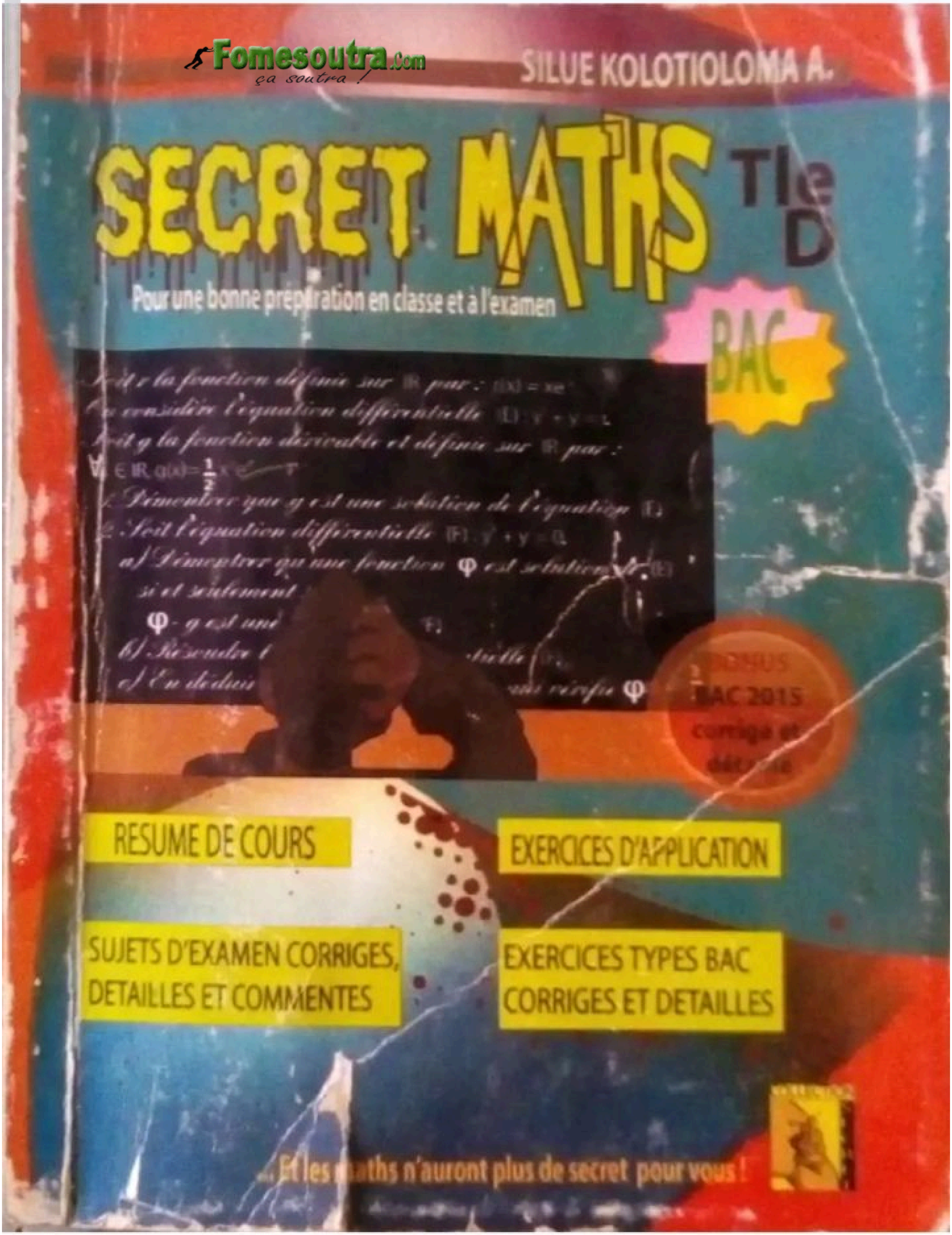

Fomesoutra.com
ça soutra !
SILUE KOLOTIOLOMA A.
SECRET MATHS
Tle D
Pour une bonne préparation en classe et à l'examen
BAC
BAC 2015
RESUME DE COURS
EXERCICES D'APPLICATION
SUJETS D'EXAMEN CORRIGES, DETAILLES ET COMMENTES
EXERCICES TYPES BAC CORRIGES ET DETAILLES
...Et les maths n'auront plus de secret pour vous !

SECRET MATH

AUTEUR : SILUE Kolotioloma Alama

Sous la coordination du Docteur Aissi Konan PAMPHILE.

TERMINALE D

§ D'autres concours administratifs.

Chers élèves de terminale, cet ouvrage vous propose en un seul volume et de façon détaillée, les différents chapitres de l'epreuve de mathématique de l'enseignement général au baccalauréat série D.

Votre réussite intellectuelle réside entre vos mains Qu'importe la teneur de votre bibliothèque que vous pourriez avoir en disposition, si vous n'en usez pas avec conscience et abnégation, c'est bien plus logique que chaque bouquin ne vous servira que d'ornement. C'est dire que cette connaissance que je vous fais partager ne conservera toute sa valeur que si toutes vos intentions et ambitions convergent vers une formation adequate et exemplaire, surtout que les mathématiques en particulier, c'est l'erreur commise en s'exerçant qui permet de mieux comprendre les corrections.

Chers élèves, si et seulement si vous saviez quel trésor vous avez entre les mains, ...

Remerciement

Mon regard se penche en tout premier lieu vers ***Dieu****, l'Être Suprême qui a su m'octroyer connaissance, santé et courage qui m'ont permis de concevoir ce document qui pourra être le bâton du jeune élève pèlerin.*

Je ne saurai oublier toutes ces personnes qui de loin ou de près m'ont apporté leur soutien moral et financier.

Des remerciements notamment au Docteur Aissi k. PAMPHILE (paix à son âme), Professeur de Mathématique à l'Ecole Nationale de Statistique et d'Economie Appliquée (ENSEA) qui été le principal coordonnateur de ce document.

Au Professeur COULIBALY Hassan, Professeur certifié de Mathématique au lycée Antoine Gauze de Daloa..

A tous les professeurs qui m'ont ouvert leurs mains.

A Mr DIAKITE Ibrahim directeur de l'Epp Belle ville Daloa.

A Mr Keita kissima.

A tous mes parents, frères, sœurs et amis.

A toutes ces personnes de bonne volonté qui par l'expression de leur altruisme m'ont fait grandir et remplir mon cœur d'espoir et d'espérance.

Merci.

SOMMAIRE

I. RAPPEL GENERAL

1. Equation du premier degré

a- Cas d'une inconnue

Elle est sous la forme : $ax + b = o$, (x est l'inconnue ; a $\in \mathbb{R}^*$;b$\in \mathbb{R}$)

La solution de cette équation est :$x_0 = -\frac{b}{a}$

Exemple :$2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{2} \Leftrightarrow x = -1$

b- Cas de deux inconnues

Elle est de la forme :$ax + by + c = 0$ (x et y sont des inconnues a et b des réels différents de zéro : $c \in \mathbb{R}$).

La résolution donne la droite d'équation :$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ (c'est un ensemble de couple de solutions pour chaque valeur x on obtient une valeur une valeur de y) Exemple ;$y + 6x - 4 = 0$; on obtient :

$$y = -6x + 4$$

; Si $x = 0; y = 4$ Si $x = 2; y = -8$

c- Systèmes d'une équation du premier degré à deux Inconnues

Elle est sous la forme $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$;

(a ;b ;a' *et* b *sont des reels different de zero*) et c *et* $c' \in \mathbb{R}$ .Il existe plusieurs méthodes dont l'une des méthodes consiste a tirer une des inconnue de l'une des équation et remplacer cette inconnue par son expression dans la deuxième équation.

Graphiquement la solution correspond au point $M\binom{x_0}{y_0}$ où les deux droites se coupent.

Exemple $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 \\ x + 3(2x-4) = 4 \end{cases}$ on trouve $x = 2; y = 0$

2. Equation du second degré

Elle est sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ $(avec\ a \neq 0)$ pour la résolution de cette équation on calcule discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

si $\Delta > 0$; alors il existe deux solutions réelles distinctes

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

si $\Delta < 0$ *alors il n'existe pas de solution* réelle»

Si $\Delta = 0$; alors il existe une solution double réelle, $x_0 = -\frac{b}{2a}$

3. Notions essentielles sur les fonctions

L'ENSEMBLE DE DEFNITION : C'est l'ensemble des réels ayant une image par la fonction considérée si la fonction est f alors Nous noterons D_f le domaine de définition

Fonction simples

Fonction polynômes

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + ax + a_0$; $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

Exemple : $f(x) = 3x^4 + 6x^3 - 5x - 9$; $D_f = \mathbb{R}$

Fonction rationnelles $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$: $x \epsilon D_f \Leftrightarrow Q(x) \neq 0$

Exemple : $f(x) = \frac{x^2-2x+3}{x-2}$;

$x \epsilon D_f \Leftrightarrow x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2; donc\ D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

Fonctions racines carrés f(x)=$\sqrt{P(x)}$; $x\epsilon D_f$ ⇔p(x)≥ 0 ;p(x) est un polynôme Exemple :$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ $\quad x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) \geq 0$ en construisant un tableau de signe, on a :

$x \in]-\infty; 1][1; +\infty[$

Etude des symétries

La symétrie permet d'étudier la fonction sur une partie de l'ensemble de définition appeler ***domaine d'étude.*** L'autre partie est obtenue en appliquant le principe de symétrie

- **PARITE**

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est notéeDf

Si $\forall x \in D_f; (-x) \in D_f$ et f(-x)=f(x) alors f est paire ;la courbe représentative de la fonction est symétrie par rapport a l'axe (OI)

Exemple ;f(x)=x^2 ;f(-x)=(-x^2) =(-1)^2(x^2)=x^2=f(x)

Si $\forall x \in D_f; (-x) \epsilon D_f$ et f(-x)=-f(x) ;alors f est impaire ;la courbe représentative de la fonction f est symétrique par rapport a l'origine O(0 ;0) Exemple ;f(x)=x^3 ;f(-x)=$(-x^3) = (-1)^3(x^3) = -f(x)$

Remarque :(l'origine peut ne pas appartenir àD_f)

- **SYMETRIE PAR RAPPORT A UN A AXE OU POINT QUELCONQUE**

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est notée D_f

- Soit un axe d'équation $x = a$; tel que
- $x \epsilon D_f; (2a - x) \in D_f$ si f(2a-x)=f(x) donc la courbe de la fonction est symétrique par rapport l'axe d' équation $x = a$
- Soit un point S (a, b) tel que pour tous $x \in D_f$;$(2a - x) \in D_f$;et

$f(a-x) + f(a+x) = 2b$ la courbe de la fonction est symétrique par rapport au point S(a ;b) .

- Si $f(\alpha) = \beta$ alors $f^{-1'}(\beta) = \frac{1}{f'(\alpha)}$

Continuité

Soit $\boldsymbol{a}$ un nombre réel et f une fonction définie en $\boldsymbol{a}$.
Si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ alors f est continue en $\boldsymbol{a}$.

Dérivabilité

(1) Définition :Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un intervalle D avec $x_0 \in D$. Fest dérivable en x_0 si et slmt si la fonction $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a \in \mathbb{R}$ c'est-à-dire cette fonction à une limite réel au point x_0.

Exemple : $f: x \longmapsto 2x+3$; $x_0 \in \mathbb{R}$.
$\forall x_0 \in \mathbb{R}-\{0\}$,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{2x+3-(2x_0+3)}{x-x_0} = \frac{2(x-x_0)}{x-x_0} = 2 \quad \text{donc:}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to 0} 2 = 2 \in \mathbb{R}$$

(2) Théorème :
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $f$une fonction définie sur un intervalle D où $x_0 \in D$.
Soit $a \in \mathbb{R}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- $f$est dérivable en x_0 et de nombre dérivé a.
- $f$est différentiable en x_0 et le coefficient de sa différentielle est a.

(3) Dérivabilité à droite, dérivabilité à gauche :
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $\propto \in \mathbb{R}^*$. Soit $f$définie sur :
$[x_0, x_0+\propto[$ (respectivement $]x_0-\propto; x_0[$). On dit que $f$est dérivable à droite (respectivement à gauche) en $x_0$si la fonction $x \longmapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$à une limite finie à droite (respectivement à gauche) en x_0.

DERIVATION ET APPLICATION DE LA DERIVEE

- Règles de dérivation : Opérations

Fonctions	Fonctions dérivées
$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
$f(x) = a \times u(x); a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a \times u'(x)$
$f(x) = u(x) \times v(x)$	$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$

- Dérivées usuelles et composées

fonctions	Fonctions dérivées
$f(x) = e$;$e \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$; $n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$; $(x \geq 0)$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $(x > 0)$
$f(x) = \ln\lvert x\rvert$; $(x \neq 0)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$; $(x \neq 0)$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$

Fonctions	Fonctions dérivées
$f(x) = u(x)$	$f'(x) = u'(x)$
$f(x) = [u(x)]^n \; ; n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = n \times u'(x) \times [u(x)]^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{u(x)} \; ; (u(x) \geq 0)$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \; ; (u(x) > 0)$

PRIMITIVES

TABLEAU DES PRIMITIVES USUELLES

$f(x) = F'(x)$	$F(x)$
$f(x) = 0$	$F(x) = k \;\; (k \in \mathbb{R})$
$f(x) = a \;\; (a{:}\, réel)$	$F(x) = ax + k$
$f(x) = x^r \;\; (r \neq 0 \; et \; r \neq -1)$	$F(x) = \dfrac{1}{r+1}(x^{r+1}) + k$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + k$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad (n \neq 1)$	$F(x) = -\dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{1}{x^{n-1}}\right) + k$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2} \quad (n = 2)$	$F(x) = -\dfrac{1}{x} + k$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$

N.B : **F(x)** est la primitive **f(x)**

TABLEAU DES PRIMITIVES COMPOSEES

$f(x) = F'(x)$	$F(x)$
$u'(x) + v'(x)$	U(x)+v(x)+k
$au'(x)$	$au(x) + k$

$u'(x) \times u(x)^r \quad (r \neq 0 \; et \; r \neq -1)$	$\frac{1}{r+1}[u(x)]^{r+1} + k$
$u'(x)/u(x)$	$\ln\lvert u(x)\rvert + k$
$u'(x)/2\sqrt{u(x)}$	$\sqrt{u(x)} + k$
$\frac{u'(x)}{u(x)^n} \quad (n \neq 1)$	$-\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{u(x)^{n-1}}\right) + k$
$\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$	$\frac{u(x)}{v(x)} + k$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + k$
$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$	$u(x)v(x) + k$

EXERCICES

EXERCICE 1

Calcule les limites aux points indiqués des fonctions suivantes

1) $f(x) = -x^3 + 3x - 5$ en $-\infty$ *et* $+\infty$;

2) $f(x) = \frac{x^5-3x+1}{1-2x}$ en $-\infty$ et $+\infty$

3) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-3x}$ en 3

4) $f(x) = \sqrt{\frac{2x-3}{x-5}}$ en $+\infty$

5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ *en* $+\infty$

6) $f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 - 1}$ *en* $+\infty$;

7) $f(x) = \frac{1}{(x+2)^4} - 3x + 5$ en -2

8) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 7x + 1} + 2x$ en $+\infty$ *et* $-\infty$;

9) $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{x+5}$ *en* $+\infty$

10) $f(x) = \frac{\sqrt{7x+2}-4}{x-2}$ en 2 ;

11) $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 3x - 1}$ *en* $-\infty$

12) $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 3x - 1}$ en $-\infty$

13) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-3x+1}{1-x}}$ en $-\infty$ *et* 1 à droite ;

14) $f(x) = \frac{sin3x}{2x}$ en 0 ;

15) $f(x) = \frac{\sin(x+1)}{x^2-1}$ en -1

16) $f(x) = 3x - 2\sqrt{x} + 1$ *en* $+\infty$

EXERCICE 2

- Détermine l'ensemble de définition Df et étudier la continuité aux points indiqués

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-1} \\ f(x) = \frac{1}{2} \end{cases}$$ en -1 et en 1

- Déterminer Df et démontrer que f est prolongeable par continuité en 1 et définie ce prolongement $f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{x-1}$

- Etudier la dérivabilité de f en 3 et -3 et interpréter le résultat

$$f(x) = (x-3)\sqrt{9-x^2}$$

EXERCICE SUR PRIMITIVES (non résolus)

Trouvez les primitives des fonctions suivantes :

$$p(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$$

$t(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x}{1-x}$ calculer les réels a, b, c tel que

$t(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{1-x}$ puis ensuite trouvez sa primitive

Correction des exercices

EXERCICE1

➤ Calcule des limites aux points indiqués

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3+3x-5) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(-x^3+3x-5) = \lim_{x\to+\infty}(-x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^5-3x+1}{1-2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^5}{-2x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x^4\right) = -\infty$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^5-3x+1}{1-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^5}{-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}x^4\right) = -\infty$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to3\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to3\\<}}\frac{x^2-9}{x^2-3x} = \lim\limits_{\substack{x\to3\\<}}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)x} = \lim\limits_{\substack{x\to3\\<}}\frac{(x+3)}{x}$

$$\lim_{\substack{x\to3\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to3\\<}}\frac{(x+3)}{x} = 2$$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+2}\right)$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2x+2 = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2x-\sqrt{4x^2-1})$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x-\sqrt{4x^2-1}\right)\left(2x+\sqrt{4x^2-1}\right)}{2x+\sqrt{4x^2-1}}$$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2-(4x^2-1)}{2x+\sqrt{4x^2-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x+\sqrt{4x^2-1}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+\sqrt{4x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2+\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}\right) = +\infty$

donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

7) $\lim_{x\to-2} f(x) = \lim_{x\to-2} \frac{1}{(x+2)^4} - 3x + 5 = +\infty$ Car $\begin{cases} \lim_{x\to-2} \frac{1}{(x+2)^4} = +\infty \\ \lim_{x\to-2}(-3x+5) = 11 \end{cases}$

8) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{3x^2 - 7x + 1} + 2x) = +\infty$

car $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{3x^2 - 7x + 1} = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty \end{cases}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{3x^2 - 7x + 1} + 2x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$

$$= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2\left(3 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}\right) + 2x)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} |x|\sqrt{\left(3 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + 2x = \lim_{x\to-\infty} |x|\left[\sqrt{\left(3 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + \frac{2x}{|x|}\right]$$

comme c'est en $-\infty$ alors $|x| = -x$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x\left[\sqrt{\left(3 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} - 2\right] = -\infty$$

car $\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} \left[\sqrt{\left(3 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} - 2\right] = \sqrt{3} - 2 < 0 \\ et \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty \end{cases}$

9) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+5}\right) =$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+5})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+5})}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+5})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+3)-(x+5)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+5}} =$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+5}} = 0$ *car* $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+3} + \sqrt{x+5} = +\infty$

10) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{7x+2}-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(\sqrt{7x+2}-4)(\sqrt{7x+2}+4)}{(x-2)(\sqrt{7x+2}+4)} =$

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{(7x+2)-4^2}{((x-2)(\sqrt{7x+2}+4))} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{7(x-2)}{((x-2)(\sqrt{7x+2}+4))}$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{7}{((\sqrt{7x+2}+4))} = \frac{7}{8} \text{ donc } \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{7x+2}-4}{x-2} = \frac{7}{8}$$

11) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2+3x-1}\right)$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\left(x + \sqrt{x^2+3x-1}\right)\left(x - \sqrt{x^2+3x-1}\right)}{\left(x - \sqrt{x^2+3x-1}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-3x+1}{\left(x - \sqrt{x^2+3x-1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(-3+\frac{1}{x}\right)}{x\left[1+\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}\right]} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-3+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\frac{3}{2}; car \begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} -3+\frac{1}{x} = -3 \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \left[1+\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}\right] = 2 \end{cases}$$

12) $\mathrm{Lim}_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(x - \sqrt{x^2+3x-1}\right)$

$$= \lim_{x\to -\infty} \left[x - \sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \left[x - |x|\sqrt{\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}\right] = \lim_{x\to -\infty} x(1+\sqrt{\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} = -\infty$$

13) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{\frac{x^2-3x+1}{1-x}}$ or $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2-3x+1}{1-x}$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2}{-x} \lim\limits_{x\to -\infty} (-x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2-3x+1}{1-x} = +\infty$

par conséquent $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{x^2-3x+1}{1-x}} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \sqrt{\frac{x^2-3x+1}{1-x}}$ pour cela calculons $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x^2-3x+1}{1-x}$

or $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x^2-3x+1}{1-x} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x^2 - 3x + 1) \times \frac{1}{1-x}$ or on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x^2 - 3x + 1) = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(\frac{1}{1-x}\right) = -\infty \end{cases}$$

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x^2-3x+1}{1-x} = +\infty$ or

$$\lim_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

X	$-\infty$ 1 $+\infty$
1-x	+ 0 −

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \sqrt{\frac{x^2-3x+1}{1-x}} = +\infty$

14)Calculons $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{2x}$

pour calculer cette limite nous allons poser X=3x ⇒ x= $\frac{X}{3}$ or quant

x→ 0 ; X→ 0 donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin X}{2\frac{X}{3}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin X}{X} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$Car \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin X}{X} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

15)

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sin(x+1)}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{\sin(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$ pour cela posons X = x + 1

$$\Rightarrow x = X-1 \ alors$$

$x\to -1; X\to 0$

16)

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sin(x+1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 0}\frac{sinX}{X(X-2)}=\lim_{x\to 0}\frac{sinX}{X}\times\frac{1}{X-2}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to +\infty}3x-2\sqrt{x}+1=\lim_{x\to +\infty}x\left(3-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

Car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to +\infty}\left(3-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)=3\\ \lim\limits_{x\to +\infty}x=+\infty\end{cases}$

EXERCICE 2

$\begin{cases}f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-1}\\ f(1)=\frac{1}{2}\end{cases}$ En -1 et en 1 deduisons le Df et etudions la continuité en ces points

$x\in Df \Leftrightarrow x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \ et \ x\neq -1$et $f(1)=\frac{1}{2}$

donc ;Df= $\mathbb{R}\setminus\{-1;\}$

Etudions la continuité

On a -1$\notin$ Df Df donc f n' est pas continue en -1

On a 1$\in$ Df et

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$$

Et comme $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\frac{1}{2}=f(1)$

alors f est continue en 1

$f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{x-1}$ Determinons Df

$x \in Df \Rightarrow x - 1 \neq 0$ et $x \geq 0$ donc

$$x \geq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

Df= $[0; 1[\cup]1; +\infty[$

$1 \notin$ Df $\quad \lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \frac{x-\sqrt{x}}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(x-1)(1+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to1} \frac{1-x}{(x-1)(1+\sqrt{x})}$

$$= \lim_{x\to1}\left(-\frac{x-1}{(x-1)(1+\sqrt{x})}\right)$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{-1}{(1+\sqrt{x})} = -\frac{1}{2}$$

Comme $1 \notin$ Df et $\lim\limits_{x\to1} f(x) = -\frac{1}{2}$ donc f est prolongeable par continuité .soit g ce prolongement on a : $\begin{cases} g(x) = f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{x-1} \\ g(1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Soit $f(x) = (x-3)\sqrt{9-x^2}$

Etudions la dérivabilité de f en -3 et en 3 détermination de Df,

$x \in$ Df$\Leftrightarrow 9 - x^2 \geq 0$ a l'aide d'un tableau on en déduit que

Df = $[-3; 3]$

$$\lim_{\substack{x\to-3 \\ >}} \frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \lim_{\substack{x\to-3 \\ >}} \frac{(x-3)(\sqrt{9-x^2})}{x+3}$$

$$== \lim_{\substack{x\to-3 \\ >}} \frac{(x-3)^2(\sqrt{9-x^2})^2}{(x+3)(x-3)(\sqrt{9-x^2})}$$

$$= \lim_{\substack{x\to-3 \\ >}} -(x-3)^2 \times \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = -\infty$$

$$\text{Car}\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to-3\\ >}} -(x-3)^2 = -36\\ \lim\limits_{\substack{x\to-3\\ >}} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = +\infty\end{cases}$$

Donc f n'est pas continue en -3

$\lim\limits_{\substack{x\to3\\ <}} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x\to3\\ <}} \frac{(x-3)\sqrt{9-x^2}}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x\to3\\ <}} \sqrt{9-x^2} = 0$ comme

$\lim\limits_{\substack{x\to3\\ <}} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = 0$ donc f est dérivable en 3

DERIVEES

On considère la fonction f dérivable sur son ensemble de définition .calculer f'(x) dans chacun des ces suivant :

1. f(x)=$\frac{x^2-2x+3}{8-5x}$
2. f(x)=x$\sqrt{x^2+1}$
3. f(x)=$\sqrt[3]{x^2+5}$
4. f(x)=sin(3-x^2)
5. f(x)=$(x^3-1)^5$

CORRECTION

f(x)=$\frac{x^2-2x+3}{8-5x}$

$$\forall x Df, f'(x) = \frac{(x^2-2x+3)'(8-5x)-(8-5x)'(x^2-2x+3)}{(8-5x)^2}$$

$$= \frac{(2x-2)(8-5x)-(-5)(x^2-2x+3)}{(8-5x)^2}$$

$$= \frac{16x-10x^2-16+10x+5x^2-10x+15}{(8-5x)^2}$$

$$= \frac{-5x^2+16x-1}{(8-5x)^2}$$

f(x)=x$\sqrt{x^2+1}$; $\forall x \in Df, f'(x) = x'\sqrt{x^2+1} + x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'$

$$= \sqrt{x^2+1} + \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} \times x$$

$= \sqrt{x^2+1} + \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ (en mettant au même dénominateur)

$f(x) = \sqrt[3]{x^2+5}$; $\forall x \in Df, f'(x) = \left[(x^2+5)^{\frac{1}{3}}\right]'$

$= \frac{1}{3}(x^2+5)' \times (x^2+5)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{2x}{3}(x^2+5)^{-\frac{2}{3}}$

f(x)=sin(3-x²);

$\forall x \in Df, f'(x) = (3-x^2)'(\sin(3-x^2)) \quad = -2x\cos(3-x^2)$

f(x)=$(x^3-1)^5$; $\forall x \in Df = 5 \times 3x^2 \times (x^3-1)^4$

$$= 15x^2(x^3-1)^4$$

ETUDES DES BRANCHES INFINES ET ASYMPTOTES

si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

Alors la droite d' équation x=a est asymptote verticale à la courbe

si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

Alors la droite d'équation y=b est asymptote horizontale à (c)

si $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = o$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = o$

Alors la courbe a une branche parabolique de direction (OI)

si $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$

Alors la courbe **a** une branche parabolique de direction (OJ)

si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$

Alors la courbe admet une asymptote oblique de d'équation **y=ax+b**

en $+\infty$ ou $-\infty$

PROBLEME 1 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) unité 1 cm

1) On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$$

1.a) Calculer lorsque f est définie, les constantes a, b, et c tel que :

$$f(x) = x + a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

1.b) Déterminer l'ensemble de définition Df

2) Calculer les limites aux bornes de Df

3) $\forall x \in Df$ déterminer $f'(x)$ et en déduire son signe

4) Déterminer les variations de f et établir son tableau de variation

5) Montrer que la courbe C représentative de f admet deux asymptote dont l'une est la droite (D) d'équation $y = x - 2$ et préciser la position de (C) par rapport à (D).

6) Déterminer les coordonnées du point commun de (C) et (D)

PROBLEME 2 :

Soit la fonction f définie par : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2 - 2x - 3}{|x-2| - 2}$$

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b) Ecrire $f$sans la valeur absolue.
   c) Etudier la dérivabilité de f en 2.
2. a) Calculer les limites de f aux bornes de Df.
   b) Déduire les asymptotes à (Cf).
3. Démontrer que :

   $\forall\, x \in\ ]-\infty; 0[\ \cup\ ]0; 2[;\ f'(x) = \frac{-(x^2+3)}{x^2}$ et

   $$\forall\, x \in\ ]2; 4[\ \cup\ ]4; +\infty[;\ \ f'(x) = \frac{x^2 - 8x + 11}{(x-4)^2}$$
4. Etudier les variations de $f$sur Df.
5. Dresser son tableau de variation.

6. Démontrer que la droite (D_1) d'équation $y = -x + 2$ est asymptote oblique à (Cf) en $-\infty$ et la droite (D_2) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à (Cf)en $+\infty$.
7. Donner les équations des demi-tangentes au point $B(2;\frac{3}{2})$ à gauche et à droite.
8. Tracer(Cf) ; (D_1) ; (D_2) ; (T_1) ; (T_2)

PROBLEME 3 :

Soit la fonction f définie par : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x - \sqrt{x^2 + 2x - 3}$$

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de Df

b) Démontrer que $\forall\, x \in Df$; $f'(x) = \frac{-x-1+\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{x^2+2x-3}}$

c) Déduire le signe de $f'(x)$ et le sens de variation

2. a) Etudier la dérivabilité de $f$en -3 à gauche et à droite en -1 et interpréter

b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et interpréter le résultat.

c)Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

3. a) Déterminer les coordonnées du point de d'intersection de (C) avec la droite (OI)

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) Construire (C) et (D).

PROBLEME 1

1.a) Calculons les constantes a, b et c :

$$f(x) = x + a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} = \frac{(x-a)(x-1)^2 + b(x-1) + c}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^3 - 2x^2 + x + ax^2 - 2ax + a + bx - b + c}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^3 + (-2+a)x^2 + (1-2a+b)x + a - b + c}{(x-1)^2}$$

par identification on aura: $\begin{cases} -2 + a = -4 \\ 1 - 2a + b = 8 \\ a - b + c = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 + 2 \\ b = 8 + 2a - 1 \\ c = -4 - a + b \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 8 + 2 \times (-2) - 1 \\ c = -4 - a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \\ c = -4 - (-2) + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$

Donc $f(x) = x - 2 + \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$

1.b) Déterminons l'ensemble de définition :

$Df = \{x \in \mathbb{R}\,; (x-1)^2 \neq 0 \to x \neq 1\}$donc $Df =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

2) Calculons les limites aux bornes de Df :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{x^2 - 2x + 1}\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\<}}\left(\frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}\right) = \lim_{\substack{x\to1\\<}}(x^3 - 4x^2 + 8x - 4) \times \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = +\infty \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}(x^3 - 4x^2 + 8x - 4) = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = +\infty$$

3) Déterminons $f'(x)$

$\forall x \in Df\,;f'(x) = \dfrac{(x^3-4x^2+8x-4)'(x-1)^2-(x^3-4x^2+8x-4)(x-1)^{2'}}{((x-1)^2)^2}$

$= \dfrac{(3x^2-8x+8)(x-1)^2-(x^3-4x^2+8x-4)2(x-1)}{(x-1)^4}$

$= \dfrac{(3x^2-8x-8)(x-1)-2(x^3-4x^2+8x-4)}{(x-1)^3}$

$= \dfrac{3x^3-2x^3-3x^2-8x^2+8x^2+8x+8x-16x-8+8}{(x-1)^3} = \dfrac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$

$f'(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^2(x-1)}$

- Signe de la dérivée

$\forall x \in Df\,, \dfrac{x^2}{(x-1)^2} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ va dépendre de celui de $\dfrac{x-3}{x-1}$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

4) Sens de variation :

Comme $\forall x \in]-\infty;1[\cup]3;+\infty[\,, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $]-\infty;1[$ et sur $]3;+\infty[$

Comme $\forall x \in]1;3[\,; f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $]1;3[$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	11/4	↗	$+\infty$

5) Montrons que la courbe C représentative de f admet deux asymptote dont l'une est la droite (D) d'équation $y = x - 2$ et précisons la position de (C) par rapport à (D) :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(x-2+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)-(x-2)\right]=0$$

car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x-1}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(x-1)^2}=0\end{cases}$

La droite (D) d'équation $y = x-2$ est une asymptote oblique à ((Cf) en $+\infty$ et en $-\infty$

La $2^{ème}$ asymptote est :

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = +\infty$ alors la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à gauche et à droite.

Position relative :

On a : $f(x)-(x-2) = \dfrac{3}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{3(x-1)+1}{(x-1)^2} = \dfrac{3x-3+1}{(x-1)^2}$

$$f(x) = \frac{3x-2}{(x-1)^2}.$$

$\forall x \in Df$, $(x-1)^2 > 0$ donc le signe dépendra de celui du numérateur :

$3x-2=0 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$

x	$-\infty$	$^2/_3$	$+\infty$
$f(x)-(x-2)$	$-$	0	$+$
Position relative	$\dfrac{(D)}{(Cf)}$		$\dfrac{(Cf)}{(D)}$

6) Déterminons les coordonnées du point commun de (C) et (D) :

Déterminer les points communs de (C) et (D) revient à résoudre l'équation :

$x-2+\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2} = x-2 \Rightarrow \dfrac{3x-2}{(x-1)^2} = 0.$

$\forall x \in Df$; $\dfrac{3x-2}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}.$

Remplaçons x dans y pour avoir sa valeur :

$\Rightarrow y = \dfrac{2}{3}-2 \Rightarrow y = \dfrac{-6+2}{3} \Rightarrow y = -\dfrac{4}{3}$

Les points communs sont $A\left(\dfrac{2}{3}; -\dfrac{4}{3}\right)$

PROBLEME 2:

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x \mapsto & \frac{x^2-2x-3}{|x-2|-2}\end{aligned}$$

1) a) Donnons l'ensemble de définition :

$$x \in Df \iff |x-2|-2 \neq 0$$

$$\Rightarrow |x-2| \neq 2 \iff x-2 \neq 2 \; et \; x-2 \neq -2$$

$$x \neq 4 \quad et \; x \neq 0$$

$\boxed{Df =]-\infty;0[\cup]0;4[\cup]4;+\infty[}$

a) Ecrivons $f(x)$ sans valeur absolue

Tableau donnant les expressions de $f(x)$ sans le symbole | |

x	-∞ 0	2	4	+∞
x-2	-	-	+	+
|x-2|	-x+2	-x+2	x-2	x-2
f(x)	$\frac{x^2-2x-3}{-x}$	$\frac{x^2-2x-3}{-x}$	$\frac{x^2-2x-3}{x-4}$	$\frac{x^2-2x-3}{x-4}$

donc $\forall\, x \in]-\infty;0[\cup]0;2[\;;\; f(x) = \frac{x^2-2x-3}{-x}$

$\forall\, x \in]2\,;4[\cup]4\,;+\infty[\,;\;\; f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x-4}$

2.a) calculons les limites aux bornes de Df :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x-3}{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ donc
  $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x^2 - 2x - 3}{-x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} (x^2 - 2x - 3) \times \frac{1}{-x} = -\infty$$

car : $\begin{cases} \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} (x^2 - 2x - 3) = -3 \\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{-x} = +\infty \end{cases}$ donc :

$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty}$

- $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x^2-2x-3}{-x} = +\infty$ car : $\begin{cases} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x^2 - 2x - 3) = -3 \\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{-x} = -\infty \end{cases}$

  donc : $\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) + \infty}$

- $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = \frac{3}{2}$

- $\lim_{\substack{x \to 4 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 4 \\ <}} \frac{x^2-2x-3}{x-4} = -\infty$ car : $\begin{cases} \lim_{\substack{x \to 4 \\ <}} x^2 - 2x - 3 = 5 \\ \lim_{\substack{x \to 4 \\ <}} \frac{1}{x-4} = -\infty \end{cases}$ donc

  $\boxed{\lim_{\substack{x \to 4 \\ <}} f(x) = -\infty}$

- $\lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} \frac{x^2-2x-3}{x-4} = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} x^2 - 2x - 3 = 5 \\ \lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} \frac{1}{x-4} = +\infty \end{cases}$ donc

  $\boxed{\lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} f(x) = +\infty}$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-2x-3}{x-4} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc

  $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

b) Déduisons les asymptotes :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty \; et \; \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$$

alors la droite (D) d'équation $x=0$ est asymptote a (c) de même la droite (D) d'équation $x=4$ est asymptote a (c)

3) Démontrons les dérivées :

$$\forall x \in \left]-\infty;0\right[\cup\left]0;2\right[;\ f'(x)=\left(\frac{x^2-2x-3}{-x}\right)'$$

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(-x)+1\times(x^2-2x-3)}{(-x)^2}=\frac{-(x^2+3)}{x^2}$$

$$\forall x \in \left]2;4\right[\cup\left]4;+\infty\right[;\ f'(x)=\left(\frac{x^2-2x-3}{x-4}\right)'$$

$$f'(x)=\frac{(x^2-2x-3)'(x-4)-(x-4)'(x^2-2x-3)}{(x-4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-8x+11}{(x-4)^2}$$

2) Etude de la variation

$\forall x \in \left]-\infty;0\right[\cup\left]0;2\right[\ ;\ f'(x)=-\dfrac{(x^2+3)}{x^2}, or\ \dfrac{(x^2+3)}{x^2}>0$

Donc $\forall x \in \left]-\infty;0\right[\cup\left]0;2\right[\ ;\ f'(x)<0$

$\forall x \in \left]2;4\right[\cup\left]4;+\infty\right[;\ f'(x)=\dfrac{x^2-8x+11}{(x-4)^2}$ or

$\forall x \in \left]2;4\right[\cup\left]4;+\infty\right[;\ \dfrac{1}{(x-4)^2}>0\ donc:$

le signe de f' est celui de $x^2-8x+11$

$\Delta=64-4\times11=20 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=2\sqrt{5}\ \ x_1=\frac{8+2\sqrt{5}}{2}=4+\sqrt{5}$

$$x2=\frac{8-2\sqrt{5}}{2}=4-\sqrt{5}$$

x	2		4		$4+\sqrt{5}$		$+\infty$
$x^2-8x+11$		-		-	0	+	

Donc $\forall x \in \left]2;4\right[\cup \left]4;4+\sqrt{5}\right[$; $f'(x)<0$ et

$$\forall x \in \left]4+\sqrt{5};+\infty\right[\; ; \; f'(x)>0$$

<u>sens de variation :</u>

$$\forall x \in \left]-\infty;0\right[\cup \left]0;4\right[\cup \left]4;4+\sqrt{5}\right[\; ; f'(x)<0$$

alors f est strictement décroissante sur

$\left]-\infty;0\right[$ *et sur* $\left]0;4\right[$ *et sur* $\left]4;4+\sqrt{5}\right[$.

$\forall x \in \left]4+\sqrt{5};+\infty\right[$; $f'(x)>0$ alors f est strictement croissante sur

$\left]4+\sqrt{5};+\infty\right[$

3) <u>tableau de variation</u>

x	$-\infty$		0		2		4		$4+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$6+2\sqrt{5}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(4+\sqrt{5}) = 6+2\sqrt{5}$

4) Démontrons que (D_1) et (D_2) sont asymptotes obliques à (C) en $-\infty$ et $+\infty$:

$$\forall\, x \in\,]-\infty;0[\ f(x) = \frac{x^2-2x-3}{-x} = -x+2+\frac{3}{x}$$

$$\forall\, x \in\,]4;+\infty[\ f(x) = \frac{x^2-8x+11}{(x-4)^2}$$

$$= x+2+\frac{5}{x-4} \text{(division écludienne)}$$

et on a: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+2)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x} = 0$alors la droite (D_1) d'équation $y=-x+2$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+2)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x-4} = 0$ alors la droit(D_2) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

5) Equation des tangentes

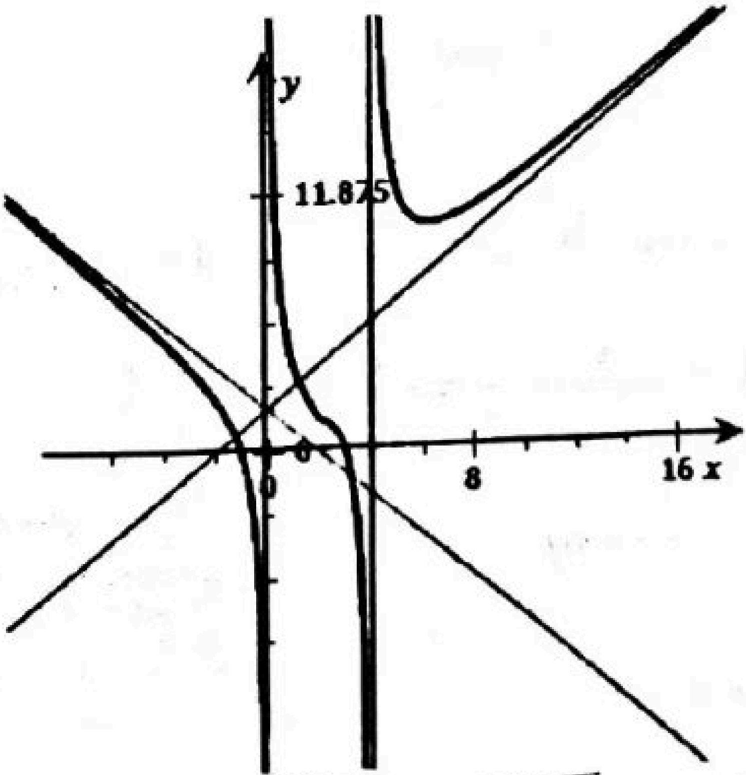
$(T_1) : y_1 = f'_g(2)(x-2) + f(2)$

$= -\frac{7}{4}(x-2) + \frac{3}{2} = -\frac{7}{4}x + 5$ Donc $y_1 = -\frac{7}{4}x + 5$ est la tangente à gauche en 2

$(T_2) : y_2 = f'_d(2)(x-2) + f(2) = -\frac{1}{4}(x-2) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}x + 2$

Donc $y_2 = -\frac{1}{4}x + 2$ est la tangente à droite en 2

6) Tracé de la courbe



PROBLEME 3 :

Etude de la fonction définie par:

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x - \sqrt{x^2 + 2x - 3}$$

1- a) Domaine de définition :

$x \in Df \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 \geq 0$

$\Delta = 2^2 - 4(-3) = 4 + 12 = 16 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$

$x_1 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x^2 + 2x + 3$		+	0	−	0	+	

$$\boxed{Df =]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[}$$

a) $\forall x \in Df;\ f'(x) = \left(x - \sqrt{x^2 + 2x - 3}\right)' = 1 - \frac{(x^2+2x+3)'}{2\sqrt{x^2+2x+3}}$

$$= 1 - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{\sqrt{x^2+2x+3}-x-1}{\sqrt{x^2+2x+3}};$$

$$\forall x \in Df\ ; f'(x) = \frac{-x-1+\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{x^2+2x-3}}$$

c) Déduisons le signe de $f'(x)$:

$\forall\, x \in Df$; $\sqrt{x^2+2x-3} \geq 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $-x-1+\sqrt{x^2+2x-3}$

or $\forall\, x \in\ ]-\infty;-3[$; $-x-1>0$ donc

$$-x-1+\sqrt{x^2+2x-3}>0$$

par conséquent $\forall\, x \in\ ]-\infty;-3[; f'(x)>0$

$\forall\, x \in\ ]1;+\infty[$; *supposons que* $f'(x)<0$ cela traduit que

$$\sqrt{x^2+2x-3}<x+1 \Leftrightarrow x^2+2x-3<(x+1)^2$$

$\Leftrightarrow -3<1$ ce qui est vrai donc $\forall\, x \in\ ]1;+\infty[; f'(x)<0$

2- a) Etudions la dérivabilité de f en -3 à gauche et en -1 à droite :

$$\lim_{\substack{x\to-3\\<}} \frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)} = \lim_{\substack{x\to-3\\<}} \frac{f(x)+3}{x+3} = \lim_{\substack{x\to-3\\<}} \frac{x-\sqrt{x^2+2x-3}+3}{x+3}$$

$$= \lim_{\substack{x\to-3\\<}} \frac{x+3-\sqrt{(x-1)(x+3)}}{x+3}$$

$$\lim_{\substack{x\to-3\\<}} 1+\frac{\sqrt{(x-1)(x+3)}}{-(x+3)} = \lim_{\substack{x\to-3\\<}} 1+\sqrt{\frac{x-1}{|x+3|}} = +\infty \ \ car \lim_{\substack{x\to-3\\<}} \sqrt{\frac{x-1}{|x+3|}} = +\infty$$

Donc f n' est pas dérivable en -3

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to-3\\<}} \frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)} = +\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1\\>}} \frac{f(x)-1}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1\\>}} \frac{x-1-\sqrt{x^2+2x-3}}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{x\to1\\>}} 1+\frac{\sqrt{(x-1)(x+3)}}{-(x-1)}$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}} 1+\sqrt{\frac{x+3}{|x+1|}} = +\infty \ \ car \lim_{\substack{x\to1\\>}} \sqrt{\frac{x+3}{x+1}}$$

$$= +\infty \ \ donc \ \boxed{\lim_{\substack{x\to1\\>}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty}$$

f admet des demi tangente verticale en $x=-3$ et $x=1$

b) calculons les limites en $-\infty$ *et* $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - \sqrt{x^2+2x-3}$$

$$= \frac{\left(x-\sqrt{x^2+2x-3}\right)\left(x+\sqrt{x^2+2x-3}\right)}{x+\sqrt{x^2+2x-3}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x^2-2x+3}{x+\sqrt{x^2+2x-3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(-2+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2+\frac{3}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}} = -1$$

car : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} -2+\frac{3}{x} = -2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}} = 2 \end{cases}$ *donc* $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1}$ la droite d'équation $x=-1$ est asymptote horizontale à (C).

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2x-3}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}\right) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}} = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \end{cases}$$

donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

c) Démontrons que la droite (D) est asymptote oblique à (C) :

On a

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(2x-1)] = \lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2x-3}-2x-1\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-1-x-\sqrt{x^2+2x-3}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left[-(x+1)-\sqrt{x^2+2x-3}\right]\left[-(x+1)+\sqrt{x^2+2x-3}\right]}{-(x+1)+\sqrt{x^2+2x-3}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{[-(x+1)]^2 - x^2 - 2x + 3}{-(x+1) + \sqrt{x^2 + 2x - 3}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{-(x+1) + \sqrt{x^2 + 2x - 3}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{4}{x}}{-1 + \frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}} = \frac{0}{-2} = 0 \quad donc \ \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (2x - 1)] = 0$$

la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

3- a) Coordonnées du point de rencontre de (C) avec (OI) :

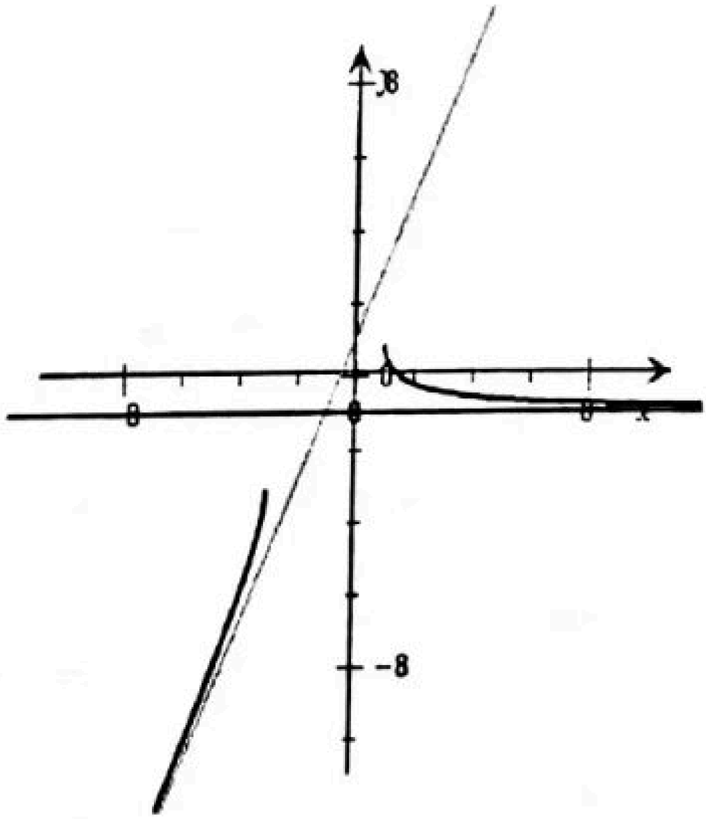
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 + 2x - 3} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x - 3} = x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = x^2 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ donc le point de rencontre avec l'axe est } \left(\frac{3}{2}; 0\right)$$

b) Tableau de variation :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
f'(x)		+	||	//////	||	−	
f(x)	$-\infty$	↗	-3	//////	1	↘	-1

1) Construction



LA FONCTION LOGARITHME NEPERIENNE(ln)

Définition :

On appelle fonction logarithme népérienne de notée *ln* la fonction primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

La fonction ln: $\begin{matrix} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto lnx \end{matrix}$ $\forall n \in \mathbb{R}_+^* (lnx)' = \frac{1}{x}$ et $ln1 = 0$

$\forall\, x \in]1; +\infty[$	$lnx > 0$
$\forall\, x \in]0; 1[$	$lnx < 0$
$\forall\, a \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, b \in \mathbb{R}_+^*$	$lna = lnb \Leftrightarrow a = b$

$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, b\ \in \mathbb{R}_+^*\ ln(ab) = lna + lnb$

$\forall a \in \mathbb{R}_+^*\ \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -lna$

$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall b \in \mathbb{R}_+^*\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = lna - lnb$

$\forall x \in \mathbb{I}, \forall a \in \mathbb{R}_+^* \ln(a^n) = n \ln(a)$

$\lim_{x \to +\infty} lnx = +\infty$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} lnx = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} (xlnx) = 0$$

$f(x) = \ln\lvert u(x)\rvert \; ; u(x) \neq 0)$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \; ; \; u(x) \neq 0)$

EXERCICES

Exercice 1 : Calculer

$f(e), f\left(\frac{1}{e}\right), f(e^2), f(1), f(\sqrt{2})$ pour $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x$ et pour

$f(x) = x \ln x$

Exercice 2 : simplifier les réels suivants

$e^{\ln 5}$; $e^{-\ln 3}$; $\ln(^1/_{e^3})$; $\ln(e^2 \times \sqrt[6]{e})$; $2\ln 12 - 3\ln 2$;

$$\frac{7}{16}\ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2} + 1)$$

$e^{\ln 6 - \ln 3}$

Exercice 3 :

Ln : Résoudre dans R les équations et inéquations suivantes :

$a)$ $\ln(3x - 5) = 0$
$b)$ $\ln(x + 3) + \ln(x + 2) = \ln 15$
$c)$ $\ln(-2x + 1) \leq 0$
$d)$ $\ln(3x - 1) = \ln(5 - x)$
$e)$ $\ln\left(\frac{x + 3}{1 - x}\right) = 0$
$f)$ $\ln(x + 1) + \ln(x + 3) \leq \ln(2x + 3)$
$g)$ $\ln(x + 3) \leq 2$
$h)$ $3\ln^2 x - 5\ln x + 2 = 0$
$i)$ $3\ln^2 x - 5\ln x + 2 > 0$
$j)$ $2\ln^3(x + 1) - \ln^2(x + 1) - 5\ln(x + 1) - 2 = 0$
$k)$ $2\ln^3(x + 1) - \ln^2(x + 1) - 5\ln(x + 1) - 2 \leq 0$

Exercice 4 : calculer les dérivées des fonctions suivantes

$\ln(3x)$; $\ln(x^2 + x + 1)$; $\sqrt{1 - \ln x}$;

Exercice 5 :

a) Etudier la fonction f définie sur IR par $f(x) = 2\ln x - x + 2$.
b) Monter que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [2\ ;\ +\infty[$

Exercice 6 :

Soient $f(x)$ et $g(x)$ les fonctions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$g(x) = x^3 - x - 2\ln(x) + 1$ et par $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$

1- a) Montrer que pour tout $x \in\,]0\,;\,+\infty[$ $\quad g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$

b) Etudier les variations de la fonction g puis déterminer le signe de $g(x)$.

2- a) Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$ et montrer que pour tout $x \in\,]0\,;\,+\infty[$ $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

b) Donner le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de f.

