قرطاج
للنشر و التوزيع

Collection«Pilote»

MATHEMATIQUES

Algèbre & Géométrie

Section
Sciences
TECHNIQUE

Rappels de cours
Recueil d'exercices corrigés
Extraits de devoirs corrigés

3
ème année
Sciences
TECHNIQUE

INTRODUCTION

Ce manuel est destiné aux élèves de 3^{ème} année secondaire section sciences Techniques, il fait partie de la « **Collection Pilote** ».

Ce livre comporte :

- Des résumés de cours complets.
- Des QCM qui permettent à l'élève de faire son auto-évaluation.
- Des Vrai / Faux qui permettent l'apprentissage progressif des règles logiques.
- Des lectures graphiques.
- Des exercices et des problèmes permettant aux élèves d'assimiler le cours, d'approfondir leurs compréhensions des concepts mathématiques, d'apprendre des techniques et des astuces pour la résolution des problèmes. Ils sont organisés par ordre croissant de difficultés .
- Des devoirs de contrôle et de synthèse :En utilisant des procédés diversifiés de genre QCM, Vrai / Faux , tableaux à remplir, lectures graphiques, exercices intégratifs.
- ce livre permet aux élèves de viser la mention et une bonne préparation pour le bac et les grandes écoles supérieures (facultés de Mathématiques, circuit préparatoire, polytechniques, etc..........)

Nous tenons à remercier vivement : nos familles pour leurs patience.

Sommaire

Titre	Exercices	Solutions
Généralités sur les fonctions	3	1
Notion de Limite	7	7
Continuité	9	11
Dérivabilité d'une fonctions Fonction Dérivées	14	18
Etude de fonction	19	22
Fonctions circulaires	26	33
Suites réelles	31	38
Dénombrement	38	48
probabilités	43	55
STATISTIQUE	52	67
Angles Orientés	55	75
Formules Trigonométriques	58	78
Equation et inéquations fondamentales Trigonométrie	61	81
Produit Scalaire dans le plan	64	96
Nombres complexes	68	100
vecteurs de l 'espace, repère cartésien de l'espace	73	106
Droites et plans de l'espace	77	109
Produit scalaire dans un repère orthonormé de l'espace	80	115
Produit vectoriel Produit mixte	85	126
Devoirs	88	130

RESUME DU COURS

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
- La fonction f est croissante sur I si pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, $f(a) \leq f(b)$.
- La fonction f est décroissante sur I si pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, $f(a) \geq f(b)$.
- La fonction f est constante sur I si pour tous réels a et b de I , $f(a) = f(b)$. Une fonction est dite monotone sur un intervalle I lorsqu'elle est croissante sur I ou décroissante sur I.

Théorème : Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.
On dit que f est une fonction paire si pour tous x appartenant à D, - x appartient à D et $f(-x) = f(x)$
La fonction f est paire , si et seulement si , sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
On dit que f est une fonction impaire si pour tout x appartenant à D, -x appartient à D et $f(-x) = -f(x)$.
La fonction f est impaire, si et seulement si, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Définition : Soit f une fonction définie sur un ensemble E et (C) .Sa représentation graphique dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

Soit D une partie de E . On appelle restriction de la fonction f à D, la fonction g définie sur D par $g(x) = f(x)$, pour tout x de D. La représentation graphique de g est l'ensemble des points de C ayant pour coordonnées (x , f(x)) , x appartenant à D.

Théorème : Soit f une fonction définie sur un ensemble D.
S'il existe un réel x_0 appartenant à D tel que pour tout x de D , $f(x) \leq f(x_0)$, on dit que la fonction f admet sur D un maximum en x_0 ou encore que $f(x_0)$ est un maximum de f sur D.
Soit f une fonction définie sur un ensemble D.
S'il existe un réel x_0 appartenant à D tel que pour tout x de D , $f(x_0) \leq f(x)$, on dit que la fonction f admet sur D un minimum en x_0 ou encore que $f(x_0)$ est un minimum de f sur D.

Définition : Soit f une fonction définie sur un ensemble D.
- La fonction f est dite majorée sur D s'il existe un réel M tel que pour tout x de D, $f(x) \leq M$.
- La fonction f est dite minorée sur D s'il existe un réel m tel que pour tout x et D, $m \leq f(x)$.
- La fonction f est dite bornée sur D s'il existe deux réels m et M tel que pour tout x de D, $m \leq f(x) \leq M$.

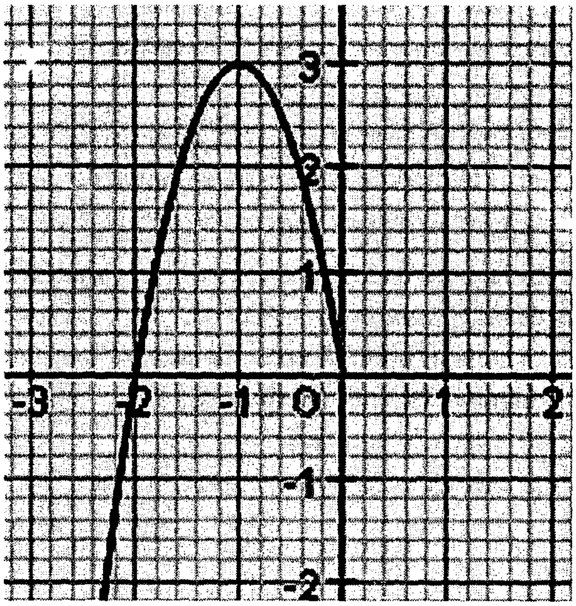
Théorème : On appelle fonction affine par intervalles toute fonction définie sur une réunion d'intervalles et telle que sa restriction à chacun de ces intervalles soit affine.

Définition : - On appelle partie entière d'un réel x et on note E(x) , le plus grand entier inférieur ou égal à x . - On appelle fonction partie entière la fonction qui à tout réel associe sa partie entière.
Soit E la fonction partie entière. Pour tout réel x , il existe un entier n tel que x appartient à $[n , n+1[$ On a alors $E(x) = n$.

Théorème : Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle I.
- Soit f est croissante sur I alors $\sqrt{f}$ est croissante sur I.
- Si f est décroissante sur I alors $\sqrt{f}$ est décroissante sur I.
- Si f est majorée sur I alors $\sqrt{f}$ est majorée sur I.

Théorème : Soit f et g deux fonctions définies sur un ensemble D telles que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in D$.
La fonction $x \mapsto \frac{1}{g(x)}$ est notée $\frac{1}{g}$. La fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ est notée $\frac{f}{g}$.

LES EXERCICES



Exercice N°1 : La courbe représentative d'une fonction impaire f définie sur IR et partiellement tracée ci-contre.

1) Achever le tracé.

2) a) Déterminer les variations de f sur $[0;2]$.

b) Résoudre l'inéquation

3) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)=f^2(x)$.

a) Etudier la parité de g.

b) Soit a et b deux réels de $]-\infty;-2]$ tels que $a<b$,

comparer $g(a)$ et $g(b)$, en déduire le sens de variations

de g sur $]-\infty;-2]$

c) Etudier les variations de g sur $[-2;0]$

Exercice N° 2:

Soit f la fonction définie sur IR* par $f(x)=x+\frac{4}{x}$.

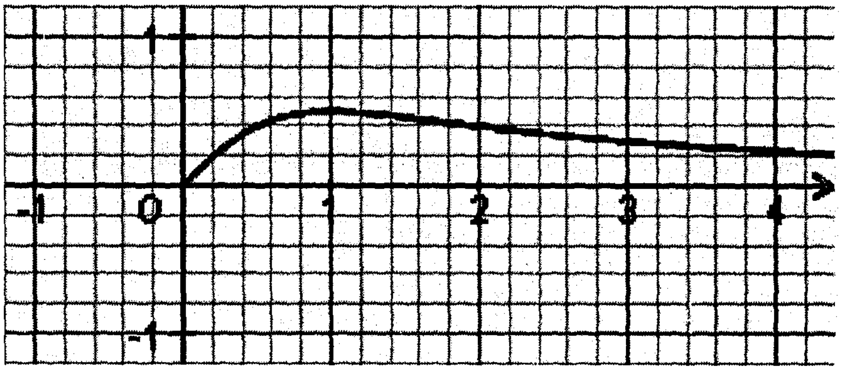
1) Montrer que la fonction f est impaire.

2) Soit g la restriction de f sur IR$_+^*$.

a) Montrer que 4 est un minorant de g sur IR$_+^*$. b) Le réel 4 est-il un minimum de g ?

3) Montrer que la restriction de f sur IR$_-^*$ admet un maximum que l'on précisera.

Exercice N°3:Dans la figure ci-contre, on a représenté la restriction à IR$_+$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$.



1)Achever la représentation graphique de f.

2)Déterminer un majorant et un minorant de f sur IR.

3) a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=\frac{1}{2}x$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\leq\frac{1}{2}x$.

4) On pose $g(x)=|f(x)|$.a) Tracer la courbe (ξ_g) de g dans le même repère.

b) En quelles valeurs la fonction g atteint-elle son maximum ?

Exercice 4: Soit la fonction $f : x \mapsto x^2-4x-1$.

1) Montrer que (-2) est la valeur minimale de f sur IR.

2) Soit la fonction $g : x \mapsto -x^2-4x$ .a) Montrer que 2 est un majorant de g sur IR.

b) Le réel 2 est-il maximum de la restriction de f à $[3;6]$?

Exercice N°5 :Considérons la fonction f définie sur IR et ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ ci-contre :

1)Examiner la parité de f.

2) Dresser le tableau de variation de f.

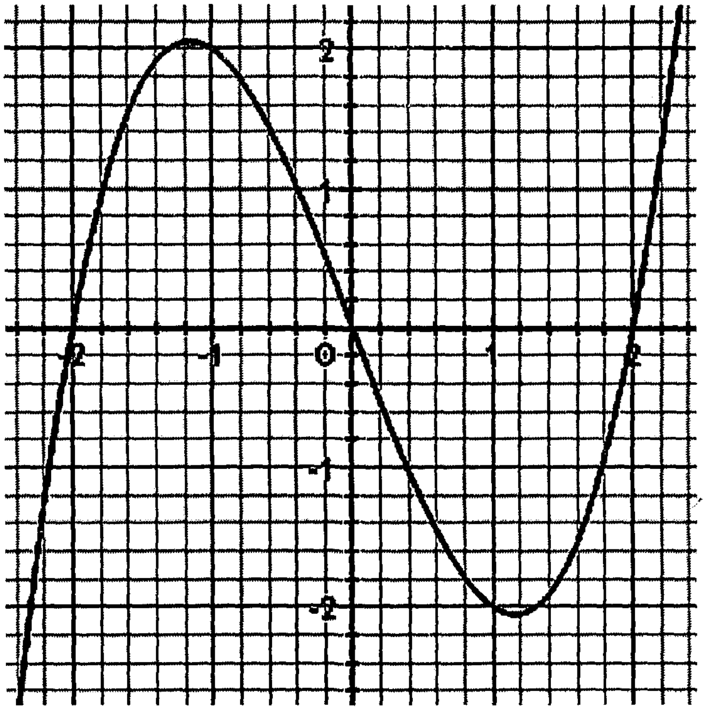
3) a) Dresser le tableau de variation de g la restriction de f à l'intervalle $[-2;2]$

b) Donner un maximum atteint par g puis en déduire deux majorants de g.

c) Donner un minimum atteint par g puis en déduire deux minorants de g.

d) g est-elle bornée ?

4) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=0$.



Exercice 6:Le tableau ci-dessous est celui de des variations d'une fonction f .

x	-2		1		9
$f(x)$		↘		↗	

1)Montrer que $f(1)$ est la valeur minimale de f .

2)Posons $g(x)=-2f(x)\quad \forall x\in[-2\ ,\ 9]$. Dresser le tableau de variation de g .

Exercice 7 : On considère une fonction f, définie et continue sur un intervalle [-3 ; 4], dont le tableau de variation est le suivant :

x	-3		1		4
$f(x)$	2	↗	5	↘	-1

1)Préciser le minimum de f sur chacun des intervalles : [-3 ;4] et [1 ;2].

2)a-Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans [1 ;4]

b- En déduire la position relative de ζ_f de la fonction f par rapport à l'axe des abscisses.

3) Justifier que la fonction : $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{11-2f(x)}}$ est définie sur [-3 ;4].

Exercice 8: :Soit la fonction $f(x)=\dfrac{x^4-4x^2+3}{-x^4+4x^2}$. 1)a)Déterminer D_f. .b) Montrer que f est paire.

2) a) Vérifier qu'il existe $x\in D_f$, tel que $f(x)=\dfrac{3}{4-\left(x^2-2\right)^2}-1$

b) Monter que f est minorée sur $\left]0,\sqrt{2}\right[$ .c) Montrer que 0 est le minimum de f sur $\left]\frac{1}{2},\sqrt{2}\right[$.

Exercice 9: Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{2x}{x^2+3}$

1)Montrer que f est impaire. 2) Montrer que $\forall x\geq 0$, $On\ a : 0\leq f(x)\leq\frac{2}{3}$

3)En déduire que $f(x)\in\left[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]$, $x\in IR$

Exercice10 : Soit la fonction $f(x)=\frac{-4x^2+16x-17}{x^2-4x+5}$

Déterminer la valeur du réel x pour lequel $f(x)$ est maximale.

Exercice 11: **A-** Soit la fonction $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\mathrm{x}^2+\frac{16}{\mathrm{x}}$

1) Déterminer D_f. 2) Montrer que $\mathrm{f}(2)$ est la valeur minimale de f sur $\mathbb{R}_+^*$

B- On veut fabriquer un réservoir d'eau de volume 400 litres, son couvercle ayant la forme d'un parallélépipède de base un carré de coté x et de hauteur h.
1) Déterminer en fonction de x et h le volume de réservoir.
2) Exprimer en fonction de x l'aire A du réservoir.
3) Déterminer x pour que la quantité du métal utilisé pour fabriquer ce réservoir soit minimale. Déterminer la valeur de h correspondante.

Exercice 12 : La fonction f est définie pour les entiers n et k par :

$$\begin{cases} f(0,n)=n+1 \\ f(k,0)=f(k-1,1) \\ f(k+1,n+1)=f(k,f(k+1,n)) \end{cases}$$

Calculer le nombre $f(2,2)$.

Exercice 13 : Déterminer l'application $f:IR\to IR$ tel que $\forall x\in IR$; $-x^2+f(x)+xf(-x)=0$

Exercice 14 : On définit pour chaque couple de réels (a,b) la fonction f par : $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\mathrm{a}-\sqrt{\mathrm{x}+\mathrm{b}}$.
Deux nombres réels u et v distincts sont dites changeables s'il existe au moins un couple (a,b) tel que la fonction f vérifie à la fois f(u) = v et f(v) = u.
1) Montrer que 2 et 3 sont échangeables. 2) Peut-on en dire autant de 4 et 7 ?
3) A quelle condition deux entiers u et v sont-ils échangeables ?.

Exercice 15 : Soient $n\in IN^*$, $x_1,x_2,............,x_n$ des éléments de IR, $\forall k\in IN^*$,
$S_n(x_i)=x_1^1+x_2^2+x_3^3+...........+x_n^n$ et on suppose $S_2=S_3=S_4$. Montrer que $\forall i\in\{1;2;.....;n\}$ on a $x_i=0$ ou $x_i=1$. Exprimer d'abord $S_n\left(\left(x_i^2-x_i\right)^2\right)$en fonction de $S_2,S_3\ et\ S_4$

Exercice 16 :1)Etablir que $\forall\mathrm{x}\in[0;1]$; $0\leq\mathrm{x}(1-\mathrm{x})\leq\frac{1}{4}$

2)En déduire que $\forall(\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c})\in[0;1]^3$; $\min\left[\mathrm{a}(1-\mathrm{b});\mathrm{b}(1-\mathrm{c});\mathrm{c}(1-\mathrm{a})\right]\leq\frac{1}{4}$

Exercice 17 :Trouver les couples d'applications (f,g) $de\ IN^*\ dans\ IN^*$ tels que $\forall(x,y)\in IN^{*2}$,
$[f(x)]^{g(y)}+[f(y)]^{g(x)}=x+y$

Opérations sur les limites :

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f+g)$
L	L’	L + L’
L	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	L’	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f\times g)$
L	L’	L ×L’
$+\infty$	L’ > 0	$+\infty$
$+\infty$	L’ < 0	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Théorème : Si $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ *alors* $\lim \dfrac{1}{f} = 0$. Si $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{f} = 0$.

Si $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{1}{f} = 0$. Si $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{1}{f} = 0$.

Pour tout réel a et tout entier non nul n,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = 0 \ ; \ \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{a-x}} = 0 \ ; \ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x-a)^n} = 0 \ ; \ \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(x-a)^n} = 0.$$

$\lim f$	$\lim g$	$\lim\left(\dfrac{f}{g}\right)$
L	L’ ≠ 0	$\dfrac{L}{L'}$
$+\infty$	L’ > 0	$+\infty$
$+\infty$	L’ < 0	$-\infty$
L	$+\infty$	0
L	$-\infty$	0
L’ ≠ 0	0	∞ (on applique la règle des signes)

$\lim f$	$\lim \lvert f\rvert$	$\lim\sqrt{\lvert f\rvert}$
L	$\lvert L\rvert$	$\sqrt{\lvert L\rvert}$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Théorème 4 :
La limite d’une fonction polynôme à l’infini est la même que celle de son terme de plus haut degré.
La limite d’une fonction rationnelle à l’infini est la même que celle du quotient des termes de plus haut degré.

LES EXERCICES

Exercice 1 : Calculer les limites suivantes : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 - x - 1$, 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x^3 + x$, 3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\dfrac{3x-1}{x+1}}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x}}$, 5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} + \sqrt{2x}$, 6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2}{(x+1)^5}$, 7) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x\sqrt{x-1}-1} + x^2$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3+5x}{x-3}$

Exercice 2 : Déterminer les limites aux bornes de l’ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$, 2) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$, 3) $f(x) = \dfrac{1+2x}{1-3x}$, 4) $f(x) = \dfrac{x-6}{(2x-1)^2}$, 5) $f(x) = \dfrac{1+3|x|}{1-|x|}$

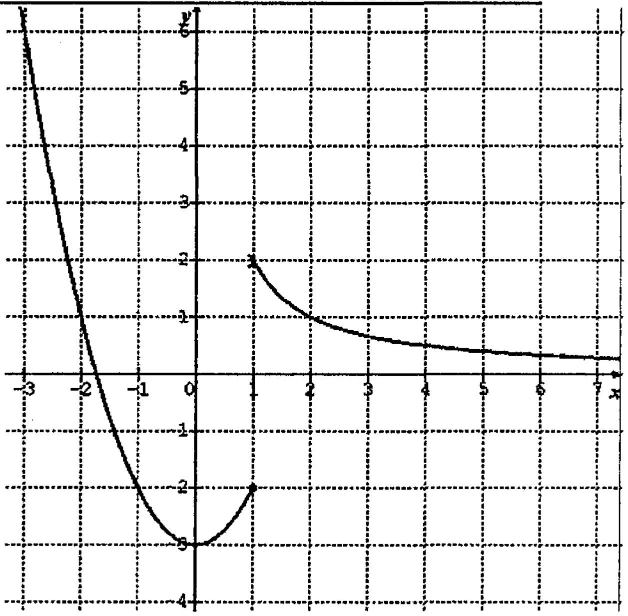
6) $f(x) = \sqrt{x+5} - \sqrt{x}$, 7) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$

Exercice 3: On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f, dans un repère orthonormé.

a) Déterminer le domaine de définition de f

b) Déterminer la limite de f à droite et à gauche en 1.

c)Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$



Exercice4: Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition des fonctions suivante :

1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}$; 2) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x^3}{1+x^3}}$,

3) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^+}\left|2+\dfrac{x-1}{\sqrt{3x-1}}\right|$; 4) $f(x)=\left|\dfrac{1-2x}{x^2-3}\right|$

Exercice5: Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ Déterminer $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$

Exercice 6: Soit la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$.

Déterminer D le domaine de définition de f et $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$

Exercice7: On a représenté ci-contre une fonction g. Répondre aux questions par lecture graphique :

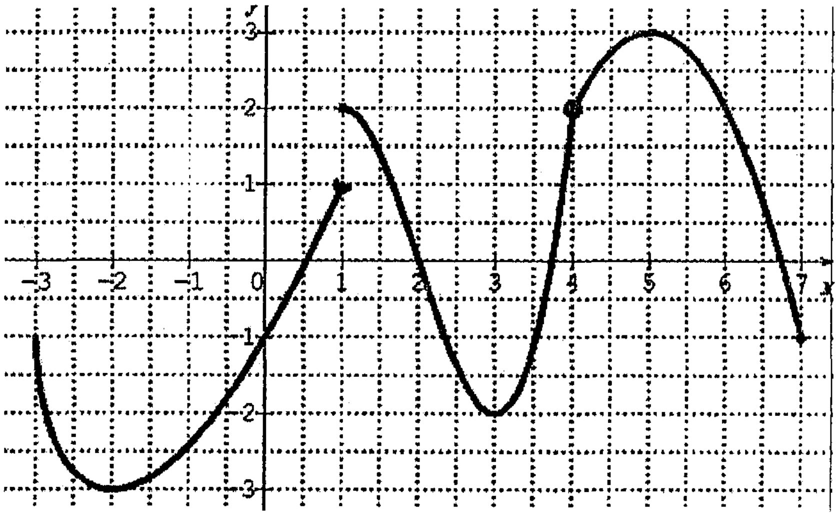
1)Déterminer le domaine de définition de g.

2) Donner $\lim\limits_{x\to1^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)$.

4) a) 3 est-il un majorant de g ?

b)3 est-il un maximum pour g ?

5)Déterminer le minimum de g.
En quel réel est-il atteint ?



Exercice8: Soit la fonction définie par : $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+5}-2x+1 & si \quad x<2\\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1} & si \quad x\geq 2\end{cases}$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f. 2) $f(2)$, $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$.

3)a Vérifier que $f(x)=-x\left(\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}}+2-\dfrac{1}{x}\right)$ $\forall\ x\in\,]-\infty\,;2[$. b)En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

5) On considère la fonction $h(x)=f(x)+3x$; $x\in\,]-\infty\,;2[$. a) Vérifier que

$h(x)=\dfrac{5}{\sqrt{x^2+5-x}}+1$.b)En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+3x-1$.

RESUME DU COURS

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
On dit que la fonction f est continue en a si et seulement si f admet une limite en a égale à $f(a)$.

Conséquence :- Lorsque la représentation graphique de f sur un intervalle ouvert I, met en évidence un tracé continu de la courbe la fonction f est continue en tout réel a de I.
- Lorsque la représentation graphique de f sur un intervalle ouvert I met en évidence un saut du tracé de part et d'autre du point A (a , f(a)) , la fonction f est discontinue en a ...

Théorème (admis) : Toute fonction constante est continue en tout réel a .
La fonction $x \mapsto x$ est continue en tout réel a.
Toute fonction linéaire est continue en tout réel a .
Toute fonction affine est continue en tout réel a.
La fonction $x \mapsto x^2$ est continue en tout réel a.
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout réel non nul a.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en tout réel strictement positif a.
Toute fonction polynôme est continue en tout réel.
Toute fonction rationnelle est continue en tout réel où elle est définie.

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
Si f est continue en a , alors $|f|$ est continue en a.

4- Opérations algébriques sur les fonctions continues

Théorème : Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I . Soit a un réel de I et k un réel.
Si f et g sont continues en a alors les fonctions f + g , fg et kf sont continues en a.
Si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$ alors la fonction $\frac{1}{f}$ est continue en a.
Si f et g sont continues en a et si $g(a) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en a.

Théorème : Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .
Si f est continue en a , alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a.

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a.
f est continue en a , si et seulement si , f est continue à droite et à gauche en a.

Théorème: Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle I et a un réel de I.
* Si f est continue à droite en a, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue à droite en a.
* Si f est continue à gauche en a , alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue à gauche en a.

Définition :- Soit a et b finis ou infinis. Une fonction définie sur un intervalle]a , b[est dite continue sur]a , b[si elle est continue en tout réel de]a , b[.
- Soit a fini ou infini et b un réel.
Une fonction définie sur un intervalle]a , b] est dite continue sur]a , b] si elle est continue sur]a , b[et continue à gauche en b.
- Soit a un réel et b fini ou infini .
Une fonction définie sur un intervalle]a , b[est dite continue sur [a , b[si elle est continue sur]a , b[et continue à droite en a.
- Soit a et b deux réels .Une fonction définie sur un intervalle [a , b] est dite continue sur [a , b] si elle est continue sur]a , b[, continue à droite en a et continue à gauche en b.

Conséquence : Si une fonction est continue sur un intervalle I , alors elle est continue sur tout intervalle inclus dans I.
Conséquence : Toute fonction polynôme est continue sur tout intervalle contenu dans IR.
Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition.

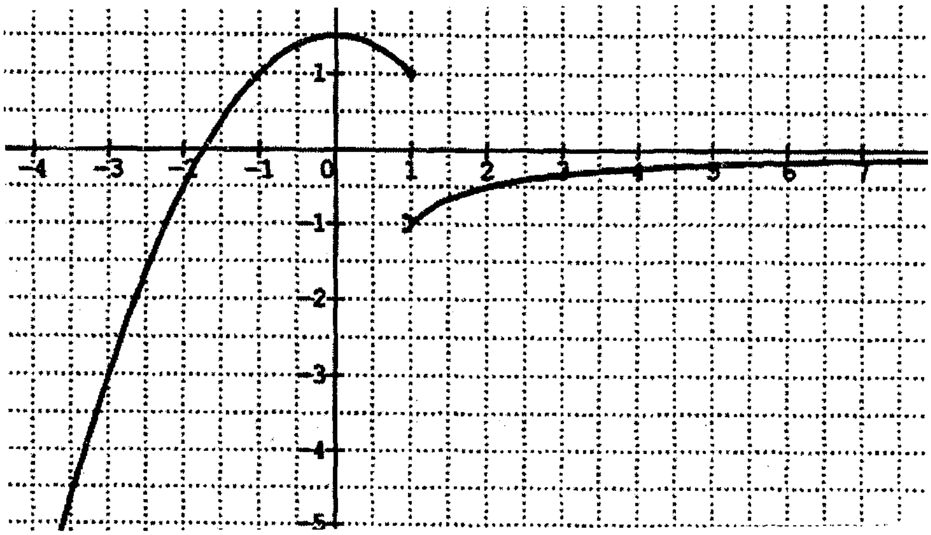
LES EXERCICES

Exercice N° 1 : La courbe (C) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f dans un repère orthonormé du plan.

a) Déterminer le domaine de définition et le domaine de continuité de f

b) Déterminer la limite de f à droite et à gauche en 1.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$



Exercice 2 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1} & \text{si } x\neq-1\\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x=-1\end{cases}$ Montrer que f est continue en -1.

Exercice 3 :Soit la fonction $f(x)=\begin{cases}-x & si \quad x\leq 0\\ x^2 & si \quad 0 \langle x \langle 1\\ \sqrt{x-1} & si \; x\geq 1\end{cases}$ .1)Déterminer l'ensemble de définition de f .

2)Tracer la courbe C représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3)Justifier la continuité de f sur chacun des intervalles : $]-\infty,0]$, $]0,1[$ *et* $[1,+\infty[$

4) f est elle continue sur IR ?

Exercice 4: Soit f la fonction définie par : $\begin{cases}f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{-3x+1}}{x+4} \; , & si \;\; x\neq-4\\ f(-4)=a \; , \; a\in IR\end{cases}$

1) Discuter suivant le réel a la continuité de f en -4.

2) Soit la fonction $\begin{cases}f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} \; , \; x\in IR/\{-1 \; ; \; 1\}\\ f(1)=a \; , \; a\in IR\\ f(-1)=b \; , \; b\in IR\end{cases}$

a- Existe – t – il une valeur pour le réel a pour que f soit continue en 1 ?

b- Existe – t – il une valeur pour le réel b pour que f soit continue en -1 ?

Exercice 5: Soit la fonction : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{3x^2-2x-1}{x-1}, \ si \ \ x>1 \\ f(x)=\dfrac{-x^2-2x+3}{|x-1|}, \ si \ \ x<1 \\ f(1)=\alpha, \ \ \alpha\in IR \end{cases}$

Déterminer le réel α pour que f soit continue en 1.

Exercice N°6 : 1) Soit la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$.

Déterminer D le domaine de définition de f.

2) Soit m un paramètre réel et g la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} g(x)=\dfrac{|x+3|-1}{x^2+x-2} & si \ x<-2 \\ g(x)=f(x) & si \ -2\le x<-1 \\ g(x)=x^2+mx & si \ x\ge-1 \end{cases}$

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-3} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}} g(x)$

b) Calculer la limite de g à droite et à gauche en -2. Conclure.

c) Déterminer la valeur de m pour que g soit continue en -1.

d) Pour la valeur de m trouvée, déterminer le domaine de continuité de g.

Exercice 7 : Soit $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2-x+4}-ax}{x-2} & si \ x\in\left]-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right[-\{2\} \\ \dfrac{x^2+E(x)}{x+1} & si \ x\in\left]-1;1\right[\end{cases}$

1) Donner D_f le domaine de définition de f.

2)Déterminer a pour que f soit continue en -1.

3)Etudier la continuité dé f sur $\left]-1;1\right[$

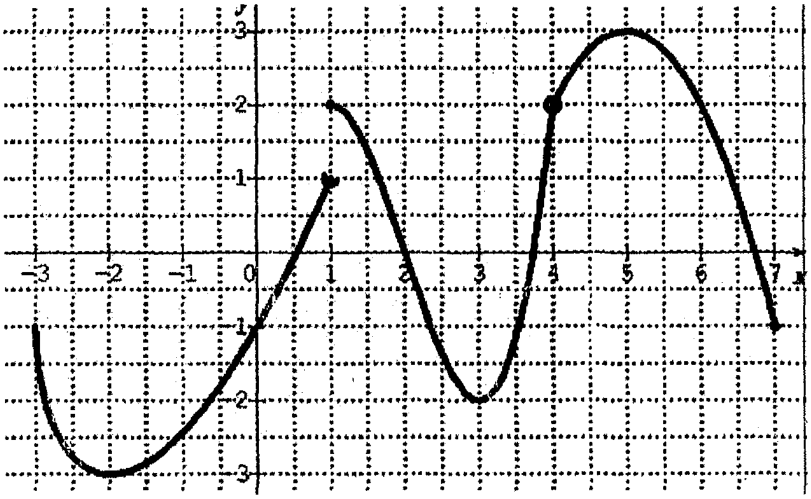
Exercice 8: On a représenté ci-contre une fonction g. Répondre aux questions par lecture graphique :

1)Déterminer le domaine de définition de g.

2)Donner $\lim\limits_{x\to1^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)$.

3)a- Peut-on se poser la question de la continuité de g en 1 ? Pourquoi ?

b- Peut-on se poser la question de la continuité de g en 4 ? Pourquoi ?



Exercice9: Soit f la fonction définie

par $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \le 1 \\ \sqrt{x+3} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1) Justifier la continuité de f sur chacun des intervalles $]-\infty;1]$ et $]1;+\infty[$

2) Etudier la continuité de f à gauche et à droite en 1. Conclure.

3) a) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

b) Prouver à l'aide du graphique que f n'est pas continue sur IR.

c) Déterminer graphiquement les images des intervalles $[-1;0]$ et $[0;6]$.

4) Calculer $\lim\limits_{x \to +6} \dfrac{f(x) - f(6)}{x - 6}$.

__Exercice 10:__ On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f, dans un repère orthonormé.

1) a- f est-elle continue en 1 ? Justifier votre réponse.

b- Déterminer graphiquement l'image de chacun des intervalles suivants :[-2 ;0] et [-1 ;2].

3) a- Tracer la courbe de la fonction : $h = |f|$ dans le même repère.

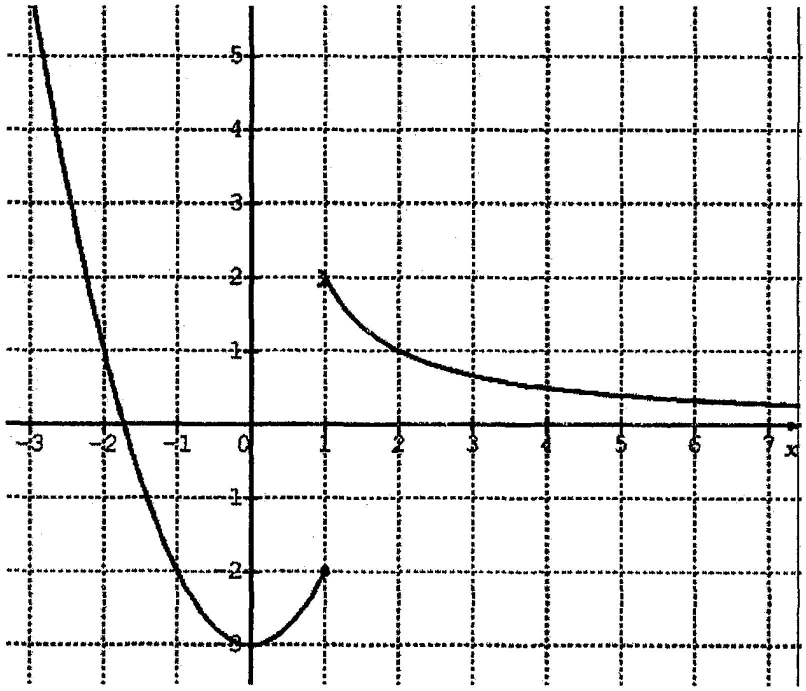
b- La fonction h est-elle continue en 1 ? Justifier votre réponse.

3)a- Déterminer graphiquement les solutions de l'équations f(x) = 1.

b) Résoudre graphiquement l'inéquations $f(x) \geq 1$.

4) Tracer le courbe de la fonction g définie par :

g(x) = h(x+1) – 2.



EXERCICE N°11:Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} & \text{si } x > 2 \\ f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{4(x-1)} & \text{si } x \le 2 \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que $\forall x \in]\ 2\ ,\ +\infty[\ \ \mathbf{f(x)} = \dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{x+2}} + \mathbf{2}}$. 3) Montrer que f est continue en 2.

4) Montrer que f est bornée sur]2 , +∞[.

__Exercice n°12 :__ 1/ Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{|x+2| - 1}{x^2 + 4x + 3}$.

a) Déterminer D le domaine de définition de f. b) Déterminer : $\lim\limits_{-3} f$ et $\lim\limits_{-1} f$.

2/ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x-3} & \text{si } x\neq 3 \\ g(3)=\dfrac{3}{4} \end{cases}$ .a) Déterminer $\lim\limits_{3} g$.

b) g est elle continue en 3.

3/ Soit m un paramètre réel et soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} h(x)=\dfrac{x^3-x-6}{x-2} & \text{si } x<2 \\ h(x)=\sqrt{x^2+5}+mx & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

a) Déterminer la valeur de m pour que h soit continue en 2.
b) Pour la valeur de m trouvée déterminer le domaine de continuité de h.

Exercice13: Soit la fonction suivante , $f : IR \to IR$

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2-9}+mx+2 & si\ x\in\left]-\infty,-3\right]\cup\left]3\ ,+\infty\right[\\ \dfrac{x^2+3E(x)}{x^2+7x+12} & si\ x\in\left]-3\ ,-1\right] \end{cases}$$ Avec m un paramètre réel.

1)Déterminer le domaine de définition de f.

2)Déterminer m pour que f soit continue en -3. 3)Etudier la continuité de f sur $\left]-3,-1\right]$.

4)On donne $m=\dfrac{8}{3}$.

a) Calculer les limites éventuelles suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-3^-} \dfrac{f(x)-f(-3)}{x+3}$

b) Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{8}{3}x+3$ admet une solution dans $[-4\ ,-3]$.

Exercice14 : Soit la fonction $f : IR \to IR$; $x \mapsto \dfrac{x^2+E\left(\dfrac{x}{3}\right)}{x+2}$

1) f est elle continue en 2 ? 2) f est elle continue en 3 ?

Exercice 15 :Soit la fonction $f(x)=8x^3-6x-1$.

1)Montrer que f est continue sur IR. 2)Calculer $f(-1)$; $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$; $f(0)$; $f(1)$.

3)Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement trois solutions distinctes comprises entre -1 *et* 1.

Exercice 16 :Soit la fonction $f(x)=x^3+3x$.

1)Montrer que l'équation $f(x)=-2$ admet au moins une solution α dans $[-1;\ 0]$.

2)Donner une valeur approchée par défaut de α à 10^{-1} prés.

Exercice n° 17 : Soit la fonction f : $x \mapsto \dfrac{-5x+1}{2x^2+x+1}$. 1)Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2) a/ Montrer que f est minorée par (-1) et majorée par 4.
b/ (-1) est-il un minimum de f(x) sur $\mathbb{R}$ et 4 est-il un maximum de f(x) sur $\mathbb{R}$? Expliquer.
3) a/ Montrer que l'équation f(x) = 2 admet dans l'intervalle [-2 ;-1] au moins une solution α.
b/ Montrer que : $\alpha^2=-\dfrac{7}{4}\alpha-\dfrac{1}{4}$.

RESUME DU COURS

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

On dit que f est dérivable en a , s'il existe un nombre réel ℓ tel que : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell$ Ou encore $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell$. Le réel ℓ est alors appelé le nombre dérivé de f en a et il est noté f '(a).

Conséquence : Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I. f est dérivable en a , si et seulement si , la courbe représentative de f admet au point M (a , f(a)) une tangente de pente un nombre réel.Cette tangente est d'équation

y = f'(a)(x – a) + f(a).Un vecteur directeur de cette tangente est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ f'(a)\end{pmatrix}$.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
Si f est dérivable en a, alors le réel f(a)+ f'(a) h est une approximation affine de f(a + h) et on écrit
f(a +h) ≈ f(a)+f'(a)h , pour h voisin de zéro.

Définition : * Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme]b , a].

On dit que f est dérivable à gauche en a , si le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0^- .Cette limite est alors notée $f_g'(a)$ et est appelée le nombre dérivé de f à gauche en a.

* Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme [a , b [.

On dit que f est dérivable à droite en a , si le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0^+ .Cette limite est alors notée f'_d (a) et est appelée le nombre dérivé de f à droite en a.

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
La fonction f est dérivable en a si , et seulement si , f est dérivable à droite et à gauche et $f'_g(a) = f'_d(a)$.
On a alors $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Conséquence :Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
* f est dérivable à droite en a , si et seulement si , la courbe représentative de f admet au point A (a , f(a)) une demi – tangente déterminée par $y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$, x ≥ a.

Un vecteur directeur de cette demi tangente est $\vec{u}_d\begin{pmatrix}1\\ f'_d(a)\end{pmatrix}$.

* f est dérivable à gauche en a , si et seulement si , la courbe représentative de f admet au point A (a , f(a)) une demi - tangente déterminer par $y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$, x ≤ a.

Un vecteur directeur de cette demi – tangente est $\overrightarrow{u_g}\begin{pmatrix}-1\\ -f'_g(a)\end{pmatrix}$.

Définition ; Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ .Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

Si $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=+\infty$ (ou $-\infty$) alors la courbe représentative de f admet au point M(a , f(a)) une demi – tangente verticale.

Si $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=+\infty$ (ou $-\infty$) alors la courbe représentative de f admet au point M(a , f(a)) une demi – tangente verticale.

Théorème : Soit f une fonction dérivable un intervalle I soit α et β deux réels . Alors la fonction $g : x \mapsto f(\alpha x + \beta)$ est dérivable en tout réel x tel que α x + β appartient à I . De plus la fonction g' est définie par g'(x) = αf'(αx + β) .

Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction	Domaine de dérivabilité	Dérivée
$x \mapsto a$ (a constate)	IR	$x \mapsto 0$
$x \mapsto x$	IR	$x \mapsto 1$
$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{N} ; n \geq 1$	IR	$x \mapsto n.x^{n-1}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$	IR^*	$x \mapsto \frac{-n}{x^{n+1}}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	IR_+^*	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto \cos(ax+b)$	IR	$x \mapsto -a\sin(ax+b)$
$x \mapsto \sin(ax+b)$	IR	$x \mapsto a\cos(ax+b)$
$x \mapsto \tan(ax+b)$	$I = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que} : ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$	$x \mapsto a\left(1+\tan^2(ax+b)\right)$
$x \mapsto \cot(ax+b)$	$I = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que} : ax+b \neq k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$	$x \mapsto -a\left(1+\cot^2(ax+b)\right)$

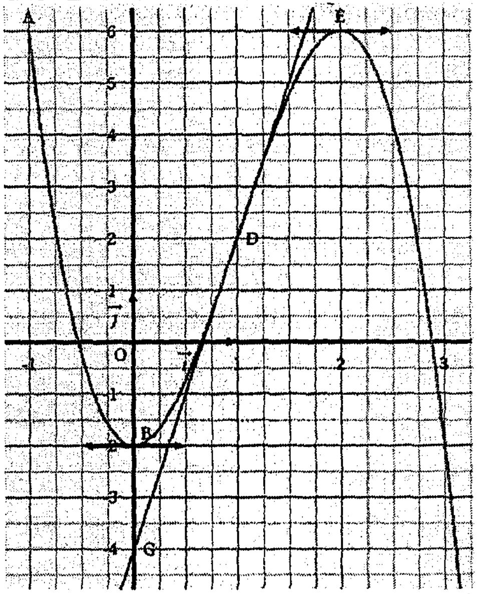
Opérations sur les dérivées :

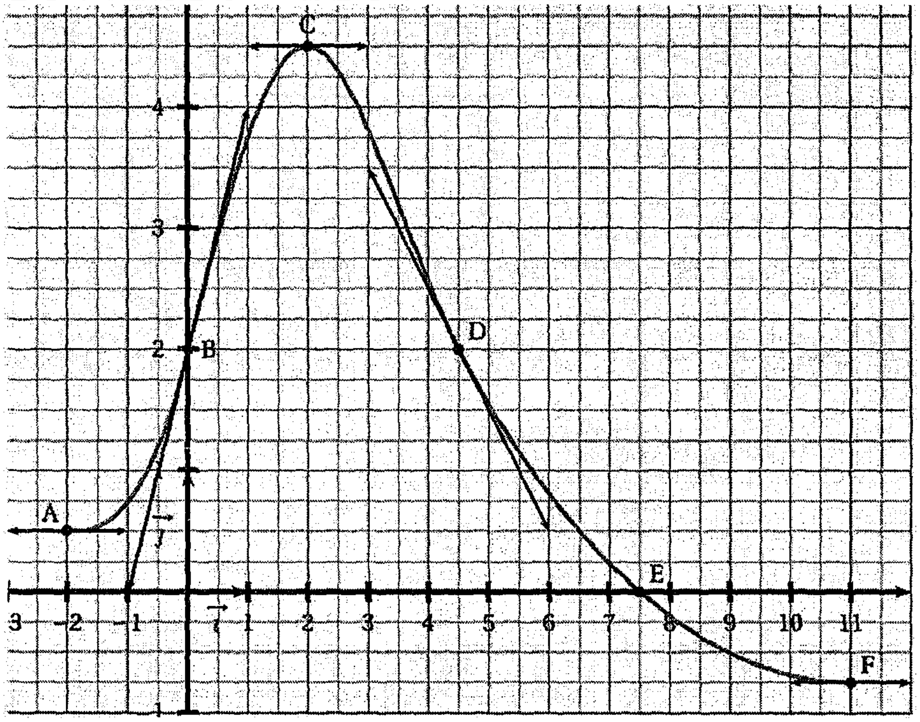
Fonction	Fonction dérivée
$u+v$	$u'+v'$
λu	$\lambda u'$
uv	$u'v+v'u$
$u^n \; ; \; n \in \mathbb{Z}$	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{v}$ (v ne s'annule pas sur I)	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$

LES EXERCICES

Exercice 1 : La courbe ζ tracée ci- contre, représente la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.
Elle passe parles points A(-1,6) ,B(O , -2), D(1, 2) et E(2 , 6).
Elle admet au point D une tangente passant parle point G(O, -4). Elle admet au point B et au point E une tangente horizontale.

1. Déterminer f (0),f(2) et f (1) .
2. Déterminer $f'(0), f'(2)$ et $f'(1)$. Justifier les réponses.
3. Déterminer une équation de Δ la tangente à la courbe ? au point D.





Exercice 2 : On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [-2; 11], et on donne sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, figure ci-dessous. On sait que la courbe passe parles points A(-2; 0,5), B(0; 2), C(2 ; 4,5), D(4,5 ; 2), E(7,5 ; 0) et F(11 ; -0,75).Les tangentes à la courbe aux points A, B, C, D et F sont représentées sur la figure. On utilisera les informations de l'énoncé et celles lues sur la figure pour répondre aux questions. Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B ou C est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

1) f'(2)est égal à a)2 b)0 c)4.5

2) f'(O)est égal à a)$\frac{1}{2}$ b)2 c)4

3) $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\frac{f(x)-0.5}{x+2}=$ a)0 b)11 c)0.5

4) $\lim\limits_{x\to(11)^-}\frac{f(x)+0.75}{x-111}$ a) 11 b) 0 c)0.75

5) Une équation de la tangente à la courbe au point D est:a) y = -x+6,5 b) y = x-6,5 C) y= -2x+ 11

Exercice 3 : Soit $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & si\ x\geq -1\\ -2x & si\ \ x<-1\end{cases}$

1) Calculer les limites suivantes et conclure : $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$et $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

2) f est elle dérivable en -1

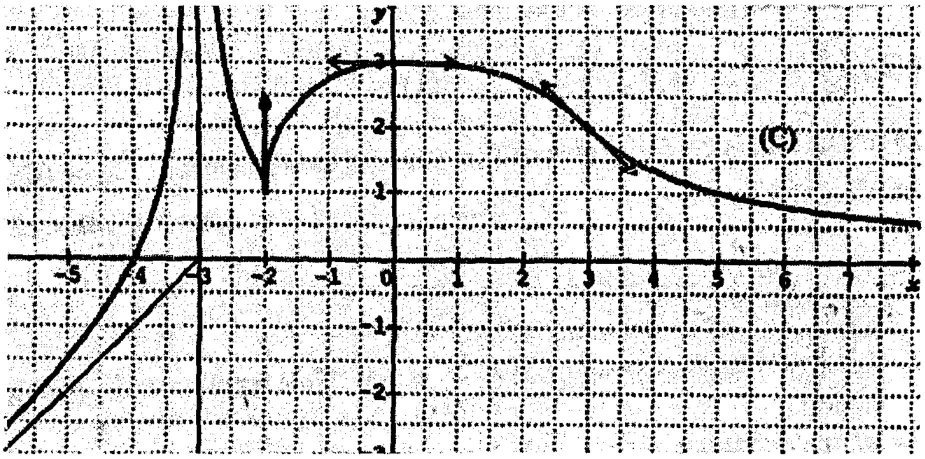
3) donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 .

Exercice 4 : La courbe ci-contre est celle d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

1)a)Déterminer $f(-2);f(0)$ et $f(3)$;

b) Déterminer $f'(0)$ et $f'(3)$

2) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe(C) au point



d'abscisse 3. b)Etudier la position de (C) par rapport à (T)

3) a) f est-elle dérivable au point d'abscisse (-2) ? Justifier.

b)Déterminer $\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2}$ et $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2}$

Exercice 5 : Cocher la réponse exacte. Justifier la réponse

1) Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x\sqrt{x}$ alors :

a) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; b) $f'(x)=\sqrt{x}$; c) $f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}$

2)Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=x^2$ et T la tangente à sa courbe au point d'abscisse 1 alors une équation de T est : a) $y=2x$; b) $y=2x-3$; c) $y=2x-1$

3) La fonction définie sur IR par $f(x)=\sqrt{4x^2+1}$ est dérivable sur IR et pour tout $x\in$ IR,

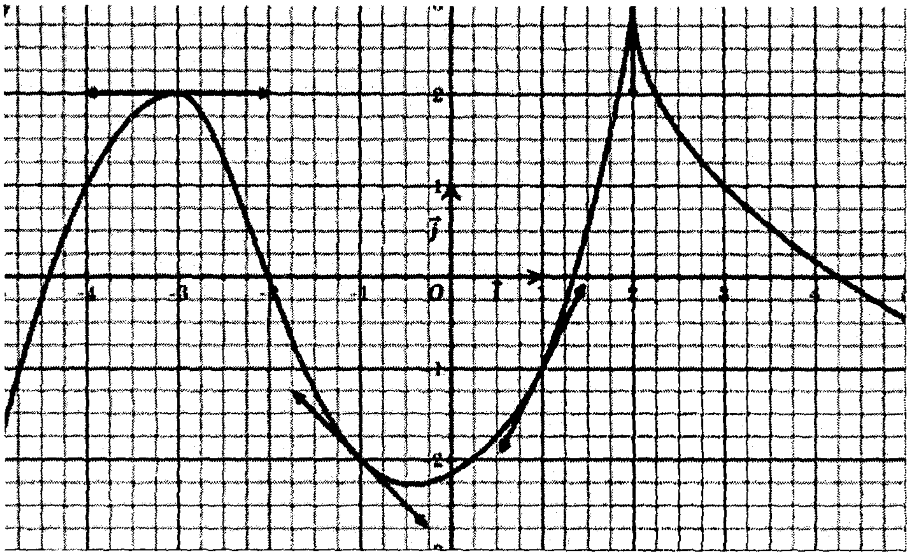
a) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{4x^2+1}}$; b) $f'(x)=\frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}$; c) $f'(x)=\frac{8x}{\sqrt{4x^2+1}}$

Exercice 6 : La figure ci contre est la représentation d'une fonction f.

1)a) A l'aide du graphique déterminer les nombres dérivés de f en -3, -1 et 1 respectivement .

b) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse (-1)

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{f(x)-3}{x-2}$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{f(x)-3}{x-2}$



3) Soit $g(x)=f(x)\sqrt{x+1}$ Montrer que g est dérivable à droite en -1

Exercice 7 : Soit $\begin{cases} h(x)=\frac{x^2+x-1}{x-1}, \text{si } x\le 0 \\ h(x)=1+\sqrt{x^2+x},\ x>0 \text{ si} \end{cases}$ a) Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier la dérivabilité de h en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que h est dérivable sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ et calculer $h'(x)$ sur chaque intervalle

Exercice 8 : Soit h un réel proche de zéro. Montrer que :

1) $(1+h)^2 \simeq 1+2h$; 2) $(1+h)^4 \simeq 1+4h$, 3) $\frac{1}{1+h}\simeq 1-h$

Exercice 9 : Soit la fonction $f(x)=\sqrt{3x+1}$.

1) Déterminer l'approximation affine de f proche de 0

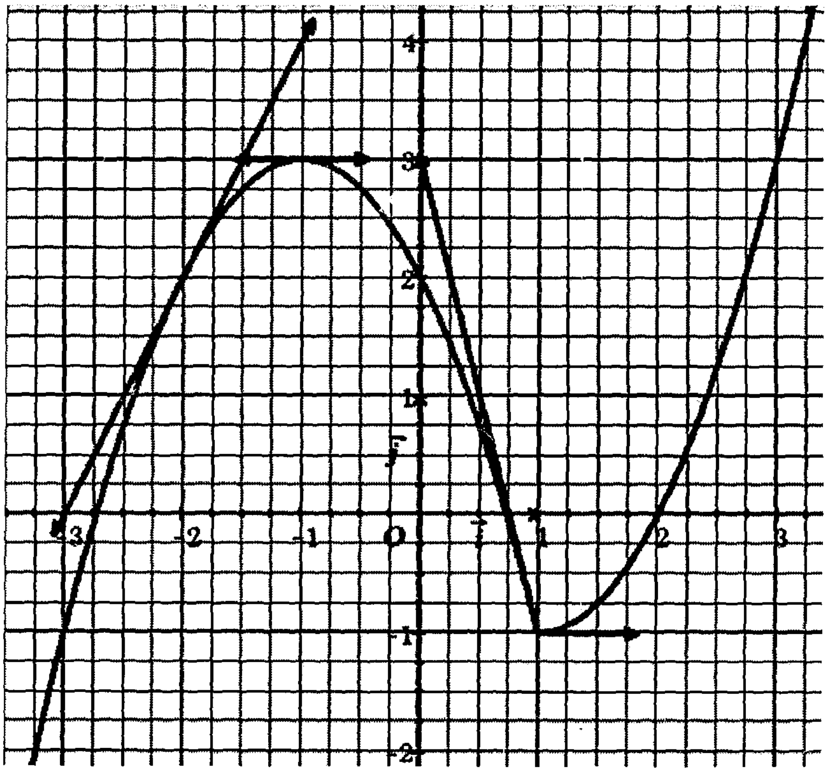
2) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{1,00048}$

Exercice 10: Déterminer les intervalles sur les quelles f est dérivable et calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants : 1) f(x) = 2x -1 , 2) f(x) = $2x^2 - 3x + 4$, 3) f(x) = $(3x-4)^3$, 4) f(x) = $\frac{2x^2-x-1}{2x+5}$, 5) f(x) = $\sqrt{2x+1}$ 6) f(x) = $\sqrt{x^2-x-6}$, 7) f(x) = $\frac{1}{3x-7}$, 8) f(x) = $(x-1)^3(2x-3)^4$.
9) f(x) = $(5x+1)^{-4}$, 10) f(x) = $2x + 3 + \frac{5}{x}$,11) $f(x)=2\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$, 12) $f(x)=2\sin^2 x+4\sin x$

Exercice 11: Calculer la limite de f en a en utilisant la fonction dérivée : **1)** $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$; $a=4$

2) $f(x)=\frac{x^2\sqrt{x}-1}{x-1}$; $a=1$ **3)** $f(x)=\frac{\frac{1}{x+4}-1}{x+3}$; $a=-3$ **, 4)** $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2+1}}$; $a=0$

Exercice 12 : La figure ci contre est la représentation d'une fonction f.



1) A l'aide du graphique déterminer $f'(-2)$ et $f'(-1)$.

2) Cocher la où les bonnes réponses :
a) f est dérivable : i- à droite en 1 ii à gauche en 1 iii-en 1.

b) $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)+1}{x-1}=$
i/ -4 ii/ -1 iii/ 1 iv/ 4.

c) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)+1}{x-1}=$
i/ $-\infty$ ii/ $+\infty$ iii/ 0 iv/ 1.

3) Soit $g(x)=ax^2+bx+c$ où a, b et c sont des réels.
a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$
b) Déterminer les réels a, b et c pour que les deux conditions suivantes soient satisfaites : $\begin{cases}\bullet \text{La droite : } y = 2x+1 \text{ est la tangente à } \zeta_g \text{ au point d'abscisse } 0.\\ \bullet \text{Les tangentes } \zeta_f \text{ et } \zeta_g \text{ en leurs points d'abscisses } -1 \text{ sont parallèles.}\end{cases}$

4) Soit $\begin{cases}h(x)=\sqrt{x^2+x}, \text{si } x\geq 0\\ h(x)=\frac{x}{x-1}, \text{ si } x<0\end{cases}$ a) Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.
b) Etudier la dérivabilité de h en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
c) Montrer que h est dérivable sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ et calculer $h'(x)$

Exercice 13 : Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse et justifier votre réponse :
1)f continue en a alors f est dérivable en a . 2)f est continue en a alors f n'est pas dérivable en a .
3)f n'est pas continue en a alors f n'est pas dérivable en a.

Résumé du cours :

1)Eléments de symétries d'une courbe

Axe de symétrie :Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. Soit f une fonction définie sur un ensemble D de courbe représentative C et Δ la droite d'équation $x = a$. La droite Δ est un axe de symétrie de C, si et seulement si, pour tout x appartient à D ; $2a - x$ appartient à D et $f(2a - x) = f(x)$

Centre de symétrie : Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. Soit f une fonction définie sur un ensemble D de courbe représentative C et O' le point de coordonnées $(a;b)$. Le point O' est un centre de symétrie de C, si et seulement si, pour tout x appartient à D, $2a - x$ appartient à D et $f(2a - x) = 2b - f(x)$

2) Branche paraboliques

Fonction polynôme Soit f une fonction polynôme de degré n ; $n \geq 2$ alors $\frac{f(x)}{x}$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini. On dit que la courbe représentative C de f dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ admet une branche parabolique de direction $\left(O;\vec{j}\right)$, au voisinage de l'infini

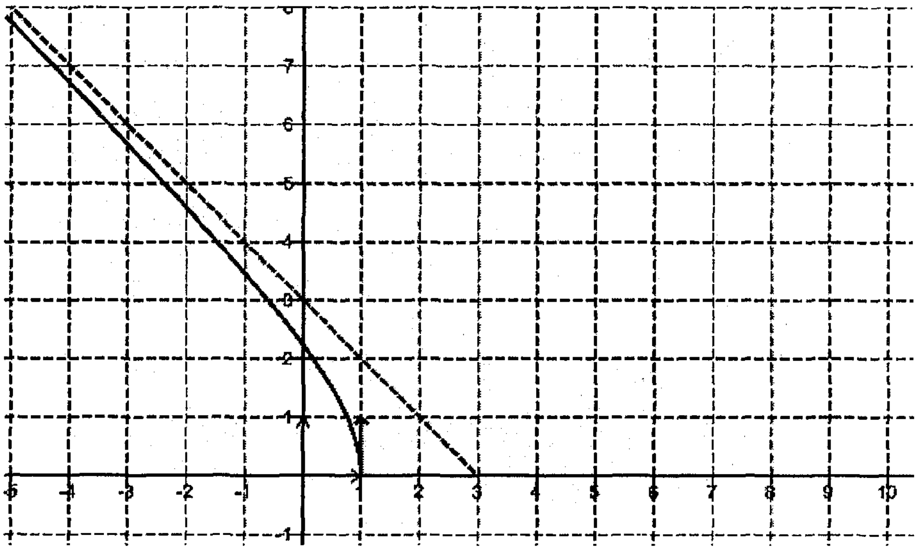
Fonction $\sqrt{f}$:Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{ax+b}\,; a \neq 0$ Alors $\frac{f(x)}{x}$ tend vers zéro quand x tend vers l'infini. On dit que la courbe représentative C de f dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ admet une **branche parabolique de direction** $\left(O;\vec{i}\right)$ au voisinage de l'infini.

Définition : Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère. Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$, on dit que la droite d'équation y = L est une asymptote horizontale à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$. Lorsque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$, on dit que la droite d'équation y = L est une asymptote horizontale à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf en un réel a de I et C_f sa courbe représentative dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Si la limite de f , à droite en a (respectivement à gauche en a) , est infinie , on dit que la droite d'équation x = a est une asymptote verticale à la courbe C_f à droite en a (respectivement à gauche en a).

Définition : Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$, on dit que la droite d'équation y = αx + β est une asymptote oblique à la courbe C_f de f au voisinage de $+\infty$. Lorsque $\lim\limits_{x \to -\infty}(f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$, on dit que la droite d'équation y = αx + β est une asymptote oblique à la courbe C_f de f au voisinage de $-\infty$.

LES EXERCICES

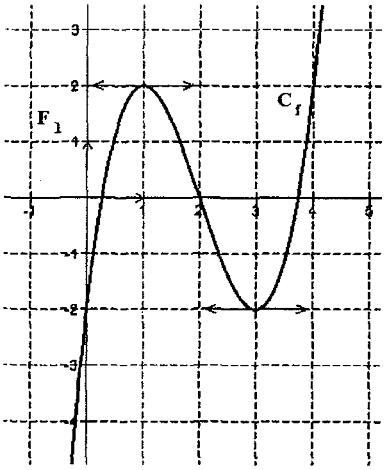


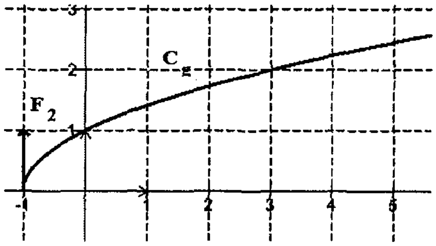
Exercice n°1: La courbe représentative ci-contre est celle d'une fonction f définie et dérivable sur qui admet $\Delta : x = 3$ comme axe de symétrie est partiellement tracé ci-contre.

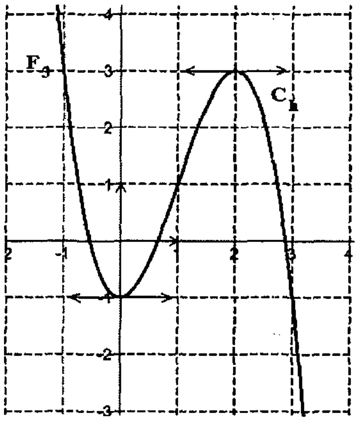
1) Achever la courbe.

2) Déterminer la tableau de variation de f.

Exercice n°2: Les graphiques ci-contre représentent deux fonctions f et h définies et dérivable sur $\mathbb{R}$ et une fonction g définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$.







I)1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=$ a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 0 ; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=$ a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 0

II) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=$ a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 0

III)1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=$ a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 0 , 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{h(x)}{x}=$ a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 0

Exercice N°3 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $x \mapsto -\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x-1$. On désigne par (ξ) sa courbe représentative dans plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Etudier les variations de f . 2) Montrer que $I(0;-1)$ est un centre de symétrie de (ξ)

3) a) Ecrire l'équation de la tangente T à (ξ) au point I.

b) Etudier la position de (ξ) par rapport à T ; c) Construire (ξ) et T.

4)a)Vérifier que $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{27}{16}$

b)En déduire les solutions dans $[-\pi;\pi]$ de l'équation : $\cos^3 x-3\cos x-\frac{11}{8}=0$

Exercice N° 4 : Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=2x^3-6x+4$. On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)Dresser le tableau de variation de f

2)Montrer que le point $I(0;4)$ est un centre de symétrie pour la courbe (C_f).

3) Ecrire l'équation de la tangente T à (C_f) au point I.

4) Etudier la position relative de T et (C_f) ; 5) Construire T et (C_f)

6) Déterminer suivant le paramètre m le nombre de solutions de l'équation : $x^2-3=\frac{m-4}{2x}$

7) Soit α et β deux réels de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ avec $\alpha<\beta$, comparer : $f(\cos\alpha)$ et $f(\cos\beta)$

8) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)=|2x+4|(x-1)^2$

a) Construire (C_g) à partie de (C_f) ; b) Dresser le tableau de variation de g

EXERCICE 5: Soit la fonction $f(x)=x^3-3x^2+2$

1) Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative (ζ) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) soit A et b deux points de (ζ) d'abscisses respectifs a et $-a$ avec $a\in IR^*$

a) Montrer qu'il existe deux points M' et M" de (ζ) où la tangente à (ζ) est parallèle à (AB)

b) Montrer que les points M' et M" restent symétriques par rapport à un point fixe I lorsque a varie dans IR^*

Exercice n°6 : La figure ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. La courbe ζ_f admet deux branches paraboliques de direction $(O,\vec{i})$, l'une au voisinage de $+\infty$ et l'autre au voisinage de $-\infty$.

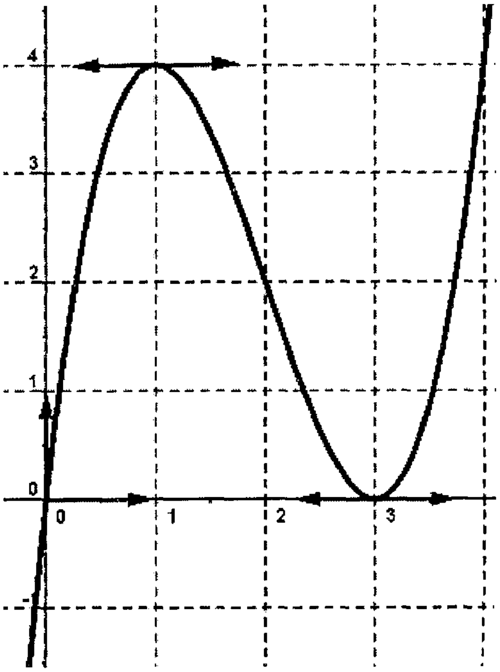
1) À partir graphe dresser le tableau de variation complète de f.

2) Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

3) Soit $g(x)=\frac{1}{f(x)}$. a/ Préciser l'ensemble de définition D de g.

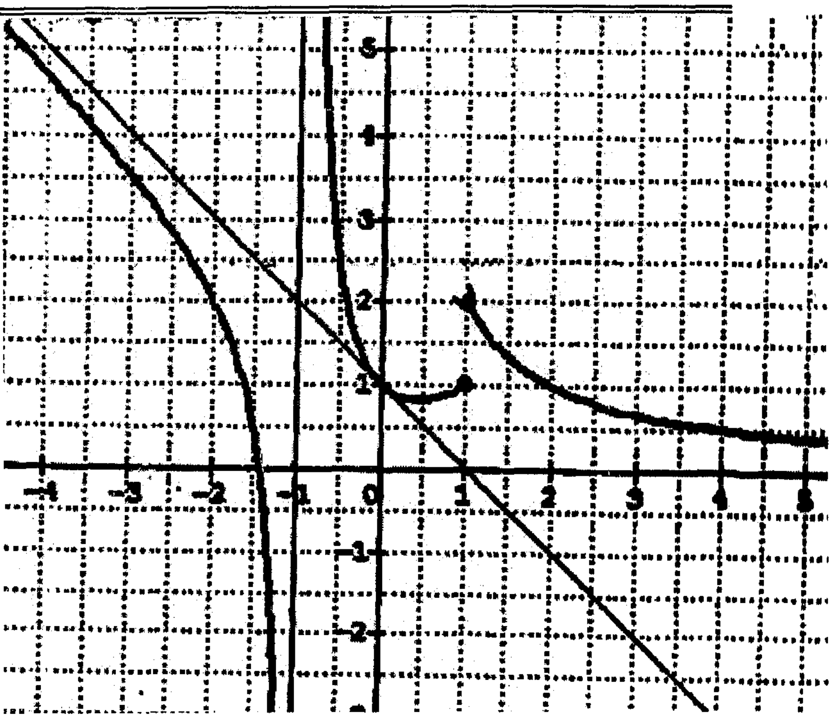
b/ Montrer que g est dérivable sur D et exprimer sa fonction dérivée en fonction de f' et f

c/ Dresser le tableau de variation de g.



Exercice N° 7 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ dont la courbe représentative (ξ) est donnée ci-contre :

- La droite d'équation $y=-x+1$ est une asymptote à (ξ) au voisinage de $(-\infty)$
- La droite d'équation $x=-1$ est une asymptote à (ξ)
- La droite d'équation $y=0$ est une asymptote à (ξ) au voisinage de $(+\infty)$
- Pour tout $x>1$; $f(x)>0$
- $f(0)=f(1)=f(2)=1$



En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes :1) f est-elle continue en 1 ?

2) Déterminer, en justifiant, les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$; c) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$;

d) $\lim\limits_{x\to-1}|f(x)|$; e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-1}{f(x)}$; f) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)}{f(x)-1}$ g) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x$; h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)-2x}{x+1}$

Exercice N° 8 : La courbe (ξ) ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dans un repère orthonormé du plan.

1) a) Déterminer le domaine de définition de f ;

b) Préciser les asymptotes de la courbe (ξ)

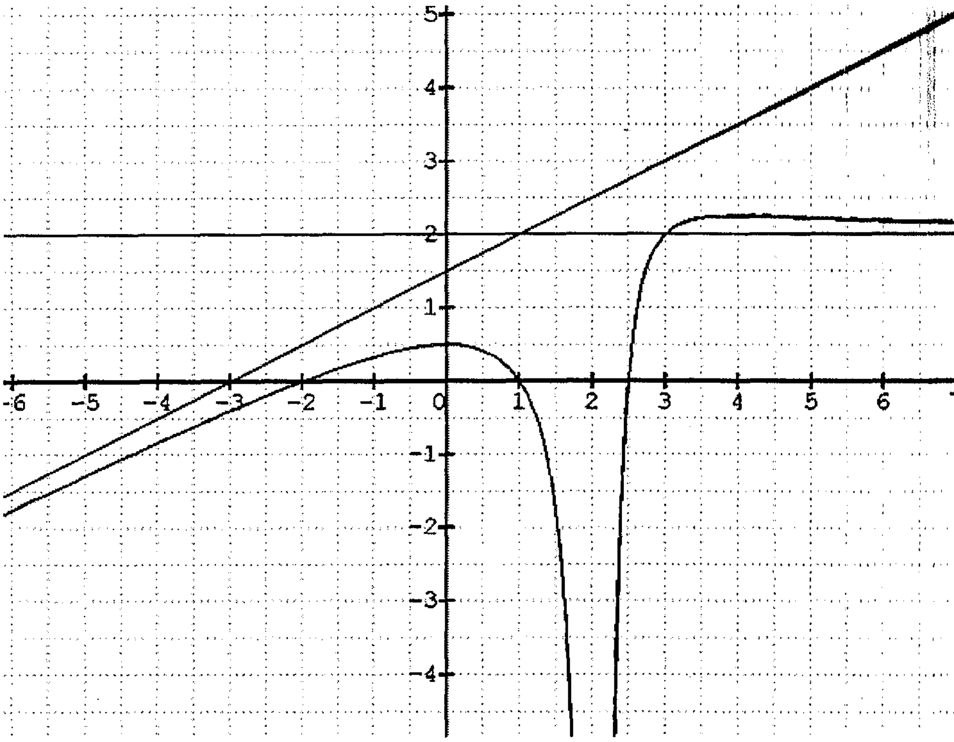
2) Déterminer chacune des limites suivants :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

3) Calculer chacune des limites suivantes

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-\dfrac{1}{2}x$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2-x}{f(x)-2}\right)$

; $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{4-x}{f(x)}$



EXERCICE 9 : Soit la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}$;

ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)a)Vérifier que $f(x)=x-1+\dfrac{4}{x-1}$.b)Déduire que (ζ) admet une asymptote oblique que l'on précisera.

2) Montrer que le point $I(1;0)$ est un centre de symétrie de (ζ)

3) Dresser le tableau de variation de f et tracer (ζ) 4) Soit la fonction $g(x)=|x-1|+\dfrac{4}{x-1}$.

a) Dresser le tableau de variation de g. b) Montrer que (ζ_g) admet deux asymptotes obliques. c) tracer (ζ_g)

Exercice 10: On considère les fonctions : $f(x)=\dfrac{1}{3}\left(x^2+x+\dfrac{1}{x}\right)$; $g(x)=2x^3+x^2-1$.

1) Montrer que $\forall\ x\in IR$ on a : $f'(x)=\dfrac{1}{3x^2}g(x)$. 2) Dresser le tableau de variation de g.

3) En déduire que l'équation $g(x)=0$ admet dans IR une unique solution α dans $]0;1[$.

4) Dresser le tableau de variation de f.

5) *On désigne par* (ζ) *la courbe de f dans un repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$ et soient les points I et J de (ζ) d'abscisses respectifs -1 et 1. a) Vérifier que (IJ) est tangente à (ζ) en J.

b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (ζ) en I. c) Etudier la position de (ζ) par rapport à (T).

6)utiliser les résultats précédents pour construire la courbe (ζ) (On prendra $\dfrac{2}{3}$ comme valeur approchée de α)

Exercice 11: Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{-x^2+2x+3}{x-2}$.

1)a)Calculer f(0), $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to2}(x-2)f(x)$.

b)En déduire les réels a, b et c tels que : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$ pour tout $x\in D_f$.

2) Montrer que I(2 ;-2) est un centre de symétrie pour la courbe ζ_f.

3) Montrer que la droite $\Delta : y=-x$ est une asymptote oblique à la courbe ζ_f.

4) Dresser le tableau de variation de f. 5) Tracer ζ_f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

6) On pose : $g(x)=|x|+\dfrac{3}{|x|-2}$ .a) Etudier la parité de g. b) Tracer la courbe ζ_g

7) Soit $D_k : y=k$ où $k\in\mathbb{R}$. a)Montrer que pour tout réel k, la droite D_k coupe ζ_f en deux points M' et M''.

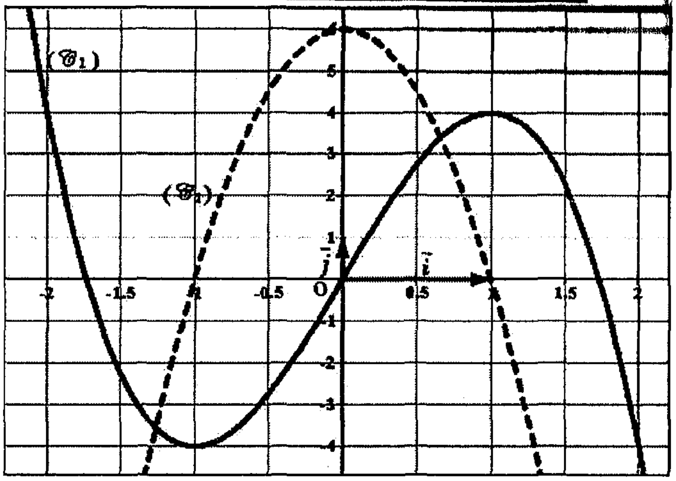
b)Déterminer l'ensemble des points $I=M'*M''$ lorsque k varie.

Exercice n°12 : Le plan est rapporté d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. ζ_1 et ζ_2 sont les courbes représentatives, d'une fonction f dérivables sur $\mathbb{R}$ et de sa fonction dérivée f'.

Par lecture graphique :

1)Déterminer, parmi les courbes ζ_1 et ζ_2, celle qui représente la fonction f'.

2) Dresser le tableau de variations de f.



Exercice 13 : On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x^2-2x-2}{x^2+x+1}$. On désigne par (ζ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. 1) Dresser le tableau de variation de f.

2)a)Ecrire l'équation de la tangente (T) à (ζ_f) au point d'abscisse 1.

b)Etudier la position de (ζ_f) par rapport à (T).

3)Tracer (T) puis (ζ_f).

4) Justifier graphiquement que pour tout réel m de]-2,+∞[, l'équation f(x) = x – m admet, dans $\mathbb{R}$, un solution unique.

5) Soit g la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{x^2+2|x|-2}{x^2-|x|+1}$. a)Montrer que g est paire.

b)Tracer la courbe représentative de g à partir de (ζ_f) .c)Justifier que g est dérivable en 0.

Exercice 14 **:**Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2-2x+4}+x$

ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$.Interpréter graphiquement.

2) Montrer que $\Delta : y=2x-1$ est un asymptote oblique à ζ_f au voisinage de +∞

3)a)Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x\in\mathbb{R} : f'(x)>0$ .b)Dresser le tableau de variation de f.

4) Tracer ζ_f et Δ

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\sqrt{x^2+3}+x$ .a)Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R} : g(x)=f(x+1)-1$.

b) En déduire que ζ_g est l'image de ζ_f par une translation que l'on précisera.

EXERCICE 15 :1) Soit la fonction définie sur IR par $g(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

a) Déterminer $g'(x)$ pour tout $x\in$ IR .b) Dresser le tableau de variations de g et préciser le signe de $g(x)$

2) Soit la fonction définie sur IR par $f(x)=x-1+\sqrt{1+x^2}$ et (ζ) sa courbe dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

a) Vérifier que pour tout $x\in$ IR On a $f'(x)=g(x)$. b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter le résultat.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3)a)Montrer que la droite $\Delta : y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à (ζ) en $+\infty$.

b)Etudier la position relative de (ζ) et Δ

c) Ecrire une équation de la tangente (T) à (ζ) en 0 et étudier la position de (T) et (ζ).

d) Tracer (ζ) ; (T) et Δ asymptote oblique à (ζ) au voisinage de $+\infty$.

5) Tracer (ζ).

Exercice 16: On donne la courbe représentative (C) d'une fonction f définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ dans repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ .La tangente (T) à (C) au point I(-1, -2).

1)Déterminer, graphiquement :a)Le signe de f'(x) et le tableau de variation de f.

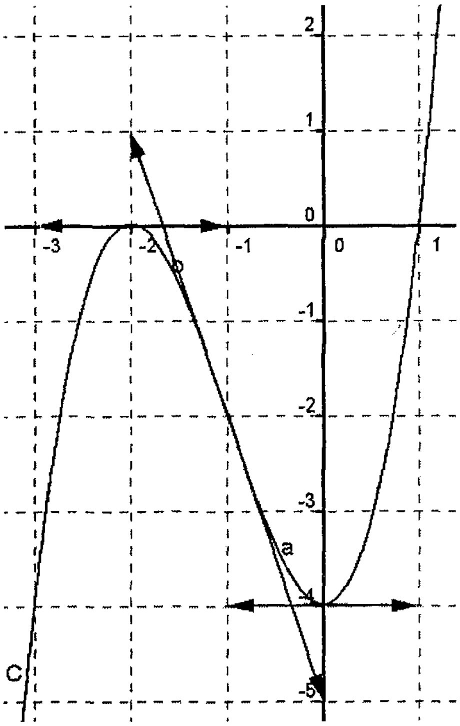
b) L'équation de la tangente (T). c) Le signe de f(x) sur $\mathbb{R}$.

d) Dresser le tableau de variation de la fonction $g : x \rightarrow f^2(x)$.

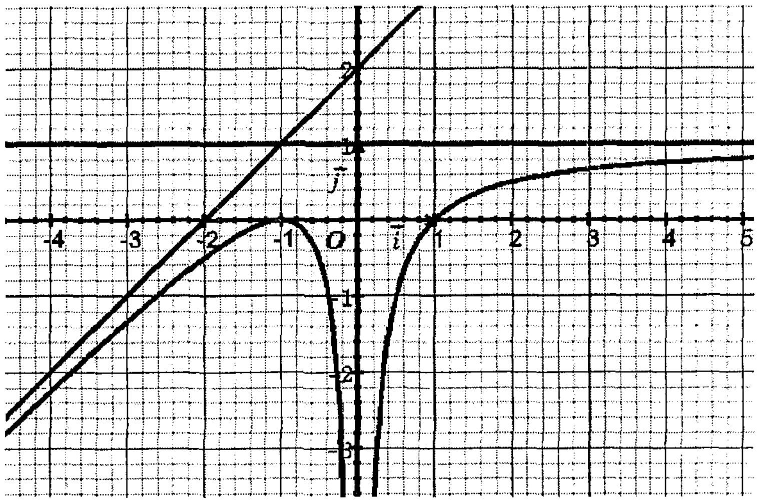
e) Tracer à partir de (C) la courbe (C') de la fonction $h : x \rightarrow |f(x)| - 1$.

f)Le nombre des solutions de l'équation h(x)=m+4, où m un réel.

2)On suppose que $f(x) = ax^3 + bx^2 - 4$, où a et b des réels, déterminer a et b.



Exercice N°17 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ dont la courbe représentative (ξ) est donnée ci-contre :



- La droite d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à (ξ) au voisinage de $(-\infty)$
- La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à (ξ)
- La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote à (ξ) au voisinage de $(+\infty)$ En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes :
- 1) f est-elle continue en 0 ?

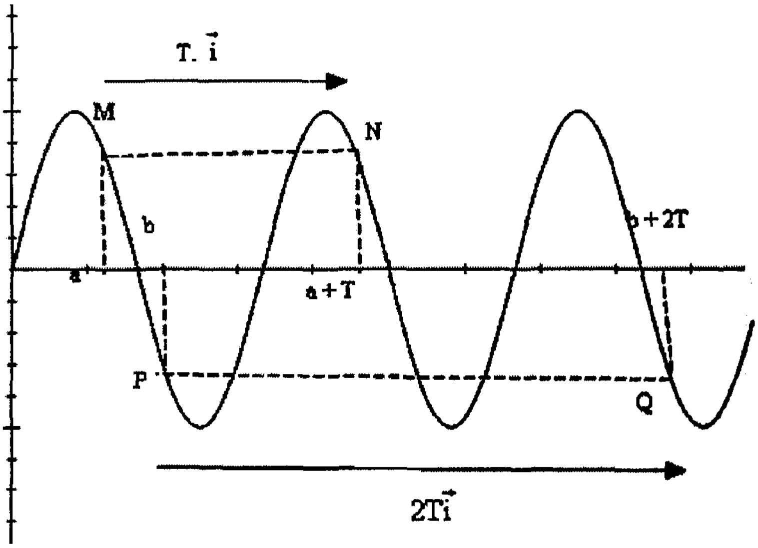
2) Déterminer, en justifiant, les limites suivantes :a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; d) $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)|$; e)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)-1}{f(x)}$

1)a)Déterminer le domaine de définition de la fonction $\dfrac{1}{f}$ .b)Déterminer les asymptotes de la courbe $\dfrac{1}{f}$

Résumé du cours :



Fonction périodique

Définition : Soit f une fonction définie sur une partie D de IR et T un réel non nul. On dit que f est périodique de période T, si pour tout $x \in D; (x+T)$ appartient à D et $f(x+T)=f(x)$

Construction Soit f une fonction définie dur D, périodique, de période T et g la restriction de f à un intervalle $[a;a+T]$. La courbe représentative de f se déduit à partir de celle de g par translation de vecteur $kT\vec{i}$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.

Définition : Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Soit x un réel et M le point du cercle trigonométrique de coordonnées $(\cos x; \sin x)$. La fonction sinus est la fonction périodique, de période 2π, qui au réel x associe le réel $\sin x$. On la note $\sin : x \mapsto \sin x$
La fonction cosinus est la fonction périodique, de période 2π, qui au réel x associe le réel $\cos x$. On la note $\cos : x \mapsto \cos x$

Soit a un réel. Les fonctions, $x \mapsto \sin(x+a)$ et $x \mapsto \cos(x+a)$ sont périodiques, de période 2π

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur IR. De plus, pour tout $x \in$ IR ; On a : $(\sin)'(x) = \cos x$ et $(\cos)'(x) = -\sin x$

Fonction tangente

Définition : On appelle fonction tangente et on note tan la fonction : $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$ La fonction tangente est impaire et périodique, de période π.

La fonction tangente est dérivable pour tout réel x, différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ et On a : $(\tan)'(x) = 1 + \tan^2 x$ pour tout x différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Fonctions $f : x \mapsto \sin(\omega x + \varphi)$, $f : x \mapsto \sin(\omega x + \varphi)$

Soit ω et φ deux réels tels que : $\omega \neq 0$. Les fonctions $f : x \mapsto \sin(\omega x + \varphi)$ et $g : x \mapsto \cos(\omega x + \varphi)$ sont périodiques, de période $\frac{2\pi}{\omega}$. De plus, f et g sont dérivables sur IR et on a pour tout réel x,
$f'(x) = \omega \cos(\omega x + \varphi)$ et $g'(x) = -\omega \sin(\omega x + \varphi)$

LES EXERCICES

Exercice n°1 : Pour chacune des questions suivantes indiquées la bonne réponse :

1)Pour tout x, $\left|\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\right| \leq$......... a) $x-\frac{\pi}{4}$ b) $\left|x-\frac{\pi}{4}\right|$ c) $\frac{\pi}{4}-x$

2) La fonction définie sur $\mathbb{R}$ $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x-1\right)$ est périodique de période :

a) 2π b) 4 c) 2

3) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sin(x)\cos(x)$. La fonction est périodique de période

a)2π ; b)π ; c)$-\pi$

4) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : f (x)=$\sin^2(x)$. a) la fonction f périodique de période :

* $\frac{\pi}{4}$ ** π *** $\frac{\pi}{2}$

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, f'(x) est égale à :

* $\cos^2 x$ **sin(2x) ***-2cosx sinx

c) La courbe représentative ς_f de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, admet :

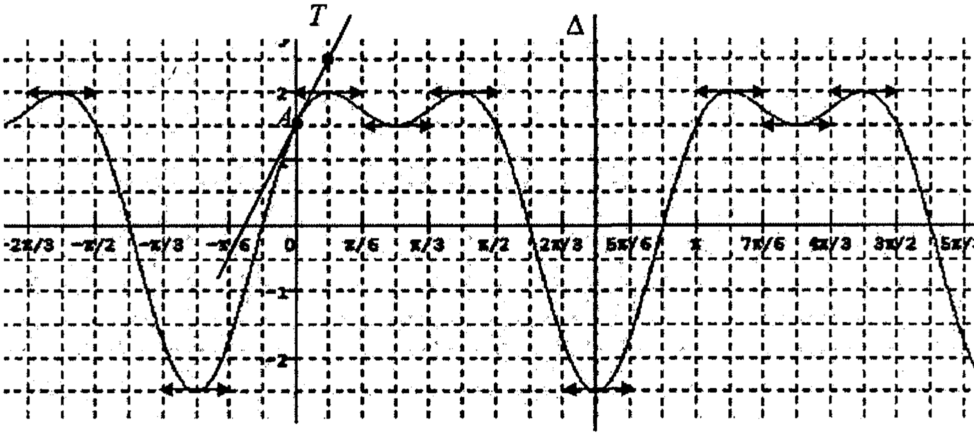
* un centre de symétrie I$(\frac{\pi}{2},1)$ ** Au point d'abscisse 0 une tangente d'équation y=x

***Un axe de symétrie d'équation : x=0

Exercice n°2 :Le graphique ci-contre représente une partie d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

On sait que :

- $\Delta : x=\frac{3\pi}{4}$ est un axe de symétrie pour la courbe ζ_f
- T la tangente à ζ_f au point $A\left(0,\frac{3}{2}\right)$.



- On note f′ la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

Par lecture graphique :

1) a) $f\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-f(x)=0$ b) $f\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)-f(x)=0$ c) $f\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+f(x)=0$

2) a) $f'(0)=\frac{\pi}{12}$ b) $f'(0)=\frac{3}{2}$ c) $f'(0)=\frac{12}{\pi}$.

3) a) $f'\left(-\frac{\pi}{12}\right)=0$ b) $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)<f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ c) $f'(x)\geq 0$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12}\right]$.

4) f est périodique de période : a) $\frac{\pi}{2}$ b) π c) 2π

5) $f\left(\frac{135\pi}{12}\right)=$ a) $\frac{3}{2}$ b) $-\frac{5}{2}$ c) 2

Exercice 3 :Soit la fonction : $f : x \mapsto \sin 2x$

1) Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative ζ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

2) Déduire la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto |\sin 2x|$.

3) Déterminer la période de g .

Exercice 4: Soit f la fonction par : $f(x)=2\cos(x)+\cos(2x)$. On note par ζ la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. 1) Etudier la parité de f puis vérifier qu'il suffit d'étudier f sur $[0,\pi]$.

2) Dresser le tableau d variation de f sur $[0,\pi]$.3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0,\pi]$ l'équation f(x) = -1.

4) Construire la partie de ζ dans l'intervalle $[-2\pi,2\pi]$. 5) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{x^2}$

Exercice 5 :Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2\sin^2 x+4\sin x$ .On note ζ sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que f est 2π périodique puis dresser son tableau de variation sur $[-\pi,\pi]$

2) Déterminer les points d'intersection de ζ et l'axe des abscisses.

3) Tracer la partie de ζ dans $[-2\pi;2\pi]$

4) Soit $g(x)=-2\sin^2 x+4\sin x$. a) Calculer $g(x)+f(x+\pi)$.

b) En déduire une construction de ζ_g à partir de ζ puis tracer la partie de ζ_g sur $[-2\pi;2\pi]$.

Exercice 6 :

1) Soit f la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\cos^2 x+\cos^2(3x)$. Montrer que $f\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)=[0;2]$

2) Soit g la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x)=\cos x+\cos(3x)$

a) Montrer qu'il existe un réel $a\leq 0$ tel que $g\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)=[a;2]$

b) Montrer que $g\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\sin\frac{\pi}{8}-\cos\frac{\pi}{8}$; c) En déduire que $a\in\left[-1;-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\right]$

Exercice 7 :Soit la fonction : $f : x \mapsto \sqrt{3}\sin 2x-2\sin^2 x+1$

1) Montrer que pour tout réel x, $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

2) Etudier f et tracer sa courbe représentative (ζ) dans un plan rapporté a un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

3) Vérifier que les droites $(D_k : x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z})$ sont des axes de symétrie de la courbe (ζ).

4) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(f(x) = 1)$.

b) Résoudre graphiquement dans $[0,\pi]$, l'inéquation $(\sqrt{3}\sin 2x \geq 2\sin^2 x)$.

5) Soit la fonction $g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$

$x \to \sqrt{3}\sin 2|x| - 2\sin^2 x + 1$ Tracer la courbe de g dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

<u>Exercice 8 :</u>Soient les fonctions $f : x \mapsto 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ et $g : x \mapsto 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

1) Etudier chacune des fonctions f et g et tracer les courbes représentatives ζ et ζ' dans le plan rapporté à un repère orthogonale.

Vérifier que ζ' est l'image de ζ par une translation dont-on déterminera le vecteur.

2) Soit la fonction h définie sur $[0,2\pi]$ par : $h(x) = |\cos x| + \sqrt{3}|\sin x|$

Utiliser les courbes ζ et ζ' pour tracer la courbe représentative de h.

