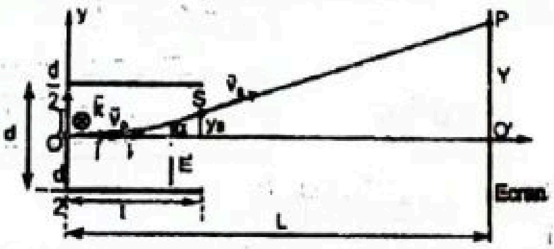
Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$.

Le théorème du centre d'inertie donne :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$$

Comme $P << F$, le T.C.I. devient :

$$\vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m}$$



Projetons sur les axes :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \dfrac{qE}{m} = \dfrac{eE}{m} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = V_0 t \\ y = \dfrac{1}{2}\dfrac{eE}{m}t^2 \end{cases}$$

En éliminant t entre x et y, on obtient l'équation de la trajectoire :

$$y = \frac{1}{2}\frac{eE}{mV_0^2}x^2 \text{ ; avec } 0 \le x \le l$$

A la sortie des plaques :

$$\boxed{x_S = 2\ cm = 2.10^{-2}\ m} \quad \text{et} \quad \boxed{y_S = \frac{1}{2}\frac{eE}{mV_0^2}l^2 = 3,5.m^{-3}}$$

Cordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_S}$.

$$V_x = \frac{dx}{dt} = V_0 \quad \text{et} \quad V_Y = \frac{dy}{dt} = \frac{qE}{m}t$$

La durée de la traversée est :

$$x_S = V_0 t \Longrightarrow t = \frac{l}{V_0}$$

d' où $\boxed{\begin{cases} V_x = V_0 \\ V_y = \frac{qE.l}{m} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} V_x = 10^7\ m.s^{-1} \\ V_y = 3,5.10^6\ m.s^{-1} \end{cases}}$

Déduisons-en V_S :

$$V_S = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(10^7)^2 + (3,6.10^6)^2} = 1,059.10^7\ m.s^{-1}$$

d' où $\boxed{V_S \approx 1,06.10^7\ m.s^{-1}}$

3°) Déflexion électrostatique.

1ère méthode : d'après le schéma :

$$\tan\alpha = \frac{y_S}{D + \frac{l}{2}} \Longrightarrow y_P = \left(D + \frac{l}{2}\right)\tan\alpha \quad \text{or :} \quad \tan\alpha = \left(\frac{dy}{dx}\right)_S = \frac{qE.l}{mV_0^2}$$

d' où $\boxed{y_P = \frac{qE.l}{mV_0^2}\left(D + \frac{l}{2}\right)}$ AN : $\boxed{y_P = 1,8\ cm}$

2ème méthode.

L'application du théorème de Thales dans les triangles ISH et IPO' donne :

$$\frac{O'P}{HS} = \frac{IO'}{IH} \Longleftrightarrow \frac{y_P}{y_S} = \frac{D + \frac{l}{2}}{\frac{l}{2}} \Longrightarrow y_P = \frac{2}{l}\, y_S\left(D + \frac{l}{2}\right)$$

d' où $\boxed{y_P = \frac{qE.l}{mV_0^2}\left(D + \frac{l}{2}\right)}$ AN : $\boxed{y_P = 1,8\ cm}$

....

Problème 3 : (Eurin-gié , Exo 4. 10 , page 77).

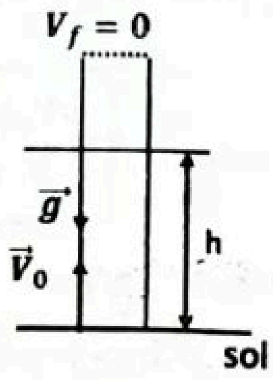
Un projectile est lancé verticalement de la surface du sol. Un système de détection enclenche un chronomètre à l'instant du départ et enregistre les dates t_1 et t_2 de passage du projectile dans le plan horizontal d'altitude h. Déterminer la vitesse de lancement v_0 et l'altitude h en fonction des dates t_1 et t_2.

Application numérique : $t_1 = 0,875$ s ; $t_2 = 9,329$ s ; $g = 9,81$ m.s -2.

....Résolution ....

Expression de V_0 et h en fonction de t_1 et t_2.

On a : $h_1 = -\frac{1}{2}gt_1^2 + V_0t_1$; $h_2 = -\frac{1}{2}gt_2^2 + V_0t_2$



Dans le plan horizontal d'altitude h :

$$h = h_1 = h_2 \Longrightarrow -\frac{1}{2}gt_1^2 + V_0t_1 = -\frac{1}{2}gt_2^2 + V_0t_2$$

$$\frac{1}{2}g(t_2^2 - t_1^2) = V_0(t_2 - t_1) \Longrightarrow \frac{1}{2}g(t_2 + t_1) = V_0$$

d' où $$\boxed{V_0 = \frac{1}{2}g(t_2 + t_1)}$$

L' altitude h est donnée par :

$$h = h_1 = -\frac{1}{2}gt_1^2 + \frac{g}{2}(t_2 + t_1)t_1 \Longrightarrow h = -\frac{1}{2}gt_1^2 + \frac{1}{2}gt_1^2 + \frac{1}{2}gt_1t_2$$

d' où $$\boxed{h = \frac{1}{2}gt_1t_2}$$

AN : • $V_0 = \frac{9,81}{2}(0,875 + 9,329) = 49,9\, m.s^1$

• $h = \frac{1}{2} \times 9,81 \times 0,875 \times 9,329 = 40,07\, m$

d' où $\boxed{V_0 \approx 50\, m.s^{-1}}$ $\boxed{h \approx 40\, m}$

....

Problème 4 : (Eurin-gié , Exo 4. 11 , page 77).

Deux billes identiques A et B, assimilables à des points matériels, partent en même temps d'un point O situé à la hauteur h = 30 m par rapport au sol dans les conditions initiales suivantes :

- la bille A, n'a pas de vitesse initiale ;
- la vitesse initiale $\vec{V}_0$ de la bille B est parallèle au sol, avec $V_0 = 10\, m.s^{-1}$.

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormal tel que $(O, \vec{\imath})$ soit dirigé vers $\vec{V}_0$ et que l'axe $(O, \vec{\jmath})$ soit vertical descendant.

1° Etablir les équations horaires des mouvement et l'équation cartésienne des trajectoires. ($g = 9,8\, m.s^{-2}$).

2°) Calculer les hauteurs de chute des deux billes au bout d'une seconde.
3°) Déterminer la distance qui sépare sur le sol les deux points de chute.
4°) Représenter sur un schéma à une date t quelconque les positions des deux billes en mouvement.

....**Résolution** ....

1°) Equations horaires des billes A et B.

• Equation horaire de la bille A.

C'est une chute libre sans vitesse initiale :

$$\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = \frac{1}{2}\, gt^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 4,9t^2 \end{cases}$$

• Equation horaire de la bille B.

C'est une chute parabolique :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_B = V_0 t \\ y_B = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_B = 10t \\ y_B = 4,9t^2 \end{cases}$$

Equations cartésiennes des trajectoires.

$$\boxed{\begin{matrix} x_A = 0 \\ y_A = \frac{1}{2}\, gt^2 \end{matrix}} \quad \text{et} \quad \boxed{y_B = \frac{g}{2V_0^2} x^2}$$

2°) Hauteurs de chute de A et B au bout de 1 s.

On a : $h_A = h_B = 4,9(1)^2 \Longrightarrow \boxed{h_A = h_B = 4,9\ m}$

3°) Distance séparant les deux points d'impact.

Cette distance correspond à l'abscisse du point B au sol : d = x_B

A leur arrivée au sol :

$y_B = h = \frac{g}{2V_0^2} x^2$ $\boxed{x_B = V_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}}$ d' où $\boxed{d = x_B = 14,7\ m}$

....

Problème 5 : (Eurin-gié , Exo 4. 12 , page 77).

Un canon tire une cible éloignée de d = 6 km, située en C dans le même plan horizontal. La vitesse initiale de l'obus est de $V_0 = 300\ m.s^{-1}$. ($g = 9,8\ m.s^{-2}$)

1°) On rappelle que la trajectoire de l'obus est définie par :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{V}_0 t$$

Calculer les coordonnées du vecteur vitesse et celles du vecteur position dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Ecrire l'équation cartésienne de la trajectoire.

2°) Déterminer littéralement, puis numériquement les deux angles de tir possibles α_1 et α_2 (tir tendu et tir en cloche).

3°) En envisageant les deux cas précédents, déterminer

a) la hauteur maximale atteinte ;

b) le temps mis pour atteindre le point C .

4°) A quelle vitesse l'obus arrive-il en C avec la vitesse $\vec{V}_0$ et les angles de tir calculés ci – dessus,

L'obus pourrait -iil réellement atteindre la cible ? Pourquoi ?

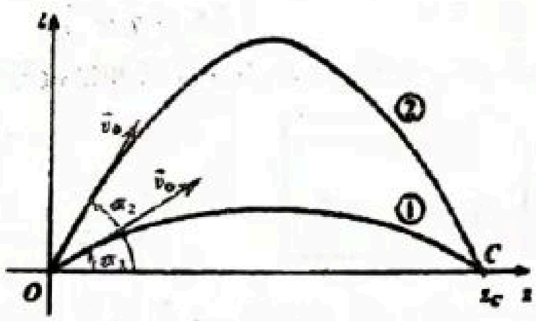
………………………………………**Résolution** ………………………………………

1°) Coordonnées du vecteur vitesse.

Par définition : $\vec{V} = \dfrac{d(\overrightarrow{OM})}{dt} \Longrightarrow \vec{V} = \vec{g}t + \vec{V}_0$

En projetant $\vec{V}$ sur les axes on obtient :

$$\begin{cases} V_x = V_0 \cos\alpha \\ V_y = -gt + V_0 \sin\alpha \end{cases}$$



Coordonnées du vecteur position :

Projetons $\overrightarrow{OM}$ sur les axes :

$$\begin{cases} x = (V_0 \cos\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin\alpha)t \end{cases}$$

Equation de la trajectoire.

En éliminant t entre x et y , on obtient l'équation de la trajectoire :

$$\boxed{y = -\frac{g}{2V_0^2 cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha}$$

2°) Angles de tir α_1 et α_2 .

1ère méthode.

La cible $C\binom{d}{0}$ est alors située sur la trajectoire :

$$0 = -\frac{g}{2V_0^2 cos^2\alpha}d^2 + d\tan\alpha \Longrightarrow -gd + V_0^2(2\cos\alpha\sin\alpha) = 0$$

d' où $$\boxed{\sin 2\alpha = \frac{gd}{V_0^2}}$$

Cette équation admet deux solutions α_1 et α_2 telles que: $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$

AN : $\sin 2\alpha_1 = \dfrac{9{,}8\times 6{,}10^3}{V_0^2} = 0{,}653 \Longrightarrow 2\alpha_1 = 40{,}8°$

d' où $\boxed{\alpha_1 = 20,4°}$ $\boxed{\alpha_2 = 69,6°}$

2ème méthode.

En remarquant que : $\frac{1}{cos^2\alpha} = 1 + tan^2\alpha$, on obtient l'équation du second degré en $\tan\alpha$: $\frac{gd}{2V_0^2} tan^2\alpha - \tan\alpha + \frac{gd}{2V_0^2} = 0$

3°) a) Calcul des flèches correspondantes.

La flèche est l'altitude maximale atteinte par le projectile. Elle est donnée par la relation :

$$\boxed{h = \frac{V_0^2 sin^2\alpha}{2g}}$$

On trouve : $\boxed{h_1 \approx 560\ m}$ $\boxed{h_2 = 4034\ m}$

b) Temps mis pour atteindre le point C.

A l''arrivée en C : $x_C = d = (V_0 \cos\alpha)t \Longrightarrow \boxed{t = \frac{d}{V_0 \cos\alpha}}$

AN : $\boxed{t_1 = 21,3\ s}$ $\boxed{t_2 = 57,4\ s}$

4°) Vitesse d'arrivée en C.

L'application du théorème de l'énergie cinétique entre O et C donne :

$$\frac{1}{2}mV_C^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = -mgh + mgh = 0 \Longrightarrow V_C^2 = V_0^2$$

d' où $\boxed{V_C = V_0 = 300\ m.s^{-1}}$

Non, à cause de l'influence de l'air qui se manifeste de deux façons : la résistance de et la poussée d'Archimède.

....

Problème 6 : (Eurin-gié , Exo 4. 13 , page 77).

Au cours d'un championnat, un athlète remporte l'épreuve du lancement de poids avec un jet de x_1 = 19,43 m. Le poids a une masse de 7,45 kg.

La trajectoire part de A à une hauteur h = 1,80 m au-dessus du sol. Le vecteur vitesse $\vec{V}_0$ fait un angle α = 45° avec l'horizontale.

On assimile le projectile à un solide ponctuel. ($g = 9,8\, m.s^{-2}$).

1°) Etablir l'équation cartésienne de la trajectoire en fonction de h, $\tan\alpha$ et g.

2°) Déterminer la norme de la vitesse initiale en fonction de h, α, g et x_1.

3°) Calculer la hauteur maximale h_{max} atteinte par le projectile et les coordonnées du vecteur vitesse au sommet de la trajectoire.

4°) Déterminer la norme et la direction du **vecteur vitesse du projectile au sol en C.**

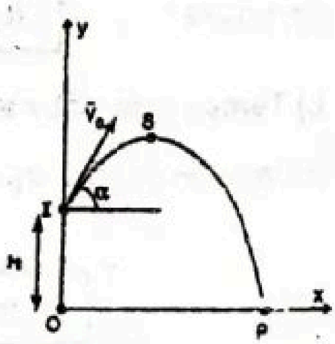
....**Résolution** ....

1°) Equation de la trajectoire en fonction de h , α et g.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$.

D'après le théorème du centre d'inertie :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a} \iff m\vec{a} = m\vec{a} \implies \vec{a} = \vec{g}$$



Projetons sur les axes :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \implies \begin{cases} x = (V_0 \cos\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin\alpha)t + h \end{cases}$$

En éliminant t entre x et y , on obtient

$$\boxed{y = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha + h}$$

ou $$\boxed{y = -\frac{g}{2V_0^2}(1 + \tan^2\alpha)x^2 + x\tan\alpha + h}$$

2°) Norme de v_0 en fonction h, α, g et x_1.

Lorsque le projectile atteint le sol en C : $x = x_1$ et $y = 0$; alors :

$$-\frac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha}x_1^2 + x_1 \tan\alpha + h = 0 \implies \boxed{V_0 = \frac{x_1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(x_1 \tan\alpha + h)}}}$$

AN : $V_0 = \frac{x_1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(x_1 \tan\alpha + h)}} = 13,2\, m.s^{-1} \implies \boxed{V_0 = 13,2\, m.s^{-1}}$

3°) Hauteur maximale atteinte par le projectile.

La hauteur maximale est atteinte quand :

$$V_y = \frac{dy}{dt} = 0 \Longleftrightarrow -gt + V_0 \sin\alpha = 0 \Longrightarrow t = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$$

donc : $h_{max} = y_S = -\frac{1}{2} g \left(\frac{V_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + (V_0 \sin\alpha)\left(\frac{V_0 \sin\alpha}{g}\right) + h$

d' où $\boxed{h_{max} = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha +}{2g} + h}$ AN : $\boxed{h_{max} = 6,2\ m}$

Autre méthode.

Au sommet de la trajectoire (altitude maximale) :

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Longrightarrow \boxed{h_{max} = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha +}{2g} + h}$$

Coordonnées du vecteur vitesse au sommet de la trajectoire.

Au sommet de la trajectoire : $V_y = 0$;

d' où $\begin{cases} V_x = V_0 \cos\alpha \\ V_y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} V_x = 9,33\ m.s^{-1} \\ V_y = 0 \end{cases}$

4°) Norme et direction du vecteur vitesse au point C.

On a : $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V_0^2 \sin^2\alpha + (-gt + V_0 \sin\alpha)^2}$

d' où $\boxed{V = \sqrt{V_0^2 + 2gh}}$ AN : $\boxed{V_C = 14,5\ m.s^{-1}}$

L'angle $\beta = (\vec{\imath}, \vec{V})$ est donnée par :

$$\tan\beta = \frac{V_x}{V_C} = \frac{9,33}{14,5} = 0,643 \Longrightarrow \boxed{\beta = 49,9° \approx 50°}$$

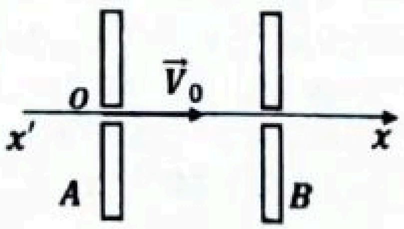
Problème 7 : (Eurin-gié , Exo 4. 18 , page 79).

Une particule α (ion He^{2+}), animée d'une vitesse $V_0 = 1500\ km.s^{-1}$, est accélérée entre deux électrodes A et B distantes de 10 cm (figure).

1°) Quelle doit être le signe de la tension U_{AB} ?

2°) Donner la valeur de U_{AB} sachant qu'en B la vitesse de la particule est égale à 2000 km.s $^{-1}$.

3°) En admettant que le champ électrique est uniforme entre A et B, calculer la durée du trajet AB.



Donnée : $m_\alpha = 6,64.10^{-27}\ kg.$

....Résolution ....

1°) Signe de la tension U_{AB}.

La particule α de charge ($q > 0$) étant accélérée, doit être repoussée par la plaque A et attirée par la plaque B, donc :

$$v_A > v_B \Longrightarrow v_A - v_B > 0$$

d' où $\boxed{U_{AB} > 0}$

La tension U_{AB} est donc positive.

2°) Valeur de la tension U_{AB}.

Le théorème de l'énergie cinétique donne:

$$\frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = qU_{AB}. \Longrightarrow \boxed{U_{AB} = \frac{m(V^2 - V_0^2)}{2q}}$$

AN : $q = 2e = 3,2.10^{-19}\ C$; d' où $\boxed{U_{AB} = 18156\ V}$

3°) Durée du trajet AB:

Le mouvement est rectiligne uniformément accéléré :

$$\begin{cases} V = at + V_0 \\ x = d = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t \end{cases} \Longrightarrow d = \frac{(V + V_0)t}{2}$$

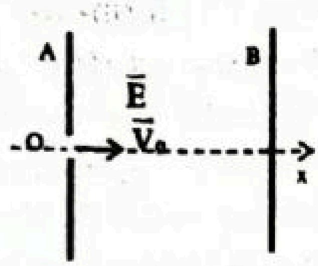
d' où $\boxed{t = \frac{2d}{V + V_0}}$ AN : $\boxed{t \approx 57.10^{-9}\ s = 57\ ms}$

....

Problème 8 : (Eurin-gié , Exo 4. 19 , page 79).

Un électron sort d'un canon à électron à la vitesse $V_0 = 30\,000\ km.s^{-1}$ et pénètre dans une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme créé par deux électrodes A et B distantes de 10 cm (figure).

1°) Quelle doit être le signe de la tension U_{AB} si l'on veut que le mouvement de l'électron soit retardé entre les deux électrodes?



2°) Donner la valeur de U_{AB} afin que l'électron arrive au voisinage de B avec une vitesse nulle.

3°) On impose U_{AB} = 100 V. Donner l'équation $t \to x(t)$ de l'électron. Calculer la durée du trajet AB.

Donnée : $m_e = 9,1.10^{-31}\ kg.$

..Résolution ....

1°) Signe de la tension U_{AB}.

L'électron de charge négative ($q = -e$) étant freiné, doit être attiré par l'électrode A et repoussé par l'électrode B, donc :

$$v_A > v_B \Longrightarrow v_A - v_B > 0$$

d' où $\boxed{U_{AB} > 0}$

La tension U_{AB} est donc positive.

2°) Valeur de la tension U_{AB}.

Le théorème de l'énergie cinétique donne:

$$0 - \frac{1}{2} mV_0^2 = qU_{AB}. \Longrightarrow \boxed{U_{AB} = \frac{mV_0^2}{2e}} \quad \text{AN :} \quad \boxed{U_{AB} = 2560\,V}$$

NB : Il est souvent commode d'utiliser la conservation de l'énergie mécanique.

3°) Equation horaire x = f(t).

Le mouvement est rectiligne uniformément retardé d'équation :

$$x = \frac{1}{2} at^2 + V_0 t$$

L'accélération a est obtenue à l'aide du T.C.I.

$$\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow a = \frac{F}{m} = -\frac{eU}{m} \qquad (P \ll F)$$

d' où $\boxed{x = -\frac{1}{2}\frac{eU}{m} t^2 + V_0 t}$

Durée du trajet AB.

La durée t du trajet est la solution positive de l'équation :

$$\frac{1}{2}\frac{eU}{m} t^2 - V_0 t + d = 0 \Longrightarrow \boxed{t = 3{,}4.10^{-9}\,s}$$

....

LA PHYSIQUE AU SERVICE DE L'HOMME MODERNE.

(Konaté Cheickna)

EXERCICES ET PROBLEMES COMPLEMENTAIRES

Problème 9 . (Extrait du Bac, SE, Guinée 2005).

A partir du sol horizontal, une bille de masse m, est lancée avec une vitesse $V_0 = 12$ m/s, suivant un angle de tir $\alpha = 30°$.

a) Etablir les équations horaires des coordonnées d'un point de sa trajectoire

b) Donner l'équation de la trajectoire.

c) Calculer la portée du lancé de la bille et sa flèche.

Réponses : a) $\begin{cases} x = 6\sqrt{3} \\ y = -5t^2 + 6t \end{cases}$; **b)** $y = -\frac{5}{108}x^2 + \frac{x}{\sqrt{3}}$;

c) $= 12,47\ m$; $h = 1,8\ m$.

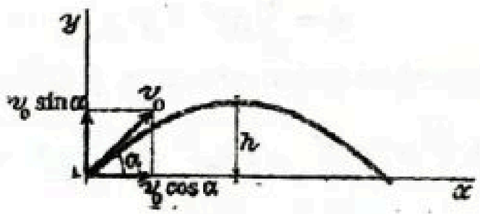
.... **Résolution** ....

a) Equations horaires des coordonnées d'un point de la trajectoire.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$.

D'après le théorème du centre d'inertie :

$$\Sigma\vec{F}ex = m\vec{a} \Longrightarrow m\vec{g} = m\vec{a}$$
$$\vec{a} = \vec{g}$$



Projetons sur les axes de coordonnées :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = (V_0 \cos\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin\alpha)t \end{cases}$$

d' où $\boxed{\begin{cases} x = 6\sqrt{3}.t \\ y = -5t^2 + 6t \end{cases}}$

b) Equation de la trajectoire.

En éliminant t entre x et y on obtient l'équation de la trajectoire :

$$\boxed{y = -\frac{g}{2.V_0^2.cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha} \Longrightarrow \boxed{y = -\frac{5}{108}x^2 + \frac{x}{\sqrt{3}}}$$

c) Potée du tir.

A l'arrivée au sol :

$$y = 0 \Longrightarrow -\frac{g}{2.V_0^2.cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \ (départ) \\ -\dfrac{g}{2.V_0^2.cos^2\alpha}\ x + \tan\alpha = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{V_0^2(2\cos\alpha.\sin\alpha)}{g} \end{cases}$$

d' où $\boxed{d = x = \dfrac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}}$ AN : $\boxed{d = 12,47\ m}$

Flèche du tir.

A l'altitude maximale :

$$V_y = \frac{dy}{dt} = 0 \Longleftrightarrow -gt + V_0 \sin\alpha = 0 \Longrightarrow t = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$$

En remplaçant t dans y, on obtient la flèche du tir :

$\boxed{h = \dfrac{V_0^2.sin^2\alpha}{2g}}$ AN : $\boxed{h = 1,8\ m}$

....

Problème 10 . (Extrait du Bac, SE, Guinée 2008,).

On lance un projectile de masse m = 100 g avec une vitesse initiale V_0 = 30 m/s à partir du sol horizontal. L'angle de tir vaut α = 60°.

1- Déterminer l'équation de la trajectoire dans un repère lié au sol, dont l'origine coïncide avec le point de lancement.

2- Calculer la flèche du tir.

3- Quelle doit être la valeur de l'angle de tir pour que la flèche soit maximale ? Quelle hauteur le projectile atteint-il alors ?

4- Calculer l'énergie cinétique du projectile lorsqu'il atteint le point culminant.

.... **Solution abrégée** ....

1°) Equation de la trajectoire.

$\boxed{y = -\dfrac{g}{2.V_0^2.cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha} \Longrightarrow \boxed{y = -2,2.10^{-2}x^2 + 1,73x}$

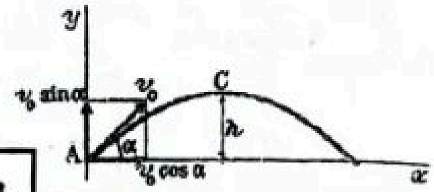
2°) Flèche du tir.

$\boxed{h = \dfrac{V_0^2.sin^2\alpha}{2g}}$ AN : $\boxed{h = 34,4\ m}$

3°) Angle de tir pour que la flèche soit maximale.

La flèche est maximale quand :

$\sin\alpha = 1 \Longrightarrow \boxed{\alpha = 90°}$



Hauteur correspondante :

$\boxed{h = \frac{V_0^2}{2g}}$ AN : $\boxed{h = 46\,m}$

4°) Energie cinétique du projectile.

$E_C = \frac{1}{2}\, mV_0^2 cos^2\alpha = 11,25\,J \Longrightarrow \boxed{E_C = 11,25\,J}$

....

Problème 11 . (Extrait du Bac, SM, Guinée 2013).

On lance un projectile avec une vitesse de 30 m/s à partir du sol horizontal. L'angle de tir vaut 60°.

1 – Déterminer l'équation de la trajectoire dans un repère lié au sol dont l'origine coïncide avec le point de lancement.

2 – Calculer la flèche du tir.

3- Quelle doit être la valeur de l'angle de tir pour que la flèche soit maximale ? Quelle hauteur le projectile atteint-il alors ?

4 – En quel point E le projectile atteint-il un plan incliné d'un angle de 30° sur l'horizontale ?

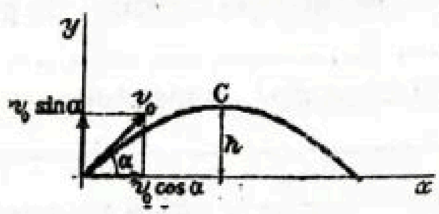
.... **Résolution** ....

1°) Equation de la trajectoire.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$.

D'après le théorème du centre d'inertie :

$$\sum \vec{F}ex = m\vec{a} \Longrightarrow m\vec{g} = m\vec{a}$$
$$\vec{a} = \vec{g}$$



Projetons sur les axes de coordonnées :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = (V_0 \cos\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}\, gt^2 + (V_0 \sin\alpha)t \end{cases}$$

En éliminant t entre x et y, on obtient l'équation cartésienne de la trajectoire :

$\boxed{y = -\frac{g}{2.V_0^2.cos^2\alpha}\, x^2 + x\tan\alpha}$ AN : $\boxed{y = -2,18.10^{-2}x^2 + 1,73x}$

2°) Calcul de la flèche.

La flèche est l'altitude maximale atteite par le projectile.

A l'altitude maximale :

$$V_y = \frac{dy}{dt} = 0 \Longleftrightarrow -gt + V_0 \sin\alpha = 0 \Longrightarrow t = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$$

En remplaçant t dans y, on obtient la flèche du tir :

$$\boxed{h = \frac{V_0^2 . \sin^2\alpha}{2g}} \quad \text{AN :} \quad \boxed{h = 34,4\ m}$$

3°) Valeur de l'angle α de tir pour que la flèche soit maximale :

La flèche est maximale quand :

$$\sin\alpha = 1 \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}\ ; \text{ soit : } \boxed{\alpha = 90°}$$

La hauteur correspondante est alors :

$$h_{max} = \frac{V_0^2 . \sin^2 90°}{2g} \Longrightarrow \boxed{h_{max} = \frac{V_0^2}{2g}} \quad \text{AN :} \quad \boxed{h_{max} \approx 46\ m}$$

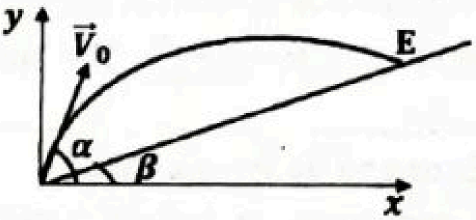
4°) Position du point E sur le plan incliné.

1ère méthode.

Soit d la distance OE.

Les coordonnées de E sont :

$$\begin{cases} x = d\cos\beta \\ y = d\sin\beta \end{cases}$$



Le point E est un point de la trajectoire :

$$y_E = -\frac{g}{2.V_0^2 . \cos^2\alpha} x_E^2 + x_E \tan\alpha \Longrightarrow d\sin\beta = -\frac{gd^2\cos^2\beta}{2V_0^2 . \cos^2\alpha} + d\cos\beta\tan\alpha$$

$$\sin\beta = -\frac{gd\cos^2\beta}{2V_0^2 . \cos^2\alpha} + \cos\beta\tan\alpha \Longrightarrow \boxed{d = \frac{2V_0^2\cos^2\alpha(\tan\alpha - \tan\beta)}{g\cos\beta}}$$

$$\text{AN :} \quad \boxed{d \approx 61,2\ m} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} x_E \approx 53\ m \\ y_E \approx 31\ m \end{cases}}$$

2ème méthode :

Le point E est l'intersection de la parabole et de la droite d'équation :

$$y = (\tan\beta)x$$

Donc : $(\tan\beta)x_E = -\dfrac{g}{2.V_0^2 . \cos^2\alpha} x_E^2 + x_E \tan\alpha$

$$\tan\beta = -\frac{g}{2.V_0^2.\cos^2\alpha}x_E + \tan\alpha \qquad \frac{g}{2.V_0^2.\cos^2\alpha}x_E = \tan\alpha - \tan\beta$$

d' où $\boxed{x_E = \frac{2V_0^2\cos^2\alpha.(\tan\alpha - \tan\beta)}{g}}$ $\boxed{y_E = \frac{2V_0^2\cos^2\alpha.(\tan\alpha - \tan\beta)\tan\beta}{g}}$

....

Problème 12 . (Extrait du Bac, SM, Guinée 2014)

Un archer tire une flèche sur un objectif et désire qu'elle atteigne le centre d'une cible placée à la distance D = 50 m et à la hauteur h = 0,5 m au – dessus de la ligne horizontale au départ.

1°) Etablir l'équation de la trajectoire du centre d'inertie G de la flèche.

2°) Quelle est la valeur de l'angle d'inclinaison de la flèche, au départ par rapport au plan horizontal lorsque la vitesse initiale $V_0 = 50\ m.s^{-1}$?

3°) Quelle est la solution la plus probable ?

(On négligera la résistance de l'air et on prendra g = 9,8 u SI).

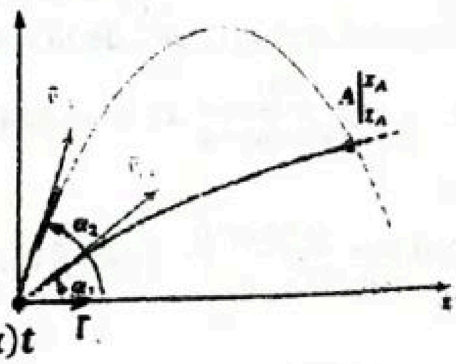
Réponses : 1°) $y = -\frac{g}{2V_0^2}(1 + \tan^2\alpha)x^2 + x\tan\alpha$; **2°)** $\alpha_1 = 84°$; $\alpha_2 = 6°$.

.... **Résolution** ....

1°) Equation de la trajectoire.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$.

Appliquons le théorème du centre d'inertie :



$$\sum\vec{F}ex = m\vec{a} \Longrightarrow m\vec{g} = m\vec{a}$$
$$\vec{a} = \vec{g}$$

Projetons sur les axes de coordonnées :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = (V_0\cos\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0\sin\alpha)t \end{cases}$$

En éliminant t entre x et y, on obtient l'équation de la trajectoire :

$\boxed{y = -\frac{g}{2.V_0^2.\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha}$ ou $\boxed{y = -\frac{g}{2V_0^2}(1 + \tan^2\alpha)x^2 + x\tan\alpha}$

La trajectoire est une parabole dont la concavité est tournée vers le bas.

2°) Calcul de l'angle de tir α.

La cible est atteinte quand : x = 50 m ; y = 0,5 m ;

d'où l'équation du second degré en $\tan\alpha$:

$$4,9\tan^2\alpha - 50\tan\alpha + 5,4 = 0$$

On trouve : $\tan\alpha_1 = 10,09$ $\alpha_1 \approx 84,3°$

et $\tan\alpha_2 = 0,109$ $\alpha_2 = 6,2°$

d' où $\boxed{\alpha_1 \approx 84,3°}$ $\boxed{\alpha_2 = 6,2°}$

3°) Solution la plus probable.

La solution la plus probable est : $\alpha \approx 6,2°$, le temps de tir étant le plus court possible. Pour $\alpha = 84,3°$, le tir est presque vertical et le projectile risque de retomber sur tireur.

....

Problème 13 . (Extrait du Bac , SE, Guinée 2014).

Une pièce d'artillerie est orientée d'un angle de 45° par rapport au plan horizontal. Un objectif placé sur le même plan horizontal est atteint 38,1 s après la mise à feu. **En négligeant la résistance de l'air et en prenant g = 9,8 m.s** $^{-2}$; calculer :

1°) la vitesse initiale du projectile ;

2°) la distance à laquelle est placé l'objectif.

Réponses : 1°) $V_0 = 264$ m/s ; 2°) x = 7,11 km.

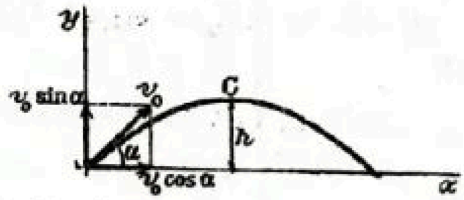
.... **Résolution** ....

1°) Vitesse initiale du projectile.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ est la seule force appliquée.

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\Sigma\vec{F}ex = m\vec{a} \Longrightarrow m\vec{g} = m\vec{a}$$
$$\vec{a} = \vec{g}$$



Projetons sur les axes de coordonnées :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = (V_0 \cos\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin\alpha)t \end{cases}$$

Au point de chute :

$$y = 0 \Longrightarrow -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin\alpha)t = 0$$

d' où $\boxed{V_0 = \frac{gt}{2\sin\alpha}}$ AN : $\boxed{V_0 = 264\ m.s^{-1}}$

2°) Distance à laquelle est placée l'objectif.

Cette distance est donnée par :

$d = x = (V_0 \cos\alpha)t$ $d = 264 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 38,1 = 711,28\ m$

d' où $\boxed{d \approx 7,113\ km}$

Problème 14. (Extrait du Bac, série D, Montpelier 1981).

On se propose d'étudier un coup franc direct en football. Le ballon est posé sur le sol horizontal, face au but AB de hauteur h = 2,44 m et à une distance d = 25 m de celui-ci. Le joueur tirant le coup franc, communique au ballon une vitesse initiale $\vec{V}_0$ dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ inclinée par rapport à l'horizontale d'un angle α = 30°.

1°) Montrer que la trajectoire du ballon est dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2°) Déterminer l'équation de cette **trajectoire dans le repère orthonormé** $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en fonction de g, α et V_0.

3°) Quelle doit être la vitesse initiale du ballon pour qu'il pénètre dans but au ras de la barre transversale ?

Réponses : 2°) $V_0 = \frac{d}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2.(d\tan\alpha - h)}}$; $V_0 = 18,6\ m \cdot s^{-1}$.

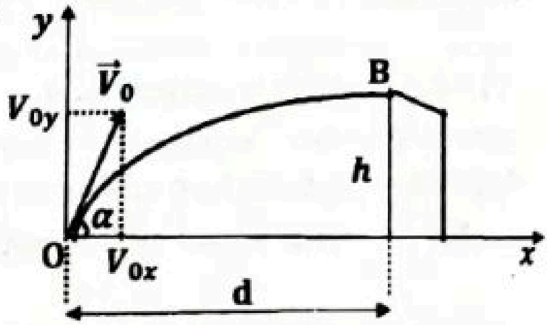
.... **Résolution** ....

1°) Montrons que la trajectoire du ballon est dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$.

Appliquons le théorème du centre d'inertie

$$\sum \vec{F}ex = m\vec{a} \Longrightarrow m\vec{g} = m\vec{a}$$
$$\vec{a} = \vec{g}$$



Projetons sur les axes de coordonnées :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} V_x = V_0\cos\alpha \\ V_y = -gt + V_0\sin\alpha \\ V_z = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = (V_0\cos\alpha) \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0\sin\alpha)t \\ z = 0 \end{cases}$$

Comme $z = C^{te} = 0$, la trajectoire est dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2°) Equation de la trajectoire en fonction de g, α et V_0.

On élimine t entre x et y :

$$\begin{cases} t = \frac{x}{V_0\cos\alpha} \\ y = -\frac{1}{2}\ g\left(\frac{x}{V_0\cos\alpha}\right)^2 + (V_0\sin\alpha)\left(\frac{x}{V_0\cos\alpha}\right) \end{cases}$$

d' où $$\boxed{y = -\frac{g}{2.V_0^2.\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha}$$

3°) Vitesse initiale du ballon.

Le ballon pénètre dans le but au ras de la barre transversale lorsque les coordonnées de B vérifient l'équation de la trajectoire :

$$\begin{cases} x = d \\ y = h \end{cases} \Longrightarrow h = -\frac{g}{2.V_0^2.\cos^2\alpha} d^2 + d\tan\alpha$$

d' où $\boxed{V_0 = \frac{d}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2.(d\tan\alpha - h)}}}$ AN : $\boxed{V_0 = 18,6\ m.s^{-1}}$

....

Problème 15.

Un projectile est tiré du sol avec une vitesse initiale $\vec{V}_0$ faisant un angle α avec le plan l'horizontal.

1°) Etablir l'équation cartésienne de la trajectoire du projectile.

2°) Lorsque le projectile se trouve à l'altitude h, le vecteur vitesse $\vec{V}$ fait avec le plan horizontal un angle β. Etablir la relation donnant V en fonction de **h,** V_0 et g (intensité de pesanteur).

3°) Démontrer que : $h = \frac{V_0^2}{2g}\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta}\right)$.

En déduire l'altitude maximale atteinte par le projectile sachant que $V_0 = 20\ m.s^{-1}$; $\alpha = 30°$; $g = 10\ m.s^{-2}$.

.... **Résolution** ....

1°) Etablir l'équation cartésienne de la trajectoire du projectile.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ est la seule force appliquée.

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\Sigma\vec{F}ex = m\vec{a} \Longrightarrow m\vec{g} = m\vec{a}$$
$$\vec{a} = \vec{g}$$

Projetons sur les axes de coordonnées :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = (V_0\cos\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0\sin\alpha)t \end{cases}$$

Eliminons t entre x et y :

$$\begin{cases} t = \frac{x}{V_0\cos\alpha} \\ y = -\frac{1}{2}\ g\left(\frac{x}{V_0\cos\alpha}\right)^2 + (V_0\sin\alpha)\left(\frac{x}{V_0\cos\alpha}\right) \end{cases}$$

d' où $$\boxed{y = -\frac{g}{2.V_0^2.cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha}$$

2°) Relation donnant V en fonction de h, V_0 et g.

Appliquons la conservation de l'énergie mécanique au projectile entre O et M

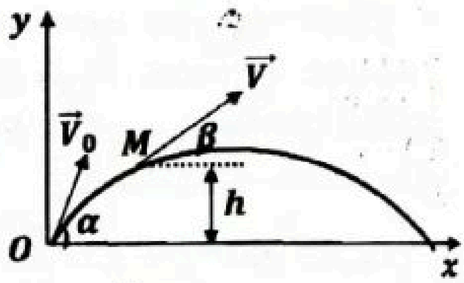
On a : $E_m(O) = \frac{1}{2}mV_0^2$; $(Z = 0)$. et $E_m(M) = \frac{1}{2}mV^2 + mgh$; $(Z = h)$.

Ainsi : $E_m(M) = E_m(O) \iff \frac{1}{2}mV^2 + mgh = \frac{1}{2}mV_0^2$

soit : $V^2 = V_0^2 - 2gh \Longrightarrow \boxed{V = \sqrt{V_0^2 - 2gh}}$

NB : L'application du théorème de l'énergie cinétique permet de retrouver ce résultat.

3°) Démontrons que : $h = \frac{V_0^2}{2g}\left(1 - \frac{cos^2\alpha}{cos^2\beta}\right)$.



D'après ce qui précède :

$$V^2 = V_0^2 - 2gh \Longrightarrow h = \frac{1}{2g}(V_0^2 - V^2)$$

Au départ : $V_x = V_0\cos\alpha$

A l'altitude h : $V_x = V\cos\beta$

On a : $V_x = V_x \iff V\cos\beta = V_0\cos\alpha \Longrightarrow V = \frac{V_0.\cos\alpha}{\cos\beta}$

En remplaçant V par son expression dans h , on obtient :

$$h = \frac{1}{2g}\left(V_0^2 - \frac{V_0^2.cos^2\alpha}{cos^2\beta}\right); \text{ d'où } \boxed{h = \frac{V_0^2}{2g}\left(1 - \frac{cos^2\alpha}{cos^2\beta}\right)}$$

Altitude maximale atteinte par le projectile.

A l'altitude maximale, le vecteur vitesse $\vec{V}$ est parallèle à l'axe des abscisse ox :

$\beta = 0° \Longrightarrow \cos\beta = 1$; alors :

$h_{max} = \frac{V_0^2}{2g}(1 - cos^2\alpha)$; or : $1 - cos^2\alpha = sin^2\alpha$;

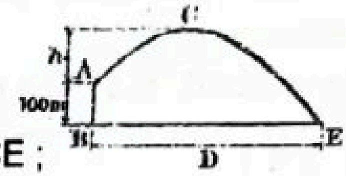
d' où $$\boxed{h_{max} = \frac{V_0^2 sin^2\alpha}{2g}}$$

AN : $h_{max} = \frac{(20)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2 \times 10} = \frac{400 \times \frac{1}{4}}{20} = 5\,m \Longrightarrow \boxed{h_{max} = 5\,m}$

Problème 16. (Extrait du Bac , SE, Guinée 1988).

Un projectile est tiré sous un angle de 45° d'un sommet A de 100 m de hauteur, dominant une plaine horizontale, et il décrit la trajectoire ACE.

La vitesse initiale est de 400 $m.s^{-1}$. Trouver, en négligeant la résistance de l'air et en posant g = 9,8 $m.s^{-2}$:



1°) la hauteur maximale atteinte par le projectile ;

2°) la distance horizontale BE ;

3°) le temps mis par le projectile pour parcourir AC et CE ;

4°) la vitesse finale à l'arrivée au point E.

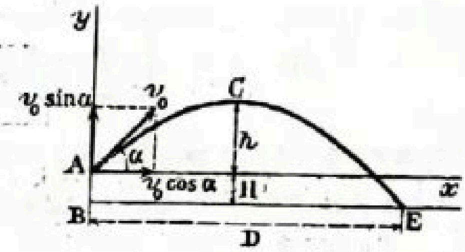
.... **Résolution** ....

1°) Hauteur maximale atteinte par le projectile ;

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ est la seule force appliquée.

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\sum \vec{F}ex = m\vec{a} \Longrightarrow m\vec{g} = m\vec{a}$$
$$\vec{a} = \vec{g}$$



Projetons sur les axes de coordonnées :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} V_x = V_0 \cos\alpha \\ V_y = -gt + V_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = (V_0 \cos\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2} gt^2 + (V_0 \sin\alpha)t \end{cases}$$

La hauteur maximale est atteinte par le projectile lorsque :

$$V_y = -gt_1 + V_0 \sin\alpha = 0 \Longrightarrow t_1 = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$$

Donc : $h_{max} = y = -\frac{1}{2} g\left(\frac{V_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + (V_0 \sin\alpha)\left(\frac{V_0 \sin\alpha}{g}\right)$

d' où $\boxed{h_{max} = \frac{V_0^2 sin^2\alpha}{2g}}$ AN : $\boxed{h_{max} = 4081,6\ m}$

2°) Distance horizontale BE.

La distance horizontale BE est donnée par la relation :

$$D = x = (V_0 \cos\alpha)t$$

Déterminons d'abord le temps t mis par le projectile pour la parcourir.

A l'arrivée au sol :

$$y = -H \Longrightarrow -\frac{1}{2} gt^2 + (V_0 \sin\alpha) = -H$$

Soit : $\frac{1}{2} gt^2 - (V_0 \sin\alpha) - H = 0$

$\Delta = V_0^2 sin^2\alpha + 2gH$

$$t = \frac{V_0 \sin\alpha + \sqrt{V_0^2 sin^2\alpha + 2gH}}{g} > 0 \quad \text{et} \quad t' = \frac{V_0 \sin\alpha - \sqrt{V_0^2 sin^2\alpha + 2gH}}{g} < 0$$

L' équation admet donc deux racines de signes contraires, seule la racine positive convient .

La distance BE cherchée est donc :

$$\boxed{D = (V_0 \cos\alpha)\frac{V_0 \sin\alpha + \sqrt{V_0^2 sin^2\alpha + 2gH}}{g}}$$

AN : $D = \left(400 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \frac{1}{9{,}8}\left(400 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{160\,000}{2} + 2 \times 9{,}8 \times 100}\right)$

d' où $\boxed{D \approx 16\,400\ m}$

3°) Temps mis par le projectile pour parcourir AC et CE.

• Le temps mis pour le parcours AC est :

$$t_1 = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$$

• Le temps mis pour le parcours CE est :

$$t_2 = t - t_1 \Longrightarrow t_2 = \frac{\sqrt{V_0^2 sin^2\alpha + 2gH}}{g}$$

AN : • $t_1 = \frac{400 \times \sqrt{2}}{2 \times 9{,}8} = 28{,}85\ s \approx 28{,}9\ s$

• $t_2 = \frac{1}{9{,}8}\sqrt{\frac{160\,000}{2} + 2 \times 9{,}8 \times 100} = 29{,}2\ s$

d' où $\boxed{t_1 \approx 28{,}9\ s}$ $\boxed{t_2 = 29{,}2\ s}$

4°) Vitesse finale à l'arrivée au point E.

1ère méthode : méthode cinématique (voir cours).

On a : $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$; or : $\begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} = V_0 \cos\alpha \\ V_y = \frac{dy}{dt} = -gt + V_0 \sin\alpha \end{cases}$

d'où $\boxed{V = \sqrt{V_0^2 - 2gy}}$ (avec $y = -H$)

$2^{ème}$ **méthode : méthode énergétique.**

Appliquons la loi de conservation de l'énergie mécanique au projectile entre le point de départ A et le point d'arrivée E.

On a : $E_m(A) = \frac{1}{2} mV_0^2 + mgH$; $(Z = H)$. et $E_m(E) = \frac{1}{2} mV^2$; $(Z = 0)$.

Ainsi : $E_m(E) = E_m(A) \iff \frac{1}{2} mV^2 = \frac{1}{2} mV_0^2 + mgH$

soit : $V^2 = V_0^2 + 2gh \Longrightarrow \boxed{V = \sqrt{V_0^2 + 2gH}}$ AN : $\boxed{V \approx 402\ m.s^{-1}}$

NB : **L'application du théorème de l'énergie cinétique permet de retrouver ce résultat.**

....

Problème 17.

Deux obus sont tirés successivement par un canon à θ secondes d'intervalle sous des angles de 60° et 30° et avec la vitesse de 200 m.s^{-1}.

Déterminer θ afin que les deux obus se rencontrent. On donne : g = 10 m.s^{-2}.

Réponse : $\theta = 20(\sqrt{3} - 1) \approx 15\ s$.

.... **Résolution** ....

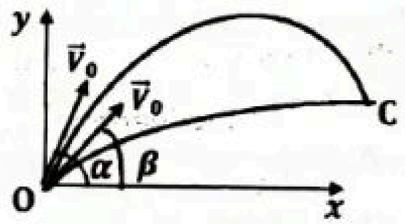
Détermination de θ.

Bilan des forces : chaque obus est soumis à l'action de son poids $\vec{P} = m\vec{g}$.

Appliquons sur chacun d'eux, le théorème du centre d'inertie :

$$\Sigma \vec{F}ex = m\vec{a} \Longrightarrow m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{g}$$



Projetons sur les axes de coordonnées :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = (V_0 \cos\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2} gt^2 + (V_0 \sin\alpha)t \end{cases}$$

En prenant comme origine des temps la date de lancement du 1er obus, on a :

$$\begin{cases} x_1 = (V_0 \cos\alpha)t \\ y_1 = -\frac{1}{2} gt^2 + (V_0 \sin\alpha)t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_2 = (V_0 \cos\beta)t_2 \\ y_2 = -\frac{1}{2} gt_2^2 + (V_0 \sin\beta)t_2 \end{cases}$$

or : $t = t_2 + \theta \Longrightarrow t_2 = t - \theta$;

donc : $\begin{cases} x_2 = (V_0 \cos\beta)(t-\theta) \\ y_2 = -\frac{1}{2} g(t-\theta)^2 + (V_0 \sin\beta)(t-\theta) \end{cases}$

Au point de rencontre :

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} (V_0 \cos\alpha)t = (V_0 \cos\beta)(t-\theta) \\ -\frac{1}{2} gt^2 + (V_0 \sin\alpha)t = -\frac{1}{2} g(t-\theta)^2 + (V_0 \sin\beta)(t-\theta) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{3}(t-\theta) \\ t = 20\sqrt{3} \end{cases} ; \quad \text{d' où} \quad \boxed{\theta = 20(\sqrt{3}-1) \approx 15\,s}$$

Problème 18.

Une sphère de rayon R repose en B sur un sol horizontal, un petit palet assimilé à un point matériel de masse m, primitivement en A point haut de la sphère, part sans vitesse initiale et glisse sans frottement sur la surface sphérique.

a) Trouver la position du point O où le palet quitte la surface de la sphère. Quelle est sa vitesse en ce point ?

b) Quelle est le mouvement ultérieur du palet ? Celui-ci rencontre le sol en D. Exprimer la distance BD en fonction de R.

Réponses : a) $\cos\theta = \frac{2}{3} \Longrightarrow \theta \approx 48°$; b) $BD = 1,46R$.

Résolution

a) Position du point O où le palet quitte la surface de la sphère.

– Système : le palet.

– Référentiel : terrestre (supposé galiléen).

– Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$.

Appliquons au solide la relation fondamentale de la dynamique :

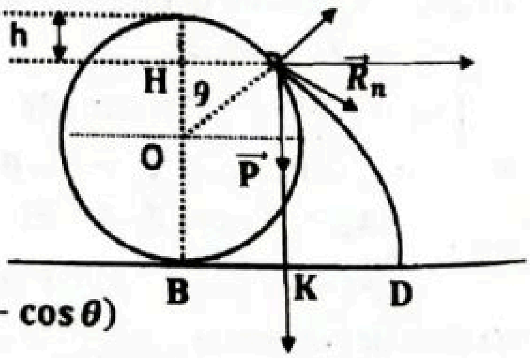
$$\sum \vec{F}ex = \frac{d\vec{P}}{dy} = m\vec{a} \Longleftrightarrow \vec{P} + \vec{R}_n = m\vec{a}$$

Projetons cette relation sur la normale **(repère de Frenet) :**

$$mg\cos\theta - R_n = m\,a_n = m\,\frac{V^2}{r} \Longrightarrow R_n = mg\cos\theta - m\,\frac{V^2}{r}$$

– Appliquons le théorème de l'énergie cinétique(T. E. C.).

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}ex) \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\,mV^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$$



Or : $V_A \approx 0$ et $W(\vec{R}) = 0$; $(car\ \vec{R} \perp \vec{V})$

et $W(\vec{P}) = mgh$.

Déterminons la hauteur h.

$$h = OA - OH = r(1-\cos\theta).$$

Le théorème de l'énergie cinétique devient :

$$\frac{1}{2}\,mV^2 = mgr(1-\cos\theta) \Longrightarrow V^2 = 2gr(1-\cos\theta)$$

Donc : $R_n = mg(3\cos\theta - 2)$

Le palet quitte la sphère quand $R_n = 0$:

$$R_n = 0 \Longrightarrow 3\cos\theta - 2$$

d' où $\boxed{\cos\theta = \frac{2}{3}} \Longrightarrow \boxed{\theta \approx 48°}$

La vitesse correspondante est donc :

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{2}{3}gR}}$$

b) Mouvement ultérieur du palet.

Quand le palet quitte la sphère , il n'est soumis qu'à la seule action de son poids et le théorème du centre d'inertie donne :

$m\vec{g} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{a} = \vec{g}$

Projetons sur les axes de coordonnées :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = (V_0\cos\theta)t \\ y = \frac{1}{2}gt^2 + (V_0\sin\theta)t \end{cases}$$

En éliminant t entre x et y, on obtient l'équation de la trajectoire :

$$\boxed{y = \frac{g}{2.V_0^2.cos^2\theta}x^2 + x\tan\theta}$$

Le palet est donc animé d'un mouvement de chute parabolique.

Exprimons la distance BD en fonction de R.

On a : $BD = R\sin\theta + x_D \Longrightarrow BD = R\frac{\sqrt{5}}{3} + x_D$

$y_D = R(1+\cos\theta) \Longrightarrow y_D = \frac{5}{3}R$ et $\tan\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

x_D est solution de l'équation :

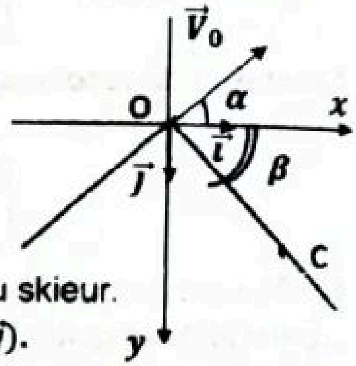
$$\frac{27}{16R}x_D^2 + \frac{\sqrt{5}}{2}x_D - \frac{5}{3}R = 0 \Longrightarrow x_D = 0,717R$$

d' où $\boxed{BD \approx 1,46R}$

....

Problème 19. (Extrait du Bac, séries C- E, Limoges 1982).

Un skieur parcourt une côte inclinée d'un angle de $\alpha = 40°$ sur l'horizontal. Au sommet O de cette côte, sa vitesse a pour valeur $V_0 = 12\ m.s^{-1}$. Après le point O se présente une descente inclinée d'un angle $\beta = 45°$ sur l'horizontal. Le skieur accomplit un saut et reprend contact avec la piste en un point C.



Déterminer :

1) La nature de la trajectoire correspondant au saut du skieur.

2) Les coordonnées du point C dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

3) La longueur OC ;

4) La durée du saut.

On prendra $g = 10\ m.s^{-2}$ et on négligera la résistance de l'air.

Réponses : 1°) $y = \dfrac{g}{2.V_0^2.cos^2\alpha}x^2 - x\tan\alpha \Longrightarrow y = 5,9x^2 - 0,84x$;

2°) $x_C = \dfrac{2V_0^2cos^2\alpha}{g}(\tan\alpha + \tan\beta)$; $y_C = x_C\tan\beta$;

$x_C = y_C \approx 31,2\ m$;

3°) $OC = \sqrt{x_C^2 + y_C^2} \Longrightarrow OC \approx 44,1\ m$; **4°)** $t_C = \dfrac{x_C}{V_0\cos\alpha} \approx 3,4\ s.$

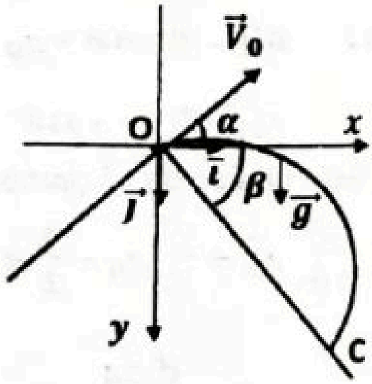
.... **Résolution** ....

1) Nature de la trajectoire correspondant au saut du skieur.

– Système : le skieur..

– Référentiel : terrestre (supposé galiléen).

– Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$.



Appliquons le théorème du centre d'inertie donne:

$$m\vec{g} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

Projetons sur les axes de coordonnées :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} V_x = V_0\cos\alpha \\ V_y = gt - V_0\sin\alpha \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = (V_0\cos\alpha)t \\ y = \frac{1}{2}gt^2 - (V_0\sin\alpha)t \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant le temps t entre x et y :

$$\begin{cases} t = \dfrac{x}{V_0\cos\alpha} \\ y = \dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{x}{V_0\cos\alpha}\right)^2 - (V_0\sin\alpha)\left(\dfrac{x}{V_0\cos\alpha}\right) \end{cases}$$

d' où $$\boxed{y = \frac{g}{2.V_0^2.cos^2\alpha}x^2 - x\tan\alpha}$$

La trajectoire est une parabole dont la concavité est tournée vers le bas.

2°) Coordonnées du point C.

Le point C est l'intersection de la parabole et de la droite (OC) d'équation :

$y = (\tan\beta)x$

Donc : $(\tan\beta)x_C = \frac{g}{2.V_0^2.cos^2\alpha}x_C^2 - x_C\tan\alpha$

d' où $$\boxed{x_C = \frac{2V_0^2cos^2\alpha.(\tan\alpha + \tan\beta)}{g} \quad \text{et} \quad y_C = (\tan\beta)x_C}$$

AN : $$\boxed{x_C = y_C \approx 31,2\ m}$$

3°) Déterminons la longueur OC.

1ère méthode.

On a : $OC = \sqrt{x_C^2 + y_C^2} \Longrightarrow \boxed{OC = x_C\sqrt{2}}$

AN : $OC = 31,2 \times \sqrt{2} = 44,116\ m$

$$\boxed{OC \approx 44\ m}$$

2ème méthode.

On a : $\cos\beta = \frac{x_C}{OC} \Longrightarrow OC = \frac{x_C}{\cos\beta} \approx 44\ m \Longrightarrow \boxed{OC \approx 44\ m}$

4°) Durée du saut.

On a : $x_C = (V_0\cos\alpha)t \Longrightarrow \boxed{t = \frac{x_C}{V_0\cos\alpha}}$

AN : $t = \frac{31,2 \times 2}{12 \times \sqrt{2}} = 3,39\ s \approx 3,4\ s \Longrightarrow \boxed{t \approx 3,4\ s}$

....

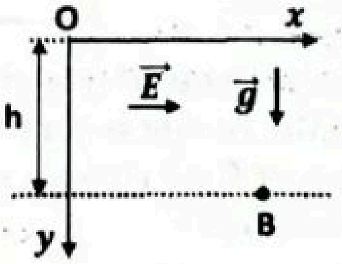
Problème 20. (Extrait du Bac, série D Cameroun 1993)

On néglige la résistance de l'aire et on prendra $g = 9,8\ m.s^{-2}$.

1°) Une petite sphère A, supposée ponctuelle, de masse m tombe en chute libre d'une hauteur h, sans vitesse initiale, sous la seule action de la pesanteur.

Donner l'expression littérale de la valeur de la vitesse de la sphère après une chute de hauteur h. AN : $m = 5\,g$; $h = 0,50\,m$.

2°) La sphère A porte une charge électrique q. On superpose au champ de pesanteur un champ électrique uniforme caractérisé par un vecteur $\vec{E}$ horizontal de même direction et de même sens que l'axe Ox . La sphère A est abandonnée sans vitesse initiale en un point O de l'espace où agissent les deux champs. Elle arrive au point B comme l'indique la figure.



a) Quelle est le signe de la charge portée par la sphère A ?

b) Montrer que la somme des forces appliquées à la sphère est constante. En déduire la nature du mouvement de la sphère.

3°) Etablir l'équation de la trajectoire dans le système d'axes (Ox, Oy), où l'axe Oy est vertical descendant.

4°) Trouver les coordonnées du point d'arrivée B de la sphère après une dénivellation verticale h, mesurée à partir de O. On donnera l'expression littérale de ces coordonnées et on calculera leurs valeurs dans le cas où $|q| = 4.10^{-7}\,C$; $E = 10^4\,V.m^{-1}$; hauteur de chute $h = 0,5\,m$;

Réponses : 1°) $V = \sqrt{2gh} = 3,13\,m.s^{-1}$; **2°) a)** $q > 0$; **c)** $y = \dfrac{mg}{qE}x$;

$$3°)\ x_B = \frac{q.E.h}{m.g} = 4,1\,cm\ ;\ y_B = h = 50\,cm.$$

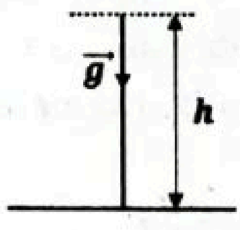
.... **Résolution** ....

1°) Expression de la vitesse de la sphère.

La sphère est animée d'une chute libre verticale sans vitesse initiale, alors :

$$V^2 = 2gh \Longrightarrow V = \sqrt{2gh}$$

AN : $V = \sqrt{2 \times 9,8 \times 0,5} = 3,13\,m.s^{-1}$

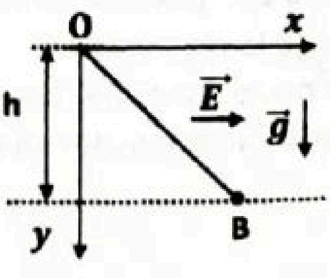


d' où $\boxed{V = 3,13\,m.s^{-1}}$

2°) a) Signe de la charge portée par la sphère A

Bilan des forces appliquées à la sphère : son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$.

La sphère étant déviée dans le sens de $\vec{E}$, alors $\vec{F}$ et $\vec{E}$ sont de même sens, donc la charge q est positive ($q > 0$).



b) Montrons que la somme des forces appliquées à la sphère est constante.

La somme des forces est :

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{F} \Longrightarrow \Sigma\vec{F} = m\vec{g} + q\vec{E}$$

$m, \vec{g}, q$ **et** $\vec{E}$ **sont des grandeurs constantes, donc la somme des forces est constante.**

Nature du mouvement de la sphère.

Appliquons à la sphère le théorème du centre d'inertie :

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Longrightarrow m\vec{g} + q\vec{E} = m\vec{a}$$

d' où $\vec{a} = \vec{g} + \frac{q}{m}\vec{E}$ **et** $\vec{V}_0 = \vec{0}$:

Le mouvement de la sphère est donc rectiligne uniformément accéléré.

3°) Equation de la trajectoire.

Projetons $\vec{a}$ sur les axes de coordonnées :

$$\begin{cases} a_x = \frac{q}{m}E \\ a_y = g \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} V_x = \frac{q}{m}E.t \\ V_y = gt \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2 \\ y = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant t entre x et y :

$$\begin{cases} t^2 = \frac{2m}{qE}x \\ y = \frac{1}{2}g \cdot \frac{2m}{qE}x \end{cases} \quad ; \quad \text{d' où} \quad \boxed{y = \frac{mg}{qE}x}$$

La trajectoire est une droite (mouvement rectiligne).

4°) Coordonnées du point B.

Au point B : $y_B = h$; donc : $x_B = \frac{qE.y_B}{mg}$

AN : $x_B = \frac{4.10^{-7} \times 10^4 \times 0,5}{5.10^{-3} \times 9,8}$ d' où $\boxed{x_B = 4,1\ cm}$ $\boxed{y_B = 50\ cm}$

$y_B = h = 0,5$

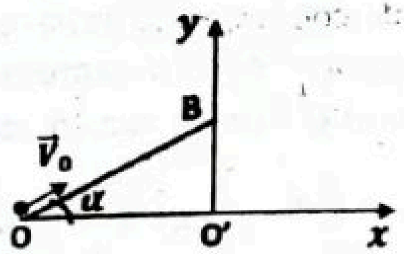
....

EXERCICES ET PROBLEMES PROPOSES.

Problème 1.

Un petit palet assimilable à un point matériel de masse $m = 0,50\ kg$ est lancé vers le haut avec une vitesse initiale $V_0 = 10\ m.s^{-1}$ à partir d'un point O le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné de longueur $OB = l = 15\ m$. Ce plan fait avec l'horizontale (Ox) un angle $\alpha = 30°$ (figure).

1°) Les frottements étant d'abord négligés, à quelle distance du point O le palet s'arrêtera-t-il dans son mouvement ascendant ?