EXERCICE SUR DERIVEES **(non résolus)**

Dériver les fonctions suivantes :

$p(x) = \ln(x^2 + 2x - 1)$

$h(x) = x\ln x$

$q(x) = \ln\left(\frac{x - 2x^2 + 1}{x - 1}\right)$

$f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2 + 4} - x\right)$

$g(x) = \frac{1}{x}[(\ln x)^2 + 2\ln x + 1]$

CORRIGES DES EXERCICES

Exercice 1 :

1. Pour $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x$ on obtient :

$f(e) = 0$; $f\left(\frac{1}{e}\right) = 2$; $f(e^2) = 2$; $f(1) = 0$; $f(\sqrt{2}) = -\frac{1}{4}\ln 2$

2. Pour $f(x) = x\ln x$ on obtient :

$f(e) = e$; $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$; $f(e^2) = 2e^2$; $f(1) = 0$; $f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ln 2$

Exercice 2 :

$e^{ln5} = 5$; $e^{-ln3} = \frac{1}{3}$; $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right) = -\ln(e^3) = -3$;

$$\ln(e^2 \times \sqrt[6]{e}) = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}$$

; $2ln12 - 3ln2 = 4ln2 + 2ln3 - 3ln2 = ln2 + 2ln3$

; $e^{ln6-ln3} = \frac{e^{ln6}}{e^{ln3}} = 2$

; $\frac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1) = \frac{7}{16}\ln(\sqrt{2}+1) - 4\ln(\sqrt{2}+1)$

$$= 2\ln(\sqrt{2}+1) - 4\ln(\sqrt{2}+1)$$

$$= -2\ln(\sqrt{2}+1)$$

Exercice 3 : Résolvons dans R les équations et inéquations suivantes :

$a)$ $\ln(3x-5) = 0$: $Ev = \{x \in \mathbb{R},\ 3x-5 > 0\}$donc $Ev = \left]\frac{5}{3};+\infty\right[$

$x \in Ev ; \ln(3x-5) = \ln 1 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2.$ $\boxed{S_{\mathbb{R}} = \{2\}}$

$b)$ $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln 15$: $Ev = \left\{\begin{matrix} x \in \mathbb{R};\ & x+3>0 & et\ x+2>0 \\ & x>-3 & et\ \ x>-2 \end{matrix}\right\}$ donc $Ev =]-2;+\infty[$

$x \in Ev$; $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln 15 \Rightarrow x^2 + 2x + 3x + 6 - 15 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 5x - 9 = 0$

$\Delta = 25 + 36 = \sqrt{62} \Rightarrow x_1 = \frac{-5-\sqrt{62}}{2}$; $x_2 = \frac{-5+\sqrt{62}}{2}.$

$x_1 \notin Ev$ tandis que $x_2 \in Ev$ donc

$$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{-5+\sqrt{62}}{2}\right\}}$$

$c)$ $\ln(-2x+1) \leq 0$: $Ev: \{x \in \mathbb{R} ; -2x+1 > 0\} \Rightarrow -2x > -1 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$

$Ev = \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$

$x \in Ev ; \ln(-2x+1) \leq \ln 1 \Rightarrow -2x+1 \leq 1 \Rightarrow -2x \leq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cap [0;+\infty[\Rightarrow \boxed{S_{\mathbb{R}} = \left\{\left[0;\frac{1}{2}\right[\right\}}$

$d)\ \ln(3x-1)=\ln(5-x)$: $\quad Ev=\left\{\begin{matrix} x\in\mathbb{R};\ 3x-2>0\ et\ 5-x>0\\ 3x>2\quad et\ -x>-5\\ x>\dfrac{2}{3}\quad et\ \ x<5\end{matrix}\right\}$

$Ev=\left]\dfrac{1}{2};5\right[$

$x\in Ev$, $\ln(3x-1)=\ln(5-x)\ \Rightarrow\ 3x-1=5-x\ \Rightarrow\ 3x+x=6$

$\Rightarrow\ 4x=6\ \Rightarrow\ x=\dfrac{6}{4}\ \Rightarrow\ x=\dfrac{3}{2}$

$\boxed{S_{\mathbb{R}}=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}}$

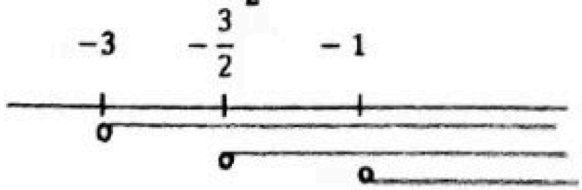
$e)\ \ln\left(\dfrac{x+3}{1-x}\right)=0$: $\quad Ev=\left\{x\in\mathbb{R};\ \dfrac{x+3}{1-x}>0\ et\ 1-x\neq 0\right\}\dfrac{x+3}{1-x}>0\Rightarrow x$ $\in\ ]-3\,;1[$

$x\in Ev;\ \ln\left(\dfrac{x+3}{1-x}\right)=\ln 1\ \Rightarrow\ \dfrac{x+3}{1-x}=1\ \Rightarrow\ x+3=1-x\ \Rightarrow\ 2x=-2$

$\Rightarrow\ x=1.$ $\boxed{S_{\mathbb{R}}=\{-1\}}$

$f)\ \ln(x+1)+\ln(x+3)\leq\ln(2x+3)$:

$Ev=\{x\in\mathbb{R};x+1>0\ \ et\ \ x+3>0\ \ et\ \ 2x+3>0\}$ *donc* $x>-1$ *et* $x>-3$ *et* $x>-\dfrac{3}{2}$



$Ev=]-1\,;\,+\infty[$

$x\in Ev$: $\ln(x+1)+\ln(x+3)\leq\ln(2x+3)\ \Rightarrow\ln(x+2)(x+3)\leq\ln(2x+3)$

$\Rightarrow x^2+3x+x+3\leq 2x+3$

$x^2+2x\leq 0\ \Rightarrow x(x+2)\leq 0.$ *Soit* : $x=0$ *ou* $x+2=0\Rightarrow x=-2$

$x(x+2)\leq 0\ \Rightarrow x\in[-2\,;0]S_{\mathbb{R}}=]-1\,;\,+\infty[\,\cap\,[-2\,,0]$ *donc* $\boxed{S_{\mathbb{R}}=]-1\,,\,0]}$

$g)\ \ln(x+3)\leq 2$: $\quad Ev=\{x\in\mathbb{R}\,;x+3>0\}\ \ x>-3$

$Ev=]-3\,;+\infty[$

$x\in Ev;\ \ln(x+3)\leq\ln e^2\Rightarrow\ x+3\leq e^2\ \Rightarrow x\leq e^2-3\ \Rightarrow$

$x\in\,]-\infty\,;\,e^2-3]$

$S_{\mathbb{R}} =]-3\,;+\infty[\, \cap \,]-\infty\,;\, e^2 - 3]$ *donc* $\boxed{S_{\mathbb{R}} =]-3\,;\, e^2 - 3]}$

h) $3ln^2 x - 5\ln x + 2 = 0$: $\quad Ev = \{x \in \mathbb{R}\,; x > 0\} \quad Ev =]0\,;\,+\infty[$

$x \in Ev$; $\;3ln^2 x - 5\ln x + 2 = 0$ posons $\ln x = X$

$3X^2 + 5 + 2 = 0.\;\; \Delta = 25 - 24 = 1$

$$X_1 = \frac{5-2}{6} = \frac{2}{3} \quad ; \quad X_2 = \frac{5+1}{6} = 1$$

$X_1 = \frac{2}{3} \Longrightarrow \ln x = \ln e^{\frac{2}{3}} \Longrightarrow x = e^{\frac{2}{3}}$et $\;X_2 = 1 \Longrightarrow \ln x = \ln e$

$\Longrightarrow x = e \quad \boxed{S_{\mathbb{R}} = \{e^{2/3}\,; e\}}$

i) $3ln^2 x - 5\ln x + 2 > 0$: $\quad Ev = \{x \in \mathbb{R}\,; x > 0\}$ *donc* $Ev =]0\,;+\infty[$

De ce qui précède, on a : $\;x = e^{\frac{2}{3}}$ *et* $x = e \;\Longrightarrow \left(X - \frac{2}{3}\right)(X - 1) > 0$

$$\Longrightarrow \left(\ln x - \frac{2}{3}\right)(\ln x - 1) > 0$$

$$\Longrightarrow x \in]0\,; e^{\frac{2}{3}}[\, \cup]e; +\infty[\qquad \boxed{S_{\mathbb{R}} =]0\,; e^{2/3}[\, \cup]e; +\infty[}$$

j) $2ln^3(x+1) - ln^2(x+1) - 5\ln(x+1) - 2 = 0$: $\quad x \in \mathbb{R}\,; x + 1 > 0 \Longrightarrow$
$x > -1. \quad Ev =] - 1; +\infty[$

$x \in Ev$; $\;2ln^3(x+1) - ln^2(x+1) - 5\ln(x+1) - 2 = 0.\;$ Posons $\ln(x+1) = X$

$2X^3 - X^2 - 5X - 2 = 0$. Soit $P(x) = 2X^3 - X^2 - 5X - 2$.

Calculons $P(2)$: $\quad P(2) = 2(2^3) - (2^2) - 5(2) - 2$
$= 0$. Donc 2 est une racine de $P(x)$donc factorisable par X − 2

$$\begin{array}{r|l}
2X^3 - X^2 - 5X - 2 & X - 2 \\ \cline{2-2}
 & -2X^3 + 4X^2 2X^2 + 3X + 1 \\ \hline
3X^2 - 5X & \\
-3X^2 + 6X & \\ \hline
X - 2 & \\
-X + 2 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

Donc $P(X)$*est de la forme* $(X - 2)(2X^2 + 3X + 1)$

$P(X) = 0 \iff \;X - 2 = 0 \;$ *ou* $\;2X^2 + 3X + 1 = 0.\;\; \Delta = 9 - 8 = 1$

$X_1 = \frac{-3-1}{4} = -1$; $X_2 = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}$

$X = 2 \to \ln(x+1) = \ln e^2 \Rightarrow x+1 = e^2 \Rightarrow x = e^2 - 1$

$X_1 = -1 \to \ln(x+1) = \ln e^{-1} \Rightarrow x+1 = e^{-1} \Rightarrow x = e^{-1} - 1$

$X_2 = \frac{1}{2} \to \ln(x+1) = \ln e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x+1 = e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} - 1$

$$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \left\{e^{-1} - 1 ; e^{-\frac{1}{2}} - 1 ; e^2 - 1\right\}}$$

k) $2ln^3(x+1) - ln^2(x+1) - 5\ln(x+1) - 2 \leq 0$: $Ev =]-1; +\infty[$

De ce qui précède, on a : $\boxed{S_{\mathbb{R}} =]-1; e^{-1} - 1] \cup [e^{-\frac{1}{2}} - 1 ; e^2 - 1]}$

Exercice 4 :

- $(ln(3x))' = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$
- $(ln(x^2 + x + 1))' = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$
- $(\sqrt{1 - lnx})' = \frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{1-lnx}} = -\frac{1}{2x\sqrt{1-lnx}}$

Exercice 5 :

a) $D_f =]0 ; +\infty[f'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}$ cette expression est du signe de $2 - x$. Elle est donc positive sur $]0 ; 2]$ et négative sur $[2 ; +\infty[$ avec $f(2) = 2ln2$. Ce qui signifie que la fonction f est croissante sur $]0 ; 2]$ et décroissante sur $[2 ; +\infty[$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$

Or $f(x) = = x\left(\frac{2lnx}{x} - 1 + \frac{2}{x}\right)$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

b) Sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$ f est $x\left(\frac{2lnx}{x} - 1 + \frac{2}{x}\right)$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ continue et strictement croissante.

De plus, l'intervalle $[2 ; +\infty[$ a pour image $[-\infty ; 2ln2[$

$0 \in$, $[2 ; 2ln2[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution unique α sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$.

Exercice 6 :

1. a) $g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3-x-2}{x}$ Le polynôme $3x^3 - x - 2$ admet 1 comme racine évidente et se factorise en $(x-1)(3x^2+3x+2)$ (on peut procéder par identification ou effectuer la division)

1. b) $g'(x)$ est du signe de $x-1$ sur$]0\,;\,+\infty[$, la fonction g est donc croissante sur $[1\,;+\infty[$ et décroissante sur$]0\,;1]$. De plus, $g(1) = 1$, la fonction g admet un minimum positif donc g est toujours positive sur $]0\,;\,+\infty[$

2. a)

$$f(x) = x + \frac{x + lnx}{x^2}$$

$$or \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x + lnx = -\infty \quad \text{et} \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ d'où } \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x^2} = 0 \text{ d'où } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{x - 2xlnx}{x^4} = \frac{x^3 - x + 1 - 2lnx}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

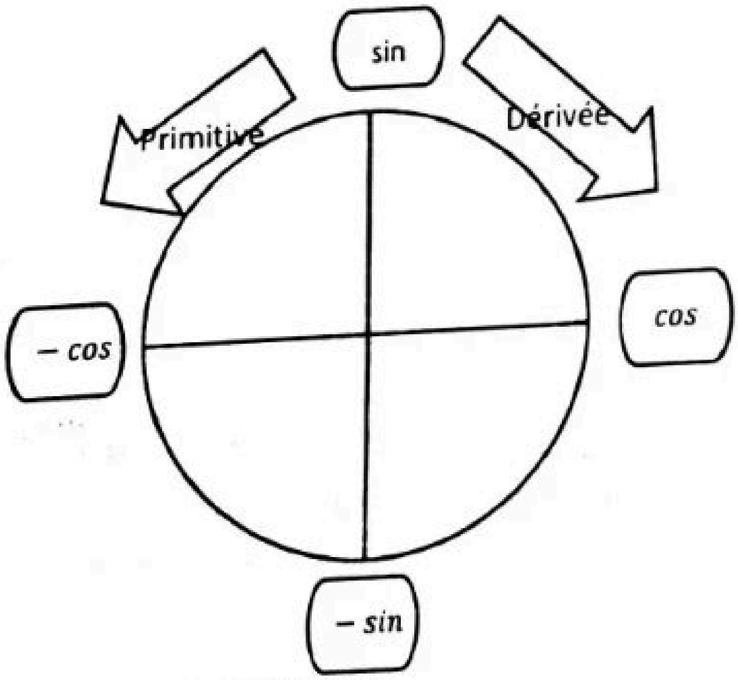
b) D'après la question 1.b), il en résulte que $f'(x)$ et toujours positive, donc la fonction f est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

CALCUL INTEGRAL

Que veut dire intégrer une fonction ?

Intégrer une fonction c'est calculer le réel I.

$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. a et b sont des réels $(a < b)$ et $F(x)$ étant la primitive de f sur Df.



RAPPEL SUR LES PRIMITIVES

Fonctions	ax^n	$\frac{f'}{f^n}$	$nf'f^{n-1}$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{u'}{u}$	$u'e^u$
primitives	$\frac{a}{n+1}x^{n+1}$	$\frac{1}{(n-1)f^{n-1}}$	f^n	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\ln u$	e^u

Application : Intégrer les fonctions suivantes :

1) $f(x) = 2x^2 - 7x + 6$ $(0; 1)$

2) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ $(1; 2)$

3) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^3 + 1)^2}$ $(0; 1)$

4) $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ $(e; e^2)$

5) $f(x) = \sqrt{4x + 1}$ $(0; 2)$

Exercice non résolus

6) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $(1; e)$

7) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{e^{(-x^2+x-1)}}$ $(0; 1)$

8) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 1}{x^2}$ $(1; 2)$

9) $f(x) = \dfrac{-4x - 2}{x^2 + x + 2}$ $(0; -2)$

10) $f(x) = \tan x$ $\left(0; \dfrac{\pi}{3}\right)$

Correction de l'application:

1) 1) $f(x) = 2x^2 - 7x + 6$ $0; 1$

$$I_1 = \int_0^1 (2x^2 - 7x + 6)dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 6x\right]_0^1 = \left(\frac{2}{3}(1)^3 - \frac{7}{2}(1)^2 + 6(1)\right) - \left(\frac{2}{3}(0)^3 - \frac{7}{2}(0)^2 + (0)\right) = \frac{2}{3} - \frac{7}{2} + 6 = \frac{19}{6} \boxed{I_1 = \frac{19}{6}}$$

2) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ $(1; 2)$

$I_2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{x^2 - 4}dx$. En utilisant la méthode de la division euclidienne on aura:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2-4 \\ \cline{2-2} -x^3+4x & x \\ \hline +4x & \end{array}$$

$$\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{4x}{x^2-4} = x + 2\times\frac{2x}{x^2-4}$$

$$I_2 = \int_1^2 \left(x + 2\times\frac{2x}{x^2-4}\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x^2-4|\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}(2)^2 + 2\ln((-2)^2+4) - \left(\frac{1}{2} + 2\ln 5\right) = \frac{1}{2}\times 4 + 2\ln 8 - \frac{1}{2} - 2\ln 5$$

$$\boxed{I_2 = \frac{3}{2} + 2\ln 8 - 2\ln 5}$$

3) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^3+1)^2}$ $(0;1)$

$$I_3 = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{(x^3+1)^2}\right)dx. \quad u = x^3+1\ ;\ u' = 3x^2$$

$$\frac{x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{\frac{3}{3}x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{\frac{1}{3}\times 3x^2}{(x^3+1)^2}$$

$$I_3 = \int_0^1 \left(\frac{\frac{1}{3}\times 3x^2}{(x^3+1)^2}\right)dx = \left[\frac{-1}{3(2-1)(x^3+1)^{2-1}}\right]_0^1 = \left[\frac{-1}{3(x^3+1)}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{-1}{3(1+1)}\right) - \left(\frac{-1}{3(0+1)}\right) = \frac{-3+6}{9} = \frac{1}{6}\ \boxed{I_3 = \frac{1}{6}}$$

4) $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ $(e;e^2)$

$$I_4 = \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{x(\ln x)^2}\right)dx = \int_e^{e^2} \left(\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}\right)dx = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_e^{e^2} = \left(\frac{-1}{\ln e^2}\right) - \left(-\frac{1}{\ln e}\right)$$

$$\boxed{I_4 = \frac{-1}{\ln e^2} + \frac{1}{\ln e}}$$

5) $f(x) = \sqrt{4x+1}$ $(0;2)$

$$I_5 = \int_0^2 \left(\sqrt{4x+1}\right)dx = \int_0^2 (4x+1)^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{1}{6}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{6}(4\times 2+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}(4\times 0+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}9^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}1^{\frac{3}{2}}$$

$$\boxed{I_5 = \frac{1}{6}9^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}1^{\frac{3}{2}}}$$

PROBLEMES (résolus)

Problème 1

Partie A :

Soit la fonction g dérivable et définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - \ln x - 1$

1) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2) Démontrer que, pour tout nombre réel strictement positif x , $g'(x) = \frac{2x^2-1}{x}$

3) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

4.a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solution sur $]0;+\infty[$

4.b) On désigne par α la plus petite des solutions. Démontrer que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

4.c) Calculer $g(1)$

4.d) En déduire que, pour tout nombre réel strictement positif x :

$$\begin{cases} Si \quad x \in]0;\alpha[\cup]1;+\infty[& \text{alors } g(x) > 0 \\ Si \quad x \in]\alpha;1[& \text{alors } g(x) < 0 \end{cases}$$

Partie B :

Soit f la fonction dérivable et définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O I, J). L'unité graphique est 4 cm sur (OI) et 2 cm sur (OJ).

1.a) Déterminer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement.

1.b) Déterminer la limite de f en $+\infty$

2) Démontrer que, pour tout nombre réel strictement positif x, $f'(x) = g(x)/x^2$

3.a) Démontrer que $f(\alpha) = 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$

3.b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) Démontrer que le droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$

5) Etudier la position de (D) par rapport à (C)

6) Tracer (D) et (C). On prendra $\alpha = 0{,}45$ et $f(\alpha) = 3{,}1$

7) Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C), (D) et les droites d'équations respectives $x = e^{-2}$ et $x = 1$. Calculer A.

PROBLEME 2 X -

Partie A :

Soit la fonction g définie de R vers $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x|x| + 1 - \ln|x|$.

1.a) Déterminer D_g.

1.b) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation. On ne demande pas de déterminer les limites aux bornes de D_g.

2.a) Déterminer le signe de g(x) sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$.

2.b) Calculer g(1)

2.c) Déterminer le signe de g(x) sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie B :

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}^*$vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = -|x| + \frac{\ln|x|}{x}$. Soit C sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O ;I ;J) ; unité : 1 cm.

1.a) En utilisant les résultats de la partie A, étudier le sens de variation de f.

1.b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

1.c) Dresser le tableau de variation de f.

2) Déterminer le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

3) Démontrer que les droites (Δ)et (Δ') d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$ sont asymptotes à (C) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

4.a) Déterminer l'intersection de (C) et (Δ') sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

4.b) Etudier la position relative de (C) et (Δ') sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

5.a) Déterminer l'intersection de (C) et (Δ) sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$

5.b) Déterminer l'intersection de (C) et (Δ) sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$

6) Tracer la courbe (C) ainsi que les droites (Δ)et (Δ').

Partie C :

On se propose de déterminer l'intersection de (C) et (Δ') sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$.

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ par $h(x) = f(x) + x$.

1.a) Calculer les limites de h en $-\infty$ et en 0 à gauche.

1.b) Etudier le sens de variation de la fonction h.

1.c) Dresser son tableau de variation

2.a) Démontrer que l'équation $\forall x \in\,]-\infty; 0[\,, f(x) = -x$ admet une solution unique α.

2.b) Démonter que $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$.

PROBLEME 3

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in]0; +\infty[\; ; g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

1.a Démontrer que $\forall x \in]0 ; +\infty[\; ; g'(x) = -4x \ln x$

1.b) En déduire le sens de variation de g

1.c) Calculer les limites de g aux bornes de Dg puis dresser son tableau de variation

2.a) Démontrer que l'équation g(x)=0, admet une unique solution $\alpha \in]1 ; +\infty[$

2.b) Vérifier que :$1{,}89 < \alpha < 1{,}9$

3) En déduire le signe de g(x).

Partie B :

Soit f la fonction définie de R vers R par $f(x) = 2 + \frac{\ln(x^2)}{1+x^2}$

Soit (Cf) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). *unité 2 cm*

1.a) Déterminer Df.

1.b) Etudier la parité de f puis interpréter graphiquement le résultat.

2.a) Calculer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat

2.b) Etudier la position relative de (Cf) par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = 2$, sur $]0; +\infty[$

3) Calculer la limite de f en à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat

4.a) Justifier que : $f(\alpha) = 2 + \frac{1}{\alpha^2}$

4.b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$

5.a) Montrer que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{2g(x)}{x(1+x^2)^2}$$

5.b) En déduire le ses de variation de f sur $]0; +\infty[$

5.c) Dresser le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$

6.a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 1

6.b) Construire (Δ), (T) et $Cf)$.

PROBLEME 4 lycée moderne de VAVOUA

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J). *Unité 2cm sur [OI] et 1cm sur [OJ].*

Partie A :

Soit g la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $g(0) = -1$ et $g(x) = \frac{x}{(\ln x)^2} - 1$ soit (Cg) sa courbe.

1.a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g

1.b) Calculer les limites de g en 1 et en $+\infty$.

1. c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}$

1.d) Interpréter graphiquement les résultats des limites.

2.a) Démontrer que g est continu en 0

2.b) Etudier la dérivabilité de g en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

3) On admet que g est dérivable sur $[0; 1[\cup]1; +\infty[$.

3.a) Démontrer que $\forall x \in [0; 1[\cup]1; +\infty[\,, g'(x) = \frac{\ln x(\ln x - 2)}{(\ln x)^4}$

3.b) Déterminer le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

4.a) Démontrer que l'équation : $x \in \mathbb{R}\,, g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; 1[$.

4.b) Vérifier que $0{,}4 \leq \alpha \leq 0{,}5$.

4.c) En déduire que $\forall x \in]0; \alpha[\,, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; 1[\cup]1; +\infty[\,, g(x) > 0$

Partie B :

Soit f la fontion définie sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln x}$ et (C)sa courbe

1.a) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$

1.b) Interpréter graphiquement ces résultats.

2) On admet que f est dérivable sur$]0; 1[\cup]1; +\infty[$. Démontrer que :

$\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[\,, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. Puis dresser le tableau de variation de f.

3) Démontrer que $f(\alpha) = \frac{1 + \sqrt{\alpha}}{\alpha}$, en déduire le signe de $f(x)$.

4) Construire (C). On prendra $\alpha \simeq 0{,}5$.

PROBLEME 5 (BAC D 1997)**Partie A :**

On donne la fonction g définie sur ℝ tel que :
$$g(x) = (lnx)^4 + (lnx)^2 - 2lnx$$

1) Soit l'équation définie sur ℝ tel que : $p(x) = x^4 + x^2 - 2x$
   a) Calculer p(0) et p(1)
   b) Factoriser p(x)
   c) Résoudre l'équation p(x)=0
2) a)Résoudre l'équation g(x)=0
   b) Déduire que $\forall x \in]0\,;1[\cup]e\,;+\infty[\quad g(x) > 0$ et $\forall x \in]1\,;e[\quad g(x) < 0$

Partie B :

Soit $f(x) = \dfrac{(lnx)^3 - lnx + 1}{(lnx)^2}$

1- a) DéterminerDf.
   b) Calculer la limite de $f(x)$ en 1.
2- a) Démontrer que $\forall x \in Df\,; f(x) = lnx\left(1 - \frac{1}{(lnx)^2} + \frac{1}{(lnx)^3}\right)$

b) Calculer
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$

3) Démontrer que $\forall x \in Df$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x(lnx)^4}$

4) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

5) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat

Partie C :

Soit (H) la courbe représentative de la fonction $h(x)$ définie par $h(x) = lnx$

1- Etudier la position relative de (C) et (H)
2- Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}(lnx - f(x)) = 0$ et interpréter
3- Construire (C) et (H)

Partie D :

Soitλ un nombre réel strictement supérieur à e (λ>e) et $\mathcal{A}$ l'air définie par (H) ; (C) et les droites d'équation $x = e\,; x = \lambda$

1- Calculer $\mathcal{A}$
2- calculer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{A}$

PROBLEME 6 (BAC D session de remplacement 1998)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ tel que : $f(x) = x - \frac{\ln(|x-1|)}{x-1}$

Partie A :

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (x-1)^2 - 1 + \ln(|x-1|)$$

1- a) Déterminer Dg

b) Déterminer les limites de g aux bornes de Dg

2- Démontrer que : $\forall\, x \in Dg\,;\, g'(x) = \frac{2(x-1)^2+1}{x-1}$

3- Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

4- a) Calculer g(0) ; g(2)

c) Déduire que :

$$\forall\, x \in\ ]-\infty; 0[\ \cup\ ]2; +\infty[\quad g(x) > 0$$
$$\text{et } \forall\, x \in\ ]0; 1[\ \cup\ ]1; 2[\quad g(x) < 0$$

Partie B :

1) Donner Df
2) Ecrire $f(x)$ sans la valeur absolue, calculer les limites et interpréter
3) Etudier les variations de f sur Df après avoir montré que $\forall\, x \in Df;\ f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$
4) Dresser son tableau de variation
5) démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote en $-\infty$ et $+\infty$
6) Construire (D) et (C) dans un repère (O,I,J) avec OI=OJ=2cm

Partie C :

Soit A_1 l'aire de la partie délimité par (C) , (D) , $x = 1 - e$ et $x = 0$

Soit A_2 l'aire de la partie délimité par (C) , (D) , $x = 0$, $x = 1 - e^{-1}$

a) Calculer A_1 et A_2

b) Démontrer que A l'aire de la partie délimité par (C), (D), $x = 1 - e$, $x = 1 - e^{-1}$ est égale à 1 et hachurer l'aire de la partie délimité par (C), (D), et $x = 1 - e$ et $x = 1 - e^{-1}$

PROBLEME 7

PARTIE A

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x + 1 - (2x + 1)\ln x$

1) a.)Calculer les fonction f' et f'' dérivées première et seconde de f.

   b) déterminer le sens de variation de f'.

   en déduire que $\forall \in]0;+\infty[$, $f'(x) < 0$.

2) a) indiquer le sens de variation de de f.

   b) Déterminer les limites de f au bornes de l'intervalle de définition .

   c) Démontrer qu'il existe un et un seul nombre reel α tel que $f(\alpha) = 0$ et justifier que α a pour valeur approché 1,83 par defaut.

   d) Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

PARTIE B

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{\ln x}{x^2+x}$ et on désigne par (Cg) Sa courbe représentative dans s le plan rapporté du repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ OI=4cm et OJ=12cm.

1) a.)Déterminer le sens de variation de g *(on montrera que $g'(x)$ a le même signe que $f(x)$).*

   Et vérifier que $g(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)}$.

2) Déterminer les limites de $g(x)$ au bornes de son ensemble de définition puis interpréter graphiquement les résultats.

3) Tracer la courbe (Cg) et sa tangente au point d'abscisse 1.

PARTIE C

On donne $I(\lambda) = \int_1^{\lambda} \frac{\ln x}{x^2+x}dx$ ou λ est un nombre reel strictement positif superieur à 1

1) Donner l'interprétation graphique de $I(\lambda)$

2) a) Montrer que : $I(\lambda) \leq \int_1^{\lambda} \frac{\ln x}{x^2}dx$.

   b) A l'aide d'une intégration par partie , calculer $\int_1^{\lambda} \frac{\ln x}{x^2}dx$

   en déduire que pour tous nombres réel strictement positif $I(\lambda) \leq 1$.

CORRECTIONS DES PROBLEMES

PROBLEME 1

Partie A :

1) Calculons les limites :

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^2 - \ln x - 1 = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^2 = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} -\ln x = +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - \ln x - 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) - 1 = +\infty$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$

2) Démontrons que, pour tout nombre réel strictement positif x, $g'(x) = \frac{2x^2-1}{x}$

$\forall x \in Dg: g'(x) = (x^2 - \ln x - 1)' = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$

3) Etudions les variations de g et dressons son tableau de variation :

$\forall x \in Dg : x > 0$ donc le signe de g' dépend de celui de $2x^2 - 1$

$2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \Delta = -4 \times 2 + (-1) = 8 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$x_1 = \frac{-2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \; x_2 = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$

Comme $\forall x \in \left]0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$, $g'(x) < 0$ alors g est strictement décroissant sur $\left]0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$

Comme $\forall x \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$, $g'(x) > 0$ alors g est strictement croissant sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$.

Tableau de variation :

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

4.a) Démontrons que $g(x) = 0$ admet deux solutions :

Sur $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ g est continue et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ vers $f\left(\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\right)$ dans $k = \left(\left]-\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[\right)$ or $0 \in k$ donc $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

Sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$ g est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $\left]\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$ vers $f\left(\left]\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[\right)$ dans $k = \left(\left]-\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[\right)$ or $0 \in k$ donc $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\left]\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$

Donc l'équation $g(x) = 0$admet deux solutions dans $]0;+\infty[$.

4.b) Démontrons que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

$g(0{,}4) \times g(0{,}5) < 0$ donc $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

4.c) Calculons $g(1)$:

$g(1) = 1^2 - \ln 1 - 1 = 0$

4.d) Tableau de variation :

x	0		α		$\sqrt{2}/2$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$	0	$-$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Signe de g		$+$			$-$			$+$	

Sur $]0\,;\alpha[$, g est strictement décroissant : $x < \alpha \Rightarrow g(x) > g(\alpha)$ or $g(\alpha) = 0$
$\forall\, x \in]0;\ \alpha[\,, g(x) > 0$.

Sur $]\alpha; \sqrt{2}/2\,[$, g est strictement décroissant : $x > \alpha \Rightarrow g(x) < g(\alpha)$ or $g(\alpha) = 0$
$\forall\, x \in]\alpha; \sqrt{2}/2\,[\,, g(x) < 0$.

Sur $]\sqrt{2}/2\,; 1[$, g est strictement croissant : $x < 1 \Rightarrow g(x) < g(1)$ or $g(1) = 0$
$\forall\, x \in]\sqrt{2}/2\,; 1[\,, g(x) < 0$.

Sur $]1; +\infty[$, g est strictement croissant : $x > 1 \Rightarrow g(x) > g(1)$ or $g(1) = 0$
$\forall\, x \in]1; +\infty[\,, g(x) > 0$.

Partie B :

1.a) Déterminons la limite de f en 0 :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x + \frac{2+\ln x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left[x + \frac{1}{x} \times (2 + \ln x)\right]$$
$$= -\infty$$

$$\text{car} \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty \end{cases}.$$

La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à Cf en $-\infty$.

1.b) Déterminons la limite en $+\infty$ on aura :

$$\lim_{x\to+\infty} x+\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}=+\infty \text{ car } \begin{cases}\lim_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0\end{cases}$$

2) Démontrons que $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

$$\forall x\in Df\,;f'(x)=\left(x+\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)'=x'+\left(\frac{2+\ln x}{x}\right)$$

$$=1+\frac{(2+\ln x)'x-x'(2+\ln x)}{x^2}=1+\frac{1-2-\ln x}{x^2}$$

$$=1+\frac{-1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2-\ln x-1}{x^2}\text{or } x^2-\ln x-1=g(x)$$

$$\forall x\in Df;f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}.$$

3.a) Démontrons que $f(\alpha)=2\alpha+\frac{1}{\alpha}$:

On sait que $g(\alpha)=0$

$\Rightarrow \alpha^2-\ln\alpha-1=0\Rightarrow\alpha^2-\ln\alpha=1\Rightarrow-\ln\alpha=1-\alpha^2\Rightarrow\ln\alpha$
$=\alpha^2-1$

Don on aura :

$$f(\alpha)=\alpha+\frac{2}{\alpha}+\frac{\alpha^2-1}{\alpha}=\frac{\alpha^2+2+\alpha^2-1}{\alpha}=\frac{2\alpha^2+1}{\alpha}=2\alpha+\frac{1}{\alpha}.$$

$$f(\alpha)=2\alpha+\frac{1}{\alpha}$$

3.b) Etudions les variations de f puis dressons son tableau de variation :

$\forall x\in Dg\,;x^2>0$ donc son signe sera celui de $g(x)$.

$\forall x\in\,]0,\alpha[\cup]1;+\infty[\,,g(x)>0$ donc $f'(x)>0$ alors $f(x)$est strictement croissant sur $]0,\alpha[$ et sur $]1;+\infty[$.

$\forall x\in\,]\alpha;1[\,,g(x)<0$ donc $f'(x)<0$ alors $f(x)$ est strictement décroissant sur $]\alpha;1[$.

Tableau de variation :

x	0		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$2\alpha+\frac{1}{\alpha}$	↘	3	↗	$+\infty$

4) Démontrons que $y = x$ est une asymptote oblique :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty} x+\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}-x = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\text{car}\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0\end{cases}$$

Donc la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à (Cf) en $+\infty$.

5) Etudions la position de D par rapport à (C)

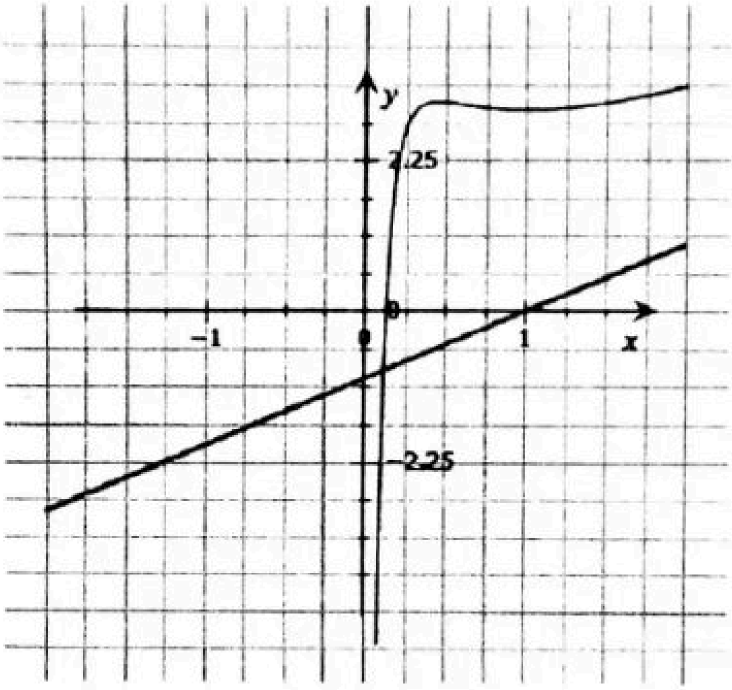
$$f(x)-x = x+\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}-x = \frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x} = \frac{2+\ln x}{x}.$$

Etudions son signe : $\forall x \in Dg\ ; x > 0$ donc son signe va dépendre de $2 + \ln x$

$\Rightarrow 2+\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -2 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{-2} \Leftrightarrow x = e^{-2}$.

x	$-\infty$	e^{-2}	$+\infty$
$f(x)-x$	$-$		$+$
Position relative	$\frac{(D)}{(C)}$		$\frac{(C)}{(D)}$

Construction


y
2.25
0
−1
0
1
x
−2.25

PROBLEME 2

Partie A :

1.a) Déterminons Dg :
$Dg = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\} \rightarrow Dg =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

1.b) Sens de variation :

$\forall x \in]-\infty; 0[\,; g(x) = x^2 + 1 - \ln(-x)$; $g'(x) = (x^2 + 1 - \ln(-x))' = 2x - \frac{1}{x}$

$$= \frac{2x^2 - 1}{x}$$

$\forall x \in]0; +\infty[\,; g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$; $g'(x) = (-x^2 + 1 - \ln x)' = 2x - \frac{1}{x}$

$$= -\frac{(2x^2 + 1)}{x}$$

– Pour $\forall x \in]-\infty; 0[\,; x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = 0$ *ou* $2x^2 - 1 = 0$
$\Delta: 2x^2 - 1 \Rightarrow \Delta = 8 \Rightarrow \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. $\Delta > 0$ donc deux racines distincts :

$$x_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ou \quad x_2 = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Tableau de variation sur $]-\infty; 0[$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
x	$-$		$-$
$x + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$-$	0	$+$
$x - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$-$		$-$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$; $g'(x) < 0$ alors g est strictement decroissant sur cet intervalle

$\forall x \in \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;0\right[\,; g(x) > 0$ alors g est strictement croissant sur cet intervalle.

- Pour $x \in]0;+\infty[\,;\ \frac{2x^2+1}{x} > 0\ donc\ -\frac{2x^2+1}{x} < 0$

$\forall x \in]0;+\infty[\,; g'(x) < 0$

Tableau de variation sur les deux intervalles :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
$g(x)$		↘	$\frac{3}{2}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	‖	↘	

2.a) Déterminons le signe de $g(x)$ sur $]-\infty\,;0[$:

Sur $]-\infty\,;0[$, $g(x)$ admet un minimum positif donc $\forall x \in]-\infty\,;0[$, $g(x) > 0$

2.b) Calculons $g(1)$:

$g(1) = -1 + 1 - \ln 1 = 0$

2.c) Déterminons le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$:

$\forall x \in]0;1[\,; x < 1 \Leftrightarrow g(x) > g(1)$or $g(1) = 0$ donc $g(x) > 0$

$\forall x \in]1;+\infty[\,; x > 1 \Leftrightarrow g(x) < g(1)$or $g(1) = 0$ donc $g(x) < 0$

Partie B :

1.a) Etudions le sens de variation de $f(x)$:

Ecrivons $f(x)$ sans valeur absolue :

$\forall x \in]-\infty; 0[\,; f(x) = x + \frac{\ln(-x)}{x}$ et $\quad \forall x \in]0; +\infty[\,; f(x) = -x + \frac{\ln x}{x}$

Calculons la dérivée de $f(x)$ sur chaque intervalle :

- Sur $\forall x \in]-\infty; 0[$

$$f'(x) = \left(x + \frac{\ln(-x)}{x}\right)' = 1 + \frac{(\ln(-x))'x - x'\ln(-x)}{x^2} = 1 + \frac{1 - \ln(-x)}{x^2}$$
$$= \frac{x^2 + 1 - \ln(-x)}{x^2}$$

or $\forall x \in]-\infty; 0[\,, g(x) = x^2 + 1 - \ln(-x)$ donc $\forall x \in]-\infty; 0[\,, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

Signe de la dérivée : $\forall x \in]-\infty; 0[\,, x^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ sera celui de $g(x)$

Sens de variation : Comme $\forall x \in]-\infty; 0[\,; g(x) > 0$ alors $f'(x)$ est strictement croissante sur cet intervalle.

- Sur $\forall x \in]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \left(-x + \frac{\ln x}{x}\right)' = -1 + \frac{(\ln x)'x - x'\ln x}{x^2} = -1 + \frac{1 - \ln x}{x^2}$$
$$= \frac{-x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x}$$

Signe de la dérivée : $\forall x \in]0\,; +\infty[\,, x^2 > 0$

donc le signe de $f'(x)$sera celui de $g(x)$

Sens de variation : $\forall x \in]0\,; 1[\,; g(x) > 0$ d'où $f'(x) > 0$

alors f est strictement croissant sur cet intervalle.

$\forall x \in]1\,; +\infty[\,; g(x) < 0$ d'où $f'(x) < 0$

alors f est strictement décroissant sur cet intervalle

1.b) Calculons les limites aux bornes : $Df =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x + \frac{\ln(-x)}{x}$. $\quad$ Posons $X = -x \leftrightarrow x = -X$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty \quad \leftrightarrow \quad \lim\limits_{X\to+\infty} -X + \frac{\ln X}{-X} = -\infty$

car $\begin{cases} \lim\limits_{X\to+\infty} -X = -\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x+\frac{\ln x}{x} = -\infty \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} x+\frac{\ln(-x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} x+\frac{1}{x}\times\ln(-x) = +\infty$$

$$\text{car} \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} x = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \ln(-x) = -\infty \end{cases} \quad \text{donc} \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} -x+\frac{\ln x}{x} = -\infty \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln(x) = -\infty \end{cases} \quad \text{donc} \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$$

$$= -\infty$$

1.c) Dressons son tableau de variation :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$			$+\infty$ ||		-1		
		↗	||	↗		↘	
	$-\infty$		|| $-\infty$				$-\infty$

2) Déterminons le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$:
$\forall\, x \in]0;+\infty[$; $f(x)$admet un maximum négatif donc

$\forall\, x \in]0;+\infty[$; $f(x) < 0$

3) Démontrons que les droites (Δ)et (Δ') d'équations respectives

$y = x$ et $y = -x$ sont asymptotes à (C) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x + \dfrac{\ln(-x)}{x} - x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(-x)}{x} = 0.$
Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x = 0$. La droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à Cf en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x + \dfrac{\ln x}{x} + x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0.$
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (-x) = 0$ alors la droite (Δ') d'équation $y = x$ est asymptote à Cf au voisinage de $+\infty$.

4.a) Déterminons l'intersection de (C) et (Δ') sur $]0;+\infty[$:

$\forall\, x \in]0;+\infty[$; $f(x) - (-x) = 0 \Rightarrow \dfrac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \ln x = \ln 1 \Rightarrow x = 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Remplaçons x dans la fonction pour avoir la valeur de y pour déterminer les coordonnées : Quand on remplace 1 dans la fonction on a : *y=1* donc on aura pour coordonnées $\binom{x=1}{y=-1}$.

4.b) Etudions les positions relatives de (C) et (Δ') sur $]0;+\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	$-$	0	$+$
Position relative	La droite (Δ') est au-dessus de (C)		La droite (Δ') est en dessous de (C)

5.a) Déterminons l'intersection de (C) et (Δ) sur $]-\infty;0[$:

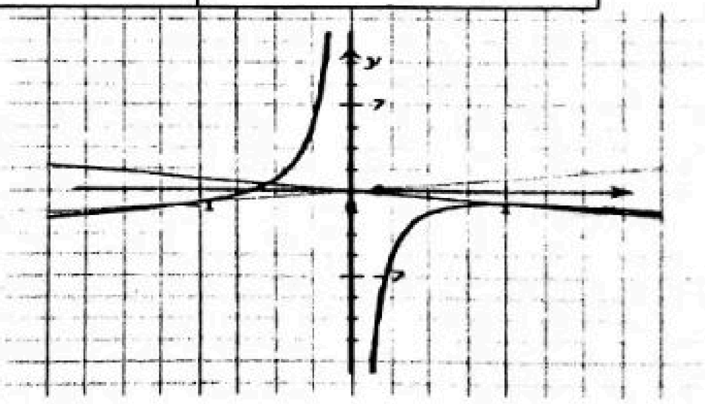
$$f(x)=x \Rightarrow x-\frac{\ln(-x)}{x}=x \Rightarrow x-\frac{\ln(-x)}{x}-x=0 \Rightarrow -\frac{\ln(-x)}{x}=0$$

$$\begin{cases} -\frac{\ln(-x)}{x}=0 \Rightarrow -\ln(-x)=0 \Rightarrow \ln(-x)=0 \Rightarrow \ln(-x)=\ln 1 \\ \qquad \Rightarrow -x=1 \Rightarrow x=-1 \\ x\neq 0 \end{cases}$$

$$\beta \begin{vmatrix} x=-1 \\ y=-1 \end{vmatrix}$$

5.b) position relative :

x	$-\infty$	-1	0
$-\ln(-x)$	$-$		$+$
Position relative	$\frac{D}{Cf}$		$\frac{Cf}{D}$

Construction : 

Partie C :

1a) Calculons les limites :

$\lim\limits_{x \to -\infty} 2x + \dfrac{\ln(-x)}{x}$. Posons $X = -x \leftrightarrow x = -X$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$. $\lim\limits_{X \to +\infty} 2(-X) + \dfrac{\ln X}{-X} = -\infty$

car $\begin{cases} \lim\limits_{X \to +\infty} 2(-X) = -\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln X}{-X} = 0 \end{cases}$ Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} 2x + \dfrac{\ln(-x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} 2x + \ln(-x) \times \dfrac{1}{x} = +\infty$

car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} 2x = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x} = -\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} h(x) = +\infty$

1.b) Etudions le sens de variation de $h(x)$

- Dérivée :

$\forall x \in]-\infty; 0[;\ h'(x) = \left(2x + \dfrac{\ln(-x)}{x}\right)' = (2x)' + \left(\dfrac{\ln(-x)}{x}\right)'$

$$= 2 + \frac{\ln(-x)'\,x - x'\ln(-x)}{x^2} = 2 + \frac{\frac{-x'}{-x} \times x - 1\ln(-x)}{x^2}$$

$$= 2 + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(-x)}{x^2} = 2 + \frac{1 - \ln(-x)}{x^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 1 - \ln(-x)}{x^2}$$

- Signe de $h'(x)$:

$\forall x \in]-\infty; 0[;\ h'(x) = \left(x + \dfrac{\ln(-x)}{x} + x\right)'$ or $\quad x + \dfrac{\ln(-x)}{x} = f(x)$

$\forall x \in]-\infty; 0[;\ h'(x) = f'(x) + x' = f'(x) + 1 = \dfrac{g(x)}{x^2} + 1$

$\forall x \in]-\infty; 0[;\ x^2 > 0$, d'après la partie A $g(x) > 0$

dc $\dfrac{g(x)}{x^2} > 0$ et $\dfrac{g(x)}{x^2} + 1 > 0$

$\forall x \in]-\infty; 0[\ h'(x) > 0$

donc h est strictement croissante sur cet intervalle.

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0
$h'(x)$	$+$	
$h(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2.a) Démontrons que l'équation $f(x) = -x$ admet une solution unique α :

$\forall x \in]-\infty; 0[; f(x) = -x \Leftrightarrow f(x) + x = 0$ or $f(x) + x = h(x) \Leftrightarrow h(x) = 0.$

h est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ d'où elle réalise une bijection de $]-\infty; 0[$ dans $h(]-\infty; 0[) = (]-\infty; +\infty[)$ donc l'équation h(x)=0 admet une solution unique α par conséquent l'équation $f(x) = -x$ admet une unique solution α dans $]-\infty; 0[$.

PROBLEME 3

Partie A :

1.a) Démontrons que : $\forall x \in]0\,;+\infty[\,; g'(x) = -4x\ln x$

$\forall x \in]0\,;+\infty[\,; g'(x) = (1 + x^2 - 2x^2\ln x)'$

$$= 1' + (x^2)' - \left(4x\ln x + \frac{1}{x}2x^2\right) = 2x - (4x\ln x + 2x)$$

$$= 2x - 4x\ln x - 2x = -4x\ln x\,.\ donc\ \forall x$$

$$\in]0\,;+\infty[\,; g'(x) = -4x\ln x$$

2.b) Déduisons les variations de g :

- Signe de $g'(x)$: $\forall x \in]0\,;+\infty[\,; 4x > 0$ donc le signe de $g'(x)$ dépendra de celui de $-\ln x$:

$-\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln\frac{1}{x} = \ln 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

- Tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$		+	0	−	
$g'(x)$		+	0	−	

$\forall x \in]0\,;1[\,; g'(x) > 0$ et $\forall x \in]1\,;+\infty[\,; g'(x) < 0$

- Sens de variation :

Comme $\forall x \in]0\,;1[\,; g'(x) > 0$ alors g est strictement croissant sur $]0\,;1[$

Comme $\forall x \in]1;+\infty[\,; g'(x) < 0$ alors g est strictement décroissant sur $]1;+\infty[$

1.c) Calculons les limites aux bornes de Dg :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} 1 + x^2 - 2x^2\ln x = 1 \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^2 = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} -2x^2\ln x = 0\,. \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} 1 = 1 \end{cases}$$

f est continue en 0 car elle admet une limite finie en 0

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + x^2 - 2x^2\ln x = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x^2} + 1 - 2\ln x\right) = -\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -2\ln x = -\infty \end{cases}$

Dressons son tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		+		−	
$g(x)$	1	↗	2	↘	$-\infty$

2.a) Démontrons que l'équation g(x)=0, admet une unique solution $\alpha \in]1\,;+\infty[$

$\forall x \in]1;+\infty[$; g réalise une bijection de g( ]1; +∞[ )vers ( ]−∞; 2[ )or $0 \in]-\infty; 2[$.

Donc g admet une unique solution.

2.b) Vérifions que $1{,}89 < \alpha < 1{,}9$:

$g(1{,}89) = 0{,}02$ et $g(1{,}9) = -0{,}02 \quad \rightarrow \quad g(1{,}89) \times g(1{,}9) < 0$

Donc $\alpha \in]1{,}89; 1{,}9[$

3) Déduisons le signe de $g(x)$:

x	0		1		α		$+\infty$
$g'(x)$		+		−			
$g(x)$	1	↗	2	↘	0	↘	$-\infty$
Signe de $g(x)$			+			−	

$\forall x \in]0; \alpha[$; $g(x)$ admet un minimum positif donc $g(x) > 0$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[$; $x > \alpha$ car g est décroissante, or $g(\alpha) = 0 \Rightarrow g(x) < 0$

Partie B :

1.a) Déterminons Df

$Df = \{x \in \mathbb{R}; 1 + x^2 \neq 0 \; et \; x^2 > 0\}$. $1 + x^2$ est définie sur R et $x^2 > 0$ cela signifie que $x \neq 0$. Donc

$Df =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

1.b) Etudions la parité de f puis interprétons :

$\forall x \in Df \; ; -x \in Df; \quad f(-x) = 2 + \frac{\ln(-x^2)}{1+(-x)^2} = 2 + \frac{\ln x^2}{1+x^2} \cdot f(-x)$

$= f(x)$

f est une fonction paire qui admet un axe de symétrie dans le repère orthonormé (O, I, J).

2.a) Calculons la limite de f en $+\infty$ puis interprétons :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2 + \frac{\ln(x^2)}{1+x^2}$$

Ici nous avons une forme indéterminée, nous pouvons procéder comme suite :

- En divisant chaque membre de l'inégalité par x
- Ou en cherchant à mettre un élément en facteur

$$\lim_{x\to+\infty} 2 + \frac{\ln(x^2)}{1+x^2} = 2 + \frac{\frac{\ln x^2}{x}}{\frac{1+x^2}{x}} = 2 + \frac{\ln x^2}{x} \times \frac{x}{1+x^2}$$

$$= 2 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x^2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2 \end{cases}$$

La droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

2.b) Etudions la position relative de (Cf) par rapport à la droite d'équation $y = 2$ sur $]0; +\infty[$:

$f(x) - 2 = 2 + \frac{\ln x^2}{1+x^2} - 2 = \frac{\ln x^2}{1+x^2}$.

$\forall x \in]0; +\infty[\; ; 1 + x^2 > 0$ donc son signe dépendra de celui de $\ln x^2$.

$\ln x^2 = 0 \iff \ln x^2 = \ln 1 \iff x^2 = 1 \iff x = 1 \; ou \; x = -1$

Etant donné que nous travaillons sur $]0; +\infty[$: $\forall x \in]0; 1[\; ; Cf$ est en dessous de la droite (D) et $\forall x \in]1; +\infty[\; ; Cf$ est au-dessus de la droite (D).

3) Calculons la limite de f en 0 à droite et interprétons :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} 2 + \frac{\ln x^2}{1+x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} 2 + \ln x^2 \times \frac{1}{1+x^2}$$

$$= -\infty \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x^2 = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{1}{1+x^2} = +\infty \end{cases}$$

La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à Cf au voisinage de $-\infty$.

4.a) Justifions que $f(\alpha) = 2 + \frac{1}{\alpha^2}$:

$g(\alpha) = 0$ or $g(\alpha) = 1 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \ln \alpha = 0$

$$\to -2\alpha^2 \ln \alpha = -1 - \alpha^2 \to \ln \alpha = \frac{-1-\alpha^2}{-2\alpha^2} = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$$

$$f(\alpha) = 2 + \frac{\ln \alpha^2}{1+\alpha^2} = \frac{2\ln \alpha}{1+\alpha^2} = 2 + \frac{1+\alpha^2}{\frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2}} = 2 + \frac{2(1+\alpha^2)}{2\alpha^2(1+\alpha^2)} = 2 + \frac{1}{\alpha^2}.$$

$$f(\alpha) = 2 + \frac{1}{\alpha^2}$$

4.b) Déduisons un encadrement de $f(\alpha)$:

$1{,}89 < \alpha < 1{,}9 \quad \leftrightarrow \quad 1{,}89^2 < \alpha^2 < 1{,}9^2 \quad \leftrightarrow \quad 3{,}57 < \alpha^2 < 3{,}61$

$\leftrightarrow \quad 0{,}28 > \dfrac{1}{\alpha^2} > 0{,}27 \quad \leftrightarrow \quad 2{,}28 > 2 + \dfrac{1}{\alpha^2} > 2{,}27$

5.a) Montrons que :

$$\forall x \in]0;+\infty[\,, f'(x) = \frac{2g(x)}{x(1+x^2)^2}$$

$$\forall x \in]0;+\infty[\,, f'(x) = \left(2 + \frac{\ln x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{(\ln x^2)'(1+x^2) - (1+x^2)' \ln x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{\frac{x^{2'}}{x^2} \times (1+x^2) - (1+x^2)' \ln x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2} \times (1+x^2) - (2x \ln x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{\frac{2(1+x)^2}{x} - 2x \ln x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2 + 2x^2 - 2x \ln x^2}{x(1+x^2)^2} = \frac{2(1 + x^2 - x \ln x^2)}{x(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{2(1 + x^2 - x \ln x^2)}{x(1+x^2)^2} = \frac{2(1 + x^2 - x^{2\ln x})}{x(1+x^2)^2}.$$

or $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$ Donc

$\forall x \in]0; +\infty[\,, f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x(1+x^2)^2}$.

5.b) Déduisons le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$

$\forall x \in]0; +\infty[\,, x(x^2+1)^2 > 0$donc son signe sera celui de g(x)

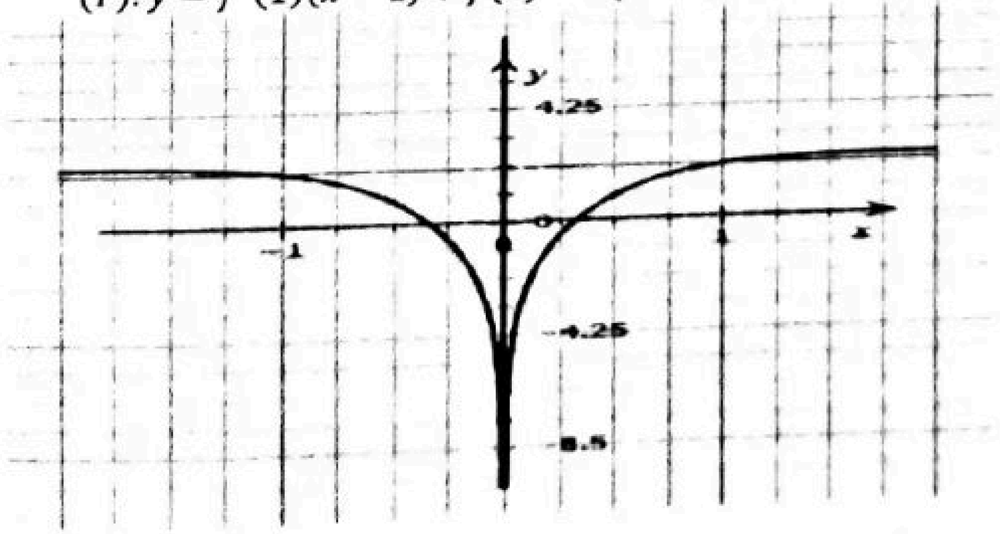
Comme $\forall x \in]0; \alpha[\,; g(x) > 0$ donc f est strictement croissant sur cet intervalle.

Comme $\forall x \in]\alpha; +\infty[\,;\ g(x) < 0$ donc f est strictement décroissant sur cet intervalle.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$		$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$2 + 1/\alpha^2$	↘	2

6.a) Déterminons une équation de la tangente T au point d'abscisse 1 :

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1) = 1(x-1) + 2 = x - 1 + 2 = x + 1$$



PROBLEME 4

1.a) Déterminons l'ensemble de définition de g :

$$Dg = \begin{cases} x \in \mathbb{R}\,; x > 0 \text{ et} \\ (\ln x)^2 \neq 0 \Rightarrow \ln x \neq \ln 1 \Rightarrow x \neq 1 \end{cases} \text{donc } Dg =]0;1[\cup]1;+\infty[$$

1.b) Calculons les limites de g :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(\ln x)^2} - 1 = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -1 = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}} g(x) = \lim_{\substack{x\to1\\<}} \frac{x}{(\ln x)^2} - 1 = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} x = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} \frac{1}{(\ln x)^2} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}} g(x) = \lim_{\substack{x\to1\\>}} x \times \frac{1}{(\ln x)^2} - 1 = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} x = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} \frac{1}{(\ln x)^2} = +\infty \end{cases}$$

1.c) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{(\ln x)^2} - 1}{x} = \frac{x-(\ln x)^2}{x(\ln x)^2} = \frac{x\left(1-\frac{(\ln x)^2}{x}\right)}{x(\ln x)^2} = \frac{1-\frac{(\ln xx)^2}{x}}{(\ln x)^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$$

1.d) Interprétons les résultats de la question 1.b) et 1.c

1.b) La droite d'équation x=1 est asymptote verticale en $+\infty$ 1.c) La courbe (Cg) admet une branche parabolique de direction (OI)

2.a) Démontrons que g est continue en 0 :

$$\lim_{x\to0} g(x) = \lim_{x\to0} \frac{x}{(\ln x)^2} - 1 = -1 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to0} \frac{x}{(\ln x)^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to0} -1 = -1 \end{cases}$$

Donc g est continue en 0

2.b) Etudions la dérivabilité de g en 0 puis interprétons graphiquement les résultats :

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{(\ln x)^2}-1-(-1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{(\ln x)^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\ln x)^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{1}{(\ln x)^2}=0$$

Donc g est dérivable en 0.