<u>EXERCICE9</u> :Soit la fonction définie sur IR par : $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

1) Etudier les variations de f sur $[0;\pi[$; 2) Construire la courbe de f.

3) En déduire la construction de la courbe de la fonction g définie sur $[-\pi;\pi]$ par

$g(x) = -2\sin\left(|x| + \frac{\pi}{4}\right).\cos\left(|x| + \frac{\pi}{4}\right)$

<u>EXERCICE 10</u> :Soit la fonction f définie par $f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$

1) Montrer que la droite $D : x = -\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie à la courbe de f.

2) Montrer que le point $E\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ est un centre de symétrie à la courbe de f.

3) Etudier les variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et construire ζ_f.

<u>Exercice 11 :</u>Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = a\cos(2x) + b$ avec a et b des réels et (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Le tableau de variation de f sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ est le suivant :

x	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

1) Montrer que $a = 2$ et que $b = 1$

2) a) Résoudre dans $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ l'équation $f(x) = 0$.

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$

3) a)Montrer que $I\left(\frac{\pi}{4};1\right)$ est un centre de symétrie de (C)

b) Montrer que l'étude de f se réduit à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$

c) Construire la portion (C_0) de (C) relative à $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ en précisant les points de rencontre de (C_0) avec les axes de repère.

d) Soit g la fonction définie sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ par $g(x)=\left[f(x)\right]^2$ Dresser le tableau de variation de g.

Exercice 12 :Soit la fonction : $f : x \mapsto \tan(ax+b)$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$

On désigne par ζ la courbe représentative de f dans d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan.

1) Déterminer a et b pour que la période de f soit égale à 2π et que la courbe ζ passe par le point $I\left(\frac{4\pi}{3},0\right)$.

2) On prend $a=\frac{1}{2}$ et $b=\frac{\pi}{3}$ .a) Etudier la variation de f sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right[$. b) Tracer la courbe ζ.

Exercice 13 :le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$ Soit $A(1,0)$ et $B(0,1)$ deux points du cercle trigonométrique de centre O Soit θ un réel de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$,On désigne par M le point du cercle trigonométrique tel que $\left(\overline{OA},\overline{OM}\right)\equiv\theta[2\pi]$.

1)a) Montrer que $AM=2\sin\frac{\theta}{2}$. b) Montrer que $BM=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

2) a) Montrer que la fonction f définie par : $f(x)=2\sin x+2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ est dérivable sur IR

b)Dresser la tableau de variation de f sur $\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$.

c)En déduire la valeur de θ pour laquelle AM+BM est maximale .

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)++2\sqrt{2}-4}{2x-\pi}$.

Résumé du cours :

Définition : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique signifie qu'il existe un réel r tel que : pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=r$ et r est la raison de la suite u

Terme Général : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r :

On a : $u_n=u_0+nr$; pour tout $n\in\mathbb{N}$

Relation entre deux termes quelconques : $u_n=u_p+(n-p)r$; pour tous entiers naturels n *et* p

Somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Soit $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots\cdots+u_{n-1}$ alors on a : $S_n=\dfrac{n(u_0+u_{n-1})}{2}$

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Soit $S=u_p+u_{p+1}+\cdots\cdots+u_n$ $(p\le n)$ alors on a : $S=\dfrac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}$

Conséquence : Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Définition : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géometrique signifie qu'il existe un réel q tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=qu_n$, q est la raison de la suite u

Terme Général : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géometrique de premier terme u_0 et de raison q

On a : $u_n=u_0.q^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Relation entre deux termes quelconques : $u_n=u_m.q^{n-m}$; pour tous entiers naturels n *et* m

Relation entre trois termes consécutifs d'une suite géométrique :

a , b *et* c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique sig $a.c=b^2$

Somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique : Soit $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots\cdots+u_{n-1}$ On a

$$S_n=\begin{cases} n.u_0 & si\ q=1\\ u_0\dfrac{1-q^n}{1-q} & si\ q\neq 1\end{cases}$$

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique : Soit $S=u_p+u_{p+1}+\cdots\cdots+u_n$

$(p\le n)$, On a : $S=\begin{cases}(n-p+1)u_p & si\ q=1\\ u_p\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & si\ q\neq 1\end{cases}$

Conséquence : Pour tout réel q on a : $1+q+q^2+q^3+\cdots\cdots+q^{n-1}=\begin{cases} n & si\ q=1\\ \dfrac{1-q^n}{1-q} & si\ q\neq 1\end{cases}$

Définition : Une suite numérique u est une fonction de IN dans IR, définie à partir d'un certain rang n, L'image $u(n)$ de l'entier n est noté u_n . Le terme u_{n_0} est le premier terme de la suite. Le terme u_n est le terme d'indice n de la suite.

Variation d'une suite Définition : Soit u une suite numérique définie pour tout entier $n \geq n_0 \geq 0$.

La suite (u_n) est dite croissante si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \geq n_0$. Dans ce cas les termes de la suite sont rangés dans l'ordre croissant :$u_{n_0} \leq u_{n_0+1} \leq .... \leq u_n \leq u_{n+1} \leq ....$

La suite (u_n) est dite décroissante si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq n_0$. Dans ce cas les termes de la suite sont rangés dans l'ordre croissant :$u_{n_0} \geq u_{n_0+1} \geq .... \geq u_n \geq u_{n+1} \geq ....$

Théorème : Soit (u_n) une suite géométrique définie par : $u_n = q^n$;$n \geq 0$; où q est un réel non nul.

- Si $q > 1$; alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- Si $|q| < 1$; alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$
- Si $q \leq -1$; alors la suite (u_n) n'a pas de limite.
- Si $q = 1$; alors la suite (u_n) est constante.

LES EXERCICES

EXERCICE 1 : La ville A compte une population de 34 000 habitants en 2007. On observe depuis que chaque année, sa population augmente de 3%.On note $U_0 = 34000$ le nombre d'habitants de la ville A au 1er janvier 2007, et *un* le nombre de ses habitants au 1er janvier de l'année (2007+*n*).

On arrondira au besoin les nombres d'habitants à l'unité.

1. Vérifier que $U_1 = 35020$ puis calculer U_2.

a. Pour tout entier naturel *n*, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.

b. En déduire la nature de la suite (U_n) .**c.** Déterminer alors U_n en fonction de *n*.

2. Selon ce modèle :**a.** Calculer la population de la ville A au 1er janvier 2012.

b. À partir de quelle année la population de la ville A dépassera-t-elle 50 000 habitants ?

EXERCICE 2 : La ville B, qui comptait 45 000 habitants au 1er janvier 2007, perd chaque année 500 habitants.On note V_0 le nombre d'habitants de la ville B au 1er janvier 2007, et V_n le nombre d'habitants au 1er janvier de l'année (2007+*n*).On a ainsi $V_0 = 45000$.

1. Montrer que $V_1 = 44500$ puis calculer V_2.

2. a. Pour tout entier naturel *n*, exprimer V_{n+1} en fonction de V_n ·

b. En déduire la nature de la suite (V_n).**c.** Déterminer alors V_n en fonction de *n*.

3. Selon ce modèle, calculer la population de la ville B au 1er janvier 2012.

EXERCICE 3 : Soit (U_n) la suite définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} - U_n = n + 1; n \in IN \end{cases}$

1) a) Calculer U_1 et U_2 b) La suite (U_n) est-elle arithmétique ?

2) Soit (V_n) la suite définie sur IN par : $V_n = U_{n+1} - U_n$;$n \in IN$

a) Montrer que (V_n) est arithmétique. ; b) Soit $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$; Exprimer S_n en fonction de n.

3) Montrer que $S_n = 1 + U_{n+1}$; $n \in IN$

4) Exprimer U_n en fonction de n.

EXERCICE 4 : Soit (U_n) la suite définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 1 \; ; \; U_1 = 2 \\ U_{n+2} = 3U_{n+1} - 2U_n \end{cases}$.

1) Montrer que la suite (V_n) définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$ est géométrique.

2) Exprimer V_n en fonction de n.

3) Calculer la somme suivante : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$

4) Exprimer U_n en fonction de n.

EXERCICE 5 : Soit (U_n) la suite définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2^n} + n \end{cases}$.

1)Exprimer en fonction de n la somme suivante : $\sum_{k=0}^{n-1} (U_{k+1} - U_K)$

2)En déduire l'expression de U_n en fonction de n.

EXERCICE 6 : Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ .1) Vérifier que $\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$. 2) Calculer S_n.

Exercice 7 :Soit $X \in IR \setminus \{1\}$ et (V_n) la suite définie sur IN par $V_n = X^n$.

1) Déterminer la nature de la suite V_n.

2) Calculer la somme suivante $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$. 3) Montrer que $2^n \geq n+1$.

Exercice 8 : 1)À partir d'un nombre donné, on construit une suite de nombres de la façon suivante : chaque nombre est la somme des carrés des chiffres du nombre précédent.
Ainsi, si le premier nombre est 2 332 011,
le deuxième nombre est $2^2+3^2+3^2+2^2+0^2+1^2+1^2=28$
le troisième nombre est $2^2+8^2=68$ et ainsi de suite.
Calculer le 2011ème nombre de cette suite.
2)Calculer le 2011ème nombre de la suite obtenue en partant du nombre 1248.

EXERCICE 9 : Soit $(U_n)_{n\in IN^*}$ la suite définie par $U_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\dots + \frac{1}{n^2}$

1)Calculer U_1 ; U_2 et U_3

2)a)Montrer que pour tout $k \in IN^* \setminus \{1\}$ On a : $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

b) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ On a : $U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

EXERCICE 10 : Soit $(U_n)_{n\in IN^*}$ la suite définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k = 2n^2 + n$; $n \in IN^*$

1) Exprimer U_n en fonction de n. 2) Déterminer la nature de la suite (U_n)

3) Soit (V_n) la suite définie sur IN^* par $\begin{cases} V_1 = \dfrac{1}{2} \\ V_{n+1} = \dfrac{V_n}{\sqrt{1+4V_n^2}} \end{cases}$

a) Montrer que ; $V_n > 0$. b) Montrer que pour tout entier $n \in IN^*$; $V_n^2 = \dfrac{1}{1+U_n}$

c) Exprimer V_n en fonction de n.

EXERCICE 11 : Soit (U_n) la suite définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} \end{cases}$

1)Montrer que pour tout $n \in IN'$ On a : $0 < U_n < 2$

2)a)Montrer que pour tout $n \in IN$ On a : $2 - U_{n+1} < \dfrac{1}{2}(2 - U_n)$.b)En déduire que $0 < 2 - U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

3)a)Montrer que $U_n = 2\cos\dfrac{\pi}{3.2^n}$. b)En déduire la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{12}$.

EXERCICE 12 :

				1				
			2	3	4			
		5	6	7	8	9		
	10	11	12	13	14	15	16	
17	....							25

On écrit les entiers naturels comme indiqué sur le schéma ci dessus où on s'est arrêté à 25.

1)Quel sera l'entier écrit au bout de la 18ème ligne?

2)Sur quelle ligne est écrit 2 010?

EXERCICE 13 : 26 personnes dont les âges sont respectivement chacun des entiers compris entre 35 et 60 sont assises autour d'une table. Montrer qu'il existe 4 personnes assises côte à côte dont la somme des âges est inférieure ou égale à 190

Exercice 14:Cocher la réponse exacte :

1) Soit (U_n) la suite définie sur IN par $U_n = (-0.8)^n$ alors :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$; b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$; U_n n'a pas de limite

4) Soit la suite U_n définie sur IR par $U_n = \dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{10^3}$ alors :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$; b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$; c) n'a pas de limite

5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3^n+2^n}{3^n-2^n}$ est : a) $+\infty$; b) 1 ; c) n'admet pas de limite.

6) Soit (U_n) la suite définie sur IN par $U_n=\frac{3^n}{(-7)^{n+1}}$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\frac{-3}{7}$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$ c) n'admet pas de limite

8) Si $U_n=1-2+4+.....+(-1)^n2^n;\forall n\in\mathbb{N}$ alors :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\frac{1}{3}$; b) $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=-\infty$; c) U_n n'a pas de limite.

9) Soit (U_n) la suite définie sur IN,on suppose que $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}U_k$ est convergente alors

a) (S_n)est croissante b)(S_n)est décroissante c)(U_n)converge

10) Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $U_n=\frac{2+(-3)^n}{1+5(-3)^n}$

a) (U_n) admet une limite fine ; b) (U_n) admet une limite infinie c) (U_n) n'admet pas de limite

EXERCICE 15 : Soit (U_n) la suite définie sur IN^* par $U_n=\frac{n}{3^n}$

1) a) Montrer que pour tout $n\in IN^*$ on a $\frac{U_{n+1}}{U_n}\leq\frac{2}{3}$; b) En déduire que la suite (U_n) est décroissante.

c) Montrer que $\forall n\in IN^*$ on a : $U_n\leq 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$

2) Soit $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}U_k$. Montrer que (S_n) est croissante et majorée par 2.

EXERCICE 16 : Soit (U_n) la suite définie sur IN par $\begin{cases}U_0=0\\ U_{n+1}=\frac{2}{\sqrt{4-U_n^2}}\end{cases};n\in IN$

1) Montrer par récurrence que : $0<U_n<\sqrt{2}$

2) a) Calculer $U_{n+1}^2-U_n^2$ en fonction de U_n . b) En déduire que pour tout $n\in IN$ on a : $U_{n+1}>U_n$.

3) Soit la suite (V_n) définie par $V_n=\frac{2+U_n^2}{2-U_n^2}$.a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique.

b) Exprimer V_n en fonction de n. c) En déduire que $U_n=\sqrt{\frac{2n}{n+1}}$.

4) Calculer $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(kU_{k-1}^2)$.

5) a) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $\left|U_n - \sqrt{2}\right| < \frac{2}{n+1}$. b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

EXERCICE 17: Soit (U_n) la suite définie sur IN^* par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n - 16}{U_n - 6} \end{cases}$

1) a) Calculer U_1 et U_2 b) Vérifier que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique

2) Montrer que pour tout $n \in IN$; $U_n < 4$

3) Déduire que la suite (U_n) est croissante

4) Soit la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{1}{U_n - 4}$ a) Montrer que la suite (V_n) est arithmétique.

b) Exprimer (V_n) puis (U_n) en fonction de n. c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

EXERCICE 18 : Soit (U_n) la suite définie sur IN^* par $\begin{cases} U_1 = \frac{6}{5} \\ U_{n+1} = \frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5} \end{cases}$; $\forall n \in IN^*$

1) Calculer les cinq premiers termes de la suite.

2) Montrer que pour tout $n \in IN^*$; $U_n > 1$. 3) Montrer que la suite (U_n) est décroissante

4) Montrer que la suite (V_n) définie sur $V_n = U_n - 1$ est géométrique.

5) a) Montrer que la suite (V_n) converge vers 0 et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

EXERCICE 19: Soit (U_n) la suite définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2 - U_n} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in IN$ On a : $0 < U_n \leq \frac{1}{2}$

2) a) Montrer que pour tout $n \in IN$ On a : $U_{n+1} \leq \frac{2}{3} U_n$. b) En déduire que (U_n) est décroissante

3) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$ On a : $U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n U_0$

4) Soit la suite (V_n) définie sur IN par $V_n = \frac{1}{U_n} - 1$

a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique b) Exprimer (U_n) en fonction de n.

5) Soit $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{U_k}$ .a) Exprimer S_n en fonction de n. b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

Exercice 20:: Soit (u_n) la suite définie par :$u_0 = 8$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = 0,85u_n + 1,8$.

1. Sur une feuille de papier millimétré construire un repère orthonormé (unité1 cm), où l'axe des ordonnées est placé à gauche de la feuille.

a. Dans ce repère, tracer les droites d'équations respectives $y = 0,85x + 1,8$ et $y = x$.

b. Dans ce repère placer u_0 sur l'axe des abscisses puis, en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1, u_2 et u_3.

On laissera apparents les traits de construction.

c. À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n).

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 12$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 12 - 4 \times 0,85n$.

c. Donner le sens de variation de la suite (v_n). En déduire celui de la suite (u_n).

d.Déterminer la limite de la suite (u_n).

3. Un magazine est vendu uniquement par abonnement. On a constaté que :

– il y a 1 800 nouveaux abonnés chaque année ;

– d'une année sur l'autre, 15 % des abonnés ne se réabonnent pas.

En 2008, il y avait 8 000 abonnés.

a. Montrer que cette situation peut être modélisée par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre de milliers d'abonnés en $(2008+n)$.

b. En utilisant la question 2. b., calculer une estimation du nombre d'abonnés en 2014.

Exercice 21 : Toutes les heures, on injecte une même dose de 1.8 unité d'une substance médicamenteuse dans le sang.les injections sont faites par piqure intraveineuse. On suppose que la substance se repartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée. En une heure, la quantité de cette substance présente dans le sang diminue de 30%.

La première heure, se fait a l'instant $t = 0$ .Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note Q_n la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t=n (en heure)des que la nouvelle injection est faite.

1)a) Justifier que $Q_1 = 1.8 + (0.7).(1.8)$. b) Exprimer Q_2 en fonction de Q_1 puis calculer Q_2.

2)a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer Q_{n+1} en fonction Q_n .

b) Déterminer une fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ tels que $Q_{n+1} = f(Q_n), n \geq 1$

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α que l'on déterminera.

3) Soit (T_n) la suite définie par $T_n = Q_n - \alpha, n \geq 1$

a)Montrer que (T_n) est une suite géométrique. b) En déduire que $Q_n = 6\left(1-(0,7)^{n+1}\right), n \geq 1$.

4) Donner une approximation de la quantité de substance présente dans le sang à l'instant $t = 5$.

5) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} Q_n$.

Exercice 22

Soit la fonction f définie dans IR par

$$f(x) = (x+1) - 2(x+2) + 3(x+3) - 4(x+4) + ... + 2009(x+2009) - 2010(x+2010)$$

1)Résoudre dans IR ,l'équation f(x)=0

2)Montrer que , pour tout entier relatif impair k, f(k) est un entier multiple de 2010 ; Existe –t-il un entier k pour lequel f(k)=2010 .

Résumé du cours

Définition 1: Soit A et B deux ensembles finis. Leur intersection $A \cap B$, qui se lit « A inter B », est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. les ensembles A et B sont dits disjoints lorsqu'ils n'ont aucun élément en commun. A et B sont disjoints équivaut à $A \cap B = \varnothing$

Définition 2: Soit A et B deux ensembles finis. Leur réunion $A \cup B$, qui se lit « A union B », est l'ensemble dont les éléments appartiennent à A ou à B.

Si A et B sont disjoints, alors $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B$.

Si A et B ne sont pas disjoints, alors $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cap B)$

Définition 3: Soit E un ensemble fini, de cardinal n et A une partie de E. le complémentaire $\overline{A}$ de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. on a alors : $A \cup \overline{A} = E$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$; $\operatorname{card} \overline{A} = n - \operatorname{card} A$.

Définition 4: Le produit cartésien $E \times F$, se lit « E crois F », est l'ensemble des couples $(x; y)$ tels que x appartient à E et y appartient à F. On a : $\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card} E \times \operatorname{card} F$

Soit E un ensemble non vide et fini. Le produit cartésien $\underbrace{E \times E \times ...... \times E}_{p\,fois}$ est l'ensemble des p-uplets $(x_1; x_2; ...; x_p)$ tels que x_i appartient à E. On le note E^p et on a $\operatorname{card}(E^p) = (\operatorname{card} E)^p$

Définition 5: Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n. on appelle permutation des n éléments de E tout n-uplets d'éléments distincts de E.

Définition 6: Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier tel que $1 \le p \le n$. On appelle arrangement de p éléments de E tout p-uplets d'éléments distincts de E.

Théorème : Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier tel que $1 \le p \le n$. Le nombre d'arrangement de p éléments de E est l'entier noté : A_n^p (On lit « A, n, p ») tel que

$A_n^p = n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ On convient que $A_n^0 = 1$

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F. on dit que f est injective lorsque pour tous $x; x'$ de E tels que $x \ne x'$; on a $f(x) \ne f(x')$

Définition 7: Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier tel que $0 \le p \le n$. On appelle combinaison de p éléments de E, toute partie à p éléments distincts de E.Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est l'entier naturel noté C_n^p (On lit « C, n, p ») ou $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$

Théorème : Soit n et p deux entiers naturels tels que $0 \le p \le n$. Alors $C_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$

Binôme de Newton : Soit a et b deux réels. Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^n a^0 b^n$

LES EXERCICES

Exercice N° 1 :1)On veut placer quatre billes dans cinq trous de telle sorte qu'un trou reçoit au plus une bille. Le nombre de façons de placer ces quatre billes est :a) 4^5 ; b) A_5^4 ; c) C_5^4

2)Cinq enfants veulent s'asseoir sur un banc le nombre de manière de les disposer sur le banc est :

a) $5!$; b) 5^5 ; c) C_5^5

3)Dans un classe de 23 élèves on doit étire 2 délégués le nombre de choix possibles est :

a) C_{23}^2 ; b) A_{23}^2 ; c) 2^{23}

Exercice N°2 : Une urne contient dix boules numérotées de 1 à 12.

1) On tire successivement et sans remise 2 boules. Le nombre de tirages possibles est :

a) A_{12}^2 ; b) C_{12}^2 ; c) 2^{12}

2) On tire successivement et avec remise 5 boules. Le nombre de tirages possibles est :

a) A_{12}^5 ; b) C_{12}^5 ; c) 5^{12}

3) On tire simultanément 3 boules Le nombre de tirages possibles est :

a) A_{12}^3 ; b) C_{12}^3 ; c) 3^{12}

4) Le nombre d'anagrammes du mot ACADEMIE est égal à

a) 1680 b) 10080 c) 40320

5) Pour tout entier naturel non nul n, la somme $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n$ est égal à :

a) 2^n b) $n!$ c) n^2

6) Pour tout entier naturel n, $n! + (n+1)! = a)\frac{(n+2)!}{n+1}$, $b)(n+1)!$, $c)n!$.

Exercice 3 :Trente voyageurs prennent le même bus qui va s'arrêter dans dix stations. De combien de façon peut-on envisager les descentes des voyageurs ?

Exercice 4 :un sac contient : cinq boules rouges numérotée 0, 0, 1, 2,2
Trois boules blanches numérotée 0, 1, 2
Deux boules jaunes numérotée 0, 4

On tire simultanément trois boules de sac. Dénombrer les tirages dans chacun des cas suivants :

a) Obtenir trois boules de même couleur
b) Obtenir une seule boule jaune
c) La somme des trois numéros inscrits sur les boules tirées est égale à 5
d) Le produit des trois numéros obtenus est nul

Exercice 5 :Une urne contient dix jetons dont quatre sont blancs et six rouges.

1) On tire successivement et sans remise trois jetons de l'urne.
a) Quelle est le nombre des tirages possibles ?
b) Quelle est le nombre des tirages comprenant des jetons de même couleur ?
c) Quelle est le nombre des tirages comprenant les deux couleurs ?
d) Quelle est le nombre des tirages comprenant exactement deux jetons rouges ?
2) Répondre aux mêmes questions dans le cas où l'on tire trois jetons successivement et avec remise.

Exercice 6 :Quatre garçons et deux filles s'assoient sur un banc.

1) Quelle est le nombre de dispositions possibles ?

2) Quel est le nombre de dispositions si les garçons sont d'un cote et les filles d'une autre.
3) Quel est le nombre de dispositions si chaque fille est intercalée entre deux garçons.
4) Quel est le nombre de dispositions si les filles veulent rester l'une a cote de l'autre.

Exercice7 **:**On forme un jury composé de cinq membres pris dans une liste de dix hommes et sept femmes.
1) Quelle est le nombre de jurys que l'on peut former ?
2) Quelle est le nombre de jurys comprenant trois hommes et deux femmes?
3) Quelle est le nombre de jurys ne comprenant aucune femme ?
4) Quelle est le nombre de jurys comprenant au moins une femme ?
5) Quelle est le nombre de jurys comprenant au plus deux femmes?

Exercice 8 **:**On forme un comité de quatre membres choisis parmi sept personnes dont deux sont frères.
1) Combien de comités peut on former ?
2) Combien de comités comprenant les deux frères peut-on former ?
3) Combien de comités comprenant un seul des deux frères peut-on former ?
4) Combien de comités ne comprenant aucun des deux frères peut-on former ?
5) Combien de comités comprenant au moins l'un des deux frères peut-on former ?

Exercice 9 **:**1) Montrer que pour tout entier naturel $k,(k+1)!-k!=k\times k!$

2) En déduire que pour tout entier naturel $n, n!-1=1\times 1!+2\times 2!+...+(n-1)\times(n-1)!$.

Exercice 10:La fabrication d'une pièce nécessite de passer celle-ci sur quatre machine A, B, C et D.
Dénombrer les trajets possibles dans chacun des cas suivants :
a)l'ordre de passage est indifférent b) la pièce doit d'abord passer par A.
c)la pièce doit passer en B avant C et D.

Exercice 11 **:**Dans un restaurant on peut servir cinq plats P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5. Quatre clients se présentent et choisissent chacun un plats et un seul.
1) De combien de façon peut-on les servir ?
2) De combien de façon peut-on les servir sachant que les plats choisis sont différents.
3) Sachant que le plats P_1 est choisis par deux client et seulement deux, déterminer le nombre de façons de servir les quatre clients.

Exercice 12 **:**Le cadron d'un appareil téléphonique comporte les chiffres de 0 à 9.
Le numéro de téléphone se compose de cinq chiffres, le premier chiffre n'étant pas zéro.
1) Combien de numéros de téléphone existe-il ?
2) Combien de numéros commencent par 56 existe-il ?
3) Combien y-a-t-il de numéros composés de chiffres distinct ?

Exercice 13 **:**On veut colorier un rectangle divisé en huit carreaux. On dispose de trois crayons : un vert, un rouge et un noire. Chaque carreau est colorié par une couleur et une seule.
1) Dénombrer les cas possibles.
2) Dénombrer les cas où trois carreaux exactement sont rouges.
3) Dénombrer les cas où trois carreaux sont rouges, trois sont verts et deux sont noirs.
4) Dénombrer les cas comprenant deux couleurs seulement.

Exercice 14:1) Soit $n \geq 4$. a) Quel est le nombre de diagonales d'un polygone à n cotés ?
b) Quels polygones ont autant de diagonales que de coté ?
2) On donne n points distincts sur un cercle ($n \geq 4$). a) Combien de cordes définissent-ils ?
b) On suppose que ces cordes se coupent en des points distincts à l'intérieur de cercle.
Combien y-a-t-il de points d'intersection ?

Exercice 15:Une urne contient dix jetons dont quatre sont blancs et six rouges.
1) On tire successivement et sans remise trois jetons de l'urne.
a) Quelle est le nombre des tirages possibles ?
b) Quelle est le nombre des tirages comprenant des jetons de même couleur ?
c) Quelle est le nombre des tirages comprenant les deux couleurs ?
d) Quelle est le nombre des tirages comprenant exactement deux jetons rouges ?
2) Répondre aux mêmes questions dans le cas où l'on tire trois jetons successivement et avec remise.

Exercice N° 16 : Pour un groupe d'élèves donné, combien y'a-t-il de classements sans ex-æquo par ordre de mérite ? On note N_t le nombre de classements possibles sans ex-æquo de k élèves.

Pour un groupe $E_2 = \{A;B\}$ de deux élèves il y a deux éléments possibles que nous noterons $(A;B)$ et $(B;A)$ dans ce cas $N_2 = 2$.

1) Le groupe comprend 3 élèves, il est noté $E_3 = \{A;B;C\}$.

Trouver N_3 (Représenter à l'aide d'un arbre)

2) Le groupe comprend 4 élèves, il est noté $E_4 = \{A;B;C;D\}$.

Trouver N_4 (Représenter à l'aide d'un arbre)

3) Quelle relation y'a-t-il entre N_2 et N_3 ?entre N_3 et N_4

4) a) Quelle relation prévoyez-vous entre N_{k-1} et N_k.

b) Calculer alors N_k en fonction de k pour tout $k \in IN^* \setminus \{1\}$

Exercice 17 jamel a une carte bleue avec un code à quatre chiffres.
Il se souvient que ce code commence par 1 et se termine par 5.
Il se souvient aussi que les deux autres chiffres ne sont pas les mêmes.
1. Combien y-a-t-il de tels codes possibles?
2. Il se souvient de plus que la somme des quatre chiffres fait 8. Il prétend alors qu'en deux tentatives il est sûr de retrouver son code. A-t-il raison?

Exercice N°18 : Quatre joueurs d'escrime A ; B ; C et D laissent, après la séance d'entraînement du matin, leurs épées numérotées chez le gardien du club. Celui-ci s'amuse è enlever les numéros et rend au hasard le épées aux quatre joueurs avant la séance de l'après-midi.
1) Dénombrer tous les cas possibles.
2) Dénombrer les cas possibles si :a) Le joueur A est le seul à retrouver son épée.
b) Un seul joueur retrouve son épée
c) Aucun joueur ne retrouve son épée (on pourra dresser l'arbre des choix)

Exercice n°19: Un sac contient neuf jetons répartis comme suit : Quatre jetons blancs marqués : M,A,T,H
Cinq jetons rouges marqués : 1,2,3,4,5
1) On tire simultanément cinq jetons du sac. Dénombrer les tirages dans chacun des sacs suivants :
a)Obtenir exactement deux jetons blancs. b)Obtenir au moins deux jetons rouges.
c)La somme des chiffres marqués sur les jetons rouges tirés est égale à 8.
2) On tire successivement sans remise tous les jetons du sac .
Dénombrer les tirages dans chacun des cas suivants :
a)Le premier jeton tiré est marqué A. b)Obtenir consécutivement et dans cet ordre : M ,A,T,H
c)Obtenir consécutivement les jetons blancs. d)Obtenir des lettres et des chiffres alternés.
e)Parmi les cinq premiers jetons tirés, il y a exactement deux jetons blancs.

Exercice 20 :On donne un entier naturel non nul n et les sommes :

$$S = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + ... + (-1)^p C_n^p + ... + (-1)^n C_n^n$$

et $S' = \frac{1}{0!n!} - \frac{1}{1!(n-1)!} + \frac{1}{2!(n-2)!} + ... + (-1)^p \frac{1}{p!(n-p)!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!0!}$ Calculer S ; en déduit S'.

Exercice 21: 1) Montrer que pour tout entier naturel n et p tels que $1 \le p \le n$, $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$

2) En déduire que pour tout entier naturel $n \ge 1$, $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n = n2^{n-1}$

Exercice 22:Soit n un entier naturel. Calculer :

$A = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + ... + 2^n C_n^n$; $B = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + ... + (-1)^n C_n^n$

Exercice 23 :Soit n un entier naturel non nul. Calculer la somme :

$$S = A_n^0 + \frac{3}{1!} A_n^1 + \frac{3^2}{2!} A_n^2 + \frac{3^3}{3!} A_n^3 + ... + \frac{3^n}{n!} A_n^n$$

Exercice n°24: Soit n et p 2 entiers naturels tels que : $3 \le p \le n$.

Montrer que : $C_n^p = C_3^0\ C_{n-3}^p + C_3^1 C_{n-3}^{p-1} + C_3^2 C_{n-3}^{p-2} + C_3^3 C_{n-3}^{p-3}$.

Exercice 25 :Soit la fonction $f : x \mapsto \left(1 - \frac{1}{x}\right)^n$ où $(n \in \mathbb{N}^*)$

1) Développer $f(x)$; en déduire que : $3^n C_n^0 - 3^{n-1}.C_n^1 + 3^{n-2}.C_n^2 + ... + (-1)^p .3^{n-p}.C_n^p + ... + (-1)^n .C_n^n = 2^n$

2) Calculer $f'(x)$ de deux manières différentes, en déduire que : $\sum_{p=1}^{n} \left(\frac{(-1)^{p+1} .p.C_n^p}{3^{p-1}} \right) = n \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$

Exercice n°26: Un nombre à 5 chiffres est dit macrocéphale si ses chiffres sont tous différents et si son chiffre des dizaines de milliers est égal à la somme de ses 4 autres chiffres. Combien existe- t-il de nombres macrocéphales?

Exercice 27 : Trente-six personnes d'une famille sont réunies, dont les âges sont tous différents, la plus jeune ayant 21 ans et la plus âgée 56 ans. Pour garder des souvenirs de cette réunion mémorable, une séance de photos est organisée.

Sur chaque photo prise, six personnes sont présentes et il existe toujours au moins deux personnes parmi elles dont les âges sont des nombres consécutifs. On ne prend jamais deux photos avec les mêmes personnes.Combien de photos seront-elles prises, au maximum?

Exercice 28 : On multiplie les nombres de 1 à 25: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ ... \times 23 \times 24 \times 25$. Par combien de zéros se termine l'écriture du résultat de cette multiplication?

Exercice 29 : Une fête réunit 5 amis. Chacun donne un cadeau à seulement un autre et chacun reçoit un cadeau uniquement d'un autre. De combien de manières une telle distribution est-elle possible?

Exercice 30 :On dispose de 100 cartes. Sur chacune sont écrits deux entiers consécutifs, de sorte que chacun des entiers 1,2,3,...,199, 200 est écrit sur une et une seule carte.

1) Maram a choisi 21 cartes au hasard. Elle fait la somme de tous les entiers écrits sur ses cartes et annonce à abrar que cette somme est égale à 2004.Prouver que Maram s'est trompée dans son calcul.

2) Maram recompte et annonce 2005. Prouver qu'elle s'est à nouveau trompée dans son calcul.

3) En fait le total de Maram est 2003. Pendant ce temps, abrar a choisi 20 cartes au hasard parmi celles qui restaient.

Exercice 31:1) Combien faut-il au total de caractères pour numéroter toutes les pages d'un livre de 350 pages ?

2°) Quels seront les chiffres les plus et les moins utilisés ?

Résumé du cours :

Définition : Lorsqu'on tire au sort un nombre, ou qu'on lance une pièce de monnaie ou un dé, il est impossible de prévoir le résultat, car ce résultat est soumis au hasard. On dit alors que le résultat est aléatoire. Les expériences telles que tirer au sort une question dans un examen, tirer au sort un nombre, lancer un dé non truqué ou une pièce de monnaie sont appelées expériences aléatoires ou épreuves.

Définition : Soit E l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire et $p(E)$ l'ensemble les évènements de E. on appelle probabilité sur E, toute application p, de $p(E)$ dans $[0;1]$ telle que :

- $p(E)=1$
- L'image $p(A)$ d'un évènement A, est la somme des images des évènements élémentaires de A
- L'image $p(\varnothing)$ de l'ensemble vide est égal à 0.

Définition : Soit $E=(a_1;a_2;...;a_n)$ l'ensemble des issues et p une probabilité sur E. la probabilité d'un évènement élémentaire $\{a_i\}$ est notée $p(a_i)$ et on a : $\sum_{i=1}^{n} p(a_i)=1$.

Définition :L'évènement complémentaire d'un évènement A est dit l'évènement contraire de A

Soit E un ensemble fini et p une probabilité sur E.

- Pour tout évènement A, $p(\overline{A})=1-p(A)$
- Pour tous évènements A et B, $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$
- Pour tous évènements incompatibles A et B, $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$

Définition : Soit E un ensemble fini des issues dans une situation d'équiprobabilité. Si la cardinal de E est égal à N et si p est la probabilité sur E, on a :

- Pour tout évènement élémentaire a_i ; $p(a_i)=\frac{1}{N}$
- Pour tout évènement A, $p(A)=\frac{\text{card}\,A}{N}$

Définition : On considère une expérience, constituée de n épreuves successives. Soit A_1 un évènement réalisé avec la probabilité p_1 lors de la première épreuve, A_2 un évènement réalisé avec la probabilité p_2 lors de la deuxième épreuve, et A_n un évènement réalisé avec la probabilité p_n lors de la $n^{\text{ième}}$ épreuve.

On dit que les évènements sont indépendants si la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation du suivant. Dans ce cas la probabilité pour que les évènements $A_1;A_2;.....;A_n$ soient successivement réalisés est égale à $p_1\times p_2\times...\times p_n$

On considère une expérience, constituée de n épreuves successives. A_1 un évènement réalisé lors de la première épreuve, A_2 un évènement réalisé lors de la deuxième épreuve, et A_n un évènement réalisé lors de la $n^{\text{ième}}$ épreuve. On dit que les évènements sont dépendants si la réalisation de l'un influe sur la réalisation du suivant. Soit p_1 la probabilité de A_1 ; p_2 la probabilité de A_2 et p_n la probabilité de A_n. Si A_{n-1} se réalise. Alors la probabilité pour que les évènements $A_1;A_2;.....;A_n$ se réalisent successivement est égale

LES EXERCICES

Exercice 1: Indiquer la bonne réponse par a, b, ou c avec justification.

1) On lance un dé équilibré, la probabilité d'obtenir un nombre supérieur à 3 est :

$\boxed{a}\ \frac{1}{2}$; $\boxed{b}\ \frac{2}{3}$; $\boxed{c}\ \frac{1}{6}$

2) On lance deux dés parfaits, on note S la somme des points marqués,

On note A l'évènement 'S=5' alors p(A)= a)$\frac{1}{2}$ b)$\frac{1}{9}$ c=$\frac{1}{11}$

3) A et B sont deux événements incompatibles :

$p(A)=0{,}10$ et $p(B)=0{,}58$ alors $p(A\cup B)$ est égale à : $\boxed{a}$ 0,32 ; $\boxed{b}$ 0,68 ; $\boxed{c}$ 0,58

4) A et B deux évènements incompatibles et p(A)=p(B)=0.2 alors $p(A\cup B)=...$

a) 0.2 b) 0.3 c) 0.4

5) L'événement A à pour probabilité $\frac{1}{4}$ alors $p(\overline{A})$ est égale à : $\boxed{a}$ 0,25 ; $\boxed{b}$ 0,75 ; $\boxed{c}$ 0,5

6) A et B deux événements de Ω tel que $p(A)=\frac{3}{4}$; $p(B)=\frac{1}{4}$ alors $A\cup B$:

$\boxed{a}$ égal à Ω $\boxed{b}$ $A\cup B$ n'est jamais égale à Ω $\boxed{c}$ $A\cup B$ peut être égale à Ω

7) Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules noires. On tire successivement et avec remise une boule au hasard n fois de suite $(\text{avec } n\geq 2)$. La probabilité d'obtenir des boules qui ne soient pas de même couleur est : a) $-\frac{1}{2^n}$; b) $1-\frac{1}{2^{n-1}}$; c) $1-\frac{1}{2^{2n}}$

Exercice 2 : Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules rouges, on effectue des tirages dans cette urne, chacune des 10 boules ayant la même probabilité d'être tirée.

1) On tire simultanément 5 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a)Trois boules blanches et deux boules rouges. b) Au moins une boules rouge.

2) On tire maintenant successivement 5 boules, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) Trois boules blanches et deux boules rouges. b) Au moins une boules rouge.

2) On tire maintenant successivement 5 boules, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir :a) Trois boules blanches et deux boules rouges dans cette ordre ?

b) Trois boules blanches et deux boules rouges ?

Exercice 3: Une urne contient 5 boules : Trois boules vertes porte respectivement les numéros 1,2 et 3 et deux boules rouges portent respectivement les numéros 1 et 2.

On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne.

1) Quelle est la probabilité de l'événement :A :« les deux boules tirées sont de la même couleur»

2) On appelle B : « la somme des numéros portés par chacune des deux boules tirées est égale à 3» Calculer la probabilité de B.

3) Déterminer la probabilité des événements : $A\cap B$; $A\cup B$; $\overline{A}\cap B$; $A\cup\overline{B}$

Exercice 4 : Une urne contient 5 boules rouges numérotées :1,1,1,0,0 et 4 boules vertes numérotés :1,1,1,0.

L'épreuve consiste à tirer simultanément trois boules de l'urne

1) Calculer la probabilité des événements :

A : « obtenir 3 boules de la même couleur» B : « obtenir 3 boules portant le même numéro»
2) Calculer la probabilité d'avoir 3 boules de la même couleur ou trois boules portant le même numéro.
3) Calculer la probabilité d'obtenir au plus une boule verte.

Exercice 5 :On jette trois dés cubiques non pipés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Calculer la probabilité des événements suivants : 1) A : « obtenir une seule fois le numéro 1»
2) B: « obtenir au moins une fois le numéro 1» . 3) C: « obtenir trois nombres distincts »
4) D: «obtenir au moins deux nombres identiques ». 5) E : « obtenir exactement deux nombres identiques».
6) F : « obtenir une somme pair » . 7) G : « obtenir une somme supérieur ou égale 16 ».

Exercice 6 :Dans un lycée 28% des élèves aiment la musique, 22% aiment le sport et 18% aiment le sport et la musique .Un élève est choisit au hasard
1)Quelle est la probabilité qu'il aime la musique ou le sport
2)Quelle est la probabilité pour qu'il n'aime ni la musique ni le sport
3)Quelle est la probabilité qu'il aime la musique et n'aime pas le sport

Exercice 7 : Deux lignes téléphoniques A et B arrivent à un standard. On note les évènements : E_1 :" La ligne A est occupée" et E_2 :"La ligne B est occupée". On donne $p(E_1)=\frac{1}{2}$; $p(E_2)=\frac{3}{5}$ et $p(E_1\cap E_2)=\frac{3}{10}$.
Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
1) E :" La ligne A est libre" 2) F :" Au moins une ligne est occupée"
3) G :" Au moins une ligne est libre" 4) H :" Une seule une ligne est occupée".

Exercice 8 :18 personnes se sont présentées à une collecte de sang et on a noté :
11 personnes du groupe A ; 2 personnes du groupe B ;4 personnes du groupe O ; 1 personnes du groupe AB.
On prélève au hasard 3 flacons parmi les 18 flacons obtenus.
Calculer la probabilité des événements suivants :
1) Les sangs des trois flacons appartiennent au même groupe.
2) Parmi les trois flacons, il y a au moins 1 flacon du groupe A.
3) Les sangs des 3 flacons appartiennent à 3 groupes différents.

Exercice 9 :Cinq personnes se donnent rendez -vous dans un des cinq cafés d'un village.
Chaque personne choisit au hasard l'un des cinq cafés .Calculer la probabilité de chacun des événements :
A : «chacune des cinq personne se trouve seul ». B : « les cinq personne se retrouvent dans le même salle ».
C : « aux moins deux personnes se trouvent dans le même café ».

Exercice10 :On jette deux fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 ; on forme ainsi un couple (α,β). Soient A et B deux points du plan et G le barycentre des points pondérées $(A,\alpha),(B,\beta)$. Quelle est la probabilité des événements suivants :
1) $G = A * B$. 2) G est le point tel que : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
3) L'ensemble des points M tel que $\left\|\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}\right\|=9$ soit un cercle de centre G et de rayon 1.

Exercice 11 :Une urne contient 3 jetons blancs (un rectangle et deux triangles) et 4 jetons noirs (3 rectangle et un triangle).On tire au hasard et simultanément 3 jetons de l'urne On suppose l'équiprobabilité des tirages
Soit A l'événement : « Avoir trois jetons de la même façon »
et B l'événement : « Avoir trois jetons de la même couleur»
1) Calculer $p(A);p(B)$ et $p(A\cap B)$
2) les événements A et B sont il indépendants

Exercice 12 : On jette deux dés équilibrés l'un blanc dont les faces numérotées 1 ;1 ;2 ;2 ; 5 et 6, le deuxième est noir dont les faces sont numérotées 1 ;2 ;3 ;4 ;4 ; et 5. On note les numéros des deux faces supérieures après le lancer. Déterminer la probabilité des chacun des évènements suivants :
A :"Avoir deux numéros identiques", B :"Deux numéros successifs"
et C :"Une seul fois le numéro 1 ou deux numéros successifs"

Exercice 13 : Une urne contient : $\begin{cases} \text{quatre jetons blancs numérotés: -2 ; -1; 0 et 1} \\ \text{trois jetons noirs numérotés: 0; 1 et 1} \\ \text{cinq jetons verts numérotés : -1; -1; 0; 1 et 1.} \end{cases}$

1) On tire simultanément et au hasard 4 jetons de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants : A : « le tirage comporte trois couleurs »
B : « Le produit des numéros des 4 jetons tirés est strictement positif »
C : « Il reste deux couleurs dans l'urne »
D : « avoir un seul jeton noir et exactement 2 jetons portant le numéro 1 ».
2) On tire successivement et sans remise 3 jetons de l'urne.
a- Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants.
E : « avoir 3 jetons de couleurs différents »
F : « La somme des numéros des trois jetons tirés est égale à 2 »
b- En déduire la probabilité des évènements : $E \cup F$ et E' : « avoir au plus deux couleurs ».

Exercice 14 : Une urne contient deux boules rouges et n boules noires avec n un entier naturel supérieur à 2. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
1) On tire simultanément deux boules de l'urne
a) Déterminer la probabilité de l'événement suivant :
A : « Avoir 2 boules rouges » B : « Avoir 2 boules de mêmes couleurs »
b) Déterminer n pour que $p(A) = \frac{1}{15}$
2) Pour la suite de l'exercice on prend $n = 4$ Les deux boules rouges sont numérotées : 1,2.et Les 4 boules noires sont numérotées : 0, 1, 1,2. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne
a) Déterminer la probabilité d'avoir deux boules de même parité.
c) Déterminer la probabilité d'avoir au moins une boule qui porte le numéros 1.

Exercice 15 : On considère une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'avoir pile est le double de celle d'avoir face.
1) On lance la pièce une seule fois. Calculer la probabilité d'avoir pile et celle d'avoir face.
2) On lance la pièce quatre fois de suite. Calculer la probabilité d'avoir :
a) Quatre fois pile . b) Au moins trois fois pile
c) Pour la première fois pile au troisième lancer.

Exercice 16 : Dans un examen, on pose à un candidat dix questions auxquelles, il doit répondre par vrai ou faux. Le candidat ignorant les réponses répond au hasard.
1) Quelle probabilité a-t-il de répondre juste au 10 questions ?
2) Quelle probabilité a-t-il de répondre juste à 9 questions ?
3) Il est reçu s'il répond juste à au moins 8 questions. Quelle probabilité a-t-il d'être reçu ?

Exercice 17 : Pour se rendre à son travail, un automobiliste traverse successivement quatre carrefour munis de feux de signalisation, chaque feu peut être rouge(R), orange (O) ou vert (V). On appelle "trajet" de 'automobiliste un quadruplet de lettres choisies parmi R, O et V. (exemple(R, R, V et T)

1)Déterminer le cardinal de l'univers des trajets possibles.On se place l'hypothèse de l'équiprobabilité.
2)Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A:« les deux premiers feux du trajet sont rouges » , B:« les quatre feux sont de même couleur »
C:«Une couleur et une seule est répétée deux fois dans le trajet»
3)L'automobiliste s'arrête si un feu est rouge ou orange Calculer la probabilité de chacun des événements suivants : D:« Au moins un arrêt dans le trajet »
E:« Exactement deux arrêts dans le trajet » ,F:« Un arrêt et un feu sont allumés dans le trajet »

Exercice 18 **:**Un sondage réalise a la sortie d'un supermarché auprès de 350 femmes, a donnée les résultats suivants : 86%d'entre elles sont des femmes au foyer, les autres sont salariées ;
66%d'entre elles sont dépense entre 40 et 100 DT ;

Parmi les femmes salariées, les $\frac{4}{7}$ ont dépensé entre 40 et 100DT, et deux ont dépensé plus de 100DT ;

Aucune femme au foyer n'a dépense plus de 200DT.

1) Recopier et compléter le tableau suivant :

Catégorie / Dépense	Au foyer	Salariée	Totale
Moins de 40DT			
Entre 40 et 100DT			
Plus que 100DT			
Total			

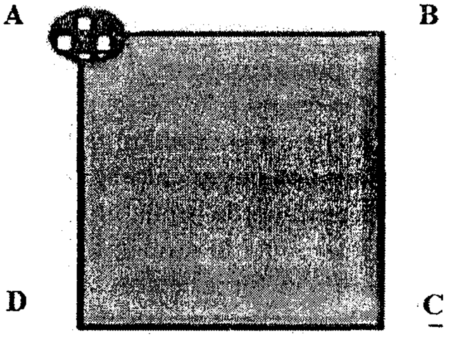
2) On choisit au hasard une de ces femmes interrogées .Calculer la probabilité des événements suivants :
a) La femme choisit est au foyer.
b) La femme choisit dépense moins de 40DT.
c) La femme choisit est au foyer ou dépense moins de 40DT.
3) Calculer la probabilité des événements suivants :les trois femmes choisies sont de même catégorie.
b) les trois femmes choisies dépense le même montant.
les trois femmes choisies sont de même catégorie et dépense le même montant.
d) Une seule femme est salariée.

Exercice 19 **:**I) Au cours d'un examen un élève doit tirer simultanément et au hasard trois question parmi 10 questions reportées de la manière suivante :
* 5 questions d'analyse
* 3 questions de géométrie
* 2 questions de probabilités
1) Calculer la probabilité des événements suivants :A : « L'élève tire trois questions de la même matière»
B : « L'élève tire trois questions de trois matière différentes»
C : « L'élève tire trois questions de deux matière différentes»
D : « L'élève tire au moins une question de probabilité»
2) Calculer $p(C \cap D)$ et $p(C \cup D)$
II) On suppose que l'élève doit tirer l'un après l'autre trois questions différentes parmi les 10 questions
1) Calculer la probabilité des événements suivants :H : « Avoir deux questions de probabilité»
F : « Avoir au plus une question de probabilité »
2)Soit l'événement G : « Avoir une seule question de géométrie» montrer que $p(G) = \frac{21}{40}$

Exercice 20 : Marie a écrit chaque lettre de son prénom sur un petit carton. Elle mélange les cinq cartons et forme au hasard un mot de cinq lettres.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir son prénom correctement orthographié ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un mot commençant par M et se terminant par E ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un mot commençant par deux consonnes ?

Exercice 21 **:** Une coccinelle se déplace sur les côtés d'un carré ABCD en partant du point A. Elle peut marcher à rebours si elle le souhaite. On appelle déplacement tout trajet de la coccinelle le long d'un côté du carré. Une marche est constituée de déplacements, ainsi, A → B →A→D →C est une marche de quatre déplacements dont l'arrivée est le point C.



Partie A : Dans cette partie, la coccinelle se déplace de manière aléatoire sur les côtés d'un carré ABCD et l'on considère que tous ses déplacements sont équiprobables.

1. a) La coccinelle peut-elle atteindre le point B en trois déplacements ?

b) Quelles sont les arrivées possibles pour une marche de trois déplacements ?

c) Quelles sont les arrivées possibles si la marche compte un nombre pair de déplacements ?

d) Quelles sont les arrivées possibles si la marche compte un nombre impair de déplacements ?

2. Dans cette question, la coccinelle effectue deux déplacements .Éventuellement à l'aide d'un arbre, calculer la probabilité de l'événement A2: « la coccinelle arrive en A en effectuant deux déplacements ».

3. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous

Nombre de déplacements de la marche	1	2	3	4	5
Probabilité que la cocinelle arrive en A					

Partie B : Dans cette partie, la coccinelle se déplace toujours sur les côtés du carré ABCD en partant du point mais elle a deux fois plus de chance de se déplacer verticalement qu'horizontalement. Elle peut toujours marcher à rebours si elle le souhaite. En revanche, elle décide de s'arrêter dès qu'elle revient en A.

1. Dans cette question, la coccinelle effectue exactement deux déplacements.

a) Calculer la probabilité de l'événement A2: « la coccinelle arrive en A en effectuant deux déplacements ».

b) Calculer la probabilité de l'événement C2: « la coccinelle arrive en C en effectuant deux déplacements ».

2. a) Calculer la probabilité de l'événement A4 : « la coccinelle arrive en A en effectuant exactement quatre déplacements ».

b) Calculer la probabilité de l'événement A6 : « la coccinelle arrive en A en effectuant exactement six déplacements ».

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux.

a) On note A_{2n} l'événement : « la coccinelle arrive en A en effectuant exactement 2n déplacements » et $P(A_{2n})$ la probabilité de cet événement. Exprimer $P(A_{2n})$ en fonction de n.

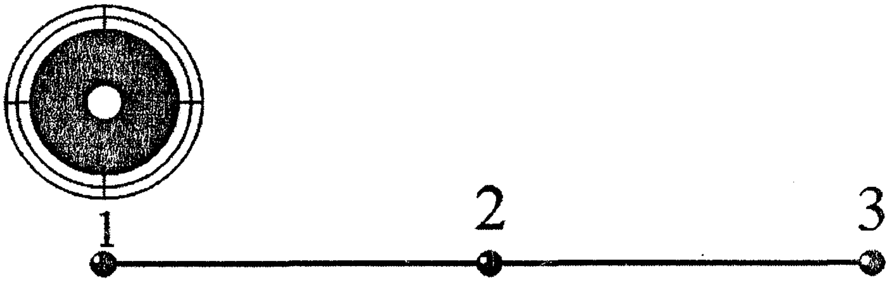
Soit q un nombre réel différent de 1 et n un nombre entier naturel non nul.

b) On note G2n l'événement : « la coccinelle arrive en A en effectuant au maximum 2n déplacements ». Exprimer en fonction de n la probabilité de G2n notée P(G2n).

c) Quel est le plus petit entier n tel que P(G2n) > 0,9999 ?

Exercice 22

Dans un jeu vidéo, une cible se déplace sur un segment de la manière suivante :Elle part de la position 1 puis change de position toutes les secondes en suivant les règles ci-dessous :



- Des positions 1 et 3, elle se déplace à la position 2 ;
- De la position 2, elle se déplace soit à la position 1 soit à la position 3, avec des probabilités identiques.

1. Quelle est la probabilité que la cible soit à la position 1, trente secondes plus tard.
2. Soit n un entier naturel impair.

a) Déterminer la probabilité que la cible soit en position 1 au bout de n secondes.

b) Déterminer la probabilité que la cible soit en position 2 au bout de n secondes.

3. Soit n un entier naturel non nul et pair.

a) Déterminer la probabilité que la cible soit en position 1 au bout de n secondes.

b) Déterminer la probabilité que la cible soit en position 2 au bout de n secondes

Exercice23 :1. Hélène a écrit chaque lettre de son prénom sur un petit carton.
Elle mélange les six cartons et forme au hasard un mot de six lettres.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir son prénom correctement orthographié ? (on tient compte des accents)

b) Quelle est la probabilité d'obtenir un mot se terminant par NE ?

c) Quelle est la probabilité d'obtenir un mot commençant par une consonne ?

2. Hélène réécrit les lettres de son prénom sur six cartons mais sans accents.
Elle mélange les six cartons et forme au hasard un mot de six lettres.
Quelle est la probabilité d'obtenir son prénom correctement orthographié ?

Exercice 24 : Par un temps pluvieux, n personnes se rendent à une réunion. Elles sont toutes munies d'un parapluie qu'elles déposent dans un bac à l'entrée de la salle. On suppose que tous les parapluies sont étiquetés au nom de leur propriétaire. À la fin de la réunion, les participants récupèrent, chacun un parapluie, au hasard, les uns après les autres.

1. On suppose que $n = 2$.Quelle est la probabilité que personne ne reparte avec son parapluie ?
2. Même question, en supposant $n = 4$.
3. On suppose que $n = 6$.

a) Quelle est la probabilité que les deux premières personnes soient les seules à repartir, chacune avec son parapluie ?

b) Quelle est la probabilité pour que seulement deux personnes repartent, chacune avec son parapluie ?

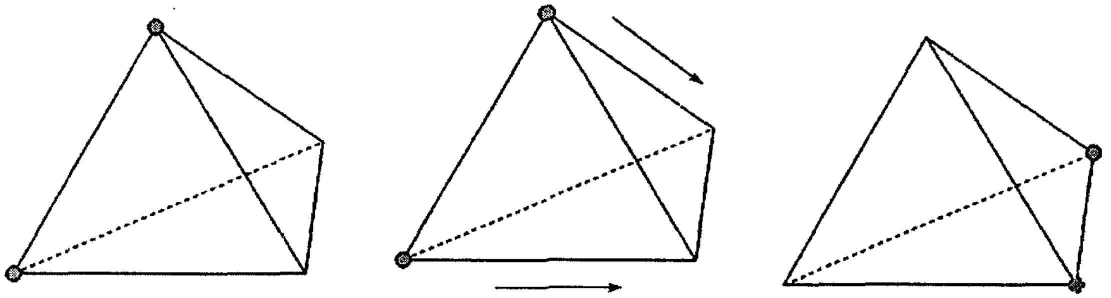
4. On suppose que $n \geq 3$.

a) Quelle est la probabilité que la deuxième personne soit la première à repartir avec son parapluie ?

b) Quelle est la probabilité que la troisième personne soit la première à repartir avec son parapluie ?

Exercice 25 :

Deux billes se trouvent sur deux sommets d'un tétraèdre. A chaque étape d'un jeu, les deux billes se déplacent simultanément, de façons aléatoires et indépendantes d'un sommet à un autre en suivant une arrête. Les déplacements possibles sont équiprobables.



A la première étape :

- Si au cours du déplacement, les deux billes se rencontrent sur une arrête, alors le jeu s'arrête et le joueur a perdu.
- Si à l'issue du déplacement, les deux billes se retrouvent sur un même sommet, alors le jeu s'arrête et le joueur a gagné.
- Sinon le jeu continue,

et à la deuxième étape, les règles sont les mêmes qu'à la première.

Si le jeu continue à l'issue de la deuxième étape, la troisième étape sera la dernière et la règle est la suivante :

- Le joueur a gagné si à l'issue du déplacement des deux billes, elles se retrouvent sur un même sommet.
- Le joueur a perdu dans tous les autres cas.

1. (a) Démontrer que la probabilité que le joueur perde après une seule étape est égale à $\frac{1}{9}$

(b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne après une seule étape ?

2. (a) Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête à l'issue de la seconde étape ?

(b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne à l'issue de la troisième étape ?

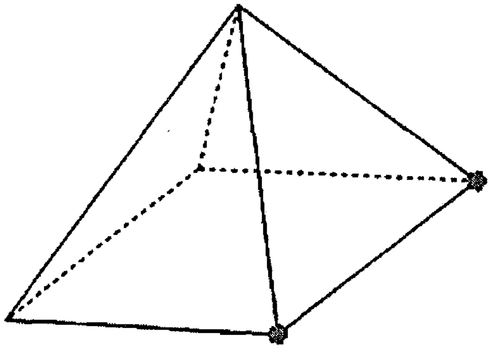
3. Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

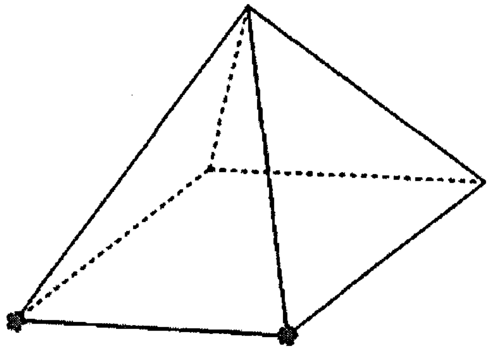
B - **sur une pyramide**

Dans cette nouvelle version du jeu, les deux billes sont initialement placées sur deux sommets d'une pyramide à base carrée. Par ailleurs, les règles du jeu sont identiques.

On peut alors facilement se convaincre que, tant que le jeu continue, à l'issue d'une étape, les deux billes sont nécessairement placées dans l'une des trois configurations ci-dessous

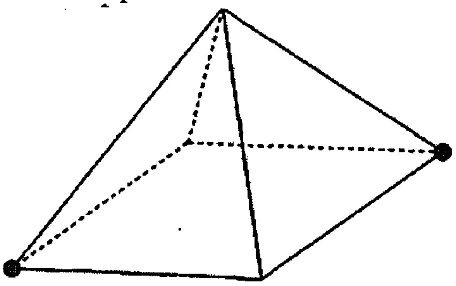
Configuration A : Les deux billes sont situées sur la base de la pyramide, aux deux extrémités d'une même arête. Par exemple :

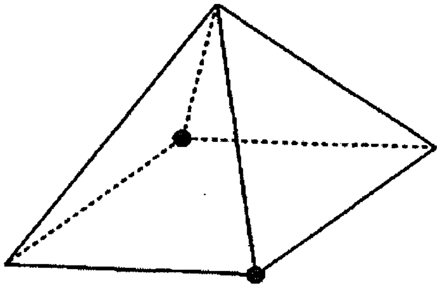




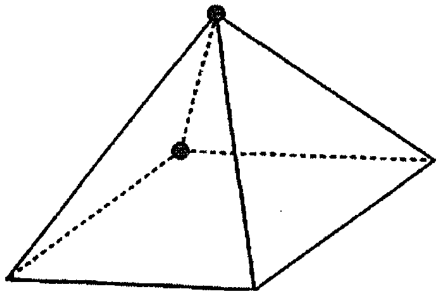
Configuration D : les deux billes sont situées sur la base de la pyramide et diagonalement opposées.

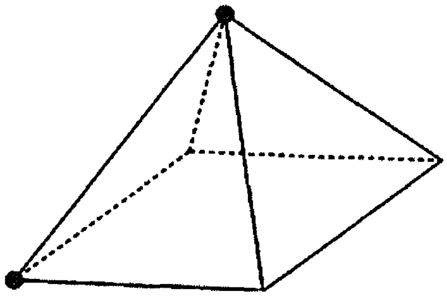
Par exemple





Configuration S : l'une des deux billes est située sur le sommet de la pyramide





On considère les événements :A1 : A l'issue de la première étape, les billes sont en configuration A.
D1 : A l'issue de la première étape, les billes sont en configuration D.
1 : A l'issue de la première étape les billes sont en configuration S.
G1 : A l'issue de la première étape, le joueur a gagné.
F1 : A l'issue de la première étape, le joueur a perdu.

1. deux billes sont placées initialement dans l'une des trois configurations A, D ou S.
Compléter le tableau ci-dessous. Les résultats seront donnés sans justification.

	$P(A_1)$	$P(D_1)$	$P(S_1)$	$P(G_1)$	$P(F_1)$
Billes initialement en configuration A					
Billes initialement en configuration D					
Billes initialement en configuration S					

2. Les billes sont placées initialement en configuration A. Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

Exercice26 : Un dé tétraédrique, quand il est posé, laisse voir trois de ses quatre faces numérotées de 1 à 4
C'est la face cachée qui donne la « valeur » du dé après un lancer.
Est-il possible d'avoir deux dés tétraédriques pour lesquels les probabilités d'obtenir chacune des sommes possibles des valeurs des deux dés soient égales ? On envisagera tous les cas :

1. les deux dés sont bien équilibrés ;
2. les deux dés sont pipés de la même manière ;
3. les deux dés sont pipés de deux manières différentes .On notera pi la probabilité que la valeur du premier dé soit le nombre i et qi la probabilité que la valeur du deuxième dé soit le nombre i.

LES EXERCICES

Exercice N° 1 : Soit la série statistique : 12,10,8,6,8,7,18,5, 5, 16,16,15,6,5,5

1) Déterminer la mode, la médiane, les quartiles et l'écart inter quartile
2) Déterminer la moyenne et l'écart type de cette série (arrondie au centaine)

Exercice N° 2 : Les notes de 18 élèves en mathématique sont
11, 9,9, 15, 8, 19, 18, 16, 18, 9, 5,4, 4, 12, 15, 9 ,9 ,16.

1) Ecrire les notes dans l'ordre croissant
2) Déterminer la note médiane
3) Déterminer le premier et le troisième quartiles des notes et l'écart interquartile de cette série.
4) Préciser la population sur la quelle porte l'étude statistique

Exercice N° 3: Une entreprise de dépannage veut réduire les frais d'essence de ses 40 véhicules en remplaçant le quart des véhicules qui circulent le plus, par des véhicules diesel et le quart des véhicules qui circulent le moins par des véhicules plus légers.

Pour cela le comptable a relevé le kilométrage de chaque véhicule pendant une semaine.

On a obtenu les nombres suivants, en Kilomètres :438 ; 770 ; 226 ; 479 ; 685 ; 525 ; 374 ; 591 ; 690 ; 810 ; 587 ; 213 ; 690 ; 853 ; 421 ; 352 ; 511 ; 260 ; 586 ; 675 ; 949 ; 505 ; 383 ; 420 ; 642 ; 280 ; 750 ; 573 ; 332 ; 694 ; 553 ; 490 ; 410 ; 628 ; 731 ; 390 ; 612 ; 484 ; 580 ; 545.

1) Ranger les données dans des classes d'amplitude 100 Km. La première classe est $[200;300[$.
2) Construire le polygone des effectifs cumulés croissants.
3) a) Déterminer la médiane et les quartiles de cette série.
b) Utiliser ces résultats pour réduire les frais de l'entreprise.
4) Calculer le Kilométrage moyen de l'ensemble des véhicules pendant une semaine.
5) Calculer la variance et l'écart type de cette série.

Exercice N°4 :

Groupe d'âge	[15,25[	[22,35[	[35,45[	[45,55[	[55,65[	[65,75[	75 ans et plus	Total
Nombre de chefs de ménages	29391	304255	350086	296121	261308	147789	67856	145806

1) Calculer l'écart type σ de cette série.
2) Donner une valeur approchée du nombre de chefs de ménages dont l'âge X(en années) satisfait à :
$\bar{x} - \sigma \langle x \langle \bar{x} + \sigma$ avec $\overline{X}$ Étant la moyenne arithmétique de la série.
Interpréter, en pourcentage, le résultat obtenu.
3) Déterminer le nombre de chefs de ménages dont l'âge X satisfait à la relation :
$\bar{x} - 2\sigma \le x \le \bar{x} + 2\sigma$ Interpréter, en pourcentage, le résultat, obtenu.

Exercice N°5 : On donne dans le tableau ci-dessous la répartition des voitures louées suivant la puissance (en chevaux CH) dans deux agences de location pendant un mois :

Puissance en CH		4	5	6	7	8	9
Nombre de voitures	Agence A	6	10	16	8	3	3
	Agence B	15	6	4	4	6	11

1) Déterminer les moyennes $\overline{X_A}$ et $\overline{X_B}$ des puissances utilisées respectivement dans les agences A et B (Tous les résultats de l'exercice sont à 0.01 prés)

2) a) Déterminer les écarts types σ_A et σ_B de chaque série.

b) Pour améliorer le parc de son agence, le chef de l'agence A décide d'acheter des voitures à 6 chevaux. Quelle puissance de voiture proposez-vous pour l'agence B.

Exercice 6 Un relevé statistique des tailles X en cm et des masses Y en kg d'un échantillon de 100 Collégiens a permis de construire le tableau suivant :

Y X	[40,45[	[45,50[	[50,55[	[55,60[
[150,155[	18	10	2	0
[155,160[	3	16	5	1
[160,165[	0	5	13	5
[165,170[	0	2	6	14

Déterminer la valeur moyenne et la variance de chacun des caractères X et Y.

Exercice N°7: On donne les deux séries suivantes :

Superficie en (hectares)	Pourcentage des exploitions	
	Région A	Région B
[1,5[	33	20
[5,10[	20	16
[10,20[	20	16
[20,50[	24	22
[20,50[	20	30
[50,200[	3	12
Totaux	100	100

1) Calculer les moyennes arithmétiques $\bar{x}$ et $\bar{y}$ des séries statistiques correspondantes respectivement aux régions A et B. Comparer $\bar{x}$ et $\bar{y}$ et interpréter le résultat.

2) Calculer les écarts type σ_A et σ_B des deux séries considérées. Comparer les dispersions des deux séries.

Exercice8 Le tableau suivant donne les recettes et dépenses en dinars d'une personne pendant 10 semaines.

Semaine	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Recette X_i	106	113	97	87	101	90	91	111	87	102
Dépense y_i	67	70	62	59	66	56	61	73	59	67

1)Représenter dans un repère orthonormé le nuage des points $M_i(x_i,y_i)$.

2)Déterminer les coordonnées du point moyen G. Placer G.

3)On partage le nuage de points en deux sous nuages : le premier de point moyen G_1 est constitué par les 5 points ayant les plus petites abscisses et le second de point moyen G_2 est constitué par les 5 autres points. Déterminer les coordonnées de G_1 et G_2.

4) Déterminer l'équation de la droite $(G_1 G_2)$.

5)Estimer la dépense de cette personne si sa recette est de 120 dinars.

Exercice 9 Dans le tableau suivant on reporte le chiffre d'affaires annuel (en milliers de dinars) d'une entreprise (de 1998 à 2005)

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaire (y_i)	80	83	78	78	78	73	72	70

1)Représenter dans un repère orthonormé le nuage de points $M_i(x_i,y_i)$.
2)Déterminer les coordonnées de G_1 point moyen des quatre premiers points du nuage et de G_2 point moyen des quatre derniers.
3)Déterminer une équation de la droite (G_1G_2).
4)Déterminer graphiquement le chiffre d'affaires de l'entreprise pour l'année 2008.
5)Déterminer par le calcul en quelle année le chiffre d'affaires sera-t-il inférieur à 60.

Exercice n°10 :

Avant le lancement sur le marché d'un nouveau type de voiture, le constructeur doit procéder à certains essais, parmi lesquels celui de la consommation réelle de carburant (en litre par heures) en fonction de la vitesse (en km par heure). Six essais à différentes vitesses ont donné la série suivante :

Vitesse x (km/h)	50	70	90	120	140	160
Carburant y (L/h)	3	4	7,5	12	17	22

1) a- Représenter la série ci-dessous par un nuage des points $M_i(x_i,y_i)$ dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ convenablement choisi. Peut on raisonnablement procéder à un ajustement affine entre x et y.

b- On pose : $z=\sqrt{y}$. Représenter dans un nouveau repère la série (x,z) par un nuage des points. Est il plus indiqué de chercher un lien affine entre x et z ?

2) a- En notant G_1 et G_2 les points moyens respectivement des trois premiers couples (x_i,z_i) et des trois derniers, calculer les coordonnées de G_1 et G_2, puis établir l'équation de la droite (G_1G_2)

b- En déduire l'ajustement de x et y.

3) a- Que doit indiquer le constructeur pour la consommation à la vitesse de 100km/h.

b- A l'arrêt, mais le moteur tournant, il ne reste que 6 litres dans le réservoir : donner un exemple de distance que l'on peut parcourir en une heure à une vitesse constant que l'on précisera.

Exercice11:Le mur d'une habitation est constitue par une couche de béton et une couche de polystyrène d'épaisseur variable E (en cm). On mesurer la résistance thermique R (en cm². °C/W) de ce mur pour divers valeurs de E et on obtenu les résultats ci-dessous.

E	2	4	6	8	10	12	14	16	18
R	0,83	1,34	1,63	2,3	2,44	2,93	3,44	3,85	4,28

1)a) Calculer la moyenne et l'écart-type de la variable E
b) Calculer la moyenne et l'écart-type de la variable R
2)a) Représenter le nuage de points de la série double (E, R)
b) Placer le point moyenne du nuage
c) Donner un ajustement affine de la série double (E, R)
d) Quelle résistance thermique peut-on espérer obtenir avec une épaisseur de polystyrène de 25 cm.

Résumé du cours :

Propriétés : Le plan est orienté dans le sens direct : Soit deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

* Si α est une mesure de ($\vec{u}$, $\vec{v}$) alors toute mesure de ($\vec{u}$, $\vec{v}$) et de la forme $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

* Toute mesure de ($\vec{u}$, $\vec{u}$) est la forme $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

* Toute mesure de $(\vec{u}, -\vec{u})$ est la forme $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Propriétés :Le plan est orienté dans le sens direct. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

$\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = 2k\pi$, si et seulement si , $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens .

$\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = 2k\pi$, si et seulement si , $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens opposés.

Propriété : Le plan est orienté dans le sens direct .Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls .

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, si et seulement si , $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$.

Définition : Le plan est orienté dans le sens direct. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Alors l'angle orienté ($\vec{u}$, $\vec{v}$) admet une unique mesure dans l'intervalle $]-\pi , \pi]$, appelée mesure principale de ($\vec{u}$, $\vec{v}$).

Propriété : Le plan est orienté dans le sens direct. Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$,

$\left(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}\right) = \left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) + \left(\widehat{\vec{v}, \vec{w}}\right) + 2k\pi$ (Relation de Chasles).

Propriété :Le plan est orienté dans le sens direct. Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$,

$\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \left(\widehat{\vec{u}', \vec{v}}\right) + 2k\pi$, si et seulement si , $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}\right) = \left(\widehat{\vec{v}, \vec{v}'}\right) + 2k\pi$.

Propriétés : Le plan est orienté dans le sens direct .

* Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = -\left(\widehat{\vec{v}, \vec{u}}\right) + 2k\pi$; $\left(\widehat{-\vec{u}, \vec{v}}\right) = \pi + \left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) + 2k\pi$

$\left(\widehat{\vec{u}, -\vec{v}}\right) = \pi + \left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) + 2k\pi$; $\left(\widehat{-\vec{u}, -\vec{v}}\right) = \left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) + 2k\pi$.

Définition : Le plan est orienté dans le sens direct . On dit qu'une base $\left(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}\right)$ du plan est orthonormée directe si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et $\left(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. On dit qu'une base $\left(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}\right)$ du plan est orthonormée indirect si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et $\left(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

LES EXERCICES

Exercice n°1 Cocher la réponse exacte :

1/ si $\left(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right) = \frac{130\pi}{3} + 2k\pi$ alors la mesure principale de $\left(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right)$ est égale à

: a) $\frac{2\pi}{3}$; b) $-\frac{2\pi}{3}$; c) $\frac{\pi}{3}$

2/ Si $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \pi + 2k\pi$ alors a) $C \in [AB]$; b) $A \in [CB]$; c) $B \in [CA]$

3/ Soit U et V deux vecteurs non nuls $\left(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right) = \frac{\pi}{10} + 2k\pi$ alors

a) $\left(\overrightarrow{U}, -\overrightarrow{V}\right) = -\frac{\pi}{10} + 2k\pi$; b) $\left(\overrightarrow{U}, -\overrightarrow{V}\right) = -\frac{9\pi}{10} + 2k\pi$; c) $\left(\overrightarrow{U}, -\overrightarrow{V}\right) = \frac{9\pi}{10} + 2k\pi$

4) A et B deux points distincts d'un plan orienté. L'ensemble $F=\left\{M\in P\backslash\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}$ est :

a) Demi-cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B

b) Demi-cercle de diamètre $[AB]$; c) Cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B.

Exercice 2 : O et A deux points du plan orienté tel que OA = 5

1°/ Construire les points B , C et D tels que :

OB = 4 , OC = 3 , OD = 6 et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$; $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right)=\frac{-\pi}{2}+2k\pi$; $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}}\right)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

2°/ Déterminer la mesure principale en radian des angles orientés : $\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}}\right)$

Exercice 3: A,B,C , D et E des points du plan tels que :

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$; $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right)=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$; $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}\right)=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

1°/ Déterminer la mesure principale en radian des angles $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}\right)$

2°/ Montrer que A , D et E sont alignés .

Exercice 4 : Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère les points A,B,C , D et E tels que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)=-\frac{23\pi}{10}+2k\pi$, $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}\right)=-\frac{47\pi}{10}+2k\pi$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{5}+2k\pi$

1)déterminer les mesures principales $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}}\right)$.

2)Montrer que A,B et E sont alignés. 3)Montrer que $(AC)\perp(AD)$

Exercice 5 : Dans le plan orienté P on considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O . Soit A un point de $\mathscr{C}$

1/Construire le point B de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=-\frac{59\pi}{3}+2k\pi$

2/ a- Construire le point C de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}\right)=\frac{32\pi}{3}+2k\pi$

b-Montrer que les points O,B et C sont alignés .

3/ a-Construire le point D de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD}\right)=-\frac{71\pi}{6}+2k\pi$

b- Montrer que OAD est un triangle rectangle.

Exercice 6: Le plan P est orienté dans le sens direct. On considère un triangle ABC isocèle de sommet principal A tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right)=\frac{35\pi}{6}+2k\pi$.

1) a) Déterminer la mesure principale de $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)$; b) Construire ABC.

c) Déterminer la mesure principale de $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

2) a) Construire le point D tel que : $CA=CD$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD}}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ et construire le point E de (AC) tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DC}}\right)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$.

b) Montrer que les droites (DE) et (AB) sont parallèles.

c) Déterminer une mesure de chacun des angles orientés suivants : $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AD}\right)$ et $\left(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{DE}\right)$

Exercice 7 : Soit ABCD un carré tel que $\left(\overrightarrow{AB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$. on construit à l'intérieur du carré un triangle équilatéral ABF et à l'extérieur de carré un triangle équilatéral BCE.

1) Montrer que $\left(\overrightarrow{BE}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{BF}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ et que $\left(\overrightarrow{EB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{EF}\right)=\frac{-\pi}{4}+2k\pi$

2) Montrer que $\left(\overrightarrow{CD}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{CE}\right)=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ et que $\left(\overrightarrow{EC}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{ED}\right)=\frac{\pi}{12}+2k\pi$

3) Montrer que les points E , F et D sont alignés.

Exercice 8 : Dans le plan orienté dans le sens direct, on donne les points A, B et C non alignés tels que : $\left(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}\right)=-\frac{39\pi}{4}+2k\pi$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right)=\frac{25\pi}{3}+2k\pi$.

1) Déterminer la mesure principale de chacun des angles suivants : $\left(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$

2) Soit M un point de segment $[BC]$ distinct des points B et C. On désigne par N et Q les symétriques respectifs de M par rapport aux droites (AB) et (AC).

a) Vérifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AN}}\right)+2k\pi$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AM}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{AQ};\overrightarrow{AC}}\right)+2k\pi$

b) En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AQ}}\right)=2\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)+2k\pi$

c) Montrer que $\frac{5\pi}{6}$ est ma mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AQ}\right)$

d) Quelle est alors la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{NQ};\overrightarrow{NA}\right)$?

3) Soit α une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}\right)$.

a) Calculer en fonction de α, une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{NA}\right)$

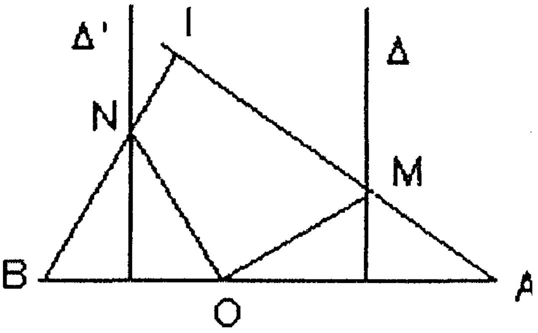
b) En déduire les valeurs de α pour lesquelles les droites (NQ) et (BC) soient parallèles.

Exercice 9 : On donne un segment $[AB]$ et un point O de ce segment. Soit M un point variable sur la médiatrice Δ de $[OA]$ et N un point variable sur la médiatrice Δ' de $[OB]$ tels que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$.

Les droites (AM) et (BN) se coupent en I.

1) Montrer que $2\left(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}}\right)=\pi+2k\pi$

2) Sur quel ensemble varie le point I ?



Exercice 10: Soit ξ un cercle de centre O et A un point de ξ.

1) Placer les points B de ξ tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

2) Pour tout entier naturel n ; on considère les points M_n tel que $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM_n}\right)\equiv\frac{n\pi}{4}[2\pi]$

a)Placer les points $M_0; M_1; M_2$ et M_7 .b)Pour quelles valeurs de n ; les vecteurs $\overrightarrow{OM_n}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont-ils colinéaires ?

c) Pour quelles valeurs de n ; les vecteurs $\overrightarrow{OM_n}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont-ils orthogonaux ?

RESUME DU COURS

Définition : Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit θ un réel et M le point du cercle trigonométrique de centre O tel que $\left(\vec{i}\ ,\overrightarrow{OM}\right) = \theta + 2k\pi$. On appelle cosinus de θ , et on note cos θ , l'abscisse de M. On appelle sinus de θ , et on note sin θ , l'ordonnée de M.
Pour tout entier K et tout réel θ ,
cos (θ + 2k π) = cosθ et sin (θ + 2k π) = sin θ.

Propriétés : Pour tout réel θ , on a :
* $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. * $-1 \le \cos\theta \le 1$ et $-1 \le \sin\theta \le 1$. * cos (-θ) = cos θ et sin (- θ) = - sin θ .
* $\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$; $\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$. * $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$; $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$.
* $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$. * $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta$.

Définition : On appelle tangente de θ , le réel noté tan θ et défini par $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, pour tout réel θ tel que $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$ .Pour tout réel θ tel que $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$,on a : *tan (θ + π) = tan θ. * tan(- θ) = -tan θ.

Formules de transformation :
* cos (a – b) = cos a cos b + sin a sin b ; * sin (a – b) = sin a cos b – sin b cos a
* cos (a + b) = cos a cos b – sin a sin b ; * sin (a + b) = sin a cos b + sin b
* cos (2a) = $\cos^2$ a – $\sin^2$ a ; sin (2a) = 2 sin a cos a

LES EXERCICES

Exercice 1 : L'une des réponses est correcte la quelle : 1) $\cos\frac{13\pi}{3} =$ a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\sin\frac{26\pi}{5} =$ a) $\sin\frac{\pi}{5}$ b) $-\sin\frac{\pi}{5}$ c) $\cos\frac{\pi}{5}$

3) Soit ABC un triangle non rectangle .
a) $\tan\left(\hat{A}+\hat{B}\right) = -\tan\hat{C}$ b) $\tan\left(\hat{A}+\hat{B}\right) = \tan\hat{C}$ c) $\tan\left(\hat{A}+\hat{B}\right) = \pi - \tan\hat{C}$.

6) $\cos\frac{15\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8} =$ a) 1 b) $2\cos\frac{\pi}{8}$ c) 0

7) $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x =$ a) $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ b) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ c) $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

8) Pour tout réel x; $\cos(2x) =$ a) $2\cos x$; b) $2\cos^2 x - 1$; c) $1 - 2\cos^2 x$

Exercice 2: 1°/ Vérifier que pour tout réel x on a
a)(1+ sin x + cos x $)^2$ = 2 (1 + sin x) (1 + cos x) . b)Sin^6x + $\cos^6$x + 3 sin x cos x = 1
2°/ Montrer que pour tout réel x on a : Cos^2 x – cosx – 6 < 0

Exercice 3 : Soit x et y deux réels
1°/ Montrer que (sin x – sin y) (sin x + sin y) = $\sin^2$x $\cos^2$y – $\sin^2$y $\cos^2$x .
2°/ Montrer que : (cos x – cos y $)^2$ =(1- cosx cosy$)^2$ – $\sin^2$x . $\sin^2$y.
3°/ Montrer que pour tout $x \in IR/\{K\pi\}$ on a : Cotg^2x – $\cos^2$x = cotg^2x × $\cos^2$x

Exercice 4 : 1°/ Soit $x \in IR$, montrer les égalités suivantes :

* $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. * $\sqrt{3}\cos\left(3x + \frac{\pi}{12}\right) - \sin\left(3x + \frac{\pi}{12}\right) = 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.

* $-2\sin^2\frac{x}{2} + \sqrt{3}\sin x + 1 = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

2) a) Montrer que $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ .b) Montrer que : $1 - \cos x - \sin x = 2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2} . \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

3°/Montrer que : $2 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 4\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

Exercice 5 : 1)a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} : \cos 2x - \sin 2x + 1 = 2\cos x(\cos x - \sin x)$

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} : \cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

2)a) Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[: \frac{2\cos 2x}{\cos 2x - \sin 2x + 1} = 1 + \tan x$. b) En déduire que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$

Exercice N° 6 : Pour tout réel x ; on pose $U(x) = \sin(\pi x) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

1) a) Calculer $U(1)$, $U\left(-\frac{1}{3}\right)$; $U\left(\frac{3}{2}\right)$ et $U\left(\frac{5}{3}\right)$

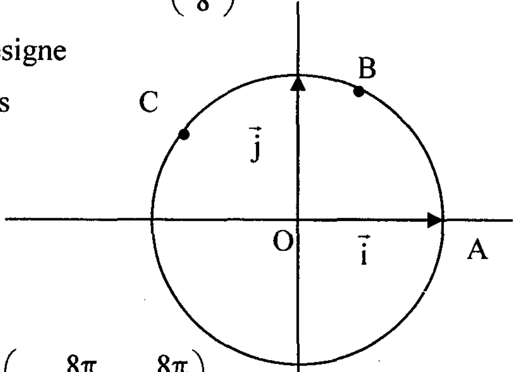
b) Montrer que pour tout réel x et pour tout entier relatif k, on a : $U(x + 4k) = U(x)$

2) a) Montrer que pour tout réel x, $U(x) = -4\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

b) Calculer alors les valeurs exactes de $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ .c) En déduire que $\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{2} + 1$

Exercice 7 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$,on désigne par ζ le cercle trigonométrique de centre O et par A ; B et C les points de ζ tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{j}$; $\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OB}}\right) = \frac{2\pi}{5} + 2k\pi$ et $\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OC}}\right) = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi$.

1) Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A ; B et C.
2) Construire dans la figure ci-contre les points D et E de coordonnées cartésiennes respectives $\left(\cos\frac{6\pi}{5} ; \sin\frac{6\pi}{5}\right)$ et $\left(\cos\frac{8\pi}{5} ; \sin\frac{8\pi}{5}\right)$



3) a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{BO}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{BO};\overrightarrow{OE}}\right) + 2k\pi$ .b) En déduire que $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OB}$

c) Montrer alors que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OA}$

5) a) Montrer que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$

b) Déduire que $1 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = 0$ et $\sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{6\pi}{5} + \sin\frac{8\pi}{5} = 0$

Exercice 8: 1°/ Démontrer les égalités suivantes :

a) $\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$; b) $\tan 2x - \tan x = \dfrac{\tan x}{\cos 2x}$; c) $\dfrac{2\tan^2 x}{1+\tan^4 x} = \dfrac{\tan^2 2x}{2+\tan^2 2x}$

2°/ a) Montrer que pour tout $x \in IR$ on a $\cos x + \cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)=0$

b)En déduire la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{7}+\cos\dfrac{11\pi}{21}+\cos\dfrac{17\pi}{21}$

c) Montrer que : $\cos^2 x + \cos^2\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\cos^2\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{2}$

Exercice 9 : 1°/ Soit $x \in IR$, montrer les égalités suivantes :

* $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.* $\sqrt{3}\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{12}\right)-\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{12}\right)=2\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

* $-2\sin^2\dfrac{x}{2}+\sqrt{3}\sin x+1=2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

2°/ a) Montrer que $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

b)Montrer que : $1-\cos x-\sin x = 2\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}\,.\,\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$

3°/Montrer que : $2+\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x = 4\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

Exercice 10 : 1) Montrer que $\cos\dfrac{\pi}{7}\,.\,\cos\dfrac{2\pi}{7}\,\cos\,\dfrac{4\pi}{7}=-\dfrac{1}{8}$

2) a/ Montrer que pour tout réel x on a : $\sin^6 x + \cos^6 x = \dfrac{3}{8}\cos 4x + \dfrac{5}{8}$

b/ Calculer la somme suivante :

$A = \cos^6 x + \cos^6\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos^6\left(x+\dfrac{2\pi}{6}\right)+\cos^6\left(x+\dfrac{3\pi}{6}\right)+\cos^6\left(x+\dfrac{4\pi}{6}\right)+\cos^6\left(x+\dfrac{5\pi}{6}\right)$

Exercice 11 : Pour tout x, on pose $f(x)=\cos 2x-3\cos x+2$

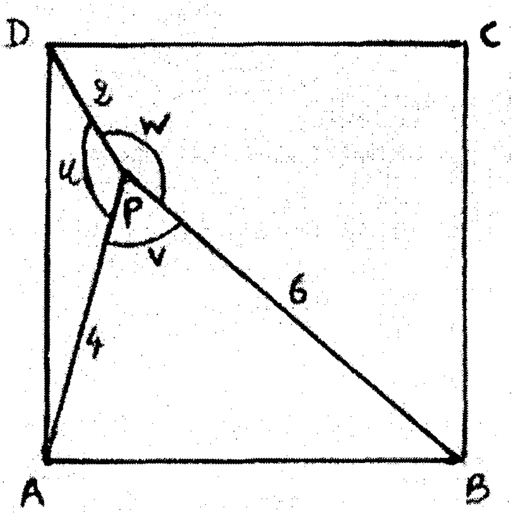
1) a) Vérifier que pour tout réel x, on a : $(\cos x+\sin x)^2=1+\sin 2x$

b) En déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{12}+\sin\dfrac{\pi}{12}$

c) Montrer alors que $f\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)+f\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)-f\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)-f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=3\sqrt{6}$

2) Vérifier que pour tout réel x on a : $f(x)=2\cos^2 x-3\cos x+1$

Exercice 12 : Sur le parchemin ci-dessous ne figurent qu'un carré, 3 segments et 3 indications de longueur : PD=2, PA=4, PB=6.Déterminer l'angle(DPA) , de sommet P.