2°) En réalité, les frottements développent une force d'intensité $f = 10\ N$, en sens contraire du vecteur vitesse. Calculer la vitesse initiale de lancement V'_0 au point O, nécessaire pour que le palet parvienne en B à la vitesse $V_1 = 10\ m.s^{-1}$.

3°) Déterminer les équations paramétriques $x(t)$ et $y(t)$ de la trajectoire ultérieure du palet dans le repère $(O'x, O'y)$. On prendra l'origine des temps l'instant où le palet passe en B avec la vitesse V_1.

4°) **Calculer l'abscisse du point d'impact du palet sur le sol. On prendra $g = 10\ m.s^{-2}$.**

Rép : 1°) $x = 10\ m$; $V'_0 = 29,15\ m.s^{-1}$; 3°) $\begin{cases} x = 5\sqrt{3}t \\ y = -5t^2 + 5t + 7,5 \end{cases}$;

4°) $x_C \approx 15,8\ m$.

....

Problème 2*.**

Du toit d'un immeuble de hauteur h = 30 m, on lance un projectile avec la vitesse V_0 = 20 m/s, le vecteur vitesse initiale $\vec{V}_0$ faisant l'angle α = 60° avec l'horizontale. Le projectile tombe jusqu'au sol. On néglige la résistance de l'air et on prend g = 10 $m.s^{-2}$. Déterminer :

1°) la distance horizontale d entre le point de lancement et le point d'impact sur le sol horizontal ;

2°) le temps que dure le mouvement de chute :

3°) la vitesse du projectile lorsqu'il touche le sol.

Réponses : 1°) d = 47,3 m ; 2°) t = 4,73 s ; 3°) V = 31,6 $m.s^{-1}$.

....

Problème 3.

1°) Un projectile est tiré d'un point O du sol avec une vitesse initiale $\vec{V}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale. Le tireur vise **une cible ponctuelle située à** 2 000 m plus loi dans le même plan horizontal.

a) Ecrire l'équation de la trajectoire du projectile.

b) Trouver **les valeurs de α qui permettent d'atteindre la cible pour $V_0 = 400\ m.s^{-1}$.**

2°) Le tireur vise maintenant une cible de coordonnées x et y.

a) Montrer que les valeurs de l'angle de tir qui permettent d'atteindre la cible sont solution d'une équation du second degré dont l'inconnue est $\tan\alpha$.

b) Déterminer la relation qui lie x et y pour que l'équation admette de solutions.

c) La vitesse $\vec{V}_0$ étant donnée, montrer que pour être atteinte, une cible doit se trouver à l'intérieur d'une parabole dite de sûreté. Représenter cette parabole (on précisera en particulier les coordonnées des points d'intersection avec les axes de coordonnées).

Application numérique : $V_0 = 400\ m.s^{-1}$; $g = 10\ m.s^{-2}$.

Réponses : 1°) b) $\alpha_1 = 3,6°$; $\alpha_2 = 86,4°$;

2°) a) $\frac{gx^2}{2V_0^2}\tan^2\alpha - x\tan\alpha + y + \frac{gx^2}{2V_0^2} = 0$; **b)** $y + \frac{gx^2}{2V_0^2} - \frac{V_0^2}{2g} \leq 0$;

c) $y = -\frac{g}{2V_0^2}x^2 + \frac{V_0^2}{2g}$

....

Problème 4.

Un gravier assimilé à un point G est projeté d'un point O vers l'arrière par l'un des pneus arrières d'un camion avec une vitesse $\vec{V}_0$ contenue dans le plan vertical (xOy) de module $V_0 = 24\ m.s^{-1}$. $\vec{V}_0$ fait un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l' horizontale Ox. L'axe Oy est vertical ascendant. On néglige la résistance de l'air et on prendra $g = 10\ m.s^{-2}$.

1°) Etablir les équations horaires $x_G(t)$ et $y_G(t)$ du mouvement du centre d'inertie du gravier et l'équation de sa trajectoire dans le repère (Ox, Oy).

2°) Le gravier vient frapper une voiture en un point M de son pare-brise.

A l'instant initial où le gravier est projeter, le point M se trouve à la distance $d = 44\ m$ de l'axe Oy. La voiture suit le camion selon la direction de l'axe Ox avec une vitesse constante $V = 90\ km/h$.

Etablir les équations horaires du mouvement de M dans le repère (Ox, Oy).

3°) Déterminer la date t à laquelle se produit l'impact du gravier sur le pare-brise. En déduire la hauteur au-dessus du sol du point d'impact.

Réponses : 3°) $t = \frac{d}{V + V_0 \cos\alpha} = 0,96\ s$; $h \approx 6,9\ m.$

Problème 5.

a) Etudier le mouvement du centre d'inertie d'un petit palet lancé sur une table horizontale de hauteur h = 78,4 cm et qui **quitte cette table à la vitesse** $V_0 = 2$ m/s.

b) A quelle distance x de la verticale du point de **chute le palet touche-t-il le sol ?** Quelles sont **alors les caractéristiques de son vecteur vitesse ?** ($g = 9,8\ m/s^2$).

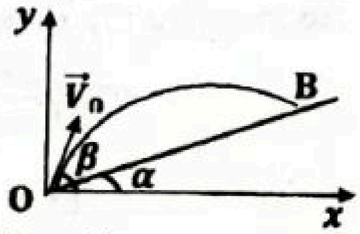
Réponses : a) $y = 1,225x^2$ m b) x = 0,8 m ; V = 4,4 $m.s^{-1}$; $\alpha = 62,9°$.

Problème 6.

Un plan incliné OA fait avec le plan horizontal un angle α . Un projectile est lancé du point O avec une vitesse initiale $\vec{V}_0$ faisant avec le plan horizontal un angle β . Il retombe en un point B sur le plan incliné.

Les points O et B se trouvent sur la même ligne de plus grande pente.

1°) Etablir l'équation de la trajectoire du projectile.



2°) a) Déterminer l'expression littérale de la distance $OB = l$ et montrer que cette distance peut se mettre sous la forme : $l = \frac{2.V_0^2 \sin(\beta-\alpha).\cos\beta}{g.\cos^2}$.

b) Montrer que cette distance l est maximale pour $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$.

c) Donner l'expression de cette distance maximale et calculer sa valeur sachant que : $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $V_0 = 30\ m.s^{-1}$, $g = 10\ m.s^{-2}$.

3°) Partant de cette distance maximale, le projectile de masse $m = 0,50\ kg$, redescend sans vitesse initiale en suivant la ligne de plus grande pente du plan incliné où il est soumis à une force de frottement d'intensité constante $f = 1,5$ N

Calculer :

a) l'accélération du mouvement **du centre d'inertie du projectile** sur le plan incliné ;

b) sa vitesse au passage en O et la durée du trajet BO.(**On donne :** $\sqrt{60} \approx 7,75$).

Rép : 1°) $y = -\frac{g}{2.V_0^2.\cos^2\beta}x^2 + x\tan\beta$;

2°) a) $l = \frac{2.V_0^2.\cos^2\beta.(\cos\alpha.\tan\beta - \sin\alpha)}{g.\cos^2\alpha} = \frac{2.V_0^2 \sin(\beta-\alpha).\cos\beta}{g.\cos^2\alpha}$;

b) $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$; **c)** $l_{max} = \frac{2.V_0^2.\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{g.\cos^2\alpha} = 60\ m$;

3°) a) $a = g\sin\alpha - \frac{f}{m} = 2\,m.s^{-2}$; b) $V = 15,5\,m.s^{-1}$; $t = 7,75\,s \approx 8\,s$.

Problème 7*.**

Un canon tire sur une cible éloignée de 6 km et située dans le même plan horizontal. Au bout de combien de temps, l'obus lancé à la vitesse initiale de 300 m/s atteindra-t-il la cible ? Quel est l'angle de tir ?

On néglige la résistance de l'air et on prendra $g = 10\,m.s^{-2}$.

Réponses : $t \approx 21,5\,s$; $\alpha \approx 21°$.

Problème 8.

On établit une différence de potentiel $U = V_A - V_B = 1960\,V$ **entre les armatures** horizontales AA' et BB' d'un condensateur plan, distantes de d = 1 cm, l'armature AA' étant au-dessus de BB'. Déterminer la direction, le sens et l'intensité du **champ électrique $\vec{E}$, supposé uniforme qui s'établit entre les armatures.**

2°) Un ion Li^+ de masse m pénètre en O milieu de AB dans le condensateur, avec une vitesse horizontale $V_0 = 1,8.10^6\,m.s^{-1}$.

a) Etablir l'équation de la trajectoire de l'ion Li^+ entre les deux plaques..

b) La longueur des plaques est $l = 10\,cm$ et l'ion Li^+ sort du condensateur dans une direction formant avec l'axe Ox un angle $\alpha = 5°30'$.

Montrer que le support de sa vitesse au sortir du champ passe par le centre I du condensateur. Calculer la masse de l'ion.

3°) Une goutte d'huile sphérique, chargée est en équilibre entre les armatures du condensateur. Le diamètre de cette goutte d'huile est $D = 8,7.10^{-3}\,mm$.

a) La densité de l'huile par rapport à l'eau étant 0,920, calculer la masse de la goutte d'huile et la charge électrique q qu'elle porte .

b) Combien cette goutte d'huile porte-t-elle de charges élémentaires ?

Réponses : 1°) $E = 1,96.10^5\,V.m^{-1}$; 2°) a) $y = \frac{1}{2}\frac{e.E}{m.V_0^2}x^2$; b) $m = 10^{-26}\,kg$

3°) a) $q \approx -1,6.10^{-17}\,C$; b) $n \approx 100$.

Problème 9.

Une série de diaphragmes permet d'isoler un faisceau fin de particules α se propageant à la vitesse $\vec{V}_0$ suivant Ox et de module $V_0 = 10^4\,km.s^{-1}$.

En O, elles pénètrent entre deux plaques métalliques A et B, planes et horizontales, chargées à l'aide d'une différence de potentiel $U = 2.10^4\,V$.

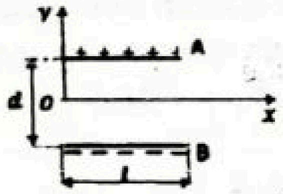
La longueur de ces plaques est $l = 20\,cm$ et leur distance est $d = 2\,cm$.

1°) Etablir l'équation, dans le plan xOy , de la trajectoire d'une particule α dans l'espace compris entre A et B.

2°) Quelles sont les coordonnées du point de sortie des particules α de l'espace (A,B) ?

3°) Calculer les composantes de la vitesse des particules α en ce point ainsi que la valeur de cette vitesse. En déduire son énergie cinétique.
Que vaut son énergie potentielle ?

4°) Quelles sont la nature et l'équation de la trajectoire après cette sortie ?
En déduire la valeur de la déflexion sur un écran vertical situé à 50 cm du point d'entrée.



NB. Une particule α est un noyau d'hélium (He^{2+}) de masse : $m = 6,64.10^{-27}\ kg$.

Réponses : 1°) $y = -0,24x^2$; 2°) $x_S = 0,2\ m$ et $y_S = -9,6\ mm$;

3°) $V_x = 10^7\ m/s$; $V_y = -9,6.10^5\ m/s$; $V_S \approx 1,005.10^7\ m/s$;

$E_C = 3,35.10^{-13}\ J$; $E_P = -3,07.10^{-15}\ J$;

4°) $y =$; $y_T \approx$

....

Problème 10.

1°) **Un ion $^{24}Mg^{2+}$ est accéléré par une tension U = 10^4 V. Calculer sa vitesse V_0 acquise.**

2°) Avec sa vitesse V_0, il pénètre au point O dans un condensateur où règne un **champ électrique de 500 V/m. La direction de $\vec{V}_0$ fait un angle de 30° avec l'axe horizontal.** La longueur des armatures est de 25 cm. Calculer les coordonnées du point de sortie de l'ion $^{24}Mg^{2+}$ du condensateur.

3°) Quelles sont les composantes parallèle et perpendiculaire au champ électrique du vecteur vitesse au point de sortie du condensateur ? Calculer la vitesse en ce point.
En déduire la direction du vecteur vitesse par rapport à l'horizontale.
On donne le nombre d'Avogadro : $\mathcal{N} = 6.10^{-23}\ mol^{-1}$.

Réponses : 1°) $V_0 = 4.10^5\ m.s^{-1}$; 2°) $x_S = 25$ cm ; $y_S = 15,5$ cm ;

3°) $V_x = 3,464.10^5\ m.s^{-1}$; $V_y = 2,288.10^5\ m.s^{-1}$;

$V_S = 4,15.10^5\ m.s^{-1}$; $\beta = 33,4°$

....

Problème 11.

A partir d'un point A, situé à une altitude $h = 2,30\ m$ du sol, on lance vers le haut à la date 0 un projectile de masse $m = 7\ kg$ avec une vitesse initiale $\vec{V}_0$ faisant un angle $\alpha = 45°$ avec l'horizontale.

Lorsque le projectile arrive au sol son centre d'inertie se trouve en C à 21,8 m de la verticale passant par A. On néglige la résistance de l'air.

1°) Etablir dans un repère d'origine liée au sol, l'équation cartésienne de la trajectoire du centre d'inertie G du projectile.

2°) En déduire la valeur V_0 de $\vec{V}_0$ en m/s et en km/h. ($g = 10\ m.s^{-2}$.).

3°) Déterminer la norme et la direction du vecteur vitesse $\vec{V}$ du projectile ainsi que son énergie cinétique en C point d'impact sur le sol supposé horizontal.

Réponses : 1°) $y = -\frac{g}{2.V_0^2.cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha + h$;

2°) $V_0 = \frac{d}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2.(d\tan\alpha + h)}} = 14\ m.s^{-1} \approx 50\ km/h.$

3°) $\beta \approx 50,8°$; $V = 15,65\ m.s^{-1}$.

....

Problème 11.

On étudie le lancement d'une flèche par un archer.

On admet que la force de poussée de la corde d'un arc sur une flèche est une fonction affine du temps. La masse de la flèche est m = 82,5 g. La poussée s'exerce pendant 0,05 s. Lorsque l'archer lâche le coup, la force de poussée vaut $F_1 = 120\ N$; lorsque l'action de la corde sur la flèche cesse, elle vaut $F_2 = 45\ N$.

1°) Exprimer et représenter graphiquement la valeur F de la force de poussée en fonction du temps. En déduire les valeurs P et V_0 de la quantité de mouvement et de la vitesse de la flèche lorsque celle-ci quitte la corde.

2°) L'archer désire que la flèche atteigne le centre d'une cible placée à 50 m de distance et à 0,50 m au dessous du niveau horizontal de départ.

Quel doit être l'angle d'inclinaison de la flèche au départ par rapport au plan horizontal lorsque la valeur V_0 de la vitesse est $50\ m.s^{-1}$?

Les deux solutions obtenues sont-elles utilisables pratiquement ?

On néglige la résistance de l'air et on prendra $g = 10\ m.s^{-2}$.

Réponses : 1°) $F = -1\,500t + 120$ (N) ; $P = 4,1\ kgm.s^{-1}$; $V_0 \approx 50\ m.s^{-1}$;

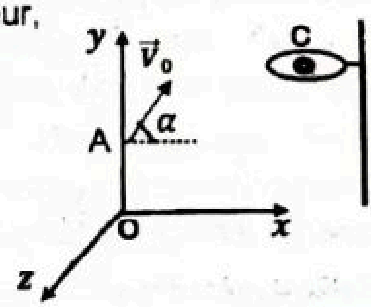
2°) $\alpha_1 = 84,2°$; $\alpha_2 = 5,8°$; non .

Problème 12. (Extrait du Bac, série D, Montpelier 1985).

On négligera l'action de l'air et on prendra $g = 10\ m.s^{-2}$.

Lors d'un match de basket , pour marquer un panier, il faut que le ballon passe dans un cercle métallique situé dans un plan horizontal, à 3,05 m du sol horizontal. Pour simplifier , on remplacera le ballon par un point matériel devant passer exactement au centre C du cercle métallique. xOy est un plan vertical contenant le point C. xOz est le plan du sol supposé horizontal.

1°) D'un point A de Oy situé à 2 m du sol, un basketteur, sans adversaire, lance le ballon avec une vitesse $\vec{V}_0$ contenue dans le plan xOy. Sa direction fait un angle $\alpha = 45°$ avec un plan horizontal.



a) Montrer que la trajectoire du ballon est plane.

b) Etablir l'équation de cette trajectoire dans le système d'axes indiqué, en fonction de V_0.

c) Les verticales de A et de C sont distantes de 7,10 m ?
Quelle doit être la valeur de V_0 pour que le panier soit réussi ?

d) Quelle est la durée du trajet effectué par le ballon du point A au point C ?

2°) Voulant arrêter le ballon, un adversaire situé à 0,90 m du tireur, saute verticalement en levant les bras. La hauteur atteinte alors par ses mains est de 2,70 m du sol. Les valeurs de α et de V_0 **étant les même que dans le cas précédent le panier sera-t-il marqué ?**

Réponses : 1°) a) $\begin{cases} x = (V_0 \cos\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin\alpha)t + h \\ z = Cte = 0 \end{cases}$

b) $y = -\dfrac{g}{2.V_0^2.cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha + h \Longrightarrow y = -\dfrac{10x^2}{V_0^2} + x + 2$

c) $V_0 = 9,13\ m.s^{-1}$; d) $t = 1,10\ s$;

2°) $y_B = 2,8\ m \Longrightarrow y_B > y_M = 0,90\ m.$: le panier sera marqué.

Problème 13. (Extrait du Bac, C et E, Clermont-Ferrand, 1973).

1°) Une bille de masse m est lancée verticalement vers le haut avec une vitesse initiale $V_0 = 20\ m/s$. Calculer l'altitude maximale atteinte par la bille et le temps t qu'elle met pour l'atteindre. ($g = 9,80\ m.s^{-2}$).

2°) La même bille est lancée d'un point O situé à la distance H du sol horizontal avec une vitesse initiale $\vec{V}_1$ dirigée vers le haut de module $V_1 = 10\ m/s$ et faisant un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale. Calculer :

a) la vitesse V de la bille lorsqu'elle rencontre le sol ;

b) la distance d entre le point de chute et la verticale de O.

Réponses : 1°) $h = 20,4\ m$; $t = 2,04\ s$; **2°)** $V \approx 12,6\ m$; $d \approx 20\ m$.

Problème 14.

A l'aide d'un projectile lancé avec une vitesse V_0, on veut atteindre une cible située dans le plan horizontal du point de lancement à une distance d de ce dernier.

1°) Montrer qu'il y a deux angles de tir possibles.

2°) Le projectile est un obus lancé à la vitesse de 250 m.s $^{-1}$. La cible à atteindre est située à 5 km du canon.

a) Quels sont les deux angles de tir possibles ?

b) Quelles sont les flèches correspondantes, la plus petite correspondant au tir tendu, la plus grande au tir en cloche.

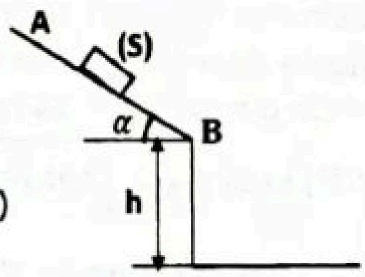
Rép : 1°) $\sin 2\alpha = \dfrac{d.g}{V_0^2} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{\theta}{2} \\ \alpha_2 = 90° - \dfrac{\theta}{2} \end{cases}$

2°) a) $\alpha_1 = 26,6°$ et $\alpha_2 = 63,4°$; b) $h_1 = 626,52\ m$; $h_2 = 2498,47\ m$.

Problème 15. (Extrait du Bac, série D, Nantes 1980).

Un solide (S) que l'on assimilera à un point matériel de masse m = 200 g, peut glisser en suivant la ligne de plus grande pente d'un plan incliné qui forme l'angle $\alpha = 30°$ avec le plan horizontal.

Le solide (S) est lâché sans vitesse initiale du point A. Il parcourt la distance AB = l = 2,50 m sur le plan incliné.



1°) Déterminer la nature du mouvement pris par (S) et calculer la durée t_1 du trajet AB.

2°) Calculer le module V_1 de la vitesse $\vec{V}_1$ de (S) en B. Quelles en sont les composantes horizontale et verticale V_{1x} et V_{1y} ?

3°) Arrivé en B, le solide (S) animé de la vitesse $\vec{V}_1$ tombe sur un plan horizontal situé en contrebas à une distance h de B. La chute dure $t_2 = 0,5\ s$.

a) Calculer la distance horizontale d comprise entre la verticale passant par B et le point d'impact sur le plan horizontal, puis la hauteur h.

b) Calculer l'énergie cinétique du solide (S) à son arrivée sur le plan horizontal. On prendra $g = 10\ m.s^{-2}$ et l'on néglige les frottements

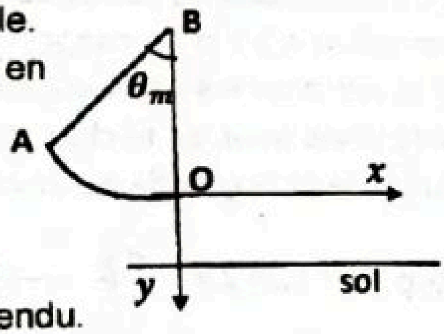
Rép : 1°) $t_1 = 1\ s$; **2°)** $V_1 = 5\ m.s^{-1}$; $V_{1x} = 4,33\ m.s^{-1}$; $V_{1y} = 2,50\ m.s^{-1}$;
3°) a) $d = 2,165\ m$; $h = 2,50\ m$; **b)** $E_C = 7,5\ J$.

....

Problème 16. (Extrait du Bac, série D, Orléans 1984).

Un pendule simple est constitué d'un fil inextensible, de masse négligeable de longueur $l = 80\ cm$, à l'extrémité A duquel est fixée **une bille supposée ponctuelle** de masse $m = 100\ g$. **L'autre extrémité du fil est accrochée en un point B.**

1°) Le pendule est écarté de sa position d'équilibre d'un angle $\theta_0 = 60°$ et on lance alors la bille vers le bas avec un vecteur vitesse $\vec{V}_A$ perpendiculaire à (AB). A l'instant t, le fil fait un angle θ avec la verticale.



a) Exprimer la vitesse V de la bille et tension T du fil en fonction de m , V_A , θ , θ_0 et g.

b) Calculer V et T, lors du passage par la position d'équilibre pour $V_A = 4\ m.s^{-1}$.

c) **Calculer la valeur minimale de la norme de $\vec{V}_A$ pour que** la bille effectue un tour complet, le fil devant rester tendu.

2°) Le pendule étant écarté **de sa position d'équilibre de $\theta_0 = 60°$, on l'abandonne sans vitesse initiale.** Quelles sont les caractéristiques du vecteur vitesse $\vec{V}_0$ de la bille lors de son passage par la verticale passant par O ?

3°) Lors du passage par cette position, on brûle le fil et la bille n'est plus soumise qu'à l'action de la pesanteur (on néglige l'influence de l'air).

a) Déterminer l'équation de la trajectoire dans le système d'axes (Ox, Oy) .

b) A quelle distance de la verticale de O, la bille touche-t-elle le sol situé à 2 m de B ? On prendra : $g = 10\ m.s^{-2}$.

Rép : 1°) a) b) $V_0 = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0) + V_A^2} \approx 4,9\ m.s^{-1}$;

$T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0) + m\frac{V_A^2}{l} = 4\ N$;

c) $V_{min} = \sqrt{gl(3 + 2\cos\theta_0)} \approx 5,7\ m.s^{-1}$;

2°) $V_0 = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta_0)} \approx 2,83\ m.s^{-1}$;

3°) a) $y = \frac{g}{2.V_0^2}x^2$; **b)** $d = V_0\sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 1,4\ m.$

....

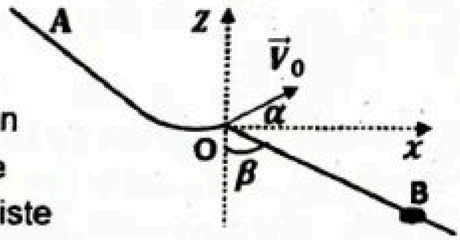
Problème 17.

Un skieur de masse m = 80 kg s'élance sur une piste d'appel et parvient à l'extrémité O du tremplin incliné, faisant un angle α avec l'horizontale, avec une vitesse de 72 km/h. **On néglige la résistance de l'air et on prendra** $g = 10\ m.s^{-2}$.

1°) Ecrire l'équation de la trajectoire du skieur au-delà du point O.

2°) La piste de réception fait avec la verticale descendante un angle $\beta = 45°$.

Déterminer la longueur $l = OB$ du saut mesurée sur la piste de réception pour $\alpha = 10°$.



3°) Quelle inclinaison α faut-il donner au tremplin pour obtenir le saut le plus long pour une vitesse V_0 donnée du skieur et une inclinaison β de la piste de réception ? Calculer alors la longueur $l = OB$ du saut correspondant.

Calculer cette longueur maximale pour $V_0 = 72\ km/h$ et $\beta = 45°$.

Réponses : 1°) $z = -\dfrac{g}{2.V_0^2.\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$;

2°) $l = \dfrac{2.V_0^2.\cos^2\alpha.(\cotan\beta + \tan\alpha)}{g\sin\beta} = 129\ m$;

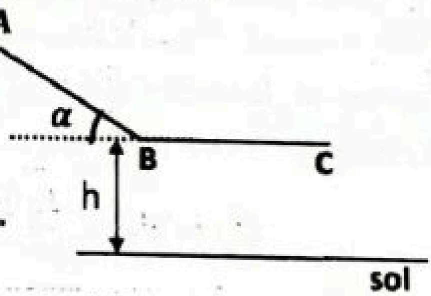
3°) $\alpha = \dfrac{\beta}{2} = 22,5°$; $l_{max} = 136,6\ m$.

Problème 18.

Une gouttière ABC sert de tremplin à un solide supposé ponctuel de masse. m = 100 g, Les deux portions AB et BC sont rectilignes. L'ensemble est posée sur une table horizontale. AB forme un angle $\alpha = 30°$ avec le plan de la table, BC est parallèle à ce plan, C se trouve juste au bord de la table.

On donne : $AB = BC = 50\ cm$.

Le solide est lâché en A sans vitesse initiale et glisse le long de ce tremplin. Les frottements sont assimilés à une force $\vec{f}$ parallèles au déplacement et d'intensité constante $f = 0,10\ N$.



1°) Déterminer :

a) l'accélération a_1 du mouvement du solide entre A et B ;

b)son accélération a_2 de son mouvement sur la portion BC ;

c) sa vitesse lors de son passage en B et C. ($g = 10\ m.s^{-2}$).

2°) Arrivé en C, le solide tombe d'une hauteur h = 80 cm sur le sol.

a) Etudier son mouvement et établir l'équation de sa trajectoire.

b) A quelle distance d de la verticale du point de chute le solide touche-t-il le sol ? Quelles sont alors les caractéristiques de son vecteur vitesse ?

Rép : 1°) a) $a_1 = g\sin\alpha - \frac{f}{m} = 4\ m.s^{-2}$; **b)** $a_2 = -\frac{f}{m} = -1\ m.s^{-2}$;

c) $V_B = \sqrt{2l\left(g\sin\alpha - \frac{f}{m}\right)} = 2\ m.s^{-1}$; $V_C = \sqrt{V_B^2 - \frac{2.f.l}{m}} = 1{,}73\ m.s^{-1}$

2°) a) $y = \frac{g}{2.V_0^2}x^2$; **b)** $d = V_C.\sqrt{\frac{2.h.}{g}} = 69{,}2\ cm$; $V = 2{,}23\ m.s^{-1}$; $\beta = 39{,}2°$.

....

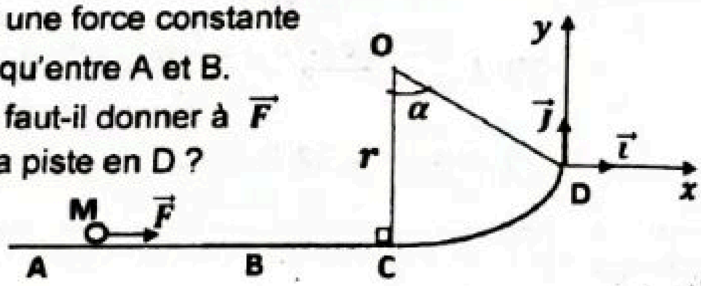
Problème 19. (Extrait du Bac, Aix-en- Provence 1982).

On négligera tous les frottements et on prendra $g = 10\ m.s^{-2}$.

La piste de lancement d'un projectile M comprend une partie rectiligne horizontale ABC et une portion circulaire CD, centrée en O, de rayon $r = 1\ m$, d'angle au centre $\alpha = 60°$ et telle que OC est perpendiculaire à AC.

Le projectile M, assimilable à un point matériel de masse $m = 0{,}5\ kg$, est lancé suivant AB = 1 m avec une force constante horizontale $\vec{F}$ ne s'exerçant qu'entre A et B.

1°) Quelle intensité minimale faut-il donner à $\vec{F}$ pour que le projectile quitte la piste en D ?



2°) a) Avec quelle vitesse $\vec{V}_D$ le projectile quitte-t-il la piste en D quand $F = 150\ N$?

b) Donner l'équation de sa trajectoire dans un repère orthonormé d'origine D $(D, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, Dx parallèle à ABC.

c) En déduire la hauteur maximale atteinte au-dessus de l'horizontale ABC ?

3°) Quelle est l'intensité de la force exercée par le projectile sur la piste lorsqu'il la quitte, en D avec la vitesse $\vec{V}_D$ précédente ?

Réponses : 1°) $F = \frac{mgr}{AB}(1 - \cos\alpha) = 2{,}5\ N$;

2°) a) $V_D = \sqrt{\frac{2}{m}[F.AB - mgr(1-\cos\alpha)]} \approx 24{,}3\ m.s^{-1}$;

b) $y = -\frac{g}{2.V_D^2.\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$;

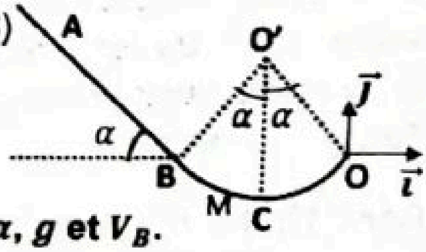
c) $h_m = r(1-\cos\alpha) + \frac{V_D^2.\sin^2\alpha}{2g} \approx 22{,}6\ m$;

3°) $F' = R = mg\cos\alpha + \frac{mV_D^2}{r}$; $F' \approx 298\ N$.

Problème 20. (Extrait du Bac, Aix-en- Provence 1986).

Une piste est constituée par un plan AB de longueur $AB = l = 0,8\ m$, incliné d'un angle $\alpha = 60°$ sur l'horizontale, se raccordant tangentiellement à une piste circulaire BCO de rayon $r = O'B = 0,5\ m$. L'extrémité O de la piste est au même niveau que B.

Un solide (S) supposé ponctuel de masse $m = 50\ g$ est posé, sans vitesse initiale au point A et glisse sans frottement le long de la piste.



1°) a) Déterminer la nature du mouvement pris par (S) sur la piste AB et calculer la durée du parcours AB.

b) Calculer la vitesse V_B du solide à son arrivée en B.

2°) a) Exprimer la vitesse V du solide en un point M défini par l'angle $\theta = (\overrightarrow{O'C}, \overrightarrow{O'M})$, en fonction de r, θ, α, g et V_B.

b) En déduire les vitesses V_C et V_O à son passage par les points C et O.

c) Déterminer, en fonction de m, r, θ, α, g et V_B. la force exercée par la piste sur le solide en M. Calculer sa valeur numérique aux points C et O.

3°) Etablir, dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, **l'équation de la trajectoire du solide au-delà de O.**

4°) Quelles sont :

a) les coordonnées du vecteur vitesse au sommet S de la trajectoire ?

b) l'ordonner du point S ?

c) la hauteur H atteinte au-dessus du sol, sachant que le point C est situé à 1,5 m **au-dessus du sol. On néglige la résistance de l'air.et on prendra** $g = 10\ m.s^{-2}$.

Rép : 1°) $a = g\sin\alpha$; $t \approx 0,43\ m.s^{-2}$; **b)** $V_B = \sqrt{2gl\sin\alpha} = 3,72\ m.s^{-1}$;

2°) a) $V_M = \sqrt{2gr(\cos\theta - \cos\alpha) + V_B^2}$; **b)** $V_C = 4,34\ m.s^{-1}$; $V_O = V_B$;

c) $R = mg(3\cos\theta - 2\cos\alpha) + m\dfrac{V_B^2}{r}$; $R_C = 2,38\ N$; $R_O = 1,63\ N$;

3°) $y = -\dfrac{g}{2.V_0^2.cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha \Longrightarrow y = -1,44x^2 + 1,73x$;

4°) a) $V_{xS} = V_0\cos\alpha = 1,86\ m.s^{-1}$; $V_{yS} = 0$; **b)** $y_S = \dfrac{V_0^2 sin^2\alpha}{2g} \approx 0,52\ m$

c) $H = 2,27\ m$.

Problème 21.

Une sphère de centre O et de rayon r, repose en E sur un sol horizontal. Un rail horizontal AB repose en B sur le sommet de la sphère. Un solide ponctuel de masse m, lancé en A avec une vitesse $\vec{V}_A$ se déplace sur le rail avant de décrire sur la sphère la trajectoire BCD. On pose : $\alpha = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ et $\alpha_0 = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})$.

1°) Déterminer en fonction de m, r, V_A, g et α, la norme de la réaction exercée par la sphère sur le solide lorsqu'il passe en C.

2°) Le solide perd le contact avec la sphère en D avec la vitesse V_D.
Exprimer V_D en fonction de r, g, α_0.

3°) a) Etablir dans le repère orthonormé $(D, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ l'équation de la trajectoire du solide. L'axe Dy est vertical descendant.

b) Le solide touche le sol en S, calculer la distance ES pour $r = 0,50\ m$, $\alpha_0 = 30°$, $g = 10\ m.s^{-2}$.

Rép : 1°) $R = mg(3\cos\alpha - 2) - m\frac{V_A^2}{r}$; **2°)** $V_D = \sqrt{gr\cos\alpha_0}$;

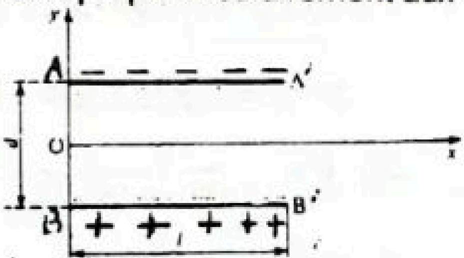
3°) a) $y = -\frac{g}{2.V_0^2.cos^2\alpha_0}x^2 + x\tan\alpha_0 \Longrightarrow y = 1,54x^2 + 0,58x$

b) $ES = 0,86\ m.$

....

Problème 22. (Extrait du Bac, SM, Guinée 1996).

Lors de la désintégration du radium $^{226}_{88}Ra$, on procède à l'étude de son rayonnement. Ainsi, après avoir focalisé les particules émises et obtenu un faisceau homocinétique horizontal, on fait passer le faisceau constitué de charges positives q entre les plaques d'un condensateur plan, d'armatures horizontales AA' et BB' de longueur $l = 2\ cm$ et séparées d'une distance $d = 10\ mm$. A une distance $D = 0,50\ m$ de A'B', on place perpendiculairement aux armatures un écran fluorescent (E).



Soit $\vec{V}_0$ la vitesse d'arrivée des particules dans le champ électrostatique.

1°) Etablir l'équation de la trajectoire au moment de la traversée du condensateur.

2°) Après la sortie du champ, que devient cette trajectoire ?
En déduire la nouvelle équation.

3°) Soit M un point d'impact sur l'écran, tel que O'M = 1,2 cm.
La charge q = 3,2.10^{-19} C. Déterminer la masse des particules émises.
Données : 1 u = 1,66.10^{-27} kg ; U = 2,25.10^5 V ; V0 = 3.10^7 m/s.

Réponses : 1°) $y = \frac{1}{2}\frac{q.U}{md.V_0^2}x^2$; **2°)** $y = \frac{q.U.l}{md.V_0^2}\left(x - \frac{l}{2}\right)$;

3°) $m = \frac{q.U.l}{y.d.V_0^2}\left(D + \frac{l}{2}\right) = 6,8.10^{-27}\ kg.$

Problème 23. (Extrait du Bac, C et E, Montpellier 1973).

On dispose d'un oscilloscope électronique **dont les plaques de déviation verticales** sont les armatures d'un condensateur plan distantes de $d = 4\ cm$ et de longueur $l = 8\ cm$, **parallèlement à la direction initiale du faisceau d'électrons.**

Au moment où les électrons pénètrent entre les plaques, le faisceau est homocinétique de vitesse V_0. On observe le spot sur un écran fluorescent situé à la distance $D = 36\ cm$ du centre des plaques.

1°) Etablir l'équation de la **trajectoire au moment de la traversée du condensateur.**

2°) Etablir la relation donnant le déplacement du spot sur l'écran en fonction de la tension U appliquée aux plaques.

3°) La sensibilité de l'appareil est caractérisée par la tension qui provoque un déplacement du spot de 1 mm sur l'écran. Calculer la vitesse V_0 sachant que la sensibilité est 4 V/mm.

Réponses : 1°) $y = \frac{1}{2}\frac{e.U}{md.V_0^2}x^2$; **2°)** $y = \frac{eUDl}{mdV_0^2}$; **3°)** $V_0 = 2,26.10^7\ m.s^{-1}$.

....

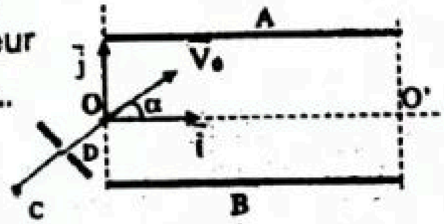
Problème 24. (Extrait du Bac, série C-E, Lille 1984).

Un condensateur plan est constitué de deux plaques métalliques parallèles rectangulaires horizontales A et B de longueur l et séparées par une distance d

On raisonnera dans le repère $R(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ constituant un trièdre direct orthonormé. Le point O est équidistant des deux plaques.

Un faisceau homocinétique de protons, émis en C sans vitesse est accéléré entre les points C et D, situés dans le plan $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Il pénètre en O, en formant un angle α avec le vecteur $\vec{\imath}$ **dans le champ électrique uniforme $\vec{E}$ du condensateur.**



1°) Après avoir indiqué en le justifiant le signe de $V_D - V_C$, calculer en fonction de $U = |V_D - V_C|$ la vitesse V_0 de pénétration dans le champ électrique.

AN : $U = 1\,000\ V$; masse du proton $m = 1,6.10^{-27} kg$; charge élémentaire : $e = 1,6.10^{-19}\ C$.

2°) Indiquer en le justifiant le signe de $V_A - V_B$ tel que le faisceau de protons puisse passer par le point O' $(l, 0, 0)$. Donner l'équation de la trajectoire des protons dans le repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, en fonction de $U' = |V_A - V_B|$, α et d.

Quelle est la nature du mouvement des protons ? Calculer la valeur numérique de U' qui permet de **réaliser la sortie en** O' pour $\alpha = 30°$, $l = 20\ cm$; $d = 7\ cm$.

3°) Dans le cas où la tension U' a la valeur précédemment calculée, déterminer à quelle distance minimale du plateau supérieur passe le faisceau de protons ? On négligera le poids des protons devant les forces électriques.

Réponses : 1°) $\Delta E_C = e(V_C - V_D) \Longrightarrow V_C - V_D > 0 \Longleftrightarrow V_D - V_C < 0$;

$$\Delta E_C = \frac{1}{2} mV_0^2 = eU \Longrightarrow V_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 4,5.10^5\ m.s^{-1} ;$$

2°) $V_A - V_B > 0$; $y = -\dfrac{eU'}{2md.V_0^2 cos^2\alpha} x^2 + x \tan\alpha$;

Le faisceau de protons passera par O' si : $x = l$ et $y = 0$:

$$U' = \frac{md.V_0^2 \sin 2\alpha}{e.l} \Longrightarrow U' = \frac{2d.U}{l} \sin 2\alpha; \Longrightarrow U' \approx 610\ V ;$$

3°) $d_{min} = \dfrac{d}{2} - y_S$; y_S est l'ordonnée du sommet de la trajectoire :

$x_S = \dfrac{U}{U'} d \sin 2\alpha = \dfrac{l}{2}$; alors : $y_S = \dfrac{l}{4} \tan\alpha \Longrightarrow d_{min} = 0,6\ cm$

LA PHYSIQUE AU SERVICE DE L'HOMME MODERNE.

(Konaté Cheickna)

**4– DYNAMIQUE DU SOLIDE EN ROTATION.
SERIE MATHEMATIQUE

4.1 – RELATION FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE DU SOLIDE EN ROTATION.

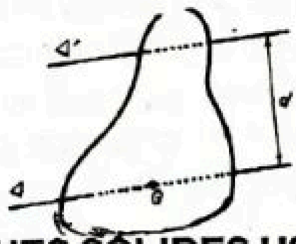
Enoncé : « Dans un référentiel galiléen, la somme algébrique des moments des forces appliquées à un solide en rotation autour d'un axe fixe, est égale au produit du moment d'inertie du solide par rapport à l'axe par son accélération angulaire. »

$$\boxed{\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}ex) = J_\Delta . \alpha''}$$

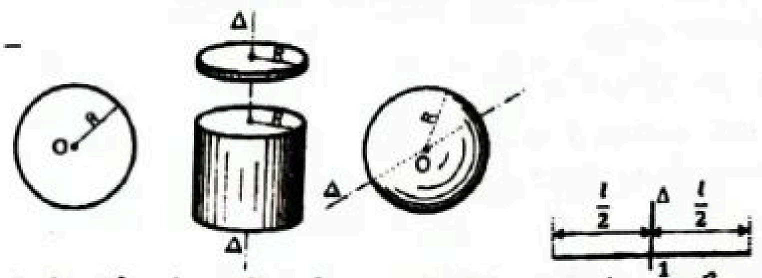
4.2 – THEOREME D'HUYHENS.

« Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe quelconque Δ' est égal à son moment d'inertie par rapport à un axe Δ, parallèle à Δ' et passant par son centre de gravité, augmenté du produit de la masse du solide par le carré de la distance des deux axes »

$$\boxed{J_{\Delta'} = J_\Delta + md^2}$$



4.3 – MOMENT D'INERTIE DE QUELQUES SOLIDES USUELS PAR RAPPORT A LEUR AXE DE SYMETRIE.

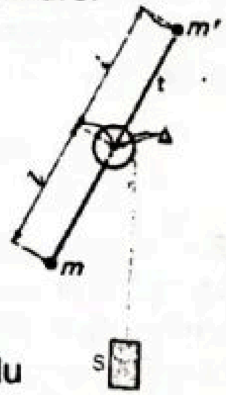


a: $J = mR^2$ b: $J = \frac{1}{2}mR^2$ c: $J = \frac{2}{5}mR^2$ $J_\Delta = \frac{1}{12}ml^2$

EXERCICES ET PROBLEMES RESOLUS

Problème 1.

Un cylindre homogène de rayon r = 10 cm de masse M = 1 kg, peut tourner autour de son axe de révolution horizontal Δ ; il soutient un solide S, de masse m = 10 kg, par l'intermédiaire d'une corde enroulée sur le cylindre.



Le cylindre est traversé suivant un diamètre par une tige t (figure) portant à ses extrémités deux masses égales, de valeur m' = 0,5 kg, pratiquement confondues à leurs centres de gravité situés à l = 50 cm de l'axe Δ. Le système est abandonné à lui-même sans vitesse initiale.

1°) En négligeant les masse de la corde et de la tige t ainsi que les résistances passives, calculer l'accélération du mouvement de S et la tension de la corde pendent ce mouvement.

2°) La corde quitte le cylindre quand S est descendu de h = 5 m ; calculer la vitesse angulaire du cylindre à cet instant (en rad/s et en tours/minute) et le nombre de tours effectués par le cylindre depuis le départ.

On donne : g = 10 u SI.

....**Résolution** ....

1°) Accélération du mouvement de S.

Appliquons la R.F.D aux différentes parties du système :

- Sur le solide S en translation :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Soit : $mg - T = ma \Longrightarrow T = mg - ma \quad (1)$

- Sur le cylindre muni de la tige t et des masses m' en rotation :

$$\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}ex) = J_\Delta . \alpha'' \Longrightarrow T'r + P'l\cos\alpha - P'l\cos\alpha = J_\Delta . \alpha''$$

Soit : $T' = \frac{J_\Delta}{r}\alpha''$; or : $a = r\alpha'' \Longrightarrow \alpha'' = \frac{a}{r}$

Donc : $T' = \frac{J_\Delta}{r^2} a \qquad (2)$

La masse de la corde étant négligeable, les tensions T et T' sont égales :

$$T = T' \Longleftrightarrow mg - ma = \frac{J_\Delta}{r^2} a \Longrightarrow a = \frac{mg}{m + \frac{J_\Delta}{r^2}}$$

D'après le théorème d'Huygens, le moment d'inertie J_Δ du système par rapport à l'axe (Δ) est :

$J_{\Delta} = \frac{1}{2}Mr^2 + 2m'l^2$;

d' où $\boxed{a = \frac{mg}{m + \frac{M}{2} + 2m'\left(\frac{l}{2}\right)^2}}$ AN : $\boxed{a = 2,8\ m.s^{-2}}$

Calcul de la tension de la corde.

La tension de la corde est donnée par la relation (1):

$T = mg - ma \Longrightarrow \boxed{T = m(g - a)}$ AN : $\boxed{T = 72\ N}$

2°) Vitesse angulaire du cylindre.

On a : $V = r\omega \Longrightarrow \omega = \frac{V}{r}$

La vitesse linéaire V est donnée par la relation :

$V^2 = 2ah \Longrightarrow V = \sqrt{2ah}$

d' où $\boxed{\omega = \frac{1}{r}\sqrt{2ah}}$

AN : $\boxed{\omega = 52,91\ rad.s^{-1}}$ ou $\boxed{N \approx 505\ tr/min}$

Nombre de tours effectués depuis le départ.

Lorsque le solide est descendu d'une hauteur h, le cylindre a tourné d'un angle α tel que :

$h = r.\alpha \Longrightarrow \alpha = \frac{h}{r}$

Si n est le nombre de tours effectués par le cylindre :

$\alpha = 2\pi n \Longrightarrow n = \frac{\alpha}{2\pi}$

d' où $\boxed{n = \frac{h}{2\pi r}}$ AN : $\boxed{n = 7,95\ trs \approx 8\ trs}$

....

Problème 2.

Sur la gorge d'une poulie de masse 100 g et de rayon r = 6 cm, mobile sans frottement autour d'un axe horizontal, passe un fil de masse négligeable. Ce fil porte une masse M = 300 g et une masse m = 100 g. La masse M se trouve à 3 m au-dessus du sol ; la masse m est au niveau du sol sans toutefois y reposer. On abandonne le système au temps 0.

1°) Calculer l'accélération prise par la masse M en appliquant à la poulie la relation fondamentale de la dynamique du solide en rotation.

2°) Calculer la tension de chaque fil pendant le mouvement.

3°) Calculer la vitesse de M quand elle arrive au sol.

4°) a) Quelle est alors la vitesse angulaire de la poulie ?

b) Quelle force F faut -il appliquer tangentiellement à la poulie pour qu'elle s'arrête au bout de 6 tours, le fil supportant m étant coupé quand M arrive au sol ? On supposera toute la masse de la poulie repartie sur sa circonférence.

On donne : g ≈ 10 u.SI.

Réponses : 1°) 4 m.s -2 ; 2°) 1,8 N ; 1,4 N. 3°) 4,9 m. s -1 ;
4°) 82 rad.s – 1 ; 0,53 N.

..Résolution ....

1°) Accélération prise par la masse M.

1ère méthode : appliquons la R.F.D. sur les différentes parties du système :

- Sur la masse m en translation :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Soit : $T - mg = ma \Longrightarrow T = ma + mg$ (1)

- Sur la masse M en translation :

$$\sum \vec{F}_{ex} = M\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{T'} = M\vec{a}$$

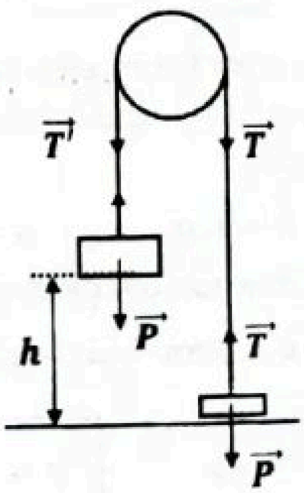
Soit : $Mg - T' = Ma \Longrightarrow T' = Mg - Ma$ (2)

- Sur la poulie en rotation :

$$\sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}ex) = J_{\Delta}.\alpha'' \Longrightarrow Tr - T'r = J_{\Delta}.\alpha''$$

or : $a = r\alpha'' \Longrightarrow \alpha'' = \frac{a}{r}$

donc : $T' - T = \frac{J_{\Delta}}{r^2} a$ (3)



En remplacent dans (3), T et T' par leurs expressions, on obtient :

$$Mg - Ma - mg + ma = \frac{J_{\Delta}}{r^2} a \Longrightarrow \left(M + m + \frac{J_{\Delta}}{r^2}\right) a = (M - m)g$$

Soit : $a = \dfrac{M-m}{M + m + \frac{J_{\Delta}}{r^2}} g$

La masse de la poulie étant repartie sur sa circonférence:

$$J_\Delta = m'r^2 \Longrightarrow \frac{J_\Delta}{r^2} = m'$$

d' où $$\boxed{a = \frac{M-m}{M+m+m'}g}$$

AN : $a = \frac{300-100}{300+100+100} \times 10 = 4\, m.s^{-2} \Longrightarrow \boxed{a = 4\, m.s^{-2}}$

2ème méthode : appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{ex}) \Longleftrightarrow \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 = (M-m)g.x$$

En dérivant par rapport au temps et en tenant compte que $\omega = \frac{V}{r}$, on obtient :

$$\left(M + m + \frac{J_\Delta}{r^2}\right)a = (M-m)g \Longrightarrow \boxed{a = \frac{M-m}{M+m+\frac{J_\Delta}{r^2}}g}$$

Tensions T et T' des deux brins du fil.

Les tensions T et T' sont données par les relations (1) et (2) :

On a : • $T = m(a+g) = 0,1(4+10) = 1,4\, N$

• $T' = M(g-a) = 0,3(10-4) = 1,8\, N$

d' où $\boxed{T = 1,4\, N}$ $\boxed{T' = 1,8\, N}$

3°) Vitesse de M à l'arrivée au sol.

La vitesse de M à l'arrivée au sol est donnée par la relation :

$$V^2 = 2ah \Longrightarrow V = \sqrt{2ah} = \sqrt{2 \times 4 \times 3} \approx 4,9\, m.s^{-1}$$

d' où $\boxed{V \approx 4,9\, m.s^{-1}}$

4°) Vitesse angulaire de la poulie.

On a : $V = r\omega \Longrightarrow \omega = \frac{V}{r} = \frac{4,9}{6.10^{-2}} = 81,6\, rad.s^{-1}$

d' où $\boxed{\omega \approx 82\, rad.s^{-1}}$

Force de freinage.

1ère méthode : appliquons à la poulie la R.F.D. du solide en rotation :

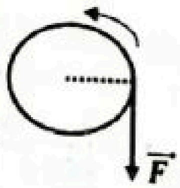
$$\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}ex) = J_\Delta . \alpha'' \iff -Fr = J_\Delta . \alpha' \Longrightarrow F = -\frac{J_\Delta}{r}\alpha''$$

Déterminons l'accélération angulaire pendant la période de freinage:

On a : $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha''\alpha \Longrightarrow \alpha'' = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha}$

La poulie s'arrête au bout de n = 6 trs, alors :

$\omega = 0$; $\omega_0 = 82\ rad.s^{-1}$; $\alpha = 2\pi n$



Donc : $\alpha'' = -\frac{\omega_0^2}{4\pi n}$

Comme $J_\Delta = m'r^2$, on obtient :

$$\boxed{F = \frac{m'r\omega_0^2}{4\pi n}} \quad \text{ou} \quad \boxed{F = \frac{m'V^2}{4\pi r n}}$$

AN : $F = \frac{0,1\times(4,9)^2}{4\times 3,14\times 6.10^{-2}\times 6} = 0,53\ N$; d' où $\boxed{F = 0,53\ N}$

2ème méthode : appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{ex}) \iff \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 - \frac{1}{2}J_\Delta\omega_0^2 = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}).\alpha = -Fr.\alpha$$

Au bout de n = 6 tours la poulie s'arrête :

$\omega = 0$ et $\alpha = 2\pi n$

Donc : $-\frac{1}{2}J_\Delta\omega_0^2 = -Fr.2\pi n \Longrightarrow \boxed{F = \frac{m'r\omega_0^2}{4\pi n} = \frac{m'V^2}{4\pi r n}}$

Problème 3.

Un cylindre horizontal homogène de masse M = 20 kg, de rayon r = 10 cm mobile autour de son axe horizontal Δ, supporte un solide S , de masse m = 10 kg, par l'intermédiaire d'une corde enroulée sur la surface du cylindre.

1°) Le solide S, partant du repos, tombe d'une hauteur de 3 m en entraînant la **rotation du cylindre. En négligeant la masse de la corde et les résistances passives**, calculer l'accélération du solide, sa vitesse en fin de chute et **la durée de celle-ci.**

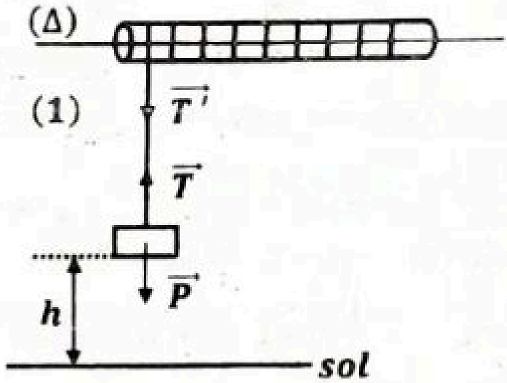
2°) A la fin de cette chute, la corde quitte le cylindre lancé ; celui - ci se trouve alors soumis à un couple résistant de moment constant qui l'arrête après une rotation de 100 tours. Calculer le moment de ce couple, l'accélération angulaire et la durée de ce freinage.(g ≈ 10 m.s $^{-2}$).

Réponses:1°) 5 m.s -2 ; 5,5 m.s -1;1,1 s ; 2°) – 0,24 N.m ; -2,4 rad.s -2 ; 23 s.

Résolution

1°) Accélération du solide.

Appliquons la R.F.D. aux diverses parties du système.



- Sur le solde de masse m en translation :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Soit : $mg - T = ma \Longrightarrow T = mg - ma$ (1)

- Sur le cylindre en rotation :

$$\sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}ex) = J_{\Delta}.\alpha'' \Longrightarrow T'r = J_{\Delta}.\alpha''$$

or : $a = r\alpha'' \Longrightarrow \alpha'' = \frac{a}{r}$

donc : $T' = \frac{J_{\Delta}}{r^2} a$ (2)

La masse de la corde étant négligeable :

$$T = T' \Longleftrightarrow mg - ma = \frac{J_{\Delta}}{r^2} a \Longrightarrow \left(m + \frac{J_{\Delta}}{r^2}\right) a = mg$$

Pour un cylindre homogène : $J_{\Delta} = \frac{1}{2}Mr^2$;

d' où $\boxed{a = \frac{mg}{m + \frac{M}{2}}}$ AN : $\boxed{a = 5\, m.s^{-2}}$

Autre méthode : appliquons le théorème de l'énergie cinétique.

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{ex}) \Longrightarrow \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}J_{\Delta}\omega^2 = mg.x$$

En dérivant par rapport au temps et en tenant compte que $\omega = \frac{V}{r}$, on obtient :

$$\left(m + \frac{J_{\Delta}}{r^2}\right) a = mg \Longrightarrow a = \frac{mg}{m + \frac{J_{\Delta}}{r^2}}$$

Comme $J_{\Delta} = \frac{1}{2}Mr^2$, on obtient :

d' où $\boxed{a = \frac{mg}{m + \frac{M}{2}}}$ AN : $\boxed{a = 5\, m.s^{-2}}$

Vitesse du solide en fin de chute.

On a : $V^2 = 2ah \Longrightarrow V = \sqrt{2ah} = \sqrt{2 \times 5 \times 3} = 5,5\, m.s^{-1}$

d' où $\boxed{V \approx 5,5\, m.s^{-1}}$

Durée de la chute.

On a : $V = at \Longrightarrow t = \frac{V}{a} = \frac{5,5}{5} = 1,1\ s$; d' où $\boxed{t = 1,1\ s}$

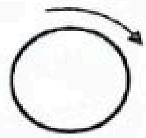
2°) Calcul du couple résistant.

Le cylindre est lancé à la vitesse angulaire :

$$\omega_0 = \frac{V}{r} = \frac{5,5}{0,1} \Longrightarrow \omega_0 == 55\ rad.s^{-1}$$

Appliquons au cylindre le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{ex}) \Longrightarrow \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 - \frac{1}{2}J_\Delta\omega_0^2 = \mathcal{M}.\alpha$$



A l'arret : $\omega = 0$ et $\alpha = 2\pi n$;

donc : $-\frac{1}{2}J_\Delta\omega_0^2 = \mathcal{M}.\alpha \Longrightarrow \mathcal{M} = -\frac{J_\Delta.\omega_0^2}{4\pi n}$

or : $J_\Delta = \frac{1}{2}Mr^2$ et $\omega_0 = \frac{V}{r}$;

d' où $\boxed{\mathcal{M} = -\frac{M.V^2}{8\pi n}}$ AN : $\boxed{\mathcal{M} \approx -0,24\ N.m}$

Accélération angulaire.

Appliquons sur le cylindre la relation fondamentale de la dynamique du solide en rotation :

$$\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}ex) = J_\Delta.\alpha'' \Longrightarrow \mathcal{M}.\alpha = J_\Delta.\alpha''$$

d' où $\boxed{\alpha'' = \frac{2}{Mr^2}\mathcal{M}}$ AN : $\boxed{\alpha'' = -2,4\ rad.s^{-2}}$

Durée du freinage.

On a : $\omega = \alpha'' t + \omega_0 \Longrightarrow t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha''}$

A l'arret : $\omega = 0$;

d' où $\boxed{t = -\frac{\omega_0}{\alpha''}}$ AN : $\boxed{t \approx 23\ s}$

....

LA PHYSIQUE POUR L'HOMME MODERNE.

(Konaté Cheickna).

EXERCICES ET PROBLEMES PROPOSES.

Problème 1.

Trois tiges identiques de masse m et de longueur l sont soudées par les extrémités de manière à former un triangle équilatéral.

Calculer le moment d'inertie du triangle :

1°) Par rapport à **un axe passant par un sommet et perpendiculaire au plan du triangle** ;

2°) Par rapport à un axe perpendiculaire au plan du triangle et passant par le milieu d'un côté.

3°) Par rapport à un axe perpendiculaire au plan du triangle et passant par son centre de gravité.

Réponses : 1°) $J_\Delta = \frac{3}{2} ml^2$; 2°) $J_\Delta = \frac{3}{4} ml^2$; 3°) $J_\Delta = \frac{1}{2} ml^2$.

....

Problème 2 :

Deux billes de masse m, ainsi qu'une troisième de masse 2m, sont fixées aux sommets d'un cadre ABC, ayant la forme d'un triangle équilatéral de côté a et dont la masse est négligeable (la bille de masse 2m est en C).

1°) Déterminer la position du centre d'inertie G **du système formé par les trois billes.**

2°) Calculer le moment d'inertie J_Δ de ce système par rapport à un axe (Δ) orthogonal au plan du triangle et passant par le milieu O de AB.

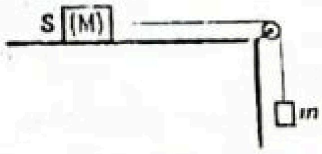
AN : $m = 25\ g$; $a = 20\ cm$.

Réponses : 1°) $OG = a\frac{\sqrt{3}}{4} \approx 8,7\ cm$; 2°) $J_\Delta = 2ma^2 = 2.10^{-3} kg.m^2$.

....

Problème 3.

Sur une table horizontale glisse un solide S de masse M = 1 kg tiré par un fil horizontal de masse négligeable qui passe sur une poulie et porte à son extrémité libre une masse m = 0,5 kg.



Les forces de frottement du solide S sur la table sont constantes et égales à 0,8 N.

1°) En considéra la masse de la poulie comme négligeable, calculer l'accélération a que prend le solide S et la tension du fil. ($g = 9,8\ m.s^{-2}$.).

2°) En fait, la poulie est constituée par un petit disque métallique de masse m' = 100 g et de 2 cm de rayon. Déterminer de façon plus précise, l'accélération a du solide S et les tensions T et T' des deux brins du fil.

Réponses : 1°) $a = 2,73\ m.s^{-2}$; $T = 3,53\ N$;
2°) $a = 2,64\ m.s^{-2}$; $T = 3,44\ N$; $T' = 3,58\ N$.

....

Problème 4.

Un solide (S) de masse m = 2 kg, est suspendu à un fil inextensible de masse négligeable, enroulé sur un cylindre de rayon r = 10 cm et de moment d'inertie $J_\Delta = 6.10^{-2}\ kg.m^2$ par rapport à son axe de révolution (Δ). Le solide (S) est abandonné sans vitesse initiale d'une hauteur h = 1 m au-dessus du sol.
On supposera que la rotation du cylindre se fait sans frottement. Calculer :
1°) l'accélération du mouvement pris par (S) ;
2°) sa vitesse en fin de chute et la durée de celle-ci.. ($g = 9,8\ m.s^{-2}$).

Réponses : 1°) $a = 2,45\ m.s^{-2}$; 2°) $V = 2,21\ m.s^{-1}$; $t = 0,90\ s$.

....

Problème 5.

Une boule sphérique indéformable de masse m = 10 kg roule sans glisser sur une table horizontale.
1°) Quelle est la trajectoire de son centre d'inertie ?
2°) Calculer la vitesse de son centre d'inertie pour que l'énergie cinétique de cette boule soit de 16 J.

Réponses : 2°) $V_G = 1,5\ m.s^{-1}$.

....

Problème 6.

Un disque plein de masse m = 16 kg et de rayon r = 0,2 m, roule sans glisser sur un plan incliné de l'angle α sur l'horizontale ($\sin\alpha = 0,2$).
Déterminer l'accélération du centre du disque et la réaction du plan sur le disque (g = 9,81 m.s $^{-2}$).

Réponses : $a = \frac{2}{3} g \sin\alpha \approx 1,31\ m.s^{-2}$;
$R = 154,1\ N$, inclinée de θ = 86° avec le plan incliné.

....

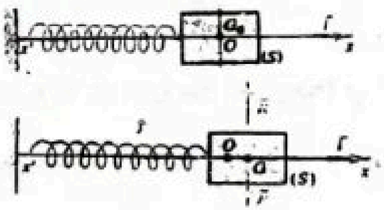
Problème 7.

Une sphère de masse M et de rayon R, lâchée sans vitesse initiale, roule sans glisser sur un plan incliné de l'angle α sur le plan horizontal.
1°) Montrer que, à chaque instant, le rapport entre les valeurs des énergies cinétiques de translation et de rotation de la sphère est constant.
2°) Calculer l'accélération du mouvement du centre de la sphère.

Réponses : 1°) $\frac{E_{Cr}}{E_{Ct}} = \frac{2}{5}$; 2°) $a = \frac{5}{7} g \sin\alpha$.

** 5 – OSCILLATIONS MECANIQUES LIBRES.
SERIE MATHEMATIQUE

5.1 – PENDULE ELASTIQUE HORIZONTAL
5.1.1 – Etude expérimentale.
Le pendule élastique est constitué d'un solide accroché à l'extrémité d'un ressort et l'autre extrémité est fixe.
Le solide écarté de sa position d'équilibre puis lâché, effectue des oscillations de part et d'autre de sa position d'équilibre.



5.1.2 – Equation différentielle du mouvement.
– Système : le solide.
– Référentiel : terrestre.
– Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ la réaction $\vec{R}$ du support et la tension $\vec{T}$ du ressort.
– Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\sum\vec{F}ex = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$

– Projetons sur Ox :

$$-T = ma \Longrightarrow -kx = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x}$$

d'où $$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

C'est l'équation différentielle caractéristique d'un oscillateur harmonique.