3.a) Démontrons que $\forall x\in[0;1[\cup]1;+\infty[\,, g'(x)=\frac{\ln x(\ln x-2)}{(\ln x)^4}$

$$\forall x\in[0;1[\cup]1;+\infty[\,, g'(x)=\left(\frac{x}{(\ln x)^2}-1\right)'=\frac{x'\times(\ln x)^2-x(\ln x)^{2'}}{(\ln x)^4}$$

$$g'(x)=\frac{(\ln x)^2-x\times 2(\ln x)'\times\ln x}{(\ln x)^4}=\frac{(\ln x)^2-x\times 2\times\frac{1}{x}\times\ln x}{(\ln x)^4}$$

$$g'(x)=\frac{(\ln x)^2-2\ln x}{(\ln x)^4}=\frac{\ln x\,(\ln x-2)}{(\ln x)^4}$$

3.b) Déterminons le sens de variation de g puis dressons son tableau de variation :

* Signe de la dérivée :

$x\in Dg$; $(\ln x)^4>0$ donc le signe de $g'(x)$ va dépendre de $\ln x\,(\ln x-2)$.

$\Leftrightarrow \ln x=0$ ou $\ln x-2=0$

$\ln x=\ln 1$ ou $\ln x=2$

$x=1$ ou $x=e^2$

x	0	1	e^2	$+\infty$
$\ln x$	$-$	$+$		$+$
$\ln x-2$	$-$	$-$		$+$
$g'(x)$	$+$	$-$		$+$
$g(x)$	$-1 \nearrow +\infty$	$+\infty \searrow$	$\frac{e^2-4}{4}$	$\nearrow +\infty$

4.a) Démontrons que : $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; 1[$.

$\forall x \in]0; 1[$; $g(x)$ est strictement croissante d'où elle réalise une bijection de $]0; 1[$ vers k avec $k = (]-1; +\infty[)$ or $0 \in]0; 1[$ donc l'équation $g(\alpha) = 0$ admet une solution α dans $]0; 1[$.

4.b) Vérifions que $0{,}4 \leq \alpha \leq 0{,}5$.

Si $g(0{,}4) \times g(0{,}5) < 0$ alors $0{,}4 \leq \alpha \leq 0{,}5$.

$$g(0{,}4) = \frac{0{,}4}{(\ln 0{,}4)^2} - 1 = -0{,}52 \quad \text{et} \quad g(0{,}5) = \frac{0{,}5}{(\ln 0{,}5)^2} - 1 = 0{,}04$$

$g(0{,}4) \times g(0{,}5) < 0$ alors $0{,}4 \leq \alpha \leq 0{,}5$

4.c) Déduisons que $\forall x \in]0; \alpha[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; 1[\cup]1; +\infty[$, $g(x) > 0$

x	0		α		1		e^2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$			||	$-$		$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{e^2-4}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$		$+$	||		$+$		

Conclusion $\forall x \in]0; \alpha[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; 1[\cup]1; +\infty[$, $g(x) > 0$

Partie B :

1.a) calculons les limites de f :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln x} = +\infty \qquad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\ln x} = 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln x} = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} -\frac{1}{\ln x} = -\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln x} = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} -\frac{1}{\ln x} = +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln x} = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \end{cases}$

1.b) Interprétons graphiquement les résultats des limites :

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$ alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (C) en $+\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à (C) en $+\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$ alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (C) en $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.

2) Démontrons que : $\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln x}\right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x(\ln x)^2}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{x(\ln x)^2} - 1\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \times g(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

*Signe de $f'(x)$

$\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[\,;\, x^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

Tableau de variation

x	0		α		1		$+\infty$
$g(x) \to f'(x)$		$-$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) Démontrons que $f(\alpha) = \frac{1+\sqrt{\alpha}}{\alpha}$, en déduire le signe de $f(x)$

A est une solution de la fonction $g(x)$ donc

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{(\ln\alpha)^2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{(\ln\alpha)^2} = 1 \Rightarrow \alpha = (\ln\alpha)^2 \Rightarrow \sqrt{\alpha} = \ln\alpha$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\ln\alpha} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt{\alpha}-\alpha}{\alpha\sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha}-\alpha)}{\alpha^2} = \frac{\alpha - \alpha\sqrt{\alpha}}{\alpha^2}$$

$$= \frac{1-\sqrt{\alpha}}{\alpha}\alpha$$

PROBLEME 5

Partie A

1) a) Calcul de p(0) et p(1)

$P(x) = x^4 + x^2 - 2x$

$P(0) = 0^4 + 0^2 - 2(0) = 0 \;\; donc\; P(0) = 0$

$P(1) = 1^4 + 1^2 - 2(1) = 0 \;\; donc\; P(1) = 0$

b) Factorisation de p(x)

$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(0) = P(1) = 0$ donc

$$P(x) = x(x-1)(ax^2 + bx + c)$$

par identification : $\boxed{P(x) = x(x-1)(x^2 + x + 2)}$

c) Résolution de p(x)=0

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x^2 + x + 2) = 0:$$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7$:$\Delta < 0$donc solution dans $S_R = \{0; 1\}$

2) a) Résolution de g(x)=0

$\forall x \in]0; +\infty[\,;\;\; g(x) = 0 \;\; \Rightarrow (lnx)^4 + (lnx)^2 - 2lnx = 0$

on pose $X = lnx$ on a : $X^4 + X^2 - 2X = 0$ d'après la question précédente :

$X_1 = 0 \;;\;\; X_2 = 1$donc $lnx = 0 \Leftrightarrow x = 1$

et $\;lnx = 1 \Leftrightarrow x = e$

b)

x	0		1		e		+∞
$lnx = 0$	‖	−	0	+		+	
$lnx = 1$	‖	−		−	0	+	
$g(x)$	‖	+	0	−	0	+	

$\forall x \in]0\,;1[\cup]e\,;\,+\infty[\quad g(x) > 0et\forall x \in]1; e[\;\; g(x) < 0$

Partie B :

1) a) Déterminons Df

$x \in Df \Rightarrow x > 0 \;\; et\; (lnx)^2 \neq 0$

$x > 0 \;\; et \;\; lnx \neq 0$

$x > 0 \;\; et \;\; x \neq 1$

$\boxed{Df =]0; 1[\cup]1; +\infty[}$

b)Calculons la limite de f(x) en 1

$$\lim_{\substack{x\to 1\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\<}} \frac{(lnx)^3 - lnx + 1}{(lnx)^2} = \lim_{\substack{x\to 1\\<}} \frac{1}{(lnx)^2}((lnx)^3 - lnx + 1) = +\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}} \frac{1}{(lnx)^2} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}}((lnx)^3 - lnx + 1) = 1 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}} f(x) = +\infty$ de meme

$$\lim_{\substack{x\to 1\\>}} f(x) = +\infty$$

2a) Démontrons que $\forall x \in D_f\ f(x) = lnx(1 - \frac{1}{(lnx)^2} + \frac{1}{(lnx)^3})$

On a

$$\forall x \in D_f = \frac{(lnx)^3 - lnx + 1}{(lnx)^2} = \frac{(lnx)^3(1 - \frac{1}{(lnx)^2} + \frac{1}{(lnx)^3})}{(lnx)^2}$$

$$= lnx(1 - \frac{1}{(lnx)^2} + \frac{1}{(lnx)^3})$$

b) Calculons la limite de f(x) en 0 par valeur supérieur et en $+\infty$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\>}} lnx(1 - \frac{1}{(lnx)^2} + \frac{1}{(lnx)^3}) = -\infty$$

Car

$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} lnx = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}(1 - \frac{1}{(lnx)^2} + \frac{1}{(lnx)^3}) = 1 \end{cases}$ $donc\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} f(x) = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = lnx\left(1 - \frac{1}{(lnx)^2} + \frac{1}{(lnx)^3}\right) = +\infty$

car

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} lnx = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\left(1 - \frac{1}{(lnx)^2} + \frac{1}{(lnx)^3}\right) = 1 \end{cases}$ $donc\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

3) Demontrons que $\forall x \in D_f; f'(x) = \frac{g(x)}{x(lnx)^4}$

$$\forall x \in D_f ; f'(x) = \left[\frac{(lnx)^3 - lnx + 1}{(lnx)^2}\right]'$$

$$= \frac{((lnx)^3 - lnx + 1)'(lnx)^2 - ((lnx)^3 - lnx + 1)[(lnx)^2]''}{(lnx)^4}$$

$$= \frac{\left[\frac{3}{x}(lnx)^2 - \frac{1}{x}\right](lnx)^2 - \frac{2}{x}lnx[lnx)^3 - lnx + 1]}{(lnx)^4} = \frac{(lnx)^4 + (lnx)^2 - 2lnx}{x(lnx)^4}$$

$$= \frac{g(x)}{x(lnx)^4}$$

Donc $\forall x \in D_f ; f'(x) = \frac{g(x)}{x(lnx)^4}$

4) $]1; e[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x(lnx)^4}$ or $\forall x \in D_f ; x(lnx)^4 > 0$ donc le signe de f'(x) est celui de g(x) or

$\forall x \in]0; 1[\cup]e; +\infty[$ $g(x) > 0$; Donc f est strictement croissante sur $]0; 1[$ et sur $]e; +\infty[$

$\forall x \in]1; e[$, $g(x) < 0$; Donc f est strictement décroissante sur $]1; e[$

Tableau de variation

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0 ‖	-	0	+	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

$f(e) = 1$

2) calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{lnx(1-\frac{1}{(lnx)^2}+\frac{1}{(lnx)^3})}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}\left(1-\frac{1}{(lnx)^2}+\frac{1}{(lnx)^3}\right)=0$$

$$\text{Car}\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{(lnx)^2}+\frac{1}{(lnx)^3}\right)=1\end{cases}\text{ donc }\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0\,;$$

comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ alors la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (IO)

Partie C :

1) Etudions la position relative de (c_f) et (c_h) pour cela étudions le signe h(x)-f(x)

$$h(x)-f(x)=lnx-\frac{(lnx)^3-lnx+1}{(lnx)^2}=\frac{lnx-1}{(lnx)^2}$$

on enduire le tableau de signe suivant,

x	0 1	e	+∞
lnx-1	-	-	0 +
h(x)-f(x)	-	-	+
Position relative de (c_f) et (c_h)	(c_f) est au dessus de (c_h)	(c_f) est au dessus de (c_h)	(c_f) est en dessous de (c_h)

2) Démontrons que

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)-f(x)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)-f(x)=lnx-\frac{(lnx)^3-lnx+1}{(lnx)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx-1}{(lnx)^2}$$

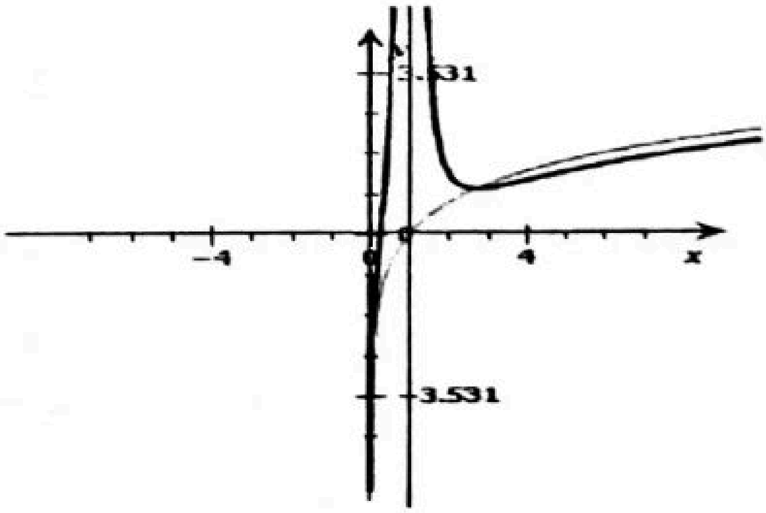
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{lnx}-\frac{1}{(lnx)^2}\right)=0$$

Car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$ donc

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) - f(x) = 0$$

Alors la courbe (c_h) est asymptote a (c_f) en $+\infty$

3) tracé de la courbe



PARTIE D

1) Calcul de A

$$A = \int_e^\lambda [h(x) - f(x)]dx$$

$$= \int_e^\lambda \left[\ln x - \frac{(\ln x)^3 - \ln x + 1}{(\ln x)^2}\right] dx$$

$$= \int_e^\lambda \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} dx$$

$= \int_e^\lambda \frac{1}{\ln x} - \int_e^\lambda \frac{1}{(\ln x)^2}$ par une intégration par partie on a :

$$A = \left[\frac{x}{\ln x}\right]_e^\lambda + \int_e^\lambda \frac{1}{(\ln x)^2} dx - \int_e^\lambda \frac{1}{(\ln x)^2} = \left[\frac{x}{\ln x}\right]_e^\lambda = \left[\frac{\lambda}{\ln \lambda} - e\right]$$

2) Calcul de la limite de A en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} A = \lim_{x \to +\infty} \frac{\lambda}{\ln \lambda} - e = e$$

PROBLEME 6

Partie A :

1-a) Donnons Dg :

$x \in Dg \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ donc $\boxed{Dg =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[}$

1-b) Calculs des limites :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)^2 - 1 + \ln(|x-1|)$

  $X = (x-1)^2$: $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} X - 1 + ln|\sqrt{X}|$

$$\lim_{x\to+\infty} X\left(1 - \frac{1}{X} + \frac{ln|\sqrt{X}|}{(\sqrt{X})^2}\right) = +\infty \quad \text{car:} \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ln|\sqrt{X}|}{(\sqrt{X})^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{X} = 0 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} (x-1)^2 - 1 + \ln(|x-1|)$

posons $X = -x+1$ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} -x+1 = 0$

$\lim\limits_{x\to0} -X^2 + 1 + lnX = -\infty$

car : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} (x-1)^2 - 1 + \ln(|x-1|)$

Posons $X = x-1$ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} x-1 = 0$

$X^2 - 1 + lnX = -\infty$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} g(x) = -\infty$

$\underset{x\to+\infty}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)^2 - 1 + \ln(|x-1|)$

Posons $X = x-1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} X^2 - 1 + lnX = \lim\limits_{x\to+\infty} X^2\left(1 - \dfrac{1}{X^2} + \dfrac{lnX}{X^2}\right) = +\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

2) Détermination de la dérivée :

$$\forall x \in Dg\ ;\ g'(x) = [(x-1)^2 - 1 + \ln(|x-1|)]'$$
$$= 2(x-1) + \frac{1}{x-1} = \boxed{\frac{2(x-1)^2+1}{(x-1)}}$$

3)Etude des variations de g et tableau de variation

$\forall x \in Dg;\quad 2(x-1)^2 + 1 > 0$ Donc le signe de $g'(x)$ est celui de $x - 1$

$\forall x \in\ ]-\infty; 1[\ ;\ g'(x) < 0$Alors g est strictement décroissante sur cet intervalle.

$\forall x \in\ ]1; +\infty[\ ;\ g'(x) > 0$ Alors g est strictement croissante sur cet intervalle.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g'(x)	$-$	‖	$+$
g(x)	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

4-a) Calcul de g(0) et g(2)

$g(0) = 1^2 - 1 + \ln|-1| = 1 - 1 = 0$ donc $g(0) = 0$

$g(2) = (2-1)^2 - 1 + \ln|2-1| = 0$ donc $g(2) = 0$

4-b)

- $\forall x \in\ ]-\infty; 1[$ g est continue et strictement décroissante et $g(0) = 0$
  Donc$\forall x \in\ ]-\infty; 0[\ ;\ x < 0 \Leftrightarrow$ g(x)>g(0)
  or g(0)= 0 donc $\forall x \in\ ]-\infty; 0[\ g(x) > 0$
  $\forall x \in\ ]0; 1[\ ;\ x > 0\ ;\ g(x) < g(0)$or g(0)=0 donc
  $\forall x \in\ ]0; 1[\ g(x) < 0$
- $\forall x \in\ ]1; +\infty[$ g est continue et strictement croissante.
  En plus :
  $\forall x \in\ ]1; 2[\ ;\ x < 2\ ;\ g(x) < g(2)$or g(2)=0 donc
  $\forall x \in\ ]1; 2[\ g(x) < 0$
  $\forall x \in\ ]2; +\infty[;\ x > 2\ ;\ g(x) > g(2)$or g(2)=0 donc
  $\forall x \in\ ]2; +\infty[\ g(x) > 0$

Conclusion : $\forall x \in\ ]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[\ ;\ g(x) > 0$

$$\forall x \in]0;1[\cup]1;2[\ ; \quad g(x) < 0$$

Partie B :

$$f(x) = x - \frac{\ln(|x-1|)}{x-1}$$

1) Donnons Df :

$x \in Df \Leftrightarrow x - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 1$ donc $\boxed{Df =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[}$

2) Ecrivons $f(x)$ sans valeur absolue :

$$\forall x \in]-\infty;1[\ ; \ f(x) = x - \frac{ln(-x+1)}{x-1}$$

$$\forall x \in]1;+\infty[\ ; \ f(x) = x - \frac{\ln(x-1)}{x-1}$$

Calculons les limites :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x - \frac{ln(-x+1)}{x-1}$ posons
- $X = -x + 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} X = +\infty$

$$\lim_{X\to+\infty}\left(-X + 1 - \frac{lnX}{X}\right) = -\infty \text{ donc } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x - \frac{\ln(x-1)}{x-1}$

Posons $X = x - 1$; $\lim\limits_{X\to+\infty} X = +\infty$

$$\lim_{X\to+\infty}\left(X + 1 - \frac{lnX}{X}\right) = +\infty \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} (fx) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \left(x - \frac{\ln(x-1)}{x-1}\right)$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \left[x + \frac{1}{1-x} \times ln(1-x)\right] = -\infty$$

$$donc \ \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} (fx) = -\infty$$

- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \left(x - \frac{\ln(x-1)}{x-1}\right)$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \left[x - \frac{1}{x-1} \times \ln(x-1)\right] = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = +\infty$$

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (fx) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$ alors la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$ en $-\infty \ et \ +\infty$

3)Etudions les variations de f :

$$\forall\, x \in Df \ \ f'(x) = \left[x - \frac{\ln|x-1|}{x-1}\right]'$$

$$= 1 - \frac{\frac{1}{x-1} \times (x-1) - 1 \times \ln|x-1|}{(x-1)^2}$$

$$1 - \frac{1 - \ln|x-1|}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1 + \ln|x-1|}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{g(x)}{(x-1)^2} \text{donc } \ f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$$

<u>Signe et sens de variation de $f'(x)$</u>

Comme $\forall\, x \in Df \ \ (x-1)^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $g(x)$ donc :

$\forall\, x \in \ ]-\infty; 0[\ \cup\ ]2; +\infty[f'(x) > 0$alors f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]2; +\infty[$

$\forall\, x \in \ ]0; 1[\ \cup\ ]1; 2[f'(x) < 0$alors f est strictement décroissante sur $]0; 1[$ et sur $]1; 2[$

<u>Tableau de variation</u>

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'(x)		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f(x)	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

$f(0) = 0$ $\qquad f(2) = 2$

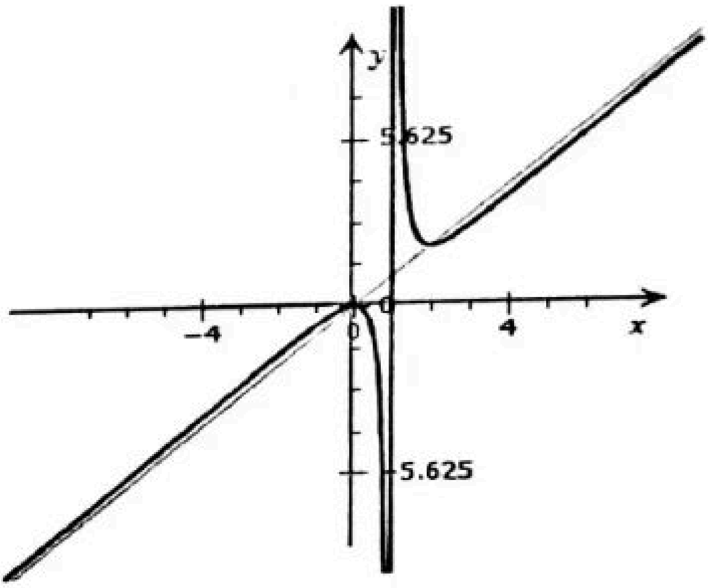
5)

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(-x+1)}{x-1}$$

$= 0$ la droite (D)d'équation :

$y = x$ est asymptote oblique à (C) $en - \infty$ et $+\infty$

6) construction



Partie C :

1) Calculons A_1

$$A_1 = \int_{1-e}^{0}\left[x - \frac{\ln(1-x)}{1-x} + x\right]dx$$

$$= -\int_{1-e}^{0}\left[\frac{\ln(1-x)}{1-x}\right]dx = \frac{1}{2}[ln(1-x)^2]_{1-e}^{0} = \frac{1}{2}$$

2) Calculons A

$$A_2 = \int_{0}^{1-e^{-1}} -\left[\frac{\ln(x-1)}{x-1}\right]dx = \frac{1}{2}[ln(1-x)^2]_{0}^{1-e^{-1}} = \frac{1}{2}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Problème 7

Partie A : Etude préliminaire.

f est définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x + 1 - (2x+1)\,\ell n\, x$

1) a) f est la somme et le produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$, et on a :

$$f'(x) = 1 - \left(2\ell nx + (2x+1)\times\frac{1}{x}\right) = 1 - 2\ell nx - 2 - \frac{1}{x} \text{ donc}$$

$$\boxed{f'(x) = -1 - 2\ell nx - \frac{1}{x}.}$$

f' est la somme et le produit de fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$, donc f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et on a :

$$f''(x) = -2\times\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad \text{donc} \quad \boxed{f''(x) = \frac{-2x+1}{x^2}}$$

b) $f''(x)$est du signe de $(-2x+1)$, donc f' est décroissante sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$. f' a donc un maximum en $\frac{1}{2}$ et ce maximum est $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -1 - 2\,\ell n\frac{1}{2} - 2 = -3 + \ell n2$

On sait que $\ell n2 \approx 0{,}7$, donc $f'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ et par conséquent

$$f'(x) < 0 \text{ pour tout } x \in\,]0;+\infty[.$$

2) a) f' est strictement négative sur $]0\,;+\infty[$, donc f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}(2x+1) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\ell nx = -\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}(2x+1)\ell nx = -\infty$

De plus $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} x+1 = 1$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} x + 1 - (2x+1)\ell nx = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = 0$.

On peut écrire
$$f(x) = x + 1 - 2x\ell nx - \ell nx$$
$$= x\left(1 + \frac{1}{x} - 2\ell nx - \frac{\ell nx}{x}\right)$$

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ell nx = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ell nx}{x} = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 + \frac{1}{x} - 2\ell nx - \frac{\ell nx}{x}\right) = -\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

c) f est continue et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. Donc pour tout réel k dans l'intervalle $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,;\, \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)\right[= \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $]0; +\infty[$.

On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α dans $]0; +\infty[$

On a $f(1{,}83) \approx 0{,}014$ et $f(1{,}84) \approx -0{,}014$. f est strictement décroissante sur $]0\,; +\infty[$, on en déduit que $1{,}83 < \alpha < 1{,}84$.
Donc 1,83 est une valeur décimale approchée de α à 10^{-2} près par défaut.

d) f est strictement décroissante sur $]0\,; +\infty[$, et on sait que $f(\alpha) = 0$ par conséquent $f(x) > 0$ pour $x \in]0\,; \alpha[$; $f(x) = 0$ pour $x = \alpha$; $f(x) < 0$ pour $x \in]\alpha\,; +\infty[$

Partie B

g est définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{\ell nx}{x^2+x}$

1) a) g est le quotient de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$, donc g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times (x^2 + x) - \ell nx(2x + 1)}{(x^2 + x)^2} = \frac{x + 1 - (2x + x)\ell nx}{(x^2 + x)^2}$$
$$= \frac{f(x)}{(x^2 + x)^2}$$

$(x^2 + x)^2$ étant positif pour tout réel x, $g'(x)$ a le même signe que $f(x)$.
En utilisant le signe de $f(x)$ obtenu dans la partie A, on en déduit que g est croissante sur $]0\,; \alpha[$ et g est décroissante sur $]\alpha\,; +\infty[$.

On a $g(\alpha) = \frac{\ell n\alpha}{\alpha^2 + \alpha}$ et α étant solution de l'équation $f(x) = 0$, on a

$$\alpha + 1 - (2\alpha + 1)ln\alpha = 0 \ \text{ donc } (2\alpha + 1)\ell n\alpha = \alpha + 1$$

c'est-à-dire $\ell n\alpha = \dfrac{\alpha + 1}{2\alpha + 1}$. On en déduit alors que :

$$g(\alpha) = \frac{\alpha + 1}{2\alpha + 1} \times \frac{1}{\alpha^2 + \alpha} = \frac{\alpha + 1}{2\alpha + 1} \times \frac{1}{\alpha(\alpha + 1)} \ \text{ donc } g(\alpha) = \frac{1}{\alpha(2\alpha + 1)}$$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^2 + x = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x^2+x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ell nx = -\infty$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ell nx \times \dfrac{1}{x^2 + x} = -\infty$ d'où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = -\infty$.

La courbe C a pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 0$

On peut écrire $g(x) = \dfrac{\ell nx}{x(x + 1)} = \dfrac{1}{x + 1} \times \dfrac{\ell nx}{x}$

on sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ell nx}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x + 1} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

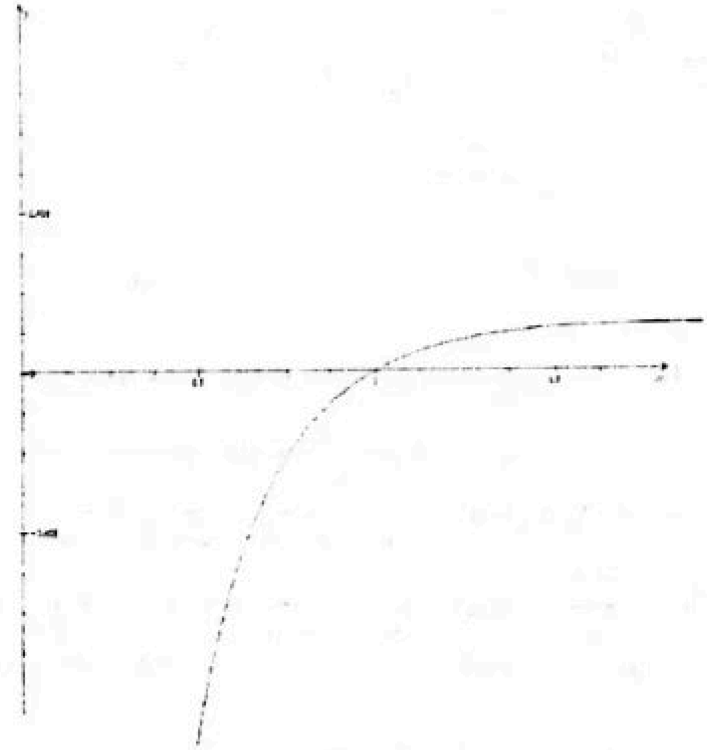
La courbe C a pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = 0$

2) On peut donner le tableau de variation de g

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	0

on a $g(\alpha) \approx 0{,}12$. La tangente à C au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur $g(1) = \dfrac{f(1)}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

<u>Construction</u>



Partie C

$$I(\lambda) = \int_1^{\lambda} \frac{\ell nx}{x^2 + x} dx = \int_1^{\lambda} g(x)\, dx$$ où λ est un réel tel que $\lambda \geq 1$.

1) D'après les variations de , on a $g(x) > 0$ pour tout $x \in [1\,; +\infty[$. Comme $\lambda \geq$
1 , $I(\lambda)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire du repère, de la partie du pla
Limitée la courbe C, l'axe Ox et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.

2) Pour tout $x \in]0\,; +\infty[$, on a $x > 0$ donc $x^2 + x > x^2$. On en déduit que :

$\frac{1}{x^2 + x} < \frac{1}{x^2}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

Pour $x \geq 1$ $\ell nx \geq 0$, donc $\ell nx \times \frac{1}{x^2 + x} \leq \ell nx \times \frac{1}{x^2} \leftrightarrow \frac{\ell nx}{x^2 + x} \leq \frac{\ell nx}{x^2}$

Comme $1 \leq \lambda$ et que les deux fonctions sont continues, on a alors :

$$\int_1^\lambda \frac{\ell nx}{x^2+x}dx \leq \int_1^\lambda \frac{\ell nx}{x^2}dx. \text{ C'est-à-dire } I(\lambda) \leq \int_1^\lambda \frac{\ell nx}{x^2}dx.$$

b) Pour calculer $\int_1^\lambda \frac{\ell nx}{x^2}dx$ en intégrant par parties, on pose

$u(x) = \ell nx \quad v'(x) = \frac{1}{x^2}$

$u'(x) = \frac{1}{x} \quad v(x) = -\frac{1}{x}$

les fonctions u, u', v, v' sont continues sur $[1; \lambda]$

$$\text{Alors } \int_1^\lambda \frac{\ell nx}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\ell nx\right]_1^\lambda - \int_1^\lambda \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{x}\ell nx\right]_1^\lambda - \int_1^\lambda \frac{1}{x^2}dx$$

$$= \left[-\frac{1}{x}\ell nx\right]_1^\lambda - \left[\frac{1}{x}\right]_1^\lambda \text{ donc } \int_1^\lambda \frac{\ell nx}{x^2}dx = -\frac{1}{\lambda}\ell n\lambda - 0 - \left[\frac{1}{\lambda} - 1\right]$$

$$\text{c'est-à-dire } \int_1^\lambda \frac{\ell nx}{x^2}dx = 1 - \frac{1}{\lambda}\ell n\lambda - \frac{1}{\lambda}$$

Pour tout réel λ élément de $[1 ; +\infty[$, $-\frac{1}{\lambda} < 0$ et $\ell n\lambda \geq 0$

donc $-\frac{1}{\lambda}\ell n\lambda - \frac{1}{\lambda} < 0$ et par conséquent $1 - \frac{1}{\lambda}\ell n\lambda - \frac{1}{\lambda} < 1$

c'est-à-dire $I(\lambda) < 1$ pour tout $\lambda \in [1 ; +\infty[$.

Notions essentielles sur expo

Definition :

On appelle fonction exponentielle népérienne la bijection réciproque de la fonction logarithme népérienne. Elle est notée exp et définie sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*\ [y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln y]$$

La fonction exp est une application bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ continue et strictement croissante.

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R},\quad \exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$

$e^0 = 1$ et $e^1 = e$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad e^{\ln x} = x$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R},\ e^{x+y} = e^x \times e^y$

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

$$\begin{array}{llll} \ln: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} & \exp: & \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \ln x & & x \mapsto e^x \end{array}$$

$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}\ [y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y]$ exp (x) est la réciproque de ln alors .

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \dfrac{1}{(ln'0\exp)(x)} = \dfrac{1}{ln'(e^x)} = \dfrac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$aolrs

$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = e^x$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$f(x) = e^{u(x)}$	$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$

Expo : Résoudre dans R les équations et inéquations suivantes :

(I_1): $e^{3x-1} \leq 2$ (I_7): $e^{x-4} = 1$

(I_2): $e^{x^2-4} > 0$ (I_8): $2e^{3x} - 5 \geq 0$

(I_3): $e^{x^3+5} \leq -3$ (I_9): $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$

(I_4): $e^x - 3 \geq 0$

(I_5): $6e^{2x} - e^x - 1 = 0$

(I_6): $6e^{2x} - e^x - 1 \leq 0$

Exercice d'application: On considère la fonction f définie sur IR par

$$f(x) = x + ln2 + \frac{4}{e^x + 1}$$

et soit (C) sa courbe représentative.

a) Montrer que $f(x) = x + 4 + ln2 - \frac{4e^x}{e^x+1}$; déterminer alors les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

b) Montrer que les droites (D_1) et (D_2) d'équations $y = x + ln2$ et $y = x + 4 + ln2$ sont asymptotes à (C).

c) Etudier les variations de f sur IR et dresser son tableau de variations.

CORRECTION

Expo : Résolvons dans R les équations et inéquations suivantes :

$(I_1): e^{3x-1} \leq 2$: $Ev = \mathbb{R}$.

$x \in Ev$; $e^{3x-1} \leq 2 \Rightarrow \ln e^{3x-1} \leq \ln 2 \Rightarrow 3x - 1 \leq \ln 2 \Rightarrow$

$3x \leq \ln 2 + 1 \Rightarrow x \leq \frac{\ln 2 + 1}{3}$

$S_{\mathbb{R}} = Ev \cap \left]-\infty ; \frac{\ln 2 + 1}{3}\right]$ donc $\boxed{S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty ; \frac{\ln 2 + 1}{3}\right]}$

$\left.\begin{array}{l}(I_2): e^{x^2-4} > 0 \\ (I_3): e^{x^3+5} \leq -3\end{array}\right\}$ impossible, car $e^x > 0$

$(I_4): e^x - 3 \geq 0$: $Ev = \mathbb{R}$.

$x \in Ev$; $e^x - 3 \geq 0 \Rightarrow e^x \geq 3 \Rightarrow \ln e^x \geq \ln 3 \Rightarrow$

$x \geq \ln 3$ $\boxed{S_{\mathbb{R}} = [\ln 3 ; +\infty[}$

$(I_5): 6e^{2x} - e^x - 1 = 0$: $Ev = \mathbb{R}$. Posons $X = e^x$

$6X^2 - X - 2 = 0 \rightarrow \Delta = 24 + 1 = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$

$X_1 = \frac{1-5}{12} = -\frac{1}{3}$; $X_2 = \frac{5+1}{12} = \frac{1}{2}$

$X_1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow e^x = -\frac{1}{3}$ impossible car $e^x > 0$

$X_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow e^x = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln e^x = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow x = \ln\frac{1}{2}$. $\boxed{S_{\mathbb{R}} = \left\{\ln\frac{1}{2}\right\}}$

(I_6): $6e^{2x} - e^x - 1 \leq 0$: $Ev = \mathbb{R}$. de ce qui précède :

$\boxed{S_{\mathbb{R}} =]-\infty; \ln\frac{1}{2}]}$

(I_7): $e^{x-4} = 1$: $Ev = \mathbb{R}$.

$x \in Ev$; $\ln e^{x-4} = \ln 1 \Rightarrow x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$. $\boxed{S_{\mathbb{R}} = \{4\}}$

(I_8): $2e^{3x} - 5 \geq 0$: $Ev = \mathbb{R}$

$2e^{3x} - 5 \geq 0 \Rightarrow 2e^{3x} \geq 5 \Rightarrow e^{3x} \geq \frac{5}{2} \Rightarrow \ln e^{3x} \geq \ln\frac{5}{2} \Rightarrow$

$3x \geq \ln\frac{5}{2} \Rightarrow x \geq \frac{\ln\frac{5}{2}}{3}$

$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \left[\frac{\ln 5/2}{3}; +\infty\right[}$

(I_9): $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$: $Ev = \mathbb{R}$. Posons $X = e^x$

$2X^2 - 5X + 2 = 0 \rightarrow \Delta = 24 - 16 = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$ ou -3

$X_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} = e^x \Rightarrow \ln e^x = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow x = \ln\frac{1}{2}$

$X_2 = \frac{5+3}{4} = 2 = e^x \Rightarrow \ln e^x = \ln 2 \Rightarrow x = \ln 2$

$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \left\{\ln\frac{1}{2}\ \ \ln 2\right\}}$

Exercice d'application

$$f(x) = x + \ln 2 + \frac{4}{e^x + 1} = x + \ln 2 + 4 + \frac{4}{e^x + 1} - 4$$

$$= x + ln2 + 4 + \frac{4 - 4e^x - 4}{e^x + 1} = x + 4 + ln2 - \frac{4e^x}{e^x + 1}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x + 4 + ln2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{4e^x}{e^x + 1} = 0$

d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x + 4 + ln2 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{4e^x}{e^x + 1} = -4$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (x + 4 + ln2) = \lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{4e^x}{e^x+1} = 0$. Donc la droite (D_1) : $y = x + 4 + ln2$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x + ln2) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4e^x}{e^x+1} = 0$. Donc la droite (D_2) : $y = x + ln2$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$

b) $f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(1-e^x)^2}{(1+e^x)^2}$; $f'(x)$ est donc toujours positive alors la fonction f est donc croissante sur IR.

c) Déduire des questions précédentes la position de *(cf)* par rapport à la droite (T).

6) Tracer *(cf)* et (T).

On prendra pour unités graphiques 2cm sur l'axe des abscisse et 5cm sur l'axe des ordonnées.

On pourra admettre que $-1{,}85 < \beta < -1{,}84$
et $-1{,}19 < f(\beta) < -1{,}18$.

PROBLEME 2

PARTIEA

On considère la fonction définie pour tous reel x par : $f(x) = \frac{4(1-e^{x})}{1+e^{x}}$ et *(cf)* sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1cm).

1) Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2) Former le tableau des variations de f.
3) Donner l'équation de la tangente (T) à *(Cf)* au point d'abscisse 0.
4) On considère la fonction γ definie pour tous nombres relles par $\gamma(x) = f(x) + 2x$.

   Démontrer que : $\gamma''(x) = \frac{8e^{x}(e^{x}-1)}{(1+e^{x})^{3}}$

   En déduire le sens de variation et le signe de γ', puis le sens de variation et le signe de γ.

   Quelle est la position de la courbe *(Cf)* par rapport à sa tangente (T).
5) Démontrer que f est une fonction impaire.
6) Construire (*Cf) et* (T) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

PARTIE B

1) Calculer l'intégrale : $I = \int_{-3}^{0} \frac{e^x}{1+e^x} dx$.
2) Vérifier que , pour tous réel x $f(x) = 4 - \frac{8e^x}{1+e^x}$
3) Déduire des questions précédentes l'aire , en cm^2 , de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisse , la courbe (*Cf*) , et les droites d'équations x=-3 et x=0.
   Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de cette aire.
4) On considère ici la région du plan comprise entre la courbe (*Cf*) et la droite (T) , et les droites d'équations x=-3 et x=0.

PARTIE C

Résolution de l'équation f(x)=∝ où ∝ est un nombre reel donné.

1) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation f(x)=∝ suivant les valeurs de ∝.
2) a°) Résoudre l'équation f(x)=2.
   b) Résoudre l'équation f(x)=∝ pour ∝ quelconque dans IR et trouver ainsi les resultats du C°).

PARTIE D

On propose d'étudier l'existence des solutions sur IR de l'équation f(x)+x=0.

1) A partir de la représentation graphique de *f*, indiquer le nombre de solutions de cette équation.
2) Soit φ la fonction definie sur IR par $\varphi(x) = f(x) + x$.
   a) Déterminer les limites de φ en $+\infty$ et $-\infty$.
   b) Vérifier que , pour tous réel x, on a : $\varphi'(x) = \frac{e^{2x}-6e^x+1}{(1+e^x)^2}$.
   c) En déduire les variations de φ .
3) a) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution unique dans dans]0, +∞[.
   b) Retrouver ainsi , de manière rigoureuse , les résultats trouvés dans la question D°).

PROBLEME 4

Soit f la fonction de finie par :f(x)=$\frac{(2x-1)e^{x}-2x+2}{e^{x}-1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction et trouver les trois réels a ;b et c tels que ∀∈ D_f on ait :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{e^{x} - 1}$$

2) Déterminer les limites aux bornes de D_f

3a) Déterminer la fonction dérivée de f

b) Résoudre dans ℝ l'équation $2e^{2x} - 5e^{x} + 2$

c)En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation

4) On appelle (C_f)la représentation graphique de f dans repère orthonormée (O, I, J). On prendra OI = 2cm ; OJ =1cm

Démontrer que les droites (D) et (Δ) d'équation respectives

y= 2x-1 et y= 2x-2, sont des asymptotes à C_f en $+\infty$ et $-\infty$

5) tracer C_f

6.a) Trouver les réels α et β tels que : f(x)=$2x + \alpha + \frac{\beta e^{x}}{e^{x}-1}$

b) soit k un nombre réel tel que k≥ 2, determiner l'aire $A(\lambda)$en cm^2 délimité par C_f ; la droite(D) et les droites d'équation x=ln2 ,x=lnK

CORRECTION DES PROBLEMES

CORRECTION PROBLEME 1

Partie A : Etude de fonctions auxiliaires

1) h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xe^x + 1$.
h est le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on a $h'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (1+x)e^x$
On sait que la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $h'(x)$ est du signe de $(1+x)$.
On en déduit que : h est décroissante sur $]-\infty\,;-1[$ et croissante sur $[-1\,;+\infty[$.
h a donc un minimum qui est $h(-1) = -e^{-1} + 1 \approx 0{,}63$. Le minimum $h(-1)$ étant positif, on en déduit que : $h(x) > 0$ pour tout réel x.

2) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.
a) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x+2 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x+2-e^x = -\infty$
C'est-à-dire $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.
D'autre part, pour $x \neq 0$, on peut écrire $g(x) = x\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x}\right)$

$$\text{on a } \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0 \quad \text{et on sait que} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x} = -\infty$$

$$\text{on en déduit que } \lim_{x\to+\infty} x\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

b) g est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a : $g'(x) = 1 - e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$g'(x) > 0 \leftrightarrow 1 - e^x > 0 \leftrightarrow e^x < 1 \leftrightarrow e^x < e^0 \leftrightarrow x < 0$$
$$\text{et } g'(x) < 0 \leftrightarrow 1 - e^x < 0 \leftrightarrow e^x > 1 \leftrightarrow e^x > e^0 \leftrightarrow x > 0$$

Donc g est strictement croissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$. On peut donner le tableau de variation de g
on a $g(0) = 2 - e^0 = 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

c) la fonction g continue et strictement croissante sur $]-\infty\,;0]$.
on a $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $g(0) = 1$, et d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour tout réel k dans $]-\infty\,;1]$, l'équation $g(x) = k$ a une solution unique dans $]-\infty\,;0]$. Puisque $0 \in]-\infty\,;1]$, l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique dans $]-\infty\,;0]$.
De même g est continue et strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, $g(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, et d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour tout réel k dans $]-\infty\,;1]$, l'équation $g(x) = k$ a une solution unique dans $]0\,;+\infty[$.
Puisque $0 \in]-\infty\,;1]$, l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique dans $]0\,;+\infty[$.
Donc l'équation $g(x)$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$. Une calculatrice donne $g(1{,}14) \approx 0{,}013$ donc $g(1{,}14) > 0$ et $g(1{,}15) \approx -0{,}008$ donc $g(1{,}15) < 0$.
Ce qui nous donne $g(1{,}15) < \alpha < g(1{,}14)$ et g étant strictement positif sur $]0\,;+\infty[$ on en déduit que la solution positive α vérifie $1{,}14 < \alpha < 1{,}15$.

d) Sachant que $g(\beta) = 0$ et $g(\alpha) = 0$, et compte-tenu du sens de variation de g, on a : $g(x) < 0$ pour $x \in]-\infty\,;\beta[\cup]\alpha\,;+\infty[$
et $g(x) > 0$ pour $x \in]\beta\,;\alpha[$.

<u>Partie B</u> : Etude de la fonction f et tracé de la courbe (C)

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x-1}{xe^x+1}$

1) On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ donc
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x + 1 = 1$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

On en déduit que (C) a pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = -1$ quand x tend vers $-\infty$.

d'autre part, on peut écrire : $f(x) = \dfrac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(x+e^{-x})} = \dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

on a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - e^{-x} = -1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} x + e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On en déduit que (C) a pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = 0$ (axe OX) quand $x \to +\infty$.

2)a) on peut remarquer que $f(x) = \frac{e^x-1}{h(x)}$ donc f est le quotient de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme de plus $h(x)$ ne s'annule pas, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{(e^x-1)'h(x) - (e^x-1)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$f(x) = \frac{e^x(xe^x+1) - (e^x-1)(1+x)e^x}{(xe^x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(xe^x+1-e^x-xe^x+1+x)}{(xe^x+1)^2} = \frac{e^x(2+x-e^x)}{(xe^x+1)^2}$$

$$\text{donc } f'(x) = \frac{e^x g(x)}{[h(x)]^2}$$

b) On sait que pour tout réel x, $e^x > 0$ et $(xe^x+1)^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. A partir des résultats de la partie A, on peut déduire que f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\beta[$ et sur $]\alpha\,;\ +\infty[$; et strictement croissante sur $]\beta\,;\ \alpha[$. On peut alors donner le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		β		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

2) a) Par définition, α est la solution de l'équation $g(x) = 0$. On a donc $g(\alpha) = 0 \to \alpha + 2 - e^{\alpha} = 0$ donc $e^{\alpha} = \alpha + 2$

On a alors $f(\alpha) = \dfrac{e^{\alpha} - 1}{\alpha e^{\alpha} + 1} = \dfrac{\alpha + 2 - 1}{\alpha(\alpha + 2) + 1} = \dfrac{\alpha + 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1}$

$= \dfrac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2}$ donc $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$

b) On sait que $1,14 < \alpha < 1,15$ donc $2,14 < \alpha + 1 < 2,15$

$\to \dfrac{1}{2,15} < \dfrac{1}{\alpha + 1} < \dfrac{1}{2,14}$ avec $\dfrac{1}{2,15} \approx 0,46$ et $\dfrac{1}{2,14} \approx 0,47$

donc $0,46 < \dfrac{1}{\alpha + 1} < 0,47$. $0,46 < f(\alpha) < 0,47$

3) La tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $f'(0) = g(0) = 1$. Donc l'équation de T est sous la forme $y = x + b$.
On a $f(0) = 0$, donc T passe par O. on en déduit que l'équation de T est $y = x$.

4) a) Pour tout réel x, on a :

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} - x = \frac{e^x - 1 - x^2e^x - x}{xe^x + 1}$$
$$= \frac{e^x(1 - x^2) - (1 + x)}{xe^x + 1}$$
$$= \frac{(1 + x)[e^x(1 - x) - 1]}{xe^x + 1}$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) - x = \dfrac{(x + 1)u(x)}{xe^x + 1}$

avec $u(x) = e^x - xe^x - 1$

b) La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
La fonction exponentielle étant strictement positive, $u'(x)$ est du signe de $-x$. Donc la fonction u est strictement croissante sur $]-\infty ; 0]$ et strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$. u a donc pour maximum

$$u(0) = e^0 - 0 - 1 = 0.$$

D'après les variations de u, on a donc $u(x) < 0$ pour $x \neq 0$ et $u(0) = 0$.

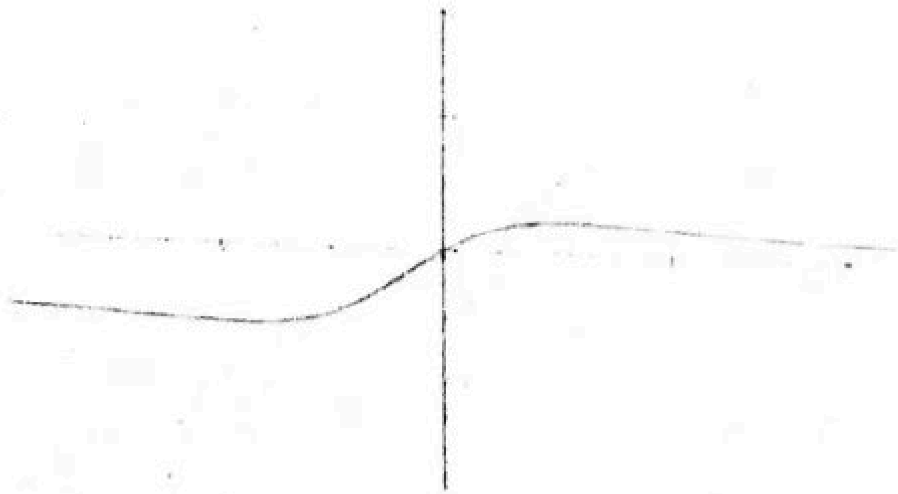
c) En utilisant le signe de $h(x) = xe^{x} + 1$ donné dans la partie A et le signe de $u(x)$ déterminé dans la question précédente, on peut alors donner dans un tableau le signe de $\frac{(x+1)u(x)}{xe^{x}+1}$ c'est-à-dire le signe de $f(x) - x$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$u(x)$		$-$		$-$	0	$-$	
$h(x) = xe^{x} + 1$		$+$		$+$		$+$	
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$-$	

Pour $x \in]-\infty\ ;\ -1]$ on a donc $f(x) \geq x$ et pour $x \in [-1\ ;\ +\infty[$ $f(x) \leq x$. On en déduit :

(C) est au-dessus de (T) pour $x \in]-\infty\ ; -1]$ et (C) est en-dessous de (T) pour $x \in [-1;\ +\infty[$. (T) et (C) ont deux points communs d'abscisses -1 et 0.

5) Courbe.



PROBLEME 2

f est définie pour tout réel x par : $f(x) = \dfrac{4(1 - e^x)}{1 + e^x}$.

Partie A

1) On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - e^x = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + e^x = 1$

Alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4$.

La droite d'équation $y = 4$ est donc asymptote horizontale à ($\mathcal{C}$) quand $x \to -\infty$.

Pour tout réel x, on peut écrire $f(x) = \dfrac{4e^x(e^{-x} - 1)}{e^x(e^{-x} + 1)} = \dfrac{4(e^{-x} - 1)}{e^{-x} + 1}$

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} + 1 = 1$

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -4$

La droite d'équation $y = -4$ est donc asymptote horizontale à ($\mathcal{C}$) quand $x \to +\infty$.

2) On sait que la fonction $x \mapsto e^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. D'autre part $1 + e^x \neq 0$ pour tout $\in \mathbb{R}$, on peut donc dire que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = 4\left(\frac{(1 - e^x)}{1 + e^x}\right) \text{ donc } f'(x) = 4\left(\frac{-e^x(1 + e^x) - (1 - e^x)e^x}{(1 + e^x)^2}\right)$$

$$f'(x) = 4\left(\frac{-e^x - e^{2x} - e^x + e^{2x}}{(1 + e^x)^2}\right) \text{ donc}$$

$$f'(x) = 4\left(\frac{-2e^x}{(1 + e^x)^2}\right) = \frac{-8e^x}{(1 + e^x)^2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On sait que $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On peut alors donner le tableau des variations de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	4 ↘	-4

3) La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

On a $f'(0) = \dfrac{-8}{(1+1)^2} = -2$ et $f(0) = 0$ donc

La tangente T au point d'abscisse 0 a pour équation $y = -2x$.

4) $y(x) = f(x) + 2x$. y est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$y'(x) = f(x) + 2 = \frac{-8e^x}{(1+e^x)^2} + 2$$

y' étant la somme et le quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, y' est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$y''(x) = \frac{-8e^x(1+e^x)^2 - (-8e^x)2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4}$$

$$= \frac{-8e^x(1+e^x) - (-8e^x)2e^x}{(1+e^x)^3}$$

$$y''(x) = \frac{-8e^x - 8e^{2x} + 16e^{2x}}{(1+e^x)^3} = \frac{-8e^x + 8e^{2x}}{(1+e^x)^3} \text{ c'est-à-dire}$$

$$y''(x) = \frac{8e^x(e^x - 1)}{(1+e^x)^3} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

e^x tant positif pour tout réel x, on en déduit que $y''(x)$ est du signe de $e^x - 1$. C'est-à-dire que $y''(x) < 0$ pour $x = 0$ et $y''(x) > 0$ pour $x > 0$.

La fonction y' est donc décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Donc y' a un minimum en 0 et ce minimum est

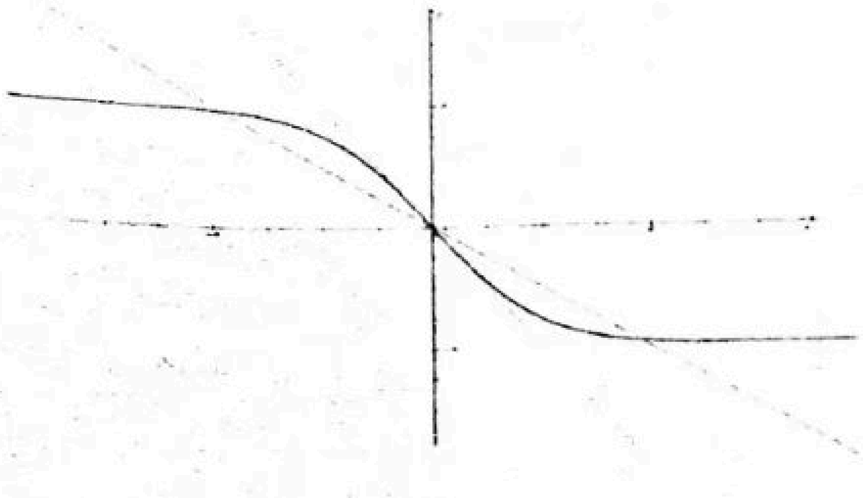
$y'(0) = f(0) + 2 \times 0 = 0$ on en déduit que y' est positive sur $\mathbb{R}$, et donc que y est croissante sur $\mathbb{R}$.
Comme on a $y(0) = 0$, on en déduit que :
$y(x) \leq 0$ pour $x \leq 0$ et $y(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$.
Pour étudier la position de ($\mathscr{C}$) par rapport à T, il faut comparer $f(x)$ et $-2x$.
Pour $x \in]-\infty\,;0]$,on a $y(x) \leq 0$, donc $f(x) + 2x \leq 0 \leftrightarrow$ $f(x) \leq -2x$.
Pour $x \in [0\,;+\infty[$, on a $y(x) \geq 0$, donc $f(x) + 2x \geq 0 \leftrightarrow$ $f(x) \geq -2x$.
Pour tout $x \in]-\infty\,;0]$, ($\mathscr{C}$) est en dessous de T ;
Et pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, ($\mathscr{C}$) est au-dessus de T.

5) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Son ensemble de définition est donc bien symétrique par rapport à 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(-x) = \frac{4(1-e^{-x})}{1+e^{-x}} = \frac{4\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{4\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right)}{\frac{e^x+1}{e^x}} = \frac{4(e^x-1)}{(e^x+1)}$$

$$= -\frac{4(1-e^x)}{1+e^x} = -f(x).$$ $f(x)$ est donc une fonction impaire.

6) f étant impaire, la courbe ($\mathscr{C}$) a pour centre de symétrie l'origine 0 du repère.



Partie B :

1) On sait que toute fonction de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) > 0$ a pour primitive $\ell n(u(x))$. Alors :

$$I = \int_{-3}^{0} \frac{e^x}{1+e^x}dx = [\ell n(1+e^x)]_{-3}^{0} = \ell n(1+e^0) - \ell n(1+e^{-3})$$

$$\text{donc } I = \ell n(2) - \ell n(1+e^{-3})$$

2) Pour tout réel x, on a: $4 - \frac{8e^x}{1+e^x} = \frac{4(1+e^x)-8e^x}{1+e^x}$

$$= \frac{4-4e^x}{1+e^x} = \frac{4(1-e^x)}{1+e^x}$$

$$\text{donc } f(x) = 4 - \frac{8e^x}{1+e^x}$$

3) Comme f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, elle a des primitives sur $\mathbb{R}$.
D'après les variations de f, pour $x \in [-3\,;0]$, on a $f(x) \geq 0$.
L'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C})$, et les droites d'équations $x = -3$ et $x = 0$ est donc donnée en unités d'aires par :

$$A = \int_{-3}^{0} f(x)dx = \int_{-3}^{0}\left(4 - \frac{8e^x}{1+e^x}\right)dx = \int_{-3}^{0} 4dx - 8\int_{-3}^{0}\frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$= [4x]_{-3}^{0} - 8I. = 0 - 4\times(-3) - 8\big(\ell n2 - \ell n(1+e^{-3})\big).$$

L'unité du repère étant le centimètre, l'unité d'aire est le cm².
On obtient $A = 12 - 8\ell n2 + 8\ell n(1+e^{-3})\text{cm}^2$ donc $A \approx 6{,}84\text{cm}^2$.