RESUME DU COURS

Propriété : Soit a et b deux réels. Sin a = sin b , si et seulement si , a = b + 2kπ, ou a = π - b + 2kπ , k $\in \mathbb{Z}$.
Propriété : Soit a et b deux réels.cos a = cos b, si et seulement si, a = b + 2kπ, ou a = -b + 2kπ, k $\in \mathbb{Z}$.

Propriété : Soit a et b deux réels de IR $/\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi , k \ entier\right\}$. tan a = tan b ⇒ a = b + kπ, k $\in \mathbb{Z}$.

Propriété : Soit α un réel de [-1 , 1]. X_0 est solution de l'équation sin x = α , si et seulement si , x_0 – a est solution de l'équation sin (x + a) = α.
Propriété : Soit α un réel de [-1 , 1]. X_0 est solution de l'équation cos x = α , si et seulement si , x_0 – a est solution de l'équation cos (x + a) = α.

LES EXERCICES

Exercice 1 : Résoudre dans $[0,2\pi[$ les équations suivantes :a) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos x=\frac{1}{2}$; c) $\sin 2x=-\frac{1}{2}$

d) sin2x + sin cos x = 0 ; e) $\cos 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 2 : 1°/ Résoudre dans IR, puis dans $]-\pi \ , \ \pi]$ a) cos 2x + cos x = 1 ; b) $\sin|x|=\frac{1}{2}$;

c) $\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$; d) $\cos^2 x = \sin^2 x$; e) $\cos 4x+\sqrt{3}\sin 4x=1$; f) tan x + tan3x = 0

g(x)=tan(2x) cot($3x-\frac{\pi}{3}$)

Exercice 3: Résoudre dans IR a) $2\cos^2 x$ – cos x -1 = 0 ; b) $\sin^2 x$ – 3 sinx – 4 = 0 ;
c) $(\sqrt{2}+1)\sin^2 x+(\sqrt{2}-1)\cos^2 x+\sin 2x=\sqrt{2}$; d) $(\cos x-\sin x)^2=\frac{1}{2}$; e) $\tan^2 x$ – 3tan x – 4 = 0

Exercice 4 : Résoudre dans $[0 \ , \ 2\pi[$ a) $\sin x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $\cos x\geq\frac{1}{2}$, c) $\sqrt{1-\cos x} \ \rangle \ \sin x$

d) $\sqrt{2}\sin x+1 \ \langle \ 0$, e) $2\sin 2x-\sqrt{3}\leq 0$

Exercice 5 : Résoudre dans $[0 \ , \pi]$ a) $4\sin^2 x-1\leq 0$, b) $\cos 2x+\sin 2x-1\geq 0$;c) $\tan\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\langle 0$

Exercice 6:
Résoudre dans IR puis dans $[0 \ , \ \pi]$ a) $4\cos^2 x-2\left(\sqrt{2}-1\right)\cos x-\sqrt{2} \ \rangle \ 0$

; b) $\sqrt{3}\ \ \tan^2 x-\left(1+\sqrt{3}\right)\tan+1 \ <0$; c) $\frac{\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x}{2\sin x-1}\geq 0$; d) $\frac{1-\sin 2x}{\sin 2x}\geq 1$

Exercice 7:
A/ Soit la fonction f(x) = 3 cos x + 16 $\cos^5$ x – 16 $\cos^3$ x .
1) Montrer que pour tout x ∈ IR on a : f(x) = cosx (1 + 2 cos 4x)
2) Résoudre dans IR ; f(x) = 0 . 3)Etudier le signe de f(x) sur $\left[0 \ ; \ \frac{\pi}{2}\right]$.

B/ Soit la fonction g : $[0\ ,\ \pi] \to IR\ ;\quad x \mapsto \dfrac{\sin x - \sin 3x + \sin 5x}{f(x)}$

1) Déterminer le domaine de définition Dg de g . 2) Montrer que g(x) = tan x .

3) Montrer que $\tan\dfrac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$. 4) Résoudre l'inéquation $g(x) < 2-\sqrt{3}$

Exercice N°8 :

Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = 1-\cos 2x + \sin 2x$ et $g(x) = \dfrac{f(x)}{2\sqrt{2}\cos x \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}$

1) a) Calculer $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$; b) Montrer que $\forall x \in IR\ ; f(x) = 2\sqrt{2}\sin x \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

c) En déduire la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{12}$

2) a) Déterminer l'ensemble de définition de g. ; b) Simplifier $g(x)$

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$ et (ξ) est le cercle trigonométrique de centre O.

a) Représenter l'ensemble des points M de (ξ) tel que $(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OM}}) = x + 2k\pi$ et $g(x) \le 0$

b) Résoudre dans IR : $g(x) \le 0$

Exercice 9 : Soit la fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} - \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ .1) a/ Déterminer D_f . b/ Comparer f(x) et $f(x+\pi)$.

2) Montrer que pour tout $x \in D_f : f(x) = \dfrac{(\sin x - \cos x)(4 + 2\sin 2x)}{\sin^2 2x}$

3) a/ Résoudre dans $[0\ ,\ \pi]$: sinx – cosx = 0 . b/ Donner le signe de f(x) sur $D_f \cap [0\ ,\ \pi]$

4) Soit g(x) = $\sqrt{f(x)}$. Déterminer $D_g \cap [0\ ,\ \pi]$

Exercice 10: 1) Résoudre dans IR puis dans $[-\pi\ ,\ \pi]$ l'équation $\cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x = 2\cos\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

2) Soit la fonction $f(x) = \dfrac{\cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x - 2\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)}{1-2\sin^2 x}$. a/ Déterminer D_f

b/ Montrer que pour tout $x \in D_f : f(x) = -4\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.c/ Calculer $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et en déduire $\sin\dfrac{\pi}{12}$ et $\cos\dfrac{\pi}{12}$

d/ Résoudre l'équation $(\sqrt{3}+1)\cos x + (\sqrt{3}-1)\sin x \le 2$

Exercice 11: Pour tout x, on pose $f(x) = \cos 2x - 3\cos x + 2$

1) a) Vérifier que pour tout réel x, on a : $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + \sin 2x$

b) En déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{12} + \sin\dfrac{\pi}{12}$

c) Montrer alors que $f\left(\dfrac{11\pi}{12}\right) + f\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) - f\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) - f\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 3\sqrt{6}$

2) a) Vérifier que pour tout réel x on a $f(x) = 2\cos^2 x - 3\cos x + 1$

b) Résoudre dans l'intervalle $[0;2\pi]$ l'inéquation $f(x)>0$

3) On pose $g(x)=\dfrac{\tan 2x}{\sqrt{f(x)}}$; résoudre dans l'intervalle $[0;2\pi]$; l'inéquation $g(x)\leq 0$

Exercice N°12 : 1) Résoudre dans IR les équations suivantes :a) $\cos(2x)=0$; b) $2\sin(2x)+\sqrt{3}=0$.

2) En déduire les solutions, dans $[0;\pi]$, de l'équation $\sin(4x)+\sqrt{3}\cos(2x)=0$

Exercice N° 13 : Soit $f:\mathrm{IR}\to\mathrm{IR}$; $x\mapsto 1-\sin 2x+\cos 2x$

1) a) Montrer que $\forall\ x\in \mathrm{IR}$; $f(x)=2\sqrt{2}\cos x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

b) Résoudre dans IR puis dans $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ l'équation $f(x)=0$

2) Soit $g:\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathrm{IR}$; $x\mapsto\dfrac{\sqrt{2}\cos 2x}{f(x)}$ a) Déterminer le domaine de définition D de g

b) Montrer que $\forall x\in D$; $g(x)=\dfrac{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos x}$

c) Calculer $g\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ En déduire $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$; d) Résoudre dans D l'équation $g(x)=1$

Exercice N°14 : Soit $A(x)=\cos 2x+\sin 2x$; $x\in[0;2\pi[$

1) Calculer $A(0)$ et $A\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$; 2) Résoudre dans $[0;2\pi[$ l'équation $A(x)=0$

3) a) Montrer que $A(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$; b) En déduire que $A(x)=\sqrt{2}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

4) Résoudre dans $[0;2\pi[$ l'inéquation : $A(x)\geq 1$

Exercice N°15 :

Soit $f(x)=(\sqrt{3}-1).\sin 2x+(\cos x+\sin x)^2$.

1. Montrer que $f(x)=1+\sqrt{3}.\sin 2x$ et calculer $f(\dfrac{49\pi}{12})$.
2. Soit $g(x)=1+\sqrt{3}.\sin 2x+2.\cos^2 x$.

a. Montrer que $g(x)=2+2.\cos(2x-\dfrac{\pi}{3})$. b)Résoudre dans IR puis dans $[0,\pi]$ l'équation g(x)=1.

3. Résoudre dans $[0,\pi]$ l'inéquation $f(x)>\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}$.

Exercice N°16 : n étant un entier naturel non nul résoudre l'équation $\cos^n x-\sin^n x=1$

RESUME DU COURS

Définition : Soit O un point du plan et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On désigne par A et B les points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ .On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}\ .\ \vec{v}$, le réel ainsi défini
* $\vec{u}.\vec{v}=OA.OB.\cos AOB$, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls. * $\vec{u}\ .\ \vec{v}=0$, si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul.

Conséquence : Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$.

Propriétés : Pour tous vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$.. Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tout réels α et β, $(\alpha.\vec{u}).\vec{v}=\alpha(\vec{u}.\vec{v})$,$\vec{u}(\alpha\vec{v})=\alpha(\vec{u}.\vec{v})$, $(\alpha.\vec{u})(\beta.\vec{v})=\alpha\beta(\vec{u}.\vec{v})$

Pour tous vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}.\vec{v};\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}\ ;\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\right).$$

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$, $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$.

Définition : Deux vecteurs sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul et on note $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Conséquence : Deux droites sont perpendiculaires, si et seulement si , le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs est nul.

Propriété : * Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul et O, A et B des points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ *et* $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ .Si H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AO), alors $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$.

* Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul et A , B et C des points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$; $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$, H le projeté de B sur (OA) et K le projeté de C sur (OA), alors $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HK}$.

Propriété : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $|\vec{u}\ .\ \vec{v}|\leq\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ (Inégalité de Cauchy – Schwarz)
$|\vec{u}\ .\ \vec{v}|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$, si et seulement si , les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Théorème : Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base orthonormée de l'ensemble des vecteurs du plan.
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de composantes respectives (x , y) et (x', y') , $\vec{u}.\vec{v}$ =x x' + y y'.

LES EXERCICES

Exercice 1 : L'une des réponses proposées est correcte laquelle ?

1) ABC un triangle tel que AB = 2 et AC = $\frac{1}{2}$; $B\hat{A}C=\frac{\pi}{3}$ alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ est égale à :

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\pi}{3}$.

2) Si ABCD un carré de côté 1. Alors le produit scalaire $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}=$ a) $\sqrt{2}$ b) 1 c) $-\sqrt{2}$

3)ABC étant un triangle tel que:AB = 2, AC = 5 et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-5$ .a) $B\hat{A}C=\frac{\pi}{3}$ b) $B\hat{A}C=\frac{2\pi}{3}$ c) $B\hat{A}C=\frac{\pi}{6}$.

4) A et B étant deux points distincts du plan. L'ensemble des points M du plan tels que : $|\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}|=MA\times MB$ est

a) un cercle b) une droite c) un segment.

5) A, B, C et D quatre points deux à deux distincts tels que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ alors nécessairement on a :

a/ C et D sont confondus b/ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ c/ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$

6) ABC est un triangle, l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ est :

a) La perpendiculaire à (AC) en C. b) La perpendiculaire à (AB) et passant par C.
c) La perpendiculaire à (AB) en A.

7) Soit ABC un triangle tels que : AB = AC = 2 et BC = 3. Alors a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}$
c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -1$.

8) Soient A et B deux points distincts. L'ensemble des points M tels que : $MA^2 = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA}$ est :
a) Le cercle de centre A et de rayon BA. b) La droite (AB) c) Le cercle de diamètre [AB].

Exercice 2 :Répondre par vrai au Faux et Justifier la réponse

1°) A ,B et C sont trois points distincts si : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$ *alors* $(AB) \perp (AC)$.

2°) Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$

3°) Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\|$

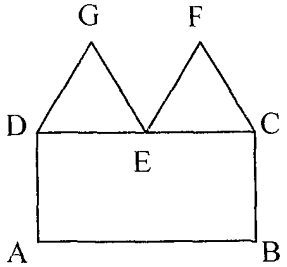
4°) A, B et C trois points distinctes : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$

Exercice 3: Soit D une droite muni du repère $(O, \vec{i})$

1°/ Placer les points A, B et C s'abscisses respectifs 5 , -3 et 2 .

2°/ Soit D' la perpendiculaire à D en O et E un point de D' distinct de O.
Calculer : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CE}$; $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BE}$ *et* $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OE}$

Exercice 4: Dans la figure ci-contre : ABCD est un rectangle tel que $AB = 2AD = 2a\left(a \in IR_+^*\right)$
EFC et EGD sont deux triangles équilatéraux isométriques. Calculer :
1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$; 2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GF}$; 3) $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{DE}$; 4) $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BF}$



Exercices 5: ABC un triangle équilatéral tel que AB=3, I le milieu de $[AB]$ et D le symétrique de B par rapport à C .

1) a- Utiliser le théorème d'ELKHASHI pour calculer AD
b) vérifier que ABD est un triangle rectangle en A

2) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}$

3)a) Montrer que pour tout point M du plan , on a : $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$
b) En déduire l'ensemble $\Delta = \{M \in P; MA^2 - MB^2 = -9\}$

4)Soit G le barycentre des points pondérés (A,3) et (B-2)
a) Montrer que pour tout point M du plan : $3MA^2 - 2MB^2 = MG^2 - 54$
b)En déduire l'ensemble $E = \{M \in P; 3MA^2 - 2MB^2 = -38\}$

Exercice 6 : Dans le plan P, on considère un rectangle ABCD de centre O et tel que : $AB = 6$ et $AD = 3$.
Soit I le point tel que : $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$.

1) a) Calculer $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BD}$; b) En déduire que les droites (CI) et (BD) sont perpendiculaires

2) Déterminer et construire les ensembles suivants :
$E = \{M \in P; MB^2 + MD^2 = 45\}$ et $F = \{M \in P; (\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{MI} = MB^2.\overrightarrow{MI}\}$

EXERCICE 7: Le plan P est orienté dans le sens direct. Soit ABCD un rectangle de centre I tel que AB = 4 et BC = 3.

1) a) Faites un schéma.
b) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$. En déduire la valeur de $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.
c) Montrer alors, que : $\cos\left(\widehat{CID}\right) = \frac{-7}{25}$.

2) a) Vérifier que $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}=8$.

b) Déduire que l'ensemble $\Delta=\{\text{MÎP,tels que } \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=8\}$ est la médiatrice du segment [AB].

3) Soit $\Gamma=\{\text{MÎP tels que } 2MA^2+MD^2=18\}$ et G le barycentre des points pondérés (A,2) et (D,1).

a) Vérifier que $D\in\Gamma$.

b) Montrer que pour tout $M\in P$ on a : $2MA^2+MD^2=3\,MG^2+6$. Déterminer et traceralors Γ.

4) On désigne par A' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A et C sur la droite (BD).

a) Montrer que : $\overrightarrow{AC}\ .\ \overrightarrow{BD}=-5A'C'$. b) En déduire la valeur de la distance A'C'.

Exercice 8 : Dans le plan P on considère un triangle ABC rectangle en A de centre de gravité G ; tel que AC=2 et BC=3 . Soit I=B*C ; J= A*C

1/ Calculer $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC}$ .2/ Déterminer l'ensemble $E=\left\{M\in P;MB^2+MC^2=\frac{25}{2}\right\}$.

3/ Soit l'ensemble $F=\{M\in P;\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{MG}=-1\}$. a-Vérifier que $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}=-2$

b- Montrer que pour tout M du plan on a $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{MG}=MG^2-2$. c- Déduire l'ensemble F.

Exercice 9 : Soit ABCD un rectangle du plan tels que : AB = 8 et BC = 4. on note E le point de [CD] tel que : $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CD},\{I\}=(AC)\cap(BE)$ et $\{F\}=(AD)\cap(BE)$.

1) a- Calculer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CE}$. b. En déduire que : $(CE)\perp(AC)$.

2) Calculer $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AF}$. 3) On note ζ l'ensemble des points M du plan tel que : $MB^2+4ME^2=272$.

a- Montrer que $A\in\zeta$. b- Montrer que : $\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IE}=\vec{0}$. Calculer alors IB et IE.

c- Montrer que pour tout M du plan : $MB^2+4ME^2=5MI^2+16$. d- En déduire ζ et le construire.

Exercice 10 : Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. On donne les points $A(1;0)$; $B(-3;8)$ et $C(3-\sqrt{3};1+2\sqrt{3})$.

1) a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; b) En déduire la valeur de l'angle $B\widehat{A}C$

2) Soient les points $I(0;2)$ et $J(3;-4)$

a) Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble (ζ) des points M de P qui vérifient $MJ=2MI$

b) En déduire que (ζ) est le cercle de diamètre $[AB]$

3) a) Donner une équation de la tangente (T) à (ζ) en A.b) Prouver que $(T)=\{M\in P\setminus MJ^2-MI^2=15\}$

Exercice 11 : On considère, dans un plan P, un triangle ABC ; on désigne par I le milieu du segment $[BC]$ et par K le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). On donne $BC=2;CK=6;AC=10$ et $C\in[BK]$.

1) a) Faire une figure ; b) Prouver que le triangle ABK est isocèle

2) Calculer chacun des produits scolaires suivants : $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CK}.\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AI}^2$

3) Soit G le centre de gravité du triangle ABC et soit l'application :

$f:P\rightarrow IR$ tel que $M\mapsto f(M)=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{MG}$. a) Calculer $f(A)$ et $f(G)$

b) Montrer que pour tout point M de P, on a $f(M)=MG^2+f(G)$

c) Déterminer l'ensemble (ζ) des points de P qui vérifient $f(M)=\frac{556}{9}$

b) En déduire l'ensemble D des points I lorsque M varie sur Δ.

Exercice 12 : Soit ABCD un carré de cantre O. M est un point variable de la diagonale $[AC]$ distinct de A et C. M se projette en P et Q sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ du carré.

1) Montrer que (DM) est perpendiculaire à (PQ).

2) On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.

a) Calculer $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ}$; b) Montrer que OPQ est un triangle rectangle isocèle.

Exercice 13 : On considère un rectangle ABCD tel que $AB = 4$ et $BC = 2$. On pose I le milieu de $[CD]$ et G le barycentre des points pondérés $(C;3)$ et $(D;1)$. Les droites (AC) et (BG) se coupent en K.

1) a) Montrer que $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CG} = 4$ .b) En déduire que les droites (AC) et (BG) sont perpendiculaires.

2) a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DG}$; b) En déduire que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AG} = 16$
c) Calculer alors la distance AK.

3) a) Montrer que pour tout point M du plan ; On a $3MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + 12$
b) Déterminer et construire l'ensemble $\xi = \{M \in P \text{ tel que } 3MC^2 + MD^2 = 16\}$

4) Soit $\Delta = \{M \in P \text{ tel que } MD^2 - MC^2 = 16\}$. a) Vérifier que $C \in \Delta$; b) Montrer que Δ est la droite (BC).

Exercice 14 **:**I) Soit A, B et C trois points alignés du plan P tels que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$. On note $I = B * C$
1)a) Montrer que $B = A * I$
b) Montrer que pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = 2(MB^2 - AB^2)$

2) Déterminer alors l'ensemble $\zeta = \{M \in P ; \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}\}$

II) Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ On donne $A(-2,1)$ et $B(-1,2)$
1) Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 6$
2) Montrer que ζ et Δ sont tangente au point I

Exercice 15:Soit un triangle ABC tel que $AB = 4$; $AC = 6$ et $BC = 8$
On note I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$

1)a) Montrer que pour tout M du plan P on a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 8$
b) Montrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = MJ^2 - 9$
c) Déterminer l'ensemble ζ des points M de P tel que $MA^2 + MB^2 - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = 1$

2) Soit $O = I * J$ et $(O, \vec{u})$ un repère de la droite (IJ) tel que $\vec{u} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IJ}$

a) Montrer que pour tout $M \in P$ on a : $MI^2 - MJ^2 = 2\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OK}$ avec k est le projeté orthogonal de M sur la droite (IJ)

b) Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tel que : $MA^2 + MB^2 - 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = -6$

Exercice 16 :
a,a',b , b' étant 4 réels quelconques montrer que $(ab+a'b')^2 \leq (a^2+a'^2) \times (b^2+b'^2)$.

RESUME DU COURS

Théorème et définition :Il existe un ensemble appelé ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$ et vérifiant les propriétés suivantes :

1) l'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensembles des nombres réels $\mathbb{R}$.
2) il existe un élément de $\mathbb{C}$, noté i, tel que $i^2 = -1$.
3) l'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.
4) tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit de façon unique sous la forme $z = a + ib$, où a et b sont des réels.

Théorème :Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ $(a\ ,\ b\ ,\ a'\ ,\ b')$ sont des réels. Alors :

$* z = z' \Rightarrow a = a'$ et $b = b'$

$* \ z = 0 \Rightarrow a = b = 0$

$*$ z est réel $\Rightarrow b = 0$

$*$ z est imaginaire $\Rightarrow a = 0$

Propriétés :Pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$; $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$ $n \in \mathbb{N}^*$

Pour tous nombres complexes z et tous nombres complexes z' non nul, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\frac{1}{z'^n}\right)} = \frac{1}{(\overline{z'})^n}$; $n \in \mathbb{Z}$

$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$; $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$; $z\overline{z} = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$

$z = \overline{z}$, si et seulement si z est réel

$z = -\overline{z}$, si et seulement si z est imaginaire

théorème :Soit deux nombres complexes z et z'. $|z| = 0$, si et seulement si, $z = 0$; $|z + z'| \le |z| + |z'|$;

$|kz| = |k||z|$; $k \in \mathbb{R}$; $|zz'| \le |z||z'|$; $|\overline{z}| = |z|$; $|z|^2 = z\overline{z}$; $|z^n| = |z|^n$; $n \in \mathbb{N}^*$; $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}, z \ne 0$;

$\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}, z \ne 0$; $\left|\frac{1}{z^n}\right| = \frac{1}{|z|^n}, z \ne 0$ et $n \in \mathbb{Z}$

Propriétés :Soit z un nombre complexe non nul et k un réel non nul. $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$;

$\arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi$

Si $k > 0$ alors $\arg(kz) = \arg(z) + 2k\pi$; si $k < 0$ alors $\arg(kz) = \pi + \arg(z) + 2k\pi$

Théorème :Soit z un nombre complexe non nul tel que $\arg(z) = \theta + 2k\pi$ Alors $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ Cette écriture est appelée écriture trigonométrique de z.

Si M est l'image de z dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ alors M appartient au cercle de centre O et et de rayon $|z|$ et à la demi droite $[OB)$ telle que $\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OB}}\right) = \theta + 2k\pi$

Théorème :Soit z un nombre complexe non nul tel que $z = a + ib$; a et $b \in \mathbb{R}$ Alors $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, si seulement si, $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Propriétés :Soit deux nombres complexes non nul z et z'.

$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$; $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$; $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) + 2k\pi$;

$\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi, n \in \mathbb{Z}$. Pour tout nombre complexe non nul z , $z^n = |z|^n(\cos\theta + i\sin\theta)$, la formule précédente est appelée formule de Moivre.

Théorème :Le plan est muni d' un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit A , B , C et D les points d'affixes respectives tels que $AB \neq 0$ et $CD \neq 0$. Alors

$\left(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{AB}}\right) = \arg(z_B - z_A) + 2k\pi$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi$

Théorème : $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{CD}{AB}(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}}\right) = \theta + 2k\pi$

Théorème :Soit a , b et c des nombres complexes tels que $a \neq 0$. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet dans $\mathbb{C}$, deux solutions (éventuellement confondues) définies par : $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$ où δ est une racine carrée du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

Théorème :Si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$; alors

$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$; $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

LES EXERCICES

Exercice n°1 : **I)** La forme algébrique du nombre complexe

$z = \frac{(2-i)(1+3i)}{-2+3i}$ a) $\frac{5}{13} - i\frac{25}{13}$ b) $\frac{5}{13} + i\frac{25}{13}$ c) $-\frac{5}{13} + i\frac{25}{13}$

II) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ On donne les points $A(i)$; $B(-4-i)$ et $C(-2+5i)$

1) Le triangle ABC est a) équilatéral b) isocèle en B c) rectangle et isocèle en A

2) L'ensemble $\Delta = \{M(z); |z-1| = |z+4+i|\}$ est :

a) Le cercle de diamètre [AB] b) la droite (AB) c) la médiatrice du segment [AB]

III) Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z^2 - 4)(z^2 + 9) = 0$

a) $\{2, -2, 3, -3\}$ b) $\{2, -2, 3i, -3i\}$ c) $\{2i, -2i, 3, -3\}$

Exercice N°2 : 1) Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse :

1) i^{1010} est égal à 1

2) Pour tous nombres complexes z et z' ; $\left(z^2+z'^2=0\right)$ si et seulement si $\left(z=z'=0\right)$

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. Soit ξ le cercle de centre O et de rayon 1 On désigne par M et M' les points d'affixes respectives z et $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$; si $M\in\xi$ alors $M'\in\xi$

4) a) $\left|\frac{222+222i}{222-222i}\right|=1$

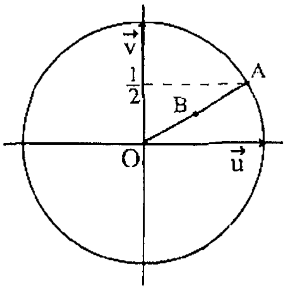
5) Si $z=2\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)$ alors $\arg(z)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

6) Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $z_1{}^2+z_2{}^2=0$ alors $z_1=z_2=0$

7) La forme trigonométrique du nombre complexe $1+i\tan\frac{3\pi}{5}$ est $\frac{1}{\cos\frac{2\pi}{5}}\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$.

8) Pour tout nombre complexe non nul z et pour tout réel θ, si $\arg(z)=\theta+2k\pi$ alors $\arg(\frac{1}{2}z)=\frac{\theta}{2}+2k\pi$.

9) Pour tout nombre complexe non nul Z, le nombre complexe $\frac{1}{Z}-\frac{1}{\overline{Z}}$ est imaginaire.



10) Dans la figure ci-contre, $(O,\vec{U},\vec{V})$ est un repère orthonormé direct du plan et A est un point du cercle trigonométrique d'ordonnée $\frac{1}{2}$

Si B est le milieu du segment [OA] alors l'affixe du point B est $\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{4}i$

Exercice N°3 :Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=1+i$; $z_B=-1+2i$ et $z_C=-i$.

1) Placer les points A, B et C.
2) Calculer AB, AC et BC. En déduire la nature du triangle ABC.
3) Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.
4) On pose $E=\left\{M(z)\in P;|z+i|=2\right\}$ et $F=\left\{M(z)\in P;|2iz+2i+4|=2|z+i|\right\}$.

a) Déterminer l'ensemble E. b) Montrer que F est la médiatrice de $[BC]$.

5) Soit l'application $f:P\setminus\{A\}\to P$ qui pour tout point $M(z)\mapsto M'(z')$ tel que $z'=\frac{z+1-2i}{z-1-i}$; $z\neq 1+i$.

a) Montrer que $f(C)=A$; b) Montrer que $(z'-1)(z-1-i)=2-i$

c) En déduire que si $M\in\zeta_{(A;1)}$ alors M' appartient à un cercle ζ' que l'on précisera.

d) Montrer que si $M \in \text{méd}([AB])$ alors M' appartient à un cercle ζ'' que l'on précisera.

Exercice N°4: Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ On considère les points A, M' et M'' d'affixes respectives i ; $i+m$; $i-m$.

a) Vérifier que A est le milieu du segment $[M'M'']$. b) Montrer que le triangle $OM'M''$ est isocèle.

c) Déterminer les valeurs de m pour que le triangle $OM'M''$ soit équilatéral.

Exercice N°5: Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes d est un nombre complexe donné de module 2. dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ On considère les points A, B, M et N d'affixes respectifs $2i$; $-i$; $-i+d$; $-i-d$. a) Calculer MN et déterminer le milieu de $[MN]$

b) En déduire que lorsque d varie, les points M et N appartiennent à un cercle fixe que l'on précisera.

c) Dans le cas où AMN est un triangle, montrer que O est le centre de gravité du triangle AMN.

d) En déduire les valeurs de d pour les quelles le triangle AMN est isocèle de sommet principal A.

Exercice N°7 :Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.

I) Soit le nombre complexe $z_1 = 1+2i$.

1) Calculer les nombres complexes suivants : $z_2 = iz_1$ et $z_3 = iz_2$.

2) a) Placer les points $M_1;M_2$ et M_3 d'affixes respectives z_1 ; z_2 et z_3.

b) Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est isocèle et rectangle en M_2.

c) Déterminer le nombre complexe z_4 du point M_4 pour que $M_1M_2M_3M_4$ soit un carré.

II) A tout nombre complexe $z \neq -3$ on associe le nombre complexe z' définie par $z' = \dfrac{z-2i}{z+3}$.

1) On suppose que $z = z_1$, déterminer l'écriture cartésienne de z'

2) Déterminer l'ensemble suivant $E = \{M(z) \text{ tel que } z' \in \mathbb{R}\}$.

Exercice N°8 :Soit dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 2+2i$; $z_B = 4i$; $z_C = \dfrac{z_B}{z_A}$ .et $z_D = z_B \times z_C$ soit $I = O * B$ et $K = O * D$.

1) Montrer que le triangle OAB est isocèle rectangle

2) a) Mettre z_C sous forme algébrique ; b) Montrer que $C = A * O$

c) Soit $E = \{M(z) \in P \text{ tel que} : |z-2-2i| = |z|\}$. Déterminer E et montrer que E et parallèle à (AB)

3) a) Déterminer z_D ; b) Montrer que OABD est un trapèze.

4) Soit $F = \{M(z) \in P \text{ tel que} : |z-2i| = 2\}$

a) Vérifier que $K \in F$; b) Déterminer F ; c) Vérifier que OABK est un carré

EXERCICE N°10: Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé droit $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points $A(1+i)$; $B(3+i)$; $C(2+2i)$ et $D(2i)$.

1) a) Placer les points A ; B ; C et D. b) Montrer que ABCD est un parallélogramme

2) a) On pose $z_E = z_D - z_A$, donner la forme trigonométrique de z_E.

b) On pose $z_F = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)$, donner la forme trigonométrique de $\frac{z_E}{z_F}$.

c) En déduire $\cos\frac{13\pi}{12}$ et $\sin\frac{13\pi}{12}$ d) Calculer $\left(\frac{z_E}{z_F}\right)^{12}$

Exercice N°11 :1) a) Développer $(z+6i)^2 - 12; z \in \mathbb{C}$. b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 12iz - 48 = 0$.

2) Soit $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_2 = 1 + i$ .a) Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

b) Mettre $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique et trigonométrique.c) Déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Exercice N° 12: Soit les nombres complexes suivants: $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$; $z_2 = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$ et $z_3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$.

1) Déterminer l'écriture trigonométrique de z_1 ; z_2 et z_3.

2) En déduire l'écriture trigonométrique du nombre complexe $U = \frac{z_1 \times z_2}{z_3}$.

3) Déterminer l'écriture algébrique de U. 4) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

Exercice n°13:dans $\mathbb{C}$ l équation : $Z^2 = -4$.

b- Soit Z un nombre complexe. Développer $\left(Z - 2\sqrt{3}\right)^2$.

c- En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Z^2 - 4\sqrt{3}Z + 16 = 0$.

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{U}, \vec{V})$. On considère les points A et B d'affixes respectives : $Z_A = 2\sqrt{3} - 2i$ et $Z_B = 2\sqrt{3} + 2i$.

a- Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes Z_A et Z_B.

b- Construire les points A et B. c Donner une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$.

d- Montrer que le triangle OAB équilatéral.
3) Déterminer l'affixe du centre de gravité I du triangle OAB.
4) Déterminer l'affixe du point C tel que OABC soit un losange.
5) Déterminer l'ensemble des points M d'affixes Z tels que : $|Z| = |\bar{Z} + 4i|$.

Exercice N°14 :: Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixe respectives : $a = i$, $b = \cos\theta + i(1 - \sin\theta)$ et $c = -\cos\theta - i(1 + \sin\theta)$. $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

a)Déterminer θ pour que A, B et C soient alignés.
b)Déterminer θ pour que B et C appartiennent à un cercle de centre O. quel est le rayon de ce cercle ?

RESUME DU COURS

Définition : Lorsque deux bipoints $(A;B)$ et $(C;D)$ sont tels que $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu. Alors ces bipoints représentent un même vecteur de l'espace, noté $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{DC}$

Les bipoints $(M;M)$ où M est un point quelconque de l'espace représentent le vecteur nul, noté $\vec{0}$.

L'ensemble des vecteurs de l'espace est noté $\mathcal{W}$.

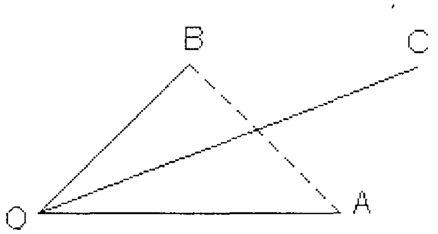
Conséquence : Soit A, B, C et D quatre points de l'espace tel que A, B et C ne soient pas alignés. Alors $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, si et seulement si, ABCD est un parallélogramme.

Définition : On appelle norme d'un vecteur $\vec{u}$ et on note $\left\|\vec{u}\right\|$, le réel positif défini par $\left\|\vec{u}\right\|=AB$ où A et B sont deux points quelconques tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

Théorème : Soit O un point de l'espace. Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{W}$ il existe un unique point M de ξ tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.

Définition : Soient O un point de ξ, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$.

Soit A, B et C les points de ξ tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$; $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ et $[OC]$ et $[AB]$ ont le même milieu. On appelle vecteur somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le vecteur $\vec{w}=\overrightarrow{OC}$. On note $\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}$



Conséquence : Pour tous points A, B et C de ξ,

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (Relation de Chasles). Soit A, B, C et D quatre points de ξ tels que A, B et C ne sont pas alignés. Alors ABCD est un parallélogramme, si et seulement si, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u};\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathcal{W}$: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$; $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$; $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}=\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)$

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique vecteur $\vec{v}$ de l'espace tel que : $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$, le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$ s'appelle vecteur opposé de $\vec{u}$ et se note $-\vec{u}$

Définition : Soient $\vec{u},\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ trois vecteurs de **W**.

On dit que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, s'il existe deux réels α et β tels que : $\vec{w}=\alpha.\vec{u}+\alpha.\vec{v}$.

Lorsque l'un des vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des deux autres.

On dit que les vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ sont linéairement dépendants ou encore que la famille $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$.

Théorème : Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deus vecteurs non colinéaires.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ soit combinaison linéaires de $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ est un plan, appelé plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ .Un point M appartenant au plan $\mathbf{P}\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$, si et seulement si, il existe un unique couple de réels(x ; y) tel que : $\overrightarrow{AM}=x.\vec{u}+y.\vec{v}$.

Conséquence : Soient O, A, B et C quatre points de ξ. O, A, B et D sont coplanaires, si et seulement si, la famille $\left\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right\}$ est liée.

Propriété: Soient A et B deux points distincts de ξ et trois vecteurs non nuls $\vec{u},\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ tels que :

$\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ soient colinéaires. Alors la droite **D**$(A,\vec{u})$ est parallèle au plan **P**$(B,\vec{v},\vec{w})$, si et seulement si, la famille$\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ est liée.

Propriété : Soient A et B deux points distincts de ξ et $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}\,'$ *et* $\vec{v}\,'$ deux vecteurs non colinéaires. Alors :**P**$(A,\vec{u},\vec{v})$ et **P**$'(B,\vec{u}\,',\vec{v}\,')$ sont parallèles, si et seulement si, $\{\vec{u},\vec{v},\vec{u}\,'\}$ et$\{\vec{u},\vec{v},\vec{u}\,'\}$ sont liées.

Définition : Soient $\vec{i},\vec{j}$ *et* $\vec{k}$ trois vecteurs de **W.** Le triplet$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base de **W**, si et seulement si, la famille$\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ n'est pas liée. Soit O un point de **W.** On dit que$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère cartésien de ξ si$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base de **W.**

Conséquence : Soient A, B, C et D quatre points de ξ.Le triplet$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ est une base de **W,** si et seulement si, les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Théorème : Soit O un point de ξ et $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de **W.**

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de **W** il existe un unique triplet(x,y,z) de réels tel que : $\vec{u}=x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}$.

Le triplet(x,y,z) de réels s'appelle le triplet de composantes du vecteurs $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et on note $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ .Pour tout M de l'espace ξ il existe un unique triplet(x,y,z) de réels tel que : $\overrightarrow{OM}=x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}$. Le triplet(x,y,z) de réels s'appelle le triplet de cordonnées du point M dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Théorème : Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de **W**. soit $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ deux vecteurs de **W**, α et β deux réels.

Les composantes de $\alpha.\vec{u}+\beta.\vec{v}$ dans la base$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont $\begin{pmatrix}\alpha a+\beta a'\\\alpha b+\beta b'\\\alpha c+\beta c'\end{pmatrix}$.

Définition : Soit **B** $=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de **W** et$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ un triplet de vecteurs de **W** tels que : $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ *et* $\vec{w}\begin{pmatrix}a''\\b''\\c''\end{pmatrix}$. On appelle déterminant de$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ dans la base B, et noté

$$\text{dét}_{\mathbf{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}a & a' & a''\\b & b' & b''\\c & c' & c''\end{vmatrix} \text{ le réel } a(b'c''-c'b'')-b(a'c''-c'a'')+c(a'b''-b'a'').$$

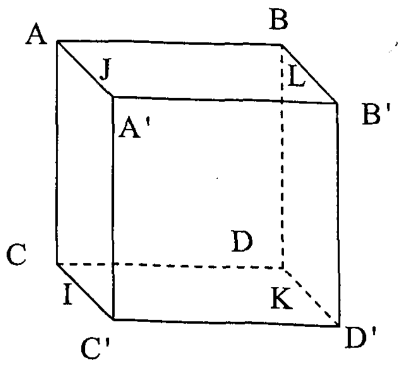
Théorème : Un triplet de vecteurs de **W** forme une base, si et seulement si, son déterminant relativement à une base quelconque de **W** est différent de 0.

LES EXERCICES

Exercice N°1 : ABCD un tétraèdre ; I, J, K et L sont les points définis par : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CK}=\frac{3}{8}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

1) Calculer les coordonnées des points I, J, K et L dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)$.

2) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{JK}$ et déterminer le réel m tel que : $\overrightarrow{IL}=m.\overrightarrow{JK}$



Exercice N°2 : $ABCDA'B'C'D'$ un cube. On note I le milieu de $[A'D']$, J celui de $[AD]$, K celui de $[B'C']$ et L celui de $[BC]$.

1) a) Démontrer que les points I, J, K et L sont coplanaires.

b) Démontrer que $\overrightarrow{D'K};\overrightarrow{D'C'}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ sont coplanaires.

c) Comparer $\overrightarrow{IB'}$ et $\overrightarrow{D'K}$.

2) Démontrer que les plans (IJB') et $(D'KL)$ sont parallèles.

Exercice N°3 : Dans l'espace ξ, rapporté à un repère cartésien $R=\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. On considère les points : $A(1;1;-2)$; $B(0;2;1)$; $C(-1;2;3)$ et $D(0;3;2)$.

1)Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés. On désigne par P le plan (ABC).

2) Montrer que le point D appartient au plan P.

3) Soit $F(1-m;m;m+1)$, où m est un paramètre réel. Déterminer m pour que la droite (AF) soit contenue dans le plan P

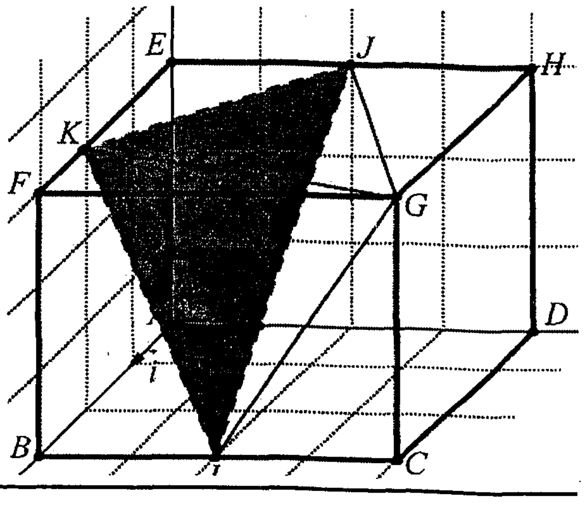
4) On considère les vecteurs : $\overrightarrow{e_1}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k};\overrightarrow{e_2}=\vec{j}+2\vec{k}$ et $\overrightarrow{e_3}=\vec{i}+2\vec{j}$.

a) Montrer que $R'=\left(A;\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3}\right)$ est un repère de ξ.

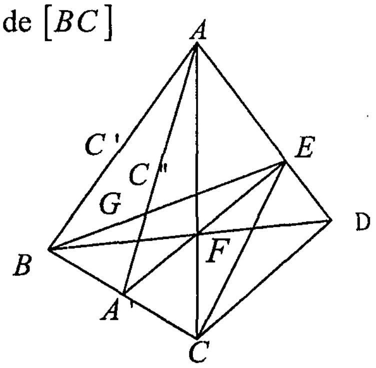
b) Déterminer les coordonnées du point B dans le repère R'.

Exercice n°4 : L'espace est muni d'un repère orthonormé de sens direct $\left(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère le parallélépipède ABCDEFGH tel que : $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}$, $\overrightarrow{AD}=4\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE}=3\vec{k}$.

1) Vérifie que : $\overrightarrow{AG}=3\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$.



2) Soient les points I et J les milieux respectives des arrêtes [BC] et [EH]. Soit K le point défini par : $\overrightarrow{EK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ .Déterminer les coordonnées de I et J et K



Exercice5 : On considère un tétraèdre ABCD et les points : A' le milieu de $[BC]$ et G le centre de gravité du triangle ABC.

1) Soit le point E défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ *et* $\overrightarrow{DA'}$ sont colinéaires.

b) Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{EG}$; $\overrightarrow{DB}$ *et* $\overrightarrow{DC}$?

2) Soit le point F défini par : $\overrightarrow{GF} = \frac{2}{9}\overrightarrow{AD}$.

Montrer que les points A' ; F et E sont alignés et que F est le centre de gravité du triangle BCE.

3) Soient les points C' *et* C'' milieux respectifs des segments $[AB]$ *et* $[EB]$ Montrer que $\overrightarrow{C'C''} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

4) Soit le point M défini par $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{CB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$.

a) Montrer que $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{CC'} + 4\overrightarrow{CC''}$

b) Que peut-on en déduire pour les points C , C' , C'' et M ?

Exercice N°6 : On muni le plan l'espace d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$; On donne les points $A(-1;1;0)$; $B(1;-2;1)$; $C(0;-1;0)$ et $D(-1;-2;2)$.

1) Placer les points A ; B ; C et D. 2) Soient $\vec{v}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\Delta\left(C;\vec{v}\right)$. Montrer que (AB) et Δ sont parallèles.

3) On considère $\vec{w}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le plan $Q\left(A;\overrightarrow{AB};\vec{w}\right)$.a) Montrer que la droite (AB) est incluse dans le plan Q ;

b) En déduire la position relative de Δ et Q

4) a) Montrer que la droite (CD) est parallèle au plan Q

b) Les droites (CD) et Δ sont-elles coplanaires ? Justifier

Résumé du cours

Théorème:L'espace est muni d'un repère orthonormé$\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit A (x$_0$, y$_0$, z$_0$) et le vecteur$\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ tel que$(a,b,c)\neq(0,0,0)$.L'ensemble des points M(x, y, z) vérifiant$\begin{cases}x=x_0+\alpha a\\y=y_0+\alpha b;\alpha\in\mathbb{R}\\z=z_0+\alpha c\end{cases}$ est la droite $\mathcal{D}$ (A,$\vec{u}$).

Le système précédent s'appelle représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ (A,$\vec{u}$).

Théorème:L'espace est muni d'un repère orthonormé$\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit A (x$_0$, y$_0$, z$_0$) et $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$,$\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$deux vecteurs non colinéaires. L'ensemble des points M(x, y, z) vérifiant le système$\begin{cases}x=x_0+\alpha a+\beta a'\\y=y_0+\alpha b+\beta b'\alpha \ et \ \beta\in\mathbb{R}\\z=z_0+\alpha c+\beta c'\end{cases}$ est le système précédent s'appelle représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ (O,$\vec{u}$,$\vec{v}$).

Théorème : L'espace est muni d'un repère orthonormé$\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Pour tout plan P, il existe quatre réels a, b, c et d vérifiant $(a,b,c)\neq(0,0,0)$tels que :

M(x, y, z) appartient à P si et seulement si ax + by + cz + d = 0.

L'équation ax + by +cz + d = 0 est appelée équation cartésienne de P.

Théorème: L'espace est muni d'un repère orthonormé$\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$et a, b, c et d quatre réel tels que : $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

L'ensemble des points M(x, y, z) vérifiant l'équation ax + by + cz + d = 0 est un plan.

Théorème: L'espace est muni d'un repère orthonormé$\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

L'ensemble des ponts M(x, y, z) tels que$\begin{cases}ax+by+cz+d=0\\a'x+b'y+c'z+d'=0\end{cases}$ est une droite, si et seulement si, les triplets (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas proportionnels.

Théorème: Soit A un point de l'espace et$\vec{n}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M de l'espace tel que$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$est le plan passant par A et de vecteur normal à $\vec{n}$

Propriété:L'espace est muni d'un repère orthonormé$\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Si $\mathcal{P}$ est un plan a pour équation ax + by + cz + d =0, alors le vecteur$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$est normal à $\mathcal{P}$.

LES EXERCICES

Exercice 1 L'espace ζ est rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1) Dans l'espace muni d'un repère cartésien $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère les droites

$$D:\begin{cases} x=\alpha-1 \\ y=-2\alpha+2 \\ z=\alpha-3 \end{cases} ,\alpha\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad D':\begin{cases} x=-\beta+1 \\ y=2\beta+5 \\ z=-\beta \end{cases} ,\beta\in\mathbb{R}$$

a) D et D' sont sécantes
b) D et D' sont strictement parallèles
c) D et D' sont confondues
d) D et D' sont coplanaires

2) L'ensemble des points M (x, y, z) de l'espace tels que $\begin{cases} x=\beta \\ y=\alpha+\beta \\ z=-\beta \end{cases}$; $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, est :

a)le plan d'équation cartésienne y=1 b)le plan d'équation cartésienne x+z=0

c) La droite passant par le point A(0, 1, 0) et vecteur $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

3) L'ensemble des points M (x, y, z) de l'espace tels que $\begin{cases} x=1+\alpha+\beta \\ y=2-\alpha-\beta \\ z=3 \end{cases}$; $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, est :

a)le plan d'équation cartésienne z=3 b)le plan d'équation cartésienne x+y=3

c) La droite passant par le point A(1, 2, 3) et vecteur $\vec{i}-\vec{j}$

Exercice 2: On considère les points A(2 ;-3 ;1), B(0 ;1 ;5) et C(-4 ;5 ;7). Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par C et parallèle à la droite (AB).

Exercice 3 : Les droites D et D' sont données par les représentations paramétriques suivantes :

$$D:\begin{cases} x=1+k \\ y=3-k \\ z=-1+k \end{cases} ,k\in\mathbb{R} \text{ et } D'\begin{cases} x=3+k' \\ y=2-2k' \\ z=m+2k' \end{cases} ,k'\in\mathbb{R}$$

. Etudier, suivant les valeurs du réel m, l'intersection des droites D et D'.

Exercice 4:

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

1) Donner un système d'équations paramétriques de la droite passant par $A\left(2;3;-1\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

2)On considère les points $C\left(2;3;0\right)$ et $D\left(-1;1;5\right)$.Donner un système d'équations paramétriques de la droite$\left(CD\right)$.

3) Etudier la position relative des droites $D\left(A;\vec{u}\right)$ et $\left(CD\right)$.

Exercice 5: Déterminer l'intersection du plan P d'équation : $4x-y+2z-4=0$ et de la droite D de représentation paramétrique : $\begin{cases} x=k \\ y=1-3k \\ z=-2+k \end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$.

Exercice 6: Dans l'espace ξ, rapporté à un repère cartésien $R=(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On considère la droite D passant par le point $A(1;-1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$.

1) a) Donner une représentation paramétrique de la droite D. b) Le point $B(3;2;-1)$ appartient-il à D ?

2) Soit Δ la droite définie par : $\begin{cases} x=2-\alpha \\ y=3+2\alpha \\ z=1+3\alpha \end{cases}$; $(\alpha\in IR)$ Donner un système d'équations cartésiennes de la droite Δ. 3) Déterminer $D\cap\Delta$

Exercice 7 : On considère les plans P et P' d'équations respectives : $2x+y-2z-3=0$ et $x+y+3z-2=0$.

1) Montrer que P et P' sont sécants et déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection (D).

2) Etudier d'intersection de (D) avec le plan P'' d'équation : $x+y-z-6=0$.

3) Retrouver, par le calcul direct, l'intersection des trois plans P, P et P''.

Exercice 8 : Dans l'espace ζ rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On considère les droites D et D' définies par : $D\begin{cases} x=2+\alpha \\ y=3+2\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases}$; $(\alpha\in IR)$ *et* $D'\begin{cases} x-3z-1=0 \\ y+2z-1=0 \end{cases}$

1)Montrer que les droites D et D' sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection A

2) Donner une équation cartésienne du plan P contenant D et D'.

3) Soit Q le plan d'équation cartésienne : $2x-y-5=0$.

a)Montrer que les plans P et Q sont sécantes suivant une droite Δ dont on donnera un point et un vecteur

b) Montrer que les droites D et Δ sont strictement parallèles.

Exercice 9 Dans l'espace ξ, rapporté à un repère cartésien $R=(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On considère les points :

$A(1;1;1)$; $B(2;0;-1)$; $C(-1;2;-1)$ et $E(2;-1;3)$ .1) a) Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés

b) Déterminer une équation cartésienne du Plan P contenant A, B et C.

c) Les vecteurs $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont-ils coplanaires ?

2) Soit Δ l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de ξ tels que : $\begin{cases} x+y-1=0 \\ z-2y-5=0 \end{cases}$.

a) Vérifier que l'ensemble Δ est une droite de ξ dont on précisera un point et un vecteur directeur.

b) Vérifier que E appartient à la droite Δ.

c) Etudier la position relative de Δ et (AB) d) En déduire l'intersection de Δ et P.

RESUME DU COURS

Définition : Soient $\vec{u}\, et\, \vec{v}$ deux vecteurs et soit α la mesure en radians de l'angle géométrique déterminé par deux représentants de même origine des vecteurs $\vec{u}\, et\, \vec{v}$ .On appelle produit scalaire de $\vec{u}\;\; par\, \vec{v}$, le réel défini par : a) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\cos\alpha$ si $\vec{u}\, et\, \vec{v}$ sont non nuls.

b) $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si l'un des vecteurs $\vec{u}\, ou\, \vec{v}$ est nul.

Conséquences : Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathscr{W}$ on a

a) $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ (lorsque $\|\vec{u}\| = 1$, on dit que le vecteur $\vec{u}$ est unitaire).b) $\|\vec{u}\| = 0$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$.

a)Pour tout vecteur non nul de $\mathscr{W}$, le vecteur $\frac{1}{\|\vec{u}\|}.\vec{u}$ est unitaire.

b)Pour trois O, A et B de ξ : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA.OB\cos A\hat{O}B$

Définition: Deux vecteurs $\vec{u}\, et\, \vec{v}$ de W sont dits orthogonaux $\vec{u}.\vec{v} = 0$ et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Propriété: Soit O, A et B trois points du l'espace et H le projeté orthogonal de B sur (OA), alors $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$

Théorème : Soit A et B deux points de l'espace et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls de W. Alors les droites $\mathcal{D}$ (A, $\vec{u}$) et $\mathcal{D}$ (B, $\vec{v}$) sont orthogonaux, si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Définition: Soit A un point de l'espace, $\vec{n}$ un vecteur non nul et $\mathcal{P}$ un plan. On dit que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan $\mathcal{P}$ si la droite $\mathcal{D}$ (A, $\vec{n}$) est orthogonal à $\mathcal{P}$.

Conséquence: Soit A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul. Il existe un unique plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Propriétés: Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$ (O, $\vec{u}, \vec{v}$), si et seulement si, $\vec{n}.\vec{u} = 0 \;\; et \;\; \vec{n}.\vec{v} = 0$

Deux vecteurs non nuls $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont normaux à un même plan, si et seulement si, ils sont colinéaires

Propriété: Deux droites son t orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux respectifs sont orthogonaux.

Définition : Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de W est dite orthogonale si les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}\, et\, \vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux.

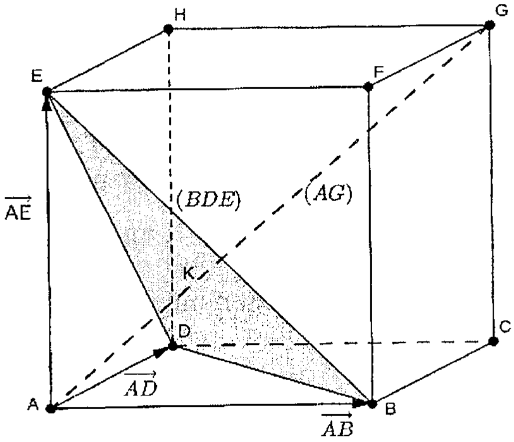
Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de ξ est dit orthogonal si la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthogonale. Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de W est dite orthonormé si les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}\, et\, \vec{k}$ sont unitaires et orthogonaux deux à deux. Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de ξ est dit orthonormé si la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée.

Propriétés: Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz' \;\; et \;\; \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Pour tous points M(x, y, z) et M' (x', y', z') on a $MM' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$

LES EXERCICES



Exercice 1 : Soit ABCDEFGH un cube de côté 1 ;

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H.

2) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AG}$; en déduire que la droite (AG) et le plan (BDE) sont orthogonaux.

3) Montrer que le centre de gravité K du triangle BDE et le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE).

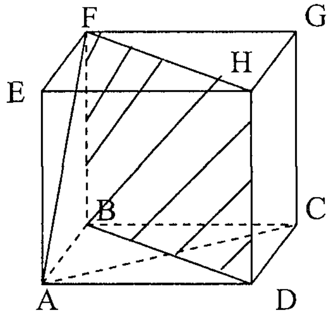
4) Déterminer une mesure à 0,1° près de l'angle $\widehat{EKC}$.

Exercice2 : Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que : $AB = 3$; $AD = 4$ *et* $AE = 5$. On pose $\vec{i} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\vec{j} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AE}$.

1)Montrer que $\mathcal{B} = \left(\mathcal{A}; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace.

2) Déterminer les coordonnées des points C, E et G dans le repère $\mathcal{B}$.

3) Montrer que les droites (AG) *et* (CE) sont orthogonales.



Exercice3 : On considère un cube ABCDEFGH.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.

1) a) En utilisant le produit scalaire, montrer que les droites (AF) et (CH) sont orthogonales.

b) Vérifier que $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BE}$ et en employant une autre méthode retrouver le résultat du 1) a).

2) a) Montrer que la droite (AE) est perpendiculaire au plan (ABCD)

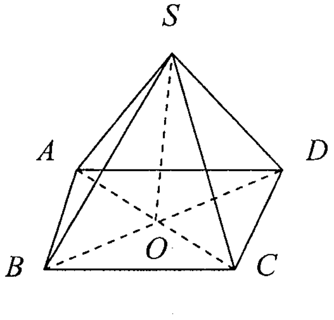
b) En déduire la valeur de $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC}$.

3) Montrer que la droite (AC) est perpendiculaire au plan (HDBF)

Exercice 4 : Dans un repère orthonormal de l'espace, soient les points A(1 ;2 ;-1), B(3 ;2 ;-1) , C(1 ;4 ;-1) et D(1 ;2 ;1).

1) Montrer que le tétraèdre ABCD est trirectangle (les triangle ABC, ACD et ADB sont des triangle rectangles) 2) Montrer que le triangle BCD est équilatéral.

3) Soit G le centre de gravité du triangle BCD ; montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BCD).



Exercice5 :ABCDS est une pyramide dont la base ABCD est un carré de centre O. On suppose que O est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABCD) et que $AB = SO = a$; $(a > 0)$

1) a) Montrer que $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = SO^2 + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$

b) Exprimer en fonction de a le produit scalaire $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$

2) a) Déterminer la valeur de $\cos\widehat{ASC}$.

b) Déterminer une valeur approchée au degré prés de l'angle $\widehat{ASC}$.

Exercice N° 6: $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est une base orthonormée ; θ est un réel. On considère les vecteurs $\vec{U}=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}$, $\vec{V}=-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j}$ et $\vec{W}=\vec{K}$.

1)Montrer que $(\vec{U};\vec{V};\vec{W})$ est une base orthonormée.

2)Déterminer θ pour que $\vec{U}$ soit orthogonal au vecteur $\vec{t}=2\vec{i}+\vec{k}$

Exercice7:

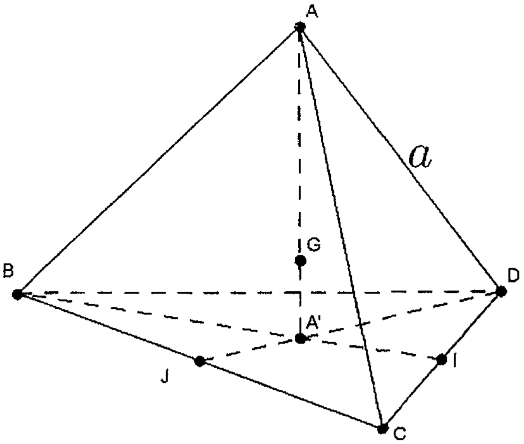
ABCD est un tétraèdre régulier de l'espace, d'arête a.

1) Montrer que les arêtes opposées, par exemple [AB] et [CD], ont pour supports des droites orthogonales.

2) Soit A' le centre de gravité du triangle BCD. Montrer que la droite (AA') est orthogonale au plan (BCD).

3) Soit G l'isobarycentre des points A, B, C et D.

Calculer $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$. En déduire une valeur approchée à 0,1° près de l'angle $A\hat{G}B$.



_Exercice 8 :_ABCDEFGH est un cube d'arrête 1. Soit I ; J ; K et L les milieux respectifs des arêtes $[EH]$; $[BF]$; $[BC]$et$[DH]$. On munit l'espace du repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

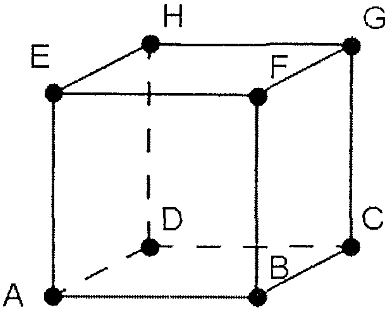
1) a) Déterminer les coordonnées des sommets du cube.

b) En déduire les coordonnées des points I ; J ; K et L.

c) Prouver que IJKL est un rectangle dont les diagonales se coupent en O, centre du cube.

2)a)Calculer IJ, JK et IK

b)Déterminer $\cos\widehat{IOL}$. En déduire la valeur de l'angle $\widehat{IOL}$.



Exercice 9:Soient x,y,z ,a,b et c six réels quelconques .Montrer que $(xa+yb+zc)^2 \leq (x^2+y^2+z^2)\ (a^2+b^2+c^2)$.

Exercice 10 : Dans l'espace ζ rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On considère les points $A(-1;2;1)$; $B(1;-6;-1)$ et$C(2;2;2)$.

1)Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant les points A ; B et C.

2) Soit Q le plan d'équation : $x+y-3z+2=0$ *et* Q'le plan de repère $(O;\vec{i};\vec{k})$.

a) Montrer que les plans Q et Q' sont sécantes.

b) Donner un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d'intersection Δ des plans Q et Q'.

Exercice 11 : L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne les points $A(2,1,-1);B(0,2,1)$ et$C(1,2,-1)$.1) a) Montrer que A, B et C déterminent un plan.

b) Montrer qu'une équation cartésienne de (ABC) est : $2x+2y+z-5=0$

2) Soit la droite $\Delta:\begin{cases}x=1-t\\y=-1-t\quad;(t\in IR)\\z=-4-\dfrac{1}{2}t\end{cases}$

a) Montrer que Δ est perpendiculaire au plan (ABC) puis calculer les coordonnées de leur point d'intersection E

b) Vérifier que ABCE est un parallélogramme

3) a) Vérifier que le point $K(-1;-3;-5)$ est un point de Δ. b) Calculer $d(B;\Delta)$

Exercice 12 : L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On considère les plans (P) et (P') d'équations $(P): 2x-y+2z-5=0$; $(P'): 2x+2y-z-4=0$

1) Montrer que $(P)\perp(P')$

2) Calculer la distance du point $A(1;2;-1)$ à chacun des plans (P) et (P'). En déduire la distance du point A à la droite (D) d'intersection de (P) et (P')

3) a) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (D).

b) Déterminer par ses coordonnées, le point M de la droite (D) pour lequel la distance AM est minimale.

Exercice 13 : L'espace ζ est rapporté à un repère cartésien $R=(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. A tout réel m ; on associe l'ensemble P_m des points $M(x;y;z)$ de ξ tels que : $(m-1)x+my+(2-m)z+3m-1=0$.

1) Vérifier que, pour tout réel m, P_m est un plan.

2) Soit D la droite définie par : $\begin{cases} x=-3+2\alpha \\ y=1+3\alpha \\ z=-1+\alpha \end{cases}$; $(\alpha\in \mathbb{R})$

a) Déterminer m pour que D et parallèle à P_m ; b) D est-elle contenue dans un plan P_m ?

3) montrer que tous les plans P_m contiennent une droite fixe Δ dont on donnera une représentation paramétrique.

4) Soit $\mathcal{D}'$ la droite passant par $A(0;-2;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$

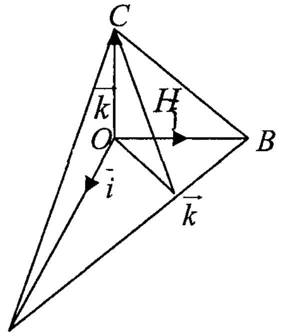
a) Déterminer $\mathcal{D}'\cap P_m$

b) Montrer que, pour tout réel m, $\mathcal{D}'$ et P_m sont sécants et préciser $\mathcal{D}'\cap P_m$

Exercice 14 : L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

Les points A , B et C sont définis par : $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}$; $\overrightarrow{OC}=\vec{k}$ et $OB=2\vec{j}$.

On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).



1) a) Montrer que le plan (ABC) à pour équation cartésienne $2x+3y+6z-6=0$

b) Montrer que les coordonnées du point H sont : $H\left(\frac{12}{49};\frac{18}{49};\frac{36}{49}\right)$

2) Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

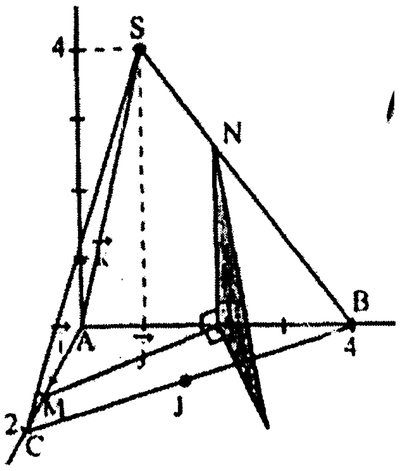
Exercice 15 : Dans la figure ci-contre $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé, ABCS est un tétraèdre tel que :

$B(0;4;0)$; $C(2;0;0)$ et $S(0;1;4)$

1) Le point I est le milieu du segment $[AB]$. Déterminer les coordonnées du point I.

2) M est le point de coordonnées $(a;0;0)$ avec $a\in\,]0;2[$.

Déterminer l'ensemble des points M lorsque le réel a varie.



3) Le plan P passant par I et perpendiculaire à la droite (IM) coupe la droite (BS) au point N.

a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $ax - 2y + 4 = 0$

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BS)

c) En déduire que le point N reste fixe lorsque le point M varie.

Exercice 16 : Dans l'espace ζ rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On considère les points $A(1;0;1)$; $B(-1;2;2)$ et $C(-1;0;1)$

1) a) Vérifier que ABC est un triangle rectangle en C.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant A, B et C.

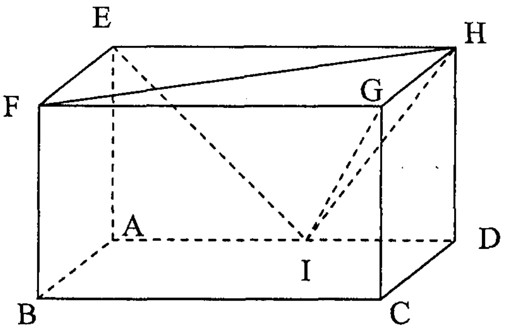
2) Déterminer un système d'équations paramétriques de l'axe Δ du cercle (ABC)

3)Montrer que l'ensemble Q des points M de ζ tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = -3$ est un plan perpendiculaire à la droite (AB)

4) a) Vérifier que la droite Δ est parallèle au plan Q

b) Soit M un point quelconque de Δ Calculer la distance du point M à Q

Exercice 17: Soit ABCDEFGH un parallélépipède tel que $AB = AE = 1$ et $AD = 2$ .On désigne par I le milieu du segment $[AD]$. L'espace est muni d'un repère orthonormé $R(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AE})$.



1) a) Déterminer les coordonnées des points F, G et H.

c) Montrer que FIH est un triangle rectangle et calculer son aire.

2)a)Montrer qu'une équation du plan $P = (FIH)$ est : $2x + y - z - 1 = 0$.

b) Déterminer alors la distance du point G au plan $P = (FIH)$

c) Déterminer les coordonnées du point K d'intersection de (AG) et du plan (FIH).

Exercice18:

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne $A(0,0,2)$; $B(\sqrt{3};1;0)$ et $C(\sqrt{3};-1;0)$

1) Déterminer les coordonnées du point J le milieu du segment $[BC]$.

2) Soit N un point du segment $[OJ]$. On pose $ON = t$. A quel intervalle appartient t ?

3) Soit P le plan passant par le point N et orthogonal à la droite (OJ). Le plan P coupe les arêtes $[OC]$; $[AC]$; $[AB]$ et $[OB]$ respectivement aux points R, S, T et U.

a) Montrer que RSTU est un rectangle.

b) Soit $\mathcal{A}(t)$ l'aire du rectangle RSTU. Montrer que $\mathcal{A}(t) = \frac{4}{3}t(\sqrt{3} - t)$

c) Pour quelle valeur du nombre réel t , l'aire $\mathcal{A}(t)$ est-elle maximale ? Quelle est alors la nature géométrique du quadrilatère RSTU ?

RESUME DU COURS

Définition : Soit A, B et C des points de l'espace. Le produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ *par* $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur noté $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et défini comme suit :*Si $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ colinéaires, alors $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

*Si $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, alors :* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ *et à* $\overrightarrow{AC}$;

* $\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\ ,\ \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$est une base directe , * $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=AB.AC.\sin\widehat{BAC}$

Propriétés : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et α,β deux réels :* $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$;* $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$, si et seuleme si, $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires.* $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\left(\vec{v}\wedge\vec{u}\right)$;$\vec{u}\wedge\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$ $\left(\alpha\vec{u}\right)\wedge\left(\beta\vec{v}\right)=\alpha\beta\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)$

Définition : L'espace est muni d'une base orthonormée directe$\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Pour tous vecteu

$\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$; $\vec{u}\wedge\vec{v}=(bc'-cb')\vec{i}+(ca'-ac')\vec{j}+(ab'-ba')\vec{k}$

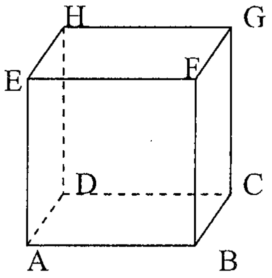
Propriété : L'espace est muni d'un repère orthonormé direct$\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Pour tous vecteu

$\vec{u}$; $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ $\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)+\vec{w}=\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right)\vec{u}=\left(\vec{u}\wedge\vec{w}\right)\vec{v}=\det\left(\vec{u}\ ;\vec{v}\ \text{ et }\ \vec{w}\right)$

Définition : L'aire du parallélogramme ABCD est égale à $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|$.

L'aire du triangle ABD est égale à $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|$

LES EXERCICES



Exercice 1 : Cocher la réponse exacte :

2) Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.

a) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BF}=$ *) 0 ; **) 1 ; ***) $\sqrt{2}$

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=$ *) $\sqrt{2}$; **) 1 ; ***) 2

c) $\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AB}=$ *) $\overrightarrow{AE}$; **) $\overrightarrow{EA}$; ***) $\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{DH}=$ *) $\overrightarrow{DB}$; **) $\overrightarrow{BD}$; ***) $\overrightarrow{AF}$

3) Dans l'espace qui est rapporté à un repère orthonormé direct, on donne trois points non alignés A , B *et* C alors : a) $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{BC}=$ *) $\vec{0}$; **) $\overrightarrow{AC}$; ***) 0

b) L'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0$ est :

*) (AB) ; **) $\{A;B\}$; ***) Le plan perpendiculaire à la droite(AB) et passant par A.

c) L'ensemble des points M de l'espace tel que $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AM}=0$ est :

*) le plan(ABC) ; **) (AB) ; ***) La droite passant par A et perpendiculaire au plan(ABC).

4) Soit A, B et C trois points non alignés et $\vec{n}$ un vecteur normal au plan(ABC)alors :

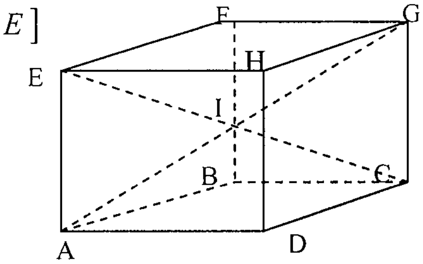
a) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{n}$; b) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-\vec{n}$; c) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\alpha\vec{n}$; $\alpha\in\mathrm{IR}^*$

Exercice 2 :Dans l'espace ζ rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. On considère les points $A\left(3;2;4\right)$; $B\left(0;3;5\right)$; $C\left(0;2;1\right)$ et $D\left(3;1;0\right)$.

1) a) Montrer que ABCD est un parallélogramme ; b) Calculer l'aire du parallélogramme ABCD.

2) Soit E le point défini par $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right)$. Déterminer les coordonnées du point E.

3) Calculer le volume v du prisme droit de base ABCD et de hauteur $[AE]$



Exercice 3 :On considère un cube ABCDEFGH.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.

On désigne par I le centre du carré ABCD.

1) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}$

2)Déterminer l'ensemble Δ des points M de l'espace tels que $\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}\right)\wedge\overrightarrow{BM}=\vec{0}$

3)Déterminer l'ensemble P des points M de l'espace tels que $\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}\right).\overrightarrow{BM}=0$

Exercice 4 :Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.

1)Déterminer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AE}$

2)Montrer que $\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{BH}=2$ en déduire que $\sin\left(H\widehat{B}G\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

3) a) Vérifier que $\overrightarrow{CF}\perp\overrightarrow{BG}$ et que $\overrightarrow{CF}\perp\overrightarrow{BH}$; b) Déterminer alors $\overrightarrow{BG}\wedge\overrightarrow{BH}$

Exercice 5 :Dans l'espace ζ rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. On considère les points $A\left(0;1;1\right)$; $B\left(1;0;0\right)$; $C\left(-1;2;1\right)$ et $D\left(0;1;2\right)$.

1) a) Calculer $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}$; b) En déduire que les points A, B, C et D sont coplanaires.

2) Montrer que $\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{CB}$

Exercice 6 : Soit $\left(\mathrm{O},\vec{\mathrm{i}},\vec{\mathrm{j}},\vec{\mathrm{k}}\right)$ un repère orthonormé direct de l'espace ξ.

On donne les points $\mathrm{A}\left(1;-2;-1\right)$; $\mathrm{B}\left(1;3;1\right)$ et $\mathrm{C}\left(5;6;5\right)$

1)a)Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

b)En déduire que A, B et C ne sont pas alignés puis calculer l'aire du triangle ABC

2)a)Calculer le volume du tétraèdre OABC . b) En déduire la distance du point O au plan (ABC)

3)Calculer le volume du parallélépipède ayant pour arêtes $[\mathrm{OA}]$; $[\mathrm{OB}]$ et $[\mathrm{OC}]$.

Exercice 7 :Dans l'espace ζ rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.On considère les points $A\left(-1;2;3\right)$; $B\left(0;4;4\right)$;et $C\left(2;0;2\right)$

1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés. ; 2) Calculer l'aire du triangle ABC.

3) Calculer $\cos\widehat{BAC}$ *et* $\sin\widehat{BAC}$; 4) Calculer la distance de C à la droite Δ passant par A et B

Exercice 8 :On considère un cube ABCDEFGH. L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$. On désigne par I le milieu de $[EF]$ et par K le centre du carré ADHE.

1) a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BK}$; $\overrightarrow{IG}$ *et* $\overrightarrow{IA}$

b) Vérifier que $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}$; c) En déduire l'aire du triangle AGI.

2) a) Calculer le volume v du tétraèdre ABGI ; b) En déduire la distance d du point B au plan (AGI)

Exercice 9 : Répondre par Vrai ou Faux avec justification :

1) $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\wedge\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=-2\vec{u}\wedge\vec{v}$; 2) Si la famille $\left\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right\}$ est liée alors $\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)\perp\vec{w}$

3) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls ; $\left(\dfrac{\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|}\right)^2+\left(\dfrac{\vec{u}\,\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|}\right)^2=1$; 4) $\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)\wedge\vec{v}=\left(\vec{u}\vec{v}\right)\vec{v}$

Exercice 10 :Les deux questions sont indépendantes.

1) Soient x,y,z ,a,b et c six réels quelconques . Montrer que $(xa+yb+zc)^2 \leq (x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$.

2)Soient x,y,z,a,b et c six réels que $\frac{x}{a}\neq\frac{y}{b}$.

Montrer que $(yc-zb)^2+(xc-za)^2+(xb-ya)^2 \leq (x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$.

Exercice 11 :Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1 tel que $\left(\overline{AB};\overline{AD};\overline{AE}\right)$ est une base directe.

Déterminer $\overline{AB}\wedge\overline{AD}$; $\overline{AD}\wedge\overline{AB}$; $\overline{AB}\wedge\overline{FG}$; $\overline{EF}\wedge\overline{EF}$; $\overline{EF}\wedge\overline{GH}$ et $\overline{BC}\wedge BG$

Exercice 12 :Soit A ; B et C trois points non alignés de l'espace.

1) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CM}=\vec{0}$

2) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)\wedge\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)=\vec{0}$

Exercice 13 :L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

Soit $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs. Montrer que $\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)\vec{w}=\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right)\vec{u}=\left(\vec{w}\wedge\vec{u}\right)\vec{v}=\text{dét}\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)$.

Exercice14*:* Dans l'espace ζ rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. On considère les points $A(-1;2;1)$; $B(1;-6;-1)$ et $C(2;2;2)$.

1) a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

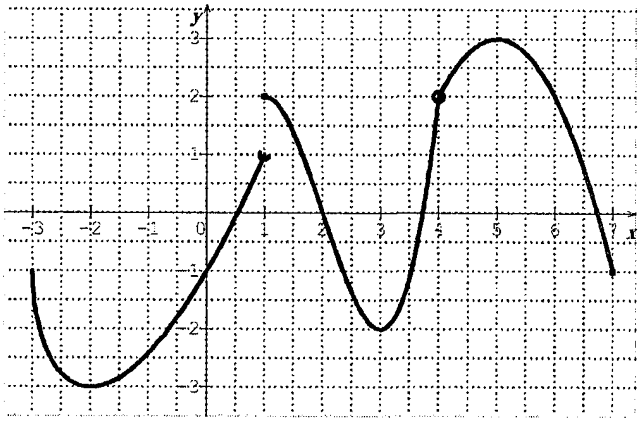
b) Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant les points A ; B et C.

2) Soit Q le plan d'équation : $x+y-3z+2=0$ *et* Q' le plan de repère $\left(O;\vec{i};\vec{k}\right)$.

a) Montrer que les plans Q et Q' sont sécantes.

b) Donner un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d'intersection Δ des plans Q et Q'.

Devoir De contrôle N° 1



Exercice1 : On a représenté ci-contre une fonction g.
Répondre aux questions de cette partie (I)
par lecture graphique :

1)Déterminer le domaine de définition de g.

2) Donner $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$.

4) a) 3 est-il un majorant de g ?

b)3 est-il un maximum pour g ?

5) Déterminer le minimum de g.
En quel réel est-il atteint ?

Exercice N° 2 :

Le plan est orienté dans le sens direct. On considère les points A, B, C, D et E tel que

$$(\overrightarrow{AB}, \overset{\wedge}{}\overrightarrow{AC}) = -\frac{23\pi}{10} + 2k\pi \ ; \ (\overrightarrow{AC}, \overset{\wedge}{}\overrightarrow{AE}) = -\frac{47\pi}{10} + 2k\pi \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overset{\wedge}{}\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{5} + 2k\pi$$

1. Déterminer la mesure principale de chacun des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$.
2. Montrer que les points A, B et E sont alignés.
3. Montrer que $(AC) \perp (AD)$.

Exercice N°3 : Soit f la fonction définie sur $IR \setminus \{1\}$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} & \text{si } x \in]-\infty;2[\setminus \{1\} \\ f(x) = 2x + \sqrt{x^2-4} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

On désigne par ξ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f.

2) $f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

3) Etudier la limite de f en 1

4) Calculer la limite de f en $-\infty$

5) a) Calculer la limite de f en $+\infty$

b) Montrer que la droite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 3x = 0$

Exercice N° 4 :

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$

1)a et b deux réels distincts et strictement positifs .Vérifier que $g(a) - g(b) = \dfrac{(a-b)(2ab-1)}{ab}$.

2)En déduire le sens de variation de g sur chacun des intervalles $]0;\dfrac{1}{\sqrt{2}}]$ et $[\dfrac{1}{\sqrt{2}};+\infty[$.

3)Montrer alors que g est minorée par $2\sqrt{2}$ sur $]0;+\infty[$ et que $2\sqrt{2}$ est un minimum de g sur $]0;+\infty[$.

Devoir de synthèse N° 1

Exercice N° 1 :

Pour chaque question **donner la réponse exacte.**

1. Si une fonction f définie en 3 tel que $\lim\limits_{3} f = 4$

a) f est continue en 3	
b) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 4$	
c) f(3)=4	

2. Si une fonction f est continue sur [-2 ;5] et f(-2)=1 et f(5)=-4 :

a) L'équation f(x)=-1 n'admet pas de solution dans [-2 ;5]	
b) L'équation f(x)=0 admet une seule solution dans [-2 ;5]	
c) L'équation f(x)=0 admet au moins une solution dans [-2 ;5]	

3)Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tel que $(\widehat{\vec{u}\,,\vec{v}}) = \frac{59\pi}{7} + 2k$

a) La mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ est $-\frac{4\pi}{7}$	
b) La mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\frac{11\pi}{7}$	
c) La mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\frac{3\pi}{7}$	

4)Si une fonction f est continue sur [-1 ;5[alors

a) f est continue à gauche en 5	
b) f est continue en (-1)	
c) $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = f(-1)$	

Exercice N° 2 : Soit la fonction f définie sur R par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{2x^2 - x^3} & si \quad x < 1 \\ f(x) = \dfrac{3x+1}{x+3} & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue en 1.
2. Montrer que f est continue sur IR.
3. Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{f(x)-1}{x-1}$.

a. Vérifier que $(\forall x \in R) : -x^3 + 2x^2 - 1 = (x-1)(1 + x - x^2)$.

b. Calculer $\lim\limits_{1^-} g$ et $\lim\limits_{1^+} g$.

Exercice N° 3 : Le plan est orienté dans le sens direct.

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB=3 et $(\widehat{\overrightarrow{BA}\,,\overrightarrow{CB}}) = -\frac{56\pi}{6} + 2k\pi$.

1. a)Donner la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{BC}\,,\overrightarrow{BA}})$. b)Construire alors le triangle ABC.

a. Construire le point D tel que ABD est équilatéral et $(\widehat{\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ et le point F tel que AFC est équilatéral et $(\overrightarrow{FC}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{FA}) = -\frac{\pi}{3}+2k\pi$.

2. Montrer que $(BC)\perp(FC)$.
3. Montrer que $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AD}$.
4. Soit $D=\left\{M\in P;(\overrightarrow{AM}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AB}) = -\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right\}$.

a. Vérifier que $F\in D$. b)Déterminer alors D. Justifier.

Exercice N° 4

1) Soit $f(x)=4\cos^2(x)-3$.

a- Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0,\pi]$: f(x) = 0.

b- Déterminer le signe de f(x) sur $[0,\pi]$.

2) Soit $g(x)=f(x)-\sqrt{3}\sin(2x)+2\sin^2(x)$.

a- Montrer que : $g(x)=2\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$

b- Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0,\pi]$: $\frac{g(x)-1}{f(x)}\leq 0$.

3) a- Montrer que $\cos(3x)=\cos(x).f(x)$.

b- En déduire la valeur de $A=4\cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right)-3\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

Exercice N°5:

Soit la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et représentée par la courbe ζ ci-dessous :

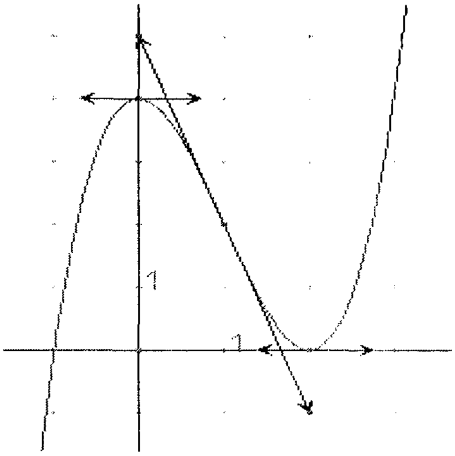
1) Utiliser le graphique pour répondre aux questions suivantes :

a- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b- $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}$.

c- Dresser le tableau de variation de f .

d- Déterminer, suivant les valeurs de m ; ou m est un paramètre réel le nombre de solution de $\begin{cases} f(x)=m \\ 0\langle x\langle 2 \end{cases}$



2) On suppose que $f(x)=ax^3+bx^2+c$, vérifier que a=1 ,b=-3 ,c=4.

3) Soit g la fonction définie par $g(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+4x-1$.

a- Vérifier que $g'(x)=f(x)$.

b- Déduire le tableau de variation de g.

Devoir de contrôle N°2

Exercice n°1 : La figure ci contre est la représentation d'une fonction f.

1) A l'aide du graphique déterminer $f'(-2)$ et $f'(-1)$.

2) Cocher la où les bonnes réponses :

a) f est dérivable :

i) à droite en 1 ii) à gauche en 1 ii)en 1.

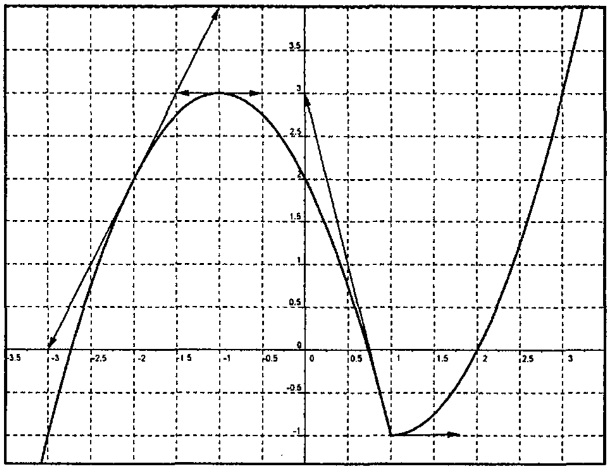
b) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)+1}{x-1}=$ i) -4 ii) -1 iii) 1 iv)4.

c) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)+1}{x-1}=$ i)$-\infty$ ii)$+\infty$ iii) 0 iv)1.

3)Soit $g(x)=ax^2+bx+c$ où a, b et c sont des réels.

a)Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$

b) Déterminer les réels a, b et c pour que les deux conditions suivantes soient satisfaites :



$$\begin{cases}\bullet \text{La droite} : y=2x+1 \text{ est la tangente à } \zeta_g \text{ au point d'abscisse } 0.\\ \bullet \text{Les tangentes } \zeta_f \text{ et } \zeta_g \text{ en leurs points d'abscisses } -1 \text{ sont parallèles.}\end{cases}$$

4) Soit $\begin{cases}h(x)=\sqrt{x^2+x}, \text{si } x\ge0\\ h(x)=\dfrac{x}{x-1}, \text{ si } x<0\end{cases}$ a) Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier la dérivabilité de h en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que h est dérivable sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ et calculer $h'(x)$.

Exercice n° 2 :

Soit $f:IR\to IR; x\mapsto \cos2x-\sin2x+1$

1) a) Calculer $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$

b) Montrer que $\forall x\in IR$; $f(x)=2\sqrt{2}\cos x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

c) Résoudre dans IR puis dans $[0;\pi]$ l'équation $f(x)=0$

2) Soit $g:[0;\pi]\to IR; x\mapsto\dfrac{-1+\sin2x}{f(x)}$.

a) Déterminer le domaine de définition D de g

b) Montrer que $\forall x\in D; g(x)=\dfrac{-1+\tan x}{2}$

c) Calculer $g\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$; en déduire $\tan\dfrac{\pi}{8}$

d) Résoudre dans D l'équation $\sin2x+\left(1-\sqrt{2}\right)\cos2x=1$

Exercice N°3: Soit f une fonction définie sur IR $\setminus\{3\}$ par $f(x)=\frac{5-x^2}{x-3}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$

2) a) Montrer que $\forall x\in$ IR $\setminus\{3\}$, on a $f'(x)=\frac{-x^2+6x-5}{(x-3)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f ; c) Déterminer les extremums de f

3) a) Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

b) Déterminer les points de (C) où la tangente (T) est parallèle à la droite $\Delta : 5x+9y=0$

Exercice 4 : On considère un rectangle ABCD tel que $AB=4$ et $BC=2$. On pose I le milieu de $[CD]$ et G le barycentre des points pondérés $(C;3)$ et $(D;1)$. Les droites (AC) et (BG) se coupent en K.

1) a) Montrer que $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CG}=4$.

b) En déduire que les droites (AC) et (BG) sont perpendiculaires.

2) a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DG}$

b) En déduire que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AG}=16$. c) Calculer alors la distance AK.

3) a) Montrer que pour tout point M du plan ; On a $3MC^2+MD^2=4MG^2+12$

b) Déterminer et construire l'ensemble $\xi=\{M\in P \text{ tel que } 3MC^2+MD^2=16\}$

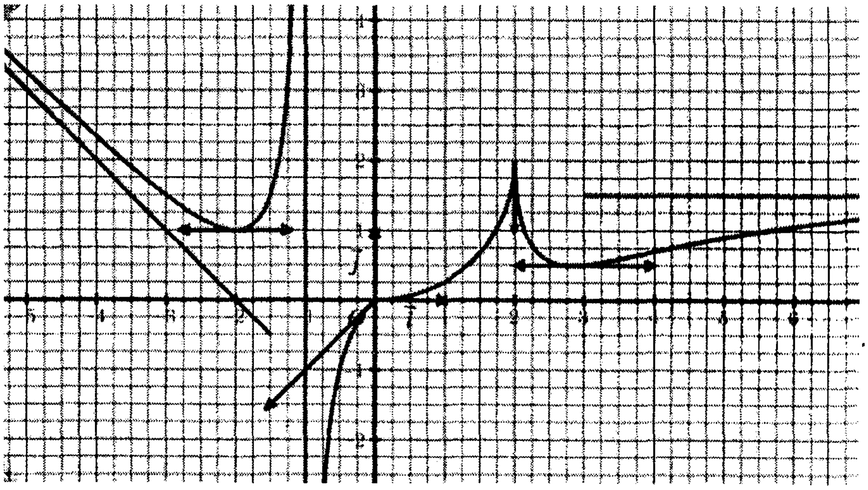
4) Soit $\Delta=\{M\in P \text{ tel que } MD^2-MC^2=16\}$. a) Vérifier que $C\in\Delta$ .b) Montrer que Δ est la droite (BC).

