Fascicule TS2

LIMITES DE FONCTIONS

EXERCICE 1 :

Etudier la limite de la fonction f en l'endroit indiqué.

1) $f(x)=5x^3-3x+1$ en $+\infty$, en $-\infty$ et en 1.
2) $f(x)=-2x^4+3$ en $+\infty$, en $-\infty$ et en 0.
3) $f(x)=\left(-3x^3+x-1\right)^3$ en $+\infty$, en $-\infty$ et en 1.
4) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$; en $+\infty$, en $-\infty$ et en (-1).
5) $f(x)=\frac{3x^2-5}{5x-1}$; en $+\infty$, en $-\infty$ et en 2.
6) $f(x)=\frac{(3x-5)^2}{-x^3+2x+4}$; en $+\infty$, en $-\infty$.

EXERCICE 2 :

Etudier la limite de la fonction f en l'endroit indiqué.

1) $f(x)=2x+5-\frac{x-4}{-x^2+x-11}$; en $-\infty$.
2) $f(x)=2+\frac{3}{x^2-9}$; en $+\infty$.
3) $f(x)=x+1-\frac{3x^3}{(x+2)^2}$; en $+\infty$.
4) $f(x)=-x+1-\frac{3x^3}{(x+2)^2}$; en $-\infty$.

EXERCICE 3 :

Etudier la limite de la fonction f en l'endroit indiqué.

1) $f(x)=\frac{x-4}{x^2-6x+5}$; en 1 et en 5.
2) $f(x)=\frac{x^2-4x-12}{x^2-4}$; en 2 et en -2.
3) $f(x)=\frac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$; en 1 et en -2.
4) $f(x)=\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x^2-9}$; en 3 et en -3.
5) $f(x)=\frac{x^4-1}{x^3-1}$; en 1.
6) $f(x)=\frac{5x^2-1}{2x-4}$; en 2.

EXERCICE 4 :

Déterminer la limite en a de la fonction f.

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$; a =4.

2) $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{x+1}}{x-3}$; a =3.

3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{x+1}}{1-x}$; a =1.

4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$; a =3.

EXERCICE 5 :

Calculer les limites suivantes

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+\sqrt{x}-5$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}+\dfrac{5}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x+3)(5-\sqrt{x})$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x-\sqrt{x}}{x^2+1}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-1}-\sqrt{x}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}+x$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-3x$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{3x^2+x-7}+2x$

EXERCICE 6 :

Etudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

1) $f(x)=\sqrt{4x^2+2x-1}-2x+3$

2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}$

3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}-x}{3x}$

EXERCICE 7 :

Démontrer que pour tout $x > -1$, $\dfrac{-1}{x+1} \leq \dfrac{\cos x}{x+1} \leq \dfrac{1}{x+1}$.

En déduire la limite en $+\infty$ de $f(x)=\dfrac{\cos x}{x+1}$.

EXERCICE 8 :

f est une fonction telle que pour tout $x \geq 0$, $|f(x)-3| \leq \dfrac{1}{x+1}$.

Quelle est la limite de f en $+\infty$?

EXERCICE 9 :

Démontrer que pour tout x réel, $x^2-5\sin x \geq x^2-5$.

En déduire la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction $f : x \mapsto x^2-5\sin x$.

EXERCICE 10

Etudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

1) $f(x)=2x+1+3\sin x$
2) $f(x)=\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{\sin x}{x}$
3) $f(x)=\dfrac{x}{2-\sin x}$
4) $f(x)=\dfrac{x+\sin x}{2-\sin x}$

EXERCICE 11 :

En utilisant le théorème sur la limite d'une fonction composée, étudier la limite de la fonction f en l'endroit indiqué.

1) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x^2}{1-x}}$; en $-\infty$
2) $f(x)=\left(x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)^3$; en $+\infty$
3) $f(x)=\cos^2\left(\pi\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)$; en $+\infty$
4) $f(x)=\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; en $+\infty$
5) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-5}}$; en 5

Exercice 12

Soit la fonction f définie dans IR par :

$$f(x) = \frac{2x^3-5x^2-x+6}{x^2-3x+2}$$

1. Soit $P(x) = 2x^3-5x^2-x+6$; montrer que 2 est une racine de P et factoriser P(x)
2. Déterminer le domaine de définition de f et Calculer les limites aux bornes de D_f .
3. Montrer la droite (D) : x = 1 est une asymptote verticale de (C_f)
4. Trouver les autres asymptotes de (C_f) et déterminer la position relative par rapport à (C_f).

Exercice 13

Soit la fonction g définie dans IR par :

$$g(x) = \frac{x^3+2x^2+9x+2}{x^2+1}$$

On note (Cg)sa représentation graphique.

1. Déterminer les réels a , b et c tels que : $f(x) = ax+b+\frac{cx}{x^2+1}$
2. Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de g.
3. Démontrer que la droite d' équation (D) : y = x+2 est une asymptote à la courbe de (Cg).
4. Préciser la position relative de (Cg) et de (D

CONTINUITE

Exercice 14

Etudier la continuité en x_0 des fonctions f ; g et h

1. $f(x) = 4x^3+3x^2+7$; $x_0 = 2$
2. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-27}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 27 & \text{si } x = 3 \end{cases}$; $x_0 = 3$
3. $h(x) = \dfrac{3x+3}{x-5}+2x+5$; $x_0 = 4$, $x_0 = 5$

Exercice 15.

1. Soit a un nombre réel donné et f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+a}{x-2} & \text{si } x \geq 1 \\ x^2-2x-2 & \text{si } x \angle 1 \end{cases}$$

   a. Etudier la continuité au point $x_0 = 1$. Discuter suivant les valeurs du réel a.

   b. Etudier la continuité sur IR.

2. Soit $g(x) = \dfrac{x^2-2x+1-|x-1|}{x-2}$;

   a. Etudier la continuité au point $x_0 = 1$, $x_0 = 2$.

   b. Déterminer le plus grand intervalle de IR+ ou g est continue

Exercice 16

Les fonctions suivantes sont elles continues sur leurs ensembles de définition sinon déterminer leurs points de discontinuités :

a. $f(x) = x^3+3x^2+2$

b. $f(x) = 4x^2+2x-100$

c. $f(x) = \dfrac{4x^2-x+2}{x^2+5x+6}$

d. $f(x) = \dfrac{x^2-3x+1}{x^3-8}$

e. $f(x) = \sqrt{\dfrac{4x^2-4}{x^2+x+6}}$

f. $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2+5}}{3x+1}$

g. $\begin{cases} f(2) = 1 \\ f(x) = \dfrac{mx+4}{2x-4} & \text{si } x \neq 2 \end{cases}$; $m \in IR$

h. $\begin{cases} f(x) = -3x+1 & \text{si } x \angle \dfrac{3}{2} \\ f(\frac{3}{2}) = 5 \\ f(x) = x^2-1 & \text{si } x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Exercice 17.

Déterminer a et b pour que f soit continue sur son ensemble de définition.

a. $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{x-a} & \text{si } x \angle 0 \\ f(x) = x-b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} f(a) = b \\ f(x) = \dfrac{x+1}{x-a} & \text{si } x \neq a \end{cases}$

c. $\begin{cases} f(x) = 3x+a \text{ si } x \rangle 1 \\ f(1) = b \\ f(x) = x^2-\sqrt{x} \text{ si } x \leq 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} f(a) = 1 \\ f(x) = \dfrac{x+a}{x-4} \text{ si } x \neq 4 \end{cases}$

Exercice 18.

Soit f la fonction définie par $f(x)= \dfrac{x^3-27}{x-3}$ et

la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-27}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 27 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer la limite de f au point $x_0 = 3$. En déduire que la fonction g est un prolongement par continuité de f.

Exercice 19.

On considère la fonction f définie par :

$\begin{cases} f(x) = -3x+2 \text{ si } x \prec -1 \\ f(x) = 2x+7 \text{ si } -1 \prec x \prec 3 \\ f(x) = -5x+28 \text{ si } 3 \prec x \prec 6 \\ f(x) = x+3 \text{ si } x \succ 6 \end{cases}$ et f(-1)= 5 et f(6) = 4.

1. Construire le graphe de la fonction f.
2. f est -elle continue en $x_0 = -1$? $x_0 = 3$? $x_0 = 6$?
3. Sur quel ensemble f est – elle continue ?
4. Quelle valeur doit on donner à f(3) pour que f soit continu en $x_0 = 3$?

DERIVABILITE

EXERCICE 1

Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f en a.

1) $f(x) = |x^2 - 1|; a = 2$

2) $f(x) = \dfrac{x-2}{2-|x|}; a = 0$

3) $\begin{cases} f(x) = 5x^2 - 3 & si\ x \in [0;1] \\ f(x) = 3x - 1 & si\ x \in [1;3] \end{cases}$;a=1

EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, préciser si la courbe représentative de la fonction f admet une tangente ou des demi-tangentes au point x_0 indiqué. Si oui, donner une équation de la tangente en ce point.

1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x-1}}{x}\ ;x_0=\dfrac{1}{3}$

2) $f(x)=\sqrt{x^2-x-2};x_0=2$

3) $f(x)=\sqrt{|x^2+3x|};x_0=-3$

4) $f(x)=|x^2-5x+6|\ ;x_0=3$

EXERCICE 3

a ϵIR, f_a la fonction définie par : $f_a(x)=\dfrac{x^3+x^2+x+a}{x^2}$.

a) Déterminer l'ensemble sur lequel f_a est dérivable.
b) Calculer f_a'(x) pour tout x appartenant au domaine de définition de f_a'.
c) Déterminer a pour que la courbe de f_a ait, en son point d'abscisse -1, une tangente parallèle à la droite d'équation y=0.

EXERCICE 4

(C) est la courbe de la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

a) Trouver le point de (C) où la tangente est parallèle à la droite d'équation y=x+4.

b) Donner une équation de cette tangente.