4) On a vu que pour $x \in]-\infty\,;0]$, $(\mathscr{C})$ est en dessous de T. L'aire de la région du plan comprise entre la courbe $(\mathscr{C})$, la droite T et les droites d'équations $x = -3$ et $x = 0$ est donc donnée en cm² par :

$$A' = \int_{-3}^{0}(-2x - f(x))dx = \int_{-3}^{0} -2x\,dx - \int_{-3}^{0} f(x)dx = [-x^2]_{-3}^{0} - A$$

$$A' = 9 - A = 9 - 12 + 8\ell n2 - 8\ell n(1+e^{-3})\text{cm}^2 \quad \text{donc } A' \approx 6{,}84\text{cm}^2.$$

Partie C

1) Les solutions d l'équation $f(x) = \alpha$ sont abscisses des points d'intersections de la courbe $(\mathscr{C})$ et de la droite d'équation $y = \alpha$. On observe graphiquement que :
Pour $\alpha \in]-4\,;4[$, la droite d'équation $y = \alpha$ et la courbe $(\mathscr{C})$ ont un seul point d'intersection.
Pour $\alpha \in]-\infty\,;-4] \cup [4;+\infty[$, la droite d'équation $y = \alpha$ et la courbe $(\mathscr{C})$ n'ont aucun point d'intersection.
On en déduit que :
Pour $\alpha \in]-4\,;4[$, l'équation $f(x) = \alpha$ a une solution ;
Pour $\alpha \in]-\infty\,;-4] \cup [4;+\infty[$, l'équation $f(x) = \alpha$ n'a aucune solution.

2) a) $f(x) = 2 \leftrightarrow \frac{4(1-e^x)}{1+e^x} = 2 \leftrightarrow 4(1+e^x) = 2(1+e^x)$

$\leftrightarrow 4 + 4e^x = 2 + 2e^x \leftrightarrow -6e^x = -2 \leftrightarrow e^x = \frac{1}{3} \leftrightarrow x = \ell n\frac{1}{3}$

$\leftrightarrow x = -\ell n3$. L'équation $f(x) = 2$ a pour solution unique $-\ell n3$.

b) $f(x) = \alpha \leftrightarrow \frac{4(1-e^x)}{1+e^x} = \alpha \leftrightarrow 4(1+e^x) = \alpha(1+e^x)$

$\leftrightarrow 4 + 4e^x = \alpha + \alpha e^x \leftrightarrow (-4-\alpha)e^x = \alpha - 4$

Lorsque $\alpha = -4$, l'équation s'écrit $0 \times e^x = -8$. Cette équation n'a aucune solution.

Lorsque $\alpha \neq -4$, l'équation s'écrit $e^x = \frac{\alpha-4}{-4-\alpha}$ c'est-à-dire

$$e^x = \frac{4-\alpha}{4+\alpha}$$

Si $\frac{4-\alpha}{4+\alpha}$ est négatif ou nul, c'est-à-dire pour $\alpha \in]-\infty;-4[\cup [4;+\infty[$.

L'équation n'a aucune solution (En effet e^x est strictement positif alors que $\frac{4-\alpha}{4+\alpha}$ négatif ou nul)

Si $\frac{4-\alpha}{4+\alpha}$ est strictement positif c'est-à-dire $\alpha \in]-4\,;4[$, on peut écrire:

$e^x \frac{4-\alpha}{4+\alpha} \leftrightarrow x = \ell n\left(\frac{4-\alpha}{4+\alpha}\right)$. On peut dire en conclusion que :

Pour $\alpha \in]-\infty;-4[\cup[4;+\infty[$, l'équation $f(x)=\alpha$ n'a aucune solution

Pour $\alpha \in]-4\,;4[$, l'équation $f(x)=\alpha$ a une solution qi est $\ell n\left(\frac{4-\alpha}{4+\alpha}\right)$.

Partie D

1) Les solutions de l'équation $f(x)+x=0$, c'est-à-dire $f(x)-x$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe ($\mathscr{C}$) et de la droite d'équation $y=-x$.
On observe graphiquement trois points d'intersection entre ($\mathscr{C}$) et la droite d'équation $y=-x$.
On en déduit donc que : l' équation $f(x)+x=0$ a trois solutions.

2) a) φ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x)=f(x)+x$.
On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x)=-\infty$
On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-4$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)=+\infty$

b) φ est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\varphi'(x)=f'(x)+1=\frac{-8e^x}{(1+e^x)^2}+1=\frac{(1+e^x)^2-8e^x}{(1+e^x)^2}$$
$$=\frac{1+2e^x+e^{2x}-8e^x}{(1+e^x)^2}$$
$$\text{donc } \varphi'(x)=\frac{e^{2x}-6e^x+1}{(1+e^x)^2}.$$

c) Résolvons l'équation $X^2-6X+1=0$ en calculant le discriminant :
$\Delta=(-6)^2-4\times1\times1=36-4=32$. $\Delta>0$ donc l'équation a deux solutions réelles qui sont $X_1=\frac{6-\sqrt{32}}{2}=3-2\sqrt{2}$

et $X_2 = 3 + 2\sqrt{2}$

$$\text{On peut écrire : } \varphi'(x) = \frac{(e^x)^2 - 6e^x + 1}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{(e^x - 3 + 2\sqrt{2})(e^x - 3 - 2\sqrt{2})}{(1+e^x)^2}$$

On sait que $(1+e^x)^2$ est strictement positif. On peut alors étudier les signe de $\varphi'(x)$ en remarquant que $3 - 2\sqrt{2}$ et $3 + 2\sqrt{2}$ sont strictement positifs et que ℓn est une fonction strictement croissante :

Donc $e^x - 3 + 2\sqrt{2} > 0 \quad \leftrightarrow \quad e^x > 3 - 2\sqrt{2} \quad \leftrightarrow \quad x > \ell n(3 - 2\sqrt{2})$

Et $e^x - 3 - 2\sqrt{2} > 0 \quad \leftrightarrow \quad e^x > 3 + 2\sqrt{2} \quad \leftrightarrow \quad x > \ell n(3 + 2\sqrt{2})$.

On obtient alors le tableau de variations de φ , en notant

$$x_1 = \ell n(3 - 2\sqrt{2}) \approx -1{,}76 \quad \text{et} \quad x_2 = \ell n(3 + 2\sqrt{2}) \approx 1{,}76.$$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$e^x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - x_2$		$-$		$+$	0	$-$	
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(x_1)$	$\searrow$	$\varphi(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) a) φ est strictement décroissante sur $[x_1 ; x_2]$, $0 \in [x_1 ; x_2]$ et $\varphi(0) = 0$, donc l'équation $\varphi(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]0 ; x_2]$ et $\varphi(x_2) < 0$.
φ est continue et strictement croissante sur $[x_2 ; +\infty[$ et $\varphi(x_2) < 0$.
Donc $0 \in \left[\varphi(x_2) ; \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)\right[$, donc l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution unique α dans $[x_2 ; +\infty[$. On peut donc en déduire que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution unique α dans $]0 ; +\infty[$.

b) On peut remarquer que la fonction φ est impaire car son ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 et pour tout réel x :

$$\varphi(-x) = f(-x) + (-x) = -f(x) - x = -\varphi(x).$$

$\varphi(x) = 0$ ayant une solution unique dans $]0 ; +\infty[$, elle a aussi une solution unique dans $]-\infty ; 0[$. Sachant que $\varphi(0) = 0$, on peut conclure que : l'équation $\varphi(x) = 0$ a trois solutions qui sont $-\alpha$; 0 et α.

PROBLEME 3

1-a) $Df = \mathbb{R}$ car pour tous réel x ; $1 + e^x$ est strictement positif

Calculons la dérivée de $f(x)$:

$$\forall x \in Df \quad f'(x) = \left[\frac{e^x}{1+e^x} - ln(1+e^x)\right]'$$

$$= \frac{(e^x)'(1+e^x) - e^x(1+e^x)'}{(1+e^x)^2} - \frac{(1+e^x)'}{1+e^x}$$

$$= \frac{e^x(1+e^x) - e^{2x}}{(1+e^x)^2} - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{(1+e^x)^2} - \frac{e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x - e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$= -\frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2} \text{donc } \forall x \in Df \quad f'(x) = -\frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}$$

Signe de $f'(x)$:

$\forall x \in Df$; $\frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2} > 0$ donc $\forall x \in Df$; $-\frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2} < 0$

alors$\forall x \in Df$; $f'(x) < 0$

Sens de variation :

Comme $\forall x \in Df$; $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Calcul des limites :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{1+e^x} - ln(1+e^x)\right]$

Posons X=1+$e^x \Leftrightarrow e^x = X - 1$; $qd\ x \to +\infty$; $X \to +\infty$

donc $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X-1}{X} - lnX = -\infty$ car :

$$\begin{cases} \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X-1}{X} = 1 \\ \lim\limits_{X\to+\infty} - lnX = -\infty \end{cases} \text{donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x}{1+e^x} - ln(1+e^x)\right]$

Posons $X = 1 + e^x \Leftrightarrow e^x = X - 1$

Or $\lim\limits_{X\to1} \frac{X-1}{X} - lnX = 0$

$$\text{car } \begin{cases} \lim\limits_{X\to1} \dfrac{X-1}{X} = 0 \\ \lim\limits_{X\to1} -\ln X = 0 \end{cases} \text{donc } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (C) en $-\infty$

__Tableau de variation :__

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
f'(x)	$-$
f(x)	$0 \searrow -\infty$

1-b) Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - 1 + x] = 0$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - 1 + x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x) - 1 + x\right]$

posons $X = 1 + e^x \Rightarrow e^x = X - 1$

$\Rightarrow x = \ln(X-1)$ et on a : $x \to +\infty \;\; X \to +\infty$

$\lim\limits_{X\to+\infty} \left[\dfrac{X-1}{X} - \ln X + \ln(X-1) - 1\right]$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} \left[\dfrac{X-1}{X} + \ln\left(\dfrac{X-1}{X}\right) - 1\right]$

Posons encore $X' = \frac{X-1}{X}$ on a $X \to +\infty$; $X' \to 1$

$= \lim\limits_{X'\to1} (X' + \ln X' - 1) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - 1 + x] = 0$

La droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

1-c) tracé de la courbe (voir figure)

1-d)

$\forall\, x \in \,]-\infty; +\infty[$; f est continue et strictement décroissante donc f réalise une bijection de $]-\infty; +\infty[$ vers $]-\infty; 0[$

2-a)

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ;\ g'(x) = [e^{-x} ln(1 + e^{x})]'$$
$$= (e^{-x})'[\ln(1 + e^{x})] + e^{-x}[\ln(1 + e^{x}]'$$
$$= -e^{-x}\ln(1 + e^{x}) + e^{-x} \times \frac{e^{x}}{1 + e^{x}} = e^{-x}\left[\frac{e^{x}}{1 + e^{x}} - ln(1 + e^{x})\right]$$
$$= e^{-x} f(x)$$

Donc $\forall\, x \in \mathbb{R}\ ;\ g'(x) = e^{-x} f(x)$

2-b) Démonstration :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[e^{-x} ln[e^{x}(e^{-x} + 1)]\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[e^{-x}[ln e^{x} + ln(e^{-x} + 1)]\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[e^{-x}[x + \ln(e^{-x} + 1)]\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x e^{-x} + e^{-x}\ln(e^{-x} + 1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x}} + e^{-x}\ln(e^{-x} + 1)$$
$$= 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0}$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}[e^{-x}(1 + e^{x})] = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1 + e^{x})}{e^{x}}$$

Posons $X == e^{x}$ $x \to -\infty$; $X \to 0$

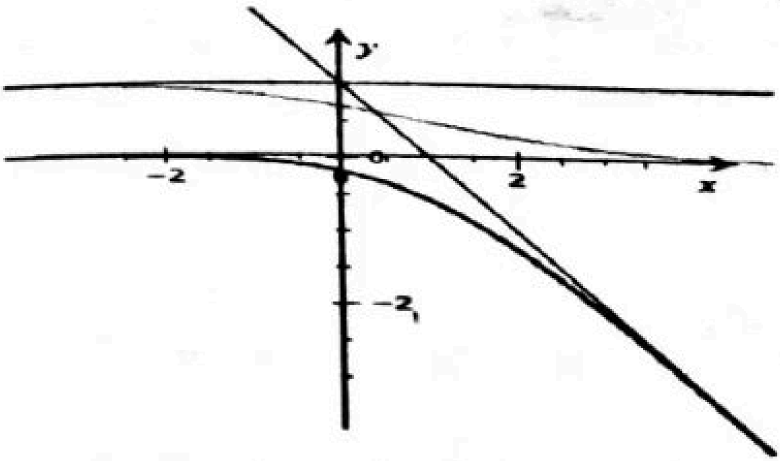
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + X)}{X} = 1$ (limite remarquable)donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$

2-c) Etudions les variations de g :

$g'(x) = e^{-x} f(x)$or$\forall\, x \in \mathbb{R}$ $e^{-x} > 0$ et donc le signe de $g'(x)$ est celui de f(x).

$\forall\, x \in \mathbb{R}$ f est continue et strictement croissante et admet un maximum qui est égal à 0 donc $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 0 \Rightarrow g'(x) \leq 0$ alors g est continue et strictement decroissante sur $\mathbb{R}$

2-d) Tracé de (Cg)



3-a) On a :

$$\frac{1}{1+e^{x}}=\frac{e^{-x}\times 1}{e^{-x}\times(1+e^{x})}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\text{-donc }\frac{1}{1+e^{x}}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$$

3-b) Calculons A(λ) :

$$A(\lambda)=\int_{0}^{\lambda}g(x)dx \qquad \lambda>0$$

Posons U(x)=$ln(1+e^{x})$; $u'(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$

$v'(x)=e^{-x}$; $v(x)=-e^{-x}$donc: $A(\lambda)$

$$=[-e^{-x}ln(1+e^{x})]_{0}^{\lambda}-\int_{0}^{\lambda}-e^{-x}\times\frac{e^{x}}{e^{x}+1}dx$$

$$=-\frac{ln(1+e^{\lambda})}{e^{\lambda}}+ln2-[-ln(1+e^{-x})]_{0}^{\lambda}$$

$$=-\frac{ln(1+e^{\lambda})}{e^{\lambda}}+ln2-ln(1+e^{-\lambda})-ln2$$

$$=-\frac{ln(1+e^{\lambda})}{e^{\lambda}}+ln(1+e^{-\lambda})$$

3-c) Calculons $\lim A(\lambda)$:

$$\lim_{x\to+\infty} A(\lambda) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{ln(1+e^{\lambda})}{e^{\lambda}} - ln(1+e^{-\lambda})$$

$$= 0 \text{ car: } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(1+e^{\lambda})}{e^{\lambda}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} ln(1+e^{-\lambda}) = 0 \end{cases}$$

PROBLEME 4

1)$x \in D_f \Rightarrow e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$donc $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$;

Calculons a , b et c tel qu' on ai : f(x)=$ax + b + \frac{c}{e^x-1}$

f(x)=$ax + b + \frac{c}{e^x-1} \Leftrightarrow ax + b + \frac{c}{e^x-1} = \frac{(2x-1)e^x-2x+2}{e^x-1}$

$$\Leftrightarrow \frac{(ax+b)(e^x-1)+c}{e^x-1} = \frac{(2x-1)e^x-2x+2}{e^x-1}$$

$\Leftrightarrow \frac{(ax+b)e^x-ax-b+c}{e^x-1} = \frac{(2x-1)e^x-2x+2}{e^x-1}$alors par identification a=2 ;b=-1 et c=1 ; donc f(x)= $2x-1+\frac{1}{e^x-1}$

3) Calculons les limites aux bornes de D_f

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x-1+\frac{1}{e^x-1}\right) = -\infty$;

; car $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1) = -\infty$;

; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x-1} = -1$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x-1+\frac{1}{e^x-1}\right) = +\infty$ car

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x-1} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{\substack{x\to0\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\<}}\frac{(2x-1)e^x-2x+2}{e^x-1}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\<}}[(2x-1)e^x-2x+2]\times\frac{1}{e^x-1} = -\infty$$

3a) Déterminons la dérivé, $\forall \in D_f$ f'(x)=$\left(2x-1+\frac{1}{e^x-1}\right)'$

2- $\frac{e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{2e^{2x}-5e^x+2}{(e^x-1)^2}$

b)résolvons l'équation $2e^{2x} - 5e^{x} + 2 = 0$ posons $X = e^{x}$ l'équation revient à $X^2-5X+2=0$ les solutions de l'équation

$X^2-5X+2=0$ sont $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$comme on a posé que$X = e^{x}$ alors les solutions de cette équation sont :$S_{\mathbb{R}} = \{-ln2; ln2\}$

c)déduction du sens de variation

$\forall \in D_f$ $f'(x)=(\frac{2e^{2x}-5e^{x}+2}{(e^{x}-1)^2})$;on a$\forall \in D_f((e^{x}-1)^2 > 0$ donc le signe $f'(x)$ est celui de $2e^{2x} - 5e^{x} + 2$ or d' après la question précédente

X	$-\infty$		-ln2		0		ln2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	||	-	0	+	

$\forall x \in]-\infty; -ln2[\cup]\ ln2; +\infty[\ ; f'(x) > 0$

$\forall x \in]-ln2; 0[\cup]0; \ln2[; f'(x) < 0$

Comme $\forall x \in]-\infty; -ln2[\cup]\ ln2; +\infty[f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur $]-\infty; -ln2[$ et sur $]\ln2; +\infty[$

Comme $\forall x \in]-ln2; 0[\cup]0; \ln2[; f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur$]-ln2; 0[$ et sur$]0; \ln2[$

Tableau de variation

x	-∞		-ln2		0		ln2		+∞
$f'(x)$		+	0	-	||	-	0	+	
f(x)	-∞	↗	f(-ln2)	↘	-∞ || +∞	↘	f(ln2)	↗	+∞

4) Démontrons que les droites (D) et (Δ) sont asymptotes à C_f on a :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(2x-1)] = \lim_{x\to\infty}\left(2x-1+\frac{1}{e^x-1}-2x+1\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x-1}\right) = 0$$

Comme;

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(2x-1)] = 0$

alors la droite (D) d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à C_f $+\infty$ et on a

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(2x-2)] = \lim_{x\to-\infty}\left[2x-1+\frac{1}{e^x-1}-2x+2\right]$$

$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{e^x-1}+1\right] = 0$; et comme $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(2x-2)] = 0$ alors la droite(Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à C_f en $-\infty$

6)a) Déterminons α et β tel que : : f(x)=$2x+\alpha+\frac{\beta e^x}{e^x-1}$

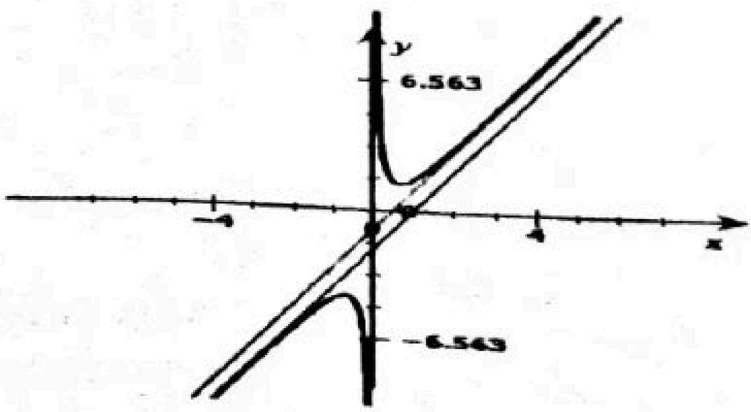
: f(x)=$2x+\alpha+ \Leftrightarrow \frac{\beta e^x}{e^x-1} \Leftrightarrow 2x+\alpha+\frac{\beta e^x}{e^x-1} = \frac{(2x-1)e^x-2x+2}{e^x-1}$

$\Leftrightarrow \frac{(2x+\alpha+\beta)e^x-2x-\alpha}{e^x-1} = \frac{(2x-1)e^x-2x+2}{e^x-1}$ par identification

$\alpha = -2;\ \beta = 1$

c) calculons $A(k) = \int_{ln2}^{lnk}(f(x)-(2x-1))dx = \int_{ln2}^{lnk}(\frac{e^x}{e^x-1}-1)dx$

$A(k) = \left[ln|e^x-1| - \frac{1}{2}x^2\ \right]_{ln2}^{lnk} = ln|\lambda - 1| + \frac{1}{2}(-(lnk)^2 + lnk)$



PROBLEME NON CORRIGES

PROBLEME 1 :

Partie A :

Soit g la fonction définie par $g(x) = x^3 + 3x + 8$

1) Déterminer Dg et calculer les limites à ses bornes
2) Etudier les variations de $g'(x)$ et en déduire le tableau de variation
3.a) Démontrer que $\forall\ x \in Dg$ l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α
3.b) Déduis en que $\alpha \in]-1,6\,;-1,5[$
4) Déduis le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B :

1) Déterminer Df puis calculer les limites aux bornes de son ensemble de définition.
2) $\forall x \in Df$ démontrons que $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$
3.a) Déterminer le signe de $f'(x)$ et en déduire son signe de variation
3.b) En déduire le tableau de variation
4) Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{3}{2}\alpha$
5) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe C représentative de f
6) Etudier la position relative de C et de la droite (D)
7) Construire la courbe C dans le repère (O, I, J) unité 1 cm.

PROBLEME 2

Partie A : Résolution d'une équation différentielle.

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) : 3y2 + y= 2(x+3)

1- Montrer que la fonction h définie sur R par : $h(x) = 2x - 5e^{-\frac{1}{3}x}$ est solution de (E)
2- a- Montrer qu'une fonction G est solution de l'équation différentielle (E') : $3y^2$ +y=0 si et seulement si g+h est solution de (E)
 b-Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E)
3- détermine la solution g de (E) qui vérifie (0) = - 1

PARTIE B : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = 2x - e^{-\frac{1}{3}x}$

1- Détermine les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$

2- Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation
3- Montrer que l'équation g(x)= 0 possède une unique solution a telle que $0,4 < \alpha < 0,5$
4- En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x

PARTIE C : Etude de la fonction principale f

Soit la fonction définie sur R par $f(x) = x^2 + 3\left(e^{-\frac{1}{3}x} - 1\right)$

On désigne par (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, I, J (Unité graphique : 2 cm)

1 a- déterminer les limites de en $-\infty$ et $+\infty$

b-Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ interpréter graphiquement les résultats

2-a- montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$

b- En déduire les variations de f et dresser le tableau de variation de f.

3-Monter que $f(\alpha) = (\alpha + 3)^2 - 12$

4- Montrer que l'équation f(x)=0 admet exactement 2 solutions : 0 et B telle que $0,8 < \beta < 0,9$

5- Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0

6- Tracer (C) et (T)

PARTIE D : Calcul d'aire

Soit P la courbe d'équation $y=x^2 - 3$ et A un nombre réel strictement positif.

1- Tracer (p= dans le même repère que précédemment.
2- a- On pose :

$$I(\delta) = \int_0^\delta [f(\delta) - (x^2 - 3)]dx$$

interpréter graphiquement cette intégrale.

b- Calculer I(A)

a- Déterminer la limite de I(A) quand A tend vers $+\infty$

PROBLEME 3

PARTIE A :

Soit g la fonction numériques définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x(\ln x)^2$

1. Calculer les limites suivantes

a- $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

b- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

2- a. Calculer g' (x) puis monter que $g'(x) = -\ln x\,(2 + \ln x)$

b-Etudier les variations de la fonction g puis dresser son tableau de variation.

3.a. Monter que g réalise une bijection de $[1; +\infty[$ dans un intervalle que l'on déterminera

b. monter que l'Equation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[1; +\infty[$

c. Montrer que $\alpha \in]2; 3[$

4. montrer que $\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[\ , g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[\ , g(x) < 0 \end{cases}$

PARTIE B

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln x} - x \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1 – a. Etudier la continuité de la fonction f en 0

b. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

2-. a. Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$puis interpréter le résultat

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

c . Montrer que la droite D d'équation $y = -x + 1$ est asymptote oblique à (C) en+∞

3.a Etudier la dérivabilité de f en 0, puis interpréter le résultat

b. Calculer f'(x) puis montrer que $\forall x \in Df\ , f'(x) = \frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$

4- a. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

b. Montrer que $f(\alpha) = -\alpha - \sqrt{\alpha} + 1$ et en déduire le signe de $f(\alpha)$

5.a Etudier la position relative de (C) et (D)

b. Construire (C) et (D) dans un repère orthonormé. Unité 2cm

PARTIE C

On considère la restriction h de la fonction f à $[0; 1[$

1- Montrer que h une bijection de $[0; 1[$ Vers un intervalle que l'on précisera.
2- -a. Dresser le tableau de variation de la fonction h^{-1}bijection réciproque de la fonction h
   a- En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} h^{-1}(x)$puis interpréter le résultat
   b- Construire $(C_{h^{-1}})$dans le même repère (C)

PROBLEME 4

PARTIE A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : y'' - y=4xe^x

1- Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur R par : $g(x) = (ax^2 + bx)e^x$ soit solution de (E)
2- Soit f une fonction définie sur R. démontrer que f est solution de (E) si et seulement si f=g est solution de l'équation différentielle (E') : y'' - y=0

3- Résoudre (E''°) et en déduire la solution générale de (E)
4- Déterminer la fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$

PARTIE B : Etude de fonction f

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = (x^2 - x + 1)e^x$

On désigne par (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (o, I ,J) (Unité graphique : 2 cm

1-a- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

b-Interpréter graphiquement le résultat en $-\infty$.

a- calculer $\lim\limits_{x \to +\infty\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat

2-a- montrer que $\forall x \in \mathbb{R} f'(x) = x(x+1)e^x$

b- En déduire les variations de f et dresser le tableau de variation de f

3- déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1

4- tracer (C) et (T)

Partie C : Recherche d'une primitive et calcul d'aire

1- Déterminer les réel a, b et c de sorte que la fonction $\varphi(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ admette pour dérivée la fonction $f(x)$

2- Soit λ un nombre réel strictement inférieur à 0. $A(\lambda)$ désigne l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$

a- Calculer $A(\lambda)$.

b- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} A(\lambda)$ et interpréter le résultat obtenu.

Partie D : Etude d'une bijection

Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0; +\infty[$

1- Montrer que h réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

2- Soit h la bijection réciproque de h. on note (C^{-1}) sa représentation graphique.

a- Monter que h est dérivable en e et calculer $(h^{-1})'(e)$.

b- Déterminer une équation de la tangente (T') à (C^{-1}) un point d''abscisse e

3- Construction (C^{-1}) et (T') sur la même figure que (C) le même repère

PROBLEME 5 :

Partie A :

On désigne par (C_m) la représentation graphique de f_m dans le plan muni d'un repère (O, I, J) et (D) la droite d'équation $y = x$ et (m∈ ℝ). Soit f la fonction définie par :

$$fm : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x - m\ln x$$

1- a) Déterminer l'ensemble de définition (D_m) $(m \in \mathbb{R})$

b) Calculer les limites de f_m aux bornes de (D_m) suivant le signe de m

c) Démontrer que $\forall\, x \in D_m f'_m = \frac{x-m}{x}$

2- a) Etudier les variations de f_m suivant le signe de m

b) Dresser les tableaux de variation pour m>0 et pour m<0 ;

$(m=0 \Rightarrow (C_m)=(\Delta))$

3-) Etudier les positions de (C_m) par rapport à (Δ)

Partie B :

1) $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$ les courbes (C_m) ont un point unique commun. Donner les coordonnées de ce point.

2) Construire C_1

Partie C :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda > 1$

3) calculer l'aire (A_m) de la partie délimité par (C_m), (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \lambda$ selon le signe de m.

4) calculer $\lim\limits_{x \to +\infty}(A_m)$

PROBLEME 6 :

L'entier naturel n étant non nul, on considère f_n la fonction définie sur $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$f_n(x) = x(\ln x)^n$ si $n \neq 0$ et $f(0) = 0$. On considère (C_n) la courbe de f dans le repère orthonormé (0, I, J) unité 5cm.

1- Etudier la dérivabilité de f_n en 0. En déduire l'allure de (a) Montrer que f_n est continue en 0

b) C_n) en 0

2- a) Etudier les variations de f_1 , puis donner son tableau de variation.

b) Pour n>1 et pair, puis pour n>1 et impair, étudier les variations de f_n et construire le tableau de variation de f_n

3) Donner trois points fixes communs à toutes les courbes

4-) Etudier les positions relatives de (C_n) et (C_{n+1}) pour n impair.

5-) Construire (C_1) et (C_2) dans le même repère

6-) Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes (C_1), (C_2), et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$

PROBLEME 7 :

Partie A

Soit la fonction Q définie dans IR par $Q(x)=e^x + x + 1$

1- Etudier le sens de variation de Q et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$

2- Montrer que l'équation Q(x)=0 a une solution et une seule α et ... l'on a : $-1.28<\alpha<-1.27$

3- En déduire le signe de Q(x) sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$du plan (unite graphique : 4 cm)

1- Montrer que $f(x)=\frac{e^x Q(x)}{(e^x+1)^3}$. En déduire le sens de variation de f

2- Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$

3- Soit T la tangente à (C) au point d'abscisse 0. Donner une équation de T étudié la position de (C)par rapport à T.

4- Chercher les limites de f en $+\infty$ et$-\infty$.

Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à (C)et étudier la position de (C)par rapport à D.

5- Faire le tableau de variation de f.

6- Tracer sur même dessin(C), T et D. La figure demandée fera apparaître les points de (C)dont les abscisses appartiennent à $[-2; 4]$

Partie C

On considère la fonction g, définie sur $[0; 1]$ par
$g(x) = ln(1 + e^x)$. On note (L) la courbe représentative de g dans le repère$(O, \vec{i}, \vec{j})$, le point défini par $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, A le point d'abscisse 0 de (L) et B son point d'abscisse 1.

1- Etudier brièvement les variations de g.
2- Donner une équation de la tangente en A à (L)
3- On note P l'intersection de cette tangente avec le segment$[IB]$. Calculer les aires des trapèzes OIPA et OIBA.
4- On admet que la courbe (L) est située entre les segments$[AP]$ et $[AB]$ .Montrer alors que :

$$\ln 2 + \frac{1}{4} \leq \int_0^1 g(x)dx \leq \ln\sqrt{2(1 + e)}$$

5- Au moyen d'une intégration par parties, justifier que :

$$\int_0^1 f(x)dx = \ln(1 + e) - \int_0^1 g(x)dx$$

6- En déduire un encadrement de$\int_0^1 f(x)\, dx$.

PROBLEME 8:

Le plan est rapporté au repère orthonormé(O, I, J). Unité graphique 2 cm.
Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = e^{x-1} - 1$
Le but du problème est de trouver une approximation de l'une des solutions de l'équation $x \in IR, f(x) = x$
Les parties B et C sont indépendantes.

Partie A

On se propose d'étudier la fonction f et les solutions de l'équation : $f(x) = x$

1-
   a- Etudier les variations de f
   b- En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x
2- Construire la courbe représentative (C) de f dans le repère (O, I, J)
3- On pose $Q(x) = f(x) - x$
   a- Calculer les limites de $Q(x)$ en $-oo$ puis en $+oo$
   b- Etudier les variations de Q puis dressier son tableau de variation.
   c- Démontrer que l'équation $x \, \varepsilon \, IR, \; Q(x) = 0$ admet deux solutions que l'on notera α et β. $(\alpha < \beta)$
   d- En déduire que l'équation $x \, \varepsilon \, IR, f(x) = x$ admet comme seules solutions α et β.
   Etablir que : $2 < \beta < \frac{5}{2}$

PARTIE B

On se propose d'étudier une méthode d'approximation du nombre β
Soit la fonction g définie sur $I = \left[2 ; \frac{5}{2}\right]$ par $g(x) = \ln(x + 1) + 1$

1- Démontrer que, sur I, l'équation $f(x) = x$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.
2-
   a- Démontrer que, pour tout x de I, $g(x)$ appartient à I.
   b- Démontrer que, pour tout x élément de I: $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{3}$

c- En déduire que, pour tout élément de $I, |g(x)-\beta| \leq \frac{1}{3}|x-\beta|$

3- Soit $(W_n)_{n \in IR}$, la suite d'éléments définie par : $W_0 = 2$, $\forall n \geq 1, W_n = g(W_{n-1})$

a- Etablir que pour tout $n \geq 0 : |W_n - \beta| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$
En déduire la limite de W_n

b- Déterminer un entier q tel que W_q soit une valeur approchée de β à 10^{-2} près par défaut. Calculer W_q

PARTIE C

On se propose d'étudier une autre approximation du nombre β.
Pour ce faire on introduit deux suites (U_n) et (V_n) définies comme suit :
$U_0 = 2, V_0 = \frac{5}{2}$ et pour tout entier $n \geq 1$:
Si $Q\left(\frac{U_{n-1}+V_{n-1}}{2}\right) \geq 0$ alors $U_n = U_{n-1}$ et $V_n = \frac{U_{n-1}+V_{n-1}}{2}$
Si $Q\left(\frac{U_{n-1}+V_{n-1}}{2}\right) \leq 0$ alors $U_n = \frac{U_{n-1}+V_{n-1}}{2}$ et $V_n = V_{n-1}$

1- Calculer U_1, V_1, U_2, V_2
2- Soit $I = \left[2; \frac{5}{2}\right]$, démontrer en raisonnant par récurrence que pour tout entier naturel n, U_n et V_n sont éléments de I.
3- En utilisant le tableau de variation de Q sur l'intervalle I et en raisonnant par récurrence, montrer que (U_n) est majorée par β et que (V_n) est minorée par β.
4- Etablir que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante. Que peut-on en conclure ?
5- Démontrer par récurrence que : $V_n - U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$
6- Démontrer que les suites (U_n) et (V_n) convergent vers β.

PROBLEME 9 :

On désigne par (C) la courbe de la fonction f dérivable sur $R \setminus \{0; 1\}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique : 2 cm.

Partie A :

On considère la fonction f définie par $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x} - \ln\left|1 - \frac{1}{x}\right|$

1) Montrer que f est définie sur $R \setminus \{0; 1\}$.
2) Montrer que :
   - Pour tout $x \in]-\infty ; 0[\cup]1; +\infty[$, $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x} - \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$
   - Pour tout $x \in]0 ; 1[$, $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x} - \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$
3) Déterminer les limites de f en $-\infty$ *et en* $+\infty$.
4) Calculer la limite de f en 1. Interpréter graphiquement ce résultat.
5) a) Calculer es limites de f à gauche en 0 et à droite en 0.
   b) Interpréter graphiquement ces résultats

Partie B :

Soit la fonction g définie sur R par : $g(x) = x^3 - x^2 + x - 2$
1) Calculer $g'(x)$.
2) Déterminer le sens de variation de g
3) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α dans R et que $1 < \alpha < 1{,}5$
   b) En déduire un encadrement du réel α par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.
4) Montrer que pour tout $x \in]-\infty ; \alpha[$, $g(x) < 0$ et pour tout $x \in]\alpha ; +\infty[$, $g(x) > 0$.
5) Montrer que pour tout nombre réel x élément de $\mathbb{R} \setminus \{0 ; 1\}$

$$, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(x-1)}$$

6) a) Déterminer le signe de f '(x) et le sens de variation de f '
   b) Dresser le tableau de variation de f.

Partie C :

1) Soit (D) la droite d'équation $y = x - 1$
   Montrer que cette droite est asymptote à (C) en -∞ et en +∞
2) Calculer $f(-2); f\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$
3) Construire la droite (D) et la courbe (C). On prendre α=1,3

Partie D :

Soit la fonction h définie sur $]1; +\infty[$ par : $h(x) = (x-1)\ln(x-1) - x\ln x$
1) Calculer h '(x)
2) En déduire une primitive F de f sur $]1 ; +\infty[$
3) Déterminer la primitive G de f sur $]1; +\infty[$ qui s'annule en 2

PROBLEME 10 (concours d'entrée à l'Ecole nationale de statistique et de l'économie appliquée (ENSEA) niveau BAC D, C et E)

n est un entier naturel non nul. On considère la fonction numérique f_n définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln x \quad si\ x \in \ ]0;1] \\ f_n(x) = (2-x)^n \ln x \quad si\ x \in \ ]1;+\infty] \end{cases}$$

On appelle (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans le repère (O, I, J). On admet que f_n est dérivable sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$

A- **Etude locale au point d'abscisse $x = 1$**

Démontrer que f_n est continue en 1 ;

1-

a- Démontrer que f_n est dérivable en 1 ;

b- Ecrire une équation de la tangente (D) à la courbe (C_n) au point d'abscisse $x = 1$

B- **Etude d'une fonction auxiliaire**

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction g_n dérivable sur $[1;+\infty[$ et définie par : $g_n(x) = -nx\ln x + 2 - x$

1- Démontrer que g_n est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$;
2- Démontrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n
3- Vérifier que : $\ln a_n = \frac{2-a_n}{na_n}$
4- Démontrer que α_n est compris entre 1 et 2
5- Déterminer le signe de $g_n(x)$ sur l'intervalle$[1;+\infty[$. Justifier le résultat.

C- **Etude des variations et calcul de limites**

1- Calculer la limite de f_n en 0 et en $+\infty$

2-

a- Calculer la dérivée $f_n'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle$]0;1[$

b- Etudier le signe $f_n'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;1[$

3- Etudier le signe de $(2-x)^{n-1}$ suivant la parité de n lorsque x appartient à l'intervalle$]1;+\infty[$

4- Démontrer que pour tout x élément d'intervalle $]1;+\infty[$, $f_n'(x) = \frac{(2-x)^{n-1}}{x} g_n(x)$

5- Etudier selon la parité de n, le signe de $f_n'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle$]1;+\infty[$

D- <u>Tracer des courbes (C_1) et (C_2)</u>

1- On prolonge par continuité les fonctions f_1 et $f_2$en 0 en posant $f_1(0) = f_2(0) = 0$
Etudier la dérivabilité de f_1 et $f_2$en 0. Faire une interprétation graphique du résultat.

2-

a- Calculer la limite de $\frac{f_1(x)}{x}$ en $+\infty$ faire une interprétation graphique du résultat.

b- Calculer la limite de $\frac{f_2(x)}{x}$ en $+\infty$ faire une interprétation graphique du résultat.

c- Dresser le tableau de variation de f_1 et de f_2

3- Démontrer que $f_n(\alpha_n) = \frac{(2-\alpha_n)^{n+1}}{n\alpha_n}$

4-

a- Encadrer α_1 entre deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2.

b- En déduire un encadrement de $f_1(\alpha_1)$.

5- Tracer la droite (D) et la courbe(c_1). On prendra pour unité OI=2cm et OJ=5cm

6-

a- Démontrer que $1{,}3 < \alpha_2 < 1{,}4$; on prendra $\alpha_2 = 1{,}35$;

b- Calculer $f_2(\alpha_2)$;

c- Tracer (C_2) dans le même repère que (C_1).

NOMBRES COMPLEXES ET SIMILITUDES DIRECT DU PLAN

RESUME DE COURS

Soit $z = a + ib$ ($a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}$) un nombre complexe.

1. **Module d'un nombre complexe écrit sous forme algébrique**

Le module de z est :$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et un argument de z est : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta = \frac{Im(z)}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

2. **Ecriture trigonométrique et écriture exponentielle d'un nombre complexe :**

Z=k $(\cos\theta + i\sin\theta)$;forme trigonométrique

Z=k$e^{i\theta}$; forme expoànentielle avec k=$|z|$et $\theta = \arg(z)$

3. **conjugué d un nombre complexe**

Le conjugué d'un nombre complexe est :

$\bar{z} = a - ib$=k$(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$ = k$e^{-i\theta}$

4. **MODULE ET ARGUMENT D'UN PRODUIT ET D'UN QUOTIENT**

$|Z \times Z'| = |z| \times |z'|$ et $\arg(z \times z') = (\arg z + \arg z') + k2\pi$

$|z/z'| = \frac{|z|}{|z'|}$ Et arg $\left(\frac{z}{z'}\right) = (\arg z - \arg z') + k2\pi$

5. **Résoudre une équation du second degré de forme $az^2 + bz + c$. a, b et c sont des nombres complexes :**

On calcule le discriminant Δ .

Si $\Delta > 0$ il existe deux solutions réels $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = 0$ *une solution double*

$\Delta < 0$ Alors l'equation admet deux solutions complexes conjuguées

$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$; $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Si Δ est un nombre complexe, alors, on cherche les racines carrées du discriminant en posant que $\varphi^2 = \Delta$ avec $\varphi = x + iy$ et par identification, on déterline x et y. Et on en déduit les solutions $z_1 = \frac{-b-\varphi}{2a}$;

$$z_2 = \frac{-b+\varphi}{2a}$$

6. Différents caractéristiques

Z est un nombre réel $\Leftrightarrow Im(z) = 0$ et z est un nombre imaginaire pur $\Leftrightarrow Re(z) = 0$ et si z est un nombre reel $\bar{z} = z$ et z est nombre imaginaire pur alors $\bar{z} = -z$

7. CALCULER UNE LONGUEUR AVEC LES NOMBRES COMPLEXES

AB=$|Z_B - Z_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

8. CALCULE DES ANGLES

$$mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{CD}}\right) = \arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right) + 2k\pi; \ (k \in \mathbb{Z})$$

9.MONTRER QUE DEUX DROITES (AB) ET (CD) SONT PERPENDUCULAIRES

On montre par calcule que le nombre complexe $\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}$ est imaginaire pur ;Ou encore, $\arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; (k \in \mathbb{Z})$

10. POUR MONTRER QUE LES POINTS A,B,ET C SONT ALIGNES

On montre que :$\frac{Z_D - Z_A}{Z_B - Z_A}$ est reel ou on montre que

$$\arg\left(\frac{Z_D - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = 0 + 2k\pi \,; (k \in \mathbb{Z})$$

11. Si $\frac{Z_D - Z_A}{Z_B - Z_A} = i$ *ou* $\frac{Z_D - Z_A}{Z_B - Z_A} = -i$ alors le triangle ABC triangle isocèle en B

12. si AB =AC= BC alors le triangle ABC est un triangle équilatérale ou encore si $\frac{Z_D - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{Z_D - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ELEMENTS CARACTERISTIQUE D'UNE TRANSFORMATION DU PLAN

Soit la transformation du plan tel que $z' = az + b.(\ a \in \mathbb{C}^* \ ; b \in \mathbb{C})$,

- Si a est un nombre réel alors il y a deux cas possible :
  - Si a=1 alors z est une translation de vecteur $\vec{u}$ et $\vec{u}$ a pour affixe b
  - si a≠ 1 alors c'est homothétie de rapport a et de centre Ω qui pour affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$
- si a est un nombre complexe il y a deux cas possible :
  - si $|a| = 1$ alors z est une rotation de rapport a ,d'angle $\theta = \arg(a)$et de centre Ω qui pour affixe
  $$\omega = \frac{b}{1-a}$$
  - si $|a| \neq 1$ alors z est une similitude directe de rapport $|a|$ d'angle $\theta = \arg(a)$et centre Ω pour affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$

EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

a°) Calcul le module des nombres complexes suivants :

$Z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $Z_2 = \sqrt{3} + i\sqrt{2}$; $Z_3 = (3+2i)^5$

b°) Déterminer la forme trigonométrique et la forme exponentielle.

$Z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $Z_2 = 4 - 4i$; $Z_3 = -\sqrt{3} + i$; $Z_4 = 1 - i$

c°) résoudre dans C :

1) $Z^2 - Z + 2 = 0$; 2) $Z^2 - 4Z + 13 = 0$; 3) $Z^2 - Z - 3i = 0$

On donne $a = -\sqrt{2-\sqrt{3}} + i\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Calcule a^2 puis $|a^2|$ et $arg(a^2)$

En déduire $|a|$ *et* $\arg(a)$.

Exercice 2 : Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$z_1 = (3-2i)^2$; $z_2 = (3i-4)^4$; $z_3 = \frac{i}{3-4i}$; $z_4 = \frac{1-2i}{3+5i}$

Exercice 3 : Calculer le module des nombres complexes suivants :

$z_1 = 1 - i\sqrt{3}$; $z_2 = \sqrt{3} + i\sqrt{2}$; $z_3 = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$; $z_4 = (3+2i)^5$

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a). $(1+2i)z - (1-i) = iz - 3$

(b). $\frac{z-1}{z+3} = i$

(c). $(1+i)z - 3\bar{z} = iz$

(c). $(1+i)z(z+i)(1-i-z) = 0$

Exercice 5

On se propose de déterminer quels sont les nombres complexes solutions de l'équation (E): $z^2 - 6z + 12 = 0$ et de placer, par une construction géométrique, les images de ces nombres dans le plan complexe.

1.a) Résoudre l'équation (E).

On note u et $\bar{u}$ ses solutions, u étant celle dont la partie imaginaire est positive.

1.b) Calculer le module et un argument de u. En déduire le module et un argument de $\overline{u}$.

2.a) On considère le nombre complexe $u - 4$. Ecrire ce nombre sous forme algébrique et sous formez trigonométrique.

2.b) Calculer un argument du nombre $\frac{u}{u-4}$. En déduire un argument de $\frac{\overline{u}}{\overline{u}-4}$.

3) Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé$(O; \vec{u}; \vec{v})$, on note A le point d'affixe 4, B le point d'affixe 2 et C le point d'affixe 6. M et N sont les points d'affixes u et $\overline{u}$.

a) En interprétant géométriquement les résultats du 2), démontrer que les points O, A, M, N sont sur un même cercle que l'on précisera.

b) Démontrer que les points B, C, M, N sont aussi sur un même cercle que l'on précisera.

c) Construire les deux cercles ainsi obtenus, et les deux points M et N.

EXERCICE 6

Partie A :

On considère dans C : l'équation :

(E) :$4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})z - 4 = 0$

1. Déterminer les racines carrées de $6 + 6i\sqrt{3}$
2. Résoudre dans C : l'équation$2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4 = 0$
3. a. Développer, réduire et ordonner $(2z + 1)[2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4]$

   b. En déduire les solutions de (E)
4. soit $z_0 = -\frac{1}{2}$; $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

Exprimer chacun des nombres complexesz_0; $z_1$et z_2 sous forme trigonométrique.

Partie B :

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct$(O, \vec{u}, \vec{v})$où l'unité est 1 cm, on considère les pointsM_0 ; M_1et M_2 d'affixes respectives $-\frac{1}{2}$;

$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$; $1 + i\sqrt{3}$

S est la similitude directe de centre O, d'angle$-\frac{\pi}{3}$et de rapport 2.

1. a. Déterminer l'écriture complexe de S.

b) Justifier que $S(M_0) = M_1$et $S(M_1) = M_2$

EXERCICE 7

1- Résoudre l'équation : $z^2 - z - 1 + 3i = 0 ; z \in \mathbb{C}$

2- Dans le pan complexe muni du repère orthonormé direct(O, I, J), on donne les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :
$z_A = -1 + i$, $z_B = 2 - i$, $z_C = 4 + 2i$, $z_D = 1 + 4i$ et
$z_E = -2 + 6i$

a- Placer les points A, B, C, D et E dans le plan.

b- Démontrer que ABCD est un carré.

c- Vérifier que D est le milieu de $[EC]$

3- Soit S la similitude directe telle que : $S(B) = C$ et $S(D) = E$

a- Démontrer que S a pour écriture complexe :

$$z' = (1 + i)z + 1 + i$$

b- Déterminer $S(A)$ et en déduire les éléments caractéristiques de S.

4- Soit F et K les points tels que $S(C) = F$ et $S(K) = D$

a- Déterminer les affixes des points F et K et les placer.

b- Justifier sans calcul la nature du quadrilatère ACFE

EXERCICE 8

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
On considère la fonction complexe f de $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$

1- Justifier que $Df = \mathbb{C} \setminus \{i; -i\}$

2- Déterminer les antécédents de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ par f.

3- Démontrer que :

a- $\forall z, z' \in Df$: $f(z) = f(z') \Leftrightarrow z = z'$ ou $zz' = 1$

b- $\forall z, z' \in Df$ tels que $|z| < 1$ et $|z'| < 1$:

c- $f(z) = f(z') \Rightarrow z = z'$

4- Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe $z \in D_f$ tels que $f(z)$ soit un réel.

EXERCICE 9

I) Résolution de l'équation
$(E) : 8z^3 - 8(1+i)z^2 + 6iz + (1-i) = 0$

1- Démontrer que (E) admet une unique solution réelle.
2- Ecrire (E) sous forme $\left(z-\frac{1}{2}\right)(\alpha x^2 + \beta z + \gamma) = 0$ avec α, β et γ Coefficients complexes que l'on déterminera.
3- Résoudre complètement l'équation(E).

EXERCICE 10

Soit le nombre complexe $Z = 1$.En utilisant la forme trigonométrique :

1- Trouver les racines carrées de Z.
2-
   a- Trouver les racines sixième de Z. On les notera $1, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5$.
   b- Calculer la somme de ces racines.
3-
   a- Montrer que la somme des racines cubiques de $Z = 1$ est égale à 0.
   b- En considérant $1, J_1$et J_2ces racines, Montrer que J_1et J_2sont les solutions de l'équation $J^2 + J + 1 = 0$
   c- Quelles relations existent-ils entre J_1et J_2

CORRECTIONS DES EXERCICES

Correction exercice 1

a°) Calculons les modules

$Z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $|Z_1| = \left|\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ $\boxed{|Z_1| = 1}$

$Z_2 = \sqrt{3} + i\sqrt{2}$ $|Z_2| = |\sqrt{3} + i\sqrt{2}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{5}$ $\boxed{|Z_2| = \sqrt{5}}$

$Z_3 = (3 + 2i)^5$ $|Z_3| = |(3 + 2i)^5| = |3 + 2i|^5 = \sqrt{9 + 4}^5 = \sqrt{13}^5$

$= 169\sqrt{13}$ $\boxed{|Z_3| = 169\sqrt{13}}$

b°) Déterminons la forme trigonométrique et la forme exponentielle

$Z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ son module est 1. Soit θ l'argument de Z_1

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$. Forme trigo:

$Z_1 = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$; Forme expo: $Z_1 = e^{i-\frac{\pi}{3}}$

$Z_2 = 4 - 4i$ $|Z_2| = |4 - 4i| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 16}$

$= 4\sqrt{2}$. Soit φ un argument de Z_2

$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4}$. Forme trigo:

$Z_2 = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$; Forme expo: $Z_2 = 4\sqrt{2}e^{i-\frac{\pi}{4}}$

$Z_3 = -\sqrt{3} + i$ $|Z_3| = |-\sqrt{3} + i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + i^2} = \sqrt{4}$

$= 2$. Soit β l'argumentde Z_3

$\begin{cases} \cos\beta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\beta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \beta = \dfrac{5\pi}{6}$. Forme trigo:

$Z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$; Forme expo: $Z_3 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$Z_4 = 1 - i \qquad |Z_4| = |1-i| = \sqrt{1^2 + (-i)^2}$

$= \sqrt{2}$. Soit γ un argument de Z_4

$\begin{cases} \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\gamma = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \beta = -\dfrac{\pi}{4}$. Forme trigo:

$Z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$; Forme expo: $Z_4 = \sqrt{2}e^{i-\frac{\pi}{4}}$

c°) Résolvons dans C :

1) $Z^2 - Z + 2 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 8 = -7 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{7}i$. $\Delta > 0$ *donc on a* :

$Z_1 = \dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}$ et $Z_2 = \dfrac{1+\sqrt{7}i}{2}$ $\boxed{S_C = \left\{\dfrac{1-\sqrt{7}i}{2} ; \dfrac{1+\sqrt{7}i}{2}\right\}}$

2) $Z^2 - 4Z + 13 = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 4 \times 13 = -36 = 36i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 6i$.

$Z_1 = \dfrac{4-6i}{2} = 2 - 3i$ et $Z_2 = \dfrac{4+6i}{2}$

$= 2 + 3i$. $\boxed{S_C = \{2-3i ; 2+3i\}}$

3) $Z^2 - Z - 3i = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4 \times (-1+3i)$

$= 5 - 12i$. Soit φ un nombre complexe tel que :

$\varphi^2 = \Delta \Rightarrow \varphi = \sqrt{\Delta}$ or $\varphi = x + iy$. $\varphi^2 = \Delta \begin{cases} R(\varphi^2) = R(\Delta) \\ |\varphi^2| = |\Delta| \end{cases}$. De plus φ^2

$= (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xiy$

I : $x^2 - y^2 = 5$; $|\Delta| = \sqrt{5^2 + \sqrt{12}^2} = 13$; $|\varphi^2| = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$

$= x^2 + y^2$

II : $x^2 + y^2 = 13$; $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \\ 2xiy = -12i \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \\ 2xy = -12 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 & \text{I} \\ x^2 + y^2 = 13 & \text{II} \end{cases}$

I + II : $2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \quad x = 3$ ou $x = -3$

I − II : $x^2 - y^2 - x^2 - y^2 = 5 - 13 \Rightarrow \ -2y^2 = -8 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow \quad y = 2$ ou $y = -2$

$\rightarrow 2xy = -12 \Rightarrow xy = -6.$ *Cela signifie que si* $x = 3$ *alors* $y = -2$ *et si* $x = -3$ *alors* $y = 2$

$\varphi_1 = 3 - 2i$ *et* $\varphi_2 - 3 + 2i.$

$\varphi_1 = 3 - 2i = \sqrt{\Delta}$

$Z_1 = \dfrac{1-(3-2i)}{2} = \dfrac{1-3+2i}{2} = \dfrac{-2+2i}{2} = -1 + i$

$Z_2 = \dfrac{1+3-2i}{2} = 2 - i$

$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{-1 + \mathrm{i}\,; 2 - \mathrm{i}\}}$

Exercice 2 :

$z_1 = 5 - 12i$

$z_2 = -527 - 336i$ (d'après la formule du binôme)

$z_3 = -\dfrac{4}{25} + \dfrac{3}{25}i \qquad z_4 = \dfrac{(1-2i)(3-5i)}{(3+5i)(3-5i)} = -\dfrac{7}{34} - \dfrac{11}{34}i$

Exercice 3 :

$|z_1| = 2 \qquad |z_2| = \sqrt{5}|z_3| = \left|\dfrac{1+i+1-i}{(1+i)(1-i)}\right| = 1 \qquad |z_4| = |3+2i|^5 = \left(\sqrt{13}\right)^5 = 169\sqrt{13}$

Exercice 4 :

(a)$\Leftrightarrow(1 + 2\mathrm{i} - \mathrm{i})z = 11 - \mathrm{i} - 3 \Leftrightarrow z = \dfrac{1+i}{-2-i} = -\dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{5}i$

(b)$\Leftrightarrow z - 1 = \mathrm{i}(Z + 3) \Leftrightarrow (1 - i)z = 1 + 3i \Leftrightarrow z = \dfrac{1+3i}{1-i} = -1 + 2i$

(c)on pose

$z = x + iy$ où x *et* y *sont* deux réels, on obtient alors l'équation:

$(1+i)(x+iy) - 3(x - iy) = i(x+iy) \Leftrightarrow x - y - 3x + i(x + y + 3y) = -y + ix$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y = -y \\ x + 4y = x \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$ d'où $z = 0$

$(d) \Leftrightarrow z = 0$ ou $z = -i$ ou $z = 1 + i$

Exercice 5

1.a) Résolvons l'équation (E) : $z^2 - 6z + 12 = 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 2 \times 12 = 36 - 48 = -12 = 12i^2$.

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12i^2} = \sqrt{12}\, i = i2\sqrt{3}$.

$\bar{u} = \dfrac{6 - i2\sqrt{3}}{2} = 3 - i\sqrt{3}$et $\quad u = \dfrac{6 + i2\sqrt{3}}{2} = 3 + i\sqrt{3}$

1.b) Calculons le module et un argument :

$|u| = |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Soit θ un argument de u :

$$\left.\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{3 \times 2\sqrt{3}}{12} = \dfrac{6\sqrt{3}}{12} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}}{12} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} \end{cases}\right\} \theta = \frac{\pi}{6}$$

Déduisons en le module et un argument de $\bar{u}$.