Exercice n°5 : La figure ci contre est la représentation d'une fonction f. définie sur IR $\setminus\{-1\}$

La droite d'équation $y=-x-2$ est une asymptote à (ξ) au voisinage de $(-\infty)$

La droite d'équation $x=-1$ est une asymptote à (ξ)

La droite d'équation $y=\frac{3}{2}$ est une asymptote à (ξ) au voisinage de $(+\infty)$



En utilisant le graphique, répondre aux uestions suivantes :

1)Déterminer $f'(-2)$ et $f'(3)$.

2)Déterminer le nombre dérivé de f à droite et à gauche en 0

2)Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2)Etudier la limite de f en -1 3) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x$

4) Déterminer $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{f(x)-2}{x-2}$ et $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{f(x)-2}{x-2}$.

Devoir de synthèse n2 :

Exercice n°1 Cocher la réponse exacte :

1) Soit $z=1-i$; la forme trigonométrique de z est :

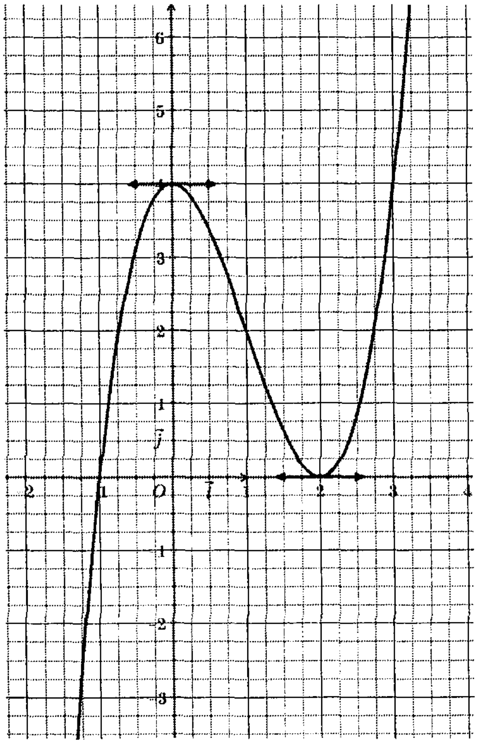
a) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ b) $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ c) $\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$

2) Si $z=0$ alors a) $\arg(z)=2k\pi$ b) $\arg(z)=\pi+2k\pi$ c) z n'a pas d'argument

3) Si $z=\sin\theta+i\cos\theta$; $\theta\in IR$ un argument de z est a) θ b) $\frac{\pi}{2}+\theta$ c) $\frac{\pi}{2}-\theta$

4) Soit z' et z" deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{7\pi}{6}$ alors on a :

a) $\frac{z''}{z'}$ est réel b) $z'z''$ est réel c) $z'z''$ est imaginaire pur.



Exercice n°2 : La figure ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. La courbe ζ_f admet deux branches paraboliques de direction $(O,\vec{j})$, l'une au voisinage de $+\infty$ et l'autre au voisinage de $-\infty$.

1) À partir graphe dresser le tableau de variation de f.

2) Déterminer : $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

3) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-4}{x}$, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}$ et $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{f(x)}-2}{x}$

4) Soit $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ Déterminer θ pour que $f\left(\frac{1}{\cos^2(\theta)}\right)$ Soit minimale

5)Soit g fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\left(f(x)\right)^2$.

a)Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa fonction dérivée en fonction de f' et f

b) Dresser le tableau de variation de g.

Exercice 3 **:**Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x)=\frac{ax^2+bx+2}{x-2}$; $a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$

1)a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ et que $f'(x)=\frac{ax^2-4ax-2b-2}{(x-2)^2}$

b) Déterminer les réels a et b pour que f admet un extremum en 4 sa valeur est 7.

On suppose dans la suite que $a=1$ et $b=-1$

2)a) Dresser le tableau de variation de f. b) Préciser la nature des extremums de f.

3) le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.On note ζ_f la courbe représentative de la fonction f.

Déterminer les équations des tangentes à ζ_f parallèle à la droite $D:3x+y-5=0$

4) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x+2}{x-2} & \text{si } x\in[4,+\infty[\\ \sqrt{4-x}+2x-1 & \text{si } x\in]-\infty,4[\end{cases}$

On note ζ_g la courbe représentative de la fonction g.

a) Montrer que g est continue en 4 . b) Etudier la dérivabilité de g à droite et à gauche en 4

c) Répondre par **V**rai ou **F**aux en justifiant la réponse

i) g est dérivable en 4 , ii) ζ_g admet une demi tangente horizontale à droite en 4.

iii) ζ_g admet une demi tangente verticale dirigée vers le bas à gauche en 4.

<u>Exercice 4 :</u>Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$ on donne les points A,B et C tels que : $Z_A=2$; $Z_B=1+i\sqrt{3}$ et $Z_C=1-i\sqrt{3}$.

I. 1) Donner la forme trigonométrique de Z_B *et* Z_C. 2) Calculer Z_B^{2008} sous forme algébrique .

3) Déterminer la nature du quadrilatère OBAC. 4) Placer les points A, B et C.

5) Déterminer et construire l'ensemble suivant : $\zeta=\{M(Z)\in Ptelque:|z-2|=|z|\}$

II- Z tout point M du plan d'affixe $Z\neq Z_A$ on associe e point M' d'affixe $Z'=\dfrac{-4}{Z-2}$

1) a)Montrer que : $Z=Z'\Leftrightarrow(Z-1)^2+3=0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$:$(Z-1)^2+3=0$ .c) En déduire les points associe à B et C.

2) a)Montrer que$|Z'-2|=\dfrac{2|Z|}{|Z-2|}$.

b) On suppose que M$\in\zeta$. Montrer que M' appartient à un cercle δ dont on précisera le centre et le rayon

c) Soit D le point d'affixe $Z_D=\dfrac{Z_B^2}{Z_C}$ sans calculer Z_D montrer que les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre O .

d) Montrer que BC=CD, construire D

<u>Exercice N° 5 :</u>Soit f la fonction définie sur IR par$f(x)=2x^3-6x+4$. On désigne par(C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé$(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Dresser le tableau de variation de f

2) Montrer que le point$I(0;4)$ est un centre de symétrie pour la courbe(C_f).

3) Ecrire l'équation de la tangente T à (C_f) au point I.

4) Etudier la position relative de T et (C_f) 5) Construire T et (C_f)

6) Déterminer suivant le paramètre m le nombre de solutions de l'équation : $x^2-3=\dfrac{m-4}{2x}$

7) Soitαetβ deux réels de l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$avec$\alpha<\beta$, comparer : $f(\cos\alpha)$et$f(\cos\beta)$

8) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)=|2x+4|(x-1)^2$

a) Construire(C_g)à partie de(C_f) b) Dresser le tableau de variation de g

Devoir de contrôle n°3

Exercice 1 :

A) un sac contient : cinq boules rouges numérotée 0, 0, 1, 2,2
Trois boules blanches numérotée 0, 1, 2
Deux boules jaunes numérotée 0, 4

On tire simultanément trois boules de sac. Dénombrer les tirages dans chacun des cas suivants :

a) Obtenir trois boules de même couleur

b) Obtenir une seule boule jaune

c) La somme des trois numéros inscrits sur les boules tirées est égale à 5

d) Le produit des trois numéros obtenus est nul

B) 1)a) Vérifier que pour tout entier naturel k on a : $k(k!) = (k+1)! - k!$

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n on a : $1(1!)+2(2!)+3(3!)+\dots\dots+n(n!) = (n+1)!-1$

2) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $\dfrac{1+1(1!)+2(2!)+3(3!)+\dots\dots+n(n!)}{(n-1)!} = 12$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}/\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x+1}$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) On suppose que pour tout x de $\mathbb{R}/\{-1\}$ on a : $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x+1}$

a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. En déduire la valeur de a

b) Calculer $\lim\limits_{x\to(-1)} (x+1)f(x)$. En déduire la valeur de c

c) Calculer $f(0)$. En déduire la valeur de b

2)a) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x-3$ est une asymptote oblique de (C_f)

b) Etudier la position de (C_f) par rapport à Δ

3) Dresser le tableau de variation de f

4) Tracer (C_f) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

5) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}/\{-1\}$ par : $h(x) = \dfrac{f(x)-|f(x)|}{2}$

Tracer à partir de (C_f) et dans le même repère, la courbe de h

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin(2x)$

C_f désigne sa courbe représentative dans un repère orthogonale du plan.

1) Montrer que f est périodique et donner sa période

2)a) Dresser le tableau de variation de f sur $[0,\pi]$

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersections de C_f avec les axes de coordonnées dans $[0,\pi]$.

c) tracer C_f sur $[0,\pi]$ puis sur $[-\pi,2\pi]$

3) Utiliser la courbe obtenue, pour donner selon la valeur du paramètre réel m, le nombre de solutions de

l'équation $f(x)=m$ dans $[0,2\pi]$.

4) Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x+\frac{2\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\tan x}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{12}}\dfrac{2f(x)+1}{x+\frac{\pi}{12}}$

Exercice 4 :

A) Cocher la réponse exacte :

		A	B	C
1	On considère la fonction définie sue ℝ par : $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}x-4\right)$. Alors f est périodique et de période :	$\frac{\pi}{4}$	-4	8
2	Une urne contient 5 boules numérotées 1, 2, 3, 4 et 5. on tire successivement avec remise trois boules de l'urne. Le nombre de tirages possibles est :	60	10	125
3	La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n=\cos n$	Est majorée	N'est pas bornée	Est positive
4	La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n=-2\left(\frac{5}{6}\right)^n$	Est croissante	Est décroissante	N'est ni croissante, ni décroissante.
5	On lance simultanément deux pièces identiques non truqués. La probabilité d'obtenir pile ou face est égale à :	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

B) répondre par **Vrai** ou **Faux :**

I) Soit f une fonction définie sur un ensemble D et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Si $f(2a-x)=2b-f(x)$ alors le point $I(a,b)$ est un centre de symétrie de (C)

2) Si f est une fonction paire alors la courbe représentative de la fonction $x\mapsto f(1+x)$ admet un axe de symétrie

3) La représentation graphique de la fonction $x\mapsto f(|x|)$ par une translation de (C)

II)

1) Si une suite n'est pas bornée alors elle n'est pas majorée

2) Si une suite n'est pas décroissante, alors elle est croissante

3) Si une suite est géométrique, alors elle est monotone

4) f définie sur ℝ par $f(x)=2x+\cos x$ alors f est croissante sur IR

5) la fonction sinus et cosinus ont le même nombre dérivée en $\frac{3\pi}{4}$

Devoir de synthèse n3 exempele1 :

Exercice n°1 : Dans le tableau ci-dessous, la variable X désigne le nombre de jours après la naissance de nourrisson et la variable Y le poids en kilogrammes :

1) a) Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart type σ_X de la variable X.

b)Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart type σ_Y de la variable Y.

2) Représenter, dans un repère orthogonal, le nuage des points associés à la série (X , Y) ainsi le point moyen G.

3) a)Déterminer les coordonnées des points moyens G_1 du nuage des points $M_1(x_1,y_1);M_2(x_2,y_2)$ et $M_3(x_3,y_3)$ Déterminer les coordonnées du point moyen G_2 du nuage M_4,M_5,M_6 et M_7.

b) En déduire une équation de la droite d'ajustement linéaire D de Y en fonction de X.

4) Quelle pourrait la estimation du poids du nourrisson après 30 jours de sa naissance ?

Exercice 2 **:**Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{-x^2+2x+3}{x-2}$

1)a) Calculer $f(0)$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\mapsto2}(x-2).f(x)$

b) En déduire les réels a ; b et c tels que : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$; $\forall x\in D$

2) Montrer que le point $I(2,-2)$ est un centre de symétrie pour la courbe C_f

3) Montrer que la droite $\Delta : y=-x$ est une asymptote oblique à la courbe C_f

4) Dresser le tableau de variation de f

5) Tracer la courbe C_f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

6) On pose $g(x)=-|x|+\dfrac{3}{|x|-2}$ a) Etudier la parité de g . b) Tracer avec une autre couleur la courbe C_g

7) Soit la droite $D_k : y=k$ où $k\in\mathbb{R}$

a) Montrer que pour tout réel k ; la droite D_k coupe C_f en deux points M' et M''

b) Déterminer l'ensemble des points $I=M'*M''$ quand k varie

Exercice 3 **:**Une urne contient : $\begin{cases}\text{quatre jetons blancs numérotés :-2,-1 ;0 et 1}\\ \text{Trois jetons noirs numérotés : 0 ; 1 et1}\\ \text{Cinq verts numérotés : -1;-1;0 ; 1 et1}\end{cases}$

1) On tire simultanément et au hasard **4 jetons** de l'urne

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A « le tirage comporte trois couleurs »

B « les produits des numéros de quatre jetons tirés est strictement positif »

C « ils restent deux couleurs dans l'urne »

D « avoir un seul jeton noir et exactement deux jetons portant le numéros 1 »

2) On tire successivement et sans remise **3 jetons** de l'urne

a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E « avoir 3 jetons de couleur différents »

F « la somme des numéros tirés est égale à 2 » et $E\cap F$

b) En déduire la probabilité des événements : $E\cup F$ et E' « avoir au plus deux couleurs »

Exercice n°4: L'espace est muni d'un repère cartésien $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les points A(1 ;0 ;1), B(-1 ;-1 ;2) et C(2 ;3 ;-2) et la droite $\Delta:\begin{cases}x=1\\y=-2+2t\\z=-1+2t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

1) a) Donner un représentation paramétrique de la droite (BC).

b) Les droites Δ et (BC) sont elle coplanaires

2) a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

c) Vérifier que la droiteΔ coupe le plan (ABC) en un point que l'on précisera.

3) a) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan P passant par B et contient Δ est P : $x - y + z- 2 = 0$.

b) Donner un représentation paramétrique de la droite : $\Delta' = P\cap(ABC)$.

EXERCICE5 : Soit (U_n) la suite définie sur IN par $\begin{cases}U_0=\dfrac{1}{2}\\U_{n+1}=\dfrac{U_n}{2-U_n}\end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n\in$ IN On a : $0<U_n\leq\frac{1}{2}$

2) a) Montrer que pour tout $n\in$ IN On a : $U_{n+1}\leq\frac{2}{3}U_n$.

b) En déduire que (U_n) est décroissante

3) Montrer par récurrence que pour tout $n\in$ IN On a : $U_n\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n U_0$

4) Soit la suite (V_n) définie sur IN par $V_n=\frac{1}{U_n}-1$

a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique

b) Exprimer (U_n) en fonction de n.

5) Soit $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{U_k}$ .a) Exprimer S_n en fonction de n.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Devoir de synthèse n3 exempele2 :

Exercice n°1 : Dans l'espace rapporté a un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.on considère les points $A(1,0,0);B(0,0,1);C(1,1,1)$ et $D(1,0,1)$.

1)a) Calculer $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$.b) En déduire que A, B, C et D ne sont pas coplanaire.

2)a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) Déduire qu'une équation du plan (ABC) est : $-x+y-z+1=0$.

3)a) Déterminer l'aire du triangle ABC .b) Calculer le volume de tétraèdre . ABCD

Exercice n° 2: Le personnel d'un hôpital est réparti en quatre catégories les médecins, les infirmiers, les techniciens et les cadres administratifs. Le comité de cet hôpital est constitué de douze représentants : Quatre médecins dont 3 femmes et un homme, cinq infirmiers dont 2 femmes et 3 hommes et trois cardes dont 2 femmes et homme.

1) La direction de l'hôpital choisit au hasard trois représentants parmi les douze pour participer à un séminaire à l'étranger. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A : « les trois représentants choisis sont de même catégories », B : « les trois représentants choisis sont de même sexe », C : « les trois représentants choisis sont de même catégories ou de même sexe »,
D : « parmi les trois représentants choisis, il y a au moins un médecin»
et E : « par les trois représentants choisis, il y a un seul médecin et un seul homme».

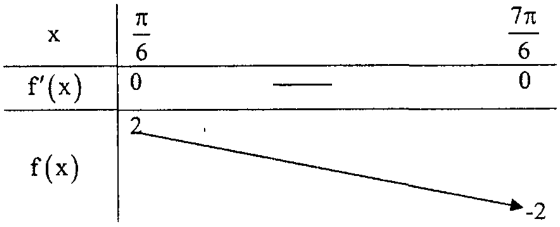
2) Lors d'un deuxième séminaire ; un représentant de la catégorie des infirmiers pris au hasard doit quitter le comité et deux femmes techniciennes rejoignent le comité. La direction de l'hôpital choisit au hasard trois représentants parmi ce nouveau comité. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
F : « l'infirmier qui a quitté le comité est un homme et les trois représentants choisis sont des femmes ».
et G : « les trois représentants choisis sont trois femmes ».

Exercice n°3 : Le tableau suivant donne le chiffre d'affaires (en milliers de dinars) du secteur d'emballage d'un pays entre les années 2003 et 2008. (Les résultats trouvés sont à 10^{-2} près).

	Partie (I)			Partie (II)		
Année	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année : X_i	1	2	3	4	5	6
Chiffres d'affaires : Y_i	9	13	16	19	23	3

1) a) Représenter le nuage des points de la série statistique (X,Y) dans un repère convenable choisit.
b) Déterminer les coordonnées du point moyen G de la série statistique (X,Y).
2) Calculer les écart-types de X et Y.
3) On a partagé la série statistique (X,Y)en deux parties (I) et (II).
a) Déterminer les points moyens G_1 et G_2 des deux parties (I) et (II) respectivement.
c) Donner une équation cartésienne de la droite (G_1G_2)
c) En supposant que l'évolution du chiffre d'affaires se poursuivre de la même façon les années suivantes. Donner une estimation du chiffre d'affaires du secteur de l'emballage en 2015.

Exercice n°4 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=a\cos(x)+b\sin(x)$ où a et b deux réels. Le tableau de variation de f sur $\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$



Soit ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan.

1) a) Déterminer $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Montrer alors que : $a=\sqrt{3}$ et $b=1$.

b) Vérifier que : $f(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

c) Calculer $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ puis en déduire les signes de f(x) pour tout $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$.

2) a) Montrer que la droite $\Delta : x=\frac{\pi}{6}$ est un axe de symétrie de ζ_f.

b) Montrer que l'étude de f se réduit à l'intervalle $I=\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$.

3) Tracer la partie ζ_0 de ζ_f dans l'intervalle $I=\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$.

4) Expliquer comment peut-on obtenir la courbe ζ_f à partir de ζ_0.

5) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}}{x-\frac{\pi}{3}}$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{2\pi}{3}\right)^+}\dfrac{\sin x}{f(x)}$.

Exercice N° 5 : Soit (U_n) la suite définie sur IN par $\begin{cases}U_0=1\\ U_{n+1}=\dfrac{3U_n}{6U_n+1}\end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $n\in IN$ On a : $\frac{1}{3}<U_n\leq 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

2) Soit pour tout $n\in IN$; $V_n=\dfrac{-1+3U_n}{U_n}$.

a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

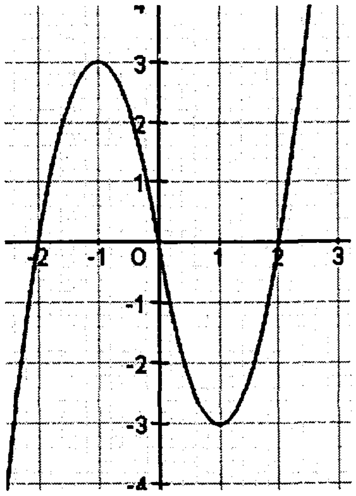
c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

3) Soit $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{U_k}$.

a) Exprimer (S_n) en fonction de n

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

SOLUTIONS



EXERCICE 1 : 1) On utilise le fait que l'origine du repère est un centre de symétrie de (ζ_f)

2) a) La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0;1]$, elle est croissante sur l'intervalle $[1;2]$.

b) Les solutions de l'inéquation $f(x)\leq 0$ sont les abscisses des points de (ζ_f) situés sur ou au dessus de l'axe des abscisses, par conséquent $S=]-\infty;-2]\cup[0;2]$

3) a) La fonction g est définie sur IR , pour tout réel x de IR; $-x\in$ IR

et on a : $g(-x)=(f(-x))^2=(-f(x))^2=(f(x))^2=g(x)$ par suite la fonction g est paire.

b) a et b deux réels de $]-\infty;-2]$; si

$a\leq b$ alors $f(a)\leq f(b)$ car f est croissante sur $]-\infty;-2]$, de plus $f(a)$ et $f(b)$ sont négatifs alors

$(f(a))^2\geq(f(b))^2$ c'est-à-dire $g(a)\geq g(b)$ ce qui prouve que la fonction g est décroissante sur $]-\infty;-2]$.

c) Remarquons d'abord que pour tous réels a et b de $[-2;0]$, $f(a)$ et $f(b)$ sont positifs

* pour a et b dans $[-2;-1]$, si $a\leq b$ alors $f(a)\leq f(b)$. De l'hypothèse $f(a)$ et $f(b)$ sont positifs,on déduit que $g(a)\leq g(b)$ ce qui prouve que g est croissante sur $[-2;-1]$

* pour a et b dans $[-1;0]$, si $a\leq b$ alors $f(a)\geq f(b)$. De l'hypothèse $f(a)$ et $f(b)$ sont positifs, on déduit que $g(a)\geq g(b)$ ce qui prouve que g est décroissante sur $[-1;0]$

EXERCICE 2 : 1) La fonction f est définie sur IR^*, pour tout réel x de IR^*; $-x\in IR^*$ et $f(-x)=-x+\frac{4}{-x}=-f(x)$ et par suite f est une fonction impaire.

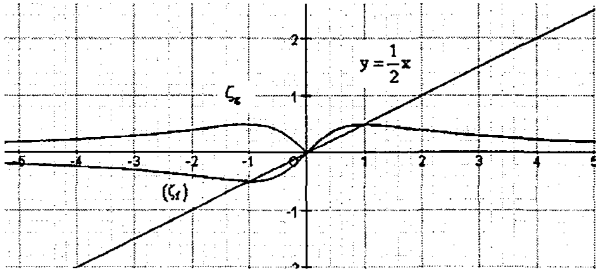
2) a) Pour tout x de IR_+^* ; $g(x)-4=x+\frac{4}{x}-4=\frac{x^2-4x+4}{x}=\frac{(x-2)^2}{x}\geq 0$ ainsi pour tout x de IR_+^*; $g(x)\geq 4$ et par suite 4 est un minorant de g sur IR_+^*.

b) de l'égalité $g(x)-4=\frac{(x-2)^2}{x}$ on déduit que $g(x)=4$ pour $x=2$ ainsi pour tout x de IR_+^* ;

$g(x)\geq g(2)$ ce qui donne que 4 est un minimum de g sur IR_+^*.

3) La fonction f étant impaire, Soit $x\in IR_-^*$; $f(x)=-f(-x)$ et comme $-x\in IR_+^*$ alors $f(-x)\geq f(2)$ donc $f(x)\leq -f(2)$ ou encore $f(x)\leq f(-2)$ ce qui prouve que la restriction de f sur IR_-^* admet un maximum en (-2) égal à (-4)

EXERCICE 3 : 1) f est impaire alors l'origine du repère est un centre de symétrie de (ζ_f).



2) Pour tout réel x ; $-0.5\leq f(x)\leq 0.5$ et par suite tout réel $x\geq 0.5$ est un majorant de f sur IR et tout réel $x\leq -0.5$ est un minorant de f sur IR.

3) a) $S_{IR}=\{-1;1\}$;

b) $S_{IR}=[-1;0]\cup[1;+\infty[$

4) a) voir figure

b) 0.5 est un majorant de g et $0.5=g(1)=g(-1)$ et par suite g atteint son maximum et 1 et en (-1).

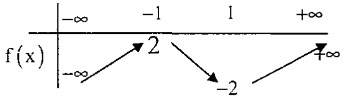
EXERCICE 4 : 1) Pour tout réel x on a : $f(x)-(-2)=x^2-4x+1=(x-2)^2\geq 0$ ce qui prouve que $f(x)\geq(-2)$ pour tout x ; on en déduit que (-2) est un minorant de f sur IR. De plus $f(1)=-2$ et par suite f admet sur IR un minimum en 1 de valeur (-2).

2) a) Pour tout réel x; $g(x)-2=-x^2-4x-2=-\left[(x+2)^2-2\right]<0$ ce qui prouve que $g(x)<2$ pour tout réel x et par suite 2 est un majorant de g sur IR.

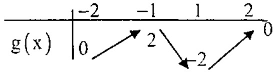
b) De l'égalité $g(x)-2=-\left[(x+2)^2-2\right]<0$ on en déduit qu'il n'existe pas un réel a tel que $g(a)=2$ et par suite 2 n'est pas un maximum de g sur IR.

EXERCICE 5 : 1) L'origine du repère est un centre de symétrie de ζ_f d'où ζ_f représente une fonction impaire définie sur IR.

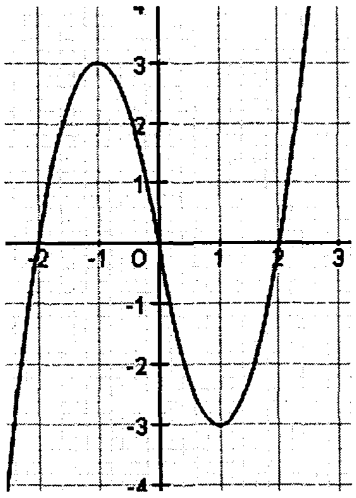
2) voir figure



3) a) voir figure



SOLUTIONS



EXERCICE 1 : 1) On utilise le fait que l'origine du repère est un centre de symétrie de (ζ_f)

2) a) La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0;1]$, elle est croissante sur l'intervalle $[1;2]$.

b) Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$ sont les abscisses des points de (ζ_f) situés sur ou au dessus de l'axe des abscisses, par conséquent $S =]-\infty;-2] \cup [0;2]$

3) a) La fonction g est définie sur IR , pour tout réel x de $IR; -x \in IR$

et on a : $g(-x) = (f(-x))^2 = (-f(x))^2 = (f(x))^2 = g(x)$ par suite la fonction g est paire.

b) a et b deux réels de $]-\infty;-2]$; si

$a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$ car f est croissante sur $]-\infty;-2]$, de plus $f(a)$ et $f(b)$ sont négatifs alors

$(f(a))^2 \geq (f(b))^2$ c'est-à-dire $g(a) \geq g(b)$ ce qui prouve que la fonction g est décroissante sur $]-\infty;-2]$.

c) Remarquons d'abord que pour tous réels a et b de $[-2;0]$, $f(a)$ et $f(b)$ *sont positifs*

* pour a et b dans $[-2;-1]$, si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$. De l'hypothèse $f(a)$ et $f(b)$ sont positifs,on déduit que $g(a) \leq g(b)$ ce qui prouve que g est croissante sur $[-2;-1]$

* pour a et b dans $[-1;0]$, si $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$. De l'hypothèse $f(a)$ et $f(b)$ sont positifs, on déduit que $g(a) \geq g(b)$ ce qui prouve que g est décroissante sur $[-1;0]$

EXERCICE 2 : 1) La fonction f est définie sur IR^*, pour tout réel x de $IR^*; -x \in IR^*$ et $f(-x) = -x + \frac{4}{-x} = -f(x)$ et par suite f est une fonction impaire.

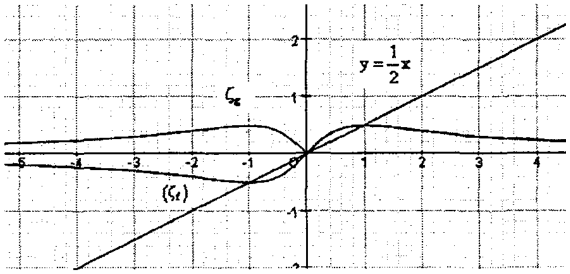
2) a) Pour tout x de IR_+^* ; $g(x) - 4 = x + \frac{4}{x} - 4 = \frac{x^2-4x+4}{x} = \frac{(x-2)^2}{x} \geq 0$ ainsi pour tout x de $IR_+^*; g(x) \geq 4$ et par suite 4 est un minorant de g sur IR_+^*.

b) de l'égalité $g(x) - 4 = \frac{(x-2)^2}{x}$ on déduit que $g(x) = 4$ pour $x = 2$ ainsi pour tout x de IR_+^* ;

$g(x) \geq g(2)$ ce qui donne que 4 est un minimum de g sur IR_+^*.

3) La fonction f étant impaire, Soit $x \in IR_-^*$; $f(x) = -f(-x)$ et comme $-x \in IR_+^*$ alors $f(-x) \geq f(2)$ donc $f(x) \leq -f(2)$ ou encore $f(x) \leq f(-2)$ ce qui prouve que la restriction de f sur IR_-^* admet un maximum *en (-2) égal à (-4)*

EXERCICE 3 : 1) f est impaire alors l'origine du repère est un centre de symétrie de (ζ_f).



2) Pour tout réel x ;

$-0.5 \leq f(x) \leq 0.5$ et par suite tout réel $x \geq 0.5$ est un majorant de f sur IR et tout réel $x \leq -0.5$ est un minorant de f sur IR.

3) a) $S_{IR} = \{-1;1\}$;

b) $S_{IR} = [-1;0] \cup [1;+\infty[$

4) a) voir figure

b) 0.5 est un majorant de g et $0.5 = g(1) = g(-1)$ et par suite g atteint son maximum et 1 et en (-1).

EXERCICE 4 : 1) Pour tout réel x on a : $f(x) - (-2) = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 \geq 0$ ce qui prouve que $f(x) \geq (-2)$ pour tout x ; on en déduit que (-2) est un minorant de f sur IR. De plus $f(1) = -2$ e par suite f admet sur IR un minimum en 1 de valeur (-2).

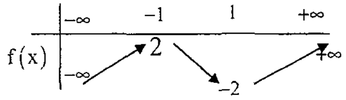
2) a) Pour tout réel x; $g(x) - 2 = -x^2 - 4x - 2 = -\left[(x+2)^2 - 2\right] < 0$ ce qui prouve que $g(x) < 2$ pour tout réel x et par suite 2 est un majorant de g sur IR.

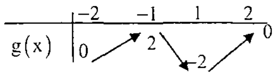
b) De l'égalité $g(x) - 2 = -\left[(x+2)^2 - 2\right] < 0$ on en déduit qu'il n'existe pas un réel a tel que $g(a) = 2$ et par suite 2 n'est pas un maximum de g sur IR.

EXERCICE 5 : 1) L'origine du repère est un centre de symétrie de ζ_f d'où ζ_f représente une fonction impaire définie sur IR.

2) voir figure

3) a) voir figure





b) On a $g(-1)=2$ et pour tout $x\in[-2;2]$; $g(x)\leq 2$ donc $g(-1)=2$ est la valeur maximale de g sur $[-2;2]$; 2 et 3 sont deux majorants de g.

c) On a $g(1)=-2$ et pour tout $x\in[-2;2]$; $g(x)\geq -2$ donc $g(1)=-2$ est la valeur minimale de g sur $[-2;2]$; -2 et -4 sont deux minorants de g.

d) g est bornée car $-2\leq g(x)\leq 2$ pour tout $x\in[-2;2]$.

4) Les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont les abscisses des points de ζ_f d'ordonnée 0 d'où $S_{IR}\{-2;0;2\}$

Exercice N° 6 : 1)pour tout $x\in[-2\ ,\ 1]$, f est décroissante $\Leftrightarrow x\leq 1 \Rightarrow f(x)\geq f(1)$
pour tout $x\in[1\ ,\ 9]$, f est croissante $\Leftrightarrow x\geq 1 \Rightarrow f(x)\geq f(1)$ on peut donc conclure que pour tout $x\in[-2\ ,\ 9]$, $f(x)\geq f(1)$. Ainsi $f(1)$ la valeur minimale de f.
2)Soit a , b deux éléments de $[-2\ ,\ 1]$ tel que $a<b \Leftrightarrow f(a)\geq f(b)$ car f est décroissante sur $[-2\ ,\ 1] \Rightarrow -2f(a)\leq -2f(b) \Rightarrow g(a)\leq g(b)$ donc g est croissante sur $[-2\ ,\ 1]$
Soit a , b deux éléments de $[1\ ,\ 9]$ tel que $a<b \Leftrightarrow f(a)\leq f(b)$ car f est croissante sur $[1\ ,\ 9] \Rightarrow -2f(a)\geq -2f(b) \Rightarrow g(a)\geq g(b)$ donc g est décroissante sur $[1\ ,\ 9]$
D'où le tableau de variation de g :

x	-2		1		9
$g(x)$		↗		↘	

Exercice7 : 1) -1 est le minimum de f sur $[-3,4]$, f(2) est le minimum de f sur $[1,2]$;
2)a) f est continue sur $[1,4]$ et $f(1)f(4)=-5<0$ d'après théorème des valeurs intermédiaire f(x)=0 admet une unique solution α dans $[1,4]$;
b) si $x\in[-3,\alpha]$, $f(x)\leq 0$, ζ_f est au dessus de l'axe des abscisses et si $x\in[\alpha,4]$, $f(x)\leq 0$, ζ_f au dessous de l'axe des abs susses.
3/ $x\in[-3,4]$, $-1\leq f(x)\leq 5 \Rightarrow -2\leq 2f(x)\leq 10 \Rightarrow -10\leq -2f(x)\leq -2 \Rightarrow 1\leq 11-2f(x)\leq 9$
$\Rightarrow 11-2f(x)>0$ donc f est définie sur $[-3,4]$

Exercice N° 8:

1) a)Il faut que $-x^4+4x^2\neq 0 \Leftrightarrow x^2(-x^2+4)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\neq 0 \\ ou \\ -x^2+4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ ou \\ x\neq 2\ \ ou\ \ x\neq -2 \end{cases}$

$D_f=IR/\{-2\ ,\ 0\ ,\ 2\}$

b) Soit $x\in IR/\{-2\ ,\ 0\ ,\ 2\}$. Si $x\neq 0$ alors $-x\neq 0, x\neq -2$ *alors* $-x\neq 2$ $x\neq 2$ *alors* $x\neq -2$

$\Leftrightarrow -x\in D_f$; $f(-x)=\dfrac{(-x)^4-4(-x)^2+3}{-(-x)^4+4(-x)^2}=\dfrac{x^4-4x^2+3}{-x^4+4x^2}=f(x)$. Donc f est paire.

2) a) Soit $x\in IR/\{-2\ ,\ 0\ ,\ 2\}$,

$$f(x)=\frac{x^4-4x^2}{-(x^4-4x^2)}+\frac{3}{-(x^2)^2+2\times 2x^2+4-4}=-1+\frac{3}{-((x^2)^2-2\times 2x^2+4)+4}=-1+\frac{3}{4-(x^2-2)^2}$$

b) Si $x\in\left]0,\sqrt{2}\right[$ alors $x^2\in]0\ ,\ 2[$,

$0<x^2<2 \Leftrightarrow -2<x^2-2<4 \Leftrightarrow 0<(x^2-2)^2<4 \Leftrightarrow -4<-(x^2-2)^2<0 \Leftrightarrow 0<4-(x^2-2)^2<4$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}<\frac{1}{4-(x^2-2)^2} \Leftrightarrow \frac{3}{4}<\frac{3}{4-(x^2-2)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{4}<\frac{3}{4-(x^2-2)^2}-1$. Donc f est minorée par $-\frac{1}{4}$

c) On a $\forall x\in\left]\frac{1}{2},\sqrt{2}\right[$; $f(x)\geq 0$. Or $f(1)=0 \Rightarrow 0$ est un minimum de f sur $\left]\frac{1}{2},\sqrt{2}\right[$, il est atteint en 1.

Exercice N° 9: 1) $x\in IR \Rightarrow -x\in IR$, $f(-x)=\dfrac{-2x}{(-x)^2+3}=-\dfrac{2x}{x^2+3}=-f(x)$ Donc f est impaire.

2) $f(x)-\dfrac{2}{3}=\dfrac{2x}{x^2+3}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{2x}{x^2+3}-\dfrac{2(x^2+3)}{3(x^2+3)}=\dfrac{6x-2x^2-6}{3(x^2+3)}=\dfrac{-2(x^2-3x+3)}{3(x^2+3)}$

$x^2-3x+3=0$, $\Delta=9-12=-3<0$ donc $x^2-3x+3\geq 0 \Rightarrow -2(x^2-3x+3)\leq 0$

$\Leftrightarrow f(x)-\frac{2}{3}\leq 0 \Leftrightarrow f(x)\leq\frac{2}{3}$ (*). On a $\forall\ x\geq 0$, $\frac{2x}{x^2+3}\geq 0$ (**) et par suite $0\leq f(x)\leq\frac{2}{3}$.

3) Soit $x\in IR_-$ *alors* $-x\in IR_+$ D'après 2) On a $0\leq f(-x)\leq\frac{2}{3}$ puisque f est impaire alors $f(-x)=-f(x)$ ce qui donne que : $0\leq -f(x)\leq\frac{2}{3}$ et par suite $-\frac{2}{3}\leq f(x)\leq 0$ enfin $-\frac{2}{3}\leq f(x)\leq\frac{2}{3}$. *pour tout* $x\in\mathbb{R}$ on dit que f est bornée sur IR.

Exercice N° 10 :

$$f(x)=\frac{-4x^2+16x-17}{x^2-4x+5}=\frac{-4(x^2-4x+4-4)-17}{x^2-4x+5}=\frac{-4(x-2)^2+16-17}{(x-2)^2+1}=\frac{-4(x-2)^2-1}{(x-2)^2+1}$$

$=\dfrac{-4[(x-2)^2+1-1]-1}{(x-2)^2+1}=\dfrac{-4[(x-2)^2+1]+3}{(x-2)^2+1}=-4+\dfrac{3}{(x-2)^2+1}$. $f(x)$ est maximale équivaut

$\dfrac{3}{(x-2)^2+1}$ est maximale $\Leftrightarrow (x-2)^2+1$ est minimale $\Leftrightarrow x-2=0$ car $(x-2)^2\geq 0 \Leftrightarrow x=2$ donc $f(x)$ est maximale pour $x=2$.

Exercice N° 11: 1) $D_f=IR^*$.

2) Soit $x\in IR_+^*$, $f(2)=12$, $f(x)-f(2)=x^2+\dfrac{16}{x}-12=\dfrac{x^3-12x+16}{x}$.

Soit le polynôme $P(x)=x^3-12x+16$. 2 est une racine de P donc $P(x)$ est factorisable par $x-2$,
$P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$.

Par identification On a : $\begin{cases} a=1 \\ b-2a=0 \\ c-2b=-12 \\ -2c=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=-8 \end{cases}$ Alors $P(x)=(x-2)(x^2+2x-8)$ ainsi

$f(x)-f(2)=\dfrac{(x-2)(x^2+2x-8)}{x}=\dfrac{(x-2)^2(x+4)}{x}\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq f(2)\ \ \forall\, x\in IR_+^*$ et par suite $f(2)$ est la valeur minimale de f sur IR_+^*.

B) 1) $V=x^2h$

2) Les 4 faces sont des rectangles de longueur x et de hauteur h. L'aire des 4 faces est $4xh$, l'aire de base est x^2 enfin $A=x^2+4xh$ or $V=400l=4m^3$, $V=x^2h=4 \Leftrightarrow h=\dfrac{4}{x^2}$ ce qui donne

$A=x^2+\dfrac{16}{x}$. 3) D'après (A) l'aire est minimale lorsque $x=2$ et comme $h=\dfrac{4}{x^2} \Rightarrow h=1$.

Exercice N° 12 : $f(2,2)=f(1+1,1+1)=f(1,f(2,1))$, $f(2,1)=f(1+1,0+1)=f(1,f(2,0))$

$f(2,0)=f(2-1,1)=f(1,1)=f(0+1,0+1)=f(0,f(1,0))=f(1,0)+1=f(0,1)+1=1+1+1=3$

$\Rightarrow f(2,1)=f(1;f(2,0))=f(0+1,3)=f(0,f(1,2))\ =f(0+1,2)+1=f(f(1,1))+1$

$=f(0,3)+1=3+1+1=5$

$\Rightarrow f(2,2)=f(1,f(2,1))=f(1,5)=f(0,f(1,4))=f(1,4)+1=f(0,f(1,3))+1$

$=f(1,3)+1+1=f(0,f(1,2))+2=f(1,2)+1+2=f(0,f(1,1))+3=f(1,1)+1+3=3+4=7$

Enfin $f(2,2)=7$.

Exercice 13 : $\begin{cases} -x^2+f(x)+xf(-x)=0 \\ -x^2+f(-x)-xf(x)=0 \end{cases} \Rightarrow -x^2+f(x)+xf(-x)-\left[-x^2+f(-x)-xf(x)\right]=0$

$\Leftrightarrow f(x)+xf(-x)-f(-x)+xf(x)=(1+x)f(x)-(1-x)f(-x)=0$,

pour $x=1$; $(1+1)f(1)=(1-1)f(-1) \Leftrightarrow f(1)=0$,et par suite pour

$x\neq 1$, $f(-x)=\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)f(x)$, or $-x^2+f(x)+xf(-x)=0 \Leftrightarrow -x^2+f(x)+x\left[\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)f(x)\right]=0$

$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^2(1-x)}{1+x^2}$.

Ainsi $\begin{cases} f(1)=0 \\ f(x)=\dfrac{x^2(1-x)}{1+x^2} \quad pour\ \ x\neq 1 \end{cases}$ et comme $\dfrac{1^2(1-1)}{1+1^2}=0$ enfin $f(x)=\dfrac{x^2(1-x)}{1+x^2}\quad \forall x\in IR$

Exercice 14 : 1) On prend $\mathrm{f(x)=3-\sqrt{x-2}}$, on a : $\mathrm{f(3)=2}$ et $\mathrm{f(2)=3}$.

2) Supposons

que : $\mathrm{a-7=\sqrt{b+4}}$ et $\mathrm{a-4=\sqrt{b+7} \Rightarrow (a-4)^2-(a-7)^2=(b+7)-(b+4) \Leftrightarrow 3(2a-11)=3}$

Donc, c'est la seule valeur possible de a, or elle ne convient pas, puisqu'on aurait : $\mathrm{\sqrt{b+4}=a-7=-1}$.
Ainsi 4 et 7 ne sont pas échangeables.
3) Soient deux entiers *distincts, disons* $\mathrm{n<m}$.

Alors : $\begin{cases} \mathrm{a-n=\sqrt{b+m}} \\ \mathrm{a-m=\sqrt{b+n}} \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{(i)}\begin{cases} \mathrm{(a-n)^2=b+m} \\ \mathrm{(a-m)^2=b+n} \end{cases}$ et $\mathrm{(ii)}\begin{cases} \mathrm{a-n\geq 0} \\ \mathrm{a-m\geq 0} \end{cases}$ ce qui revient à dire : $\mathrm{a\geq m}$. On a

$\mathrm{(i)} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{(a-n)^2=b+m} \\ \mathrm{(a-m)^2-(a-n)^2=b+n-(b+m)} \end{cases}$; soit encore $\begin{cases} \mathrm{b=(a-n)^2-m} \\ \mathrm{(n-m)(2a-m-n)^2=n-m} \end{cases}$; la deuxième équation donne : $\mathrm{a=\dfrac{m+n+1}{2}}$. En n'oublie pas la condition (ii), on a donc démontrer que la fonction f échange n et m st et seulement si $\left\{\mathrm{a=\dfrac{m+n+1}{2}, b=(a-n)^2-m}\right\}$. Observons que par ailleurs : $\mathrm{n+1\leq m}$ puisqu'il s'agit d'entiers. D'où : $\mathrm{n+1=m}$.

Conclusion : Deux entiers sont échangeables si et seulement si ces entiers sont consécutifs ; nos calculs montrent qu'alors une et seule fonction f réalise l'échange : $\mathrm{f(x)=n+1-\sqrt{x-m}}$

Exercice N° 15 : $S_n\left(\left(x_i^2-x_i\right)^2\right)=S_n\left[\left(x_i^4-2x_i^3+x_i^2\right)\right]\ =S_n\left(S_4-2S_3+S_2\right)=0$ car $S_2=S_3=S_4$.

$S_n\left(\left(x_i^2-x_i\right)^2\right)=\left(x_1^2-x_1\right)^2+\left(x_2^2-x_2\right)^2+.......+\left(x_n^2-x_n\right)^2=0$. Comme $\forall i\in\{1;2;.....;n\}\ \left(x_i^2-x_i\right)^2\geq 0$ on déduit que $\forall i\in\{1;2;.....;n\}\ x_i^2-x_i=0 \Leftrightarrow x_i(x_i-1)=0 \Leftrightarrow x_i=0\ \ ou\ \ x_i=1$.

Exercice N° 16:1) $\forall x\in[0\,;1]$; $x(1-x)\geq 0$ et $\dfrac{1}{4}-x(1-x)=\dfrac{1}{4}\left(1-4x+4x^2\right)\ =\dfrac{1}{4}(1-2x)^2\geq 0$.

2) On pose $\alpha=a(1-b)$; $\beta=b(1-c)\ \ et\ \ \varphi=c(1-a)$. $\alpha\beta\varphi=\left[a(1-b)\right]\left[b(1-c)\right]\left[(1-a)\right]$,

On a $0\leq\alpha\beta\varphi\leq\left(\dfrac{1}{4}\right)^3$ (*). Raisonnons par l'absurde, $\min(\alpha,\beta,\varphi)>\dfrac{1}{4}\Rightarrow\alpha>\dfrac{1}{4},\beta>\dfrac{1}{4},\varphi>\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow(\alpha\times\beta\times\varphi)^3>\left(\dfrac{1}{4}\right)^3$. Suivant (*)

on conclut que $\min\ (\alpha,\beta,\varphi)\leq\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \min\left[a(1-b)\ ,b(1-c)\ ,c(1-a)\right]\leq\dfrac{1}{4}$.

Exercice N° 17: Soit $(f\,,g)$convenant_Si $x=y=1$, on a $\left[f(1)\right]^{g(1)}+\left[f(1)\right]^{g(1)}=1+1=2$, comme $f(1)\in IN^*$ et $g(1)\in IN^*$ alors $f(1)=g(1)=1$ (*).

Si $x=2$, $y=1$, on a $\left[f(2)\right]^{g(1)}+\left[f(1)\right]^{g(2)}=2+1=3$ or d'après (*) $f(1)=1$ et comme $g(2)\in IN^*\ \ et\ \ f(2)=2$ avec $x\in IN^*\ et\ y=1$ on a $\left[f(x)\right]^{g(1)}+\left[f(1)\right]^{g(x)}=x+1$ or $f(1)=1\ \ et\ \ g(x)\in IN^*$ donc $f(x)=x$ avec $x=y\geq 2$ on a $\left[f(x)\right]^{g(y)}+\left[f(y)\right]^{g(x)}=x+y$

$\Leftrightarrow x^{g(y)}+y^{g(x)}=x+y$ car $f(x)=x\ \ \forall x\in IN^*$ et $f(y)=y\ \ \forall y\in IN^*$ donc $g(x)=1$

Donc (f,g) sont des éléments de : $\begin{cases} f:IN^*\to IN^* & g:IN^*\to IN^* \\ \quad x\mapsto x & \quad x\mapsto 1 \end{cases}$

Réciproquement, $x^1+y^1=x+y$.

Conclusion : $(f\ ,\ g)=\begin{cases} f:IN^*\to IN^* & g:IN^*\to IN^* \\ \quad x\mapsto x & \quad x\mapsto 1 \end{cases}$

Exercice N°1: 1) $\lim_{x\to+\infty} x^4-x-1=\lim_{x\to+\infty} x^4=+\infty$, 2) $\lim_{x\to-\infty} -3x^3+x=\lim_{x\to-\infty} -3x^3=+\infty$,

3) On a $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-1}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x}=3$ donc $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{3x-1}{x+1}}=\sqrt{3}$.

4) On a $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}=+\infty$

5) On a $\lim_{x\to+\infty} 2x=+\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ Donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}+\sqrt{2x}=+\infty$.

6) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{(x+1)^5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{x^5}=0$, 7) On a $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}-1}=0$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

donc $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}-1}+x^2=+\infty$; 8) $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3+5x}{x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3}{x}=+\infty$,

Exercice N° 2 : 1) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$, $D_f=IR^*=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$.

$\lim_{x\to0}(x^2+1)=1$ *et* $\lim_{x\to0^-} x=0^-$ donc $\lim_{x\to0^-} f(x)=-\infty$. $\lim_{x\to0^+} x=0^+$ *Donc* $\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

2) $f(x)=\frac{x+1}{x-3}$, $D_f=IR/\{3\}=]-\infty,3[\cup]3,+\infty[$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1$. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$

et $\lim_{x\to3}(x-3)=0$, deux cas à étudier

x	$-\infty$	$\underline{3^-}$	3	$\underline{3^+}$	$+\infty$
$x-3$	$-$		○	$+$	

On a $\lim_{x\to3}(x+1)=4$ *et* $\lim_{x\to3^+}(x-3)=0^+$, donc $\lim_{x\to3^+} f(x)=+\infty$,on a $\lim_{x\to3^-}(x-3)=0^-$, donc $\lim_{x\to3^-} f(x)=-\infty$

3) $f(x)=\frac{1+2x}{1-3x}$, $D_f=IR/\frac{1}{3}=\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[\cup\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-3x}=-\frac{2}{3}$,

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{-3x}=-\frac{2}{3}$, $\lim_{x\to\frac{1}{3}}(1+2x)=\frac{5}{3}$ *et* $\lim_{x\to\frac{1}{3}}(1-3x)=0$., on a deux cas :

x	$-\infty$	$\underline{\left(\frac{1}{3}\right)^-}$	$\frac{1}{3}$	$\underline{\left(\frac{1}{3}\right)^+}$	$+\infty$
$1-3x$	$+$		○	-	

$\lim_{x\to\frac{1}{3}^-}(1-3x)=0^+$ *Donc* $\lim_{x\to\frac{1}{3}^-} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to\frac{1}{3}^+}(1-3x)=0^-$ *Donc* $\lim_{x\to\frac{1}{3}^+} f(x)=-\infty$

4) $f(x)=\frac{x-6}{(2x-1)^2}$. $D_f=IR/\left\{\frac{1}{2}\right\}=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{4x^2}=0$ de même

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. on a $\lim_{x\to\frac{1}{2}}(2x-1)^2=0^+$ *car* $(2x-1)^2\geq0$ et $\lim_{x\to\frac{1}{2}}(x-6)=-\frac{11}{2}$ ce ci donne

$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{(2x-1)^2}=+\infty$ donc $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=-\infty$

5) $f(x)=\frac{1+3|x|}{1-|x|}$

il faut que : $1-|x|\neq0 \Leftrightarrow x\neq1$ *ou* $x\neq-1$ *donc* $D_f=IR/\{-1\,;1\}=]-\infty,-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

x	$-\infty$	-1	0	1 $+\infty$
$f(x)$	$\frac{1-3x}{1+x}$	$\frac{1+3x}{1+x}$	$\frac{1+3x}{1-x}$	$\frac{1+3x}{1-x}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-3x}{1+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{3}=-3$, $\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1-3x}{1+x}=\frac{4}{0^+}=+\infty$

$\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)}\frac{1-3x}{1+x}=\frac{4}{0^-}=-\infty$, $\lim_{x\to(1)^+} f(x)=\lim_{x\to(1)^+}\frac{1+3x}{1-x}=\frac{4}{0^-}=-\infty$

6) $f(x)=\sqrt{x+5}-\sqrt{x}$, $D_f=\{x\in IR \text{ tel que } x+5\geq0 \text{ et } x\geq0\}=[0\,;+\infty[$

Pour tout $x\in[0\,,+\infty[$ $f(x)=\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+5}-\sqrt{x})(\sqrt{x+5}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}=\frac{5}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}$

On a $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+5}=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ il résulte $x\mapsto+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}=0$ Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

7) $f(x)=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$; $D_f=[-1;1]$; $\lim_{x\to-1^+} f(x)=0$; $\lim_{x\to-1^-} f(x)=0$

Exercice N°3 : a) $D_f=IR$;b) $\lim_{x\to1^-} f(x)=-2$; $\lim_{x\to1^+} f(x)=2$ .c) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

Exercice N°4 : 1) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}$. f est bien définie si et seulement si $3-x^2>0$,

$3-x^2=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{3}$ *ou* $x=\sqrt{3}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$ $+\infty$
$3-x^2$	-	○ +	○ -

Donc $D_f=\left]-\sqrt{3}\,,\sqrt{3}\right[$

On a $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{3})^+} 3-x^2=0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x\to(-\sqrt{3})^+} \sqrt{3-x^2}=0^+$ cela donne que $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{3})^+} \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}=+\infty$

Aussi On a $\lim\limits_{x\to(\sqrt{3})} 3-x^2=0^+$ cela donne que $\lim\limits_{x\to(\sqrt{3})} \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}=+\infty$.

2) $f(x)=\sqrt{\frac{1-x^3}{1+x^3}}$, $D_f=\left\{x\in IR/\frac{1-x^3}{1+x^3}\geq 0 \text{ et } 1+x^3\neq 0\right\}$. $1+x^3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$

* $1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)$, $x^2+x+1=0$, $\Delta=-3<0$, *Donc* $x^2+x+1>0$

*$1+x^3=(1+x)(x^2-x+1)$, $x^2-x+1=0$, $\Delta=-1<0 \Rightarrow x^2-x+1>0, \frac{1-x^3}{1+x^3}=\frac{(1-x)(x^2+x+1)}{(1+x)(x^2-x+1)}$

-1 1

x	$-\infty$		$+\infty$
$1-x$	$+$	$+$ 0	$-$
$1+x$	$-$	0 $+$	$+$
$\frac{1-x}{1+x}$	$-$ ‖	$+$	$-$

$D_f=]-1,1[$; $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\sqrt{\frac{(1-x)(x^2+x+1)}{(1+x)(x^2-x+1)}}$

$\lim\limits_{x\to-1^+}(1-x)(x^2+x+1)=2$ $^{(1)}$ *et* $\lim\limits_{x\to-1^+}(1+x)(x^2-x+1)=0^+$ $^{(2)}$

$^{(1)}$ *et* $^{(2)}$ donnent : $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{1-x^3}{1+x^3}=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-1^+}\sqrt{\frac{1-x^3}{1+x^3}}=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^+}\left|2+\frac{x-1}{\sqrt{3x-1}}\right|$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^+}(x-1)=-\frac{2}{3}$, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^+}\frac{1}{\sqrt{3x-1}}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^+}\left(2+\frac{x-1}{\sqrt{3x-1}}\right)=2+\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^+}\frac{x-1}{\sqrt{3x-1}}=2-\infty=-\infty$ il résulte que $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^+}\left|2+\frac{x-1}{\sqrt{3x-1}}\right|=+\infty$

4) $f(x)=\left|\frac{1-2x}{x^2-3}\right|$, $D_f=\mathbb{R}-\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-2x}{x^2-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{1-2x}{x^2-3}\right|=0$ de même $\lim\limits_{x\to-\infty}\left|\frac{1-2x}{x^2-3}\right|=0$

$\lim\limits_{x\to(-\sqrt{3})^-}\left(\frac{1-2x}{x^2-3}\right)=\frac{1+2\sqrt{3}}{0^-}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}^+}\left(\frac{1-2x}{x^2-3}\right)=\frac{1+2\sqrt{3}}{0^+}=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\sqrt{3}^+}\left|\frac{1-2x}{x^2-3}\right|=+\infty$

$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}^-}\left(\frac{1-2x}{x^2-3}\right)=\frac{1-2\sqrt{3}}{0^-}=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sqrt{3}^-}\left|\frac{1-2x}{x^2-3}\right|=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}^+}\left(\frac{1-2x}{x^2-3}\right)=\frac{1-2\sqrt{3}}{0^+}=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sqrt{3}^+}\left|\frac{1-2x}{x^2-3}\right|=+\infty$

<u>ExerciceN°5:</u> $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x-2)}{x^2-1}=\frac{x-2}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x-2}{x+1}$

Si $x>-1$ *alors* $x+1>0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$,Si $x<-1$ *alors* $x+1<0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$

<u>Exercice N°6 :</u> 1) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$

a) $x+1\neq 0$ et $x+2\geq 0$ signifie que $x\neq -1$ et $x\geq -2$ donc $D_f=[-2;-1[\cup]-1;+\infty[$

b) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+2}+1}=\frac{1}{2}$

<u>Exercice N°7 :</u> I- 1) $D_f=[-3;7]\setminus\{4\}$ 2) $\lim\limits_{x\to1^-} g(x)=1; \lim\limits_{x\to1^+} g(x)=2$

3) a- oui, car g est définie en 1. ζ_g a une rupture au point d'abscisse 1 alors g n'est pas continue en 1.

b- non, car g n'est pas définie en 4.

4) a) 3 est un majorant de f(x) . b) On a f(5) = 3 alors 3 est un maximum de f(x).

5) on a 3 est un minorent de f(x) , f(-2) = -3 Le minimum de f(x) est -3 et.

<u>Exercice N°8:</u> 1) si $x\in]-\infty;2[\setminus\{1\}$ $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

$x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=1$ f fonction rationnelle définie sur si $x\in]-\infty;2[\setminus\{1\}$

si $x\geq 2$,$f(x)=2x+\sqrt{x^2-4}$

$x^2-4=0$, $x=-2$ ou $x=2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		+	0	-	0	+	

On a : $x^2-4 \geq$ pour $x\geq 2$ f fonction définie sur $[2,+\infty[$

Conclusion : $D_f=]-\infty;2[\setminus\{1\}\cup[2;+\infty[=IR\setminus\{1\}$

2) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+} 2x+\sqrt{x^2-4}=4$; $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x+2}{x-1}=4$

On a $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=f(2)=4$ D'où f est continue en 2.

3) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2-4}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x+2}{x-1}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x+2}{x-1}=-\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

5) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-4}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2-4+x}}=0$

Exercice N°1 : a) $D_f = IR$; $D_C = IR \setminus \{1\}$;b) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 1$;

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -1$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Exercice N°2 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{(x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)} = \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}+1} = \dfrac{1}{2} = f(-1)$ donc f est continue en -1.

Exercice N°3 :1) $D_1 =]-\infty,0]$, $D_2 =]0\ ,\ 1[$, $D_3 = \{x\in[1,+\infty[\ \textit{tel que}\ x-1\geq0\} = [1,+\infty[$,

$D_f = D_1\cup D_2\cup D_3 =]-\infty,0]\cup]0,1[\cup[1,+\infty[= IR$

2) Voir figure

3- Sur $]-\infty,0]$, $f(x) = -x$, f est continue sur $]-\infty;0[$ et f est continue à gauche en 0 alors f est continue sur $]-\infty;0]$.

Sur $]0,1[$: le tracé est continue, donc f est continue sur $]0,1[$.

Sur $[1,+\infty[$: f est continue sur $]1,+\infty[$; f est continue à droite en 1 et par suite f est continue sur $[1,+\infty[$

4)La courbe de f présente une rupture au niveau du point $A(1,1)$, ce qui implique que f n'est pas continue en 1 et par suite f n'est pas continue sur IR.

ExerciceN°4 :1)

$$\frac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{-3x+1}}{x+4} = \frac{x^2+3x-4}{(x+4)\left(\sqrt{x^2-3}+\sqrt{-3x+1}\right)} = \frac{(x+4)(x-1)}{(x+4)\left(\sqrt{x^2-3}+\sqrt{-3x+1}\right)} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-3}+\sqrt{-3x+1}}$$

$$\lim_{x\to-4} f(x) = \lim_{x\to-4}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-3}+\sqrt{-3x+1}} = -\frac{5}{\sqrt{13}+\sqrt{13}} = -\frac{5}{2\sqrt{13}}$$

f est continue en -4 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to-4} f(x) = f(-4)$; si $a = -\dfrac{5}{2\sqrt{13}}$ alors f est continue en -4

si $a \neq -\dfrac{5}{2\sqrt{13}}$ alors f est discontinue en -4

2) a) f est continue en 1 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1} f(x) = f(1)$. $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2-1} = \dfrac{x-2}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = -\dfrac{1}{2}$. f est continue en $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{2}$

b) f est continue en -1 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-1} f(x) = f(-1)$; $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x-2}{x+1}$

Si $x>-1$ *alors* $x+1>0$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$,Si $x<-1$ *alors* $x+1<0$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$

Donc f est discontinue en -1.

Exercice N° 5: $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{3(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} 3\left(x+\frac{1}{3}\right) = 4$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}\frac{-x^2-2x+3}{1-x} = \lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}(x+3) = 4$$

f est continue en 1 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1)$ et par suite $\alpha = 4$

Exercice N°6 :1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$

a) $x+1\neq0$ et $x+2\geq0$ signifie que $x\neq-1$ et $x\geq2$ donc $D_f = [-2;-1[\cup]-1;+\infty[$

2) $\begin{cases} g(x) = \dfrac{|x+3|-1}{x^2+x-2} & \text{si } x<-2 \\ g(x) = f(x) & \text{si } -2\leq x<-1 \\ g(x) = x^2+mx & \text{si } x\geq-1 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to-3} g(x) = \lim\limits_{x\to-3}\dfrac{|x+3|-1}{x^2+x-1} = -\dfrac{1}{5}$; $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}} g(x) = \lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}} f(x) = \dfrac{\sqrt{-\frac{3}{2}+2}-1}{-\frac{3}{2}+1} = \dfrac{\sqrt{\frac{1}{2}}-1}{-\frac{1}{2}} = 2-\sqrt{2}$

b) $\lim\limits_{x\to-2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to-2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{|x+3|-1}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x+2}{(x+2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{1}{x-1} = -\dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$ Donc f est discontinue en -2

c) $\lim\limits_{x\to-1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} x^2+mx = 1-m$ g est continue en -1 signifie que $1-m = \dfrac{1}{2}$ signifie $m = \dfrac{1}{2}$. d) Pour $m = \dfrac{1}{2}$; $D_{c_g} = IR\setminus\{-2\}$

Exercice N°7:1) $D_1 = \{x\in\ ]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[-\{2\}\ \textit{tel que}: x^2-x+4\geq0\}$; $x^2-x+4=0$;

$\Delta = 1-16 = -17$ donc $x^2-x+4>0$, $D_1 =]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[-\{2\}$ (signe de a et a=1), f est bien définie sur D_1. $D_2 = \{x\in\ ]-1;1]\ ;\ x+1\neq0\}$, $x+1\neq0 \Leftrightarrow x\neq-1$, $D_2 =]-1;1]$ f est bien définie sur D_2. $D_f = D_1\cup D_2 =]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[-\{2\}\cup]-1:1] = IR-\{2\}$

2) f est continue en $-1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-1} f(x) = f(-1)$. $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \dfrac{\sqrt{6}+a}{-3}$,

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x^2+E(x)}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x^2-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1^+}(x-1) = -2$ f est continue en -1

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{6}+a}{3} = -2 \Leftrightarrow a = 6-\sqrt{6}$

3) Sur $]-1;1[$; $f(x) = \dfrac{x^2+E(x)}{x+1}$; $E(x) = \begin{cases}-1 & si\ x\in]-1;0[\\ 0 & si\ x\in[0\ ;\ 1[\end{cases}$ donc $f(x) = \begin{cases} x-1 & si\ x\in]-1;0[\\ \dfrac{x^2}{x+1} & si\ x\in[0\ ;\ 1[\end{cases}$

On a : $x\to x-1$ fonction polynôme continue sur IR en particulier sur $[0\ ;\ 1[$

$x \to \frac{x^2}{x+1}$ fonction rationnelle continue sur $IR/\{-1\}$ en particulier sur $[0\,;1[$

continuité en 0 : $f(0)=0$; $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} x-1=-1\neq f(0)$ Donc f n'est pas continue en 0

Continuité en1 : $f(1)=a-2=4-\sqrt{6}$ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2}{x+1}=\frac{1}{2}\neq f(1)$ Donc f n'est pas continue en 1.

Conclusion : f est continue sur : $]-1;0[\cup]0,1[$

Exercice N°8: 1) $D_f=[-3;7]\backslash\{4\}$ 2) $\lim\limits_{x\to1^-} g(x)=1;\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=2$

3) a- oui, car g est définie en 1. ζ_g a une rupture au point d'abscisse 1 alors g n'est pas continue en 1.

b- non, car g n'est pas définie en 4.

Exercice N°9 : $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\le1 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x>1\end{cases}$

1) $x\mapsto x^2-1$ est une fonction polynôme donc continue sur IR en particulier sur $]-\infty;1]$

$x\mapsto x+3$ est continue sur $]1;+\infty[$ et $x+3>0$ $\forall x\in]1;+\infty[$ donc $\sqrt{x+3}$ est continue sur $]1;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} x^2-1=0$;

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{x+3}=2$

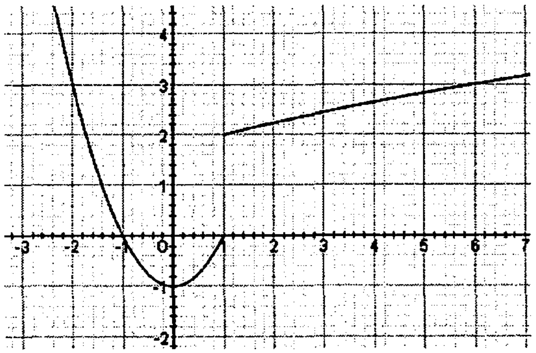
On a $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ donc f est discontinue en 1

3) a) Voir figure

b) La courbe de f présente une rupture au point d'abscisse 1

Donc f n'est pas continue sur IR.

c) A l'aide du graphique $f([-1;0])=[-1;0]$ et $f([0;6])=[-1;0]\cup[2;3]$



4) $\lim\limits_{x\to6}\frac{f(x)-f(6)}{x-6}=\lim\limits_{x\to6}\frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$

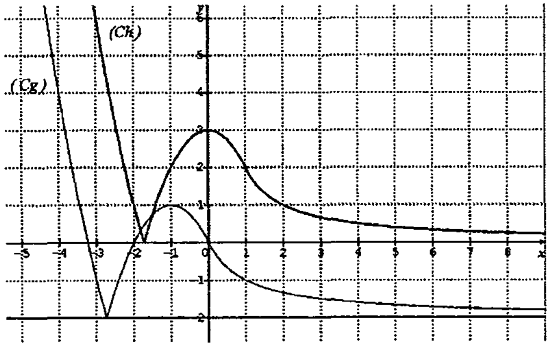
$=\lim\limits_{x\to6}\frac{x-6}{(x-6)(\sqrt{x+3}-3)}$

$=\lim\limits_{x\to6}\frac{1}{\sqrt{x+3}+3}=\frac{1}{6}$

Exercice n°10 :

1) a- La courbe de f représente une coupure au point d'abscisse 1, donc f est discontinue en 1.

b- f est décroissante sur [-2 ; 0] donc



$f([-2\,;0])=[f(0)\,;f(-2)]=[-3\,;1]$. $f([-1;2])=f([-1;1])\cup f([1;2])=[-3;-2]\cup[1;2[$

2) a-

b- La courbe de f ne représente pas de coupure au point d'abscisse 1, donc f est continue en 1.

3) a- $f(x)=1\Leftrightarrow x=-2$ ou $x=2$

b- $f(x)\ge1\Leftrightarrow x\in]-\infty;1]\cup]1;2]$

c- La courbe g est l'image de celle de h par la translation de vecteur$(-\vec{i}-2\vec{j})$

Exercice N°11: $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{si } x>2\\ \frac{2x^2-5x+3}{4(x-1)} & \text{si } x\le2\end{cases}$

1) $\to\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ est bien définie sur $]2;+\infty[$; $\frac{2x^2-5x+3}{4(x-1)}$;

$x\neq1$ d'où $D_f=]2;+\infty[\cup]-\infty;2]\backslash\{1\}=\mathbb{R}\backslash\{1\}$

2) $x\in]2;+\infty[$ on a $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}\frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}$

3) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\frac{1}{4}=f(2)$ d'où f est continue à droite en 2 ; $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{2x^2-5x+3}{4(x-1)}=\frac{1}{4}=f(2)$ d'où f est continue à gauche en 2 et par suite f est continue en 2.

4) On a $\sqrt{x+2}+2>2$ signifie que $\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}<\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}>0$ d'où $0<\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}<\frac{1}{2}$ signifie que $0<f(x)<\frac{1}{2}\forall x\in]2,+\infty]$

Exercice n°12 : 1) $D_f=\mathbb{R}\backslash\{-1;-3\}$

2) $\lim\limits_{x\to-3} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{-x-2-1}{(x+1)(x+3)}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{-1}{(x+3)}=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+2-1}{(x+1)(x+3)}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{(x+3)}=\frac{1}{2}$

2) a)

$\lim\limits_{x\to3} g(x)=\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+7-16}{(x-3)(\sqrt{x^2+7}+4)}=\lim\limits_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(\sqrt{x^2+7}+4)}=\lim\limits_{x\to3}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}+4}=\frac{3}{4}$

b) on a $\lim\limits_{x\to3} g(x)=\frac{3}{4}$ et $g(3)=\frac{3}{4}$ donc g est continue en 3.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
Signe de $x+2$	-	0	+
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$		$x+2$

3) a)

•) $\lim\limits_{x\to2^-} h(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x^3-x-6}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-} x^2+2x+3=11$

•) $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)=3+2m$

h est continue en 2 si et seulement si $3+2m=11 \Leftrightarrow m=4$.

b) Les fonctions : $x \mapsto \dfrac{x^3-x-6}{x-2}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ comme une fonction rationnelle donc h est continue sur $]-\infty;2[$; $x \mapsto x^2+5$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme une fonction polynôme et à valeur strictement positive donc

$x \mapsto \sqrt{x^2+5}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et comme $x \mapsto 4x$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme une fonction polynôme alors : $x \mapsto \sqrt{x^2+5}+4x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et par suite h est continue sur $[2,+\infty[$.

On aura : h est continue sur $]-\infty,2[$, h est continue sur $[2;+\infty[$ et h est continue en $2 \Rightarrow$ h est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice N°13:

1)

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
x^2-9		+	|	-	|	+	

$x^2-9\geq 0$ *pour tout* $x\in]-\infty,-3]\cup[3,+\infty[$ donc f est bien définie sur chacun des intervalles $]-\infty,-3]$ *et* $[3,+\infty[$.

$x^2+7x+12=0$; $\Delta=1$, $x'=-3$ *et* $x''=-4$

$x^2+7x+12\neq 0$ *pour tout* $x\in IR/\{-4,-3\}$ donc f est définie sur $]-\infty,-1]\cup]3;+\infty[$

2) f est continue en -3 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=f(-3)$

$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^-} \sqrt{x^2-9}+mx+2=-3m+2$

- Pour $x\in]-3,-2[$ *On a* $E(x)=-3$ *et* $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2+7x+12}=\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x+4)}=\dfrac{x-3}{x+4}$

$\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{x-3}{x+4}=-6$

f est continue en -3 $\Leftrightarrow -3m+2=-6 \Leftrightarrow -3m=-8 \Leftrightarrow m=\dfrac{8}{3}$

Donc f est continue en -3 pour $m=\dfrac{8}{3}$.

3)Pour tout $x\in]-3,-2[$, $f(x)=\dfrac{x-3}{x+4}$.

Comme $x\mapsto \dfrac{x-3}{x+4}$ est continue sur $IR/\{-4\}$ alors f est continue sur $]-3,-2[$

Pour tout $x\in[-2,-1[$ *On a* $E(x)=-2$ *donc* $f(x)=\dfrac{x^2-6}{x^2+7x+12}$.

$x\mapsto \dfrac{x^2-6}{x^2+7x+12}$ est continue sur $IR/\{-3,-4\}$, donc elle est continue sur $[-2,-1[$

Etudions la continuité de f à gauche en -2 :

On a $f(-2)=-1$. Pour tout $x\in]-3,-2[$, $f(x)=\dfrac{x-3}{x+4}$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-\dfrac{5}{2}\neq f(-2)$ Donc f est discontinue à gauche en -2.

Etudions la continuité de f à gauche en -1 :On a $f(-1)=-\dfrac{1}{3}$

Pour tout $x\in]-2,-1[$, $f(x)=\dfrac{x^2-6}{x^2+7x+12}$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^2-6}{x^2+7x+12}=-\dfrac{5}{6}\neq f(-1)$ Donc f est discontinue à gauche en -1.

f est continue sur chacun des intervalles $]-3,-2[$ *et* $[-2,-1[$

4) Pour $m=\dfrac{8}{3}$,

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2-9}+\dfrac{8}{3}x+2\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(|x|\sqrt{1-\dfrac{9}{x^2}}+\dfrac{8}{3}x+2\right)=\lim\limits_{x\to -\infty} -x\left(\sqrt{1-\dfrac{9}{x^2}}-\dfrac{8}{3}-\dfrac{2}{x}\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{f(x)-f(-3)}{x+3}=\lim_{x\to -3^-}\frac{\sqrt{x^2-9}+\frac{8}{3}x+2-\left(-3\times\frac{8}{3}+2\right)}{x+3}=\lim_{x\to -3^-}\frac{\sqrt{x^2-9}+\frac{8}{3}(x+3)}{x+3}$$

$$=\lim_{x\to -3^-}\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{x+3}+\frac{8}{3}\right)=-\infty$$

b) $f(x)=\dfrac{8}{3}x+3 \Leftrightarrow f(x)-\dfrac{8}{3}x-3=0$. On pose $H(x)=f(x)-\dfrac{8}{3}x-3$; $H(-4)=\sqrt{7}-1>0$; $H(-3)=-1<0$; $H(-4)\times H(-3)<0$ alors $H(x)=0$ admet au moins une solution dans $[-4;-3]$ et par suite $f(x)=\dfrac{8}{3}x+3$ admet au moins une solution dans $[-4;-3]$.

Exercice N°14 : 1) $f(2)=\dfrac{4+E\left(\dfrac{2}{3}\right)}{4}=\dfrac{4+0}{4}=1$

$E\left(\dfrac{x}{3}\right)=n \Leftrightarrow n\leq\dfrac{x}{3}\langle n+1 \Leftrightarrow 3n\leq x\langle 3n+3$; $E\left(\dfrac{x}{3}\right)=n \Leftrightarrow x\in[3n\ ;\ 3n+3[$.

Si $x\in[0;3[$ *alors* $E\left(\dfrac{x}{3}\right)=0$ *Donc* $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$

Si $x\in[3,6[$ *alors* $E\left(\dfrac{x}{3}\right)=1$ *Donc* $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2}{x+2}=1=f(2)$ donc f est continue en 2.

2) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2}{x+2}=\dfrac{9}{5}$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2+1}{x+2}=\dfrac{10}{5}=2$.

On a $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ et par suite f est discontinue en 3.

Exercice N° 15 : 1) f est une fonction polynôme donc continue sur IR.

2) $f(-1)=-3$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)=1$; $f(0)=-1$; $f(1)=1$.

3) On a $f(-1)\times f\left(-\frac{1}{2}\right) \langle\ 0$ *alors* l'équation $f(x)=0$ admet une solution dans $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$.

$f\left(-\frac{1}{2}\right)\times f(0) \langle\ 0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet une solution dans $\left]-\frac{1}{2};0\right[$.

$f(0)\times f(1) \langle\ 0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet une solution dans $]0;1[$.

Et par suite l'équation $f(x)=0$ admet exactement trois solutions dans l'intervalle $]-1;1[$.

Exercice N° 16: 1) $f(-1)=-4$; $f(0)=0$. *On a* $: -4\leq -2\leq 0$. Alors l'équation $f(x)=-2$ admet au moins une solution dans $[-1;0]$.

2) Soit la fonction $h(x)=f(x)+2$. $h(x)=0$ admet au moins une solution dans $[-1;0]$.

$h(-1)=-2$; $h(-0.9)=-1.42$. *Donc* $\alpha\notin[-1;-0.9]$, $h(-0.8)=-0.962$ *Donc* $\alpha\notin[-0.9;-0.8]$

$h(-0.7)=-0.443$ *Donc* $\alpha\notin[-0.8;-0.7]$, $h(-0.6)=-0.12$ *Donc* $\alpha\notin[-0.7;-0.6]$

$h(-0.5)=0.375$ *On a* $h(-0.5)\times h(-0.6)\ \langle\ 0$. *Donc* $\alpha\in[-0.6;-0.5]$

La valeur approchée par défaut de α à 10^{-1} prés est -0.6.

Exercice n°17 : 1) f est un rationnelle don f est continue sur D_f or $D_f=\{x\in\mathbb{R}$ tel que:$2x^2+x+1\neq 0\}=\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) a) Soit $x\in\mathbb{R}$. $f(x)-(-1)=\frac{-5x+1}{2x^2+x+1}+1=\frac{2x^2-4x+2}{2x^2+x+1}=\frac{2(x-1)^2}{2x^2+x+1}$ or pour tout réel $x, 2(x-1)^2\geq 0$ et $2x^2+x+1>0 \Rightarrow f(x)+1\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)\geq -1, \forall x\in\mathbb{R}$ donc f est minorée par -1.

Soit $x\in\mathbb{R}$. $f(x)-4=\frac{-5x+1}{2x^2+x+1}-4=\frac{-(8x^2+9x+3)}{2x^2+x+1}$ $\Delta=-15<0$ donc

$f(x)-4\leq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)\leq 4, \forall x\in\mathbb{R}$ donc f est majorée par 4.

b- on a $\left.\begin{array}{l} f(x)\geq -1, \forall x\in\mathbb{R} \\ \text{et } f(1)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ -1 est un minimum de f.

Existe-il un réel x tel que : $f(x)=4 \Leftrightarrow -5x+1=8x^2+4x+4 \Leftrightarrow 8x^2+9x+3=0$ et comme $\Delta=-15<0$ alors 4 n'a pas d'antécédent par f donc 4 n'est pad un maximum pour f.

3) a) $f(-2)=\frac{-9}{7}$;$f(-1)=\frac{7}{2}$;f est continue sur $[-2;-1]$ et $2\in\left]\frac{-9}{7};\frac{7}{2}\right[\Rightarrow$ l'équation f(x) = 2 admet au moins une solution $\alpha\in[-2;-1]$

b) $f(\alpha)=2 \Leftrightarrow -5\alpha+1=4\alpha^2+2\alpha+2 \Leftrightarrow -7\alpha-1=4\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2=\frac{-7}{4}\alpha-\frac{1}{4}$

Exercice 1 : 1) f (0) =-2,f(2) = 6 et f (1) =2

2) La tangente au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses et par suite f'(0)= 0 de même on a : f' (2) = 0

Le nombre dérivée de f en 1 est la pente de la tangente à (ζ) en 1 or la tangente a (ζ)au point d'abscisse 1 passe par les points de coordonnées

G(0,-4) et D(1, 2) . Donc f' (1) = $\frac{2+4}{1-0}=6$

3. Δ : y = f'(1) (x-1) +f(1)= 6(x-1) + 2= 6x-4

Exercice 2 :1)b 2)b 3) a 4) c 5) a

Exercice 3 : $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ x\geq -1 \\ -2x & si\ x<-1 \end{cases}$

1) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{x^2+1-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x-1)=-2$, $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{-2x-2}{x+1}=-2$

2) on a $f'_g(-1)=-2$; $f'_d(-1)=-2$; $f'_g(-1)=f'_d(-1)$ Donc f est dérivable en -1

3) Δ : y = f'(-1) (x+1) + f(-1)= -2 (x+1) + 2= -2x

Exercice 4 :1) a) $f(-2)=1$; $f(0)=3$; $f(3)=2$ .b) $f'(0)=0$; $f'(3)=-1$

2) a) $T: y=f'(3)(x-3)+f(3)=-x+3+2=-x+5$.

b) Sur$[3;+\infty[$; ξ_f est au dessus de T ; Sur$[-2;3]$ ξ_f est au dessous de T

3) a) La courbe de f admet une demi tangente verticale au point -2 donc f n'est pas dérivable en -2

b) $\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=-\infty$

Exercice 5 : 1) c) ; 2) c) ; ; 3) b)

Exercice 6 : 1)a)f'(3)=0 , f'(-1)=-1 et f'(1)=2 , b) Δ : y = f'(-1) (x+1) +f(-1)= -1 (x+1) -2= -x-3

2) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-3}{x-2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)-3}{x-2}=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{f(x)\sqrt{x+1}-0}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)=-\infty$

Exercice 7: a) $\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)=\frac{x^2+x-1}{x-1}=1=h(0)$, $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=1+\sqrt{x^2+x}=1=h(0)$ donc h est continue en 0

si $x\in]-\infty,0[$ $h(x)=\frac{x^2+x-1}{x-1}$ h fonction rationnelle continue sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ et par suite h est continue sur $]-\infty,0[$

si $x\in]0,+\infty[$ $h(x)=1+\sqrt{x^2+x}$ on a : $x\to x^2+x$ fonction polynôme continue sur $]0,+\infty[$ et $x^2+x\geq 0\ \forall x\in]0,+\infty[$ donc $x\to\sqrt{x^2+x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et comme $x\to 1$ fonction constante continue sur $\mathbb{R}$ et par suite sur $]0,+\infty[$ alors h est continue sur $]0,+\infty[$

Conclusion :h est continue sur $\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\frac{x^2+x-1}{x-1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\frac{x^2+x-1-x+1}{x-1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{x-1}=0$ alors h est dérivable à gauche en 0 et $h'_g(0)=0$.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1+\sqrt{x^2+x}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+x}{x\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}=+\infty$$

alors h n'est pas dérivable à droite en 0. ζ_h admet au point O deux demi

tangentes : $T_g\begin{cases}y=0\\x\le0\end{cases}$ et $T_d\begin{cases}x=0\\y\ge0\end{cases}$.

c) $x\mapsto x^2+x$ est dérivable et strictement positive sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0, h'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

$x\mapsto\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$ est dérivable sur $]-\infty,0[$ et pour $x<0, h'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$.

Exercice 8 : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert et a un réel de I.
L'approximation affine de f est : $f(a+h)\approx f(a)+h\,f'(a)$ où h est voisin de 0.
1) soit la fonction $f(x)=x^2$; f est dérivable en tout réel x_0 et $f'(x_0)=2x_0$. On prend a = 1 ;
$f(1+h)\approx f(1)+h\,f'(1)\simeq 1+2h$. D'où $f(1+h)\simeq 1+2h$. Donc $(1+h)^2\simeq 1+2h$
2) soit la fonction $f(x)=x^4$, f est dérivable en tout réel x_0 et $f'(x_0)=4x_0^3$. On prend a = 1 ;
$f(1+h)\simeq f(1)+h\,f'(1)\simeq 1+h\times4\simeq1+4h$; D'où $f(1+h)\simeq1+4h$. Donc $(1+h)^4\simeq1+4h$
3) soit la fonction $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\neq0$; f est dérivable en tout réel $x_0\in IR/\{x_0\}$ *et* $f'(x_0)=\dfrac{-1}{x_0^2}$

On prend a = 1 ; $f(1+h)\simeq f(1)+h\,f'(1)\approx 1+h\times(\dfrac{-1}{1})\simeq 1-h$. D'où $\dfrac{1}{1+h}\approx1-h$

Exercice 9 : 1) $f(x)=\sqrt{3x+1}$, $D_f=\left[-\dfrac{1}{3},+\infty\right[$ f est dérivable en tout réel $a\in\left]-\dfrac{1}{3},+\infty\right[$

et $f'(a)=\dfrac{3}{2\sqrt{3a+1}}$. L'approximation affine de f est $f(a+h)\approx f(a)+h\,f'(a)$

Pour a = 0 on a $f(h)\approx f(0)+h\,f'(0)\approx 1+\dfrac{3}{2}h$

2) $\sqrt{1,00048}=\sqrt{3\times0,00016+1}=f(0,00016)\simeq1+\dfrac{3}{2}\times0,00016\simeq1,00024$, on prend h = 0,00016

Exercice 10 : 1) f(x) = 2x -1, f est une fonction polynôme donc dérivable sur IR et on a f'(x) = 2
2) $f(x)=2x^2-3x+4$; f est dérivable sur IR et $f'(x)=2\times2x-3=4x-3$.
3) $f(x)=(3x-4)^3$; On a $x\mapsto3x-4$ est dérivable sur IR donc $x\mapsto(3x-4)^3$ est dérivable sur IR et on a : $f'(x)=3\times3(3x-4)^2=9(3x-4)^2$
4) $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{2x+5}$, $D_f=IR/\left\{\dfrac{-5}{2}\right\}$, f est une fonction rationnelle donc dérivable sur $IR/\left\{\dfrac{-5}{2}\right\}$

$$f'(x)=\frac{(4x-1)(2x+5)-2(2x^2-x-1)}{(2x+5)^2}=\frac{4x^2+20x-3}{(2x+5)^2}$$

5) $f(x)=\sqrt{2x+1}$, $D_f=\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$, Soit L(x) = 2x + 1 dérivable sur IR

Pour tout $x\in\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$, $L(x)>0$ d'où $f(x)=\sqrt{L(x)}$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$

$$f'(x)=\frac{L'(x)}{2\sqrt{L(x)}}=\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

6) $f(x)=\sqrt{x^2-x-6}$, $x^2-x-6=0$, $\Delta=25$, x' = -2, x'' = 3 ; $D_f=]-\infty,-2]\cup[3,+\infty[$
Soit $L(x)=x^2-x-6$ dérivable sur IR Pour tout $x\in]-\infty,-2[\cup]3,+\infty[$ $L(x)>0$;donc f est dérivable au

$]-\infty,-2[\cup]3,+\infty[$ $f'(x)=\dfrac{L'(x)}{2\sqrt{L(x)}}=\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-6}}$

7/ $f(x)=\dfrac{1}{3x-7}$, $D_f=IR/\left\{\dfrac{7}{3}\right\}$, f est dérivable sur $IR/\left\{\dfrac{7}{3}\right\}$, $f'(x)\ \dfrac{-3}{(3x-7)^2}$
8) $f(x)=(x-1)^3(2x-3)^4$
$x\mapsto(x-1)^3$ Dérivable sur IR
$x\mapsto(2x-3)^4$ Dérivable sur IR

f est dérivable sur IR

$f'(x)=3(x-1)^2(2x-3)^4+(x-1)^3(4\times2(2x-3)^3$

$=(x-1)^2(2x-3)^3(3(2x-3)+8(x-1))=(x-1)^2(2x-3)^3(14x-17)$

9/ $f(x)=(5x+1)^{-4}=\dfrac{1}{(5x+1)^4}$, f est dérivable sur $IR/\left\{-\dfrac{1}{5}\right\}$; $f'(x)=-4\times5(5x+1)^{-5}=-20(5x+1)^{-5}$

10) $f(x)=2x+3+\dfrac{5}{x}$; $x\mapsto2x+3$ *dérivable sur IR*, $x\mapsto\dfrac{5}{x}$ *dérivable sur IR**, *f* dérivable sur IR*

$$f'(x)=2+\left(\frac{-5}{x^2}\right)=2-\frac{5}{x^2}$$

11) f est dérivable sur IR et $f'(x)=-2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

12) $f'(x)=4\cos x\sin x+4\cos x=4\cos x(\sin x+1)$

Exercice 11 : 1) $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4}$; $a=4$. On pose $u(x)=x^2$, D_u = IR et u(4) = 16

Pour tout $x\in IR$ u est dérivable et u' (x) = 2x, $\lim\limits_{x\to4}f(x)=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{u(x)-u(4)}{x-4}=u'(4)=8$

2) $f(x)=\dfrac{x^2\sqrt{x}-1}{x-1}$, $a=1$, Soit $u(x)=x^2\sqrt{x}$, $D_u=IR_+$ et u(1) = 1

$x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable sur IR_+^* ; $x\mapsto x^2$ est dérivable sur IRAinsi u est dérivable sur $IR_+^*\cap IR=IR_+^*$

$$u'(x)=(x^2)'\sqrt{x}+x^2\left(\sqrt{x}\right)'=2x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2\sqrt{x}}=\frac{4x^2}{2\sqrt{x}}+\frac{x^2}{2\sqrt{x}}=\frac{5x^2}{2\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{u(x)-u(1)}{x-1}=u'(1)=\frac{5}{2}$$

3) $f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x+4}-1}{x+3}$, $a=-3$, Soit $V(x)=\dfrac{1}{x+4}$, $D_x=IR\ /\ \{-4\}$, $V(-3)=1$

V est dérivable sur $IR\ /\ \{-4\}$ et $V'(x)=\dfrac{-1}{(x+4)^2}$

$$\lim_{x\to-3} f(x)=\lim_{x\to-3}\frac{\frac{1}{x+4}-1}{x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{V(x)-V(-3)}{x+3}=V'(-3)=-1$$

4) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\sqrt{x^2+1}}$, $a=0$, On pose $u(x)=\sqrt{x^2+x+1}$,$V(x)=\sqrt{x^2+1}$

$D_u = D_v = IR$, $f(0) = g(0) = 1$ on pose $S(x) = x^2 + x + 1$ et $R(x) = x^2 + 1$

S et R sont deux fonctions polynômes donc dérivables sur IR : $S'(x) = 2x + 1$ et $R'(x) = 2x$

Pour tout $x\in IR$, $S(x) > 0$ *et* $R(x)>0$ Donc $u = \sqrt{S}$ et $v = \sqrt{R}$ sont dérivables sur IR.