EXERCICE 5

A l'aide du taux de variation de fonctions bien choisies, calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-1}{2x-\pi}$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{x-\dfrac{\pi}{6}}$

d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos x-1}{3x-\pi}$

EXERCICE 6

En utilisant la dérivée de fonctions composées, calculer f'(x) dans les cas suivants :

1) $f(x)=(4-3x)^3$

2) $f(x)=(3x+1)^5$

3) $f(x)=(x^4-x^2+1)^3$

4) $f(x)=\dfrac{1}{(4-5x)^3}$

5) $f(x)=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3$

6) $f(x)=\sqrt{3x^2+1}$

7) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

8) $f(x)=\left(\dfrac{1}{2-\cos 3x}\right)^2$

9) $f(x)=\tan^2\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

EXERCICE 7

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{3x-4}{x-2}$.

1) Déterminer la fonction f' dérivée de f.
2) En déduire la fonction dérivée des fonctions g et h telles que : $g(x)=\dfrac{3\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-2}$ et $h(x)=\dfrac{3\cos x-4}{\cos x-2}$.

EXERCICE 8

Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions suivantes.

1) $h(x)=\dfrac{x-1}{x^2-2x+2}$

2) $g(x)=\dfrac{(x^2+5)^3}{x}$

3) $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+1}$

4) $m(x)=x+\sqrt{x^2-1}$

5) $n(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

6) $v(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

EXERCICE 9

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \; si\, x \prec 0 \\ f(x) = \dfrac{x}{x^2-1} si\, x \geq 0 \end{cases}$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. Dresser le tableau de variation de f.

EXERCICE 10

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2x + \sqrt{x^2+1}$.

1. Montrer que l'équation f(x)=0 admet une solution unique $\propto$ dans$[-1; 0]$.
2. Déterminer la valeur approchée à 10^{-1}prés par défaut de $\propto$.

EXERCICE 11

Soit f la fonction définie sur $[3; +\infty[$ par : $f(x) = x^2\sqrt{x-3}$.

1. Etudier les variations de f.
2. En déduire que l'équation $\sqrt{x-3} = \dfrac{4}{x^2}$ possède une unique solution .

EXERCICE 12

On considère la fonction : $\begin{array}{l} f : \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right] \to [1; +\infty[\\ x \;\; \mapsto \dfrac{1}{\sin x} \end{array}$

1. Démontrer que f est bijective.
2. Calculer : $f^{-1'}\left(\sqrt{2}\right)$; $f^{-1'}\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$; $f^{-1'}(2)$.

ETUDES DE FONCTIONS

EXERCICE 1 : On se propose d'étudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2 + |x-2|}{|x+1|}$$

1) Quel est le domaine de définition D_f de f ?
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur ce domaine et en particulier au point $x = 2$.
3) Etudier les limites aux bornes de D_f , les variations de f et construire sa courbe représentative (C) .On mettra en évidence les deux asymptotes obliques de(C) et on précisera leurs positions par rapport à(C) .

EXERCICE 2 :

Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = \sin^2 x + \cos x$

1) En étudiant la périodicité et la parité de la fonction f, justifier le choix de l'intervalle $I = [0,\pi]$ comme intervalle d'étude.
2) Etudier les variations de f sur I. Tracer la courbe représentative de la restriction de f à
3) $[-\pi,\pi]$.
4) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a, dans I, une solution unique dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

EXERCICE 3 :

On considère les fonctions f et g telles que :

$$g(x) = -2x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - x^2 + x}{1 - x}}$$

1) Etudier et représenter graphiquement la fonction g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2) Déterminer le domaine de définition D_f de f et les limites aux bornes de D_f.
3) Déterminer les branches infinies de (C) la courbe représentative de f.
4) Montrer que $(\forall x \in D_f)$ $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2f(x)(1-x)^2}$
5) Tracer (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 4 :

Soit f la fonction numérique de la variable x définie par : $f(x) = x + 2 - 2\sqrt{x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer le domaine de définition de f et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2) Etudier la dérivabilité de f à droite du point $x_0 = -1$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.
3) Etudier les branches infinies de (C) et la concavité de (C) .
4) Etudier les variations de f.
5) Soit g la restriction de f sur $[0 ; +\infty[$
   a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1}
   b) Déterminer $g^{-1}(x)$.
6) Tracer (C) et la courbe de g^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 5:

Soit f la fonction numérique de la variable x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Préciser le domaine de définition de f.
2) Montrer que f est impaire.
3) Etudier la continuité et la dérivabilité de f au point $x_0 = 0$.
4) Etudier les variations de f sur ℝ.
5) Montrer que f admet une fonction réciproque et donner l'expression de $f^{-1}(x)$.
6) Préciser la position de (C) par rapport à sa tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$.
7) Tracer (C) et la courbe de f^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 6 : On considère la fonction f de ℝ vers ℝ définie par :

$$f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$$

On désigne par (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (OI=4cm, OJ=2cm)

1) Etudier la continuité de f.
2) Etudier la dérivabilité de f en $-\dfrac{1}{2}$ et en $\dfrac{1}{2}$.
3) Démontrer les équivalences suivantes :

a) $\sqrt{4x^2-1} + 4x < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$.

b) $\sqrt{1-4x^2} - 4x > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2\sqrt{5}}\right]$.

En déduire le signe de f'.

4) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

En déduire le tableau de variation de f.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 3x)$

En déduire que la courbe (C) admet 2 asymptotes d'équations $y = -x$ et $y = 3x$.
Construire(C) .

5) a) Démontrer que f détermine une bijection h sur $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$.

Démontrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et les variations.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [x - h^{-1}(x)]$ et en déduire que la représentation (Γ) de h^{-1} et (C) ont une asymptote commune.

Construire la courbe (Γ)

c) Calculer $h^{-1}(0)$ et déterminer une équation de la tangente à (Γ) au point de coordonnées $(0, h^{-1}(0))$.

EXERCICE 7 : Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} x+2 - \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}, & \boldsymbol{x < 0} \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{|x^2-2x|+1}}, & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{cases}$

1) Déterminer Df puis écrire f(x) sans les valeurs absolues.
2) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et en 2.
   b) Interpréter les résultats.
3) Etudier les branches infinies de f.
4) Etudier les variations de f
5) On pose g(x) = f(x) dans $[2 , +\infty[$.
   a) Montrer que g réalise une bijection de $[2 , +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera.
   b) Sans expliciter g^{-1}, étudier la dérivabilité et les variations de g^{-1}.
   c) Calculer $(g^{-1})'(2)$ puis expliciter $g^{-1}(x)$
6) Tracer Cf et Cf^{-1} dans un même repère orthonormé.

EXERCICE 8 : Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x^2+1} \text{ si } x \prec -1, \\ \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}, \text{ si } x \geq -1, \end{cases}$

1/ Donner le domaine de définition de f et calculer les limites à ses bornes.

2/ Etudier la continuité de f sur son ensemble de définition.

3/ Etudier la dérivabilité de f sur Df, puis calculer les dérivées de f sur les intervalles où elle est dérivable, puis dresser le tableau de variation de f.

4/ Dans un repère orthonormé (unité 2cm) construire la courbe (Cf). On précisera les asymptotes ²ainsi que la tangente au d'abscisse x = 0.

5/ Soit g la restriction de f sur $[-1\ ,+\infty[$.

a) Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont on précisera les variations.
b) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique dans$[-1, +\infty[$.
c) Calculer $g^{-1}(1)$.
d) Montrer que g^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(g^{-1})'(1)$.
e) Construire Cg^{-1} de g^{-1}dans le même repère que Cf.

EXERCICE 9 : Soit la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2-\sqrt{x^2+1} & \text{si x } \geq 0 \\ \dfrac{x-|x^2-1|}{-x+1} & \text{si x} \prec 0 \end{cases}$

1) Déterminer Df puis écrire f sans les valeurs absolues.
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en – 1 et en 0. Interpréter les résultats.
3) Etudier les branches infinies et les variations de f.
4) Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique α sur [2; 3].
5) Soit h=f sur $[0 + \infty[$. Montrer h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition . Etudier la dérivabilité et les variations de h.
6) Calculer $h^{-1}(1)$ puis tracer Cf et Ch^{-1} dans un même repère.

EXERCICE 10 : Soit la fonction g(x) = 1 – 2cosx.

1) Résoudre dans I = $[0, \pi]$ g(x) = 0 puis étudier le signe de g sur$[0, \pi]$.
2) Soit f la fonction définie par f(x) = $\dfrac{1+\cos 3x}{\cos^2 x}$. Déterminer Df.
3) Etudier la parité et la périodicité de f. Interpréter.
4) Justifier le choix de l'intervalle J = $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$ comme intervalle d'étude.
5) Calculer les limites de f en $\pi/2$.
6) Montrer que f'(x) = $\dfrac{3(\sin x)g(x)}{\cos x}$. Donner le tableau de variation de f sur J.
7) Tracer Cf.

EXERCICE 11 : Soit f(x) = 1 + 4cosx

1) Déterminer le domaine de f.

2) Montrer que le domaine d'étude peut être réduit à $[0;\ \pi]$.
3) Etudier les variations de f.
4) Tracer Cf.
5) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une seule solution α sur $[0;\ \pi]$ telle que $\pi/2 < \alpha < \pi/2$.

PRIMITIVES

EXERCICE 1 : Déterminer les primitives sur I de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$; $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{x^2}$; $I =]0\ ;+\infty[$

c) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x - 2}{x^4}$; $I =]0\ ;+\infty[$

EXERCICE 2 : Déterminer la primitive F sur I de chacune des fonctions suivantes vérifiant la condition indiquée :

a) $f(x) = 4x^2 - 3x + 2$; $I = \mathbb{R}$ et $F(-1) = 0$

b) $f(x) = 3x + 1 + \dfrac{1}{x^2}$; $I =]-\infty\ ;\ 0[$ et $F(-2) = 1$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2}$; $I =]0\ ;\ +\infty[$ et $F(1) = 0$

d) $f(x) = (2x - 3)\left(x^2 - 3x - 6\right)^2$ $I = \mathbb{R}$ et $F(-1) = 9$

e) $f(x) = \sqrt{x}$ $I =]0\ ;\ +\infty[$ et $F(9) = 20$

Indication : calculer d'abord la dérivée de $x \mapsto x\sqrt{x}$.