5.1.3 – Equation horaire du mouvement.
L'équation horaire du mouvement est la solution de l'équation différentielle.
C'est une fonction sinusoïdale de la forme :

$$\boxed{x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

- x_m : est appelé amplitude du mouvement en mètre (m) ;
- ω_0 : la pulsation propre en rad/s ;
- $\omega_0 t + \varphi$: est la phase à l'instant t, en rad ;
- φ : est la phase à l'origine, en rad.

Vérifions que $x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, est solution de l'équation différentielle :

- Vitesse : $V = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 x_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$
- Accélération : $a = \ddot{x} = \frac{dV}{dt} = -\omega_0^2 x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

  Soit : $\ddot{x} = -\omega_0^2 x \Longrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 = 0.$

On obtient ainsi une équation différentielle de même type que la précédente.

Par identification, on obtient : $\omega_0^2 = \frac{K}{m} \Longrightarrow$ $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}}$

5.1.4 – Période et fréquence propres.

* La période est la durée d'une oscillation complète.

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Longrightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$$

* La fréquence est le nombre d'oscillations effectuées en une seconde.

$$N_0 = f_0 = \frac{1}{T_0} \Longrightarrow \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}}$$

5.1.5 – Représentations graphiques.

Choisissons l'origine des dates de façon que $\varphi = 0$; dans ce cas :

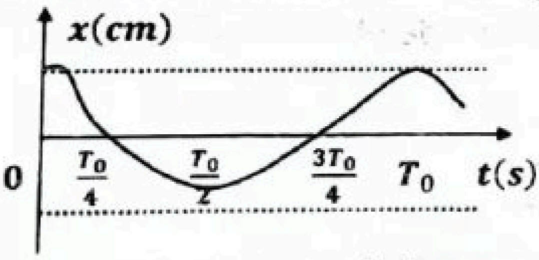
$$x = x_m \cos\omega_0 t = x_m \cos\frac{2\pi}{T_0}t \quad \text{et} \quad V = \frac{dx}{dt} = \omega_0 x_m \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

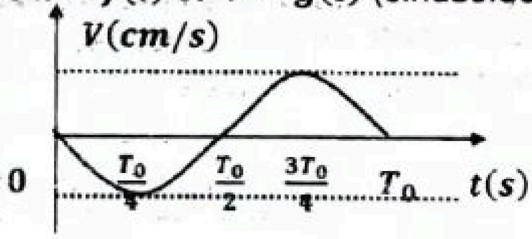
On obtient les tableaux ci-dessous :

t(s)	*0*	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
x(cm)	x_m	*0*	$-x_m$	*0*	x_m

t(s)	*0*	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
v(cm/s)	*0*	$-\omega_0 x_m$	*0*	$\omega_0 x_m$	*0*

On en déduit les courbes des fonctions $x = f(t)$ et $V = g(t)$ (sinusoïdes).





La vitesse V, est en quadrature avance par rapport à l'élongation x ; son amplitude est :

$$\boxed{V_m = \omega_0 x_m}$$

On construit de la même manière la courbe représentant les variations de l'accélération $a = h(t)$.

5.1.6 – Etude énergétique.

a) Expression de l'énergie mécanique.

L'énergie mécanique d'un système est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle.

$$\boxed{E_m = E_C + E_P}$$

- $E_C = \frac{1}{2}mV^2$
- $E_P = E_{PP} + E_{Pe}$
- *Energie potentielle de pesanteur* : $E_{Pp} = 0$; $(z = cste)$;
- *Energie potentielle élastique* : $E_{Pe} = \frac{1}{2}kx^2$.

d'où $$\boxed{E_m = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}kx^2}$$

b) Conservation de l'énergie mécanique.

1ère méthode. Dérivons E_m par rapport au temps :

$$E_m = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Longrightarrow \frac{dE_m}{dt} = mV\frac{dV}{dt} + kx\frac{dx}{dt}$$

soit : $\frac{dE_m}{dt} = mV\ddot{x} + kxV \Longrightarrow \frac{dE_m}{dt} = mV\left(\ddot{x} + \frac{k}{m}x\right)$

or : $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$; alors : $\frac{dE_m}{dt} = 0$

La dérivée de E_m est nulle, donc E_m est une constante :

d'où $$\boxed{E_m = Cste}$$

2ème méthode.

A la date t : $x = x_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$ et $V = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 x_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

En remplaçant x et V dans l'expression de E_m, on obtient :

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}kx_m^2}$$

E_m, est indépendante du temps, donc E_m est une constante.

Elle est proportionnelle au carré de l'amplitude des oscillations.

Remarque.

Un oscillateur non entretenu, effectue des oscillations dont l'amplitude diminue progressivement par suite des phénomènes dissipatifs (l'énergie mécanique E_m diminue progressivement et finie par s'annuler). On dit qu'il y a amortissement des oscillations .

5.2 – PENDULE ELASTIQUE VERTICAL.

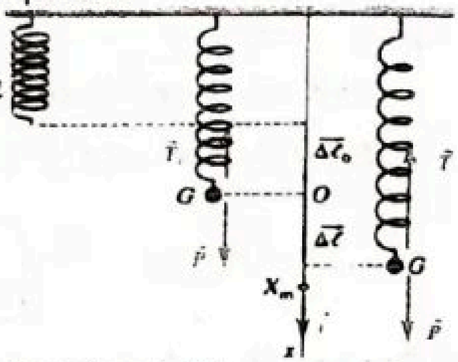
On utilise le même dispositif, cette fois le système est disposé verticalement.

5.2.1 – Equation différentielle du mouvement.

Dans le référentiel terrestre, le solide est soumis à deux forces :
son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$ du ressort.

A l'équilibre : $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \Longrightarrow mg - kx_0 = 0$

Le solide écarté verticalement de sa position d'équilibre, puis lâché effectue des oscillations de part et d'autre de cette position d'équilibre.



ressort sans la bille
ressort et la bille à l'équilibre
le ressort et la bille effectuent des oscillations

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \Longrightarrow mg - k(x + x_0) = ma$$

soit : $mg - kx - kx_0 = m\ddot{x}$;

or : $mg - kx_0 = 0$;

d'où
$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

C'est l'équation différentielle caractéristique d'un oscillateur harmonique.

Le mouvement est rectiligne sinusoïdal, d'équation : $x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$,

5.2.1 – Etude énergétique.

a) Expression de l'énergie mécanique du système.

L'énergie mécanique de l'oscillateur est :

$$E_m = E_C + E_P + E_{Pe} \Longrightarrow E_m = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}k(x + x_0)^2 - mgx \text{ ; } (Z = -x).$$

D'où on en déduit :

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx_0^2}$$

b) Conservation de l'énergie mécanique.

Dérivons E_m par rapport au temps :

$$E_m = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 \Longrightarrow \frac{dE_m}{dt} = mV\frac{dV}{dt} + kx\frac{dx}{dt}$$

soit : $\frac{dE_m}{dt} = mV\ddot{x} + kxV \Longrightarrow \frac{dE_m}{dt} = mV\left(\ddot{x} + \frac{k}{m}x\right)$

or : $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$; donc : $\frac{dE_m}{dt} = 0 \Longrightarrow \boxed{E_m = Cste}$

La dérivée de E_m est nulle, donc E_m est une constante :

....

EXERCICES ET PROBLEMES RESOLUS

Problème 1 : (Eurin-gié , Exo 5. 5 , page 92).

L'équation horaire du mouvement d'un oscillateur mécanique rectiligne sinusoïdal est donnée par la relation :

$$x = 3\cos\left(20t + \frac{\pi}{4}\right)$$

avec x en cm et t en s.

1°) Quelles la période, la fréquence et l'amplitude des oscillations.

2°) Exprimer la vitesse et l'accélération de l'oscillateur à chaque instant.

3°) Calculer les amplitudes de la vitesse et de l'accélération.

4°) Calculer la vitesse et l'élongation aux dates t = 0 et t = 4 s.

5°) Calculer l'énergie de l'oscillateur, sachant que sa masse est égale à 0,1 kg.

....**Résolution** ....

1°) Période, fréquence et amplitude des oscillations.

L'équation horaire $x = 3\cos\left(20t + \frac{\pi}{4}\right)$, est de la forme $x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$

avec $\omega = 20\, rad.s^{-1}$ et $\varphi = \frac{\pi}{4}\, rad$.

• Période : $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{10}\, s \Longrightarrow \boxed{T = 0,314\, s}$

• Fréquence : $f = \frac{1}{T} = \frac{10}{\pi} = 3,1847\, Hz \Longrightarrow \boxed{f = 3,185\, Hz}$

• Amplitude : $x_m = 3\, cm \Longrightarrow \boxed{x_m = 3.10^{-2}\, m}$

2°) Expressions de la vitesse et de l'accélération.

• $V = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \Longrightarrow \boxed{V = \dot{x} = -x_m \omega \sin(\omega t + \varphi)}$

d' où $\boxed{V = 0,6\cos\left(20t + \frac{3\pi}{4}\right)}$ $(m.s^{-1})$

• $a = \ddot{x} = \frac{dV}{dt} \Longrightarrow \boxed{a = 12\cos\left(20t + \frac{5\pi}{4}\right)}$ $(m.s^{-2})$

3°) Amplitude de la vitesse et de l'accélération.

• $V_m = \dot{x}_m = \omega . x_m \Longrightarrow \boxed{V_m = 0,6\, m.s^{-1}}$

- $a_m = \ddot{x}_m = \omega^2 . x_m \Longrightarrow$ $\boxed{\ddot{x}_m = 12\ m.s^{-2}}$

4°) Vitesse et élongation aux dates t = 0 et t = 4 s.

A l'instant t = 0 :

- $V_0 = 3.10^{-2}.\omega.\cos\frac{3\pi}{4} \Longrightarrow$ $\boxed{V_m = -0,42\ m.s^{-1}}$

- $x_0 = 3.10^{-2}\cos\frac{\pi}{4} \Longrightarrow$ $\boxed{x_0 = 2,1\ cm}$

A l'instant t = 4 s :

- $V = 0,6\cos\left(20 \times 4 + \frac{3\pi}{4}\right) \Longrightarrow V =$
- $x = 3\cos\left(20 \times 4 + \frac{\pi}{4}\right) \Longrightarrow x =$

5°) Energie de l'oscillateur.

$E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2}kx_m^2$; or : $V_m = \omega.x_m$ et $\omega^2 = \frac{k}{m}$

d' où $\boxed{E_m = \frac{1}{2}mV_m^2}$ AN : $\boxed{E_m = 1,8.10^{-2}\ J}$

....

Problème 2 : (Eurin-gié , Exo 5. 9 , page 92).

Un oscillateur harmonique est constitué d'un ressort de masse négligeable suspendu à un point fixe A, auquel est accroché un solide ponctuel S de masse m = 200 g et de centre d'inertie G.

1°) La longueur à vide du ressort est l_0 = 20 cm. Quand on accroche le solide S, le ressort s'allonge de 8 cm. On prendra $g = 10\ m.s^{-2}$.

a) Ecrire la condition d'équilibre de la masse dans le champ de pesanteur.

b) Calculer la constante de raideur k du ressort.

2°) On tire le solide S verticalement vers le bas, en donnant un allongement supplémentaire a = 2 cm au ressort. **On lâche ensuite le solide sans vitesse initiale.**

a) Faire un bilan des forces qui s'exercent sur S. On prendra comme origine des déplacements la position d'équilibre du ressort avec le solide accroché.

L'axe vertical $(O,\vec{i})$ est orienté positivement vers le bas .

b) Etablir l'équation différentielle du mouvement.

c) Déterminer l'équation horaire t ⟶ y(t)

....**Résolution** ....

1°) a) Condition d'équilibre.

Le solide S à l'équilibre est soumis :

- à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$;

- à la tension $\vec{T}$ du ressort.

La condition d'équilibre implique :

$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$

Soit : $mg - k.\Delta l = 0 \Longrightarrow \boxed{k.\Delta l = mg}$

b) Constante de raideur du ressort.

D'après ce qui précède :

$$k.\Delta l = mg \Longrightarrow \boxed{k = \frac{mg}{\Delta l}} \quad \text{AN : } \boxed{k = 25\ N.m^{-1}}$$

2°) a) Bilan des forces qui s'exercent sur S.

Le système est encore soumis aux deux forces :

le poids $\vec{P} = m\vec{g}$; et la tension $\vec{T}$ du ressort.

b) Equation différentielle du mouvement.

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \Longrightarrow mg - k(y_0 + y) = ma$$

soit : $mg - ky_0 - ky = m\ddot{y}$;

or : $mg - ky_0 = 0$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

d'où $\boxed{\ddot{y} + \omega_0^2\, y = 0}$ AN : $\boxed{\ddot{y} + 1{,}25y = 0}$

c) Equation horaire du mouvement.

Le mouvement est rectiligne sinusoïdal, d'équation :

$$y = y_m \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

avec : $y_m = a = 2\ cm$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

La phase φ se détermine à partir des conditions initiales.

A l'instant t = 0 : $\begin{cases} y = 0 \\ V = \dot{y} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi = 1 \\ \sin\varphi = 0 \end{cases} \Longrightarrow \varphi = 0$

d' où $\boxed{y = y_m \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)}$ AN : $\boxed{y = 2.10^{-2}\cos 11{,}18t}$

La phase ϕ se détermine à partir des conditions initiales.

Problème 3 : (Eurin-gié , Exo 5. 10 , page 93).

L'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur repéré par sa position x sur un axe $(O, \vec{\imath})$ est : $\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$

La solution de cette équation différentielle peut s'écrire sous la forme :

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t.$$

1°) Que représente les paramètres x_0 et $\dot{x}_0$?

2°) Calculer la vitesse $\dot{x}(t)$.

3°) Montrer qu'on peut mettre la solution sous la forme : $x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$.

Exprimer x_m , $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ et $\tan \varphi$ en fonction de x_0 , $\dot{x}_0$ et ω.

Rép : 2°) $\dot{x} = -x_0 \omega \sin \omega t + \dot{x}_0 \cos \omega t$;

3°) $\cos \varphi = \frac{x_0}{x_m}$; $\sin \varphi = -\frac{\dot{x}_0}{x_m \cdot \omega}$; $x_m = \sqrt{\frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2} + x_0^2}$; $\tan \varphi = -\frac{\dot{x}_0}{\omega^2 \cdot x_0}$

....**Résolution** ....

1°) Signification des paramètres x_0 et $\dot{x}_0$.

- x_0 : est l'abscisse initiale.
- $\dot{x}_0$: est la vitesse initiale.

2°) Calcul de la vitesse $\dot{x}(t)$.

On a : $V = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -x_0 . \omega \sin \omega t + \dot{x}_0 \cos \omega t$

d' où $\boxed{\dot{x} = -x_0 . \omega \sin \omega t + \dot{x}_0 \cos \omega t}$

2°) Montrons que $x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$.

Méthode algébrique.

On a : $x = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t.$

Posons : $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}$;

alors : $x = A \left(\frac{x_0}{A} \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega . A} \sin \omega t \right)$

En posant : $\cos \alpha = \frac{x_0}{A}$ et $\sin \alpha = \frac{\dot{x}_0}{\omega . A}$; il vient :

$x = A(\cos \alpha \cos \omega t + \sin \alpha \sin \omega t)$ $\qquad x = A \cos(\omega t - \alpha)$

D' où en posant : $\alpha = -\varphi$ et $A = x_m$; on obtient :

$$\boxed{x = x_m \cos(\omega t + \varphi)}$$

On en déduit :

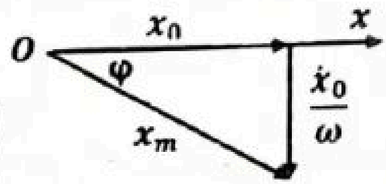
$$x_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2} \qquad \boxed{\cos\varphi = \frac{x_0}{x_m}\ ;\ \sin\varphi = -\frac{\dot{x}_0}{\omega.A}\ ;\ \tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\dot{x}_0}{\omega.x_0}}$$

Méthode graphique.

En remarquant que : $\sin\omega t = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$; alors :

$$x = x_0 \cos\omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Utilisons la construction de FRESNEL :



D'après le théorème de Pythagore :

$$x_m^2 = x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2 \Longrightarrow \boxed{x_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}}$$

On obtient successivement :

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{x_0}{x_m} \quad \sin\varphi = -\frac{\dot{x}_0}{\omega.x_m} \quad \tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\dot{x}_0}{\omega.x_0}}$$

d' où $\boxed{x = x_m\cos(\omega t + \varphi)}$

....

Problème 4 : (Eurin-gié , Exo 5. 14 , page 94).

Un point matériel est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal sur un axe $(O, \vec{\imath})$ autour de la position d'équilibre x = 0. A l'instant t = 0, le mobile est situé à l'origine et est animé d'une vitesse de 40 cm.s $^{-1}$ vers les abscisses négatives. La fréquence du mouvement est f = 5 Hz.

1°) Déterminer l'équation horaire du mouvement.

2°) Calculer la position et la vitesse du mobile à la date t = 5 s.

....**Résolution** ....

1°) Equation horaire du mouvement.

C'est une équation de la forme :

$$x = x_m\cos(\omega t + \varphi)$$

Déterminons x_m, ω et φ.

- $\omega = 2\pi f \Longrightarrow \boxed{\omega = 10\pi \quad rad.s^{-1}}$

x_m et φ se déterminent à partir des conditions initiales.

A l'instant $t = 0$: $\begin{cases} x = x_0 = x_m \cos\varphi = 0 \\ V = V_0 = -\omega.x_m \sin\varphi < 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos\varphi = 0 \\ \sin\varphi > 0 \end{cases}$

d' où $\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2} \quad rad}$

L'amplitude x_m est donnée par la relation :

$$V_0 = -\omega.x_m \sin\varphi \Longrightarrow x_m = -\frac{V_0}{\omega.\sin\varphi} = \frac{40}{10\pi.sin\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$$

d' où $\boxed{x_m = 1,27\ cm}$

L'équation horaire du mouvement est donc :

$$\boxed{x = 1,27\cos\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

2°) Position et vitesse du mobile à la date $t = 5\ s$.

- $x = 1,27\cos\left(10\pi \times 5 + \frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow x = 1,27\cos\left(50\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$

d' où $\boxed{x = 0}$

- $V = \frac{dx}{dt} = -\omega.x_m \sin(\omega t + \varphi) \Longrightarrow V = -10\pi \times \frac{4}{\pi}\sin\left(50\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

d' où $\boxed{V = -40\ cm.s^{-1}}$

....

Problème 5 : (Eurin-gié , Exo 5. 15 , page 94).

Un oscillateur horizontal est constitué par une masse m = 0,1 kg attachée à un ressort de masse négligeable et de raideur $k = 1\ N.m^{-1}$. Il oscille selon un axe $(O,\vec{\imath})$ autour de sa position d'équilibre x = 0.

A l'instant $t = 0 : x = x_0$ et $\dot{x} = \dot{x}_0$.

1°) Calculer la période T et la pulsation ω de cet oscillateur.

2°) Exprimer en fonction de x_0 et de $\dot{x}_0$. la phase φ et l'amplitude x_m du mouvement. Application numérique : $\dot{x}_0 = 15\ cm.s^{-1}$; $x_0 = 0,10\ m$.

En déduire l'équation horaire du mouvement.

3°) Déterminer l'énergie mécanique de cet oscillateur.

Résolution

1°) Période T et pulsation ω.

- $T = \frac{2\pi}{\omega}$; or : $\omega^2 = \frac{k}{m} \Longrightarrow$ $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ AN: $\boxed{\omega = 3,16\ rad.s^{-1}}$

d' où $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$ AN: $\boxed{T = 2\ s}$

2°) Expression de φ et x_m en fonction de x_0 et $\dot{x}_0$.

L'équation horaire est de la forme :

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Al'instant $t = 0$: $\begin{cases} x_0 = x_m \cos\varphi & (1) \\ V_0 = \dot{x}_0 = -\omega.x_m \sin\varphi & (2) \end{cases}$

En divisant (2) par (1), nous obtenons :

$\boxed{\tan\varphi = -\frac{\dot{x}_0}{\omega.x_0}} \Longrightarrow \boxed{\varphi = -25,4° = -0,443\ rad}$

Par ailleurs : $x_0 = x_m \cos\varphi \Longrightarrow$ $\boxed{x_m = \frac{x_0}{\omega.x_0} = 11,1\ cm}$

L'équation horaire du mouvement s'écrit :

$\boxed{x = 11,1\cos(3,16t - 0,443)}$ (cm)

3°) Energie de l'oscillateur.

$E_m = E_C + E_P = C^{te}$ $\boxed{E_m = \frac{1}{2}kx_m^2}$ AN: $\boxed{E_m = 6,2.10^{-3}\ J}$

LA PHYSIQUE AU SERVICE DE L'HOMME MODERNE.

(Konaté Cheickna)

EXERCICES ET PROBLEMES PROPOSES.

Problème 1 *.**

Un point matériel de masse m = 10 g est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal d'amplitude $x_m = 24\ cm$ et de période T = 4 s.

L'instant t = 0, étant un instant d'élongation maximale positive ; calculer :

1°) l'élongation, l'accélération et la force de rappel à la date $t = 0,5\ s$;;

2°) **la date du premier passage à l'abscisse $x = -12\ cm$ et la vitesse à cet instant.**

Reponses : 1°) x = 0,17 m ; a = - 0,42 m/s^2 ; F = 4,2.10^{-3} N ;

2°) t = 1,33 s ; v = - 0,327 m/s.

....

Problème 2. *.**

L'équation horaire du mouvement d'un oscillateur mécanique rectiligne sinusoïdal est donnée par la relation : $x = 3\cos\left(20t + \frac{\pi}{4}\right)$;

avec x en cm et t en s.

1°) Quelles sont la période, la fréquence et l'amplitude des oscillations ?

2°) Exprimer la vitesse et l'accélération de l'oscillateur à chaque instant.

3°) Calculer les amplitudes de la vitesse et de l'accélération.

4°) Calculer la vitesse et l'élongation aux dates $t = 0$ et $t = 4\ s.$

5°) Calculer l'énergie de l'oscillateur, sachant que sa masse est égale à 0,1 kg.

Réponses : 1°) $T_0 = 0,314\ s$; $f_0 \approx 3,185\ Hz$; $x_m = 3\ cm$;

2°) $V = 0,6\cos\left(20t + \frac{3\pi}{4}\right)$; $a = 12\cos\left(20t + \frac{5\pi}{4}\right)$;

3°) $V_m = 0,6\ m.s^{-1}$; $a_m = 12\ m.s^{-2}$;

4°) $x_0 \approx 2,12\ cm$; $V_0 \approx -0,42\ m.s^{-1}$; $x = 1,87\ cm$;

$V \approx 0,47\ m.s^{-1}$; **5°)** $E = 1,8.10^{-2}\ J.$

....

Problème 3. *.**

Au cours des oscillations, un oscillateur mécanique horizontal, constitué d'un solide de masse $m = 200\ g$ et d'un ressort de raideur $k = 10\ N/m$, décrit sans frottement un segment de longueur $l = 8\ cm$.

1°) Montrer que l'énergie mécanique de l'oscillateur est constante, puis calculer sa valeur. **En déduire la vitesse du solide au passage par la position d'équilibre $x = 0$.**

2°) A un instant t_1, le solide est au point d'abscisse $x_1 = 1,5\ cm$ et se déplace vers les abscisses décroissantes pour la première fois.

a) Calculer l'énergie potentielle de l'oscillateur .

b) En déduire l' énergie cinétique et la vitesse V du solide à cet instant

c)) Calculer la date t_1.

Rép : 1°) $E_m = \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{8}kl^2 \Longrightarrow E_m = 8.10^{-3}\,J$; $V \approx 0,28\,m.s^{-1}$;

2°)a) $E_P = 1,125.10^{-3}\,J$; **b)** $E_C = 6,875.10^{-3}\,J$; $V = 0,26\,m.s^{-1}$;

c) $t_1 \approx 8,4\,s$.

....

Problème 4. *.**

Un mobile ponctuel M se déplace sur un axe $x'Ox$ d'origine O. La loi horaire de son mouvement est : $x = 2\cos\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$; (x en cm et t en s).

1°) De quel type de mouvement s'agit-il ?

2°) Déterminer l'amplitude, la pulsation, **la période et la phase initiale du mouvement.**

3°) Quelle est la longueur du segment décrit par le mobile ?

4°) Quelle est **la vitesse de M à la date t ? En déduire la vitesse de M à la date t = 1 s**.

5°) Déterminer la date du premier passage du mobile à la position $x = 1$ cm.

6°) Déterminer l'équation différentielle du mouvement de M. En déduire son accélération lorsqu'il passe par le point d'abscisse $x = 1$ cm.

Réponses : 2°) $x_m = 2\,cm$; $\omega_0 = 40\pi = 125,6\,rad.s^{-1}$; $T_0 = 5.10^{-2}\,s$;

$\varphi = -\frac{\pi}{6}\,rad$; **3°)** $l = 4\,cm$;

4°) $V = -80\pi\sin\left(40\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$; $V = 1,256\,m.s^{-1}$;

5°) $t = 1,25.10^{-2}\,s$: **5°)** $\ddot{x} + 1600\pi^2 x = 0$; $\ddot{a} = -157,75\,m.s^{-1}$.

....

Problème 5. *.**

Un oscillateur mécanique horizontal est constitué d'un ressort de raideur $k = 25\,N.m^{-1}$, dont une extrémité est fixée à un support et l'autre extrémité est reliée à un solide de masse $m = 1\,kg$. Sur un axe, on repère la position x du centre d'inertie du solide ($x = 0$ au repos).

L'oscillateur est écarté de sa position d'équilibre puis lâché. On observe que

$$x = x_m\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

1°) Déterminer l'expression de la vitesse $\dot{x}(t)$ en fonction de x_m, ω_0, φ et t.

2°) A l'instant $t = 0$, $x = 6\,cm$ et $\dot{x} = -0,26\,m.s^{-1}$. Déterminer ω_0, x_m et φ.

Ecrire l'expression de x en fonction du temps.

On donne : $tan^{-1}(0,866) = 0,71\,rad$; $\cos^{-1}(0,71) = 0,758$.

Réponses : 1°) $V = \dot{x}(t) = -\omega_0 \cdot x_m\sin(\omega_0 t + \varphi)$;

2°) $\omega_0 = 5\,rad\cdot s^{-1}$; $\varphi = 0,71\,rad$; $x_m \approx 8\,cm$;

$x = 8.10^{-2}\cos(5t + 0,71)$.

Problème 6. *.**

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal d'équation horaire :

$$x = \cos 3\pi t + \sqrt{3} \sin 3\pi t.$$

x est exprimé en cm et t en secondes.

1°) Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme :

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

2°) Quelle est la période T du mouvement ? Construire le diagramme du mouvement pour $0 \leq t \leq T$.

3°) Calculer l'élongation et la vitesse du mobile à la date $t = 1\, s$.

4°) A quelle date le mobile passe-t-il pour la **première fois par l'élongation** $-1\, cm$ dans le sens positif. Trouver la vitesse et l'accélération du mobile à cet instant.

Réponses : 1°) $x = 2\cos\left(3\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$; 2°) $T \approx 0{,}67\, s$;

3°) $x = -1\, cm$; $V = -3\pi\sqrt{3}\, cm.s^{-1} \approx -16{,}32\, cm.s^{-1}$;

4°) $t \approx 0{,}44\, s$; $V = 0$; $a \approx 0{,}89\, m.s^{-2}$.

....

Problème 7. *.**

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal d'équation horaire :

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t.$$

Les unités sont celles du système international.

1°) Déterminer les constantes A, B et ω, sachant qu'à la date $t = 0$, le mobile passe par l'élongation $x = 4\, m$ en se déplaçant dans le sens positif, avec une vitesse de $15\, m.\, s^{-1}$ et une acièration égale en valeur absolue à $100\, m.\, s^{-2}$.

2°) Calculer l'accélération du mobile à la date $t = 0{,}314\, s$.

3°) Montrer que l'équation du mouvement peut se mettre sous la forme :

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Réponses : 1°) $x = 4\cos 5t + 3\sin 5t$; **2°)** $a = -75\, m.s^{-2}$;

3°) $x = 5\cos(5t - 0{,}64)$.

....

LA PHYSIQUE AU SERVICE DE L'HOMME MODERNE.

(Konaté Cheickna)

ELECTRO-MAGNETISME

1 – CHAMP MAGNETIQUE.

L'essentiel du cours.

1.1 – Définition. On appelle champ magnétique toute région de l'espace dans laquelle une aiguille aimantée est soumise à une force magnétique.
L'unité S.I de champ magnétique $\vec{B}$ est le Tesla (T).

1.2 – Sources de champ magnétique

La Terre, les aimants et le courant sont des sources de champ magnétique.

1.3 – Interactions magnétiques.

– Un aimant possède deux pôles : le pôle nord et le pôle sud.
– Des pôles de même nom se repoussent et **des pôles de noms contraires s'attirent.**
– Une bobine parcourue par un courant électrique se comporte comme un aimant, elle possède alors deux faces : la face nord et la face sud.
Les faces d'une bobine changent avec le sens du courant.

Règles permettant de déterminer les faces d'une bobine.

a) Règle du tire-bouchon de Maxwell.

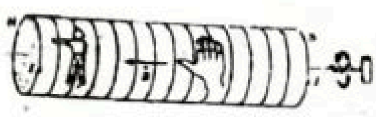
« Un tire-bouchon progresse de la face sud vers la face nord lorsqu'on le tourne dans le sens du courant »

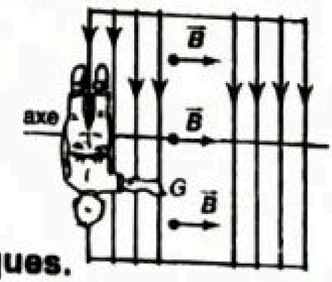
b) Règle du bonhomme d'Ampère.

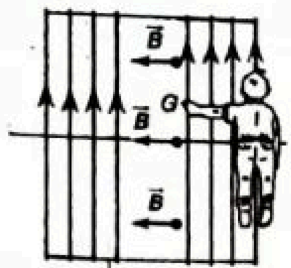
« La face nord d'une bobine est indiquée par le bras gauche d'un observateur couché sur les spires, traversé par le courant des pieds à la tète et regardant l'intérieur de la bobine ».

c) Règle de la main droite.

« La main droite posée sur les spires et traversée par le courant du poignet vers les doigts, le pousse indique la face nord ».

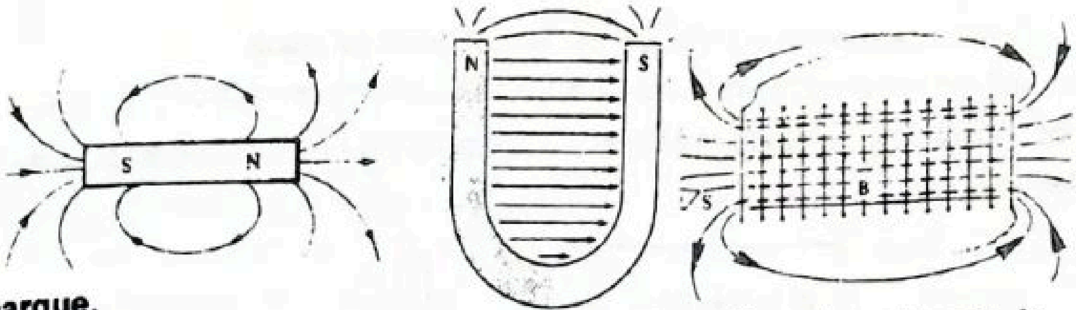






1.4 – Lignes et spectre magnétiques.

– Les lignes de champ sont des courbes tangentes en chacun des points au vecteur champ magnétique $\vec{B}$ et orientées dans le sens de $\vec{B}$.
– L'ensemble des lignes de champ constitue le spectre magnétique.
– Les lignes de champ d'un champ magnétique uniforme sont des droites parallèles.



Remarque.

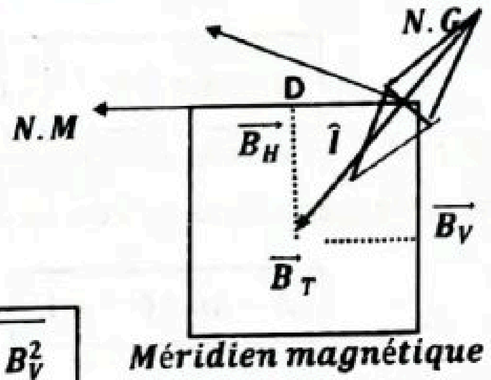
A l'intérieur d'un solénoïde et entre les branches d'un aimant en U, le champ magnétique est uniforme.

N.B : Les lignes de champ entrent par la face sud et sortent par la face nord.

1.5 – CHAMP MAGNETIQUE TERRESTRE.

La Terre se comporte comme un aimant, le champ magnétique qu'elle crée est le champ magnétique terrestre $\vec{B}_T$.

$$\boxed{\vec{B}_T = \vec{B}_H + \vec{B}_V}$$



- $\vec{B}_H$: composante horizontale ;
- $\vec{B}_V$: composante verticale de $\vec{B}_T$.

$\vec{B}_H$ étant orthogonale à $\vec{B}_V$; on a :

$$B_T^2 = B_H^2 + B_V^2 \Longrightarrow \boxed{B_T = \sqrt{B_H^2 + B_V^2}}$$

– On appelle inclinaison magnétique l'angle $\hat{I}$ que fait le vecteur champ magnétique terrestre avec sa composante horizontale.

$$B_H = B_T.\cos\hat{I} \quad \text{et} \quad B_V = B_T.\sin\hat{I}$$

D'où on en déduit :

$$\boxed{B_V = B_H.\tan\hat{I}}$$

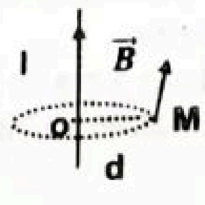
– On appelle déclinaison magnétique l'angle $\hat{D}$ que fait le nord magnétique avec le nord géographique.

1.6 – CHAMP MAGNETIQUE CREE PAR DES COURANTS.

a) Champ magnétique crée par un fil rectiligne.

En un point M situé à la distance d du fil, $\vec{B}$ est tangent à la ligne de champ passant par M et dirigé vers la gauche de l'observateur d'Ampère, son intensité vaut :

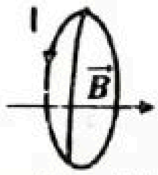
$$\boxed{B = 2.10^{-7}.\frac{I}{d}}$$



b) **Champ magnétique à l'intérieur d'une bobine plate.**

Une bobine plate est formée de N spires circulaires de rayon R ; à l'intérieur de la bobine le champ $\vec{B}$ est parallèle à l'axe et dirigé vers la face nord, son intensité vaut :

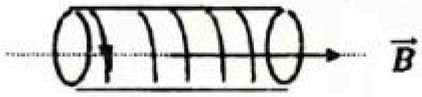
$$\boxed{B = 2\pi.10^{-7}.\frac{N.I}{R}}$$



c) **Champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde.**

Un solénoïde est une bobine dont la longueur est d'au moins 10 fois son rayon. Le champ $\vec{B}$ est parallèle à l'axe et dirigé vers la face nord, son intensité vaut :

$$\boxed{B = 4\pi.10^{-7}.\frac{N.I}{l}}$$



On pose n = $\frac{N}{l}$ le nombre de spires par unité de longueur et $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ la perméabilité magnétique du vide. La formule peut alors s'écrire :

$$\boxed{B = 4\pi.10^{-7}.\mathrm{n.I}} \quad \text{ou} \quad \boxed{B = \mu_0.\mathrm{n.I}}$$

2 – MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGEE DANS UN CHAMP MAGNETIQUE UNIFORME.

2.1 – NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

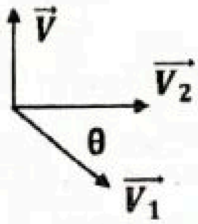
2.1.1– Produit vectoriel.

a) Définition. On appelle produit vectoriel de $\vec{V}_1$ par $\vec{V}_2$ le vecteur $\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ défini par :

– direction : orthogonal à $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$;

– sens : le trièdre $(\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V})$ est direct ;

– norme : $\|\vec{V}\| = \|\vec{V_1}\| \cdot \|\vec{V_2}\| \cdot \sin(\vec{V_1}; \vec{V_2})$.



b) Propriétés.

$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$

$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0} \Longrightarrow \vec{V}_1 \,//\, \vec{V}_2$ ou l'un au moins des vecteurs est nul.

k $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ = **k** ($\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$) avec ($k \in R$).

2.1.2 – Force de Lorentz.

a) Définition. On appelle force de Lorentz, la force qui s'exerce sur une particule chargée en mouvement dans un champ magnétique.

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B}}$$

où V est la vitesse de la particule de charge q.

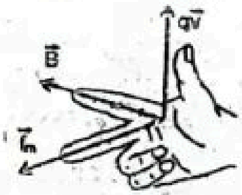
b) Caractéristiques de la force de Lorentz.

– point d'application : la particule ;

– direction : orthogonale à $\vec{V}$ et à $\vec{B}$;

– sens : le trièdre $(q\vec{V}, \vec{B}, \vec{F})$ est direct ;**déterminé par la règle des trois doigts de la main droite :**

* le pouce indique le sens de $q\vec{V}$;
* l'index le sens de $\vec{B}$;
* le majeur donne le sens de $\vec{F}$.



– l'intensité : si θ est l'angle entre $\vec{V}$ et $\vec{B}$:

$$\boxed{F = |q|V.B.\sin\theta.}$$

Remarque :

* Si $q < 0$, $q\vec{V}$ est de sens opposé à $\vec{V}$.
* Si $V = 0$, alors $F = 0$.
* Si $\theta = 0$ ou $\theta = 180°$, alors $F = 0$.

Conclusion.

La force magnétique ne s'exerce sur une particule chargée que si celle-ci est en mouvement à condition que **la vitesse $\vec{V}$ de cette particule** ne **soit pas colinéaire** à $\vec{B}$.

c) Puissance de la force de Lorentz.

Rappelons que $P = \vec{F}.\vec{V} = F.V.\cos\alpha$;

Or : $\vec{F} \perp \vec{V} \Longrightarrow \cos\alpha = 0$; donc $P = 0$.

La puissance de la force de Lorentz est nulle, par conséquent son travail est nul et l''énergie cinétique de la particule est constante : **la vitesse reste constante et le mouvement est uniforme. En revanche, cette force modifie la direction du vecteur vitesse $\vec{V}$.**

d) Représentation conventionnelle du vecteur $\vec{B}$.

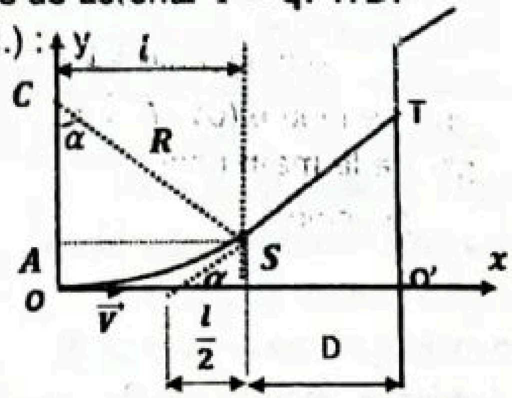
$\odot \vec{B}$	$\otimes \vec{B}$
Champ sortant	champ entrant.

2.3 – ETUDE DU MOUVEMENT DE LA PARTICULE.

a) Nature du mouvement.

- Système : la particule.
- Référentiel : terrestre (galiléen).
- Bilan des force : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B}$.

D'après le théorème du centre d'inertie (T.C.I.) :



$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$$

Comme $P \ll F$, le T.C.I. devient :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a_t} + \vec{a_n})$$

Or : $\vec{F} \perp \vec{V} \Longleftrightarrow a_t = \frac{dV}{dt} = 0 \Longrightarrow V = Cste.$

Donc : $\vec{F} = m\vec{a}_n$ avec $a_n = \frac{V^2}{R}$

Le mouvement est donc circulaire uniforme.

b) Rayon de courbure de la trajectoire.

La force de Lorentz est normale et centripète :

$$F = ma_n \Longleftrightarrow |q|VB\sin\theta = m\frac{V^2}{R}; \text{ soit : } R = \frac{mV}{|q|.B\sin\theta}$$

or : $\vec{B} \perp \vec{V} \Longleftrightarrow \theta = 90° = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \sin\theta = 1$;

d'où $\boxed{R = \frac{mV}{|q|.B}}$

c) Quantité de mouvement de la particule.

Rappelons que la quantité de mouvement d'un point matériel s'écrit : $P = mV$;

ainsi : $R = \frac{mV}{|q|.B} = \frac{P}{|q|.B} \Longrightarrow \boxed{P = |q|.B.R}$

d) Vitesse angulaire et période de révolution.

- ***Vitesse angulaire***:

On a : $\omega = \frac{V}{R} \Longrightarrow \boxed{\omega = \frac{|q|.B}{m}}$

- ***Période de révolution***:

On a : $T = \frac{2\pi}{\omega} \Longrightarrow \boxed{T = \frac{2\pi.m}{|q|.B}}$

e)Déviation et déflexion magnétiques.

Déviation : La particule subit une déviation angulaire **α** (l'angle entre les **vecteurs vitesses à l'entrée et à la sortie du champ).**

Déterminons sa valeur :

$1^{ère}$ ***méthode :*** Dans le triangle SAC, on a :

$$\sin\alpha = \frac{SA}{R} = \frac{l}{R} \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{|q|.B.l}{m.V}$$

Dans les dispositifs usuels α est très petit, dans ces conditions :

$\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$ (rad) ;

d'où $\boxed{\alpha \approx \frac{|q|.B.l}{m.V}}$

$2^{ème}$ ***méthode***. Si α est petit, on a :

$$\alpha \approx \frac{\widehat{SA}}{R} = \frac{l}{R} \Longrightarrow \boxed{\alpha \approx \frac{|q|.B.l}{m.V}}$$

Déflexion magnétiques.

Elle correspond à l'ordonnée du point d'impact sur l'écran fluorescent.

On a : $\tan\alpha = \frac{O'T}{IO'} = \frac{y_T}{D+\frac{l}{2}} \Longrightarrow y_T = \left(D + \frac{l}{2}\right)\tan\alpha$

Si **α** est petit : $\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha \approx \frac{|q|.B.l}{m.V}$;

D'où $\boxed{y_T \approx \frac{|q|.B.l}{m.V}\left(D + \frac{l}{2}\right).}$

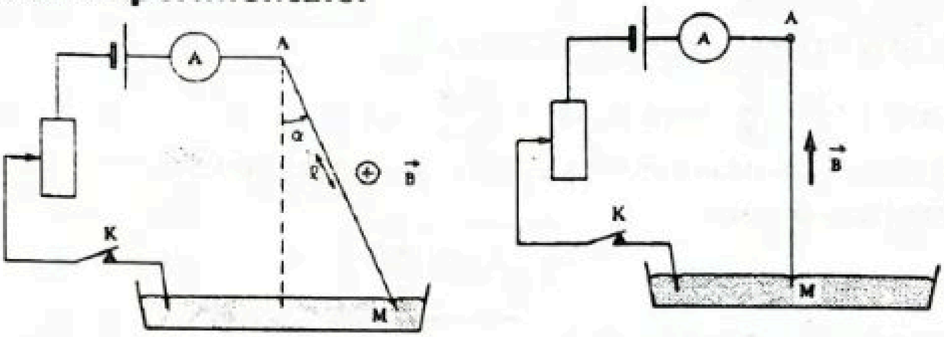
f) Applications.

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique a de nombreuses applications pratiques, on peut citer : la télévision, le spectromètre de masse, le cyclotron.

NB : Dans les expériences de déviation magnétique, il faut toujours négliger le poids de la particule devant la force magnétique.

3 – ACTION D'UN CHAMP MAGNETIQUE SUR UN COURANT : LOI DE LAPLACE.

3.1 – Etude expérimentale.



Le conducteur AM parcouru par un courant et placé dans un champ **magnétique** subit une déviation dont le sens dépend du sens du courant et celui du champ magnétique. **Elle est proportionnelle à l'intensité du courant et du champ magnétique.**

3.2 – Loi de LAPLACE.

Enoncé : « Une portion de conducteur de longueur l parcourue par un courant d'intensité I et placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ est soumise à une force électromagnétique dite force de Laplace $\vec{F} = I\,\vec{l} \wedge \vec{B}$ ».

3.3 – Caractéristiques de la force de LAPLACE.

Les caractéristiques de la force de Laplace sont :

– point d'application : milieu de l ;

– direction : orthogonale à $\vec{l}$ **et** à $\vec{B}$;

– sens : le trièdre $(I\vec{l}, \vec{B}, \vec{F})$ est direct, **déterminé par la règle des trois doigts de la main droite :**

- le pouce indique le sens du courant ;
- l'index le sens de $\vec{B}$ **;**
- le majeur donne le sens de $\vec{F}$.

– Intensité : si α est l'angle entre $\vec{l}$ et $\vec{B}$: $\boxed{F = I.l.B.\sin\alpha}$

Remarque::

* Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$: F est maximale et vaut : $F = I.l.B.$

* Si $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$: $F = 0$.

La force de Laplace n'existe que si le conducteur coupe les lignes de champ.

3.3 – **Applications de la loi de LAPLACE.**

La loi de Laplace trouve de nombreuses applications pratiques, on peut citer :

* la roue de Barlow ;
* la Balance de Cotton ;
* le haut-parleur électrodynamique ;
* les moteurs électriques à courant continu.

EXERCICES D'APPLICATIONS

Application 1 : la roue de Barlow.

1°) Faites la description d'une roue de Barlow et expliquez son principe de fonctionnement.

2°) Une roue de Barlow de rayon $R = 80\ mm$, est parcourue par un courant d'intensité $I = 7\ A$. Elle est entièrement placée dans un champ magnétique uniforme $B = 17,8\ mT$ perpendiculaire au plan de la roue.

a) Données les caractéristiques de la force de Laplace $\vec{F}$ qui s'exerce sur le rayon vertical de la roue et le sens de la rotation du disque. On considérera les deux sens possibles de $\vec{B}$.

b) Calculer le moment de la force **électromagnétique par rapport à l'axe de** rotation.

c) Quelle est la puissance développée par cette force, si la roue tourne à une vitesse angulaire de $110\ tr.mn^{-1}$. Conclure.

....**Résolution**..

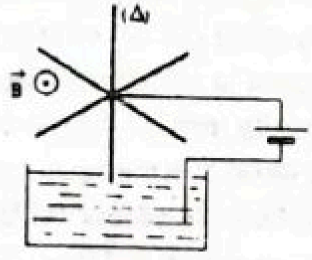
1°) Description.

La roue de Barlow est constituée par un disque de cuivre placée dans un champ magnétique. La partie inférieure du disque trempe dans le mercure (figure).

– Fonctionnement.

Lorsque le circuit est fermé, le rayon vertical de la roue en contact avec le mercure est soumis à une force de Laplace $\vec{F}$, un autre rayon prend place du précédent et ainsi de suite : la roue tourne.

2°) a) Caractéristiques de la force de Laplace.



Les caractéristiques de la force de Laplace sont :

– **point d'application** : milieu du rayon vertical ;

– **direction** :perpendiculaire au rayon vertical ;

– **sens** : sens horaire **(figure).**

– **Intensité** : $F = IBl \Longrightarrow \boxed{F = IBR}$

AN : $F = 7 \times 1,78.10^{-2} \times 8.10^{-2} = 9,968.10^{-3}\ N$

$$\boxed{F \approx 10^{-2}\ N}$$

b) Calcul du moment de la force de Laplace par rapport à l'axe du disque.

On a : $\mathcal{M} = F \cdot \frac{R}{2} = I\,B\,R \cdot \frac{R}{2} \Longrightarrow \boxed{\mathcal{M} = I\,B \cdot \frac{R^2}{2}}$

AN : $\mathcal{M} = 7 \times 1,78.10^{-2} \times \frac{(8.10^{-2})^2}{2} \approx 4.10^{-4}\ N.m$

d' où $\boxed{\mathcal{M} \approx 4.10^{-4}\ N.m}$

c) Calcul de la puissance de la force de Laplace.

On a : $\mathcal{P} = \mathcal{M}.\omega \Longrightarrow \boxed{\mathcal{P} = I\,B \cdot \frac{R^2}{2} \cdot \frac{2\pi N}{60}}$

AN : $\mathcal{P} = 7 \times 1,78.10^{-2} \times \frac{(8.10^{-2})^2}{2} \cdot \frac{2 \times 3,14 \times 110}{60} = 4,6.10^{-3}\ W$

d' où $\boxed{\mathcal{P} = 4,6.10^{-3}\ W}$

Conclusion :

Il y a eu transformation d'énergie électrique en énergie mécanique.
La roue de Barlow constitue ainsi un moteur électrique à courant continu.

Application 2 : la balance de Cotton.

1°) Décrire une balance de Cotton et expliquez son principe de fonctionnement.

2°) Une balance de Cotton possède un conducteur actif **MN de 3 cm de longueur** et traversé par un courant de 8 A. Les deux bras de levier sont égaux.

a) Ecrire la condition d'équilibre de cette balance.

b) Quelle masse faut-il placer dans le plateau pour équilibrer la force créée par un champ magnétique horizontal de 0,6 T **et faisant un angle de 30° avec le fil** MN.

c) Calculer la valeur de B quand il faut 12 g pour rétablir l'équilibre. Conclure.

On prendra $g = 10\ m.s^{-2}$.

……………………………… Résolution ………………………………

1°) Description.

La balance de Cotton a deux bras. L'un d'eux porte un conducteur actif MN reliant deux arcs de cercle de centre O. Le conducteur actif est placé dans un champ magnétique $\vec{B}$. L'autre bras du fléau supporte un plateau (figure).

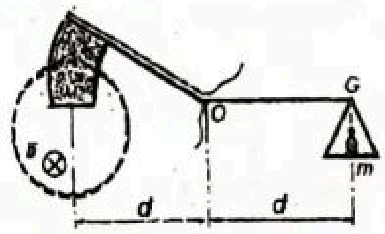
– Fonctionnement.

La balance est en équilibre quand aucun courant ne passe.

Lorsqu'un courant d'intensité **I** passe dans le circuit, l'élément actif MN est soumis à une force de Laplace $\vec{F} = I\,\vec{l} \wedge \vec{B}$ verticale dirigée vers le bas.

La balance est alors déséquilibrée. Pour rétablir l'équilibre, on met dans le plateau des masses marquées.

2°) a) – Condition d'équilibre.



La balance est en équilibre lorsque la somme algébrique des moments des forces qui lui sont appliquées est nulle (théorème des moments).

La condition d'équilibre s'écrit :

$$\sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}ex) = 0 \Longrightarrow \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) + \mathcal{M}(\vec{P}) = 0$$

Or : $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = F.d = IBl.d\sin\alpha$ **et** $\mathcal{M}(\vec{P}) = -mg.d'$

donc : $IBl.d\sin\alpha - mg.d' = 0 \Longrightarrow IBl.d\sin\alpha = mg.d'$

b) Calcul de la masse à placer sur le plateau.

Comme $d = d'$ (balance à bras égaux), on obtient :

d'où $$\boxed{m = \frac{I.B.l.\sin\alpha}{g}}$$

AN : $m = \dfrac{8 \times 0{,}6 \times 3.10^{-2}.\sin 30°}{10} = 7{,}2.10^{-3}\ kg \Longrightarrow \boxed{m = 7{,}2\ g}$

c) Calcul de la valeur de B.

Si m est connue, on obtient :

$$\boxed{B = \frac{mg}{I.l\sin\alpha}}$$ **AN :** $\boxed{B = 1\ T}$

Conclusion :

La balance de Cotton est un appareil de mesure du champ magnétique.

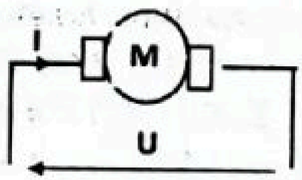
……………………………………………………………………………………

Application 3 : le moteur électrique à courant continu.
Un moteur à courant continu absorbe 30 A sous une tension de 230 V.
La résistance de l'induit est de 0,3 Ω et sa vitesse angulaire de rotation est égale à 650 tr/mn. Calculer :
1°) la force contre - électromotrice du moteur et la puissance électrique convertible en puissance mécanique ;
2°) le moment du couple moteur ;
3°) le rendement énergétique du moteur. **Conclure.**

.... **Résolution**...

1°) Calcul de la f. c. é. m. du moteur.
Appliquons la loi d'Ohm aux bornes du moteur :

$$U = R.I + E' \Longrightarrow \boxed{E' = U - R.I}$$



AN : $E' = 230 - 0,3 \times 30 = 221\,V$

d' où $\boxed{E' = 221\,V}$

Calcul de la puissance utile du moteur.
La puissance électrique convertible en puissance mécanique est :
$\mathcal{P}' = E' \cdot I = 221 \times 30 = 6\,630\,W$

d' où $\boxed{\mathcal{P}' = 6\,630\,W}$

2°) Calcul du moment du couple moteur.
La puissance utile du moteur est :

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}.\omega \Longrightarrow \mathcal{M} = \frac{P'}{\omega}\ ;\ \text{or : } \omega = \frac{2\pi N}{60}\ ;\ \text{d' où } \boxed{\mathcal{M} = \frac{60 \cdot P'}{2\pi N}}$$

AN : $\mathcal{M} = \dfrac{60 \times 6\,630}{2 \times 3,14 \times 650} = 97,45\,N.m \Longrightarrow \boxed{\mathcal{M} \approx 97,5\,N.m}$

3°) Calcul du rendement énergétique du moteur.
Le rendement énergétique du moteur est le rapport de l'énergie mécanique fournie par l'énergie électrique reçue pendant le même temps :

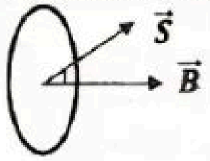
$$r = \frac{P'}{P} = \frac{E'.I}{U.I} \Longrightarrow \boxed{r = \frac{E'}{U}} \quad \text{AN : } \boxed{r = 96\,\%}$$

Conclusion.
Un moteur électrique est un convertisseur d'énergie par excellence.

4 – INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE.

4.1 – NOTION DE FLUX MAGNETIQUE.

a) Définition. On appelle flux magnétique le produit scalaire du vecteur champ magnétique par le vecteur surface.



$$\Phi = \vec{B}.\vec{S} \Longrightarrow \boxed{\Phi = B.S.\cos\alpha}$$

Le flux magnétique s'exprime en Weber (Wb).
Remarque : Si $\alpha = 0 \Longrightarrow \cos\alpha = 1$: le flux est maximal et vaut :

$$\phi_{max} = B.S.$$

b) Règle du flux maximal.
« Un circuit plan parcouru par un courant, libre de se déplacer, placé dans un champ magnétique est en position d'équilibre stable lorsque le flux qui le traverse par la face sud est maximal ».

c) Loi de Maxwell.
« Lorsqu'un circuit se déplace dans un champ magnétique, le travail des forces électromagnétiques qui s'exercent sur lui est égal au produit de l'intensité du courant par la variation du flux magnétique qui le traverse ».

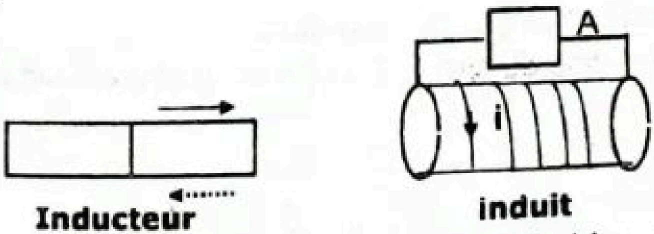
$$\boxed{W = I(\Phi_2 - \Phi_1)}$$

- Si $\Phi_2 > \Phi_1$, $W > 0$: le travail est moteur.
- Si $\Phi_2 < \Phi_1$, $W < 0$: le travail est résistant.

4.2 – INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE.

a) Mise en évidence expérimentale.

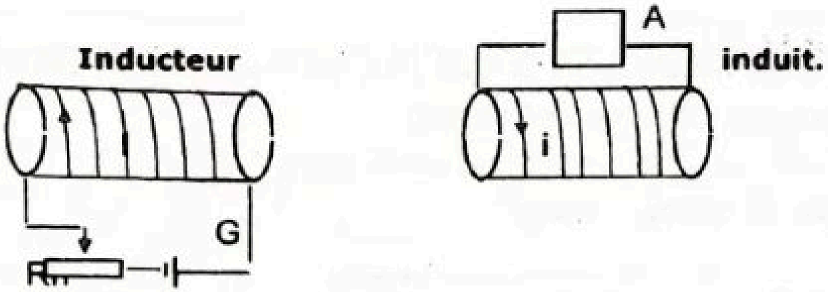
Expérience 1.



Le déplacement relatif de l'aimant par rapport à la bobine crée une force électromotrice (f.é.m.) ou un courant induit. Ce courant s'annule dès que cesse le déplacement.

Ce phénomène est appelé induction électromagnétique.

Expérience 2.



La variation du courant dans le solénoïde crée un courant induit dans la bobine. Ce courant s'annule dès que cesse cette variation. C'est le phénomène d'induction électromagnétique.

Le phénomène d'induction électromagnétique est l'apparition d'une f.é.m. dans un circuit due à la variation du flux magnétique à travers ce circuit.

b) Loi de LENZ.

« Le phénomène d'induction électromagnétique est tel que par ses effets il s'oppose à la cause qui lui donne naissance ».

c) Loi de FARADAY.

« La force électromotrice induite est égale à l'opposé de la dérivée par rapport au temps du flux magnétique à travers le circuit ».

$$\boxed{e = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

Remarque : la force électromotrice induite moyenne est :

$$\boxed{e_m = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}}$$

d) Intensité du courant induit (loi de Pouillet).

– Si R est la résistance totale du circuit, l'intensité du courant induit est donnée par la loi de Pouillet :

$$\boxed{i = \frac{e}{R} = -\frac{1}{R}\cdot\frac{d\Phi}{dt}}$$

– Sens du courant induit.

• Si $e > 0 \Longrightarrow i > 0$: le courant induit circule dans le sens positif choisi.
• Si $e < 0 \Longrightarrow i < 0$: le courant induit circule dans le sens contraire.

e) Quantité d'électricité induite.

Par définition : $\mathbf{Q = |i_m|.\Delta t}$;

Or : $i_m = \frac{e_m}{R} = -\frac{1}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$;

alors: $Q = \left|-\frac{1}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|.\Delta t \Longrightarrow \boxed{Q = \frac{|\Delta\Phi|}{R}}$

f) Applications de l'induction électromagnétique.

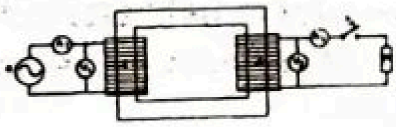
L'induction électromagnétique trouve de nombreuses applications pratiques.
Entre autre on peut citer :
les **transformateurs**, les **alternateurs**, les **courants de Foucault.**

• Transformateur.

– Description.

Un transformateur comporte deux bobines : le primaire et le secondaire.
Les deux bobines sont reliées par un circuit magnétique.

– Rôle. Un transformateur est un appareil qui sert à élever ou à abaisser une tension alternative.



– Fonctionnement.

Lorsqu'on applique une tension alternative U_1 aux bornes du primaire, il se crée un flux magnétique variable, grâce au circuit magnétique, ce flux crée aux bornes du secondaire une tension alternative U_2 de même fréquence.

Le rapport de transformation est :

$$\boxed{k = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{I_1}{I_2}}$$

* Si $k > 1 \Longrightarrow U_2 > U_1$: le transformateur est dit élévateur de tension.
* Si $k < 1 \Longrightarrow U_2 < U_1$: le transformateur est dit abaisseur de tension.

• Alternateurs.

– Description.

Un alternateur est constitué d'une bobine fixe (stator) et d'un aimant ou d'un électroaimant (rotor).

– Rôle.

Un alternateur est une machine destinée à produire du courant alternatif.

– Principe de fonctionnement.

Si ω est la vitesse de rotation du rotor, le flux du champ $\overrightarrow{B}$ à travers la bobine est : $\Phi = NBS\cos\omega t.$

Le rotor induit dans le stator une f.é.m.

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = NBS\omega \sin\omega t$$

Si R est la résistance de la bobine, l'intensité du courant induit est :

$$i = \frac{e}{R} = \frac{NBS\omega}{R}\sin\omega t \Longrightarrow i = I_m \sin\omega t$$

La bobine est le siège d'un courant alternatif sinusoïdal de valeur maximale I_m :

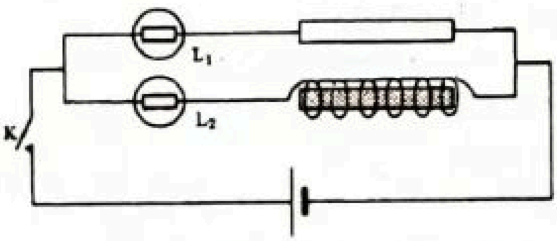
$$\boxed{i = I_m \sin\omega t} \qquad \boxed{I_m = \frac{NBS\omega}{R}}$$

• Courants de Foucault.

Les courants de Foucault sont des courants induits qui prennent naissance dans toutes pièces métalliques en mouvement dans un champ magnétique. Ces courants sont utilisés dans les fours à induction et dans le système de freinage des véhicules lourds (camions et autocars).

5 – AUTO-INDUCTION.

5.1 – Mise en évidence expérimentale.



L_1 et L_2 sont deux lampes identiques en dérivation, le résistor et la bobine ont même résistance r.

– Lorsqu'on ferme le circuit, la lampe L_1 s'allume immédiatement tandis que lampe L_2 s'allume progressivement.

– Lorsqu'on ouvre le circuit, la lampe L_1 s'éteint immédiatement et L_2 s'éteint progressivement.

La bobine est la cause du retard dans l'établissement ou la coupure du courant dans L_2 : ce phénomène est appelé **AUTO-INDUCTION**.

Conclusion : Le phénomène d'auto-induction ne se manifeste qu'en courant variable et n'a des effets sensibles que dans les circuits comportant au moins une bobine.

5.2 – Inductance d'un circuit.

a)Définition: On appelle inductance d'un circuit le rapport du flux propre à travers le circuit par l'intensité du courant qui le traverse.

$$\boxed{L = \frac{\Phi_P}{i}}$$

L'inductance s'exprime en henry (H)..

b) Inductance d'un solénoïde.

$$\begin{cases} \phi = L \cdot I \\ \phi = NBS = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{N^2 \cdot S}{l} \cdot I \end{cases} \Longrightarrow \boxed{L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{N^2 \cdot S}{l}}$$

5.3 – Relation de Faraday-Lenz.

La force électromotrice d'auto-induction est donnée par la relation :

$$e = -\frac{d\Phi_P}{dt} = -\frac{d(L.i)}{dt} \Longrightarrow \boxed{e = -L\frac{di}{dt}}$$

5.4 – Tension aux bornes d'une bobine.

La tension aux bornes d'une bobine est donnée par la loi d'Ohm :

$U = ri - e$ or : $e = -L\frac{di}{dt}$

d'où $$\boxed{U = ri + L\frac{di}{dt}}$$

Remarque: Si i est constant (courant continu) : $\frac{dt}{dt} = 0$ et la loi d'Ohm s'écrit :

$$\boxed{U = r.i}$$

En courant continu, une bobine se comporte comme un résistor : l'auto-induction ne se manifeste qu'en courant variable.

5.5 – Energie magnétique emmagasinée dans une bobine.

Une bobine est un réservoir d'énergie, l'énergie magnétique qui s'y trouve emmagasinée est :

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}L.i^2}$$

....

EXERCICES ET PROBLEMES RESOLUS

Problème 1 : (Eurin-gié , Exo 6.9, page 114).

Une bobine, de longueur 50 cm, comprenant 1000 spires de diamètre 4 cm, est parcourue par un courant d'intensité 300 mA.

1°) Peut – on considérer que le champ magnétique au centre de cette bobine est donné par la relation $B = 4\pi.10^{-7}n.I$? Pourquoi a- t - on donné le diamètre de la bobine ?

2°) Quelles grandeurs représentent n et I ? Indiquer leurs valeurs dans le système international d'unités.

3°) Calculer l'intensité du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde.

4°) On juxtapose un solénoïde identique au précédent de façon à constituer un solénoïde de longueur double. Quel est le champ **à l'intérieur de cette association ?**

..Résolution ....

1°) Justification de l'emploie de la formule $B = 4\pi.10^{-7}n.I$.