$u'(x)=\frac{S'(x)}{2\sqrt{S(x)}}=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$, $u'(1)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $v'(x)=\frac{R'(x)}{2\sqrt{R(x)}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,

$$V'(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad \lim_{x\mapsto1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\sqrt{x^2+x-1}-1}{x-1}}{\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x-1}}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{u(x)-1}{x-1}}{\frac{V(x)-1}{x-1}}=\frac{u'(1)}{V'(1)}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

<u>Exercice n°12 :</u>1) $f'(-2)=2$ et $f'(-1)=0$. 2)a/ -i- et –ii- b/ $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)+1}{x-1}=-4$ c/ $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)+1}{x-1}=0$.

3) a- g est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g'(x)=2ax+b$.

b) L'équation de la tangente à ζ_f au point d'abscisse 0 est : y = 2x +1 donc $g'(0)=2$ et $g(0)=1$ alors b = 2 et c = 1. D'autre part $g'(-1)=f'(-1)=0$ alors -2a + 2 = 0 donc a = 1. Ainsi : a = 1, b =2 et c = 1.

4) a) $x\mapsto x^2+x$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ donc h est continue sur $\mathbb{R}_+$. $x\mapsto\frac{x}{x-1}$ est rationnelle définie pour $x\neq1$ continue sur $]-\infty,0[$. $\lim_{0^+} h=\lim_{x\to0^+}\sqrt{x^2+x}=0=h(0)$. $\lim_{0^-} h=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x-1}=0=h(0)$ donc h est continue en 0 et par suite h est continue sur $\mathbb{R}$.

b) $\lim_{x\to0^-}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x-1}=-1$ alors h est dérivable à gauche en 0 et $h'_g(0)=-1$.

$\lim_{x\to0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}=+\infty$ alors h n'est pas dérivable à droite en 0. ζ_h admet au point O deux demi tangentes : $T_g\begin{cases}y=-x\\x\le0\end{cases}$ et $T_d\begin{cases}x=0\\y\ge0\end{cases}$.

c) $x\mapsto x^2+x$ est dérivable et strictement positive sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0, h'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

$x\mapsto\frac{x}{x-1}$ est dérivable sur $]-\infty,0[$ et pour $x<0, h'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$.

<u>Exercice 13 :</u>1) Faux car f(x) = $|x|$ continue en 0 et n'est pas dérivable en 0 .

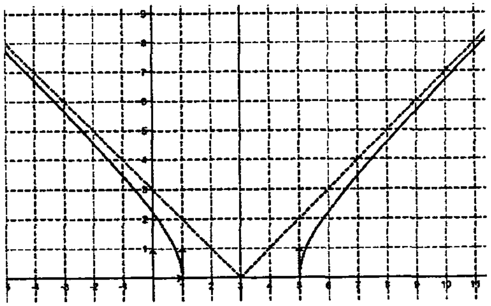
$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1$ et $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}=\frac{-x}{x}=-1$; $-1\neq1$

2) Faux exemple f(x) = x continue et dérivable en a $\forall\ a\in IR$.

3) Vrai car f n'est pas continue $\Rightarrow$ f n'est pas dérivable.

<u>Exercice n°1 :</u>

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
f'(x)		-	▨	▨	▨	+	
f(x)	$+\infty$	↘	0 ▨	▨	▨ 0	↗	$+\infty$



<u>Exercice n°2 :</u>I)1) a) ,I) 2) a) II) c)
III)1) b) III) 2) b)

<u>Exercice N°3 :</u> $f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x-1$

1) f est dérivable sur IR et on a

$f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}(x^2-1)$

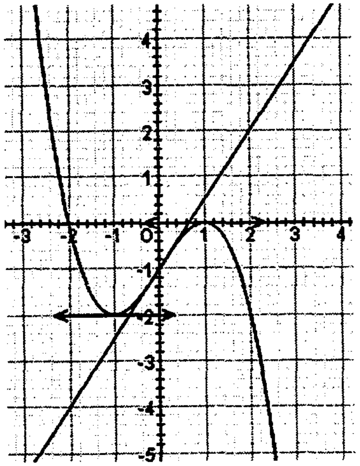
; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	0	−	
f(x)	$+\infty$	↘	-2	↗	0	↘	$-\infty$

2) $I(0;-1)$; On a si $x\in IR$ alors $2\times0-x=-x\in IR$;

$f(-x)=-\frac{1}{2}(-x)^3+\frac{3}{2}(-x)-1=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x-1$

$=-2-\left(-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x+1\right)=2\times(-1)-f(x)$ Donc $I(0;-1)$ est un centre de symétrie à (ξ_f).



3) a) $T: y=f'(0)(x-0)+f(0)$; $T: y=\frac{3}{2}x-1$

b) $f(x)-y=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x-1-\frac{3}{2}x+1=-\frac{1}{2}x^3$

4) a) $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)-1=\frac{1}{16}-\frac{3}{4}-\frac{16}{16}=-\frac{27}{16}$

b) $\cos^3x-3\cos x-\frac{11}{8}=0$ signifie

que $\cos^3x-3\cos x+2-\frac{27}{8}=0$ signifie

que $-\frac{1}{2}\cos^3x+\frac{3}{2}\cos x-1=-\frac{27}{16}$

signifie que $f(\cos x)=-\frac{27}{16}$ On a $x\in[-\pi;\pi]\Rightarrow\cos x\in[-1;1]$ et f est strictement croissante sur $[-1;1]$;

$f(\cos x)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$ donc $\cos x=-\frac{1}{2}$ et $x\in[-\pi;\pi]$ Alors $x=\frac{2\pi}{3}$ ou $x=\frac{4\pi}{3}$

Exercice N° 4 : 1) $f(x)=2x^3-6x+4$; f est dérivable sur IR et $\forall x\in$ IR On a :

$f'(x)=6x^2-6=6(x^2-1)$ $f'(x)=0$ signifie que

$x=1$ ou $x=-1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$;

$f(1)=0$ et $f(-1)=8$

2) On a : si $x\in$ IR ; $2\times0-x=-x\in$ IR ;

$f(2\times0-x)=f(-x)=2(-x)^3+6x+4$

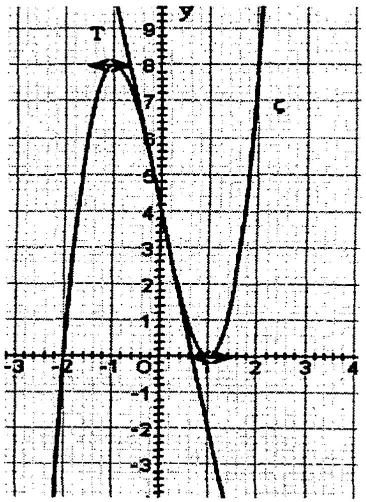
$=-2x^3-6x+4+4-4=-(2x^3-6x+4)+8=2\times4-f(x)$

D'où $I(0;4)$ est un centre de symétrie à ξ_f

3) $T: y=f'(0)x+f(0)=-6x+4$

4) $f(x)=y=2x^3-6x+4+6x-4=2x^3$

5) Voir courbe

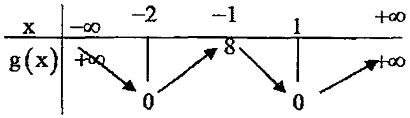


6) $x^3-3=\dfrac{m-4}{2x}$ signifie que $2x^2-6x+4=m$

- Si $m\in\,]0;8[$; l'équation admet 3 solutions.
- Si $m\in\,]8;+\infty[$; l'équation admet 1 solution.
- Si $m\in\,]-\infty;0[$; l'équation admet 1 solution.
- Si $m=8$; l'équation admet 2 solutions.
- Si $m=0$; l'équation admet 2 solutions.

7) β et $\alpha\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$; $\alpha<\beta$ alors $\cos(\alpha)>\cos(\beta)$ car $x\mapsto\cos x$ est décroissante sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

$\cos(\alpha)$ et $\cos(\beta)$ sont deux éléments $[0;1]$ et f est décroissante sur $[0;1]$ donc $f(\cos(\alpha))<f(\cos(\beta))$.



8) $g(x)=|2x+4|(x-1)^2$

a) $g(x)=|f(x)|$; Soit ζ_1 la partie de ζ_f située au dessus de $(O;\vec{i})$ et ζ_2 la partie de ζ_f située au dessous de $(O;\vec{i})$ donc $\zeta_g=\zeta_1\cup S_{(O;\vec{i})}(\zeta_2)$

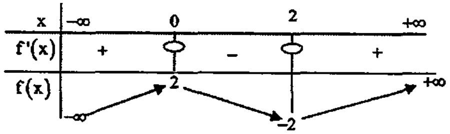
EXERCICE 5: 1) f est une fonction polynôme donc dérivable sur IR ;

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$;

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$;

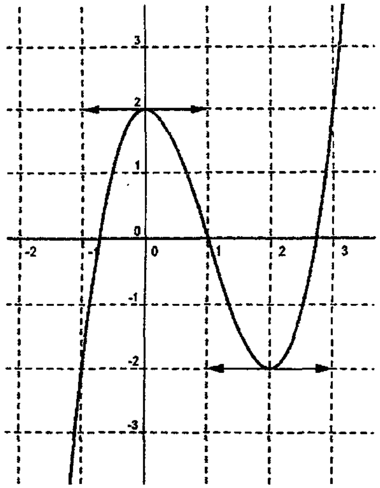
$f(0)=2$ et $f(2)=-2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$



La courbe de f admet deux tangentes horizontales aux points d'abscisses 0 et 2

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ donc la courbe de f admet deux branches paraboliques de direction l'axe (OJ)



2) a) $A(a;a^3-3a^2+2)$; $B(-a;-a^3-3a^2+2)$ la droite (AB) a pour coefficient directeur. $\dfrac{2a^3}{2a}=a^2$ La tangente à (ζ) en un point M et parallèle à (AB) si et seulement si :

$f'(x)=a^2 \Leftrightarrow 3x^2-6x=a^2 \Leftrightarrow 3x^2-6x-a^2=0$. $\forall x\in IR^*$, l'équation $3x^2-6x-a^2=0$ admet deux racines x' et x'' et par suite il existe deux points M' et M'' de (ζ) où la tangente à (ζ) est parallèle à (AB).

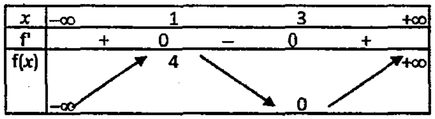
b) Soit $I=M'*M''$; $x_I=\dfrac{x'+x''}{2}=1$ et $y_I=\dfrac{f(x')+f(x'')}{2}$

$=\dfrac{x'^3-3x'^2+2+x''^3-3x''^2+2}{2}=\dfrac{x'^3+x''^3-3(x'^2+x''^2)+4}{2}$

$=\dfrac{(x'+x'')(x'^2-x'x''+x''^2)-3(x'^2+x''^2)+4}{2}$ or $x'+x''=2$ $x'x''=-\dfrac{a^2}{3}$. $x'^2+x''^2=(x'+x'')^2-2x'x''$

$=4+\dfrac{2a^2}{3}$ Donc $y_I=\dfrac{2\left(4+\dfrac{2a^2}{3}+\dfrac{a^2}{3}\right)-3\left(4+\dfrac{2a^2}{3}\right)+4}{2}=0$ Ainsi $I(1;0)$

Lorsque a varie dans IR^*, les points M' et M'' restent symétriques par rapport au point $I(1;0)$



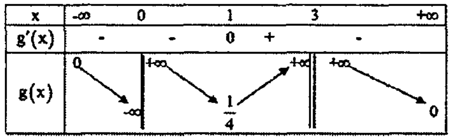
Exercice n°6 : 1)

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

3) a) $D_g=\mathbb{R}\setminus\{0;3\}=D$

b) f est dérivable et non nulle sur D alors g est dérivable sur D et pour tout $x\in D$,

on a : $g'(x)=-\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}$. c)



Exercice N°7 : $y=-x+1$ est une asymptote au voisinage de $(-\infty)$; $x=-1$ est une asymptote verticale $y=0$ est une asymptote horizontale

1) f est discontinue en 1 car (ζ_f) présente un saut au point d'abscisse 1.

2) a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ car la droite d'équation $y=0$ est une asymptote au voisinage de $(+\infty)$

b) $\lim_{x\to1^+} f(x)=2$; c) $\lim_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$; d) $\lim_{x\to-1}|f(x)|=+\infty$;

e) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-1}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{f(x)}\right)=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=-\infty$; f) $\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)}{f(x)-1}=-\infty$

g) $\lim_{x\to-\infty} f(x)+x=1$ car la droite d'équation $y=-x+1$ est une asymptote au voisinage de $(+\infty)$

h) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)-2x}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x+1}-\frac{2x}{x+1}=0-2=-2$

Exercice 8 :1) a) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$; b) $y=2$; $x=2$; $y=ax+b$ avec $b=\frac{3}{2}$;

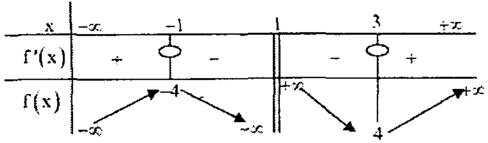
$a=\frac{\frac{3}{2}-0}{0-(-3)}=\frac{\frac{3}{2}}{3}=\frac{1}{2}$ donc $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ .2) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$; $\lim_{x\to2} f(x)=-\infty$

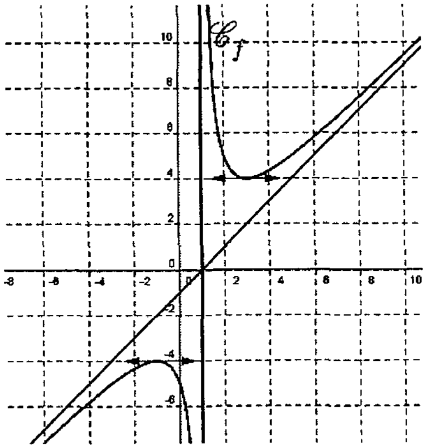
3) $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]=\frac{3}{2}$; $\lim_{x\to(-2)^-}\frac{4-x}{f(x)}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{4}{f(x)}-\frac{x}{f(x)}=0$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{2-x}{f(x)-2}=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$

EXERCICE 9 : 1) a) $f(x)=\frac{x^2-2x+5}{x-1}=\frac{x^2-2x+1+4}{x-1}$

$=\frac{(x-1)^2}{x-1}+\frac{4}{x-1}=x-1+\frac{4}{x-1}$

b) on a $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x-1}=0$ alors la droite d'équation $y=x-1$ est une asymptote oblique à (ζ) au voisinage de ∞





2) On a $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$; si $x\neq1$ alors $2-x\neq1$;

$f(2-x)=2-x-1+\frac{4}{2-x-1}=1-x+\frac{4}{1-x}$

$=-(x-1)-\frac{4}{x-1}=-\left[x-1+\frac{4}{x-1}\right]=2\times0-f(x)$ donc I(1;0) est un centre de symétrie de (ζ) 3) f est

dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et on a : $f'(x)=1-\frac{4}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+1-4}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$;

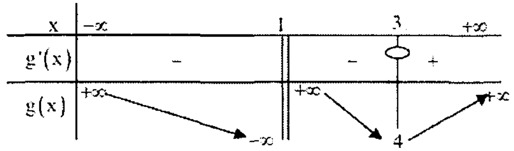
$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=3$

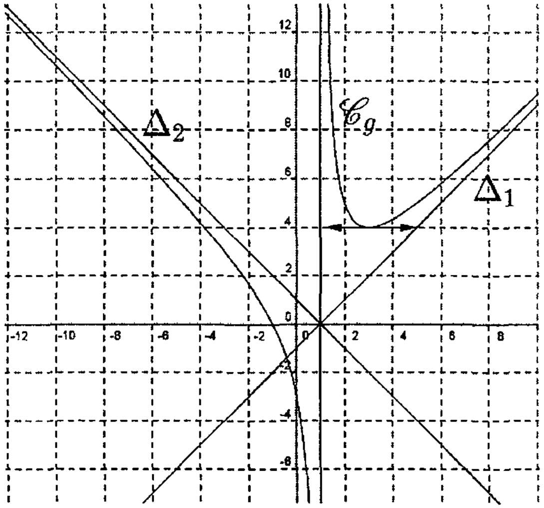
4) a)

$$g(x)=|x-1|+\frac{4}{x-1}=\begin{cases}x-1+\frac{4}{x-1}\text{ si } x>1\\ 1-x+\frac{4}{x-1}\text{ si } x<1\end{cases}$$

; g est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et

$$g'(x)=\begin{cases}\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}\text{ si } x>1\\ \frac{-x^2+2x-5}{(x-1)^2}\text{ si } x<1\end{cases}$$





Sur $]1;+\infty[$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x^2-2x-3=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ ou $x=3$

Sur $]-\infty;1[$; $g'(x)=0\Leftrightarrow -x^2+2x-5=0$;

$\Delta=4-24=-20$ Donc

$g'(x)<0\ \forall x\in]-\infty;1[$

b) Sur $]1;+\infty[$; $g(x)=x-1+\frac{4}{x-1}$;

$\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-(x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x-1}=0$ donc la droite $\Delta_1 : y=x-1$ est une asymptote oblique à (ζ_g) au voisinage de $(+\infty)$.

Sur $]-\infty;1[$; $g(x)=1-x+\frac{4}{x-1}$; $\lim_{x\to-\infty}\left[g(x)-(1-x)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x-1}=0$ donc la droite $\Delta_2 : y=1-x$ est une asymptote oblique à (ζ_g) au voisinage de $(-\infty)$.

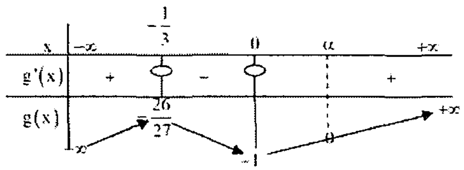
c) Voir figure.

Exercice10 : 1) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$

2) g est dérivable sur IR et On a :

$g'(x)=6x^2+2x=2x(3x+1)$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ ou

$x=-\frac{1}{3}$; $g(0)=-1$ et $g\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{26}{27}$



3) g est continue sur $[0;1]$; $g(0)=-1$ et $g(1)=2$ On a $g(1)\times g(2)<0$ donc l'équation $g(x)=0$ admet dans IR une unique solution α dans $]0;1[$.

x	$-\infty$	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow +\infty$	

4) On a $f'(x)=\frac{1}{3x^2}g(x)$;

$f'(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow x=\alpha$. On remarque que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$

5) a) $I(-1;f(-1))$; $f(-1)=-\frac{1}{3} \Rightarrow I\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$. $J(1;f(1))$; $f(1)=1 \Rightarrow J(1;1)$. L'équation de la tangente à (ζ) en J est $\Delta: y=f'(1)(x-1)+f(1)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$. Pour $x=-1$ alors $y=-\frac{1}{3}$ Donc $I\in\Delta$ et par suite (IJ) est tangente à (ζ) en J.

b) L'équation de la tangente à (ζ) en I es $T: y=f'(-1)(x+1)+f(-1)=-\frac{2}{3}x-1$

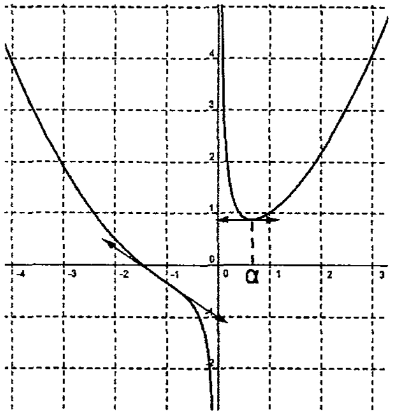
c)Position de (ζ) et Δ';

x	$-\infty$	1		0		$+\infty$
$3x$	$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)^3$	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-y$	$+$	0	$-$	||	$+$	
Position	**T est au dessous de(ζ)**		**T est au dessus de(ζ)**	||	**T est au dessous de(ζ)**	

$$f(x)-y=\frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)-\left(-\frac{2}{3}x-1\right)$$

$$=\frac{1}{3}x^2+x+\frac{1}{3x}+1=\frac{x^3+3x^2+3x+1}{3x}=\frac{(x+1)^3}{3x}$$

6) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ Donc (ζ) admet une branche parabolique de direction $(O\vec{j})$ au voisinage de $(+\infty)$ $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ donc (ζ) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$



Exercice 11 :1)

a) $f(0)=-\frac{3}{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2+2x+3}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2}=-1$.

$\lim\limits_{x\to2}(x-2)f(x)=\lim\limits_{x\to2}-x^2+2x+3=3$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x(x-2)}=a$, $\lim\limits_{x\to2}(x-2)f(x)=\lim\limits_{x\to2}(x-2)(ax+b)+c=c$ et $f(0)=b-\frac{c}{2}$ donc

on va résoudre le système : $\begin{cases} b-\frac{c}{2}=-\frac{3}{2} \\ a=-1 \\ c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=-1 \\ c=3 \end{cases}$.

2) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Pour tout $x\in D_f$, on a $x\neq2 \Leftrightarrow -x\neq-2 \Leftrightarrow 4-x\neq2 \Leftrightarrow (4-x)\in D_f$ et on a :

$f(4-x)+f(x)=-4+x+\frac{3}{2-x}+(-x)+\frac{3}{x-2}=-4$ donc $f(4-x)=-4-f(x)$ alors I(2,-2) est un centre de symétrie pour ζ_f

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)-y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}-x+\frac{3}{x-2}-(-x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x-2}=0$ donc $\Delta: y=-x$ est une asymptote oblique à ζ_f .

4) f est une fonction rationnelle alors f est dérivable sur $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$:

$$f'(x)=\frac{(-2x+2)(x-2)-(-x^2+2x+3)\times1}{(x-2)^2}=\frac{-2x^2+4x+2x-4+x^2-2x-3}{(x-2)^2}=\frac{-x^2+4x-7}{(x-2)^2}.$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+4x-7=0; \Delta=b^2-4ac=16-28=-12<0$ donc $f'(x)\neq0$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ et son signe est celui de $-x^2+4x-7$ car $(x-2)^2>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ donc $f'(x)<0$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	||	+
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{-x^2+2x+3}{x-2}=\frac{3}{0^-}=-\infty$ et

$\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{-x^2+2x+3}{x-2}=\frac{3}{0^+}=+\infty$

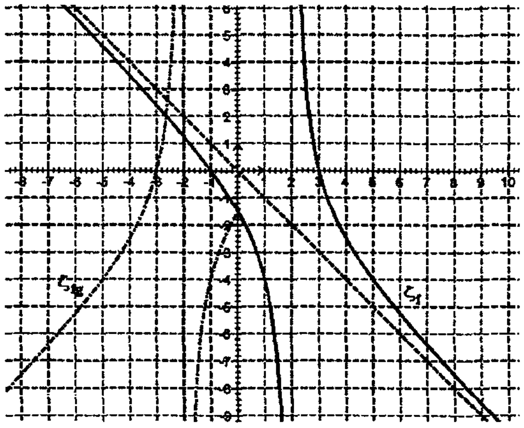
5)

x	0	1	2	3	4
f(x)	$-\frac{3}{2}$	-4	▨	0	$-\frac{5}{2}$

x	0	1
y	0	-1

6) a) $D_g=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$. Pour tout $x\in D_g$, on a $x\neq2$ et $x\neq-2 \Leftrightarrow -x\neq-2$ et $-x\neq2 \Leftrightarrow -x\in D_g$ et on a :

$g(-x)=|-x|+\frac{3}{|-x|-2}=|x|+\frac{3}{|x|-2}=g(x)$



donc g est une fonction paire alors $(O,\vec{i})$ est un axe de symétrie pour ζ_g b- voir figure.

7) $M(x,y)\in \zeta_f \cap D_k \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-x^2+2x+3}{x-2} \text{ et } x\in\mathbb{R}\setminus\{2\} \\ y=k \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R}\setminus\{2\} \\ \dfrac{-x^2+2x+3}{x-2}=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R}\setminus\{2\} \\ -x^2+2x+3=k(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R}\setminus\{2\} \\ -x^2+(2-k)x+3+2k=0:(E) \end{cases}$$

Si $x=2$, $-2^2+(2-k)2+3+2k=3\neq 0$ donc 2 n'est pas une solution de (E). on a : $\begin{cases} a=-1 \\ b=2-k \\ c=3+2k \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta_x = b^2-4ac=(2-k)^2-4\times(-1)\times(3+2k)=k^2+4k+16$. $\begin{cases} a'=1 \\ b'=4 \\ c'=16 \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta_k = b^2-4ac=16-64=-48>0$ donc $\Delta_x>0$ pour tout réel k car $a'>0$ d'où (E) admet deux racines distincts x' et x'' alors $\zeta_f\cap D_k=\{M(x',y');M(x'',y'')\}$. On pose $I(x,y)=M'*M''$ donc

$\begin{cases} x=\dfrac{x'+x''}{2}=\dfrac{-\frac{b}{a}}{2}=\dfrac{-\frac{(2-k)}{-1}}{2}=\dfrac{2-k}{2} \\ y=\dfrac{y'+y''}{2}=\dfrac{k+k}{2}=k \end{cases}$ donc $y=-2x+2$ alors l'ensemble des points I est la droite

D : y = -2 x +2

Exercice12 :: 1/ on suppose que (ζ_2) est la courbe de f $\Rightarrow$ f est strictement croissante sur $]-\infty,0]$ $\Rightarrow f'(x)\geq 0 \forall x\in]-\infty,0]$ $\Rightarrow \zeta_1$ est au-dessus de $y=0$ $\forall x\in]-\infty,0]$ ceci est impossible donc (ζ_2) est la courbe de f', 2/ Tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	1	↗	2	↘	-2	↗	1

Exercice n°13 :1) f est une fonction rationnelle donc f est dérivable sur son domaine de définition $D_f=\mathbb{R}$ car $x^2+x+1\neq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\frac{3x(x+5)}{(x^2+x+1)^2}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-2$. Le signe de f'(x) est celui de 3x(x+2).

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$, f(-2) = 2et f(0) = -2.

2) a) (T) = $f'(1)(x-1)+f(1)$ = 1.(x-1)+(-1) = x - 2 .

$$b) f(x)-y=\frac{x^2-2x-2}{x^2+x+1}-(x-2)=\frac{x^2-2x-2-(x-2)(x^2+x+1)}{x^2+x+1}=\frac{-x^3+2x^2-x}{x^2+x+1}=\frac{-x(x-1)^2}{x^2+x+1}$$

or pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2+x+1>0$ donc le signe de f(x) – y est celui de $-x(x-1)^2$.

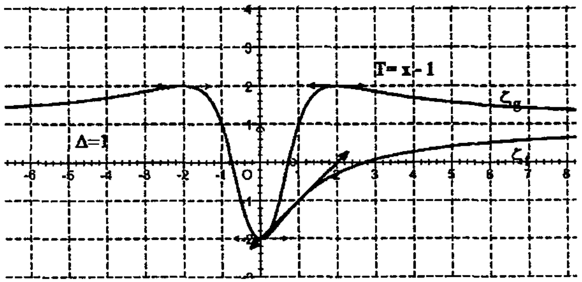
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de f(x) – y		-	0	+	0	+	
Position de (ζ_f) par rapport à (T)		Au dessous	confondue	Au dessus	confondue	Au dessous	

3)

x	-6	-4,5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	1,48	1,57	1,69	1,85	2	1	-2	-1	-0,28	0,07	,028

x	0	1
y	-2	-1

4) Les droites $D_m=x+m$ sont parallèles à (T). Donc pour tout réel m de]-2,+∞[, D_m coupent (ζ_f) en un seul point. Alors f(x) = x + m admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.



5) a) Pour tout $x\in\mathbb{R},(-x)\in\mathbb{R}$,

$$g(-x)=\frac{(-x)^2+2|-x|-2}{(-x)^2-|-x|+1}=\frac{x^2+2|x|-2}{x^2-|x|+1}=g(x)$$

donc g est paire.

b)pour tout $x\leq 0$, on a $|x|=-x$ donc $g(x)=\dfrac{x^2-2x-2}{x^2+x+1}=f(x)$ et on a g est paire alors l'axe $(O,\vec{j})$ est un axe de symétrie à (ζ_f). Soit (ζ') la représentation graphique de la restriction de f sur]-∞,0]. Donc $\zeta_g=\zeta'\cup S_{(O,\vec{j})}(\zeta')$

$$c)\ \lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2+2|x|-2}{x^2-|x|+1}+2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2+2|x|-2+2x^2-2|x|+2}{x^2-|x|+1}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{3x^2}{x(x^2-|x|+1)}$$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{x^2-|x|+1}=0$ donc g est dérivable en 0 et $g'(0)=0$.

<u>Exercice 14</u> :1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-2x+4}+x\right)\left(\sqrt{x^2-2x+4}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2-2x+4}-x\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x^2}-2x+4-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}-x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(-2+\frac{4}{x}\right)}{-x\left[\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}+1\right]}=\dfrac{-2}{-2}=1$ y = 1 est une asymptote oblique à ζ_f au voisinage de$(-\infty)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-2x+4}+x-2x+1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left[\sqrt{x^2-2x+4}-(x-1)\right]\left[\sqrt{x^2-2x+4}+(x-1)\right]}{\sqrt{x^2-2x+4}+(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x+4-x^2+2x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}+x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+1-\frac{1}{x}\right)}=0$

Donc $\Delta: y=2x-1$ est un asymptote oblique à ζ_f au voisinage de $(+\infty)$

3)a) $x\mapsto x^2-2x+4$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$

$x\mapsto\sqrt{x^2-2x+4}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+4}}+1=\dfrac{(x-1)+\sqrt{x^2-2x+4}}{\sqrt{x^2-2x+4}}$

Le signe de f(x) est celui de $x-1+\sqrt{x^2-2x+4}$,

$x\in[1,+\infty[:\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+4}\right)>0$

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	1	↗	$+\infty$

$x\in]-\infty,1]:\sqrt{x^2-2x+4}+(x-1)$

$=\dfrac{-3<0}{\sqrt{x^2-2x+4}-\underbrace{(x-1)}_{<0}}>0\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R}; f'(x)>0$

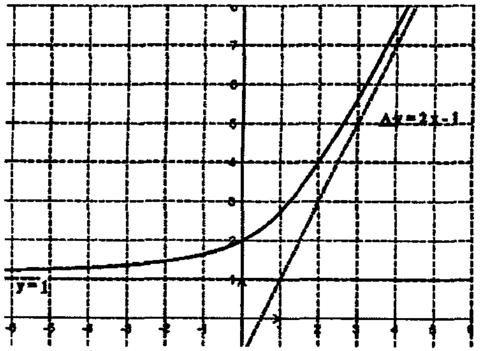
5)a)

$f(x+1)-1=\sqrt{(x+1)^2-2(x+1)+4}+x+1-1$

$=\sqrt{x^2+2x+1-2x-2+4}+x=\sqrt{x^2+3}+x=g(x)$

b) $f(x)\xrightarrow{t_{-\vec{j}}}f(x+1)\xrightarrow{t_{-\vec{j}}}f(x+1)-1$

$t_{\vec{u}}(\zeta_f)=\zeta_g$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})}$



EXERCICE 15 :1) a) Pour tout x on a : la fonction $x\mapsto x$ est dérivable sur IR ; $x\mapsto x^2+1$ est dérivable sur IR et $x^2+1>0$ donc $\sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur IR. $\forall$ x∈ IR On a : $g'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}x}{x^2+1}$

$=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{1+x^2}}$

b) $g'(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{1+x^2}}>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=2$; $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}1+\dfrac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}1+\dfrac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}1-\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=0$. On a pour tout x∈ IR ; $g(x)\in]0;1[$ signifie que $g(x)>0$ pour tout x∈ IR

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	-1	↗	$+\infty$

2) $f(x)=x-1+\sqrt{1+x^2}$.

a) $1+x^2>0$ et $x\to1+x^2$ dérivable sur IR donc f est dérivable sur IR

x	$-\infty$		$+\infty$
g'(x)		+	
g(x)	0	↗	2

et On a : $f'(x)=1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=g(x)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x-1+\sqrt{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)^2-x^2-1}{x-1-\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x}{x-1-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x}{x\left(1-\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{1-\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-\dfrac{2}{2}=-1$ alors la droite d'équation $y=-1$ est une asymptote horizontale à (ζ)

c)

$f'(x)=g(x)\geq0$

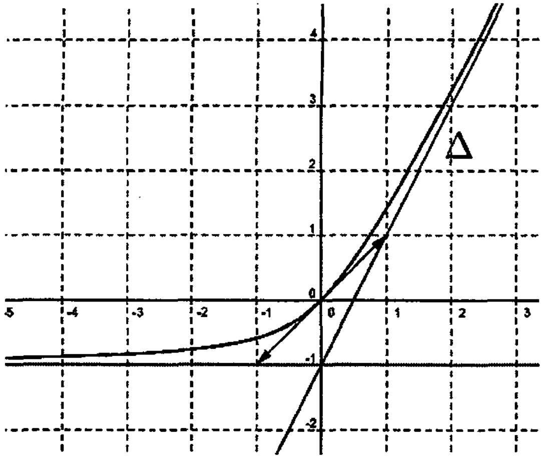
3) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+\sqrt{x^2+1}-2x+1\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$ alors la droite $\Delta: y=2x-1$ est une asymptote oblique (ζ) en $+\infty$.

b) $f(x)-y=\sqrt{x^2+1}-x$; On $x^2+1>x^2$ donc $\sqrt{x^2+1}>|x|\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}>x$ et $\sqrt{x^2+1}>-x$ ce qui donne $\sqrt{x^2+1}-x>0$ et par suite (ζ) est au-dessus de Δ.



c) $T: y=f'(0)\times x+f(0)\Leftrightarrow T: y=x$ Position de (ζ) et (T) : $f(x)-y=x-1+\sqrt{1+x^2}-x=\sqrt{1+x^2}-1>0$ donc (ζ) est au-dessus de (T) .d) voir figure

Exercice n°1 : 1)b , 2) b) 3) b), 4)a) π b) sin(2x) c) ***Un axe de symétrie d'équation : x=0

Exercice n°2 : 1) a) 2) c) 3) c) 4) b) 5) a)

Exercice N°3:1) $f(x)=\sin 2x$, f est définie et continue sur IR ; f est périodique et de période $T=\pi$; f est une fonction impaire ; il suffit d'étudier f sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

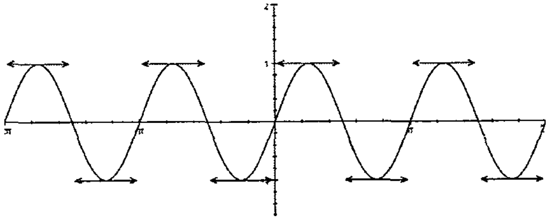
x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f'(x)	2	+	0	−	
f(x)	0	↗	1	↘	0

On désigne par Γ la courbe représentative de la restriction de la fonction f à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et par (Γ') la symétrique de Γ par rapport à l'origine du repère.

Soit $\zeta_O=\Gamma\cup\Gamma'$ la courbe représentative de la restriction de f à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Posons ζ_K : l'image de ζ_O par la translation de vecteur $k\pi\vec{i}$ où $k\in\mathbb{Z}$. Donc ζ est la réunion de toutes les courbes ζ_K lorsque k varie dans $\mathbb{Z}$ .f est dérivable sur IR et $f'(x)=2\cos 2x$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
f(x)	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0



2) $g(x)=|\sin 2x|$. La courbe représentative de g est la réunion de la partie de ζ située au dessus de l'axe des abscisses et de la symétrique par rapport à l'axe des abscisses de la partie de ζ située au-dessous de l'axe des abscisses.

3) g est périodique et de période $T=\frac{\pi}{2}$

Exercice n°4 :1) $D_f=\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $(-x)\in\mathbb{R}$: f(-x) = 2cos(-x) + cos(-2x) = 2cos(x) + cos(2x) = f(x).

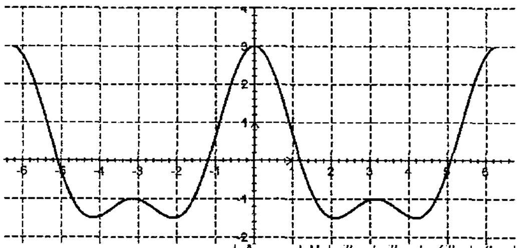
Donc f est paire. Pour tout réel x, $(x+2\pi)\in\mathbb{R}$,

$f(x+2\pi)=2\cos(x+2\pi)+\cos(2(x+2\pi))=2\cos(x)+\cos(2x+4\pi)=2\cos(x)+\cos(2x)=f(x)$ donc f est périodique et de période 2π. D'où il suffit d'étudier sur $[-\pi,\pi]$, or f est paire donc $(O,\vec{i})$ est un axe de symétrie de ζ_f. Ainsi il suffit d'étudier f sur $[0,\pi]$.

2) f est dérivable sur $[0,\pi]$. $f'(x)$=-2sinx-2sin2x=-2(sinx+sin2x)=-2(sinx+2cosx.sinx) = -2 sinx (1+2cosx).

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \sin x=0 \text{ ou } 1+2\cos x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ \text{ou}\\ x=\pi\end{cases} \text{ ou } \cos x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ \text{ou}\\ x=\pi\end{cases} \text{ ou } x=\frac{2\pi}{3}$$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
f'(x)	0	−	0	+	0
f(x)	3	↘	-1,5	↗	-1



x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
f(x)	3	0,5	-1	-1,5	-1

3) f(x) = -1 sig 2cosx + cos2x = -1

sig 2cosx+ $2\cos^2(x)$-1=-1 sig 2cosx(1+cosx) = 0 sig

cosx = 0 ou cosx = -1 sig

$x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ ou $x=\pi+2k'\pi, k'\in\mathbb{Z}$

donc $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{\pi+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$ et $S_{[0,\pi]}=\left\{\frac{\pi}{2},\pi\right\}$.

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-3}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$ car f est dérivable en 0 Donc $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-3}{x}=0$

Exercice5 :1)

$f(x+2\pi)=2\sin^2(x+2\pi)+4\sin(x+2\pi)=2\sin^2 x+4\sin$

donc f est 2π − périodique

$f'(x)=4\cos x\sin x+4\cos x=4\cos x(\sin x+1)$

$\forall x\in[-\pi,\pi]; f'(x)=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos x=0\Rightarrow x=-\frac{\pi}{2} \text{ ou } x=\frac{\pi}{2}\\ \text{ou } \sin x+1=0\Rightarrow \sin x=-1\Rightarrow-\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
cos(x)		-	0	+	0	-	
sin(x) + 1		+	0	+		+	
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)	0	↘	-2	↗	6	↘	0

$f(-\pi)=2\sin^2(-\pi)+4\sin(-\pi)=0$

$f(-\frac{\pi}{2})=2\sin^2(-\frac{\pi}{2})+4\sin(-\frac{\pi}{2})=2\times(-1)^2+4\times(-1)=2-4=-2$

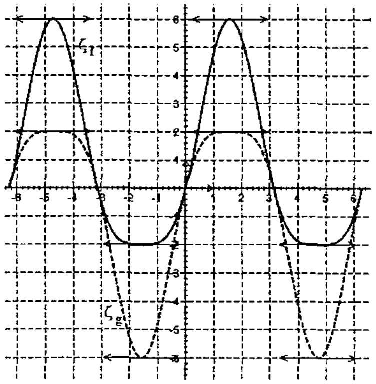
$f(\frac{\pi}{2})=2\sin^2(\frac{\pi}{2})+4\sin(\frac{\pi}{2})=2\times(1)^2+4\times1=2+4=6$,

$f(\pi)=2\sin^2(\pi)+4\sin(\pi)=0$

2) $f(x)=0\Rightarrow 2\sin^2(x)+4\sin(x)=0\Rightarrow 2\sin(x)(\sin x+2)=0$ or $\sin x+2\neq0\Rightarrow\sin x=0\Rightarrow x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow\zeta\cap(O,\vec{i})=\{M_k(k\pi,0),k\in\mathbb{Z}\}$

4)a)voir figure



$g(x)+f(x+\pi)=-2\sin^2 x+4\sin x+2\sin^2(x+\pi)+4\sin(x+\pi)$

$=-2\sin^2 x+4\sin x+2(-\sin x)^2-4\sin x=-2\sin^2 x+4\sin x+2\sin^2 x-4\sin x=0$

b) $g(x)+f(x+\pi)=0 \Rightarrow g(x)=-f(x+\pi)$. on pose $\zeta'=t_{-\pi\vec{i}}(\zeta_f)$ donc $\zeta_g=S_{(o,\vec{i})}(\zeta')$

Exercice n°6 1) Pour tout réel x de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $0\le\cos^2 x\le 1$ et $0\le\cos^2(3x)\le 1$ Ainsi $0\le f(x)\le 2$. Comme $0=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $2=f(0)$ Alors le réel 2 est le maximum de f sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ Puisque f est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ Alors $f\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)=[0;2]$.

2) a) g est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ Alors l'image de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ est un intervalle fermé borné, c'est-à-dire, il existe deux réels a et b tels que $g\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)=[a;b]$ Or pour tout x de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $g(x)\le 2$ et $g(0)=2$ Alors $b=2$

Par suite $f\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)=[a;2]$ De plus $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}=0$ Alors $a\le 0$

b) $g\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{9\pi}{8}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{8}\right)=\sin\frac{\pi}{8}-\cos\frac{\pi}{8}$

c) $\left[g\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right]^2=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)-2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=1-\sin\frac{\pi}{4}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

d) Comme $\sin\frac{\pi}{8}<\cos\frac{\pi}{8}$ Alors $g\left(\frac{3\pi}{8}\right)<0$ Par conséquent $g\left(\frac{3\pi}{8}\right)=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$.

Puisque $g\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)=[a;2]$ Alors $a\le-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$ de plus si $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ alors $3x\in\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$

Par conséquent $-1\le g(x)\le 2$ Ainsi $-1\le a$.

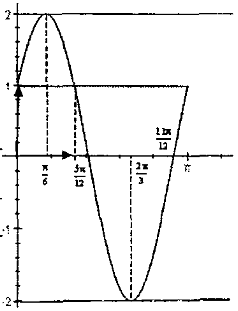
Conclusion : $a\in\left[-1;-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\right]$

Exercice N° 7 :1) $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-2\sin^2 x+1=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$; $r=2$; $\varphi=\frac{\pi}{3}$ d'où $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

2) $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$; $D_f=\mathbb{R}$.

Période : π, Intervalle d'étude $[0;\pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$2x-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$		0		π		$\frac{5\pi}{3}$
f'(x)		+		−		+	
f(x)	1	↗	2	↘	−2	↗	−1

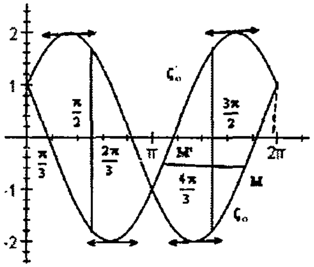


Pour $x\in D_f$; $f'(x)=-4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ Soit ζ_O la représentation graphique de la restriction de f à $[0;\pi]$, et ζ_k l'image de ζ_O par la translation $t_{k\pi\vec{i}}$. ζ est la réunion de toutes les courbes ζ_k pour $k\in\mathbb{Z}$

Exercice N° 8 :1) a) $f(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$; $D_f=\mathbb{R}$; f est périodique de période 2π, intervalle d'étude $[0;2\pi]$; f est dérivable sur IR et pour $x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$x-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$		0		π		$\frac{5\pi}{3}$
f'(x)		+		−		+	
f(x)	1	↗	2	↘	−2	↗	1

b) $g(x)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$; $D_g=\mathbb{R}$; période 2π ;



x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$x+\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$		0		2π		$\frac{7\pi}{3}$
f'(x)		−	○	+	○	−	
f(x)	1	↘	−2	↗	2	↘	1

$g'(x)=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ Soit ζ_O la courbe représentative de la restriction de f à $[0;2\pi]$ et et ζ_k l'image de ζ_O par la translation $t_{2k\pi\vec{i}}$. ζ est la réunion de toutes les courbes ζ_k pour $k\in\mathbb{Z}$. Soit ζ'_O la courbe représentative de la restriction de f à $[0;2\pi]$ et ζ'_O l'image de ζ'_O par la translation $t_{2k\pi\vec{i}}$; ζ' est la réunion de toutes les courbes ζ'_k pour $k\in\mathbb{Z}$. Soit $M\left(x;2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ un point de ζ et $M'\left(x-\frac{2\pi}{3};2\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\right)$ un point de ζ'. $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}-\frac{2\pi}{3}\\0\end{pmatrix}$ d'où $M'=t_{-\frac{2\pi}{3}\vec{i}}(M)$ et par suite ζ' est l'image de ζ par $t_{-\frac{2\pi}{3}\vec{i}}$

2) $h(x)=|\cos x|+\sqrt{3}|\sin x|$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\lvert\cos x\rvert$		$\cos x$		$-\cos x$		$-\cos x$		$\cos x$	
$\lvert\sin x\rvert$		$\sin x$		$\sin x$		$-\sin x$		$-\sin x$	
h(x)		$\cos x+\sqrt{3}\sin x$		$-\cos x+\sqrt{3}\sin x$		$-\cos x-\sqrt{3}\sin x$		$\cos x-\sqrt{3}\sin x$	
h(x)		$2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$		$-2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$		$-2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$		$2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$	
h(x)		f(x)		−g(x)		−f(x)		g(x)	

Exercice n°9 : 1) On a f est périodique de période $\frac{2\pi}{2}=\pi$; f est dérivable sur $[0;\pi[$ et pour tout $x \in [0;\pi[$ on a : $f'(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

2) Soit C_1 la partie de la courbe de f sur $[0;\pi]$. $\zeta_f = t_{k\pi\vec{i}}(C_1);k\in\mathbb{Z}$

CONSTRUIRE LA COURBE

3) si $x\in[-\pi;\pi]$ alors $-x\in[-\pi;\pi]$; $g(-x)=g(x)$ alors g est paire.

Si $x\in[0;\pi]$; $g(x)=-\sin\left(2|x|+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ car $x\in[0;\pi]$ signifie $g(x)=-f(x)$.

Soit $C_1^{'}$ la partie de la partie de la courbe de g sur $[0;\pi]$ donc $C_1^{'}=S_{(o;\vec{i})}(C_1)$ ainsi $\zeta_g = C_1^{'}\cup S_{(o;\vec{j})}(C_1^{'})$

Exercice n°10 :1) On a $D_f = IR$; pour tout $x\in IR$ on a : $2\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)-x=-\pi-x\in IR$

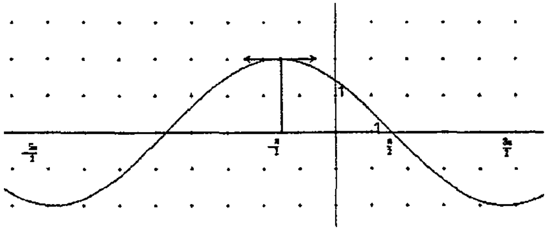
$f(-\pi-x)=2\cos\left(\frac{1}{2}(-\pi-x)+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(-\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$ Donc la droite $D:x=-\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie à la courbe de f.

2) pour tout $x\in IR$ on a : $2\times\left(\frac{\pi}{2}\right)-x=\pi-x\in IR$ $f(\pi-x)=2\cos\left(\frac{1}{2}(\pi-x)+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$

$=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)\right)=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=-2\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)=-f(x)=2\times0-f(x)$.

Donc $E\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ est un centre de symétrie à la courbe de f.

	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	2	↘	0



3) On a f est périodique de période $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$;

puisque $D:x=-\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie, on peut se limiter à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ or $E\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ est un centre de symétrie donc on va étudier f sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ Pour tout $x\in IR$ on a :

$f'(x)=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$. On a $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0\le\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow f'(x)\le 0$

$\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ .Au point $A\left(-\frac{\pi}{2};2\right)$ on a une *demi-tangente horizontale*. La courbe de f sera l'image de C_0 par la translation de vecteur $4\pi k\vec{i}$

EXERCICE 1 : Puisque la population augmente de 3 %, le coefficient multiplicateur associé est 1,03 donc $U_1 = 34000\times1,03 = 35020$. Calculons $U_2 = 35020\times1,03 = 36071$

a. Pour tout entier naturel *n*, $U_{n+1} = 1,03\,U_n$.

b. La suite (U_n) est une suite géométrique de raison 1,03 car on passe d'un terme au suivant en le multipliant par 1,03. Le premier terme est 34 000.

c. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison *q* est $U_n = U_0.q^n$. Ici nous avons $U_n = 34000\times(1,03)n$.

2. Selon ce modèle :

a. Calculons la population de la ville A au 1er janvier 2012. en 2012,*n* = 5, $U_5 = 34000\times1,035 = 39415$

b. À partir de 2021 la population de la ville A dépassera les 50 000 habitants car en 2020, *n* = 13 et $U_{13} = 34000\times1,0313 = 49930$, $U_{14} = 34000\times1,0314 = 51428$.

EXERCICE 2 :

1. $V_1 = 45000-500 = 44500$. Calculons $V_2 = 44500-500 = 44000$

2. a. Pour tout entier naturel *n*, $V_{n+1} = V_n - 500$·

b. La suite (V_n) est une suite arithmétique de raison −500 et de premier terme 45 000, car on passe d'un terme au suivant en lui ajoutant un même nombre −500.

c. Le terme général d'une suite arithmétique de premier terme V_0 et de raison *r* est $V_n = V_0 + nr$ d'où $V_n = 45000-500n$.

3. $V_5 = 45000-5\times500 = 42500$. Selon ce modèle, la population de la ville B au 1 en janvier 2012 sera de 42 500 habitants.

EXERCICE 3:1) a) $U_0=-1$; $U_1-U_0=1\Leftrightarrow U_1=1+U_0=0$; $U_2-U_1=2\Leftrightarrow U_2=2+U_1=2$

b) $U_0+U_2=1$ et $2U_1=0$; on a $U_0+U_2\ne 2U_1$ donc (U_n) n'est pas arithmétique.

2) a) $V_n=U_{n+1}-U_n=n+1$; $V_{n+1}-V_n=1\Rightarrow(V_n)$ est arithmétique de premier terme $V_0=1$ et de raison $r=1$

b) $S_n=V_0+V_1+......+V_n=\frac{(n+1)(V_0+V_n)}{2}=\frac{(n+1)(1+n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

3) $S_n=V_0+V_1+......+V_n=(U_1-U_0)+(U_2-U_1)+......+(U_{n+1}-U_n)=U_{n+1}-U_0=U_{n+1}+1$

4) On a : $1+U_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\Leftrightarrow U_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1$ et par suite $U_n=\frac{n(n+1)}{2}-1$.

EXERCICE 4 :1) $V_n=U_{n+1}-U_n\Leftrightarrow V_{n+1}=U_{n+2}-U_{n+1}=2U_{n+1}-2U_n=2(U_{n+1}-U_n)=2V_n$

Donc (V_n) est géométrique de raison $q=2$

2) $V_n=V_0.q^n$; $V_0=U_1-U_0=1$ donc $V_n=2^n$. 3) $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}V_k=V_0\frac{1-q^n}{1-q}=1\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$

4) $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}V_k=(U_1-U_0)+(U_2-U_1)+......+(U_n-U_{n-1})=U_n-U_0\Leftrightarrow 2^n-1=U_n-1$ donc $U_n=2^n$

EXERCICE 5 :1) $\sum_{k=0}^{n-1}(U_{k+1}-U_K)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2^k}+k\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=0}^{n-1}k$ or $\frac{1}{2^n}$ est le terme général d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$ donc $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}=1\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ et

$\sum_{k=0}^{n-1}k=1+2+3+...+(n-1)=\frac{n(n+1)}{2}$ d'où $\sum_{k=0}^{n-1}(U_{k+1}-U_K)=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{n(n-1)}{2}=2-\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{2}$

2) On a $\sum_{k=0}^{n-1}(U_{k+1}-U_K)=(U_1-U_0)+(U_2-U_1)+...+(U_n-U_{n-1})=U_1-U_0+U_2-U_1+.....+U_n-U_{n-1}$

$=U_n-U_0=2-\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{2}\Leftrightarrow U_n-3=2-\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{2}\Leftrightarrow U_n=5-\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{2}$

EXERCICE 6:1) soit $k\in IN^*$; $\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2}=\frac{k^2+2k+1-k^2}{k^2(k+1)^2}=\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

2) $k\in IN^*$; $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right)+......+\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=1-\frac{1}{(n+1)^2}$

$=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

Exercice 7 :1) $V_{n+1}=X^{n+1}=X.X^n=X.V_n$ donc (V_n) est une suite géométrique de raison X.

2) $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}V_k=1+X+X^2+......+X^n=\frac{1-X^{n+1}}{1-X}$

3) D'après 2) On a $X^{n+1}-1=(X-1)(1+X+X^2+......+X^n)$; On prend $X=2$, On obtient

$2^{n+1}-1=1+2+2^2+....+2^n\Leftrightarrow 2^{n+1}=2+2+2^2+......+2^n$

$\Leftrightarrow 2^n\times 2=2+2(1+2+.....+2^{n-1})\Leftrightarrow 2^n=1+(2^0+2^2+.....+2^{n-1})$.

Soit $S'=2^0+2^2+.....+2^{n-1}$ on remarque que cette somme comporte n termes tous supérieurs ou égal à 1 donc $S'\geq n$ et par suite $2^n\geq 1+n$

Exercice 8:1)Voici la liste des premiers nombres obtenus en partant de 2 332 011

1	2	3	4	5	6
2 332 011	28	68	100	1	1

La suite obtenue est stationnaire à partir du rang 5, et tous les nombres suivants sont égaux à 1. Si le premier nombre est 2 332 011, le 2011ème nombre de la suite est 1.

2)Si le nombre de départ est 1 248, la liste des premiers nombres obtenus est

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1248	85	89	145	42	20	4	16	37	58	89	145	42
		1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*1*	*2*	...

On observe qu'à partir du rang 3, une série de 8 nombres se répètera. 2011= 2 + 250×8 + 1.
Ainsi, le 2011ème nombre de la suite sera le 1 nombre de la série de nombres répétée.
Le 2011ème nombre de la suite est 89.

EXERCICE 9 :1) $U_1=1$; $U_2=\frac{5}{4}$ et $U_3=\frac{49}{36}$

2) a) $\frac{1}{k^2}-\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\frac{k-1-k^2+k^2-k}{k^2(k-1)}=\frac{-1}{k^2(k-1)}<0$ car $k>0$ donc $\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$

b) Pour $n=1$, on a $U_1=1\leq 2-\frac{1}{1}$. soit $p\in IN$, supposons que $U_p\leq 2-\frac{1}{p}$ et montrons que $U_{p+1}\leq 2-\frac{1}{p+1}$.

On a $U_{p+1}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+.....+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{(p+1)^2}=U_p+\frac{1}{(p+1)^2}$ d'après a) on a : $\frac{1}{(p+1)^2}\leq\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}$ et $U_p\leq 2-\frac{1}{p}$

Donc $U_{p+1}\leq 2-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\Leftrightarrow U_{p+1}\leq 2-\frac{1}{p+1}$. Conclusion : $\forall n\in IN$; On a $U_n\leq 2-\frac{1}{n}$

EXERCICE10 :1) $S_n=\sum_{k=1}^{n}U_k=U_1+U_2+.....+U_{n-1}+U_n$;

$S_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}U_k=U_1+U_2+.....+U_{n-1}+U_n+U_{n+1}$

$\Leftrightarrow U_{n+1}=S_{n+1}-S_n=2(n+1)^2+(n+1)-(2n^2+n)=4n+3$ d'où pour tout $n\in IN^*$;

On a $U_n=4(n-1)+3=4n-1$

2) pour tout $n\in IN$; $U_{n+1}=4n+3$; $U_{n+1}-U_n=4n+3-4n+1=4$ d'où $(U_n)_{n\in IN^*}$ est une suite arithmétique de raison $r=4$.

3) $V_{n+1}=\frac{V_n}{\sqrt{1+4V_n^2}}$; $n\in IN^*$; $V_1=\frac{1}{2}$

a) On a : $V_1=\frac{1}{2}>0$, soit $p\in IN$, supposons que $V_p>0$ et montrons que $V_{p+1}>0$. On a $V_p>0$

$\Leftrightarrow\sqrt{1+4V_p^2}>0$ donc $\frac{V_p}{\sqrt{1+4V_p^2}}>0$ d'où $V_{p+1}>0$ .Conclusion : $\forall n\in IN^*$; on a : $V_n>0$

b) $V_1=\frac{1}{2}\Rightarrow V_1^2=\frac{1}{4}=\frac{1}{1+U_1}$ soit $p\in IN$, supposons que $V_p^2=\frac{1}{1+U_p}$ et montrons que $V_{p+1}^2=\frac{1}{1+U_{p+1}}$. On a

$V_{p+1}^2=\frac{V_p^2}{1+4V_p{}^2}=\frac{\frac{1}{1+U_p}}{1+\frac{4}{1+U_p}}=\frac{1}{U_p+5}=\frac{1}{1+U_p+4}$ or $U_p+4=U_{p+1}$ d'où $V_{p+1}^2=\frac{1}{1+U_{p+1}}$.

Conclusion : $\forall n\in IN^*$; on a : $V_n^2=\frac{1}{1+U_n}$

c) On a : $U_n = 4n-1$ d'où $V_n^2 = \frac{1}{4n} \Leftrightarrow V_n = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ car $V_n > 0$

EXERCICE 11 : 1)Pour $n=0$ On a $U_0 = 1$; $0 < U_0 < 2$. Soit $p \in IN$, supposons que $0 < U_p < 2$ et montrons que $0 < U_{p+1} < 2$ .On a $0 < U_p < 2 \Leftrightarrow 2 < U_p + 2 < 4$ d'où

$\sqrt{2} < \sqrt{U_p+2} < 2 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{U_p+2} < 2 \Leftrightarrow 0 < U_{p+1} < 2$

Conclusion : d'après le principe de raisonnement par récurrence On a $\forall n \in IN$; $0 < U_n < 2$

2)a) $2 - U_{n+1} = 2 - \sqrt{U_n+2} = \frac{4-(U_n+2)}{2+\sqrt{U_n+2}} = \frac{2-U_n}{2+\sqrt{U_n+2}}$,

puisque $2+\sqrt{U_n+2} > 2$ signifie $\frac{1}{2+\sqrt{U_n+2}} < \frac{1}{2}$ et par suite $2 - U_n < \frac{2-U_n}{2} = \frac{1}{2}(2-U_n)$

b)Pour $n=0$ on a $2 - U_0 = 2-1 = 1$ donc $0 < 2 - U_0 \le \frac{1}{2^0} = 1$. Soit $p \in IN$, supposons que $2 - U_p \le \left(\frac{1}{2}\right)^p$ et montrons que $2 - U_{p+1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}$. On a d'après a) $2 - U_{p+1} \le \frac{1}{2}(2-U_p) \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^p$ donc $2 - U_{p+1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}$.

Conclusion : d'après le principe de raisonnement par récurrence on a $\forall n \in IN ; 0 < 2 - U_{p+1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3)a)On a : $U_0 = 1 = 2\times\cos\frac{\pi}{3.2^0}$. soit $p \in IN$, supposons que $U_p = 2\cos\frac{\pi}{3.2^p}$ et montrons que $U_{p+1} = 2\cos\frac{\pi}{3.2^{p+1}}$.

$U_{p+1} = \sqrt{U_p+2} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{3.2^p}} = \sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{3.2^p}\right)} = \sqrt{2\left(1+\cos.2\frac{\pi}{3.2^{p+1}}\right)} = \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\pi}{3.2^{p+1}}\right)}$

$= 2\cos\frac{\pi}{3.2^{p+1}}$. Conclusion : $\forall n \in IN ; U_n = 2\cos\frac{\pi}{3.2^n}$

b)pour $n = 2 ; U_2 = 2\cos\frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \frac{U_2}{2}$.On a $U_1 = \sqrt{2+U_0} = \sqrt{3}$;

$U_2 = \sqrt{2+\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

EXERCICE 12 : 1)La nème ligne comporte 2n-1 termes.

Le dernier élément de la nème ligne est n^2 en effet, c'est exact pour n=1 et si c'est exact pour n, la (n+1)ème ligne comporte 2(n+1)-1=2n+1 de n^2+1 à $n^2+2n+1=(n+1)^2$. L'entier écrit au bout de la 18ème ligne est donc 182324.

2) On a la double inégalité : $44^2 < 1936 < 2010 < 2025\ 45^2$

2010 est donc écrit sur la 45ème ligne de premier terme 1937.

De 2010 =1936 +74 on déduit que 2010 est le 74ème terme de la 45ème ligne.

EXERCICE 13: Le "compris entre" de l'énoncé doit être...compris au sens large, c'est-à-dire les âges des 26 personnes sont chacun des entiers allant de 35 (compris) à 60 (compris), ce qui fait bien 60-34=26 entiers.Considérons la personné âgée de 60 ans et celle à sa droite ; reste 24 personnes que l'on peut partager en 6 groupes de 4 personnes assises côte à côte.

Si aucun groupe de 4 personnes assises côte à côte n'avait pas une somme des âges ≤ 190, c'est que tout groupe de 4 personnes assises côte à côte aurait une somme des âges ≤ 190 et la somme des âges des 26 personnes serait >60+35+6×190=1235; mais en fait la somme des âges des 26 personnes est 35+36+...+60=26×(35+60)/2=1235 (voir suites arithmétiques) et comme 1235 n'est pas supérieur strictement à 1235 il y a contradiction. Il est donc impossible qu'aucun groupe de 4 personnes assises côte à côte n'ait une somme des âges ≤ 190, c'est-à-dire il existe effectivement au moins un groupe de 4 personnes assises côte à côte dont la somme des âges est ≤ 190.

Exercice N° 14: 1) a) ; 2)b) ; 3) b) ; 4)b) ;5)c) ; 6) c) ;7)a)

10)a) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{2}{(-3)^n}+1}{\frac{1}{(-3)^n}+5} = \frac{1}{5}$

EXERCICE 15 :1) a) $U_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$; $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}}.\frac{3^n}{n} = \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ on a $\forall n \in IN^*$;

$1+\frac{1}{n} \le 2$ donc $\forall n \in IN^*$; $\frac{U_{n+1}}{U_n} \le \frac{2}{3}$

b) Puisque $\frac{U_{n+1}}{U_n} \le \frac{2}{3} < 1$ donc (U_n) est décroissante.

c) On a :
$$\left.\begin{array}{l} \frac{U_n}{U_{n-1}} \le \frac{2}{3} \\ \frac{U_{n-1}}{U_{n-2}} \le \frac{2}{3} \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \frac{U_2}{U_1} \le \frac{2}{3} \end{array}\right\} n-1 \text{ termes}$$

On fait le produit membre à membre on obtient : $\frac{U_n}{U_{n-1}} \times \frac{U_{n-1}}{U_{n-2}} \times \ldots\ldots\ldots \times \frac{U_2}{U_1} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ signifie que

$\frac{U_n}{U_1} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Leftrightarrow U_n \le \frac{1}{3}.\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$

2) $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$; $\frac{S_{n+1}}{S_n} = 1 + \frac{U_{n+1}}{S_n} > 1$ car $U_{n+1} > 0$ et $S_n > 0$ donc (S_n) est croissante ; de même on a :

$U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$; $\forall n \in IN^*$ donc $S_n \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$. On a $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{3}.\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 2\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \leq 2$ d'où $S_n \leq 2$

Conclusion : (S_n) est croissante, majorée par 2.

EXERCICE 16: 1)Pour $n = 0$; on a $U_0 = 0$ alors $0 < U_0 < \sqrt{2}$. Soit $p \in IN$, supposons que $0 < U_p < \sqrt{2}$ et montrons que $0 \leq U_{p+1} < \sqrt{2}$. On a $0 < U_p < \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 < U_p^2 + 2 < 4$ d'où

$\Leftrightarrow -2 < -U_p^2 < 0 \Leftrightarrow 2 < 4 - U_p^2 < 4 \Leftrightarrow \sqrt{2} < \sqrt{4-U_p^2} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{4-U_p^2}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow 1 < \frac{2}{\sqrt{4-U_p^2}} < \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 < U_{p+1} < \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 < U_{p+1} < \sqrt{2}$ ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence On a $\forall n \in IN$; $0 < U_n < \sqrt{2}$

2) a) $U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{4}{4-U_n^2} - U_n^2 = \frac{4 - U_n^2(4-U_n^2)}{4-U_n^2} = \frac{U_n^4 - 4U_n^2 + 4}{4-U_n^2}$.

b) $U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{U_n^4 - 4U_n^2 + 4}{4-U_n^2} = \frac{(U_n^2-2)^2}{4-U_n^2}$ on a :

$0 < U_n < \sqrt{2} \Rightarrow 0 < U_n^2 < 2 \Rightarrow -2 < -U_n^2 < 0 \Rightarrow 2 < 4 - U_n^2 < 4 \Rightarrow 0 < 4 - U_n^2$

et comme on a : $(U_n^2-2)^2 > 0$ alors $U_{n+1}^2 - U_n^2 > 0$, $U_{n+1} > U_n$

3) a) $V_n = \frac{2+U_n^2}{2-U_n^2}$; $V_{n+1} = \frac{2+U_{n+1}^2}{2-U_{n+1}^2} = \frac{2+\frac{4}{4-U_n^2}}{2-\frac{4}{4-U_n^2}} = \frac{8-2U_n^2+4}{8-2U_n^2-4} = \frac{12-2U_n^2}{4-2U_n^2} = \frac{6-U_n^2}{2-U_n^2}$.

$V_{n+1} - V_n = \frac{6-U_n^2-2-U_n^2}{2-U_n^2} = \frac{4-2U_n^2}{2-U_n^2} = \frac{2(2-U_n^2)}{2-U_n^2} = 2$ et par suite (V_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$

b) $V_n = V_0 + nr$; $V_0 = \frac{2+U_0^2}{2-U_0^2} = 1$ donc $V_n = 1 + 2n$

c) $V_n = \frac{2+U_n^2}{2-U_n^2} \Leftrightarrow U_n^2 = \frac{2(V_n-1)}{V_n+1} \Leftrightarrow U_n = \sqrt{\frac{2(V_n-1)}{V_n+1}} \Leftrightarrow U_n = \sqrt{\frac{2(2n)}{2n+2}} \Leftrightarrow U_n = \sqrt{\frac{4n}{2(n+1)}}$

$\Leftrightarrow U_n = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$

4) $S_n = \sum_{k=1}^{n}(kU_{k-1}^2)$, On a $U_{k-1} = \sqrt{\frac{2(k-1)}{k}} \Leftrightarrow U_{k-1}^2 = \frac{2(k-1)}{k} \Leftrightarrow kU_{k-1}^2 = 2(k-1)$ donc S_n est la somme de n termes d'une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $0 \Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2k = 2\frac{n(n-1)}{2} = n(n-1)$.

5) a) $n \in IN$; On a : $0 \leq U_n < \sqrt{2}$ ce qui donne que $|U_n - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - U_n$ donc

$|U_n - \sqrt{2}| = \frac{(\sqrt{2}-U_n)(U_n+\sqrt{2})}{U_n+\sqrt{2}} = \frac{2-U_n^2}{U_n+\sqrt{2}} = \frac{2-\frac{2n}{n+1}}{U_n+\sqrt{2}} = \frac{2}{n+1}.\frac{1}{U_n+\sqrt{2}}$. On a : $0 < \frac{1}{U_n+\sqrt{2}} \leq 1$ car $U_n > 0$ et $U_n + \sqrt{2} > 1$ donc $= \frac{2}{n+1}.\frac{1}{U_n+\sqrt{2}} \leq \frac{2}{n+1}$ ce qui donne que $|U_n - \sqrt{2}| \leq \frac{2}{n+1}$

b) On a : $|U_n - \sqrt{2}| \leq \frac{2}{n+1}$; $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}(U_n - \sqrt{2}) = 0$ donc $\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = \sqrt{2}$

EXERCICE 17 : 1) a) $U_1 = 3$; $U_2 = \frac{10}{3}$

b) On a $U_1 - U_0 = 1$; $U_2 - U_1 = \frac{1}{3}$ on a $U_2 - U_1 \neq U_1 - U_0 = 1$ donc la suite (U_n) n'est pas arithmétique

On a $\frac{U_1}{U_0} = \frac{3}{2}$; $\frac{U_2}{U_1} = \frac{10}{9}$ on a $\frac{U_2}{U_1} \neq \frac{U_1}{U_0}$ donc la suite (U_n) n'est pas géométrique.

2) Pour $n = 0$; $U_0 = 2 < 4$; soit $p \in IN$; supposons que $U_p < 4$ et montrons que $U_{p+1} < 4$.

$U_{p+1} - 4 = \frac{2U_p - 16}{U_p - 6} - 4 = \frac{-2U_p + 8}{U_p - 6} = \frac{2(4-U_p)}{U_p-6} < 0$ car $4 - U_p > 0$ et $U_p - 6 < 0$ d'où $\forall p \in IN$ On a $U_{p+1} < 4$

Conclusion : d'après le principe de raisonnement par récurrence On a $\forall n \in IN$; $U_n < 4$

3) Soit $n \in IN$;

$U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n - 16}{U_n - 6} - U_n = \frac{2U_n - 16 - U_n(U_n-6)}{U_n-6} = \frac{-U_n^2 + 8U_n - 16}{U_n - 6} = \frac{-(U_n-4)^2}{U_n-6} > 0$ car $U_n - 6 < 0$

donc $U_{n+1} - U_n > 0$ ainsi (U_n) est croissante.

4) a) $V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}-4} = \frac{1}{\frac{2U_n-16}{U_n-6}-4} = \frac{1}{\frac{2(4-U_n)}{U_n-6}} = \frac{U_n-6}{2(4-U_n)} = -\frac{6-U_n}{2(4-U_n)} = -\frac{2+4-U_n}{2(4-U_n)} = -\left(\frac{1}{4-U_n}+\frac{1}{2}\right)$

$= -\frac{1}{2} + V_n$ donc $V_{n+1} = V_n - \frac{1}{2}$ d'où la suite (V_n) est arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$.

b) $V_n = V_0 + nr = -\frac{1}{2}(1+n); n \in IN$; $U_n = 4 + \frac{1}{V_n} = \frac{4n+2}{n+1}$. c) $\lim_{n\to+\infty} V_n = -\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} U_n = 4$.

EXERCICE 18 :1) $U_1=\frac{6}{5}$; $U_2=\frac{1}{5}U_1+\frac{4}{5}=\frac{6}{25}+\frac{20}{25}=\frac{26}{25}$; $U_3=\frac{1}{5}U_2+\frac{4}{5}=\frac{26}{125}+\frac{100}{125}=\frac{126}{125}$;

$U_4=\frac{1}{5}U_3+\frac{4}{5}=\frac{126}{625}+\frac{500}{625}=\frac{626}{625}$ $U_5=\frac{1}{5}U_4+\frac{4}{5}=\frac{626}{3125}+\frac{2500}{3125}=\frac{3126}{3125}$

2) On a $U_1=\frac{6}{5}>1$; soit $p\in \mathrm{IN}$, supposons que $U_p>1$ et montrons que $U_{p+1}>1$.

$U_p>1 \Leftrightarrow \frac{1}{5}U_p>\frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5}U_p+\frac{4}{5}>\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=1$ Donc $U_{p+1}>1$ ainsi pour tout $n\in \mathrm{IN}^*$; $U_n>1$

3) $U_{n+1}-U_n=\frac{1}{5}U_n+\frac{4}{5}-U_n=\frac{4}{5}(1-U_n)$ donc $U_{n+1}-U_n<0$ car $U_n>1$ ainsi (U_n) est décroissante.

4) $V_n=U_n-1$; $V_{n+1}=U_{n+1}-1=\frac{1}{5}U_n+\frac{4}{5}-1=\frac{1}{5}(U_n-1)=\frac{1}{5}V_n$ donc (V_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$

5) a) (V_n) *est géométrique et* $q=\frac{1}{5}\in\,]-1,1[$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=0$; $U_n=V_n+1$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=1$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}3(n+1)-3\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)=+\infty$

EXERCICE 19 : 1) On a $\forall n\in \mathrm{IN}$; $0<U_0\leq\frac{1}{2}$ supposons que $0<U_p\leq\frac{1}{2}$; $p\in \mathrm{IN}$ et montrons que $0<U_{p+1}\leq\frac{1}{2}$.

On a $0<U_p\leq\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leq -U_p<0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\leq 2-U_p<2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<\frac{1}{2-U_p}\leq\frac{2}{3} \Leftrightarrow 0<\frac{U_p}{2-U_p}\leq\frac{1}{3}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow \forall p\in \mathrm{IN}$

on a $0<U_{p+1}\leq\frac{1}{2}$ **Conclusion** : d'après le principe de raisonnement par récurrence On a $\forall n\in \mathrm{IN}$; $0<U_n\leq\frac{1}{2}$

2) a) On a $U_n\leq\frac{1}{2} \Leftrightarrow -U_n\geq-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2-U_n\geq\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2-U_n}\leq\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{U_n}{2-U_n}\leq\frac{2}{3}U_n$ d'où $\forall n\in \mathrm{IN}$ on a $U_{n+1}\leq\frac{2}{3}U_n$

b) $U_{n+1}\leq\frac{2}{3}U_n \Leftrightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n}\leq\frac{2}{3}<1$ Donc (U_n) est décroissante

3) On a $U_1=\frac{1}{3}$ d'où $U_1\leq\left(\frac{2}{3}\right)^0.\frac{1}{2}$; supposons que $U_p\leq\left(\frac{2}{3}\right)^p U_0$ et montrons que $U_{p+1}\leq\left(\frac{2}{3}\right)^{p+1}U_0$

On a : $U_p\leq\left(\frac{2}{3}\right)^p U_0$ et $U_{p+1}\leq\frac{2}{3}U_p$ $U_{p+1}\leq\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^p U_0=\left(\frac{2}{3}\right)^{p+1}U_0$

Conclusion : **d'après le principe de raisonnement par récurrence** On a $\forall n\in \mathrm{IN}$; $0<U_n\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n U_0$

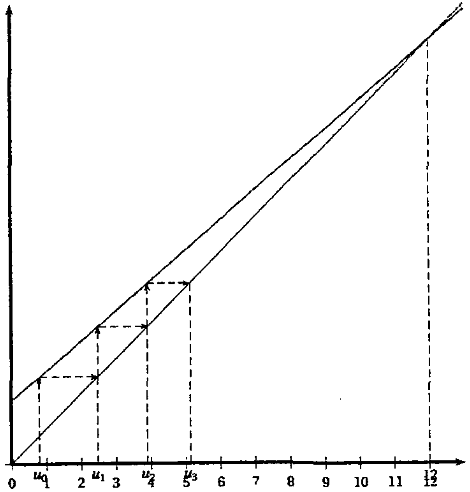
4)a) $V_{n+1}=\frac{1}{U_{n+1}}-1=\frac{2-U_n}{U_n}-1=\frac{2}{U_n}-2=2\left(\frac{1}{U_n}-1\right)$ donc (V_n) est une suite géométrique de raison 2.

On a : $V_n=V_0q^n=2^n$

b) $V_n=\frac{1}{U_n}-1 \Leftrightarrow V_n+1=\frac{1}{U_n} \Leftrightarrow U_n=\frac{1}{V_n+1}=\frac{1}{2^n+1}$

5)a) $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{U_k}=\sum\limits_{k=0}^{n}(V_k+1)=n+1+\sum\limits_{k=0}^{n}V_k=n+1+V_0\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=n+1+2^{n+1}-1=n+2^{n+1}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n+2^{n+1}\right)=+\infty$



Exercice n°20 :

b. Voir la figure ci-dessus.

c. Le graphique montre que la limite de la suite est voisine de 12.

2. a. $v_n=u_n-12 \Rightarrow v_{n+1}=u_{n+1}-12=$ $0{,}85u_n+1{,}8-12=0{,}85u_n-11{,}2=0{,}85(u_n-12)$ $=0{,}85v_n$.

Conclusion : $v_{n+1}=0{,}85v_n$ ce qui montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85 et de premier terme : $v_0=u_0-12=8-12=-4$

b. On a donc : $v_n=v_0\times0{,}85n=-4\times0{,}85n$.

De $v_n=u_n-12$ il résulte que $u_n=v_n+12=12-4\times0{,}85n$.

c. On a $v_{n+1}-v_n=0{,}85v_n-v_n=-0{,}15v_n$. Comme $v_0<0$ et $0{,}85>0$, tous les termes de la suite (v_n) *sont négatifs, donc* $-0{,}15v_n>0$ *et finalement* $v_{n+1}-v_n>0$, ce qui signifie que la suite (vn) est croissante.

Comme $u_{n+1}-u_n=v_{n+1}+12-(v_n+12)=$ $v_{n+1}+12-v_n-12=v_{n+1}-v_n>0$, comme on vient de le voir.La suite (u_n) est croissante.

d. Comme $-1<0{,}85<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=12$, ce qui confirme la conjecture précédente.

3. a. En milliers d'abonnés soit w_n la suite du nombre d'abonnés l'année 2008+*n*.

On a $w_0=8$ *et* $w_{n+1}=(1-0{,}15)w_n+1{,}8=0{,}85w_n+1{,}8$.

On a donc $w_n=u_n$ pour tout naturel *n*.

b. D'après la question 2. b. le nombre d'abonnés en 2014 = 2008 + 6 est : $u_6=12-4\times0{,}856\approx10{,}4914$. En 2014 il y aura environ 10 491 abonnés.

Exercice 21:1)a) à l'instant $t=1$, on injecte une dose de 1.8 unité. La dose restante dans le sang après la premier injection est $\frac{70}{100}\times1.8$ unités. Ainsi $Q_1=1.8+(0.7).(1.8)=3.06$

b) $Q_2=\underbrace{1.8}_{\text{quantité injectée à l'instant t=2}}+\underbrace{(0.7)Q_1}_{\text{quantité restante à l'instant t=2}}=3.94$

2)a) Soit $n\geq1$, $Q_{n+1}=1.8+(0.7)Q_n$. b) $f(x)=1.8+0.7x$. c) $f(x)=x \Leftrightarrow 1.8+0.7x=x \Leftrightarrow x=6$

3) Soit $n \geq 1$, $T_{n+1} = Q_{n+1} - 6 = 1.8 + 0.7Q_n - 6 = 0.7Q_n - 4.2 = 0.7(Q_n - 6) = 0.7T_n$

$\Rightarrow (T_n)$ est une suite géométrique de raison 0.7.

b) (T_n) est une suite géométrique de raison $0.7 \Rightarrow T_n = T_1(0.7)^{n-1}, n \geq 1$. Or $T_1 = Q_1 - 6 = -2.94$

$\Rightarrow T_n = -2.94(0.7)^{n-1}, n \geq 1 \Rightarrow Q_n = -2.94(0.7)^{n-1} + 6 , n \geq 1$

$2.94 = 6 \times 0.49 = 3 \times (0.7)^2 \Rightarrow Q_n = 6\left[1-(0,7)^{n+1}\right]$, $n \geq 1$.4) $Q_5 = 6\left[1-(0,7)^6\right] = 5,3$. 5) $\lim\limits_{n \to +\infty} Q_n = 6$

Exercice 22

1. En regroupant les termes consécutifs deux par deux, $f(x)$ est la somme de $i = 1$ à $i = 1005$. de $(2i-1)(x+2i-1) - 2i(x+2i) = -(x+4i-1)$
   Cette somme est donc égale à $-1005(x-2013)$.

   Dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ a pour unique solution $x = 2013$.
2. De $f(x) = -1005(x-2013)$, on déduit que si k est impair, $k - 2013$ est pair, et parce que 1005 est impair, $f(k)$ est multiple de $1005 \times 2 = 2010$, on en déduit aussi que $f(2011) = 2010$.

Les solutions

Exercice N° 1 : 1)b 2) a 3)a

Exercice N°2 : 1)a , 2)c , 3)b , 4)b) , 5)*a)*

6) $n! + (n+1)! = n! + (n+1)n! = n!(n+2)$ *et on a* : $\dfrac{(n+2)!}{n+1} = \dfrac{(n+2)(n+1)n!}{n+1} = (n+2)n!$. *a)*

Exercice3 :C'est le nombre d'applications de l'ensemble des 30 voyageurs dans l'ensemble des 10 stations ; ce nombre est 10^{30}

Exercice 4 : a) $N_1 = C_5^3 + C_3^3 = 11$; b) $N_2 = C_2^1 \times C_8^2 = 56$

c) $N_3 = C_4^1 \times C_2^1 \times C_1^1 + C_3^2 \times C_2^1 = 8 + 6 = 14$; d) $N_4 = C_{10}^3 - C_6^3 = 100$

Exercice5 :1)a) $A_{10}^3 = 720$ .b) $A_4^3 + A_6^3 = 24 + 120 = 144$. c) $720 - 144 = 576$

d) $\left(A_6^2 \times A_4^1\right) \times \underbrace{C_3^1}_{\text{ordre}} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

2$^{\text{ième}}$ méthode : Comme si l'on tire simultanément 3 jetons et on les ordonne donc le nombre est $C_6^2 \times C_4^1 \times 3! = 15 \times 4 \times 6 = 360$

2)a) $10^3 = 1000$. b) $4^3 + 6^3 = 280$. c) $1000 - 280 = 720$.

d) $6^2 \times 4^1 \times \underbrace{C_3^1}_{\text{ordre}} = 432$

2$^{\text{ième}}$ méthode $\dfrac{6^2 \times 4^1 \times 3!}{2!} = 432$ (Dans 6^2 : les deux jetons rouges sont ordonnées ; on divise par $(2!)$ pour *supprimer l'ordre et on multiple par 3! pour ordonner les 3 jetons)*

Exercice 6 :1) $N_1 = 6! = 720$.

2) les disposition possibles sont GGGGFF, FFGGGG donc $N_2 = 2 \times (4! \times 2!) = 96$.

3)les dispositions possibles sont GFGFGG, GGFGFG , et G F G G F G donc $N_3 = 3 \times (4! \times 2!) = 144$.

4) les dispositions possibles sont FFGGGG, GFFGGG, GGFFGG, GGGFFG, GGGGFF..
donc $N_4 = (4! \times 2!) \times 5 = 240$.

Exercice 7 :Un jury est une partie ayant 5 éléments de l'ensemble des 117 personnes ; le nombre de jurys est $C_{17}^5 = 6188$

2) $C_{10}^3 \times C_7^2 = 120 \times 21 = 2520$. 3) $C_{10}^5 = 252$.

4) le nombre de jurys comprenant au moins une femme est égal au nombre total de jurys diminué du nombre de jurys ne comprenant aucune femme ; ce nombre est $C_{17}^5 - C_{10}^5$ c'est-à-dire 5936

5) $C_{10}^5 + C_7^1 \times C_{10}^4 + C_7^2 \times C_{10}^3 = 252 + 1470 + 2520 = 4252$

Exercice 8 :1) $C_7^4 = 35$ 2) $C_5^2 = 10$ 3) $2C_5^3 = 20$ 4) $C_5^4 = 5$ 5) $C_7^4 - C_5^4 = 30$

Exercice 9 :1) $(k+1)! = (k+1) \times k! \Rightarrow (k+1)! - k! = (k+1) \times k! - k! = k! \times (k+1-1) = k \times k!$

2) On applique l'égalité précédente pour $k\in\{0,1,...,n-1\}$ On obtient $1!-0!=0\times0!$; $2!-1!=1\times1!$ et $3!-2!=2\times2!$ Puisque : $n!-(n+1)!=(n-1)\times(n-1)!$ La somme membre a membre permet d'écrire : $n!-0!=1\times1!+2\times2!+......+(n-1)\times(n-1)!$ Or $0!=1$, le résultat en découle.

Exercice 10 **:**a) Un trajet possible revient a placer les machines dans un ordre donné.
Exemple de trajet : $A\to B\to C\to D$ ou $A\to B\to D\to C$

Il suffit donc de permuter les 4 machines et par suite le nombre demandé est $N_a=4!=24$

b) $N_b=3!=6$

c) la machine B ne peut pas être utilisé dans l'étape 3 ou l'étape 4 .par suite la machine B doit être utilise soit dans la première étape (le nombre correspond est $2!$)Donc le nombre demandé est $N_c=3!+2!=10$

Exercice11 **:**1) $5^4=625$ 2) $A_5^4=120$ 3) $C_4^2\times4^2=96$

Exercice 12 : 1)9×10^4 , 2) 10^3 , 3) $9\times A_9^4=27216$

Exercice13:1) $3^8=6561$ 2) $C_8^3\times2^5=56\times32=1792$

3) $C_8^3\times C_5^3$(ce nombre est aussi égale à $C_8^3\times C_5^2$ ou à $C_8^3\times C_6^3$) $=560$

4) Il y a C_3^2 façons de choisir 2 couleurs parmi 3

Il y a 2^8 façons de colorier les 8 carreaux avec 2 couleurs.
Il y a 2 façons où les 8 carreaux sont de même couleur.

Donc le nombre de façons comprenant deux couleurs seulement est $C_3^2(2^8-2)=762$

Exercice 14 **:**1)a) une diagonale est segment distinct d'un coté joignant deux sommets du polygone.
Ainsi le nombre de diagonale d'un polygone de n cotés est C_n^2-n

b) Il suffit de résoudre dans $\mathbb{N}\setminus\{0,1,2,3\}$ l'équation $C_n^2-n=n$ .Le calcul donne $n=5$ (pentagone)

2)a)Définir une corde c'est choisir deux points parmi les n points. Ainsi le nombre de cordes possibles est
$$N=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$$

b) Notons I_n le nombre demandé.

Cas particulier : $n=4$ les quatre points A, B, C et D définissent un quadrilatère convexe ABCD qui admet deux diagonales c'est pour cela $I_4=I$.

Cas générale : le choit de 4 points distincts de ζ assure un seul point d'intersection.

Ainsi le nombre de point d'intersection demandé est C_4^n

Exercice 15 **:**1)a) $A_{10}^3=720$ .b) $A_4^3+A_6^3=24+120=144$. c) $720-144=576$

d) Comme si l'on tire simultanément 3 jetons et on les ordonne donc le nombre est
$C_6^2\times C_4^1\times3!=15\times4\times6=360$

2)a)$10^3=1000$. b)$4^3+6^3=280$. c) $1000-280=720$. d)$\dfrac{6^2\times4^1\times3!}{2!}=432$ (Dans 6^2 : les deux jetons rouges sont ordonnées ; on divise par $(2!)$ pour supprimer l'ordre et on multiple par $3!$ pour ordonner les 3 jetons)

Exercice 16 :1) $E_3=\{A;B;C\}$

1^{er} place	$2^{ème}$ place	$3^{ème}$ place	Les classements (les triplets) possibles
A	B	C	(A;B;C)
A	C	B	(A;C;B)
B	A	C	(B;A;C)
B	C	A	(B;C;A)
C	A	B	(C;A;B)
C	B	A	(C;B;A)

$N_3=6$

2) $E_4=\{A;B;C;D\}$

1^{er} place	$2^{ème}$ place	$3^{ème}$ place	Les classements (les quadruplets) possibles
A	B	C	(D;A;B;C) ; (A;D;B;C) ; (A;B;D;C) ; (A;B;C;D)
A	C	B	(D;A;C;B) ; (A;D;C;B) ; (A;C;D;B) ; (A;C;B;D)
B	A	C	(D;B;A;C) ; (B;D;A;C) ; (B;A;D;C) ; (B;A;C;D)
B	C	A	(D;B;C;A) ; (B;D;C;A) ; (B;C;D;A) ; (B;C;A;D)
C	A	B	(D;C;A;B) ; (C;D;A;B) ; (C;A;D;B) ; (C;A;B;D)
C	B	A	(D;C;B;A) ; (C;D;B;A) ; (C;B;D;A) ; (C;B;A;D)

$N_4=6\times4=24$.