EXERCICE 3 : Déterminer une primitive sur I de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (-2x + 1)^5$; $I = \mathbb{R}$

g) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2x-1}}$; $I =]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty[$

b) $f(x)= x^3\left(x^4-1\right)^2$; $I = \mathbb{R}$

h) $f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}}$; $I =]1\,;+\infty[$

c) $f(x) = (2x-3)\left(x^2-3x+3\right)$; $I = \mathbb{R}$

i) $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$; $I =]-\infty\,;-1[$

d) $f(x) = \dfrac{3}{(3x+4)^3}$; $I =]-\dfrac{4}{3}\,;+\infty[$

e) $f(x) = \dfrac{6x-9}{\left(x^2-3x+2\right)^4}$; $I =]1\,;2[$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-4x+3}}$; $I =]-\infty\,;\dfrac{3}{4}[$

EXERCICE 4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-2\,;2\}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2+4}{\left(x^2-4\right)^3}$

1) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout réel x distinct de -2 et de 2 :

$$f(x)= \frac{a}{(x-2)^3}+\frac{b}{(x+2)^3}$$

2) En déduire une primitive de f sur$]-2\,;2[$

EXERCICE 5 : Soit $f(x) = \dfrac{2x^2-x+1}{x+1}$

1) Déterminer trois réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$

2) En déduire une primitive de f sur$]-1\,;+\infty[$

EXERCICE 6 : Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f sur I.

a) $f(x) = \cos x + \sin x$; $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = x + \sin x$; $I = \mathbb{R}$

c) $f(x) = x^2 + 1 + \tan^2 x$; $I =]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

d) $f(x) = \tan^2 x$; $I =]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

e) $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$; $I = \mathbb{R}$

f) $f(x) = \sin x \cos^2 x$; $I = \mathbb{R}$

g) $f(x) = \frac{1}{3}(5x^4 + 1)\sin(x^5 + x)$; $I = \mathbb{R}$

h) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$; $I =]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

i) $f(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$; $I =]0 ; \pi[$

EXERCICE 7 : Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ on ait : $\frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1 + \sin x} + \frac{b\cos x}{1 - \sin x}$

En déduire une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\cos x}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Exercice *8*

1) Déterminer trios réels a, b et c tels que : $\forall x \in IR - \{-1,0,1\}$

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

2) En déduire une primitive sur $]1;+\infty[$ de la fonction f / $f(x) = \frac{-2}{x(x^2-1)}$

Exercice 9

1) On suppose être dans l'intervalle de continuité de f. Déterminer une primitive de f

a) $f(x)=\frac{-1}{\sqrt{x}}$; b) $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}$; c) $f(x)=\sin^3 x\cos^2 x$;

d) $f(x)=\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}$ e) $f(x)=\frac{x+3}{(x^2+6x-1)}$;

2) Déterminer la primitive de la fonction f qui s'annule en a

a) $f(x)=-x+\frac{1}{\sqrt{x}}$; a=1 ;b) $f(x)=(x^2-2)\sqrt{x^3-6x+4}$; a=0

c) $f(x)=\cos^4 x\sin^2 x$; a=$\frac{\pi}{2}$; d) $f(x)=\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}$; a=0

SERIE NOMBRES COMPLEXES

EXERCICE 1 :

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z=(2+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)$
2. $z=(2+5i)^2$
3. $z=\left(\frac{1}{2}-4i\right)^2$
4. $z=(2+5i)(2-5i)$
5. $z=(2+i)(5-8i)(1-i)$
6. $z=(2+i)^2(3+4i)$
7. $z=(2+i)^2(3+4i)$
8. $z=(-1+2i)^3$
9. $z=\frac{1}{\sqrt{3}-i}$
10. $z=\frac{3-3i}{1+i}$
11. $z=\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$
12. $z=\frac{1}{2i-5}-\frac{1-i}{5+2i}$

EXERCICE 2 :

Pour quelles valeurs de x, le nombre complexe z=(x+i) [x+5-i (x-7)] est – il un imaginaire pur ?

EXERCICE 3 :

Pour tout nombre complexe différent de 1, on définit le nombre complexe $Z = \frac{z-2i}{z-1}$. On pose z=x+iy et Z=X+iY, avec x, y, X et Y réels.

1. Exprimer X et Y en fonction de x et y.
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit réel.
3. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

EXERCICE 4 :

Pour tout nombre complexe différent de -1, on pose $Z = \frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$.

1. Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit réel, est une droite privée d'un point.
2. Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit, imaginaire pur est un cercle, privé d'un point.

EXERCICE 5 :

Dans chacun des cas suivants déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit réel.

1. $Z = (z+1)(\bar{z}-2)$
2. $Z = \frac{z+2i}{z-4i}$
3. $Z = 2z^2 - 3z + 1$.

EXERCICE 6 :

Calculer le module de z dans les cas suivants :

1. z=1-i$\sqrt{3}$
2. $z = \sqrt{3} + i$
3. $z = -2(1+i)^6$
4. $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$
5. $z = \frac{4}{1+i\sqrt{3}}$
6. $z = \frac{(1-i)^5}{(1-i\sqrt{3})^4}$

Exercice 7 :

1. Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$\left(3-2i\right)\left(1-i\right)-3i+\sqrt{2}+\left(3-4i\right)\left(3+4i\right)$; $\left(1+i\right)^{2}$ $\dfrac{3+i}{2-i}+\dfrac{2-i}{3+i}$; $\dfrac{4+5i}{2-i}-\dfrac{1-3i}{1+i}+\left(2i+3\right)i$;

$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$; $\dfrac{\left(-1-2i\right)^{3}}{\left(1+i\right)^{4}}$; $i^{3}\left(1+3i\right)\left(\dfrac{1}{i}-2\right)$; $\left(1+i\right)^{n}, n\in\square$

2. On pose $j=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer : $\bar{j}$; j^{2} ; j^{3} ; $1+j+j^{2}$; $1+j^{2}+j^{4}$; $\dfrac{1+j}{\left(1-i\right)^{2}}+\dfrac{1-j}{\left(1+i\right)^{2}}$.

Exercice 8 :

Déterminer et représenter l’ensemble des points $M(z)$ du plan complexe muni d’un R.O.N.D tels que :

a) $Z=(z-2)\left(\bar{z}+i\right)$ soit réel ;

b) $Z=\left(\bar{z}-2\right)(z-i)$ soit imaginaire pur ;

c) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)=0$; d) $\dfrac{1+z}{\bar{z}}\in\square$; e) $\left(z\bar{z}\right)^{2}-z\bar{z}-6=0$

f) $z\bar{z}+i\left(z-\bar{z}\right)-3=0$; g) $2\left|z-i\right|=\left|z-\bar{z}+2i\right|$

h) $\left|z+\bar{z}-1\right|=4$

EXERCICE 9 :

1) Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants : l

a) $z_1=\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$; b) $z_2=\dfrac{(2-3i)(1+i)}{(3+5i)^{2}}$ c) $z_3=\dfrac{(1+i)^{2}}{(1-i)}+\dfrac{(1-i)^{4}}{(1+i)^{2}}$

2)Mettre chacun des complexes suivants sous forme trigonométrique.

a) $z_1 = \dfrac{2i - 2\sqrt{3}}{4i+4}$; $b)\, z_2 = \cos\dfrac{\pi}{5} - i\sin\dfrac{\pi}{5}$ **c)** $z_3 = \sin\dfrac{\pi}{2} + i\cos\dfrac{\pi}{2}; d)\, z_4 = 1 - i\tan\dfrac{\pi}{10}$ **e)** $z_5 = \dfrac{1-\cos\theta - i\sin\theta}{1+\cos\theta - i\sin\theta}; \theta \in IR$ **;f) z=** $(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}})^3$

3)a)On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **; calculer** j^2**. En déduire le calcul de :**

$1 + j + j^2$; $j^3; \dfrac{1}{j}$

b) Démontrer que , $\forall (a,b,c) \in C^3$ **on a :**

$2(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$

4) a) Déterminer le module et un argument de :

$z_1 = -1 + i\sqrt{3}$; $z_2 = 1 + i; \dfrac{z_1}{z_2}$

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{5\pi}{12}\ et \sin\dfrac{5\pi}{12}$

<u>EXERCICE 10</u>

1) Résoudre dans C

a) $(3+5i)z = 2i - z$; $b)\dfrac{z+1}{z-1} = 2i$; c) $z - (1+i)\bar{z} + 3 - 2i = 0$; $d)\dfrac{iz}{\bar{z} - 2i} = 3$ e) $z + 3\bar{z} = (2 + i\sqrt{3}).|z|$ f)= $\overline{(1+i)\bar{z} - 1 + i} = \bar{z} - i$; g) $iz^2 - 2\bar{z} + 2 - i = 0$

*2**)On considère les la fonction f de la variable complexe z définie par :***

$f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3+i})z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i$

a) Montrer qu'elle admet une solution imaginaire pure
b) Résoudre f(z)=0
c) Ecrire les solutions sous forme algébrique et trigonométrique

3)Résoudre dans C les équations :

$z^2 - (1+\sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$

$z + \dfrac{1}{z} = 1$; $z + \dfrac{1}{z} = \sqrt{2}$

Soit $p(z) = z^4 - (1+\sqrt{2})z^3 + (2+\sqrt{2})z^2 - (1+\sqrt{2})z + 1$

a) Exprimer $\dfrac{p(z)}{z^2}$ en fonction de $Z = z + \dfrac{1}{z}$
b) Résoudre P(z)=0

4) ***Soit l'équation d'inconnue z*** $\in C : z^2 + 2z + 4 = 0$

Soit $\alpha\, et \beta$ *avec* $\mathrm{Im}(\alpha) > 0$ les solutions de cette équation

a) Donner la forme algébrique de $\alpha\, et\, \beta$

b) Mettre $\alpha\, et\, \beta$ sous forme trigonométrique et placer leurs images dans le plan complexe.

c) Déterminer $\frac{\alpha^3}{\beta^2}$ *en fonction de* β. Q'en déduire pour $\alpha^3\, et\, \beta^3$?

d) Mettre β^{24} sous forme algébrique.