Pour cela, évaluons le rapport $\frac{l}{r}$

$$r = \frac{d}{2} = \frac{4}{2} = 2\,cm \text{ ; donc : } \frac{l}{r} = \frac{50}{2} = 25 \Longrightarrow l = 25r$$

$l > 10r$, la bobine considérée est un solénoïde et l'intensité du champ magnétique est bien donnée par la relation :

$$\boxed{B = 4\pi.10^{-7}n.I}$$

2°) Signification et valeurs des grandeurs n et I dans le S.I.

- n = nombre de spires par unité de longueur.
- I = intensité du courant dans le solénoïde.

Dans le système international, on a :

$$n = \frac{N}{l} = \frac{10^3}{5.10^1} = 2000 \quad \text{et} \quad I = 300\,mA = 300 \times 10^{-3}$$

$$\boxed{n = 2000\,spires/m} \qquad \boxed{I = 0,3\,A}$$

3°) Intensité du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde.

On a : $B = 4\pi.10^{-7} \times 2.10^3 \times 0,3 = 7,54.10^{-4}\,T$

$$\boxed{B = 7,54.10^{-4}\,T}$$

4°) Champ magnétique à l'intérieur de l'association.

La nouvelle intensité du champ magnétique est :

$$B' = 4\pi.10^{-7}n'.I \;;\; \text{avec} \quad n' = \frac{N'}{l'}$$

Or : $\quad l' = 2l \quad$ **et** $\quad N' = 2N$

donc : $B' = 4\pi.10^{-7}.\dfrac{2N}{2l}.I \Longrightarrow B' = 4\pi.10^{-7}n.I$

d' où $\quad \boxed{B' = B = 4\pi.10^{-7}n.I}$

....

Problème 2 : (Eurin-gié , Exo 6.13, page 115).

Un solénoïde long est constitué par cinq couche de fil à spires jointives ; le fil a un diamètre de 1 mm, isolant compris. Son axe, horizontal, est perpendiculaire au méridien magnétique. Une boussole est placée en son centre..

1°) Dessiner une vue de dessus.

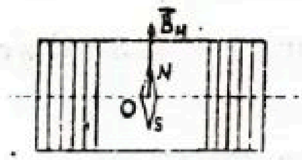
2°) On fait passer dans le solénoïde un courant de 5 mA.

a) Indiquer sur le schéma le sens du courant et le sens de rotation de l'aiguille aimantée.

b) De quel angle tourne l'aiguille ? Donnée : $B_{Th} = 2.10^{-5}T.$

....**Résolution** ....

1°) Dessin (vue de dessus).

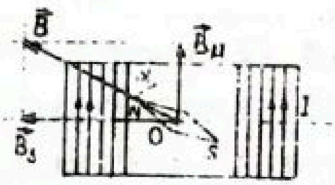


2°) a) Le sens du courant et celui de la rotation de l'aiguille sont indiqué sur la figure.

b) Angle de rotation de l'aiguille.

L'aiguille s'oriente suivant la direction du champ résultant telle que :

$$\tan\alpha = \frac{B}{B_{Th}}$$



Or : $B = 4\pi.10^{-7}n.I$; avec : $\quad n = \dfrac{N}{l}$

L'équation fondement du solénoïde est :

$$n = \frac{N}{l} = \frac{k}{d} = \frac{k}{d + 2e} \;;$$

où k est le nombre de couche et e l'épaisseur de l'isolant.

Donc : $n = \frac{k}{d} = \frac{5}{10^{-3}} = 5.10^3\ spires/m.$

Ainsi : $B = 4\pi.10^{-7} \times 5.10^3 \times 5.10^{-3} = 3,14.10^{-5}\,T$

Alors : $\tan\alpha = \frac{3,14.10^{-5}}{2.10^{5}} = 1,57$ $\qquad \alpha = arc\tan(1,57)$

d' où $\boxed{\alpha \approx 57,5°}$

Problème 3 : (Eurin-gié , Exo 6.15, page 115).

On place une aiguille aimantée au centre d'un solénoïde d'axe horizontal comprenant 500 spires par mètre. L'aiguille tourne d'un angle α = 30° lorsqu'on fait passer dans les spires un courant d'intensité I = 61 mA.

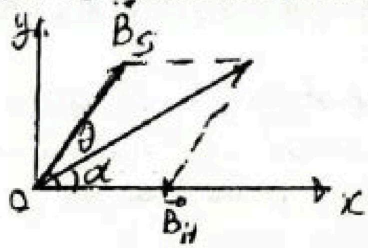
Déterminer l'angle θ **que fait l'axe du solénoïde avec le plan du méridien magnétique.**

Résolution

L'angle θ que fait l'axe du solénoïde avec le méridien magnétique.

L'aiguille s'oriente suivant la direction du champ magnétique résultant :

$$\vec{B} = \vec{B}_H + \vec{B}_S$$



Projetons sur les axes de coordonnées :

- suivant Ox : $B\sin\alpha = B_S \sin\theta$
- suivant Oy : $B\cos\alpha = B_H + B_S\cos\theta$

En divisant membre à membre on obtient :

$$\tan\alpha = \frac{B_S.\sin\theta}{B_H + B_S\cos\theta} \Longrightarrow B_H\tan\alpha + B_S\tan\alpha.\cos\cos\theta = B_S\sqrt{1-cos^2\theta}$$

Or : $B_S = 4\pi.10^{-7}n.I = 3,8.10^{-5}\,T$

D'où l'équation du second degré en $\cos\theta$:

$$19,253cos^2\theta + 5,07\cos\theta - 13,11 = 0$$

On trouve : $\cos\theta = 0,704 \Longrightarrow \theta = arc\tan(0,704)$

d' où $\boxed{\theta = 45°}$

Problème 4 : (Eurin-gié , Exo 7.4, page 126).

Des électrons pénètrent **dans un champ magnétique $\vec{B}$ orthogonal à leur vitesse** $\vec{V}_0$

1°) Représenter sur un schéma $\vec{V}_0$, $\vec{B}$ et la force $\vec{F}$..

2°) Calculer $\|\vec{F}\|$ pour $V_0 = 2.10^4\,m.s^{-1}$ **et** $B = 0,2\,T$.

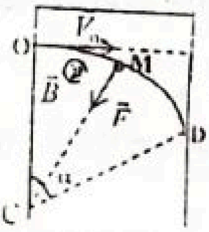
3°) Comparer l'intensité de cette force au poids de l'électron..Conclure.

4° Répondre aux mrmes questions pour une particule α.

Les particules sont des noyaux d'hélium He^{2+} de masse $6,7.10^{27}\ kg$.

....**Résolution**...

1°) Représentons $\vec{V}_0$, $\vec{B}$ et $\vec{F}$.



La force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{V}_0 \wedge \vec{B}$, deux cas de figure sont à envisagés suivant le sens de $\vec{B}$.

2°) Calcul de $\|\vec{F}\|$.

$$\vec{F} = q\vec{V}_0 \wedge \vec{B} \Longrightarrow \|\vec{F}\| = |q|.V_0.B\sin\theta$$

Or : $\vec{V}_0 \perp \vec{B} \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ $(\sin\theta = 1)$

d' où $\boxed{\|\vec{F}\| = |q|V_0B}$ AN : $\boxed{\|\vec{F}\| = 6,4.10^{-13}\ N}$

3°) Comparons F et P.

On a : $P = mg = 9,1.10^{-31} \times 10 = 9,1.10^{-30}\ N$

Donc : $\frac{F}{P} = \frac{6,4.10^{-13}}{9,1.10^{-30}} = 7.10^{16}\ N \Longrightarrow \boxed{F = 7.10^{16}\ P}$

$P \ll F$, le poids de l'électron est donc négligeable devant la force de Lorentz.

4°) Même raisonnement, mais pour la particule α , $q = 2e$ $(e = 1,6.10^{-19}C)$.

....

Problème 5 : (Eurin-gié , Exo 7.7, page 127).

Des protons pénètrent dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ avec une vitesse initiale $\vec{V}_0$ orthogonal à $\vec{B}$.

1°) Pourquoi la norme de la vitesse des protons est -elle constante ?

2°) Montrer que la trajectoire est plane.

3°) Montrer que la trajectoire est circulaire. Exprimer son rayon R en fonction de m, V_0, q et B.

4°) **L'énergie des protons est de 5 Mev et le rayon de la trajectoire est $R = 120\ cm$.**
Calculer la quantité de mouvement et **la vitesse d'un proton ainsi que la norme** de B.
R = 120 cm. Calculer la quantité de mouvement et la vitesse d'un proton, ainsi que la norme de B.

....**Résolution** ....

1°) Constance de la norme de la vitesse.

La puissance de la force de Lorentz est $P = \vec{F}.\vec{V} = 0$; $(car,\ \vec{F} \perp \vec{V})$.

Donc, la force de Lorentz ne travail pas, par conséquent, l'énergie cinétique et la vitesse sont constantes.

2°) Montrons que la trajectoire est plane.

Le poids étant négligeable, le théorème du centre d'inertie donne :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}_t + \vec{a}_n)$$

Comme $\vec{F} \perp \vec{B}$, le mouvement se fait dans un plan perpendiculaire à $\vec{B}$.

Donc, la trajectoire est plane.

3°) Montrons que la trajectoire est circulaire.

$\vec{F} \perp \vec{V} \Longleftrightarrow a_t = \frac{dV}{dt} = 0 \Longrightarrow V = C^{te}$: le mouvement est uniforme.

$a = a_n = \frac{V^2}{R}$ et $R = C^{te}$: la trajectoire est circulaire.

Le mouvement des ions est donc circulaire uniforme de rayon R.

4°) Quantité de mouvement et vitesse des protons.

On a : • $E_C = \frac{1}{2} mV^2 = \frac{P^2}{2m} \Longrightarrow \boxed{P = \sqrt{2mE_C}}$ et $\boxed{V = \sqrt{\frac{2E_C}{m}}}$

• $R = \frac{mV}{qB} = \frac{P}{qB} \Longrightarrow \boxed{B = \frac{P}{qR}}$

AN : $\boxed{P = 5,07.10^{-20}\ kg.m.s^{-1}}$ $\boxed{V = 7,1.10^7 m.s^{-1}}$ $\boxed{B = 0,27\ T}$

....

Problème 6 : (Eurin-gié , Exo 7.8 page 127).

Calculer le rayon de la trajectoire d'un électron animé d'une vitesse de 10^7m/s. et soumis à un champ magnétique uniforme de direction orthogonale au vecteur vitesse , d'intensité B = 8.10^4 T. Calculer la fréquence de révolution et la période correspondante.

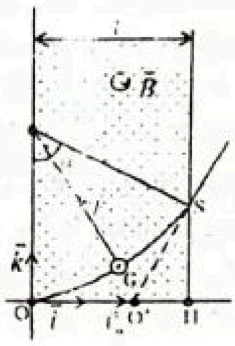
....**Résolution** ....

Rayon de la trajectoire.

La force de Lorentz est centripète :

$$F = ma_n = m\frac{V^2}{R} \Longleftrightarrow |q|.V_0.B = m\frac{V^2}{R}$$

d' où $\boxed{R = \frac{mV}{qB}}$ AN : $R =$



Fréquence de révolution.

On a : $\omega = 2\pi f \Longrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$; or : $\omega = \frac{V}{R} = \frac{|q|B}{m}$

d' où $\boxed{f = \frac{|q|B}{2m}}$ AN :

Période de révolution.

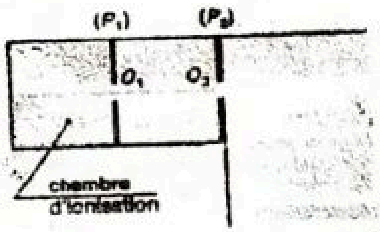
$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \Longrightarrow \boxed{T = \frac{2\pi m}{|q|B}}$ AN :

Problème 7 : (Eurin-gié , Exo 7.11 page 128).

On envisage la séparation d'isotopes du zinc à l'aide d'un spectrographe de masse. On négligera le poids des ions devant les autres forces.

1°) Une chambre d'ionisation produit des ions $^{68}Zn^{2+}$ et $^{X}Zn^{2+}$ de masses respectives 68 u et X u. Ces ions sont ensuite accélérés dans le vide entre deux plaques métalliques parallèles P_1 et P_2.

La tension accélératrice a pour valeur $U = 10^3V$. On négligera la vitesse des ions lorsqu'ils traversent la plaque P_1 en O_1.



a) Quelle est la plaque qui doit être portée au potentiel le plus élevé ?

b) Calculer la vitesse V_0 des ions $^{68}Zn^{2+}$ lorsqu'ils sont en O_2.

c) Exprimer en fonction de X et de V_0 la vitesse V'_0 des ions $^{X}Zn^{2+}$ en O_2.

2°) Les ions pénètrent dans une région où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ orthogonal au plan de la figure, d'intensité B = 0,1T.

a) Indiquer sur un schéma le vecteur $\vec{B}$ pour que les ions $^{68}Zn^{2+}$ parviennent en A et les ions $^{X}Zn^{2+}$ en A'. Justifier la construction.

b) Montrer que les trajectoires des ions sont planes ; établir la nature du mouvement ainsi que la forme de ces trajectoires.

Calculer le rayon de courbure pour les ions $^{68}Zn^{2+}$.

c) On donne AA' = 8 mm. Calculer X.

…………………………………………Résolution ………………………………………

1°) a) Plaque de potentiel le plus élevé.

Les ions positifs devant être accélérés, doivent être repoussés par P_1 et attirés par P_2 ; donc $V_{P_1} - V_{P_2} > 0 \Longrightarrow V_{P_1} > V_{P_2}$

P_1 est au potentiel le plus élevé.

b) Vitesse v_1 des ions $^{68}Zn^{2+}$.

Si l'on néglige le poids des ions devant la force électrique, le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{1}{2} m V_0^2 = qU \Longrightarrow \boxed{V_0 = \sqrt{\frac{2qU}{m}}}$$

AN : $q = 2e$; $e = 1,6.10^{-19}\ C$; $1\ u = 1,66.10^{-27}\ kg.$

d' où $\boxed{V_0 = 7,53.10^4\ m.s^{-1}}$

c) Expression de v'_0 en fonction de x et se v_0

Soit m' la masse des ions $^{x}Zn^{2+}$.

Le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{1}{2} m' V_0'^2 = qU \Longrightarrow V'_0 = \sqrt{\frac{2qU}{m'}}$$

Donc : $\dfrac{V_0'}{V_0} = \sqrt{\dfrac{m}{m'}} = \sqrt{\dfrac{68}{x}} \Longrightarrow \boxed{V_0' = V_0 \sqrt{\dfrac{68}{x}}}$

2°) a) Représentation du vecteur $\vec{B}$.

En appliquant la règle des trois doigts de la main droite, on constate que $\vec{B}$ est un champ sortant (dirigé vers l'observateur).

b) Trajectoire et nature du mouvement.

Chaque ion est soumis à deux forces :

son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B}$.

Le poids étant négligeable, le théorème du centre d'inertie donne :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}_t + \vec{a}_n)$$

On a : • $\vec{F} \perp \vec{B}$: le mouvement se fait dans un plan perpendiculaire à $\vec{B}$.

La trajectoire est donc plane.

• $\vec{F} \perp \vec{V} \Longleftrightarrow a_t = \dfrac{dV}{dt} = 0 \Longrightarrow V = C^{te}$: le mouvement est uniforme.

• $a = a_n = \frac{V^2}{R}$ et $R = C^{te}$: la trajectoire est circulaire.

Le mouvement des ions est donc circulaire uniforme de rayon R.

Rayon de courbure pour les ions $^{64}Zn^{2+}$.

La force de Lorentz étant centripète :

$$F = ma_n \qquad qVB = m\frac{V^2}{R} \qquad \boxed{R = \frac{mV}{qB}}$$

AN : $R = \frac{68 \times 1{,}66.10^{-27} \times 7{,}53.10^4}{3{,}2.10^{-19}} = 26{,}6.10^{-2}\ m$

d' où $\boxed{R = 26{,}6\ cm}$

Calcul de x.

Soit R' le rayon de courbure de la trajectoire des ions $^{x}Zn^{2+}$.

On a : $R' = \frac{m'V}{qB}$; comme $R = \frac{mV}{qB}$;

alors: $\frac{R'}{R} = \frac{m'}{m} \times \frac{V'_0}{V_0} \Longrightarrow \frac{R'}{R} = \frac{x}{68}\sqrt{\frac{68}{x}}$

soit : $\left(\frac{R'}{R}\right)^2 = \frac{x}{68} \Longrightarrow \boxed{x = 68\left(\frac{R'}{R}\right)^2}$

Or : $d' = 2R' = 2R + AA' \Longrightarrow R' = R + \frac{AA'}{2} = 26{,}6 + \frac{0{,}8}{2} = 27\ cm$

D'où $x = 68\left(\frac{27}{26{,}6}\right)^2 = 70 \Longrightarrow \boxed{x = 70\ u}$

Il s'agit de l'isotope $^{70}Zn^{2+}$ du zinc.

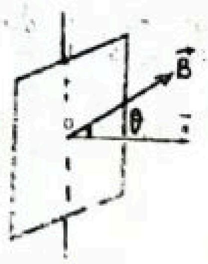
....

Problème 8 : (Eurin-gié , Exo 9.9, page 165).

Un cadre indéformable ACDE, d'aire S comportant N spires, peut tourner autour d'un axe Δ passant par les milieux des cotés AC et DE.

Ce cadre est placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ orthogonal à Δ.

Les spires sont orientées dans le sens ACDE. La normale au plan du cadre fait un angle θ, orienté autour de l'axe $(\Delta, \vec{k})$ avec la direction du champ $\vec{B}$.



1°) Calculer le flux du champ magnétique à travers une spire, puis à travers l'ensemble de la bobine.

2°) La bobine tourne à la vitesse angulaire constante ω autour de Δ. Montrer qu'il apparaît dans la bobine une f.e.m. induite sinusoïdale.

Préciser l'amplitude de cette f.e.m.

3°) Application numérique :

$N = 150$; $S = 900\ cm^2$; $B = 0,6\ T$; $\omega = 3000\ tr.min^{-1}$

Calculer l'amplitude de la f.e.m.

....**Résolution** ....

1°) Flux du champ magnétique.

A l'instant t, le cadre tourne d'un angle θ tel que : $\theta = \omega t$.

Le flux à travers une spire est :

$$\phi_1 = BS\cos\omega t$$

Le flux à travers le cadre est donc :

$$\boxed{\phi = NBS\cos\omega t}$$

2°) Montrons qu'il existe dans la bobine une f.é.m..

Le flux magnétique à travers le cadre étant variable, il apparaît dans la bobine une f.e.m. induite donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -NBS\frac{d(\cos\omega t)}{dt} \Longrightarrow e = NBS\omega\sin\omega t$$

Il apparaît dans la bobine une f.é.m. induite sinusoïdale d'amplitude :

$$\boxed{E_m = NBS\omega} \qquad \boxed{E_m = 2543\ V}$$

....

Problème 9 : (Eurin-gié , Exo 9.13, page 165).

Une bobine de 200 spires d'aire 10 cm^2 chacune est placé dans un champ magnétique uniforme d'intensité 1,1 T. Les lignes de champ sont parallèle à l'axe de la bobine. Les bornes étant en court-circuit, on annule le champ magnétique. La résistance de la bobine est 8 Ω. Calculer la quantité d'électricité induite. Cette quantité dépend – elle de la durée de l'opération ?

....**Résolution** ....

Quantité d'électricité induite.

Par définition : $Q = |i_m|.\Delta t$;

Or : $i_m = \frac{e_m}{R} = -\frac{1}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$;

donc : $Q = \left|-\frac{1}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|.\Delta t \Longrightarrow Q = \frac{|\Delta\Phi|}{R}$

D'autre part : $\phi = NBS \Longrightarrow \Delta\phi = NS\Delta B$

d' où $\boxed{Q = \frac{NS.|\Delta B|}{R}}$

AN : $Q = \frac{2.10^2 \times 10^{-3} \times 1,1}{8} = 27,5.10^{-3}\ C$ $\boxed{Q = 27,5\ mC}$

....

Problème 10 : (Eurin-gié , Exo 9.14, page 165).

Un solénoïde comportant 200 spires de rayon r = 5 cm est placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ de telle façon que son axe ait pour direction celle de $\vec{B}$.

1°) Calculer le flux du champ $\vec{B}$ à travers une spires, puis à travers tout le solénoïde . Application numérique : B = 0,1T.

2°) La norme du champ $\vec{B}$ décroît de 0,1 T à 0,05 T en 0,05 s.

Calculer la valeur absolue de la f.e.m. moyenne induite qui apparaît aux bornes du solénoïde.

....**Résolution** ....

1°) Flux magnétique.

Le flux à travers une spire est :

$\phi_1 = BS\cos\theta \Longrightarrow \phi_1 = BS$, $(\theta = 0°)$

Le flux à travers tour le solénoïde est donc :

$\phi = NBS \Longrightarrow \boxed{\phi = N\pi r^2 B}$

D'où $\boxed{\phi = 157\ mWb}$

2°) F.é.m moyenne induite.

D'après la loi de Faraday :

$$e_m = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\frac{\phi_2 - \phi_1}{\Delta t}$$

Or : $\phi_1 = N\pi r^2 B_1$ et $\phi_2 = N\pi r^2 B_2$

d' où $\boxed{e_m = \frac{N\pi r^2(B_1 - B_2)}{\Delta t}}$ AN : $\boxed{e_m = 1,57\ V \approx 1,6\ V}$

....

Problème 11 : (Eurin-gié , Exo 9.16, page 165).

Dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ de norme constante égale à 0, 05 T , on introduit une bobine plate constituée de 100 spires enroulées sur un cadre carré de 5 cm de côté.

1°) Calculer le flux du champ $\vec{B}$ lorsque le plan du cadre fait un an angle θ avec le vecteur $\vec{B}$.

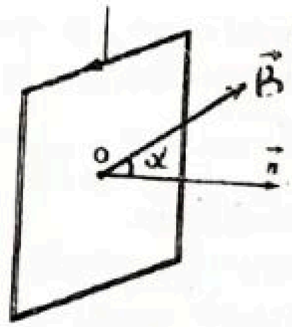
2°) Ce cadre tourne autour d'un axe médian avec une vitesse angulaire constante $\omega = 100\pi\, rad.s^{-1}$. Calculer la f.e.m induite. On indiquera sur un dessin le sens d'orientation choisi sur la spire.

....**Résolution** ....

1°) Flux du champ magnétique.

Le flux à travers la bobine est :

$$\phi = NBS\cos\alpha$$



Or : $\theta + \alpha = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \cos\alpha = \sin\theta$

d' où $\boxed{\phi = NBS\sin\theta}$

2°) f.é.m. induite.

A l'instant t, l'angle de rotation vaut : $\alpha = \omega t$;

donc : $\phi = NBS\cos\omega t$

La f.e.m. induite est donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -NBS\frac{d(\cos\omega t)}{dt} \Longrightarrow e = NBS\omega\sin\omega t$$

D' où $\boxed{e = NBa^2\omega\sin\omega t} \Longrightarrow \boxed{e = 3,9\sin 100\pi t}$

Attention : $\vec{B}$ fait un angle α avec la normale au cadre.

....

Problème 12 : (Eurin-gié , Exo 9. 23 , page 165).

On considère un solénoïde de longueur l = 75 cm comportant 1500 spires.

1°) Déterminer l'intensité I du courant donnant le champ magnétique B = 2.10^{-2} T au centre du solénoïde.

2°) On place dans le solénoïde une bobine plate circulaire, de diamètre 8 cm et comportant 250 spires.

a) Déterminer la position de la bobine pour que le flux qui la traverse soit maximal. Calculer ce flux.

b) On fait tourner la bobine autour d'un axe orthogonal à celui du solénoïde, avec une vitesse de rotation de 4500 tr.mm $^{-1}$. Donner l'expression de la f.e.m. d'induction dans la bobine. On prendra la date t = 0 à un moment où le flux à travers la bobine est maximal.

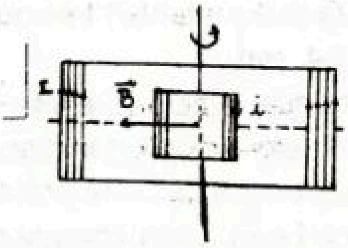
....**Résolution** ....

1°) Intensité du courant dans le solénoïde.

A l'intérieur d'un solénoïde :

$$B = 4\pi.10^{-7}\frac{N}{l}I \qquad \boxed{I = \frac{10^7.B.l}{4\pi N}}$$

AN : $I = \dfrac{10^7 \times 2.10^{-2} \times 75.10^{-2}}{4 \times 3{,}14 \times 1500} = 8\,A$



d' où $\boxed{I = 8\,A}$

2°) a) Flux maximal à travers la bobine.

On a : $\phi = N'BS\cos\alpha$

Le flux est maximal quand : $\cos\alpha = 1$;

D' où le flux maximal :

$$\phi_{max} = N'BS \Longrightarrow \boxed{\phi_{max} = N'B\pi\frac{d^2}{4}}$$

AN : $\phi_{max} = 250 \times 2.10^{-2} \times 3{,}14 \times \dfrac{(8.10^{-2})^2}{4} = 25{,}1.10^{-3}\,Wb$

d' où $\boxed{\phi_{max} = 25{,}1\,mWb}$

b) Expression de la f.é.m induite dans la bobine.

Le flux à travers la bobine est : $\phi = N'BS\cos\omega t$

D'après la loi de Faraday, la f.é.m induite est :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -N'BS\frac{d(\cos\omega t)}{dt} \Longrightarrow e = N'BS\omega\sin\omega t$$

d' où $\boxed{e = N'B\omega.\pi\frac{d^2}{4}\sin\omega t} \Longrightarrow \boxed{e = 11{,}8\sin 471t}$

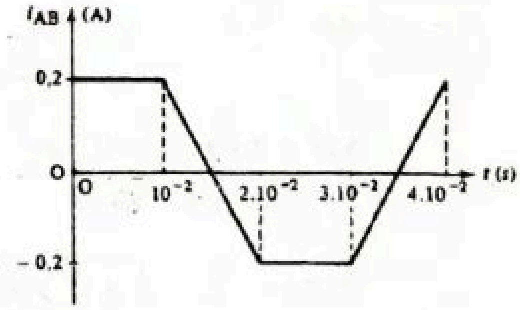
....

Une portion de circuit (A, B) est constituée d'une bobine sans noyau , d'inductance L = 5,0 mH et de résistance $r = 2,0\ \Omega$.

La bobine est orientée de A vers B .

1°) Calculer la variation du flux propre à travers la bobine quand elle est parcourue par un courant d'intensité i = 0,20 A.

2°) La bobine est parcourue par un courant dont l'intensité varie avec le temps (figure).



a) Pour quels intervalles de temps y a-t-il variation du flux propre à travers la bobine ? On se limitera aux instants t tels que $0 \le t \le 0,04$ (en s).

b) En déduire que la bobine est le siège d'une f.e.m d'auto-induction e, dans certains intervalles de temps que l'on précisera.

Calculer cette f.e.m. dans chaque cas.

c) Donner l'expression littérale de la tension u_{AB} aux bornes de la bobine. Représenter graphiquement la variation de cette tension en fonction du temps. (préciser les échelles choisies).

....Résolution ....

1°) Variation du flux propre à travers la bobine.

Par définition : $\phi = L.i = 5.10^{-3} \times 0,2 = 10^{-3}\ H$

d' où $\boxed{\Delta\phi = 1\ mWb}$

2°) a) Intervalles de temps.

Le flux propre varie lorsque le courant qui traverse la bobine varie, c'est-à-dire dans les intervalles : $[10^{-2}\ s\,;2.10^{-2}\ s[$ et $[3.10^{-2}\ s\,;4.10^{-2}\ s[$.

b) F.é.m. d'auto-induction.

On a : $e = -L\dfrac{di}{dt}$

Une f.é.m.d'auto-induction apparaît lorsque l'intensité **i** est variable.

La bobine est donc le siège d'une f.é.m. d'auto-induction dans les intervalles de temps : $[10^{-2}\ s\,;2.10^{-2}\ s[$ et $[3.10^{-2}\ s\,;4.10^{-2}\ s[$.

Calcul de la f.é.m.

• Pour t $[10^{-2}\ s\,;2.10^{-2}\ s[$: $e = -L\dfrac{di}{dt} = -L\dfrac{\Delta i}{\Delta t} = -5.10^{-3} \times \dfrac{-0,2 - 0,2}{2.10^{-2} - 10^{-2}}$

d' où $\boxed{e = 0,2\ V}$

• Pour t $[3.10^{-2}\,s\,;4.10^{-2}\,s[$: $e = -L\dfrac{di}{dt} = -L\dfrac{\Delta i}{\Delta t} = -5.10^{-3} \times \dfrac{0{,}2+0{,}2}{4.10^{-2}-3.10^{-2}}$

d' où $\boxed{e = -0{,}2\ V}$

c) Expression littérales de la tension u_{AB} aux bornes de la bobine.

Le circuit étant orienté de A vers B: $u_{AB} = ri - e$

• Si $0 \le t < 10^{-2}\,s$: $e = 0$, alors : $u_{AB} = ri = 2 \times 0{,}2 = 0{,}4\ V$

$$\boxed{u_{AB} = 0{,}4\ V}$$

• Si $10^{-2} \le t < 2.10^{-2}\,s$: $e = 0{,}2\ V$ alors : $u_{AB} = 2i - 0{,}2$

Or : $i = at + b \Longrightarrow i = -40t + 0{,}6$

d' où $\boxed{u_{AB} = -80t + 1}$

• Si $2.10^{-2} \le t < 3.10^{-2}\,s$: $e = 0$ alors : $u_{AB} = 2 \times (-0{,}2) = -0{,}4\ V$

d' où $\boxed{u_{AB} = -0{,}4\ V}$

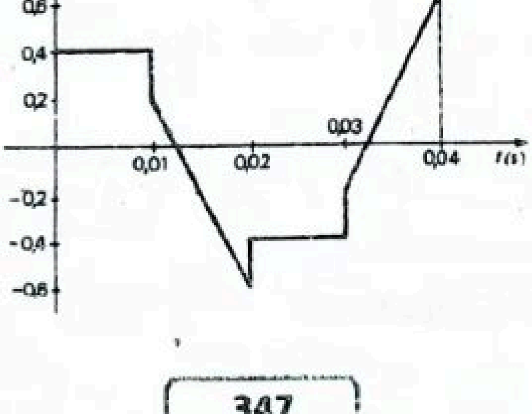
• Si $3.10^{-2} \le t < 4.10^{-2}\,s$: $e = -0{,}2\ V$; alors : $u_{AB} = 2i + 0{,}2$

Or : $i = a't + b'$ $\quad i = 40t - 1{,}4$

d' où $\boxed{u_{AB} = 80t - 2{,}6}$

Représentation graphique de la tension $u_{AB} = f(t)$.

La tension $u_{AB} = f(t)$ est représentée à la figure ci-dessous.



Problème 14.

Deux rails horizontaux parallèles AC et DE distants de l = 10 cm, sont placés dans un champ magnétique uniforme de vecteur $\vec{B}$ vertical dirigé vers le haut d'intensité $B = 2.10^{-2}\ T$. Les extrémités A et D sont reliées par l'intermédiaire d'un conducteur ohmique de résistance R = 1 Ω. Un conducteur rectiligne MN est déplacé dans le plan des rails tout en restant perpendiculaire à ceux-ci, à la vitesse constante $V = 0,8\ m.s^{-1}$. Les frottements sont négligeables. Les rails et le conducteur MN ont une résistance négligeable.

1°) Déterminer la f.é.m. induite qui apparaît dans le conducteur MN.

2°) Déterminer le sens et l'intensité du courant induit dans le circuit

3°) Quelle est la puissance électrique P_e engendrée ?

4°) Déterminer les caractéristiques de la force de Laplace $\vec{F}$ qui agit sur le conducteur MN. En déduire les caractéristiques de la force $\vec{F}_m$ exercée par le manipulateur. Déterminer la puissance P_m de cette force. La comparer à P_e.

Réponses : 1°) e = 1,6 .10 $^{-3}$ V ; 2°) i = 1,6.10 $^{-3}$ A ; 3°) P_e = 2,6.10 $^{-6}$ W

4°) F = 3,2.10 $^{-6}$ N ; $P_m = P_e$ = 2,6.10 $^{-6}$ W.

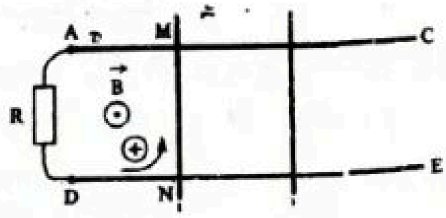
.... **Résolution** ....

1°) Déterminons la f.é.m. induite dans le conducteur MN.

A un instant t, le flux magnétique à travers le circuit est :

$$\Phi = \vec{B}.\vec{S} = B.S\cos 0° \Longrightarrow \Phi = B.S$$

or : $S = l.x$, donc : $\Phi = Blx$



D'après la loi de Faraday, la f.é.m. induite est :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\,l\frac{dx}{dt} \Longrightarrow e = -Blv$$

d' où $\boxed{e = -B.l.v}$ AN : $\boxed{|e| = 1,6.10^{-3}\ V}$

2°) Sens et intensité du courant induit.

D'après la loi de Pouillet : $i = \frac{e}{R} = -\frac{B.l.V}{R} < 0$

$i < 0$, donc le courant circule dans le sens contraire du sens positif choisi (sens négatif), c'est-à-dire de M vers N.

Son intensité vaut : $\boxed{i = -\frac{Blx}{R.t}}$ AN : $\boxed{i = 0,5A}$

3°) Puissance électrique engendrée.

La puissance électrique engendrée est :

$$P_e = e.i \Longrightarrow \boxed{P_e = \frac{(B.l.V)^2}{R}} \quad \text{AN :} \quad \boxed{P_e \approx 2,6.10^{-6}\ W}$$

4°) Caractéristiques de la force de Laplace.

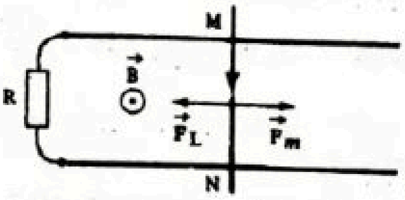
La force de Laplace $\vec{F} = i\vec{l} \wedge \vec{B}$, a pour caractéristiques :

- point d'application : milieu de MN ;
- direction : perpendiculaire à MN ;
- sens : opposé à $\vec{V}$;
- intensité : $F = |i|.l.B = \frac{B^2.l^2.V}{R}$ AN : $\boxed{F = 3,2.10^{-6}\ N}$

Caractéristiques de la force motrice.

Le conducteur MN est soumis à quatre forces :

- son poids $\vec{P} = m\vec{g}$;
- la réaction $\vec{R}$ des rails ;
- la force de Laplace $\vec{F}$;
- la force motrice $\vec{F}_m$ de l'expérimentateur..



La vitesse de déplacement de la tige MN étant constante, le principe de l'inertie impose :

$$\sum\vec{F}_{ex} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{F}_m = \vec{0}$$

Or : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$; donc : $\vec{F} + \vec{F}_m = \vec{0} \Longrightarrow \vec{F}_m = -\vec{F}$

La force $\vec{F}_m$ exercée par le manipulateur est donc opposée à la force de Laplace.

$$\boxed{F_m = F = \frac{B^2.l^2.V}{R}} \quad \text{AN :} \quad \boxed{F = 3,2.10^{-6}\ N}$$

Calcul de la puissance mécanique P_m.

On a : $P_m = \vec{F}_m.\vec{V} = F_m.V$

d'où $\boxed{P_m = \frac{(B.l.V)^2}{R}}$ AN : $\boxed{P_e \approx 2,6.10^{-6}\ W}$

Nous constatons que: $P_m = P_e$.

Il y a eu transformation d'énergie mécanique en énergie électrique.

EXERCICES ET PROBLEMES PROPOSES.

CHAMP MAGBETIQUE

Problème 1.

On démontre que l'intensité du champ magnétique au centre d'une bobine circulaire de rayon R, de longueur L et comprenant N spires est donnée par la relation :

$$B = \frac{4\pi N.I}{10^7.\sqrt{L^2 + 4R^2}}$$

1°) Montrer que pour une bobine infiniment longue, on retrouve la formule :
$B = 4\pi.10^{-7}.n.I$

2°) Retrouver la formule d'une **bobine plate à partir de la formule générale ci-dessus.**

3°) Etudier le cas d'une bobine où la longueur est égale au diamètre de la spire et donner l'expression de B en fonction du diamètre D.

Réponses : 2°) B = $2\pi.10^{-7}\frac{N.I}{R}$; 3°) B = $2\pi.10^{-7}\frac{N}{D}I\sqrt{2}$.

....

Problème 2.

Une bobine plate a un rayon de 6 cm et comporte 80 spires. Elle est traversée par un courant de 2 A.

1°) Préciser les caractéristiques du vecteur champ magnétique créé par le courant au centre de la bobine.

2°) Le plan de la bobine étant maintenu parallèle au méridien magnétique, calculer l'angle α de déviation d'une petite aiguille aimantée placée au centre de la bobine. Cet angle pourrait-il être supérieur à 90° ? Justifier la réponse.

Donnée : **composante horizontale du champ magnétique terrestre** : $B_H = 3.10^{-5}$ T

Réponses ; 1°) $B \approx 1,7 \cdot 10^{-3}\,T$; **2°)** $\alpha = 89°$ **; non.**

....

Problème 3.

Un solénoïde est enroulé à spires non jointives, à raison de 10 spires par centimètre. Le fil conducteur est en cuivre de 0,2 mm de diamètre et de résistivité $\rho = 1,6.10^{-8}$ **Ω**.m. La longueur du solénoïde est l = 40 cm et le rayon d'une spire est r = 5 cm.

On réalise un circuit comprenant un générateur de f.é.m. E = 1,5 V et de résistance interne r' = 0,5 **Ω** et la bobine. L'axe de la bobine est orienté perpendiculairement au méridien magnétique. Une petite aiguille aimantée horizontale placée au centre de la bobine dévie d'un angle $\alpha_1 = 60°$ lorsqu'on ferme le circuit.

1°) Quelle est la résistance R de la bobine ?

2°) Quelle **est la valeur de la composante horizontale du champ magnétique terrestre ?**

3°) Quelle est la résistance R_x du conducteur à mettre en série avec la bobine pour ramener la déviation de l'aiguille à $\alpha_2 = 45°$?

Réponses : 1°) $R = 64\ \Omega$; 2°) $B_H = 1{,}7.10^{-5}$ T ; 3°) $R_x \approx 47\ \Omega$.

....

Problème 4.

Un solénoïde comportant une seule couche de spires jointives est fait de fil de cuivre de résistivité $\boldsymbol{\rho = 1,7.10^{-8} \Omega.m}$ et de section S = 0,2 mm². Le fil conducteur est enroulé autour d'un tube rigide de diamètre D = 0,24 m.

1°) Déterminer le nombre de spires de ce **solénoïde si sa résistance est** R = 48 Ω.

2°) On branche ce solénoïde aux bornes d'un générateur de f.é.m. E = 50 V et de résistance interne r = 2 **Ω**. Donner les caractéristiques du vecteur champ magnétique $\vec{B}_S$ au centre du solénoïde.

Réponses : 1°) N = 749 spires ; 2°) $B_S = 2{,}5.10^{-3}$ T.

....

Problème 5.

Un solénoïde est réalisé en enroulant régulièrement un fil de cuivre dont la résistance par unité de longueur est $0{,}1\ \Omega.m^{-1}$.

Les spires ont un rayon de 4 cm.

1°) Quelle est sa résistance si sa longueur est de 50 cm et qu'il comporte 10 spires par cm ?

2°) Quelle doit être la f.é.m. du générateur parfait auquel il faut relier le solénoïde pour obtenir un champ magnétique de 2.10^{-3} T ?

Réponses : 1°) R = 12,6 Ω ; 2°) E = 20 V.

....

Problème 6.

Un solénoïde horizontal de 50 cm de longueur et comportant 1000 spires est placé dans la direction est-ouest. Une boussole placée à l'intérieur dévie de 45° quand le solénoïde est parcouru par un courant.

1°) Sachant que la composante horizontale du champ magnétique terrestre est $B_H = 2.10^{-5}$ T, déduire la valeur du champ magnétique créé par le solénoïde.

2°) Quelle est l'intensité du courant qui le parcourt.

Réponses : 1°) $B = 2.10^{-5}$ T ; 2°) I = 8 mA.

MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGEE DANS UN CHAMP MAGBETIQUE UNIFORME.

Problème 7.
Calculer le rayon de la trajectoire d'un électron animé d'une vitesse de 10^7 m.s^{-1} et soumis à un champ magnétique uniforme de direction orthogonal au vecteur vitesse et d'intensité
$B = 8.10^{-4}$ T. Calculer la fréquence de révolution et la période correspondante.
Réponses : R = 7,1 cm ; f = 22,4 MHz ; $T \approx 4,5.10^{-8}$ s.

....

Problème 8.
Un faisceau homocinétique d'électrons décrit un arc de cercle de rayon R = 8,5 cm, dans un champ magnétique uniforme de valeur B = 1 mT.
a) Déterminer l'expression du rayon de leur trajectoire en fonction de m, V_0 , e et B.
b) Calculer la valeur de la vitesse V_0 des électrons.
Réponses : a) $R = \frac{mV_0}{e.B}$ **; b)** $V_0 = 1,5.10^7 m.s^{-1}$

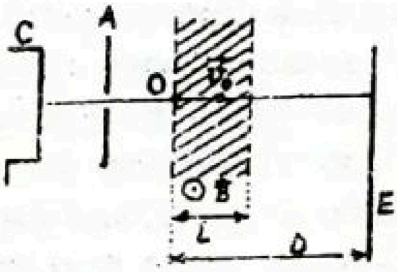
....

Problème 9.
Un électron pénètre en O, avec une vitesse horizontale $\vec{V_0} = 10^7\ m.s^{-1}$ dans une région de longueur l = 2 cm cù règne un champ magnétique B uniforme vertical de valeur $B = 10^{-3}$ T. La particule en sort et va heurter un écran placé à une distance D = 50 cm du point d'entrée.
1°) Déterminer l'angle de déflexion et les coordonnées du point S où la particule quitte la région de champ magnétique.
2°) Ecrire l'équation de la trajectoire de la particule entre la région de champ magnétique et l'écran. Quelles sont les coordonnées du point d'impact sur l'écran fluorescent ?
Réponses : 1°) $\alpha = 20,5°$; $x_S = 2.10^{-2}$ m ; $y_S = 3,73.10^{-3}$ m ;
2°) $y = 0,373\,(x - 10^{-2})$; $x_M = 0,50$ m ; $y_M = 1,83.10^{-1}$ m ..

....

Problème 10 *. (Bac, C, Poitiers 1981).**
Dan un tube cathodique, des électrons sont émis sans vitesse initiale par une cathode C, puis accélérés par l'anode A, ils pénètrent en O avec une vitesse horizontale $\vec{V_0}$ dan un champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire au plan de la figure et de largeur l .

1°) Calculer la tension accélératrice entre l'anode et la cathode.
2°) Etudier la nature du mouvement dans le champ magnétique et calculer la grandeur caractéristique de la trajectoire sachant que $B = 10^{-3}\,T$.
3°) Un écran (E), placé à une distance $D = 50\,cm$ de O, reçoit le faisceau d'électrons. Calculer la déviation sur l'écran du faisceau d'électrons provoquée par le champ magnétique sachant que $l = 1\,cm$ est très inférieur à D.



4°) Dans l'espace de longueur $l = 1\,cm$, on fait agir simultanément le champ magnétique précédent et un champ électrique $\vec{E}$ afin de ne plus observer de déviation sur l'écran (E).
Calculer l'intensité du champ électrique et représenter sur un schéma les vecteurs $\vec{E}$, $\vec{B}$ et les forces appliquées à l'électron.
Données : $V_0 = 10^7 m.s^{-1}$; $e = 1,6.10^{-19}\,C$; $m_e = 9,1.10^{-31}\,kg$.

Réponses : 1°) $U = \frac{m.V_0^2}{2e} = 284\,V$; 2°) $R = \frac{m.V_0}{e.B} = 5,7\,cm$;
3°) $y = \frac{e.B.l}{m.V_0}(D - \frac{l}{2}) = 8,8\,cm$; 4°) $E = V_0.B = 10^4\,V/m$.

....

Problème 11 : *.**
Un faisceau homocinétique d'électrons de vitesse $V_0 = 10^7$ m/s, pénètre dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ perpendiculaire à $\vec{V}_0$. La largeur de la zone de champ est l = 1,5 cm. On observe la déviation du faisceau vers le haut sur un écran situé à la distance D = 40 cm de la zone de champ.
1°) Déterminer le sens $\vec{B}$.
2°) Quelle est la nature de la trajectoire des électrons dans le champ magnétique et déterminer en fonction de m, V_0 et B, la grandeur caractéristique de cette trajectoire.
3°) Calculer l'intensité du champ magnétique, sachant que sur l'écran on mesure une déflexion de 2 cm.

Réponses : 2°) $R = \frac{mV_0}{e.B}$; 3°) $B = 1,9.10^{-4}$ T.

....

Problème 12. *.**
Des protons animés d'une vitesse horizontale $\vec{V}_0$, pénètrent en O dans une région de longueur l = 1 cm où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ horieontal et orthogonal à $\vec{V}_0$.

1°) Le faisceau de protons étant dévié vers le haut, déterminer le sens de $\vec{B}$. Montrer que la trajectoire des protons est un arc de cercle et établir l'expression donnant le rayon de cette trajectoire.

2°) Les protons sortent de la région du champ magnétique au point S et viennent frapper en M un écran vertical placé à la distance D = 1 m de O.

a) Etablir l'expression donnant l'ordonnée **y = OM** du point d'impact sur l'écran.

b) Calculer **y**, sachant que $V_0 = 5.10^5\ m/s$ et $B = 2.10^{-2}\ T$.

On donne : masse du proton : m = $1{,}67.10^{-27}$ kg.

Réponses : 1°) $\vec{B}$ vers l'arrière ; $R = \frac{mV_0}{qB}$; 2°) a) $y = \frac{qBl}{mV_0}D$; b) **y = 3,8 cm.**

...

Problème 13.

On cherche à séparer les isotopes de l'uranium ^{235}U et ^{238}U. Les atomes sont d'abord ionisés en $^{235}U^+$ et $^{238}U^+$, ils sont ensuite accélérés sous une tension U_0 = 3800 V, ils pénètrent enfin dans une région où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$. Les ions décrivent des demi-cercles de rayons R_1 et R_2 et sont perçus aux points A et C..

a) Calculer les vitesses V_1 et V_2 respectivement des ions $^{235}U^+$ et $^{238}U^+$ en O point d'entrée dans le champ magnétique.

b) Calculer les rayons R_1 et R_2 des trajectoires des ions $^{235}U^+$ et $^{238}U^+$.

En déduire la distance AC.

On donne : m_1 = 235 u ; m_2 = 238 u et 1 u = $1{,}66.10^{-27}$ kg ; B = 0,1 T.

Réponses: 1°) V_1 = 55831 m.s $^{-1}$; V_2 = 35478 m.s $^{-1}$;
2°) R_1 = 1,3612 m ; R_2 = 1,3699 m ; AC = 1,74 cm.

...

Problème 14. *.**

Dans un spectromètre la tension accélératrice est U = 5000 V. Les ions positifs émis par la source ont une masse m = 19,992 u, ils traversent un champ magnétique de valeur B = 1 T.

1°) Quel est le rayon de leur trajectoire ?

2°) Des ions de même charge, mais de masse m' = 21,991 u sont émis en même temps que les précédents. Calculer la distance séparant les points d'impacts des deux types d'ions sur le collecteur.

Réponses : 1°) $R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}$ = 4,57 cm ; 2°) Δx = 4,5 mm.

...

Problème 15.*.**

Dans un cyclotron, le rayon des dées vaut R = 0,8 m et B = 1 T.

1°) Quel temps met une particule pour effectuer un demi-tour ?

2°) **En déduire la fréquence de la tension accélératrice si les particules sont des protons.**

3°) Quelle est l'énergie cinétique maximale des particules ?

Réponses : 1°) $t = \frac{\pi.m}{qB}$; 2°) $f = 1,53.10^7$ Hz ; 3°) $E_{Cmax} = 4,9.10^{-12}$ J.

Problème 16.

Le champ magnétique d'un cyclotron servant à accélérer des protons est de 1,48 T. Le rayon maximal utile du cyclotron est de 0,35 m.

1°) Combien de fois par seconde le potentiel entre les Dees doit-il s'inverser ?

2°) Calculer l'énergie cinétique de sortie (en Mev) d'un proton.

3°) Quelle différence de potentiel aurait donné au proton la même énergie cinétique ? On donne : $m_P = 1,66 .10^{-27}$ kg.

Réponses : 1°) $N = 2,27.10^7$ Hz ; il s'inversera 2N fois par seconde ;
2°) $E_C = 12,93$ Mev ; 3°) $U = 12,9.10^5$ V.

LOI DE LAPLACE
INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE
AUTO – INDUCTION.

Problème 17 : *.**

Un solénoïde comportant 1000 spires par mètre est parcouru par un courant d'intensité I = 8 A.

1°) Calculer le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde.

2°) On place dans ce solénoïde une bobine plate comportant 100 spires de rayon R = 3 cm. Cette bobine tourne à la vitesse constante $\omega = 10\pi$ rad.s^{-1} autour d'un axe perpendiculaire à l'axe de la bobine. A la date t = o, le plan de la bobine est parallèle au champ magnétique. Déterminer l'expression de la tension à ses bornes.

Réponses : 1°) $B = 10^{-2}$ T ; 2°) $u = 8,9.10^{-2}\sin 31,4t$

Problème 18 : *.**

On fabrique une bobine en enroulant régulièrement 1000 spires jointives de ryon R = 2 cm avec un fil dont le diamètre, isolant compris est d = 0,8 mm et dont la résistance est r = 0,1 Ω par mètre de fil.

1°) Quelle est la longueur de fil nécessaire et la résistance de la bobine ?
2°) Quelles sont la longueur de la bobine et son auto-inductance ?
Réponses : 1°) l = 125,7 m ; R = 12,6 Ω ; 2°) l = 0,8 m ; L = 1,98 mH.

....

Problème 19 : *.**

1°) Calculer l'inductance d'un solénoïde de longueur l = 0,40 m comportant 400 spires.de surface S = 10 cm^2.
2°) Ce solénoïde est parcouru par un courant d'intensité $i = t^2 - 2t$.
Quelle est l'expression de la f.é.m. d'auto-induction et quelle est sa valeur 5 s après la fermeture du circuit ?
3°) Quelle est l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine pendant les 5 premières secondes. ?
Réponses : 1°) L = 5.10^{-4} T ; 2°) e = – 4 mV ; 3°) E_m = 56,2 mJ.

....

Problème 20 : *.**

Un solénoïde de longueur l = 20 cm et de diamètre moyen D = 20 cm, est formé de deux couches de spires jointives constituées d'un fil de 0,8 mm de diamètre entouré d'une gaine de 0,1 mm d'épaisseur.
1°) Que vaut son auto-inductance ?
2°) Quelle est la f.é.m. auto-induite **quand le courant passe** de 0 à 4 A en 0,2 s ?
Réponses : 1°) L = 7,9 mH ; 2°) e = 0,16 V.

....

Problème 21 *.**

Un solénoïde comportant 200 spires de rayon $r = 5\ cm$ est placé dans un **champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}$ de telle façon que son axe ait pour direction celle de $\overrightarrow{B}$.**
1°) Calculer le flux du champ $\overrightarrow{B}$, à travers une spire, puis à travers tout le solénoïde. **Application numérique** $B = 0,1\ T$.
2°) La norme du champ $\overrightarrow{B}$ décroit de 0,1 T à 0,05 T en 0,05 s.
Calculer la valeur absolue de la f.é.m. moyenne induite qui apparait aux bornes du solénoïde.
Réponses : 1°) $\Phi = 157\ mWb$; **2°)** $e_m \approx 1,6\ V$.

....

Problème 22 : *.**

Un solénoïde de 50 cm de longueur et de 8 cm de diamètre, comporte 2000 spires par mètre.
1°) Déterminer les caractéristiques du vecteur champ magnétique $\overrightarrow{B}$ à l'intérieur du solénoïde quand il est **parcouru par un courant d'intensité** I = 300 mA.

2°) Calculer l'auto-inductance de ce solénoïde.
Réponses : 1°) $B = 7,5.10^{-4}$ T ; 2°) $L = 1,26.10^{-2}$ H.

....

Problème 23.

Une balance de Cotton possède un conducteur actif CD de 3 cm de longueur et traversé par un courant de 8 A. Les deux bras de levier sont égaux.

1°) Donner le principe de cette balance.

2°) Quelle masse faut-il placer dans le plateau pour équilibrer la force créée par un champ magnétique horizontal de 0,6 T et faisant un angle de 30° avec le fil conducteur CD. Faire un schéma. On prendra $g = 10\ m.s^{-2}$.

Réponses : 2°) $m = \dfrac{IBl.\sin\alpha}{g} = 7,2\ g.$

....

Problème 24.

Une roue de Barlow est formée d'un disque de cuivre de rayon R = 5 cm, pouvant tourner autour d'un axe horizontal. La partie inférieure du disque trempe dans le mercure. La roue est alimentée par un courant continu de 10 A qui arrive par le mercure et sort par l'axe du disque. Un électro-aimant produit un champ magnétique uniforme de 0,5 T, perpendiculaire au plan du disque. **Le disque soumis à la force électromagnétique tourne à la vitesse constante de 3 trs/s.**

1°) Faire un schéma montrant la force électromagnétique et le sens de la rotation du disque. On considérera les deux sens possibles de $\vec{B}$.

2°) Calculer l'intensité de la force électromagnétique ainsi que son moment par rapport à l'axe de rotation (**la force étant appliquée au milieu du rayon du disque**).

3°) Le disque qui tourne constitue un moteur électrique. Calculer sa puissance.

Réponses : 2°) F = 0,25 N ; $\mathcal{M} = 0,625.10^{-2}$ N.m ; 3°) P ≈ 0,118 W.

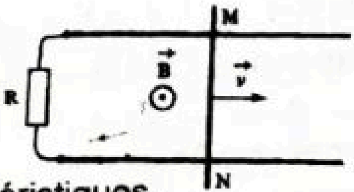
....

Problème 25. (Extrait du Bac, SM, Guinée 2002).

Deux rails conducteurs parallèles, de résistance négligeable, séparés par une distance $l = 25\ cm$ sont placés dans un plan horizontal. Une tige métallique rigide, de masse négligeable, perpendiculaire aux rails peut glisser sans frottement dans une direction parallèle aux rails. Soit $r = 0,5\ \Omega$ la résistance de la longueur l de cette tige. Les deux rails sont reliés par un conducteur ohmique de résistance $R = 0,5\ \Omega$. L'ensemble est placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ d'intensité 1 tesla, perpendiculaire au plan des rails. **On déplace la tige à vitesse constante** $V = 10\ m.s^{-1}$ de gauche à droite.

1°) Préciser le sens du courant induit en le justifiant.

2°) Calculer la force électromotrice d'induction et l'intensité du courant induit.



3°) Montrer qu'une force électromagnétique est créée au cours de ce déplacement. Donner ses caractéristiques.

4°) Calculer la puissance nécessaire pour effectuer ce déplacement.

Rép: 2°) $|e| = 2,5\ V$; $i = 2,5\ A$; **3°)** $F = 6,25.10^{-2}\ N$; **4°)** $P_m = 6,25\ W$.

Problème 26.

Un cadre plan rectangulaire de côtés a = 2 cm et b = 3 cm, **comportant 20 spires est disposé dans un champ magnétique** $\vec{B}$ uniforme d'intensité $B = 4.10^{-2}$ T, de façon que la normale au cadre fasse **avec le champ magnétique** $\vec{B}$ l'angle $\theta = 60°$.

1°) Calculer le flux magnétique à travers le circuit dans la position considérée.

2°) On fait décroître l'intensité du champ magnétique B de 4.10^{-2} T à 0 selon la loi : $B = 4.10^{-2}\left(1 - \frac{t}{10}\right)$; où t représente le temps en secondes. Calculer :

a) la f.é.m. induite au cours de cette opération ;

b) l'intensité du courant induit dans le circuit dont la résistance est R = 0,5 Ω ;

c) la quantité d'électricité au cours de cette opération.

Rép : 1°) $\phi = 2,4.10^{-4}$ Wb ; 2°) a) e = 24 µV ; b) i = 48 µA ; c) q = 480 µC.

Problème 27. *.**

Un cadre rectangulaire de côté a = 3 cm et b = 5 cm, comportant 20 spires est disposé verticalement. Il est plongé dans un champ magnétique uniforme horizontal $\vec{B}$ d'intensité B = 0,4 T. A l'instant initial t = 0, $\vec{B}$ est normal au cadre. Grâce à un moteur, on fait tourner le cadre à la vitesse angulaire constante $\omega = 100\pi$ rad.s^{-1} autour de l'axe (Δ) passant par les milieux des petits côtés.

Calculer, à l'instant t :

a) le flux à travers le cadre ;

b) la f.é.m. d'auto-induction ;

c) l'intensité du courant induit si la résistance du cadre est R = 1 Ω.

……………………………………**Solution abrégée** ……………………………………

A l'instant t l'angle de rotation vaut $\alpha = \omega t = 100\pi t$.

a) $\Phi = NBS\cos\omega t \Longrightarrow \Phi = 1,2.10^{-2}\cos(100\pi t)$.

b) $e = -\frac{d\phi}{dt} = -\Phi_0\omega.\sin\omega t \Longrightarrow e = -3,77.\sin(100\pi t)$;

c) $i = \frac{e}{R} = \frac{\phi_0\omega}{R}\sin\omega t \Longrightarrow i = 3.77\sin(100\pi t)$.

Problème 28. *.**

On considère une bobine plate circulaire, comportant 20 spires de rayon r = 5 cm. Elle est placée dans un champ magnétique uniforme d'intensité B = 0,02 T et dont les lignes font un angle α = 30° avec le plan de la bobine. On annule ce champ en $\frac{1}{10}$ de seconde.

1°) Quelle sera la valeur moyenne de la f.é.m. induite dans la bobine ?

2°) La quantité d'électricité induite est alors $Q = 2{,}5.10^{-2}$ C, en déduire la résistance R de la bobine.

Réposes : 1°) $|e_m| = 1,57.10^{-2}\ V$ **; 2°)** $R \approx 0,63\ \Omega$ **.**

....

Problème 29.

Pour fabriquer une bobine d'inductance L, on utilise un cylindre de diamètre D = 10 cm et de longueur l = 60 cm sur lequel on enroule un fil de cuivre de diamètre d = 0,6 mm, recouverte d'une **couche de vernis d'épaisseur** e = 0,1 mm. On réalise ainsi une couche à spires jointives.

1°) Calculer la résistance R **de la bobine sachant que la résistivité du cuivre est** $\boldsymbol{\rho = 1,69.10^{-8}\ \Omega.m}$**.**

2°) Donner la définition de l'inductance L de la bobine et déterminer sa valeur.

Réponses : 1°) R = 14,1 Ω ; 2°) L = 9,25 mH.

....

Problème 30.

Un solénoïde de longueur $\boldsymbol{l}$ très grande devant son rayon, comporte N spires enroulées sur un cylindre de section S.

1°) Rappeler la définition de l'inductance propre L de ce solénoïde, puis établir son expression en fonction de N, $\boldsymbol{l}$, S.

Application numérique : N = 10^4 spires ; $\boldsymbol{l}$ = 0,5 m ; S = 40 cm^2.

2°) Ce solénoïde est parcouru par un courant dont l'intensité varie linéairement de 0 à 10 A en 5 secondes.

a) Etablir en fonction du temps, l'expression du champ magnétique B créé à l'intérieur du solénoïde.

b) On place à l'intérieur du solénoïde une bobine de 500 spires, ayant le même axe, de résistance égale à 20 Ω, constituée par un fil conducteur enroulé sur un cylindre de rayon

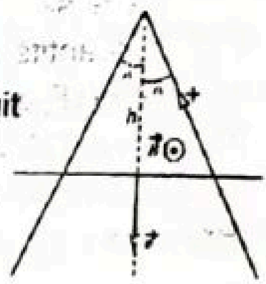
1 cm. Calculer l'intensité du courant induit dans la bobine intérieure.

Réponses : 1°) L ≈ 1 H ; 2°) b) i ≈ $3{,}9.10^{-4}$ A

....

Problème 31.

On coupe un long fil conducteur rectiligne afin de réaliser le dispositif ci-contre. Une partie du fil est coudée suivant un angle 2α, l'autre partie glisse perpendiculairement à la bissectrice de l'angle à la vitesse V constante. Le tout forme un circuit plan horizontal.



Ce circuit est placé dans un champ magnétique vertical.

1°) Calculer le flux du champ magnétique à travers le circuit en fonction de la hauteur h et de α.

2°) En déduire la f.é.m. induite.

3°) Soit R la résistance du fil par unité de longueur. Calculer l'intensité du courant induit. Préciser son sens.

Réponses : 1°) $\Phi = Bh^2 \tan\alpha$; 2°) $e = -2hBV\tan\alpha$;

3°) $i = \dfrac{VB\sin\alpha}{R(1-\sin\alpha)}$.

Problème 32.

Un fil conducteur forme un demi-cercle de rayon a. Sa résistance par unité de longueur est R. Un fil identique mais rectiligne glisse sur ce demi-cercle, comme l'indique la figure, à la vitesse V constante. On place le circuit ainsi formé dans un champ magnétique vertical, perpendiculaire à son plan.

1°) Calculer le flux du champ magnétique à travers ce circuit.

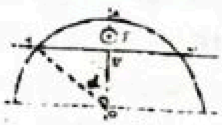
2°) En déduire la valeur absolue de la f.é.m. induite en fonction de B,V,a et α.

3°) En déduire l'intensité du courant induit. Préciser son sens.

Réponses : 1°) $\phi = Ba^2(\alpha - \sin\alpha.\cos\alpha)$

2°) $e = 2B.a.V.\sin\alpha$;

3°) $i = \dfrac{VB\sin\alpha}{R(\alpha+\sin\alpha)}$.

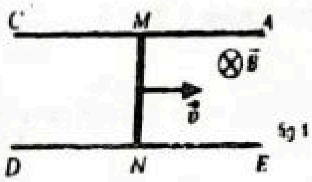


Problème 33.

Une tige conductrice MN de longueur $l = 4\ cm$ se déplace sur deux rails conducteurs parallèles AC et DE à la vitesse constante $V = 2\ cm/s$, en restant perpendiculaire aux deux rails. Le déplacement de MN s'effectue dans un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}$ perpendiculaire au plan des rails d'intensité $B = 0,5\ T$.

1°) Montrer que MN est le siège d'une f.é.m. induite dont on donnera l'expression en fonction de l, V, B. Préciser le signe de la différence de potentiel entre M et N.

2°) On relie AE et CD par des résistances R_1 et R_2 respectivement. La barre MN se déplace toujours à la vitesse constante V que précédemment.



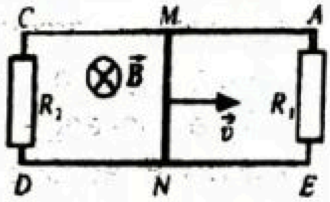
a) Montrer que R_1 et R_2 sont parcourues par des courants dont on indiquera le sens.

b) Exprimer la relation entre les intensités des courants dans R_1,R_2 et MN.

c) En négligeant la résistance des rails et de la tige et en supposant que les courants ne modifient sensiblement pas le champ magnétique initial, calculer les intensités des courants dans R_1, R_2 et MN.

Application numérique : $R_1 = 2.10^{-2}\,\Omega$, $R_2 = 4.10^{-2}\,\Omega$.

d) Dans le cas où la barre MN a une résistance $r = 1\,m\Omega$, calculer les intensités des courants dans R_1, R_2 et MN.