3) On remarque que $N_3=3N_2$ et $N_4=4N_3$

4) a) $E_{k-1}=\{A_1;A_2;.......;A_{k-1}\}$; $E_k=\{A_1;A_2;.......;A_{k-1};A_k\}=E_{k-1}\cup\{A_k\}$

Si N_{k-1} est le nombre de classement pour le groupe E_{k-1} sans ex æquo de $(k-1)$ élèves et N_k est le nombre de classement pour le groupe E_k sans ex æquo de k élèves alors $N_k=kN_{k-1}$ car pour chaque classement de E_{k-1} il y a k places pour l'élève A_k dans tout classement de E_k .

b) On a : $\begin{cases}\cancel{N_2}=2\\ \cancel{N_3}=3\times\cancel{N_2}\\ . \qquad /. \\ . \qquad . \\ / \qquad . \\ N_k=k\times\cancel{N_{k-1}}\end{cases}$

on multiplie ces k égalités membre à membre et après simplification ; on obtient $N_k = 1\times2\times3\times.......\times k = k!$

Exercice 17 : jamel se souvient du premier et dernier chiffre de son code. Il peut être représenté par le tableau

1	*c*	*d*	5

1) Il y a 9 choix possibles pour le nombre c et neuf pour le nombre d car c et d sont distincts, soit au total 10 ×9 choix possibles .Il y a 90 codes possibles.

2)La somme des quatre chiffres est égale à 8, soit 1 + c + d + 5= 8.

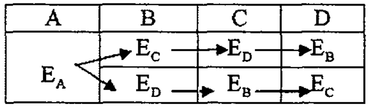
c +d= 2 . c et d étant distincts et entiers compris entre 0 et 9, il n'y a que deux possibilités

c= 0 et d = 2 ou c = 2 et d = 0.

jamel a raison en affirmant qu'en deux tentatives il est sûr de retrouver le bon code.

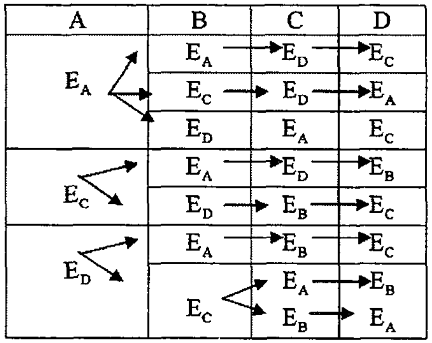
Exercice N°18 : 1) Tout cas possible correspond à une permutation de l'ensemble des 4 épées et réciproquement. Le numéro des cas possibles est $4! = 24$.

2) a) Le joueur A reçoit son épée, reste alors les épées de B ; C et D qu'on note $E_B ; E_C$ et E_D. Comme chacun des joueurs B ; C et D ne reçoit pas son épée : Pour le joueur B il y a 2 possibilités : E_C ou E_D. Pour chacune de ces deux possibilités, chacun des joueurs C et D n'a qu'une seule possibilité. Le nombre de cas possibles où le joueur A est le seul à retrouver son épée est : $n = 2\times1 = 2$ On peut utiliser l'arbre de choix pour voir tous ces cas possibles :



b) Le raisonnement utilisé dans a) est le même si ce joueur est B ou C ou D. Le nombre de cas possibles où un seul joueur retrouve son épée est : $n_1 = 4\times n = 8$

c) **1^er^ méthode** : On peut dresser l'arbre de choix A l'aide de cet arbre de choix (où il y a toutes les possibilités) ; le nombre de cas possibles tel qu'aucun joueur ne retrouve son épée est 9.

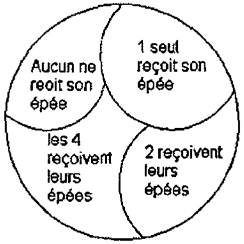


2^ième^ méthode : On sait que le nombre total de cas possibles est : $N = 4! = 24$. Ces 24 cas possibles sont répartis en 4 types : on bien aucun joueur ne reçoit son épée, ou un seul joueur reçoit son épée, ou deux joueurs reçoivent leurs épées ou bien les quatre joueurs reçoivent leurs épées.

Désignons par $n_0 ; n_1 ; n_2$ et n_4 le nombre de cas possibles correspondant respectivement à ces 4 types. On a : $n_1 = 8$; $n_4 = 1$

Chercheons n_2. Il y a C_4^2 choix possibles des 2 joueurs qui retrouvent leurs épées. Pour chaque choix de ces 2 derniers les 2 autres joueurs restants n'ont qu'une seule possibilité, chacun d'eux reçoit l'épée de l'autre ce qui donne $n_2 = C_4^2.1 = 6$

Par suite $n_0 = 4! - (n_1 + n_2 + n_4) = 24 - 15 = 9$



Exercice n°19 :

1) On tire simultanément 5 jetons . Tout tirage correspond à une combinaison de 5 jetons parmi les 9 jetons.

a) Le nombre de tirages comprenant exactement 2 jetons blancs est : $n_1 = C_4^2 . C_5^3 = 60$.

b) Le nombre total de tirage est : $N = C_9^5 = 126$.

Le nombre de tirages comprenant au moins deux jetons rouges est alors : $n_2 = C_9^5 - C_5^1.C_4^4 = 126 - 5 = 121$.

c) 8 s'écrit : 8 = 3 + 5 = 1+ 2 + 5 = 1 + 3+ 4.

$n_3 = C_2^2.C_4^3 + C_3^3.C_4^2 + C_3^1.C_4^2 = 16$.

2) On tire successivement sans remise tous les jetons du sac. Tout tirage correspond à une permutation des 9 jetons. a) $n_1 = 8! = 40320$. b) Le nombre de tirage est : $n_2 = 6! = 720$.

c) Il s'agit de permuter les 6 jetons , en considérant M,A,T,H comme un seul jeton, et de permuter les 4 jetons M,A,T,H.

Le nombre de tirages comprenant les 4 jetons blancs consécutivement est alors : $n_3 = 6! \times 4! = 17280$.

d) Un tirage comprenant des lettres et des chiffres alternés est de la forme : (R,B,R,B,R,B,….,R).

Le nombre de tirages comprenant des lettres et des chiffres alternés est : $n_4 = 5! . 4! = 2880$.

e) Un cas favorable à cette question est un 9-uplet dont les cinq premiers termes sont 2 jetons blancs et 3 jetons rouges, les quatre derniers termes sont des jetons quelconques parmi ceux qui restent.

Le nombre de tirages répondant à cette question est : $n_5 = C_4^2 . C_5^3 . 5!.4! = 172800$.

Exercice 20 : • $S = (1-1)^n = 0$

$$\bullet\ S' = \frac{1}{0!n!} - \frac{1}{1!(n-1)!} + \frac{1}{2!(n-2)!} - ....+(-1)^p \frac{1}{p!(n-p)!} + ...+(-1)^n \frac{1}{n!0!}$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\frac{n!}{0!n!} - \frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} - ....+(-1)^p \frac{n!}{p!(n-p)!} + ...+(-1)^n \frac{n!}{n!0!}\right]$$

$$= \frac{1}{n!}\left[C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ....+(-1)^p C_n^p + ...+(-1)^n C_n^n\right] = \frac{1}{n!}\times S = 0$$

Exercice 21: 1) $p\times C_n^p = p\times\frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}$

$n\times C_{n-1}^{p-1} = n\times\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}$ Le résultat en découle.

2) On applique l'égalité précédente pour $p \in \{1, 2..., n\}$

$C_n^1 = n\times C_{n-1}^0$

$2C_n^2 = n\times C_{n-1}^1$

$3C_n^1 = n\times C_{n-1}^2$

. .

. .

$(n-1)C_n^{n-1} = n\times C_{n-1}^{n-2}$

$nC_n^n = n\times C_{n-1}^{n-1}$

La somme membre a membre donne :

$$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+.....+nC_n^n=n\left[C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+....+C_{n-1}^{n-1}\right] \text{ or } (1+1)^{n-1}=C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+....+C_{n-1}^{n-1}$$

$$\Rightarrow C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+.....+nC_n^n=n2^{n-1}$$

Exercice 22: $A=(1+2)^n=3^n$; $B=(1-1)^n=0$

Exercice 23 **:**Utiliser la formule $C_n^p=\frac{A_n^p}{p!}$ et on trouve $S=4^n$

Exercice n°24:On pose :

$$S=C_3^0C_{n-3}^p+C_3^1C_{n-3}^{p-1}+C_3^2\quad C_{n-3}^{p-2}+C_3^3C_{n-3}^{p-3}=C_{n-3}^p+3C_{n-3}^{p-1}+3C_{n-3}^{p-2}+C_{n-3}^{p-3}$$

$$S=\left(C_{n-3}^p+C_{n-3}^{p-1}\right)+2\left(C_{n-3}^{p-1}+C_{n-3}^{p-2}\right)+\left(C_{n-3}^{p-2}+C_{n-3}^{p-3}\right)$$

Or on a : : $C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^p=C_n^p$, on obtient : $S=C_{n-2}^p+2C_{n-2}^{p-1}+C_{n-2}^{p-2}$

donc $S=\left(C_{n-2}^p+C_{n-2}^{p-1}\right)+\left(C_{n-2}^{p-1}+C_{n-2}^{p-2}\right)=C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1}=C_n^p$.

Exercice 25 :

1) • $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)^n=C_n^0-\frac{1}{x}C_n^1+\frac{1}{x^2}C_n^2-\frac{1}{x^3}C_n^3+....+\frac{(-1)^p}{x^p}C_n^p+....+\frac{(-1)^n}{x^n}C_n^n$

• $3^n.C_n^0-3^{n-1}.C_n^1+3^{n-2}.C_n^2-....+(-1)^p.3^{n-p}.C_n^p+....+(-1)^n.C_n^n$

$$=3^n\left[C_n^0-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{3^2}C_n^2-....+\frac{(-1)^p}{3^p}C_n^p+....+\frac{(-1)^n}{3^p}C_n^n\right]=3^n-f(3)=3^n.\left(1-\frac{1}{3}\right)^n=2^n$$

2) • $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)^n\Rightarrow f'(x)=n\left(1-\frac{1}{x}\right)^{n-1}.\frac{1}{x^2}$ et $f'(3)=n\left(1-\frac{1}{3}\right)^{n-1}.\frac{1}{3^2}=n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.\frac{1}{3^2}$.

• $f(x)=C_n^0-\frac{1}{x}C_n^1+\frac{1}{x^2}C_n^2-\frac{1}{x^3}C_n^3+....+\frac{(-1)^p}{x^p}C_n^p+....+\frac{(-1)^n}{x^n}C_n^n$

donc $f'(x)=\frac{1}{x^2}C_n^1-\frac{2}{x^3}C_n^2+\frac{3}{x^4}C_n^3+....+\frac{(-1)^{p+1}.p}{x^{p+1}}C_n^p+....+\frac{(-1)^{n+1}.n}{x^{n+1}}C_n^n$

$$f'(3)=\frac{1}{3^2}C_n^1-\frac{2}{3^3}C_n^2+\frac{3}{3^4}C_n^3+....+\frac{(-1)^{p+1}.p}{3^{p+1}}C_n^p+....+\frac{(-1)^{n+1}.n}{3^{n+1}}C_n^n$$

$$=\frac{1}{3^2}\left[C_n^1-\frac{2}{3}C_n^2+\frac{3}{3^2}C_n^3+....+\frac{(-1)^{p+1}.p}{3^{p-1}}C_n^p+....+\frac{(-1)^{n+1}.n}{3^{n-1}}C_n^n\right]=\frac{1}{3^2}\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p+1}.pC_n^p}{3^{p-1}}$$

En égalisant les deux résultats de $f'(3)$ on obtient :

$$\frac{1}{3^2}\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p+1}.pC_n^p}{3^{p-1}}=n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.\frac{1}{3^2}\quad \text{d'où}\quad \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p+1}.pC_n^p}{3^{p-1}}=n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

Exercice n°26:

0 + 1 +2+3=6 : les nombres macrocéphales ont au moins un 6 en chiffre de dizaines de mille.
Commençant par 6 : 63210 et tous les nombres obtenus par permutation des chiffres 3, 2, 1 et 0.
Commençant par 7 : 74210 et tous les nombres obtenus par permutation des chiffres 4, 2, 1 et 0.
Commençant par 8 : 85210 et tous les nombres obtenus par permutation des chiffres 5, 2, 1 et 0;
84310 et tous les nombres obtenus par permutation des chiffres 4, 3, 1 et 0.
Commençant par 9 : 96210 et tous les nombres obtenus par permutation des chiffres 6, 2, 1 et 0;
95310 et tous les nombres obtenus par permutation des chiffres 5, 3, 1 et 0;
94320 et tous les nombres obtenus par permutation des chiffres 4, 3, 2 et 0.
Il y a 24 façons de permuter 4 chiffres tous différents. Il y a donc 24x7, soit 168 nombres macrocéphales.

Exercice 27 :1211511 photos (= C_{36}^6 -C_{31}^6)

Exercice 28 : Pour faire un zéro à la fin du nombre, il faut qu'il y ait une multiplication par 10. Multiplier par 10, c'est multiplier par 2 X 5. Des multiplications par 2, le produit considéré en contient beaucoup (au moins une par nombre pair). Par contre des multiplications par 5, on n'en trouve qu'une avec les nombres 5, 10, 15, 20, et deux avec 25, soit six en tout. Il y a donc 6 multiplications par 10 et donc l'écriture du résultat se termine par 6 zéros.

Exercice 29 : Il y a deux structures de dons possibles:
- ou bien la chaîne des dons est un cycle à 5 éléments, et il y alors 4 ×3 × 2 manières pour la distribution des cadeaux;- ou bien il y a deux cycles, l'un à 3 éléments, l'autre à 2 éléments (échange de cadeaux entre 2 amis).Et il y a 10 façons (C_5^3) de choisir le cycle de 3 éléments avec chaque fois 2 manières pour la distribution .Finalement : (4×3 × 2) + (2 × C_5^3) = 24+ 20= 44.

Exercice 30: L'entier 1 étant sur une carte, il ne peut être accompagné que de 2, donc 3 sera accompagné de 4, etc : chaque carte contient les entiers 2p-1 et 2p, dont la somme est 4p-1, cela pour p=1,2,3,...,100.
Notons E={1;2;3;...;100}
1) La somme des entiers écrits sur les cartes de Maram est A=4(p_1+p_2+...+p_{21})-21 où les p_i, distincts 2 à 2, sont dans E, et ainsi A est la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair : donc A est impair et ce ne peut être 2004.
2) A+21=4(p_1+p_2+...+p_{21}) est divisible par 4, or 2005+21=2026=2×1013 qui n'est pas divisible par 4, donc A ne peut être 2005.
3) L'énoncé dit en fait que A=2003 : on vérifie tout de suite que 2003+21=4×506 est bien divisible par 4. Et donc p_1+p_2+...+p_{21}=506.De façon analogue la somme des entiers écrits sur les cartes de abrar est 1396=4(p'_1+p'_2+...+p'_{20})-20, les p'_i, distincts 2 à 2, étant dans E et donc p'_1+p'_2+...+p'_{20}=354.
Mais par hypothèse, les 20 cartes choisies par abrar sont distinctes de celles choisies par Maram et donc $\{p_1;p_2;...;p_{21}\}\cap\{p'_1;p'_2;...;p'_{20}\}=\varnothing$.
Donc obligatoirement la somme p_1+p_2+...+p_{21}+p'_1+p'_2+...+p'_{20} doit être supérieure ou égale à la plus petite somme possible de 41 éléments distincts de E, soit 1+2+3+...+41=41×42/2=861 ; or 506+354=860<861 et donc abrar s'est trompé aussi. Pas de chance!

Exercice 31: 1)Pour les pages de 1 à 9 : 9 chiffres
Pour les pages de 10 à 99 : 90 × 2 soit 180 chiffres
Pour les pages de 100 à 350 : 251 × 3 soit 753 chiffres
Total : 942 chiffres

Exercice 1:1) La réponse est a)car: $p(\{4,5,6\})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,

2)b) ,3) La réponse est b)car: $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=0,10+0,58-0=0,68$; $A\cap B=\varnothing$

4)c) , 5) La réponse est b)car: $p(\overline{A})=1-p(A)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0,75$

6) La réponse est c)car :on lance un dé normal

Soit $A=\{1,2,3,4,5\}\Rightarrow p(A)=\frac{5}{6}$ et $B=\{5\}\Rightarrow p(B)=\frac{1}{6}$ et $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}\subset\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

Exercice 2:1)a) Soit A l'événement « Tirer 3 boules blanches et deux boules rouges »

Soit Ω :l'univers des cas possibles. $p(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{C_6^3\times C_4^2}{C_{10}^5}=\frac{20\times6}{36\times7}=\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$

b) Soit B l'événement : »obtenir au moins une boule rouge »
$\overline{B}$ est l'événement contraire de « toutes les boules tirées sont blanches »

$p(B)=1-p(\overline{B})=1-\frac{card(\overline{B})}{card(\Omega)}=1-\frac{C_6^5}{C_{10}^5}=1-\frac{6}{36\times7}=1-\frac{1}{42}=\frac{41}{42}$

2)a) Soit A' l'événement : »Tirer avec remise trois boules blanches et deux boules rouges dans cet ordre »

$p(A')=\left(\frac{6}{10}\right)^3\times\left(\frac{4}{10}\right)^2=\frac{216\times16}{100000}=\frac{3456}{100000}=0,03456$

b) Soit B' l'événement : «tirer avec remise trois boules blanches et deux boules rouges »

$p(B')=C_5^2\times\left(\frac{6}{10}\right)^3\times\left(\frac{4}{10}\right)^2=10\times0,03456=0,3456$

Exercice 3:Soit Ω l'univers des cas possibles ; $card(\Omega)=C_5^2=10$

1) $p(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}$, or $card(A)=C_3^2+C_2^2=3+1=4\Rightarrow p(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

2) $card(B)=C_2^1\times C_2^1=4$ (Avoir 1 boule n°=1 et une boule n°=2), $p(B)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

3) $A\cap B$: « Avoir une boule verte n°=1 et une boule verte n°=2 ou avoir une boule rouge n°=1 et une boule verte n°=2» $card(A\cap B)=C_1^1\times C_1^1+C_1^1\times C_1^1=1+1=2$

•$p(A\cap B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ On a :$p(A)=\frac{2}{5}$; $p(\overline{B})=1-p(B)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

•$p(A\cap\overline{B})+p(A\cap B)=p(A)$ d'où $p(A\cap\overline{B})=p(A)-p(A\cap B)=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\Rightarrow p(A\cap\overline{B})=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

Exercice 4: A:$\{R,R,R\}$ ou $\{V,V,V\}$.1)•$p(A)=\frac{C_5^3+C_4^3}{C_9^3}=\frac{10+4}{84}=\frac{1}{6}$ •$p(B)=\frac{C_6^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{20+1}{84}=\frac{21}{84}=\frac{1}{4}$

2) $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$ On calcule $p(A\cap B)$, $A\cap B$
« Avoir trois boules de même couleur et de même numéros

$R_1R_1R_1$ ou $V_1V_1V_1$»$\Rightarrow p(A\cap B)=\frac{C_3^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{2}{84}=\frac{1}{42}$ D'où $p(A\cup B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{42}=\frac{11}{28}$

3) Soit C l'événement : « obtenir au plus une boule verte »

C :$\{V,R,R\}$ ou$\{R,R,R\}\Rightarrow p(C)=\frac{C_4^1C_5^2+C_5^3}{C_9^3}=\frac{40+10}{84}=\frac{50}{84}=\frac{25}{42}$

Exercice 5: Card $(\Omega)=6^3$. 1) $p(A)=\frac{3\times5\times5}{6^3}=\frac{75}{216}=\frac{25}{72}$; $p(A)\approx0,34$

2) B « obtenir au moins une fois le numéro 1 » ; $\overline{B}$: obtenir 3 faces ne contenant pas le numéro 1 »

$p(B)=1-\frac{5^3}{6^3}=\frac{216-125}{216}=\frac{91}{216}$; $p(B)\approx0,42$

3) $p(C)=\frac{6\times5\times4}{6^3}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$; $p(C)\approx0,55$ .4) $D=\overline{C}$ d'où $p(D)=\frac{4}{9}$; $p(D)\approx0,45$

5) $p(E)=\frac{6\times5\times3}{6^3}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$; $p(E)\approx0,42$

6) La somme est paire si les trois chiffres sont paires ou si un seul chiffre est pair et les deux autres sont impairs. $p(F)=\frac{3^3+3^2\times3\times3}{6^3}=\frac{4}{2^3}=\frac{1}{2}$; $p(F)=0,5$

Exercice 6:On considère les événements suivants :M:« l'élève Choisi aime la musique »

S:« l'élève Choisi aime le sport» $p(M)=\frac{28}{100}=0,28$; $p(S)=\frac{22}{100}=0.22$; $p(M\cap S)=\frac{18}{100}=0,18$

1) Soit l'événement A : « l'élève choisi aime la musique ou le sport»
$A=M\cup S$, $p(A)=p(M\cup S)=p(M)+p(S)-p(M\cap S)=0,28+0,22-0,18=0,32$
2) Soit l'événement B : « l'élève choisi n'aime ni la musique ni le sport»
$B=\overline{M\cup S}$, $p(B)=p(\overline{M\cup S})=1-p(M\cup S)=1-0,32=0,68$
3) Soit l'événement B : « l'élève choisi aime la musique et n'aime pas le sport »
$C=M\setminus S$, $p(C)=p(M)-p(M\cap S)=0,28-0,18=0,10$

Exercice 7 : $p(E)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. $p(F)=p(E_1\cup E_2)=\frac{1}{2}+\frac{3}{5}-\frac{3}{10}=\frac{4}{5}$

$p(G)=p(\overline{E_1}\cup\overline{E_2})=p(\overline{E_1\cap E_2})=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$. $p(H)=p(E_1\cup E_2)-p(E_1\cap E_2)=\frac{4}{5}-\frac{3}{10}=\frac{1}{2}$.

Exercice 8 :1) Il y a C_{18}^3 façons de prélever 3 flacons parmi les 18 flacons obtenus Card $(\Omega)=C_{18}^3=816$

A : « Les trois flacons contiennent du sang d'un même groupe» $p(A)=\frac{C_{11}^3+C_4^3}{C_{18}^3}=\frac{169}{816}$;$p(A)\approx0,20$

2) B:«Un flacon au moins est du groupe A», $\overline{B}$:«Les trois flacons ne contiennent pas de sang de groupe A»

$p(B)=1-\frac{C_7^3}{C_{18}^3}=1-\frac{35}{816}=\frac{781}{816}$; $p(B)\approx0,95$

3) C : « Les sang des trois flacons appartiennent à trois groupes distincts»

$p(C)=\dfrac{11\times4\times2+11\times2\times1+4\times2\times1}{816}=\dfrac{162}{408}$; $p(C)\approx0{,}198$

<u>Exercice 9 :</u> * $\text{card}\Omega=5^5=3125$ * $\text{cardA}=5!=120$ et $p(A)=\dfrac{120}{3125}\approx0.038$

* $\text{cardB}=5$ et $p(B)=\dfrac{5}{3125}=0.002$ * $C=\overline{A}$ et $p(C)=1-p(A)\approx0.962$

<u>Exercice 10</u> :Il y a 36 éventualités .

1) E : « G = A * B » on a alors α = β. $p(E)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$, $p(E)\approx0{,}166$

2) F : « $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ » on a alors : $2\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}=\vec{0}$. C'est-à-dire (α,β)=(2,1) ou (α,β)=(4,2) ou (α,β)= (6,3) ; $p(F)=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$.

3) $\left\|\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}\right\|=9$ s'écrit (α+β) . $\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=9$; $MG=1\Leftrightarrow\alpha+\beta=9$.

Soit H : « α + β = 9 » : 4 possibilités : (6,3) ; (3,6) ; (5,4) et (4,5) . $p(H)=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$; $p(H)\approx0{,}11$.

<u>Exercice 11:</u>Soit Ω l'univers des cas possibles, $\text{card}(\Omega)=C_7^3=35$

1) •$p(A)=\dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}=\dfrac{C_4^3+C_3^3}{35}=\dfrac{4+1}{35}=\dfrac{5}{35}=\dfrac{1}{7}$ •$p(B)=\dfrac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)}=\dfrac{C_3^3+C_4^3}{35}=\dfrac{1+4}{35}=\dfrac{5}{35}=\dfrac{1}{7}$

$A\cap B$ est l'événement : « avoir tiré 3 jetons rectangle noirs» $p(A\cap B)=\dfrac{\text{card}(A\cap B)}{\text{card}(\Omega)}=\dfrac{C_3^3}{35}=\dfrac{1}{35}$

2) $p(A)\times p(B)=\dfrac{1}{7}\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{49}$ et $p(A\cap B)=\dfrac{1}{35}\Leftrightarrow p(A\cap B)\neq p(A)\times p(B)$ Donc les événements A et B ne sont pas indépendants

<u>Exercice 12:</u> $p(A)=\dfrac{2\times1+2\times1+1\times1}{6\times6}=\dfrac{5}{36}$, $p(B)=\dfrac{2\times1+2\times1+2\times1+21+1\times1}{36}=\dfrac{1}{4}$.

Soit :"Une seule fois le n°1" alors $C=B\cup D$ .donc : $p(C)=p(B)+p(D)-p(B\cap D)$ or

$p(D)=\dfrac{2\times5+1\times4}{36}=\dfrac{7}{18}$ et $p(D\cap B)=\dfrac{2\times1+2\times1}{36}=\dfrac{1}{9}$ alors $p(C)=\dfrac{19}{36}$.

<u>Exercice 13</u>1) $\text{card}\Omega=C_{12}^4=\dfrac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2}=495$ et $\text{cardA}=C_4^2\times C_3^1\times C_5^1+C_5^2\times C_4^1\times C_3^1=270$ donc

$\boxed{p(A)=\dfrac{\text{cardA}}{\text{card}\Omega}=\dfrac{270}{495}=\dfrac{6}{11}}$. $\text{cardB}=C_4^4+C_5^4+C_4^2\times C_5^2=66$ donc $p(B)=\dfrac{\text{cardB}}{\text{card}\Omega}=\dfrac{66}{495}=\dfrac{2}{15}$.

$\text{cardC}=C_4^4+C_3^3\times C_9^1=10$ alors $p(C)=\dfrac{\text{cardC}}{\text{card}\Omega}=\dfrac{10}{495}=\dfrac{2}{99}$.

$\text{cardD}=C_1^1\times C_3^2\times C_6^1+C_2^1\times C_3^1\times C_6^2=18+90=108$ alors $p(D)=\dfrac{\text{cardD}}{\text{card}\Omega}=\dfrac{108}{495}=\dfrac{12}{55}$.

2) $\text{card}\Omega=A_{12}^3=12\times11\times10=1320$. $\text{cardE}=3!\times A_4^1\times A_3^1\times A_5^1=360$ alors $\boxed{p(E)=\dfrac{\text{cardE}}{\text{card}\Omega}=\dfrac{360}{1320}=\dfrac{3}{11}}$.

$\text{cardF}=\dfrac{3!}{2!}\times A_5^2\times A_3^1=180$ alors $\boxed{p(F)=\dfrac{\text{cardF}}{\text{card}\Omega}=\dfrac{180}{1320}=\dfrac{3}{22}}$.

Pour $E\cap F$, il y a trois cas : $\begin{cases}\text{B} & 0 \quad 1 \quad 1\\ \text{N} & 1 \text{ ou } 1 \text{ ou } 0 \text{ alors :}\\ \text{V} & 1 \quad 0 \quad 1\end{cases}$

$\text{card}(E\cap F)=3!\times A_1^1\times A_2^1\times A_2^1+3!\times A_1^1\times A_2^1\times A_1^1+3!A_1^1\times A_1^1\times A_2^1=48$ alors

$\boxed{p(E\cap F)=\dfrac{\text{cardE}\cap F}{\text{card}\Omega}=\dfrac{48}{1320}=\dfrac{2}{56}}$ et par suite $\boxed{p(E\cup F)=p(E)+p(F)-p(E\cap F)=\dfrac{3}{11}+\dfrac{3}{22}-\dfrac{2}{56}=\dfrac{41}{110}}$.

On a $E'=\overline{E}$ alors $\boxed{p(E')=1-p(E)=1-\dfrac{3}{11}=\dfrac{8}{11}}$

<u>Exercice 14:</u>1) a)* $p(A)=\dfrac{C_2^2}{C_{n+2}^2}=\dfrac{1}{\dfrac{(n+2)!}{2!n!}}=\dfrac{2}{(n+2)(n+1)}$

* B : « avoir deux boules de même couleurs, c'est-à-dire 2 rouges ou 2 noires»

$p(B)=\dfrac{C_2^2+C_n^2}{C_{n+2}^2}=\dfrac{1+\dfrac{n(n-1)}{2}}{\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}}=\dfrac{2+n^2-n}{(n+2)(n+1)}$

b) $p(A)=\dfrac{1}{15}\Leftrightarrow\dfrac{2}{(n+2)(n+1)}=\dfrac{1}{15}\Leftrightarrow(n+2)(n+1)=30\Leftrightarrow n^2+3n+2=30\Leftrightarrow n^2+3n-28=0$

$\Delta=9+4\times28=121=11^2$, $n_1=\dfrac{-3+11}{2}=\dfrac{8}{2}=4$ ou $n_2=\dfrac{-3-11}{2}=\dfrac{-14}{2}=-7\notin\mathbb{N}\Rightarrow\boxed{n=4}$

2) L'urne contient : 4 noires et deux rouges soit $N_0N_1N_1N_2$ et R_1R_2

a) Soit E l'événement : « avoir deux boules de même couleurs »

$p(E)=\dfrac{A_4^2+A_2^2}{A_6^2}=\dfrac{4\times3+2\times1}{6\times5}=\dfrac{12+2}{30}=\dfrac{14}{30}=\dfrac{7}{15}$

b) Soit F l'événement : « avoir deux boules de même parité»c'est-à-dire 2 pairs ou 2 impairs :

$p(F)=\dfrac{A_3^2+A_3^2}{A_6^2}=\dfrac{3\times2+3\times2}{6\times5}=\dfrac{6+6}{30}=\dfrac{12}{30}=\dfrac{2}{5}$

c) Soit H l'événement : « avoir au moins une boule qui porte le numéros 1»

$\overline{H}$: « Aucune des boules ne porte le numéro 1»

$p(\overline{H})=\dfrac{A_3^2}{A_6^2}=\dfrac{3\times2}{6\times5}=\dfrac{1}{5}$ d'où $p(H)=1-p(\overline{H})=1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$

Exercice 15 :1) On note p_1 la probabilité d'avoir pile .On note p_2 la probabilité d'avoir face.

Des égalités $\begin{cases} p_1 = 2p_2 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$ on déduit que $p_2 = \frac{1}{3}$ et $p_1 = \frac{2}{3}$

2)a) $p_a = p_1 \times p_1 \times p_1 \times p_1 = p_1{}^4 = \frac{16}{81} \simeq 0.2$

b) Au moins trois pile se traduit par :(trois piles et une face) ou (les quatre piles).

$p_b = 4(p_1 \times p_1 \times p_1 \times p_2) + p_1{}^4 = 4\left(\frac{8}{27} \times \frac{1}{3}\right) + \frac{16}{81} = \frac{48}{81} = 0.6$

c) pour la premier fois pile au troisième lance se traduit par face, face, pile, face ou face, face, pile, pile

Ainsi $p_c = \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{27} \simeq 0.074$

Exercice 16 : Il y a 2^{10} réponses possibles soit 1024 .

1) A : « Répondre juste aux 10 questions » $p(A) = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} \simeq 0{,}001$.

2) B : « Répondre juste à 9 questions » $p(B) = \frac{10}{1024} \simeq 0{,}0097$.

3) C : « Répondre juste au moins à 8 question »

Il y a C_{10}^8 façons de répondre juste à 8 questions exactement , soit 45 façons et par suite :

$p(C) = \frac{1+10+45}{1024} = \frac{56}{1024}$; $p(C) \simeq 0{,}054$.

Exercice 17 :1) $\text{card}(\Omega) = 3^4 = 81$, 2) $p(A) = \frac{3^2}{81} = \frac{1}{9} \simeq 0{,}111$; $p(B) = \frac{3}{81} = \frac{1}{27} \simeq 0{,}037$

C :«choisir 2 couleurs parmi 3 et arranger ces 2 couleurs dans 4 carrefours et dans les 2 autres mettre le couleur non choisie » $p(C) = \frac{3A_4^2}{81} \simeq 0{,}444$

3) $p(D) = 1 - p(\overline{D}) = 1 - \frac{1}{81} = \frac{80}{81} \simeq 0{,}987$, $p(E) = \frac{C_4^2 \times 2^2}{81} = \frac{24}{81} \simeq 0{,}296$

F = VAVA ou AVAV , $p(F) = \frac{2 \times 2^2}{81} = \frac{8}{81} \simeq 0{,}098$

Exercice 18 :

Catégorie Dépense	Au foyer	Salaire	Total
Moins de 40 DT	98	19	117
Entre 40 et 100DT	203	28	231
Plus que 100 DT	0	2	2
Total	301	49	350

2)a) $p_1 = 0.86$, b) $p_2 = \frac{117}{350} \simeq 0.33$, c) $p_3 = p_1 + p_2 - \frac{98}{350} \simeq 0.91$

3)a) (les trois femmes sont des salariées) ou (sont aux foyers) $p_a = \left(\frac{301}{350}\right)^3 + \left(\frac{49}{350}\right)^3 \simeq 0.64$

b) $p_b = \left(\frac{117}{350}\right)^3 + \left(\frac{231}{350}\right)^3 + \left(\frac{2}{350}\right)^3 \simeq 0.32$,c) $p_c = \left[\left(\frac{98}{350}\right)^3 + \left(\frac{203}{350}\right)^3 + \left(\frac{19}{350}\right)^3 + \left(\frac{28}{350}\right)^3 + \left(\frac{2}{350}\right)^3\right] \simeq 0.22$

d) $p_d = \left(\frac{49}{350}\right) \times \left(\frac{301}{350}\right)^2 \times 3 \simeq 0.31$

Exercice 19 :I) Soit Ω l'univers des cas possibles, $\text{card}(\Omega) = C_{10}^3 = 120$

1) $\bullet p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_5^3 + C_3^3}{120} = \frac{10+1}{120} = \frac{11}{120}$, $p(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{120} = \frac{5 \times 3 \times 2}{120} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$

$p(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_5^2 \times C_5^1 + C_3^2 \times C_7^1 + C_2^2 \times C_8^1}{120} = \frac{50+21+8}{120} = \frac{79}{120}$

Soit l'événement $\overline{D}$: « l'élève tire aucune question de probabilité»

$p(\overline{D}) = \frac{\text{card}(\overline{D})}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_8^3}{120} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15} \Rightarrow p(D) = 1 - p(\overline{D}) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$

$p(C \cap D) = \frac{\text{card}(C \cap D)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_2^1 \times C_3^2 + C_2^1 \times C_5^2 + C_2^2 \times C_8^1}{120} = \frac{6+20+8}{120} = \frac{34}{120} = \frac{17}{60}$

2)

$\bullet p(C \cup D) = \frac{\text{card}(C \cup D)}{\text{card}(\Omega)} = p(C) + p(D) - p(C \cap D) = \frac{79}{120} + \frac{64}{120} - \frac{34}{120} = \frac{109}{120}$

II) Soit E l'univers des cas possibles : $\text{card}(E) = A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

1) $\bullet p(H) = \frac{\text{card}(H)}{\text{card}(E)} = \frac{C_3^1 \times A_2^2 \times A_8^1}{720} = \frac{3 \times 2 \times 8}{720} = \frac{48}{720} = \frac{1}{15}$

$\bullet p(F) = \frac{\text{card}(F)}{\text{card}(E)} = \frac{C_3^1 \times A_2^1 \times A_8^2 + A_8^3}{720} = \frac{3 \times 2 \times 56 + 336}{720} = \frac{336+336}{720} = \frac{272}{720} = \frac{14}{15}$

2) $\bullet p(G) = \frac{\text{card}(G)}{\text{card}(E)} = \frac{C_3^1 \times A_3^1 \times A_7^2}{720} = \frac{3 \times 3 \times 42}{720} = \frac{378}{720} = \frac{21}{40}$

Exercice 20 :1. Les cinq lettres du prénom étant distinctes, une seule permutation des cinq cartons convient pour 5! = 120.La probabilité cherchée est donc : $\frac{1}{120}$

2. Il y a une seule façons de placer M en tête et E en queue. Il reste alors 3! = 6 permutations possibles des lettres A, R et I.La probabilité cherchée est donc $\frac{6}{120} = \frac{1}{20}$

3. Il n'y a que deux consonnes, M et R, dans le mot MARIE. Le mot peut donc commencer soit par MR, soit par RM. Il reste alors à placer les voyelles A, I et E, ce qui peut se faire de 3! = 6 façons possibles.

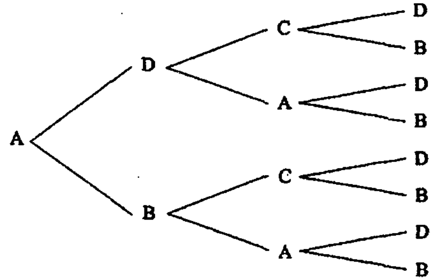
On a donc 12 configurations possibles et la probabilité cherchée est $\frac{12}{120} = \frac{1}{10}$

Exercice21 :1. a) Oui, par exemple avec la marche : A→B→A→B.

b) B ou D d'après l'arbre de choix suivant

c) Par généralisation de l'arbre ci-dessus, les arrivées possibles pour les marches contenant un nombre pair de déplacements sont : A et C.

d) Les arrivées possibles pour les marches contenant un nombre impair de déplacements sont : B et D



2. A l'aide de cet arbre : $P(A_2)= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

3.

Nombre de déplacements de la marche	1	2	3	4	5
Probabilité que la cocinelle arrive en A	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0

$P(A_2) = \frac{1}{2}$ d'après 2.

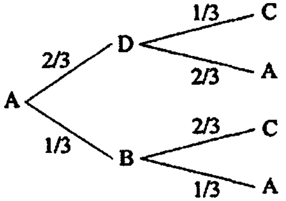
$P(A_1) = P(A_3) = P(A_5)=0$ d'après 1.d).

$P(A_4) = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ car il y a 8 marches possibles et 4 déplacements. Chaque déplacement a une probabilité de $\frac{1}{2}$.

(Deuxième justification : suite à 4 déplacements, il n'y a que deux arrivées possibles A ou C quis ont équiprobables, donc $\frac{1}{2}$

Partie B

D'après l'arbre ci-dessous :

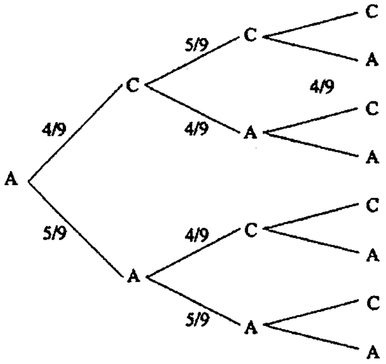


a) $P(A_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$.

b) $P(C_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$ ou bien $P(C_2)= 1-P(A_2)$.

Suite à deux déplacements, on remarque que la probabilité de revenir sur le même sommet est $\frac{5}{9}$ et la probabilité darriver sur le sommet opposé est $\frac{4}{9}$.

2. L'arbre ci-dessous illustre l'ensemble des marches dans les deux déplacements :



a) $P(A_4) = \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$.

b) $P(A_6) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{80}{729}$

3. a) En raisonnant toujours tous les deux déplacements, la seule marche possible pour que la coccinelle arrive en A en effectuant exactement $2n$ déplacements est :

$A \rightarrow \underbrace{C \rightarrow C \rightarrow \ldots\ldots \rightarrow C}_{(n-2)\text{fois}} \rightarrow A$.

C'est-à-dire que la coccinelle doit se rendre une première fois sur le sommet opposé à A, revenir sur le même sommet C $(n-2)$ fois et enfin revenir sur le sommet opposé A.

On obtient donc $P(A_{2n}) = \frac{4}{9} \times \left(\frac{5}{9}\right)^{n-2} \times \frac{4}{9} = \left(\frac{5}{9}\right)^{n-2} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2$.

b) $P(G_{2n}) = P(A_2) + P(A_4) + P(A_6) + \cdots + P(A_{2n})$

$$= \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} + \cdots + \left(\frac{5}{9}\right)^{n-2} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2$$

$$= \frac{5}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left[1 + \frac{5}{9} + \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{5}{9}\right)^{n-2}\right]$$

$$= \frac{5}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left[\frac{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}}{1 - \frac{5}{9}}\right] = \frac{5}{9} + \frac{4}{9}\left[1 - \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}\right] = 1 - \frac{4}{9} \times \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}$$

c) $P(G_{2n}) \geqslant 0,9999$ à partir de $n = 16$ donc 32 déplacements.

Exercice 22 :1. La probabilité que la cible soit en 1, 30 secondes plus tard est $\frac{1}{2}$

En effet, au bout de 1, 3, 5,. . . 29 secondes, la cible se trouve obligatoirement en position 2. A partir de là, elle a ensuite une chance sur 2 d'être en position 1 ou 3.

2. Soit n non nul et impair :

a) Au bout d'un nombre impair de secondes, la cible est obligatoirement en position 2 donc la probabilité que la cible soit en position 1 au bout de n secondes (n impair) est alors 0.

b) Et donc, la probabilité que la cible soit en position 2 au bout de n secondes (n impair) est 1.

3. Soit n non nul et pair.

a) Au bout d'un nombre impair de secondes, la cible est obligatoirement en position 2. Donc au bout de n- 1 secondes, la cible est obligatoirement en position 2 et a donc ensuite une chance sur 2 de passer en position 1. Donc la probabilité que la cible soit en position 1 au bout de n secondes (n pair) est $\frac{1}{2}$

b) Et la probabilité que la cible soit en position 2 au bout de n secondes (n pair) est 0.

Exercice 23 :1. a) Le mot Hélène comporte six lettres distinctes. Une seule permutation de ces six lettres sur un total de 720 est correcte. La probabilité cherchée est donc $\frac{1}{720}$

b) Si le mot se termine par « NE » ; il commence par une seule des 4! = 24 permutations des quatre lettres H, É, L, È.La probabilité cherchée est donc $\frac{24}{720}=\frac{1}{30}$

c) Il y a trois consonnes H, L et N donc trois possibilités pour la première lettre. Les cinq lettres restantes peuvent être permutées de 5! = 120 façons. La probabilité est donc $\frac{3\times120}{720}=\frac{1}{2}$ On peut aussi raisonner uniquement sur la première lettre qui est une consonne avec la probabilité $\frac{1}{2}$

2. En toute rigueur, si les lettres ne sont pas accentuées, il y a une probabilité nulle d'obtenir le prénom correctement orthographié. Si on cherche la probabilité d'obtenir le prénom correctement orthographié aux accents près, les lettres H, L et N doivent occuper les positions 1, 3 et 5 et il reste 6 possibilités pour la position des trois cartons portant la lettre E. La probabilité cherchée est donc : $\frac{6}{720}=\frac{1}{120}$

Exercice 24 : 1. Faire un arbre ou lister les différentes possibilités. Cette probabilité est de $\frac{1}{2}$

2. Faire un arbre ou lister méthodiquement les possibilités. Cette probabilité est de $\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$

3. a) Les 2 premières personnes repartent avec leur parapluie avec une probabilité de $\frac{1}{6\times5}$. Aucune des 4 autres ne repart avec son parapluie avec une probabilité de $\frac{3}{8}$ (question précédente).

Donc la probabilité recherchée est de $\frac{1}{6\times5}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{80}$

b) Il y a $C_6^2=15$ façons de choisir les 2 personnes repartant avec leur parapluie, et pour chaque cas une probabilité de $\frac{1}{80}$ (question précédente).La probabilité recherchée est : $C_6^2\times\frac{1}{6\times5}\times\frac{3}{8}=15\times\frac{1}{80}=\frac{3}{16}$

4. a) La deuxième personne est la première à repartir avec son parapluie, donc la première personne ne prend ni son parapluie ni celui de la deuxième personne.

La probabilité est donc : $\frac{n-2}{n}\times\frac{1}{n-1}=\frac{n-2}{n\times(n-1)}$

b) La troisième personne est la première à repartir avec son parapluie, donc ni la première ni la deuxième ne prennent leur parapluie ni le parapluie de la troisième personne.

Deux cas possibles :- la première personne prend le parapluie de la deuxième, la deuxième ne prend pas celui de la troisième, et la troisième prend son parapluie ; la probabilité de ce cas est

$\frac{1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{1}{n-2}=\frac{n-2}{n\times(n-1)\times(n-2)}$

- La première personne ne prend ni son parapluie ni celui de la deuxième, ni celui de la troisième, la deuxième personne ne prend ni le sien, ni celui de la troisième, et la troisième prend son parapluie ; la probabilité de ce cas est $\frac{1}{n}\times\frac{n-3}{n-1}\times\frac{n-3}{n-2}=\frac{(n-3)^2}{n\times(n-1)\times(n-2)}$

La probabilité cherchée est donc : $\frac{n-2-(n-3)^2}{n\times(n-1)\times(n-2)}=\frac{n^2-5n+7}{n\times(n-1)\times(n-2)}$

Exercice 25:1. (a) A chaque étape, chacune des billes se déplace au hasard sur l'une des 3 arrêtes adjacentes au sommet sur lequel elle se trouve. La probabilité d'emprunter l'une ou l'autre des ces 3 directions est donc égale à $\frac{1}{3}$ Le joueur perd après une seule étape si et seulement si les deux billes se déplacent sur la seule 1.

arrête commune, donc la probabilité que le joueur perde après une seule étape est égale à : $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.

(b) . Le joueur gagne après une seule étape si et seulement si les 2 billes se déplacent vers le même sommet, celui-ci pouvant donc être n'importe lequel des deux sommets libres. La probabilité que les deux billes se déplacent en direction d'un sommet donné étant toujours égale à $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$, la probabilité que le joueur gagne en une étape est égale à : $2\times\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$.

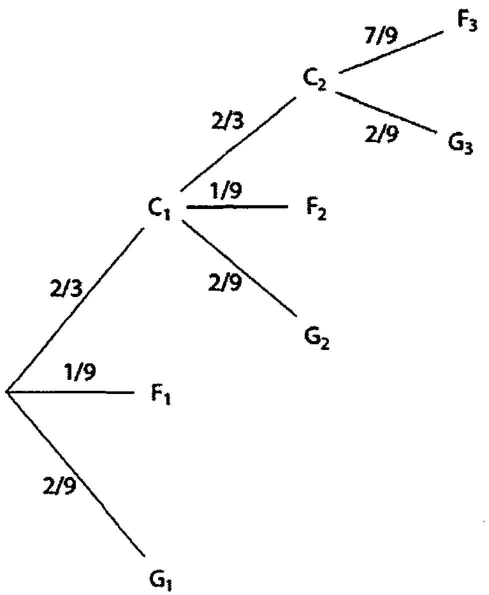
2. La probabilité que le jeu s'arrête à la première étape est la probabilité qu'au terme de cette étape le joueur gagne ou perde la partie.

Le jeu s'arrête donc à l'issue de la première étape avec une probabilité égale à : $\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{1}{3}$.

Dans le cas contraire, il continue.

La probabilité que le jeu continue au-delà de la première étape est donc égale à :$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

Si le jeu continue, à chacune des étapes suivantes, les probabilités que le joueur gagne ou perdre restent inchangées.
En notant respectivement G_i , F_i et C_i les évènements « le joueur gagne à la $i^{\text{ème}}$ étape », « le joueur perd à la $i^{\text{ème}}$ étape » et « le jeu continue à la $i^{\text{ème}}$ étape », on peut schématiser le déroulement d'une partie à l'aide de l'arbre ci-dessous :



(a) Le jeu s'arrête à l'issue de la seconde étape si et seulement si il ne s'est pas arrêté à l'issue de la première et qu'à la seconde soit le joueur gagne, soit le joueur perd donc d'après l'arbre ci-dessus, la probabilité de cet évènement est : $\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\right) = \frac{2}{9}$.

(b) De façon analogue, il apparaît que la probabilité que le joueur gagne à l'issue de la $3^{\text{ème}}$ étape est

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{9} = \frac{8}{81}.$$

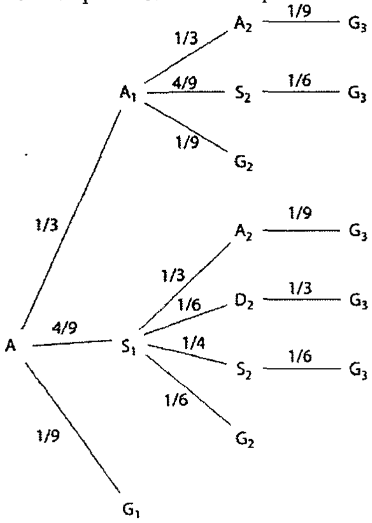
3. Le joueur gagne s'il l'emporte à l'une des trois étapes donc la probabilité de cet évènement est :

$$\frac{2}{9} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{9} = \frac{38}{81} = 0,47.$$

B - sur une pyramide : 1. On notera qu'une bille située sur l'un des sommets de la base de la pyramide choisit son déplacent au hasard parmi l'une des 3 arrêtes adjacentes, tandis qu'une bille placée au sommet de la pyramide a le choix entre 4 directions possibles.

	$P(A_1)$	$P(D_1)$	$P(S_1)$	$P(G_1)$	$P(F_1)$
Billes initialement en configuration A	1/3	0	4/9	1/9	1/9
Billes initialement en configuration D	0	2/9	4/9	1/3	0
Billes initialement en configuration S	1/3	1/6	1/4	1/6	1/12

2. On peut ici aussi schématiser le déroulement d'une partie à l'aide d'un arbre. Nous présentons un arbre incomplet ne schématisant que les situations permettant au joueur de gagner la partie.



La probabilité que le joueur gagne est donc égale à

$$\frac{1}{9} + \frac{4}{9}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{65}{216} + \frac{1}{3} \times \frac{12}{54} = \frac{155}{486} \approx 0.319.$$

Exercice N°1 : La mode est la valeur qui a un effectif maximum donc la mode est 5
La série est ordonnée par ordre croissant.

$1^{ère}$	$2^{ème}$	$3^{ème}$	$4^{ème}$	$5^{ème}$	$6^{ème}$	$7^{ème}$	$8^{ème}$	$9^{ème}$	$10^{ème}$	$11^{ème}$	$12^{ème}$	$13^{ème}$	$14^{ème}$	$15^{èm}$
5	5	5	5	6	6	7	8	8	10	12	15	16	16	18

Puis que l'effectif total est un impair (15) la médiane M_e est donc la $8^{ème}$ $\left(\frac{15+1}{2}=8\right)$ *donc* $M_e=8$

* les valeurs de la première moitié de la série sont

$1^{ère}$	$2^{ème}$	$3^{ème}$	$4^{ème}$	$5^{ème}$	$6^{ème}$	$7^{ème}$	$8^{ème}$
5	5	5	5	6	6	7	8

La médiane q_1 de ces (8 pairs) Est la moyenne entre la $4^{ème}$ et la $5^{ème}$ valeurs et par suite $q_1=\frac{5+6}{2}=5{,}5$ *les valeurs de la seconde note de la série sont :

$8^{ème}$	$9^{ème}$	$10^{ème}$	$11^{ème}$	$12^{ème}$	$13^{ème}$	$14^{ème}$	$15^{ème}$	rang par rapport à toutes les valeurs
9	9	10	12	15	16	16	18	
$1^{ère}$	$2^{ème}$	$3^{ème}$	$4^{ème}$	$5^{ème}$	$6^{ème}$	$7^{ème}$	$8^{ème}$	rang par rapport à la seconde note des valeurs.

La médiane q_3 de ces 8 valeurs (8 est pair) est la moyenne entre la $4^{ème}$ et $5^{ème}$ note de la seconde moitié (11ème et $12^{ème}$ par rapport a toutes les valeurs) Par suite $q_3=\frac{12+15}{2}=13{,}5$

2) la moyenne $\bar{x}=\frac{142}{15}$ la calculatrice affiche 9,466667donc la moyenne arrondie au centième est $\bar{x}=9{,}47$,La variance $V=\frac{1654}{15}-(\bar{x})^2=12069{,}121$, L'écart type $6=\sqrt{v}=\sqrt{12069{,}121}$

Exercice N°2 :L'écriture les 18 notes dans l'ordre croissant
1)4,4,5,8,9,9,9, 9,9,11,12,15,16,16,18,18,18,,19,

2)L'effectif total est pair (18 notes) $N=18$; $\frac{N}{2}=9$ Donc la médiane M_e correspond à la moyenne de la $9^{ème}$ et $10^{ème}$ valeurs de la série ordonnée donc $M_e=\frac{9+11}{2}=10$

3)La médiane de la première moitié de la population correspond au $1^{ère}$ quartile donc les notes de la première moitié des élèves sont.
4)

$1^{ère}$	$2^{ème}$	$3^{ème}$	$4^{ème}$	$5^{ème}$	$6^{ème}$	$7^{ème}$	$8^{ème}$	$9^{ème}$
4	4	5	8	9	9	9	9	9

L'effectif de la première moitié est impaire (9 notes)on a la médiane q_1 de ces 9 notes est la $5^{ème}$ ($\frac{9+1}{2}=5$) c'est-à-dire $q_1=9$

* les notes de la seconde moitié des élèves sont

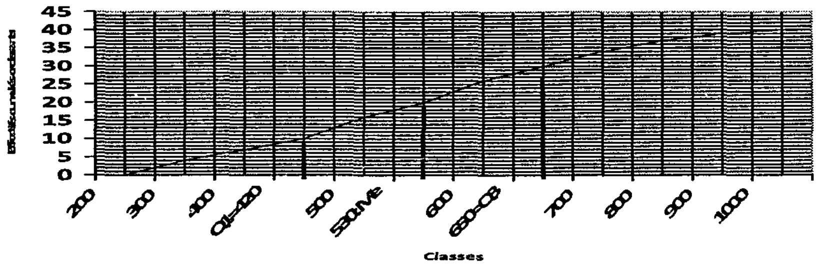
$10^{ème}$	$11^{ème}$	$12^{ème}$	$13^{ème}$	$14^{ème}$	$15^{ème}$	$16^{ème}$	$17^{ème}$	$18^{ème}$	rang par rapport à toutes les valeurs
11	12	15	16	16	18	18	18	19	
$1^{ère}$	$2^{ème}$	$3^{ème}$	$4^{ème}$	$5^{ème}$	$6^{ème}$	$7^{ème}$	$8^{ème}$	$.9^{ème}$	rang par rapport à la seconde note des valeurs

L'effectif de la seconde moitié des élèves est impair (9 notes) Par suite le deuxième quartile q_3 et la $5^{ème}$ notes $\left(\frac{9+1}{2}=5\right)$ de la seconde moitié $q_3=16$ L'écart inter quartile est 16-9=7

4)La population sur la quelle porte l'étude est une classe d'élèves les individus sont les élèves de cette classe.Le caractère étudié sur chaque élève est sa note en mathématique
Il s'agit d'un caractère mesurable de valeurs finies donc c'est caractère quantitatif discret…

Exercice N°3 :2) a)

Classes en Km	Effectifs	Effectifs cumulés croissants
[200;300[	4	4
[300;400[	5	9
[400;500[	7	16
[500;600[	10	26
[600;700[	8	34
[700;800[	3	37
[800;900[	2	39
[900;1000[	1	40



3) a) D'après le polygone des effectifs cumulés croissants : $Q_1 = 420; Me = 530; Q_3 = 650$.

b) L'entreprise a intérêt a remplacer :

- Les véhicules qui ont roulé moins de 420 Km par des véhicules plus légères.
- Les véhicules *qui ont roulé plus de 650 Km par des véhicules diesel.*

4) Le kilométrage moyen de l'ensemble des véhicules pendant une semaine est :

$$\overline{X} = \frac{250\times4+350\times5+450\times7+550\times10+650\times8+750\times3+850\times2+950}{40} = 537.5\,\text{Km}$$

5) $$\text{Var}(X) = \frac{4\times(250-537.5)^2+5\times(350-537.5)^2+7\times(450-537.5)^2+10\times(550-537.5)^2}{40}$$

$$+\frac{8\times(650-537.5)^2+3\times(750-537.5)^2+2\times(850-537.5)^2+(950-537.5)^2}{40} = 29093.75$$

$\sigma = \sqrt{29073.75} = 170.569\,(\text{en Km})$

Exercice N°4 :

1) En utilisant une calculatrice et en présentant les calculs dans un tableau, on détermine la moyenne arithmétique $\overline{X}$ puis la variance et enfin l'écart type σ

Groupe d'âge	X_i	n_i	$n_i x_i$	x_i^2	$n_i x_i^2$
[15,25[	- 20	29391	587820	400	11756400
[25,35 [	30	304255	9127650	900	273829500
[35,45 [	40	350086	1400344	1600	560137600
[45,55 [	50	296121	14806050	2500	740302500
[55,65 [	60	261308	15678480	3600	940708800
[65,75 [	70	147789	10345230	4900	724166100
75 ans et plus	80	67856	5428480	6400	434278400
Totaux		1456806	69977150		3685179300

Moyenne arithmétique : $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{7} n_i X_i}{N} \approx 48(ans)$

Variance : $V = \dfrac{\sum_{i=1}^{7} n_i x_i^2}{N} - \bar{X}^2 = \dfrac{3.685.179300}{1.456.806} - 2304$ =2529,6294-2304

D'où : $V = 225$,Ecart type $\sigma = \sqrt{v} = 15(\text{ans})$

2) on a : $\bar{X} - \sigma \leq x \leq \bar{X} + \sigma$ En remplacent on obtient : 48-15$\leq x \leq$48+15 par suite $33 \leq x \leq 63$

Cette double inégalité nous donne l'intervalle

$[33,63] = [33,35[\cup [35,55[\cup [55,63[$

Effectif correspondant l'intervalle [33,35[Pour calculer cet effectif, on suppose que la réparation des observations dans l'intervalle [25,35[est linéaire et on utilise la proportionnalité .On obtient : $\dfrac{304.255\times(35-33)}{35-25} = 60851$

Effectif correspondant à l'intervalle $[35,55[$

Cet effectif est donné directement par le tableau .On obtient :350086+296121= 646.207

Effectif correspondant à l'intervalle $[35,63[$ Le calcul est semblable à celui pratiqué pour détermination de l'effectif correspondant à l'intervalle [33,35[.*on obtient :*

$\dfrac{26308(63-55)}{65\ -55} = \dfrac{261,308\times8}{10}$

Effectif correspondant à l'intervalle [33,63] :60851 +646.207 +209.046 =916.104

Interprétation, en Pourcentage, *du résultat obtenu* $\dfrac{916.104\times100}{1456801}$ =62,88%

Ainsi 62,88 % des chefs de ménage ont un âge compris entre 33 ans et 63 ans

3) $\bar{x} - 2\sigma \leq x \leq \bar{x} + 2\sigma$

En remplaçant $\bar{x}$ *et* σ par leurs valeurs on obtient :48-30$\leq x \leq 48+30$

Soit : $18 \leq x \leq 78$

Un calcul analogue à celui fait dans la question 2 donne, comme effectif correspondant à l'intervalle $[18,78]$, le résultat suivant : 1,400488

Interprétation en pourcentage de ce résultat : $\dfrac{1,400488\times100}{1456806}$ ==96,13%

Ainsi, 96,13 % des chefs de ménage ont écart à la moyenne arithmétique x=48 *est inférieure ou égale au* double de l'écart type σ.

Exercice N°5:

1) La moyenne des puissances utilisées dans l'agence A est :

$$\overline{X_A} = \frac{4\times6+5\times10+6\times16+7\times8+8\times3+9\times3}{6+10+16+8+3+3} = \frac{277}{46} = 6.02$$

La moyenne des puissances utilisées dans l'agence B est :

$$\overline{X_B} = \frac{4\times15+5\times6+6\times4+7\times4+8\times6+9\times11}{15+6+4+4+6+11} = \frac{289}{46} = 6.28$$

2) a)

$$(\sigma_A)^2 = \frac{6\times(4-6.02)^2+10\times(5-6.02)^2+16\times(6-6.02)^2+8\times(7-6.02)^2+3\times(8-6.02)^2+3\times(9-6.02)^2}{46}$$

$$=1.76 \text{ d'où } \sigma_A = 1.32$$

$$(\sigma_B)^2 = \frac{15\times(4-6.28)^2+6\times(5-6.28)^2+4\times(6-6.28)^2+4\times(7-6.28)^2+6\times(8-6.28)^2+11\times(9-6.28)^2}{46}$$

$$=4.11 \text{ d'où } \sigma_B = 2.02$$

b) On a $\overline{X_A} = \overline{X_B}$ mais $\sigma_B > \sigma_A$ donc :

* La moyenne des voitures utilisées dans l'agence A ont pour puissances très proches de la moyenne qui est presque 6 chevaux, et par suite le chef de l'agence A a raison.

* La majorité des voitures utilisées dans l'agence B ont pour puissances loin de la moyenne qui est presque 6 chevaux, et par suite le chef de l'agence B doit donc acheter des voitures de 4 ou de 9 chevaux.

EXERCIEC 6:

Yi Xi	42,5	47,5	52,5	57,5	Distribution Marginale de X
152,5	18	10	2	0	30
157,5	3	16	5	1	25
162,5	0	5	13	5	23
167,5	0	2	6	14	22
Distribution marginale de Y	21	33	26	20	100

$$\bar{x} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{4} n_i x_i = \frac{1}{100}(30\times152,5+25\times157,5+23\times162,5+22\times167,5) = 159,35$$

$$\bar{y} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{4} n_i y_i = \frac{1}{100}(21\times42,5+33\times47,5+26\times52,5+20\times57,5) = 49,49 \;;$$

$$V(X) = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{4} n_i {x_i}^2 - \bar{x}^2 = 31,82 \qquad ; \quad V(Y) = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{4} n_i {y_i}^2 - \bar{y}^2 = 26,68$$

Exercice N°7

1. En utilisant une calculatrice et en disposant les calculs dans un tableau, vérifier que :
$\bar{x}$ =16,84(ha) ; $\bar{y}$=30,60(ha)

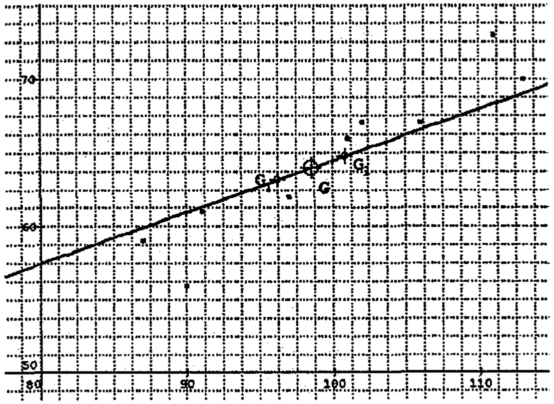
On remarque que $\bar{y}$ est plus grand que $\bar{x}$ .Cela signifie que les exploitions de la région B sont, en moyenne, plus grandes que celles de la région A.

2. Le calcul, disposé suivant un tableau, donne les résultats suivants :
σ_A =22,32(ha) ; $\sigma_B = 36,96(ha)$

σ_A étant inférieur à σ_B ,il semble que la région B possède des exploitations ayant des superficies plus dispersées que celles des exploitations de la région A , mais il ne faut pas oublier que la superficie moyenne dans la région B est plus grande que celle de la région A. Cela montre que l'utilisation unique des écart type ne permet pas une comparaison objective des dispersions dans les deux séries .Dans ce cas et dans ceux qui sont similaires, on introduit le rapport est $\frac{\text{écart}-\text{type}}{\text{moyenne arithmétique}}$ .Ce rapport mesure la dispersion relative et de donne une réponse au problème posé.

Pour la région A, on a : $r_A = \frac{22,32}{16,84} = 1,325$

Pour la région B, on a : $r_B = \frac{36,96}{30,6} = 1,208$ On peut alors conclure que les superficies des exploitations de la région B sont moins dispersées que celles des exploitions de la région A.



EXERCICE 8 :1) 2) $G(\bar{X},\bar{Y})$ avec

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{10} = \frac{985}{10} = 98,5 \text{ et}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{10} = \frac{640}{10} = 64$$

3) Le point G₁ $(\bar{x}_1,\bar{y}_1)$ avec

$$\bar{x}_1 = \frac{87+87+90+91+97}{5} = 90,4$$

$$\text{et } \bar{y}_1 = \frac{56+59+59+61+62}{5} = 59,4$$

G₁(90,4 ;59 ,4). Le point G₂ $(\bar{X}_2,\bar{Y}_2)$ avec

$$\bar{x}_2 = \frac{106+113+111+102+101}{5} = 106,6 \;;$$

$$\bar{y}_2 = \frac{70+73+67+67+66}{5} = 68,6 \quad G_2=(106,6\,;68,6)$$

4) L'équation de la droite (G₁G₂) est de la forme y = ax + b , avec :

$$\begin{cases} a = \frac{y_{G_2}-y_{G_1}}{x_{G_2}-x_{G_1}} = \frac{68,6-59,4}{106,6-90,4} = 0,568 \\ b = y_{G_1} - ax_{G_1} = 59,4-90,4\times0,568 = 8,053 \end{cases} \Rightarrow (G_1G_2) : \; y = 0,568x + 8,053.$$

5) Pour x=120 dinars y=0,568x120+8,053=76,213. La dépense est estimée égal à 76,213 dinars pour une recette de 120 dinars.

EXERCICE 9

2)Coordonnées des points G₁ et G₂ : Le point G₁ du nuage formé par les quatre premiers points $G_1(\bar{X}_1,\bar{Y}_1)$.

$$\bar{x}_1 = \frac{1+2+3+4}{4} = 2,5 \text{ et } \bar{y}_1 = \frac{80+83+78+78}{4} = \frac{319}{4} = 79,75 \quad G_1(2,5\,:79,75).$$

Le point G₂ du nuage formé par les quatre derniers points à $G_2(\bar{X}_2,\bar{Y}_2)$ $\bar{x}_2 = \frac{5+6+7+8}{4} = \frac{26}{4} = 6,5$ et

$\overline{y}_2 = \frac{78+73+72+70}{4} =$

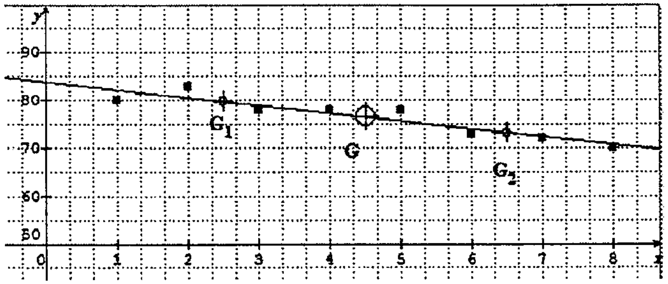
$\frac{293}{4} = 73,25$

G₂(6,5 ;73,25).

3) La droite (G₁G₂) a une équation de la forme y = ax+b avec :

$a = \frac{y_{G_2} - y_{G_1}}{x_{G_2} - x_{G_1}} = \frac{73,25-79,75}{6,5-2,5}$

$= -1,625$



et $b = y_{G_1} - ax_{G_1} = 79,75 + 1,625 \times 2,5 = 83,8125 \Rightarrow$(G₁G₂) : y= - 1,625x+83,8125.

4) L'année 2008 correspond au rang 11 , ordonnée du point de la droite (G₁G₂) d'abscisse 11, est approximativement égal à 66.

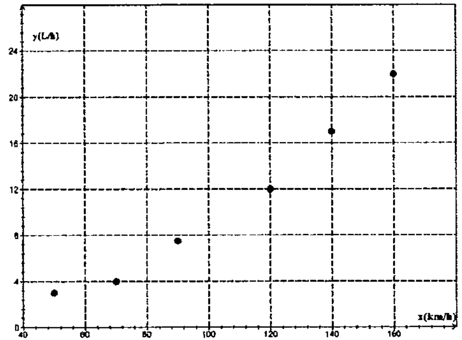
Le chiffre d'affaire de l'entreprise en 2008 est estimé égal à 66 (milliers de dinars)

5) $Y \leq 60 \Leftrightarrow -1,625x+83,8125 \leq 60 \Leftrightarrow 1,625x \geq 23,8125 \Leftrightarrow x > \frac{23,8125}{1,625}$ or $\frac{23,8125}{1,625} \approx 14,654$ Le premier nombre entier supérieur à ce nombre est 15.Donc c'est en l'année de rang 15 que le chiffre d'affaire est inférieur à 60 milles dinars (pour la première fois). L'année de rang 15 est 2012.

Exercice n°10 :

1) a) le nuage des points $M_i(x_i, y_i)$ semble plutôt d'allure parabolique que rectiligne. Il ne serait pas pertinent de chercher un ajustement affine entre x et y.

b)



Vitesse x (km/h)	50	70	90	120	140	160
$z=\sqrt{y}$	1,73	2	2,74	3,64	4,12	4,7

Le nuage des points correspondants l'alignement assez prononcé des points $M_i(x_i, z_i)$ incite cette fois ci à chercher un ajustement affine entre x et z.

2) a) $x_{G_1} = \frac{50+70+90}{3} = 70$; $z_{G_1} = \frac{1,73+2+2,74}{3} = 2,15$ donc $G_1(70;2,15)$

$x_{G_2} = \frac{120+140+160}{3} = 140$; $z_{G_2} = \frac{3,46+4,12+4,7}{3} = 4,7$ donc $G_2(140;4,7)$

$(G_1G_2): z = ax+b$ où $a = \frac{4,7-2,15}{140-70} = 0,028$ et $2,15 = 0,028 \times 70 + b \Rightarrow b = 0b19$ donc

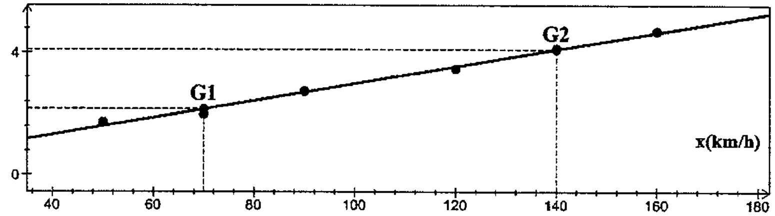
$\boxed{(G_1G_2): z = 0,028x + 0,19}$

b) $y = z^2 = (0,028x+0,19)^2 = 0,0008x^2 + 0,0106x + 0,0361$ qui est donc un ajustement du second degré entre y et x.

3) a) pour x = 100 ; $y = 0,0008 \times (100)^2 + 0,0106 \times 100 + 0,0361 \approx 9,1$ litres

b) pour x =0 ; y = 0,0361 litres

c) pour $y = 6 \Rightarrow z = \sqrt{6} = 2,45$. L'équation : $z = 0,028x + 0,19 = 2,45$



$\Rightarrow x \approx 80,7$ km / h .Cette vitesse est celle permise pour, en un heure ,consommer les six litres de carburant restants en cet heure et à cette vitesse, on peut donc envoie rouler 80,7 km.

Exercice11 :1)a) E = 10 , σ(E) = 5,163. b) $\overline{R} = 2,56$; σ(R) = 1,103

2)a) le marge de point de la série(E,R) $G_1(6,1,708)$; $G_2(15,3,625)$

$(G_1G_2): y = ax+b$, $a = \frac{y_{G_2} - y_{G_1}}{x_{G_2} - x_{G_1}} = 0,213$; $b = y_G - ax_G = 2,56 - 0,213 \times 10 = 0,43$

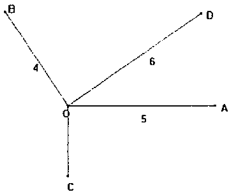
D'où $(G_1G_2): y = 0,213x + 0,43$

d) si $E = 25cm \Rightarrow R = 0,213 \times 25 + 0,43 = 5,755m^2.c/w$

Solutions :

Exercice N°1 : 1) b) ; 2) b) ; 3) b) ; 4)a)

Exercice N°2 : 1°/ Voir figure



2°) $\left(\widehat{\overline{OB},\overline{OC}}\right)=\left(\widehat{\overline{OB},\overline{OA}}\right)+\left(\widehat{\overline{OA},\overline{OC}}\right)+2k\pi$

$=-\left(\widehat{\overline{OA},\overline{OB}}\right)+\left(\widehat{\overline{OA},\overline{OC}}\right)+2k\pi=-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$=-\frac{7\pi}{6}+2k\pi=\frac{5\pi}{6}-2\pi+2k\pi=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

Donc la mesure principale de $\left(\widehat{\overline{OB},\overline{OC}}\right)$ est $\frac{5\pi}{6}$

$\left(\widehat{\overline{OC},\overline{OD}}\right)=\left(\widehat{\overline{OC},\overline{OA}}\right)+\left(\widehat{\overline{OA},\overline{OD}}\right)+2k\pi=-\left(\widehat{\overline{OA},\overline{OC}}\right)+\left(\widehat{\overline{OA},\overline{OD}}\right)+2k\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

Donc la mesure principale de $\left(\overline{OC},\overline{OD}\right)$ est $\frac{3\pi}{4}$

Exercice3: 1°/ $\left(\widehat{\overline{AB},\overline{AD}}\right)=\left(\widehat{\overline{AB},\overline{AC}}\right)+\left(\widehat{\overline{AC},\overline{AD}}\right)+2k\pi$

$=\frac{2\pi}{3}+\frac{7\pi}{6}+2k\pi=\frac{11\pi}{6}+2k\pi=-\frac{\pi}{6}+2\pi+2k\pi$, La mesure principale de $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ et $\frac{-\pi}{6}$

$\left(\widehat{\overline{AC},\overline{AE}}\right)=\left(\widehat{\overline{AC},\overline{AB}}\right)+\left(\widehat{\overline{AB},\overline{AE}}\right)+2k\pi=-\left(\widehat{\overline{AB},\overline{AC}}\right)+\left(\widehat{\overline{AB},\overline{AE}}\right)+2k\pi=-\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}+2k\pi=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

La mesure principale de $\left(\widehat{\overline{AC},\overline{AE}}\right)$ est $\frac{\pi}{6}$

2°/ $\left(\widehat{\overline{AD},\overline{AE}}\right)=\left(\widehat{\overline{AD},\overline{AB}}\right)+\left(\widehat{\overline{AB},\overline{AE}}\right)+2k\pi=\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}+2k\pi=\pi+2k\pi$

Signifie que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires et par suite A , D et E sont alignés.

Exercice 4: 1) $\left(\widehat{\overline{AB};\overline{AC}}\right)=\frac{-23\pi}{10}+2k\pi=\frac{-20-3}{10}\pi+2k\pi=-\frac{3\pi}{10}+2k\pi$;

$\left(\widehat{\overline{AC};\overline{AE}}\right)=\frac{-47\pi}{10}+2k\pi=-\frac{7\pi}{10}+2k\pi$

2) $\left(\widehat{\overline{AB};\overline{AE}}\right)=\left(\widehat{\overline{AB};\overline{AC}}\right)+\left(\widehat{\overline{AC};\overline{AE}}\right)+2k\pi=\frac{-3\pi}{10}+2k\pi+\frac{-7\pi}{10}+2k\pi=-\frac{3\pi}{10}+\left(\frac{-7}{10}\right)=-\pi+2k\pi$

Donc A ; B et E sont alignés.

3) $\left(\widehat{\overline{AC};\overline{AD}}\right)=\left(\widehat{\overline{AC};\overline{AB}}\right)+\left(\widehat{\overline{AB};\overline{AD}}\right)+2k\pi=\frac{3\pi}{10}+\frac{\pi}{5}+2k\pi=\frac{5\pi}{10}+2k\pi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ Donc $(AC)\perp(AD)$

Exercice 5 : 1) $\left(\widehat{\overline{OA};\overline{OB}}\right)=-\frac{59\pi}{3}+2k\pi=-\frac{60\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

2) a) $\left(\widehat{\overline{OC};\overline{OA}}\right)=\frac{32\pi}{3}+2k\pi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

b) $\left(\widehat{\overline{OC};\overline{OB}}\right)\equiv\left(\widehat{\overline{OC};\overline{OA}}\right)+\left(\widehat{\overline{OA};\overline{OB}}\right)[2\pi]=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+2k\pi=\pi+2k\pi$ donc O ; C et B sont alignés.

3) a) $\left(\widehat{\overline{OB};\overline{OD}}\right)=-\frac{71\pi}{6}+2k\pi=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

b) $\left(\widehat{\overline{OA};\overline{OD}}\right)=\left(\widehat{\overline{OA};\overline{OB}}\right)+\left(\widehat{\overline{OB};\overline{OD}}\right)+2k\pi=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ donc OAD est un triangle rectangle en O.

Exercice 6: 1) a) $\left(\widehat{\overline{BC};\overline{BA}}\right)=-\frac{35}{6}\pi+2k\pi=\frac{-6\times6+1}{6}\pi+2k\pi=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

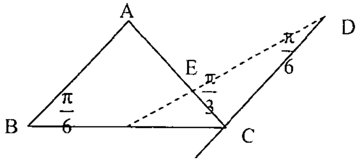
b) On a : $\left(\widehat{\overline{AB};\overline{AC}}\right)+2\left(\widehat{\overline{BC};\overline{BA}}\right)=\pi+2k\pi$ donc $\left(\widehat{\overline{AB};\overline{AC}}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

2) a) $CA=CM$; $\left(\widehat{\overline{CA};\overline{CD}}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $\left(\widehat{\overline{DE};\overline{DC}}\right)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$; $E\in(AC)$

b) Puisque $\left(\widehat{\overline{DE};\overline{DC}}\right)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ et $\left(\widehat{\overline{CD};\overline{CA}}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ et $\left(\widehat{\overline{CA};\overline{CB}}\right)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ donc $\left(\widehat{\overline{BC};\overline{ED}}\right)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

d'où $\left(\widehat{\overline{BC};\overline{BA}}\right)$ et $\left(\widehat{\overline{BC};\overline{ED}}\right)$ deux angles correspondants et $\left(\widehat{\overline{BC};\overline{BA}}\right)=\left(\widehat{\overline{BC};\overline{ED}}\right)+2k\pi$ donc $(AB)//(ED)$

c)



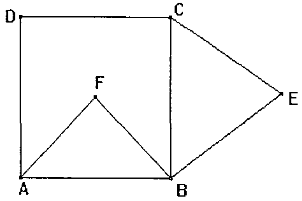
$\left(\widehat{\overline{BC};\overline{AD}}\right)=\left(\widehat{\overline{BC};\overline{CA}}\right)+\left(\widehat{\overline{CA};\overline{AD}}\right)+2k\pi=\pi+\left(\widehat{\overline{CB};\overline{CA}}\right)+\pi+\left(\widehat{\overline{AC};\overline{AD}}\right)+2k\pi=\left(\widehat{\overline{CB};\overline{CA}}\right)+\left(\widehat{\overline{AC};\overline{AD}}\right)+2k\pi$

$=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{\pi}{12}+2k\pi$

$\left(\widehat{\overline{EA};\overline{DE}}\right)=\pi+\left(\widehat{\overline{EA};\overline{ED}}\right)+2k\pi=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

Exercice7: 1) $\left(\widehat{\overline{BE},\overline{BF}}\right)=\left(\widehat{\overline{BE},\overline{BC}}\right)+\left(\widehat{\overline{BC},\overline{BF}}\right)+2k\pi$

$=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ On a EB = BF donc EBF est un triangle rectangle isocèle en B d'où $B\hat{E}F=\frac{\pi}{4}$ et par suite $\left(\widehat{\overline{EB},\overline{EF}}\right)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$



2) $\left(\widehat{\overline{CD},\overline{CE}}\right)=\left(\widehat{\overline{CD},\overline{CB}}\right)+\left(\widehat{\overline{CB},\overline{CE}}\right)+2k\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}[2\pi]=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

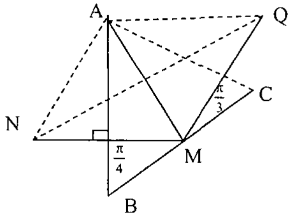
On a DCE est un triangle isocèle et $D\hat{C}E=\frac{5\pi}{6}\Rightarrow D\hat{E}C=\frac{\pi}{12}$

et par suite $\left(\widehat{\overline{EC},\overline{ED}}\right)=\frac{\pi}{12}+2k\pi$

3) $\left(\widehat{\overline{EF},\overline{ED}}\right)=\left(\widehat{\overline{EF},\overline{EB}}\right)+\left(\widehat{\overline{EB},\overline{EC}}\right)+\left(\widehat{\overline{EC},\overline{ED}}\right)+2k\pi$

$=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}+2k\pi=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}+2k\pi=2k\pi$

Et par suite E , F et D sont alignés.



Exercice 8: $\left(\widehat{\overline{BC};\overline{BA}}\right)=-\frac{39}{4}\pi+2k\pi$; $\left(\widehat{\overline{CA};\overline{CB}}\right)=\frac{25}{3}\pi+2k\pi$

1) $\left(\widehat{\overline{BC};\overline{BA}}\right)=-\frac{39}{4}\pi+2k\pi=\frac{-4\times10+1}{4}\pi[2\pi]\equiv\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$\left(\widehat{\overline{CA};\overline{CB}}\right)=\frac{25}{3}\pi+2k\pi=\frac{24+1}{3}\pi+2k\pi=8\pi+\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$\left(\widehat{\overline{AB};\overline{AC}}\right)=\left(\widehat{\overline{AB};\overline{BC}}\right)+\left(\widehat{\overline{BC};\overline{AC}}\right)+2k\pi=\pi+\left(\widehat{\overline{BA};\overline{BC}}\right)+\left(\widehat{\overline{CB};\overline{CA}}\right)+2k\pi$

$=\pi-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{12\pi-3\pi+4\pi}{12}+2k\pi=\frac{5\pi}{12}+2k\pi$

Q
C
M
N

$= S_{(AB)}(M)$ donc AMN est isocèle en A d'où $(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AN}}) + 2k\pi$

$Q = S_{(AC)}(H)$ donc AMQ est isocèle en A d'où $(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AM}}) = (\widehat{\overrightarrow{AQ};\overrightarrow{AC}}) + 2k\pi$

b) $(\widehat{\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AQ}}) = (\widehat{\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AB}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}}) + (\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AC}}) + (\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AQ}}) + 2k\pi$

$= -(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AN}}) - (\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}}) - (\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AM}}) - (\widehat{\overrightarrow{AQ};\overrightarrow{AC}}) + 2k\pi$

$= -(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}}) - (\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}}) - (\widehat{\overrightarrow{AQ};\overrightarrow{AC}}) - (\widehat{\overrightarrow{AQ};\overrightarrow{AC}}) + 2k\pi$

$= -2(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}}) - 2(\widehat{\overrightarrow{AQ};\overrightarrow{AC}}) + 2k\pi = 2(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AQ}}) + 2k\pi \;= 2\left[(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}}) + (\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AQ}})\right] + 2k\pi$

$= 2\left[(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}}) + (\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AC}})\right] + 2k\pi = 2(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) + 2k\pi$ (On a $(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AQ}}) = (\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AC}}) + 2k\pi$)

c) Puisque $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$ alors $(\widehat{\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AQ}}) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

d) $2(\widehat{\overrightarrow{NQ};\overrightarrow{NA}}) + (\widehat{\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AQ}}) = \pi + 2k\pi$; ANQ est isocèle en A. ; $2(\widehat{\overrightarrow{NQ};\overrightarrow{NA}}) = \pi - (\widehat{\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AQ}})[2\pi] = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

D'où $(\widehat{\overrightarrow{NQ};\overrightarrow{NA}}) = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$

3) a) $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}}) = \alpha + 2k\pi$; $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM}}) = (\widehat{\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AB}}) + 2k\pi = (\widehat{\overrightarrow{AN};\overrightarrow{BC}}) + (\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AB}}) + 2k\pi$;

$(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AN}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}) + 2k\pi = \pi + (\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{NA}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}) + 2k\pi$

Donc $(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{NA}}) = (\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}}) - (\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}) - \pi + 2k\pi = (\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}}) + (\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}) - \pi + 2k\pi = \alpha - \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$.

b) $(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{NQ}}) = (\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{NA}}) + (\widehat{\overrightarrow{NA};\overrightarrow{NQ}}) + 2k\pi = \alpha - \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{12} + 2k\pi = \alpha - \frac{10\pi}{12} + 2k\pi$.

$(BC)//(NQ)$ si et seulement si $\alpha - \frac{10\pi}{12} = k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{10\pi}{12} + k\pi$.

Exercice 9 : 1)on a : $(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}) = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}) = \pi + 2k\pi$. Les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MA}$ sont colinéaires ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{NB}$. $\Rightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{NB}}) + 2k\pi$. Or

$(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{NB}}) = (\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MO}}) + (\widehat{\overrightarrow{MO};\overrightarrow{NO}}) + (\widehat{\overrightarrow{NO};\overrightarrow{NB}}) + 2k\pi$, de plus $(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MO}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OA}}) = \pi + 2k\pi$;

$(\widehat{\overrightarrow{NO};\overrightarrow{NB}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{ON}}) = \pi + 2k\pi$ et $(\widehat{\overrightarrow{MO};\overrightarrow{NO}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}) + 2k\pi$

$\Rightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{NB}}) = -4(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OA}}) - 4(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{ON}}) + \pi + 2k\pi \;= -4\left[(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OA}}) + \pi + (\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{ON}})\right] + \pi + 2k\pi$

$= -4\left[(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}) + \pi\right] + \pi + 2k\pi = -2\times 2(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}) + \pi + 2k\pi = \pi + 2k\pi \Rightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}}) = \pi + 2k\pi$

2) $2(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}}) = \pi + 2k\pi \Rightarrow 2(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}}) = \pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}}) = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Comme pour tout $k \in \mathbb{Z}$; il existe un entier $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $k = 2k'$ ou $k = 2k'+1$ On déduit que $(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $(\widehat{\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ Donc I varie sur le cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B.