<u>EXERCICE 11</u>

a) Déterminer le module et un argument de $4\sqrt{3} + 4i$

b) Résoudre dans C ,l'équation $(E) = z^2 = 4\sqrt{3} + 4i.$

⊕ en écrivant z sous la forme z=x+iy (x,y) €IR (on pourra utiliser l'égalité $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$)

$\oplus$ *En écrivant z sous la forme* $z = re^{i\theta}$ $r \in IR_{+,}$ $\theta \in IR$

c) En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{\pi}{12}$.

d) Résoudre l'équation d'inconnue $x \in IR : (\sqrt{6} + \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2})\sin x = 2$

EXERCICE 12:

1.
2. Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z, on ait : $f(z) = \left(z^2 + 4\right)\left(z^2 + az + b\right)$.
3. Résoudre dans ℂ l'équation f(z)=0.

EXERCICE 13 :

1. Déterminer les nombres complexes z= x+iy dont le carré est $z^2 = -59 - 40i\sqrt{3}$.
2. Résoudre dans ℂ l'équation(1) : $z^2 - \left(5 - 4i\sqrt{3}\right)z + 9 = 0$.

EXERCICE 14 :

Soit p le polynôme tel que: $p(z) = z^3 - (5 + i)z^2 + 6(1 + i)z - 8(1 + i)$.

1. Montrer que l'équation $z \in \mathbb{C}$,p(z)=0 admet une solution réelle que l'on déterminera.
2. Vérifier que 2i est une solution de l'équation p(z)=0.
3. Factoriser le polynôme p et résoudre dans ℂ l'équation p(z)=0.
4. On distinguera les trois solutions z_1, z_2 et z_3 de l'équation p(z)=0 par : $|z_1| \prec |z_2| \prec |z_3|$.

a. Placer dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.
b. Montrer que le triangle $M_1 M_2 M_3$ est rectangle isocèle.

EXERCICE 15 :

On considère l'équation (E) : $z^3+(1-5i)z^2-8(1+i)z-12+4i=0$.

1. Démontrer que z_1=-2 est une solution de (E).
2. Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pur z_2, achever la résolution ; on note z_3 la dernière solution.
3. On considère un plan complexe P. Soit A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.
   a. Placer les points A, B et C dans P.
   b. Démontrer que A, B et C sont alignés.

<u>LES NOMBRES COMPLEXES AU BAC S2</u>

<u>Exercices 16</u>

1)Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les équations suivantes :

a) * $z+3\bar{z}=(2+i\sqrt{3})|z|$;* $iz-2\bar{z}+2-i=0$;* $4z^2+8|z|^2-3=0$.

b) * $\sqrt{3}\cos x-\sin x=-1$;* $3\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=3$.

c) Soient les nombres complexes $z_1=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$; $z_2=1-i$.

* Mettre sous forme trigonométrique z_1 ; z_2 et $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$.

*En déduire que $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{4}$ et $\sin\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

*On considère l'équation d'inconnue $x\in IR$. $(E):\left(\sqrt{6+\sqrt{2}}\right)\cos x+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin x=2$

_ Résoudre (E) dans IR puis placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2) Soit C le corps des nombres complexes et i un nombre complexe tel que $i^2=-1$.

a) calculer $\left(\dfrac{1}{2}+i\sqrt{3}\right)^4$.b) déterminer les réels a,b tels que : $(a+ib)^4=\dfrac{73}{16}-\dfrac{11}{2}\sqrt{3}i.$

3) Linéariser les expressions trigonométriques suivantes .

a) A(x) = $\cos^4 x \sin x$; b) B(x)=$\cos^3 \frac{x}{2}$.

EXERXICE 17 BAC 2003

Dans l'ensemble C des nombres complexes, on considère l'équation ($E): Z^3 + (1-8i)Z^2 - (23+4i)Z - 3 + 24i = 0$

a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure et la déterminer

b) Montrer que $1+2i$ et $-2+3i$ sont solutions (E)

c) Donner l'ensemble des solutions de (E)

Dans le plan rapporté à un repère ortho normal $(o,\vec{u},\vec{v})$ Soit A, B et C d'affixes respectives $+2i \quad 3i$, $-2+3i$

Soit G bar $\{(A,2),(B-2),(C,1)\}$

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}\ et \overrightarrow{GC}$ ont pour affixes respectives $\sqrt{2}e^{i\frac{\Pi}{4}},\ 2i,\ 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\Pi}{4}}$ et que ces affixes sont dans cet ordre en progression géométrique ; déterminer la raison de cette suite .

b) En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C .Donner les éléments caractéristiques.

EXERCICE 18 BAC 2002

1) Montrer que dans C la somme des racines n^{ième} de l'unité est égale à zéro $(n \geq 2)$

2) En utilisant les résultats du 1) montrer que cos$(\frac{\Pi}{5})$ est solution de l'équation $4x^2 - 2x - 1 = 0$

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\Pi}{5}$, $\cos\frac{2\Pi}{5}$ et $\cos\frac{\Pi}{10}$

EXERCICE19 BAC 2001

Le plan complexe (P) est muni d'un repère ortho normal direct $(o,\vec{u},\vec{v})$

Soit f l'application de $C-\{2i\}$ vers C définie par $f(z) = \frac{2z-i}{z-2i}$

a) Résoudre dans C f(z)=z .Donner les solutions z_1 et z_2 sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique .

b) Calculer $z_1^4 + z_2^4$

1) Soit M(z) un point de (P)

Soit (Γ) l'ensemble des points M(z) tels que f(z) soit imaginaire pur ,donner une équation cartésienne de (Γ) ,Tracer (Γ).

2) Monter que $/z/=1 \Leftrightarrow /f(z)/=1$

EXERCICE 20 BAC 2000

On considère les points A_1, A_2 et A_3 d'affixes respectives :

$z_1 = 1 \quad z_2 = 1+\sqrt{2}+i\sqrt{2} \quad z_3 = \dfrac{5+i\sqrt{3}}{4}$

1. a) Donner une écriture trigonométrique des nombres complexes z_2-z_1 et

z_3-z_1

b) Donner une écriture trigonométrique de $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$

En déduire les valeurs exactes $\cos(\dfrac{\Pi}{2})$ et $\sin(\dfrac{\Pi}{12})$

2) Soit S la similitude plane directe transformant A_2 en A_3 et A_1 en A_1

a) Préciser les éléments caractéristiques de S

b) On désigne par M' d'affixe z' l'image de M d'affixe z

Exprimer z' en fonction de z. En déduire l'image par S du point B d'affixe $1-4\sqrt{2}e^{-\frac{i\Pi}{3}}$

<u>Exercice 21</u> BAC 1999

On considère l'équation $(E): z^3 + (3-2i)z^2 + (1-4i)z - 1 - 2i = 0$

1. a) Vérifier que (E) admet une solution réelle

b) Achever la résolution de (E)

2) Dans le plan complexe on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -1.; z_B = -2+i \quad z_C = i$

a) Déterminer le module et un argument de $\dfrac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$

b) En déduire la nature du triangle ABC

c) Donner le centre, le rapport et l'angle de la similitude plane directe qui laisse invariant A et transforme B en C .

<u>EXERCICE 22</u> BAC 1998

1) Résoudre dans C les équations

a) $Z^2 - 2Z + 5 = 0$ b) $Z^2 - 2(1+\sqrt{3})Z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$

On considère dans le plan rapporté à un repère ortho normal $(o,\vec{u},\vec{v})$ les points A, B, C et D d'affixes respectives $1+2i\,;1+\sqrt{3}+i\,;1+\sqrt{3}-i\,;1-2i$

a) Placer A, B, C, D dans le plan (P)

b) Vérifier que $\dfrac{Z_D - Z_B}{Z_A - Z_B} = i\sqrt{3}$ en déduire la nature du triangle ABD

c) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (C) dont ont précisera le centre et le rayon.

3) On considère l'équation (E) : $Z^2 - 2(1+2\cos\theta)Z + 5 + 4\cos\theta = 0;\ \theta \in IR$

a) Résoudre (E) dans C

b) Montrer que les points images des solutions de (E) appartiennent à (C) .

EXERCICE 23 BAC 1997

1. a) Calculer le module et un argument du nombre complexe $w = \frac{2+2i\sqrt{3}}{4}$

b) En déduire ses racines carrées
2) Résoudre dans C L'équation suivante $Z^2 + (\sqrt{3} - 7i)Z - 4(3 + i\sqrt{3}) = 0$
3) Soit Z_1 la solution imaginaire pure et Z_2 l'autre solution, montrer que $\frac{Z_2 - 2i}{Z_1 - 2i} = w$

4) Dans le plan complexe rapporté à un repère ortho normal $(o, \vec{u}, \vec{v})$ soit A, B et C les points d'affixes respectives $2i, Z_1, Z_2$
Préciser la nature du triangle ABC en utilisant1. a)

Exercice 24

1) Déterminer, sous forme trigonométrique,les solutions de l'équation : $z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$ dans l'ensemble des nombres complexes.
2) En utilisant les racines cubiques de l'unité, écrire les solutions de cette équation sous forme algébrique .
3) En déduire des questions précédents les valeurs de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

EXERCICE 25 BAC 1995
On considère le polynôme P de variable complexe Z définie par $f(Z) = Z^3 + iZ^2 - 3Z + 5i$
1) Calculer P(i) puis déterminer toutes les racines de P(z) on notera Z_1 la racine dont la partie réelle est négative et Z_2 l'autre racine .

2 a) Ecrire sous forme trigonométrique que le nombre complexe $\frac{Z_1 - i}{Z_2 - i}$

Dans le plan complexe de repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A(i), B (Z_1) et C(Z_2)
Déduire de la question précédente la nature du triangle ABC.