Réponses : 1°) $e = B.l.V$; $V_M - V_N > 0$; 2°) b) $I = I_1 + I_2$

c) $I_1 = \dfrac{B.l.V}{R_1} = 20\,mA$; $I_2 = \dfrac{B.l.V}{R_2} = 10\,mA$;

$$I = \frac{(R_1 + R_2).B.l.V}{R_1 \cdot R_2} = 30\,mA\ ;$$

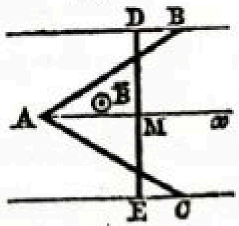
d) $I_1 = 18{,}6\,mA$; $I_2 = 9{,}3\,mA$; $I = 27{,}9\,mA$.

Problème 34.

Deux fils conducteurs, AB et AC, de longueur l forment un angle de 60° dans un plan horizontal. Un troisième fil, DE, identique en nature, section et longueur aux deux précédents, forme avec eux un triangle équilatéral de surface variable. Le milieu M de DE se déplace sur la bissectrice Ax avec une vitesse V. L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ vertical ascendant.

Soit R la résistance linéique des fils AB, AC et DE.

Calculer à un instant t :



1°) la valeur absolue de la f.é.m. induite ;

2°) l'intensité du courant induit (on précisera son sens) ;

3°) la force électromagnétique qui s'oppose au déplacement de DE ;

4°) le travail produit dans ce déplacement ;

5°) la quantité d'électricité induite.

AN : $l = 50\,cm$; $R = 1\,\Omega.m^{-1}$; $B = 0{,}1\,T$; $V = \sqrt{3}\,m.s^{-1}$.

NB. On se placera pour donner les résultats numériques, à l'instant où DE coïncide avec BC.

Réponses : 1°) $e = \frac{2}{\sqrt{3}} BV^2.t \approx 8,7.10^{-2}$ *Volt* ; 2°) $i = \frac{B.V}{3R} \approx 5,8.10^{-2} A$;

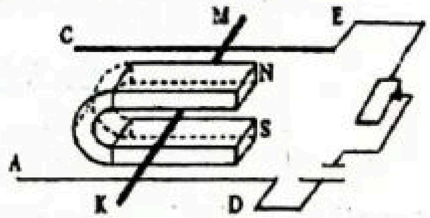
3°) $F = \frac{2}{3R\sqrt{3}} B^2.V^2.t \approx 2,9.10^{-3} N$;

4°) $W = \frac{\sqrt{3}}{12} \frac{B^2 l^2.V}{R} = 6,25.10^{-4} J$;

5°) $Q = \frac{\sqrt{3}.B.l}{6R} \approx 1,4.10^{-2} C.$

Problème 35.

On considère le montage ci-dessous. La tige de cuivre KM, homogène de masse m, est placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ sur une longueur l et elle est parcourue par un courant constant i. On admettra que la tige ne peut que glisser sans frottement sur ses rails initialement horizontaux..



1°) De quel angle α doit-on incliner les rails AD et CE, et dans quel sens pour que la tige soit en équilibre, dans les deux cas suivants :

a) $\vec{B}$ reste perpendiculaire au plan des rails ;

b) $\vec{B}$ reste vertical ?

2°) On incline le plan des rails d'un angle $\alpha = 30°$ dans le sens défini à la question 1°) a) $\vec{B}$ est perpendiculaire au plan des rails.

a) Quelle est la nature du mouvement de la tige KM ?

b) Calculer son accélération et sa vitesse, 0,5 s après la fermeture du circuit. On néglige les phénomènes d'induction électromagnétique.

AN : $B = 0,5\,T$; $i = 4\,A$; $m = 20\,g$; $l = 6\,cm$; $g = 10\,m.s^{-2}$.

Réponses : 1°) a) $\alpha = 36,8° \approx 37°$; b) $\alpha = 30,9° \approx 31°$;

2°) b) $a = 1\,m.s^{-2}$; $V = 0,5\,m.s^{-1}$.

Problème 36.

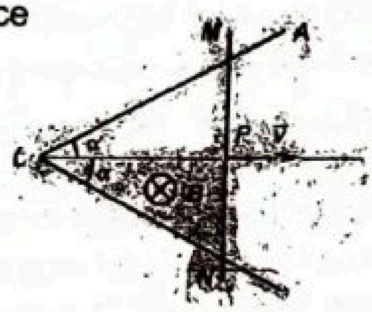
Deux rails en cuivre OA et OC, de longueur égale, soudés en O, sont placés horizontalement dans un champ magnétique $\vec{B}$, uniforme constant et vertical (figure). Soit Ox la bissectrice de l'angle $\widehat{AOC}$; on note $\alpha = \widehat{AOx}$.

On déplace avec une vitesse constante V, une tige métallique MN sur ces rails, de telle façon que MN reste toujours perpendiculaire à Ox. La tige part de O à l'instant initial t = 0, son milieu P reste sur Ox.

1°) Après avoir choisi un sens positif sur le circuit ONM, calculer le flux du champ magnétique à travers ce circuit à l'instant t.

AN : $\alpha = 25°$; $B = 0,2\,T$; $OA = OC = l = 150\,cm$; $V = 2\,m.s^{-1}$.

2°) Donner, en unités S.I., l'expression de la force électromotrice induite en fonction du temps t. On précisera bien l'ensemble de définition de t.



3°) Soit k la résistance linéique (résistance par mètre de longueur) des rails et de la tige (faites du même matériau). Calculer l'intensité du courant induit en fonction du temps.

AN : $k = 0,1\,\Omega.m^{-1}$.

Réponses : 1°) $\phi = BV^2(\tan\alpha)t^2 \Longrightarrow \phi = 0,37t^2$;

2°) $e = -2BV^2(\tan\alpha)t$; avec $t \in [0\,;\,0,68\,s]$;

3°) $i = -\frac{BV\sin\alpha}{k(1+\sin\alpha)} = -1,19\,A$.

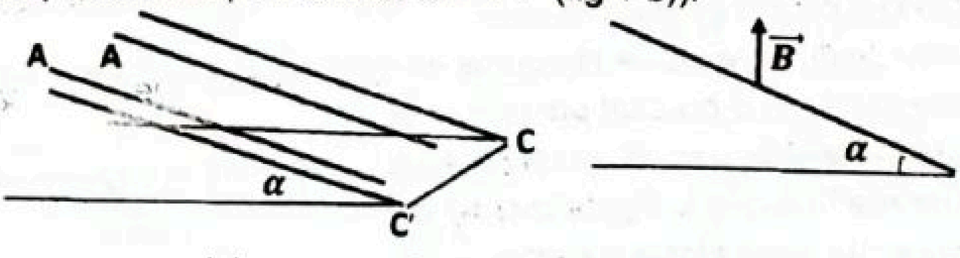
Problème 37. (Bac, C, Strasbourg 1982).

Une barre de cuivre MN, homogène, de masse m et de longueur l, peut glisser sans frottement, le long de deux rails métalliques AC et A'C' contenu dans un plan incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal (fig 1. a). Pendant tout le mouvement, la barre MN reste perpendiculaire aux rails AC et A'C' et maintient avec eux le contact électrique en M et N.

On donne : $l = 10^{-1}m$; $g = 9,8\,m.s^{-2}$; $m = 2.10^{-2}\,kg$; $\alpha = 20°$.

1°) La barre MN est lâchée sans vitesse initiale sur le plan inclinée. Après un parcours de longueur L, sa vitesse vaut $V = 2,80\,m.s^{-1}$. Calculer L.

2°) Les points A et A' sont maintenant reliés par un fil de résistance $R = 0,2\,\Omega$, les résistances électriques des rails et de la barre étant négligeables. Lorsque la barre a parcouru la distance L, elle pénètre à l'instant t = 0, avec la vitesse $V = 2,80\,m.s^{-1}$ dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme, vertical, ascendant, d'intensité B = 1 T (fig 1-b)).



(a) fig 1 (b)

a) Quelle est l'intensité I_0 du courant qui apparaît dans le circuit A'AMN à l'instant t = 0 ? Indiquer sur un schéma très clair le sens de courant.

b) Quelles sont les caractéristiques de la force électromagnétique $\overrightarrow{F_0}$ qui s'exerce sur la barre à l'instant t = 0 ?

c) Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la barre à l'instant t = 0 et montrer que l'accélération $\vec{a}$ est de sens opposé à $\vec{V}$.

Expliquer qualitativement comment varie l'intensité du courant lorsque la barre continue à se déplacer dans le champ magnétique et comment évolue le mouvement, les rails étant supposés suffisamment longs.

3°) La barre, toujours sur ses rails inclinés de $\alpha = 20°$ acquiert maintenant dans le champ $\vec{B}$ un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\overrightarrow{V_1}$.

a) Quelle est alors l'intensité de la force électromagnétique $\overrightarrow{F_1}$ qui agit sur la barre ?

b) Calculer l'intensité I_1 du courant induit et la valeur V_1 de la vitesse.

Réponses : 1°) $L = \dfrac{V^2}{2g\sin\alpha} \approx 1,17\ m$;

2°) a) $I_0 = \dfrac{\mathrm{l.VB}\cos\alpha}{\mathrm{R}} \approx 1,32\ A$; **b)** $\overrightarrow{F_0} = I_0\,\vec{l} \wedge \vec{B}$

$F_0 \approx 132\ mN$; **c)** $a = g\sin\alpha - \dfrac{F_0\cos\alpha}{m}$; $a \approx -2,85 m.s^{-2}$;

3°) a) $F_1 = mg\tan\alpha \approx 7,1.10^{-2}\ N$; **b)** $I_1 = 0,71\ A$;

$V_1 \approx 1,52\ m.s^{-1}$.

Problème 38.

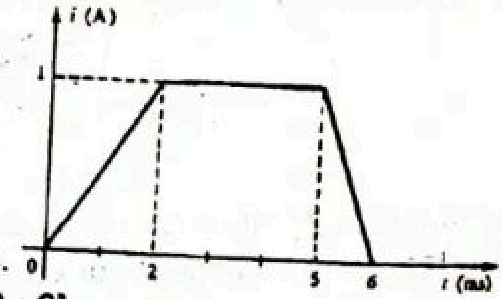
Un solénoïde de longueur $l = 40\ cm$, comportant $N = 500$ spires, de rayon $R = 20\ mm$ est parcouru par un courant I = 5,0 A. On donne la perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ u.S.I.

1°) Calculer le champ magnétique créé au centre O du solénoïde par le passage du courant.

2°) a) En supposant le champ magnétique uniforme à l'intérieur du solénoïde, calculer le flux propre de ce solénoïde.

b) Exprimer l'inductance L de la bobine en fonction des données ; la calculer.

3°) Le solénoïde est à présent parcouru par un courant d'intensité variant en fonction du temps comme l'indique la figure ci-contre.



a) Déterminer la force électromotrice auto-induite e = f(t) qui apparait aux bornes de la bobine pour chacune des trois phases.

b) Représenter graphiquement : **e = f(t) pour t ∈ [0 ; 6] en ms.**

Réponses : 1°) $B = 7,85.10^{-3}\ T$; **2°) a)** $\phi = 4,93.10^{-3}\ Wb$;

b) $L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \dfrac{N^2 \cdot S}{l} = 9{,}86.10^{-4}\ H$;

3°) a) $e = -0{,}49\ V$; $e = 0$; $e = +0{,}99\ V$.

LA PHYSIQUE AU SERVICE DE L'HOMME MODERNE.

(Konaté Cheickna)

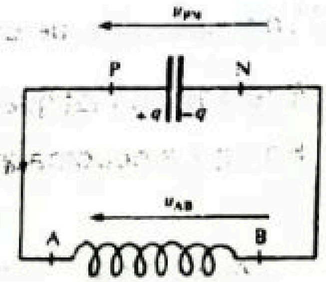
ELECTRICITE.

** 1 – OSCILLATIONS ELECTRIQUES LIBRES.

(TSM)

1.1 – Définition : Un circuit oscillant est un circuit électrique constitué d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L et de résistance négligeable.

1.2 – Equation différentielle de la décharge.



– La tension aux bornes du condensateur est :

$$U_C = \frac{q}{C}$$

– La tension aux bornes de la bobine est :

$$U_L = -e = L\frac{di}{dt}\ ;\ (r \approx 0).$$

or : $i = \frac{dq}{dt} \Longrightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$; donc : $U_L = L\frac{d^2q}{dt^2}$

où q est la quantité d'électricité et r la résistance de la bobine.

D'après la loi des mailles :

$$U_C + U_L = 0 \Longrightarrow \frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

d'où $\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{L.C} = 0}$ ou $\boxed{\ddot{q} + \frac{1}{L.C}q = 0}$

1.3 – Charge instantanée dans le circuit.

La charge instantanée dans le circuit est la solution de l'équation différentielle, c'est une fonction sinusoïdale de la forme :

$$\boxed{q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

où φ est la phase à l'origine et Q_m la valeur maximale de la charge.

1.4 – Caractéristiques du circuit.

a)Pulsation.

La pulsation ω_0 est telle que : $\omega_0^2 = \frac{1}{L.C} \Longrightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}}$ (rad/s)

b)Période propre.

Par définition : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Longrightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}}$ (s)

c)Fréquence propre.

On a : $f_0 = N_0 = \frac{1}{T} \Longrightarrow \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L.C}}}$

1.5 – Etude énergétique.

a) Energie électromagnétique dans le circuit.

* Energie électrique dans le condensateur est : $E_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$
* Energie magnétique dans la bobine est : $E_M = \frac{1}{2}L.i^2$
* Energie électromagnétique dans le circuit est :

$$E = E_e + E_M \Longrightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}L.i^2}$$

b) Conservation de l'énergie dans le circuit.

On a : $E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}L.i^2 \Longrightarrow E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C}.\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}L.\omega_0^2 Q_m^2.\sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

or : $L.\omega_0^2 = \frac{1}{C}$; alors : $E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C}[\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)]$

d'où $\boxed{E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C}}$

L'énergie totale dans le circuit est indépendante du temps donc elle est constante.

Autre méthode.

Calculons la dérivée de E par rapport au temps :

$\frac{dE}{dt} = \frac{q}{C}\cdot\frac{dq}{dt} + Li\cdot\frac{di}{dt}$; or : $i = \frac{dq}{dt}$ et $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$;

alors : $\frac{dE}{dt} = \frac{q}{C}\cdot\frac{dq}{dt} + L\cdot\frac{dq}{dt}\cdot\frac{d^2q}{dt^2} \Longrightarrow \frac{dE}{dt} = L\cdot\frac{dq}{dt}\left(\frac{q}{L.C} + \frac{d^2q}{dt^2}\right)$

or : $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{L.C} = 0$ (équation différentielle),

alors $\frac{dE}{dt} = 0 \Longrightarrow$ **E = Cste.**

L'énergie totale dans le circuit est constante.

1.6 – Analogie entre oscillations mécaniques et oscillations électrique libres.

	Oscillateur mécanique	Oscillateur électrique
Schéma du dispositif		
Equation différentielle	$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$	$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$
Position	$x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$	$q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$
Vitesse	$V = \dot{x}$	$i = \dot{q}$
Inertie	$m\ (masse)$	$L\ (inductance)$
Pulsation	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Terme de rappel	k	$\frac{1}{C}$
Energie emmagasinée	$E = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}kx^2$	$E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$

2 – OSCILLATIONS ELECTRIQUES FORCEES. COURANT ALTERNATIF SINUSOIDAL.

2.1 – Définition. On appelle courant alternatif sinusoïdal, un courant électrique périodique dont l'intensité est une fonction sinusoïdale du temps.

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{ou} \quad i = I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

2.2 – Intensité et tension instantanées.

Ce sont des fonctions sinusoïdales des formes :

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi) \ \text{ et } \ u = U_m \cos \omega t$$

$$\text{ou} \quad i = I_m \cos \omega t \ \text{ et } \ u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

φ désigne la phase de la tension par rapport à l'intensité ou le déphasage.

– Si $\varphi > 0$; u est en avance de φ par rapport à i.

– Si $\varphi < 0$; u est en retard de φ par rapport à i.

– Si $\varphi = 0$; u est en phase avec i.

$\varphi > 0$ $\qquad$ $\varphi < 0$ $\qquad$ $\varphi = 0$

2.3 – Intensité et tension efficaces.

* On appelle intensité efficace d'un courant alternatif, l'intensité d'un courant continu qui passant dans le même conducteur ohmique y produit pendant chaque période la même quantité de chaleur.

Elle est liée à l'intensité maximale par la relation :

$$\boxed{I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}}$$

* On appelle tension efficace d'un courant alternatif, la tension continue qui, appliquée aux bornes d'un même conducteur ohmique y produit pendant chaque période la même quantité de chaleur.

De même :

$$\boxed{U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}}$$

N.B : Les appareils de mesure, ampèremètre et voltmètre indiquent les valeurs efficaces en courant alternatif.

2.4 – Impédance d'un circuit.

On appelle impédance d'un circuit, le rapport de la tension efficace aux bornes du circuit par l'intensité efficace du courant qui le traverse.

$$Z = \frac{U}{I}$$

L'impédance s'exprime en Ohm (**Ω**).

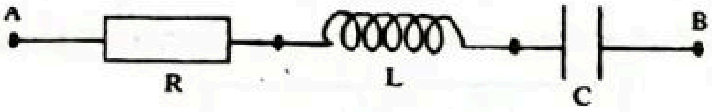
On remarque que :

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m}$$

2.5 – ETUDE DU CIRCUIT R.L.C. SERIE.

a) Définition. Un circuit R.L.C. série est un circuit électrique, constitué d'un conducteur ohmique de résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C montés en série.

b) Tension aux bornes d'un circuit R.L.C. série (équation du circuit).



Le circuit est alimenté par la tension $u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$, il **est** alors traversé par un courant d'intensité instantanée : $i = I_m \cos \omega t$.

La loi des tensions permet d'écrire : $u = u_R + u_L + u_C$.

Appliquons la loi d'Ohm aux bornes de chaque dipôle.

- $u_R = R.i = R\, I_m \cos \omega t \Longrightarrow u_R = R\, I_m \cos \omega t$
- $u_L = -e = L\frac{di}{dt} = -L\omega.I_m \sin \omega t \Longrightarrow u_L = L\omega.I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$,
- $u_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int i dt = \frac{I_m}{C}\int \cos \omega t\, dt \Longrightarrow u_C = \frac{I_m}{C\omega} \sin \omega t$

soit : $u_C = \frac{I_m}{C\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

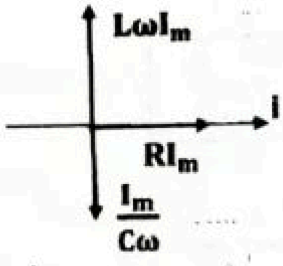
d'où la tension aux bornes du circuit R.L.C :

$$\boxed{U_m \cos(\omega t + \varphi) = RI_m \cos \omega t + L\omega.I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I_m}{C\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

c) Caractéristiques du circuit R.L.C.

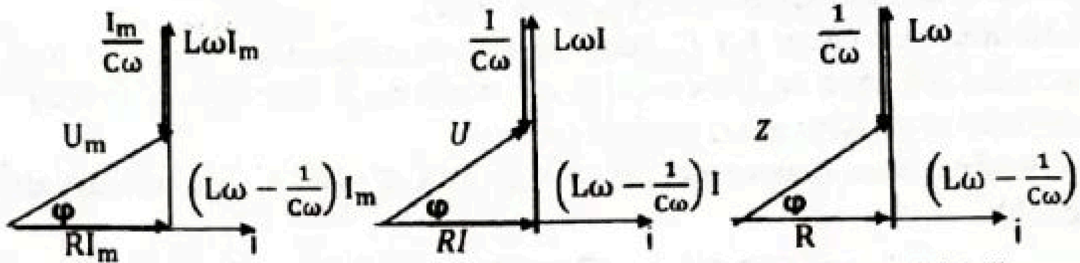
Utilisons la construction de FRESNEL

L'origine des phases étant l'axe de l'intensité.



Trois cas sont à distingués :

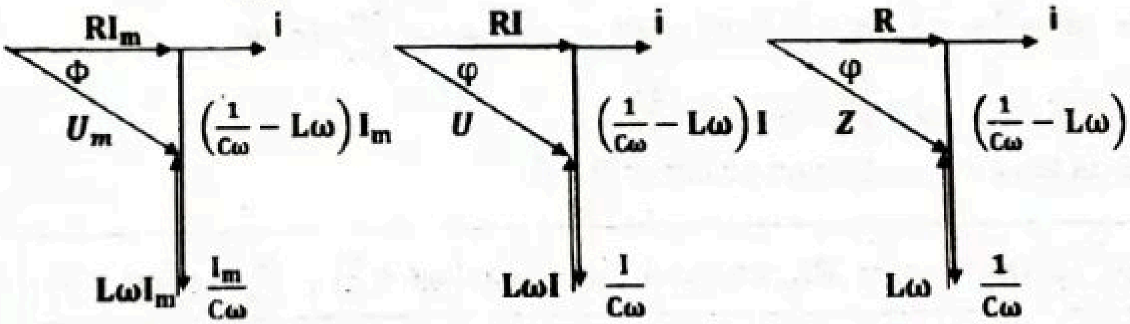
1^er cas : $L\omega > \frac{1}{C\omega}$ (circuit inductif).



Dans ce cas, la tension est en avance de φ par rapport à l'intensité telle que :

$$\boxed{\begin{aligned} \tan\varphi &= \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \\ \cos\varphi &= \frac{R}{Z} \\ Z &= \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \end{aligned}}$$

2^ème cas : $L\omega < \frac{1}{C\omega}$ (circuit capacitif).



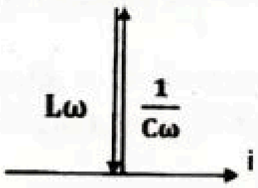
Dans ce cas la tension est en retard de φ par rapport à l'intensité, tel que :

$$\tan\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}\ ;\ \varphi < 0$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

3ème cas : $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ (résonance).

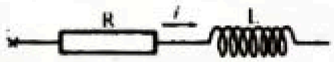


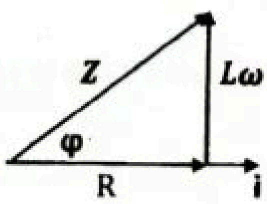
Dans ce cas le circuit est à la résonance telle que :

$$\boxed{\varphi = 0\ ;\ Z = R}$$

ETUDE DES CAS PARTICULIERS.

*** Circuit R.L.**

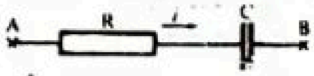


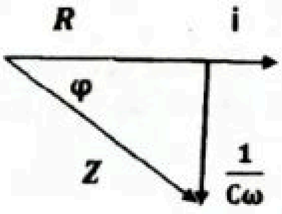


$$\tan\varphi = \frac{L\omega}{R}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (l\omega)^2}$$

*** Circuit R.C.**

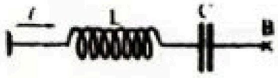


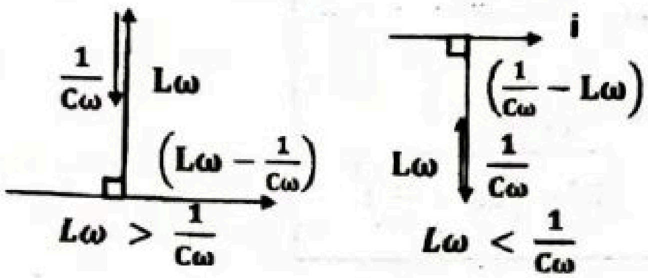


$$\tan\varphi = -\ \frac{1}{R.C\omega}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

* Circuit L.C.





$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi = \pm\frac{\pi}{2} \\ Z = \left|L\omega - \frac{1}{C\omega}\right| \end{array}}$$

2.6 – ETUDE DE LA RESONANCE ELECTRIQUE.

a) Condition de résonance.

Pour un circuit R.L.C. série, la résonance se produit lorsque la pulsation imposée par le générateur est égale à ka pulsation propre ω_0 du circuit, telle que ::

$$L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0 \Longrightarrow LC\omega_0^2 = 1$$

d'où $$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}}$$

La période propre du circuit est alors :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Longrightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}}$$ (Formule de Thomson)..

b) Propriétés particulières de la résonance.

A la résonance, l'impédance Z est minimale, l'intensité efficace dans le circuit est maximale, la tension et l'intensité son en phase :

$$\boxed{Z = R;\ I = I_0 = \frac{U}{R};\ \varphi = 0}$$

c) Courbe de résonance.

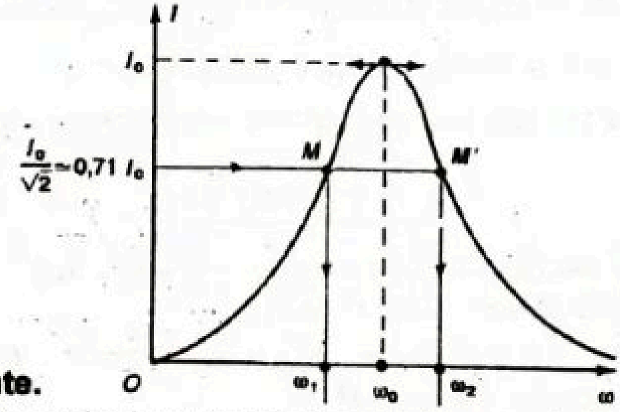
C'est la courbe représentant les variations de l'intensité efficace dans le circuit en fonction de la pulsation ou de la fréquence lorsque la valeur de la tension efficace aux bornes du circuit est constante.

$$I = f(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

D'où le tableau de variation :

ω	0		ω_0		$+\infty$
I	0	$\nearrow$	$\frac{U}{R}$	$\searrow$	0

On en déduit la courbe de résonance :



d) Bande passante.

La bande passante est le domaine de la pulsation ou de la fréquence pour lequel $\mathbf{I} \geq \frac{\mathbf{I_0}}{\sqrt{2}}$.

La largeur de la bande passante est la différence entre les pulsations ω_1 et ω_2 pour lesquelles $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$:

$$\boxed{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}}$$

e) Facteur de qualité.

On appelle facteur de qualité ou coefficient de surtension le rapport de la tension efficace aux bornes du condensateur à la tension efficace aux bornes du circuit à la résonance.

$$\boxed{Q = \frac{U_c}{U}} \iff \boxed{U_C = Q.U}$$

Un circuit est d'autant plus sélectif que son facteur de qualité Q est plus grand. Mais si Q est trop grand, il y a risque de surtension aux bornes du condensateur ou de la bobine capable de les détériorer.

.**Diverses expressions du facteur de qualité.**

$$\boxed{Q = \frac{U_C}{U} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{N_0}{\Delta N} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

2.7 – PUISSANCE MOYENNE ET FACTEUR DE PUISSANCE.

La puissance moyenne consommée par un dipôle en régime sinusoïdal est :

$$\boxed{P = U.I\cos\varphi}$$

La puissance moyenne s'exprime en Watt (W).

Cette puissance est le produit de deux facteurs :

- $P_a = U.I$; est la puissance apparente qui s'exprime en voltampère (V.A).
- $\cos\varphi = \frac{R}{Z}$; est le facteur de puissance du circuit.

Remarque : la puissance réactive est donnée par la relation :

$$\boxed{P = U.I\sin\varphi}$$

Cette puissance s'exprime en voltampère-réactive (Var).

ETUDE DES CAS PARTICULIERS.

* **Résistance pure :** $\varphi = 0 \Longrightarrow \cos\varphi = 1$; alors : $P = U.I$

or : $U = R.I$; d'où $P = R.I^2$

* **Bobine pure :** $\varphi = +\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \cos\varphi = 0$; alors : $P = 0$.

Une bobine pure ne consomme pas de puissance.

* **Condensateur parfait :** $\varphi = -\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \cos\varphi = 0$; alors : $P = 0$.

Un condensateur parfait ne consomme pas de puissance.

* **Circuit .R.L.C. série :** $U = Z.I$ et $\cos\varphi = \frac{R}{Z}$; alors :

$$P = UI.\cos\varphi = Z.I^2\frac{R}{Z} \Longrightarrow P = R.I^2$$

Conclusion. Dans un circuit R.L.C. série, toute la puissance moyenne est consommée dans la résistance par effet joule.

....

LA PHYSIQUE AU SERVICE DE L'HOMME MODERNE

(Konaté Cheickna).

EXERCICES ET PROBLEMES RESOLUS

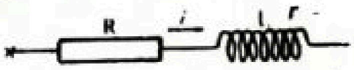
Problème 1 .

On se propose de déterminer la résistance r et l'inductance L d'une bobine.
Pour cela on monte en série une résistance pure R = 7 Ω et la bobine.
L'ensemble est alimenté par une tension sinusoïdale de fréquence 50 Hz et de valeur efficace U = 24 V. On mesure les tensions efficaces U_1 et U_2 respectivement aux bornes de R et aux bornes de la bobine. On obtient :
$U_1 = 8$ V et $U_2 = 19,6$ V.
En déduire les valeurs de r et L.
N.B : **Le candidat utilisera au choix la méthode graphique ou la méthode par le calcul.**

....**Résolution** ....

Résistance r et inductance L de la bobine.

Méthode algébrique.



L'impédance Z du circuit est :

$$Z = \sqrt{(R+r)^2 + (L\omega)^2} \Longrightarrow Z^2 = R^2 + 2Rr + r^2 + (L\omega)^2$$

Soit : $Z^2 = R^2 + Z_B^2 + 2Rr$

d' où $$\boxed{r = \frac{Z^2 - Z_B^2 - R^2}{2R}}$$

AN : • $I = \frac{U_R}{R} = \frac{8}{7}$; • $Z = \frac{U}{I} = \frac{24\times 7}{8} = 21\,\Omega$;

• $Z_B \; \frac{U_B}{I} = \frac{19,6\times 7}{8} = 17,15\,\Omega$

d' où $$\boxed{r \approx 7\,\Omega}$$

L'inductance L est. donnée par la relation:

$$Z_B = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2} \Longrightarrow L = \frac{1}{\omega}\sqrt{Z_B^2 - r^2}$$

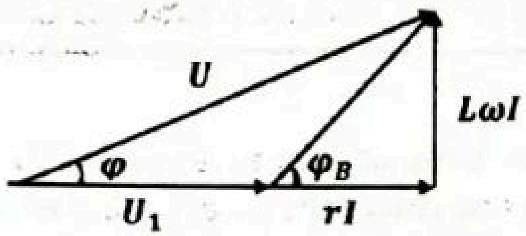
d' où $$\boxed{L = \frac{1}{2\pi f}\sqrt{Z_B^2 - r^2}}$$ AN : $$\boxed{L \approx 50\,mH}$$

Méthode graphique.

Utilisons la construction de Fresnel.

Echelle : 1 cm ⟶ 4 V.

Donc : U_1 ⟶ 2 cm ; U_2 ⟶ 4,9 cm ; U_3 ⟶ 6 cm.



D'après le diagramme de Fresnel :

- $U_2 \cos\varphi_B = r.I \Longrightarrow r = \dfrac{U_2\cos\varphi_B}{I}$
- $U_2 \sin\varphi_B = L\omega.I \Longrightarrow L = \dfrac{U_2\sin\varphi_B}{\omega.I}$

Déterminons I et φ_B.

Appliquons la loi d'Ohm aux bornes de R :

$$U_1 = R.I \Longrightarrow I = \frac{U_R}{R} = \frac{8}{7}\ A$$

D'aptès le théorème d'Alkashi :

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2\cos\varphi_B \Longrightarrow \boxed{\cos\varphi_B = \frac{U^2 - (U_1^2 + U_2^2)}{2U_1.U_2}}$$

AN : $\cos\varphi_B = \dfrac{(24)^2 - (19{,}6^2 + 8^2)}{2\times 8\times 19{,}6} = 0{,}41$

$$r = \frac{19{,}6\times 0{,}41\times 7}{8} = 7{,}03\,\Omega \ ; \quad \text{d' où} \quad \boxed{r \approx 7\,\Omega}$$

$$L = \frac{19{,}6\times 7\times\sqrt{1-(0{,}41)^2}}{8\times 314} = 0{,}0498\,H \ ; \quad \text{d' où} \quad \boxed{L \approx 50\,mH}$$

Problème 2 .

On considère deux portions de circuit AB et BD placées en série, et parcourues par un courant alternatif sinusoïdal de fréquence 50 Hz et d'intensité efficace 1,25 A. AB est un conducteur ohmique de résistance R_1. Dans BD, la tension présente une avance de phase $\varphi = \frac{\pi}{3}$ rad sur l'intensité.

On donne: $U_{AD} = 173{,}2\ V$; $U_{AB} = U_{BD}$.

En utilisant la construction de Fresnel :

1°) Trouver une relation entre $\mathbf{R_1}$ et $\mathbf{R_2}$ ($\mathbf{R_2}$ = résistance de la portion BD) ;

2°) Trouver une relation entre U_{AD} et U_{AB}.

3°) Déduire de ces deux relations les valeurs de $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$ et U_{AB}.

4°) Quelle est alors l'inductance de la résistance inductive dans la portion de circuit BD ?

....**Résolution** ....

1°) Relation entre R_1 et R_2 .

Réalisons la construction de Fresnel (figure).

D'après la construction de Fresnel :

$U_{BD}\cos\varphi = R_2.I$;

or : $U_{BD} = U_{AB}$;

donc: $U_{AB}\cos\varphi = R_2.I \Longrightarrow R_1.I\cos\varphi = R_2.I$

d' où $\boxed{R_2 = R_1\cos\varphi}$ AN : $\boxed{R_1 = 2R_2}$

2°) Relation entre U_{AD} et U_{AB}.

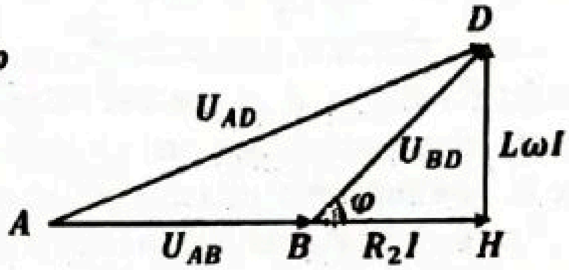
D'après le théorème d'Alkashi :

$U_{AD}^2 = U_{AB}^2 + U_{BD}^2 + 2U_{AB}.U_{BD}\cos\varphi$

Comme $U_{BD} = U_{AB}$, alors :

$U_{AD}^2 = 2U_{AB}^2(1+\cos\varphi)$;

or : $1+\cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$



d' où $\boxed{U_{AD} = 2U_{AB}\cos\frac{\varphi}{2}}$ AN : $\boxed{U_{AD} = \sqrt{3}.U_{AB}}$

3°) Valeurs de R_1, R_2 et U_{AB}.

D'après ce qui précède :

- $U_{AD} = \sqrt{3}.U_{AB} \Longrightarrow U_{AB} = \frac{U_{AD}}{\sqrt{3}} = \frac{173,2}{1,732} = 100\ V$

d' où $\boxed{U_{AB} = 100\ V}$

- $U_{AB} = R_1.I \Longrightarrow R_1 = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{100}{1,25} = 80\ \Omega$

d' où $\boxed{R_1 = 80\ \Omega}$

- $R_1 = 2R_2 \Longrightarrow R_2 = \frac{R_1}{2} = \frac{80}{2} = 40\ \Omega$

d' où $\boxed{R_1 = 40\,\Omega}$

4°) Inductance de la portion de circuit BD.

1ère méthode :

On a : $\tan\varphi = \frac{L\omega.}{R_2} \Longrightarrow L = \frac{R_2 \tan\varphi}{\omega}$

AN : $L = \frac{R_2 \tan\varphi}{\omega} = \frac{40\times\tan\frac{\pi}{3}}{314} = 0,22\ H \Longrightarrow \boxed{L = 0,22\ H}$

2ème méthode :

On a : $Z_2 = \sqrt{R_2^2 + (L\omega)^2} \Longrightarrow L = \frac{1}{\omega}\sqrt{Z_2^2 - R_2^2}$

or : $U_{AB} = R_1.I = Z_2.I \Longrightarrow Z_2 = R_1$;

d' où $\boxed{L = \frac{1}{2\pi f}\sqrt{R_1^2 - R_2^2}}$ AN : $\boxed{L = 0,22\ H}$

....

Problème 3 : (Eurin – gié , page 246 ; Exo 14.13).

On considère trois dipôles associés en série un conducteur ohmique de résistance R, une bobine d'inductance L et de résistance r, un condensateur de capacité C. Ils sont branchés aux bornes d'un générateur délivrant une tension sinusoïdale. A l'aide d'un voltmètre on a mesuré les tensions efficaces :
U_R =24 V ; U_C = 50 V ; U = 30 V, tension efficace aux bornes de l'ensemble.
A l'aide d'un oscillographe, on a trouvé que la tension aux bornes de l'ensemble est en retard de phase ϕ = - 30° par rapport à l'intensité.

1°) soit ϕ_B la phase de la tension aux bornes de la bobine par rapport à l'intensité. Représenter sur un diagramme de Fresnel les tensions u_R, u_B, u_C et u. Faites apparaître sur le schéma ϕ_B et ϕ.

2°) Montrer que : $\tan\varphi_B = \frac{U_C - U\sin|\varphi|}{U\cos\varphi - U_R}$ et $U_B = \frac{U\cos\varphi - U_R}{\cos\varphi_B}$

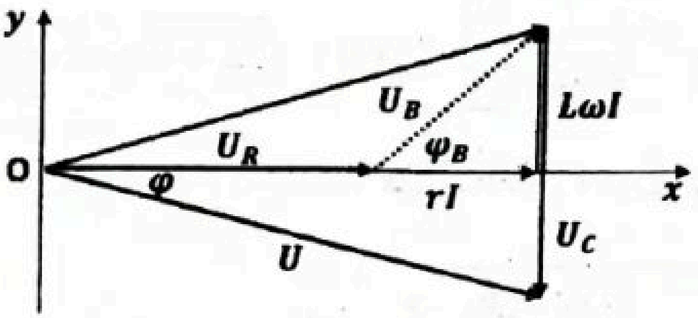
3°) Calculer les valeurs numériques U_B et de ϕ_B.

4°) La résistance R est égale à 200 Ω. La fréquence utilisée est 500Hz. Calculer l'impédance de la bobine, son inductance et sa résistance, ainsi que la capacité du condensateur.

....**Résolution** ....

1°) Démonstration des relations.

On a : $\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_B + \vec{U}_C$



Projetons sur les axes de coordonnées :

- sur Ox : $U\cos\varphi = U_R + U_B\cos\varphi_B$

  Soit : $U_B\cos\varphi_B = U\cos\varphi - U_R$ (1)
- sur Oy : $-U\sin|\varphi| = U_B\sin\varphi_B - U_C$

  Soit : $U_B\sin\varphi_B = U_C - U\sin|\varphi|$ (2)

En divisant (2) par (1) on obtient :

$$\boxed{\tan\varphi_B = \frac{U_C - U\sin|\varphi|}{U\cos\varphi - U_R}}$$

De (2) , nous tirons :

$$U_B\sin\varphi_B = U_C - U\sin|\varphi| \Longrightarrow \boxed{U_B = \frac{U\cos\varphi - U_R}{\cos\varphi_B}}$$

3°) Valeurs numériques de U_B et de φ_B.

- $\tan\varphi_B = \frac{50 - 30\sin|-30°|}{30\cos(-30°) - 24} \Longrightarrow \boxed{\varphi_B = 87°}$
- $U_B = \frac{30\cos(-30°) - 24}{\cos 87°} \Longrightarrow \boxed{U_B = 35\,V}$

4°) Impédance de la bobine.

Appliquons la loi d'Ohm aux bornes de la bobine :

$$U_B = Z_B.I \Longrightarrow Z_B = \frac{U_B}{I}$$

Or : $U_R = R.I \Longrightarrow I = \frac{U_R}{R}$

d' où $\boxed{Z_B = R\cdot\frac{U_B}{U_R}}$ AN : $\boxed{Z_B \approx 292\,\Omega}$

Inductance et résistance de la bobine.

D'après la construction de Fresnel, on a :

- $U_B\sin\varphi_B = L\omega.I \Longrightarrow L = \frac{U_B\sin\varphi_B}{\omega.I}$

d' où $\boxed{L = \frac{R.U_B \sin\varphi_B}{\omega.U_R}}$ AN : $\boxed{L = 9.10^{-2}\ H}$

- $U_B \cos\varphi_B = r.I \Longrightarrow r = \frac{U_B \cos\varphi_B}{I}$

d' où $\boxed{r = \frac{R.U_B \cos\varphi_B}{U_R}}$ AN : $r =$

Capacité du condensateur.
Appliquons la loi d'Ohm aux bornes du condensateur :

$$U_C = Z_C.I = \frac{I}{C\omega} \Longleftrightarrow C = \frac{I}{U_C.\omega} \Longrightarrow \boxed{C = \frac{U_R}{U_C.R.\omega} \approx 0,76\ \mu F}$$

LA PHYSIQUE AU SERVICE DE L'HOMME MODERNE.

(Konaté Cheickna)

EXERCICES ET PROBLEMES PROPOSES.

Problème 1.

Un condensateur plan a deux armatures planes carrées, de côté $a = 10\ cm$, séparées par une distance $e = 5\ mm$.

1°) Calculer la capacité de ce condensateur dans le vide.

2°) Ce condensateur est chargé sous une différence de potentiel de 1 000 V. Calculer la charge du condensateur.

3°) On isole le condensateur ainsi chargé et l'on branche entre ses bornes, à la date t = 0, une bobine d'inductance L = 1 H et de résistance négligeable. L'intensité du courant dans le circuit ainsi formé est nulle à la date t = 0.

a) Etablir l'équation différentielle donnant la variation dans le temps de la charge du condensateur.

b) Calculer la pulsation et la période propre de ce circuit oscillant.

c) Etablir l'expression de la charge du condensateur en fonction du temps.

4°) Montrer que l'énergie emmagasinée par le **circuit est constante et la calculer.**

Réponses : 1°) $C = 17,7\ pF$ **; 2°)** $Q = 17,7\ nC$ **; 3°) a)** $\ddot{q} + \frac{1}{L.C} q = 0$ **;**

b) $\omega_0 = 2,38.10^5\ rad.s^{-1}$ **;** $T_0 = 2,64.10^{-5}\ s$ **; c)** $W = 8,9.\mu J$.

....

Problème 2 .

Une bobine est parcourue par un courant d'intensité I = 0,8 A, lorsqu'on applique entre ses bornes une tension continue de 12 V. Alimentée sous une tension sinusoïdale de valeur efficace U = 80 V et fréquence f = 50Hz, cette bobine est traversée par un courant d'intensité efficace I' = 3,0 A.

Calculer la résistance R et l'inductance L de cette bobine.

Réponses : $R = 15\ \Omega$ **;** $L = 70,2\ mH$.

....

Problème 3 .

Une tension sinusoïdale de valeur instantanée u = 20 sin80πt a été établie entre les extrémités d'une bobine de résistance R = 40 Ω. L'intensité instantanée dans la bobine est i = 0,4 sin(80πt + ϕ).

Déterminer ϕ ainsi que l'inductance L de la bobine.

Réponses : $\phi = -0,64\ rad$ **;** $L \approx 0,12\ H$.

....

Problème 4 .

On applique une tension alternative de valeur constante U = 30 V, à un condensateur parfait. La valeur efficace du courant dans les fils aboutissant au condensateur est I = 0,16 A, lorsque la fréquence utilisée est f = 500 Hz.
Calculer la valeur I' de l'intensité efficace pour la fréquence f' = 2000 Hz.
Calculer la capacité du condensateur.

Réponses : $I' = 0,64\,A$; $C = 1,7\,uF$.

....

Problème 5.

Une tension sinusoïdale de fréquence f = 60 Hz est établie entre les extrémités M et N d'une portion de circuit comprenant une bobine de résistance R et d'inductance L en série avec un condensateur de capacité C. L'intensité efficace étant I = 0,20 A, La mesure des tensions efficaces fournit les résultats suivants : U_{MP} = 12 V , U_{PN} = 35 V , U_{MN} =30 V.

a) Déterminer la capacité Cdu condensateur ainsi que la résistance R et l'inductance L de la bobine.

b) Le condensateur est à capacité réglable. Pour quelle valeur C' l'intensité du courant est- elle maximale ? La tension efficace aux bornes M et N étant maintenue à 30 V, quelles sont alors les tensions efficaces U_{MP} et U_{PN} ?

Réponses : a) $C = 15,2\,\mu F$; $R = 50\,\Omega$; $L \approx 89\,mH$; b) $C' \approx 79,2\,mF$;
$U_{MP} = 36\,V$; $U_{PN} = 20,1\,V$.

....

Problème 6.

Dans une portion de circuit AC, alimenté en courant sinusoïdal de pulsation ω, on trouve en série un résistor de résistance R et une bobine de résistance R' = 14 Ω et d'inductance L. Les tensions efficaces sont respectivement :
U_{AB} = 20 V , U_{BC} = 20 V , U_{AC} = 32 V.

a) A partir du diagramme de Fresnel relatif aux tensions, déterminer, pour la portion de circuit AC, le déphasage φ entre la tension à ses bornes et l'intensité.

b) Calculer l'intensité efficace I du courant, la résistance R du résistor, ainsi que la réactance Lω de la bobine.

c) La fréquence du courant étant f = 80 Hz, calculer l'inductance L.

Réponses : a) $\varphi = 36,8° \approx 37°$; b) $I = 0,4\,A$; $R = 50\,\Omega$; $X = L\omega = 48\,\Omega$;
a) $L \approx 0,96\,mH$.

....

Problème 7.

Un circuit alimenté en courant sinusoïdal de fréquence f = 60 Hz, comprend, en série, un condensateur de capacité C = 50 μF et un résistor de résistance R = 25 Ω. La puissance moyenne consommée est P =81 W.

a) Calculer l'intensité efficace I du courant.

b) Construire le diagramme de Fresnel relatif aux tensions, et déterminer la tension efficace U aux bornes du circuit.

c) Quel est le facteur de puissance de ce circuit ?

Réponses : a) $I = 1,8\ A$ **; b)** $U = 105,6\ V$ **; c)** $\cos\varphi = 0,43$ **;**

....

Problème 8 .

Un dipôle, constitué d'un résistor en série avec un condensateur, consomme une puissance moyenne P = 80 W quand on applique à ses bornes une tension sinusoïdale efficace U = 120 V. Calculer :

a) la résistance R et l'impédance Z du dipôle ;

b) le facteur de puissance du circuit ;

c) la capacité C du condensateur.

Réponses : a) $R = 125\ \Omega$ **; b)** $\cos\varphi = 0,83$ **; c)** $C = 25,6\ \mu F$

....

Problème 9 .

On désire l'impédance Z d'une bobine (B), lorsqu'elle est parcourue par un courant fourni par le secteur. On la met en série avec un résistor de résistance connue R = 100 Ω et à l'aide de 3 voltmètres on détermine les tensions efficaces U_R , U_B et U. On lit : U_R = 75 V , U_B = 90 V , U = 127 V.

Calculer l'impédance Z de la bobine et déterminer par la construction de Fresnel, le facteur de puissance.

Réponses : $Z = 120\Omega$ **;** $\cos\varphi = 0,18$

....

Problème 10 .

Une installation dont le facteur de puissance est 0,85 à la fréquence f = 50 Hz, alimentée sous une tension sinusoïdale de valeur efficace U_2 = 380 V, est traversée par un courant d'intensité efficace I = 160 A.

Le courant est amené par une ligne d'inductance 1,2 mH, comprenant deux conducteurs en cuivre, chacun de longueur l = 500 m et de 80 mm2 de section.

Calculer :

a) la chute de tension en ligne ;

b) la tension efficace U au départ de la ligne.

Réponses : a) $U_1 = 68,3\ V$ **; b)** $U = 440V$.

Problème 11 .

On associe en série, un condensateur de capacité C et une bobine de résistance R et d'inductance L. L'ensemble est alimenté par un courant de tension sinusoïdale (S) de fréquence f. On mesure les tensions efficaces aux bornes de (S), aux bornes de la capacité et aux bornes de la bobine. ; on remarque que ces trois tensions sont égales.

a) Calculer l'inductance L et la capacité C en fonction de la résistance R et de la pulsation ω. **AN :** $R = 5\,\Omega$; la fréquence du courant $f = 50\ Hz$.

b) Calculer dans les mêmes conditions le déphasage φ du courant i par rapport à la tension u aux bornes de (S).

c) Si on l'on modifie la fréquence f, **ces trois tensions efficaces restent-elles égales ?**

Réponses : **a)** $L = \frac{R\sqrt{3}}{3\omega} = 9,2\ mH$; $C = \frac{\sqrt{3}}{2R\omega} = 551\ uF$;

b) $\varphi = +\frac{\pi}{6}$ **; c) non.**

LA PHYSIQUE AU SERVICE DE L'HOMME MODERNE.

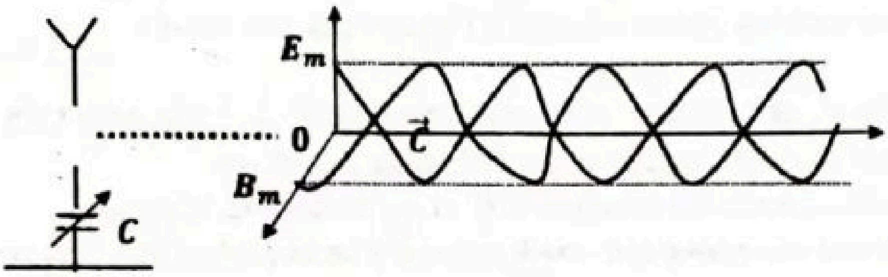
(Konaté Cheickna)

** 3 – ONDES ELECTROMAGNETIQUES. (TSM).

3.1 – Nature de l'onde électromagnétique.

Les ondes électromagnétiques résultent de la propagation simultanée d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'un champ magnétique $\vec{B}$ orthogonaux, en phase et de même fréquence.

$$\boxed{E = E_m \cos(\omega t + \varphi)} \qquad \boxed{B = B_m \cos(\omega t + \varphi)}$$



3.2 – Propriétés des ondes électromagnétiques.

Les ondes électromagnétiques sont de même nature que la lumière, elles subissent les phénomènes de réflexion, de réfraction, de diffraction et peuvent donner des interférences et des ondes stationnaires.

Les ondes électromagnétiques transportent de l'énergie et se propagent dans le vide et dans les milieux matériels.

– Vitesse de propagation dans le vide ;

$$\boxed{C = 3.10^8\ m.s^{-1}}$$

– Vitesse de propagation dans un milieu d'indice n ;

$$\boxed{V = \frac{C}{n}} \qquad (n > 1, donc\ V < C).$$

Les ondes électromagnétiques présentent une double périodicité :

– temporelle : la période est le temps T tel que : $T = \frac{1}{\nu}$;

– spatiale : la période est la longueur d'onde λ telle que :

• dans le vide : $$\boxed{\lambda = \lambda_0 = C.T = \frac{C}{\nu}}\ ;$$

• dans un milieu d'indice n : $\boxed{\lambda = V.T = \frac{C.T}{n} = \frac{C}{n\nu} = \frac{\lambda_0}{n}}$

Remarque. Quand une onde monochromatique passe du vide (ou de l'air) dans un milieu d'indice n sa couleur ne change pas, mais sa **longueur d'onde devient :**

$$\boxed{\lambda = \frac{\lambda_0}{n}}$$

3.3 – Domaine des ondes électromagnétiques et leurs applications.

Les ondes lumineuses visibles appartiennent à l'ensemble des ondes électromagnétiques.

Le domaine s'étend en deçà du violet, des ultra-violets (UV) aux rayons γ. Ces radiations invisibles ont une longueur d'onde inférieure à 400 nm:

Au-delà du rouge, on trouve les infrarouges (IR) et les ondes hertziennes.

Ces radiations également invisibles ont une longueur **d'onde supérieure à** 750 nm.

Rγ	RX	UV	V Visible R	IR	Ondes hertziennes	λ
0,1nm	10 nm	400 nm	750 nm	1 mm	1 km	
Radio – thérapie	Radio – graphie	Bronzage	Eclairage	Chauffage	Radio, TV, Rdard (télécommunication).	

Tableau de correspondance couleur-longueur d'onde.

λ(µm)	0,40	0,45	0,50	0,53	0,58	0,60	0,75
couleur	violet	indigo	bleu	vert	jaune	orangé	rouge

EXERCICES ET PROBLEMES RESOLUS

Problème 1 ;

Un circuit oscillant est constitué d'un condensateur de capacité 0,5 nF et d'une bobine d'inductance L = 0,5 mH.

1°) Quelle est la fréquence propre de ce circuit ?

2°) Calculer la longueur d'onde dans le vide des ondes électromagnétiques ayant cette fréquence.

Réponses : 1°) $f = 3,2.10^5\ Hz$; 2°) $\lambda = 942\ m$.

……………………………………………**Résolution** ……………………………………………

1°) Fréquence propre du circuit oscillant.

La fréquence propre d'un circuit oscillant est la fréquence de résonance :

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \Longrightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Or : $\omega = 2\pi f \Longrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$

d' où $\boxed{f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$ AN : $\boxed{f = 3,2.10^5\ Hz}$

2°) Longueur d'onde des ondes électromagnétiques.

Par définition : $\lambda = V.T$; or : $T = \frac{1}{f}$;

d' où $\boxed{\lambda = \frac{V}{f}}$ AN : $\boxed{\lambda = 942\ m}$

……………………………………………………………………………………………………

Problème 2 : (Extrait du concours , I.P.C. 1990).

1°) Quelle doit être la capacité d'un circuit oscillant, d'inductance L = 0,1 mH pour qu'il soit en résonance avec une antenne mesurant 45 m de longueur et vibrant en quart d'onde ?

2°) On allonge l'antenne de 1 m. Calculer la variation qu'il faut faire subir à la capacité du circuit pour maintenir la résonance dans l'antenne.

Réponses : 1°) C = 91 pF ; 2°) ΔC = 4 pF.

……………………………………………**Résolution** ……………………………………………

1°) Capacité du circuit oscillant.

Puisque l'antenne vibre en quart d'onde, sa longueur est telle que :

$$l = \frac{\lambda}{4} \Longrightarrow \lambda = 4l$$

la résonance :

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \Longrightarrow LC\omega^2 = 1$$

Soit : $$C = \frac{1}{L\omega^2}$$

La pulsation ω du circuit est celle de l'onde électromagnétique de longueur d'onde λ telle que : $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi V}{\lambda}$

d' où $\boxed{C = \frac{4l}{\pi^2 V^2 L}}$ AN : $\boxed{C = 91\,pF}$

2°) Variation de la capacité.

En appliquant le théorème des incertitudes relatives sur C, on obtient :

$$\frac{\Delta C}{C} = 2\frac{\Delta l}{l} \Longrightarrow \Delta C = 2C.\frac{\Delta l}{l}$$

AN : $\Delta C = 2 \times 91.10^{-12} \times \frac{1}{45} = 4.10^{-12}\,F$

d' où $\boxed{\Delta C = 4\,pF}$

LA PHYSIQUE AU SERVICE DE L'HOMME MODERNE.

(Konaté Cheickna)

EXERCICES ET PROBLEMES PROPOSES.

Problème 1.

1°) Un courant de haute fréquence se propage le long d'un fil conducteur. Sachant que la fréquence vaut 10^8 Hz ; quelle est la longueur d'onde correspondante si le conducteur est dans l'air, puis dans le verre (n = 1,5).

2°) Calculer la fréquence des ondes émises par une antenne « demi-onde » de 10 m de longueur.

Réponses : 1°) $\lambda_0 = 3\ m$; $\lambda = 2\ m$ **; 2°)** $15\ Hz$ **.**

....

Problème 2.

Une onde hertzienne plane a une longueur d'onde dans l'air égale à 2 m. Elle arrive à la surface de l'eau sous une incidence de 30°.

1°) Quelle est la direction de propagation de l'onde dans l'eau ?

2°) Quelle est la longueur d'onde dans l'eau ?

On donne : indice de l'eau : n = 1,3.

Réponses : 1°) 22,6° ; 2°) 1,54 m.

....

Problème 3.

Un condensateur variable et une bobine de résistance R = 0,1 Ω et d'inductance L = 2.10^{-4} H, constitue un circuit oscillant. La capacité du condensateur est proportionnelle à l'angle θ de recouvrement des lames indiquée par un index. Le circuit accordé sur la longueur d'onde λ = 280 m d'un émetteur A, capte une puissance de 10^{-11} W et la position de l'index correspond à l'angle θ = 34°.

1°) Calculer la pulsation du courant induit, la capacité du condensateur et les valeurs efficaces de l'intensité et de la f.é.m. dans le circuit.

2°) De quel angle doit-on tourner l'index pour réduire au millième la puissance captée provenant de A ?

Réponses : 1°) $\omega = 6{,}732.10^6$ rad.s $^{-1}$; C = 110 pF ; I =10 μA ; E = 1 Mv.

2°) θ' = 36,8°.

....

CHAPITRE III : OPTIQUE ONDULATOIRE.

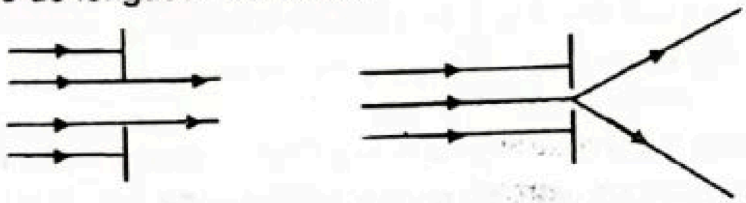
NATURE ONDULATOIRE DE LA LUMIERE.

L'essentiel du cours.

1 – DIFFRACTION DE LA LUMIERE.

Expérience.

Eclairons un trou de diamètre d réglable à l'aide d'une source de lumière monochromatique de longueur d'onde λ .



– Si d > λ , on observe un faisceau cylindrique (parallèle).

– Si d $\leq \lambda$, on observe un faisceau divergent : **c'est le phénomène de diffraction.**

2 – INTERFERENCES LUMINEUSES.

2.1 – Définition. On appelle interférences lumineuses la superposition de deux ondes lumineuses issues d'une même source (sources cohérentes).

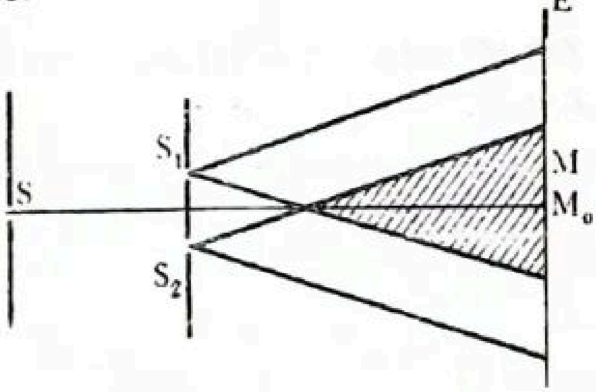
Remarque.

Deux sources lumineuses cohérentes S_1 et S_2 s'obtiennent par dédoublement d'une source lumineuse unique S.

2.2 – Expérience de Young.

Eclairons deux fentes S_1 et S_2 avec une source S de lumière monochromatique de longueur d'onde λ.

Chacune des fentes S_1 et S_2 diffracte la lumière émise par S. Dans la région commune aux deux faisceaux diffractés, on observe des bandes alternativement brillantes et obscures, parallèles et équidistantes appelées franges d'interférences.



Interprétation du phénomène.

L'éclairement d'un point M de la zone d'interférence dépend de la longueur d'onde λ et des trajets d_1 et d_2 suivis par lumière pour aller de S à M en passant par S_1 et S_2. La différence entre les deux trajets est la différence de marche :

$$\boxed{\Delta = d_2 - d_1}$$

– Si $\Delta = k.\lambda$, $(k \in Z)$: les deux ondes arrivent en phase au point M. L'interférence est constructive et l'éclairement est maximal : M se situe sur une frange brillante.

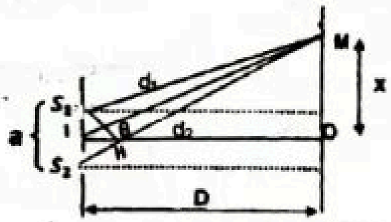
– Si $\Delta = (2k+1)\,\frac{\lambda}{2}$, $(k \in Z)$: les deux ondes arrivent en opposition de phase au point M. L'interférence est destructive et l'éclairement est nul : M se situe sur une frange noire.

2.3 – Expression de la différence de marche.

D'après le théorème de Pythagore :

$$d_1^2 = D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$$

$$d_1^2 = D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$



Donc : $d_2^2 - d_1^2 = 2ax$

Soit : $(d_2 + d_1)(d_2 - d_1) = 2ax$

Comme $a \ll D$ et $x \ll D$; alors $d_2 + d_1 \approx 2D$;

donc : $2D(d_2 - d_1) = 2ax$

D'où l'expression de la différence de marche :

$$\boxed{d_2 - d_1 = \frac{ax}{D}}$$

Autre méthode.

Dans les triangles S_1S_2H et IMO, on a :

$$\sin\theta = \frac{d_2 - d_1}{a} \quad \text{et} \quad \tan\theta = \frac{x}{D}$$

L'angle θ étant petit : $\sin\theta \approx \tan\theta \iff \frac{d_2 - d_1}{a} = \frac{x}{D}$

d'où $$\boxed{d_2 - d_1 = \frac{ax}{D}}$$

2.4 – Position des franges brillantes et obscures.

* Les franges brillantes sont telles que :

$$d_2 - d_1 = k.\lambda \iff \frac{ax}{D} = k.\lambda \implies \boxed{x = k\frac{\lambda.D}{a}} \quad (k \in Z)$$

* Les franges obscures ou sombres sont telles que :

$$d_2 - d_1 = .(2k+1)\frac{\lambda}{2} \iff \frac{ax}{D} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

d'où $\boxed{x = (2k+1)\frac{\lambda.D}{2a}}$ $(k \in Z)$.

2.5 – Interfrange.

On appelle interfrange la distance qui sépare le milieu de deux franges consécutives de même nature.

$$i = x_{k+1} - k_k \implies i = (k+1)\frac{\lambda.D}{a} - k\frac{\lambda.D}{a}$$

d'où $\boxed{i = \frac{\lambda.D}{a}}$

2.6 – Ordre d'interférence.

L'ordre d'interférence est le rapport de la différence de marche par la longueur d'onde.

$$P = \frac{d_2 - d_1}{\lambda} \implies \boxed{p = \frac{x}{i}}$$

L'ordre d'interférence permet de déterminer la nature d'une frange.

– Les franges brillantes ont des **ordres entiers** $(P = k)$ et $x = k.i$.

– Les franges sombres ont des **ordres demi-entiers** $(P = k + \frac{1}{2})$ et $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)i$

2.7 – Interférences en lumière bichromatique.

La source émet à présent deux radiations de longueurs λ_1 et λ_2.

Chacune des radiations donne son propre système de franges d'interférences ayant la même frange centrale brillante. On observe des coïncidences et des anti-coïncidences des franges brillantes des deux systèmes.

Pour les deux systèmes, les abscisses des franges brillantes sont respectivement :

$$x_1 = k_1.i_1 = k_1\frac{\lambda_1.D}{a} \quad \text{et} \quad x_2 = k_2.i_2 = k_2.\frac{\lambda_2.D}{a}$$

Il y a coïncidence lorsque : $x_1 = x_2 \implies k_1.\lambda_1 = k_2.\lambda_2$

d'où $\boxed{\frac{k_1}{k_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$

2.8 – Interférence en lumière blanche.

La lumière blanche est constituée d'une infinité de **lumières monochromatiques** ; chacune de celles-ci crée son propre système de frange d'interférence ayant la même frange centrale brillante blanche. De part et d'autre de cette frange centrale, on observe une série de franges brillantes colorées et des cannelures **(absence de certaines radiations dans le spectre de la lumière blanche).**

Les longueurs d'onde correspondant aux cannelures sont telles que :

$$d_2 - d_1 = .(2k+1)\frac{\lambda}{2} \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{2ax}{D}$$

Or, toute longueur d'onde du spectre visible est telle que :

$$0,4 \leq \lambda \leq 0,75\ \mu m$$

....

LA PHYSIQUE AU SERVICE DE L'HOMME MODERNE.

(Konaté Cheickna)

EXERCICES ET PROBLEMES RESOLUS

Problème 1.

Calculer la période, la fréquence, la célérité et la longueur d'onde d'une radiation se propageant dans un verre d'indice $n = 1,5$, sachant que dans le vide sa longueur d'onde est $\lambda_0 = 600$ nm.

Cette radiation jaune dans l'air, reste-elle jaune dans l'eau ?

Réponses : $T = 2.10^{-15}$ s ; $f = 5.10^{14}$ Hz ; $V = 2.10^5$ m.s^{-1} ; $\lambda = 400$ nm. Oui.