$|\bar{u}| = |3 - i\sqrt{3}| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Soit β un argument de $\bar{u}$:

$$\left.\begin{cases} \cos\beta = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\beta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}\right\} \beta = -\frac{\pi}{6}$$

2.a) Ecrivons ce nombre sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

$(u-4) = 3 + i\sqrt{3} - 4 = -1 + i\sqrt{3}$

- Calculons le module de $u - 4$

$|u-4| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$

- Déterminons son argument : Soit γ l'argument de $u - 4$

$$\left.\begin{cases} \cos\gamma = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\gamma = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}\right\} \gamma = \frac{2\pi}{3}.$$

$u - 4$ aura pour forme trigonométrique $2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

2.b) Calculons un argument du nombre $\frac{u}{u-4}$

Écrivons-le sous forme algébrique :

$$\left(\frac{u}{u-4}\right)=\frac{3+i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}-4}=\frac{3+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{(3+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{1+3}$$

$$=\frac{-3-3i\sqrt{3}-i\sqrt{3}+3}{4}=\frac{-4i\sqrt{3}}{4}=-i\sqrt{3}$$

Calculons son module :

$$\left|\frac{u}{u-4}\right|=|-i\sqrt{3}|=\sqrt{(\sqrt{3})^2}=\sqrt{3}$$

Déterminons son argument :

$$\left.\begin{cases}\cos\delta=\dfrac{0}{\sqrt{3}}\\ \sin\delta=\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=-1\end{cases}\right\}\delta=-\frac{\pi}{2}$$

- En déduisons un argument de $\left(\frac{\overline{u}}{\overline{u}-4}\right)$:

Écrivons-le sous forme algébrique :

$$\left(\frac{\overline{u}}{\overline{u}-4}\right)=\frac{3-i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}-4}=\frac{3-i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}}=\frac{(3-i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{4}=\frac{4i\sqrt{3}}{4}=i\sqrt{3}$$

Calculons son module :

$$\left|\frac{\overline{u}}{\overline{u}-4}\right|=|i\sqrt{3}|=\sqrt{(\sqrt{3})^2}=\sqrt{3}$$

Déterminons un argument :

$$\arg\left(\frac{\overline{u}}{\overline{u}-4}\right)=-\arg\left(\frac{u}{u-4}\right)=\frac{\pi}{2}$$

3) Rapportons à un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$:

Exercice 6

1.) les racines carrées de $6+6i\sqrt{3}$:

Posons :$\Delta=6+6i\sqrt{3}$

$$|\Delta|=|6+6i\sqrt{3}|=\sqrt{6^2+(6\sqrt{3})^2}=\sqrt{36+36\times3}=\sqrt{144}=12$$

Posons ensuite $z=x+iy$ une racine de Δ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |\Delta| \\ x^2 - y^2 = Réel(\Delta) \\ 2xy = imaginaire(\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 12 & (1) \\ x^2 - y^2 = 6 & (2) \\ 2xy = 6\sqrt{3} & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 18 & (1) + (2) \\ 2y^2 = 6 & (1) - (2) \\ xy = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \ ou \ x = -3 \\ y = \sqrt{3} \ ou \ y = -\sqrt{3} \\ xy > 0 \quad x \text{ et } y \text{ sont de même signe} \end{cases}$$

Les racines de Δ sont $z_1 = 3 + i\sqrt{3}$et $z_2 = -3 - i\sqrt{3}$

2) Résolvons l'équation $2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4 = 0$

$\Delta = (1 + 3i\sqrt{3})^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 1 + 2 \times 1 \times (3i\sqrt{3}) + (3i\sqrt{3})^2 + 32$

$\Delta = 6 + 6i\sqrt{3} \quad \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3 + 3i\sqrt{3} \ \ et - 3 - 3i\sqrt{3}$

$$z_1 = \frac{1 + 3i\sqrt{3} - 3 - 3i\sqrt{3}}{4} = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = \frac{1 + 3i\sqrt{3} + 3 + 3i\sqrt{3}}{4} = \frac{4 + 4i\sqrt{3}}{4} = 1 + i\sqrt{3}$$

$$S = \left\{1 + i\sqrt{3} \,;\, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

3.a) Développons, réduisons et ordonnons :

$(2z + 1)[2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4]$

$= 4z^3 - 2(1 + 3i\sqrt{3})z^2 - 8z + 2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4$

$= 4z^3 - 2(1 + 3i\sqrt{3} - 1)z^2 - (8 + 1 + 3i\sqrt{3})z - 4$

$= 4z^3 - 2(3i\sqrt{3})z^2 - (9 + 3i\sqrt{3})z - 4 = 4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})z - 4$

3.b) En déduisons les solutions de (E) :

$4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})z - 4 = 0 \leftrightarrow (2z + 1)[2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4]$
$= 0$

On a : $2z + 1 = 0 \ ou \ 2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4 = 0$

$z = -\frac{1}{2} \ ou \ 2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4 = 0$

donc $z_0 = -\frac{1}{2}$; $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$et$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$S = \left\{-\frac{1}{2}; 1 + i\sqrt{3} \,;\, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

4) Exprimons sous forme trigonométrique z_0 , $z_1$et z_2

$$\begin{cases} x^2+y^2=|\Delta| \\ x^2-y^2=Réel(\Delta) \\ 2xy=imaginaire(\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=12 & (1) \\ x^2-y^2=6 & (2) \\ 2xy=6\sqrt{3} & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=18 & (1)+(2) \\ 2y^2=6 & (1)-(2) \\ xy=3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3 \ ou \ x=-3 \\ y=\sqrt{3} \ ou \ y=-\sqrt{3} \\ xy>0 \quad x \text{ et } y \text{ sont de même signe} \end{cases}$$

Les racines de Δ sont $z_1 = 3 + i\sqrt{3}$et $z_2 = -3 - i\sqrt{3}$

2) Résolvons l'équation $2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4 = 0$

$\Delta = (1 + 3i\sqrt{3})^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 1 + 2 \times 1 \times (3i\sqrt{3}) + (3i\sqrt{3})^2 + 32$

$\Delta = 6 + 6i\sqrt{3} \implies \sqrt{\Delta} = 3 + 3i\sqrt{3} \ \ et - 3 - 3i\sqrt{3}$

$$z_1 = \frac{1 + 3i\sqrt{3} - 3 - 3i\sqrt{3}}{4} = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = \frac{1 + 3i\sqrt{3} + 3 + 3i\sqrt{3}}{4} = \frac{4 + 4i\sqrt{3}}{4} = 1 + i\sqrt{3}$$

$$S = \left\{1 + i\sqrt{3} \,;\, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

3.a) Développons, réduisons et ordonnons :

$(2z + 1)[2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4]$

$= 4z^3 - 2(1 + 3i\sqrt{3})z^2 - 8z + 2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4$

$= 4z^3 - 2(1 + 3i\sqrt{3} - 1)z^2 - (8 + 1 + 3i\sqrt{3})z - 4$

$= 4z^3 - 2(3i\sqrt{3})z^2 - (9 + 3i\sqrt{3})z - 4 = 4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})z - 4$

3.b) En déduisons les solutions de (E) :

$4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})z - 4 = 0 \leftrightarrow (2z + 1)[2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4] = 0$

On a : $2z + 1 = 0 \ ou \ 2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4 = 0$

$z = -\frac{1}{2} \ ou \ 2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4 = 0$

donc $z_0 = -\frac{1}{2}$; $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$et$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$S = \left\{-\frac{1}{2}; 1 + i\sqrt{3} \,;\, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

4) Exprimons sous forme trigonométrique z_0 , $z_1$et z_2

$z_0 = -\frac{1}{2}$. $|z_0| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$. $\arg(z_0) = \arg\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi$. z_0
$= \frac{1}{2}(\cos\pi + i\sin\pi)$

$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$. $|z_1| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

Posons $\alpha = \arg z_1$: $\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = \frac{1}{2}\\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\alpha = \frac{\pi}{3}$. $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$|z_2| = \left|\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)\right| = \left|\frac{1}{2}\right| \times |-1 + \sqrt{3}i| = \frac{1}{2} \times \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4}$
$= 1$

posons $\beta = \arg z_2$: $\left.\begin{array}{l}\cos\beta = -\frac{1}{2}\\ \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\beta = \frac{2\pi}{3}$. $z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

Partie B :

1.a) Déterminons l'écriture complexe de S :

$S = az + b$

$a = ke^{i\theta} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = 2\left(\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$
$= 1 - \sqrt{3}i$

$\beta = \frac{b}{1-a} \rightarrow b = \beta(1-a) = 0(1-a) = 0$

$S = (1 - \sqrt{3}i)z$

1.b) Justifions que $S(M_0) = M_1$ et $S(M_1) = M_2$

$S_0 = (1 - \sqrt{3}i)z_0 = (1 - \sqrt{3}i)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = z_1$. $S_0 = z_1 \Rightarrow S(M_0)$
$= M_1$

$S_1 = (1 - \sqrt{3}i)z_1 = (1 - \sqrt{3}i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{2}$

$$= 1 + \sqrt{3}i = z_2. \quad S_1 = z_2 \Rightarrow S(M_1) = M_2$$

EXERCICE 7

1- Résolvons l'équation $z^2 - z - 1 + 3i = 0 \ , z \in \mathbb{C}$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(-1+3i) = 5 - 12i$$

Posons $z = x + iy$; $\quad z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \quad$ et $\quad |z^2| = x^2 + y^2$

$$|\Delta| = \sqrt{25 + 144} = 13$$

$$z^2 = \Delta \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = 5 \\ xy = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 2 \end{cases}$$

Les couples (x, y) solutions du système sont : $\{(3,-2); (-3,2)\}$

Les racines carrés de Δ sont donc $3 - 2i$ et $-3 + 2i$ les solutions de l'équation sont :

$Z_1 = \frac{1-3+2i}{2} = -1 + i$ et $Z_2 = \frac{1+3-2i}{2} = 2 - i$

2-

a- Voir figure

b- Démontrons que $ABCD$ est un carré.

$$\left.\begin{array}{l} z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3 - 2i \\ z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 3 - 2i \end{array}\right\} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$\left.\begin{array}{l} AC = |z_c - z_A| = \sqrt{26} \\ DB = |z_B - z_D| = \sqrt{26} \end{array}\right\} AC = DB$$

$$\frac{z_B - z_D}{z_c - z_A} = \frac{5 + i}{1 - 5i} = i \Rightarrow (AC) perpendiculaire\ a\ (DB)$$

1 => $ABCD$ est un parallélogramme

2 et 3 Les diagonales sont perpendiculaires et égaux donc on peut conclure que $ABCD$ est un carré.

c- Vérifions que D = milieu de $[EC]$

Le milieu de $[EC]$ a pour affixe $\frac{z_E + z_C}{2} = \frac{2+5i}{2} = 1 + 4i$ or $z_D = 1 + 4i$ donc D est milieu de $[EC]$

3-

a- S est une similitude directe donc son écriture complexe est de a forme $z' = az + b$

$S(C) = C \Rightarrow z_C = az_B + b$; $S(D) = E \Rightarrow z_E = az_D + b$

D'où le système $\begin{cases} 4 + 2i = a(2 - i) + b \\ -2 + bi = a(1 + 4 - i) + b \end{cases}$

En résolvant on obtient $a = 1 + i$ et $b = 1 + i$ donc l'écriture complexe de S est :

$$z' = (1 + i)z + 1 + i$$

b- Posons $S(A) = A'$

$z_{A'} = (1 + i)z_A + 1 + i$

$= -1 + i = z_A$ D'où $A = A'$ c'est a dire

$$S(A) = A|a| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

Soit θ en argument de a

$1 + i = \sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta)$ Par identification

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\theta = 1 \\ \sqrt{2}\sin\theta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

En conclusion S est la similitude de centre A, de raport $\sqrt{2}$et d'angle $\frac{\pi}{4}$

4-

a- Déterminons les affixes de F et K

$$z_F = (1 + i)z_C + 1 + i \quad \Rightarrow z_F = 3 + 7i$$

$z_D = (1 + i)z_K + 1 + i \quad \Rightarrow z_K = \dfrac{z_D - 1 - i}{1 + i}$

$$\Rightarrow z_K = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

b- Justifions la nature de $ACFE$

$S(B) = C$; $S(A) = A$; $S(D) = E$; $S(C) = F$

Comme $ABCD$ est un carré alors $ACFE$ est aussi un carré car S est une similitude directe.

5-

a- Démontrons que $A \in (\theta)$ et traçons θ

$AB = |z_B - z_A| = |2i - 3| = \sqrt{13}$ Donc $A \in (\theta)$

Pour tracer il suffit de considérer le rayon $[AB]$

b- Nature et élément caractéristique de (θ')

$(\theta') = S(\theta)$ D'où (θ') est le cercle de centre $C = S(B)$ et de rayon $\sqrt{2}\text{x}\sqrt{13} = \sqrt{26}$

c- $S(A)\epsilon(\theta')$ car $A\epsilon(\theta)$ or $S(A) = A \Rightarrow A\epsilon(\theta')$

(θ')est le cercle de rayon $[CA]$

6- Démontons que $\forall\ M(z) \neq A$ avec $M'(z') = S(M)$, AMM' est rectangle isocèle en A.

$$S(M) = M' \Rightarrow z' = (1+i)z + 1 + i$$

Posons $z = x + iy$

$$\Rightarrow z' = (1+i)(x+iy) + 1 + i$$
$$\Rightarrow z' = x + iy + ix - y + 1 + i$$

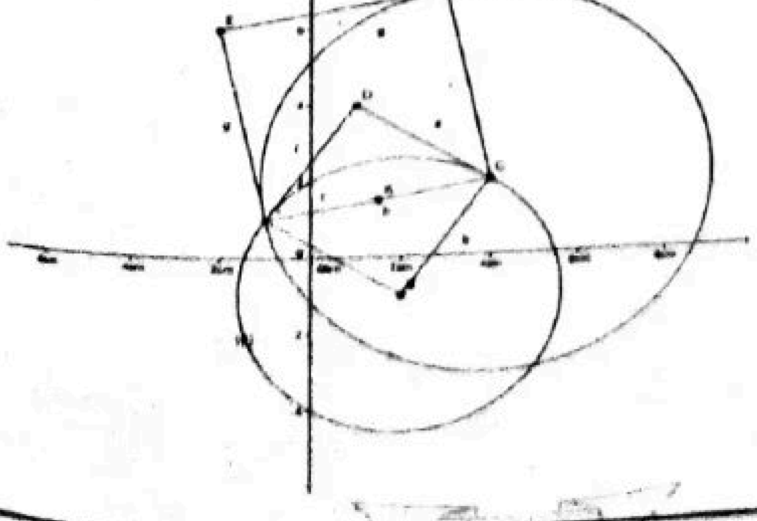
$z' - z = x + iy - x - iy + ix - y + 1 + i \quad = 1 - y + (x+1)i$

$z_A - z = -1 + i - x - iy \quad = -1 - x + (1-y)i$

$$\frac{z'-z}{z_A - z} = \frac{(1-y)+(x+1)i}{-1-x+(1-y)i}$$
$$= \frac{[(1-y)+(x+1)i][-(1+x)-(1-y)i]}{[-(x+1)]^2 - [(1-y)i]^2}$$
$$= \frac{-(1-y)(x+1) - i(1-y)^2 - i(x+1)^2 + (x+1)(1-y)}{(x+1)^2 + (1-y)^2}$$
$$= \frac{-i[(1-y)^2 + (x+1)^2]}{[(x+1)^2 + (1-y)^2]}$$

D'où $\frac{z'-z}{z_A-z} = -i$

$\Rightarrow \frac{z_{M'}-z_M}{z_A - z_M} = -i$ Alors le triangle AMM' est isocèle en M



EXERCICE 8

$f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$

1- Déterminons D_f ssi $z^2 + 1 \neq 0 \quad <=> z^2 - i^2 \neq 0$

$<=> (z-i)(z+i) \neq 0$

$<=> \ z \neq i$ et $z \neq -i$

$D_f = \mathbb{C} \setminus \{i; -i\}$

2- Antécédents de $\frac{1}{\sqrt{3}} <=> \frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} <=> z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

$\Delta = \left(-\sqrt{3}\right)^2 - 4 = -1 \ => \ \Delta = i^2$

Les antécédents de $\frac{1}{\sqrt{3}}$sont $z_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ et $z_2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$

3- Démontrons que :

a- $\forall\, z, z' \in D_f : f(z) = f(z') <=> \ z = z'$ ou $zz' = 1$

On a $f(z) = f(z') <=> \frac{z}{z+1} = \frac{z'}{z'^2+1}$

$<=> z\left(z'^2 + 1\right) = z'(z^2+1) <=> zz'^2 + z - z'z^2 - z' = 0$

$<=> z'(zz'-1) + z(1 - z'z) = 0$

$<=> z'(zz'-1) - z(zz'-1) = 0$

$<=> (zz'-1)(z'-z) = 0 <=> zz' - 1 = 0$ ou $z' - z = 0$

$<=> zz' = 1$ Ou $z' = z$

Donc $f(z) = f(z') <=> z' = z$ ou $zz' = 1$

b- $\forall\, z, z' \in D_f$ tels que $|z| < 1$ et $|z'| < 10$, $f(z) = f(z') => z = z'$

Supposons que $|z| < 1$ et $|z'| < 1 \ => zz' = 1$

Donc $|zz'| = |z||z'| = 1$ or $|z| < 1$ et $|z'| < 1 \ => |z||z'| < 1$

Ce qui est absurde, donc $|z| < 1$ et $|z'| < 1 \ => z' = z$

4- Déterminons l'ensemble (E) des $M(z)$tels que $f(z) \in \mathbb{R}$ posons $z = x + iy$

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

$$= \frac{x+iy}{x^2 - y^2 + 2xyi + 1}$$

$$= \frac{(x+iy)[x^2 - y^2 + 1 - 2xyi]}{(x^2-y^2+1)^2 - (2xyi)^2}$$

$$= \frac{x^3 - xy^2 + x - 2x^2yi + iyx^2 - iy^3 + iy + 2xy^2}{(x^2-y^2+1)^2 + 4x^2y^2}$$

$$= \frac{(x^3 - xy^2 + x + 2xy^2) + (-2x^2y + yx^2 - y^3 + y)i}{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2}$$

$$= \frac{x^3 + xy^2 + x}{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2} + \frac{y - y^3 - x^2y}{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2}i$$

$f(z)$ existe ssi $(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 \neq 0 \quad => (x, y) \neq \{(0,1); (0,-1)\}$

$f(z) \in \mathbb{R} \quad <=> y - y^3 - x^2y = 0 \quad <=> \quad y(1 - y^2 - x^2) = 0$

$<=> \quad y = 0$ou $\; x^2 + y^2 - 1 = 0$ avec $z \neq i$ et $z \neq -i$ l'ensemble des points M est la réunion de l'axe (OI) et du cercle privé $C(0,1)$ privé des points $M'\binom{0}{1}$et $M''\binom{0}{-1}$

EXERCICE 9

$$(E): \; 8z^3 - 8(1+i)z^2 + 6iz + (1-i) = 0$$

1- Démontrons que (E) admet une unique solution réelle

Soit a cette solution

On a :

$8a^3 - 8(1+i)a^2 + 6ia + (1-i) = 0$

$8a^3 - 8a^2 - 8a^2i + 6ia + 1 - i = 0$

$8a^3 - 8a^2 + 1 + (-8a^2 + 6a - 1)i = 0$

$$<=> \begin{cases} 8a^3 - 8a^2 + 1 = 0 & (1) \\ -8a^2 + 6a - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

De (2) $\Delta = 36 - 4(-8)(1) = 4$

$a_1 = \frac{-6-2}{-16}$ et $a_2 = \frac{-6+12}{-16}$

$a_1 = \frac{1}{2}$ et $a_2 = \frac{1}{4}$

On a $a_1 = \frac{1}{2}$ vérifie (1) et (2). Or $a_2 = \frac{1}{4}$ ne vérifie pas (1)

(E) admet une solution réelle unique $a = \frac{1}{2}$

2- Ecrire (E) sous forme $\left(z - \frac{1}{2}\right)(\alpha z^2 + \beta z + \delta) = 0$

On sait que (E) : $8z^3 - 8(1+i)z^2 + 6iz + (1-i) = 0$ peut s'écrire sous la forme

$$(E) : \left(z - \frac{1}{2}\right)(\alpha z^2 + \beta z + \delta) = 0$$
$$\alpha z^3 + \beta z^2 + \delta z - \frac{1}{2}\alpha z^2 - \frac{1}{2}\beta z - \frac{1}{2}\delta = 0$$
$$\alpha z^3 + \left(\beta - \frac{1}{2}\alpha\right) z^2 + \left(\delta - \frac{1}{2}\beta\right) z - \frac{1}{2}\delta = 0$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} \alpha = 8 \\ \beta - \frac{1}{2}\alpha = -8 - 8i \\ \delta - \frac{1}{2}\beta = 6i \\ -\frac{1}{2}\delta = 1 - i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 8 \\ \beta = -4 - 8i \\ \delta = -2 + 2i \end{cases}$$

On obtient (E) : $\left(z - \frac{1}{2}\right)[8z^2 + (-4 - 8i)z + (-2 + 2i)]$
Résolvons complètement (E) : $[8z^2 + (-4 - 8i)z + (-2 + 2i)] = 0$

$$<=> \begin{cases} z - \frac{1}{2} = 0 & (1) \\ 8z^2 + (-4 - 8i)z + (-2 + 2i) = 0 & (2) \end{cases}$$

De (2) $\Delta = (-4 - 8i)^2 - 4(8)(-2 + 2i)$
$\Delta = [16 - 2(-4)(8i) + (8i)^2] + 64 - 64i$
$= 16 + 64i - 64 + 64 - 64i$
$\Delta = 16 > 0$ donc obtient

$$z_1 = \frac{-(-4 - 8i) - 4}{16} \qquad et \qquad z_2 = \frac{-(-4 - 8i) + 4}{16}$$

$$z_1 = \frac{1}{2}i \qquad et \qquad z_2 = \frac{1}{2}(1 + i)$$

$S_{(E)} = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}i; \frac{1}{2}(1+i)\right\}$

EXERCICE 10

1- Trouvons les racines carrées de z

On sait que $1 = e^{i0\pi}$

Donc les racines carrées de z sont de la forme $\sqrt{|z|}e^{i\frac{k\pi}{2}}$ avec $k \in \{0,1\}$

Soit $e^{ik\pi}$, $|z| = 1$

- Si $k = 0$, $z_0 = e^{i0\pi} = 1$
- Si $k = 1$, $z_1 = e^{i\pi} = -1$

D'où les racines carrées de z sont 1 et -1

2-

a- Trouvons les racines sixième de z

Les racines sixièmes de z sont de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{6}}$ avec $k \in \{0, \dots, 5\}$ c'est-a-dire $e^{i\frac{k\pi}{3}}$ tel que $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$

On a :

$z_0 = e^{io\pi} = 1$

$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_3 = e^{i\pi} = -1$

$z_4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_5 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Conclusion

Les racines sixièmes de z sont

$$\left\{1; -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i; -1; -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i; \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

3-

a- Calculons les racines cubiques

Les racines cubiques de z sont de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{2}}$ avec $k \in \{0,1,2\}$

Ces racines sont $e^{i0}, e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

$$\begin{aligned} e^{i0}+e^{i\frac{2\pi}{3}}+e^{-i\frac{2\pi}{3}} &= 1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ &= 1-1+\frac{1}{2}(\sqrt{3}i-\sqrt{3}i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc la somme des racines cubiques de 1 est égale à 0

b- Montrons que J_1 et J_2 sont solution de l'équation

Soit l'équation (E) : J^2+J+1

On a : $J_1 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $J_2 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Par conséquent J_1 et J_2 sont solution de l'équation J^2+J+1

Si $J^2+J+1 = (J-J_1)(J-J_2)$

$$\begin{aligned} => (J-J_1)(J-J_2) &= J^2 - JJ_2 - JJ_1 + J_1J_2 \\ &= J^2 + J\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= J^2+J+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{(J-J_1)(J-J_2) = J^2+J+1}$$

Donc J_1 et J_2 sont solution de l'équation $J^2+J+1=0$

c- Les relations entre J_1 et J_2

J_1etJ_2 sont des conjugués c'est-à-dire $J_1 = J_2$

EXERCICES NON CORRIGES

Exercice 1

On donne les nombres $z_1 = 2 - 2i$; $z_2 = \sqrt{3} + i$

1) Calculer et mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$z_1 z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$ et $\overline{z_2} z_1$

2) Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes

z_2^3 ; z_2 et z_2^{2009}

Exercice 2

1) On considère l'équation suivante :

$(E): z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45 = 0$

Résoudre l'équation (E) sachant qu'elle admet deux solutions imaginaires pures

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$ d'unité le centimètre

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives -3i ; 2-i ; 2+i et 3i

b- Placer les points A, B, C et D et démontrer que le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle

c- On désigne par S la similitude directe telle que S (A)=A ; s(B)=D ; S(D)=E
Détermine r l'angle et le rapport de S et démontrer que $(AE) \perp (AB)$

Exercice 3

On considère le polynôme $p(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$

1- Vérifier que 4 est une racine de P
2- Déterminer les réels a, b, c te que $p(z) = (z-4)(az^2 + bz + c)$
3- Résoudre dans C l'équation $P(z) = 0$
4- Le plan est muni d'u repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm. Soient les points A,B,C d'affixes respectives $a = 4$; $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = 1 - i\sqrt{3}$
   b- Montrer que le triangle ABC est équilatéral
   c- Soit r la rotation de centre A qui applique le point B sur le point C. déterminer l'écriture complexe de r
   d- Soit R la transformation du plan d'écriture complexe de

$$z^2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

c-1- quelle est la nature de R

c-2 Donner les éléments caractérisés de R

c-3 soit K, le point d'affixe K= $-\sqrt{3}$ +i. Déterminer l'affixe f du point F image de K par la transformation R

c-4 on considère la translation t d'écriture complexe $z^2 = z + 1 + i\sqrt{3}$ déterminer l'affixe du point G image de K par la translation du vecteur $\overrightarrow{OB}$

c-5 démonterai que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires

Exercice 4

Partie A :

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 - (2+6i)Z - 16 + 12i = 0$

2- Soit $P(Z) = Z^3 - (4+6i)Z^2 - (12-24i)Z + 32 - 24i$

a- Montrer que l'équation $P(Z) = 0$ Admet une solution réelle notée Z_0que l'on déterminera

b- déterminer a, b, et c trois nombre complexes tels que : $P(Z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$

c- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$

Partie B :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J) ; unité : 1 cm

On donne les points $A(2)$, $B(4+2i)$et $C(-2+4i)$

1-a- Placer les points A, B et C dans le repère (O, I, J)

b-calculer le rapport $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et en déduire la nature du triangle ABC

c-montrer que le point F d'affixe est milieu du segment [AB]

d-déterminer (Δ) L'ensemble des points M du plan d affixe z vérifiant $|z - 4 - 2i| = |z + 2 - 4i|$

3- Soit S la similitude du plan telle que S(A) et S(B)=C

a- Déterminer le centre, le rapport K et l'angle 0 de la similitude S

b- Déterminer l'expression de la bijection complexe associée e a la similitude S

Exercice 5 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$

On désigne par I, A, B, C et M les points d'affixes respectives : i, 2i, -2i, 2-i, z

On considère les expressions suivantes où z est un nombre complexe de forme algébrique $x + iy$:

$f(z) = \dfrac{z - 2 + i}{z + 2i}$ $\quad g(z) = \dfrac{iz}{z - i}$ $\quad h(z) = \dfrac{z^2}{i - z}$

1) Déterminer les parties réelles et les parties imaginaires des expressions.
2) Déterminer les ensembles de points suivants et les construire
   (a) l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit réel.
   (b) l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur
   (c) l'ensemble (G) des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$
   (d) l'ensemble (H) des points M d'affixe z tels que $g(z)$ soit réel.
   (e) l'ensemble (K) des points M d'affixe Z tels que $h(z)$ soit un imaginaire pur

EXERCICE 6

Dans le plan orienté on considère un triangle ABC tel que $AB = AC$ et $mes\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Soit I le point tel que le triangle CAI soit isocèle rectangle avec $mes\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}\right) = \frac{-\pi}{4}[2\pi]$.

Reproduire la figure ci-dessus en prenant $AB = 5cm$

1- On appelle r_A la rotation de centre A qui transforme B en C et r_B la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
   On pose
   a- Déterminer les images par f de A et B
   b- Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle. On désigne par O son centre
   c- Démontrer que le quadrilatère $ABOC$ est un losange
2- Soit la S similitude directe de centre O qui transforme A en B. On appelle C' l'image de C par S, H le milieu du segment $[BC]$ et H' son image par S
   a- Donner une mesure de l'angle de S
   b- Démontrer que C' appartient à la droite (OA)
   c- Donner l'image du $[OA]$ et démonter que H' est le milieu de $[OB]$

d- Démontrer que $(C'H')$ est perpendiculaire à la droite (OB).
En déduire que C'est le centre du cercle circonscrit au triangle

EXERCICE 7

On donne l'équation suivante :

$Z \in \mathbb{C}$ $\quad Z^2 - (2r\cos\alpha)Z + r^2 = 0 \quad (E)$

Où r est un nombre réel strictement positif et α un nombre réel quelconque. Soient Z_1et Z_2les solutions de (E).

1- Ecrire Z_1et Z_2sous forme trigonométrique.

2-
   a- Calculer Z_1^n et Z_2^npour tout entier naturel n
   b- On pose$P_n = Z_1^n + Z_2^n$, pour tout entier naturel n. Montrer que $P_n$est un nombre réel

3- On suppose que $r = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{2\pi}{3}$
   a- Trouver une relation entre $P_n$et P_{n+3}
   b- En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$

PROBLEME

Partie 1

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

$z^3 + (1-3i)z^2 - (2+3i)z - 2 = 0$

On désigne par Z_0, Z_1 et Z_2 les solutions de (E)

1- Montrer que $Im(Z_0Z_1Z_2) = 0$
2- Montrer que (E)admet deux solutions imaginaires pures (on note par Z_1 et Z_2ces deux solutions avec$|Z_1| < |Z_2|$)
3- En déduire Z_0la troisième solution de (E)
4- Ecrire les solutions trouvées sous trigonométriques
5- Calculer $(Z_0Z_1Z_2)^{10}$

Partie 2

Le plan complexe $\mathbb{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On désigne par A, B et C les points dont les affixes respectives sont $2i$; -1 et i

1- Soit f la transformation de $\mathbb{P}$ dans $\mathbb{P}$ définie par $f(C) = C$ et $f(B) = A$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f

2- Soit g l'application de $\mathbb{P} \setminus \{A\}$ dans $\mathbb{P}$, qui à tout point M d'affixe $z(z \neq 2i)$associe le point M'd'affixe z'telle que :

$$zz' - z - 2iz' - 1 = 0$$

a- Exprimer z'en fonction de z

b- Déterminer l'affixe du pointC', image C de par g

c- Quelle est la nature du quadrilatère $ACBC'$?

d- Montrer que le point C admet un unique antécédent par Epar g.

e- Quelle est la nature du triangle BCE ?

3- Donner une interprétation géométrique du module de $|z'|$et $arg(z')$.

4- En déduire les ensembles et les construire.

a- (ε) ensemble des points M dont l'image par g a pour affixe un nombre imaginaire pur non nul.

b- (D)ensemble des points M dont l'image par est un élément du cercle de centre O et de rayon 1

c- (P)ensemble des points M dont l'image par g a pour affixe un nombre réel strictement négatif.

PROBABILITE

RESUME DE COURS

- DEFINITION
- **PROBABILITE SIMPLE**

Lorsque une expérience aléatoire conduit a n issues de même probabilité, on dit qu'elle est équiprobable .la probabilité p définie sur l'univers Ω est dite uniforme si tous les événements élémentaire de Ω sont équiprobable :$P(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{nombre\ de\ cas\ favirables\ à\ la\ réalisation\ de\ A}{nombre\ \ totale\ de\ cas\ possibles}$

- **PROBABILITE CONDITIONNELLE**

Soit deux événements A et B de probabilité non nulle tels que :$A\cap B\neq\emptyset$
La probabilité pour que A se réalise sachant B est réalisé se nomme la probabilité conditionnelle de A sachant B. $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

- **EVENEMENT INDEPENDANT**

Deux événements A et B sont indépendants lorsque

$$P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$$

- **EXPREIENCE MATHEMATIQUE**

On appelle expérience mathématique $E(X)=\sum_{i=1}^{n} X_iP_{i=} X_iP_i+..+X_nP_n$

- VARIANCE ET ECART TYPE D'UNE VARIABLE ALEATOIRE

$V(X)=\sum_{i=1}^{n} X^2{}_iP_{i-}E(X)^2$ et $\sigma = \sqrt{V(X)}$

- **EPREUVE DE BERNOUILLI**

On appelle épreuve de Bernoulli toutes épreuves conduisant à deux issues l'une appelé **succès** et l'autre appelé **échec** et si on nomme **q** la probabilité de succès la probabilité de l'échec est **p=q-1**

- LOI BINOMIALE

Soit une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes et on nomme **q** l probabilité de succès la probabilité de l'échec est **p=q-1**
Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de succès.
La probabilité d'avoir k suces est $P(X=k)=C_n^kp^kq^{n-k}$

Exercice résolus :

Exercice 1 :

Une urne contient 6 boules indiscernables au touché : 4 boules vertes et deux boules oranges.

1) On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage de 2 boules associe le nombre de boules vertes tirées.
   Déterminer la loi de probabilité et calculer l'espérance mathématique.
2) On tire au hasard 2 fois de suite 2 boules simultanément, les boules tirées n'étant pas remises dans l'urne. On note A, B, C, et D les évènements suivants :
   A «aucune boule verte n'est tirée au cours du premier tirage de 2 boules»
   B«une boule verte et une boule orange sont tirées au cours du premier tirage de 2 boules»
   C «deux boules vertes sont tirées au cours du premier tirage de 2 boules»
   D «une boule verte et une boule orange sont tirées au cours du deuxième tirage de 2 boules»
   a) Calculer $P_A(D)$, $P_B(D)$,et $P_C(D)$
   b) En déduire la probabilité des évènements $(D \cap A)$;
   c) $(D \cap A)$; $(D \cap C)$
   d) Calculer P(D). On remarquera que D=$D \cap (A \cup B \cup C)$.

Exercice 2:

Un jeu consiste à lancer une bille dans un circuit comportant cinq butoirs désignés par les lettres A, B, C, D, E.Les butoirs A, B, C, D, E sont marqués respectivement par les numéros 1,2,1,2,3.
Au début du lancer, la bille frappe au hasard un des butoirs A ou B ou C. Ensuite,
- de A elle frappe au hasard B ou D ou E ;
- de B elle frappe au hasard D ou E ;
- de C elle frappe E ;

et de D ou E elle sort du circuit.

1. A l'aide d'un arbre de choix,

a) présenter tous les trajets possibles de la bille au cours d'un lancer.
b) démonter que la probabilité da trajet (A, B, E) est égale à $\frac{1}{18}$.
c) Calculer la probabilité pour que la bille frappe le butoir B au cours de son trajet.

2. Le joueur gagne en franc CFA, 100 fois le nombre égal au total des chiffres marqués sur les butoirs heurtés par la bille au cours d'un trajet. On note G ce gain.
   a) Etablir la loi de probabilité de G.
   b) Calculer l'espérance mathématique de G.
3. Une partie consiste en n lancers indépendants de la bille ; n étant un entier naturel non nul.
   a) déterminer la probabilité P_n pour que le joueur réalise au cours d'une partie, au moins un lancer dont le gain est strictement supérieur à 400 F CFA ;
   b) Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle P_n est supérieure à 0,99.

EXERCICE 3:

On lance simultanément deux des cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On dit qu'on obtient un << double>> si les deux faces supérieures des dés portent des chiffres identiques. A chaque lancer, si le joueur fait un <<double>> il gagne 500 francs ; sinon, il perd 100 francs.

1- On lance les dés une fois. Calculer la probabilité de gagner 500 francs
2- On lance les dés trois. Soit X la variable aléatoire associée à la somme gagnée où perdue après trois lancers.
   a- Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
   b- Etablir la loi X, puis calculer l'espérance mathématique E(X) de X
3- On lance les dés n fois
   a- Calculer, en fonction de n, la probabilité notée q_n ; de ne jamais faire un <<double>>.
   b- Calculer, en fonction de n, la probabilité p_n ; de faire au moins un <<double>>.
   c- Quelle est la valeur minimum de n pour que l'on ait : $p_n \geq 0.8$

On prendra : $\ln(0,2)=-1.61$ $\ln\frac{5}{6}=-0,19$

EXERCICE 4

Une urne contient 3 boules vertes, 4 boules rouges et 5 boules bleues. On tire au hasard et simultanément deux doubles de l'urne. On désigne par A l'évènement << Tirer deux boules vertes>>, B l'évènement <<Tirer deux boules de couleurs différentes>>.

1- $P(A)$ et $P(B)$désignent respectivement la probabilité des évènements A et B.
   Calculer $P(A)$ et $P(B)$
2- Lorsqu'on tire une boule :
   - Bleue, on marque un point ;
   - Rouge, on perd un point ;
   - Verte, on marque zéro point.

   On désigne par X le nombre des points marqués.
   a- Déterminer la loi de probabilité de X
   b- Démontrer que l'espérance mathématique $E(X)$ de X est égale à $\frac{1}{6}$.
   c- Calculer la variance et l'écart type de$X$.

EXERCICE N°5

Dans une kermesse, un jeu est organisé de la façon suivante : le joueur mise 2 euros puis il réalise un tirage en deux étapes :

- 1ère étape :
  Le joueur tire au hasard un billet dans panier. Dans ce panier, on a placé 10 billets marqué « U1 » et 2 billets marqués « U2 ».
- 2ème étape :
  - Si le joueur a obtenu un billet marqué « U1 », il tire alors un jeton dans une urne U1, où sont placés 10 jetons marqués « perdant » et 2 jetons marqués « gagnant » ;
  - Si le joueur a obtenu un billet marqué « U2 », il tire un jeton dans une urne U2, où placés 7 jetons marqués « perdant » et 5 jetons « gagnant »

On note A l'évènement « le joueur a tiré un billet U1 »
On note B l'évènement « le joueur a tiré un billet U2 »
On note G l'évènement « le joueur a tiré un jeton marqué gagnant »
Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
1°) Construire un arbre pondéré qui décrit ce jeu.

2°) Calculer la probabilité des évènements $(G \cap A)$et $(G \cap B)$.

3°) Montrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\frac{5}{24}$.

4°) Quelle est la probabilité conditionnelle de l'évènement A par rapport à l'évènement G ?

Les évènements A et G sont-ils indépendants en probabilité ?

5°) Avec un jeton gagnant de l'urne U1, le joueur reçoit 5 euros ; avec un jeton gagnant de l'urne U2, il reçoit 10 euros, sinon rien. On considère le gain algébrique du joueur à l'issue du jeu.

a) Quelles sont les valeurs prises par ce gain ?

b) Etablir la loi de probabilité du gain.

c) Déterminer l'espérance mathématique de cette loi.

EXERCICE N°6

Une bibliothécaire a constaté que :

- Lorsqu'un étudiant choisit un livre, ce livre est une bande dessinée avec une probabilité égale à 0,3 ou un roman une fois sur cinq ; Sinon c'est un livre de cours.
- Lorsque l'étudiant choisit un roman, il prend aussi un magazine une fois sur deux.
- La probabilité qu'il emprunte à la fois un magazine et une bande dessinée est 0,24.
- Lorsqu'il prend un livre de cours, il n'emprunte pas de magazine.

1°) Un étudiant entre dans la bibliothèque. On notera :

B l'évènement « il emprunte une bande dessinée »,
R l'évènement « il emprunte un roman »
C l'évènement « il emprunte un livre de cours »
M l'évènement « il emprunte un magazine »

a) Construire un arbre de probabilités correspondant à cette situation. *Cet arbre pourra être éventuellement complété dans les questions suivantes.*

b) calculer la probabilité qu'il choisisse un livre de cours

c) Calculer la probabilité qu'il emprunte un magazine sachant qu'il a déjà pris une bande dessinée.

d) calculer la probabilité qu'il repart avec un magazine

e) quelle est la probabilité qu'il emprunte un roman sachant qu'il a pris un magazine ? *Le résultat sera arrondi au millième.*

2°) Trois étudiants sont entrés en même temps et choisissent, de manière indépendante des ouvrages.

On note X le nombre total de magazine qu'ils empruntent.

On suppose dans cette question que p(M)=0,34 où M est l'évènement défini dans la question1.

a) Déterminer la probabilité que les trois étudiants empruntent un magazine chacun.

b) Quelles sont les valeurs possibles de X ?

c) Déterminer la loi de probabilité de X ; on présentera les résultats sous forme d'un tableau.

Les résultats seront arrondis au millième.

xi	
$p(X = xi)$	

d) Calculer l'espérance de cette loi. Quelle interprétation peut-on en donner ?

EXERCICE N°7

Une agence de voyages propose exclusivement trois destinations : la destination A ; la destination G et la destination M.

50% des clients choisissent la destination A.

30% des clients choisissent la destination G.

20% choisissent la destination M.

Au retour de leur voyage, tous les clients de l'agence répondent à une enquête de satisfaction.

Le dépouillement des réponses à ce questionnaire permet de dire que 90% des clients ayant choisi la destination M sont satisfaits, de même que 80% des clients ayant choisi la destination G.

On prélève au hasard un questionnaire dans la plie des questionnaires recueillis.

On note les évènements :

A : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination A »

G : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination G »

M : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination M »

S : « le questionnaire est celui d'un client satisfait »

$\overline{S}$: « le questionnaire est celui d'un client insatisfait »

1) Traduire les données de l'énoncé sur un arbre de choix.

2.a) Traduire par une phrase les évènements $G \cap S$ et $M \cap S$ puis calculer leur probabilité.
2.b) L'enquête montre que 72% des clients de l'agence sont satisfait. En utilisant la formule des probabilités totales, calculé $P(A \cap S)$.
2.c) En déduire $P_A(S)$, probabilité de l'évènement S sachant que l'évènement A est réalisé.
3) Le questionnaire prélevé est celui d'un client qui est satisfait. Le client a omis de préciser quelle destination il avait choisie. Déterminer la probabilité qu'il ait choisi la destination G (*On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible).*
4) On prélève successivement et au hasard trois questionnaires dans la pile d'enquêtes. On suppose que le nombre de questionnaires est insuffisamment élevé pour considérer que les tirages successifs sont indépendants. Calculer la probabilité de l'évènement : « Les trois questionnaires sont ceux de clients insatisfaits » (*on donnera le résultat arrondi au millième).*

EXERCICE N°8

On teste un médicament sur un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé.
Pour cela 60% des individus prennent le médicament, les autres recevant une substance neutre et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie. Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de ce taux avec une probabilité de 0,8. On ne constate aucune baisse de ce taux pour 90% des personnes ayant reçu la substance neutre.
1) Calculer la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie sachant qu'on a le médicament.
2) Démontrer que la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie est 0,52.
3) On soumet au test un individu pris au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie.
4) On contrôle 5 individus au hasard
   a) Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé
   b) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé
5) On contrôle n individus pris au hasard. (n est un entier naturel non nul)

Déterminer n pour que la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé soit supérieur à 0,98

EERCICE N°9

Une urne U contient une boule portant l n°1 et deux boules portant le n°2. Une urne V contient une boule portant le n°4 et r boules portant le n°3. On tire au hasard une boule de U, une boule de V. On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des numéros portés par les deux boules.

1) Déterminer en fonction de r la loi de probabilité de X.
2) Calculer en fonction de r l'espérance mathématique E(x)
3) Déterminer n pour que $E(x) = 59/12$
4) Déterminer la plus petite valeur de r pour laquelle $E(x) < 4{,}8$

EXERCICE N°10

Une automobile rencontre sur son trajet cinq feux tricolores. Pour chacun de ces feux, le rouge dure 15 secondes, les jaune 5 secondes et le vert 40 secondes. Les cinq feux ne sont pas synchronisés et l'on suppose les aléas de la circulation sont tels que l'état d'un feu devant lequel se présent l'automobile ne dépend pas de l'état des autres feux rencontrés.

1) L'automobile se présente devant un feu. Quelle est la probabilité pour que le feu soit vert ?
2) Déterminer la probabilité pour que l'automobile, sur l'ensemble de son trajet at exactement trois fois le feu vert sur les cinq feux rencontrés.
3) On considère la valeur aléatoire X qui prend pour valeur le nombre de feux verts rencontrés lors d'un trajet. Définir la loi de probabilité de X et calculer l'espérance mathématique E(x) de la variable aléatoire X.

EXERCICE N°11

On dispose de trois dés de cubiques A ; B ; C.
Le dé A est normal, ses faces sont numérotées de 1 à 6 et elles ont toutes la même probabilité d'apparition.
Le dé B porte sur deux de ses faces le chiffres 6 et sur les quatre autres le chiffre1. Toutes les faces ont la même probabilité d'apparition.
Le dé C est pipé de façon que la probabilité d'apparition de chaque face soit proportionnelle au chiffre marqué sur cette face. Les faces sont numérotées de 1à 6.

1) Calculer la probabilité de l'apparition de chaque chiffre lorsqu'on lance une fois le dé C.

2) On lance les trois dés simultanément. Calculer la probabilité des évènements suivants :

   a) E_1 « l'apparition sur la face des dés le chiffre 6 »

   b) E_2 « apparition sur la face des dés trois chiffres égaux »

   c) E_3 « apparition simultanément des chiffres 1 ; 3 ; 5 sur la face des dés »

3) On lance quatre fois de suite le dé C. On désigne par X la variable aléatoire « le nombre d'apparition du chiffre 6 »

   a) Quelle loi de probabilité l'étude de cette expérience aléatoire permet-elle de définir ?

   b) Déterminer : la loi de probabilité de X, la variance et l'écart type X.

   c) Déterminer la fonction de répartition de F de X et la construire.
   (Donner des valeurs approchées de ces probabilités à 1/10 près)

CORRECTION DES EXERCICES

Exercice 1 :

1) Détermination de la loi de probabilité :

X(le nombre de boules vertes tirées lors des deux tirages)

- il peut ne pas tirés de boules vertes (X=0)
- il peut tirer une boule verte et une boule orange (X=1)
- il peut tirer 2boules vertes (X=2)

donc les valeurs prises par X (0, 1, 2). Comme il tire au hasard et simultanément 2 boules parmi 6 alors $card\ (\Omega) = c_6^2 = 15$;

$P(X = 0) = \frac{c_2^2}{c_6^2} = \frac{1}{15}$; $P(X = 1) = \frac{c_4^1 \times c_2^1}{c_6^2} = \frac{8}{15}$;

$$P(X = 2) = \frac{c_4^2}{c_6^2} = \frac{6}{15}$$

On obtient

k	0	1	2
P(X=k)	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$

$E(X) = \sum Xipi = 0 \times \frac{1}{15} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{6}{15} \Rightarrow E(X) = \frac{20}{15}$

2-a) Calculons $P_A(D)$; $P_B(D)$; $P_C(D)$

$P_A(D)=0$; $P_B(D) = \frac{c_3^1 \times c_1^1}{c_4^2} = \frac{1}{2}$; $P_C(D)= \frac{c_2^1 \times c_2^1}{c_4^2} = \frac{2}{3}$

2-b) On en déduit les probabilités des évènements :

$P_A(D) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = 0$ donc $P(D \cap A) = 0$

$P_B(D) = \frac{P(D \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2}$ donc $P(D \cap B) = \frac{4}{15}$

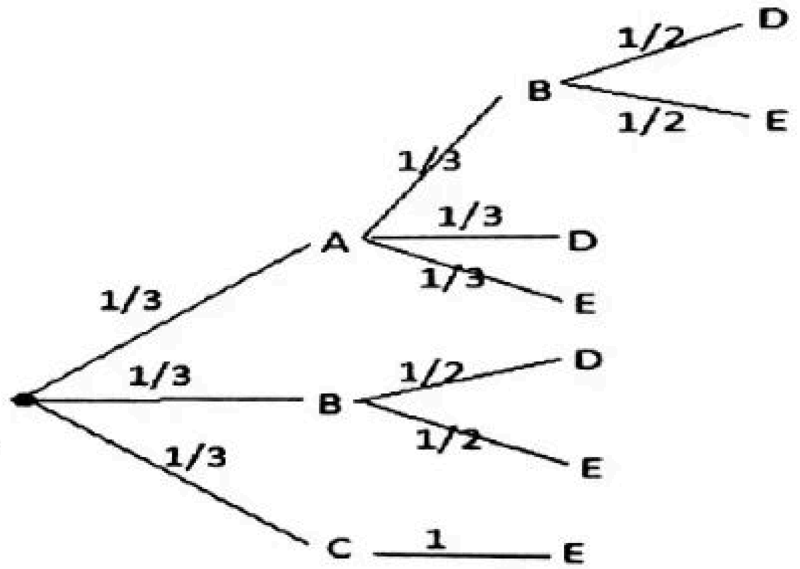
$P_C(D) = \frac{P(D \cap C)}{P(C)} = \frac{2}{3}$ donc $P(D \cap C) = \frac{4}{15}$

2-c) On a : $D = D \cap (A \cup B \cup C) = (D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C) =$ $P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$

$$P(D) = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$$

<u>**Exercice 2:**</u>

1-a) Présentation de tous les trajets possibles de la bille au cours d'un



lancer.

1-b) Démontrons que la probabilité du trajet (A B E) est égale à $\frac{1}{18}$.

$$P(A; B; E) = P(A \cap B \cap E) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$$

1-c) Calculons la probabilité que la bille frappe le butoir B :

$$P(B) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

2-a) Etablissons la loi de probabilité :

Selon l'arbre de choix, il y a 7 chemins possibles qui sont :

$(A; B; D) = (1 + 2 + 2) = 5 \Rightarrow 500F$; $P(A; B; D) = \frac{1}{18}$

$(A; B; E) = (1 + 2 + 3) = 6 \Rightarrow 600F$; $P(A; B; E) = \frac{1}{18}$

$(A; D) = (1 + 2) = 3 \Rightarrow 300F$; $P(A; D) = \frac{2}{18}$

$(A; E) = (1 + 3) = 4 \Rightarrow 400F$; $P(A. E) = \frac{2}{18}$

$(B;D) = (2+2) = 4 \Rightarrow 400F$; $P(B;D) = \frac{3}{18}$

$(B;E) = (2+3) = 5 \Rightarrow 500F$; $P(B;E) = \frac{3}{18}$

$(C;E) = (1+3) = 4 \Rightarrow 400F$; $P(C;E) = \frac{6}{18}$

Donc les valeurs prises par G sont 300 ; 400 ; 500 ; 600.

$P(G=300) = \frac{2}{18}$; $P(G=400) = \frac{11}{18}$;

$P(G=500) = \frac{4}{18}$; $P(G=600) = \frac{1}{18}$

K	300	400	500	600
P(G=k)	$\frac{2}{18}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{1}{18}$

2-b) Calculons l'expérience mathématique :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n}(k = P_k) = \frac{300\times 2}{18} + \frac{400\times 11}{18} + \frac{500\times 4}{18} + \frac{600\times 1}{18}$$

$$= \frac{7600}{18}$$

3-a) Déterminons P_n :

$P(G > 400) = \frac{5}{18}$ et $1 - P(G>400) = \frac{3}{18}$ alors $P_n = 1 - \left(\frac{13}{18}\right)^n$

3-b)

$$P_n > 0{,}99 \Rightarrow 1 - \left(\frac{13}{18}\right)^n > 0{,}99 \Rightarrow -\left(\frac{13}{18}\right)^n > -0{,}01$$

$$\Rightarrow \left(\frac{13}{18}\right)^n < 0{,}01 = n\ln\frac{13}{18} > \ln 0{,}01 = n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln\frac{13}{18}}$$

$n > 14{,}5$ La valeur minimale de n est 15.

EXERCICE 3 :

1- On lance les dès une fois. Calculons la probabilité de gagner 500 Francs

Première méthode

Il a six (6) doubles possibles. Il y a une chance sur 6 d'avoir un double. La probabilité cherchée est $\frac{1}{6}$

Deuxième méthode

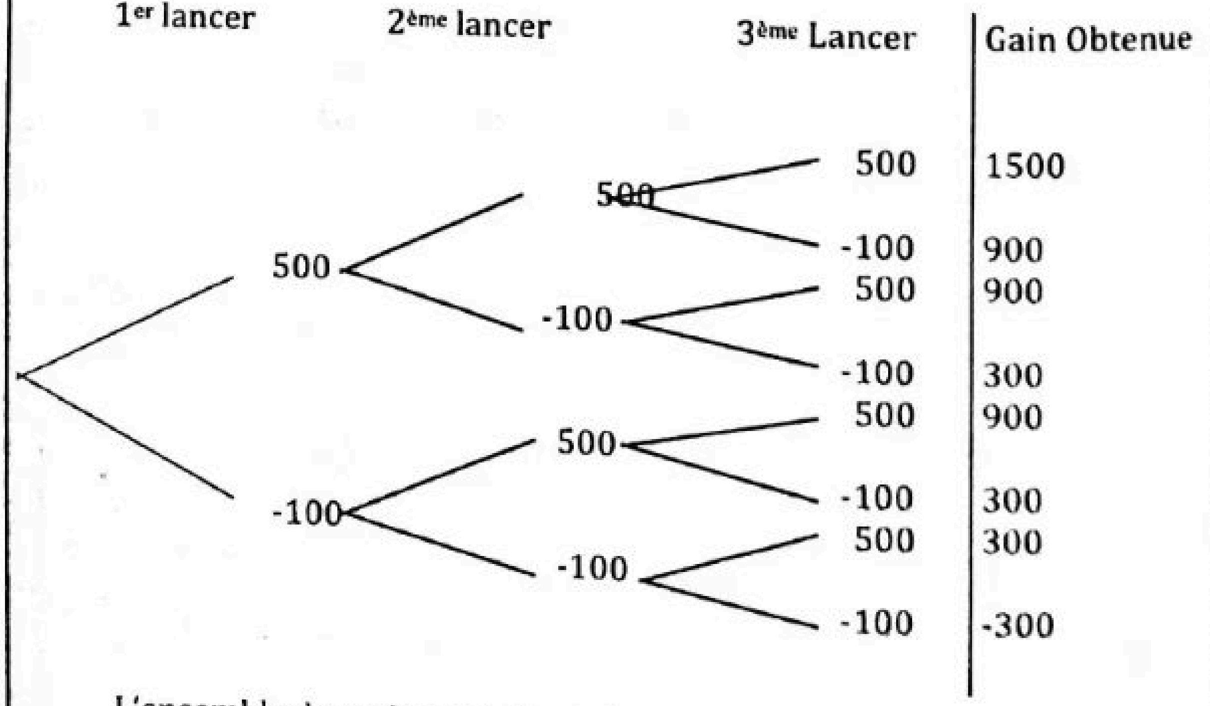
L'univers Ω de l'expérience est $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \times \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ les évènements élémentaires étant équiprobables, la probabilité de chaque évènement élémentaire est : $\frac{1}{Card\,\Omega}=\frac{1}{36}$

L'évènement A "gagner un double" est :
$\{(1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (5;5), (6;6)\}$ la probabilité cherchée est donc $\frac{Card\,A}{Card\,\Omega}=\frac{1}{6}$

2

a- L'ensemble des valeurs prises par X :

1ère méthode : arbre de choix



L'ensemble des valeurs de X est $\{-300; 300; 900; 1500\}$

2ème méthode

Après les 3 lancers des 2 dès, les situations qui présentent sont les suivants :

- Aucun double
- Un seul double
- Exactement deux doubles
- Trois (3) doubles

Puisque pour un double il gagne 500 Francs et perd 100 Francs dans le cas contraire les résultats de chacun des cas ci dessus sont les suivants : -300 ; 300 ; 900 ; 1500

Donc $X=\{-300; 300; 900; 1500\}$

b- La loi de probabilité de X :

A chaque lancer, on a deux éventualités : "Faire un double" et "ne pas faire un double" avec des probabilités respectives $\frac{1}{6}$ et $\frac{5}{6}$ l'expérience est donc un enchaînement d'épreuves de Bernoulli répétées trois (3) fois dont le succès est d'avoir un double.