On considère A(i), B(-i) et M(z) on pose $Z = \frac{z-i}{z+i}$

1. a) Déterminer l'ensemble (D) des points M(z) tels que Z soit réel.
b) Déterminer l'ensemble (C) des points M(z) tel Z soit imaginaire pur
2. a) Interprétez géométriquement les modules de $z - i$ et z+i

Montrer que /Z/=1si et seulement si z est réel

b) Soit $n \in IN^*$ et $a \in \left]o, \frac{\Pi}{2}\right[$ déduire de la question précédente que l'équation

(E) : $(\frac{z-i}{z+i})^2 = \cos 4a + i \sin 4a$ n'admet que des solutions réelles.

(on ne demande pas de les calculer).

c) Résoudre l'équation Z^2 = cos 4a+isin4a .En déduire les solutions de (E).

EXERCICE 26

Soit (P) le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les applications T_1, T_2 dont les écritures complexes sont : $T_1 : z_1 = (\sqrt{3}+i)z$ et $T_2 : z_2 = (1-i\sqrt{3})z + 3$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T_1etT_2

2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T_2o T_1

3) Démontrer qu'il existe un seul point K tel que $T_1(K) = T_2(K)$ .soit $L = T_1(K)$

Calculer les affixes des points K et L.

4) Démontrer que le point L est invariable par chacun des applications $T_2 o T_1^{-1}$ et $T_1 o T_2^{-1}$

Quelle est la nature de chacune de ces applications. Préciser leurs éléments caractéristiques

EXERCICE 27

1) On considère l'équation (E) dans C : $Z^4 + 7 + 24i = 0$

a) Vérifier $Z_0 = 2 - i$ est une solution de (E)

b) Déterminer les racines quatrièmes de l'unité dans C et en déduire l'ensemble des solutions de (E).

2)Dans le plan complexe de repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$ on considère $A(1+2i), B(-2+i); C(-1-2i)$ et $\Omega(2-i)$

a) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe S_1 de centre Ω qui transforme A en B.

b) Soit S_2 la transformation du plan qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que $z' = \frac{1+i}{2}z + \frac{1-3i}{2}$ caractériser S=S_2oS_1

3) Soit r la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\Pi}{2}$

a) Donner l'affixe du point D tel que r(O)=D

b) Montrer que les points O, A, D et B appartienne à un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

c) Déterminer l'image du cercle (C) par r .

4) Soit $T_2 : M(z) \to M_2(z_2)$ tel que $z_2 = \alpha^2 z + \beta$, α et $\beta \in C$

Déterminer α et β tels que $S_2 o T_2$ soit :
a) Une translation de vecteur $\vec{u}\binom{1}{0}$
b) Une rotation de centre O et d'angle $-\frac{\Pi}{2}$

<u>EXERCICE 28</u>

Le plan complexe est muni d'un repère ortho normal direct $(o,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points $A'(\alpha = 1-i)$ $B(\beta = 1+i)$
A tout point M d'affixe z distinct de O, la fonction φ associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = 2 - \frac{2}{z}$
1) Montrer A et B sont invariants par φ .
2) Soit M(z) distinct de A et de B, d'image M'(z') par φ
a) Montrer que $\frac{z'-\beta}{z'-\alpha} = y\frac{z-\beta}{z-\alpha}$ où $y = \frac{\alpha}{\beta}$
b) En déduire que $\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B}$ et donner la relation entre $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$ et $(\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B})$
c) Déduire de ces relations que si M appartienne au cercle de diamètre $[AB]$ son image par φ appartient à la droite (AB) .

<u>EXERCICE 29</u>

Soit $P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8$

1) Montrer que $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$

a) Calculer P(i)

b) En déduire deux solutions de $(E) : P(z) = 0$

2. a) Mettre P(z) sous forme d'un produit de deux polynôme de degrés 2

b) Résoudre (E)

<u>EXERCICE 30</u>

1) Exprimer les racines z_k dans C de l'équation $z^5 = 1$ en fonction des nombres $\theta_k = \frac{2k\pi}{5}$ *oû* $0 \le k \le 4$
2) Quelle est la nature du polygone dont les sommets A_k ont pour affixes z_k ? $(0 \le k \le 4)$

3) Montrer que $z_0+z_1+z_2+z_3+z_4 = 0$. En déduire une équation du second degré à coefficients entiers dont le nombre $a = \cos\frac{2\pi}{5}$ est solution. (On remarquera que $z_4 = \frac{1}{z_1}$ *et* $z_3 = \frac{1}{z_2}$ et $\cos 2x=2\cos^2 x-1$)

4) Résoudre cette équation et calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$; $\cos\frac{4\pi}{5}$; $\cos\frac{\pi}{5}$; $\cos\frac{8\pi}{5}$

EXERCICE 31

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sin\frac{\Pi}{n} + \sin\frac{2\Pi}{n} + ...+ \sin\frac{(n-1)\Pi}{n}$

a) Posons $z = \cos\frac{\Pi}{n} + i\sin\frac{\Pi}{n}$. Donner une expression simple de la somme $1 + z + z^2 + ...+ z^{n-1}$

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de cette somme

En déduire l'égalité $S_n = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}$

b) Quelle est la limite de la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)n \in \mathbb{N}^*$?

EXERCICE 32

Soit n>0 ; ɵ є $]0;\pi[$; on considère les expressions

$S_n = \cos^2$ɵ + $\cos^2$ɵ cos2ɵ +……..+$\cos^p$ɵ cos pɵ +…….+$\cos^n$ ɵ cos nɵ

$S_n' = \cos$ɵ sinɵ + $\cos^2$ɵ sin2ɵ+……+ $\cos^p$ɵ sin pɵ +……..+ $\cos^n$ ɵ sin nɵ

On pose $T_n = S_n + i S_n'$

Montrer que T_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique complexe dont on donnera le premier terme et la raison .

En déduire une expression simple de T_n , puis de S_n en fonction n et ɵ

(on montera que $S_n = \cos_\theta^{n+1}(\frac{\sin n\theta}{\sin\theta})$

EXERCICE 33

Soient, dans le plan complexe P, deux points M et M' d'affixes respectives z et z' tels que l'on ait : z' = (1 + i) z + 1

1°) Calculer le module et un argumentde1 + i.

2°) Déterminer les éléments géométriques de la transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe (1 + i) z +1.

3°) Déterminer l'ensemble des M du plan complexe tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ aient la même norme.

EXERCICE 34

Soit f la transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : z' = 2(1 + i$\sqrt{3}$)z + 3.

1°) Quelle est la nature de f? Préciser ses éléments caractéristiques.

2°) Soit D,droite d'équation : x - y $\sqrt{3}$ = 0. Quelle est l'équation de l'image f(D) de D?

3°) Quelle est l'image par f du cercle de rayon 2 dont le centre est le point I(2i) ?

EXERCICE 35

Dans plan complexe, soit f la transformation qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : z' = (1 + i$\sqrt{3}$) z + $\sqrt{3}$(1 – i).

1°) démontrer que f admet un unique point invariable I ; déterminer l'affixe de I.

Caractériser géométriquement f.

2°) Soit G le barycentre des points I, M, M' affectés respectivement les cœfficients 3, 2, 1. Calculer les coordonnées de G en fonction de celles de M.

3°) On suppose que le point M décrit la droite d'équation : y = x.

Quel l'ensemble décrit par le point G?

SERIE SUITE NUMÉRIQUE

EXERCICE1

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 2$
2) Montrer que (u_n) est croissante
3) En déduire que (u_n) converge vers un réel l à déterminer.
4) Démontrer que $\forall n \in IN, |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2| \text{ puis } |u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$
5) Retrouver les résultats de la troisième question

EXERCICE 2

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{2u_n + 5} \end{cases}$

1) Montrer pour tout entier naturel $u_n \geq -\dfrac{1}{2}$
2) Etudier les variations de (u_n)
3) En déduire que (u_n) admet une limite à déterminer
4) Soit (v_n) définie par $v_n = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 1}$. Démontre que (v_n) est une suite géométrique. Exprimer u_n en fonction de n et étudier la convergence de (u_n)

EXERCICE 3

Soit $\begin{cases} u_0 = \dfrac{2}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{n+2}{2\sqrt{2}} \end{cases}$

1) Calculer u_1 et u_2
2) Soit (v_n) définie par $v_n = u_n\sqrt{2} - n$. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique
3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n. Etudier la convergence de (u_n)
4) $S_n = u_0 + u_1 + \dots\dots\dots + u_n$. Exprimer S_n en fonction de n puis déterminer sa limite

EXERCICE 4

Soit $\begin{cases} u_0 = \dfrac{5}{4} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - n - \dfrac{4}{3} \end{cases}$

$V_n = u_n + an + b$

1) Déterminer les nombres réels a et b sachant que (v_n) soit une suite géométrique. En déduire v_n puis u_n en fonction de n.
2) $S_n = v_0 + v_1 + \dots\dots\dots + v_n$
   $T_n = u_0 + u_1 + \dots\dots\dots + u_n$

 Calculer S_n et T_n en fonction de n

EXERCICE 5

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel non nul n par

$\begin{cases} u_1 = 12 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$

1) $w_n = v_n - u_n$ pour tout n non nul. Démontrer que (W_n) est une suite géométrique convergente.
2) Exprimer w_n en fonction de n.
3) Démontrer que (u_n) décroissante et (v_n) croissante.
4) Démontrer que pour tout entier non nul n, $u_n \geq v_n$ et en déduire que $v_1 \leq v_n \leq u_n \leq u_1$
5) Conclure
6) $T_n = 3u_n + 8v_n$ avec n entier naturel non nul. Montrer que (T_n) est une suite constante puis déterminer les limites de (u_n) et (v_n)

EXERCICE 6

Soit la fonction f définie sur IR par f(x)=2x-sinx

1) Montrer que f réalise une bijection de IR vers IR. On désigne par x_0 l'unique solution de l'équation f(x)=4
2) Soit g la fonction définie sur IR par g(x)=1/2(4+sinx)
   a) Montrer que $\forall x \in IR,\ f(x) = 4 \Leftrightarrow g(x) = x$
   b) Montrer que $\forall x \in IR, |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$
3) Soit la suite (u_n) *définie par* $u_0 \in IR$ *et* $\forall n \in IN\ u_{n+1} = g(u_n)$
   a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\forall n \in IN, |u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2}|u_n - x_0|$, en déduire que $\forall n \in IN\ |u_n - x_0| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - x_0|$
   b) En déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice 7 :

(U_n) est une suite arithmétique de raison a et on note $s_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$

1°) a = 5 et $U_0 = 1$ Calculer U_4 et S_{10}
2°) a = – 4 et $U_3 = 20$ Calculer S_{15}
3°) $U_5 = 8$ et $U_{10} = 28$ Calculer S_{15}
4°) Calculer U_4 et U_5 sachant que $U_0 = 2$ et que $U_4 \times U_5 = 18$
5°) Calculer U_0 et a sachant que $S_{10} = 88$ et que $S_{12} = 143$
6°) a = 3 et $U_0 = -10$ Déterminer n tel que $S_n = 200$

Exercice 8

(U_n) est une suite géométrique de raison b et on note $s_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$

1°) b = – 5 et $U_0 = 3$ calculer U_3 et S_3

2°) $U_2 = 5$ et $U_3 = 7$ Calculer U_4 et S_4

Exercice 9:

On donne (U_n) définie par $U_1 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{U_n + 1}$ calculer les premiers termes et conjecturer une expression de U_n en fonction de n et démontrer que votre formule est bonne par récurrence.