Exercice N° 1 : 1) a ; 2) b ; 3)a) ; ; 6) b ; 7) b ; 8) b ;

Exercice N° 2: 1°/ a) $(1 + \sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x + 2 \cos x + 2 \sin x \cos x + 1$

$= 2 + 2 \sin x + 2 \cos x + 2 \sin x \cos x = 2 (1 + \cos x) + 2 \sin x (1 + \cos x)$

$= (1 + \cos x) (2 + 2 \sin x) = 2 (1 + \cos x) (1 + \sin x)$

b) $\sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x . \cos^2 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 + 3\sin^2 x . \cos^2 x$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x) (\sin^4 x - \sin^2 x . \cos^2 x + \cos^4 x) + 3\sin^2 x \;\cos^2 x$

$= \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x . \cos x^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$

2°/ Soit l'équation $x^2 - x - 6 = 0$; $\Delta = 25$; $x' = -2$ et $x'' = 3 \Rightarrow x^2 - x - 6 = (x + 2) (x - 3)$

Donc $\cos^2 x - \cos x - 6 = (\cos x + 2) (\cos x - 3)$; Cos $x \in [-1 , 1]$ alors $\cos x + 2 > 0$ et

$\cos x -3 < 0, \Rightarrow \cos^2 x - \cos x - 6 \langle 0$

Exercice N° 3 : 1°/ $(\sin x - \sin y) (\sin x + \sin y) = \sin^2 x - \sin^2 y = \sin^2 x (\sin^2 y + \cos^2 y) - \sin^2 y (\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin^2 x . \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y - \sin^2 y \sin^2 x - \sin^2 y \cos^2 x = \sin^2 x \cos^2 y - \sin^2 y \cos^2 x$

2°/ $(\cos x - \cos y)^2 = \cos^2 x - 2 \cos x \;\cos y + \cos^2 y .= \cos^2 x (\cos^2 y + \sin^2 y) - 2 \cos x \cos y + \cos^2 y$
$= \cos^2 x \cos^2 y + \cos^2 x \sin^2 y - 2 \cos x \cos y + \cos^2 y = (\cos^2 x \cos^2 y - 2 \cos x \cos y + 1) + \cos^2 x \sin^2 y + \cos^2 y - 1 = (1 - \cos x \cos y)^2 + \sin^2 y (\cos^2 x - 1) = (1 - \cos x \cos y)^2 + \sin^2 y . \sin^2 x$

3°/ Soit $x \in IR / \{K\pi, K \in \mathbb{Z}\}$

$$\text{Cot}^2 x - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x \;\sin^2 x}{\sin^2 x} = \cos^2 x\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) = \cos^2 x . \cot^2 x .$$

Exercice N° 4: 1°/ $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

* $\sqrt{3}\cos\left(3x + \frac{\pi}{12}\right) - \sin\left(3x + \frac{\pi}{12}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(3x + \frac{\pi}{12}) - \frac{1}{2}\sin(3x + \frac{\pi}{12})\right)$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos(3x + \frac{\pi}{12}) + \sin\frac{-\pi}{6}\sin(3x + \frac{\pi}{12})\right) = 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

* $-2\sin^2\frac{x}{2} + \sqrt{3}\sin x + 1$. On a : $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \Leftrightarrow 2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} = \cos x$

On obtient : $-2\sin^2\frac{x}{2} + \sqrt{3}\sin x + 1 = \cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x\right) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

2°/ a) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

b) $1 - \cos x - \sin x = 2\sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2} \;= 2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) = 2s\left(in\frac{x}{2}\right)\times\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

3°/ $2 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 2 + 2\left(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) = 2 + 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos 2x + \sin\frac{\pi}{3}\sin 2x\right)$

$$= 2 + 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(1 + \cos(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 4\cos^2\left(\frac{2x - \frac{\pi}{3}}{2}\right)\cos^2 x = 4\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Exercice 5 : 1)a) $\cos 2x-\sin 2x+1=2\cos^2 x-\cancel{1}-2\sin x\cos x+\cancel{1}=2\cos x(\cos x-\sin x)$

b) $\sqrt{2}\sin(x+\frac{3\pi}{4})=\sqrt{2}(\sin x\cos\frac{3\pi}{4}+\cos x\sin\frac{3\pi}{4})=\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x)=\cos x-\sin x$

3)a) $\frac{2\cos 2x}{\cos 2x-\sin 2x+1}=\frac{2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)}{2\cos x(\cos x-\sin x)}=\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\cos x(\cos x-\sin x)}$

$=\frac{(\cos x+\sin x)}{\cos x}=\frac{\cos x}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}=1+\tan x$

b)pour $x=\frac{\pi}{12}$. $1+\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2\cos\left(\frac{2\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{12}\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{12}\right)+1}=\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+1}$

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+1}-1=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}-1=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}-1=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}-1=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2}=2-\sqrt{3}$$

Exercice N°6 : $U(x)=\sin(\pi x)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 1) a) $U(1)=\sin\pi-2\sin\frac{\pi}{2}=0-2=-2$;

$U\left(-\frac{1}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)-2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times\frac{1}{2}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

$U\left(\frac{3}{2}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)-2\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-1-\sqrt{2}=-\left(1+\sqrt{2}\right);U\left(\frac{5}{3}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)-2\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-2\times\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-1=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b) $U(x+4k)=\mathrm{son}\left(\pi(x+4k)\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x+4k)\right)=\sin(\pi x+4\pi k)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}x+2k\pi\right)$

$=\sin\pi x-2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)=U(x)$

2) a) $U(x)=\sin(\pi x)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\sin\left(2.\frac{\pi}{2}x\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)=2\sin\frac{\pi}{2}x.\cos\frac{\pi}{2}x-2\sin\frac{\pi}{2}x$

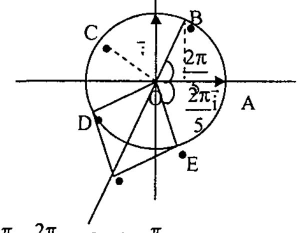
$=2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)-1\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(\cos\left(2.\frac{\pi}{4}x\right)-1\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)=-4\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

b) $U\left(\frac{3}{2}\right)=-4\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)=-1-\sqrt{2}$ signifie que $-4\times\frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)=-1-\sqrt{2}$ signifie que

$\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$. Puisque $\frac{3\pi}{8}\in[0;\pi]$ donc $\sin\frac{3\pi}{8}>0$ et par suite $\sin\frac{3\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}$

$\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)=1$ Donc $\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)=1-\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ signifie que $\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)=1-\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$

d'où $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$. c) $\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{2}}}}{\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2\sqrt{2}}}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}}=\sqrt{\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{1}}=\sqrt{2}+1$



Exercice N°7: $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$; $\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\frac{2\pi}{5}[2\pi]$; $\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OC}}\right)\equiv\frac{4\pi}{5}[2\pi]$

1) $A(1;0)$; $B\left(\cos\frac{2\pi}{5};\sin\frac{2\pi}{5}\right)$; $C\left(\cos\frac{4\pi}{5};\sin\frac{4\pi}{5}\right)$

2) $D\left(\cos\frac{6\pi}{5};\sin\frac{6\pi}{5}\right)$; $E\left(\cos\frac{8\pi}{5};\sin\frac{8\pi}{5}\right)$

3) a) $\left(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{BO}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{OD};\vec{i}}\right)+\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{BO}}\right)[2\pi]\equiv-\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OD}}\right)+\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OB}}\right)+\pi[2\pi]\equiv-\frac{6\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}+\pi[2\pi]\equiv\frac{\pi}{5}[2\pi]$

$\left(\widehat{\overrightarrow{BO};\overrightarrow{OE}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{BO};\vec{i}}\right)+\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OE}}\right)[2\pi]\equiv-\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OB}}\right)+\pi+\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OE}}\right)[2\pi]\equiv-\frac{2\pi}{5}+\frac{8\pi}{5}+\pi[2\pi]\equiv\frac{\pi}{5}[2\pi]$

$\equiv\frac{6\pi}{5}+\pi[2\pi]\equiv\frac{\pi}{5}[2\pi]$. D'où $\left(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{BO}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{BO};\overrightarrow{OE}}\right)[2\pi]$

b) On a $\left(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{BO}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{BO};\overrightarrow{OE}}\right)[2\pi]$ Soit H le point tel que $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$, on a ODHE est un losange car est un parallélogramme tel que $OD=OE$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{BE}}\right)\equiv2\left(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OH}}\right)[2\pi]$ signifie que $\left(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OB}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OE}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OD}}\right)\equiv2\pi[2\pi]$ donc $2\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OD}}\right)+2\left(\widehat{\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OH}}\right)\equiv2\pi[2\pi]$ signifieque $2\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OH}}\right)\equiv2\pi+k\pi$ d'où $\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OH}}\right)\equiv\pi+k\pi$ signifie que $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires.

c) $\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\frac{2\pi}{5}[2\pi]$; $\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}}\right)\equiv\frac{2\pi}{5}[2\pi]$. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ est colinéaire avec $\overrightarrow{OB}$ alors $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OB};\alpha\in$ IR

On a $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$ est colinéaire avec $\overrightarrow{OB}$ alors $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\alpha'\overrightarrow{OB};\alpha'\in$ IR

Donc $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OB}=\alpha\overrightarrow{OB}+\alpha'\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}=(\alpha+\alpha'+1)\overrightarrow{OB}$

$=\beta\overrightarrow{OB}$ d'où $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$ sont colinéaires avec $\overrightarrow{OB}$.

4) On a : $\left(\widehat{\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OA}}\right)\equiv\frac{2\pi}{5}[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\frac{2\pi}{5}[2\pi]$ donc $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OA}$ de même On a $\left(\widehat{\overrightarrow{OC};-\overrightarrow{OA}}\right)\equiv\frac{\pi}{5}[2\pi]$ et $\left(\widehat{-\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}}\right)\equiv\frac{\pi}{5}[2\pi]$ Donc $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ est colinéaire avec $\overrightarrow{OA}$ et par suite $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$ est colinéaires avec $\overrightarrow{OA}$.

5) a) On a $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OB}$ et à $\overrightarrow{OA}$. Puisque $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas colinéaires alors $\vec{0}$ est le seul vecteur colinéaire à $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ par suite $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$

b) de l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$ on aura $\begin{cases}1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=0\\0+\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}+\sin\frac{6\pi}{5}+\sin\frac{8\pi}{5}=0\end{cases}$

Solutions

Exercise N°1:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Signifie $\sin x = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2K\pi \\ ou \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2K\pi \end{cases} K \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2x\pi \\ ou \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} K \in \mathbb{Z}$

$S_{[0\,,\,2\pi[} = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

b) $\cos x = -\frac{1}{2}$ *sig* $\cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2K\pi \\ ou \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2K\pi \end{cases} K \in \mathbb{Z} \Rightarrow S_{[0\,,\,2\pi[} = \left\{\frac{2\pi}{3} \;,\; \frac{4\pi}{3}\right\}$

c) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ *sig* $\sin 2x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + 2K\pi \\ ou \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + 2K\pi \end{cases} K \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + K\pi \\ ou \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

$S_{[0\,,\,2\pi[} = \left\{\frac{7\pi}{12} \;;\; \frac{11\pi}{12} \;;\; \frac{19\pi}{12} \;;\; \frac{23}{12}\pi\right\}$

d) $\sin 2x + \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x + \frac{1}{2}\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \;,\; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \;; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow S_{[0\,,\,2\pi[} = \left\{0 \;,\; \frac{\pi}{2} \;,\; \pi \;,\; \frac{3\pi}{2}\right\}$

e) $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *sig* $\cos 3x = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2K\pi \\ ou \\ 3x = -\frac{\pi}{4} + 2K\pi \end{cases} K \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

$S_{[0\,,\,2\pi[} = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

Exercice N° 2: **1)** a) $\cos 2x + \cos x = -1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + \cos x = 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\,(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2\cos x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

b) $\sin|x| = \frac{1}{2}$ on a deux cas à étudier

si $x \geq 0$ alors $|x| = x$ donc $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \quad ou \quad k \in \mathbb{Z}_+ \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

si $x \leq 0$ alors $|x| = -x$; $\sin(-x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}_-$

Pour $k = 0$ on $x = \frac{7\pi}{6}$ à rejeter

$S_{IR} = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \;,\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \;,\; k \in \mathbb{Z}_+\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \;,\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \;,\; k \in \mathbb{Z}_-\right\} / \left\{\frac{7\pi}{6}\right\}$

$\Rightarrow S_{]-\pi\,,\,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right\}$

c) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{4} = x + \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ 3x + \frac{\pi}{4} = -x - \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 4x = -\pi + 2k\pi \end{cases} K \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

$S_{IR} = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \;,\; -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \;,\; k \in \mathbb{Z}\right\}$; $S_{]-\pi\,,\,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{4} \;,\; -\frac{\pi}{4}, \;-\; \frac{-3\pi}{4} \;;\; \frac{3\pi}{4}\right\}$

d) $\cos^2 x = \sin^2 x \Leftrightarrow 1 + \cos 2x = 1 - \cos 2x \Leftrightarrow \cos 2x = 0$

$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \Rightarrow S_{IR} = \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right\} \Rightarrow S_{]-\pi\,,\,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} \;, -\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \;, K \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $\cos 4x + \sqrt{3}\sin 4x = 1$ *éq à* : $2\left(\frac{1}{2}\cos 4x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin kx\right) = 1$

$\Leftrightarrow 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos 4x + \sin\frac{\pi}{3}\sin 4x\right) = 1 \Leftrightarrow 2\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 4x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ 4x = 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Rightarrow S_{IR} = \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \;,\; \frac{k\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$

$S_{]-\pi\,,\,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, 0, \pi\,\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{6}\right\}$

f) tan x + tan 3x = 0 : il faut que $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ *et* $x \neq \frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$; pour $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ *et* $x \neq \frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$

$\tan x+\tan 3x=0 \Leftrightarrow \tan 3x=-\tan x \Leftrightarrow \tan 3x=\tan(-x) \Leftrightarrow 3x=-x+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{4}$. D'ou $S_{IR}=\left\{\frac{k\pi}{4}\ , k\in\mathbb{Z}\right\}$

$\Rightarrow S_{]-\pi\ ,\ \pi]}=\left\{0,\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4},\pi,\frac{3\pi}{4},-\frac{3\pi}{4}\right\}$

g) $\tan 2x\ .\ \cot\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=1$. Il faut que $2x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $3x-\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$; k∈ x

$\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ et $x\neq\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}$; $k\in\mathbb{Z}$

$\tan 2x.\cot\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)-1 \Leftrightarrow \tan 2x=\frac{1}{\cot\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)}=\tan\left(3x-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2x=3x-\frac{\pi}{3}+2k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi$ k∈ x

Vérifions que la solution x est différent de $\frac{\pi}{4}+\frac{k'\pi}{2}$ *et* $\frac{\pi}{9}+\frac{k'\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3}+k\pi=\frac{\pi}{4}+k'\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 12k-6k'=-1 \Leftrightarrow 2(6k-3k')=-1$ impossible

$\frac{\pi}{3}+k\pi=\frac{\pi}{9}+k'\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 3+9k=1+3k' \Leftrightarrow 3(3k-h)=-2$ impossible

Donc $S_{IR}=\left\{\frac{\pi}{3}+K\pi\ ,\ K\in\mathbb{Z}\right\} \Rightarrow S_{]-\pi\ ,\ \pi]}=\left\{\frac{\pi}{3}\ ,\ -\frac{2\pi}{3}\right\}$

Exercice N°3 : 1) a) 2 cos² x – cos x – 1 = 0 , on pose x = cos x , l'équation devient $2x^2-x-1=0$:

a + b + c = 0 donc x' = 1 , x '' = $-\frac{1}{2}$ * x= 1 ⇔ cos x = 1 ⇔ $x=2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$

$$* \ x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \\ ou \\ x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \end{cases} k\in\mathbb{Z} \Rightarrow S_{IR}=\left\{2k\pi\ ,\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi\ ,\ -\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

b) sin² x – 3 sin x – 4 = 0 on pose X = sin x , l'équation devient
$x^2-3x-4=0$ on a a – b + c = 0 , donc x' = -1 et x'' = 4

* x = -1 ⇔ sin x = -1 ⇔ $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

* x = 4 ⇔ sin x = 4 impossible ⇒ $S_{IR}=\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

c) $(\sqrt{2}+1)\sin^2 x+(\sqrt{2}-1)\cos^2 x+\sin 2x=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)+\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)+\sin 2x=\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}-\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)+\sin 2x=\sqrt{2}$

$\sqrt{2}-\cos 2x+\sin 2x=\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos 2x=\sin 2x \Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x}=1 \Leftrightarrow \tan 2x=\tan\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{4}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$

$\Rightarrow S_{IR}=\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{K\pi}{2}\ ;\ K\in\mathbb{Z}\right\}$

d) $(\cos x-\sin x)^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^2 x+\sin^2 x-2\sin x\cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow -2\sin x\ \ \cos x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ ou \\ 2x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \end{cases} k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{12}+k\pi \\ ou \\ x=\frac{5\pi}{12}+k\pi \end{cases} k\in\mathbb{Z} \Rightarrow S_{IR}=\left\{\frac{\pi}{12}+K\pi\ ,\ \frac{5\pi}{12}+K\pi\ ;\ K\in\mathbb{Z}\right\}$$

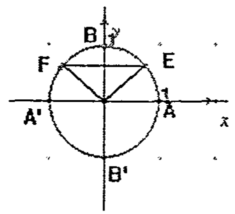
f) tan² x – 3tg x – 4 = 0
on pose X = tan x ; l'équation devient X² – 3 X – 4 = 0 ; a – b + c = 0 donc X' = -1 et X'' = 4

* X = -1 ⇔ tan x = -1 ⇔ $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$

* X = 4 ⇔ tan x = 4 n'a pas de solution remarquable

Il existe un réel $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right[$ *tel que* : $\tan\theta=4 \Leftrightarrow x=\theta+k\pi \Rightarrow S_{IR}=\left\{-\frac{\pi}{4}+K\pi\ ,\theta+K\pi\ ,\ K\in\mathbb{Z}\right\}$

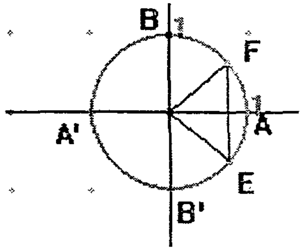
Exercice N° 4 : 1) a) $\sin x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$: soient les points E et F du cercle trigonométrique d'ordonnée $\frac{\sqrt{2}}{2}$ les images des solutions de $\sin x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont les points de l'arc EBF $\Rightarrow S_{[0\ ,\ 2\pi[}=\left[\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{3\pi}{4}\right]$



b) $\cos x\geq\frac{1}{2}$: soient les points E et F du cercle trigonométrique d'abscisses $\frac{1}{2}$

les images des solutions de $\cos x\geq\frac{1}{2}$ est l'arc EAF

$\Rightarrow S_{[0\ ,\ 2\pi[}=\left[0\ ,\ \frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{3}\ ,\ 2\pi\right[$



c) $\sqrt{1-\cos x}\ \rangle\ \sin x$; $\sqrt{1-\cos x}$ est bien définic car $-1\leq\cos x\leq 1$

<u>1^{er} cas :</u> si $x\in[0\ ,\ \pi]$ *alors* $\sin x\geq 0$

$\sqrt{1-\cos x}>\sin x \Leftrightarrow 1-\cos x>\sin^2 x \Leftrightarrow 1-\cos x>1-\cos^2 x \Leftrightarrow 1-\cos x-1+\cos^2 x>0 \Leftrightarrow \cos x(xosx-1)>0$

x 0	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Cosx		+	0	-	
Cos x -1		-	0	-	
Cos x (cos x – 1)		-	0	+	

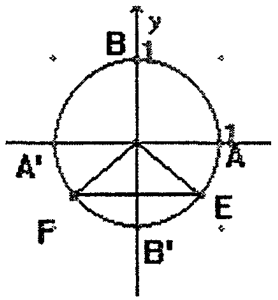
$x\in[0\ ,\ \pi]$ *donc* $S_1=\left]\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi\right]$

<u>2eme cas</u> : si $x \in \left]0, 2\pi\right[$

On a $\sin x \langle 0$ *alors* $\sqrt{1-\cos x} \rangle \sin x$ est toujours vérifiée . Donc $S_2 = \left]\pi , 2\pi\right[$

La solution de $\sqrt{1-\cos x} \rangle \sin x$ *dans* $\left[0 , 2\pi\right[$ est $S = S_1 \cup S_2 = \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \cup \left]\pi, 2\pi\right[= \left]\frac{\pi}{2}, 2\pi\right[$

d) $\sqrt{2}\sin x + 1 < 0 \Leftrightarrow \sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$



Soient les points E et F du cercle trigonométrique d'ordonnée $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Les images de solution de $\sqrt{2}\sin x + 1 \langle 0$ est l'arc EB'F. Donc

$S_{[0 , 2\pi[} = \left]\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right[$.

e) $2\sin x - \sqrt{3} \le 0 \Leftrightarrow \sin 2x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

On pose X = 2 x l'inégalité devient $\sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur IR on trouve que :

$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \le X \le \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + 2k\pi \le 2x \le \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{3} + k\pi$

Pour k = 0 on a : $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3}$ et Pour k = 1 on a : $\frac{7\pi}{6} \le x \le \frac{4\pi}{3}$. Donc $S_{[0 , 2\pi[} = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right]$

<u>Exercice N° 5 :</u> 1)a) $4\sin^2 x - 1 \le 0 \Leftrightarrow (2\sin x)^2 - 1^2 \le 0 \Leftrightarrow (2\sin x - 1)\,(2\sin x + 1) \le 0$.
Il faut dresser le tableau de signe du produit (2sin x – 1) (2sin x +1)

Puisque $x \in [0 , \pi]$ *alors* $\sin x \ge 0$ *donc* $\sin x \ge -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sin x + 1 \ge 0$

et 2 sin x -1 = 0 $\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$ alors $[0 , \pi]$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
2sin x +1		+		+		+	
2sin x -1		-	0	+	0	-	
(sin x +1) (2sin – 1)		-	0	+	0	-	

$S_{[0 , \pi]} = \left[0 , \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$

b) $\cos 2x + \sin 2x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right) - 1 \ge 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \le 2x - \frac{\pi}{4} \le +\frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow 2k\pi \le 2x \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow k\pi \le x \le \frac{\pi}{4} + k\pi$

Pour k = 0 $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$. Donc $S_{[0 , \pi]} = \left[0 , \frac{\pi}{4}\right] \cup \{\pi\}$

c) $\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3} \;\langle\; 0 \Leftrightarrow \tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \;\langle\; \sqrt{3}$

On pose $t = 2x - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \tan t \;\langle\; \sqrt{3}$. A partir du cercle trigonométrique on a :

$-\frac{\pi}{2} + k\pi < t < \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k\pi < 2x - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + k\pi < 2x < \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

Pour k = 0 on a : $-\frac{\pi}{6} \langle x \langle \frac{\pi}{4}$; pour k = 1 on a : $\frac{\pi}{3} \langle x \langle \frac{3\pi}{4}$

Pour k = 2 on a : $\frac{5\pi}{6} \langle x \langle \frac{5\pi}{4}$ donc $S_{[0 , \pi]} = \left[0 , \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6} , \pi\right[$

<u>Exercice N° 6 :</u> a) $4\cos^2 x - 2\left(\sqrt{2} - 1\right)\cos x - \sqrt{2} \rangle 0$; on pose t = cos x. On obtient
$4t^2 - 2\left(\sqrt{2} - 1\right)t - \sqrt{2} \rangle 0$

$\Delta = 4\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 + 16\sqrt{2} = 12 + 8\sqrt{2} = 4\left(3 + 2\sqrt{2}\right) = 4\left(\sqrt{2} + 1\right)^2$,$t' = -\frac{1}{2}$, $t'' = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$4\cos^2 x - 2\left(\sqrt{2} - 1\right)\cos x - \sqrt{2} \rangle 0 \Leftrightarrow 4\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rangle 0$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
cos x + $\frac{1}{2}$		+		+	0	-	
cos x - $\frac{\sqrt{2}}{2}$		+	0	-	0	-	
(cos x + $\frac{1}{2}$) (cos x - $\frac{\sqrt{2}}{2}$)		+	0	-	0	+	

$S_{[0 , \pi]} = \left]0 , \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$

b) $\sqrt{3}\tan^2 - \left(1 + \sqrt{3}\right)\tan x + 1 \langle 0 \Leftrightarrow \left(\tan x - 1\right)\left(\sqrt{3}\tan x - 1\right) \langle 0$ même travail que (a)

$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x - 1 > 0 \\ \sqrt{3}\ \ \text{tgx} - 1 \langle 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \tan x - 1 < 0 \\ \sqrt{3}\text{tgx} - 1 \rangle 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x \rangle 1 \\ \text{tgx} \langle \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$ ou $\begin{cases} \tan x \langle 1 \\ \tan x \ \rangle \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x \ \ \langle 1 \\ \tan x \rangle \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \;\langle\; \tan x \langle\ 1 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{\pi}{6} + k\pi \ , \frac{\pi}{4} + k\pi\right[$

Pour k = 0 , $x \in \left]\frac{\pi}{6} , \frac{\pi}{4}\right[$. Donc $S_{[0, \pi]} = \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$

c) $\frac{\sqrt{3}\ \cos 2x + \sin 2x}{2\sin x - 1} \ge 0$

$\frac{\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x}{2\sin x-1}=\frac{2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}{2\sin x-1}$; $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$ ou $x=\frac{5\pi}{6}$ sur $[0,\pi]$

$$2\sin x-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{6} \text{ sur } [0,\pi] \\ x=\frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$		+		+	0	-	0	+	
$2\sin x-1$		-	0	+		+	0	-	
$\frac{2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}{2\sin x-1}$		-		+	0	-		-	

$S_{[0\,,\,\pi]}=\left]\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{\pi}{3}\right]$

Exercice N° 7: A/ 1) 3 cos x + 16 $\cos^5$ x – 16 $\cos^3$ x = 3 cos x + 16 $\cos^3$ x ($\cos^2$x – 1)
= 3cos x + 16 $\cos^3$x (- $\sin^2$x)= 3 $\cos^2$ x – 16 $\cos^3$ x . $\sin^2$x = cos x [3-16 cosx^2 x . $\sin^2$x]
= cos x [3 - 4 (2cosx . sinx)^2]= cos x [3 - 4 $\sin^2$ 2x]

On sait que $\sin^2 2x=\frac{1-\cos 4x}{2}$ ⇔ 2$\sin^2$ 2x = 1-cos 4x Donc f(x) = cos x [3 -2 (1 – cos 4 x)]

= cos x [1 + 2 cos 4 x] . Et par suite f(x) = cos x (1+ 2 cos 4 x)

$$2)\ f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x=0 \\ ou \\ 1+2\cos 4x=0 \end{cases}$$

Cos x = 0⇔ $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$; 1 + 2 cos 4 x = 0 ⇔ cos 4 x = $-\frac{1}{2}$ ⇔ cos 4x = cos $\frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x=\frac{2\pi}{3}+2K\pi \\ 4x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \end{cases}$ K∈ℤ ⇔ $\begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2} \\ x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2} \end{cases}$ k∈ℤ Donc l'ensemble de solution dans de f(x) = 0 est

$\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

3) f(x) = cos x' (1 + 2 cos 4x) ; Sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$. *on a* $\cos x\geq 0$

$\begin{cases} 1+2\cos 4x=0 \\ x\in\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}$ ou $x=\frac{\pi}{3}$ d'après 2)

Soit le système suivant $\begin{cases} 1+2\cos 4x<0 \\ x\in\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x<-\frac{1}{2} \\ 4x\in[0\,,2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3}<4x<\frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}<x\leq\frac{\pi}{3}$

On obtient donc le tableau suivant

X	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$	
cos x		+		+		+	0	-
1+2cos4x		+	0	-	0	+		
f(x)		+	0	-	0	+	0	

f(x) ≥ 0 si $x\in\left[0\,,\,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{3}\,,\frac{\pi}{2}\right]$; *f*(x) ≤ 0 si $x\in\left[\frac{\pi}{6}\,,\frac{\pi}{3}\right]$

B/ $g(x)=\frac{\sin x-\sin 3x+\sin 5x}{f(x)}$

1) Il faut que f(x) ≠ 0 , $x\in[0\,,\,\pi]$. On a $\begin{cases} f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\,,\,k\in\mathbb{Z}\, ou\ x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\,,\,k\in\mathbb{Z} \\ ou\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\,k\in\mathbb{Z} \end{cases} \\ x\in[0\,,\,\pi] \Leftrightarrow \begin{cases} 0\leq\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\leq\pi\ ou\ 0\leq-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\leq\pi \\ et\ x=\frac{\pi}{2} \end{cases} \end{cases}$

4) $\begin{cases} g(x)<2-\sqrt{3} \\ x\in Dg \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tgx<2-\sqrt{3} \\ x\in Dg \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tgx<tg\frac{\pi}{12} \\ x\in Dg \end{cases}$

Exercice N°8 : $f(x)=1-\cos 2x+\sin 2x$

1) a) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1-\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}=1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

b) $f(x)=1-\cos 2x+\sin 2x=2\sin^2 x+2\sin x\cos x=2\sin x(\sin x+\cos x)$

$=2\sqrt{2}\sin x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=2\sqrt{2}\sin x\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

c) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

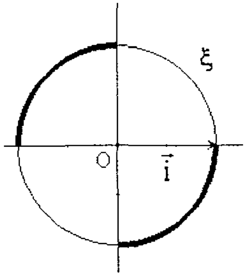
Donc $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+2}{2}$.

2) a) $g(x)=\dfrac{f(x)}{2\sqrt{2}\cos x\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$; $\cos x=0$ signifie que $x=\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$ signifie que $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+k\pi$ signifie

que $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$ Donc $D_g=\mathrm{IR}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{3\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

b) $g(x)=\dfrac{2\sqrt{2}\sin x\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{2}\cos x\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\tan x$; $g(x)\leq 0$



$S_{\mathrm{IR}}=\underset{k\in\mathbb{Z}}{\bigcup}\left(\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi;2k\pi\right]\cup\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi;\pi+2k\pi\right]\right)$

Exercice N° 9 :1) a/ Il faut que $\cos x\neq 0$ et $\sin x\neq 0$; $\cos x=0$ $\Leftrightarrow$

$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; $\sin x=0\Leftrightarrow$ $x=k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$. Donc $D_f=IR/\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

b/ $f(x+\pi)=\dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos^2(x+\pi)}-\dfrac{\cos(x+\pi)}{\sin^2(x+\pi)}=\dfrac{-\sin x}{\cos^2 x}-\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}=-\left(\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\right)$

Aussi $f(x+\pi)=-f(x)$

2) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}=\dfrac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\cos^2 x\sin^2 x}=\dfrac{(\sin x-\cos x)\,(\sin^2 x+\cos x\,.\,\sin x+\cos^2 x)}{\sin^2 x\,.\,\cos^2 x}$

$=\dfrac{(\sin x-\cos x)(1+\sin x\ \ \cos x)}{(\sin x.\cos x)^2}=\dfrac{(\sin x-\cos x)\left(1+\frac{1}{2}\sin 2x\right)}{\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2}=\dfrac{4(\sin x-\cos x)\left(1+\frac{1}{2}\sin 2x\right)}{sin^2 2x}$

$=\dfrac{(\sin x-\cos x)\ \ (4+2\sin 2x)}{\sin^2 2x}=\dfrac{(\sin x-\cos x)\ \ (4+2\sin 2x)}{\sin^2 2x}$

3) a/ $\sin x-\cos x=0\Leftrightarrow\sin x=\cos x$

$\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{2}-x=x+2k\pi\\ \frac{\pi}{2}-x=-x+2k\pi\end{cases}\ K\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ 0=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\quad impossible\end{cases}\ K\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow$ $x=\frac{\pi}{4}+K\pi$, $K\in\mathbb{Z}$. Les solutions dans $[0\ ,\ \pi]$ de $\sin x-\cos x=0$ sont $\frac{\pi}{4}$

b/ $f(x)=\dfrac{(\sin x-\cos x)\,(4+2\sin 2x)}{\sin^2 2x}$

* On a $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x-\sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$\mathrm{Sin}x-\cos x\geq 0\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\geq 0\Leftrightarrow 2k\pi\leq x-\frac{\pi}{4}\leq\pi+2k\pi\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}+2k\pi\leq x\leq\frac{5\pi}{4}+2k\pi$

* On a $-1\leq\sin 2x\leq 1\Leftrightarrow 2\leq 4+2\sin 2x\leq 6$ Donc $4+2\sin 2x\geq 0$

X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Sinx − cosx	-	0 +	+	
4+2sin2x	+	+	+	
f(x)	-	0 +	+	

4) $g(x)=\sqrt{f(x)}$; g est bien définie $\Leftrightarrow f(x)\geq 0$; $f(x)\geq 0\Leftrightarrow$ $x\in\left[\frac{\pi}{4}\ ,\ \pi\right[\ /\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

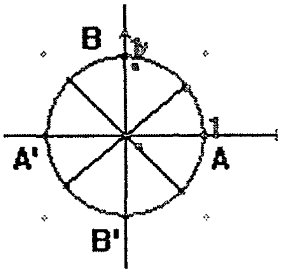
Donc $D_g\cap[0\ ,\ \pi]=\left[\frac{\pi}{4}\ ,\ \pi\right[\ /\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\cap[0\ ,\ \pi]=\left[\frac{\pi}{4}\ ,\pi\right[\ /\ \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

Exercice N° 10:

1) $\cos 3x-\sqrt{3}\sin 3x=2\left(\frac{1}{2}\cos 3x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos 3x-\sin\frac{\pi}{3}\sin 3x\right)=2\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$

$\cos 3x-\sqrt{3}\sin 3x=2\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\Leftrightarrow 2\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3x+\frac{\pi}{3}=x+\frac{2\pi}{3}+2k\pi\\ 3x+\frac{\pi}{3}=-x-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\end{cases};K\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\end{cases},k\in\mathbb{Z}$



$S_{IR}=\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) a/ $1-2\sin^2 x=0\Leftrightarrow\sin^2 x=\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ x=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases}$; $k\in\mathbb{Z}$ ou $\begin{cases}x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ x=\pi+\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$

$\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\end{cases}\ k\in\mathbb{Z}\quad ou\quad\begin{cases}x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi\end{cases}\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow D_f=IR/\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\ ,\ -\frac{\pi}{4}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. b/ on a

$\cos 3x-\sqrt{3}\sin 3x=2\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$

Signifie $\cos 3x-\sqrt{3}\sin 3x-2\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=2\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)-2\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$

$$=2\left(\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\right)=2\left(-2\sin\frac{3x+\frac{\pi}{3}+x+\frac{2\pi}{3}}{2}\quad\sin\frac{3x+\frac{\pi}{3}-x-\frac{2\pi}{3}}{2}\right)$$

$$=-4\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-4\cos 2x.\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

Donc $f(x)=\dfrac{-4\cos 2x\ .\ \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{1-2\sin^2 x}=\dfrac{-4\cos 2x\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos 2x}=-4\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

c) $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=-4\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right)=-4\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)=4\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$. D'autre part :

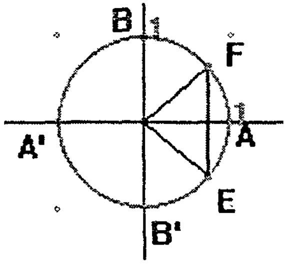
$$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\cos\frac{\pi}{4}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{4}-2\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}-2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}+2\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$$;D'où $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{6}-\sqrt{2}$;

$4\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{6}-\sqrt{2}\Leftrightarrow\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$; $\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{12}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$

d) $\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x+\left(\sqrt{3}-1\right)\sin x\le 2\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)\sin x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{12}\cos x+\sin\frac{\pi}{12}\sin x\le\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\le\cos\frac{\pi}{4}$. Soit E et F deux points du cercle trigonométrique d'abscisse $\frac{\sqrt{2}}{2}$ les images des solutions est l'arc $\widehat{FBE}$.



$\frac{\pi}{4}+2k\pi\le x-\frac{\pi}{12}\le\frac{7\pi}{4}+2k\pi\Leftrightarrow$

$\frac{\pi}{3}+2k\pi\le x\le\frac{11\pi}{6}+2k\pi\Rightarrow S_{IR}=\underset{k\in\mathbb{Z}}{\cup}\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ;\ \frac{11\pi}{6}+2k\pi\right]\ ,k\in\mathbb{Z}$

Exercice N°11 : $f(x)=\cos 2x-3\cos x+2=1+\sin 2x$

1) a) $(\cos x+\sin x)^2=\cos^2 x+\sin^2 x+2\cos x\sin x=1+\sin(x+x)=1+\sin 2x$

b) $\left(\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\right)^2=1+\sin\frac{\pi}{6}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ donc $\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

c) $f\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\cos\frac{11\pi}{6}-3\cos\frac{11\pi}{12}+2=\frac{\sqrt{3}}{2}-3\cos\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)+2=\frac{\sqrt{3}}{2}+3\cos\frac{\pi}{12}+2$

$f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\cos\frac{7\pi}{12}-3\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+2=-\frac{\sqrt{3}}{2}-3\cos\left(\pi-\frac{5\pi}{12}\right)+2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+3\cos\frac{5\pi}{12}+2$

$f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\cos\frac{5\pi}{16}-3\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+2=-\frac{\sqrt{3}}{2}-3\cos\frac{5\pi}{12}+2$

$f\left(\frac{11\pi}{12}\right)+f\left(\frac{7\pi}{12}\right)-f\left(\frac{5\pi}{12}\right)-f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+3\cos\frac{\pi}{12}+2-\frac{\sqrt{3}}{2}+3\cos\frac{5\pi}{12}+2+3\cos\frac{5\pi}{12}-2-\frac{\sqrt{3}}{2}+3\cos\frac{\pi}{12}-2$

$=3\cos\frac{\pi}{12}+3\cos\frac{5\pi}{12}+3\cos\frac{5\pi}{12}+3\cos\frac{\pi}{12}=3\cos\frac{\pi}{12}+3\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)+3\cos\frac{\pi}{12}+3\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$

$=6\left(\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\right)=6\times\frac{\sqrt{6}}{2}=3\sqrt{6}$

2) a) $f(x)=\cos 2x-3\cos x+2$

$=2\cos^2 x-1-3\cos x=2\cos^2 x-3\cos x+1$

b) $f(x)>0$; $2\cos^2 x-3\cos x+1=0$ signifie que : $2(\cos x-1)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)=0$

$\cos x-1=0$ et $x\in[0;2\pi]$ signifie que $x=0$ ou $x=2\pi$

$\cos x-\frac{1}{2}=0$ et $x\in[0;2\pi]$ signifie que $x=\frac{\pi}{3}$ ou $x=\frac{5\pi}{3}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$\cos x-1$		$-$		$-$		$-$	0
$\cos x-\frac{1}{2}$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$(\cos x-1)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0

3) $g(x)=\dfrac{\tan 2x}{\sqrt{f(x)}}=\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x\sqrt{f(x)}}$

Exercice N°12 :

1) a $\cos(2x)=0$ signifie que $2x=\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}$

b) $2\sin 2x+\sqrt{3}=0$ signifie $\sin 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ signifie que $\begin{cases}2x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ \text{ou}\\ 2x=\pi+\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$ signifie que $\begin{cases}x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\\ \text{ou}\\ x=\frac{4\pi}{6}+k\pi\end{cases}$ $;k\in\mathbb{Z}$

Donc $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{2\pi}{3}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$.

2) $\sin(4x)+\sqrt{3}\cos(2x)=0 \Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 2x-\sqrt{3}\cos 2x=0$ signifie $\cos 2x\left(2\sin 2x+\sqrt{3}\right)=0$

signifie que $\cos 2x=0$ ou $2\sin 2x+\sqrt{3}=0$; $0\le\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\le\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le k\le\frac{3}{2}$ $k=0$ signifie que $x=\frac{\pi}{4}$;

$k=1$ signifie que $x=\frac{3\pi}{4}$

$0\le-\frac{\pi}{6}+k\pi\le\pi$; $-\frac{1}{6}\le k\le\frac{7}{6}$ Donc $k=0$ ou $k=1$; $k=0;x=-\frac{\pi}{6}$; $k=1;x=\frac{5\pi}{6}$

$0\le\frac{2\pi}{3}+k\pi\le\frac{\pi}{2}$ signifie que $-\frac{2}{3}\le k\le\frac{1}{3}$ donc $k=0$ signifie que $x=\frac{2\pi}{3}$ Donc $S_{[0;\pi]}=\left\{\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{6};\frac{2\pi}{3}\right\}$

Exercice N°13 :

1) a $f(x)=1-\sin 2x+\cos 2x=1+\cos 2x-\sin 2x=2\cos^2 x-2\sin x.\cos x=2\cos x(\cos x-\sin x)$

$=2\cos x\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)\right)=2\sqrt{2}\cos x\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)=2\sqrt{2}\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

b) $f(x)=0$ signifie que $\cos x=0$ ou $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$.

* $\cos x=0$ signifie que $x=\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$

* $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$ signifie que $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{2}$ signifie que $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ signifie que :

$x=\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$ .Dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}+k\pi\le\frac{\pi}{2}$ signifie que $-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}+k\le\frac{1}{2}$ signifie que $-1\le k\le 0$;

$x=-1$ ou $x=0$ $x=\frac{\pi}{2}$ ou $x=-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{4}+k\pi\le\frac{\pi}{2}$ signifie que $-\frac{1}{2}\le\frac{1}{4}+k\le\frac{1}{2}$ signifie

que $-\frac{3}{4}\le k\le\frac{1}{4}$ donc $k=0$ et par suite $x=\frac{\pi}{4}$ d'où $S_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}=\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right\}$

2) $g:\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ tel que $x\mapsto\frac{\sqrt{2}\cos 2x}{f(x)}$ a) $D_g=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\setminus\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right\}$

b) $g(x)=\frac{\sqrt{2}\cos 2x}{f(x)}=\frac{\sqrt{2}\cos 2x}{2\sqrt{2}\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\cos 2x}{2\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

On a $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$

$=2\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\sin x\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

$$g(x)=\frac{\cos 2x}{2\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x}$$

c) $g\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{6}}{f\left(\frac{\pi}{12}\right)}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{18}}{2}=\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}$ d'autre

part $g(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\tan x-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $g\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\tan\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{18}}{2}=\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}$ signific que

$\frac{\sqrt{2}}{2}\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{2}$ signifie que $\tan\frac{\pi}{12}=\sqrt{3}-2$

$g(x)=1$ signifie que $\frac{\sqrt{2}}{2}\tan x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ signifie que $\tan x=1$ signifie que $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$; $D_g=\left\{-\frac{3\pi}{4}\right\}$.

Exercice N°14 : $A(x)=\cos 2x+\sin 2x$; $x\in[0;2\pi[$

1) $A(0)=\cos 0+\sin 0=1$; $A\left(\frac{\pi}{8}\right)=\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$;

2) $A(x)=0$ signifie que $-\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=1$ signifie que $-\tan(2x)=1$ signifie que $-\tan 2x=\tan\frac{\pi}{4}$ signifie que

$\tan(-2x)=\tan\frac{\pi}{4}$ *signifie que* $-2x=\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$ *signifie que* $x=-\frac{\pi}{8}-\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}$

$0\le-\frac{\pi}{8}-\frac{k\pi}{2}<2\pi$ signifie quc $0\le\frac{1}{8}-\frac{k}{2}<2$ signifie que $\frac{1}{8}\le-\frac{k}{2}<2$ signifie que $-\frac{1}{4}\ge k>-4$

Donc $k=-3\Leftrightarrow x=\frac{5}{8}\pi$; $k=-2\Leftrightarrow x=\frac{7}{8}\pi$; $k=-1\Leftrightarrow x=\frac{3}{8}\pi$

3) a) $A(x)=\cos 2x+\sin 2x=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x\right)=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos 2x+\cos\frac{\pi}{4}\sin 2x\right)$

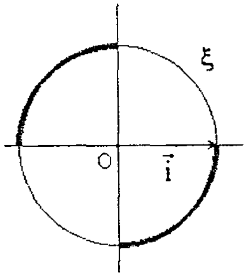
$=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

b) $A(x)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x+\sin\frac{\pi}{4}\sin 2x\right)=\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

4) $A(x)\ge 1$ signifie que $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$ signifie que $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\ge\sin\frac{\pi}{4}$. On pose $t=2x+\frac{\pi}{4}$

$0\le x<2\pi$ donc $0\le 2x<4\pi$ signifie que $0\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{17\pi}{4}$ l'inéquation

devient : $\sin t\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\pi}{4}\le t<\frac{17\pi}{4}$



Exercice N°15: $f(x)=1-\cos 2x+\sin 2x$

1) a) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1-\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}=1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

b) $f(x)=1-\cos 2x+\sin 2x=2\sin^2 x+2\sin x\cos x=2\sin x(\sin x+\cos x)$

$$= 2\sqrt{2}\sin x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) = 2\sqrt{2}\sin x\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

c) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$

Donc $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$.

2) a) $g(x) = \dfrac{f(x)}{2\sqrt{2}\cos x\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$; $\cos x = 0$ signifie que $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ signifie que $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + k\pi$ signifie que $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Donc $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $g(x) = \dfrac{2\sqrt{2}\sin x\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{2}\cos x\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x$; $g(x) \leq 0$

$$S_{\mathbb{R}} = \underbrace{\bigcup}_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 2k\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right]\right)$$

Exercice N°16

si n = 1 on a cosx-sinx = 1 soit cos(x+π/4)=cos(π/4) soit x=2kπ ou x = -π/2+2kπ (k décrivant $\mathbb{Z}$)
si n= 2 on a $\cos^2x-\sin^2x = 1$ et $\cos^2x+\sin^2x = 1$ ce qui donne cosx= 1 ou -1 et sinx = 0, soit x =kπ.
Pour n >=3
On va utiliser le résultat suivant si $0 < x < 1$ alors $x^{n+1} < x^n$.
Supposons $0 < |\cos x| < 1$; on a donc aussi $0 < |\sin x| < 1$ et $|\cos x|^n < |\cos x|^2$, $|\sin x|^n < |\sin x|^2$.
Mais pour tout réel u on a u <= |u| et -u <=|u| d'où :
$\cos^n x - \sin^n x \leq |\cos^n x| + |\sin^n x| = |\cos x|^n + |\sin x|^n < |\cos x|^2 + |\sin x|^2$
Enfin $|\cos x|^2 + |\sin x|^2 = \cos^2x + \sin^2x = 1$ et $\cos^n x - \sin^n x < 1$: l'équation proposée n'a donc pas de solutions.
Pour n >=3 l'équation ne peut admettre des solutions que si |cosx| = 0 ou 1 : regardons s'il y a alors effectivement des solutions.
Si cosx = 0 alors sinx = 1 ou -1 : si sinx = 1 il faut donc que $-(1)^n=1$ ce qui est impossible et si sinx = -1 il faut $-(-1)^n=1$ qui n'est possible que si n est impair.
Si cosx = 1 alors sinx = 0 et l'équation est effectivement vérifiée pour tout n
Si cosx = -1 alors sinx = 0 et l'équation s'écrit $(-1)^n=1$ et elle n'est vérifiée que si n est pair
Finalement il y a 3 sortes de solutions
n est impair et cosx=0, sinx = -1 soit x = -π/2 + 2kπ
n pair et cosx = -1 et sinx =0 soit x = π + 2kπ
n quelconque et cosx = 1 et sinx = 0 soit x =2kπ
Donc pour n >= 3 les solutions de l'équation proposée sont
si n pair : x = kπ et si n impair x =2kπ ou x = -π/2 + 2kπ (en fait on peut vérifier, voir plus haut, que c'est vrai aussi pour n =1 et n = 2).

Solutions

Exercice N° 1 : 1)a ; 2) b) ;3)b) ;4)c) ;5) c) ;6) b) ;7)b ;8)c

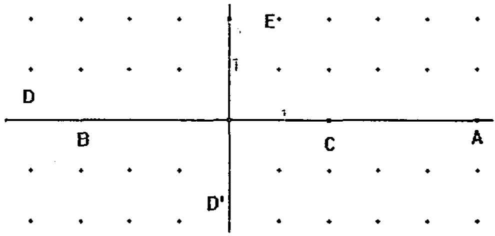
Exercice N° 2 :1) Faux car : $(AB)\perp(AC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0$

2°/ Faux :car si $\vec{u} \perp \vec{v}$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

3°/ Faux : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire de sens opposé on a : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = -\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$

4°/ Vrai : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow$ ABC est un triangle rectangle au A.

Exercice 3 :1) voir figure



2°/ $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA.OB.\cos A\hat{O}B$.

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires de sens opposé donc $A\hat{O}B = \pi$ et OA = 5 , OB=3 ;

$\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB} = 5\times3\times\mathrm{Cos}\,\pi = 15\times(-1) = -15$

* $\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OC} = OA\,.\,OC\ \mathrm{Cos}\ A\hat{O}C$

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont de même sens donc $A\hat{O}C = 0$; $OA = 5$, $OC = 2$ * $\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OC} = 5\times2\times\mathrm{Cos}\,0 = 10$

* $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = CA.CB.\mathrm{Cos}\ \pi = 3\times5\,.\times(-1) = -15$

* $\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CO}$; Car O est le projeté orthogonal de E sur D .

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CO} = CA.CO.\mathrm{Cos}A\hat{C}O = 3\times2\times\mathrm{Cos}\pi = -6$

* $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BO} = BA\ .\ BO\ \cos\ A\hat{B}O = 8\times3\ .\ \cos\ 0 = 24$

* $\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OE} = 0$ *car* $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OE}$

Exercice N°4:1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DG} = 2a\times a\times\cos\frac{\pi}{3} = a^2$

2) Les triangles EFC et EGD sont équilatéraux alors $\widehat{GEF} = \frac{\pi}{3}$. Comme EG = EF alors EFG est aussi un triangle équilatéral .Les angles alternes-internes $\widehat{DEG}$ et $\widehat{EGF}$ formés par les droites (FG);(DC) et la sécante (GE) sont égaux Alors (GF) // (DC) .de plus $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GF}$ sont de même sens alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GF} = AB.GF = 2a\times a = 2a^2$.

3) $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{DE} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG}\right)\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG}.\overrightarrow{DE} = 0 + DG.DE.\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$

4) $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BF} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG}\right)\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}\right) = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{DG}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DG}.\overrightarrow{CF}$

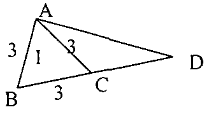
$= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{DG}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG}.\overrightarrow{CF}$. On a $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} = a^2$;

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CF} = -CB.CF.\cos\widehat{BCF} = -a\times a\times\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -a^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

$\overrightarrow{DG}.\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{DG}.\overrightarrow{DA} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. On montre facilement que DGFE est un parallélogramme, Alors $\overrightarrow{DG}.\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FC} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BF} = a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{a^2}{2} = a^2\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)$

ExerciceN°5 : 1)a)Ona : $AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC.CD.\cos A\hat{C}D = 9+9-18.\cos\frac{2\pi}{3} = 18-18\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 27$

Donc $AD = 3\sqrt{3}$.



b) $AB^2 + AD^2 = 9+27 = 36$; $BD^2 = 6^2 = 36$. Donc $AB^2 + AD^2 = BD^2$
Alors ABD est un triangle rectangle en A.

2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos B\hat{A}C = \frac{9}{2}$;

$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} = BD.AC.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BD};\overrightarrow{AC}}\right) = 6\times3\times\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{18}{2} = -9$

3) a) $MA^2 - MB^2 = \left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right) = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$

b) $MA^2 - MB^2 = -9 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = -9 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = -\frac{9}{2}$. Si l'on oriente (AB) telle que $\overline{AB} = 3$ appelons H le projeté orthogonal de M sur(AB). $\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IH}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HM} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{HM}$

$\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = -\frac{9}{2}$ c'est àdire $\overline{IH}.\overline{AB} = -\frac{9}{2}$ d'où $\overline{IH} = -\frac{9}{2\overline{AB}.} = -\frac{9}{2\times3} = -\frac{3}{2}$ donc Δ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H.

4) a) On a : $3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$; $3\overrightarrow{MA}^2 - 2\overrightarrow{MB}^2 = 3\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2$

$= MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\left(\underbrace{3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}}_{\vec{0}}\right) + 3GA^2 - 2GB^2 = MG^2 + 3GA^2 - 2GB^2$ .On a : $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{1}\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB}$

signifie que $AG^2 = 4AB^2 = 36$; $\overrightarrow{GB} = 3\overrightarrow{AB} \Rightarrow GB^2 = 9AB^2 = 81$
,$3GA - 2GB^2 = 3\times36 - 2\times81 = 108-16 = -54$ d'où $3MA^2 - 2MB^2 = MG^2 - 54$
b) $3MA^2 - 2MB^2 = -38$ signifie que $MG^2 - 54 = -38$ signifie que $MG^2 = 16$ signifie que $MG = 4$
Donc E est le cercle de centre G et de rayon 4.

Exercice N°6 : $AB = 6; AD = 3$; $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$

1) a) $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} = -BC^2 = -9$; $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BD} = BI\times BA = \frac{6}{4}\times6 = 9$ car A est le projeté orthogonal de D sur(AB)

b) $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BI}\right)\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BD} = -9+9 = 0$ donc $\overrightarrow{CI} \perp \overrightarrow{BD}$ signifie que $(CI)\perp(BD)$

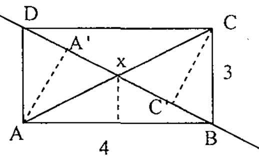
2) * $MB^2 + MD^2 = 45$. Soit $J = B*D$; $MB^2 + MD^2 = 2MJ^2 + 2\overrightarrow{MJ}\left(\underbrace{\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JD}}_{\vec{0}}\right) + JB^2 + JA^2 = 2MJ^2 + 2JA^2$

$= 2MJ^2 + \frac{45}{2}$. $MB^2 + MD^2 = 45$ signifie que $2MJ^2 + \frac{45}{2} = 45$ signifie que $2MJ^2 = \frac{45}{2}$ signifie que $MJ = \frac{\sqrt{45}}{2}$ Donc E est le cercle de centre J et de rayon $r = \frac{\sqrt{45}}{2}$

* $\left(\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB}\right)\overrightarrow{MI} = MB^2.\overrightarrow{MI}$ signifie que $\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MB}^2\right) = 0$ signifie

---

que $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MB}\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\right) = 0$ signifie que $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BC} = 0$ donc $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MB} = 0$ alors $\overrightarrow{MI} \perp \overrightarrow{MB}$ et par suite F est le cercle de diamètre [IB]



Exercice N° 7 : 1) a) Voir figure

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 = 16$ car B est le projeté orthogonal de C sur(AB).

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = AD^2 = 9$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = -16+9 = 7$.

c) On a $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = AC.BD.\cos\left(C\hat{I}D\right)$ signifie que $\cos\left(C\hat{I}D\right) = \frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}}{AC.BD}$ on a $AC = BD = \sqrt{9+16} = 5$ donc

$\cos\left(C\hat{I}D\right) = \frac{-7}{5\times5} = \frac{-7}{25}$

2) a) $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$ (car $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$) $= \frac{16}{2} = 8$

b) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 8 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM}\right).\overrightarrow{AB} = 8 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow (MI)\perp(AB)$ et par suite $\Delta = \text{méd}([AB])$.

3) $\Gamma = \left\{M\in P; 2MA^2 + MD^2 = 18\right\}$; $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$; $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

a) $2DA^2 + DD^2 = 2DA^2 = 2\times9 = 18$ Donc $D\in\Gamma$

b) $2MA^2 + MD^2 = 2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}\right)^2 = 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\left(\underbrace{2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}}_{\vec{0}}\right) + 2GA^2 + GD^2$

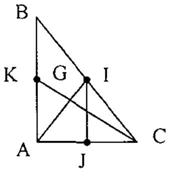
$= 3MG^2 + 2GA^2 + GD^2$; $GA^2 = \frac{1}{9}\times9 = 1$ donc $2GA^2 = 2$; $GD^2 = \frac{4}{9}\times9 = 4$ signifie que
$2MA^2 + MD^2 = 3MG^2 + 4 + 2 = 3MG^2 + 6$
$3MG^2 + 6 = 18$ signifie que $3MG^2 = 12$ signifie que $MG = 2$ alors Γ est le cercle de centre G et de rayon 2.
4) a) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{BD} = -A'C'.BD = -5A'C'$ ($\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires de sens contraire) et $BD = \sqrt{4^2+3^2}$

b) On a : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = -5A'C' = -7$ d'où $A'C' = \frac{7}{5}$

Exercice N° 8 : $AC = 2$; $BC = 3$; $I = B*C$ et $J = A*C$

1) $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC} = -AJ.AC = -2$; $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{AI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}\right) = IA^2 + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{AC} = IA^2 - 2$

ABC rectangle en A et Ile milieu de[BC] donc $IA = \frac{BC}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \Rightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC} = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$



2) $MB^2 + MC^2 = \frac{25}{2}$ signifie que $\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2 = \frac{25}{2}$

$\Leftrightarrow 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\underbrace{\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}}_{\vec{0}}\right) + IB^2 + IC^2 = \frac{25}{2}$ signifie que $2MI^2 + \frac{18}{4} = \frac{25}{2}$

signifie que $MI = 4$ donc $E = \xi_{(I,2)}$.

3) $F = \left\{M\in P; \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{MG} = -1\right\}$

a) on a $\overline{GA}+\overline{GB}+\overline{GC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overline{GB}=\frac{1}{3}\left(\overline{AB}+\overline{CB}\right)=\frac{1}{3}\left(\overline{AB}-\overline{BC}\right)$ et $\overline{GC}=\frac{1}{3}\left(\overline{AC}+\overline{BC}\right)=\frac{1}{3}\left(\overline{BC}+\overline{AC}\right)$.

$\overline{GB}.\overline{GC}=\frac{1}{9}\left(\overline{AC}+\overline{BC}\right)\left(\overline{AB}-\overline{BC}\right)=\frac{1}{9}\left(\overline{AC}.\overline{AB}-\overline{AC}.\overline{BC}+\overline{BC}.\overline{AB}-BC^2\right)$

$=\frac{1}{9}\left(0-CA^2-BA^2-BC^2\right)=\frac{1}{9}\left(0-\left(CA^2+BA^2\right)-BC^2\right)=-\frac{2BC^2}{9}=-2$

b) $\overline{MB}.\overline{MC}+\overline{GA}.\overline{MG}=\left(\overline{MG}+\overline{GB}\right)\left(\overline{MG}+\overline{GC}\right)+\overline{GA}.\overline{MG}=MG^2+\overline{MG}\left(\overline{GB}+\overline{GC}\right)+\overline{GB}.\overline{BC}+\overline{GA}.\overline{MG}$

$=MG^2-\overline{MG}.\overline{GA}-2+\overline{GA}.\overline{MG}=MG^2-2$

c) $MG^2-2=-1$ signifie que $MG^2=1$ signifie que $MG=1$ donc $F=\xi_{(G;1)}$.

Exercice n°9 :

1) a) $\overline{CA}.\overline{CB}=\overline{CB}.\overline{CB}=16$ car le projeté orthogonal de A sur (BC) est B. $\overline{CA}.\overline{CE}=\overline{CD}.\overline{CE}=2\times8=16$

b) $\overline{CA}.\overline{BE}=\overline{CA}.\left(\overline{BC}+\overline{CE}\right)=\overline{CA}.\overline{BC}+\overline{CA}.\overline{CE}=-16+16=0 \Rightarrow \overline{CA}\perp\overline{BE}$.

3) En utilisant le théorème de Thalès, on a : $\left.\begin{array}{l}E\in[BF]\\D\in[AF]\\(DE)//(AB)\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{FD}{FA}=\frac{DE}{AB}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4} \Rightarrow DF=\frac{3}{4}AF$ et

comme $\overline{AD}$ et $\overline{AF}$ sont colinéaires et de même sens alors $\overline{AF}=\overline{AD}+\overline{DF}=4\overline{AD}$ donc

$\overline{BC}.\overline{AF}=\overline{AD}.4\overline{AD}=4\times16=64$

4) a) $AB^2+4AE^2=64+4\left(AD^2+DE^2\right)=64+4(16+36=272)$

b) $\left.\begin{array}{l}I\in[BF]\\I\in[AF]\\(CE)//(AB)\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{ID}{IE}=\frac{AB}{EC}=\frac{8}{2}=4 \Rightarrow IB=4IE$ et

comme $I\in[EB]$ alors $\overline{IB}=-4\overline{IE}\Rightarrow\overline{IB}+4\overline{IE}=\vec{0}$ c'est-à-dire I est le barycentre des points pondérés (B,1) et (E,4). $EB^2=EC^2+BC^2=4+16=20\Rightarrow EB=2\sqrt{5}$.

$\Leftrightarrow IB+IE=2\sqrt{5}\Rightarrow IB+\frac{1}{4}=2\sqrt{5}\Rightarrow IB=\frac{8\sqrt{5}}{5}$ et $IE=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

c) Pour tout point M du plan on a :

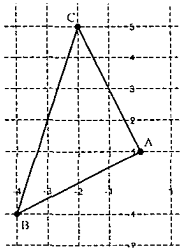
$MB^2+4ME^2=5MI^2+IB^2+4IE^2=5MI^2+\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2=5MI^2+16$.

d) $M\in\zeta\Leftrightarrow 5MI^2+16=272\Leftrightarrow MI=\frac{16\sqrt{5}}{5}$ donc ζ est le cercle de centre I et de rayon $\frac{16\sqrt{5}}{5}$ et on sait que ça passe par le point A d'où la construction.

.

Exercicen°1: I) $z=\frac{(2-i)(1+3i)}{-2+3i}=\frac{2+6i-i+3}{-2+3i}=\frac{5+5i}{-2+3i}=\frac{(5+5i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)}=\frac{-10-15i-10i+15}{(-2)^2+(-3)^2}$

$=\frac{5-25i}{13}=\frac{5}{13}-i\frac{25}{13}$



II) Voir figure :

1) $AB=z_B-z_A=|-4-i-i|=|-4-2i|=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$AC=z_C-z_A=|-2+5i-i|=|-2+4i|=\sqrt{(-2)^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$BC=z_C-z_B=|-2+5i+4+i|=|2+6i|=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}=4\sqrt{10}$

$AB=AC$ et $BC^2=AB^2+AC^2$.Donc ABC est rectangle et isocèle

2) $\Delta=\{M(z);|z-i|=|z+4+i|\}$

$M(z)\in\Delta\Leftrightarrow|z-i|=|z+4+i|\Leftrightarrow|z-i|=|z-(-4-i)|\Leftrightarrow|z_M-z_A|=|z_M-z_B|\Leftrightarrow MA=MB\Leftrightarrow M\in \text{med}[AB]$

III) $(z^2-4)(z^2+9)=0\Leftrightarrow z^2-4$ ou $z^2+9\Leftrightarrow z^2=4$ ou $z^2=-9$

$\Leftrightarrow z=2$ ou $z=-2$ ou $z=3i$ ou $z=-3i\Rightarrow S_{\mathbb{C}}=\{2,-2,3i,-3i\}$

Exercice N° 2: 1) Faux : $i^{1010}=(i^2)^{505}=(-1)^{505}=-1$;

2) Faux : $z=1-i$ et $z'=1+i$ on a : $z^2=-2i$ et $(z')^2=2i$ et $z^2+(z')^2=0$

3) Vrai : $M\in\zeta\Leftrightarrow|z|=1$ donc $|z'|=\left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$

On désigne par M et M' les points d'affixes respectives z et $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$; si $M\in\xi$ alors $M'\in\xi$

4) Vrai car si $z=222+222i$ alors $z'=222-222i$; $\left|\frac{222+222i}{222-222i}\right|=\frac{|z|}{|\bar{z}|}=1$

5) Vrai 6) Faux ; contre exemple : $z_1=1$ et $z_2=i$; $z_1^2+z_2^2=1^2+i^2=1-1=0$

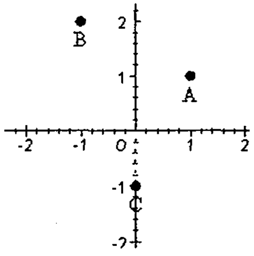
7) Faux. En effet on a : $\frac{1}{\cos\frac{2\pi}{5}}\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)=1+i\tan\frac{2\pi}{5}\neq1+i\tan\frac{3\pi}{5}$.

8) Faux , 9) Vrai $\frac{1}{Z}-\frac{1}{\bar{Z}}=\frac{\bar{Z}-Z}{Z\bar{Z}}=\frac{(a-ib)-(a+ib)}{|Z|^2}=\frac{-2ib}{|Z|^2}\in i\mathbb{R}$

10) Faux. En effet on a : $OA=1$ car $A\in\xi_{(O,1)}$ et Si B est le milieu du segment [OA] alors $OB=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}$

or on a : $OB=\left|\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{4}i\right|=\sqrt{\frac{2}{16}+\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{3}}{4}\neq\frac{1}{2}$

Exercice N°3 : 1) Voir figure



2) $AB=|z_B-z_A|=|-1+2i-1-i|=|-2+i|=\sqrt{5}$

$AC=|z_C-z_A|=|-i-1-i|=|-1-2i|=\sqrt{5}$

$BC=|z_C-z_B|=|-i+1-2i|=|-3i+1|=\sqrt{10}$

Puisque $AB=AC$; $AB^2+AC^2=BC^2$ alors d'après le théorème de Pythagore ABC est un triangle isocèle et rectangle en A

3) ABCD est un parallélogramme signifie que : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ signifie $z_C-z_A=z_D-z_B$ signifie que

$z_D=z_C-z_A+z_B=-i-1-i-1+2i=-2$

4) a) $|z+i|=2$ signifie $|z-(-i)|=2$ signifie $MC=2$ *donc M appartient à un cercle de centre C et de rayon 2* donc $E=\zeta_{(C;2)}$

b) $|2iz+2i+4|=2|z+i|$ signifie $|2i(z+1)+4|=2|z+i|$ signifie $\left|2i\left(z+1+\frac{4}{2i}\right)\right|=2|z+i|$ signifie $|2i|\left|z+1+\frac{4}{2i}\right|=2|z+i|$ signifie $\left|z+1-\frac{4i}{2}\right|=|z+i|$ signifie $|z+1-2i|=|z+i|$ signifie $|z-(-1+2i)|=|z-(-i)|$ signifie que $BM=CM$ signifie que M décrit la médiatrice de $[BC]$ donc $F=\text{méd}([BC])$.

5) $M(z)\mapsto M'(z')$ tel que $z'=\frac{z+1-2i}{z-1-i}$.

a) $z_A=1+i$; $\frac{z_C+1-2i}{z_C-1-i}=\frac{-i+1-2i}{-i-1-i}=\frac{1-3i}{-(1+2i)}=\frac{(1-3i)(1-2i)}{-5}=\frac{1-2i-3i-6}{-5}=\frac{-5-5i}{-5}$
$=\frac{-5(1+i)}{-5}=1+i=z_A$ .On a : $z_A=\frac{z_C+1-2i}{z_C-1-i}$ donc $f(C)=A$.

b) $(z'-1)(z-1-i)=\left(\frac{z+1-2i}{z-1-i}-1\right)(z-1-i)=(z+1-2i-z+1+i)=2-i$.

c) $M\in\zeta_{(A;1)}$ signifie que $|z-1-i|=1$ donc $|(z'-1)(z-1-i)|=|2-i|$ signifie que $|z'-1|=|2-i|=\sqrt{5}$.
$IM'=\sqrt{5}$ Soit I le point d'affixe 1 donc $M'\in\zeta_{(I;\sqrt{5})}$.

d) $M\in\text{méd}([AB])$ signifie que $AM=BM \Leftrightarrow |z-z_A|=|z-z_B| \Leftrightarrow |z-1-i|=|z+1-2i|$

donc $|z'|=\frac{|z+1-2i|}{|z-1-i|}=1$ ainsi $M'\in\zeta''_{(O;1)}$.

EXERCICE N°4: a) $M'(i+m)$; $M''(i-m)$ et $A(i)$.

On a $\frac{z_{M'}+z_{M''}}{2}=\frac{i+m+i-m}{2}=1=z_A$ donc $A=M'*M''$

b) $OM''=|z_{M''}|=|i-m|=\sqrt{1+m^2}$ donc $OM'=OM''$ et par suite le triangle $OM'M''$ est isocèle de sommet principal O.

c) $OM'M''$ est équilatéral si et seulement si $OM'=OM''=M'M''$. On a : $M'M''=|i-m-i-m|=|2m|$;
$\sqrt{1+m^2}=|2m| \Leftrightarrow 1+m^2=4m^2 \Leftrightarrow 3m^2=1 \Leftrightarrow m^2=\frac{1}{3} \Leftrightarrow m=\sqrt{\frac{1}{3}}$ ou $m=-\sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow m=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou
$m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ donc $OM'M''$ est équilatéral si et seulement si $m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$

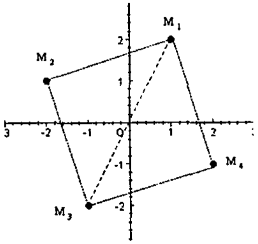
EXERCICE N°5: a) On a : $A(2i)$; $B(-i)$; $M(-i+d)$ et $N(-i-d)$; $MN=|-i+d+i+d|=|2d|=2|d|=4$
$\frac{z_M+z_N}{2}=-i=z_B \Rightarrow B=M*N$

b) $BM=BN=|-i+d-(-i)|=|d|=2$, $BN=|-i-d-(-i)|=|-d|=|d|=2$ et par suite M et $N\in\xi_{(B;2)}$

c) $\text{aff}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right)=2i+(-i+d)+(-i-d)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\vec{0}$ donc lorsque AMN est un triangle alors O est son centre de gravité.

d) AMN est un triangle ; O est son centre de gravité et $B=M*N$; si AMN est isocèle alors $OM=ON$
$\Leftrightarrow |-i+d|=|-i-d| \Leftrightarrow |-i+d|^2=|-i-d|^2 \Leftrightarrow (-i+d)(i+\bar{d})=(i+d)(-i+\bar{d}) \Leftrightarrow d=\bar{d} \Leftrightarrow d\in IR$; $|d|=2$
donc $d=-2$ ou $d=2$

Exercice7 : 1) voir figure



2) $M_1M_2=|z_{M_2}-z_{M_1}|=|-2+i-1-2i|=|-3-i|=\sqrt{10}$

$M_2M_3=|z_{M_3}-z_{M_2}|=|-1-2i+2-i|=|-1-3i|=\sqrt{10}$.

On a : $M_1M_2=M_2M_3$ donc $M_1M_2M_3$ est un triangle isocèle.

$M_1M_3=|z_{M_3}-z_{M_1}|=|-1-2i-1-2i|=|-2-4i|=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$;

$M_1M_2{}^2+M_2M_3{}^2=M_1M_3{}^2=20$ donc $M_1M_2M_3$ est isocèle et rectangle en M_2 .

c) $M_1M_2M_3M_4$ est un carré signifie que $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_4M_3} \Leftrightarrow z_{M_2}-z_{M_1}=z_{M_3}-z_{M_4}$ signifie $z_{M_4}=z_{M_3}-z_{M_2}+z_{M_1}$ donc
$z_{M_4}=-1-2i+2-i+1+2i=2-i$

II) 1) Supposons que $z=z_1=1+2i$ donc $z'=\frac{z_1-2i}{z_1+3}=\frac{1+2i-2i}{1+2i+3}=\frac{1}{4+2i}=\frac{4-2i}{20}=\frac{1}{5}-\frac{1}{10}i$

2) $z'\in IR$, soit $z=x+iy$ avec $(x;y)\in IR^2$ il faut que $z\neq-3$; $x\neq-3$ et $y\neq0$ c'est-à-dire $M\neq A$; $A(-3)$

$$z'=\frac{x+iy-2i}{x+iy+3}=\frac{x+i(y-2)}{x+3+iy}=\frac{(x+i(y-2))(x+3-iy)}{(x+3)^2+y^2}=\frac{x(x+3)-ixy+i(x+3)(y-2)+y(y-2)}{(x+3)^2+y^2}$$

$$=\frac{x(x+3)+y(y-2)}{(x+3)^2+y^2}+i\frac{(x+3)(y-2)-xy}{(x+3)^2+y^2}=\frac{x(x+3)+y(y-2)}{(x+3)^2+y^2}+i\frac{xy-2x+3y-6-xy}{(x+3)^2+y^2}$$

$=\dfrac{x(x+3)+y(y-2)}{(x+3)^2+y^2}+i\dfrac{-2x+3y-6}{(x+3)^2+y^2}$. $z'\in IR \Leftrightarrow -2x+6y-6=0$; $-2(-3)+3\times0-6=0$ alors

$A\in\Delta: -2x+3y-6=0\setminus A(-3)$ donc E est la droite $\Delta: -2x+3y-6=0\setminus A(-3)$.

Exercice N°8:

1) $OA=|z_A-z_O|=|z_A|=2\sqrt{2}$; et $AB=|z_B-z_A|=|4i-2-2i|=|2i-2|=2\sqrt{2}$

On a $OA=AB$ donc OAB est isocèle en A. ; On a $OB=|z_B-z_O|=4$;

$OA^2+OB^2=(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2=16=OB^2$ don OAB est un triangle isocèle et rectangle en A.

2) a) $z_C=\dfrac{z_B}{z_A}=\dfrac{4i}{2+2i}=\dfrac{4i(2-2i)}{8}=\dfrac{8i+8}{8}=1+i$

b) $\dfrac{z_O+z_A}{2}=\dfrac{2+2i}{2}=1+i=z_C$ donc $C=O*A$

c) $E=\{M(z)\in P \text{ tel que}: |z-2-2i|=|z|\}$

$|z-2-2i|=|z|$ signifie que $AM=OM$ signifie sue M est équidistant de O et A signifie que $M\in$ méd$[OA]$. donc $E=$ méd$([OA])$.

On a : $(OA)\perp(AB)$ et $(OA)\perp E$ donc $E//(AB)$

3) a) $z_D=z_B\times z_C=4i(1+i)=4i-4$

b) aff$(\overrightarrow{BD})=4i-4-4i=-4$; aff$(\overrightarrow{AB})=2i-2$. On a : $-4(2i-2)=-8i+8\in iIR$ donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BD}$

$BD=|z_D-z_B|=16$; $OA=2\sqrt{2}$ on a $OA\neq BD$ et $(OA)//(BD)$ donc OABD est un trapèze.

4)a) $Z_K=\dfrac{Z_O+Z_D}{2}=\dfrac{Z_D}{2}=-2+2i$, $AK=|z_K-2-2i|=|-2-2i-2i|=2\Rightarrow K\in F$.

b) $|z-2i|=2\Leftrightarrow|z-z_I|=2\Leftrightarrow IM=2 \Leftrightarrow M\in\xi_{(I,2)}$

Exercice N°10:

:1) $H'=f(H)$, soit $z_{H'}$ l'affixe de H', on a donc $z_{H'}=\dfrac{z_H-i}{z_H-2i}=\dfrac{i-i}{i-2i}=0$ donc $z_{H'}=0$

2) $|z'|=1\Leftrightarrow\dfrac{|z-i|}{|z-2i|}=1\Leftrightarrow|z-i|=|z-2i|\Leftrightarrow MH=MD$ donc $M\in$ méd$([HD])$ ainsi $E=$ méd$([HD])$.

3) a) $z\neq2i$; $(z'-1)(z-2i)=\left(\dfrac{z-i}{z-2i}-1\right)(z-2i)=\left(\dfrac{z-i-z+2i}{z-2i}\right)(z-2i)=i$

b) On a : $(z'-1)(z-2i)=i$ signifie $|z'-1||z-2i|=|i|$ signifie que $KM'.DM=1$ car $|z'-1|=KM'$ et $|z-2i|=DM$.

c) $M\in\xi_{\left(D;\frac{1}{3}\right)}\Leftrightarrow DM=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow|z-2i|=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow DM=\dfrac{1}{3}$ et on a $KM'.DM=1\Leftrightarrow KM'.\dfrac{1}{3}=1$ signifie que $KM'=3$ donc $M'\in\xi_{(K;3)}$

EXERCICE N° 11: 1) a) voir figure

b) $AD=|z_D-z_A|=|2i-1-i|=|i-1|=\sqrt{2}$

$AB=|z_B-z_A|=|3+i-1-i|=2$

$BC=|z_C-z_B|=|2+2i-3-i|=|-1+i|=\sqrt{2}$: $AD=BC=\sqrt{2}$

$DC=|z_C-z_D|=|2+2i-2i|=|2|=2$ On a : $AB=DC$ et $BC=AD$ donc ABCD est un parallélogramme..

2) a) $z_E=z_D-z_A=2i-1-i=-1+i=\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$

$$b)\ \frac{z_E}{z_F}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right)$$

$$c).\ \frac{z_E}{z_F}=\frac{-1+i}{2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{-1+i}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{i-1}{1+i\sqrt{3}}=\frac{(i-1)(1-i\sqrt{3})}{4}=\frac{i+\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}+i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

Par identification, on obtient : . $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\dfrac{13\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{13\pi}{12}=\dfrac{i+\sqrt{3}}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\dfrac{13\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\\ \sin\dfrac{13\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

d) $\left(\dfrac{z_E}{z_F}\right)^{12}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{12}(\cos13\pi+i\sin13\pi)=\dfrac{2^6}{2^{12}}(\cos\pi+i\sin\pi)\dfrac{1}{2^6}(-1)=-\dfrac{1}{64}$

Exercice N°12:

1) a) $(z+6i)^2-12=z^2+12iz-36-12=z^2-12iz-48$

b) $z^2+12iz-48=(z+6i)^2-12=(z+6i)^2-\sqrt{12}^2=(z+6i-\sqrt{12})(z+6i+\sqrt{12})$

$z^2+12iz-48=0$ signifie que $z'=-6i+\sqrt{12}$ et $z''=-6i-\sqrt{12}$ donc $S_C=\{-6i-\sqrt{12};-6i+\sqrt{12}\}$

2) a) $z_1=1+i\sqrt{3}=2\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$; $z_2=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

b) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)(1-i)}{2}=\frac{1-i+i\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}-i\left(1-\sqrt{3}\right)}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}-i\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

$\frac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}+i\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}-i\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

c) on a : $\begin{cases}\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\end{cases}$ donc $\begin{cases}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\ \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{cases}$

Exercice n°13 :1) a) $\boxed{S_{\mathbb{C}}=\{-2i,2i\}}$ .b) $\left(Z-2\sqrt{3}\right)^2=Z^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2-2\times2\sqrt{3}\times Z=Z^2+12-4\sqrt{3}Z$

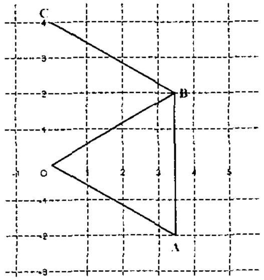
c) $Z^2-4\sqrt{3}Z+16=0\Leftrightarrow\left(Z^2-4\sqrt{3}Z+12\right)-(-4)=0\Leftrightarrow\left(Z-2\sqrt{3}\right)^2-(2i)^2=0$

$\Leftrightarrow\left(Z-2\sqrt{3}-2i\right)\left(Z-2\sqrt{3}+2i\right)=0\Leftrightarrow Z-2\sqrt{3}-2i=0$ ou $Z-2\sqrt{3}+2i=0$

$\Leftrightarrow Z=2\sqrt{3}+2i$ ou $Z=2\sqrt{3}-2i$ d'où $\boxed{S_{\mathbb{C}}=\left\{2\sqrt{3}-2i,2\sqrt{3}+2i\right\}}$.

2) a) $|Z_A|=\sqrt{12+4}=4$ donc $\begin{cases}\cos\theta=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}\end{cases}$ alors $\theta=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ .d'où $\boxed{Z_A=4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}$.

De même pour $\boxed{Z=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)}$.



b)Voir figure.

c) $\left(\widehat{\overline{OA},\overline{OB}}\right)=\left(\widehat{\overline{OA},\vec{u}}\right)+\left(\widehat{\vec{u},\overline{OB}}\right)+2k\pi=-\left(\widehat{\vec{u},\overline{OA}}\right)+\frac{\pi}{6}+2k\pi$

$=-\left(\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

d) $|Z_A|=|Z_B|$ sig OA = OB donc OAB est isocèle or on a

$\left(\widehat{\overline{OA},\overline{OB}}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ alors OAB est équilatéral.

3) I est le centre de gravité de OAB $\overline{IO}+\overline{IA}+\overline{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow -Z_I+Z_B-Z_I+Z_A-Z_I=0$

$\Leftrightarrow 3Z_I=Z_A+Z_B=4\sqrt{3}$ donc $\boxed{Z_I=\frac{4\sqrt{3}}{3}}$.

4) OABC est un losange donc $\overline{OC}=\overline{AB}\Leftrightarrow Z_C=Z_B-Z_A=2\sqrt{3}+2i-\left(2\sqrt{3}-2i\right)=\boxed{4i}$

5) $|Z|=|\bar{Z}+4i|\Leftrightarrow|Z|=\left|\overline{Z-4i}\right|\Leftrightarrow|Z|=|Z-4i|\Leftrightarrow$ OM = CM donc M appartient à la médiatrice du segment [OC].

pExercice N°1 :

1) * $\overline{AI}=\frac{1}{3}\overline{AB}+0.\overline{AC}+0.\overline{AD}\Rightarrow I\left(\frac{1}{3};0;0\right)$;

* $\overline{AJ}=\overline{AB}+\overline{BJ}=\overline{AB}+\frac{1}{4}\overline{BC}=\overline{AB}+\frac{1}{4}\left(\overline{BA}+\overline{AC}\right)=\frac{3}{4}\overline{AB}+\frac{1}{4}\overline{AC}+0.\overline{AD}\Rightarrow J\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4};0\right)$

* $\overline{AK}=\overline{AC}+\overline{CK}=\overline{AC}+\frac{3}{8}\left(\overline{CA}+\overline{AD}\right)=\frac{5}{8}\overline{AC}+\frac{3}{8}\overline{AD}\Rightarrow K\left(0;\frac{5}{8};\frac{3}{8}\right)$

* $\overline{AL}=\frac{1}{6}\overline{AC}+\frac{1}{6}\overline{AD}\Rightarrow L\left(0;\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right)$

2) $\overline{IL}\begin{pmatrix}0-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{6}-0\\ \frac{1}{6}-0\end{pmatrix}$ d'où $\overline{IL}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6}\end{pmatrix}$; $\overline{JK}\begin{pmatrix}0-\frac{3}{4}\\ \frac{5}{8}-\frac{1}{4}\\ \frac{3}{8}-0\end{pmatrix}$ d'où $\overline{JK}\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\ \frac{3}{8}\\ \frac{3}{8}\end{pmatrix}$ on conclut que $\overline{IL}=\frac{4}{9}\overline{JK}$ donc $m=\frac{4}{9}$

Exercice N°2 :1) a) On a : $\overline{AJ}=\frac{1}{2}\overline{AD}$ et $\overline{BL}=\frac{1}{2}\overline{BC}$ or $\overline{AB}=\overline{BC}$ car (ABCD carré) donc $\overline{AJ}=\overline{BL}\Rightarrow$ $\overline{JL}=\overline{AB}$ de même on trouve : $\overline{IK}=\overline{A'B'}$ comme $\overline{AB}=\overline{A'B'}$ (ABB'A'un carré) d'où $\overline{JL}=\overline{IK}$ par suite(JL)//(IK) et par suite I, J, K et L sont coplanaires.

b) $\overline{D'K}=\overline{D'C'}+\overline{C'K}$ or $K=B'*C\Rightarrow\overline{C'K}=\frac{1}{2}\overline{C'B'}$

$\overline{D'K}=\overline{D'C'}+\frac{1}{2}\overline{C'B'}\Rightarrow\overline{D'K};\overline{D'C'}$ et $\overline{C'B'}$ sont coplanaires.

c) On a : $\overline{IB'}=\overline{IA'}+\overline{A'B'}$ or $I=A'*D'$ ou encore $\overline{IA'}=\frac{1}{2}\overline{DA'}=\frac{1}{2}\overline{D'A'}+\overline{A'B'}=\frac{1}{2}\overline{C'B'}+\overline{D'C'}$

car $\overline{A'D'}=\overline{B'C'}$ et $\overline{A'B'}=\overline{D'C'}$ or $\overline{D'K'}=\overline{D'C'}+\frac{1}{2}\overline{C'B'}$ par suite $\overline{IB'}=\overline{D'K}$.

2) La droite (IJ) est parallèle à la droite(KL) donc au plan(D'KL). La droite (IB') est parallèle à la droite(D'K) (car $\overline{IB'}=\overline{D'K}$) donc au plan(D'KL). Les deux droites (IJ) et (IB') du plan(IJB') sont sécantes en I et toutes deux parallèles au plan(D'KL) par suite(IJB') est parallèle au plan(D'KL).

Exercice N°3 : A(1;1;−2) ; B(0;2;1) ; C(−1;2;3) et D(0;3;2).

1) $\overline{AB}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$; $\overline{AC}\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 5\end{pmatrix}$; on a : $\frac{-2}{-1}\neq\frac{1}{1}$ donc les vecteurs $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) On pourra montrer que les vecteurs $\overline{AD};\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ sont coplanaires. $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ ne sont pas colinéaires.

Montrons qu'il existe un couple $(\alpha;\beta)$ de réels tel que : $\overline{AD}=\alpha\overline{AB}+\beta\overline{BC}$. $\overline{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$; $\overline{BC}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$;

$\overline{AD}\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$; soient α et β <u>deux</u> réels , on a : $\overline{AD}=\alpha\overline{AB}+\beta\overline{BC} \Leftrightarrow \begin{cases}-\alpha-\beta=-1\\ \alpha=2\\ 3\alpha+2\beta=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=2\\ \beta=-1\\ 3\alpha+2\beta=4\end{cases}$

Pour $\alpha=2$ et $\beta=-1$, on a : $3\alpha+2\beta=6-2=4$ .On a alors : $\overline{AD}=2\overline{AB}-\overline{BC}$ donc les vecteurs $\overline{AD};\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ sont coplanaires et par suite D appartient au plan P.

$2^{\text{ième}}$ méthode : $\det\left(\overline{AD};\overline{AB};\overline{BC}\right)=\begin{vmatrix}-1&-1&-1\\1&0&2\\3&2&4\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}0&2\\2&4\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1&0\\3&2\end{vmatrix}=0$ donc les vecteurs $\overline{AD};\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ sont coplanaires et par suite D appartient au plan P.

3) $F(1-m;m;m+1)$k.On a : $A\in P$; la droite (AF) est contenue dans P si et seulement si $F\in P$ .Soit les réels α et β tel que $\overline{AF}=\alpha\overline{AB}+\beta\overline{BC}$; $\overline{AF}\begin{pmatrix}-m\\m-1\\m+3\end{pmatrix}$; $\overline{AF}=\alpha\overline{AB}+\beta\overline{BC} \Leftrightarrow (S):\begin{cases}-\alpha-\beta=-m & (1)\\ \alpha=m-1 & (2)\\ 3\alpha+2\beta=m+3 & (3)\end{cases}$

De (2) On a : $\alpha=m-1$; de (1) on obtient $\beta=-m+1+m=1$; le système (S) admet une solution $(\alpha;\beta)$ si et seulement si α et β trouvés vérifient l'égalité (3), on obtient alors :

$F\in P \Leftrightarrow 3(m-1)+2=m+3 \Leftrightarrow m=2$ on conclut que (AF) est contenue dans P si et seulement si $m=2$.

4) $\vec{e_1}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k};\vec{e_2}=\vec{j}+2\vec{k}$ et $\vec{e_3}=\vec{i}+2\vec{j}$.

a) $\vec{e_1}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$; $\vec{e_2}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{e_3}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$; on a : $\begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix}=-1\neq 0$ donc les vecteurs $\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$ ne sont pas colinéaires.

Soit α et β des réels tel que : $\vec{e_1}=\alpha\vec{e_2}+\beta\vec{e_3} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=3\\ \alpha+2\beta=1\\ 2\alpha=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=1\\ \beta=3\\ \alpha+2\beta=1\end{cases}$; pour $\alpha=1$ et $\beta=3$;

$\alpha+2\beta=7\neq 1$ donc, il n'existe aucun couple $(\alpha;\beta)$ de réels tels que $\vec{e_1}=\alpha\vec{e_2}+\beta\vec{e_3}$. Il en résulte que $\vec{e_1}$; $\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$ ne sont pas coplanaires et par suite $R'=\left(A;\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3}\right)$ est un repère de ξ ..

b) Désignons par $(X;Y;Z)$ les coordonnées de B dans le repère R', on a alors $\overline{AB}=X\vec{e_1}+Y\vec{e_2}+Z\vec{e_3}$ signific que $\overline{AB}=X\left(3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\right)+Y\left(+\vec{j}+2\vec{k}\right)+Z\left(\vec{i}+2\vec{j}\right)\pm \Leftrightarrow \overline{AB}=(3X+z)\vec{i}+(X+Y+2Z)\vec{j}+(2X+2Y)\vec{k}$, on

sait que $\overline{AB}=-\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$ on en déduit que : $\begin{cases}3X+Z=-1\\ X+Y+2Z=1\\ 2X+2Y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}X+Y=\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}+2Z=1\\ 3X+Z=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}Z=-\frac{1}{4}\\ X=-\frac{1}{4}\text{donc}\\ Y=\frac{7}{4}\end{cases}$

$B\left(-\frac{1}{4};\frac{7}{4};-\frac{1}{4}\right)$ dans le repère R'

<u>Exercice n°4:</u> 1) $\overline{AG}=\overline{AC}+\overline{CG}=\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{AE}=3\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}\Rightarrow G(3;4;3)$.

2)On a $I(3;2;0),J(0;2;3)$ et $K(2;0;3)$

<u>Exercice N° 5:</u> $A'=B*C$; G est le centre de gravité de triangle ABC.

1) $\overline{AE}=\frac{2}{3}\overline{AD}$

a) $\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AA'}$; $\overline{EG}=\overline{EA'}+\overline{AG}=-\frac{2}{3}\overline{AD}+\frac{2}{3}\overline{AA'}=\frac{2}{3}\left(\overline{AA'}-\overline{AD}\right)=\frac{2}{3}\left(\overline{DA}+\overline{AA'}\right)=\frac{2}{3}\overline{DA'}$

Donc $\overline{EG}$ *et* $\overline{DA'}$ sont colinéaires

b) Les vecteurs $\overline{EG}$; $\overline{BD}$ *et* $\overline{DC}$ sont coplanaires car

$\overline{DA'}=\frac{1}{2}\left(\overline{DB}+\overline{DC}\right)=\frac{3}{2}\overline{EG}$,$\overline{DB}+\overline{DC}=3\overline{EG}\Leftrightarrow\overline{DB}+\overline{DC}-3\overline{EG}=0$

2)

$\overline{GF}=\frac{2}{9}\overline{AD}$; $\overline{A'F}=\overline{A'G}+\overline{GF}=\frac{1}{3}\overline{A'A}+\frac{2}{9}\overline{AD}=\frac{1}{3}\overline{A'A}+\frac{2}{9}\times\frac{3}{2}\overline{AE}=\frac{1}{3}\overline{A'A}+\frac{1}{3}\overline{AE}$

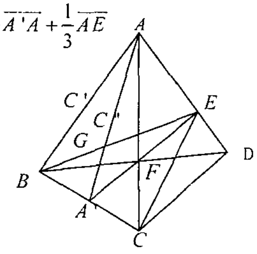
$=\frac{1}{3}\left(\overline{A'A}+\overline{AE}\right)=\frac{1}{3}\overline{A'E}$

Donc A', F et E sont alignés.