....

Problème 2.

On réalise l'expérience des trous de Young avec deux trous distants de 2 mm. L'interfrange est de 0,34 mm. En reculant l'écran de 50 cm, l'interfrange devient 0,51 mm. En déduire la longueur d'onde λ de la lumière utilisée.

Réponse : $\lambda = 680$ nm.

....

Problème 3.

On réalise l'expérience des trous d'Young avec deux trous distants de 1 mm, éclairés en lumière blanche (400 nm < λ < 750 nm). L'écran d'observation est à une distance D = 1 m de ces sources.

Calculer les longueurs d'onde qui correspondent aux cannelures (raies sombres) du spectre fourni par la lumière présente à 6 mm de la frange centrale.

Réponses : 706 nm ; 632 nm ; 571 nm ; 522 nm ; 450 nm ; 444 nm ; 414 nm.

....

Problème 4 :

On réalise une expérience d'interférences lumineuses en éclairant deux trous distants de a = 0,4 mm par une lumière monochromatique de longueur d'onde λ.

1°) Décrire le phénomène observé sur un écran E placé à D = 1 m des trous.

2°) a) Etablir l'expression de la différence de marche entre les rayons S_1M et S_2M en un point M de l'écran tel que OM = x.

b) En déduire l'expression de l'interfrange et calculer sa valeur sachant que $\lambda = 0,5$ µm.

c) A quelle distance de la frange centrale O, sont situés le centre P de la 4ème frange brillante et le centre Q de la 6ème frange sombre ?

Rép : 2°) a) $d_2 - d_1 = \frac{ax}{D}$; b) $i = \frac{\lambda . D}{a} = 1,25$ mm ; c) 5 mm et 6,88 mm.

....

Problème 5.

1°) Une source de lumière monochromatique S, éclaire deux fentes parallèles S_1 et S_2 dont la distance a = 1,5 mm. On observe des franges d'interférences sur un écran E parallèle au plan des fentes et situé à 2,50 m de celles -ci. La distance entre les franges d'ordre – 4 et
+ 6 est égale à 9,1 mm. Calculer la longueur d'onde λ de la radiation émise par la source ainsi que sa fréquence.

2°) Le dispositif est placé dans l'eau. Donner les valeurs de l'interfrange, de la longueur d'onde et de la fréquence des radiations.

Rép : 1°) λ = 0,546 µm ; 2°) f = $5{,}49.10^{14}$ Hz ;

2°) i' = 0,68 mm ; λ' = 0,41 µm ; f' = f.

....

Problème 6.

On réalise l'expérience de Young à l'aide de deux fentes étroites parallèles S_1 et S_2 distantes de 2 mm, éclairées par une source monochromatique de longueur d'onde λ = 0,50 µm. On observe des franges produites sur un écran placé à D = 1 m des fentes.

1°) Déterminer la distance à la frange centrale de la 5ème frange sombre.

2°) On remplace la source par une source qui émet simultanément deux radiations de longueur d'onde λ_1 = 0,42 µm et λ_2 = 0,63 µm.

a) Qu'observe – t – on sur l'écran ?

b) A quelle distance de la frange centrale se produit la première coïncidence des franges brillantes correspondant aux deux systèmes de franges ?

Réponses : 1°) x = 1,125 mm ; 2°) x = 0,63 mm..

....

Problème 7.

On considère le dispositif de Young pour lequel a = 1 mm et D = 2 m.

Le système est éclairé par une source monochromatique de longueur d'onde λ.

1°) Qu'appelle- t – on frange centrale ? Où se trouve –t-elle sur l'écran ?

2°) La distance qui sépare le milieu de la 7ème frange noire située d'un côté de la frange centrale du milieu de la 2ème frange noire située de l'autre côté est de 10,4 mm.

a) Définir et calculer l'interfrange.

b) En déduire la longueur d'onde de la radiation utilisée.

3°) La source émet à présent deux radiations dont l'une a pour longueur d'onde λ = 0,65 µm, 'l'autre ayant une longueur d'onde λ' inconnue.

On constate que la dixième frange brillante de λ et la treizième frange brillante de λ' comptées à partir de la frange centrale coïncident, la frange centrale étant numérotée zéro, calculer λ'.

Réponses : 2°) a) $i = 1,3$ mm ; b) $\lambda = 0,65$ µm ; 3°) $\lambda' = 0,50$ µm.

....

Problème 8.

Une source lumineuse monochromatique éclaire deux fentes parallèles S_1 et S_2 distantes de $a = 2$ mm. On observe des franges d'interférences sur un écran, parallèle au plan des fentes et placé à $D = 2$ m des fentes. **La distance entre deux franges consécutives est 0,25 mm.**

1°) Calculer la longueur d'onde de la lumière utilisée.

2°) Le dispositif est placé dans l'eau ; l'interfrange est-il modifié ?

Calculer le nouvel interfrange sachant que l'indice de l'eau vaut $n = \frac{4}{3}$.

Réponses : 1°) $\lambda = 0,5$ µm ; 2°) $i' = 0,38$ mm.

....

Problème 9.

On considère le dispositif des trous d'Young. La distance entre les sources secondaires S_1 et S_2 est $a = 0,80$ mm . La distance des sources à l'écran est $D = 2\ m$.

1°) Etablir l'expression donnant la différence de marche en un point M de l'écran d'abscisse x.

2°) Les sources émettent de la lumière blanche **composée de toutes les radiations** de longueur d'onde comprise entre 400 nm et 800 nm.

a) Qu'observe-t-on sur l'écran ?

b) On dispose la fente d'un spectroscope parallèlement aux franges à une distance $x = 15\ mm$ de la frange centrale. Quelles sont les longueurs d'onde des radiations éteintes ? Quel est l'aspect du spectre observé dans l'appareil ?

Réponses : 1°) $d_2 - d_1 = \frac{ax}{D}$;

b)

k	7	8	9	10	11	12	13	14
$\lambda(um)$	800	706	631,5	571	521,7	480	444	413,8

....

Problème 10.

On réalise un dispositif d'interférence donnant d'une source primaire S deux sources ponctuelles cohérentes S_1 et S_2.

1°) La source S émet une radiation de longueur d'onde $\lambda = 546\ nm$.

Les franges sont observées sur un écran translucide (E). Le point I milieu de S_1 et S_2 se projette en O sur l'écran. L'angle α sous lequel on voit S_1 S_2 du point O est 10^{-3} rad.

a) Calculer l'interfrange i .

b) A quelle distance du point O se trouve le milieu de la **neuvième frange brillante** ?

2°) La source S émet de la lumière blanche. On place la fente d'un **spectroscope** en M, à 2,5 mm de O. Quelles sont les radiations qui en M :

a) présentent une raie brillante ?

b) présentent une raie sombre ?

Les longueurs d'onde des radiations visibles sont comprises entre 400 nm et 800 nm.

Réponses : 1°) a) $i = 1,09$ mm ; b) $x \approx 9,8\ mm$;

2°) a) $625\ nm$; $416,6\ nm$; b) $500\ nm$.

....

Problème 11.

On utilise le dispositif des trous d'Young pour lequel $a = S_1S_2$ et $D = 1O$.

On éclaire d'abord le dispositif par une lumière jaune de longueur d'onde $\lambda_1 =$ $600\ nm$, on constate que la distance séparant le milieu de la frange centrale O d'ordre 0 du milieu de la frange brillante d'ordre 10 est 6 mm.

On éclaire ensuite avec une lumière rouge de longueur d'onde λ_2 .

La distance qui sépare le milieu de la frange centrale du milieu de la frange brillante d'ordre 12 est 8,64 mm.

1°) a) Montrer que ces mesures permettent de calculer λ_2 .

b) Calculer les fréquences N_1 et N_2 correspondant à ces deux radiations.

2°) On éclaire le dispositif simultanément avec les deux radiations précédentes.

a) Quel est l'aspect de la frange centrale ?

b) Décrire l'aspect de l'écran.

c) La largeur totale du champ d'interférence sur l'écran étant 18 mm, combien de fois trouvera-t-on sur l'écran le même aspect qu'au point O ?

Rép : 1°) $\lambda_2 = 720\ nm$; b) $N_1 = 5.10^{14} Hz$; $N_2 \approx 4,2.10^{14}\ Hz$: 2°) c) 5 fois.

....

LA PHYSIQUE AU SERVICE DE L'HOMME MODERNE.

(Konaté Cheickna)

CHAPITRE IV : PHYSIQUE ATOMIQUE ET NUCLEAIRE.

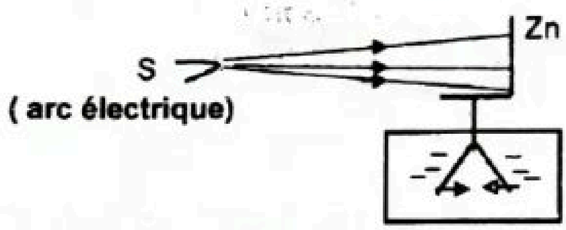
1 – EFFET PHOTOELECTRIQUE.

L'essentiel du cours.

1.1 – Mise en évidence et définition de l'effet photoélectrique.

Une plaque de zinc reliée au plateau d'un électroscope et éclairée par un arc électrique (**source de lumière riche en ultraviolet UV**)..

Si la plaque de zinc de l'électroscope est initialement chargée négativement, on **observe une décharge de l'électroscope : il y a expulsion d'électrons de la plaque sous l'action de la lumière.**



Ce phénomène est appelé **effet photoélectrique.** Il peut être observé avec d'autres métaux soumis à d'autres **rayonnements électromagnétiques.**

Définition . On appelle effet photoélectrique l'extraction d'électrons d'un métal convenablement éclairé.

1.2 – Hypothèse d'Einstein.

« La lumière de fréquence v, est un flux de particules relativistes appelées photon de mase et de charge nulles et possédant un quantum d'énergie »

Cette hypothèse fut reprise par PLANCK qui exprima la valeur de cette énergie.

$$\boxed{E = h\nu = h \cdot \frac{C}{\lambda}}$$

où h est la constante de Planck et C la célérité de la lumièré dans le vide.

$$\boxed{h = 6,62 \cdot 10^{-34} J.s\ ;\ \nu = \frac{C}{\lambda}\ ;\ C = 3 \cdot 10^{8} m \cdot s^{-1}}$$

1.3 – Interprétation de l'effet photoélectrique (processus énergétique).

L'énergie $E = h\nu$; transportée par le photon sert :

- d'une part, à extraire un électron, ce qui correspond à l'énergie d'extraction

$$W_0 = h\nu_0 .$$

- d'autre part , à communiquer à cet électron une énergie cinétique maximale :

$$E_{Cmax} = \frac{1}{2}\ mV^2_{max}.$$

Le bilan énergétique (conservation de l'énergie) s'écrit :

$$E = W_0 + E_{Cmax} \Longrightarrow E_{Cmax} = W - W_0$$

d'où $$\boxed{E_{Cmax} = h(\nu - \nu_0) = hC\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)}$$

On en déduit la vitesse maximale d'émission des électrons :

$$\frac{1}{2} m V_{max}^2 = hC\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right) \Longrightarrow \boxed{V_{max} = \sqrt{\frac{2hC}{m}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)}}$$

1.4 – Condition de l'effet photoélectrique.

L'effet photoélectrique ne se produit que si :

$$W \geq W_0 \Longrightarrow h\nu \geq h\nu_0 \quad ; \quad \text{d'où} \quad \boxed{\nu \geq \nu_0}$$

or : $\nu = \dfrac{C}{\lambda}$ et $\nu_0 = \dfrac{C}{\lambda_0}$;

alors : $\dfrac{C}{\lambda} \geq \dfrac{C}{\lambda_0} \Longrightarrow \boxed{\lambda \leq \lambda_0}$

Pour un métal pur, le seuil photoélectrique est caractérisé par la fréquence ν_0 ou par la longueur d'onde λ_0.

1.5 – Applications de l'effet photoélectrique.

L'effet photoélectrique a de nombreuses applications pratiques, on peut citer :

- la mise en marche des escaliers roulants ;
- l'ouverture automatique des portes ;
- le dénombrement d'objets dans les édifices commerciaux ;
- le cinéma sonore ;
- l'électrification de certains lieux publics (panneaux solaires) ;
- le déclenchement des signaux d'alarme.

****

** 2 – NIVEAUX D'ENERGIE DANS LES ATOMES. (TSM).

L'essentiel de cours.

2.1 – SPECTRE D'EMISSION ET SPECTRE D'ABSORPTION.

Un spectre lumineux est l'ensemble des radiations monochromatiques obtenues en dispersant une lumière à l'aide d'un prisme ou d'un réseau.

– Spectre d'émission : il s'agit du spectre de la lumière émise par une substance qui a reçu de l'énergie.

– Spectre d'absorption : il constitue aux raies noires du spectre de la lumière blanche qui a traversé une substance.

Pour un atome, les raies colorées du spectre d'émission correspondent aux raies noires du spectre d'absorption. Ces spectres sont caractéristiques de l'atome considéré ; ils peuvent servir à l'identifier.

2.2 – NIVEAUX D'ENERGIE D'UN ATOME.

L'énergie d'un atome ne peut prendre que certaines valeurs : on dit qu'elle est quantifiée (hypothèse de Bohr). Les états correspondant à ces valeurs particulières portent le nom de niveaux d'énergie de l'atome.

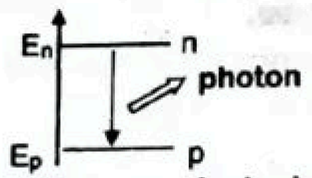
Le passage d'un niveau d'énergie à un autre est appelé transition électronique.

Lors des transitions électroniques un photon est émis ou absorbé.

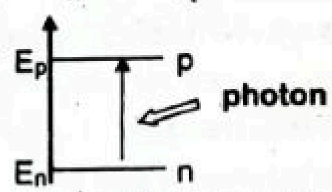
Lors de l'émission ou de l'absorption d'un photon, l'atome passe du niveau d'énergie E_n au niveau d'énergie E_p :

– pour une émission : $E_p < E_n$ et $E_n - E_p = h\nu_{np}$, ; (n > p);

– pour une absorption : $E_p > E_n$ et $E_p - E_n = h\nu_{np}$, (p > n).



Transition par émission



Transition par absorption.

NB : Ne sont absorbés que les photons dont l'énergie correspond exactement à une transition possible entre deux niveaux d'énergie de l'atome.

Pour un atome dans son état fondamental, si $E = h\nu > E_i$ (énergie d'ionisation) le photon est absorbé et l'atome est ionisé ; l'électron expulsé possède l'excès 'd'énergie sous forme d'énergie cinétique.

2.3 – POSTULATS DE BOHR.

- Les variations d'énergie de l'atome sont quantifiées.
- L'atome ne peut exister que dans certains états bien définis caractérisés par un niveau d'énergie.
- Un photon de fréquence ν_{np} est émis lorsque l'atome effectue une transition entre deux niveaux d'énergie E_n et E_p tels que :

$$\boxed{E_n - E_p = h\nu_{np}} \quad (E_n > E_p).$$

2.4 – NIVEAUX D'ENERGIE DE L'ATOME D'HYDROGENE.

2.4 .1 – Niveaux d'énergie.

Les différents niveaux d'énergie quantifiée de l'atome d'hydrogène sont donnés par la relation :

$$\boxed{E_n = -\frac{E_0}{n^2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{E_0 = 13{,}6 \text{ eV} = 2{,}18.10^{-18} \text{ J}}$$

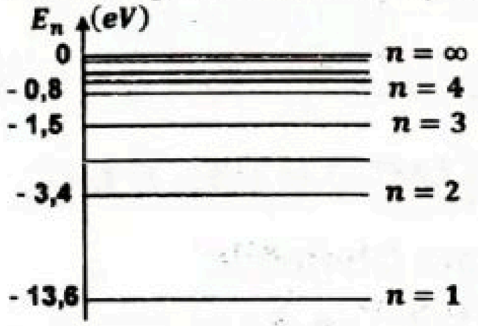
où n est le numéro de la couche occupée par l'électron (**nombre quantique principal).**

– $n = 1$, $E_1 = -E_0 = -13{,}6$ eV : l'atome est dans l'état fondamental.

– $n > 1$, $-13{,}6 < E_n < 0$: l'atome est dans un état excité.

– Si $n \rightarrow \infty$, $E_\infty = 0$: l'atome est à l'état ionisé.

D'où le diagramme d'énergie de l'atome d'hydrogène :



On appelle énergie d'ionisation, l'énergie minimale qu'il faut fournir à l'atome pris dans son fondamental pour provoquer son ionisation.

$$H \longrightarrow H^+ + e^- .$$

$$\boxed{E_i = -E_1 = 13{,}6\ eV}$$

Si $E = h\nu > E_i$, le photon est absorbé et l'atome est ionisé ; l'électron expulsé possède l'excès 'd'énergie sous forme d'énergie cinétique.

2.4.2 – Série de raies.

Une série de raies est constituées par l'ensemble des radiations émises par l'atome excité lorsqu'il revient à un état stationnaire donné (fondamental ou excité).

Pour l'hydrogène, on définit plusieurs séries auxquelles sont attribués les noms des chercheurs qui ont participé à leur étude :

– série de Lyman : transition d'un état excité caractérisée par $n \geq 2$ à $n = 1$;

– série de Balmer : transition d'un état excité caractérisée par $n \geq 3$ à $n = 2$;

– série de Paschen : transition d'un état excité caractérisée par $n \geq 4$ à $n = 3$;

– série de Brackett : transition d'un état excité caractérisée par $n \geq 5$ à $n = 4$.

Dans une série la raie la plus grande longueur d'onde correspond à la transition de p = n+1 à n et la raie la plus courte longueur d'onde (raie limite) à la transition de p = ∞ à n.

2.3.4 – Equation de Rydberg.

D'après les postulats de Bohr : $E_n - E_p = h\nu_{n,p} \Longrightarrow -\frac{13,6}{n^2} + \frac{13,6}{p^2} = \frac{hC}{\lambda_{np}}$

d'où $$\boxed{\frac{1}{\lambda_{np}} = R_H\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right)} \quad (n > p).$$

où $R_H = \frac{E_0}{hC}$, est la constante de Rydberg : $\boxed{R_H \approx 1,096.10^7\ m^{-1}}$

....

LA PHYSIQUE AU SERVICE DE L'HOMME MODERNE.

(Konaté Cheickna)

3 – NOYAU ATOMIQUE

L'essentiel du cours

3.1 – Constitution du noyau.

Le noyau d'un atome encore appelé nucléide est constitué de Z protons et de N neutrons. On note : $^{A}_{Z}X$.

Où x est le symbole chimique de l'élément correspondant.

Le nombre de masse ou nombre de nucléons est la somme :

$$\boxed{A = Z + N}$$

3.2 – Masse et dimension du noyau.

La masse d'un noyau est la différence de la masse de l'atome et celle des Z électrons : $m = M - Zm_e$

Comme $m_e << m_p$; alors $Zm_e << m_p$;

d'où $\boxed{m \approx M}$

La masse du noyau est donc voisine de celle de l'atome.

Le noyau d'un atome est assimilable à une sphère de rayon :

$$\boxed{R = R_0 \cdot A^{\frac{1}{3}}}$$

ou $R_0 = 1,2\ fm$, est le rayon du noyau de l'atome d'hydrogène $(1\ fm = 10^{-15} m)$.

3.3 – Isotopes et isobares.

– On appelle isotopes les nucléides ayant même nombre de charges mais de nombre de masse différent.

Exemples : $^{1}_{1}H$, $^{2}_{1}H$, $^{3}_{1}H$; $^{12}_{6}C$, $^{14}_{6}C$; $^{234}_{92}U$, $^{235}_{92}U$, $^{238}_{92}U$.

– On appelle isobare les nucléides ayant même nombre de masse mais de nombre de nombre de charges différent.

Exemples : $^{14}_{6}C$, $^{14}_{7}N$.

3.4 – Défaut de masse et énergie de liaison.

a) Défaut de masse. On appelle défaut de masse la différence entre la somme des masses des constituants et la masse du noyau.

$$\boxed{\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m}$$

b) Relation d'Einstein.

Toute perte de masse correspond à une perte d'énergie et inversement.

L'énergie de masse est donnée par la relation d'Einstein :

$$\Delta E = \Delta m C^2$$

où $C = 3 \cdot 10^8 \ m \cdot s^{-1}$, est la célérité de la lumière dans le vide.

c) Energie de liaison. On appelle énergie de liaison, l'énergie qu'il faut fournir au noyau initialement au repos pour le dissocier en nucléons isolés également au repos.

D'après la relation d'Einstein:

$$\boxed{E_l = \Delta m C^2 = [Zm_p + (A - Z)m_n - m].C^2}$$

Pour caractériser la stabilité des noyaux, on définit l'énergie de liaison par nucléon :

$$\boxed{\frac{E_l}{A} = [\![Zm_p + (A - Z)m_n - m]\!].\frac{C^2}{A}}$$

Le noyau est d'autant plus stable que son énergie de liaison par nucléon est grande.

3.5 – Unité de masse atomique.

Par définition, l'unité de masse atomique est le $\frac{1}{12}$ de la masse d'un atome de carbone 12.

On a : $1\,u = \frac{1}{12} m_C = \frac{1}{12} \times 12/\mathcal{N} = 1/\mathcal{N}$ (g)

où $\mathcal{N} = 6{,}02.10^{23}$ mol $^{-1}$ désigne le nombre d'Avogadro.

D'où $1\ u = 1{,}66.10^{-27}$ kg = 931,5 Mev/C^2.

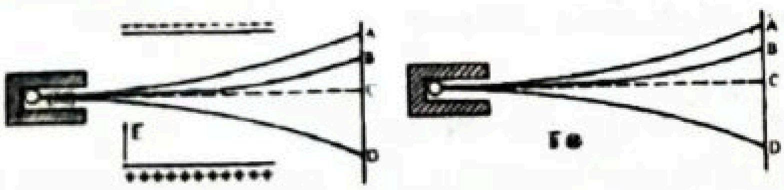
L'énergie s'exprime alors en mégaélectronvolt (Mev) :

1 Mev = $1{,}6.10^{-13}$ J (1 Mev = 10^6 ev).

4 – LES REACTIONS NUCLEAIRES SPONTANEES LA RADIOACTIVITE.

4.1 – Composition, nature et propriétés des rayonnements radioactifs.

Les émissions radioactives se composent de quatre rayonnements : trois sont déviés par les champs électrique et magnétique appelés α, β^- et β^+ et l'autre non dévié que l'on appelle γ.



* **Particule α :** ce sont des noyaux d'hélium ^4_2He, émises avec une vitesse de l'ordre de 20000 km/s (non relativiste), très ionisant et peu pénétrant une feuille de papier les arrête.
* **Particule β^- :** ce sont des électrons $^0_{-1}e$.
* **Particules β^+ :** ce sont des positrons $^0_{+1}e$ (antiparticule de l'électron).

Les particules β^- et β^+ sont émises avec des vitesses de l'ordre de 280000 km/s (relativistes) ; elles sont moins ionisantes mais beaucoup plus pénétrantes et peuvent traverser une plaque d'aluminium de 7 mm d'épaisseur.

* **Rayonnement γ :** est un rayonnement électromagnétique de courte longueur d'onde. Très pénétrant et peut traverser une plaque de plomb de 20 cm d'épaisseur avec une vitesse de 300000 km/s.

Particule	Nature	Vitesse d'émission	Energie cinétique	propriétés
α	Noyau d'hélium ^4_2He	De l'ordre de 20 000 km/s	De l'ordre de quelques Mev	Particules légères très ionisante, peu pénétrantes une feuille de papier les arrete
β^-	Electron $^0_{-1}e$	De l'ordre de 280 000 km/s	De l'ordre du Mev	Plus légères que les particules α, moins ionisantes plus pénétrantes peuvent traverser une plaque d'aluminium de 7 mm d'épaisseur
β^+	Positron $^0_{+1}e$	Identique à celle de β^-	Identique à celle de β^-	Identiques à celles de β^-
γ	Rayonnement électromagnétique de courte longueur d'onde.	300 000 km/s	–	Très pénétrant, capable de traverser une plaque de plomb de 20 cm d'épaisseur.

4.2- Lois de conservation.

Toutes les réactions nucléaires obéissent à quatre lois de conservation :

– conservation du nombre de charges ;
– conservation du nombre de nucléons (ou de masse) ;
– conservation de la quantité de mouvement ;
– conservation de l'énergie.

4.3 –Définition et différents types de la radioactivité.

La radioactivité est la propriété spécifique d'un noyau de se transformer en un autre en émettant de particules et de l'énergie.

Suivant la nature de la particule émise, on distingue trois types de désintégrations radioactives : **α , β⁻** et **β⁺** elles sont souvent accompagnées de l'émission de photon γ.

a) Radioactivité α : c'est une réaction nucléaire au cours de laquelle il y a émission d'un noyau d'hélium $^{4}_{2}He$.

L'équation-bilan de la réaction nucléaire s'écrit :

$$\boxed{^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{A-4}_{Z-2}Y}$$

Exemple : $^{210}_{84}Po \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{206}_{82}Pb.$

La radioactivité α est le fait des noyaux lourds (A > 200).

b) Radioactivité β^- : c'est une réaction nucléaire au cours de laquelle il y a émission d'un électron.

L'équation-bilan de la réaction nucléaire s'écrit :

$$\boxed{^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{0}_{-1}e + {}_{Z+1}^{A}Y + {}^{0}_{0}\overline{\nu}}$$

Exemple : $^{210}_{83}Bi \longrightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{210}_{84}Po + {}^{0}_{0}\overline{\nu}$

c) Radioactivité β^+ : c'est une réaction nucléaire au cours de laquelle il y a émission d'un positon $_{+1}^{0}e$.

L'équation-bilan de la réaction s'écrit :

$$\boxed{^{A}_{Z}X \longrightarrow {}_{+1}^{0}e + {}_{Z-1}^{A}Y + {}^{0}_{0}\nu}$$

Exemple : $^{30}_{15}P \longrightarrow {}_{+1}^{0}e + {}^{30}_{14}Si + {}^{0}_{0}\nu$

Remarque :

Le neutrino $^{0}_{0}\nu$ et l'antineutrino $^{0}_{0}\overline{\nu}$ sont des particules de masses et de charges nulles, mais, qui ne sont pas de photons (**Pauli**).

d) Désexcitation γ : c'est l'émission d'un photon lors du retour d'un noyau de l'état excité à l'état stable.

$$\boxed{^{A}_{Z}X^{*} \longrightarrow {}^{A}_{Z}X + \gamma}$$

où $^{A}_{Z}X^{*}$ est le noyau dans un état excité.

4.3- Loi de décroissance radioactive.

On note N_0 le nombre initial de noyaux radioactifs à la date t = 0, N le nombre de ces noyaux à la date t et N + dN leur nombre à la date t + dt.

Le nombre de noyaux désintégrés pendant le temps dt vaut :

$$dN = -\lambda N dt \iff \frac{dN}{N} = -\lambda dt \implies \int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt$$

Soit : $\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t \implies \boxed{N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}}$

où λ est la constante de désintégrations radioactives.

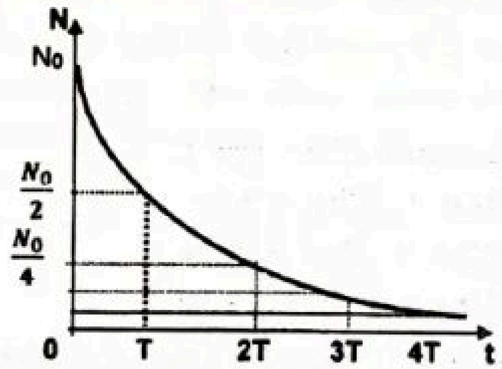
4.4 - Période radioactive ou demi-vie.

On appelle période d'un nucléide radioactif, le temps au bout duquel la moitié des noyaux initialement présents dans un échantillon se désintègrent.

A la date t = T : $N = \frac{N_0}{2}$;

alors : $\frac{N_0}{2} = N_0\, e^{-\lambda T} \implies \ln 2 = \lambda T$, d'où $\boxed{T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}}$

On en déduit la courbe de décroissance radioactive :



4.5- Activité d'une source radioactive.

L'activité d'une source est le nombre de désintégrations qui s'y produit par unité de temps.

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N \implies A = \lambda N_0 . e^{-\lambda t}$$

d'où $\boxed{A = A_0 \cdot e^{-\lambda t}}$

L'unité de l'activité est le Becquerel (Bq) ou désintégration par seconde.

On utilise aussi le Curie (Ci).

$\boxed{1\ \text{Ci} = 3{,}70.10^{10}\ \text{Bq}}$

4.6 – Familles radioactives.

Une famille radioactive est l'ensemble des noyaux issus d'un même **noyau père.**
Les éléments naturels radioactifs sont classés en quatre familles :
familles de ; actinium (${}^{227}_{89}Ac$), thorium (${}^{232}_{90}Th$), uranium-radium (${}^{238}_{92}U$) et neptunium (${}^{237}_{93}Np$).

5 – LES REACTIONS NUCLEAIRES PROVOQUEES.

Il existe trois types de réactions nucléaires provoquées :
la transmutation, la fission et la fusion nucléaires.

5.1- La transmutation : est une réaction nucléaire au cours de laquelle un noyau se transforme en un autre lorsqu'il entre en collision avec une particule.

Exemples : ${}^{4}_{2}He + {}^{14}_{7}N \longrightarrow {}^{17}_{8}O + {}^{1}_{1}H$ (*Rutherford en* 1919)

$${}^{27}_{13}Al + {}^{4}_{2}He \longrightarrow {}^{30}_{15}P + {}^{1}_{0}n \quad (\textit{Irène et F Jolio Curie en } 1934)$$

$${}^{30}_{15}P \longrightarrow {}^{30}_{14}Si + {}^{0}_{+1}e.$$

5.2- La fission : est une réaction nucléaire au cours de laquelle un neutron lent «casse » un noyau lourd « fissile » en formant deux noyaux plus légers en libérant de l'énergie et d'autres neutrons.

$$\boxed{{}^{A}_{Z}X + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{A_1}_{Z_1}X_1 + {}^{A_2}_{Z_2}X_2 + x.{}^{1}_{0}n} \quad (A_1 < A \text{ et } A_2 < A).$$

Le seul nucléide naturel fissile est l'uranium 235 (${}^{235}_{92}U$).

Exemples : ${}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{148}_{57}La + {}^{85}_{35}Br + 3\,{}^{1}_{0}n$

$${}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{140}_{54}Xe + {}^{94}_{38}Sr + 2\,{}^{1}_{0}n$$

$${}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{141}_{56}Ba + {}^{92}_{36}Kr + 3\,{}^{1}_{0}n$$

La fission est une réaction en chaîne, c'est-à-dire qui s'auto entretient.
La fission est utilisée dans les réacteurs nucléaires et dans la bombe A communément appelée bombe atomique.

5.3- La fusion : est une réaction nucléaire au cours de laquelle deux noyaux légers s'unissent pour former un noyau plus lourd en libérant de l'énergie.

$${}^{A_1}_{Z_1}X_1 + {}^{A_2}_{Z_2}X_2 \longrightarrow {}^{A}_{Z}X + x.{}^{a}_{b}p$$

où ${}^{a}_{b}p$ est une particule quelconque (${}^{0}_{-1}e$, ${}^{0}_{+1}e$, ${}^{1}_{0}n$ ...).
Les réactions de fusion sont des réactions thermonucléaires (10^8 K).
La fusion est utilisée dans la bombe H (bombe à hydrogène).
.Dans la bombe H, il y a fusion entre le deutérium ${}^{2}_{1}H$ et le tritium ${}^{3}_{1}H$:

$${}^{2}_{1}H + {}^{3}_{1}H \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{1}_{0}n$$

La fusion dégage plus d'énergie que la fission.

L'énergie libérée par le soleil d'une manière générale par les étoiles provient des réactions de fusion.

6 – DANGER ET PROTECTION CONTRE LES RADIONUCLEIDES.

6.1 – Danger des radionucléides.

La radioactivité est dangereuse bien qu'on la mette à **profit dans des nombreuses applications.** Les particules α, β et les photons γ émis peuvent traverser la matière vivante et inerte en provoquant des ionisations et des excitations d'atomes entrainant des réactions biochimiques anormales et des altérations morphologiques peuvent être observées. Une irradiation massive peut même entrainer la mort.

6.2 – Protection contre les radionucléides.

Les techniques de protection contre les radionucléides sont :

– l'utilisation des parois de plomb dans les centrales nucléaires pour isoler les substances radioactives ;

– le port des sabots et manteaux en plomb dans les laboratoires de physique nucléaire ;

– le contrôle régulier du taux d'irradiation afin qu'il ne dépasse pas les limites permises.

7 – UTILISATION DES RADIONUCLEIDES.

Parmi les nombreuses utilisations des radionucléides, citons :

- Les traceurs radioactifs ;
- La radiothérapie ;
- La datation par le carbone 14.

....

LA PHYSIQUE AU SERVICE DE L'HOMME MODERNE.

(Konaté Cheickna)

EXERCICES ET PROBLEMES RESOLUS

Problème 1 : (Eurin-gié ; page 383 ; Exo 22.13).

Le réacteur d'un sous-marin nucléaire fonctionne à l'aide d'uranium enrichi en isotope $^{235}_{92}U$ (l'isotope $^{238}_{92}U$ n'étant pas fissile).

1°) Quelle est la structure des nucléides cités ?

2°) Les noyaux d'uranium 235 subissent différentes fissions, parmi lesquelles l'une des plus fréquentes est la suivante :

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \longrightarrow ^{94}_{38}Sr + ^{140}_{54}Xe + 2^{1}_{0}n$$

a) Calculer les énergies de liaison par nucléon des nucléides suivants : $^{235}_{92}U$, $^{94}_{38}Sr$, $^{140}_{54}Xe$.

b) En déduire l'énergie libérée par cette réaction nucléaire.

3°) On suppose que toutes les fissions sont identiques à la précédente.

Calculer la masse d'uranium consommée en 30 jours par le sous-marin, dont le réacteur fournit une puissance moyenne de 25 MW. Données :

$m(^{235}_{92}U) = 234,9942\,u$; $m(^{94}_{38}Sr) = 93,9154\,u$; $m(^{140}_{54}Xe) = 139,9252\,u$;
$m_p = 238\,Mev/C^2$; $m_n = 239\,Mev/C^2$.

....**Résolution**..

1°) Structure des nucléides $^{235}_{92}U$ et $^{238}_{92}U$.

- $^{235}_{92}U \Longrightarrow \begin{cases} A = 235 \\ Z = 92 \end{cases}$

Ce noyau est composé de Z = 92 protons et de :
N = A – Z = 235 – 92 = 143 neutrons.

$\boxed{Z = 92\ protons}$ et $\boxed{N = 143\ neutrons}$

- $^{238}_{92}U \Longrightarrow \begin{cases} A = 238 \\ Z = 92 \end{cases}$

Ce noyau est composé de Z = 92 protons et de :
N = A – Z = 238 – 92 = 146 neutrons.

$\boxed{Z = 92\ protons}$ et $\boxed{N = 146\ neutrons}$

2°) a) Energies de liaisons par nucléon des nucléides $^{235}_{92}U$, $^{94}_{38}Sr$, $^{140}_{54}Xe$.

L'énergie de liaison par nucléon est définie par :

$$E = [\![Zm_p + (A - Z)m_n - m]\!] \cdot \frac{C^2}{A}$$

On trouve : $\boxed{E_U = 7,59\ Mev}$ $\boxed{E_{Sr} = 8,39\ Mev}$ $\boxed{E_{Xe} = 8,07\ Mev}$

b) Energie libérée par la réaction.

1ère méthode.

Réalisons le diagramme énergétique :

$$\boxed{{}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n} \xrightarrow{\Delta E} \boxed{{}^{94}_{38}Sr + {}^{140}_{54}Xe + 2{}^{1}_{0}n}$$

$$\boxed{{}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n} \xrightarrow{E_{l(U)}} \boxed{236\ nucléons} \xrightarrow{-(E_{l(Sr)} + E_{l(Xe)})} \boxed{{}^{94}_{38}Sr + {}^{140}_{54}Xe + 2{}^{1}_{0}n}$$

D'après la loi de Hess :

$$\mathbf{E} = E_{l(U)} - \left(E_{l(Sr)} + E_{l(Xe)}\right) = 1783,65 - (788,66 + 1129,8) = -134,81\ \text{Mev}$$

d' où $\boxed{\Delta E \approx -135\ Mev = -2,16.10^{-11}\ J}$

2ème méthode.

L'énergie libérée par la réaction est donnée par la relation :

$$\boxed{\Delta E = \sum E_{l(réactifs)} - \sum E_{l(produits)}}$$

3°) Masse d'Uranium consommée en 30 jours.

1ère méthode.

En 30 jours, l'énergie fournie par le réacteur est :

$$W = P.t = 25.10^{6} \times 30 \times 86400 = 6,48.10^{13} J$$

Le nombre de fissions réalisé ou nombre de noyaux d'uranium consommé est :

$$N = \frac{W}{\Delta E} = \frac{6,48.10^{13}}{2,16.10^{-11}} = 3.10^{24}\ fissions$$

La masse d'Uranium consommée en 30 jours par le sous- marin est donc :

$$m = N \cdot m({}^{235}_{92}U) = 3.10^{24} \times 234,9942 \times 1,66.10^{-27} = 1,17.kg$$

d' où $\boxed{m \approx 1,2\ kg}$

2ème méthode.

Le nombre de noyaux d'uranium consommés ou nombre de fissions réalisées est :

$$N = \mathcal{N}_A . n = \mathcal{N}_A . \frac{m}{M}$$

Donc : $W = N.\Delta E = \mathcal{N}.\frac{m}{M}\Delta E \Longrightarrow m = 1/\mathcal{N}\ \frac{M.W}{\Delta E}$

d' où $$\boxed{m = 1/\mathcal{N}\ \frac{M.P.t}{\Delta E}}$$

AN : $m = \frac{235.10^{-3} \times 25.10^{6} \times 30 \times 86400}{6{,}02.10^{23} \times 2{,}16.10^{-11}} = 1,17\ kg \Rightarrow \boxed{m \approx 1,2\ kg}$

....

Problème 2 : (Eurin-gié ; page 383 ; Exo 22.14).

On considère la réaction nucléaire de fission :

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \longrightarrow ^{95}_{42}Mo + ^{139}_{57}La + 2^{1}_{0}n + 7^{0}_{-1}e$$

Les énergies de liaison par nucléon sont respectivement :

7,7 Mev ; 8,6 Mev ; 7,75 Mev.

1°) Exprimer la masse d'un nucléide en fonction de son énergie de liaison.

2°) Etablir la relation entre l'énergie libérée au cours de la fission et la variation de masse du système.

3°) Calculer l'énergie cédée par cette réaction nucléaire.

....**Résolution** ....

1°) Masse d'un nucléide en fonction de son énergie de liaison.

La réaction nucléaire de fission est :

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \longrightarrow ^{95}_{42}Mo + ^{139}_{57}La + 2^{1}_{0}n + 7^{0}_{-1}e$$

L'énergie de liaison d'un nucléide $^{A}_{Z}X$ est

$$E_l = [\![Zm_p + (A-Z)m_n - m]\!]\ C^2 \Longrightarrow m = Zm_p + (A-Z)m_n - \frac{E_l}{C^2}$$

On en déduit les masses des nucléides :

- $m_U = Zm_p + (A-Z)m_n - \frac{E_{l(U)}}{C^2}$
- $m_{Mo} = Zm_p + (A-Z)m_n - \frac{E_{l(Mo)}}{C^2}$
- $m_{La} = Zm_p + (A-Z)m_n - \frac{E_{l(La)}}{C^2}$

2°) Relation entre l'énergie de liaison et la variation de masse du système.

D'après la relation d'Einstein : $\Delta E = \Delta m.C^2$

Or : $\Delta m = \sum m_f - \sum m_i \Longrightarrow \Delta m = m_{Mo} + m_{La} + m_n + 7m_e - m_U$

d' où $$\boxed{\Delta E = (m_{Mo} + m_{La} + m_n + 7m_e - m_U)C^2}$$

3°) Energie cédée par la réaction nucléaire.

En remplaçant les masses des nucléides par leurs expressions en fonction des énergies de liaison, on obtient :

$$\boxed{\Delta E = E_{l(U)} - E_{l(Mo)} - E_{l(La)} + 7(m_p + m_e - m_n).C^2}$$

$$\Delta E = 7,7 \times 235 - 8,6 \times 95 - 7,75 \times 139 + 7(938 + 0,51 - 939,57) \times 9.10^{16}$$

d' où $\boxed{\Delta E = -90,2\ Mev}$

....

Problème 3 : (Eurin-gié ; page 384 ; Exo 22.20).

Sous l'action d'un neutron incident, d'énergie cinétique faible, le nucléide $^{235}_{92}U$ éclate en produisant deux nucléides stables $^{91}_{40}Zr$ et $^{142}_{58}Ce$ par exemple, ainsi que des neutrons et des électrons.

1°) Ecrire la réaction nucléaire. On rappellera les lois de conservation utilisées.

2°) L'énergie de liaison par nucléon est donnée par le tableau suivant :

nucléide	$^{235}_{92}U$	$^{91}_{40}Zr$	$^{142}_{58}Ce$
énergie (Mev)	7,70	8,80	8,45

a) Rappeler la définition de l'énergie de liaison.

b) En négligeant l'énergie cinétique du neutron incident, Calculer en Mev, l'énergie libérée lors de la fission d'un noyau $^{235}_{92}U$.

3°) Calculer l'énergie cédée par cette réaction nucléaire lorsqu'un kilogramme d'uranium 235 se désintègre.

....**Résolution** ....

1°) Equation de la réaction nucléaire.

$$^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{91}_{40}Zr + {}^{142}_{58}Ce + x{}^{1}_{0}n + y{}^{0}_{-1}e$$

Déterminons x et y à l'aide des lois de conservation :

- Conservation du nombre de masse :

$$235 + 1 = 91 + 142 + x \Longrightarrow x = 3$$

- Conservation du nombre de charges :

$$92 = 40 + 58 - y \Longrightarrow y = 6$$

D'où la réaction nucléaire :

$$\boxed{^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{91}_{40}Zr + {}^{142}_{58}Ce + 3\,{}^{1}_{0}n + 6{}^{0}_{-1}e}$$

2°) a) Définition de l'énergie de liaison.

On appelle énergie, l'énergie qu'il faut fournir au noyau initialement au repos pour le dissocier en nucléons séparés également au repos.

$$\boxed{E_l = [\![Zm_p + (A-Z)m_n - m]\!]\, C^2}$$

b) Energie libérée par la fission de $^{235}_{92}U$.

D'après la relation d'Einstein : $\Delta E = \Delta m. C^2$

En procédant de la même manière que l'exercice 22.14, on obtient :

$$\boxed{\Delta E = E_{l(U)} - E_{l(Zr)} - E_{l(Ce)} + 6(m_p + m_e - m_n). C^2}$$

d' où $\boxed{\Delta E = -195,9\ Mev}$

NB: $\Delta E < 0$, la réaction est exoénergétique.

3°) Energie cédée par la fission de 1 kg d'uranium $^{235}_{92}U$.

Le nombre de fissions ou nombre de noyau de $^{235}_{92}U$ consommé est :

$$N = \mathcal{N}.n = \mathcal{N}.\frac{m}{M}$$

L'énergie correspondante est alors :

$$E = N.\Delta E \Longrightarrow \boxed{E = \mathcal{N}.\frac{m}{M}\Delta E}$$

AN : $E = 6,02.10^{23} \times \frac{1}{235.10^{-3}} \times 195,9 \times .1,6.10^{-13} = 8.10^{-13}\,J$

d' où $\boxed{E = 8.10^{-13}\,J}$

....

Problème 4 : (Eurin-gié ; page 400 ; Exo 23.22).

Une ampoule contient 0,2 cm³ de radon ^{222}Rn sous 0,1 bar et à la température de 30°C. **Ce gaz monoatomique est considéré comme parfait ; sa période est** 3,8 jours.

1°) Quelle est l'activité initiale de cette ampoule ?

2°) Que devient cette activité six mois plus tard ?

Données : constante des gaz parfaits R = 8,32 S.I ; 1 bar =10^5 Pa

....**Résolution** ....

1°) Activité initiale de l'ampoule.

L'activité initiale est : $A_0 = \lambda . N_0$

or : $T = \frac{ln2}{\lambda} \Longrightarrow \lambda = \frac{ln2}{T}$ et $N_0 = \mathcal{N} . n_0$.

D'après la loi des gaz parfaits :

$$PV = n_0 R.T \Longrightarrow n_0 = \frac{P.V}{R.T}$$

d' où $$\boxed{A_0 = \frac{ln2}{\lambda} \frac{P.V}{R.T} \mathcal{N}}$$

AN : $A_0 = \frac{0,693}{3,8 \times 86400} \times \frac{0,1.10^5 \times 0,2.10^{-6}}{R.T} \times 6,02.10^{23} = 10^{12}\ Bq$

d' où $$\boxed{A_0 = 10^{12}\ Bq}$$

2°) Activité de l'ampoule à la date t.

Par définition : $A = -\frac{dN}{dt} = \lambda . N$;

or : $N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0\, e^{-\frac{ln2}{T} t}$ (loi de décroissance) ;

d' où $$\boxed{A = A_0 e^{-\frac{ln2}{T} t}} \qquad \boxed{A = 5,5.10^{-3}\ Bq}$$

....

Problème 5 : (Eurin-gié ; page 401 ; Exo 23.23).

On considère la famille radioactive dont le nucléide père est l'uranium $^{238}_{92}U$ et le nucléide final stable, le plomb $^{206}_{82}Pb$.

1°) Le radium $^{226}_{88}Ra$ est un nucléide de cette famille qui, à la de **désintégrations** de type α ou β^- ,conduit au plomb $^{206}_{82}Pb$.

a) Donner l'équation générale de la radioactivité α . En utilisant les éléments de cette famille notés dans le tableau ci-après, écrire l'équation d'une désintégration de ce type.

$^{226}_{88}Ra$	$^{222}_{86}Rn$	$^{210}_{84}Po$	$^{206}_{82}Pb$

b) Donner l'équation générale de la radioactivité β^-.

c) Quels sont les nombres de désintégrations de type α et de type β^- permettant de passer du noyau $^{226}_{88}Ra$ au noyau $^{206}_{82}Pb$?

2°) On considère une masse m_0 de radon à une date choisie comme origine des temps. La période de radon est de 3,825 jours.

a) Déterminer la masse de radon restant au bout de 1, 2...n périodes.

En déduire la masse de radon désintégrée au bout de n périodes.

b) Calculer les durées nécessaire pour désintégrer les 4/9 et les 9/10 de la masse m_0 de radon.

....Résolution ....

1°) a) Equation générale de la radioactivité α.

$$\boxed{{}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{A-4}_{Z-2}Y}$$

$$\boxed{{}^{226}_{88}Ra \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{2224}_{86}Rn}$$

b) Equation générale de la radioactivité β^-.

$$\boxed{{}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{0}_{-1}e + {}_{Z+1}^{A}Y + {}^{0}_{0}\overline{\nu}}$$

c) Nombre de désintégrations de type α et de type β⁻.

Soit x le nombre de désintégration de type α, et y celui de type β^-.

L'équation globale de la désintégration s'écrit :

$${}^{226}_{88}Ra \longrightarrow {}^{206}_{82}Pb + x\,{}^{4}_{2}He + y\,{}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\overline{\nu}$$

Déterminons x et y à l'aide des lois de conservation :

- conservation du nombre de nucléons :

$$226 = 206 + 4x \qquad x = \frac{226-206}{4} = 5$$

$$x = 5$$

-conservation du nombre de charges :

$$88 = 82 + 2x - y \qquad y = 82 + 2(5) - 88 = 4$$

$$y = 4$$

D'où l'équation-bilan de la réaction nucléaire :

$$\boxed{{}^{226}_{88}Ra \longrightarrow {}^{206}_{82}Pb + 5\,{}^{4}_{2}He + 4\,{}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\overline{\nu}}$$

2°) a) Masse de radon après 1, 2, ... puis n périodes.

A l'instant $t = 0$: $m = m_0$

A l'instant $t = T$: $m = \frac{m_0}{2}$

A l'instant $t = 2T$: $m = \frac{m_0}{2^2}$

Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

t	0	T	2T	nT
masse de radon restant	m_0	$\frac{1}{2}m_0$	$\frac{1}{2^2}m_0$	$\frac{1}{2^n}m_0$

La masse de radon désintégré après n période est donc :

$$m' = m_0 - \frac{m_0}{2^n} = \left(1-\frac{1}{2^n}\right)m_0 \Longrightarrow \boxed{m' = \left(1-\frac{1}{2^n}\right)m_0}$$

b) Durées de désintégrations :

D'après la loi de décroissance, la masse de restant à la date t est :

$$m = m_0 e^{-\lambda t}$$

La masse de radon désintégré est :

$$m' = m_0 - m = m_0(1-e^{-\lambda t}) \qquad 1-e^{-\lambda t} = \frac{m'}{m_0}$$

d' où $\boxed{t = \frac{T}{ln2}\, ln\left(1-\frac{m'}{m_0}\right)}$

AN : • $\frac{m'}{m_0} = \frac{4}{9}$ $\boxed{t = 3,25\,jours}$

• $\frac{m'}{m_0} = \frac{9}{10}$ $\boxed{t = 12,71\,jours}$

....

Problème 6 : (Eurin-gié ; page 421; Exo 24.11).

Une centrale nucléaire classique, utilisant la fission de l'uranium 235, fournit une puissance électrique moyenne de 900 MW. **La rendement de la transformation** d'énergie nucléaire en énergie électrique est de 30%.

1°) Un atome d'uranium 235 libère environ 200 Mev, transformés entièrement en chaleur. Quelle masse d'uranium 235 faut-il pour faire fonctionner cette centrale durant une année ?

2°) La combustion d'une tonne de pétrole libère une énergie de 42.10^9 J. Quelle masse de pétrole faudrait-il utiliser pour produire une énergie équivalente avec le même rendement ?

....**Résolution** ....

1°) Masse d'uranium pour faire fonctionner la centrale en une année.

En une année de fonctionnement, l'énergie fournie par la centrale est :

$$W = P.t = 900.10^6 \times 365 \times 86400 = 2,84.10^{16}\,J$$

L'énergie nucléaire produite par la la centrale est :

$$r = \frac{W}{E} \Longrightarrow E = \frac{W}{r} = \frac{2{,}84.10^{16}}{30} \times 100 = 9{,}46.10^{16}\,J$$

Le nombre de fissions réalisées ou nombre de noyaux d'uranium consommés est :

$$N = \frac{E}{\Delta E}$$

D'autre part : $N = \mathcal{N}.\,n = \mathcal{N}.\,\frac{m}{M}$

donc : $\mathcal{N}.\,\frac{m}{M} = \frac{E}{\Delta E} \Longrightarrow \boxed{m = M \times \frac{E}{\Delta E} \times 1/\mathcal{N}.}$

AN : $m = 235 \times \frac{9{,}46.10^{16}}{200 \times 1{,}6.10^{-13}} \times \frac{1}{6{,}02.10^{23}} = 1{,}15.\,10^{3}\,kg$

d' où $\boxed{m = 1{,}15\,t}$

2°) Masse de pétrole pour réaliser la même opération :

Le pouvoir calorifique d'un combustible liquide est par définition :

$$P_C = \frac{E}{m_P} \Longrightarrow \boxed{m_P = \frac{E}{P_C}}$$

AN : $m_P = \frac{9{,}46.10^{16}}{4{,}2.10^{10}} = 2{,}25.\,10^{6}\,t$; d' où $\boxed{m_P \approx 2{,}3.\,10^{6}\,t}$

Conclusion.

La fission de 1,15 tonnes d'uranium fournit autant d'énergie que la combustion de $2{,}3.10^{6}$ tonnes de pétrole.

....

Problème 7 : (Eurin-gié ; page 421; Exo 24.16).

La découverte de la radioactivité artificielle a permis d'associer à chaque élément un certain nombre de radio-isotope possédant les mêmes propriétés **chimiques que l'élément stable. Ces radioéléments sont souvent utilisés en médecine.**

1°) On obtient du sodium 24 en bombardant par des neutrons du sodium ${}^{23}_{11}Na$.

Ecrire la réaction de formation du sodium 24

2°) Le sodium 24 est radioactif par émission β^- et sa période est de 15 h.

Ecrire l'équation de désintégration du sodium 24.

3°) a) On injecte dans le sang d'un individu 10 cm^3 d'une solution contenant initialement du sodium 24 à la concentration de 10^{-3} mol.l $^{-1}$. **Quel est le nombre de moles de sodium 24 introduite dans le sang ? Combien en rester-t-il au bout** de 6 h ?

b) Au bout de 6 h, on prélève 10 cm^3 de sang du même individu. On trouve alors $1{,}5.10^{-8}$ mol de sodium 24. En supposant que le sodium 24 est reparti uniformément, calculer le volume sanguin.

……………………………………**Résolution** ……………………………………

1°) Réaction de formation de sodium 24.

Compte tenu des lois de conservation, la réaction nucléaire s'écrit :

$$\boxed{{}^{23}_{11}Na + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{24}_{11}Na}$$

2°) Equation de désintégration β^-:

La désintégration β^-du sodium 24 s'écrit :

$${}^{24}_{11}Na \longrightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{A}_{Z}X$$

Ecrivons les lois de conservation pour déterminer le noyau fils.

* conservation du nombre de nucléons :

$$24 = A + 0 \Longrightarrow A = 24$$

* conservation du nombre de charges :

$$11 = Z - 1 \Longrightarrow Z = 12$$

Le noyau fils est un isotope de magnésium ${}^{24}_{12}Mg$:

$$\boxed{{}^{24}_{11}Na \longrightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{24}_{12}Mg}$$

3°) Nombre de moles de sodium 24 introduit dans le sang.

On a : $n_0 = C.v \quad 10^{-3} \times 10.10^{-3} = 10^{-5} mol$

d' où $\boxed{n_0 = 10^{-5}\ mol}$

Nombre de moles restant au bout de t = 6 h.

D'après la loi de décroissance : $N = N_0 e^{-\lambda t}$

Or : $N = \mathcal{N}\, n$ et $N_0 = \mathcal{N}\, n_0$;

alors : $n = n_0\, e^{-\lambda t}$

On a : $T = \frac{ln2}{\lambda} \Longrightarrow \lambda = \frac{ln2}{T}$

d' où $\boxed{n = n_0 e^{-\frac{ln2}{T}t}}$

AN : $n = 10^{-5} \times e^{-\frac{ln2}{15} \times 6} = 7,58.10^{-6}\ mol$

d' où $\boxed{n = 7,58.10^{-6}\ mol}$

b) Volume sanguin.

Le nombre de moles est proportionnel au volume :

$$\frac{V}{n} = \frac{V_P}{n_P} \Longrightarrow \boxed{V = \frac{n}{n_P} V_P}$$

AN : $V = \frac{7,58.10^{-6}}{1,5.10^{-8}} \times 10 = 5,05.10^{3}\ cm^{3}$; d' où $\boxed{V \approx 5\,l}$

LA PHYSIQUE AU SERVICE DE L'HOMME MODERNE.

(Konaté Cheickna)

EXERCICES ET PROBLEMES PROPOSES.

EFFET PHOTOELECTRIQUE.

Problème 1 . (Extrait du Bac, SE, 1997).

Deux radiations de longueur d'onde $\lambda = 0{,}490\ \mu m$ et $\lambda' = 0{,}588\ \mu m$ éclairent une cellule photoélectrique au potassium. Le travail d'extraction d'un électron du potassium est $W_0 = 2{,}25$ eV.

1°) Ces deux radiations permettent-elles l'émission d'électrons par la plaque de potassium ? Justifier votre réponse. Calculer la longueur d'onde de la radiation correspondant au seuil photoélectrique du potassium.

2°) Quelle est la vitesse maximale d'émission des électrons de la cathode dans le cas où celle-ci est éclairée par la lumière de longueur d'onde $\lambda = 0{,}490\ \mu m$?

3°) La différence de potentielle entre l'anode et la cathode de la cellule photoélectrique est U = 60 V. Calculer la vitesse maximale des électrons arrivant sur l'anode. On donne :

$h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s; $C = 3.10^{8}$ m.s $^{-1}$; $m_e = 9.10^{-31}$ kg ; $e = 1{,}6.10^{-19}$ C.

Réponses : 1°) $\lambda_0 = 0{,}552\ \mu m$; 2°) $V_{max} = 318$ km.s^{-1}.

....

Problème 2.

L'énergie d'extraction de la cathode d'une cellule photoélectrique à vide est $W_0 = 1{,}90$ eV.

1°) Calculer la longueur d'onde λ_0 du seuil photoélectrique.

2°) La cathode est éclairée simultanément par trois radiations de longueur d'onde : $\lambda_1 = 0{,}70\ \mu m$; $\lambda_2 = 0{,}60\ \mu m$; $\lambda_3 = 0{,}50\ \mu m$

Quelles sont celles qui provoquent l'émission photoélectrique ? Pourquoi ?

3°) La cellule est éclairée uniquement par la radiation de longueur d'onde λ_3.

a) Quelle est la vitesse maximale d'émission d'un électron ?

b) Quelle est la vitesse d'arrivée sur l'anode d'un électron émis avec la vitesse de $4{,}5.10^{5}$ m.s $^{-1}$, la tension entre l'anode et la cathode étant $U_{AC} = 5$ V.

Réponses : 1°) $\lambda_0 = 0{,}65\ \mu m$; 2°) λ_2 et λ_3 ; 3°) a) $V_{max} = 4{,}5.10^{5}$ m/s

b) $V = 1{,}4\ .10^{6}$ m.s $^{-1}$.

....

Problème 3.

Soit une cellule photo-électrique en césium dont l'énergie d'extraction d'un électron est $W_0 = 1{,}88$ eV. On l'éclaire avec une radiation monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0{,}496\ \mu m$.

1°) Cette radiation peut-elle produire l'effet photo-électrique ? Justifier.

2°) Calculer l'énergie cinétique maximale des électrons à la sortie du métal ainsi que leur vitesse. Données : constante de Planck : $h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s ;

masse de l'électron : $m = 9{,}11.10^{-31}$ kg.

Réponses : 1°) $\lambda 0 = 0{,}660$ µm > $\lambda \Longrightarrow$ effet photo-électrique possible ;

2°) $E_{Cmax} = 9{,}96.10^{-20}$ J = 0,623 eV ; $V_{max} = 4{,}68.10^5$ m.s^{-1} .

....

Problème 4.***

Une source S de lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0{,}6$ µm qui émet dans toutes les directions une puissance P = 10 W. **Elle éclaire la cathode** d'une cellule photoélectrique constituée d'un métal dont l'énergie d'extraction est égale à 1,8 eV..

1°) La cathode d'aire π cm^2 est assimilée à une portion de sphère de rayon R = 1 m et de centre S.

a) Calculer la puissance lumineuse reçue par la cathode.

b) Quelle est le nombre de photons reçus par la cellule en une seconde ?

2°) Faire le bilan énergétique de l'interaction entre un photon et un atome. En déduire la vitesse maximale d'un électron émis par la cathode.

On donne : $h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s; $C = 3.10^8$ m.s^{-1}; $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg.

Réponses : 1°) a) $P = 2{,}5.10^{-4}$ W = 0,25 mW ; b) $N = 7{,}55.10^{14}$;

2°) $V = 3{,}07.10^5$ m/s.

....

NIVEAUX D'ENRGIE DANS LES ATOMES. (TSM)

Problème 5 :

Les différents **niveaux d'énergie** E_n **de l'atome d'hydrogène sont donnés par la formule :**

$$E = -\frac{13{,}6}{n^2}$$

où E_n est exprimée en eV et n est un nombre entier supérieur ou égal à 1.

a) Faire le schéma classique du diagramme de ces niveaux d'énergie (on ne tracera que les 6 premiers niveaux).

b) Quelle est l'énergie minimale, en eV et en J, qu'il faut fournir à un atome d'hydrogène pour l'ioniser ?

c) Quelle est la plus courte longueur d'onde λ_1 des différentes raies spectrales que peut émettre l'atome d'hydrogène lorsqu'il est excité ?

Réponses : b) E = 13,6 eV = $2{,}18.10^{-18}$ J ; c) $\lambda_1 = 9{,}13.10^{-8}$ m.

....

Problème 6 :

On donne les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène :

$$E = -\frac{13,6}{n^2}\ ;\quad \begin{cases} n \in N^* \\ E_0 = 13,6\ eV \end{cases}$$

1°) Etablir la relation : $\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$;

permettant de calculer la longueur d'onde des raies de la série de Balmer, sachant qu'elle correspond à des transitions d'un état excité n ≥ 3 à n = 2.

2°) Calculer la valeur de la constante de Rydberg. Préciser son unité.

3°) Calculer, en micromètre (μm), les longueurs d'onde de la série de Balmer située dans les radiations visibles.

4°) Déterminer la longueur d'onde limite de la série de Balmer (correspondant à la longueur d'onde la plus petite possible).

Réponses : 1°) $\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$; 2°) $R_H \approx 1,095.10^7\ m^{-1}$;

3°)

n	3	4	5	6
λ(μm)	0,658	0,488	0,435	0,411

4°) λ_{min} = 0,366 μm

NOYAUX ATOMIQUES.
REACTIONS NUCLEAIRES.

Problème 7.

L'uranium 238 se transforme en radium 226 après avoir subi successivement x désintégrations α et y désintégrations β^-. Déterminer x et y.

Réponses : x = 3 et y = 2.

....

Problème 8.

Le radium $^{226}_{88}Ra$ par une série de désintégrations α et β^- conduit au plomb $^{206}_{82}Pb$. Quels sont les nombres de désintégrations du type α et du type β^- qui permettent de passer du noyau $^{226}_{88}Ra$ au noyau $^{206}_{82}Pb$.

Réponses : x = 5 et y = 4..

....

Problème 9.

Le noyau de bismuth $^{212}_{83}Bi$ se désintègre par radioactivité α , en donnant un noyau de thallium (Tl).

1°) Ecrire l'équation-bilan de la désintégration en indiquant les nombres de masse et de charge et les lois utilisées.

2°) Calculer en en Mev, l'énergie totale libérée par la réaction nucléaire.

3°) La constante radioactive du bismuth 210 est $\lambda = 5{,}77.10^{-4}\ s^{-1}$. Calculer la période radioactive T.

4°) Un échantillon contient, à l'instant t = 0, 1 mg de bismuth 210. Déterminer l'activité de cet échantillon aux instants t = 0 et t = T. On donne :

$m(^{212}_{83}Bi) = 211{,}94571\ u$; $m(Tl) = 207{,}93754\ u$; $m(^{4}_{2}He) = 4{,}0015\ u$.

$1\ u = 1{,}66.10^{-27}\ kg = 931{,}5\ Mev/c^2$.

Réponses : 1°) $^{212}_{83}Bi \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{208}_{81}Tl$; 2°) $\Delta E = 6{,}213$ Mev.

3°) T = 20 min ; 4°) $A_0 = 1{,}65.10^{15}$ Bq ; $A = 8{,}25.10^{14}$ Bq.

....

Problème 10.

Le polonium $^{210}_{84}Po$ se désintègre spontanément en donnant un noyau de **plomb et une particule** α

1°) Ecrire l'équation bilan de la désintégration

2°) Calculer en joules et en Mev l'énergie libérée par la désintégration d'un noyau de polonium 210.

3°) En supposant les particules émises non relativistes, déterminer les vitesses maximales d'émission de la particule α et du noyau de plomb.

L'hypothèse non relativiste est-elle vérifiée ?

On donne : $m(^{210}_{84}Po) = 210{,}04821\ u$; $m(Pb) = 206{,}03853\ u$; $m_\alpha = 4{,}00387\ u$.

Réponses : 1°) $^{210}_{84}Po \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{206}_{82}Pb$;

2°) $\Delta E = 8{,}73\ .10^{-13}\ J = 5{,}45$ Mev ;

3°) $V_\alpha = 1{,}6.10^{7}\ m.s^{-1}$; $V_{Pb} = 3{,}1.10^{5}\ m.s^{-1}$.

....

Problème 11.

On considère la réaction nucléaire spontanée :

– $^{139}_{55}Cs \xrightarrow{\beta^-} {}^{y}_{x}Ba$;

de demi-vie T = 7 minutes.