Exercice 10:

Soit la suite (V_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $V_0 = 2$ et $V_{n+1} = 2\,V_n - 1$
1°) Démontrer que la suite (U_n) définie par $U_n = V_n - 1$ est géométrique
2°) Déterminer l'expression de U_n puis celle de V_n et étudier leurs limites.

Exercice11:

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$; $U_1 = 3$ et si $n \in \mathbb{N}$:
$U_{n+2} = \dfrac{1}{2} a^2\, U_{n+1} + (a - 3)\, U_n$ et on introduit (V_n) par $V_n = U_{n+1} - U_n$
1°) On pose $a = 2$
a) Démontrer que (V_n) est une suite constante.
b) En déduire que (U_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
c) Exprimer, en fonction de n, U_n et $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} U_i$ en déduire la somme des entiers naturels impairs inférieurs à 100
2°) On pose $a = -4$
a) Vérifier que (V_n) est géométrique et exprimer V_n en fonction de n.
b) Calculer la somme $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} V_i$ en fonction de n
c) Démontrer que $S_n = U_{n+1} - 1$

Exercice 12:

Soient les suites numériques (V_n) et (W_n) définie par $V_0 = -\dfrac{3}{2}$ et $V_{n+1} = \dfrac{2}{3}$
$V_n - 1$
et $W_n = 2\,V_n + 6$

1°) Démontrer que (W_n) est géométrique et donner les expressions en fonction de n de W_n et V_n.
2°) Calculer $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} W_k \quad s'_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$

Exercice 13

On considère f (x) = $\sqrt{\frac{1+x}{2}}$ définie sur [0 ; 1]
1°) Résoudre f (x) = x
2°) Démontrer que si $x \in [0\,;1]$ alors $f(x) \in [0, 1]$
3°) Démontrer que $f(x) - 1 = \dfrac{1}{2\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} + 1\right)}(x-1)$ et en déduire que $1 - f(x) \leq \frac{3}{10}(1-x)$ dans [0; 1]
4°) On définit (U_n) par $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$
a) Pourquoi U_n est-il toujours dans [0 ; 1] ?
b) Justifier que $1 - U_{n+1} \leq \frac{3}{10}(1 - U_n)$
c) Démontrer par récurrence que $1 - U_n \leq \frac{1}{2} \times 0{,}3^n$ et en déduire la limite de (U_n)

Exercice 14:

A] On considère f (x) = $\sqrt{\frac{1+x}{2}}$ définie sur $[0\,;+\infty[$
1°) Démontrer que si $0 \leq x \leq 1$ alors $0 \leq f(x) \leq 1$
2°) Démontrer que $f(x) - x = \dfrac{-2x^2 + x + 1}{2\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}} + x\right)}$ et étudier le signe de f (x) – x pour $x \in [0\,;1]$
B] On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}}$
1°) Démontrer par récurrence que si $n \geq 0$ on a $0 \leq U_n \leq 1$
2°) Etudier le sens de variation de (U_n)
3°) On rappelle la formule très connue $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$

a) Démontrer que l'on a $\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ pour $x \in [0\,;\pi]$

b) Démontrer par récurrence que si $n \geq 0$ on a $U_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

c) Conclure pour la limite de (U_n)

Exercice 15:

(U_n) est une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison -1

1°) On pose $s_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ .Démontrer que $S_n = \frac{(n+1)(4-n)}{2}$

2°) On pose $V_n = e^{U_n}$

a) Démontrer que (V_n) est géométrique.

b) On pose $P_n = V_0 \times V_1 \times \ldots\ldots \times V_n$,

Déterminer l'expression de P_n en fonction de n et déterminer n pour que $P_n = e^{-88}$

Exercice 16:

Soit f définie par $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ sur$\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

1°) Démontrer que, pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq 1$

On peut donc définir la suite (Un) par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

2°) On considère les suites (V_n) et (W_n) telles que pour tout n

$$V_n = \frac{U_n - 1}{U_n} \qquad \text{et} \qquad W_n = \ln V_n$$

a) Vérifier que (Vn) et (Wn) sont bien définies.

b) Démontrer que (Wn) est géométrique.

c) Exprimer en fonction de n, W_n puis V_n et en déduire que $U_n = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$.Quelle est la limite de (U_n).

Exercice 17:

1°) Soit g la fonction définie par $g(x) = x^2 + \ln x - 2$.

a) Etudier les variations de g.

b) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique a dans I = [1,30 ; 1,35].

c) Montrer que l'équation g(x) = 0 est équivalente à l'équation f (x) = x où $f(x) = \sqrt{2 - \ln x}$

2°) On étudie f sur I = [1,30 ; 1,35].

a) Déterminer le sens de variation de f sur I et montrer que I est stable par f.

C'est à dire que si $x \in I$ alors $f(x) \in I$.

b) Démontrer que pour x dans I on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{3}$.

c) Démontrer que: pour tout x de I on a :$|f(x) - a| \leq \frac{1}{3}|x - a|$.

3°) Soit (Un) la suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$ et

la condition initiale $U_0 = 1{,}3$.

a) Démontrer que pour tout n $U_n \in I$.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $|U_{n+1} - a| \leq \frac{1}{3}|U_n - a|$.

c) Démontrer par récurrence que l'on a : $|U_n - a| \leq \frac{5}{100}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

d) Déterminer la limite de la suite (Un) et préciser un entier n_0 tel que $|U_n - a| \leq 10^{-6}$.

Donner une valeur approchée de U_{n_0}.

FONCTIONS LOGARITHMES

EXERCICE 1

A Exprimer à l'aide de ln 2 et ln 3 les nombres $A = \ln 12$ $B = \ln \frac{1}{36}$ $C = \ln\sqrt{72}$

$D = \ln 0{,}75$

$E = \ln(2e^2) - \ln(9e)$ $F = \ln 6e - \ln 2e$

B Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = \ln(x-1) + \ln(x-3)$ et $g(x) = \ln(x-1)(x-3)$.

1- Préciser Df et Dg.
2- Résoudre dans IR les équations $f(x) = \ln 3 + 3\ln 2$ et $g(x) = \ln 3 + 3\ln 2$
3- Résoudre dans IR les inéquations $f(x) \geq \ln 3 + 3\ln 2$ et $g(x) \geq= \ln 3 + 3\ln 2$.
4- On considère $P(x) = 3x^3 - 8x^2 - x + 10$ Calculer P (2) puis mettre (x – 2) en facteur dans P
   Résoudre alors $3(\ln x)^3 - 8(\ln x)^2 - (\ln x) + 10 = 0$

C a) Résoudre $\ln(x+1) + \ln(2x+1) = 0$ b) démontrer que si $x \geq \sqrt{2}$; alors $x + \ln(x^2 - 1) \geq x$

c) Résoudre $2\ln(x+1) - \ln(x+3) = 0$ d) Résoudre $(\ln x)^2 - 3\ln x + 4 \leq 0$

e) Résoudre $(\ln x)^2 - \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 2$ e) En utilisant log trouver le plus petit n tel que $1-\left(\frac{35}{36}\right)^n \geq 0,99$

EXERCICE 2

Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes

- $\ln(x-1) + \ln(x-2) = \ln|x-4|$; $\ln^2 x - \ln(\frac{1}{x}) = 2$; $\ln(\ln x) > 0$.
- $\ln x - 3 > \frac{4}{\ln x}$; $\ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right) \geq \frac{1}{2}$; $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) < 0$.

Résoudre les systèmes

$\begin{cases}(\ln x)(\ln y) = -15 \\ \ln(xy) = -2\end{cases}$ $\begin{cases}x^2 + y^2 = 10 \\ \ln x + \ln y = \ln 3\end{cases}$

EXERCICE 3

Calcul de limites

1- Etudier la limite en 0 et en $+\infty$ de f(x) :

$f(x) = \sqrt{x}\ln x$; $f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x}$; $f(x) = x\ln(x^2)$.

2- calculer les limites de f en $+\infty$.

$f(x) = \ln x - x$; $f(x) = \ln(x-1) - \ln x$; $f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}$; $f(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x}$.

3- Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln|x-2|}{\ln|x|}$.

a- Donner Df

b- Calculer les limites de f aux bornes de Df.

EXERCICE 4

1- Préciser l'ensemble de dérivabilité de f puis donner la fonction dérivée de f.

$f(x)=x^2\ln(x-1)$; $f(x)=x\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$; $f(x)=\sqrt{1-\ln x}$; $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$.