La probabilité d'avoir 0 succès est $P(x=-300)=C_3^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$

La probabilité d'avoir 1 succès exactement est P(X=300)

$P(X=300)=C_3^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{75}{216}$

La probabilité d'avoir 2 succès exactement est P(X=900)

$P(X=900)= C_3^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{15}{216}$

La probabilité d'avoir 3 succès exactement est P(X=1500)

$P(X=1500)=C_3^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0=\frac{1}{216}$

Ce que l'on peut résumer dans le tableau

k	-300	300	900	1500
P(x=k)	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

L'expérience mathématique E(X) s'en déduit aisément par la formule $E(X)=\sum_{i=1}^{n} X_i P_i$

2-

a- Les expériences sont répétées n fois dans des conditions indépendantes avec une probabilité égale à $\frac{5}{6}$ chaque fois. On a $q_n = (\frac{5}{6})^n$

b- $P_n$est la probabilité de l'évènement contraire de l'évènement "n'obtenir aucun succès". $P_n = 1 - q_n$

$$P_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

c)Pour tout entier naturel n

$P_n \geq 0.8 <=> 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0{,}8$

$<=> \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}2$

$<=> n \ \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln 0.2$

$<=> n \ \geq \left(\frac{\ln(0.2)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}\right)$ (car $\ln\left(\frac{5}{6}\right) < 0$)

$<=> n \ \geq 8{,}47$

La valeur minimale de n est 9

EXERCICE 4 :

Trois boules vertes

Quartes boules rouges

Cinq boules bleues

A <<Tirer deux boules vertes>>

B<<Tirer deux boules de couleurs différentes >>

Soit l'univers associé à cette épreuve.
Card= $C_{12}^{2} = 66$

1- $P(A) = \frac{C_3^2}{C_{12}^2} = \frac{3}{66}$;

$$P(B) = \frac{C_3^1 X\, C_4^1 X\, C_3^1\, X\, C_5^1\, X\, C_4^1 X\, C_5^1}{C_{12}^2} = \frac{47}{66}$$

2- Si la boule est :
- Bleue, on a un point = (+1)
- Rouge, on perd un point = (-1)
- Verte, on a zéro point = (0)

On désigne Par X le nombre des ponts marqués. Les différentes valeurs de X sont : $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$

0 si on tire deux boules vertes ou une boule rouge et une boule bleue.

$$P(0) = \frac{C_3^2 + C_4^1 X\, C_5^1}{C_{12}^2} = \frac{23}{66}$$

-2 si on tire deux boules rouges

$$P(-2) = \frac{C_4^2}{C_{12}^2} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$$

-1 si on tire une boule rouge et une boule verte

$$P(-1) = \frac{C_4^1 X\, C_3^1}{C_{12}^2} = \frac{12}{66} = \frac{2}{11}$$

1 si on tire une boule bleue et une boule verte

$$P(1) = \frac{C_5^1 X\, C_3^1}{C_{12}^2} = \frac{15}{66}$$

2 si on tire deux boules bleues

$$P(2) = \frac{C_5^2}{C_{12}^2} = \frac{10}{66} = \frac{5}{3}$$

a- <u>Loi de Probabilité</u>

X	-2	-1	0	1	2
P(x=xi)	$^{6}/_{66}$	$^{12}/_{66}$	$^{23}/_{66}$	$^{15}/_{66}$	$^{10}/_{66}$

b- Démontrons que $E(x)=\frac{1}{6}$

$$E(X) = \left(-2\,X\,\frac{6}{66}\right) + \ \ldots . + \left(2\,X\,\frac{10}{66}\right)$$

$$E(X) = \frac{11}{66} = \frac{1}{6}$$

c- <u>Calculons V(x) et J(x)</u>

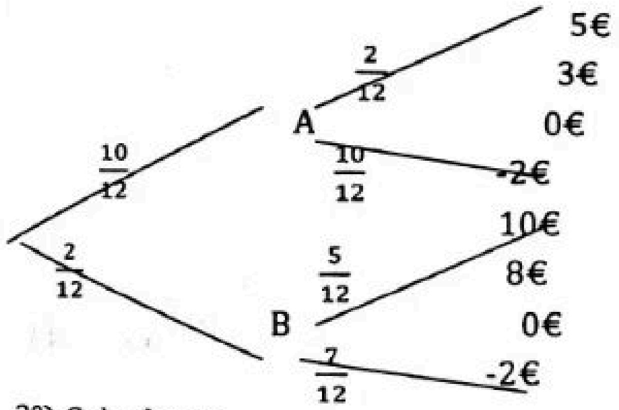
$$V(x) = \left[(-2)^2\,X\,\frac{6}{66}\right] + \cdots + \left[2^2\,X\,\frac{10}{66}\right]$$

$$V(x) = \frac{71}{66}$$

$$J(x) = \sqrt{V(x)} = 1{,}037$$

Exercice 5

1°) $Card\ \Omega = C_{12}^{1} = 12$ et $Card\ A = C_{10}^{1} = 10$ or $P(A) = \frac{Card\ A}{Card\ B}$



2°) Calculons :

- $P(G \cap A)$

$$P(G \cap A) = \frac{10}{12} \times \frac{2}{12} = \frac{20}{144} = \frac{5}{36}$$

- $P(G \cap B)$

$$P(G \cap B) = \frac{2}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{10}{144} = \frac{5}{72}$$

3°) Montrons que $P(G) = \frac{5}{24}$

$$P(G) = P(G \cap A) + P(G \cap B) = \frac{5}{36} + \frac{5}{72} = \frac{5}{24}$$

4°) Montrons que A et G sont indépendants

$$P_G^{(A)} = \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{5/36}{5/24} = \frac{5}{36} \times \frac{24}{5} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

xi	*-2*	*3*	*8*	Total
$P(X = xi)$	$\frac{57}{72}$	$\frac{10}{72}$	$\frac{5}{72}$	1

$\boxed{P_G^{(A)} = \frac{2}{3}}$ $P(A \cap G) = \frac{5}{36}$; $P(G) \times P(A) = \frac{25}{144} \Rightarrow P(A \cap G)$

$\neq P(G) \times P(A)$

donc A et G sont indépendants.

5.

a°) Les valeurs prises par X : mise 2€

$A \cap G = 5€ - 2€ = 3€$

$B \cap G = 10€ - 2€ = 8€$

$A \cap \overline{G}$ *ou* $B \cap \overline{G} = 0 - 2€ = -2€$

$\boxed{X = \{-2\,;3\,;8\}}$

b) la loi de probabilité

$P(X = 3) = \frac{5}{36}$ $\qquad P(X = 8) = \frac{5}{72}$

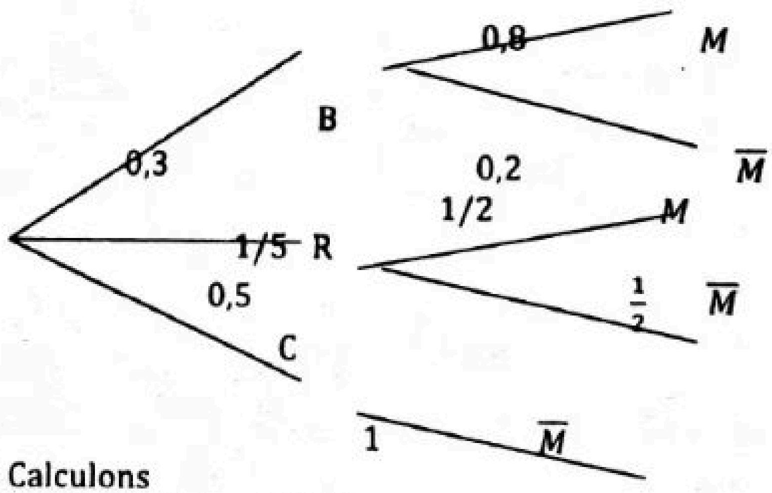
$$P(X = -2) = P(A \cap \overline{G}) + P(B \cap \overline{G}) = \frac{10}{12} \times \frac{10}{12} + \frac{2}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{100}{144} + \frac{14}{144}$$
$$= \frac{57}{72}$$

c°) Déterminons l'espérance mathématique

$$E(X) = \frac{\left(-2 \times \frac{57}{72}\right) + \left(3 \times \frac{10}{72}\right) + \left(8 \times \frac{5}{72}\right)}{72} = -\frac{44}{72} = -\frac{11}{18}$$

exercice 6

1.a) Réalisons un arbre de probabilité :



1.b) Calculons

$P(C) = 1 - (P(B) + P(R)) = 1 - 0,5 = 0,5.$

1.c) Calculons

$P_B^{(M)} = \dfrac{P(B \cap M)}{P(B)} = \dfrac{0,24}{0,3} = 0,8$

1.d) Calculons :

$P(M) = P(B \cap M) + P(R \cap M) = 0,24 + 0,5 \times 0,2 = 0,34$

1.e) Calculons :

$P_M^{(R)} = \dfrac{P(M \cap R)}{P(M)} = \dfrac{0,2 \times 0,5}{0,34} = 0,3$

2.a) Calculons :

$C_3^3(0,34)^3(2 - 0,34)^0$. $\quad P_{(M)} = (0,34)^3 = 0,04$

2.b) Les valeurs prises par X sont : X= {0 ;1 ;2 ;3}

2.c) $P(X = 0) = C_3^0(0,34)^0(2 - 0,34)^3 = 0,29$

$P(X = 1) = C_3^1(0,34)^1(2 - 0,34)^2 = 0,44$

$P(X = 2) = C_3^2(0,34)^2(2 - 0,34)^1 = 0,23$

$P(X = 3) = C_3^3(0,34)^3(2 - 0,34)^0 = 0,04$

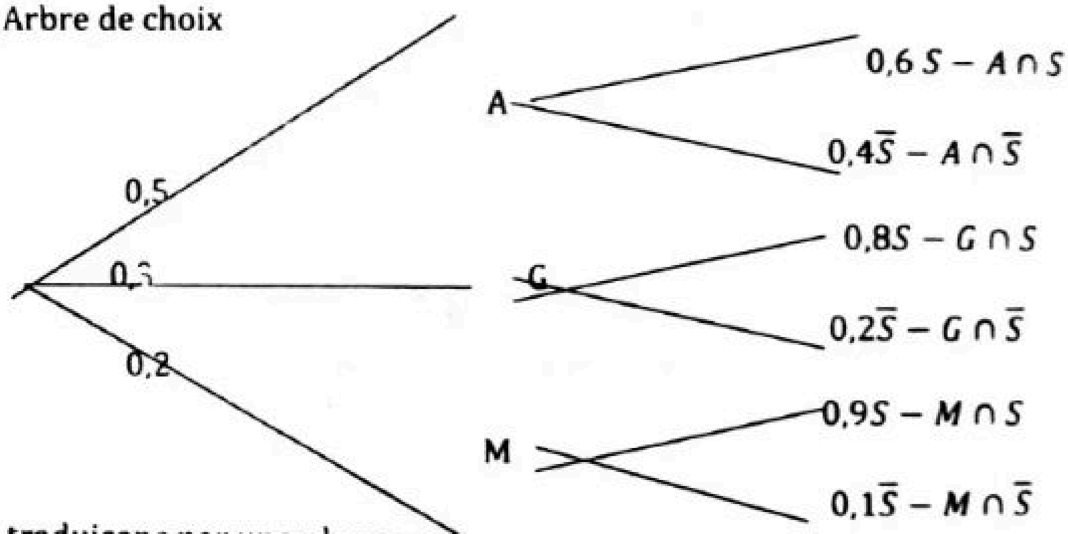
xi	0	1	2	3	Total
$P(X = xi)$	0,29	0,44	0,23	0,04	1

2.d) Calculons l'espérance mathématique :

$E(x) = r\,P = 3 \times 0,34 = 1,02.$ Le jeu est en faveur des étudiants

Exercice 7

1.a) Arbre de choix



2.a) traduisons par une phrase :

$G \cap S$: le client choisi la destination G et est satisfait.

$M \cap S$: Le client choisi la destination M et est satisfait.

Calculons leur probabilité :

$P(G \cap S) = P(G) \times P_G^{(S)} = 0{,}8 \times 0{,}3 = 0{,}24$

$P(M \cap S) = P(M) \times P_M^{(S)} = 0{,}9 \times 0{,}2 = 0{,}18$

2.b) Calculons $P(A \cap S)$:

$P(A \cap S) + P(G \cap S) + P(M \cap S) = 0{,}72 \Longrightarrow$

$P(A \cap S) = 0{,}72 - P(G \cap S) - P(M \cap S) = 0{,}72 - 0{,}24 - 0{,}18 = 0{,}3$

$P(A \cap S) = 0{,}3$

2.c) Déduisons $P_A^{(S)}$:

$$P_A^{(S)} = \frac{P(A \cap S)}{P(A)} = \frac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6$$

3) Déterminons la probabilité qu'il est choisi G :

$$P_s^{(G)} = \frac{P(G \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}24}{0{,}72} = \frac{1}{3}$$

4) Calculons la probabilité de cet évènement :

$P(\overline{S}) = 1 - 0{,}72 = 0{,}28.$

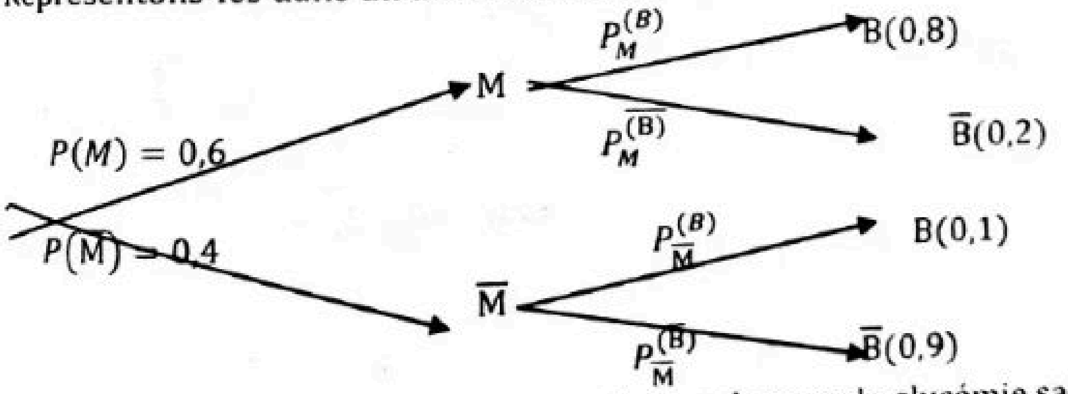
$P(\overline{S} \cap \overline{S} \cap \overline{S}) = 0{,}28 \times 0{,}28 \times 0{,}28 = 0{,}22$

exercice 8

Soit M « les individus qui prennent le médicament » ; $\overline{M}$ « les individus ne prenant pas le médicament »

Soit B « la baisse du taux de glycémie » ; $\overline{B}$ « aucune baisse du taux de glycémie »

Représentons-les dans un arbre de choix :



1) Calculons la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie sachant qu'on a pris le médicament :

$P_M^{(B)} = 0,8$

2) démontrons que la probabilité d'avoir une baisse de glycémie est 0,52 :

$$P(B) = P(B \cap M) + P(B \cap \overline{M}) = P(M) \times P_M^{(B)} + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}^{(B)}$$

$$= (0,6 \times 0,6) + (0,4 \times 0,1) = 0,48 + 0,04$$

$P(B) = 0,52$

3) la probabilité qu'il ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie.

$$P_B^{(M)} = \frac{P(B \cap M)}{P(B)} = \frac{P(M) \times P_M^{(B)}}{P(B)} = \frac{0,6 \times 0,8}{0,52} = 0,92. \quad P_B^{(M)} = 0,92$$

4.a) La probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé :

Ici nous sommes dans un schéma de Bernoulli. Les paramètres sont : $r = 5$ et $k = 2$.

Succès égale à baisse du taux de glycémie ; échec égale à aucune baisse.

$p(\text{succès}) = 0{,}52$ et $q(\text{échec}) = 1 - 0{,}52 = 0{,}48$
$P(X) = C_5^2(0{,}52)^2(0{,}48)^3 = 0{,}3$
4.b) la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé :
$P(X \geq 1) = 1 - C_5^0(0{,}52)^0(0{,}48)^5 = 1 - (0{,}48)^5 = 0{,}97$
5) Déterminons r :
$P(X \geq 1) = 1 - C_r^0(0{,}52)^0(0{,}48)^r > 0{,}98$
$= 1 - (0{,}48)^r > 0{,}98$
$= -(0{,}48)^r > 0{,}98 - 1$
$= -(0{,}48)^r > -0{,}02 \rightarrow (0{,}48)^r > 0{,}02$
$= \ln(0{,}48)^r > \ln 0{,}02 \rightarrow r\ln(0{,}48) > \ln 0{,}02$

$$r > \frac{\ln 0{,}02}{\ln 0{,}48} \rightarrow r > 5{,}32 \quad \text{donc } r > 6$$

__exercice 9__

Les tirages possibles sont : $\{1,2,2\} \times \{4,3\}$
Les valeurs prises par x sont la somme des numéros :
$\Omega(x) = \{4;5;5;6\} = \{4;5;6\}$
$card\,\Omega = C_3^1 \times C_{r+1}^1 = 3 \times (r+1) = 3r+3.$ $\quad card\,\Omega = 3r+3$
1) La loi de probabilité est

$$P(x=4) = \frac{C_1^1 \times C_r^1}{3+3r} = \frac{r}{3+3r}.$$

$$P(x=5) = \frac{C_2^1 \times C_r^1}{3+3r} = \frac{1+2r}{3+3r}$$

$$P(x=6) = \frac{2}{3+3r}$$

Tableau de probabilité :

x	4	5	6	Total
$P(X = xi)$	$\frac{r}{3+3r}$	$\frac{1+2r}{3+3r}$	$\frac{2}{3+3r}$	1

2) Calculons en fonction de r l'espérance mathématique :

$$E(x) = \frac{4r}{3+3r} + \frac{5+10r}{3+3r} + \frac{12}{3+3r} = \frac{14r+17}{3+3r}$$

3) Déterminons r pour que $E(x) = \frac{59}{12}$

$\Rightarrow \frac{14r+17}{3+3r} = \frac{59}{12}$

$\Rightarrow 59(3+3r) = 12(14r+17) \Rightarrow 177r + 177 = 168r + 204$

$\Rightarrow 177r - 168r = 204 - 177 \Rightarrow 9r = 27 \Rightarrow r = \frac{27}{9} \Rightarrow r = 3$

4) Déterminons la plus petite valeur pour laquelle $E(x) < 4{,}8$

$\frac{14r+17}{3+3r} < 4{,}8 \Rightarrow 14r + 17 < 4{,}8(3+3r) \Rightarrow 14r + 17 < 14{,}4 + 14{,}4r$

$\Rightarrow 14r - 14{,}4r < 14{,}4 - 17 \Rightarrow -0{,}4 < -2{,}6 \Rightarrow r > \frac{2{,}6}{0{,}4} \Rightarrow r > 6{,}5 \Rightarrow r$
$= 7$

<u>**exercice 10**</u>

Un cycle d'allumage de feu dure 60s.

$P(v) = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$; $P(j) = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$; $P(r) = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$

1) La probabilité pour que le feu soit vert :

$P(v) = \frac{2}{3}$

2) Déterminons la probabilité pour que l'automobile rencontre exactement 3 fois le feu vert :

$\Rightarrow C_5^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(1-\frac{1}{3}\right)^2 = 10 \times \frac{8}{27} \times \frac{1}{9} = \frac{80}{243}$

3) Les valeurs prisent par X sont :

$X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

La loi de probabilité :

$P(X=0) = C_5^0\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$

$P(X=1) = C_5^1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{10}{243}$

$P(X=2) = C_5^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{40}{243}$

$P(X=3) = C_5^3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{80}{243}$

$P(X=4) = C_5^4\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{80}{243}$

$P(X=5) = C_5^5\left(\frac{2}{5}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{32}{243}$

Tableau de probabilité :

X	0	1	2	3	4	5	Total
$P(X = i)$	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{32}{243}$	1

Calculons l(espérance mathématique :

$E(X) = \frac{10+80+240+320+160}{243} = \frac{810}{243} = 3{,}333$

__exercice 11__

1) Calculons la probabilité de l'apparition de chaque chiffre lorsqu'on lance une fois le dé C :

Soit p la probabilité d'apparition du chiffre 1 :

$\frac{1}{p} + \frac{2}{2p} + \frac{3}{3p} + \frac{4}{4p} + \frac{5}{5p} + \frac{6}{6p}$

Déterminons p :

Posons que : $p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 1$

$$21p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{21}$$

Calculons la probabilité pour chaque chiffre :

$p(1) = 1 \times p = 1 \times \frac{1}{21} = \frac{1}{21}$

$p(2) = \frac{2}{21}$

$p(3) = \frac{3}{21}$

$p(4) = \frac{4}{21}$

$p(5) = \frac{5}{21}$

$p(6) = \frac{6}{21}$

2.a) E_1 « l'apparition sur la face des dés le chiffre 6 »

$p(E_1) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{6}{21} = \frac{12}{756}$

2.b) E_2 « apparition sur la face des dés trois chiffres égaux »

$p(E_2) = \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{21}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{6}{21}\right) = \frac{4}{756} + \frac{12}{756} = \frac{16}{756}$

2.c) E_3 « apparition simultanément des chiffres 1 ; 3 ; 5 sur la face des dés »

$p(E_3) = \left(\frac{1}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{5}{21}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{21}\right) = \frac{20}{756} + \frac{12}{756} = \frac{32}{756}$

3.a) C'est une loi binomiale.

Soit X l'ensemble des valeurs prises par :

6 6 6 6 4

1 6 6 6 3

1 1 6 6 2

1 1 1 6 1

1 1 1 1 0

Donc X prend les valeurs $X(0; 1; 2; 3; 4)$

La loi de probabilité est :

X	0	1	2	3	4	Total
$P(X = xi)$	$\frac{625}{2401}$	$\frac{1000}{2401}$	$\frac{600}{2401}$	$\frac{160}{2401}$	$\frac{16}{2401}$	1

$C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$.

P : succès ; 1-p : échec ; n : nombre de lancer ; k : X

$C_4^0 \left(\frac{6}{21}\right)^0 \left(\frac{15}{21}\right)^4 = \frac{625}{2401}$ et ainsi de suite.

3.a) La variance et l'écart type :

Tout d'abord calculons l'espérance mathématique :

$$\sum_i^n xi\, P(X = xi)$$

$$= \left(0 \times \frac{625}{2401}\right) + \left(\frac{1000}{2401}\right) + 2\left(\frac{600}{2401}\right) + 3\left(\frac{160}{2401}\right) + 4\left(\frac{160}{2401}\right)$$

$$\sum_i^n xi\, P(X = xi) = \frac{2744}{2401}$$

2e méthode : concernant la loi binomiale, l'espérance mathématique devient :

$$\sum_{i}^{n} xi\, P(X = xi) = np = 4 \times \frac{6}{21} = \frac{24}{21}$$

Calculons la variance :

$$V(x) = np \times q = 4 \times \frac{6}{21} \times \frac{15}{21} = \frac{360}{441}$$

Calculons l'écart type :

$$\sqrt{E(X)} = \sqrt{\frac{360}{441}} = 0{,}9$$

EXERCICE NON CORRIGES

EXERCICE 1

La Gendarmerie Nationale essaie un nouvel alcool test dans une population d'automobiliste composée de 8% de personnes ivres. Les caractéristiques de cet alcooltest sont les suivantes :

- 80% des individus sont déclarés positifs par ce test ;
- 95% des individus sobres sont déclarés négatifs par ce test

Un Gendarme contrôle un automobiliste de cette population au hasard. On définit les événements suivants :
T : « l'individu contrôlé est déclaré positif »
I : « l'individu contrôlé est ivre »

1) Tous les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.
   a) Calculer P (I) la probabilité pour que l'individu contrôlé soit ivre
   b) Montrer que la probabilité pour que l'individu soit positif P(T) $=\frac{11}{100}$
   c) Calculer P(t)(I) la probabilité pour que l'automobiliste soit ivre sachant que qu'il est contrôlé négatif.
2) Tout automobiliste déclaré positif par ce test doit payer une pénalité de 1.500 f.
   5 automobilistes de la population étudiée ont subi successivement ce test. On note X la variable désignant la somme totale des pénalités reçue par un contrôleur.
   a) Donne l'ensemble des valeurs prises par X
   b) Déterminer la loi de probabilité de X (les probabilités seront données sous forme d'un nombre décimal ayant 3 chiffres après la virgule).
   c) Déterminer l'espérance mathématique de X
   d) Tracer la représentation graphique de la fonction de répartition de X
3- On contrôle n automobilistes dans la journée.
   c- calculer en fonction de n la probabilité Pn pour qu'au moins un automobiliste soit déclaré positif
   d- Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle Pn≥.0,99

Exercice 2 :

Dans ce problème, les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Une jeune fille se rend chez un charlatan avant son départ pour l'étranger afin de savoir si l'avenir lui réserve un mari, un travail, un enfant. Le charlatan choisi à cet effet trois cauris : un gros, représentant un mari, un moyen représentant un travail et un petit représentant un enfant. Chaque cauris présent deux faces : l'une appelée **dos** et l'autre **ventre**. On dira que vous avez de la chance si le cauris lancé atterrit sur le **dos** dans le cas contraire on dira que vous avez un malheur. A chaque lancé, le gros cauris a une chance sur trois, le cauris moyen a trois chance sur quatre et le petit a une chance sur deux d'atterrir sur le **dos**. Pour la consultation, le charlatan fait un cercle de protection sur le sol, lance simultanément les trois cauris et interprète ensuite leurs positions au sol. Selon la science du charlatan, si un cauris sort du cercle de protection alors l'évènement qu'il défini est compromis ou favorisé par des forces du mal. Il faut donc faire un sacrifice pour conjurer le mauvais sort.

1- On notera :M l'évènement «le gros cauris atterrit sur le dos» et $\bar{M}$ son contraire.

T l'évènement «le cauris moyen atterrit sur le dos» et $\bar{T}$ son contraire

E l'évènement «le petit cauris atterrit sur le dos» et $\bar{E}$ son contraire

a) Déterminer P(M), P(T) et P(E)

b) En déduire $P(\bar{M})$, $P(\bar{T})$ et $P(\bar{E})$

2- On suppose que tous les cauris restent dans le cercle de protection ;

a) Déterminer la probabilité pour la jeune fille d'avoir à la fois un mari, un travail et un enfant.

b) Soit les évènements suivants :

A : «la jeune fille aura un travail»

B : «la jeune fille aura un mari»

C : «la jeune fille aura un enfant»

Calculer P(A) , P(B) et P(c) ; en déduire l'évènement le moins probable.

3- On suppose que la probabilité pour chaque cauris de sortir du cercle de protection lors de la consultation est proportionnelle à son poids.

Le gros cauris pèse 10 grammes, le cauris moyen pèse 5 grammes et le petit pèse 3 grammes. Désignons par X la variable aléatoire définissant le nombre de cauris sortis du cercle de protection pendant la consultation. Notons P_1=m ($0 \leq m \leq 1$) la probabilité avec laquelle le gros cauris sort du cercle de protection et on donne l'espérance mathématique de X est $E(x) = \frac{9m}{5}$.

a) déterminer m pour que E(x)=1

On suppose que $P_1 = \frac{5}{9}$ et que el petit cauris est le seul cauris resté à l'intérieur du cercle de protection.

Soit l'évènement D : «la jeune fille aura un mari et un travail à condition qu'elle accepte de faire les deux sacrifices demandés mais elle n'aura pas d'enfant»

b) Démontrer que P(D)= $\frac{125}{7776}$

c) Le charlatan reprend cinq fois de suite la consultation afin d'éviter des erreurs de jugement ; Calculer la probabilité d'obtenir trois fois l'évènement D.

EXERCICE 3

On lance de façon indépendante deux dés, parfaitement équilibrés, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par X et Y les variables aléatoires représentant les numéros apparaissant respectivement sur chaque dé. On note $\{X \leq 2\}$ l'événement << le numéro apparaissant sur le dé>> est inférieur ou égale à 2 et $P(X \leq 2)$ la probabilité de cet événement. Soit $Z = \max(X, Y)$ la variable aléatoire représentant le plus grand des deux nombres figurant sur les deux dés. Si les deux dés affichent le même nombre, Z prend pour valeur ce nombre. On désigne par n, un entier compris entre 1 et 6.

1- Calculer la probabilité des événements suivants :

a- $\{X \leq 2\}$

b- $\{Z = 2\}$

2-

a- Calculer la probabilité des événements suivants :

$\{Z \leq n\}$

$\{Z \geq 4\}$

$\{Z > 3\}$

b- Que représente l'événement $\{Z \geq 4\} \cap \{Z > 3\}$? En déduire la probabilité de l'événement $\{Z = 4\}$.

3-

a- Justifier la formule $P(Z = n) = P(Z \leq n) - P(Z \leq n - 1)$

b- Calculer en fonction de n la probabilité de l'événement $\{Z = n\}$

4- Etablir la loi de probabilité de Z. Calculer son espérance mathématique.

SUITE NUMERIQUE

Définition : Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

- Si la suite est définie sur une partie I de $\mathbb{N}$, elle est dite suite réelle et par abus de notation on la désigne souvent par (U_n)avec $n \in$ I.
- La suite est dite suite finie si I est finie c'est-à-dire connue et bornée.

(1) Suite constante

$\{n, n+1\} \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n \Leftrightarrow U_{n+1} - U_n = 0$ alors la suite est constante.

(2) Suite croissante

$\{n, n+1\} \in \mathbb{N}, U_{n+1} \geq U_n \Rightarrow\ U_{n+1} - U_n \geq 0$ alors la suite est croissante.

(3) Suite décroissante

$\{n, n+1\} \in \mathbb{N}, U_{n+1} \leq U_n \Rightarrow\ U_{n+1} - U_n \leq 0$ alors la suite est décroissante

(4) Suite minorée

$b \in \mathbb{R}, \forall n \in I \subset \mathbb{N}, U_n \geq b$ alors la suite est minorée.

(5) Suite majorée

$b \in \mathbb{R}, \forall n \in I \subset \mathbb{N}, U_n \leq b$ alors la suite est majorée.

(6) Suite arithmétique

$\{\ldots..\} \in \mathbb{R}$, une suite est arithmétique si :$U_{n+1} = U_n + r,\ r \in \mathbb{R}$

Valeur intermédiaire d'une suite arithmétique :

$$\left(\begin{cases} U_{n+1} - U_n = r \\ U_n - U_{n-1} = r \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} U_n = U_{n+1} - r \\ U_n = U_{n-1} + r \end{cases}\right) \Leftrightarrow U_n = \frac{U_{n+1} + U_{n-1}}{2}$$

Convergence d'une suite arithmétique :

- Si $r > 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (U_n) = +\infty$
- Si $r < 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (U_n) = -\infty$

(7) <u>Suite géométrique</u> :

$\{n, n+1\} \in \mathbb{N}$, une suite est géométrique si $U_{n+1} = qU_n$, $q \in \mathbb{R}$

Valeur intermédiaire :

$$\left(\begin{cases} U_{n+1} = qU_n \\ U_n = qU_{n-1} \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} U_n = \dfrac{U_{n+1}}{q} \\ U_n = qU_{n-1} \end{cases}\right) \Leftrightarrow U_n^2 = U_{n+1} \times U_{n-1}$$

(P1): $\forall x \in \mathbb{N}$, $U_n = q^n U_0$

(P2): $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n = U_0 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

Convergence :

LEMME: si $|q| > 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} |q|^n = +\infty$

Si $|q| < 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} |q|^n = 0$

EXERCICES

EXERCICE 1

Soit la suite définie $(U_n)\ n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{3}{5}U_n + 1 \end{cases}$

1.Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ;I ;J) ,représenter sur l'axe des abscisse les termes $U_0 U_1 U_2$ et U_3 de la suite $(U_n)\ n \in \mathbb{N}$ (unité du graphique 2cm).

2.a Démontrer par récurrence que la suite $(U_n)\ n \in \mathbb{N}$ est majorée par $\frac{5}{2}$.

Démontrer que la suite $(U_n)\ n \in \mathbb{N}$ converge.

3. Soit la suite $(V_n)\ n \in \mathbb{N}$ definie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, V_n = U_n - \frac{5}{2}$$

a. Démontrer que la suite $(V_n)\ n \in \mathbb{N}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

b Exprimer V_n et U_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de $(U_n)\ n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE2 pour comprendre tous sur les suites

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J) soit f une fonction définie sur $=]-2;+\infty[$ par :

$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ et de représentation graphique *(c)*.

1) Etudier les variations de f et construis (c).
2) Calculer les coordonnées du point d'intersection de (c) et la droite d'équation $y{=}x$ sur $]0;+\infty[$.
3) On considère la fonction numérique (U) définie par : $\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n+1}{U_n+2} \end{cases}$
   a) Représenter sur l'axe (OI) les termes U_1; U_2 et U_3 de la suite U a l'aide de (c) et de la droite (D) d'équation y=x.
   b) Etudier graphiquement les propriétés de cette suite (variation, bornes et convergences).

4.a) Démontrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; $0 \leq U_n \leq 1$

b) Démontrer que

$\forall n \in \mathbb{N}*; U_{n+1} - U_n = \frac{1-U_n{}^2}{U_n+2}$ et en déduire les variations de suite U

C) Démontrer que la suite U est convergente

5) V est une suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}*;\ V_n = \frac{U_n-1}{U_n+1}$

a) Démontrer que V est une suite géométrique de raison 1/3 puis préciser son premier terme.

b) Exprimer V_n en fonction de n puis justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}*;\ U_n = \frac{1-(\frac{1}{3})^{n-1}}{1+(\frac{1}{3})^{n-1}}$$

c) Déterminer la limite de la suite U puis celle de v

d)On pose $\forall n \in \mathbb{N}*$ $\quad Sn = V1 + V2 + \cdots Vn$ Exprimer sn en fonction en de n

EXERCICE 3

On considère la suite (U_n) definie par : $\begin{cases} U_0 = 5 \\ 3U_{n+1} = U_n + 4 \end{cases}$

1) calculer U_1 et U_2.
2) Démontrer que pour tous nombre entier naturel n $\quad U_n \geq 2$.
3) Montrer que (U_n) est une suite decroissante.
4) Montrer que la suite (U_n) est convergente et determiner sa limite
5) On pose pour tous nombre entier naturel $V_n = U_n - 2$.
   Montrer que (V_n) est une suite géometrique et deduire l'expression de V_n en fonction de n
6) Soit $S_n = V_0 + V_1 + \cdots. + V_n$ et $T_n = U_0 + U_1 \ldots. + U_n$.
   Déterminer la l'expression de S_n et l'expression de T_n en fonction de n. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ et $\lim T_n$

CAS PRATIQUE DE SUITE :

La production d'une entreprise est de 8000 unités à la fin de sa première année de fonctionnement.

1) On suppose que sa production augmente du même nombre d'unités chaque année.
   a) Si ce nombre est de 400 unités par an,
      I. Combien d'unités produira t-elle à la 7ème année ?

II. Quelle est la production totale des 10 premières années ?

b) Si par contre, elle a produit 9 500 unités la 6ème année,

I. De combien d'unités la production a-t-elle régulièrement augmenté chaque année ?

II. Au bout de combien d'années la production s'élèvera-t-elle 10 700 unités ?

2) On admet maintenant que la production de l'entreprise croit annuellement de 5%

a) Combien d'unités produira-t-elle la 5ème année ?

b) Quelle est la production totale des 5 premières années ?

c) Au bout de combien d'années la production aura-t-elle doublé ?

3) On désigne par p le prix de vente unitaire de l'article fabriqué. Une analyse théorique a permis de supposer que la quantité demandée de cet article variait en fonction du prix de vente p selon la relation

$$q = \frac{p^3}{3} - 20p^2 + 75p + 8000$$

a) Etudier les variations de cette fonction

b) Vous paraît-il vraisemblable que cette fonction soit valable

c)

d)

e) pour n'importe quelle valeur de p ? Justifier votre réponse.

CORRECTIONS DES EXERCICES

EXERCICE 1

1. Voir figure
2. 2.a démonstration par récurrence que $(U_n)\ n\ \epsilon\ \mathbb{N}$ est majoré par $\frac{5}{2}$.

   $U_0 = 0$ donc $U_0 = 0 < \frac{5}{2}$ est vrai.

   On suppose pour tous nombre entiers k, $U_k < \frac{5}{2}$. Et ensuite montrons que $U_{k+1} < \frac{5}{2}$.

   On a : $U_k < \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{5}U_k < \frac{3}{2}$

   $\Leftrightarrow \frac{3}{5}U_k+1<\frac{3}{2}+1$

   $\Leftrightarrow \frac{3}{5}U_k+1<\frac{5}{2}$. Donc $U_{k+1} < \frac{5}{2}$ Alors on en deduis que pour tous nombre entier naturel, la suite (U) est majorée par $\frac{5}{2}$.

   b. Demontrer que la suite $(U_n)\ n\ \epsilon\ \mathbb{N}$ converge

   Pour cela étudions la variation de la suite (U).

   $U_{n+1} - U_n = \frac{3}{5}U_n + 1 - U_n = -\frac{2}{5}U_n+1.$

   Or d'après la question précédente $U_n < \frac{5}{2}$

   Ce qui implique que $-2U_n > -2 \times \frac{5}{-2} \Leftrightarrow -\frac{2}{5}U_n > -1 \Leftrightarrow -\frac{2}{5}U_n+1> 0.$

   Donc pour tous nombres entiers naturels $U_{n+1} - U_n > 0$ alors la suite (U_n) est croissante. Comme la suite (U_n) est croissante et majorée alors elle converge.
3. Démontrons que la suite $(V_n)\ n\ \epsilon\ \mathbb{N}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

On a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, V_n = U_n - \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow V_{n+1} = U_{n+1} - \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_{n+1} = \frac{3}{5}U_n + 1 - \frac{5}{2}$$

$\Leftrightarrow V_{n+1} = \frac{3}{5}U_n - \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow V_{n+1} = \frac{3}{5}(U_n - \frac{5}{2})$ Or $V_n = U_n - \frac{5}{2}$ donc

$\Leftrightarrow V_{n+1} = \frac{3}{5}V_n$ .Alors (V_n)

Est une suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$et de premier terme

$V_0 = U_0 - \frac{5}{2} = 0 - \frac{5}{2} = -\frac{5}{2}$.

b. Exprimons V_n et U_n fonction n.

comme Alors (V_n)

Est une suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$et de premier terme

$V_0 = -\frac{5}{2}$.

$V_n = V_0 q^n = -\frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ et on a

$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_n - \frac{5}{2} \Leftrightarrow U_n = V_n + \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow U_n == -\frac{5}{2}(\frac{3}{5})^n + \frac{5}{2}$.

détermination de la limite.

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} -\frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$$

car $-1 < \frac{3}{5} < 1$

Et $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} = -\frac{5}{2}(\frac{3}{5})^n + \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$ car $\lim_{n\to\infty} -\frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$.

EXERCICE2

1.) Etudions les variations de f et construisons (cf).

On a $\forall x \in]-2;+\infty[\ f'(x) = \frac{2x+1}{x+2}$

Donc $\forall x \in]-2;+\infty[, f'(x) = \frac{(2x+1)'(x+2)-(2x+1)(x+2)'}{(x+2)^2}$

$= \frac{3}{(x+2)^2}$

$\forall x \in]-2;+\infty[, \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ donc f est strictement croissant sur $]-2;+\infty[$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}} f(x) = -\infty$

Tableau de variation.

X	-2	$+\infty$
f'(x)	+	
f	$-\infty$ ↗	2

Construction.

2.) Calculons les coordonnées d'intersection de (cf) *et* la droite d'équation $y=x$ sur $]0;+\infty[$.

On $]0;+\infty[, f(x) = x \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x+2} = x \Leftrightarrow 2x+1 = x^2+2x$

$\Leftrightarrow x^2 - 1$ comme nous sommes sur$]0;+\infty[$. Alors x=1 . donc le point d'interception est $A\binom{1}{1}$.

3.) On considère la suite numérique U définie par :

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n+1}{U_n+2} \ (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

Représentation.........

b) Graphiquement U est croissant et bornée par 1 , donc U converge.

4.a) Démontrons par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq U_n \leq 1$.

On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \frac{2U_n+1}{U_n+2} = 2 - \frac{3}{U_n+2}$ (division Euclidienne).

On a : $U_1 = 0$, donc $0 \leq U_1 \leq 1$ est vrai !

Soit k un nombre entier naturel non nul tel que : $0 \leq U_k \leq 1$

Montrons que $0 \leq U_{k+1} \leq 1$.

Démonstration.

On a : $0 \leq U_k \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq U_k + 2 \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{U_k+2} \geq \frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{-3}{2} \leq -\frac{1}{U_k+2} \leq -\frac{3}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{3}{2} \leq 2 - \frac{1}{U_k+2} \leq 2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 2 - \frac{1}{U_k+2} \leq 1 \qquad \text{or } \frac{1}{2} > 0\,.$$

Donc $0 \leq U_{k+1} \leq 1$. Alors $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq U_n \leq 1$.

On a $U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n+1}{U_n+2} - U_n = \frac{2U_n+1-U_n^2-2U_n}{U_n+2}$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1-U_n{}^2}{U_n+2}.$$

Et de plus $U_n + 2 \geq 2$ et , $0 \leq U_n \leq 1$, donc , $0 \leq 1 - U_n{}^2 \leq 1$.

Alors $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} - U_n \geq 0$. Alors U est croissante.

C.) comme U est croissante et majorée par 1 alors U converge.

5.a) Montrons que V est une suite géométrique de raison 1/3 .

On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+1}$

Et , $V_{n+1} = \frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+1}$

$$= \frac{\frac{2U_n+1}{U_n+2} - 1}{\frac{2U_n+1}{U_n+2} + 1}$$

$$= \frac{\frac{2U_n+1-U_n-2}{U_n+2}}{\frac{2U_n+1+U_n+2}{U_n+2}}$$

$$= \frac{\frac{U_n-1}{U_n+2}}{\frac{3U_n+3}{U_n+2}}$$

$$= \frac{U_n - 1}{U_n + 2} \times \frac{U_n + 2}{3U_n + 3}$$

$$= \frac{U_n-1}{3U_n+3}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$$

or , $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+2}$ donc , $V_{n+1} = \frac{1}{3} \times V_n$

Alors V est suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme

$V_1 = \frac{U_1-1}{U_1+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$. .

b). comme V est une suite géométrique alors $V_n = (-1) \times (\frac{1}{3})^{n-1}$

a) : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $Sn = V_1 \frac{1-(\frac{1}{3})^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}$ car *Sn est la somme des termes d'une suite géométriques*

et On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+1} \Leftrightarrow V_n(U_n + 1) = U_n - 1$

$$\Leftrightarrow V_n U_n + U_n = -1 - V_n$$

$$\Leftrightarrow U_n(V_n + 1) = -(1 + V_n)$$

$$\Leftrightarrow U_n = -\frac{1+V_n}{V_n+1} = \frac{1+V_n}{1-V_n} \text{ Or } V_n = -(\frac{1}{3})^{n-1}.$$

Donc $U_n = \frac{1-(\frac{1}{3})^{n-1}}{1+(\frac{1}{3})^{n-1}}$.

C). La limite de U.

$$\lim_{n\to+\infty} U = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - (\frac{1}{3})^{n-1}}{1 + (\frac{1}{3})^{n-1}} = 1$$

car $\lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{3})^{n-1} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} U = 1$

EXERCICE 3

(u_n) est définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad 3u_{n+1} = u_n + 4$

1) On a $3u_1 = u_0 + 4$ donc $3u_1 = 5 + 4 = 9$ donc $u_1 = 3$

et $\quad 3u_2 = u_1 + 4 = 3 + 4 = 7$ donc $u_2 = \frac{7}{3}$.

2) On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n : $u_n \geq 2$

On a $u_0 = 5$ donc $u_0 \geq 2$, donc P_0 est vraie.

Supposons que P_n est vraie pour un entier $n \geq 0$.

On a alors $u_n \geq 2$ donc $u_n + 4 \geq 6$ donc $3u_{n+1} \geq 6$ donc $u_{n+1} \geq 2$ (on peut diviser par 3 car $3 > 0$)

C'est-à-dire P_{n+1} est vraie.

On a donc démontré par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \geq 0$.

On a donc $u_n \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $3u_{n+1} = u_n + 4$, donc $u_{n+1} = \frac{u_n+4}{3}$

$$\text{donc } u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 4}{3} - u_n = \frac{u_n + 4 - 3u_n}{3} = \frac{-2u_n + 4}{3}$$

On a vu dans la question précédente que $u_n \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $2u_n \geq 4$, donc $0 \geq -2u_n + 4$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que la suite (u_n) est décroissante.

Remarque : on peut aussi démontrer que (u_n) est décroissante en démontrant par récurrence que $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) (u_n) est une suite décroissante et minorée par 2, donc (u_n) est une suite convergente.

Soit $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ on a aussi $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1}$

Sachant que $3u_{n+1} = u_n + 4$, on a $3 \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n + 4$

Donc $3l = l + 4$, c'est-à-dire $2l = 4$ donc $l = 2$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = u_n - 2$

Donc $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{u_n+4}{3} - 2 = \frac{u_n+4-6}{3} = \frac{u_n-2}{3} = \frac{v_n}{3}$

On a donc $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

(v_n) étant une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Avec $v_0 = u_0 - 2 = 5 - 2 = 3$, on a donc :

$v_n = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6) $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

$$= v_0\left[1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

On sait que si $q \neq 1$ on a $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Donc $1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$

On a alors : $S_n = v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$ donc $S_n = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$

On obtient $S_n = \frac{9}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + \cdots + (v_n + 2)$

$= v_0 + v_1 + \cdots + v_n + 2(n+1)$. alors $T_n = S_n + 2(n+1)$

donc $T_n = \frac{9}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) + 2(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7) On sait que $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{3} < 1$.

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{3^{n+1}} = 1$

donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{9}{2}$. d'autre part $\lim_{n\to+\infty} 2(n+1) = +\infty$

alors $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$

CAS PRATIQUE

1) On suppose que la productions augmente du même nombre d'unité chaque année.

Ceci traduit que $u_k$est le premier terme et r le montant de l'augmentation.

On a :

$$u_{k+1} = u_k + r$$
$$u_{k+2} = u_{k+1} + r$$
$$= u_k + 2r$$

Donc au rang n $u_{r+1} = u_r + (n-k)r$ alors c'est une suite arithmétique de raison r.

1.a)

I) r = 400 ; P_1 la production de la première année et $P_n$la production de l'année n : On a :

$p_n = p_1 + (n-1)r = 8000 + (n-1) \times 400 = 7600 + 400n$

Alors $p_7 = 7600 + 400 \times 7 \Rightarrow p_7 = 10400$ unités

II) Calculons la production total des 10 première année : On a :$p_{10} = 7600 + 400 \times 10$

$p_{10} = 11600$

$$\sum_{i=1}^{10} = (10-1+1)/2 \times (p_{10} + p_1) = 10(8000 + 11600)$$
$$= 98000 \text{ unités}$$

1°b)

I)$p_6 = 8000 + 5r = 9500 \Rightarrow r = 300$

Donc la production augmente régulièrement de 300 unités dialogue année.

II) On $p_n = 8000 + (n-1) \times 300 = 10700 \Rightarrow n = 10\ ans$

Donc c'est à la 10ème année que la production s'élèvera à 10700 unités.

2)La croissance est de 5% :

On a $p_1 = 8000$; $p_2 = p_1 + 0{,}05p_1$;

$$p_3 = p_2 + 0{,}05p_1 = (1{,}05)^2 p_1\ ;\ \ p_n = (1{,}05)^{n-1} p_1$$

Donc c'est une suite géométrique de raison (1,05) et de premier terme p_1

I)$p_5 = 1{,}05^{5-1} \times p_1 = 1{,}05^4 \times 8000 = 9724{,}05$ unités

II) La production totale sur 5ans :

$$\sum_{n=1}^{5} = \frac{(1{,}05)^5 - 1}{1{,}05 - 1} \times p_1 = 44205{,}05$$

Donc la production totale des 5 premières années est de 44205,05 unités.

III)

$$p_n = (1{,}05)^n \times 8000 = 2p_1 \Rightarrow (1{,}05)^n = 2 \Rightarrow n = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}05)} \Rightarrow$$

$n = 14{,}206$

Donc c'est au cours de la 15ème année que la production sera doublée.

EXERCICE NON RESOLUS

Exercice 1:

On définie une suite $u_n$par $u_0 = -3$et pour tout entier naturel $n$par$u_{n+1} = \frac{u_n-8}{2u_n-9}$.

1-a) Représenter graphiquement la fonction f définie pout tout réel $x \neq \frac{9}{2}$par $f(x) = \frac{x-8}{2x-9}$

1-b) Utiliser cette représentation graphique pour conjecturer le comportement de la suite u_n

2)Démontrer par récurrence que pour tout n on a $u_n < 1$

3) démontrer que la suite $u_n$est croissante.

4) Déduire des questions précédentes que la suite $u_n$convergente.

5-a) On définit une suite $u_n$par$v_n = 1 - u_n$. Démontrer que pour tout n on a $v_{n+1} < \frac{1}{7} v_n$

5-b) En déduire la limite de la suitev_n

5-c) Quelle est la limite de la suite ?

6) Trouvez un entier naturel N tel que pour tout n>N on ait $u_n >$ 0,99.

Exercice 6 :

Soit v_n une suite numérique définie par

$v_0 = 0{,}5$et$v_{n+1} = \frac{2v_n+1}{v_n+2}$

1-a) Démontrer que $v_n > 0$

1-b) Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad |v_n - 1| = \frac{|v_{n-1}-1|}{|v_{n-1}+2|}$

2)Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^* |v_n - 1| \leq \frac{|v_{n-1}-1|}{2}$

3-a) Exprimer $|v_n - 1|$ en fonction de n

3-b) On considère la suite numérique w_n définie par $w_n = |v_n - 1|$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} w_n$

3-c) Déduire que la suite v_na pour limite 1.

EXERCICE 7 :

Soient les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 1$, $V_0 = 8$ et pour tout n élément de $\mathbb{N}$,

$$U_{n+1} = \frac{(2U_n + V_n)}{3} \qquad V_{n+1} = \frac{(U_n + 3V_n)}{4} \qquad W_n = V_n - U_n$$

1- Calculer U_1 *et* V_1

2-

a- Démontrer que (W_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison q.

b- En déduire une expression de W_n en fonction de n, puis que pour tout n de $\mathbb{N}$, $W_n > 0$.

c- Calculer la limite de la suite (W_n).

3-

a- Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = \frac{W_n}{3}$ et $V_{n+1} - V_n = \frac{-W_n}{4}$

b- En déduire les variations des suites (U_n) et (V_n).

c- Démontrer que pour tout n élément de $\mathbb{N}$,

$$U_0 < U_n < V_n < V_0$$

d- Déduire que les suites sont convergentes.

4-

a- Déduire de la question 3-a que pour tout n élément de $\mathbb{N}$,

$$U_n - U_0 = \frac{1}{3}(W_0 + W_1 + \cdots + W_{n-1})$$

b- En déduire la limite des suites (U_n) et (V_n).

EQUATION DIFFERENTIELLES

DEFINITION

On appelle équation différentielle toute équation ayant pour inconnue une fonction et dans laquelle figure au moins une des dérivée successive de la fonction inconnue ;la ,fonction inconnue est souvent notée f et ses dérivé successives ;f' ;f '' f'''............

RESOLUTION D'EQUATION DIFFERENTIELLE

1. Equation du type f'-af=o , (a ∈ ℝ)

Soit (E) l'équation différentielle : f'-af = o ,(a ∈ ℝ) ;les seules solutions de (E) sont les fonction de ℝ ⟶ ℝ : x⟶ $ke^{ax}; k \in \mathbb{R}$

2. Equation différentielle du type :f''-a²f=0

Soit (E) l'équation différentielle : :f''-af=0 ; ,(a ∈ ℝ) . les seules solution de (E) sont les fonctions définie de ℝ $vers$ ℝ : x⟶ Ae^{ax}+Be^{-ax} (A∈ ℝ , $B \in$ ℝ) ,si l'équation est sous la forme :f''+a²f=0 les solution sont de la forme : $A\cos ax + B\sin ax$

Exercice : On considère l'équation différentielle

(E) : $2y' + 3y = 6x^2 - 7x + 2$ ainsi que

(F) :$2y' + 3y = 0$

a) Montrer que l'équation (E) : admet une solution g polynôme du second degré.
b) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si (f −g) est solution de (F).
c) Résoudre l'équation (F).

d) En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

Correction:

a) On cherche une solution de (E) sous la forme $g(x) = ax^2 + bx + c$, alors g est une solution de (E) si et seulement si :

$$4ax + 2b + 3ax^2 + bx + 3c = 6x^2 - 7x + 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 6 \\ 4a + 3b = -7 \\ 2b + 3c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2 \quad b = -5 \quad c = 4$$

En conclusion la fonction $g(x) = 2x^2 - 5x + 4$ est une solution de l'équation (E).

b) f −g est solution de (F) si et seulement si $2(f - g)' + 3(f - g) = 0 \Leftrightarrow 2f' + 3f = 2g' + 3g$ or g est solution de (F) donc $2g' + 3g = 6x^2 - 7x + 2$ d'où $f - g$ est solution de (F) si et seulement si $2f' + 3f = 6x^2 - 7x + 2$. Donc $f - g$ est solution de (F) si et seulement si f est solution de (E).

c)La solution générale de l'équation (F) est donnée par $y(x) = Ce^{-\frac{3}{2}x}$

d) f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (F), donc si et seulement si

$f(x) - g(x) = Ce^{-\frac{3}{2}x} \Leftrightarrow f(x) = g(x) + Ce^{-\frac{3}{2}x}$.

Toutes les solutions de (E) sont donc de la forme

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 4Ce^{-\frac{3}{2}x}$$

EXERCICE :

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - y = 4 \times e^x$

1- Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie par $g(x) = (ax^2 + bx)e^x$ soit solution de (E).

2- Soit f une fonction numérique définie IR. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E'): $y'' - y = 0$

3- Résoudre (E') puis en déduire la solution générale de (E)

4- Déterminer la fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$

Correction :

(E): $y'' - y = 4$

1- Déterminons a et b pour que la fonction g définie par

2- $g(x) = (ax^2 + bx)e^x$

$$g'(x) = (ax^2 + bx)'e^x + e^x(ax^2 + bx)$$
$$= (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx)e^x$$

On a :

$$g''(x) = [(2ax + b)e^x + (ax^2 + bx)e^x]$$
$$= [2ae^x + e^x(2ax + b)] + [(2ax + b)e^x + (ax^2 + bx)e^x]$$
$$= 2ae^x + 2axe^x + be^x + 2axe^x + be^x + ax^2e^x + bxe^x$$
$$= 4axe^x + 2be^x + 2ae^x + ax^2e^x + bxe^x$$
$$g''(x) = (4ax + 2b + 2a + ax^2 + bx)e^x$$

On obtient que :

$$g''(x) - g(x) = (4ax + 2b + 2a)e^x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4ax + 2b + 2a = 4x \\ 2ax + b + a = 2x \end{cases} \quad \text{Donc} \begin{cases} 2a = 2 \\ b + a = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

3- Démontrons que f est solution de (E) ssi $f - g$ est solution de (E'): $y'' - y = 0$

LES SIX DERNIERS SUJETS DU BAC D ENTIEREMENT CORRIGES

BAC D session 2010

EXERCICE 1

Partie A :

On considère dans C : l'équation :

(E) : $4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})z - 4 = 0$

1. Déterminer les racines carrées de $6 + 6i\sqrt{3}$
2. Résoudre dans C : l'équation $2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4 = 0$
3. a. Développer, réduire et ordonner $(2z + 1)[2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4]$
   b. En déduire les solutions de (E)
4. soit $z_0 = -\frac{1}{2}$; $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

Exprimer chacun des nombres complexes z_0; z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

Partie B :

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ où l'unité est 1 cm, on considère les points M_0 ; M_1 et M_2 d'affixes respectives $-\frac{1}{2}$;

$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$; $1 + i\sqrt{3}$

S est la similitude directe de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2.