1°) Déterminer x et y en précisant les lois utilisées.

2°) Calculer la constante radioactive λ de la réaction nucléaire.

3°) Sachant qu'à l'instant initial il y a $N_0 = 8.10^6$ noyaux de $^{139}_{55}Cs$, au bout de quel temps t en restera-t-il $\frac{N_0}{100}$?

Réponses : 1°) x = 56 ; y = 139 ; 2°) $\lambda = 9{,}9.10^{-2}\ min^{-1}$; 3°) t = 46 min30 s.

....

Problème 12.

Un noyau de polonium ${}^{210}_{84}Po$ émet une particule α lors d'une désintégration.

Sa période ou demi-vie est T = 138 jours.

1°) Ecrire l'équation de cette désintégration en indiquant les règles utilisées.

2°) A la date t = 0, on dispose d'un échantillon pur de polonium 210 de masse $m_0 = 10^{-2}$ g.

a) Déterminer le nombre N_0 d'atomes de polonium présents dans cet échantillon ainsi que son activité A_0 à cet instant initial.

b) Quelle masse m de polonium subsiste- t- il dans l'échantillon à la date t = 30 jours ?

Réponses : 1°) ${}^{210}_{84}Po \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{206}_{82}Pb$; 2°) a) $N_0 = 2,87.10^{19}$;

$A_0 = \frac{\ln 2}{T}.N_0 = 1,67.10^{12}$ Bq ; b) $m = 8,6.10^{-3}$ g.

....

Problème 13 : (Bac, SM, Guinée, session 1995).

1°) Un noyau de béryllium 10 a une masse de 10,0113 u. Le béryllium 10 est noté ${}^{10}_{4}Be$. La masse d'un neutron est $m_n = 1,00866$ u ; la masse d'un proton est $m_P = 1,00727$ u.

1)) Rappeler la définition de l'unité de masse atomique u.

2°) Calculer, en Mev, l'énergie moyenne de liaison par nucléon du béryllium 10.

3°) Le béryllium 10 se désintègre par radioactivité β^- avec une période (ou demi-vie) de $2,5.10^6$ ans.

a) Ecrire la réaction nucléaire qui se produit sachant qu'il se forme du Bore.

b) Quelle est, par rapport au nombre initial de noyaux, le pourcentage de noyau de béryllium 10 désintégré au bout d'un an ?

N.B : Si a est petit devant un, alors : $1 - e^{-a} \approx a$.

Réponses : 2°) $E \approx 6,5$ Mev / nucléon ; 3°) a) ${}^{10}_{4}Be \longrightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{10}_{5}B$;

b) $\%N \approx 2,8.10^{-5}$ %

....

Problème 14.

Le potassium ${}^{40}_{19}K$ est radioactif, il se désintègre pour donner de l'argon ${}^{40}_{18}Ar$.

1°) Ecrire l'équation de désintégration.

2°) La période de désintégration du nucléide ${}^{40}_{19}K$ est $T = 1,5.10^9$ ans. Calculer la constante radioactive.

3°) Pour déterminer l'âge des cailloux lunaires rapportés par les astronautes d'Apollo XI, on a mesuré les quantités relatives de potassium 40 (radioactif) et de son produit de décomposition, l'argon 40, qui est en général retenu par la

roche. Un échantillon de 1 g contenait $82.10^{-4}\ cm^3$ d'argon 40 et $1,66.10^{-6}\ g$ de potassium 40. Les volumes de gaz sont mesurés dans les conditions normales. On rappelle que l'argon est un gaz monoatomique.
Quel est l'âge de ces cailloux ?

Réponses : 1°) $^{40}_{19}K \longrightarrow {}^{40}_{18}Ar + {}^{0}_{+1}e + {}^{0}_{0}\nu$; **2°)** $\lambda = 4,6.10^{-10}\ an^{-1}$;

3°) $t = \frac{T}{\ln 2}\ln\left(1 + \frac{m_{Ar}}{m_K}\right) = 4,9.10^{9}\ ans \approx 5.10^{9}\ ans$.

....

Problème 15.

Le réacteur d'un sous-marin nucléaire fonctionne à l'aide d'uranium enrichi en isotope $^{235}_{92}U$ (l'isotope $^{238}_{92}U$ n'étant pas fissile).

1°) Quelle est la structure des nucléides cités ?

2°) Les noyaux d'uranium 235 subissent différentes fissions, parmi lesquelles l'une des plus fréquentes est la suivante :

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \longrightarrow {}^{94}_{38}\mathrm{Sr} + {}^{140}_{54}\mathrm{Xe} + 2.{}^{1}_{0}\mathrm{n}$$

a) Calculer les énergies de liaison par nucléon des nucléides suivants :

$^{235}_{92}U$, $^{94}_{38}Sr$, $^{140}_{54}Xe$.

b) En déduire l'énergie libérée par cette réaction nucléaire.

3°) On suppose que toutes les fissions sont identiques à la précédente.
Calculer la masse d'uranium consommée en 30 jours par le sous-marin, dont le réacteur fournit une puissance moyenne de 25 MW. On donne :

$\mathrm{m}(^{235}_{92}\mathrm{U}) = 234,9942\ \mathrm{u}$; $\mathrm{m}(^{94}_{38}\mathrm{Sr}) = 93,9154\ \mathrm{u}$; $\mathrm{m}(^{140}_{54}\mathrm{Xe}) = 139,9252\ \mathrm{u}$;

$\mathrm{m_P} = 238,28\ \mathrm{Mev/C^2}$; $\mathrm{m_n} = 939,57\ \mathrm{Mev/C^2}$; $1\ \mathrm{u} = 931,5\ \mathrm{Mev/C^2}$.

Rép : 1°) $^{235}_{92}\mathrm{U} \Longrightarrow Z = 92$ et $N = 143$; $^{238}_{92}U \Longrightarrow Z = 92$ et $N = 146$;

2°) a) $E_U \approx 7,59\ Mev/nucléon$; $E_{Sr} \approx 8,39\ Mev/nucléon$;

$E_{Xe} \approx 8,07\ Mev/nucléon$;

b) $\Delta E \approx -135\ Me = -2,16.10^{-11}\ J$; **3°)** $m = 1,17\ kg \approx 1,2\ kg$.

....

Problème 16.

Sous l'action d'un neutron incident, d'énergie cinétique faible, le nucléide $^{235}_{92}\mathrm{U}$ éclate en produisant deux nucléides stables $^{91}_{40}\mathrm{Zr}$ et $^{142}_{58}\mathrm{Ce}$, ainsi que des neutrons et des électrons.

1°) Ecrire la réaction nucléaire. On rappellera les lois de conservation utilisées.

2°) L'énergie de liaison par nucléon est donnée par le tableau suivant :

nucléide	$^{235}_{92}\mathrm{U}$	$^{91}_{40}\mathrm{Zr}$	$^{142}_{58}\mathrm{Ce}$
énergie (Mev)	7,70	8,80	8,45

a) Rappeler la définition de l'énergie de liaison.

b) En négligeant l'énergie cinétique du neutron incident, calcul, en Mev, l'énergie libérée lors de la fission d'un noyau $^{235}_{92}\mathrm{U}$.

3°) Calculer l'énergie cédée par cette réaction nucléaire lorsqu'un kilogramme d'uranium 235 se désintègre. On donne :

$\mathbf{m_p = 238,28\ Mev/C^2}$; $\mathbf{m_n = 939,57\ Mev/C^2}$; $\mathbf{m_e = 0,51}\ Mev/C^2$.

Rép 1°) $^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \longrightarrow {}^{91}_{40}\mathrm{Zr} + {}^{142}_{58}\mathrm{Ce} + 3.{}^{1}_{0}\mathrm{n} + 6.{}^{0}_{-1}\mathrm{e}$.

2°) b) $\Delta E = E_U - E_{Zr} - E_{Ce} + 6(m_P + m_e - m_n).C^2 \approx -195,9\ Mev$;

3°) $E = 8.10^{13}\ J$.

....

Problème 17. (Extrait du Bac, SE, Guinée 2016).

On se propose de déterminer le volume sanguin d'un individu à l'aide d'un radioélément artificiel ; le sodium 24.

1°) On prépare le sodium 24 par bombardement du sodium 23 (Z = 11, A = 23) avec des neutrons. Ecrire l'équation-bilan de la formation du sodium 24.

2°) Le sodium 24 est radioactif β^- et sa période ou demi-vie est de 15 h. Ecrire l'équation de désintégration du sodium 24.

3°) On injecte par voie intraveineuse 10 cm³ d'une solution de concentration molaire volumique en sodium 24 égale à 10^{-3} mol.l⁻¹ . Quelle est la quantité de matière initiale du sodium 24 introduit dans le sang ? Quelle quantité en restera-t-il au bout de 7h30mini?

4°) Au bout de 7h30min, temps au bout duquel on peut considérer que le liquide injecté a diffusé uniformément dans tout le volume sanguin, on prélève 10 cm³ de sang. Un dosage permet d'établir la présence de $1,4.10^{-8}$ mol de sodium 24. Déduire de ce résultat le volume sanguin de cet individu.

Réponses : 1°) $^{23}_{11}Na + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{24}_{11}Na.$

2°) $^{24}_{11}Na \longrightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{24}_{12}Mg + {}^{0}_{0}\bar{\nu}$;

3°) $n_0 = 10^{-5}\ mol$; $n = 7,07.10^{-5}\ mol$; **4°)** $V = 5,05\ l \approx 5\ l$.

....

Problème 18. (Extrait du Bac, SM, Guinée 2009).

La désintégration radioactive du polonium $^{210}_{84}Po$ peut s'écrire :

$$^{210}_{84}Po \longrightarrow {}^{a}_{b}X + {}^{206}_{82}Pb$$

a) Déterminer a , b et x.

De quel type de radioactivité s'agit-il ?

b) Calculer en Mev, l'énergie libérée lors de la désintégration du noyau de polonium 210.

c) En supposant qu'il n'y a pas d'émission γ secondaire, calculer en Mev, l'énergie cinétique ainsi que la vitesse de la particule $^{a}_{b}X$ émise. On donne :

$m_{Po} = 210,0482\ u$; $m_{Pb} = 206,0385\ u$; $m_\alpha = 4,00150\ u$;

$1\,u = 931,5\ Mev/C^2$.

Réponses : a) $a = 4$; $b = 2$; ${}^{a}_{b}X = {}^{4}_{2}He$; **radioactivité** α.

$${}^{210}_{84}Po \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{206}_{82}Pb$$; **b)** $\Delta E = 7,64\ Mev$;

c) $E_{C\alpha} = \dfrac{m_{Pb}}{m_\alpha + m_{Pb}} \Delta E \approx 7,49\ Mev$; $V_\alpha = 1,89.10^{7} m.s^{-1}$

Problème 19.

Le réacteur d'un sous-marin nucléaire fonctionne à l'aide d'uranium enrichi en isotope ${}^{235}_{92}U$ (l'isotope ${}^{238}_{92}U$ n'est pas fissile).

1°) Quelle est la structure des nucléides cités ?

2°) Les noyaux d'uranium 235 subissent différentes fissions parmi lesquelles l'une des plus fréquentes est la suivantes :

$${}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{94}_{38}Sr + {}^{140}_{54}Xe + 2\,{}^{1}_{0}n$$

En supposant que toutes les fissions soient identiques à la précédente, calculer la masse d'uranium enrichi consommé en 30 jours par le sous-marin dont le réacteur fournit une puissance moyenne de 25 MW. On donne :

- masse d'un noyau d'uranium ${}^{235}_{92}U$: 235,0439 u ;
- masse d'un neutron isolé : 1,0086652 u ;
- masse d'un noyau de strontium ${}^{94}_{38}Sr$: 93,9154 u ;
- masse d'un noyau de xénon ${}^{140}_{54}Xe$: 139,9252 u ;

1 u = $1,67.10^{-27}$ kg ; c = 3.10^{8} m.s^{-1}.

Réponses : 1°) ${}^{235}_{92}U$: 92 protons et 143 neutrons ;

${}^{238}_{92}U$: 92 protons et 146 neutrons ; 2°) m ≈ 0,87 kg.

Problème 20.

Après avoir absorbé un neutron, l'uranium ${}^{235}_{92}U$ peut se fissionner pour donner des **noyaux de molybdène** ${}^{95}_{42}Mo$, de lanthane ${}^{139}_{57}$**La, des électrons et des neutrons.**

1°) Ecrire la réaction de fission correspondante.

2°) En négligeant la masse des électrons et en connaissant la masse des nucléides suivants (en u.m.a.) :

m(${}^{235}_{92}$U) = 235,04390 u ; m(${}^{95}_{42}Mo$) = 94,90584 u ;

m(${}^{139}_{57}$La,) = 138,90614 u ; m(${}^{1}_{0}n$) = 1,00866 u.

Calculer en Mev, l'énergie libérée par la fission d'un noyau d'uranium.

3°) **Dans une centrale nucléaire, un réacteur consomme** 1 kg d'uranium ${}^{235}_{92}$U par jour.

On admet que toutes les fissions sont identiques à la précédente. Quelle est la puissance électrique fournie par la centrale sachant que la transformation d'énergie nucléaire en énergie électrique est effectuée avec un rendement de 30% .

Réponses : 1°) $^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \longrightarrow ^{95}_{42}Mo + ^{139}_{57}La + 7\,^{0}_{-1}e + 2\,^{1}_{0}n$;

2°) E ≈ 209 Mev ; 3°) $\mathcal{P} \approx 297.10^6\ W = 297\ MW$.

....

BAC

RÉVISION GÉNÉRALE
CORRIGES-TYPES DES SUJETS DU BAC GUINÉEN DE 2016 A 2021

SUJETS

Sujet 1 : Bac, SE. 2016.

A – Théorie : 4 points.

Expliquer le phénomène de diffraction de la lumière.

B – Pratique : 16 points.

I – On se propose de déterminer le volume sanguin d'un individu à l'aide d'un radioélément artificiel ; le sodium 24.

1°) On prépare le sodium 24 par bombardement du sodium 23 (Z = 11, A = 23) avec des neutrons. Ecrire l'équation-bilan de la formation du sodium 24.

2°) Le sodium 24 est radioactif β^- et sa période ou demi-vie est de 15 h. Ecrire l'équation de désintégration du sodium 24.

3°) On injecte par voie intraveineuse 10 cm^3 d'une solution de concentration molaire volumique en sodium 24 égale à 10^{-3} $mol.l^{-1}$. Quelle est la quantité de matière initiale du sodium 24 introduit dans le sang ? Quelle quantité en restera-t-il au bout de 7h30mini?

4°) Au bout de 7h30min, temps au bout duquel on peut considérer que le liquide injecté a diffusé uniformément dans tout le volume sanguin, on prélève 10 cm^3 de sang. Un dosage permet d'établir la présence de $1,4.10^{-8}$ mol de sodium 24. Déduire de ce résultat le volume sanguin de cet individu.

II – On étudie le mouvement d'un mobile ponctuel sur un axe (O, i), les caractéristiques sont : accélération constante 4,1 $m.s^{-2}$; abscisse à la date t = 0, 1 m et vitesse à la date t = 0, – 3 $m.s^{-1}$.

1°) Quelle est la nature du mouvement ? Ecrire l'équation de la vitesse V(t) et l'équation horaire x(t).

2°) Déterminer les dates aux quelles le mobile passe par l'origine O. Quelles sont alors les vitesses correspondantes ?

3°) Au cours de son mouvement, le mobile change-t-il de sens de parcours ? Si oui, donner la date et la position correspondant à ce changement.

III – La largeur de la bande passante d'un circuit R.L.C. série est 100 Hz et la fréquence à la résonance 700 Hz.

1°) Quel est le facteur de qualité du circuit ?

2°) La tension efficace délivré par le générateur est 5 V. Quelle est la tension aux bornes du condensateur à la résonance d'intensité.

Sujet 2 : Bac, SM. 2016.

A – Théorie : 6 points.

Le radon $^{222}_{86}Rn$ est un nucléide de la famille radioactif de l'uranium, qui à la suite des désintégrations de type α et β^- conduit au plomb $^{206}_{82}Pb$.

a) Déterminer le nombre de désintégration de type α et de type β^- permettant de passer du noyau de Rn au noyau Pb.

b) On considère une masse m_0 de radon à une date choisie comme origine de temps. La période de radon est notée T. Déterminer la masse de radon restant au bout de 1, 2 ... n périodes. En déduire la masse de radon désintégré au bout de n périodes.

B – Pratique : 14 points.

I – On utilise un faisceau de lumière monochromatique de longueur d'onde λ pour réaliser une expérience d'interférences d'ondes lumineuses à l'aide du dispositif de Young.

Le faisceau issu de la source S est dirigé sur deux fentes très étroites S_1 et S_2 d'une plaque opaque distantes de a = 0,200 mm, on observe la figure d'interférences sur un écran situé à une distance D = 1,50 m derrière la plaque.

La position d'un point M sur l'écran est repérée par sa distance x au point O, point de l'écran situé à égale distance de S_1 et S_2.

1°) Rappeler les conditions qui permettent d'obtenir des interférences lumineuses. Sont-elles réalisées ici ?

2°) Faire le schéma du dispositif et indiquer sur le schéma la différence de marche Δ des rayons issus de S_1 et S_2 qui arrivent en M.

3°) Exprimer cette différence de marche en fonction de a, x et D.

4°) A quelle condition sur la différence de marche, le point M sera-t-il sur la 5ème frange brillante en partant de O.

5°) Le centre de la 5ème frange brillante se trouve à 34,7 mm. Déterminer la valeur de la longueur d'onde λ.

II – Une voiture de masse 800 kg roulant à la vitesse de 75,6 km/h aborde une route dont la pente est de 5% (5 m de dénivellation pour un parcours de 100 m). Le conducteur débraye le moteur en arrivant en A. L'ensemble des forces de frottement équivaut à une force unique, opposée à la vitesse, d'intensité constante 160 N. On prendra g = 10 u.SI.

1°) En appliquant le théorème du centre d'inertie, calculer l'accélération de la voiture.

2°) En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, calculer la longueur maximale parcourue.

3°) Quelle est la durée de cette montée ?

Sujet 3 : Bac, SM. 2017.

A – Théorie :

1°) Définir les termes suivants: famille radioactive, satellite géostationnaire.
2°) Définir l'effet photoélectrique et donner la condition de sa réalisation.

B – Pratique :

I – Une bobine de longueur l constituée de N spires de section S a une inductance L. Elle est parcourue par un courant dont l'intensité est donnée par $I = kt$ (k constante).

1°) Donner les caractéristiques du champ magnétique au centre de la bobine (considéré comme un solénoïde infiniment long).
2°) Etablir l'expression du flux propre d'induction à travers la bobine.
3°) En déduire l'expression de l'inductance en fonction des caractéristiques de la bobine. La calculer numériquement. :
l = 50 cm, S = 20 cm^2, N = 2000, k = 5,0 A/s.
4°) Quelle est la f.é.m. auto-induite dans la bobine ?
5°) La bobine ayant une résistance négligeable, quelle est la différence de potentiel à ses bornes ?
6°) Calculer l'énergie emmagasinée dans la bobine à l'instant t = 1,0 s.

II – Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont donner par :

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2}$$,(eV et n un entier non nul).

1°) Représenter les quatre premiers niveaux sur un diagramme (1 cm pour 1 eV).
2°) Calculer la longueur d'onde d'un photon capable de provoquer la transition de l'atome d'hydrogène de son niveau fondamental au niveau n = 3. Représenter cette transition sur le diagramme précédent.
3°) L'atome, de nouveau dans son état fondamental, absorbe un photon de longueur d'onde $8,5.10^{-8}$ m. Montrer que l'électron est arraché. Calculer son énergie cinétique (en eV) en négligeant celle du noyau. On donne :
$h = 6,62.10^{-34}$ J.s ; $C = 3.10^8$ m/s.

III – Une route reliant deux localités A et B présente des parties horizontales, des montés et des descentes. La distance AB = 78 km, et quand on marche dans le sens AB **la longueur des descentes vaut les** $\frac{7}{10}$ de la longueur des montés. Un cycliste, qui a une vitesse de 25 km/h en terrain horizontal, de 15 km/h en monté et de 30 km/h en descente, va de A à B et revient de B à A . Sachant que la différence du temps qu'il a mis pour faire ces deux trajets est de 24 minutes, on demande :

1°) les longueurs des parties horizontales, des montés et des descentes en allant de A à B ;
2°) les temps employés pour aller de A à B et de B à A.

Sujet 4 : Bac, SE. 2017.

A – Théorie :

1°) Enoncer le principe fondamental de la dynamique et donner la relation fondamentale de la dynamique (R.F.D.).

2°) Définir les termes suivants : interférences lumineuses, radioactivité, effet photoélectrique

3°) Comment peut-on mettre en évidence le phénomène d'induction électromagnétique ?

B – Pratique.

I – Le « bōrō d'enjaillement » est un jeu dangereux auquel s'adonnaient les élèves des collèges et lycées des années 2000. Ce jeu consistait pour le joueur à courir derrière un bus en mouvement, puis, lorsque qu'il estime être à bonne distance du véhicule, il saute pour s'y agripper. Il a alors réussi son jeu.

Un élève voulant jouer au « bōrō d'enjaillement » court à la vitesse de 8 m/s après un bus qui démarre avec une accélération de 2 m/s^2.

A cet instant, l'élève se trouve à une distance D = 18 m du bus et les deux mobiles ont la même, trajectoire rectiligne.

1°) La position de l'élève est considérée comme origine des espaces.

a) Déterminer les équations horaires de l'élève et du bus.

b) Quelle est la distance entre les deux mobiles à la date t = 2 s ?

c) Quelles sont la position et la vitesse du bus à la date t = 3 s ?

2°) On admet que l'élève réussit son jeu, si juste avant de sauter, il est séparé du bus par une distance inférieure ou égale à 1 m, si non il tombe.

Montrer que l'élève ne réussit pas son jeu.

II – Soit un dipôle RLC série, alimenté par une tension sinusoïdale

$$u(t) = U\sqrt{2}\cos\omega t.$$

1°) En posant $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$, établir l'équation du circuit $u(t)$.

2°) Etablir l'expression du déphasage φ de l'intensité par rapport à la tension et le calculer.

$U = 50{,}0\ V, N = 50\ Hz,\ L = 1\ H, r = 10{,}0\ \Omega, R = 300\ \Omega, C = 5{,}0.10^{-6}\ F.$

3°) Calculer l'impédance Z du dipôle.

4°) Calculer la valeur de l'intensité efficace I . En déduire l'expression de $i(t)$.

5°) Quelle est le déphasage de la tension instantanée aux bornes de la bobine par rapport à i(t). En déduire l'expression de u(t).

III – 1°) On éclaire la cathode au césium d'une cellule photoélectrique avec une lumière monochromatique de longueur d'onde 0,80 μm Le seuil photoélectrique du césium est 0,66 μm.

1°) Quelle sera l'indication d'un microampèremètre placé dans le circuit ? Expliquer pourquoi ?

2°) On utilise maintenant une radiation de longueur d'onde 0,30 μm.

a) Cette radiation est-elle visible ? Si non dans quel domaine se situe-t-elle ?

b) Quelle est l'énergie transportée par un photon ?

c) Quel travail minimal est nécessaire pour extraire un électron du césium sans lui communiquer de vitesse ?

d) Quelle est la vitesse maximale communiquée aux **électrons extraits du métal** ?

Sujet 5 : Bac, SM. 2018.

A – Théorie : (6 points).

1°) Démontrer que pour un mouvement rectiligne uniformément varié d'accélération a, les espaces parcourus pendant des intervalles de temps successifs de même valeur θ, forment une progression arithmétique de raison $r = a\theta^2$.

2°) Définir la fusion nucléaire.

B – Pratique. (14 points).

I – On dispose d'un solénoïde de longueur $l = 1m$, de rayon $R = 15cm$ et comportant $N = 1000$ spires.

1°) Donner les caractéristiques du champ magnétique (supposé uniforme dans tout le volume du solénoïde) créé par le passage d'un courant d'intensité 10 A.

2°) Etablir l'expression de l'inductance L en fonction de μ_0, N, l et R. **Calculer** la valeur de L.

3°) Quelle est l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine pour une intensité de 10 A

4°) On monte en série cette bobine d'inductance L = 89 mH avec un condensateur de capacité C = 1 μF, un résistor de résistance R = 300 Ω et un générateur basse fréquence délivrant à ses bornes une tension alternative sinusoïdale de fréquence 400 Hz et de valeur efficace 10 V.

a) Ecrire l'équation du circuit.

b) Réduire cette équation par la méthode de Fresnel. Déterminer Z et φ.

c) Calculer l'intensité efficace dans le circuit et les tensions efficaces aux bornes de chaque dipôle. On donne : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ SI, $u = U\sqrt{2}\cos\omega t$, $i = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$, u et i **sont respectivement la tension et l'intensité instantanées.**

II – Un mobile de masse m est astreint à se déplacer sur un plan incliné dont la ligne de plus grande pente forme un angle α avec l'horizontale. La surface du plan engendre des frottements que l'on peut assimiler à une force dont la valeur est fonction du poids du mobile et de l'angle α : $f = K.P\cos\alpha$.

1°) A partir de quelle valeur α_0 de l'angle α, le mobile se met-il à glisser ?

2°) Pour une inclinaison $\alpha > \alpha_0$, donner les expressions des accélérations de montée a_m et de descente a_d du mobile.

Sujet 6 : Bac, SE. 2018.

A – Théorie : (6 points).

Un point matériel de masse m, est lâché sans vitesse initiale sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. On néglige les frottements.

1°) Par application du théorème de l'énergie cinétique, déterminer l'expression V^2 de la vitesse atteinte après un parcours d'une distance x sur le plan incliné.

2°) Exprimer l'accélération du point matériel en appliquant la relation fondamentale de la dynamique.

B – Pratique. (14 points).

I – Les explosion nucléaires peuvent produire du strontium ${}^{90}_{38}Sr$, émetteur β^-, dont la période est T = 28 ans. Ce radioélément peut se fixer sur les os des êtres vivants en remplaçant le calcium.

1°) Ecrire l'équation de la désintégration de ce radioélément.

2°) Donner la définition de la période radioactive T d'un nucléide.

3°)Un nourrisson absorbe une masse $m_0 = 1{,}0\ \mu g$ de strontium 90. Quelle masse conserve-t-il à l'âge de 28 ans et de 56 ans ? **On notera par X le noyau fils.**

II – Les équations paramétriques en unité SI du mouvement d'un mobile se déplaçant dans un plan muni d'un repère $(O\ ,\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -4t^2 + 5t \end{cases}$$

1°) Rechercher l'équation cartésienne de la trajectoire.

2°) Donner les caractéristiques du vecteur vitesse lorsque le mobile passe par son ordonnée maximale.

3°) Calculer l'abscisse du mobile lorsque celui-ci repasse par l'ordonnée y = 0.

4°) Calculer la valeur de la vitesse à la date t = 6 secondes.

III – Un générateur maintient entre ses bornes une tension sinusoïdale dont la valeur efficace U = 24 V et de fréquence N = 180 Hz.

On branche aux bornes du générateur une bobine de résistance r = 120 Ω et d'inductance L = 25 mH.

1°) Faire la construction de Fresnel relative à ce circuit.

2°) Calculer l'intensité efficace du courant passant dans la bobine.

3°) Calculer la phase de la tension par rapport à l'intensité.

Sujet 7 : Bac, SM. 2019.

A – Théorie : (6 points).

1°) Dans un tableau, faites une étude comparative entre un oscillateur mécanique libre et un oscillateur électrique libre.

2°) Rappeler le rôle et le fonctionnement d'un transformateur.

B – Pratique. (14 points).

I – 1°) Une rame de métro, partant du repos, parcourt 160 m en 20 s. Calculer l'accélération a_1 supposée constante du mouvement.

2°) Partant d'une station A, avec l'accélération a_1, au bout d'un temps t_1 , le conducteur coupe le courant. Compte tenu des actions de résistances, le mouvement a une décélération constante $a_2 = 0,2m/s^2$. La rame de métro arrive à la station suivante B avec une vitesse nulle. La distance $AB = 500\ m$. Soient l_1 et l_2 les distances parcourues au cours de chaque phase du mouvement. Etablir une relation entre l_1 , l_2 , a_1 *et* a_2.

3°) Calculer la vitesse maximale de la rame et la durée du trajet AB.

II – Un dispositif interférentiel permet d'obtenir deux sources S_1 et S_2 synchrones et cohérentes. Le dispositif est éclairé par une lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,55\mu m$.

1°) a) Décrire et expliquer le phénomène observé sur un écran E parallèle au plan contenant les sources S_1 et S_2.

b) L'écran E étant situé à une distance $D = 0,8\ m$ du plan des sources ; on appelle d la mesure de N interfranges. Calculer la distance a séparant les deux sources S_1 et S_2. On donne : $N = 10$.

2°) On considère un point M sur l'écran, défini par $OM = x$.

a) Déterminer x pour que le point M **se trouve au milieu de la** 5e frange brillante.

b) Quelle doit être la longueur d'onde de la lumière utilisée pour que le point M défini en 2°) a) se trouve au milieu de la 5e frange sombre ?

III – 1°) Quelle est le nombre de spires N d'une bobine, de longueur $l = 30\ cm$ et de diamètre $d = 5$ cm, ayant une inductance $L = 10\ mH$?

(On suppose le champ magnétique uniforme).

2°) Quelle est l'énergie électromagnétique emmagasinée dans la bobine pendant la durée de l'établissent du courant quand celui-ci passe de la valeur zéro à la valeur $I = 1,4A$?

Sujet 8 : Bac, SE. 2019.

A – Théorie : (6 points).

1°) Expliquer comment peut-on mettre en évidence le champ magnétique (schéma à l'appui).

2°) Enoncer la règle du flux maximal.

B – Pratique. (14 points).

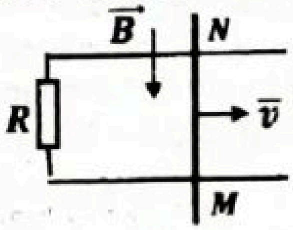
I – A l'aide d'une fusée, on satellise autour de la Terre, un objet de masse n, assimilable à un point matériel, **sur une orbite circulaire, à l'altitude** $h = 1000\ kn$.

a) Quelle la vitesse (mesurée dans le référentiel géocentrique) du satellite sur sa trajectoire ? Cette vitesse dépend-elle de la masse du satellite ?

b) Quelle est, exprimée en heures, minutes et secondes, la durée de révolution T de ce satellite.

Données : $R_T = 6400\ km$; $g_0 = 9{,}8\ N/kg$; $\sqrt{1{,}324} = 1{,}15$.

II – Soit le dispositif représenté ci-contre ($MN = l = 10\ cm$; $R = 20\ \Omega$).
On déplace la barre de cuivre parallèlement à elle-même de 20 cm en 0,1 s d'un mouvement de translation rectiligne uniforme vers la droite de la figure dans une région de l'espace où règne un champ magnétique $\vec{B}$ vertical orienté de haut en bas.



1°) Donner l'expression du flux coupé par le conducteur.

2°) Déterminer la f.é.m. induite. On donne : $B = 1{,}5\ T$.

3°) Préciser le sens et l'intensité du courant induit.
On négligera la résistance de tous les conducteurs.

4°) Quelle est la force de Laplace due au courant induit ?
Quelle force doit appliquer l'expérimentateur à la barre pour maintenir la vitesse constante ? On néglige toute force de frottement.

5°) Quelle est la puissance mécanique fournie ?
Quelle est la puissance joule dépensée dans la résistance ?

III – On éclaire avec une lumière monochromatique de longueur d'onde λ deux fentes S_1 et S_2 distantes de $a = 1mm$. On obtient un système de franges sur un écran situé à $D = 1m$ du plan de S_1 et S_2. La longueur de 10 interfranges est $d = 5{,}9\ mm$; elle est mesurée à partir de la frange centrale **portant le numéro 0.**

1°) Quels sont le numéro et la nature de la **dernière frange située sur la longueur** d ?

2°) Calculer la longueur d'onde λ et en déduire la couleur de la radiation.

Sujet 9 : Bac, SM. 2020.

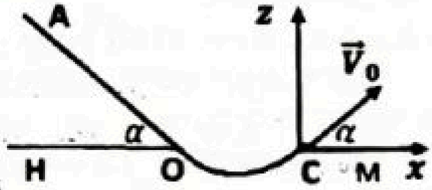
A – Théorie : (5 points).

1°) Décrire et interpréter une expérience montrant le retard dans l'établissement ou la coupure du courant dans une bobine comportant le fer doux.

2°) Enoncer le théorème de l'énergie cinétique.

B – Pratique. (15 points).

I – Du point A d'un plan incliné d'angle α sur un plan horizontal HOCM, on abandonne sans vitesse initiale un corps B de masse m. Il glisse selon la ligne de plus grande pente AO du plan et arrive en O avec une vitesse $\vec{V_0}$ sans frottement. Le plan incliné se raccorde en O avec une piste circulaire de rayon r. Au delà du point C, le mobile quitte la piste et retombe en M sur le plan horizontal. Le vecteur vitesse du mobile en C ($\vec{V_C}$) faitavec le plan horizontal, le même angle α que AO.



1°) a) Etablir l'équation horaire du mouvement du mobile sur le plan incliné AB = f(t).

b) Exprimer V_0 la valeur de la vitesse $\vec{V_0}$ du mobile en O en fonction de , g et de la longueur AO = l.

c) Pourquoi la mesure de la vitesse du mobile en C est-elle la même qu'en O ?

2°) a) Etablir en fonction de α , V_0 et g l'équation de la trajectoire du mobile entre C et M dans le repère CX, CZ.

b) Donner l'expression de la portée CM en fonction de V_0, α et g puis de l et α , Pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et l = 1,6 m, calculer V_0 et la portée CM. g = 9,8 m/s^2.

II – On considère un dipôle constitué d'une bobine (R, L) associée en série avec un condensateur de capacité C. Lorsqu'on applique une tension sinusoïdale de fréquence 100 Hz, pour une intensité efficace de 250 mA ; la tension efficace aux bornes est de 57,8 V. L'intensité est d'autre part en avance de 60° sur la tension.

1°) Réaliser le diagramme de Fresnel de ce circuit.

2°) Calculer L et R sachant que C = 6 μF.

III – Un solénoïde de longueur l très grande devant son rayon, comporte N spires enroulées sur un cylindre de section S.

1°) Rappeler la définition de l'inductance propre L de ce solénoïde, puis établir son expression en fonction de μ_0 , N, l et S.

AN : N = 10^4 spires ; l = 0,5 m ; S = 40 cm^2 ; $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ u.S.I.

2°) Ce solénoïde est parcouru par un courant dont l'intensité varie linéairement de 0 à 10 A en 5 secondes.

a) Etablir en fonction du temps, l'expression du champ magnétique B créé à l'intérieur du solénoïde.

b) On place à l'intérieur du solénoïde une bobine de 500 spires, ayant le même axe, de résistance égale à 20 Ω, constituée par un fil conducteur enroulé sur un cylindre de rayon 1 cm. **Calculer l'intensité du courant induit dans la bobine intérieure.**

Sujet 10 : Bac, SE. 2020.

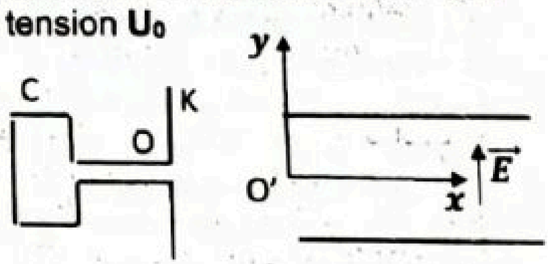
A – Théorie : (5 points).

1°) Un astronaute à l'intérieur d'un satellite en gravitation autour de la Terre « flotte » dans l'air. Son poids semble disparu, on dit qu'il se trouve en impesanteur. Expliquer ce phénomène.

2°) Enoncer la loi de Lenz.

B – Pratique. (15 points).

I – Des ions positifs $^{68}_{30}Zn$ et $^{70}_{30}Zn$ de même charge q et de masses respectives m_1 et m_2 sont obtenus dans une chambre d'ionisation C avec une vitesse initiale nulle, ils sont accélérés par une tension U_0 appliquée entre la chambre d'ionisation C et la cathode K percée d'un trou O (fig1).



1°) Les ions traversent le trou O avec les vitesses $\vec{V_1}$ **et** $\vec{V_2}$ **.** Donner les expressions de leurs énergies cinétiques E_{C_1} et E_{C_2} et les valeurs de leurs quantités de mouvement P_1 et P_2 en fonction des variables suivantes : m_1, m_2, q **et** U_0.

2°) A la sortie de O, les ions pénètrent dans un champ électrostatique uniforme orthogonale à $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$. Etablir l'équation littérale de la trajectoire (y en fonction de x) de chaque ion et montrer que cette méthode ne permet pas de séparer les deux espèces d'ions.

3°) Montrer que si à la sortie de O, le champ électrique étant supprimé, les ions **pénètrent dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, orthogonal à $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$, on pourra alors séparer les ions (on admettra sans démonstration la nature de cette trajectoire).**

II – Un automobiliste roule à la vitesse constante de 120 km.h $^{-1}$ sur une route rectiligne où la vitesse est limitée à 90 km.h $^{-1}$. Un motard de la gendarmerie part à sa poursuite. Il démarre à l'instant où l'automobile passe devant lui. Le motard est animé d'un mouvement uniformément varié tel qu'il atteigne la vitesse de 100 km.h $^{-1}$ en 10 s. Calculer :

1°) la durée de la poursuite ;

2°) la distance parcourue lors de la poursuite ;

3°) la vitesse du motard lorsqu'il rattrape l'automobile.

III – Un générateur de basse fréquence alimente un circuit contenant ben série une bobine (R₁ , L₁) et un résistor de résistance R_2 =12,5 Ω. On mesure l'intensité efficace du courant, on trouve I = 3,2 A. La tension efficace aux bornes du générateur est U = 64 V. On mesure la tension efficace U_1 aux bornes de la bobine et la tension U_2 aux bornes du résistor, on trouve $U_1 = U_2$.

1°) Montrer que les impédances Z_1 de la bobine et Z_2 du résistor sont égales. Donner la valeur numérique commune.

2°) Construire le diagramme de Fresnel relatif au circuit. On prendra comme expressions de i et de u : $\mathbf{i = I\sqrt{2}\sin\omega t}$ et $\mathbf{u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)}$.

3°) Calculer les valeurs numériques de φ, de R_1 et du produit $L\omega$

4°) Calculer la valeur de la fréquence sachant que L = 36 mH.

On donne : $\mathbf{\cos(36,8°) = 0,8}$ **.**

Sujet 11 : Bac, SM. 2021.

A – Théorie : (4 points).

1°) Les forces de Lorentz agissant sur les porteurs de charges en mouvement dans un conducteur parcouru par un courant sont –elles responsables du déplacement de ce conducteur ?

Les forces de Lorentz diffèrent-elles de la force de Laplace ?

2°) Définissez les termes suivants : **période radioactive ; fusion et fission nucléaires.**

B – Pratique : (16 points).

I – On considère le dispositif des fentes de Young. La distance entre les sources S_1 et S_2 est a ; la distance des sources à l'écran est D. La source primaire émet une radiation monochromatique de longueur d'onde .

Soit l la largeur de N interfranges consécutives.

1°) Etablir la relation donnant λ en fonction de a, D, l et N.

AN : $a = 2,00\ mm$; $l = 4,00\ mm$; $N = 12$, $D = 1,00\ m$.

2°) La sources émet deux radiations monochromatiques $\lambda_1 = 0,550\ \mu m$ et $\lambda_2 = 0,650\ \mu m$. On observe simultanément les deux systèmes de franges. Déterminer la plus petite distance par rapport à la frange centrale où les milieux de deux franges brillantes correspondant aux deux radiations coïncident..

II – Au plafond d'une voiture est suspendue une sphère en laiton par l'intermédiaire d'un fil inextensible et sans masse, de longueur 99,5 cm.

1°) La voiture se déplace en terrain plat d'un mouvement uniforme.

a) Quelle est la position du pendule simple ? On prendra $g = 9,8\ m.s^{-2}$.

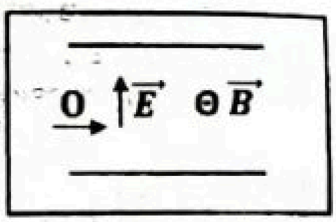
b) Si le mouvement devient uniformément **retardé d'accélération** $a = 0,98\ m.s^{-2}$ quelle est la nouvelle position du pendule ? On donne $\mathbf{\tan 5,7° = 0,1}$..

2°) La voiture roulant en terrain plat, aborde un virage de rayon $r = 100\ m$, avec une vitesse de $36\ km.h^{-1}$. Quelle est l'inclinaison du pendule par rapport à la verticale ? Peut-on en déduire l'inclinaison à donner à la route dans le cas où celle-ci serait parfaitement glissante (frottement nul).

On donne : $\mathbf{\tan 5,83° = 0,102}$.

III – Un faisceau homocinétique de particules ionisées de charge q et de masse m, traverse une région de l'espace où règne un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$ tous d'eux uniformes dirigés comme l'indique la figure.

Dans tout ce qui suit, on néglige la force de pesanteur devant les autres forces présentes.



1°) Représenter sur une figure les forces subits par une particule de vitesse $\vec{V}$ lorsque celle-ci pénètre en O dans l'espace où règnent les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

Donner l'expression de ces forces.

2°) Pour $B = 10^{-2} T$ et $E = 1,6.10^{5}\ V.m^{-1}$, on observe que les particules ne sont pas déviées. En déduire leur vitesse.

Sachant que chacune de ces particules a une énergie cinétique de 5,3 Mev, déterminer leur masse et en déduire le nombre de nucléons qu'elle contient.

Données : masse du proton $m_p = m_n = 1,67.10^{-27}\ kg$; charge élémentaire $e = 1,6.10^{-19}\ C$.

Sujet 12 : Bac, SE. 2021.

B – Pratique : (16 points).

I – Le carbone $^{14}_{6}C^{*}$ est un isotope radioactif de carbone $^{12}_{6}C$.

1°) Rappeler la définition de l'unité de masse atomique u.

Calculer en Mev, l'énergie de liaison par nucléon du noyau de cet isotope.

On donne : $m_p = 1,0728\,u$; $m_n = 1,00866\,u$; $m_e = 5,486.10^{-4}\,u$; $m_C = 14,00324\,u$.

2°) L'atome de carbone $^{14}_{6}C^{*}$ se désintègre en émettant une particule β^{-}.

Ecrire l'équation de la réaction de désintégration.

3°) La période où demi-vie de cet élément radioactif est $T = 5\,570\ ans$.

Que désigne-t-on par cette expression ? Calculer la masse de $^{14}_{6}C^{*}$ restant au bout de 22 280 ans en partant d'un échantillon de masse d'un gramme.

II – Un solénoïde de 1 m de longueur comprend 800 spires circulaires parallèle au plan du méridien magnétique. On place en son centre une petite aiguille aimantée, mobile autour d'un axe vertical, il est relié par des fils de résistance négligeable à une pile dont la f.é.m. est 1 volt. L'aiguille tourne de 45°.

1°) Faites un schéma où sont représentés les pôles de la pile, le sens du courant, le sens de la composante horizontale du champ magnétique terrestre, les pôles de l'aiguille aimantée avant et pendant le passage du courant.

2°) Calculer l'intensité du courant qui parcourt le solénoïde.

3°) En déduire la valeur de la résistance du circuit.

III – La chute d'eau de hauteur 55 m d'un barrage hydroélectrique dont le débit est 800 m3 par seconde actionne une turbine qui entraîne un alternateur aux bornes duquel on dispose une différence de potentiel efficace de 220 000 volts.

Seulement 90 % de l'énergie absorbée est transformée en énergie électrique, le facteur de puissance de l'installation qui alimente l'alternateur est 0,90.
Déterminer :

1°) la puissance absorbée par la turbine et celle fournie par l'alternateur ;

2°) la valeur efficace de l'intensité du courant débité ;

3°) les valeurs maximales de la d.d.p. aux bornes de l'alternateur et de l'intensité du courant.

IV – On considère la réaction nucléaire spontanée :

$$^{139}_{55}Cs \longrightarrow ^{y}_{x}Ba + ^{0}_{-1}e$$

de demi-vie $\mathbf{T = 7\ min.}$

1°) Déterminer x et y en justifiant le calcul.

2°) Calculer la constante radioactive.

3°) Si à l'instant initial, il y a $N_0 = 8.10^6$ noyaux de $^{139}_{55}Cs$, au bout de quelle durée il en restera-t-il en moyenne 8.10^4 ? On donne : $ln10 = 2,3$.

CORRIGES-TYPES DES SUJETS DU BAC GUINÉEN DE 2016 A 2021

CORRIGE-TYPE DES SUJETS

……………………………… BAC, SE , Session 2016………………………………

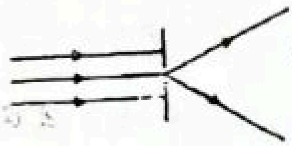
A – Théorie : 4 points.

Explication du phénomène de diffraction de la lumière.

La diffraction est la modification du trajet d'une onde lumineuse lorsqu'elle traverse un trou de petite ouverture..

Eclairons un trou de diamètre d réglable par une source S de lumière monochromatique de longueur d'ode λ.

Le phénomène de diffraction se produit dès que $d \leq \lambda$.



B – Pratique : 16 points.

I – PHYSIQUE ATOMIQUE ET NUCLEAIRE.

1°) Equation-bilan de formation du sodium 24.

$$^{23}_{11}Na + ^{1}_{0}n \longrightarrow ^{24}_{11}Na.$$

2°) Equation de désintégration β⁻ du sodium 24.

$$^{24}_{11}Na \longrightarrow ^{0}_{-1}e + ^{A}_{Z}X.$$

- Conservation du nombre de masse ;

$$24 = 0 + A \Longrightarrow A = 24$$

– Conservation du nombre de charges :

$$11 = -1 + Z \Longrightarrow Z = 12.$$

Le noyau fils est un isotope de magnésium $^{24}_{12}Mg$; d'où j'équation :

$$^{24}_{11}Na \longrightarrow ^{0}_{-1}e + ^{24}_{12}Mg + ^{0}_{0}\overline{\nu}$$

3°) Quantité de matière de sodium 24 introduit dans le sang.

$n_0 = C.v = 10^{-3} \times 10^{-2} = 10^{-5}$ mol

$$\mathbf{n_0 = 10^{-5}\ mol}$$

4°) Nombre de moles restant au bout de 7h30 min.

D'après la loi de décroissance : $n = n_0\, e^{-\lambda t}$

Or : $\lambda = \frac{ln2}{T}$; d' où $n = n_0\, e^{-\frac{ln2}{T}t}$

AN : $t = 7\,h30\,min = \frac{T}{2}$; $n = n_0\, e^{-\frac{ln2}{T}\frac{T}{2}} \Longrightarrow n = \frac{n_0}{\sqrt{2}} = \frac{10^{-5}}{\sqrt{2}}$

d'où $\boxed{n = 7{,}07.10^{-5}\ mol}$

5°) Volume sanguin.

Le nombre de moles est proportionnel au volume :

$$\frac{V}{n} = \frac{V_P}{n_P} \Longrightarrow V = \frac{n}{n_P}V_P$$

AN: $V = \frac{7{,}07.10^{-6}}{1{,}4.10^{-8}} \times 10^{-2} = 5{,}05\ l \Longrightarrow \boxed{V \approx 5\ l}$

II – CINEMATIQUE.

1°) Nature du mouvement.

L'accélération étant constante, le mouvement est uniformément varié.

Equation de la vitesse.

$$V = at + V_0 \Longrightarrow \boxed{V = 4,1t - 3} \quad (m.s^{-1})$$

Equation horaire :

$$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0 \Longrightarrow \boxed{x = 2,05t^2 - 3t + 1} \quad (m)$$

2°) Dates pour lesquelles $x = 0$.

$x = 0 \Longrightarrow 2,05t^2 - 3t + 1 = 0$

$\Delta = 9 - 4(2,05)(1) = 0,8$

d' où $\boxed{t_1 = 0,51\ s}$ et $\boxed{t_2 = 0,95\ s}$

Vitesses correspondantes.

On a : $V = 4,1t - 3 \Longrightarrow \begin{cases} V_1 = -0,91\ m.s^{-1} \\ V_2 = 0,89\ m.s^{-1} \end{cases}$

3°) Changement de sens du mouvement.

Oui, le mouvement change de sens de parcours. En effet :

– à la date $t_1 = 0,51$ s : $V < 0$, mouvement dans le sens négatif ;

– à la date $t_2 = 0,95$ s : $V > 0$, mouvement dans le sens positif.

Déterminons la date à laquelle $V = 0$.

$V = 0 \Longrightarrow 4,1t - 3 = 0$; d' où $\boxed{t = 0,73\ s}$

Déterminons l'abscisse correspondante.

$x = 2,05(0,73)^2 - 3(0,73) + 1 = -0,097\ m \Longrightarrow \boxed{x = -0,097\ m}$

III – OSCILLATIONS ELECTRIQUES FORCEES.

1°) Facteur de qualité du circuit.

$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} \Longrightarrow Q = \frac{700}{100} = 7$; d' où $\boxed{Q = 7}$

2°) Tension efficace aux bornes du condensateur à la résonance.

On a : $Q = \frac{U_C}{U} \Longrightarrow U_C = Q.U = 7 \times 5 = 35\ V$

d' où $\boxed{U_C = 35\ V}$

Remarque : il y a surtension aux bornes du condensateur à la résonance.

....

A- Théorie : 6 points.

a) Nombres de désintégrations de type α et de type β^-

Soient x le nombre de désintégrations de type α y celui de type β^-.

L'équation globale de la réaction s'écrit :

$$^{222}_{86}Rn \longrightarrow {}^{206}_{82}Pb + x\,^{4}_{2}He + y\,^{0}_{-1}e$$

Déterminons x et y à l'aide des lois de conservation.

– Conservation du nombre de masse :

$$222 = 206 + 4x \Longrightarrow x = \frac{222-206}{4} = 4$$

$$x = 4$$

– Conservation du nombre de charges :

$$86 = 82 + 2x - y \Longrightarrow y = 82 + 2x - 86 = 82 + 2(4) - 86 = 4$$

$$y = 4$$

L'équation-bilan de la réaction nucléaire s'écrit :

$$\boxed{^{222}_{86}Rn \longrightarrow {}^{206}_{82}Pb + 4\,^{4}_{2}He + 4\,^{0}_{-1}e}$$

b) Masse de radon restant au bout de 1, 2, ... nT.

D'après la loi de décroissance :

$m = m_0 . e^{-\lambda t}$; or : $\lambda = \frac{ln2}{T}$;

alors : $m = m_0\, e^{-\frac{ln2}{T}t} \Longrightarrow m = \frac{m_0}{2^{\frac{t}{T}}}$

D'où on en déduit :

t	T	2T	3T	...	nT
m	$\frac{m_0}{2}$	$\frac{m_0}{2^2}$	$\frac{m_0}{2^3}$	....	$\frac{m_0}{2^n}$

Masse de radons désintégré après nT.

$$m' = m_0 - m = m_0 - \frac{m_0}{2^n} \Longrightarrow \boxed{m' = m_0\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}$$

B- Pratique : 14 points.

I – OPTIQUE ONDULATOIRE.

1°) Conditions d'interférence.

Les ondes issues des sources S_1 et S_2 doivent être synchrones et cohérentes.

Oui ces conditions sont réalisées, car S_1 et S_2 **sont issues d'une même source S..**

2°) Schéma du dispositif (voir figure).

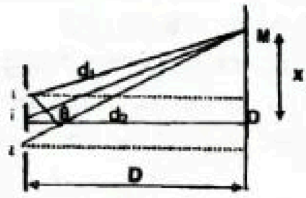
La différence de marche correspond au segment S_2H.

3°) Expression de la différence de marche en fonction de a, x, et D.

Dans les triangles S1S2H et IOM, on a :

$$\sin\alpha = \frac{\Delta}{a} \quad \text{et} \quad \tan\alpha = \frac{x}{D}$$

L'angle α étant petit : $\sin\alpha = \tan\alpha \Longleftrightarrow \frac{x}{D} = \frac{\Delta}{a}$



d' où $\boxed{\Delta = \frac{ax}{D}}$

Autre méthode.

Dans les triangles rectangles S_1MH_1 et S_2MH_2, on a :

$$d_1^2 = D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad d_2^2 = D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$

En faisant la différence, on obtient :

$$d_2^2 - d_1^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \Longrightarrow d_2 - d_1 = \frac{2ax}{d_2 + d_1}$$

or : $d_2 + d_1 \approx 2D$; d' où $\boxed{d_2 - d_1 = \Delta = \frac{ax}{D}}$

4°) Condition sur la différence de marche.

L'ordre de la 5ème frange brillante est :

$$P = \frac{\Delta}{\lambda} = 5 \Longrightarrow \Delta = 5\lambda$$

5°) Calcul de la longueur d'onde.

On a : $\begin{cases} \Delta = 5\lambda \\ \Delta = \frac{ax}{D} \end{cases} \Longrightarrow 5\lambda = \frac{ax}{D}$; d' où $\boxed{\lambda = \frac{ax}{5D} = 0{,}925\ \mu m}$

II – MECANIQUE.

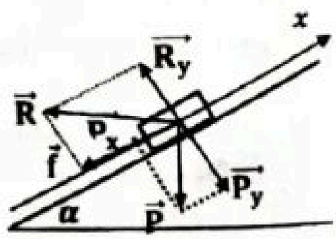
1°) Calcul de l'accélération.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$ du plan.

D'après le théorème du centre d'inertie :

$$\Sigma\vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

$$-P_x - f = ma \Longrightarrow -mg\sin\alpha - f = ma$$



d' où $\boxed{a = -\left(g\sin\alpha + \frac{f}{m}\right)}$

AN : $a = -\left(10 \times \frac{5}{100} + \frac{160}{800}\right) = -0{,}7\ m.s^{-2} \Longrightarrow \boxed{a = -0{,}7\ m.s^{-2}}$

2°) Calcul de la longueur maximale parcourue.

Appliquons sur la voiture, le théorème de l'énergie cinétique entre A et B.

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{ex}) \Longrightarrow \frac{1}{2} mV_B^2 - \frac{1}{2} mV_A^2 = -mgl\sin\alpha - f.l$$

Or : $V_B = 0$;

alors : $-\frac{1}{2} mV_A^2 = -mgl\sin\alpha - f.l \Longrightarrow \boxed{l = \frac{V_A^2}{2\left(g\sin\alpha + \frac{f}{m}\right)}}$

AN : $l = \frac{(21)^2}{2\left(10 \times \frac{5}{100} + \frac{160}{800}\right)} = 315\,m$; d' où $\boxed{l = 315\,m}$

3°) Calcul de la durée de la montée.

On a : $V_B = at + V_A \Longrightarrow t = \frac{V_B - V_A}{a} = \frac{0 - 21}{-0,7} = 30\,s$

d' où $\boxed{t = 30\,s}$

.... **BAC, SM , Session 2017**..........................

A/ Théorie. voir cours ou corrigés des questions théoriques.

B/ Pratique.

I – ELECTROMAGNETISME.

1°) Caractéristiques du champ magnétique au centre du solénoïde.

Les caractéristiques du champ $\vec{B}$ sont :

- direction : l'axe du solénoïde ;
- sens : de la face sud vers la face nord ;
- intensité : $\boxed{B = \mu_0 \cdot nI = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{l} I}$

2°) Expression du flux propre à travers la bobine.

$$\phi = L.I$$

3°) Expression de l'inductance L.

$$\begin{cases} \phi = L \cdot I \\ \phi = NBS = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{N^2 S}{l} \cdot I \end{cases} \Longrightarrow \boxed{L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{N^2 . S}{l}}$$

AN : $L = 4 \times 3,14 \cdot 10^{-7} \times \frac{(2000)^2 \times 2 \cdot 10^{-3}}{0,5} = 20 \cdot 10^{-3} H$

d'où $\boxed{L = 20\ mH}$

4°) Calcul de la f.é.m. auto-induite.

D'après la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} = -L\frac{d(Kt)}{dt} \Longrightarrow e = -K.L \quad \text{AN :} \quad \boxed{e = -0{,}1\ V}$$

5°) Différence de potentiel aux bornes de la bobine.

D'après la loi d'Ohm : $u = RI - e$; or : $R = 0$,

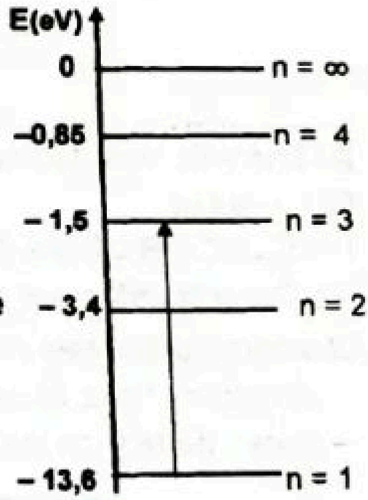
d'où $\boxed{u = -e}$ AN : $\boxed{u = 0{,}1V}$

6°) Energie emmagasinée à date t = 1 s.

On a : $E = \frac{1}{2}LI^2$; $I = 5t = 5 \times 1 = 5\ A$; d'où $\boxed{E = 0{,}25\ J}$

II – PHYSIQUE ATOMIQUE.

1°) Diagramme énergétique.



Si n = 1 : $E_1 = -\frac{13{,}6}{1^2} = -13{,}6$ eV **niveau fondamental**

n = 2 : $E_2 = -\frac{13{,}6}{2^2} = -3{,}4$ eV

n = 3 : $E_3 = -\frac{13{,}6}{3^2} = -1{,}5$ eV **trois 1ᵉʳ états excité**

n = 4 : $E_4 = -\frac{13{,}6}{4^2} = -0{,}85$ eV

n = ∞ : $E_\infty = -\frac{13{,}6}{\infty^2} = 0$: **état ionisé.**

2°) Calcul de la longueur d'onde de la transition de n = 1 à n = 3

D'après les postulats de Bohr :

$$E_{1,3} = E_3 - E_1 = h.\nu_{1,3} = h \cdot \frac{C}{\lambda_{1,3}} \Longrightarrow \boxed{\lambda_{1,3} = \frac{hC}{E_{1,3}}}$$

AN : $E_{1,3} = E_3 - E_1 = -1{,}5 + 13{,}5 = 12{,}1$ eV ;

$$\lambda_{1,3} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^{8}}{12{,}1 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 10{,}258.10^{-8}\ \text{m} \Longrightarrow \boxed{\lambda_{1,3} \approx 103\ nm}$$

Autre méthode.

D'après l'équation de Rydberg : $\frac{1}{\lambda_{1,3}} = \frac{E_0}{hC}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right)$; avec n = 1 et p = 3.

3°) Montrons que l(électron est extrait.

L'électron est extrait, lorsque l'énergie reçue par l'atome est supérieure ou égale à l'énergie d'ionisation $E \geq E_i$.

L'énergie reçue par l'atome est :

$$E = \frac{hC}{\lambda} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^{8}}{8{,}5 \cdot 10^{-8}} = 23{,}36 \cdot 10^{-19}\,J = 14{,}6\,eV$$

L'énergie d'ionisation de l'atome est :

$$E_i = E_\infty - E_1 = 0 - (-13{,}6) = 13{,}6\,eV.$$

Comme $E > E_i$ donc l'électron est extrait.

Calcul de l'énergie cinétique de l'électron.

Appliquons la conservation de l'énergie :

$$E = E_i + E_C \Longrightarrow \quad E_C = E - E_i = 14{,}6 - 13{,}6 = 1\,eV$$

d'où $\boxed{E_C = 1\,eV = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,J}$

III – MECANIQUE.

1°)

Calcul de la longueur des montés, des parties horizontales et des desntes.

Soient x, y et z, les longueurs des parties horizontales des montés, et des descentes.

On a les équations : $x + y + z = 78$ **(1)** **et** $z = \frac{7}{10}y$ (2)

Le temps mis pour aller de A à B est : $t_{AB} = \frac{x}{25} + \frac{y}{15} + \frac{z}{30}$;

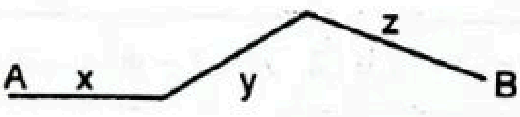
et celui pour aller de B à A est : $t_{BA} = \frac{x}{25} + \frac{y}{30} + \frac{z}{15}$;

alors : $\Delta t = t_{AB} - t_{BA} \Longrightarrow \quad \frac{x}{25} + \frac{y}{15} + \frac{z}{30} - \left(\frac{x}{25} + \frac{y}{30} + \frac{z}{15}\right) = \frac{4}{10}$

Cette équation se réduit à : $y - z = 12$ (3)

D'où le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 78 \\ z = \frac{7}{10}y \\ y - z = 12 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 10\text{ km} \\ y = 40\text{ km} \\ z = 28\text{ km} \end{cases}$$



2°) Calcul des temps mis.

– Le temps mis à l'aller est :

$$t_{AB} = \frac{10}{25} + \frac{40}{15} + \frac{28}{30} \Longrightarrow \boxed{t_{AB} = 4\text{ h}}$$

– Le temps mis au retour est :

$$t_{BA} = \frac{10}{25} + \frac{40}{30} + \frac{28}{15} \Longrightarrow \boxed{t_{BA} = 3\text{ h}36\text{ min.}}$$

.... **BAC, SE , Session 2017**..................................

A/ Théorie. voir cours ou corrigés des questions théoriques.

B/ Pratique.

I – CINEMATIQUE.

1°) a) Equations horaires de l'élèveet et de l'autobus.

– Equation horaire de l'élève.

$x_E = Vt + x_0$; mais $x_0 = 0$;; d'où $x_E = Vt \Longrightarrow \boxed{x_E = 8t}$ (m)

– Equation horaire de l'autobus.

$x_A = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0$; or : $V_0 = 0$ et $x_0 = 18$ m ;; d'où $\boxed{x_A = t^2 + 18}$ (m).

b) Distance entre les deux mobiles à la date t = 2 s.

La distance qui les sépare à un instant quelconque est :

$d = x_A - x_E \Longrightarrow d = t^2 - 8t + 18.$

A la date t = 2 s : $d = (2)^2 - 8(2) + 18 = 6$ m

c) *Position et vitesse de l'autobus à la date t = 3 s.*

- $x_A = (3)^2 + 18 = 27$ m $\Longrightarrow$ $\mathbf{x_A = 27}$ **m**
- $V_A = \frac{dX_A}{dt} = 2t \Longrightarrow V_A = 2(3) = 6$ m/s ; $\boxed{V_A = 6\text{ m.s}^{-1}.}$

2°) *Montrons que l'élèvene ne réussi pas le jeu.*

La distance qui les sépare à un instant t quelconque est :

$x = x_A - x_E \Longrightarrow x = t^2 - 8t + 18.$

Cette distance sera minimale lorsque :

$\frac{dX}{dt} = 0 \Longleftrightarrow 2t - 8 = 0 \Longrightarrow t = 4$ s

alors : $x_{min} = (4)^2 - 8(4) + 18 = 2$ m $\Longrightarrow$ $x_{min} = 2$ m

Par hypothèse, l'élève réussit le jeu lorsque $x_{min} \leq 1$ m.

Comme $x_{min} > 1$ m ; l'élève ne réussit pas le jeu.

II – ELECTRICITE.

1°) Equation du circuit.

$u = u_R + u_B + u_C$

$$\boxed{u = (R+r)I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi) + L\omega I\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I\sqrt{2}}{C\omega}\cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)}$$

2°) Expression du déphasage de la tension par rapport à l'intensité.

On a : $\boxed{\tan\varphi = -\dfrac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R+r}}$ AN : $\boxed{\varphi = 0{,}81 \text{ rad}}$

3°) Calcul de l'impédance du circuit.

$$\boxed{Z = \sqrt{(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$ AN : $\boxed{Z = 450\ \Omega}$

4°) Calcul de l'intensité efficace.

$\boxed{I = \dfrac{U}{Z}}$ AN: $\boxed{I = 0{,}11\ A}$

On en déduit : $\boxed{i = 0{,}11\sqrt{2}\cos(100\pi t - 0{,}81)}$

5°) Déphasage de la tension aux bornes de la bobine par rapport à l'intensité.