$f_1(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ définie sur] 1 ; + ∞ [$f_2(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$ définie sur] 0 ; + ∞[$f_3(x) = \ln(x^2 + x + 1)$

$f_4(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$ définie sur] 0 ; + ∞ [$f_5(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$ définie sur] – 1 ; + ∞ [

2- Etudier les variations de f définie par :

$f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$; $f(x)=\dfrac{1}{x^2\ln x}$; $f(x)=\dfrac{\ln x+2}{\ln x-1}$

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x)=x\ln x-x \quad si \quad x\succ 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1- Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0
2- Etudier les variations de f.
3- Tracer la courbe de f

EXERCICE 6

On étudie g (x) = – 8 ln x + x^2 + 4 définie sur] 0 ; + ∞ [

1°) Calculer g '(x) et établir le tableau des variations de g. En déduire le signe de g.

2°) On considère $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2}\ln x$. Calculer f '(x) et démontrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

3°) Démontrer que l'équation f (x) = 1 admet une solution unique dans l'intervalle [1 ; e] et donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

4°) Démontrer (sans calcul) que $g(\alpha) = \dfrac{\alpha^4+16}{\alpha^2+4}$

EXERCICE 7 :

a,b et c sont trois réels strictement positifs. Ecrire, en fonction de $\ln a, \ln b$ et $\ln c$ les réels suivants : $x=\dfrac{1}{4}\ln\left(a^8\right)$; $y=\ln\dfrac{a}{b}-\ln\dfrac{c}{b}$; $z=\ln\left(\dfrac{a^4}{b^3}\right)$.

EXERCICE 8:

Déterminer les ensembles de définition des fonctions données.

$f(x)=\ln(3x-5)$; $f(x)=\ln(7-4x)$; $f(x)=\ln|3x-5|$; $f(x)=\ln x^2$; $f(x)=\ln(3x-5)^2$

$f(x)=\ln(3x^3+x^2-4)$; $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$; $f(x)=\ln\left|\frac{x+1}{x^2+x-2}\right|$; $f(x)=\left(\frac{1}{\ln x}\right)^2$.

EXERCICE 9 :

1) Résoudre les équations suivantes

$a)\ \ln(2x-3)=\ln 2$; $b)\ \ln(x^2-3x-2)=0$; $c)\ \ln x+\ln(2x+5)=\ln 3$; $d)\ 2(\ln x)^2+5\ln x-3=0$;

$e)\ (\ln(x-1))^2-\ln(x-1)-6=0$

$f)\ \ln(2x-5)>1$; $g)\ \ln(2x+1)\leq\ln(x+3)$; $h)\ \ln(2-x)+\ln(x+4)\geq\ln(3x+2)$; $i)\ -2(\ln x)^2-5\ln x+3>0$

2) Résoudre dans IR^2

$a)\begin{cases}\ln x+3\ln y=1\\ 9\ln x-6\ln y=20\end{cases}$ $b)\begin{cases}3\ln x-4\ln y=-6\\ \ln(x^2)+\ln y=7\end{cases}$ $c)\begin{cases}x+y=25\\ \ln x+\ln y=2\ln 12\end{cases}$

3) Soit $p(x)=2x^3-3x^2-3x+2$

a) Calculer $p(1)$ en déduire une factorisation complète de $p(x)$
b) Résoudre : $2(\ln x)^3-3(\ln x)^2-3\ln x+2=0$.
c) Résoudre : $p(x)>0$
d) Résoudre : $2(\ln x)^3-3(\ln x)^2-3\ln x+2>0$.

EXERCICE 10 :

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$f(x)=\ln(x^2-5)$; $f(x)=\ln(6-8x)$; $f(x)=\ln|-2x+5|$; $f(x)=\ln\left(\frac{2x-3}{5x-3}\right)$ $f(x)=\ln(3x-5)^2$

$f(x)=\ln(3x^3+x^2-4)$; $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$; $f(x)=\ln\left|\frac{x+1}{x^2+x-2}\right|$; $f(x)=\left(\frac{1}{\ln x}\right)^2$

$f(x)=x\ln x$, $f(x)=\frac{2-\ln x}{\ln x}$; $f(x)=\ln|\ln x|$; $f(x)=\sqrt{\ln x}$; $f(x)=\sqrt{x\ln x}$; $f(x)=\frac{x^2-3}{x\ln x}$.

EXERCICE 11 :

Déterminer les limites suivantes :

$a)\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right);b)\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\ln x);c)\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}};d)\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2};\ e)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x)}{x}$

PROBLEME 1

Soit f la fonction définie par $f(x)=2x+(1-2x)\ln x$.

1°) On considère la fonction g définie par : $g(x)=\dfrac{1}{x}-2\ln x$.

a- Etudier les variations de *g*.

b- Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α. Donner un encadrement à 10^{-2} prés de α.

c- Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$.

2°) a- Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. Donner le tableau de variations de f.

b- Montrer que $\ln\alpha=\dfrac{1}{2\alpha}$ et que $f(\alpha)=2\alpha-1+\dfrac{1}{2\alpha}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

c- Construire *Cf* courbe de *f*.

PROBLEME 2

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x+\ln|1-x|}{1-x}$.

1°) Etudier les variations de *f*.

2°) Montrer que le point A (1 ; –1) est centre de symétrie de *Cf* courbe de *f*.

3°) Tracer *Cf* dans un repère orthonormé *(unité 2cm)*

4°) Montrer que pour tout $x \rangle 1$, $f(x)=-1-\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{\ln(x-1)}{x-1}$. En déduire l'aire A(D) du domaine: $D=\{M(x,y);2\le x\le\alpha \text{ et } f(x)\le y\le-1\};\alpha\ge2$

5°) Calculer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(D)$.

PROBLEME 3

A- Soit g la fonction définie par : $g(x)=1-x^2-x^2\ln x$.

1°) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.

2°)a- Calculer $g(1)$. Justifier que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution que l'on déterminera.

b- En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

B- Soit *f* la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{1}{x}+x\ln x$.

1°)a- Montrer que $f'(x)=-g(x)$.

b- Dresser le tableau de variations de *f*.

c- Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet deux solutions distinctes 1 et α tel que $2,2\langle\alpha\langle2,3$.

d- Tracer *Cf* courbe de *f* dans un repère orthonormé du plan. On placera les points d'intersection de *Cf* avec la droite *y = x*.

2°) Soit h la restriction de f à $[1;+\infty[$.

a- Justifier l'existence de h^{-1}.

b- h^{-1} est-elle dérivable en 1 ? Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative ?

c- Tracer la courbe Ch^{-1} de h^{-1}

3°) a- Calculer l'aire *A (D)* du domaine *D* délimité par la courbe *Cf*, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x=1$ et $x=\alpha$.

b- En déduire l'aire du domaine délimité par *Ch*, Ch^{-1},les droites d'équations $x=1$ et $x=\alpha$.

<u>PROBLEME 4</u>

<u>Partie A</u>

On considère la fonction h définie par : $h(x)=x^2+2x+\ln|x+1|$

1°) Etudier les variations de h. Calculer *h (0)* et *h (–2)*

2°) En déduire le signe de *h(x)* pour $x\in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$.

<u>Partie B</u>

On considère la fonction *f* définie par : $f(x)=\dfrac{\ln|x+1|}{x+1}-x$.

1°) Montrer pour tout réel x de *Df*, $f'(x)=-\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$.En déduire le signe de *f'(x)*.

2°) Calculer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition *Df*. Dresser le tableau de variation de *f*.

3°) Montrer que la droite *D* d'équation *y = –x* est asymptote à la courbe *Cf* de *f*. Etudier la position relative de *Cf* et *D*.

4°) Montrer que le point *I (–1 ; 1)* est un centre de symétrie de *Cf*.

5°) Tracer la courbe *Cf* dans un repère orthonormé **unité 1 cm**.

6°) Soit α un réel positif, on note *A* (α) l'aire du domaine délimitée par la courbe, la droite *D* et les droites d'équations *x = 0, x =* α.

Calculer en fonction de α *A* (α)

Calculer la limite de *A* (α) lorsque α tend vers $+\infty$.

<u>FONCTION EXPONENTIELLE</u>

<u>EXERCICE 1</u> : I) Résoudre dans IR

1) $2e^{2x+1}$ - 3 e^{x+1} – 2e + 3 e^{-x+1} = 0 ; 2) ln$[lne^x\ +\ e^{-lnx}]$ = 2 - lnx

3) $(e^x - 1)(e^{-x} - 1) < 0$; 4) $3e^x - 7e^{-x} + 20 \leq 0$

II) Résoudre dans IR^2

1) $\begin{cases} 3e^x - 2\ln y = 13 \\ 5e^x + 3\ln y = 19 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} e^{x+1}.e^{y-1} = 2 \\ \ln x + \ln y = \ln(x-1) + \ln(y+1) \end{cases}$

EXERCICE 2 :

1) Déterminer Df, le limites aux bornes de Df puis calculer la dérivée de f

a) f(x) =x + e^{-x} ; b) f(x) = $\frac{e^x}{1- e^x}$; c) f(x) = $e^{1/x}$ lnx ; d) f(x) = $\frac{\sin 2x}{1- e^x}$.

2) Déterminer l'ensemble des primitives F de f sur IR.

f(x) = x – 2 + 2 $e^{-x/2}$; b) f(x) = xe^{x^2} ; c) f(x) = $\frac{1}{e^x + 1}$;

3) Etudier et représenter les fonctions si après.

a) f(x) = $x^2 e^{-x}$; b) f(x) = $\frac{1+ e^x}{1- e^x}$;

EXERCICE 3 :

1) Résoudre dans ℝ l'équation $x^2 - x - 2 = 0$.
2) En déduire la résolution dans ℝ des équations suivantes :
   a) $e^{2x+1} - e^{x+1} - 2e = 0$.
   b) $[\ln(x+1)]^2 - \ln(x+1) - 2 = 0$.

EXERCICE 4 : Soit $P(x) = x^3 - 3x + 2$

Calculer $P(1)$. Vérifier que pour tout réel x, $P(x) = (x-1)(x^2 + x - 2)$.

Résoudre dans ℝ, $e^{3x} - 3e^x + 2 = 0$.

Résoudre dans ℝ, $(\ln x)^2 - 3 = \frac{-2}{\ln x}$.