1. a. Déterminer l'écriture complexe de S.
   b) Justifier que $S(M_0) = M_1$ et $S(M_1) = M_2$
2. soit M_n un point du plan d'affixe Z_n

On pose pour tout nombre entier naturel n, $M_{n+1} = S(M_n)$

Justifier que $Z_{n+1} = (1 - \sqrt{3}i)Z_n$ où Z_{n+1} est l'affixe de M_{n+1}

3. on considère la suite U_n définie pour tout entier n naturel $U_n = |Z_n|$
   a. démontrer que U_n est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme
   b. Justifier que la distance $OM_{12} = 2048$

EXERCICE 2

On teste un Médicament sur un ensemble d'Individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé.

Pour cela, 60% des Individus prennent les médicaments, les autres recevant une substance neutre et l'on étudie à l'aide d'un teste la baisse de ce taux avec une probabilité de 0,8.

On ne constate aucune baisse de ce taux pour 90% des personnes ayant reçu la substance neutre

1. Calculer la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie sachant qu'on a pris le médicament.
2. Démontrer que la probabilité une baisse du taux de glycémie est 0,52.
3 .On soumet au test un individu pris au hasard.

   Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament sachant que l'on

   Constate une baisse de son taux de glycémie.

4. On contrôle 5 individus au hasard.

a. quelle est la probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé.

b. quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé

5. On contrôle n individus pris au hasard. (n est un entier naturel non nul). Déterminer n pour que la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie ait baissé soit supérieur à 0,98.

PROBLEME

PARTIE A

Soit la fonction g dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par $g(x) = 1 + x\ln x$

1. a. Justifier que :$\forall x \in]0;+\infty[\,, g'(x) = 1 + \ln x$

   b. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation. (On ne calculera pas les limites de g)

2. En déduire que :$\forall x \in]0;+\infty[\,, g(x) > 0$

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = \frac{x}{1+x\ln x} \end{cases}$

On note (C), la courbe présentatrice de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), (Unité : 4cm).

1. a. Etudier la continuité de f en 0

b. Etudier la dérivabilité de f en O

c. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point O est : $y = x$

d. Démontrer que :

(C) est au-dessus de (T) sur $]0; 1[$

(C) est au-dessous de (T) sur $]1; +\infty[$

2. Démontrer que la droite (OI) est une asymptote à (C) en $+\infty$

3. a On suppose que f est dérivable sur $]0; +\infty[$:

Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[\ , f'(x) = \frac{1-x}{(1+x\ln x)^2}$

b. En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.

4. Construire la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, I, J)

Partie C :

1. a. Justifier que : $\forall\, x \in]0; +\infty[\ , f(x) \leq 1$

b. Démontrer que : $\forall x \in [1; e], 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$

2. Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), (OI) et les droites d'équations x=1 et x=e

Démontrer que : $16(e-1) + 16\ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq A \leq 16(e-1)$

BAC D session 2011

EXERCICE 1

On considère la suite numérique (V_n) définie sur $\mathbb{N}*$ par $V_n = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$

1. a. Démontrer que la suite(V_n)est convergente après avoir déterminé sa limite.

b. Démontrer que la suite(V_n)est croissante.

c. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}*, \frac{3}{4} \leq V_n < 1$

2. On pose pour tout entier naturel non nul $n, a_n = V_1 \times V_2 \times ... \times V_n$

a. Démontrer par récurrence que :$\forall n \in \mathbb{N}*$, on a $a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$

b. En déduire la limite de la suite(a_n).

3. on pose pour tout entier naturel n : $b_n = \ln(V_1) + \ln(V_2) + \cdots + \ln(V_n)$

a. Démontrer que (b_n) est une suite à termes négatifs.

b. Calculer la limite de la suite(b_n).

EXERCICE 2

La Société « Gnamienlait » de Gnamien produit des sachets de lait caillé. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque sachet de lait caillé produit, sa masse en gramme (g). La loi de probabilité de X est définie par le Tableau ci-dessous.

X_i (en g)	220	230	240	250	260	270	280
P_i	0,08	0,10	a	b	0,16	0,15	0,04

A et b sont deux nombres réels.

X_i représente la masse du sachet de lait caillé ;

P_i la probabilité qu'un sachet de lait ait la masse x_i.

1. a. Calculer E(X) l'espérance mathématique de X en fonction de a et b

b. Calculer E(X) +250 ? Justifier que a=0,14 et b=0,33.

Dans la suite de l'exercice, on conservera les valeurs e a et b données ci-dessus.

2. Gnamien prend au hasard un sachet de lait caillé de sa société.
Calculer la probabilité pour que la masse de ce sachet de lait caillé soit au moins de 250g.

3. Tiéplé, la fille de Gnamien, prend au hasard et de façon indépendante cinq sachets de lait caillé.
Calculer la probabilité qu'elle ait choisi exactement trois sachets de lait caillé de 220g.

On prendra l'arrondi d'ordre 3 du résultat

4. Les sachets de lait caillé sont contrôlés par une machine.

Cette machine est réglée pour éliminer en principe les sachets de lait de masse inférieure à 250g.

- Si un sachet de lait caillé a 240 g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,7
- Si un sachet de lait caillé a 230 g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,8
- Si un sachet de lait a 220 g, il est systématiquement éliminé.
- Si un sachet de lait caillé est a une masse supérieure ou égale à 250 g, il est systématiquement accepté.

a. Justifier que la probabilité qu'un sachet de lait caillé de 240 g soit éliminé est de 0,98.

b. Calculer la probabilité pour qu'un sachet de lait caillé de cette société soit éliminé.

PROBLEME

PARTIE A

Soit la fonction numérique dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par :

$$g(x) = -\frac{2x+1}{x^2} + \ln x$$

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

b. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)$

2. a. Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[\,, g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$

b. En déduire le sens de variation g.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

3. a. Démontrer que l'équation $x \in]0;+\infty[\,, g(x) = 0$ admet une solution unique α

b. Justifier que $2{,}55 < \alpha < 2{,}56$

c. Démontrer que $\left|\begin{array}{l} \forall x \in]0;\alpha[\,, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[\,, g(x) > 0 \end{array}\right.$

PARTIE B :

On considère la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par :

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)e^{-x}$$

On note (C) la courbe représentative et f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). (Unités graphiques : OI= et OJ=10 cm).

1. a. Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat

1. b. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat.

2. Démontrer que : $f(\alpha) = -\dfrac{1+\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha}$

3. a. Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = e^{-x}.g(x)$

b. En utilisant la partie A, déterminer les variations de f.

c. Dresser le tableau de variation de f .

4. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1 est : $y = -\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$

5. Construire la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, I, J).

On prendra a=2,6.

PARTIE C :

1. Soit h la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $h(x) = e^{-x}.\ln x$

Démontrer que h est une primitive de f sur $]0;+\infty[$

2. Soit λ un nombre réel tel que $\lambda > 3$

a. Calculer, en cm^2 et en fonction de λ l'aire A(λ) de la partie du plan comprise entre (C), (OI) et les droites d'équation x = 3 et x=λ.

b. Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$

BAC D Session 2012

EXERCICE 1

Madame Kouamé, Statisticienne à la retraite, à crée une petite entreprise de fabrication de colliers traditionnels.

Dans l'intention de faire des prévisions pour la production de colliers de l'année 2011, elle a fait l'état des ventes des huit types de colliers fabriqués en 2010.

Les résultats sont donnés dans le Tableau ci-dessous

Type de collier	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix xi de vente en centaines de francs CFA du collier de type i.	54	60	66	72	84	90	96	10 2
Nombre yi de dizaines de colliers vendus au prix xi	18	16	15	13	10	9	8	7

On désigne par :

X le caractère «prix de vente du collier » ;

Y le caractère «nombre de colliers vendus au prix»

1. Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série statistique double de caractère (Y ; X) dans e plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

On prendra 2 cm pour 10 centaines de francs sur (OI) et 2 cm pour 2 dizaines de colliers sur (OJ).

2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage.

3. a. Calculer la variance V (X) de X.

b. Calculer la covariance COV(X ; Y) de la série statistique double de caractère (X ; Y)

c. On admet que V(Y)=14,50. Démontrer que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire est égal à – 0,99.

4. Soit (D) la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés.

a. Justifier que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient directeur de (D) est égal à -0,23.

b. démontrer qu'une équation de la droite (D) est : y= -0,23x29,94.

5. Pour l'année 2011, Madame Kouamé souhaite fabriquer un nouveau type de collier qu'elle vendrait à 11 500 francs CFA l'unité. Combien de colliers de ce type pourrait-elle vendre selon l'ajustement linéaire réalisé ?

EXERCICE 2

On considère la suite numérique U définie sur ℕ *par :

$$\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{4}{U_n}\right) \end{cases}$$

1. On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) où les unités respectives sur (OI) et (OJ) sont 4 cm et 2 cm.

La courbe (C) et la droite (D) d'équation y=x sont tracées sur la feuille annexe à rendre avec la copie.

a. Représenter sur l'axe des abscisses (OI) les termes U_1 , U_2 et U_3de la suite U en utilisant la courbe (C) et la droite (D).

b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la convergence de la suite U ?

2. On admet que f est continue et strictement croissante sur [2 ; 3].

a. Démontrer que $f([2;3]) \subset [2;3]$

b. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $2 \leq U_n \leq 3$

3. a. Démontrer que la suite U est décroissante.

b. En déduire que la suite U est convergence.

4. On considère la suite Vdéfinie sur ℕ * par $V_n = \frac{U_n-2}{U_n+2}$

a. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $V_{n+1} = (V_n)^2$

b. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $V_n = (V_n)^{2n-1}$

c. CalculerV_1 puis exprimer $V_n$en fonction de n.

d. Exprimer U_n en fonction n.

e. Démontrer quelim $V = 0$. En déduire la limite de U.

PROBLEME

PARTIE A :

On considère la fonction g dérivable et définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = e^x + 2\ln x$$

1. a. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

b. Calculer $g'(x)$

c. Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

2. a. Démontrer que l'Equation g(x)=0 admet une solution unique α sur]0; +∞[

b. Vérifier que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

c. Démontrer que :

$\forall x \in]0; \alpha[\,, g(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[\,, g(x) > 0$

PARTIE B :

On considère la fonction f définie sur]0; +∞[par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{x} + 2x\ln x - 2x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé

(0, I, j). L'unité graphique est 4 cm.

1. a. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b. Interpréter graphiquement les résultats.

2. a. Démontrer que f est continue en 0.

b. Démontrer que :$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$

c. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier la réponse.

d. Interpréter graphiquement le résultat de la question 2.b.

3. On admet que$f$ est dérivable sur]0; +∞[

a. Démontrer que :$\forall x \in]0; +\infty[\,, f'(x) = g(x)$.

b. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

4. Tracer la courbe (C) sur l'intervalle [0 ; 2].

(On prendra =0,45 et on admettra que la courbe (C) coupe la droite (OI) en deux points d'abscisses respectives 0,3 et 0,6.

5. a. On pose $K = \int_1^2 x \ln x \, dx$

A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $K = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$

b. soit A l'aire en cm2 de la partie du plan délimitée par la courbe, la droite (OI) et les droites d'équation respectives x=1 et x=2.

Calculer A puis donner l'arrondi d'ordre 2 du résultat.

BAC D 2013

EXERCICE 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J),on désigne par K,A et B les points d'affixes respectives $z_1=2$,$z_2=4+2i$ et $z_3=2+4i$. L'unité graphique est 2cm.

1 a)Placer les points K , A et B

b) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$

2 On note S la similitude direct de centre K qui transforme A en B

a) Démontrer que l'écriture complexe de S est : $z'=(1+i)z-2i$

b) Déterminer les affixes respectives des points I' et J' ,images respectives des points I et J puis placer I' et J'.

Déterminer le rapport et une mesure de l'angle orienté de la similitude direct S

4 soit (c) le cercle de centre Ω (1 ; 1) et de rayon 2

a)Tracer (c)

b) Déterminer le centre et le rayon de (c') image de (c) par S.

C) Construire (c')

5) Déterminer puis construire l'image par S de la droite (IJ)

(On pourra caractériser l'image par S de la droite (IJ) par deux de ses points.)

b)On désigne par E le point d'intersection de (c) et- la droite (IJ) d'abscisse négative .placer E et l'image E' de E par S.

EXERCICE 2

On considère la suite numérique (u) définie par : $\begin{cases} u_0 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2}u_n \end{cases}$

(n un entier naturel)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). l'unité du graphique est de 2 cm.

1) Déterminer les valeurs exactes de u_1 et u_2

2) Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{2}x + 2$ et représentation graphique (D).

a) Tracer (D) et droite (Δ)d'équation $y = x$

b) Placer u_0 sur l'axe (OI).

c)A l'aide de (D) et (Δ),placer les termes $u_1 u_2$ *et* u_3 de la suite (u) sur l'axe (OI).

3) a)Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 4$.
b) Démontrer que la suite (u) est croissante.
c)en déduire que la suite est convergente
4 On considère la suite (v) définie par $v_n = u_n - 4$,pour tout nombre entier naturel n.
Démontrer que la suite (v) est une suite géométrique dont on, précisera la raison et premier terme.

5) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$:
$T_n = v_0 + v_1 \ldots + v_n$ la somme des n+1 premiers termes de la suite (v)
$S_n = u_0 + u_2 \ldots + u_n$ la somme des n+1 premiers termes de la suite (u).
a)Déterminer une expression de T_n en fonction de n
b) Justifie que ; $S_n = 2(\sqrt{2} - 4)(1 - \frac{1}{2^{n+1}}) + 4(n + 1)$
c) Déterminer la limite de S_n.

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). l'unité du graphique est de 2 cm. On considère la fonction f derivable et définie sur $]-\infty; 1[$ par :$f(x) = x^2 - 1 + ln(1 - x)$.
On note (c) la courbe représentative de f
1.a) Calculer
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$puis donner une interprétation graphique du résultat.
c)Calculer la limite de f en 1 a gauche par valeur inferieur puis donner interprétation graphique du résultat.

2 .a) Pour tous réels x de l'intervalle $]-\infty; 1[$, calculer $f'(x)$
b) Démontrer que $f$est strictement décroissante sur$]-\infty; 1[$.
c) Dresser le tableau de variation de f.
3 . a)Démontrer que l'équation (E) : $x \in]-\infty; 1[, f(x) = 0$ admet une unique solution α.

c) Justifier que $-0.7 < \alpha < -0.6$.
4. a) Justifier une équation de la tangente (T) à (c) au point f d'abscisse 0 est :y=-x-1.

b)On donne le tableau des valeurs suivant :

x	-2	-1.5	-1	-0.75	-0.5	-0.25	0.25	0.5	0.75
$f(x)$	4.1	2.2	0.7	0.1	-0.3	-0.7	-1.2	-1.4	-1.8

Tracer (c) et (T)

On pourra faire la courbe dans le plan de la courbe délimité par ; $\begin{cases} -3 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 6 \end{cases}$

On désigne par A l'aire de la partie de la partie délimité par (c) et la droite (OI) et les droites d'équations x= α et x=0.

a)Calculer $\int_{\alpha}^{0} \ln(1-x)\,dx$ a l'aide d'une intégration par parties.

b) Démontrer que la valeur de A en unité d'aire est :

A=$\frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha)$.

c) Déterminer en cm^2 l'arrondi d'ordre 2 de la valeur de A pour α=-0.65

6) Soit f^{-1}la bijection réciproque de f et (c') la courbe représentative de f^{-1} dans le plan muni d'un repère (O,I,J).

a)calculer $f(-1)$.

b) Démontrer que le nombre dérivé de f^{-1} en ln2 existe puis le calculer.

c) Construire la courbe (c') et sa tangente (Δ) au point d'abscisse ln2 sur la figure de la question 4-b).

BAC D Session 2014 :

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On note B et C les points d'affixes respectives $3 - 2i$ et $5 + i$.
On désigne par S la similitude direct de entre O qui transforme C en B.

1. a) Démontrer que l'écriture complexe de S est :
   $z' = \frac{1}{2}(1 - i)z$.

   b) Déterminer les éléments caractéristiques de S

   c) Déterminer l'affixe du point D qui a pour image C par S.
2. a) justifier que l'affixe z_1 du point B_1 , image de B par S est $\frac{1}{2}(1 - 5i)$

   b) justifier que le triangle OBB_1 est rectangle isocèle *en* B_1 .

3 .on définit les points suivants :
$B_o = B$ et $\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = S(B_n)$.
On note : z_n l'affixe de B_n

a) Démontrer par récurrence que
$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1 - i)^n z_o$.

b) Calculer la distance OB_n en fonction de n.

c)Calculer
$\lim_{n \to +\infty} OB_n$

Exercice 2 :

Pour étudier l'évolution du nombre des bacheliers accédant aux études supérieures, le Ministère du Plan d'un pays a diligenter une enquête depuis 2003. Les résultats de cette enquête sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Années	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Rang X de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nbre diplomés en miliers	25	27	30	33	34	35	38	41	43

1. Représenter le nuage des points associés a la série statistique double (X,Y) dans le plan muni d'un repère orthonormé . (Unité du graphique 1cm).0 on prendra pour origine du graphique les points $\Omega\binom{0}{24}$.
2) Déterminer les coordonnées du point G de la série statistique (X,Y).
3. Justifier que :
a) la variance de est $\frac{20}{3}$
b) la covariance de X et Y est $\frac{44}{3}$
4. a)Sachant que la variance de Y est $\frac{98}{3}$, déterminer la valeur du coefficient de corrélation linéaire.
b) Justifier que ce résultat permet d'envisager un ajustement linéaire.
5 Soit (D) la droite d'ajustement linéaire de X en fonction de Y obtenue par la méthode des moindres carré.
a)Déterminer une équation de (D).
b) Tracer (D)
6. On suppose que l'évolution se poursuit de la même manière au cours années suivantes. Donner une estimation du nombre de Bacheliers qui accéderont aux l'études supérieures en 2020.

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité du graphique est le centimètre.

PARTIE A

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = x + (ax + b)e^{-x}$ où a et b sont des nombres réels
Dans le plan muni d'un repère (O, I, J),on désigne par :
(C) la courbe représentative de g.
(D) la droite d'équation y=x

1 a) On donne g(o)=1 .Déterminer la valeur de b
b)On admet que la tangente (T) à (C).
2) Soit h la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = e^{x} - x$$

a) Soit h' la fonction dérivée de h. Calculer $h(x)'$ pour tous x élément de $\mathbb{R}$.

b) Dresser le tableau de variation de h. (On ne demande pas de calculer les limites en -∞ $et\ en + \infty$).

c) En déduire que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ h(x) > 0$

PARTIEB

Soit f la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x + (x+1)e^{-x}$.

1-a) Calculer la limites de f en -∞

b) Justifier que :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

c) donner une interprétation graphique de ces résultats.

2 a) Calculer la limite de $f en + \infty$

b) Démontrer que (D) est une asymptote à (c) en +∞

c) Etudier les positions relatives de (C) et (D).

3 a) On désigne par f' la fonction derivée de f.
Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^{-x}h(x)$.

b) Déterminer le sens de variation de f

c) Dresser le tableau de variation de f.

4. Construire sur le graphique (T), (D) et (C).

5. a) Démontrer que $f$est une bijection de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$.

b) On note f^{-1} la bijection réciproque de f. Calculer $(f^{-1})'(1)$.

c) Calculer (r) la courbe représentative de f^{-1} sur le même graphique que (C).

Partie C :

On pose $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_{-1}^{n} (t+1)e^{-t}dt$.

1. A l'aide d'une intégration par partie démontrer que :
   $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n = (-2-n)e^{-n} + e$.
2. Calculer l'aire A_n en cm² de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = n$.
3. Calculer :
   $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$

BAC D SESSION 2015

EXERCIC 1

PARTIE 1

On considère la fonction p définie sur $\forall\ z \in \mathbb{C}$, $p(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i$.

1. a) Calculer $p(i)$.

   b) Déterminer deux nombres complexes a et b tels que : $p(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - (3+i)z + 2 + 2i$.

3) En déduis dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation (E) : $p(z)=0$.

PARTIE 2

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unités 5 cm .

On pose $z_0 = 2$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$.

On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1.a Calculer z_1 et z_2.

b) Placer les points A_0 A_1 et A_2 dans le plan complexe .

2 . On considère la suite U définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N}, U_n = |\ z_{n+1} - z_n|$

a) Justifier que : $\forall\ n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$.

b) Démontrer que la suite U est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$.

c) Exprimer U_n en fonction de n.

3 . On désigne par $A_0 A_1 + A_1A_2 + \ldots\ldots. + A_{n-1}A_n$ la longueur de la ligne brisée $A_0 A_1A_2 \ldots\ldots. A_{n-1}A_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Et on pose $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $l_n = A_0 A_1 + A_1A_2 + \ldots\ldots. + A_{n-1}A_n$.

b) Calculer l_n.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} l_n$.

EXERCICE 2

Mariam , une jeune diplôme sans emploi , a reçu un fonds et décide d'ouvrir un restaurant . Apres un mois d'activité , elle constate que :

- Pour un jour donné , la probabilité qu'il y ait une affluence de clients est de 0,6 ;
- Lorsqu'il y a une affluence de clients , la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est de 0 ,7 ;

- Lorsqu'il n'y a pas d'affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est de 0,4.

On désigne par A l'évènement « il y a une affluence de clients ». et B l'évènement « Mariam réalise un bénéfice ».

1. On choisit un jour au hasard.
   a) Calculer la probabilité de l'évènement E suivant : « Il y a une affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice ».
   b) Démontrer que la probabilité $p(B)$ de l'évènement B est de 0,58.
   c) Mariam a réalisé un bénéfice.
   Calculer la probabilité qu'il ait une affluence ce jour-là.
   On donnera l'arrondi d'ordre 2 du résultat.
2. Mariam veut faire des prévisions pour trois jours successifs donnés .
   On désigne par X la variable aléatoire égale aux nombres de jours où elle réalise un bénéfice sur les trois jours successifs.
   a) Déterminer les valeurs prises par X.
   b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   c) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.
3. Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On note P_n la probabilité que Mariam réalise au moins une fois un bénéfice pendant n jours successifs sur une période de n jours.
   a) Justifier que pour nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $P_n = 1 - (0,42)^n$.
   b) Déterminer la valeur minimale de n pour qu'on ait $P_n \geq 0,9999$.

<u>PROBLEME</u>

Partie A

Soit r la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $r(x) = xe^{-x}$.

On considère l'équation différentielle (E) : $y'+y = r$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$. .

1. Démontrer que g est solution de l'équation (E).
2. Soit l'équation différentielle (F) : $y' + y = 0$.
   a) Démontrer qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de (F).
   b) Résoudre l'équation différentielle (F).
   c) En déduire la solution φ de (E) qui vérifie $\varphi(0) = -\frac{3}{2}$

Partie B

On considère la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2-3}{2}e^{-x}$

On note (cf) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I,J), d'unités graphiques : OI=2cm et OJ = 4cm.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

   b). Démontrer que la courbe (cf) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).

2. Calculer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

3. a) Soit f' la fonction dérivée de f. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{3+2x-x^2}{2}e^{-x}$.

   b) Etudier les variation de f.

   c) Dresser le tableau de variation de f.

4. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (cf) au point d'abscisse 0 est :
$y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

5. Etudier les positions relatives de (cf) par rapport à l'axe des abscisses.

6.. Représenter graphiquement (T) et (cf).

Partie C

1. A l'aide d'une intégration par partie , calculer : $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$.
2. a) Vérifier que f est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.

   b)) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f'(x) + xe^{-x}$.

   c) En utilisant la question précédente, calculer en cm² l'aire A de la partie du plan limité par la courbe (cf) ,la droite (OI) et les droites d'équations : $x=0$ et $x=1$.

CORRECTION BAC D 2010

Exercice 1

Partie A :

1.) les racines carrées de $6+6i\sqrt{3}$:

Posons :$\Delta = 6+6i\sqrt{3}$

$|\Delta| = |6+6i\sqrt{3}| = \sqrt{6^2+(6\sqrt{3})^2} = \sqrt{36+36\times 3} = \sqrt{144} = 12$

Posons ensuite $z = x+iy$ une racine de Δ :

$$\begin{cases} x^2+y^2 = |\Delta| \\ x^2-y^2 = Réel(\Delta) \\ 2xy = imaginaire(\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 12 & (1) \\ x^2-y^2 = 6 & (2) \\ 2xy = 6\sqrt{3} & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 18 & (1)+(2) \\ 2y^2 = 6 & (1)-(2) \\ xy = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \ \ ou \ \ x = -3 \\ y = \sqrt{3} \ \ ou \ \ y = -\sqrt{3} \\ xy > 0 \quad x \text{ et } y \text{ sont de même signe} \end{cases}$$

Les racines de Δ sont $z_1 = 3+i\sqrt{3}$et $z_2 = -3-i\sqrt{3}$

2) Résolvons l'équation $2z^2-(1+3i\sqrt{3})z-4 = 0$

$\Delta = (1+3i\sqrt{3})^2-4\times 2\times(-4) = 1+2\times 1\times(3i\sqrt{3})+(3i\sqrt{3})^2+32$

$\Delta = 6+6i\sqrt{3} \quad \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3+3i\sqrt{3} \ \ et -3-3i\sqrt{3}$

$$z_1 = \frac{1+3i\sqrt{3}-3-3i\sqrt{3}}{4} = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = \frac{1+3i\sqrt{3}+3+3i\sqrt{3}}{4} = \frac{4+4i\sqrt{3}}{4} = 1+i\sqrt{3}$$

$$S = \left\{1+i\sqrt{3}\,;\,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

3.a) Développons, réduisons et ordonnons :

$(2z+1)[2z^2-(1+3i\sqrt{3})z-4]$

$= 4z^3-2(1+3i\sqrt{3})z^2-8z+2z^2-(1+3i\sqrt{3})z-4$

$= 4z^3-2(1+3i\sqrt{3}-1)z^2-(8+1+3i\sqrt{3})z-4$

$= 4z^3-2(3i\sqrt{3})z^2-(9+3i\sqrt{3})z-4 = 4z^3-6i\sqrt{3}z^2-3(3+i\sqrt{3})z-4$

3.b) En déduisons les solutions de (E) :

$$4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})z - 4 = 0 \leftrightarrow (2z + 1)[2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4] = 0$$

On a : $2z + 1 = 0$ *ou* $2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4 = 0$

$$z = -\frac{1}{2} \text{ ou } 2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4 = 0$$

donc $z_0 = -\frac{1}{2}$; $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$S = \left\{-\frac{1}{2}; 1 + i\sqrt{3}\,; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

4) Exprimons sous forme trigonométrique z_0 , z_1 et z_2

$z_0 = -\frac{1}{2}$. $|z_0| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$. $\arg(z_0) = \arg\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi$. $z_0 = \frac{1}{2}(\cos\pi + i\sin\pi)$

$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$. $|z_1| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

Posons $\alpha = \arg z_1$: $\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{1}{2}\\ \sin\alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\}\alpha = \frac{\pi}{3}$. $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$$|z_2| = \left|\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)\right| = \left|\frac{1}{2}\right| \times |-1 + \sqrt{3}i| = \frac{1}{2} \times \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$$

posons $\beta = \arg z_2$: $\left.\begin{aligned}\cos\beta &= -\frac{1}{2}\\ \sin\beta &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\}\beta = \frac{2\pi}{3}$. $z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

Partie B :

1.a) Déterminons l'écriture complexe de S :

$S = az + b$

$$a = ke^{i\theta} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = 2\left(\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$= 1 - \sqrt{3}i$$

$\beta = \dfrac{b}{1-a} \rightarrow b = \beta(1-a) = 0(1-a) = 0$

$S = (1 - \sqrt{3}i)z$

1.b) Justifions que $S(M_0) = M_1$ et $S(M_1) = M_2$

$S_0 = (1 - \sqrt{3}i)z_0 = (1 - \sqrt{3}i)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = z_1$. $\quad S_0 = z_1 \Rightarrow S(M_0) = M_1$

$S_1 = (1 - \sqrt{3}i)z_1 = (1 - \sqrt{3}i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{2}$

$= 1 + \sqrt{3}i = z_2$. $\quad S_1 = z_2 \Rightarrow S(M_1) = M_2$

2) Justifions que $z_{n+1} = (1 - \sqrt{3}i)z_n$

$M_{n+1} = S(M_n) \Leftrightarrow z_{n+1} = f(z_n) \Leftrightarrow z_{n+1} = (1 - \sqrt{3}i)z_n$

3.a) Démontrons que U_n est une suite géométrique :

$U_{n+1} = |z_{n+1}| = |(1 - \sqrt{3}i)z_n| = |1 - \sqrt{3}i||z_n| = \sqrt{4} \times U_n = 2 \times U_n$

$\Rightarrow \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = 2$

Donc (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme

$U_0 = |z_0| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

3.b) Justifions que distance $OM_{12} = 2048$

$OM_{12} = |z_{M_{12}} - z_0| = |z_{M_{12}}| = |z_{12}| = U_{12}$

or $U_n = U_0 q^n = \frac{1}{2} \times 2^n$ car U_n est une suite géométrique.

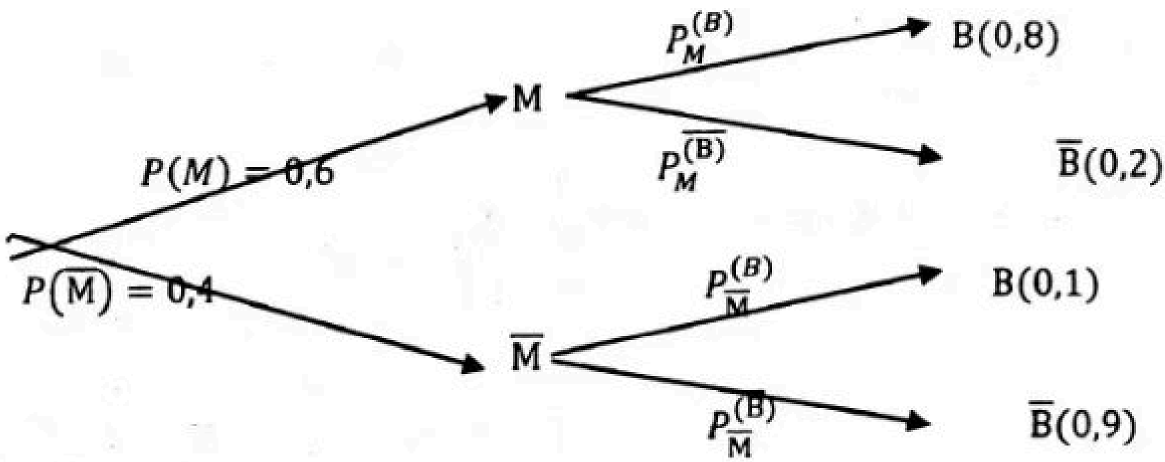
$U_{12} = \frac{1}{2} \times 2^{12} = \frac{1}{2} \times 4096 = 2048$. Donc $OM_{12} = U_{12} = 2048$.

Exercice 2

Soit M « les individus qui prennent le médicament » ; $\overline{\mathrm{M}}$ « les individus ne prenant pas le médicament »

Soit B « la baisse du taux de glycémie » ; $\overline{B}$ « aucune baisse du taux de glycémie »

Représentons-les dans un arbre de choix :



1) Calculons la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie sachant qu'on a pris le médicament :

$P_M^{(B)} = 0,8$.

2) démontrons que la probabilité d'avoir une baisse de glycémie est 0,52 :

$P(B) = P(B \cap M) + P(B \cap \overline{M}) = P(M) \times P_M^{(B)} + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}^{(B)}$

$\quad = (0,6 \times 0,6) + (0,4 \times 0,1) = 0,48 + 0,04$

$P(B) = 0,52$

3) la probabilité qu'il ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie.

$$P_B^{(M)} = \frac{P(B \cap M)}{P(B)} = \frac{P(M) \times P_M^{(B)}}{P(B)} = \frac{0,6 \times 0,8}{0,52} = 0,92. \qquad P_B^{(M)} = 0,92$$

4.a) La probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé :

Ici nous sommes dans un schéma de Bernoulli. Les paramètres sont : $r = 5$ et $k = 2$.

Succès égale à baisse du taux de glycémie ; échec égale à aucune baisse.

$p(\text{succès}) = 0,52$ et $q(\text{échec}) = 1 - 0,52 = 0,48$

$P(X) = C_5^2 (0,52)^2 (0,48)^3 = 0,3$

4.b) la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé :

$P(X \geq 1) = 1 - C_5^0(0{,}52)^0(0{,}48)^5 = 1 - (0{,}48)^5 = 0{,}975$

5) Déterminons r:

$$P(X \geq 1) = 1 - C_r^0(0{,}52)^0(0{,}48)^r > 0{,}98$$
$$= 1 - (0{,}48)^r > 0{,}98$$
$$= -(0{,}48)^r > 0{,}98 - 1$$
$$= -(0{,}48)^r > -0{,}02 \rightarrow (0{,}48)^r > 0{,}02$$
$$= \ln(0{,}48)^r > \ln 0{,}02 \rightarrow r\ln(0{,}48) > \ln 0{,}02$$
$$r > \frac{\ln 0{,}02}{\ln 0{,}48} \rightarrow r > 5{,}32 \quad \text{donc } r > 6$$

Problème

Partie A :

1.a) Justifions que $\forall\, x \in]0; +\infty[\,, g'(x) = 1 + \ln x$:

$$g'(x) = (1 + x\ln x)' = x'\ln x + x(\ln x)' = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$g'(x) = 1 + \ln x$

1.b) Etudions les variations de g puis dressons son tableau de variation :

$\forall\, x \in]0; +\infty[\,, g'(x) \Leftrightarrow 1 + \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1} \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$

x	0		$1/e$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$\frac{e-1}{e}$	$\nearrow$	

2) En déduisons que $\forall\, x \in]0; +\infty[\,, g(x) > 0$

g admet sur $]0;+\infty[$ un minimum $\dfrac{e-1}{e} > 0$ donc $\forall\, x \in]0;+\infty[\,, g(x) > 0$

Partie B :

1.a) Etudions la continuité de f en 0 :

Nous savons déjà que $f(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1 + x\ln x} = \frac{0}{1+0} = 0 \text{ car } \lim_{x\to 0} x\ln x = 0$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0.$ $f$est donc continue en 0.

1.b) Etudions la dérivabilité de f en 0 :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x}{1+x\ln x} - 0}{x-0} = \frac{x}{1+x\ln x} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{1+x\ln x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x\ln x} = 1 \text{ car } \left\{\lim_{x\to 0} x\ln x = 0\right.$$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$, donc f est dérivable en 0

1.c) Déterminons l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0 :

$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0) = 1 \times (x-0) + 0 = x$

$$(T): y = x$$

1.d) Déterminons les positions relatives de (C) et (T) sur $]0;+\infty[$

$$f(x) - x = \frac{x}{1+x\ln x} - x = \frac{x - x - x^2\ln x}{1+x\ln x} = \frac{x^2}{1+x\ln x} \times (-\ln x)$$

$$= \frac{x^2}{g(x)}(-\ln x)$$

$\forall x \in]0;+\infty[\,, g(x) > 0$ *et* x^2

> 0 donc le signe dépendra de celui de $-\ln x$

$-\ln x > 0 \Rightarrow \ln x < 0 \Rightarrow x < e^0 \Rightarrow x < 1$

D'où : sur

$]0;1[$(C) est au-dessus de (T) et sur $]1;+\infty[$ (C) est en dessous de (T)

2) Démontrons que la droite (OI) est asymptote à (C) en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + \ln x} = 0$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$. On en conclu donc que $y = 0$ est asymptote à (C) en $+\infty$

3.a) Démontrons que $f'(x) = \frac{1-x}{(1+x\ln x)^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{1 + x\ln x}\right)' = \frac{x'(1 + x\ln x) - x(1 + x\ln x)'}{(1 + x\ln x)^2}$$

$$= \frac{1 + x\ln x - x\left(0 + 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right)}{(1 + x\ln x)^2} = \frac{1 + x\ln x - x\ln x - x}{(1 + x\ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - x}{(1 + x\ln x)^2}$$

3.b) Etudions les variations puis dressons la tableau de variation de f

$]0; +\infty[$, $(1 + x\ln x)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$

$1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$. D'où :

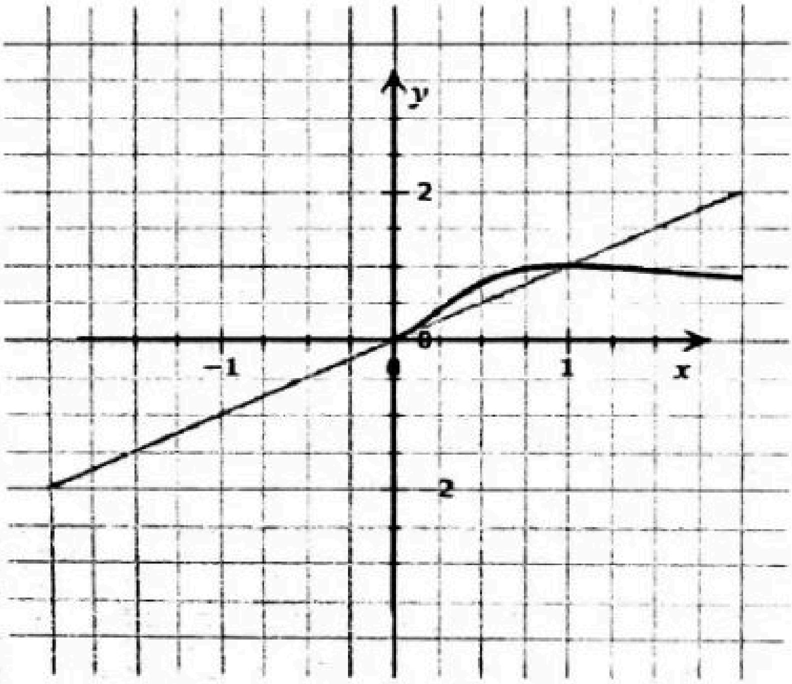
$\forall x \in]0; 1[$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur $]0; 1[$

$\forall x \in]1; +\infty[$, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$

Tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	|	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

4) Construisons la droite (T) et la courbe (C)



Partie C :

1.a) Justifions que : $\forall x \in]0; +\infty[\ ; f(x) \leq 1$

f admet 1 comme maximum absolu sur $]0; +\infty[$. Donc : $\forall x \in]0; +\infty[\ ; f(x) \leq 1$

1.b) Démontrons que : $\forall x \in]1; e[\ , 1 - \dfrac{1}{1+x} \leq f(x)$

$\forall x \in]1; e[\ , 1 \leq x \leq e \Rightarrow \ln 1 \leq \ln x \leq \ln e \Rightarrow$ car $x \mapsto \ln x$ strictement croissant

$\Rightarrow \ln x \leq 1 \Rightarrow x\ln x \leq x \Rightarrow 1 + x\ln x \leq 1 + x$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1+x} \leq \dfrac{1}{1+x\ln x} \Rightarrow \dfrac{x+1-1}{1+x} \leq \dfrac{x}{1+x\ln x} \Rightarrow \dfrac{1+x}{1+x} - \dfrac{1}{1+x} \leq \dfrac{x}{1+x\ln x}$

$\Rightarrow 1 - \dfrac{1}{1+x} \leq \dfrac{x}{1+x\ln x} \quad \Rightarrow 1 - \dfrac{1}{1+x} \leq f(x)$

2) Démontrons que : $16(e-1) + 16\ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq A \leq 16(e-1)$

$$A = \int_1^e (f(x) - 0)dx.\,UA = \int_1^e f(x)\,dx.\,UA = \int_1^e \frac{x}{1+x\ln x}dx.\,UA$$

$UA = 4 \times 4 = 16cm^2$. De la question 1.a et 1.b on déduis que $\forall x \in]1; e[$:

$$1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow \int_1^e \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx. UA \leq \int_1^e f(x)dx. UA$$

$$\leq \int_1^e 1dx. UA$$

$$\Rightarrow \; [x - \ln|1+x|]_1^e \times 16 \leq A \leq x_1^e \times 16$$

$$\Rightarrow 16[e - \ln|1+e| - (1 - \ln -|1+1|)] \leq A \leq (e-1)16$$

$$\Rightarrow 16[e - \ln(1+e) - 1 + \ln 2] \leq A \leq 16(e-1)$$

$$\Rightarrow 16\left[e - 1 + \ln\frac{2}{1+e}\right] \leq A \leq 16(e-1)$$

$$\Rightarrow 16(e-1) + 16\ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq A \leq 16(e-1)$$

CORRECTION SUJET BAC 2011.

Exercice 1

1.a) Démontrons que la suite (v_n) est convergente :

$$\lim v_n = \lim \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \lim \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} = \lim \frac{n^2}{n^2} = 1$$

$\lim v_n$ existe et est finie donc la suite (v_n) est convergente :

1.b) Démontrons que (v_n) est croissante :

$$v_n = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{(n+1)\big((n+1)+2\big)}{\big((n+1)+1\big)^2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} - \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{(n+1)^3(n+3)}{(n+2)^2(n+1)^2} - \frac{n(n+2)^3}{(n+1)^2(n+1)^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n+1)^3(n+3) - n(n+2)^3}{(n+2)^2(n+1)^2} =$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n+1)^2(n+1)(n+3) - n(n+2)^2(n+1)}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n^2+2n+1)(n^2+4n+3) - (n^2+2n)(n^2+4n+4)}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n^4+6n^3+12n^2+10n+3) - (n^4+6n^3+12n2+8n)}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2n+3}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$\forall x \in \mathbb{N};\ \frac{2n+3}{(n+2)^2(n+1)^2} > 0$ *donc* $v_{n+1} - v_n > 0$

Donc la suite (v_n) est croissante.

1.c) Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{3}{4} \le v_n \le 1$

Nous avons démontré que v_n est croissante et son terme le plus petit est son 1er terme v_1

Calcul de $v_1 = \dfrac{1^2 + 2 \times 1}{(1+1)^2} = \dfrac{1+2}{2^2} = \dfrac{3}{4}$ *donc* $\dfrac{3}{4} \leq v_n$

d'où $\dfrac{3}{4} \leq v_n < 1$

2.a) *Démontrons par récurrence que* : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, *on a*: $a_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$

$a_n = v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n \implies a_1 = v_1 = \dfrac{3}{4}$

La propriété est donc vraie à l'ordre 1.

Supposons que pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_k = \dfrac{k+2}{2(k+1)}$, montrons que :

$$a_{k+1} = \frac{(k+1)+2}{2\big((k+1)+1\big)}$$

$a_k = v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_k$ et $a_{k+1} = \underbrace{v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_k}_{a_k} \times v_{k+1}$

$$a_{k+1} = a_k + v_{k+1} = \frac{k+2}{2(k+1)} \times \frac{(k+1)^2 + 2(k+1)}{\big((k+1)+1\big)^2}$$

$$= \frac{k+2}{2(k+1)} \times \frac{(k+1)\big((k+1)+2\big)}{(k+2)^2} = \frac{(k+1)+2}{2(k+2)}$$

$a_{k+1} = \dfrac{(k+1)+2}{2\big((k+1)+1\big)}$. Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, *on a*: $a_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$

2.b) En déduisons la limite de a_n :

$$\lim a_n = \lim \frac{n+2}{2(n+1)} = \lim \frac{n+2}{2n+2} = \lim \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

3.a) Démontrons que (b_n) est une suite à termes négatifs :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{3}{4} \leq v_n \leq 1 \implies v_n < 1$ ce qui veut dire que $\ln v_n < \ln 1$ *or*

$\ln 1 = 0$ *donc* $\ln v_n < 0$ donc (b_n) est une suite à termes négatifs.

3.b) Calculons la limite de (b_n) :

$$\lim b_n = \lim(\ln a_n) = \ln \lim a_n = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

Exercice 2 :

1.a) Calculons E(x) en fonction de a et b :

$$E(x) = (220 \times 0{,}08) + (230 \times 0{,}1) + (240 \times a) + (250 \times b) + (260 \times 0{,}16) + (270 \times 0{,}15) + (280 \times 0{,}04)$$
$$= 17{,}6 + 23 + 240a + 250b + 41{,}6 + 40{,}5 + 11{,}2$$
$$E(x) = 133{,}9 + 240a + 250b$$

1.b) Justifions que $a = 0{,}14$ et $b = 0{,}33$:

$E(x) = 250 \Rightarrow 133{,}9 + 240a + 250b = 250$

$$\sum_{i=1}^{7} Pi = 1 \Rightarrow 0{,}08 + 0{,}1 + a + b + 0{,}16 + 0{,}15 + 0{,}04 = 1 \Rightarrow 0{,}53 + a + b = 1$$

On aura: $\begin{cases} 133{,}9 + 240a + 250b = 250 \\ 0{,}53 + a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 240(0{,}47 - b) + 250b = 116{,}1 \\ a = 0{,}47 - b \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 112{,}8 - 240b + 250b = 116{,}1 \\ a = 0{,}47 - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10b = 3{,}3 \\ a = 0{,}47 - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0{,}33 \\ a = 0{,}47 - 0{,}33 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} b = 0{,}33 \\ a = 0{,}14 \end{cases}$

2) Calculons la probabilité pour que le lait soit au moins de 250g

$P(X \geq 250) = 0{,}33 + 0{,}16 + 0{,}15 + 0{,}04 = 0{,}68$

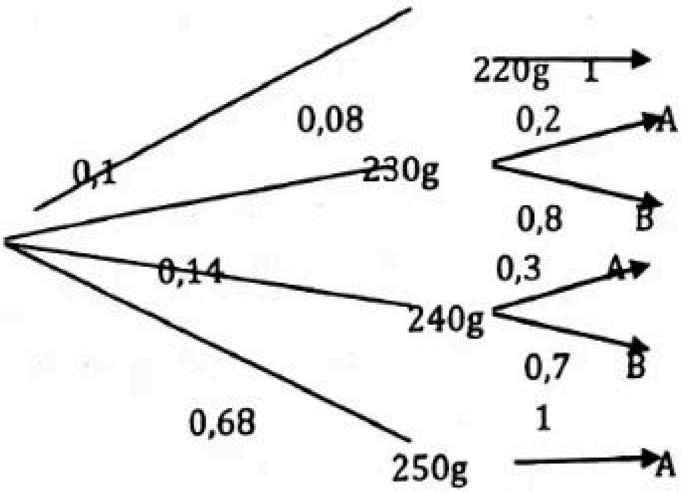
3) Calculons la probabilité qu'elle ait choisi exactement 3 sachets de 220g :

Nous sommes dans une épreuve de Bernoulli de paramètres 5 et 0,08

$P(X = 3) = C_5^3(0{,}08)^3 \times (0{,}92)^2 = 0{,}00432$

4) Traduction par un arbre de choix : Soit :

A « le sachet est accepté » et B « le sachet est éliminé »



4.a) Justifions que la probabilité qu'un sachet de 240g soit éliminé est de 0,098

$P(240 \cap E) = P(240) \times P_G(E) = 0{,}14 \times 0{,}7 = 0{,}098$

4.b) Calculons la probabilité qu'un sachet de cette société soit éliminé :

$P(E) = 0{,}14 \times 0{,}7 + 0{,}1 \times 0{,}8 + 0{,}08 \times 1 = 0{,}258$

<u>Problème</u>

Partie A :

1.a) Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{2x+1}{x^2} + \ln x = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x+1}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

1.b) Calculons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x)$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{-2x+1}{x^2} + \ln x = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{-2x+1}{x^2} = -\infty \end{cases}$$

2.a) Démontrons que: $\forall\, x \in]0; +\infty[\,, g'(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$

$$\forall\, x \in]0; +\infty[\,, g'(x) = \left(-\frac{2x+1}{x^2} + \ln x\right)' = \frac{-2x^2 - 2x(-2x-1)}{x^4} + \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{-2x^2 + 4x^2 + 2x}{x^4} + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 2x}{x^4} + \frac{1}{x} = \frac{2x + 2}{x^3} + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$$

$\forall\, x \in]0; +\infty[\,, g'(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$

2.b) En déduisons le sens de variation de g :

$\forall\, x \in]0; +\infty[\,, x^3 > 0$ donc le signe de $g'(x)$ dépend celui de $x^2 + 2x + 2$

Posons $x^2 + 2x + 2 = 0$. $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4$ donc $\Delta < 0$

D'où le signe de $x^2 + 2x + 2$ sera celui du coefficient de x^2 qui est 1. Donc $x^2 + 2x + 2 > 0$ d'où $\forall\, x \in]0; +\infty[\,; g'(x) > 0$ donc g est strictement croissant sur $]0; +\infty[$.

2.c) Dressons le tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

3.a) Démontrons que $g(x) = 0$ admet une solution α sur $]0; +\infty[$

On sait déjà que g est continue et strictement croissante sur $]0\,; +\infty[$.

$g(]0; +\infty[) =]-\infty; +\infty[$ or $0 \in]-\infty; +\infty[$ donc $g(x) = 0$ admet une solution α sur $]0; +\infty[$

3.b) Justifions que $2{,}55 < \alpha < 2{,}56$:

$g(2{,}55) = -0{,}002$ *et* $g(2{,}56) = 0{,}006$ donc $g(2{,}55) \times g(2{,}56) < 0$

Donc $2{,}55 < \alpha < 2{,}56$

3.c) Démontrons que $\forall x \in]0; \alpha[\,, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[\,, g(x) > 0$:

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$
Signe de $g(x)$	$-$	0	$+$

Partie B :

1.a) Calculons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}}$ puis interprétons graphiquement le résultat

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) e^{-x} = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^{-x} = 1 \end{cases}$$

Interprétation : La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (C).

1.b) Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis donnons une interprétation graphique :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{xe^x} - \frac{\ln x}{e^x}\right) = 0$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{xe^x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{e^x} = 0 \end{cases}$$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.

2) Démontrons que $f(\alpha) = -\dfrac{1+\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha}$

$$f(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha} - \ln \alpha\right) e^{-\alpha} \textit{ et } g(\alpha) = -\frac{2\alpha + 1}{\alpha^2} + \ln \alpha = 0 \textit{ d'où } \ln \alpha = \frac{2\alpha + 1}{\alpha^2}$$

$$f(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha + 1}{\alpha^2}\right) e^{-\alpha} = \left(\frac{\alpha}{\alpha^2} - \frac{2\alpha + 1}{\alpha^2}\right) e^{-\alpha} = \left(\frac{-\alpha - 1}{\alpha^2}\right) e^{-\alpha}$$

$$f(\alpha) = \left(-\frac{\alpha + 1}{\alpha^2}\right) e^{-\alpha}$$

3. a) Démontrons que $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = e^{-x} \times g(x)$:

$$f'(x) = \left[\left(\frac{1}{x} - \ln x\right) e^{-x}\right]' = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)' e^{-x} + \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) (e^{-x})'$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) e^{-x}\right] + \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) (-e^{-x}) = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + \ln x\right) e^{-x}$$

$$= \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \ln x\right) e^{-x} = \left(-\frac{1 + 2x}{x^2} + \ln x\right) e^{-x} = g(x) e^{-x}$$

3.b) En utilisant la partie A, déterminons les variations de f

$\forall x \in]0; +\infty[\,, e^{-x} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ sera celui de $g(x)$

$\forall x \in]0; \alpha[\,, g(x) < 0 \leftrightarrow f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante

$\forall x \in]\alpha; +\infty[\,, g(x) > 0 \leftrightarrow f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{1+\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha}$	$\nearrow$	0

4) Démontrons que l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1 est $y = -\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$

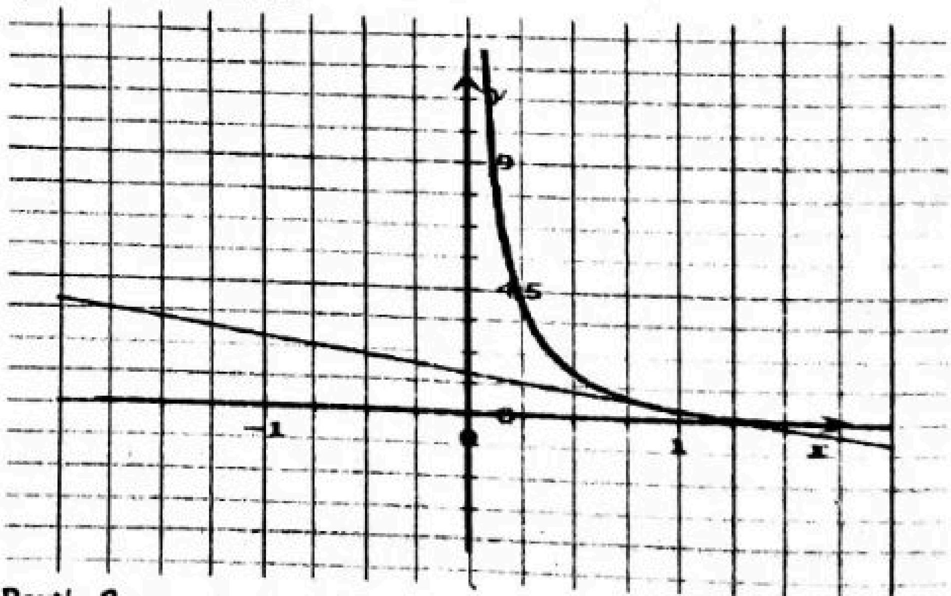
$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$$= \left(-\frac{1+2\times 1}{1^2} + \ln 1\right)e^{-1}(x-1) + \left(\frac{1}{1} - \ln 1\right)e^{-1}$$

$$= \left(-3\times\frac{1}{e}\right)(x-1) + \left(1\times\frac{1}{e}\right) = -\frac{3}{e}(x-1) + \frac{1}{e} = -\frac{3}{e}x + \frac{3}{e} + \frac{1}{e}$$

$(T): y = -\dfrac{3}{e}x + \dfrac{4}{e}$

5) Tracer de courbe



Partie C :

1) Démontrons que $h(x)$ est une primitive de $f(x)$:

Si $h'(x) = f(x)$ alors $h(x)$ est une primitive de $f(x)$. Calculons alors $h'(x)$:

$$h'(x) = (e^{-x} \times \ln x)' = (e^{-x})' \ln x + e^{-x}(\ln x)' = (-e^{-x}) \ln x + e^{-x} \times \frac{1}{x}$$

$h'(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) e^{-x} = f(x)$. D'où $h(x)$ est une primitive de $f(x)$.