$\boxed{\tan\phi = \dfrac{L\omega}{r}}$ AN : $\boxed{\phi = 1{,}5 \text{ rad}}$

La tension instantanée aux bornes de la bobine est :

$$u_B = U_B\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi + \phi)$$

Or : $U_B = Z_B \cdot I = I\sqrt{r^2 + (L\omega)^2}$;

d'où $\boxed{u_B = 49\cos(100\pi t + 2{,}3)}$

III – EFFET PHOTOELECTRIQUE.

1°) Indication du microampèremètre.

Puisque $\lambda > \lambda_0$; il n'y a pas d'émission d'électrons.

Donc l'indication est nulle (I = 0).

2°) a) Comme $\lambda < 0{,}4$ µm, cette radiation n'est pas visible, elle se situe dans l'ultraviolet.

b) Energie transportée par chaque photon.

$\boxed{W = h\dfrac{C}{\lambda}}$ AN : $\boxed{W = 6{,}62 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}$

c) Energie d'extraction d'un électron.

$$\boxed{W_0 = h\frac{C}{\lambda_0}} \quad \text{AN :} \quad \boxed{W_0 = 3 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}}$$

d) Calcul de la vitesse maximale.

$$\boxed{V_{max} = \sqrt{\frac{2(W - W_0)}{m}}} \quad \text{AN :} \quad \boxed{V_{max} \approx 8?9 \cdot 10^{5}\ m \cdot s^{-1}}$$

.... **Bac, SM , session 2018** ....

A/ Théorie.

1°) Démonstration de la loi de la progression arithmétique.

(Voir cours ou corrigés des questions théoriques).

$$e_2 - e_1 = e_3 - e_2 = \cdots = e_n - e_{n-1} = a\theta^2 \Longrightarrow \boxed{r = a\theta^2}$$

2°) Fusion nucléaire.

C'est une réaction nucléaire au cours de laquelle deux noyaux légers s'unissent pour former un noyau plus lourd en libérant de l'énergie.

B/ Pratique.

I – ELECTROMAGNETISME.

1°) Caractéristiques du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde.

- Direction : l'axe du solénoide ;
- Sens : de la face sud vers la face nord ;
- Intensité : $B = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} I = 4\pi \cdot 10^{-7}\, \frac{N}{l} I \Longrightarrow B = 4 \times 10^{-7} \times \frac{10^3}{1} \times 10$

$$\boxed{B = 12{,}56.10^{-3}\ \mathrm{T}}$$

2°) Expression de l'inductance L, en fonction de μ_0, N, l et R.

$$\begin{cases} \phi = L \cdot I \\ \phi = NBS = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{N^2 \cdot S}{l} \cdot I \end{cases} \Longrightarrow L = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{N^2 \cdot S}{l}$$

or : $S = \pi R^2$; d'où $\boxed{L = \mu_0 \cdot \frac{N^2 \cdot}{l} \pi R^2}$

AN : $L = 4\pi . 10^{-7} \cdot \frac{(10^3)^2}{1} \times 3{,}14 \cdot (\cancel{15} - 10^{-2})^2 = 88{,}7 \cdot 10^{-3}\ H$

2D

d'où $\boxed{L \approx 89\ mH}$

3°) Energie magnétique emmagasinée dans la bobine.

$$E_m = \frac{1}{2}L.I^2 = \frac{1}{2} \times 89 \cdot 10^{-3}.(10)^2 = 4,45\ J$$

$$\boxed{E_m = 4,45 J}$$

4°) a) Equation du circuit.

$$u = u_R + u_B + u_C \Longrightarrow u = Ri + Li + \frac{1}{C}\int idt$$

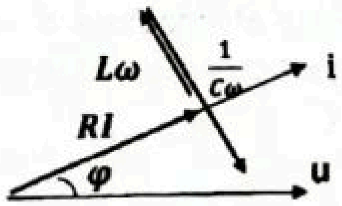
$$\boxed{u = RI_m \cos(\omega t + \varphi) + L\omega I_m \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I_m}{C\omega}\cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)}$$

b) Réduction de l'équation par la méthode de Fresnel:

Pour réaliser la construction de Fresnel, déterminons d'abord la nature du circuit.

$$\begin{cases} L\omega = 89 \cdot 10^{-3} \times 2512 \approx 223,57\ \Omega \\ \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{10^{-6} \times 2512} \approx 398,1\ \Omega \end{cases} \Longrightarrow L\omega < \frac{1}{C\omega}\ (circuit\ capacitif)..$$

Donc , la tension u est en retard de phase par rapport à l'intensité (figure).



On en déduit que : $\boxed{u = U\sqrt{2}\cos\omega t} \Longrightarrow \boxed{u = 10\sqrt{2}\cos 2512t}$

Déterminons Z et φ.

- $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{(300)^2 + (223,57 - 398,1)^2} = 347,07\ \Omega$

$$Z \approx 347,1\ \Omega$$

- $\tan\varphi = \frac{\left|L\omega - \frac{1}{C\omega}\right|}{R} = \frac{|223,57 - 398,1|}{300} = 0,58 \approx \frac{1}{\sqrt{3}}$

d'où $\boxed{\varphi = \frac{\pi}{6}\ rad}$

c) Intensité efficace dans le circuit.

Télécharger

Appliquons la loi d'Ohm aux bornes du circuit :

$$U = Z.I \Longrightarrow I = \frac{U}{Z} = \frac{10}{347,1} = 0,0288\ A$$

Soit : $\boxed{I \approx 29\ mA}$

Tension efficace aux bornes de chaque dipôle.

Appliquons la loi d'Ohm aux bornes de chaque dipôle :

- $U_R = R.I = 300 \times 29 \cdot 10^{-3} = 8,7\ V$
- $U_B = I.L\omega = 29 \cdot 10^{-3} \times 223,57 = 6,48\ V$
- $U_C = \frac{I}{C\omega} = 29.10^{-3} \times 398,1 = 11,54\ V$

d'où $\boxed{U_R = 8,7\ V}$ $\boxed{U_B \approx 6,5\ V}$ $\boxed{U_C \approx 11,5\ V}$

III – DYNAMIQUE

1°) Valeur α_0 de α à partir de laquelle le glissement ait lieu.

– Système : le solide (mobile).

– Référentiel : terrestre (supposé galiléen).

– Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$ du plan incliné.

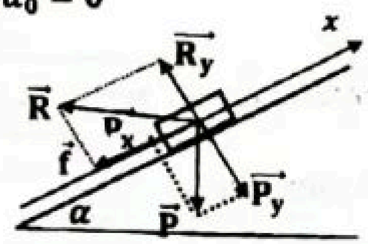
Le solide reste immobile tant qu'elle est pseudo-isolé (principe d'inertie) :

$$\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

Par projetons sur l'axe OX, on obtient :

$$P \sin\alpha_0 - F = 0 \Longrightarrow P \sin\alpha_0 - k.P\cos\alpha_0 = 0$$

$$\sin\alpha_0 = k.\cos\alpha_0 \Longrightarrow \frac{\sin\alpha_0}{\cos\alpha_0} = k$$



d'où $\boxed{\tan\alpha_0 = k}$

2°) * Accélération a_m de la montée.

D'après le théorème du centre d'inertie (T.C.I.) :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a}_m \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_m$$

Projection suivant l'axe Ox **(sens du mouvement)**:

$$-P\sin\alpha - k.P\cos\alpha = ma_m \Longrightarrow \boxed{a_m = -g(\sin\alpha + k.\cos\alpha)}$$

*** Accélération a_d de la descente.**

$$\sum \vec{F}_{ex} = m\vec{a}_d \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_d$$

Projection suivant l'axe Ox **(sens du mouvement)**:

$$P\sin\alpha - k.P\cos\alpha = ma_d \quad \text{d'où} \quad \boxed{a_d = g(\sin\alpha - k.\cos\alpha)}$$

Remarque.

A la descente, les frottements s'inversent (**ils s'opposent au mouvement**).

.... **Bac, SE , session 2018** ....

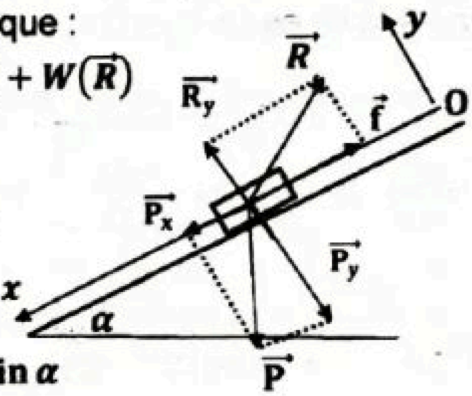
A – Théorie .

1°) Expression de V^2 par application du théorème de l'énergie cinétique.

– Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$ du plan incliné.

1 – Appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_C = \sum(\vec{F}ex) \Longleftrightarrow E_C - E_{C_0} = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$$



On a : $E_C = \frac{1}{2}mV^2$; $E_{C_0} = 0$: $(V_0 = 0)$.

et $W(\vec{R}) = 0$ $(car\ f \approx 0)$

$W(\vec{P}) = mgh = mg.x\sin\alpha$

Le théorème de l'énergie cinétique devient :

$$\frac{1}{2}mV^2 = mg.x\sin\alpha \Longrightarrow V^2 = 2g.x\sin\alpha$$

d'où $\boxed{V^2 = 2g.x\sin\alpha}$

2°) Expression de l'accélération à l'aide de la relation fondamentale de la dynamique.

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique :

$$\sum(\vec{F}ex) = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

Projetons-la sur l'axe **Ox :**

$$mg\sin\alpha = ma \Longrightarrow \boxed{a = g\sin\alpha}$$

B – Pratique.

I – PHYSIQUE ATOMIQUE ET NUCLEAIRE.

1°) Equation de la désintégration.

$$^{90}_{38}Sr \longrightarrow {}^{A}_{Z}X + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\bar{\vartheta}$$

– Conservation du nombre de nucléon :

$$90 = A + 0 \Longrightarrow A = 90$$

– Conservation du nombre de charges :

$$38 = Z - 1 \Longrightarrow Z = 39$$

D'où l'équation-bilan de la désintégration :

$$\boxed{{}^{90}_{38}Sr \longrightarrow {}^{90}_{39}X + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\bar{\vartheta}}$$

2°) Définition de la période radioactive.

On appelle période d'un nucléide radioactive le temps au bout duquel la moitié des noyaux initialement présents dans un échantillon se désintègre.

$$\boxed{T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}}$$

3°) Masse de strontium restant au bout de 28 ans et 56 ans.

D'après la loi de décroissance :

$$m = m_0 .\, e^{-\lambda t} \Longrightarrow m = m_0\, e^{-\frac{\ln 2}{\lambda}t} = \frac{m_0}{2^{\frac{t}{T}}}$$

d'où $\boxed{m = \frac{m_0}{2^n}}$ avec $t = nT$

t (ans)	T	2T
m(µg)	m_0	m_0

II – CINEMATIQUE.

1°) Equation de la trajectoire.

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -4t^2 + 5t \end{cases}$$

On élimine t entre x et y :

$$\begin{cases} t = \frac{x}{3} \\ y = -4\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{x}{3}\right) \end{cases} \Longrightarrow \boxed{y = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{5}{3}x}$$

2°) Caractéristiques du vecteur vitesse lorsque $y = y_{max}$.

A la date t : $\vec{V} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath}$

Au sommet de la trajectoire : $V_y = 0$

Alors : $\vec{V} = V_x\vec{\imath}$ d'où $\boxed{\vec{V} = 3\vec{\imath}}$

$\vec{V}$, est colinéaire à $\vec{\imath}$ et de même sens, son module vaut :

$$\boxed{V = 3\ m/s}$$

3°) Abscisse du mobile à l'ordonnée y = 0.

$$y = 0 \Longleftrightarrow -\frac{4}{9}x^2 + \frac{5}{3}x = 0 \Longrightarrow x\left(-\frac{4}{9}x + \frac{5}{3}\right) = 0$$

soit : $\begin{cases} x = 0 \text{ (point de départ)} \\ ou \\ x = \frac{15}{4} = 3,75\ m \end{cases}$; d'où $\boxed{x = 3,75\ m}$

4°) Valeur de la vitesse à la date t = 6 s.

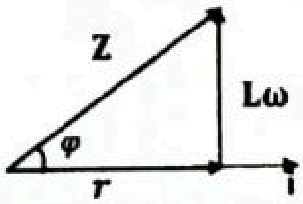
On a : $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$

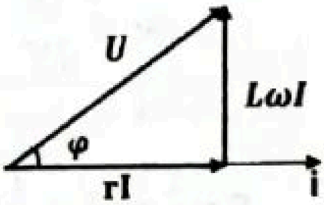
avec ; $\begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} = 3\ m/s \\ V_y = \frac{dy}{dt} = -8t + 5 \end{cases}$

A la date t = 6 s : $V_y = -8(6) + 5 = -43\ m/s$; d'où $\boxed{V \approx 43\ m/s}$

III – ELECTRICITE.

1°) Construction de Fresnel.





2°) Intensité efficace du courant.

Appliquons la loi d'Ohm aux bornes de la bobine :

$$U = Z.I \Longrightarrow I = \frac{U}{Z}$$

L'impédance du circuit vaut :

$$Z = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2} = \sqrt{(120)^2 + (282,6)^2} = 307\ \Omega$$

Donc : $I = \frac{24}{307} = 0,078$ A $\Longrightarrow$ $\boxed{I = 78\ mA}$

3°) Déphasage φ de la tension u par rapport à l'intensité.

On a : $\tan\varphi = \frac{L\omega}{r} = \frac{282,6}{120} = 2,355 \Longrightarrow \varphi = arc\tan(2,355)$

d'où $\boxed{\varphi = 67° \approx 1,17\ rad}$

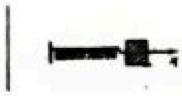
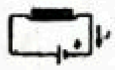
$\varphi > 0$, la tension présente une avance de 1,17 rad par rapport à l'intensité.

Autre procédé. $\cos\varphi = \frac{r}{Z} = \frac{120}{307} = 0,39 \Longrightarrow \varphi = arc\cos(0;39) = 67°$

Soit : $\boxed{\varphi = 67° \approx 1,17\ rad}$

A – Théorie.

1°) Etude comparative.

Désignation	Oscillateur mécanique	Oscillateur électrique
Schéma du dispositif		
Equation différentielle	$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$	$\ddot{q}+\frac{1}{LC}q=0$
Position	$x=x_m\cos(\omega_0 t+\varphi)$	$q=Q_m\cos(\omega_0 t+\varphi)$
Vitesse	$V=\dot{x}$	$i=\dot{q}$
Inertie	$m\,(masse)$	$L\,(inductance)$
Pulsation	$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$
Terme de rappel	k	$\frac{1}{C}$
Energie emmagasinée	$E=\frac{1}{2}mV^2+\frac{1}{2}kx^2$	$E=\frac{1}{2}Li^2+\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$

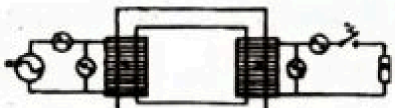
2°) Rôle et fonctionnement d'un transformateur.

– Rôle : Un transformateur sert à élever ou à abaisser une tension alternative.

– Fonctionnement.

Lorsqu'on applique une tension alternative aux bornes du primaire, il se crée un flux magnétique variable, grâce au circuit magnétique, ce flux passe dans la bobine du secondaire et crée une tension alternative sinusoïdale aux bornes du secondaire..

Le rapport de transformation est : $k=\frac{U_2}{U_1}$.



– Si $k>1 \Longrightarrow U_2>U_1$: le transformateur est dit élévateur de tension.

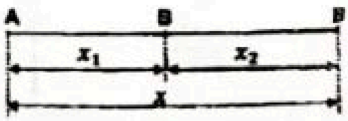
– Si $k<1 \Longrightarrow U_2<U_1$, : le transformateur est dit abaisseur de tension.

B – Pratique.

I – CINEMATIQUE.

1°) Calcul de l'accélération a_1 du mobile.

$$x=\frac{1}{2}at^2 \Longrightarrow \boxed{a_1=\frac{2x}{t^2}}$$



AN : $a_1 = \frac{2\times160}{(20)^2} = 0,8\, m.s^{-2} \Longrightarrow$ $\boxed{a_1 = 0,8\, m/s^2}$

2°) Relation entre l_1, l_2, a_1 et a_2.

1ère phase : *MRUA*; $a_1 > 0$.

$$\begin{cases} l_1 = \frac{1}{2}at_1^2 \\ V_1 = a_1t_1 \\ V_1^2 = 2a_1l_1 \qquad (1) \end{cases}$$

2ème phase : *MRUR*; $a_2 < 0$.

$$\begin{cases} l_2 = \frac{1}{2}at_2^2 + V_1t_2 \\ V_2 = a_2t_2 + V_1 \\ V_2^2 - V_1^2 = 2a_2l_2 \end{cases}$$

En B, la rame s'arrête : $V_2 = 0 \Longrightarrow V_1^2 = -2a_2l_2$ $\quad (2)$.

En identifiant (1) et (2), on obtient :

$$2a_1l_1 = -2a_2l_2 \Longrightarrow \boxed{a_1l_1 = -a_2l_2}$$

Calcul de la vitesse maximale.

La vitesse maximale est celle atteinte à la fin de la 1ère phase ($V_{max} = V_1$).

$$\begin{cases} V_1^2 = 2a_1l_1 \\ V_1^2 = -2a_2l_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} l_1 = \frac{V_1^2}{2a_1} \\ l_2 = -\frac{V_1^2}{2a_2} \end{cases}$$

La distance totale parcourue est :

$$AB = l = l_1 + l_2 \Longrightarrow l = \frac{V_1^2}{2a_1} - \frac{V_1^2}{2a_1}; \quad \text{d'où} \quad \boxed{V_{max} = \sqrt{\frac{2a_1a_2\, l}{a_2 - a_1}}}$$

AN : $V_{max} = \sqrt{\frac{2\times0,8(-0,2)\times500}{-0,2-0,8}} \approx 12,65\, m/s$

d'où $\boxed{V_{max} \approx 12,65\, m/s}$

Calcul de la durée du trajet.

La durée totale du trajet est : $t = t_1 + t_2$

Déterminons les durées t_1 **et** t_2 des deux phases du mouvement.

- $V_1 = a_1t_1 \Longleftrightarrow t_1 = \frac{V_1}{a_1} \Longrightarrow t_1 = \frac{12,65}{0,8} = 15,8\, s$
- $V_2 = a_2t_2 + V_1 = 0 \Longleftrightarrow t_2 = -\frac{V_1}{a_1} \Longrightarrow t_2 = -\frac{12,65}{-0,2} = 63,2\, s$

Donc : $t = 15,8 + 63,2 = 79\ s$;

d'où $\boxed{t = 79\ s}$

II – OPTIQUE ONDULATOIRE.

1°) a) Description du phénomène observé sur l'écran.

En lumière monochromatique, on observe sur l'écran (E) une série de raies alternativement brillantes et sombres, parallèles et équidistantes appelées franges d'interférences.

Explication.

– Les franges brillantes résultent de la superposition des ondes en phase.

– Les franges sombres résultent de la superposition des ondes en opposition de phase.

a) Calcul de la distance a des sources S_1 et S_2.

On a : $d = Ni = N\frac{\lambda D}{a} \Longrightarrow \boxed{a = \frac{N\lambda D}{d}}$

AN : $a = \frac{10 \times 0{,}55.10^{-6} \times 0{,}8}{4.10^{-3}} = 1{,}1.10^{-3}\ \mathrm{m} \Longrightarrow \boxed{a = 1{,}1\ mm}$

2°) a) Calcul de l'abscisse x de la 5e frange brillante.

$$x = p\,i = k\,i = k\frac{\lambda D}{a} \Longrightarrow x = 5 \times \frac{0{,}55.10^{-6} \times 0{,}8}{1{,}1.10^{-3}} = 2.10^{-3}\ m$$

d'où $\boxed{x = 2\ mm}$

b) Calcul de la nouvelle longueur d'onde.

$x = p\,i' = \left(n - \frac{1}{2}\right) i' \Longrightarrow x = \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda' D}{d}$; d'où $\boxed{\lambda' = \frac{ax}{\left(n - \frac{1}{2}\right) D}}$

AN : $\lambda' = \frac{1{,}1.10^{-3} \times 2.10^{-3}}{\left(5 - \frac{1}{2}\right) \times 0{,}8} = 0{,}61.10^{-6}\ m$

d' où $\boxed{\lambda' = 0{,}61\mu m = 610\ nm}$

III – ELECTROMAGNETISME.

1°) Calcul du nombre N de spires de la bobine.

$$\begin{cases} \Phi = NBS = 4\pi.10^{-7} \cdot \frac{N^2 S}{l} I \\ \Phi = L I \end{cases} \Longrightarrow L = 4\pi.10^{-7} \frac{N^2.S}{l}$$

or : $S = \pi \frac{d^2}{4}$; d' où $N = \frac{1}{\pi d} \sqrt{10^7 l L}$ AN ; $\boxed{N = 1103 \; spires}$

2 – Energie emmagasinée.

$\boxed{E = \frac{1}{2} L I^2}$ AN : $E = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} (1,4)^2 = 9,8.10^{-3} \, J$

d' où $\boxed{E = 9,8.10^{-3} \, J}$

.... **Bac, SE , session 2019** ....

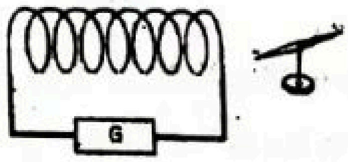
A – Théorie.

1°) Mise en évidence du champ magnétique

Expérience d'Oersted.

Lorsque le conducteur est parcouru par un courant, l'aiguille aimantée pivote et s'oriente dans une nouvelle direction.

Cette expérience met en évidence l'existence d'un champ magnétique.



2°) Règle du flux maximal.

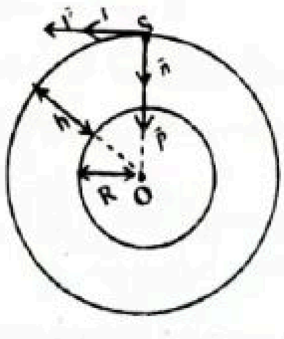
Enoncé : « Un circuit plan parcouru par un courant libre de se déplacer, placé dans un champ magnétique est en position d'équilibre stable lorsque le flux magnétique qui le traverse par la face sud est maximal ».

B – Pratique.

I– MECANIQUE : (MOUVEMENT DE SATELLITES).

1°) Calcul de la vitesse du satellite.

$$a_n = g \Longrightarrow \frac{V^2}{R_T + h} = g_0 \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}$$



d'où $\boxed{V = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_T + h}}}$

AN : $V = 64.10^2 \sqrt{1,324} = 64.10^2 \times 1,15 = 73,6.10^2 \, m/s$

$$\boxed{V = 7360 \, m/s = 7,36 \, km/s}$$

Cette vitesse ne dépend pas de la masse du satellite.

2°) Calcul de la durée de révolution T du satellite.

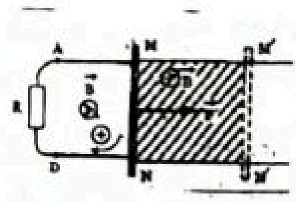
$$S = VT = 2\pi(R_T + h) \Longrightarrow T = \frac{2\pi(R_T+h)}{V}$$

AN : $T = \frac{2 \times 3{,}14 \times 74.10^5}{7{,}36.10^3} = 6314,13\ s \Longrightarrow \boxed{T \approx 1h45\,min14\,s}$

II – ELECTROMAGNETISME.

1°) Expression du flux coupé.

$$\Phi = \vec{B}.\vec{S} = B.S\cos 0° \Longrightarrow \Phi = B.S$$



or : $S = l.x$

d'où $\boxed{\Phi = Blx}$

2°) Déterminons la f.é.m. induite.

D'après la loi de Faraday : $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\,l\,\frac{dx}{dt} \Longrightarrow e = -Blv$

or : $v = \frac{x}{t}$;

d'où $\boxed{e = -\frac{Blx}{t}}$ AN : $\boxed{e = -0,3\ V}$

3°) Sens et intensité du courant induit.

D'après la loi de Pouillet : $i = \frac{e}{R} = -\frac{Blx}{R.t} < 0$

$i < 0$, donc le courant circule dans le sens contraire du sens positif choisi (sens négatif), c'est-à-dire de M vers N.

Son intensité vaut : $\boxed{i = -\frac{Blx}{R.t}}$ AN : $\boxed{i = 0,5A}$

4°) Force de Laplace due au courant induit.

$$\vec{F} = i\vec{l} \wedge \vec{B} \Longrightarrow F = ilB\sin\frac{\pi}{2};$$

d'où $\boxed{F = ilB}$ AN : $\boxed{F = 7,5.10^{-2}\ N}$

Force exercée par l'expérimentateur (force motrice).

Principe de l'inertie : $\sum \vec{F}ex = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{F}_m = \vec{0}$

Or : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$; donc : $\vec{F} + \vec{F}_m = \vec{0} \Longrightarrow \vec{F}_m = -\vec{F}$

d'où $\boxed{F_m = F = 7,5.10^{-2}\ N}$

5°) **Calcul de la puissance mécanique fournie.**

$P_m = \vec{F}_m \cdot \vec{V} = F_m V \cos 0° \Longrightarrow P_m = F_m V$

AN : $P_m = 7,5.10^{-2} \times 2 = 0,15\ W$

d'où $\boxed{P_m = 0,15\ W}$

Calcul de la puissance joule dépensée dans la résistance.

$P = R I^2 = 0,6 \cdot (0,5)^2 = 0,15\ W$

d' où $\boxed{P = 0,15\ W}$

Conclusion.

On constate que $P_m = P$: il y a eu transformation d'énergie mécanique en énergie thermique.

III – OPTIQUE ONDULATOIRE.

1°) Numéro et nature de la dernière frange.

La frange centrale étant une frange brillante et numérotée zéro, la dernière frange correspond à la 10ème frange brillante.

2°) Calcul de la longueur d'onde et couleur de la radiation.

On a : $d = 10i = 10\ \dfrac{\lambda D}{a} \Longrightarrow \lambda = \dfrac{a\,d}{10D}$

AN : $\lambda = \dfrac{10^{-3} \times 5{,}9.10^{-3}}{10 \times 1} = 0,59.10^{-6}\ m$

d' où $\boxed{\lambda = 0,59\ \mu m = 590\ nm}$

La radiation de longueur d'onde $\lambda = 0,59\ \mu m$ est jaune.

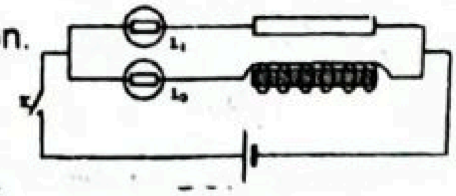
.... **Bac, SM , session 2020** ....

A – Théorie.

1°) Description et interprétation du phénoménal d'auto-induction.

Soit le dispositif expérimental :

Description.



- L_1 et L_2 sont deux lampes identiques en dérivation.
- Le résistor et la bobine ont même résistance r.

– Lorsqu'on ferme l'interrupteur k :

L_1 s'allume immédiatement et L_2 progressivement.

– Lorsqu'on ouvre le circuit :
L_1 s'éteint immédiatement et L_2 progressivement.

Interprétation.

• Lorsqu'on ferme le circuit, la variation du flux propre dans la bobine crée une f.é.m. d'induction qui s'oppose à l'établissement du courant dans L_2.

• Dans le cas de l'ouverture du circuit, la f.é.m. d'induction s'oppose à la disparition du courant (loi de Lenz).

Ce phénomène est appelé auto-induction.

2°) Théorème de l'énergie cinétique.

Enoncé : « Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un solide est égale à la somme algébrique des travaux des forces extérieures qui s'exercent sur le solide pendant la durée de la variation ».

$$\boxed{\Delta E_C = \sum W(\vec{F}ex)}$$

B – Pratique.

I– MECANIQUE .

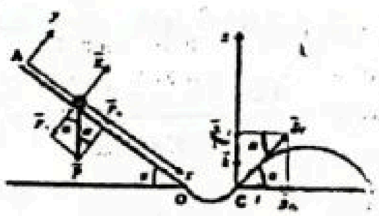
1°) a) Equation horaire du mouvement du solide B sur le plan incliné.

• Bilan des forces :

le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ du solide et la réaction $\vec{R}$ du plan incliné.

• Appliquons le T.C.I.

$$\sum \vec{F}ex = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$



Projetons sur l'axe (Ax) :

$$mg\sin\alpha = ma \Longrightarrow a = g\sin\alpha$$

$a = Cte$, le mouvement est uniformément varié d'équation horaire :

$$AB = \frac{1}{2}at^2 \Longrightarrow \boxed{AB = \frac{1}{2}(g\sin\alpha)t^2}$$

b) Expression de V_0 en fonction de α, g et l.

Appliquons le T.E.C.

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}ex) \Longleftrightarrow E_{C_0} = W(\vec{p}) + W(\vec{R})$$

$$\frac{1}{2}mV_0^2 = mgl\sin\alpha \Longrightarrow V_0^2 = 2gl\sin\alpha$$

d'où $\boxed{V_0 = \sqrt{2gl\sin\alpha}}$

c) Egalité des vitesses V_C et V_0.

$$\Delta E_C = W(\vec{p}) + W(\vec{R}) = 0 \iff \frac{1}{2}mV_C^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = 0 \quad ;$$

d' où $\boxed{V_c = V_0}$

NB : La vitesse en C est la même qu'en O par ce que O et C sont situés dans le même plan horizontal.

2°) a) Equation de la trajectoire du mobile entre C et M dans le repère (Cx, Cz).

• Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$.

• Appliquons le T.C.I.

$$\sum \vec{F}ex = m\vec{a} \iff m\vec{g} = m\vec{a} \implies \vec{a} = \vec{g}$$

• Projetons dans le repère (Cx, Cz) :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \implies \begin{cases} x = (V_0 \cos\alpha)t \\ Z = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin\alpha)t \end{cases}$$

Eliminons t entre x et z :

$$\begin{cases} t = \frac{x}{V_0 \cos\alpha} \\ z = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{V_0 \cos\alpha}\right)^2 + (v_0 \sin\alpha)\left(\frac{x}{V_0 \cos\alpha}\right) \end{cases}$$

d' où $\boxed{z = -\frac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha}$

b) Expression de la portée CM en fonction de V_0, α et g.

Au point M : $z = 0 \iff -\frac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha = 0$

d' où $\boxed{x_M = CM = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}}$

Expression de CM en fonction de α et l.

D'après 1°) a) : $V_0^2 = 2gl\sin\alpha$;

alors : $x_M = CM = \frac{2gl\sin\alpha \ \sin 2\alpha}{g} \implies \boxed{x_M = CM = 2l\sin\alpha . \sin 2\alpha}$

Calcul de V_0 et CM pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et $l = 1,6\ m$.

• $V_0 = \sqrt{2gl\sin\alpha} = \sqrt{2 \times 9,8 \times 1,6 \sin\frac{\alpha}{4}} = 4,7\ m/s$

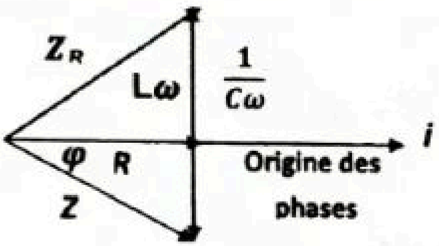
$$\boxed{V_0 = 4,7\ m/s}$$

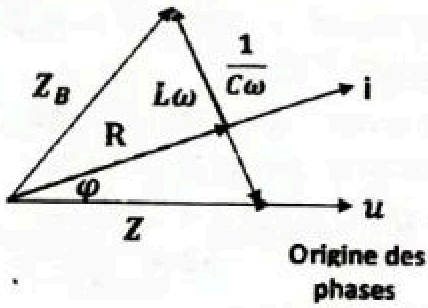
• $x_M = CM = 2l\sin\alpha.\sin 2\alpha = 2 \times 1,6 \times \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 1,6\sqrt{2}$

$$\boxed{x_M = CM = 2,26\ m}$$

II – ELECTRICITE.

1°) Diagramme de Fresnel relatif au circuit.





2°) Calcul de L et R.

• $\cos\varphi = \frac{R}{Z} \Longrightarrow \boxed{R = Z\cos\varphi}$

AN : $Z = \frac{U}{I} = \frac{57,8}{0,25} \Longrightarrow Z = 231,2\ \Omega$

$R = 231,2 \times \cos 60° = 115,6\ \Omega$;

d 'où $\boxed{R = 115,6\ \Omega}$

• $\tan\varphi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R} \Longrightarrow \boxed{L = \frac{\frac{1}{C\omega} - R\tan\varphi}{\omega}}$ d'où $\boxed{L = 0,1\ H}$

III – ELECTROMAGNETISME.

1°) Définition de l'inductance propre du solénoïde.

On appelle inductance propre d'un solénoïde le rapport du flux propre à travers le solénoïde par l'intensité du courant qui le traverse.

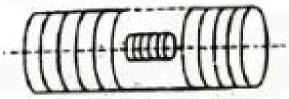
$$\boxed{L = \frac{\phi}{i}}$$

Expression de L en fonction de N, l et S.

$$\begin{cases} \phi = L \cdot I \\ \phi = NBS = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{N^2 \cdot S}{l} I \end{cases} \Longrightarrow L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{N^2 \cdot S}{l}$$

$$\boxed{L = 1\, H}$$

2°) a) Expression du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde en fonction du temps.



A l'intérieur d'un solénoïde :

$B = 4\pi.10^{-7}.\frac{N}{l} i$; or : $i = at + b$

$\begin{cases} a(0) + b = 0 \\ a(5) + b = 10 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2\, A/s \\ b = 0 \end{cases}$; alors : $i = 2t$

D'où $\boxed{B = 16\pi.10^{-3} t}$ ou $\boxed{B = 5,024.10^{-3} t}$

b) Intensité du courant induit dans la bobine.

D'après la loi de Pouillet : $i = \frac{e}{R} = -\frac{1}{R}.\frac{d\phi}{dt}$

Le flux à travers la bobine est : $\phi = N'BS = N'B\pi r^2$; $(\theta = 0°, \textit{circuit orienté})$;

$\phi = 5.10^2 \times 5,024.10^{-3} t \times 3,14(10^{-2})^2 \Longrightarrow \phi = 7,910^{-3} t$

Alors : $i = -\frac{7,9.10^{-3}}{20} = -3,9.10^{-4}\, A$

d' où $\boxed{|i| = 3,9.10^{-4}\, A}$

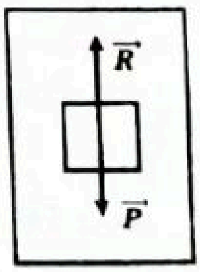
.... Bac, SE , session 2020 ....

A – Théorie.

1°) Explication du phénomène d'impesanteur.

• Bilan des forces appliquées au cosmonaute :

le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction $\vec{R}$.



• Appliquons le T.C.I.

$\Sigma \vec{F}ex = m\vec{a} \Longrightarrow m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{a}$

or : $\vec{a} = \vec{g}$; donc : $m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{g}$

d' où $\boxed{\vec{R} = \vec{O}}$

Le cosmonaute n'a besoin d'aucun appui pour rester en équilibre, il flotte : on dit qu'il est en état d'impesanteur ou d'apesanteur.

2°) Enoncé de la loi de Lorentz.

« Une particule de charge q, animée d'une vitesse $\vec{V}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$ est soumise à une force magnétique dite force de Lorentz ».

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{V}\wedge\vec{B}}$$

B – Pratique.

I – ELECTROMAGNETISME.

1°) Expression des énergies cinétiques.

• **Bilan des forces** : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la force électrostatique $\vec{F_e} = q\vec{E}$.

• Appliquons le T.E.C.

$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}ex)$; comme $P << F_e$; alors :

$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}e) \iff E_C = qU_0$

d' où $\boxed{E_{C_1} = E_{C_2} = qU_0}$

Expression des quantités de mouvement en fonction de m_1, m_2, q et U_0.

$P = mV$; or : $\frac{1}{2}mV^2 = qU_0 \Longrightarrow V = \sqrt{\frac{2qU_0}{m}}$

alors : $p = \sqrt{2mqU_0}$;

d' où $\boxed{P_1 = \sqrt{2m_1qU_0}}$ $\boxed{P_2 = \sqrt{2m_2qU_0}}$

2°) Equation de la trajectoire de chaque ion.

Appliquons le T.C.I.

$\sum\vec{F}ex = m\vec{a} \Longrightarrow m\vec{g} + \vec{F_e} = m\vec{a}$

Or : $P << F_e$; donc : $\vec{F_e} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{a} = \frac{q.\vec{E}}{m}$

Projetons sur les axes de coordonnées :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \frac{q.E}{m} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = V_0t \\ y = \frac{1}{2}\frac{q.E}{m}t^2 \end{cases}$$

$t = \frac{x}{V_0}$; alors : $y = \frac{1}{2}\frac{q.E}{m}\left(\frac{x}{V_0}\right)^2$; d'où $\boxed{y = \frac{q.E}{2mV_0^2}x^2}$

On en déduit :

• pour ${}^{68}_{30}Zn^{2+}$: $\boxed{y_1 = \frac{q.E}{2mV_1^2}x^2}$ • pour ${}^{70}_{30}Zn^{2+}$: $\boxed{y_2 = \frac{q.E}{2mV_2^2}x^2}$

Montrons que cette méthode ne peut séparer les deux types d'ions.

D'après 1°) : $V_1^2 = \frac{2qU_0}{m_1}$ et $V_2^2 = \frac{2qU_0}{m_2}$

alors : $y_1 = \frac{q.E}{2m_1\frac{2qU_0}{m_1}}x^2 = \frac{E}{4U_0}x^2$ et $y_2 = \frac{q.E}{2m_2\frac{2qU_0}{m_1}}x^2 = \frac{E}{4U_0}x^2$

d'où $\boxed{y_1 = y_2 = \frac{E}{4U_0}x^2}$

Les deux ions ont la même trajectoire, donc, cette méthode ne permet pas de séparer les deux espèces d'ions.

3°) Montrons que le champ magnétique permet de séparer les deux espèces d'ions.

Dans le champ magnétique $\vec{B}$, chaque **ion décrit une trajectoire circulaire de rayon :**

$$R = \frac{mV}{qB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU_0}{q}}$$

Donc : $\boxed{R_1 = \frac{m_1V}{qB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_1U_0}{q}}}$ $\boxed{R_2 = \frac{m_2V}{qB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_2U_0}{q}}}$

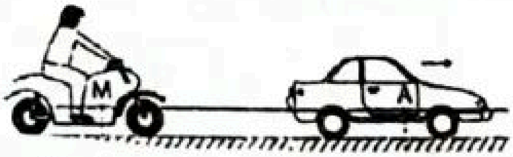
Comme $R_1 \neq R_2$ $(m_1 \neq m_2)$, les deux espèces d'ions ont des trajectoires différentes.

Donc, le champ magnétique permet de séparer les deux espèces d'ions.

II– MECANIQUE.

a) Calcul de la durée de la poursuite.

Prenons comme origine des espaces la position initiale du motard et comme origine des temps l'instant du démarrage.



• Equation horaire de l'automobile : M.R.U.

$$x_A = V_At \Longrightarrow x_A = \frac{100}{3}t$$

• Equation horaire du motard : M.R.U.A : $x_M = \frac{1}{2}at^2$

Déterminons l'accélération a du motard.

$$V_1 = at_1 \Longrightarrow a = \frac{V_1}{t_1} = \frac{100}{3{,}6\times10} = \frac{25}{9} = 2{,}78\ m.s^{-2}$$

d' où $x_M = \frac{25}{18}t^2$

Le motard rattrapera l'automobile lorsque :

$$x_M = x_A \Longleftrightarrow \frac{25}{18}t^2 = \frac{100}{3}t \Longrightarrow t = 4 \times 6 = 24\,s$$

d' où $\boxed{t = 24\,s}$

b) Distance parcourue lors de la poursuite.

Cette distance s'obtient en remplaçant t dans l'une ou l'autre équation :

Soit : $x = x_A = \frac{100}{3}t \Longrightarrow x = \frac{100}{3} \times 24 = 100 \times 8 = 800\,m$

d' où $\boxed{x = 800\,m}$

c) Vitesse du motard lorsqu'il rattrape l'automobile.

$$V_M = at \Longrightarrow V_M = 2,78 \times 24 = 66,66\,m/s$$

d' où $\boxed{V_M \approx 66,7\,m/s}$

III – ELECTRICITE.

1°) Montrons que les impédance Z_1 et Z_2 sont égales.

D'après la loi d'Ohm :

$$U_1 = Z_1.I \quad \text{et} \quad U_2 = Z_2.I$$

Or ; $U_1 = U_2 \Longrightarrow Z_1.I = Z_2.I$

d' où $\boxed{Z_1 = Z_2}$

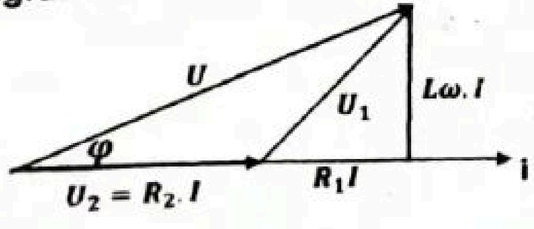
Valeur numérique commune des impédances.

Appliquons la loi d'Ohm aux bornes du résistor ;

$$U_2 = Z_2.I = R_2.I \Longrightarrow Z_2 = R_2 = \frac{U_1}{I}$$

d' où $\boxed{Z_1 = Z_2 = 12,5\,\Omega}$

2°) Diagramme de Fresnel.



3°) Calcul des valeurs de ~~$R_1.I$ le~~ R_1 et de $L\omega$.

• Appliquons le théorème d'Alkashi :

$$U_1^2 = U_2^2 + U^2 - 2U_2.U\cos\varphi \Longrightarrow \cos\varphi = \frac{U^2 + U_2^2 - U_1^2}{2U.U_2}$$

d' où $$\boxed{\cos\varphi = \frac{U}{2R_2.I}}$$

AN : $\cos\varphi = \dfrac{64}{2 \times 12{,}5 \times 3{,}2} = 0{,}8 \Longrightarrow \boxed{\varphi = 36{,}8°}$

• $\cos\varphi = \dfrac{R_1.I + R_2.I}{U} \Longrightarrow R_1.I = U\cos\varphi - R_2.I$

d' où $$\boxed{R_1 = \frac{U}{I}\cos\varphi - R_2.}$$

AN : $R_1 = \dfrac{64}{3{,}2} \times 0{,}8 - 12{,}5 = 3{,}5\,\Omega$; d' où $\boxed{R_1 = 3{,}5\,\Omega}$

• $\sin\varphi = \dfrac{L\omega.I}{U} \Longleftrightarrow L\omega = \dfrac{U}{I}\sin\varphi \Longrightarrow L\omega = \dfrac{U}{I}\sqrt{1 - \cos^2\varphi}$

AN : $L\omega = \dfrac{64}{3{,}2}\sqrt{1 - (0{,}8)^2} = 20 \times 0{,}6 = 12\,\Omega$

d' où $$\boxed{L\omega = 12\,\Omega}$$

4°) Calcul de la fréquence du courant.

$$L\omega = 12 \Longleftrightarrow 2\pi f.L = 12 \Longrightarrow \boxed{f = \frac{6}{\pi L}}$$

AN : $f = \dfrac{6}{3{,}14 \times 0{,}036} = 53{,}07$; d' où $\boxed{f \approx 53\,Hz}$

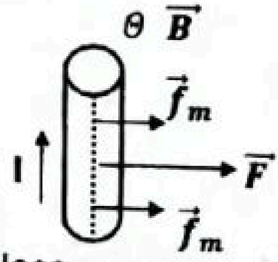
....

A – THEORIE.

1°) **Oui** les forces de Lorentz agissant sur les porteur de charge en mouvement dans un conducteur parcouru par un courant sont responsables du déplacement de ce conducteur.

En effet, la résultante des forces de Lorentz constitue la force de Laplace.

Donc les forces de Lorentz sont équivalentes à la force de Laplace.



Non les forces de Lorentz ne diffèrent pas de celle de Laplace.

2°) Définition des termes :

– **La période radioactives** : c'est le temps au bout duquel la moitié des noyaux initialement présent s dans un échantillon se désintègre.

– **La fusion nucléaire** : c'est une réaction nucléaire au cours de laquelle deux noyaux légers s'unissent pour former un noyau plus lourd **en libérant de l'énergie.**

– **La fission nucléaire** : c'est une réaction nucléaire au cours de laquelle un neutron « lent » casse un noyau lourd « fissile » pour former deux noyaux plus légers en libérant de l'énergie et d'autres neutrons.

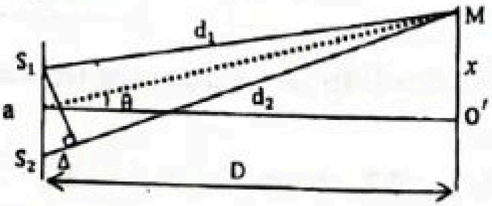
B – PRATIQUE.

I – OPTIQUE ONDULATOIRE.

1°) Relation donnant λ en fonction de $a, D,\ l$ et N.

On a : $l = Ni$; avec $i = \frac{\lambda D}{a}$; alors : $l = N\frac{\lambda D}{a}$

d' où $\boxed{\lambda = \frac{al}{ND}}$



Calcul de la longueur d'onde λ.

$$\lambda = \frac{2.10^{-3} \times 4.10^{-3}}{12 \times 1} = 0,666.10^{-6}\ m$$

$$\boxed{\lambda \approx 0,67\ \mu m}$$

2°) Calcul de la distance de la première coïncidence.

Les abscisses des franges brillantes correspondant aux systèmes sont :

$x_1 = k_1 . i_1$ et $x_2 = k_2 . i_2$

Il y a coïncidence lorsque :

$$x_1 = x_2 \iff k_1.i_1 = k_2.i_2 \Longrightarrow k_1\frac{\lambda_1 D}{a} = k_2\frac{\lambda_2 D}{a}$$

Soit : $\frac{k_1}{k_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{65}{55} = \frac{13}{11} \Longrightarrow \begin{cases} k_1 = 13 \\ k_2 = 11 \end{cases}$

La première coïncidence se produit avec la 13ème frange brillante de λ_1 et la 11ème frange brillante de λ_2.

Cette coïncidence se produit à une distance de la frange centrale telle que :

$$x = x_1 = x_2\ ;\ \text{soi :}\quad x = k_1\frac{0{,}550.10^{-3} \times 1}{2.10^{-3}} = 3,575.10^{-6}\ m$$

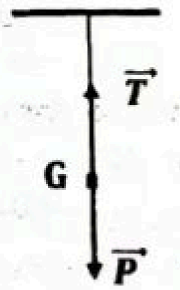
d' où $\boxed{x = 3,575\ \mu m}$

II – MECANIQUE.

1°) a) Position du pendule simple.

• Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$ du fil.

• Appliquons le T.C.I :



$$\sum\vec{F}_{ex} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

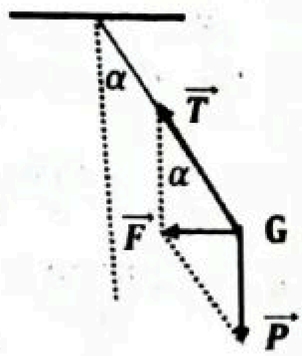
Comme $\vec{V}$ est constant : $\vec{a} = \vec{0}$; alors :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{T} = -\vec{P}$$

Le fil est donc vertical.

b) Nouvelle position du pendule.

Dans le triangle des forces, on a :



$$\tan\alpha = \frac{F}{P} = \frac{ma}{mg} \Longrightarrow \boxed{\tan\alpha = \frac{|a|}{g}}$$

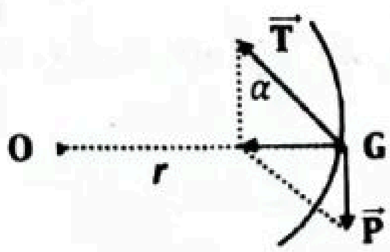
AN : $\tan\alpha = \frac{0{,}98}{9{,}8} = 0,1 \Longrightarrow \boxed{\alpha = 5,7°}$

2°) Inclinaison du pendule par rapport à la verticale.

Dans le triangle des forces, on a :

$$\tan\theta = \frac{F_n}{P} = \frac{ma_n}{mg} \Longrightarrow \tan\theta = \frac{a_n}{g}$$

d' où $\boxed{\tan\theta = \frac{V^2}{gr}}$

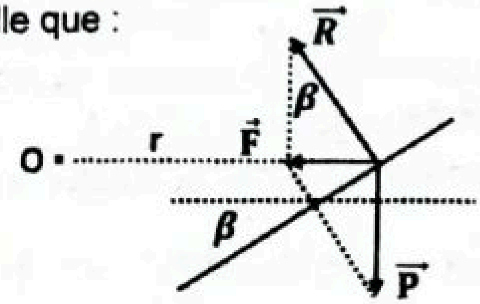


AN : • $V = \frac{36}{3{,}6} = 10\ m.s^{-1}$;

- $\tan\theta = \dfrac{(10)^2}{9{,}8\times100} = \dfrac{1}{9{,}8} = 0{,}102$ $\boxed{\theta = 5{,}83°}$

On peut prévoir l'inclinaison de la piste.

En effet, l'inclinaison α de la piste serait telle que :



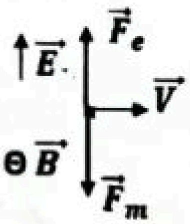
$$\tan\beta = \frac{F_n}{P} = \frac{ma_n}{mg} \qquad \tan\beta = \frac{a_n}{g}$$

$$\tan\beta = \frac{V^2}{gr} \Longrightarrow \tan\beta = \tan\alpha$$

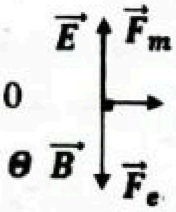
III – ELECTROMAGNETISME.

1°) Représentation des forces que subit une particule dans les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

$q > 0$



$q < 0$



Expression de ces forces :

– La force électrique : $\vec{F}_e = q\vec{E}$.

– La force magnétique : $\vec{F}_m = q\vec{V} \wedge \vec{B}$.

2°) Vitesse de ces particules.

D'après le principe de l'inertie :

$$\Sigma\vec{F}_{ex} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{F}_e + \vec{F}_m = \vec{0}$$

$$F_e - F_m = 0 \Longrightarrow qE - qVB = 0$$

d' où $\boxed{V = \dfrac{E}{B}}$

AN : $V = \dfrac{1{,}6.10^5}{10^{-2}} = 1{,}6.10^7\ m.s^{-1} \Longrightarrow V = 1{,}6.10^7\ m.s^{-1}$

Déterminons la masse des particules.

On a : $E_C = \dfrac{1}{2}mV^2 \Longrightarrow \boxed{m = \dfrac{2E_C}{V^2}}$

AN : $m = \frac{2 \times 5{,}3 \times 1{,}6.10^{-13}}{(1{,}6.10^{7})^2} = 6{,}625.10^{-27}\ kg$

d' où $\boxed{m = 6{,}625.10^{-27}\ kg}$

Nombre de nucléons.

On a : $m = A \times m_n \Longrightarrow \boxed{A = \frac{m}{m_n}}$

AN : $A = \frac{6{,}625.10^{-27}}{1{,}67.10^{-27}} = 3{,}96 \Longrightarrow \boxed{A \approx 4}$

Remarque : Il s'agit de la particule α ou noyau d'hélium ${}^{4}_{2}He$.

.... **Bac, SE , session 2021** ....

PRATIQUE.

I – PHYSIQUE ATOMIQUE ET NUCLEAIRE.

1°) Définition de l'unité de masse atomique.

On appelle unité de masse atomique, le $\frac{1}{12}$ **de la masse d'un atome de carbone** 12.

$$1\,u = \frac{1}{12}m_C \Longrightarrow \boxed{1\,u = \frac{1}{N} = 1{,}66.10^{-27}\ kg}$$

Calcul de l'énergie de liaison par nucléon du ${}^{14}_{6}C$.

Par définition : $\boxed{\frac{E_l}{A} = [Zm_p + (A-Z)m_n - m].\frac{C^2}{A}}$

AN : • La masse du noyau est : $m = M - Zm_e$

$m = 14{,}00324 - 6 \times 5{,}486.10^{-4}$ $m \approx 13{,}99995\ u$

$$\frac{E_l}{A} = [6 \times 1{,}00728 + (14-6) \times 1{,}00865 - 13{,}99995] \times \frac{C^2}{14} \times 931{,}48\ MeV/C^2$$

d' où $\boxed{\frac{E_l}{A} \approx 7{,}52\ MeV/nucléon}$

2°) Equation de la réaction de désintégration du ${}^{14}_{6}C$.

$${}^{14}_{6}C \longrightarrow {}^{A}_{Z}X + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\overline{V}$$

Appliquons les lois de conservation :

• Conservation du nombre de charges :

$6 = Z - 1 \Longrightarrow Z = 7$

• Conservation du nombre de nucléons :

$$14 = A + 0 \Longrightarrow A = 14$$

D'où l'équation de la réaction nucléaire :

$$\boxed{{}^{14}_{6}C \longrightarrow {}^{14}_{7}N + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\overline{\nu}}$$

3°) Signification de l'expression « demi-vie.

Cette expression signifie qu'au bout de $T = 5570\ ans$ la moitié du noyau de ${}^{14}_{6}C$ se désintègre.

Calcul de la masse de ${}^{14}_{6}C$ restant.

D'après la loi de décroissance :

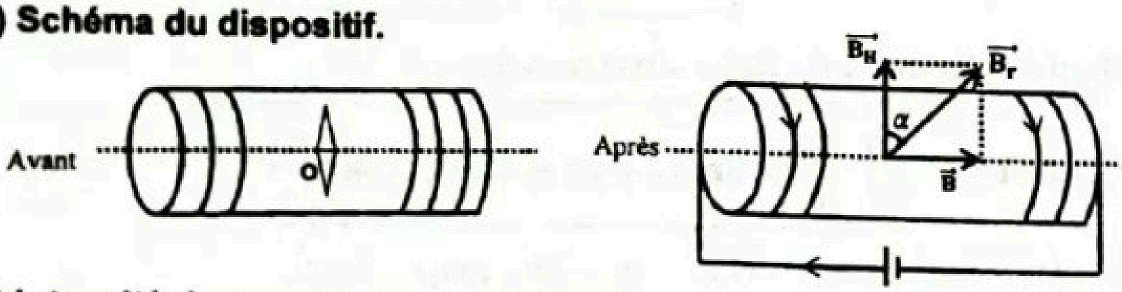
$$m = m_0 . e^{-\lambda t} \text{ ; on a : } \begin{cases} t = 22280\ ans \\ T = 5570\ ans \end{cases} \Longrightarrow t = 4T$$

Or : $\lambda = \frac{ln2}{T}$; alors : $m = m_0 . e^{-\frac{ln2}{T}\times 4T} \Longrightarrow m = m_0 . e^{-4ln2}$

d' où $\boxed{m = \frac{m_0}{2^4} = \frac{m_0}{16}} \Longrightarrow \boxed{m = 6,25.10^{-2}\ g}$

II – ELECTROMAGNETISME.

1°) Schéma du dispositif.



2°) Intensité du courant dans le solénoïde.

L'aiguille aimantée s'oriente selon la résultante de $\overrightarrow{B}_H$ et $\overrightarrow{B}$ en tournant d'un angle α tel que :

$$\tan\alpha = \frac{B}{B_H} \text{ ; or : } B = 4\pi 10^{-7}\frac{N.I}{l} ;$$

d' où $\boxed{I = \frac{l.B_H \tan\alpha}{4\pi.10^{-7} N}}$ AN : $\boxed{I \approx 20\ mA}$

3°) Valeur de la résistance du circuit.

D'après la loi de Pouillet :

$E = R.I \Longrightarrow$ $\boxed{R = \frac{E}{I}}$ AN : $\boxed{R = 50\ \Omega}$

III – ELECTRICITE.

1°) Puissance absorbée par la turbine.

L'énergie mécanique de la chute d'eau est :

$W = mgh$; or : $m = \rho V = \rho Dt$; donc : $W = \rho Dtgh$

La puissance correspondante est :

$\mathcal{P} = \frac{W}{t} \Longrightarrow \mathcal{P} = \rho Dgh$

En négligeant les pertes d'énergie, la puissance absorbée par la turbine est égale à la mécanique :

d' où $\boxed{\mathcal{P}_T = \rho Dgh}$

AN : $\mathcal{P}_T = 1\,000 \times 80 \times 10 \times 55 = 44.10^6\ W \Longrightarrow$ $\boxed{\mathcal{P}_T = 44\ MW}$

Déterminons la puissance fournie par l'alternateur.

Le rendement de l'alternateur est défini par :

$\eta = \frac{P_e}{P_T} \Longrightarrow P_e = \eta \times P_T = \frac{90}{100} \times 44.10^6 = 39,6.10^6\ W$

d' où $\boxed{P_e = 39,6\ MW}$

2°) Valeur de l'intensité efficace du courant débité.

On a : $P_e = UI\cos\varphi \Longrightarrow I = \frac{P_e}{U\cos\varphi} = \frac{39{,}6.10^6}{22.10^4 \times 0{,}90} = 200\ A$

d' où $\boxed{I = 200\ A}$

Valeurs maximales de la d.d.p. aux bornes de l'alternateur et l'intensité du courant.

Par définition :

- $U_m = U\sqrt{2} = 22.10^4\sqrt{2} \Longrightarrow$ $\boxed{U_m \approx 311\ 127\ V}$
- $I_m = I\sqrt{2} = 200\sqrt{2} \Longrightarrow$ $\boxed{I_m = 282,8\ A}$

IV – PHYSIQUE ATOMIQUE ET NUCLEAIRE.

1°) Déterminons x et y.

$${}^{139}_{55}Cs \longrightarrow {}^{y}_{x}Ba + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\bar{\vartheta}$$

Pour déterminer x et y, appliquons les lois de conservation :

- Conservation du nombre de charges :

$$55 = x - 1 \Longrightarrow x = 56$$

- Conservation du nombre de nucléons :

$$139 = y + 0 \Longrightarrow y = 139$$

D'où l'équation de la réaction nucléaire :

$$\boxed{{}^{139}_{55}Cs \longrightarrow {}^{139}_{56}Ba + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\overline{\vartheta}}$$

2°) Calcul de la constante radioactive.

On a : $T = \dfrac{ln2}{\lambda} \Longrightarrow \lambda = \dfrac{ln2}{T}$

AN : $\lambda = \dfrac{ln2}{7 \times 60} = 1,65.10^{-3}\ s^{-1} \Longrightarrow \boxed{\lambda = 1,65.10^{-3}\ s^{-1}}$

3°) Calcul de la durée.

- D'après la loi de décroissance radioactive :

$$N = N_0 . e^{-\lambda t} \Longleftrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{N}{N_0} \Longrightarrow \lambda t = ln\frac{N}{N_0} \Longrightarrow t = \frac{1}{\lambda}\, ln\frac{N}{N_0}$$

d' où $\boxed{t = \dfrac{T}{ln2} \times ln\dfrac{N}{N_0}}$

AN : $t = \dfrac{7}{ln2} \times ln100 = \dfrac{14 \times ln10}{ln2} \approx 46,5\ min$

d' où $\boxed{t = 46\ min 30\ s}$

....

Collection Cheickna

Nouvelle édition

A VOTRE SERVICE POUR VOTRE SUCCÈS.

GROUPE IA	IIA	IIIB	IVB	VB	VIB	VIIB	VIII	VIII	VIII	IB	IIB	IIIA	IVA	VA	VIA	VIIA	GAZ RARES
1 1,00797 Hydrogène																	2 4,0026 Hélium
3 6,939 Li Lithium	4 9,0122 Be Béryllium											5 10,811 B Bore	6 12,01115 C Carbone	7 14,0067 Azote	8 15,9994 Oxygène	9 18,9984 Fluor	10 20,183 Néon
11 22,9898 Na Sodium	12 24,312 Mg Magnésium											13 26,9815 Al Aluminium	14 28,086 Si Silicium	15 30,9738 P Phosphore	16 32,064 S Soufre	17 35,453 Chlore	18 39,948 Argon
19 39,102 K Potassium	20 40,08 Ca Calcium	21 44,956 Sc Scandium	22 47,90 Ti Titane	23 50,942 V Vanadium	24 51,996 Cr Chrome	25 54,938 Mn Manganèse	26 55,847 Fe Fer	27 58,933 Co Cobalt	28 58,71 Ni Nickel	29 63,54 Cu Cuivre	30 65,37 Zn Zinc	31 69,72 Ga Gallium	32 72,59 Ge Germanium	33 74,922 As Arsenic	34 78,96 Se Sélénium	35 79,909 Br Brome	36 83,80 Krypton
37 85,47 Rb Rubidium	38 87,62 Sr Strontium	39 88,905 Y Yttrium	40 91,22 Zr Zirconium	41 92,906 Nb Niobium	42 95,94 Mo Molybdène	43 99 Tc Technétium	44 101,07 Ru Ruthénium	45 102,905 Rh Rhodium	46 106,4 Pd Palladium	47 107,870 Ag Argent	48 112,40 Cd Cadmium	49 114,82 In Indium	50 118,69 Sn Etain	51 121,75 Sb Antimoine	52 127,60 Te Tellure	53 126,904 I Iode	54 131,30 Xe Xénon
55 132,905 Cs Césium	56 137,34 Ba Baryum	57 138,91 La Lanthane	72 178,49 Hf Hafnium	73 180,948 Ta Tantale	74 183,85 W Tungstène	75 186,2 Re Rhénium	76 190,2 Os Osmium	77 192,2 Ir Iridium	78 195,09 Pt Platine	79 196,967 Au Or	80 200,59 Hg Mercure	81 204,37 Tl Thallium	82 207,19 Pb Plomb	83 208,980 Bi Bismuth	84 210 Po Polonium	85 210 At Astate	86 222 Rn Radon
87 223 Francium	88 226 Ra Radium	89 227 Ac Actinium															

LEGENDE

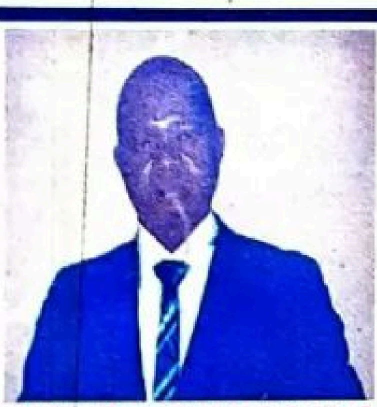
NUMÉRO ATOMIQUE — 4 9,0122 Be Béryllium — MASSE ATOMIQUE (1) — SYMBOLE (2) — NOM

Notes : (1) basé sur le ^{12}C

	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
* 6	58 140,12 Ce Cérium	59 140,907 Pr Praséodyme	60 144,24 Nd Néodyme	61 147 Pm Prométhium	62 150,35 Sm Samarium	63 151,96 Eu Europium	64 157,25 Gd Gadolinium	65 158,924 Tb Terbium	66 162,50 Dy Dysprosium	67 164,930 Ho Holmium	68 167,26 Er Erbium	69 168,934 Tm Thulium	70 173,04 Yb Ytterbium	71 174,97 Lu Lutétium
** 7	90 232,038 Th Thorium	91 231 Pa Protactinium	92 238,03 U Uranium	93 237 Np Neptunium	94 242 Pu Plutonium	95 243 Am Américium	96 247 Cm Curium	97 247 Bk Berkélium	98 251 Cf Californium	99 254 Es Einsteinium	100 253 Fm Fermium	101 256 Md Mendélévium	102 254 No Nobélium	103 257 Lw Lawrencium

Cette nouvelle collection a pour objectif :
inciter les élèves aux études, afin d'éloigner le spectre des échecs qui ne cesse de prendre de l'envergure dans le paysage éducatif de notre pays ;
la diminution du coût du manuel didactique pour permettre la réalisation d'un vieux rêve : un élève un livre ;
la mise à la disposition de nos collègues professeurs un outil de travail plus pratique, plus rapide et efficace.
Nous serions très heureux d'atteindre cet objectif.

A votre service pour votre succès.



N'Faly CAMARA
ingénieur Electrotechnicien
621-42-92-09

Cheickna KONATE
ingénieur Electrotechnicien
621-70-03-19

EDAL-GUINNE

EDAL GUI
Edition Africa Lonny
625 - 75 - 35 - 31