EXERCICE 5 : Soit la fonction f définie sur [0, +∞[par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{e^x - \ln x}, & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Démontrer que f est continue en 0.
b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

EXERCICE 6: Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Démontrer que f est dérivable en 0. Préciser $f'(0)$ et une équation de la tangente T au point d'abscisse 0 à la courbe représentative C de f.

EXERCICE 7 : 1) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{1/x}$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{1/x}$

2) f est l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{1/x}}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Démontrer que f est continue en 0.
b) Etudier la dérivabilité de f en 0.Interpréter graphiquement le résultat.

EXERCICE 8 : f est une fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x + 1)\, e^{-1/x}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Démontrer que f est continue en 0.
b) Déterminer $\lim\limits_{u \to +\infty} (1 + u)\, e^{-u}$. En déduire que f est dérivable en 0.

EXERCICE 9 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = e^{-x}\ln(1 + e^x)$
Démontrer que $f'(x) + f(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 10 : Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé. Soit f la fonction définie par :
$f(x) = (1 - x)(1 + e^x)$
On désigne par C la courbe représentative de f.
1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à C en $-\infty$.
3) Etudier les variations de la fonction dérivée f' et en déduire les variations de f.
4) Tracer C.

EXERCICE 11 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x^2}$

C est sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$
(unités: 1cm en abscisses, 5cm en ordonnées)

a) Etudier la parité de f. Que peut-on en déduire sur C ? On fera l'étude de f sur $[0, +\infty[$.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et une équation de l'asymptote à C.

c) Etudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.

d) Calculer $f''(x)$ et en déduire que pour tout x positif on a $f'(x) \geq f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Soit T la tangente à la courbe C en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et soit $y = h(x)$ son équation réduite.

On pose

$g(x) = f(x) - h(x)$

Démontrer que $g'(x) = f'(x) - f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. En déduire le signe de g sur $[0, +\infty[$ et les positions relatives de C et T sur cet intervalle.

e) Construire T et C sur $[0, +\infty[$ .En déduire la construction de C sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 12 : Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right)$

1) Etudier les variations de la fonction f. Soit (C) la courbe représentative, dans un repère orthonormé, de la fonction f. Montrer que $f(x) - 2x$ tend vers une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et en déduire l'asymptote correspondante de (C) . Construire la courbe (C) en précisant la tangente au point de (C) d'ordonnée nulle.

2) Soit k un nombre réel strictement positif.

Discuter suivant les valeurs de k, le nombre de solutions réelles de l'équation d'inconnue x :

$e^{2x} - e^{x} + 1 - k = 0.$

a) Par le calcul

b) En utilisant la courbe (C) .

CALCUL INTEGRAL

EXERCICE 1

Calculer les intégrales suivantes

$\int_0^1 \frac{1+e^x}{x+e^x}dx$; $\int_2^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$; $\int_{-1}^1 |e^x - 1|dx$; $\int_0^{\Pi/3} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$; $\int_0^{\Pi/2} \sin x \cos dx$; $\int_0^{\Pi/6} \sin^3 x dx$;

$\int_0^1 \left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} + \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\right)dx$; $\int_0^{\Pi/2} \cos^2 x \sin^4 x dx$

EXERCICE 2

On pose $I = \int_0^{\Pi/8} e^{-2t} \cos^2 t dt$ et $J = \int_0^{\pi/8} e^{-2t} \sin^2 t dt$

1°) En intégrant successivement deux fois pat parties Calculer
$K = \int_0^{\Pi/8} e^{-2t}\cos(2t)dt$
En déduire I- J
2°) Calculer I+J ; 3°) Déduire des questions précédentes I et J.

EXERCICE 3

1°) *Déterminer les réels a et b tels que* $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$

2°) Calculer $\int_2^4 \frac{1}{x(x^2-1)}dx$

3°) A l'aide d'une intégration par parties Calculer $\int_2^4 \frac{x\ln x}{(x^2-1)^2}dx$

EXERCICE 4 : Soit f la fonction définie sur IR par : f(x) = $\frac{2x-3}{/x^2-3x/+4}$

1°) Calculer $\int_0^b f(x)dx$ *où b est un réel positif*

2°) Donner la valeur moyenne de f dans l'intervalle [1,4]

EXERCICE 5 : On pose $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{e^t+1}dt$ et pour tout entier naturel n $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{e^t+1}dt$

1°) Calculer I_n; I_0+I_1. En déduire I_0
2°) Calculer I_n et I_{n+1} ;En déduire I_2 et I_3
3°) Pour tout réel t de l'intervalle [0,1] Comparer e^{nt} et $e^{(n+1)t}$
. En déduire la variation de la suite (I_n) n∈N

EXERCICE 6 1°) Calculer $I = \int_0^{\Pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}dx$

2°) Soit la fonction f définie par $\frac{\sin x}{\cos^3 x}$; $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$; calculer f'(x).

3°) On pose J= $\int_0^{\Pi/4} \frac{1}{\cos^4 x}dx$ -a) Déduire de 2°) une relation entre I et J.

b) Calculer J.

EXERCICE 7 :Pour tout n∈ IN , on pose $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$

1°) Calculer I_1 et I_2 ;2°) En intégrant par parties trouver une relation entre I_n et I_{n-1}

3°) calculer I_3 et I_4.

EXERCICE 8 :

1°) Démonter que pour tout réel x on a : $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$

En déduire l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$

2°) On pose $J = \int_0^1 e^x \ln(1+e^x)dx$. En intégrant par partie ,calculer J.

EXERCICE 9

I°/ Soit f la fonction définie $f(x) = xe^{1-x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 4cm)

1°) Etudier les variations de f

2°) Tracer la courbe (C)

3°) Soit a un réel structure positif, exprimer en cm^2 l'aire A(a) du domaine plan limité par (C) l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = o$ et $x = a$. Calculer $\lim_{a \to +\infty} A(a)$

II°/ Pour tout n ϵ IN*, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$

1°) A l'aide d'une intégration par parties démontrer que $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$. En déduire I_2 et I_3

2°) On pose $J_n = \int_0^1 x^n dx$

a) Calculer J_n en fonction de n

b) Montrer que pour tout x ϵ [0, 1] ; $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$

c) En déduire un encadrement de I_n et $\lim_{n \to +\infty} I_n$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1) EXERCICE 1

On se propose de résoudre $(E): y' - 2y = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$

1) Déterminer la solution de $(E_0): y' - 2y = 0$ prenant la valeur 1 en 0
2) Soit f dérivable sur IR telle que f(0)=ln2 et g définie par $f(x) = e^{2x}g(x)$ .Calculer $g(0)$, $f'(x)$ *en fonction de* $g'(x)$ *et* $g(x)$
3) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

   En déduire l'expression de g(x) puis celle de f'(x) de telle sorte que f soit solution de (E).

EXERCICE 2

1) Résoudre (E) $y'' + 2y' + 5y = 0$. Déterminer la solution f telle que f(0)=1, $f'(0 = -1)$
2) $F(x) = -\frac{1}{5}(f'(x) + 2f(x))$. Démontrer que F est une primitive de f sur IR. Expliciter F(x). En déduire le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

EXERCICE 3   BAC 2009

1) Résoudre l'équation différentielle $(E): y'' + 2y' + y = 0$
2) Soit $(E'): y'' + 2y' + y = x + 3$ déterminer les réels a et b tels que la fonction h définie par $h(x) = ax + b$ soit solution de (E')
3) a) démontrer que g est solution de (E') si et seulement si $g - h$ est solution de (E)
   b) Résoudre alors (E')
   c) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$
4) Soit $k(x) = (x+2)e^{-x}$
   a) Etudier les variations de k
   b) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) de k au point d'abscisse 0
   c) Démontrer que le point I(0 ;2) est un point d'inflexion de la courbe
   d) Tracer la courbe et la tangente

EXERCICE 4   BAC 2008

1) Soient les équations différentielles

$(E_0): y' + y = 0 \quad et \quad (E); y' + y = e^{-x}\cos x$

   a) Déterminer les réels a et b tels que la fonction h définie par $h(x) = (a\cos x + b\sin x)e^{-x}$ soit solution de (E)
   b) démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de (E_0)
   c) résoudre (E_0)
   d) Déduire des questions précédentes la solution générale de (E)
   e) Déterminer la solution g de (E) telle que $g(0) = 0$

3) Soit $l(x) = e^{-x}\sin x$
   a) Exprimer $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x \quad et \quad \sin x$
   b) Etudier les variations de $l \quad sur \quad [0;2\pi[$
   c) Calculer $\int_0^{2\pi} l(x)\,dx$

EXERCICE 5 Soit la fonction définie sur IR par $g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)$

1) Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x)$ est strictement négatif pour tout x réel

2) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$
3) Dresser le tableau de variations de g
4) Donner le signe de $g(x)$

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur IR par $f(\ ) = e^{-2x}\ln(1+2e^{x})$

1) Montrer que $f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$
2) Déterminer
   a) La limite de $f\ en -\infty$
   b) La limite de $f\ en +\infty$. On pourra remarquer que si on pose $X = 1+2e^{x},\ f(x)\ s'écrit\ 4\dfrac{X}{(X-1)^2}\dfrac{\ln X}{X}$
3) Dresser le tableau de variations de f
4) Tracer Cf dans un repère orthonormé
5) Soit α un réel strictement positif.
   a) Vérifier que pour tout réel $x,\ \dfrac{e^{-x}}{1+2e^{x}} = e^{-x} - 2\left(\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+2}\right)$ en déduire la valeur de $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{e^{-x}}{1+2e^{x}}dx$
   b) Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'aire de la partie du plan limitée par Cf, $x'x$ et les droites d'équations $x = 0\ et\ x = \alpha$

PARTIE C

On considère l'équation différentielle $(E): y' + 2y = 2\left(\dfrac{e^{-x}}{1+2e^{x}}\right)$

1) Vérifier que f est solution de (E)
2) Montrer qu'une fonction h est solution de (E) si et seulement si $h - f$ est solution de $(E'): y' + 2y = 0$
3) Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E)