2.a) Calculons en cm^2 et en fonction de λ l'aire $A(\lambda)$:

Sur $]3; +\infty[$, (C) est en dessous de (OI), donc :

$$A(\lambda) = -\int_3^\lambda (f(x) - 0)dx. UA = -\int_3^\lambda f(x)dx . UA$$

Avec $UA = 2cm \times 10cm = 20cm^2$

$$A(\lambda) = -[h(x)_3^\lambda] \times UA = -[h(\lambda) - h(3)] \times UA$$

$$= -[e^{-\lambda} \ln x - e^{-3} \ln 3] \times UA = -\left(\frac{1}{e^\lambda} \ln \lambda - \frac{1}{e^3} \ln 3\right) \times UA$$

$$A(\lambda) = \left(\frac{\ln 3}{e^3} - \frac{\ln \lambda}{e^\lambda}\right) UA$$

2.b) Calculons $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} \left(\frac{\ln 3}{e^3} - \frac{\ln \lambda}{e^\lambda}\right) UA = \frac{\ln 3}{e^3}.UA \text{ car } \lim_{\lambda \to +\infty} \left(\frac{\ln \lambda}{e^\lambda}\right) = 0$$

CORRECTION BAC 2012

Exercice 1

1. Représentation graphique
2. Calculons les coordonnées du point moyen G du nuage.

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{54 + 60 + 66 + 72 + 84 + 90 + 96 + 102}{8} = 78$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum y_j}{N} = \frac{18 + 16 + 15 + 13 + 10 + 9 + 8 + 7}{8} = 12$$

Donc $G\binom{78}{12}$

3.a. Calculons La variance *v(x)* de x.

$$V(X) = \frac{\sum x^2{}_i}{N} = \frac{54^2 + 60^2 + 66^2 + 72^2 + 84^2 + 90^2 + 96^2 + 102^2}{8} - 78^2$$
$$= 270$$

B. Calculons la variance *COV(X,Y)*

$$COV(X,Y) = \frac{\sum n_{ij} x_i y_j}{Effectif\ Total}$$
$$= \frac{54 * 18 + 60 * 16 + 66 * 15 + 72 * 13 + 84 * 10 + 90 * 9 + 96 * 8 + 102 * 7}{8}$$
$$- 78 * 12$$

$=-62,25$

C. On donne $V(Y)$=14,50. Démontrons que $r=-0,99$

On a $r = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} \frac{-0,62,25}{270 \times 14,5} = -0,99$

4.a Justifions que a=-0.23

$$a = \frac{COV(X,Y)}{V(X)} = \frac{-62,25}{270} = -0,23$$

b. Démontrons qu'une équation de la droite (D) est $y=-0,23x+29,94$

On $b = \bar{y} - a\bar{X} = 12 - (-0,23) \times 78 = 29,94$

Alors la droite (D) aura pour équation. $y=-0,23+29,94$

5. Détermination du nombre de colliers de ce type qu'elle pourrait ventre en selon l'ajustement liminaire

Y=-0,23x115+29,94=3,49 soit 35 colliers qu'elle pourrait vendre a 11500 CFA l'unité.

<u>Exercice 2</u>

On considère la suite U définie par sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + \frac{4}{U_n}) \end{cases}$.

1.a CONSTRUCTIONS

b. la figure montre que la courbe la suite U converge vers 2.

2.a. Démontrons que : $f([\![2;3]\!]) \subset [\![2;3]\!]$

$f([\![2;3]\!]) = \left[2;\frac{13}{6}\right] \subset [\![2;3]\!]$ donc $f([\![2;3]\!]) \subset [\![2;3]\!]$

b. démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2 \leq U_n \leq 3$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_1 = 3$ donc, $2 \leq U_1 \leq 3$ est vrai

Supposons que, $2 \leq U_n \leq 3$ et verifions a l'orde n+1

On a :, $2 \leq U_n \leq 3$ or $U_{n+1} = f(U_n)$ de plus d'apres la question 2.a)

, $2 \leq f(U_n) \leq 3$ donc, $2 \leq U_{n+1} \leq 3$ Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2 \leq U_n \leq 3$

3.a Démontrons que U est croissante.

On $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{4}{U_n}\right) - U_n = -\frac{1}{2}U_n + \frac{2}{U_n} = \frac{4-U_n{}^2}{2U_n}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{(2-U_n)(2+U_n)}{2U_n}$ Or $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2 \leq U_n \leq 3$

Donc le signe de $U_{n+1} - U_n$ depend de celui de $2 - U_n$

Etudions signe de $2 - U_n$ or $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2 \leq U_n \leq 3$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, -2 \geq -U_n \geq -3 \Leftrightarrow -3 \leq -U_n \leq -2$

$\Leftrightarrow 2 - 3 \leq U_n - 2 \leq -2 + 2$

$\Leftrightarrow U_n - 2 \leq 0$ Donc Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* U_{n+1} - U_n \leq 0. \Leftrightarrow$

Alors comme $\forall n \in \mathbb{N}^* U_{n+1} - U_n \leq 0$ Donc la suite U est décroissante pour tous nombre entier naturel non nul.

b. En déduisons que U est convergente

pour tout nombre entier naturel non nul U est décroissante et minorée par 2 alors *i U est convergente.*

4. On définit la suite V définie par : $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2}$

a. Démontrons que pour tous nombre entier naturel non nul

$$V_{n+1} = (V_n)^2$$

On a : $V_n = \frac{U_n-2}{U_n+2}$ et $U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + \frac{4}{U_n})$ Alors $V_{n+1} = \frac{U_{n+1}-2}{U_{n+1}+2}$

$$\Leftrightarrow V_{n+1} = \frac{\frac{(U_n-2)^2}{2U_n}}{\frac{(U_n-2)^2}{2U_n}} = \frac{(U_n-2)^2}{2U_n} \times \frac{2U_n}{(U_n-2)^2} = \frac{(U_n-2)^2}{(U_n-2)^2} == (V_n)^2$$

b. Démontrons que pour tout entier $n \geq 1 V_n = (V_1)^{2^{n-1}}$

Pour tous entier $n \geq 1 V_{n+1} = (V_n)^2$

on a $V_2 = (V_1)^2 = V_2 = (V_1)^{2^{2-1}}$ dsonc la propriété est vrai pour n=2

supposons que pour tous entier $n \geq 1 V_n = (V_1)^{2^{n-1}}$

et montrons que pour tous entier $n \geq 1 V_{n+1} = (V_1)^{2^n}$

On a : pour tous entier $n \geq 1 V_{n+1} = (V_n)^2 \Leftrightarrow V_{n+1} = \left[(V_1)^{2^{n-1}}\right]^2$

$$= (V_1)^{2\times 2^{n-1}} = (V_1)^{2^{n-1+1}} = (V_1)^{2^n}$$

Donc pour tout entier $n \geq 1 V_n = (V_1)^{2^{n-1}}$

Problème

Partie A :

1.a) Déterminons le limites aux bornes de $g(x)$:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} e^x + 2\ln x = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = e^x + 2\ln x = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

1.b) Calculons $g'(x)$:

$$\forall\, x \in]0; +\infty[\,;\, g'(x) = (e^x + 2\ln x)' = e^x + 2\left(\frac{1}{x}\right) = e^x + \frac{2}{x}$$

1.c) Déterminons le sens de variation de g puis dressons son tableau de variation :

$$\forall\, x \in]0; +\infty[\,;\ e^x > 0 \text{ et } \frac{2}{x} > 0 \Rightarrow e^x + \frac{2}{x} > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$$

Donc g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Tableau de variation :

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2.a) Démontrons que $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0;+\infty[$

g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et

$g(\,]0;+\infty[\,) =]-\infty;+\infty[$ or $0 \in]-\infty;+\infty[$ Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]-\infty;+\infty[$

2.b) Démontrons que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

$g(0{,}4) = -0{,}34$ et $g(0{,}5) = 0{,}26 \rightarrow \; g(0{,}4) \times g(0{,}5) < 0$

Donc $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

2.c) Démontrons que : $\forall x \in]0,\alpha[\,;\, g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha;+\infty[\,,\, g(x) > 0$

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$
Signe de $g(x)$	$-$	0	$+$

Partie B :

1.a) Déterminons les limites de $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} + 2\ln x - 2\right) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{e^x + 2\ln x - 2x}{x} = \frac{x\left(\frac{e^x}{x} + 2\ln x - 2\right)}{x} =$$

$$= \frac{e^x}{x} + 2\ln x - 2 = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

1.b) Interprétons les résultats :

(C) admet une branche parabolique de direction (OJ)

2.a) Démontrons que f est continue en 0.

On sait que $f(0) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^x + 2x\ln x - 2x = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$donc f est continue en 0

2.b) Démontrons que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{e^x + 2x\ln x - 2x - 1}{x} = \frac{e^x - 1 + x(2\ln x - 2)}{x}$$

$$= \frac{e^x - 1}{x} + 2\ln x - 2.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0} 2\ln x = -\infty \end{cases}$$

2.c) Déterminons si f est dérivable ou non :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$$

n'est pas finie donc f n'est pas dérivable en 0.

2.d) Interprétons graphiquement le résultat de la question 2.b)

(C) admet une tangente verticale en 0.

3.a) Démontrons que $\forall x \in]0\,;+\infty[\,; f'(x) = g(x)$

$$f'(x) = (e^x + 2x\ln x - 2x)' = e^x + 2\ln x - 2x \times \frac{1}{x} - 2$$

$$f'(x) = e^x + 2\ln x = g(x)$$

3.b) Etudions les variations de f puis dressons son tableau de variation :

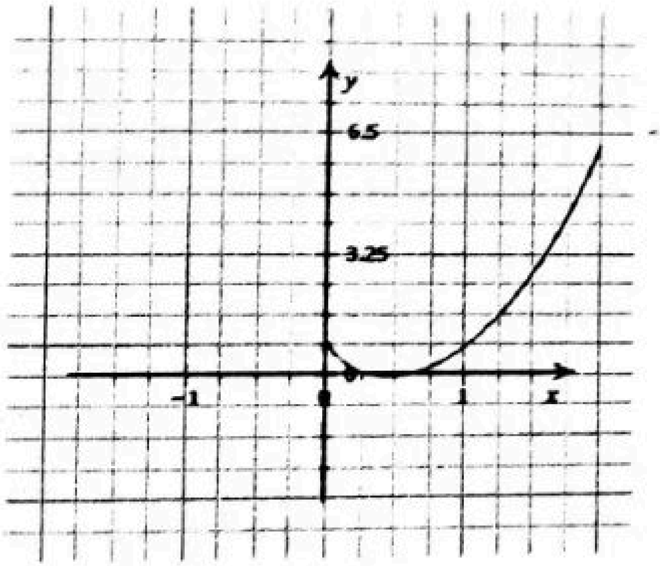
Puisque $\forall x \in]0\,;+\infty[\,; f'(x) = g(x)$ alors le signe de $f'(x)$ sera celui de $g(x)$.

$\forall x \in]0, \alpha[\,; f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0, \alpha[$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[\,, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]\alpha; +\infty[$

Tableau de variation :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$



5.a) Démontrons que $K = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$

On a : $u' = x$ et $u = \dfrac{x^2}{2}$ | $v = \ln x$ et $v' = \dfrac{1}{x}$

$$K = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{2^2}{2}\ln 2 - \frac{1^2\ln 1}{2}\right] - \left[\frac{2^2}{4} - \frac{1^2}{4}\right] = (2\ln 2 - 0) - \frac{3}{4} = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

5.b) Calculons A :

$$A = \int_1^2 [f(x) - 0]dx = \int_1^2 (e^x + 2x\ln x - 2x) - (0)\, dx$$

$$= \int_1^2 (e^x + 2x\ln x - 2x)$$

$$= \int_1^2 (e^x - 2x)\, dx + 2\int_1^2 (x\ln x)\, dx = \left[e^x - \frac{2x^2}{2}\right]_1^2 + 2K$$

$$= ([e^2 - 2^2] - [e^1 - 1]) + 2\left(2\ln 2 - \frac{3}{4}\right) = (e^2 - 4 - e + 1) + \left(4\ln 2 - \frac{3}{2}\right)$$

$$= e^2 - e - 3 + 4\ln 2 - \frac{3}{2} = e^2 - e + 4\ln 2 - \frac{9}{2}. \quad A = 2{,}94 \times UA \cong 47cm^2$$

BAC D SESSION 2013

EXERCICE1

1.b) Déterminons la forme algébrique du nombre complexe $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$.

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{2 + 4i - 2}{4 + 2i - 2} = \frac{4i}{2 + 2i} = \frac{4i(2 - 2i)}{4 + 4} = \frac{8 + 8i}{8}$$

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = 1 + i$$

2a) Démontrons que l'écriture complexe de S est : z'=(1+i)z-2i

L'écriture complexe de S est sous la forme :z'=az+b ,déterminons a te b

On a $S\begin{cases} S(K) = K \\ S(A) = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_K = az_k + b, (1) \\ z_B = az_A + b, (2) \end{cases}$

(1)-(2)=$z_K - z_B = az_k + b - az_A - b$

$$z_K - z_B = az_k - az_A \Rightarrow a = \frac{z_K - z_B}{z_K - z_A} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = 1 + i$$

On $z_K = az_k + b \Rightarrow b = z_K - az_k = 2 - (1 - i) \times 2$

b=-2i

b) Déterminons les affixes des points I'et J'

on $z_I = 1$ $etz_J = i$,$z_I = (1 + i)z_I - 2i$

$$z_I = (1 + i) - 2i = 1 - i$$

$$z_J = (1 + i)i - 2i = -(1 + i)$$

3) Determinons le rapport et une mesure de l'angle orienté

Soit k le rapport ;$k = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

Soit θ l'angle orienté $\begin{cases} cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

Donc S est la similitude de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle orienté $\frac{\pi}{4}$

4.b) Déterminons le centre et rayon du cercle (c') par S .

(c) a pour centre Ω qui a pour affixe 1+i et de rayon 2 ,(c') aura pour centre Ω' qui aura pour affixe

$z_{\Omega'} = (1 + i)(1 + i) - 2z_{\Omega'} = -4i$ et rayon r'=kr=$2\sqrt{2}$

EXERCICE2

On considère la suite numérique (u) définie par : $\begin{cases} u_0 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2}u_n \end{cases}$

(n un entier naturel)

1) Déterminer les valeurs exactes de u_1 u_2

Pour tous nombre entier naturel $u_1 = 2 + \frac{1}{2}u_0$

$== 2 + \frac{1}{2} \times \sqrt{2}$

$$u_1 = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$$

$$u_2 = 2 + \frac{1}{2}u_1$$

$$u_2 = 2 + \frac{1}{2} \times \frac{4 + \sqrt{2}}{2} = \frac{12 + \sqrt{2}}{4}$$

3.a) Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 4$

On a :$u_0 = \sqrt{2}$ donc $u_0 \leq 4$ est vrai !

Soit un nombre entier naturel k tel que $u_k \leq 4$.

Démontrons que $u_{k+1} \leq 4$.

On a : $u_k \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{2}u_k \leq 2$

$$\Rightarrow 2 + \frac{1}{2}u_k \leq 4$$

or $u_{k+1} = 2 + \frac{1}{2}u_k$ donc $u_{k+1} \leq 4$ *vérifié* alors en conclusion $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 4$.

3.b) Démontrons que la suite (U) est croissante

Pour cela étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.

On a: $u_{n+1} - u_n = 2 + \frac{1}{2}u_n - u_n$.

$= 2 - \frac{1}{2}u_n$

D'après la question 3.a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 4 \Rightarrow -u_n \geq -4$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}u_n \geq -2$$

$$\Rightarrow 2-\frac{1}{2}u_n \geq 0$$

$$Donc\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1}-u_n \geq 0$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1}-u_n \geq 0$

Alors la suite (U)*est croissante.*

C) Déduisons que la suite (U) set convergente

$\forall n \in \mathbb{N}$ la suite (U) est croissante et majoré par 4 alors

$\forall n \in \mathbb{N}$ la suite (U) est convergente.

4)Montrons que la suite (V) définie par :$v_n = u_n - 4$ est une suite géométrique et précisons la raison ainsi que le premier terme.

Pour répondre a cette question nous allons démonter que $v_{n+1} = qv_n$,(q étant un nombre réel). On a :$v_n = u_n - 4$

$$\Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} - 4$$
$$= 2+\frac{1}{2}u_n - 4$$
$$= \frac{1}{2}u_n - 2$$
$$= \frac{1}{2}(u_n - 4)\ or\ v_n = u_n - 4\ donc \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

Et on a :$v_0 = u_0 - 4 = \sqrt{2} - 4$ Donc la suite (V) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}-4$.

5.a) Déterminons T_n en fonction de n

On a:$T_n = v_0 + v_1 ... + v_n$

$$= \sum_{0}^{n} v_k$$
$$= v_0\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$= (\sqrt{2}-4)\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{\frac{1}{2}}$$
$$T_n = 2\left(\sqrt{2}-4\right)\left[1-(\frac{1}{2})^{n+1}\right]$$

b) Justifions que $S_n = 2\left(\sqrt{2}-4\right)\left[1-\frac{1}{2^{n+1}}\right] + 4(n+1)$

$$S_n = u_0 + u_2 ... + u_n\ or\ v_n = u_n - 4 \Rightarrow u_n = v_n + 4$$

$$donc\ S_n = T_n + 4(n+1)$$
$$= 2\left(\sqrt{2}-4\right)\left[1-(\frac{1}{2})^{n+1}\right] + 4(n+1)$$
$$\Rightarrow S_n = 2\left(\sqrt{2}-4\right)\left[1-\frac{1}{2^{n+1}}\right] + 4(n+1)$$

C) Déterminons $limS_n$

$$limS_n = \lim 2\left(\sqrt{2}-4\right)\left[1-\frac{1}{2^{n+1}}\right] + 4(n+1)$$

$= +\infty\ car \begin{cases} lim\frac{1}{2^{n+1}} = 0 \\ \lim(n+1) = +\infty \end{cases} Donc\ \lim S_n = +\infty.$

Problème

1a) Calculons

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-1) + \ln(1-x)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)(x+1) + \ln(1-x)$

$$= \lim_{x\to-\infty}(1-x)(-x-1) + \ln(1-x)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}(1-x)\left[-x-1+\frac{\ln(1-x)}{1-x}\right]$$

Posons $X = 1-x \Rightarrow -x = X-1\ quand\ x\to-\infty; X\to+\infty$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} X\left(X-2+\frac{lnX}{X}\right)$

$$= +\infty\ car \begin{cases} \lim\limits_{X\to+\infty} X = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{lnX}{X} = 0 \end{cases} \quad donc\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x^2-1)+\ln(1-x)}{x}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x}{x}\left[-x-1+\frac{\ln(1-x)}{1-x}\right]$$

Posons $X = 1-x \Rightarrow -x = X-1\ quand\ x\to-\infty; X\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{X\to+\infty}\frac{X}{-X+1}\left[X-2+\frac{lnX}{X}\right]$$

$=-\infty\ Car \begin{cases} \lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X}{-X+1} = -1 \\ \lim\limits_{X\to+\infty}\left[X-2+\frac{lnX}{X}\right] = +\infty \end{cases} Donc\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = -\infty$

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ alors la courbe (c) admet une branche parabolique de direction (OJ) en -∞

c) $\lim\limits_{\substack{X \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{X \to 1 \\ <}} (x^2 - 1) + \ln(1 - x)$

Posons $X = 1 - x \Rightarrow -x = X - 1$ *quand* $x \to 1; X \to 0$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{X \to 0} (X^2 - 2X + lnX)$$

$$= -\infty \; Car \begin{cases} \lim\limits_{X \to 0} (X^2 - 2X) = 0 \\ \lim\limits_{X \to 0} lnX = -\infty \end{cases} \text{ donc } \lim_{\substack{X \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$$

Comme $\lim\limits_{\substack{X \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ alors la courbe (c) admet une asymptote verticale d'équation x=1.

2.a)$\forall x \in]-\infty; 1[, f'(x) = [(x^2 - 1) + \ln(1 - x)]'$

$$= 2x - \frac{1}{1 - x}$$

$$\forall x \in]-\infty; 1[, f'(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 1}{1 - x}$$

Comme$\forall x \in]-\infty; 1[, 1 - x > 0$ *alorslesignede*$f'(x)$*est celui de* $-2x^2 + 2x - 1$

$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$ *donc le signe de f'(x) est celui de -2 alors* $\forall x \in]-\infty; 1[, f'(x) < 0$.

b) comme $\forall x \in]-\infty; 1[, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$,

2.c) Tableau de variation

x	$-\infty$	1
f'	$-$	
f	$+\infty \searrow -\infty$	

3. a) $\forall x \in]-\infty; 1[, f'(x)<0$ alors f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$, donc f réalise une bijection de$]-\infty; 1[$, vers $f(]-\infty; 1[) = \mathbb{R}$ or $0 \in \mathbb{R}$,donc l'équation f(x)=0 admet une unique solution α dans $]-\infty; 1[$.

b) montrons que $\alpha \in]-0.7; -0.6[$,

α étant l'unique solution de l'équation f(x)=0 dans $]-\infty; 1[$ et $]-0.7; -0.6[\subset]-\infty; 1[$. *de plus*

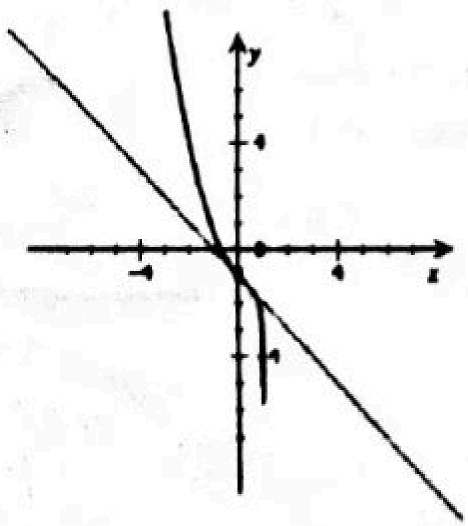
on a : $\begin{cases} f(-0.7) = 0.02 \\ f(-0.6) = -0.16 \end{cases}$ donc $f(-0.7) \times f(-0.6) < 0$

d'où $\alpha \in]-0.7; -0.6[$,

4.a) Démontrons l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0.

- (T) :$y = f'(0)(x-0) + f(0)$, or f'(0)=-1 et f(0)=0-1+ln1=-1 donc $y = -x - 1$

4.b) tracé de (c) et (T).



5.a) calculons $\int_\alpha^0 \ln(1-x)\,dx$

Posons V(x)=ln$(1-x)$;V'(x)=$\frac{-1}{1-x}$

U'(x)=1 ; U(x)=x

Donc $\int_\alpha^0 \ln(1-x)\,dx = -([x\ln(1-x)]_\alpha^0 - \int_\alpha^0 -\frac{x}{1-x}\,dx)$

$$= -((0 - \alpha\ln(1-\alpha) + \int_\alpha^0 \frac{x}{1-x}\,dx)$$

$$= -(-\alpha \ln(1-\alpha) + \int_{\alpha}^{0} \left(-1 + \frac{1}{1-x}\right) dx)$$

$$= -(-\alpha \ln(1-\alpha) + [-x - \ln(1-x)]_{\alpha}^{0})$$

$$= -(-\alpha \ln(1-\alpha) - [-\alpha - \ln(1-\alpha)])$$

$$= -(-\alpha \ln(1-\alpha) + [\alpha + \ln(1-\alpha)])$$

$$= \alpha \ln(1-\alpha) - \alpha - \ln(1-\alpha)$$

Donc $\int_{\alpha}^{0} \ln(1-x)\, dx = -(1-\alpha)\ln(1-\alpha) - \alpha$, U.A

REMARQUE : nous sommes sur $]-\infty; 0[$ *c'est pourquoi nous avons mis le signe* $(-.)$

5.b) Calcule A

$$A = \int_{\alpha}^{0} f(x)dx = \int_{\alpha}^{0} ((x^2-1) + \ln(1-x))dx$$

$$= \int_{\alpha}^{0} -(x^2-1) - \int_{\alpha}^{0} \ln(1-x)\, dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_{\alpha}^{0} - (1-\alpha)\ln(1-\alpha) - \alpha$$

$$= \frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha)$$

$$A = \int_{\alpha}^{0} f(x)dx = \frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha)$$

c)Déterminons la valeur de A en cm^2 pour α=-0.65

A=$\frac{(-0.65)^3}{3} - 2(-0.65) - (1+0.65)\ln(1+0.65) \times OI \times OJ$

A=1.53 cm^2

6.a) Calculons f(-1)

$f(-1) = (-1)^2 - 1 + \ln(1+1)$

$f(-1) = \ln 2$

b) Démontrons que le nombre dérivé de f^{-1}en ln2 et calculons le.

On a $\forall x \in]-\infty; 1[, f(x) = \ln 2 \Rightarrow x = -1; or f'(-1) = -\frac{5}{2} \neq 0$

Donc$f'^{-1}(\ln 2)$ *existe* et $f'^{-1}(\ln 2) = \frac{1}{\frac{5}{2}} = -\frac{2}{5}$.

CORRECTION BAC D 2014

Exercice 1

1. a) Démontrons que l'écriture complexe de S est :
$z' = \frac{1}{2}(1-i)z.$ $B(3-2i) et\ C(5+i)$.
-De centre O traduit que S(O) =O
-Qui transforme C en B traduit que S(C)=B
Or une similitude directe a pour écriture complexe : z'=az +b donc :

$$\begin{cases} S(O) = O \\ S(C) = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_O = az_O + b \\ z_B = az_C + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = z_O - az_O \\ a = \dfrac{z_B - b}{z_C} \end{cases}$$

Or $z_O = 0$ donc $b = 0$ et

$$a = \frac{z_B}{z_C} = \frac{3-2i}{5+i} = \frac{(3-2i)(5-i)}{(5+i)(5-i)} = \frac{13-13i}{26} = \frac{1}{2}(1-i)$$

Donc l'écriture complexe de S es t $z' = \frac{1}{2}(1-i)z$.

b) Déterminons les éléments caractéristiques de S.
- rapport k

$$k = |a| = \left|\frac{1}{2}(1-i)\right| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

-angle θ

$$\begin{cases} cos\theta = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$

-le centre $O\binom{0}{0}$.

C) Déterminons l'image du point D qui pour image C
On a (S) : $z' = \frac{1}{2}(1-i)z$
Or D qui pour image C traduit que S(D)=C ce qui implique que

$$z_C = \frac{1}{2}(1-i)z_D \Rightarrow z_D = \frac{z_D}{\frac{1}{2}(1-i)} = \frac{1}{2}(2-3i)$$

(Forme algébrique).

2.a)justifions l'affixe de Z_1.

B_1 qui pour B implique que :$z_{B_1} = \frac{1}{2}(1-i)z_B$.

$z_{B_1} = \frac{1}{2}(1-i)z_B = \frac{1}{2}(1-i)(3-2i) = \frac{1}{2}(1-5i)$.

B) justifions que le triangle OBB_1 est rectangle isocèle *en* B_1

On a : $\frac{z_{B_1}-z_B}{z_{B_1}-z_O} = \frac{\frac{1}{2}(1-5i)-(3-2i)}{\frac{1}{2}(1-5i)-0} = \frac{-5-i}{1-5i} = \frac{-26i}{26} = -i$ comme $\frac{z_{B_1}-z_B}{z_{B_1}-z_O} = -i$ alors le triangleOBB_1 est rectangle isocele en B_1.

a) 3. Démontrer par récurrence que
$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-i)^n z_o$.

On a : $(B_n) : \begin{cases} B_o = B \\ \forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = S(B_n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_o = 3-2i \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{2}(1-i)z_n \end{cases}$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{2}(1-i)z_n$ et $\frac{1}{2}(1-i) \in \mathbb{C}$. alors z_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}(1-i)$ et de premier terme $B_o = 3-2i$ donc comme z_n est une géométrique nous pouvons l'exprimer en fonction de n.
Donc $z_n = \left[\frac{1}{2}(1-i)\right]^n Z_o = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-i)^n z_o$.

b) Calculons la distance OB_n en fonction de n
On a :$\|\overrightarrow{OB_o}\| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$
Or $OB_n = k\|\overrightarrow{OB_o}\|$ avec $k = \left\|\left(\frac{1}{2}\right)^n (1-i)^n\right\|$
Donc $OB_n = \left\|\left(\frac{1}{2}\right)^n (1-i)^n\right\| \sqrt{13}$.

c) $\lim_{n\to+\infty} OB_n = 0$
car $\frac{1}{2} < 1$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

<u>Problème :</u>

1. a) Déterminons la valeur de b.

Sachant g(0)=1

$g(0)=1 \Leftrightarrow 0+(0\times x+b)e^{0}=1$

$\Leftrightarrow b=1$

b) Si (T) est parallèle (D) alors (T) aura le même coefficient directeur que (D). donc : (T) ; y=x+b. et comme (T) est la tangente a (C) au point d'abscisse 0 alors on en déduit que (T) : y=g'(0)(x-0)+g(0). Donc g'(0)(x-0)+g(0) =x+b par identification on en déduis que g'(0)=1.

Or $g'(x)=[=x+(ax+b)e^{-x}]'$

$=1+ae^{-x}-(ax+b)e^{-x}=1+(-ax-b+a)e^{-x}$

$g'(0)=1 \Leftrightarrow 1+(-a\times 0-1+a)e^{0}=1$

$\Leftrightarrow 1+(-1+a)\times 1=1 \Leftrightarrow \boldsymbol{a=1}$

2)calculons h'(x)

$\forall x\in\mathbb{R},\ \boldsymbol{h'(x)=[e^{x}-x]'=e^{x}-1}$

a)Dressons le tableau de variation de h

$\forall x\in\mathbb{R},\ h'(x)=0 \Leftrightarrow e^{x}-1=0 \Leftrightarrow x=ln1 \Leftrightarrow x=0$

x	-∞		0		+∞
h'(x)		−	**0**	+	
h		↘	1	↗	

- h(0)=1

b) déduisons que $\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)>0.$

Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x)$ admet un et un seul minimum positif alors $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) > 0$.

PARTIE B

1.a)Calculons la limite de f en $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}[x + (x+1)e^{-x}] = -\infty.$$

$$\text{car}\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

b) Justifions que :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + (x+1)e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left[1 + \frac{x+1}{x}e^{-x}\right] = +\infty$$

$$\text{Car}\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$$

Donc

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

c. Interprétons

comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ alors la courbe (C) admet une branche parabolique.

Et

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ alors la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (OJ).

2.a) calculons la limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x + (x+1)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\left[x + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right] = +\infty$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \end{cases}$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) Démontrons que (D) est une asymptote à (C) en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} x + (x+1)e^{-x} - x = \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^{-x} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \end{cases}$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = 0$.

Alors comme $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = 0$. Alors la droite (D) d'équation y=x est asymptote oblique a (C) en $+\infty$.

c) Etudions les positions relatives de (D) et (C)

On a $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - x = (x+1)e^{-x}$ or pour tous nombre reel $e^{-x} > 0$ donc le signe de $f(x) - x$ est celui de x+1 donc

$\forall x \in]-\infty; -1[, f(x) - x < 0$ donc (C) est en dessous de (D). $\forall x \in]-1; +\infty[, f(x) - x > 0$ alors la courbe (C) est au dessus de (D).

3.

a) Démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^{-x}h(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = [x + (x+1)e^{-x}]' = 1 + e^{-x} - (x+1)e^{-x}$

$= e^{-x}[e^x + 1 - (x+1)] = e^{-x}(e^x - x)$

Or h(x)=$e^x - x$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^{-x}h(x)$.

b) Sens de variation de f.

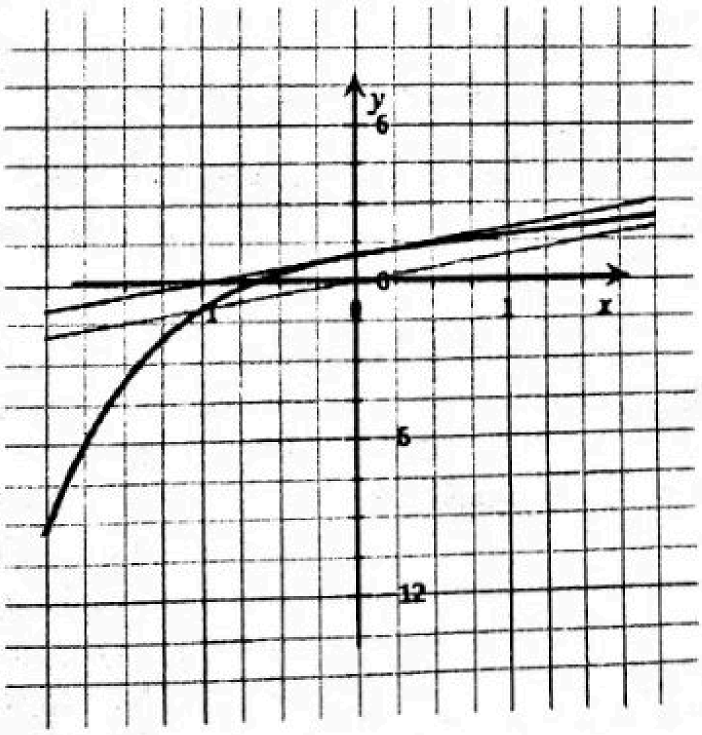
$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} > 0$ *et* $h(x) > 0$ alors

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) dressons le tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$	$+\infty$

4) courbe



5) a) Démontrons que f est une bijection de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, f *est* continue et strictement croissante donc f realise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

b).Calculons $(f^{-1})'(1)$.

comme $f(o) = 1$ et de plus $f'(0) = e^0(e^0 - 0) = 1 \neq 0$

Alors $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1} = 1$.

5.b voir courbe

Partie C :

1) A l'aide d'une intégration par partie démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$,
$I_n = (-2-n)e^{-n} + e$.

On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}, I_n = \int_{-1}^{n}(t+1)e^{-t}dt$.

Posons $\begin{cases} v(x) = t+1 \Leftrightarrow v'(x) = 1 \\ u'(x) = e^{-t} \Leftrightarrow u(x) = -e^{-t} \end{cases}$

Donc

$$I_n = [-(t+1)e^{-t}]_{-1}^{n} + \int_{-1}^{n} e^{-t}dt = [-(t+1)e^{-t}]_{-1}^{n} - [e^{-t}]_{-1}^{n}$$
$$= -(n+1)e^{-n} - 0 - e^{-n} + e$$

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, I_n = (-2-n)e^{-n} + e$

2) Calculons l'aireA_n

$$A_n = \int_{-1}^{n}[f(x) - x]dx \times u.a = \int_{-1}^{n}(x+1)e^{-x}dx \times oi \times oj$$
$$= I_n = (-2-n)e^{-n} + e\ cm^2$$

3.) Calculons

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}(-2-n)e^{-n} + e$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{n}{e^n} - \frac{2}{e^n} + e\right] = e$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} -\frac{n}{e^n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} -\frac{2}{e^n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} e = e \end{cases}$ donc

$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = e$

CORRECTION BAC D SESSION 2015

EXERCICE 1

On considère la fonction p définie sur $\forall z \in \mathbb{C}$, $p(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i$.

1.a) Calculons *p(i)*.

$$p(i) = i^3 - (3+2i)i^2 + (1+5i)i + 2 - 2i$$
$$= -i + 3 + 2i + i - 5 + 2 - 2i$$
$$= 0$$

alors $p(i) = 0$ donc i est solution de *p(z)*.

b)) déterminons les nombres complexes a et b

on a $p(z) = (z-i)(z^2 + az + b) = z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i$

$\Leftrightarrow z^3 + az^2 + bz - iz^2 - iaz - ib = z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i$

$\Leftrightarrow z^3 + (a-i)z^2 + (b-ia)z - ib = z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i$

Donc par identification $\begin{cases} a - i = -3 - 2i \\ -ib = 2 - 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -(3+i) \\ b = 2 + 2i \end{cases}$

donc $p(z) = (z-i)(z^2 - (3+i)z + 2 + 2i)$

2.Resolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : *p(z)=0*

$$p(z) = 0 \Leftrightarrow z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i = 0$$
$$\Leftrightarrow (z-i)(z^2 - (3+i)z + 2 + 2i) = 0$$
$$\Leftrightarrow z - i = 0 \text{ ou } (z^2 - (3+i)z + 2 + 2i) = 0$$

$\Leftrightarrow z = i$ *et pour le deuxième membre calculons* Δ.

On a : $\Delta = [-(3+i)]^2 - 4 \times 1 \times (2+2i)$

$= (3+i)^2 - 8 - 8i$

$\Delta = -2i$

Soit ∂ un nombre complexe tels que $\partial = x + iy$ et $\partial^2 = \Delta$

Donc on a :

$$\left|\begin{array}{l} x^2 + y^2 = |\Delta| \\ x^2 - y^2 = Réel(\Delta) \\ 2xy = imaginaire(\Delta) \end{array}\right. \text{ donc } \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & (1) \\ x^2 - y^2 = 0 & (2) \\ 2xy = -2 & (3) \end{cases}$$

$1+2=2x^2=2$

$x^2=1$

$x_1=1 \quad ou \ x_2=-1$

$2xy \quad =-2 \qquad ou \qquad 2xy=-2$

$2x_1y_1=-2 \qquad ou \quad 2x_2y_2=-2$

$y_1=\frac{-2}{2x_1}; \qquad ou \quad y_2=\frac{-2}{2x_2}$

$y_1=\frac{-2}{2}; \qquad ou \quad y_2=\frac{-2}{-2}$

$y_1=-1 \qquad ou \ y_2=1$

Les racines de Δ sont $\boxed{\sqrt{\Delta}=1-i}$ et $\boxed{-\sqrt{\Delta}=-1+i}$

$z_1=\frac{3+i-1+i}{2}$ $\qquad z_2=\frac{3+i+1-i}{2}$

$z_1=\frac{2+2i}{2}=1+i$ $\qquad z_2=\frac{4}{2}=2$

$\boxed{S_C=\{1+i;\ 2\}}$

Donc les solutions de l'équation (E) : $p(z)=0$ sont :

$\boxed{S_C=\{i;1+i;\ 2\}}$

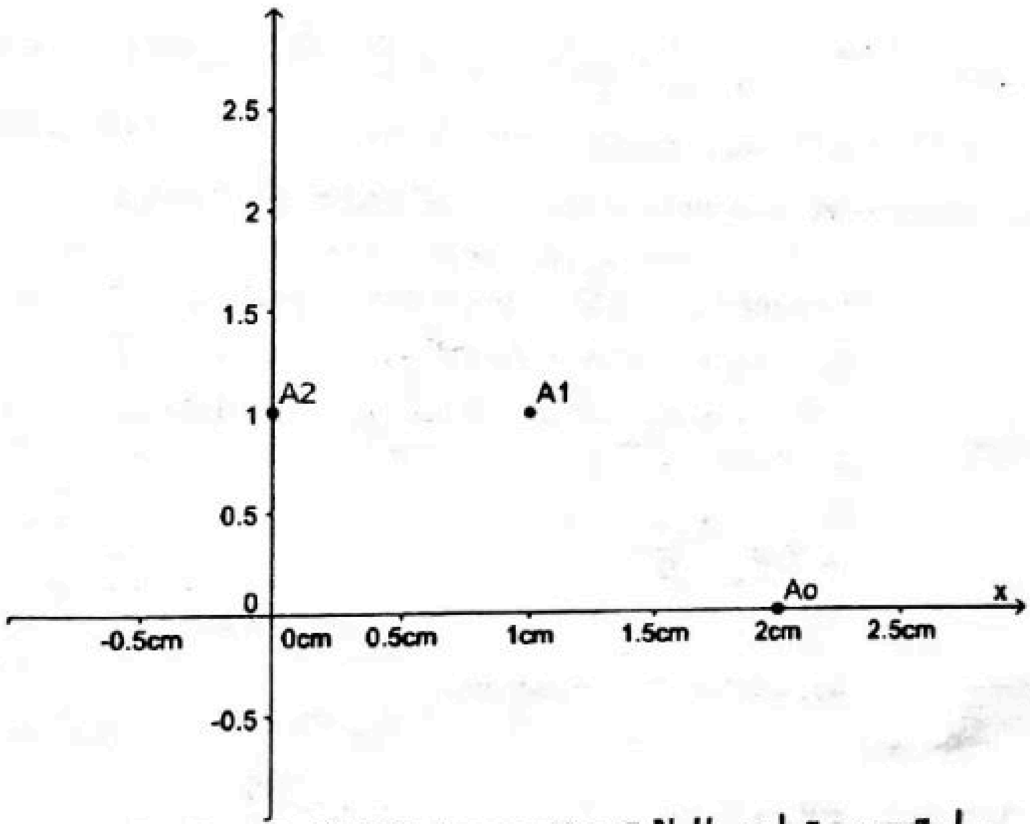
Partie 2

1.a) Calculons z_1 et z_2.

On a : $z_0=2$ donc $z_1=\frac{1+i}{2}z_0=\frac{1+i}{2}\times 2=1+i$

Et $z_2=\frac{1+i}{2}z_1=\frac{1+i}{2}\times(1+i)=\frac{1+2i-1}{2}=i.$

b)) construction.



2.On considère la suite U définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = |\ z_{n+1} - z_n|$.

a) Justifions que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = |\ z_{n+1} - z_n|$; Or $z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n$

$$= \left|\frac{1+i}{2}z_n - z_n\right|$$

$$= \left|(\frac{1+i}{2} - 1)z_n\right|$$

$$= \left|(\frac{-1+i}{2}\right||z_n|$$

$$= \frac{|-1+i|}{|2|}|z_n|$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$

b)) Démontrer que la suite U est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$ Donc $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_{n+1}|$ Or $z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n$

Donc $U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\frac{1+i}{2}z_n\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\frac{1+i}{2}\right||z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times |z_n|$ Or $U_n = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times U_n$ alors la suite U est une suite geometrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $U_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_0| = \frac{\sqrt{2}}{2}|2| = \sqrt{2}$

c)) Exprimons U_n en fonction de n.

Comme U_n est une suite géométrique alors

$U_n = U_0 \times (q)^{n-0} = \sqrt{2} \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^n$.

3.a) Calculons I_n étant donné que I_n est la sommes d'une suite géométrique alors .

$$I_n = \frac{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

b)) Calculons la limite de

$\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{2-\sqrt{2}}$ car $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{\sqrt{2}}{2})^n = 0$

parceque $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$.

Exercice 2.

1.a) $p(E)=p(A)\times p(B) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$.

b) $p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$

$p(B) = 0,6 \times 0,7 + 0,4 \times 0,4$

$p(B) = 0,58$.

C) Mariam réalise un bénéfice déterminons la probabilité pour qu'il ait eu une affluence ce jour.

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,42}{0,58} = 0,724$$

2.a) Les valeurs prises par X sont :

- Mariam peut ne pas réaliser de bénéfice pendant les 3 jours alors X=0

- Mariam peut réaliser un jour de bénéfice sur les 3 jours alors X=1
- Mariam peut réaliser 2 jours de bénéfice sur les 3 jours alors X=2
- Mariam peut réaliser 3 jours de bénéfice sur les 3 jours alors X=3

  Alors les valeurs prises par X sont $X = \{0; 1; 2; 3\}$.

2.b) Déterminons la loi de probabilité

X suit une loi binomiale de paramètres p=0,58 et q=0,42 et n=3.

Alors on a : $p(X = 0) = c_3^0 \times 0{,}58^0 \times (0{,}42)^3 = 0{,}074$

$$p(X = 1) = c_3^1 \times 0{,}58^1 \times (0{,}42)^2 = 0{,}306$$

$$p(X = 2) = c_3^2 \times 0{,}58^2 \times (0{,}42)^1 = 0{,}423$$

$$p(X = 3) = c_3^3 \times 0{,}58^3 \times (0{,}42)^0 = 0{,}192$$

Xi	*0*	*1*	*2*	*3*	
P(X=Xi)	*0,074*	*0,306*	*0,423*	*0,192*	*1*

d) Calculons E(X)

E(X)=np=3x0,58=1,74

3.a) Justifions que : : $P_n = 1 - (0{,}42)^n$

La probabilité pour que Mariam ne réalise pas de bénéfice est $(0{,}42)^n$ Or la probabilité qu'elle réalise au moins un bénéfice une fois sur les n jours est le contraire de ne pas réaliser de bénéfice pendant les n jours est :

$P_n = 1 - (0{,}42)^n$.

3.b) Déterminons la valeur minimale de n.

$: P_n \geq 0{,}999 \Leftrightarrow 1 - (0{,}42)^n \geq 0{,}9999$

$$\Leftrightarrow -(0{,}42)^n \geq 0{,}9999 - 1$$

$$\Leftrightarrow -(0{,}42)^n \geq -0{,}0001$$

$$\Leftrightarrow (0{,}42)^n \leq 0{,}0001$$

$$\Leftrightarrow ln(0{,}42)^n \geq \ln(0{,}0001)$$

$$\Leftrightarrow n ln(0{,}42) \geq \ln(0{,}0001)$$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}42)}$ on donc $n \geq 10{,}61$ donc $n = 11$.

PROBLEME.

1. Démontrons que g est solution de l'équation différentielle (E) : $y'+y = r$. avec $r(x) = xe^{-x}$

On a g la fonction définie sur ℝ par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$

Donc $g'(x) + g(x) = \left(\frac{1}{2}x^2e^{-x}\right)' + \frac{1}{2}x^2e^{-x}$

$$= \left[\!\left[\left(\frac{1}{2}x^2\right)' \times e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 \times (e^{-x})'\right]\!\right] + \frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

$$= xe^{-x} - \frac{1}{2}x^{2e^{-x}} + \frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

$$= xe^{-x} = r(x)$$

Comme $g'(x) + g(x) = r(x)$ alors g est solution de (E).

2.a Soit l'équation différentielle (F) : $y' + y = 0$

Démontrons qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de (F).

Si $\varphi - g$ est solution de (F) alors $(\varphi - g)' + (\varphi - g) = 0$

$$\Leftrightarrow \varphi' - g' + \varphi - g = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi' + \varphi = g' + g \quad \text{Or} \quad g' + g = r \text{ donc}$$

$\varphi' + \varphi = r$

Alors φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de (F).

b). Résolvons (F) .

(F) : y'+y=0 les seules solutions de l'équation de (F) sont les fonctions définie de IR vers IR par :

$$f_k(x) = ke^{-x} \text{ avec } (k \in IR).$$

c) Déduisons la solution φ de (E) qui verifie $\varphi(0) = -\frac{3}{2}$

$\varphi - g$ est solution de (F) ce qui implique que $\varphi - g = ke^{-x}$

$\Leftrightarrow \varphi = ke^{-x} + g \Leftrightarrow \varphi = ke^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x}$ de plus

$\varphi(0) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow ke^0 + \frac{1}{2} \times 0^2 \times e^0 = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2}$

Donc $\varphi(x) = -\frac{3}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x} = \frac{x^2-3}{2}e^{-x}$

Donc la solution de φ de (E) qui verifie $\varphi(0) = -\frac{3}{2}$ est

$\varphi(x) = \frac{x^2-3}{2}e^{-x}$

Partie B

1a) calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-3}{2}e^{-x} = +\infty$ Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-3}{2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$ donc

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$

b)) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2-3}{2}e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{1}{2}x - \frac{3}{2x})e^{-x}$

$$= -\infty \ car \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{2x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ alors la courbe *(cf)* admet une branche parabolique de direction (OJ).

2. Calculons limite de f en $+\infty$ puis interprétons.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3}{2}e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2}e^{-x} - \frac{3}{2}e^{-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{2e^x} - \frac{3}{2e^x}\right) = 0 = \text{ car} \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2e^x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{2e^x} = 0 \end{cases}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ al !ors la droite d'équation *y=0* est asymptote horizontale a *(cf)*.

3.a) . Démontrons que $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{3+2x-x^2}{2}e^{-x}$

On a :. $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = \left(\frac{x^2-3}{2}e^{-x}\right)' = \left[\frac{1}{2}(x^2-3)e^{-x}\right]'$

$$= \frac{1}{2}[(x^2-1)'(e^{-x}) + (x^2-3)(e^{-x})']$$

$$= \frac{1}{2}[\![2xe^{-x} - (x^2 - 3)(e^{-x})]\!]$$
$$= \frac{3+2x-x^2}{2}e^{-x}$$

Donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{3 + 2x - x^2}{2}e^{-x}$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^{-x}}{2} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ depends de celui de $3 + 2x - x^2$;

$\Delta = 4 - 4 \times (-1) \times 3 = 4 + 12 = 16$; $\sqrt{\Delta} = 4$

$$x_1 = \frac{-2-4}{-2} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{-2+4}{-2} = -1.$$

x	$-\infty$ -1 3 $+\infty$
$3 + 2x - x^2$	- 0 + 0 -
$f'(x)$	- 0 + 0 +

$\forall\, x \in\,]-\infty; -1[\, \cup\,]3; +\infty[$, $f'(x) < 0$

$\forall\, x \in\,]-1; 3[$; $f'(x) > 0$.

Comme

$\forall\, x \in\,]-\infty; -1[\, \cup\,]3; +\infty[$, $f'(x) < 0$ alors *f est strictement décroissant sur* $]-\infty; -1[$ *et sur* $]3; +\infty[$.

Et comme $\forall\, x \in\,]-1; 3[$; $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissant sur $]-1; 3[$.

c)) Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	$\frac{3}{e^3}$	$\searrow$	0

4) Démontrons qu'une équation de la tangente (T) à la courbe *(cf)* **au point** d'abscisse x=0 est :

$y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

On a : (T) : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ or $\begin{cases} f'(0) = \frac{3}{2} \\ f(0) = -\frac{3}{2} \end{cases}$

Donc $y = \frac{3}{2}(x-0) - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

5) Etudions les positions de *(cf)* par rapport à l'axes des abscisses .

Ceci revient à étudier le signe de *f(x)*.

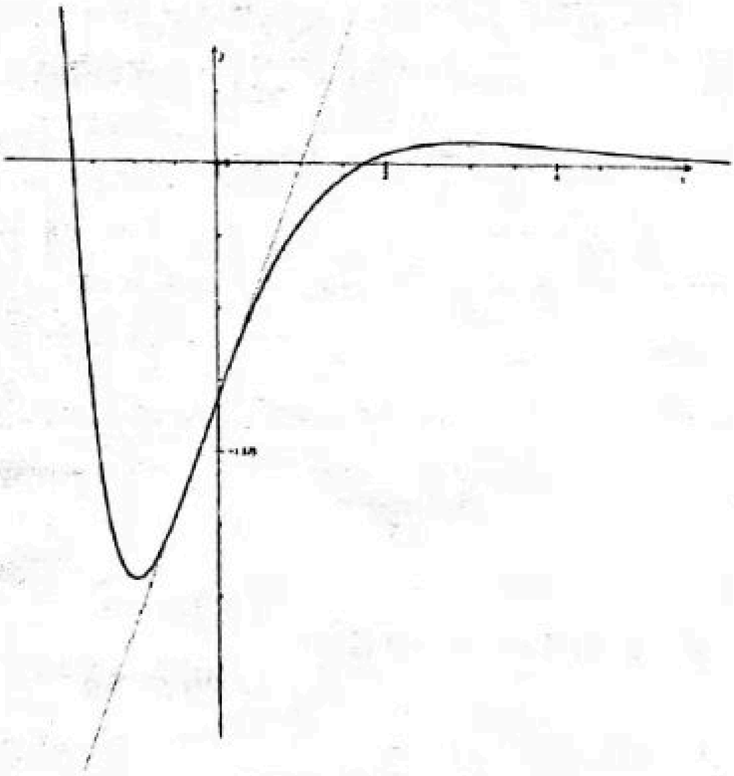
$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3}{2}e^{-x} = 0$ or $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^{-x}}{2} > 0$ donc le signe de $f\ (x)$ depends de celui de$x^2 - 3$

or $x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.

$\forall\, x \in \left]-\infty; -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}; +\infty\right[$, $f(x) < 0$ donc *(cf)* est au-dessus de (OI) sur $\left]-\infty; -\sqrt{3}\right[$ *et sur* $\left]\sqrt{3}; +\infty\right[$,

$\forall x \in]-\sqrt{3};\sqrt{3}[\ ; f(x) > 0$ donc (*cf*) est au-dessous de (OI) sur $]-\sqrt{3};\sqrt{3}[$.

6) Construction.



Partie C

1.) A l'aide d'une intégration par partie , calculer : $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$.

Posons $\begin{cases} U(x) = x & ; U'(x) = 1 \\ V'(x) = e^{-x}; & V(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$\int_0^1 xe^{-x}\,dx = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx$

$= [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^1$

$= -e^{-1} - e^{-1} + 0 + e^0$

$= -2e^{-1} + 1$

Donc

$$\boxed{: \int_0^1 xe^{-x}\,dx = -2e^{-1} + 1}$$

2.a) V

On a : $f'(x) + f(x) = \frac{3+2x-x^2}{2}e^{-x} + \frac{x^2-3}{2}e^{-x}$

$$= \frac{3+2x-x^2+x^2-3}{2}e^{-x}$$

$$= \frac{2x}{2}e^{-x} = xe^{-x} = r$$

comme $f'(x) + f(x) = r$ donc *f est une solution de (E).*

b.) Déduisons que $f(x) = -f'(x) + xe^{-x}$.

Etant donné que f est solution de l'équation différentielle (E). alors $f'(x) + f(x) = r \Leftrightarrow f(x) = -f'(x) + r = -f'(x) + xe^{-x}$

donc

$$\boxed{f(x) = -f'(x) + xe^{-x}}$$

c)

$$A = \int_0 f(x)dx = \int_0 (f'(x) + xe^{-x})dx$$

$= \int_0^1 f'(x)dx + \int_0^1 xe^{-x}dx$ or d'apres la question précédente $\int_0^1 xe^{-x}dx = -2e^{-1} + 1$ donc

$$A = [f(x)]_0^1 - 2e^{-1} + 1$$

$$= \left[\frac{x^2-3}{2}e^{-x}\right]_0^1 - 2e^{-1} + 1$$

$$= -e^{-1} + \frac{3}{2} - 2e^{-1} + 1$$

$= -3e^{-1} + \frac{5}{2}$ comme il s'agit de l'aire en cm^2 alors :

$$A = \left\|-3e^{-1} + \frac{5}{2}\right\| \times OI \times OJ = \left\|-3e^{-1} + \frac{5}{2}\right\| \times 2 \times 4\ cm^2$$

$$\boxed{A = \left\|-3e^{-1} + \frac{5}{2}\right\| \times 8\ cm^2}$$

Bonne chance !

Edité et imprimé par Cod' couleur
Tél.: +225 20 37 66 53 / +225 07 61 07 06
cod_couleur@yahoo.fr

Dépôt légal N° 11441 du 27 Août 2014
3è Trimestre 2014

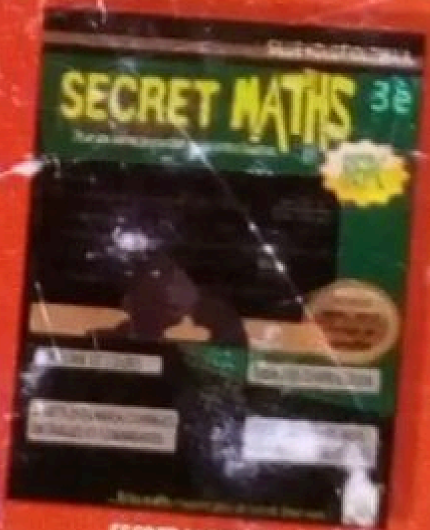
L'AUTEUR.

DANS LA MEME COLLECTION

SECRET PHILO 1ère/Tle

SECRET FRANÇAIS 2nde / 1ère/Tle

SECRET FRANÇAIS 3è



SECRET MATHS 3è

Et aussi...
SECRET ANGLAIS 3è
SECRET PHYSIQUES Tle
SECRTE ANGLAIS Tle
et bien d'autres à venir

Avec

l'échec n'est plus une fatalité mais un choix

COORDINATEUR
SIDIKI CALAMA
(22.. 09 59 79 2..

OU SE PROCURER LES LIVRES ?

POINTS DE VENTE	REPRESENTANTS	CONTACTS
Abidjan (Adjamé)	Américain	05 86 34 4..
	M. Kéita Kassima	09 39 08 78
Daloa	MM. Kouadia & Eboulé (Lycée 2)	07 95 18 41 / 4. 60 77 .7
Bouaké	Librairie Ka..us	07 84 11 82
Divo	M. Coulibaly	07 20 75 58 / 04 36 52 .5
Bouaflé	Edipress / Espace burotik	08 18 18 16 / 49 91 57 11
San Pedro	Abou	46 23 53 83
Soubré	M. Bamba Sékou	04 95 63 30
Issia	Océan Burotik / Traoré	01 47 52 26/05 68 93 58
Odiénné	Dramé	
Gagnoa	Traoré/Ouattara	07 64 63 21/48 .3 08 9.
Ferké	Librairie papeterie (face moov)	05 09 35 58/ 49 17 02 11
Burkina Faso	Librairie Boussim	(226) 75067249