$\overline{FB}+\overline{FC}+\overline{FE}=3\overline{FG}+\overline{GB}+\overline{GC}+\overline{GE}=3\overline{FG}-\overline{GA}+\overline{GE}=3\overline{FG}+\overline{AE}$

$=3\overline{FA'}+3\overline{A'G}+\overline{AE}=\overline{EA'}+3\overline{A'G}+\overline{AA'}+\overline{A'E}=\overline{A'A}+\overline{AA'}=\vec{0}$

donc F est le centre de gravité du triangle ACE.



<u>$2^{\text{ième}}$ méthode :</u>

Dans le triangle BCE on a : $\overline{A'F}=\frac{1}{3}\overline{A'E}$; $A'=B*C$, Donc F est le centre de gravité de BCE.

3) $C'=A*B$; $C''=E*B$; $\overline{C'C''}=\frac{1}{2}\overline{AE}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\overline{AD}=\frac{1}{3}\overline{AD}$

) 4)a)$\overline{CM}=3\overline{CA}+3\overline{CB}+\frac{4}{3}\overline{AD}=3\left(\overline{CA}+\overline{CB}\right)+4\overline{C'C''}=3\left(2\overline{CC'}\right)+4\overline{C'C''}=6\overline{CC'}+4\overline{C'C''}$

$=6\overline{CC'}+4\overline{C'C}+4\overline{CC''}=2\overline{CC'}+4\overline{CC''}$

b) les vecteurs $\overline{CM}$; $\overline{CC'}$ *et* $\overline{CC''}$ sont coplanaires et par suite les points M, C, C' et C'' sont coplanaires (Dans le même plan)

Exercice N° 1 : 1)b) 2)b 3)c)

Exercice N°2 : La droite D passe par C et, étant parallèle à (AB), a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\\4\end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique de D est donc : $\begin{cases}x=-4-2k\\y=5+4k\\z=7+4k\end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$.

Exercice N°3 nature de l'intersection de D et D' dépend de l'existence de deux réels k et k' vérifiant : $\begin{cases}1+k=3+k'\\3-k=2-2k'\\-1+k=m+2k'\end{cases}$. On a alors les équivalences successives : $\begin{cases}1+k=3+k'\\3-k=2-2k'\\-1+k=m+2k'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k-k'=2\\-k+2k'=-1\\k-2k'=m+1\end{cases}\Leftrightarrow$ $\begin{cases}k-k'=2\\k'=1\\k-2k'=m+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=32\\k'=1\\1=m+1\end{cases}$. *Ce système admet une solution unique* (3 ;1) si et seulement si m = 0. Dans ce cas, les deux droites se coupent en un point dont les coordonnées se trouve en remplaçant k par 3 dans la représentation paramétrique de D ou k' par 1 dans celle de D'. Donc : **Si $m\neq0$, D et D' n'ont pas de point d'intersection. Si m = 0, D et D' se coupent au point de coordonnées (4 ;0 ;2).**

Exercice N° 4: $A(2;3;-1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.1) Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace ; $M\in D(A;\vec{u})\Leftrightarrow$ il existe $\alpha\in$ IR tel que $\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=\alpha\\y-3=0\\z+1=\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2+\alpha\\y=3\\z=-1+\alpha\end{cases}$ donc une représentation paramétrique de $D(A;\vec{u})$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est : $\begin{cases}x=2+\alpha\\y=3\\z=-1+\alpha\end{cases}$;$(\alpha\in$ IR$)$.

2) $C(2;3;0)$ et $D(-1;1;5)$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\-2\\5\end{pmatrix}$ et par suite comme dans la question précédente, une représentation **paramétrique de la droite** (CD) est $\begin{cases}x=2-3\beta\\y=3-2\beta;(\beta\in\text{IR}).\\z=5\beta\end{cases}$

3) On a : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3\\-2\\5\end{pmatrix}$, on remarque que $\begin{vmatrix}1&-3\\0&-2\end{vmatrix}=-2\neq0$ donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires et par suite $D(A;\vec{u})$ et (CD) *ne sont pas parallèles, donc* leur intersection nous permet de leur position relative.

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace ; $M\in D(A;\vec{u})\cap(CD)$. $\Leftrightarrow$ il existe deux réels α et β tels que :

$\begin{cases}x=2+\alpha\\y=3\\z=-1+\alpha\end{cases}$ et $\begin{cases}x=2-3\beta\\y=3-2\beta\\z=5\beta\end{cases}$ ce qui permet d'écrire $\begin{cases}2+\alpha=2-3\beta\\3=3-2\beta\\-1+\alpha=5\beta\end{cases}$ et $\begin{cases}2+1=2-0\\\beta=0\\\alpha=0\end{cases}$ donc $D(A;\vec{u})\cap(CD)=\varnothing$

Et par suite : $D(A;\vec{u})$ et (CD) ne sont pas parallèles et $D(A;\vec{u})\cap(CD)=\varnothing$ donc elles ne sont pas *coplanaires.*

Exercice N°5 : $\begin{cases}x=k\\y=1-3k\\z=-2+k\\4x-y+2z-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=k\\y=1-3k\\z=-2+k\\4k-(1-3k)+2(-2+k)-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=k\\y=1-3k\\z=-2+k\\9k-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-2\\z=-1\\k=1\end{cases}$. La droite coupe donc le plan P au point de coordonnées (1 ;-2 ;-1).

Exercice N°6:1) a) Soit $M(x;y;z)$ un point de ξ ; $M\in D$ *équivaut qu'il existe* $\beta\in$ IR tel que $\overrightarrow{AM}=\beta\vec{u}$ on a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z-2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ alors $\begin{cases}x-1=\beta\\y+1=\beta\\z-2=-2\beta\end{cases}$ et par suite la représentation paramétrique de la droite D : $\begin{cases}x=1+\beta\\y=-1+\beta;(\beta\in\text{IR})\\z=2-2\beta\end{cases}$

b) $B(3;2:-1)$; cherchons s'il existe un réel β tel que $\begin{cases}1+\beta=3\\-1+\beta=2\\2-2\beta=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=2\\\beta=3\\\beta=\frac{3}{2}\end{cases}$ il n'existe aucun réel β qui *vérifie ce système et par suite* le point B n'appartient pas à D.

2) Δ est une droite définie par : $\begin{cases} x=2-\alpha \\ y=3+2\alpha \\ z=1+3\alpha \end{cases}$; $(\alpha\in IR)$. Soit $M(x;y;z)$ un point de Δ ; $M\in\Delta \Leftrightarrow$ il existe $\alpha\in IR$ tel que $\begin{cases} x=2-\alpha \\ y=3+2\alpha \\ z=1+3\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2-x \\ y=3+2(2-x) \\ z=1+3(2-x) \end{cases}$ un système d'équations cartésiennes de Δ est alors

$\begin{cases} y=3+2(2-x) \\ z=1+3(2-x) \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} 2x+y-7=0 \\ 3x+z-7=0 \end{cases}$.

3) Soit $M(x;y;z)$ un point de ξ ; $M\in D\cap\Delta \Leftrightarrow$ il existe $(\alpha;\beta)\in IR^2$ tels que : $\left(\begin{cases} x=1+\beta \\ y=-1+\beta \\ z=2-2\beta \end{cases} \text{et} \begin{cases} x=2-\alpha \\ y=3+2\alpha \\ z=1+3\alpha \end{cases}\right)$

Soit le système (S) : $\begin{cases} 1+\beta=2-\alpha \\ -1+\beta=3+2\alpha \\ 2-2\beta=1+3\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2=1+3\alpha \\ 1+\beta=2-\alpha \\ 2\beta+3\alpha=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=2 \\ 2\beta+3\alpha=1 \end{cases}$ pour $\alpha=-1$ et $\beta=2$, on obtient :

$2\beta+3\alpha=4-3=1$ (vérifié) et par suite (S) admet une unique solution $\beta;(\beta=2)$, pour $\beta=2$, on a : $(x:y;z)=(3;1;-2)$

Exercice N°7 : 1) On a $\frac{2}{1}\neq\frac{1}{1}$ donc (2 ;1 ;-2) et (1 ;1 ;3) ne sont pas proportionnelles alors les plant P et P' sont sécants. Pour déterminer leur intersection, il faut résoudre le système : $\begin{cases} 2x+y-2z-3=0 \\ x+y+3z-2=0 \end{cases}$. soit z = k.

En posant ici z = k, le système devient : $\begin{cases} 2x+y=3+2k \\ x+y=2-3k \end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$. Le système obtenu est un système de deux équations à deux inconnues (x et y), on applique alors les méthodes de résolutions habituelles.

$\begin{cases} 2x+y=3+2k \\ x+y=2-3k \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y=3+2k-2x \\ x+(3+2k-2x)=2-3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3+2k-2x \\ -x=-1-5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3+2k-2(1+5k) \\ x=1+5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-8k \\ x=1+5k \end{cases}, k\in\mathbb{R}.$

L'intersection des plans P et P' est la droite (D) de représentation paramétrique $\begin{cases} x=1+5k \\ y=1-8k \\ z=k \end{cases}, k\in\mathbb{R}$.

2) Il s'agit dans cette question de déterminer l'intersection d'un plan et d'une droite. On doit résoudre le système de 4 équations à 4 inconnues : $\begin{cases} x=1+5k \\ y=1-8k \\ z=k \\ x+y-z-6=0 \end{cases}$, il suffit de remplacer x, y et z par leurs expressions en fonction de k dans la dernière équation :

$\begin{cases} x=1+5k \\ y=1-8k \\ z=k \\ x+y-z-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+5k \\ y=1-8k \\ z=k \\ (1+5k)+(1-8k)-k-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+5k \\ y=1-8k \\ z=k \\ -4k-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=9 \\ z=-1 \\ k=-1 \end{cases}$. L'intersection du plan P″ et de (D) est alors le point : I(-4 ;9 ;-1).

3) Pour chercher l'intersection de trois plans, il faut résoudre le système : (S) : $\begin{cases} 2x+y-2z-3=0 \\ x+y+3z-2=0 \\ x+y-z-6=0 \end{cases}$. En utilisant la méthode de substitution, on obtient les équivalences suivantes : $(S)\Leftrightarrow\begin{cases} 2x+y-2z-3=0 \\ x+y+3z-2=0 \\ x+y-z-6=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+2z+3 \\ x+(-2x+2z+3)+3z-2=0 \\ x+(-2x+2z+3)-z-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+2z+3 \\ -x+5z+1=0 \\ -x+z-3=0 \end{cases}$ (y est exprimer en fonction de x et de z, puis remplacé dans les autres équations) $(S)\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+2z+3 \\ x=5z+1 \\ -(5z+1)+z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+2z+3 \\ x=5z+1 \\ -4z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=9 \\ x=-4 \\ z=-1 \end{cases}$. (S) admet le triplet (-4 ;9 ;-1) pour unique solution ; on retrouve les coordonnées du point I d'intersection de P″ et de (D).

Exercice N°8 : $D\begin{cases} x=2+\alpha \\ y=3+2\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases}$; $(\alpha\in IR)$ et $D'\begin{cases} x-3z-1=0 \\ y+2z-1=0 \end{cases}$; $D'\begin{cases} x=3\beta+1 \\ y=-2\beta+1 \\ z=\beta \end{cases}$

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D ; $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D', $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-8\neq 0$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et par suite D et D' ne sont pas parallèles.

$A(x_0;y_0;z_0)\in D\cap D' \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=2+\alpha \\ y_0=3+2\alpha \\ z_0=1+\alpha \\ 2+\alpha-3(1+\alpha)-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=2+\alpha \\ y_0=3+2\alpha \\ z_0=1+\alpha \\ \alpha=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=1 \Rightarrow A(1;1;0) \\ z_0=0 \end{cases}$

2) $P=P(A;\vec{u};\vec{v})$; $M(x;y;z)\in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$; $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 3 \\ y-1 & 2 & -2 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow 4(x-1)+2(y-1)-8z=0 \Leftrightarrow 4x-4+2y-2-8z=0$

$\Leftrightarrow 4x+2y-8z-6=0 \Leftrightarrow 2x+y-4z-3=0 \Rightarrow P:2x+y-4z-3=0$

3) a) $Q:2x-y-5=0$; $\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_Q}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{n_P}$ et $\overrightarrow{n_Q}$ ne sont pas colinéaires car $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-4\neq 0$ donc

P et Q ne sont pas parallèles et par suite ils sont sécants. $M(x;y;z)\in P\cap Q \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-4z-3=0 \\ 2x-y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+5+y-4z-3=0 \\ 2x=y+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y-4z+2=0 \\ 2x=y+5 \end{cases}$. On pose

$x=\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=-5+2\alpha \\ 4z=2(-5+2\alpha)+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=-5+2\alpha \\ 4z=-8+4\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=-5+2\alpha \\ z=-2+\alpha \end{cases}$; $\alpha\in IR$

; $\Delta(B;\vec{w})$; $B(0;-5;-2)$; $W\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $D(C;\vec{u});C(2,3,1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{w}=\vec{u}$;

$C\in\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} 2=\alpha \\ 3=-5+4=-1 \\ 1=-1+2=1 \end{cases}$ impossible donc D et Δ sont strictement parallèles.

Exercice 9 : 1) a) $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-1\neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires

b) $P=P(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC})$; $M(x;y;z)\in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC})=0$

c) On sait que les vecteurs $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont coplanaires si et seulement si les points A, B ; C et E sont coplanaires. On a : $E(2;-1;3)$ et $P:4x+6y-z-9=0$; $4\times2+6\times(-1)-3-9=-10\neq 0$ donc $E\notin P$ et par suite $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires.

2) a) Soit $M(x;y;z)$ un point de ξ ; $M\in\Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1=0 \\ z-2y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ z=5+2y \end{cases}$; $y\in IR$; on pose $y=\alpha$, où α est un réel, on obtient $M\in\Delta \Leftrightarrow$ *il existe* $\alpha\in IR$ *tel que :* $\begin{cases} x=1-\alpha \\ y=\alpha \\ z=5+2\alpha \end{cases}$ *on conclut que* Δ *est la droite passant par* $F(1;0;5)$ et de vecteur directeur $\vec{v}=-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$.

b) On a $E(2;-1;3)$ et $\Delta:\begin{cases} x+y-1=0 \\ z-2y-5=0 \end{cases}$; $2-1-1=2-2=0$ et $3-2\times(-1)-5=5-5=0$ donc $E\in\Delta$

c) Soit $\vec{v}=-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ est un vecteur directeur de Δ et $\overrightarrow{AB}=\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ est un vecteur directeur de (AB) ; il est clair que $\vec{v}=-\overrightarrow{AB}$, donc les droites Δ et (AB) sont parallèles.

On sait que $E\notin P$ donc $E\notin(AB)$, or E est un point de Δ on en déduit que (AB) et Δ sont distinctes. Il en résulte que (AB) et Δ sont strictement parallèles..

d) On a : $\Delta//(AB)$ et (AB) est contenu dans P alors Δ est parallèle à P. on a : $E\in\Delta$ et $E\notin P$ donc Δ et P sont strictement parallèles et par suite $\Delta\cap P=\varnothing$.

Exercice N° 1 : 1) $A(0;0;0), B(1;0;0), C(1;1;0), D(0;1;0), E(0;0;1), F(1;0;1), G(1;1;1), H(0;1;1)$.

2) $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AG} = 1\times1+(-1)\times1+0\times1 = 0$ et $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AG} = 0\times1+(-1)\times1+1\times1 = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{AG} \Rightarrow (AG) \perp (DBE)$.

3) Le centre de gravité K du triangle BDE est défini par : $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\right)$, on en déduit que :

$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG} \Rightarrow K \in (AG)$; K appartient aussi au plan (BDE) donc K est l'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE).

4) $\overrightarrow{KE}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}; \overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$. On calcule : $\overrightarrow{KE}.\overrightarrow{KC} = \left(-\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$. Par ailleurs

$\overrightarrow{KE}.\overrightarrow{KC} = \left\|\overrightarrow{KE}\right\|.\left\|\overrightarrow{KC}\right\|\cos E\hat{K}C$ or : $\left\|\overrightarrow{KE}\right\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ et

$\left\|\overrightarrow{KC}\right\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = 1$ d'où $\cos E\hat{K}C = \frac{\overrightarrow{KE}.\overrightarrow{KC}}{\left\|\overrightarrow{KE}\right\|.\left\|\overrightarrow{KC}\right\|} = \frac{-\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}\times1} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$. La valeur affichée par la calculatrice pour l'angle $E\hat{K}C$ est 144,7 $E\hat{K}C$ ° à 0,1° prés par défaut.

Exercice N° 2 : $AB = 3$; $AD = 4$; $AE = 5$; $\vec{i} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\vec{j} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AE}$

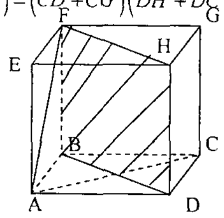
1) $\|\vec{i}\| = \frac{1}{3}AB = 1$; $\|\vec{j}\| = \frac{1}{4}AD = 1$; $\|\vec{k}\| = \frac{1}{5}AE = 1$; $\vec{i} \perp \vec{j}$ car $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ et $\vec{j} \perp \vec{k}$ car $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AE}$

donc $\left(A;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace.

2) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} = 3\vec{i}+4\vec{j} \Rightarrow C(3;4;0)$; $\overrightarrow{AE} = 5\vec{k} \Rightarrow E(0;0;5)$;

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG} = 3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k} \Rightarrow G(3;4;5)$

3) $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-3\\-4\\5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{CE} = -9-16+25 = -25+25 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{CE}$ et par suite (AG) et (CE) sont orthogonaux.



Exercice N° 3 : 1) a) $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CH}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{CH}\left(\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{DC}\right) = \left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CG}\right)\left(\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{DC}\right)$

$= \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{DH} = -CD^2+CD^2 = 0$

b) $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CG}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BE}$; $\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{CH}$ car $\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{BE}$ donc $(AF) \perp (CH)$

2) a) $(AE) \perp (ABCD)$; $\left.\begin{matrix}(AE) \perp (AD)\\(AE) \perp (AB)\end{matrix}\right\} \Rightarrow (AE) \perp (ABCD)$

b) $\left.\begin{matrix}(AE) \perp (ABCD)\\(AC) \subset (ABCD)\end{matrix}\right\} \Rightarrow (AE) \perp (AC)$ et par suite $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC} = 0$

3) $\left.\begin{matrix}(AE) \perp (AC)\\(HD) \parallel (AE)\end{matrix}\right\} \Rightarrow (AC) \perp (DH)$; $\left.\begin{matrix}(AC) \perp (DH)\\(AC) \perp (DB)\end{matrix}\right\} \Rightarrow (AC) \perp (HDBF)$

Exercice 4: 1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$. On en déduit que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = 0$ donc les triangles ABC, ACD et ADB sont des triangles rectangles.

2) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow BC = \sqrt{(-2)^2+2^2+0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} \Rightarrow BC = \sqrt{0^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et

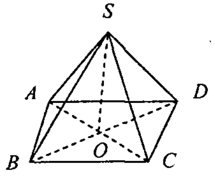
$\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow BC = \sqrt{2^2+0^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ d'où BC = CD = DB donc BCD est un triangle équilatéral.

3) Le centre de gravité G du triangle BCD vérifie la relation vectorielle : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$; on en déduit les coordonnées de G : $\begin{cases}x_G = \frac{1}{3}(3+1+1) = \frac{5}{3}\\y_G = \frac{1}{3}(2+4+2) = \frac{8}{3}\\z_G = \frac{1}{3}(-1-1+1) = -\frac{1}{3}\end{cases}$ donc les composantes de $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$. On calcules :

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\times(-2)+\frac{2}{3}\times2+\frac{2}{3}\times0. = 0$ et $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\times0+\frac{2}{3}\times(-2)+\frac{2}{3}\times2 = 0$. Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ étant orthogonal à deux vecteurs non colinéaires définis par des points de plan (BCD), on en déduit que la droite (AG) est orthogonale au plan (BCD).

Exercice 5 : $AB = SO = a \quad (a > 0)$

1) a) $\overline{SA}\ .\ \overline{SC} = \left(\overline{SO} + \overline{OA}\right)\left(\overline{SO} + \overline{OC}\right) = \overline{SO}\,\overline{SO} + \overline{SO}\,\overline{OC} + \underbrace{\overline{OA}\,\overline{SO}}_{0} + \overline{OA}\,\overline{OC} = SO^2 + \overline{OA}\,\overline{OC}$



$b)\overline{SA}\,\overline{SC} = a^2 + OA.OC.\cos\left(A\hat{O}C\right) = a^2 - OA.OC = a^2 - OA^2 = a^2 - \left(\dfrac{AC}{2}\right)^2$

$= a^2 - \dfrac{AC^2}{4} = a^2 - \dfrac{2a^2}{4} = a^2 - \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^2}{2}$

2) a) $\overline{SA}\,\overline{SC} = SA.SC.\cos\left(A\hat{S}C\right)$;

$SC^2 = SA^2 = OS^2 + OA^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{3a^2}{2}$; $SC = SA = \sqrt{\dfrac{3}{2}}a$; $\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{3}{2}a^2\cos\left(A\hat{S}C\right) \Rightarrow \cos\left(A\hat{S}C\right) = \dfrac{1}{3}$

Exercice 6 : 1) $\vec{U}.\vec{V} = -\cos\theta\sin\theta + \cos\theta\sin\theta + 0 = 0$; $\vec{U}.\vec{W} = 0$; $\vec{V}.\vec{W} = 0$; $\left\|\vec{U}\right\| = \sqrt{\cos\theta^2 + \sin\theta^2} = 1$;

$\left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{(-\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2} = 1$; $\left\|\vec{W}\right\| = \left\|\vec{K}\right\| = 1$ par suite $\left(\vec{U};\vec{V};\vec{K}\right)$ est une base orthonormée.

2) $\vec{U} \perp \vec{t}$ si et seulement si $\vec{U}.\vec{t} = 0$ si et seulement si $2\cos\theta = 0$ si et seulement si $\theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

Exercice 7 : 1) Calculons les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$. Soit I le milieu de [CD].
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\right).\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{CD}$. ACD est un triangle équilatéral donc (AI) est une hauteur de ce triangle. Par conséquent $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CD} = 0$ .De même, BCD est un triangle équilatéral donc $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{CD} = 0$. Ceci prouve que ; donc les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

2) A' est le centre de gravité du triangle BCD équivaut à $\overrightarrow{AA'} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$ donc

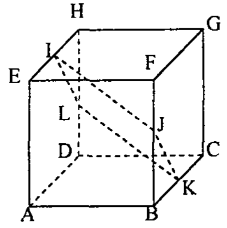
$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC}\right) + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$

où J est le milieu de [BC]. ABC est un triangle équilatéral donc $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC} = 0$. On a vu précédemment que $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$. Donc : $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} = 0$. Par démonstration analogue, on prouverait que $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BD} = 0$.
Comment $\overrightarrow{AA'}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ qui forment un système de vecteurs directeurs du plan (BCD), la droite (AA') est orthogonale au plan (BCD).
3) Représentons en vue de face, le triangle ABI :
Par définition du produit scalaire, $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GA'}$ (car A' est le projeté orthogonal de B sur (GA)). Or $\overrightarrow{GA} = -\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{GA'} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AA'}$, d'où $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = -\dfrac{3}{16}AA'^2$. Par ailleurs, $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = GA \times GA \times \cos A\hat{G}B$ or $GA' = \dfrac{3}{4}AA'$; de même, $GB = \dfrac{3}{4}BB' = \dfrac{3}{4}AA'$ (B' étant la centre de gravité du triangle ACD). D'où

$\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = \dfrac{9}{16}AA' \times \cos A\hat{G}B \Rightarrow -\dfrac{3}{16}AA'^2 = \dfrac{9}{16}AA' \times \cos A\hat{G}B \Rightarrow \cos A\hat{G}B = -\dfrac{1}{3}$. La calculatrice donne $A\hat{G}B = 109{,}5°$ à 0,1° près par excès.

Exercice 8 : 1) a) $A(0;0;0)$; $B(1;0;0)$; $C(1;1;0)$; $D(0;1;0)$; $E(0;0;1)$; $F(1;0;1)$; $G(1;1;1)$ et $H(0;1;1)$.

b) I est le milieu de $[EH]$; $E(0;0;1)$ et $H(0;1;1)$ alors $I\left(0;\dfrac{1}{2};1\right)$



de même on trouve : $J\left(1;0;\dfrac{1}{2}\right)$; $K\left(1;\dfrac{1}{2};0\right)$ et $L\left(0;1;\dfrac{1}{2}\right)$.

c) $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1\\-\dfrac{1}{2}\\-\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}1\\-\dfrac{1}{2}\\-\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$. Comme $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ alors IJKL est un parallélogramme .De plus $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}0\\\dfrac{1}{2}\\-\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IL} = 0 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = 0$ alors IJKL est un rectangle. Les diagonales de ce rectangle se coupent au point O milieu de $[JK]$ alors $O\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Comme $A(0;0;0)$ et $G(1;1;1)$ alors O est aussi milieu de $[AG]$. Or $[AG]$ est une diagonale du cube alors son milieu O est le centre du cube.

2) a) $IJ = \sqrt{1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$; $JK = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$; $IK = \sqrt{1^2 + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Remarque : *puisque* $[IK]$ *est une diagonale pour le rectangle* IJKL alors $IK = \sqrt{IJ^2 + JK^2} = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}} = \sqrt{2}$.

Exercice 9 : 1°/On muni l'espace E d'un repère orthonormé R et on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.On sait $\vec{u}.\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\cos\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$.Donc $\left|\vec{u}.\vec{v}\right| \leq \left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|$ *car* $\left|\cos\left(\vec{u}.\vec{v}\right)\right| \leq 1$

Alors $|xa+yb+zc|\le\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ Par suite $(xa+yb+zc)^2\le(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$.

Exercice N° 10: $A(-1;2;1)$; $B(1;-6;-1)$ et $C(2;2;2)$

1) $M(x;y;z)\in P\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow d\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x+1&2&3\\y-2&-8&0\\z-1&-2&1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(x+1)(-8-0)-(y-2)(2+6)+(z-1)(24)=0$$

$\Leftrightarrow-8(x+1)-8(y-2)+24(z-1)=0\Leftrightarrow-8x-8-8y+16+24z-24=0$

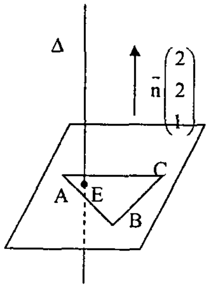
$\Leftrightarrow-8x-8y+24z-16=0\Leftrightarrow x+y-3z+2=0$

2) $Q: x+y-3z+2=0$ et $Q'=\left(O;\vec{i};\vec{k}\right)$.

a) $\overrightarrow{n_Q}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_{Q'}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\vec{j}$ Donc Q et Q' ne sont pas parallèles et par suite Q et Q' sont sécants.

b) $M(x;y;z)\in Q\cap Q'\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-3z+2=0\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3z+2=0\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3z-2\\y=0\end{cases}$ on pose $z=\alpha$ on aura :

$\Delta\begin{cases}x=-2+3\alpha\\y=0\\z=\alpha\end{cases}$; $\alpha\in IR$; $\Delta\left(E;\vec{u}\right)$; $E(-2;0;0)$; $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$



Exercice N° 11: 1) a)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix}-2&-1\\1&1\end{vmatrix}=-2+1=-1\ne0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires d'où A, B et C déterminent un plan.

b) $M(x;y;z)\in(ABC)\Leftrightarrow\text{dét}\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-2&-2&-1\\y-1&1&1\\z+1&2&0\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow(x-2)(-2)-(y-1)2+(z+1)(-1)=0\Leftrightarrow-2x+4-2y+2-z-1=0\Leftrightarrow2x+2y+z-5=0$.

2) a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ ; $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC) ; $\vec{n}=-2\vec{u}\Rightarrow\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont

colinéaires d'où $\Delta\perp(ABC)$. $E(x;y;z)\in\Delta\cap(ABC)\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-t\\y=-1-t\\z=-4-\frac{1}{2}t\\2x+2y+z-5=0\ \ (4)\end{cases}$ D'après (4) on a :

$2-2t-2-2t-4-\frac{1}{2}t-5=0\Leftrightarrow t=-2$ d'où $\begin{cases}x=3\\y=1\\z=-3\end{cases}\Rightarrow E(3;1;-3)$

b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ on a $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EC}$ donc ABCE est un parallélogramme.

3) a) $\begin{cases}-1=1-t\\-3=-1-t\\-5=-4-\frac{1}{2}t\end{cases}\Leftrightarrow t=2\Rightarrow K\in\Delta$

b) On a : $\Delta\perp(ABC)$ en E $\Rightarrow(BE)\perp\Delta$ en E donc $d(B;\Delta)=BE=\sqrt{9+1+16}=\sqrt{26}$

Exercice N° 12 : $(P): 2x-y+2z-5=0$; $(P'): 2x+2y-z-4=0$

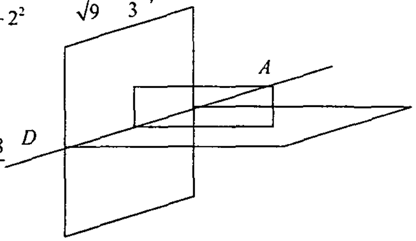
1) On désigne par $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ un vecteur normal à P et $\vec{n}'\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ un vecteur normal à P' ; On a

$\vec{n}\cdot\vec{n}'=2\times2+(-1)\times2+2\times(-1)=4-2-2=0$ donc $\vec{n}\perp\vec{n}'$ et par suite $P\perp P'$

2) $A(1;2;-1)$; $P\cap P'=D$; $d(A;P)=\dfrac{|2\times1-2+2\times(-1)-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\dfrac{|-7|}{\sqrt{9}}=\dfrac{7}{3}$;

$d(A;P')=\dfrac{|2+4+1-4|}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{|3|}{\sqrt{9}}=\dfrac{3}{3}=1$

$d(A;D)^2=d(A;P)^2+d(A;P')^2=\left(\dfrac{7}{3}\right)^2+1^2=\dfrac{49}{9}+\dfrac{9}{9}=\dfrac{58}{9}$



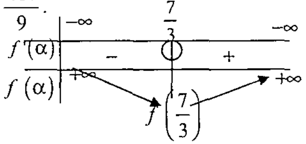
$M(x;y;z)\in D \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+2z-5=0 \\ 2x+2y-z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=y-2z+5 \\ y-2z+5+2y-z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=y-2z+5 \\ 3y-3z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2z-5 \\ y=z-\frac{1}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z-\frac{1}{3}=2x+2z-5 \\ y=z-\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2x+5-\frac{1}{3} \\ y=z-\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=z-\frac{1}{3} \\ z=-2x+\frac{14}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+\frac{14}{3}-\frac{1}{3} \\ z=-2x+\frac{14}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+\frac{13}{3} \\ y=-2x+\frac{14}{3} \end{cases}$ On pose

$x=\alpha$ on aura $D:\begin{cases} x=\alpha \\ y=\frac{13}{3}-2\alpha \\ z=\frac{14}{3}-2\alpha \end{cases}$; $\alpha\in IR$ b) $M(x;y;z)\in D \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=\frac{13}{3}-2\alpha \\ z=\frac{14}{3}-2\alpha \end{cases}$

; $AM=\sqrt{(-1+\alpha)^2+\left(\frac{17}{3}-2\alpha\right)^2+\left(\frac{17}{3}-2\alpha\right)^2} \Leftrightarrow AM^2=9\alpha^2-42\alpha+\frac{467}{9}$.

Soit $f(\alpha)=9\alpha^2-42\alpha+\frac{467}{9}$; $f'(\alpha)=18\alpha-42=6(3\alpha-7)$



AM est minimale pour $\alpha=\frac{7}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{3} \\ y=\frac{13}{3}-\frac{14}{3}=-\frac{1}{3} \Rightarrow M_0\left(\frac{7}{3}\ ;\ -\frac{1}{3}\ ;\ 0\right) \\ z=\frac{14}{3}-\frac{14}{3}=0 \end{cases}$

Exercice N° 13: $P_m:(m-1)x+my+(2-m)z+3m-1=0$

1) Soit $m\in IR$. On a : $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$. Par suite, pour tout réel m, on a : $(m-1;m;2-m)=(0;1;-1)\neq(0;0;0)$; d'où pour tout réel m ; P_m est un plan.

2) $D:\begin{cases} x=-3+2\alpha \\ y=1+3\alpha \\ z=-1+\alpha \end{cases}$;$(\alpha\in IR)$

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D. On a $D//P_m \Leftrightarrow \vec{u}$ est un vecteur de $P_m \Leftrightarrow 2(m-1)+3m+(2-m)=0$

$\Leftrightarrow m=0$ On conclut que D et P_m sont parallèles si et seulement si $m=0$

b) * Si D est contenue dans un plan P_m alors D est parallèle à ce plan P_m par suite $m=0$, voyons si D est contenue dans P_0 : on a D est parallèle à P_0 ; $B(-3;1;-1)$ est un point de D ; P_0 est définie par :

$-x+2z-1=0$, on a : $3-2-1=0$ donc B appartient à P_0. Il en résulte que D est contenue dans le plan P_0.

3) 1er méthode : S'il existe une droite contenue dans tous les plans P_m alors cette droite est contenue dans deux plans P_m particuliers, par exemple : P_0 et P_1. Etudions $P_0\cap P_1$ Soit $M(x;y;z)$ un point de ξ ;

$M\in P_0\cap P_1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2z-1=0 \\ y+z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+2z \\ y=-2-z \end{cases}$ On pose $z=\alpha$; où $\alpha\in IR$ on obtient $M=P_0\cap P_1$ si et seulement si il existe $\alpha\in IR$ tel que : $\begin{cases} x=-1+2\alpha \\ y=-2-\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$. Il en résulte que : P_0 et P_1 est la droite Δ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=-1+2\alpha \\ y=-2-\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$;$(\alpha\in IR)$

Vérifions que Δ est contenue dans tous les plans P_m. Soit M un point quelconque de Δ, M a pour coordonnées $(-1+2\alpha;-2-\alpha;\alpha)$ où $\alpha\in IR$. Pour tout réel m et pour tout réel α, on a : $(m-1)(-1+2\alpha)+m(-2-\alpha)+(2-m)\alpha+3m-1=(2m-2-m-2-m)\alpha-m+1-2m+3m-1=0$ Par suite, pour tout réel m, M appartient à P_m. On en déduit que Δ est contenue dans tous les plans P_m.

2ième méthode : Soit $M(x;y;z)$ un point de ξ On peut écrire $M\in P_m \Leftrightarrow (m-1)x+my+(2-m)z+3m-1=0$ $\Leftrightarrow m(x+y-z+3)-x+2z-1=0$. M appartient à tous les plans P_m si et seulement si (pour tout réel m ; $m(x+y-z+3)-x+2z-1=0$) On obtient (M appartient à tous les plans P_m) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ -x+2z-1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y+z+2=0 \\ x=2z-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+2z \\ y=-2-z \\ z\in IR \end{cases} \Leftrightarrow$ il existe $\alpha\in IR$ tel que : $\begin{cases} x=-1+2\alpha \\ y=-2-\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$. Il en résulte que tous les plans P_m *contiennent la droite* Δ *définie par :* $\begin{cases} x=-1+2\alpha \\ y=-2-\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$;$(\alpha\in IR)$

4) $D'=D_{(A;\vec{u})}$ où $A(0;-2;1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

a) D' est définie par : $\begin{cases}x=\beta\\ y=-2+\beta;(\beta\in IR)\\ z=1+2\beta\end{cases}$. Soit $M(x;y;z)$ un point de ξ ; $M\in D\cap\Delta \Leftrightarrow$ il existe

$(\alpha;\beta)\in IR^2$ tel que : $\begin{cases}x=-1+2\alpha\\ y=-2-\alpha\\ z=\alpha\end{cases}$ et $\begin{cases}x=\beta\\ y=-2+\beta\\ z=1+2\beta\end{cases}$. On a : $\begin{cases}-1+2\alpha=\beta\\ -2-\alpha=-2+\beta\\ \alpha=1+2B\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+3\alpha=2\\ \beta=-\alpha\\ \alpha-2\beta=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\frac{1}{3}\\ \beta=-\frac{1}{3}\end{cases}$

il en résulte que $D\cap\Delta=\{I\}$ avec $I\left(-\frac{1}{3};-\frac{7}{3};\frac{1}{3}\right)$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$; $P_m:(m-1)x+my+(2-m)z+3m-1=0$. Soit $m\in IR$ On a :

$(m-1)\times1+m\times1+2\times(2-m)=3\neq0$ donc $\vec{u}$ n'est pas un vecteur de P_m, par suite D' n'est pas parallèle à P_m. IL en résulte que, pour tout réel m, D4 et P_m sont sécants (1). D'après 3), on a Δ est contenue dans tous les plans P_m et d'après 4), on a : $D'\cap\Delta=\{I\}$. I appartient alors à D' et à tous les plans P_m (2).

De (1) et (2), on déduit que, pour tout réel m, $D'\cap P_m=\{I\}$; où $I\left(-\frac{1}{3};-\frac{7}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Exercice N° 14 : $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}$; $\overrightarrow{OC}=\vec{k}$; $\overrightarrow{OB}=2\vec{j}$; H est le projeté orthogonal de O sur (ABC)

1) a) $(ABC):2x+3y+6z-6=0$

b) $\begin{cases}\overrightarrow{OH}=\alpha\overrightarrow{n_P}\\ H\in(ABC)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x_H+3y_H+6z_H-6=0\\ x_H=2\alpha\\ y_H=3\alpha\\ z_H=6\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4\alpha+9\alpha+36\alpha-6=0\Leftrightarrow\alpha=\frac{6}{49}\\ x_H=\frac{12}{49}\\ y_H=\frac{18}{49}\\ z_H=\frac{36}{49}\end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{12}{49};\frac{18}{49};\frac{36}{49}\right)$

2) $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}\frac{135}{49}\\ \frac{18}{49}\\ \frac{36}{49}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=-\frac{36}{49}+\frac{36}{49}=0\Rightarrow\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}\frac{12}{49}\\ -\frac{80}{49}\\ \frac{36}{49}\end{pmatrix};\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=-\frac{36}{49}+\frac{36}{49}=0\Rightarrow\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$ et par suite H est l'orthocentre du triangle

Exercice N° 15 : 1) $I(0;2;0)$ .2) $\begin{cases}M(a;0;0)\\ A(0;0;0)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=a\vec{i}$ or $0<a<2$ alors M décrit le segment $[AC]$ privé de A et de C On remarque que : $\overrightarrow{AC}=2\vec{i}$

3) a) $I(0;2;0);M(a;0;0)$; $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}a\\-2\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P, Ainsi il existe $d\in IR$ tel que :

$P:ax-2y+d=0$; on a $I\in P\Leftrightarrow -4+d=0\Leftrightarrow d=4$ D'où $P:ax-2y+4=0$

b) $\overrightarrow{BS}\begin{pmatrix}0\\-3\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (BS), Ainsi (BS) : $\begin{cases}x=0\\ y=4-3\alpha;\alpha\in IR\\ z=4\alpha\end{cases}$

c) Soit $N(x;y;z)$ un point de l'espace ; $N\in(BS)\cap P$ équivaut à il existe $\alpha\in IR$ tel que : $\begin{cases}x=0\\ y=4-3\alpha\\ z=4\alpha\\ ax-2y+4=0\end{cases}$

$\begin{cases}x=0\\ y=4-3\alpha\\ z=4\alpha\\ -2(4-3\alpha)+4=0\end{cases}$;$\alpha\in IR\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{2}{3}\\ x=0\\ y=2\\ z=\frac{8}{3}\end{cases}$ donc $N\left(0;2;\frac{8}{3}\right)$ Ainsi N est fixe.

Exercice N° 16: 1) a) $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$; $CA^2+CB^2=4+4+1=9$;

$AB^2=4+4+1=9$; $CA^2+CB^2=AB$ donc ABC est un triangle rectangle en C.

b) $P=(ABC)$; $M(x;y;z)\in P\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x+1&2&0\\ y&0&2\\ z-1&0&1\end{vmatrix}=0$

$(x+1)(0-0)-y(2-0)+(z-1)(4-0)=0\Leftrightarrow-2y+4z-4=0\Leftrightarrow y-2z+2=0\Rightarrow P:y-2z+2=0$

2) Δ est de vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ et passant par $I=A*B$; $I\left(0;1;\frac{3}{2}\right)$; $\Delta:\begin{cases}x=0\\y=1+\alpha\\z=\frac{3}{2}-2\alpha\end{cases}$ $\alpha\in IR$

3) $Q=\left\{M\in\zeta\ /\ \overline{AM}.\overline{AB}=-3\right\}, M\in Q\Leftrightarrow\overline{AM}.\overline{AB}=-3\Leftrightarrow\overline{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y\\z-1\end{pmatrix}.\overline{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}=-3$

$\Leftrightarrow -2(x-1)+2y+1(z-1)=-3\ \Leftrightarrow -2x+2y+z+4=0\Rightarrow Q:-2x+2y+z+4=0$

$\overline{h_Q}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ est normal à Q ; $\overline{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ on a : $\overline{h_Q}=\overline{AB}\Rightarrow\overline{AB}$ est normal à Q donc $Q\perp(AB)$.

4) a) Δ est de vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$; $\overline{n_Q}\,.\,\vec{n}=0+2-2=0$ donc $\vec{n}\perp\overline{n_Q}$ et par suite $\Delta//Q$

b) $M\in\Delta$; puisque $\Delta//Q$ donc $d(\Delta;Q)=d(M;Q)$; pour tout point $M\in\Delta$ en particulier $M\left(0;1;\frac{3}{2}\right)$;

$$d(M;Q)=d(I;Q)=\frac{\left|-2\times0+2\times1+\frac{3}{2}+4\right|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{\left|\frac{15}{2}\right|}{\sqrt{9}}=\frac{\frac{15}{2}}{3}=\frac{5}{2}\,.$$

Exercice N° 1 : 2) a) 0 , b) 1, c) $\overrightarrow{EA}$, d) $\overrightarrow{DB}$; 3) a) 0 , b) Le plan perpendiculaire à la droite (AB) et passant par A ; c) Le plan (ABC) ; 4) c)

Exercice N° 2 : $A(3;2;4)$; $B(0;3;5)$; $C(0;2;1)$ *et* $D(3;1;0)$.

1) a) $\overline{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$; $\overline{DC}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$; $\overline{AB}=\overline{DC}$ et par suite ABCD est un parallélogramme.

b) $Aire(ABCD)=\left\|\overline{AB}\wedge\overline{AD}\right\|$; $\overline{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$; $\overline{AD}\begin{pmatrix}0\\-1\\-4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\overline{AB}\wedge\overline{AD}\begin{pmatrix}1(-4)-1(-1)\\1\times0-(-4)(-3)\\(-3)(-1)-1\times0\end{pmatrix}$

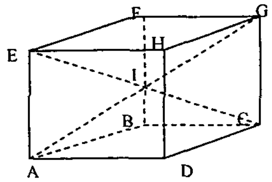
$\Rightarrow\overline{AB}\wedge\overline{AD}\begin{pmatrix}-3\\-12\\3\end{pmatrix}, \left\|\overline{AB}\wedge\overline{AD}\right\|=\sqrt{(-3)^2+(-12)^2+3^2}=\sqrt{9+144+9}=\sqrt{162}=\sqrt{2\times81}=9\sqrt{2}$

2) $\overline{AE}=\frac{1}{3}\left(\overline{AB}\wedge\overline{AD}\right)$; $\overline{AE}\begin{pmatrix}x_E-3\\y_E-2\\z_E-4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\left(\overline{AB}\wedge\overline{AD}\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3\\-12\\3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_E-3=-1\\y_E-2=-4\\z_E-4=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_E=2\\y_E=-2\\z_E=5\end{cases}$

3) $v=\left\|\left(\overline{AB}\wedge\overline{AD}\right)\right\|.\left\|\overline{AE}\right\|=3\left\|\overline{AE}\right\|^2=3\left(\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2}\right)^2=3\times18=56uv$

Exercice N°3 : 1) $A(0;0;0)$; $B(1;0;0)$; $C(1;1;0)$; $D(0;1;0)$; $E(0;0;1)$ *et* $F(1;0;1)$

$\overline{BC}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $\overline{BA}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ *et* $\overline{BF}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $\overline{BC}\wedge\overline{BA}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\overline{BF}$



2) $\left(\overline{BC}\wedge\overline{BA}\right)\wedge\overline{BM}=\vec{0}\Leftrightarrow\overline{BF}\wedge\overline{BM}=\vec{0}\Leftrightarrow\overline{BF}$ *et* $\overline{BM}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow M\in(BF)\Rightarrow\Delta=(BF)$

3) $\left(\overline{BC}\wedge\overline{BA}\right)\overline{BM}=\vec{0}\Leftrightarrow\overline{BF}.\overline{BM}=0\Leftrightarrow\overline{BF}\perp\overline{BM}$ et M appartient au plan passant par B et de vecteur normal $\overline{BF}$ et par suite $P=(ABC)$

Exercice N° 4:

1) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{EF}=\vec{0}$; $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\wedge\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}=\vec{0}-\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{FB}$

$\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AE}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)\wedge\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$

2) $\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BG}\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GH}\right)=BG^2+\overrightarrow{BG}\ \overrightarrow{GH}=BG^2+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}\right)\overrightarrow{GH}=BG^2+0$

$=BG^2=BC^2+CG^2=1+1=2$

$\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{BH}=BG.BH\cos\left(H\widehat{B}G\right)=\sqrt{2}.\sqrt{2+1}\cos\left(H\widehat{B}G\right)=\sqrt{6}\left(H\widehat{B}G\right)=2$

$\Leftrightarrow \cos\left(H\widehat{B}G\right)=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$; $\sin\left(H\widehat{B}G\right)=\sqrt{1-\frac{6}{9}}=\sqrt{\frac{3}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

3) a) $\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{BG}=\left(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{CB}\right)\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BF}\right)=\underbrace{\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{BC}}_{0}+\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BC}+\underbrace{\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BF}}_{0}=1^2-1=0$ donc $\overrightarrow{CF}\perp(BG)$

$\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{CF}\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GH}\right)=\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{GH}+\left(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{CB}\right).\overrightarrow{GH}=\underbrace{\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{GH}}_{0}+\underbrace{\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{GH}}_{0}=0$ donc $\overrightarrow{CF}\perp\overrightarrow{BH}$

b) $\left\|\overrightarrow{BG}\wedge\overrightarrow{BH}\right\|=BG.BH.\sin\left(H\widehat{B}G\right)=\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{2}$; $CF=\sqrt{2}$; $\left\|\overrightarrow{BF}\wedge\overrightarrow{BH}\right\|=\left\|\overrightarrow{CF}\right\|$.

Donc $\overrightarrow{BF}\wedge\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{CF}$

Exercice N° 5: $A(0;1;1)$; $B(1;0;0)$; $C(-1;2;1)$ et $D(0;1;2)$.

1) a) $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$;

$\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}=1\times0+1\times0+0\times1=0$

b) $\overrightarrow{AD}\perp\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$ et par suite $\overrightarrow{AD}$ est un vecteur directeur de (ABC) c'est-à-dire $D\in(ABC)$ donc A, B, C et D sont coplanaires.

2) $\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)+\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{DA}$

$=\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}\wedge\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}\right)=\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BA}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\wedge\overrightarrow{BA}$

$=\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}}_{\vec{0}}+\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}=-\left(\overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{CB}$

Exercice N° 6 1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\5\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\8\\6\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}14\\8\\-20\end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires d'où A, B et C ne sont pas alignés. $\mathcal{A}_{(ABC)}=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}{2}=\frac{\sqrt{14^2+8^2+20^2}}{2}=\frac{2\sqrt{165}}{2}=\sqrt{165}$ (u.a)

2) a) $\mathcal{V}=\frac{1}{6}\left|\text{dét}\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)\right|=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right)\overrightarrow{OC}\right|$. On a : $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}$ et

$\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}5\\6\\5\end{pmatrix}$, $\mathcal{V}=\frac{1}{6}|5-12+25|=\frac{18}{6}=3$ (u.v). b) $\mathcal{V}=\frac{d}{3}\times\mathcal{A}_{(ABC)}\Rightarrow d=\frac{3\mathcal{V}}{\mathcal{A}}=\frac{9}{\sqrt{165}}=\frac{3\sqrt{165}}{55}$

3) $\mathcal{V}=\left|\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right)\overrightarrow{OC}\right|=|5-12+25|=18$ (u.v)

Exercice N°7 :

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}\begin{vmatrix}1&3\\2&-2\end{vmatrix}=1(-2)-2\times3=-2-6=-8\neq0\Rightarrow\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

2) $Aire(ABC)=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$; $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\4\\-8\end{pmatrix}\Rightarrow Aire=\frac{1}{2}\sqrt{0^2+4^2+(-8)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{16+64}=\frac{1}{2}\sqrt{80}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

3) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3-4-1=3-5=-2$;

$\left\|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right\|=AB.AC\cos\left(B\widehat{A}C\right)=\sqrt{6}.\sqrt{14}\cos\left(B\widehat{A}C\right)=25\Leftrightarrow2\sqrt{3}\sqrt{7}\cos\left(B\widehat{A}C\right)=2\Leftrightarrow\cos\left(B\widehat{A}C\right)=\frac{1}{\sqrt{21}}$

$\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=AB.AC\sin\left(B\widehat{A}C\right)\Leftrightarrow\sin\left(B\widehat{A}C\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}{AB.AC}=\frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{21}}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{21}}$

4) $\Delta=(AB)$; $d(C;\Delta)=\frac{\left\|\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}=\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{30}}{6}=\frac{2\sqrt{30}}{3}$

Exercice N° 8 : 1) a) $A(0;0;0)$; $B(1;0;0)$; $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$; $K\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $G(1;1;1)$

$\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BK}$

c) $Aire(AGI)=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BK}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$

2) a) $v=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}\right).\overrightarrow{IB}\right|=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{IA}\right|=\frac{1}{6}\left|(-1)\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times(-1)\right|=\frac{1}{6}\left|-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{6}\times1=\frac{1}{6}$

b) $d\left(B;(AGI)\right)=\frac{3v}{Aire}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

Exercice N° 9 : 1) $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\wedge\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=-2\vec{u}\wedge\vec{v}$ Vrai ; car :

$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\wedge\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\underbrace{\vec{u}\wedge\vec{u}}_{0}-\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{v}\wedge\vec{u}-\underbrace{\vec{v}\wedge\vec{v}}_{0}=-\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{v}\wedge\vec{u}=-2\vec{u}\wedge\vec{v}$

2) Si la famille $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ est liée alors $\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)\perp\vec{w}$ Vrai ; car : $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ est liée ;

$\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$; $a\neq0$; $ab\neq0$, $\vec{u}\wedge\vec{v}\perp\vec{u}\Rightarrow\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right).\left(a\vec{u}\right)=0$; $\vec{u}\wedge\vec{v}\perp\vec{v}\Rightarrow\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right).\left(b\vec{v}\right)=0$ donc

$\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right).\left(a\vec{u}+b\vec{v}\right)=0$ donc $\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)\perp\vec{w}$

3) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls ; $\left(\dfrac{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}\right)^2+\left(\dfrac{\vec{u}\,\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}\right)^2=1$ Vrai

$\left(\dfrac{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}\right)^2=\left|\sin\left(\widehat{\vec{u}\vec{v}}\right)\right|^2$; $\left(\dfrac{\vec{u}\,\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}\right)^2=\cos^2\left(\widehat{\vec{u}\vec{v}}\right)$ donc $\left(\dfrac{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}\right)^2+\left(\dfrac{\vec{u}\,\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}\right)^2=1$

4) Faux Si $\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)\wedge\vec{v}=\left(\vec{u}\vec{v}\right)\vec{v}$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires et orthogonaux ; $\left(\vec{u}.\vec{v}\right).\vec{v}=0$ et $\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)\wedge\vec{v}=-\vec{u}$.

Exercice n°10 : 1°/On muni l'espace E d'un repère orthonormé R et on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. On sait $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$. Donc $\left|\vec{u}.\vec{v}\right|\le\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ *car* $\left|\cos\left(\vec{u}.\vec{v}\right)\right|\le 1$

Alors $|xa+yb+zc|\le\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ Par suite $(xa+yb+zc)^2\le(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$.

2°/ On muni l'espace E d'un repère orthonormé direct R et on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Comme $\dfrac{x}{a}\ne\dfrac{y}{b}$ donc $xb-ya\ne 0$ par suite $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires $\Rightarrow\vec{u}\wedge\vec{v}\ne\vec{O}$

$\Rightarrow\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|\le\left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|$ car $\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ et $0<\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right)\le 1$

Or $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}yc-zb\\-(xc-za)\\xb-ya\end{pmatrix}$ par suite $(yc-zb)^2+(xc-za)^2+(xb-ya)^2\le(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$.

Exercice N° 11: 1) a) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-8\\-2\end{pmatrix}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-8-0\\-6-2\\0+24\end{pmatrix}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-8\\-8\\24\end{pmatrix}$

b) $P=(ABC)$; P est de vecteur normal $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et passant par $A(-1;2;1)$.

$P:-8x-8y+24z+c=0$;

$P:-x-y+3z+c'=0$; $A(-1;2;1)\in P\Leftrightarrow 1-2+3+c'=0\Leftrightarrow c'=-2\Leftrightarrow P:-x-y-3z+2=0\Rightarrow P:x+y-3z+2=$

2) $Q:x+y-3z+2=0$ *et* $Q'=\left(O;\vec{i};\vec{k}\right)$.a) $\overrightarrow{n_Q}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_{Q'}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\vec{j}$ Donc Q et Q' ne sont pas parallèles et par suite Q et Q' sont sécants.

b) $M(x;y;z)\in Q\cap Q'\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-3z+2=0\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3z+2=0\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3z-2\\y=0\end{cases}$ on pose $z=\alpha$ on aura :

$\Delta\begin{cases}x=-2+3\alpha\\y=0\\z=\alpha\end{cases}$; $\alpha\in IR$ $\Delta\left(E;\vec{u}\right)$; $E(-2;0;0)$: $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$

Devoir De contrôle N° 1

Exercice N° 1 :Voir Exercice7: chapitre « Notion de Limite»

Exercice N° 2 : $(\overrightarrow{AB}\overset{\wedge}{,}\overrightarrow{AC})=-\dfrac{23\pi}{10}+2k\pi$; $(\overrightarrow{AC}\overset{\wedge}{,}\overrightarrow{AE})=-\dfrac{47\pi}{10}+2k\pi$; $(\overrightarrow{AB}\overset{\wedge}{,}\overrightarrow{AD})=\dfrac{\pi}{5}+2k\pi$

1. $(\overrightarrow{AB}\overset{\wedge}{,}\overrightarrow{AC})=-\dfrac{23\pi}{10}+2k\pi=-\dfrac{3\pi}{10}-2\pi+2k\pi=-\dfrac{3\pi}{10}+2k\pi$ or $-\dfrac{3\pi}{10}\in]-\pi;\pi]$ donc $-\dfrac{3\pi}{10}$ est la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

2. $(\overrightarrow{AC}\overset{\wedge}{,}\overrightarrow{AE})=-\dfrac{47\pi}{10}+2k\pi=-\dfrac{7\pi}{10}-4\pi+2k\pi=-\dfrac{7\pi}{10}+2k\pi$ or $-\dfrac{7\pi}{10}\in]-\pi;\pi]$ donc $-\dfrac{7\pi}{10}$ est la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})$.

3. $(\overrightarrow{AB}\overset{\wedge}{,}\overrightarrow{AE})=(\overrightarrow{AB}\overset{\wedge}{,}\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AC}\overset{\wedge}{,}\overrightarrow{AE})+2k\pi=\dfrac{-3\pi}{10}-\dfrac{7\pi}{10}+2k\pi=-\pi+2k\pi=\pi+2k\pi$ Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires et par la suite A, B et E sont alignés.

4. $(\overrightarrow{AC}\overset{\wedge}{,}\overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AC}\overset{\wedge}{,}\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AB}\overset{\wedge}{,}\overrightarrow{AD})+2k\pi=\dfrac{3\pi}{10}+\dfrac{\pi}{5}+2k\pi=\dfrac{5\pi}{10}+2k\pi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ Donc $(AC)\perp(AD)$

Exercice N° 3 : 1) si $x\in\left]-\infty;2\right[\setminus\{1\}$ $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

$x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x=2$ ou $x=1$

La restriction de f sur $\left]-\infty;2\right[\setminus\{1\}$ est une fonction rationnelle donc est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$ en particulier elle est définie sur $\left]-\infty;2\right[\setminus\{1\}$

si $x\ge 2$, $f(x)=2x+\sqrt{x^2-4}$, $x^2-4=0$, $x=-2$ ou $x=2$

x	−∞		−2		2		+∞
x² - 4		+	0	-	0	+	

La fonction: $x\to x^2-4$ est définie et positive sur $[2,+\infty[$ donc la La fonction : $x\to\sqrt{x^2-4}$ est définie sur $[2,+\infty[$. Conclusion : $D_f=\left]-\infty;2\right[\setminus\{1\}\cup[2\,;+\infty[=IR\setminus\{1\}$

2) $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}2x+\sqrt{x^2-4}=4$; $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+2}{x-1}=4$

On a $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=f(2)=4$ D'où f est continue en 2.

3) $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-4}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+2}{x-1}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+2}{x-1}=-\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

5) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-4}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}=0$

Exercice N°4 : 1) $a\in]0;+\infty[$; $b\in]0;+\infty[$.

$$g(a)-g(b)=2a+\frac{1}{a}-2b-\frac{1}{b}=\frac{2a^2+1}{a}-\frac{2b^2+1}{b}=\frac{b(2a^2+1)-a(2b^2+1)}{ab}$$

$$=\frac{2a^2b-2ab^2-(a-b)}{ab}=\frac{2ab(a-b)-(a-b)}{ab}=\frac{(a-b)(2ab-1)}{ab}$$

2)Variation de g sur $]0;\frac{1}{\sqrt{2}}]$: $a\in]0;\frac{1}{\sqrt{2}}]$ et $b\in]]0;\frac{1}{\sqrt{2}}]$ tel que $a\le b$

On a : $g(a)-g(b)=\frac{(a-b)(2ab-1)}{ab}=\frac{(b-a)(1-2ab)}{ab}$

Donc le signe de g(a)-g(b) dépend du signe de (1-2ab).

On a : $0<a\le\frac{1}{\sqrt{2}}$; $0<b\le\frac{1}{\sqrt{2}}$; $0<ab\le\frac{1}{2}$; $0<2ab\le 1$ Donc : $1-2ab\ge 0$.

Par la suite $g(a)-g(b)\ge 0 \Leftrightarrow g(a)\ge g(b)$ .Donc g est décroissante sur $]0;\frac{1}{\sqrt{2}}]$.

Variation sur $[\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty[$ *:*On a : $a\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$; $b\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Leftrightarrow ab\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2ab\ge 1$ donc

$1-2ab\le 0 \Rightarrow g(a)\le g(b)$ g est croissante sur $[\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty[$.

3)Si $0<x\le\frac{1}{\sqrt{2}}$ et g décroissante sur $g(\frac{1}{\sqrt{2}})$ $\Rightarrow$ $g(x)\ge g(\frac{1}{\sqrt{2}})$

or $g(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ donc $g(x)\ge 2\sqrt{2}$

Si $x\in[\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty[$, on a : $x\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$ et g croissante sur $[\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty[$ Donc $g(x)\ge g(\frac{1}{\sqrt{2}})\Leftrightarrow g(x)\ge 2\sqrt{2}$.

Conclusion : g est minorée par $2\sqrt{2}$ sur $]0;+\infty[$ et puisque $g(\frac{1}{\sqrt{2}})=2\sqrt{2}$ donc $2\sqrt{2}$ est un minimum de g sur $]0;+\infty[$.

Devoir de synthèse N° 1

Exercice N° 1 :1) b) ; 2) c) ; 3) c) ; 4) c)

Exercice N° 2 : On a : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{2x^2-x^3} & si \quad x<1 \\ f(x)=\frac{3x+1}{x+3} & si \quad x\ge 1 \end{cases}$

1. La fonction : $x\to\sqrt{2x^2-x^3}$ est continue à gauche en 1. Donc $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\sqrt{2(1)^2-1^3}=\sqrt{1}=1$.

La fonction : $x\to\frac{3x+1}{x+3}$ est continue à droite en 1.D'où : $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x+1}{x+3}=\frac{3(1)+1}{1+3}=\frac{4}{4}=1$;

et $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$ or $f(1)=1$ Donc f est continue en 1.

2. La fonction: $x\to 2x^2-x^3$ est continue et positive sur $]-\infty;1[$ donc la fonction : $x\to\sqrt{2x^2-x^3}$ est continue sur $]-\infty;1[$.

La restriction de f sur $]1;+\infty[$ est une fonction rationnelle donc elle est continue sur chacun des intervalles où elle est définie donc elle est continue sur chacun des intervalles $]-\infty;-3[$ et $]-3;+\infty[$ en particulier elle est continue sur $[1;+\infty[$, et puisque f est continue en 1 donc f est continue sur R.

3. $g(x)=\frac{f(x)-1}{x-1}$

a. On a : $(x-1)(1+x-x^2)=x+x^2-x^3-1-x+x^2=-x^3+2x^2-1$.

b. On a : $g(x)=\frac{f(x)-1}{x-1}$; $si \quad x<1$, $g(x)=\frac{\sqrt{2x^2-x^3}-1}{x-1}=\frac{-x^3+2x^2-1}{(x-1)(\sqrt{-x^3+2x^2}+1)}$; $si \quad x<1$

$$g(x)=\frac{(x-1)(1+x-x^2)}{(x-1)(\sqrt{-x^3+2x^2}+1)}=\frac{1+x-x^2}{\sqrt{-x^3+2x^2}+1}; \quad si \quad x<1$$

La fonction : $x\to\frac{1+x-x^2}{\sqrt{-x^3+2x^2}+1}$ est continue à gauche en 1.D'où : $\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)=\frac{1+1-1}{\sqrt{-1+2}+1}=\frac{1}{2}$

$$\mathrm{g}(x)=\frac{\mathrm{f}(x)-1}{x-1} \text{ si } x>1 \; g(x)=\frac{\frac{3x+1}{x+3}-1}{x-1}=\frac{3x+1-x-3}{(x-1)(x+3)}=\frac{2x-2}{(x-1)(x+3)}=\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+3)}=\frac{2}{x+3}$$

La fonction : $x\to\frac{2}{x+3}$ est continue à droite en 1.Donc $\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)=\frac{2}{1+3}=\frac{1}{2}$.

c. On a : $\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 1}(x)=\frac{1}{2}$.

Exercice N° 3 :ABC est un triangle rectangle en A ; $AB=3$; $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB})=-\frac{56\pi}{6}+2k\pi$.

1. $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=-(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})+2k\pi=-[(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB})+\pi]+2k\pi=-(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB})-\pi+2k\pi$

$$=\frac{56\pi}{6}-\pi[2\pi]=\frac{50\pi}{6}[2\pi]=\frac{2\pi}{6}+\frac{48\pi}{6}[2\pi]=\frac{\pi}{3}+8\pi+2k\pi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

or $\frac{\pi}{3}\in]-\pi;\pi]$ donc $\frac{\pi}{3}$ est la mesure principale de $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$.

2. $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CF}})=(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}})+(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CF}})+2k\pi=(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}})+(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CF}})+2k\pi$

$=-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+2k\pi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ donc $(BC)\perp(CF)$.

3. On a : $B\hat{A}D=\frac{\pi}{3}$ et $A\hat{B}C=\frac{\pi}{3}$ .Donc $B\hat{A}D$ et $A\hat{B}C$ sont deux angles alternes internes égaux formés par les droites (BC) et (AD) et la sécante (AB) donc $(AD)//(BC)$.

$\cos\hat{B}=\frac{AB}{BC}$ donc $BC=\frac{AB}{\cos\hat{B}}\Leftrightarrow BC=\frac{3}{1/2}\Leftrightarrow BC=6$ D'autre part : $AD=AB=3$; d'où : $BC=2AD$;

donc : $\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{AD}$.

4. $D=\left\{M\in P;(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}})=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right\}$.

a. $(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}})=(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AC}})+(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}})+2k\pi=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+2k\pi=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ Donc $F\in D$.

$M\in(D)\Leftrightarrow(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}})=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\Leftrightarrow(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}})=(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}})+2k\pi$

$\Leftrightarrow(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}})-(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}})=2k\pi\Leftrightarrow(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}})+(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}})=2k\pi\Leftrightarrow(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AF}})=2k\pi$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires et de même sens $\Rightarrow$ (D) est la demi-droite $[AF)\setminus\{A\}$.

Exercice N°4: 1) a) $f(x)=0\Leftrightarrow4\cos^2(x)-\sqrt{3}^2=0\Leftrightarrow(2\cos x-\sqrt{3})(2\cos x+\sqrt{3})=0$

$\Leftrightarrow2\cos x-\sqrt{3}=0$ ou $2\cos x+\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ou $\cos x=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ \text{ou } x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\end{cases},k\in\mathbb{Z}$ ou $\begin{cases}x=\frac{5\pi}{6}+2k'\pi\\ \text{ou } x=-\frac{5\pi}{6}+2k'\pi\end{cases},k'\in\mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$

et $S_{[0,\pi]}=\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right\}$.

b)

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$2\cos x-\sqrt{3}$		+	0	-		-	
$2\cos x+\sqrt{3}$		+		+	0	-	
$f(x)$		+	0	-	0	+	

2) a)

$g(x)=f(x)-\sqrt{3}\sin(2x)+2\sin^2(x)=g(x)=4\cos^2(x)-3-\sqrt{3}\sin(2x)+2\sin^2(x)$

$=4(1-\sin^2(x))-3-\sqrt{3}\sin(2x)+2\sin^2(x)=1-2\sin^2(x)-\sqrt{3}\sin(2x)\ =\cos(2x)-\sqrt{3}\sin(2x)$ or

$a\cos(2x)+b\sin(2x)=r\cos(2x-\varphi)$ alors $r=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$ et

$\begin{cases}\cos\varphi=\frac{a}{r}=\frac{1}{2}\\ \text{et }\sin\varphi=\frac{b}{r}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ donc $\varphi=-\frac{\pi}{3}$ et par

suite $g(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$.

b) $\frac{g(x)-1}{f(x)}\le0$. Il faut que $f(x)\ne0$ et comme $x\in[0,\pi]$ alors $x\ne\frac{\pi}{6}$ et $x\ne\frac{5\pi}{6}$.

$g(x)-1=0\Leftrightarrow\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow$

$2x+\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $2x+\frac{5\pi}{6}=\pi-\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\ \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$ ou $x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$ or $x\in[0,\pi]$

il y a deux cas : ⊗si $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow0\le-\frac{\pi}{3}+k\pi\le\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{1}{3}\le k\le\frac{2}{3},k\in\mathbb{Z}$ donc $k=1\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}$

⊗si $x=k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow0\le k\pi\le\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow0\le k\le1,k\in\mathbb{Z}$ donc $k=0$ ou $k=1\Rightarrow x=0$ ou $x=\pi$

donc $x\in\left\{\frac{2\pi}{3},0,\pi\right\}$.

$\boxed{S_{[0,\pi]}=\left[0,\frac{\pi}{6}\right[\cup\left[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right[}$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$g(x)-1$	0	-		-	0	+		+	0
$f(x)$		+	0	-		-	0	+	
$\frac{g(x)-1}{f(x)}$	0	+	‖	+	0	-	‖	+	0

3) a)

$\cos x.f(x)=\cos x(4\cos^2(x)-3)=4\cos^3(x)-3\cos$ et

$\cos3x=\cos(2x+x)=\cos2x\cos x-\sin2xinx=(2\cos^2(x)-1)\cos x-(2\sin x\cos x)\sin x$

$=2\cos^3(x)-\cos x-2(1-2\cos^2(x))\cos x=4\cos^3(x)-3\cos x$ donc $\boxed{\cos3x=\cos x.f(x)}$

b) $A=4\cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right)-3\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)=\cos\left(3\times\frac{\pi}{9}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow\boxed{A=\frac{1}{2}}$

Exercice N°5: 1)a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

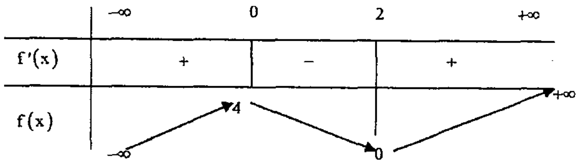
b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}$ *est la pente de la tangente au point d'abscisse 1 donc* $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\frac{2-4}{1-0}=-2$

$\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}$ *est la pente de la tangente au point d'abscisse 2 donc* $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=0$

c)d) $\begin{cases}f(x)=m\\ 0\langle x\langle2\end{cases}$

Si $m\in\left]0,4\right[$ l'équation admet une seule solution

Si $m\in\left]-\infty,0\right]$ *ou* $m\in\left]4,+\infty\right[$ l'équation n'admet pas de solution



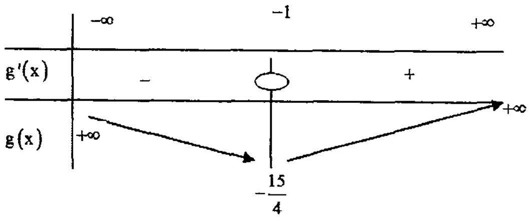
2) $f(x)=ax^3+bx^2+c$

On a $f(0)=4$ *donc* $c=4$, aussi on a $f(2)=8a+4b+4=0$ *et* $f(1)=a+b+4=2$ donc il suffit de résoudre le système suivant $\begin{cases}a+b+4=2\\2a+b+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-3\end{cases}$

3) $g(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+4x-1$,

a) g est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $g'(x)=x^3-3x^2+4=f(x)$

b)



Devoir de contrôle N°2

Exercice n°1 : 1) $f'(-2)=2$ et $f'(-1)=0$. 2)a/ -i- et –ii- b/ $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)+1}{x-1}=-4$ c/ $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)+1}{x-1}=0$.

3) a- g est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g'(x)=2ax+b$.

b) L'équation de la tangente à ζ_f au point d'abscisse 0 est : $y=2x+1$ donc $g'(0)=2$ et $g(0)=1$ alors $b=2$ et $c=1$. D'autre part $g'(-1)=f'(-1)=0$ alors $-2a+2=0$ donc $a=1$. Ainsi : $a=1$, $b=2$ et $c=1$.

4) a) $x\mapsto x^2+x$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ donc h est continue sur $\mathbb{R}_+$. $x\mapsto\frac{x}{x-1}$ est rationnelle définie pour $x\neq1$ continue sur $\left]-\infty,0\right[$. $\lim\limits_{0^+}h=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x^2+x}=0=h(0)$. $\lim\limits_{0^-}h=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x}{x-1}=0=h(0)$ donc h est continue en 0 et par suite h est continue sur $\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x-1}=-1$ alors h est dérivable à gauche en 0 et $h'_g(0)=-1$.

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}=+\infty$ alors h n'est pas dérivable à droite en 0. ζ_h admet au point O deux demi tangentes : $T_g\begin{cases}y=-x\\x\leq0\end{cases}$ et $T_d\begin{cases}x=0\\y\geq0\end{cases}$.

c) $x\mapsto x^2+x$ est dérivable et strictement positive sur $\left]0,+\infty\right[$ et pour $x>0$, $h'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

$x\mapsto\frac{x}{x-1}$ est dérivable sur $\left]-\infty,0\right[$ et pour $x<0$, $h'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$.

Exercice n°2 : $f(x)=\cos2x-\sin2x+1$

1) a) $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}+1=\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}+1=1$

b) $f(x)=\cos2x-\sin2x+1=2\cos^2-1-2\sin x\cos x+1=2\cos x(\cos x-\sin x)$

$\cos x-\sin x=\sqrt2\left(\frac{\sqrt2}{2}\cos x-\frac{\sqrt2}{2}\sin x\right)=\sqrt2\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)=\sqrt2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

D'où $f(x)=2\sqrt2\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

c) $f(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=0\\\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\end{cases}$ signifie que $\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\\x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\text{ ou }x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$ signific que

$\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\quad;\quad k\in\mathbb{Z}\\x=\frac{\pi}{4}+2k'\pi\text{ ou }x=-\frac{\pi}{4}+2k'\pi;k'\in\mathbb{Z}\end{cases}$ Donc $S_{\mathbb{Z}}=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+2k'\pi;-\frac{3\pi}{4}+2k'\pi;k'\in\mathbb{Z}\right\}$

Dans $[0;\pi]$; $0<\frac{\pi}{2}+k\pi<\pi$ signifie que $0<\frac{1}{2}+k<1$ signifie que $-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$ donc $k=0$ signifie que $x=\frac{\pi}{2}$

$0<\frac{\pi}{4}+2k'\pi<\pi \Leftrightarrow 0<\frac{1}{4}+2k'<1$ signifie $-\frac{3}{2}<2k'<\frac{1}{2}$ signifie $-\frac{1}{4}<k'<\frac{1}{4}$ donc $k'=0$ signifie que $x=\frac{\pi}{4}$

$0<-\frac{3\pi}{4}+2k'\pi<\pi \Leftrightarrow 0<-\frac{3}{4}+2k'<1 \Leftrightarrow \frac{3}{4}<2k'<\frac{7}{4}$ signifie $\frac{3}{8}<k'<\frac{7}{8}$ donc $k'=0$ signifie que

$x=-\frac{3\pi}{4}\notin[0;\pi]$. Donc $S_{[0;\pi]}=\left\{;\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right\}$

2) $g:[0;\pi]\to \mathrm{IR}$ $\quad x\mapsto \frac{-1+\sin 2x}{f(x)}$ a) $g(x)=\frac{-1+\sin 2x}{2\sqrt{2}\cos x.\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$; $D_g=[0;\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right\}$

b) $g(x)=\frac{-1+\sin 2x}{\cos 2x-\sin 2x+1}=\frac{-1+2\sin x\cos x}{2\cos^2 x-2\sin x\cos x}=\frac{-\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{2\sin x}{\cos x}}{2-2\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{2\tan x-\frac{1}{\cos^2 x}}{2(1-\tan x)}$

$=\frac{2\tan x-1-\tan^2 x}{2(1-\tan x)}=\frac{-\tan^2 x+2\tan x-1}{2(1-\tan x)}=\frac{-(\tan x-1)^2}{2(1-\tan x)}=\frac{\tan x-1}{2}$

c) $g\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{-1+\sin\frac{\pi}{4}}{1}=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-2}{2}$ On a aussi $g\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{8}-1}{2}\Leftrightarrow \tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-2+1=\sqrt{2}-1$

d) $\sin 2x+(1-\sqrt{2})\cos 2x=1$ signifie que $2\sin x\cos x+(1-\sqrt{2})(2\cos^2 x-1)=1$ signifie que

$\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}+(1-\sqrt{2})\frac{2\cos^2 x-1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$ signifie que $2\tan x+(1-\sqrt{2})\left(2-\frac{1}{\cos^2 x}\right)=\frac{1}{\cos^2 x}$ signifie que

$2\tan x+(1-\sqrt{2})(1-\tan^2 x)=1+\tan^2 x$ signific que $2\tan x-(1-\sqrt{2})\tan^2 x+1-\sqrt{2}-1-\tan^2 x=0$ signifie que

$2\tan x-\tan^2 x+\sqrt{2}\tan^2 x-\tan^2 x-\sqrt{2}=0$ signifie que $(\sqrt{2}-2)\tan^2 x+2\tan x-\sqrt{2}=0$;

$(\sqrt{2}-2)X^2+2X-\sqrt{2}=0$; $\Delta=4-4\sqrt{2}(\sqrt{2}-2)=12-8\sqrt{2}=2(1-\sqrt{2})$;

$X_1=\frac{-2-2+2\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-2)}=\frac{-4+2\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-2)}=\frac{2(\sqrt{2}-2)}{2(\sqrt{2}-2)}=1$; $X_2=\frac{-2+2-2\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-2)}=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}$

<u>Exercice N° 3 :</u> $f(x)=\frac{5-x^2}{x-3}$; $D_f=\mathrm{IR}\setminus\{3\}$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}-\frac{4}{0^+}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}-\frac{4}{0^-}=+\infty$

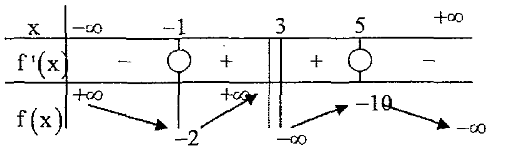
2) a) f est une fonction rationnelle donc dérivable sur $\mathrm{IR}\setminus\{3\}$ et $\forall x\neq 3$, on a :

$f'(x)=\frac{-2x(x-3)-1(5-x^2)}{(x-3)^2}=\frac{-2x^2+6x-5+x^2}{(x-3)^2}=\frac{-x^2+6x-5}{(x-3)^2}$

---

b) $f'(x)=0$ signifie que $-x^2+6x-5=0$; $a+b+c=-1+6-5=0$ donc $x'=1$ et $x''=5$

c) -2 est un minimum local et -10 est un maximum local.



3) a) $T:y=f'(0)x+f(0)=-\frac{5}{9}x+\left(-\frac{5}{3}\right)$

$=-\frac{5}{9}x-\frac{5}{3}$

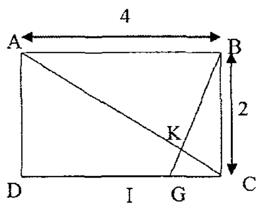
b) $\Delta:y=-\frac{5}{9}x$;

$f'(x_0)=-\frac{5}{9}\Leftrightarrow\frac{-x_0{}^2+6x_0-5}{(x_0-3)^2}=-\frac{5}{9}\Leftrightarrow 9x_0{}^2-54x_0+45=5(x_0{}^2-6x_0+9)$

$\Leftrightarrow -9x_0{}^2+54x_0-45=5x_0{}^2-30x_0+45\Leftrightarrow 14x_0{}^2-84x_0+90=0\Leftrightarrow 7x_0{}^2-42x_0+45=0$;

$\Delta'=21^2-7\times45=441-315=126$; $x_0'=\frac{-21-\sqrt{126}}{7}$ et $x_0''=\frac{-21+\sqrt{126}}{7}$

<u>Exercice N°4 :</u> $AB=4;BC=2$; $I=D*C$; $3\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$; $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$



1) a) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CB^2=2^2=4$; $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CG}=CA.CG.\cos O=4\times1=4$
donc $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CG}=4$
b) $\underbrace{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}_{4}=\overrightarrow{CA}\left(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GB}\right)=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{GB}$ donc $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{GB}=0$

signifie que $(CA)\perp(GB)$

2) a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$ car $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}=AB.DG.\cos 0=4\times3=12$;
$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}=BC.AD.\cos 0=2\times2=4$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DG}=0$ car $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{DG}$
b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DG}=12$
$\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AG}\right)=12$ signifie que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AG}=12-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AG}=12+DA^2=12+4=16$

c) On a $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AG}=AC.AK=16$; $AC=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$ d'où $AK=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

3) a) $3MC^2+MD^2=3\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}\right)^2=4MG^2+\overrightarrow{MG}\left(\underbrace{3\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}}_{\vec{0}}\right)+3GC^2+GD^2$

$=4MG^2+3+9=4MG^2+12$
b) $3MC^2+MD^2=16$ signifie que $4MG^2=4$ signifie que $MG=1$ donc ξ est le cercle de centre G et de rayon 1.
4) $\Delta=\{M\in P \text{ tel que } MD^2-MC^2=16\}$.a) $CD^2=16$ donc $CD^2-CC^2=16$ d'où $C\in\Delta$

b) $MD^2-MC^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2=2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{ID}-\overrightarrow{IC}\right)+ID^2-IC^2$ $=2\overrightarrow{MI}.2\overrightarrow{CI}=4\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{CI}=16$ signifie

que $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{CI}=4$ Soit H le projeté orthogonal de M sur (CI) donc $HI=\frac{4}{CI}=2$ d'où H est confondu avec C et

par suite Δ est la droite (BC).

Devoir de synthèse n2

Exercice N°*1* ::1) b) ; 2) c) ; 3) c) ;
4) c)

Exercice n°2 : 1)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-4}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$, $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=0$

f est dérivable en 0 et f(0)=4 > 0 alors $x\to\sqrt{f(x)}$ est dérivable en 0 et $\left(\sqrt{f}\right)'(0)=\frac{f'(0)}{2\sqrt{f(0)}}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{f(x)}-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(0)}}{x-0}=\frac{f'(0)}{2\sqrt{f(0)}}=\frac{0}{2\times2}=0$$

4) $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow0<\cos^2(\theta)\le1\Rightarrow1\le\frac{1}{\cos^2(\theta)}$

0 est un minimum de f sur $[1,+\infty[$, il est atteint en 2 , $f\left(\frac{1}{\cos^2(\theta)}\right)$ est minimale si et seulement si

$$\frac{1}{\cos^2(\theta)}=2\Leftrightarrow\cos^2(\theta)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos(\theta)=\frac{1}{\sqrt2}\text{ ou }\cos(\theta)=-\frac{1}{\sqrt2}\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{4}\text{ ou }\theta=-\frac{\pi}{4}$$

5) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$,
on a : $g'(x)=2f'(x)f(x)$. $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=0\text{ ou }f(x)=0\Leftrightarrow x=-1\text{ ou }x=0\text{ ou }x=2$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	16	↘	0	↗	$+\infty$

Exercice3 : 1)a) f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ (fonction rationnelle) et on a $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x-2)-(ax^2+bx+2)}{(x-2)^2}=\frac{2ax^2-4ax+bx-2b-ax^2-bx-2}{(x-2)^2}=\frac{ax^2-4ax-2b-2}{(x-2)^2}.$$

b) $\begin{cases}f'(4)=0\text{ or } f'(4)=\frac{16a-16a-2b-2}{(4-2)^2}=\frac{-b-1}{2}\\ f(4)=7\text{ or } f(4)=\frac{16a+4b+2}{4-2}=8a+2b+1=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{-b-1}{2}=0\Rightarrow\boxed{b=-1}\\ 8a+2b+1=7\Rightarrow\boxed{a=1}\end{cases}$

2)a) $f(x)=\frac{x^2-x+2}{x-2}$; $f'(x)=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
f(x)		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f(x)	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	7	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{x\mapsto-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}x=-\infty$; $f(0)=1$; $f(4)=7$, $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}x=+\infty$

b) f admet un maximum relatif en 0 égal à -1 et un minimum relatif en 4 égal à 7

3) T_g // $D: y=-3x+5$; $f'(a)=-3$

$\frac{a^2-4a}{(a-2)^2}=-3\Rightarrow-3(a^2-4a+4)=a^2-4a\Rightarrow4a^2-16a+12=0$; $a=1$; $a=3$

$T_1: y=f'(1)(x-1)+f(1)$; $f'(1)=-3$; $f(1)=-2\Rightarrow T_1: y=-3(x-1)-2\Rightarrow\boxed{T_1: y=-3x+1}$

$T_3: y=f'(3)(x-3)+f(3)$; $f'(3)=-3$; $f(3)=8\Rightarrow T_3: y=-3(x-3)+8\Rightarrow\boxed{T_3: y=-3x+17}$

4)a) $\lim\limits_{x\mapsto4^+}g(x)=\lim\limits_{x\mapsto4^+}f(x)=7$; $\lim\limits_{x\mapsto4^-}g(x)=\lim\limits_{x\mapsto4^-}\sqrt{4-x}+2x-1=7$; $\lim\limits_{x\mapsto4^+}g(x)=\lim\limits_{x\mapsto4^-}g(x)=7$ donc g est contenue en 4

b) $\lim\limits_{x\mapsto4^+}\frac{g(x)-g(4)}{x-4}=\lim\limits_{x\mapsto4^+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)=0$ donc g est dérivable à droite en 4 et on a $g_d'(4)=0$

$$\lim_{x\mapsto4^-}\frac{g(x)-g(4)}{x-4}=\lim_{x\mapsto4^-}\frac{\sqrt{4-x}+2x-1-7}{x-4}=\lim_{x\mapsto4^-}\frac{\sqrt{4-x}}{-(4-x)}+\frac{2(x-4)}{x-4}=\lim_{x\mapsto4^-}\frac{\sqrt{4-x}}{-\sqrt{4-x}\sqrt{4-x}}+2$$

$=\lim\limits_{x\mapsto4^-}\frac{1}{-\sqrt{4-x}}+2=-\infty$ donc g n'est pas dérivable à gauche en 4

c)i) $\boxed{\text{Faux}}$ car g n'est pas dérivable à gauche en 4 ; ii) $\boxed{\text{Vrai}}$ car $g'_d(4)=0$

iii) $\boxed{\text{Faux}}$ car $\lim\limits_{x\mapsto4^-}\frac{g(x)-g(4)}{x-4}=-\infty$ ζ_g admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut

Exercice 4V : I)1) $Z_B=1+i\sqrt3=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt3}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$,

$Z_C=\overline{Z_B}=2(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})=2(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3}))$

2)

$$Z_B^{\,2008}=2^{2008}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{2008}=2^{2008}\left(\cos2008\frac{\pi}{3}+i\sin2008\frac{\pi}{3}\right)=2^{2008}\left(\cos\left(669\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(669\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$=2^{2008}\left(-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{2^{2008}}{2}-i\frac{2^{2008}\sqrt3}{2}=-\left(2^{2007}+i2^{2007}\sqrt3\right)$$

3) OB=$\left|1+i\sqrt3\right|$=2 ; OC=$\left|1-i\sqrt3\right|$=2 ; $(Z_B-Z_O)+(Z_C-Z_O)=2\Leftrightarrow\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{OA}\Leftrightarrow$ OABC est un parallélogramme et comme OB=OC donc OBAC est un losange

5) $M\in\zeta\Leftrightarrow|z-2|=|z|\Leftrightarrow AM=OM\Leftrightarrow\zeta$ est la médiatrice du $[OA]$.

II)1) a) $Z=Z'\Leftrightarrow Z(Z-2)=-4\Leftrightarrow Z^2-2Z+4=0\Leftrightarrow(Z-1)^2-1+4=0\Leftrightarrow(Z-1)^2+3=0$

b) $(Z-1)^2+3=0 \Leftrightarrow (Z-1)^2=(i\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow Z-1=i\sqrt{3}$ *ou* $Z-1=-i\sqrt{3} \Leftrightarrow Z=1+i\sqrt{3}$ *ou* $Z=1-i\sqrt{3}$.

c) Si on remplace Z par $1+i\sqrt{3}$ *ou* $1-i\sqrt{3}$, on trouve Z' = Z donc les points associe à B et C sont respectivement B et C.

2) a) $|Z'-2|=\left|\frac{-4}{Z-2}-2\right|=\left|\frac{-4-2Z+4}{Z-2}\right|=\frac{2|Z|}{|Z-2|}$

b) $M\in \zeta \Leftrightarrow |Z-2|=|Z|$ donc $|Z'-2|=2 \Leftrightarrow AM'=2 \Leftrightarrow \delta$ est le cercle de centre A et de rayon 2.

c) On a : $Z_D=\frac{Z_B^2}{Z_C}$ $|Z_D|=\left|\frac{Z_B^2}{Z_C}\right|=|Z_B|=|Z_C| \Rightarrow OD=OB=OC$ *d'ou B, D et C* appartiennent a un cercle de centre O

d) $CD=|Z_D-Z_C|=\left|\frac{Z_B^2}{Z_C}-Z_C\right|=\left|\frac{Z_B^2-Z_c^2}{Z_C}\right|=\frac{|Z_B-Z_C||Z_B+Z_C|}{|Z_C|}=\frac{BC\times 2}{2}=BC$ donc CD = BC.

Exercice N°5 :1) f est dérivable sur IR et $\forall x\in$ IR On a :

$f'(x)=6x^2-6=6(x^2-1)$; $f'(x)=0$ signifie que

$x=1$ ou $x=-1$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $f(1)=0$ et $f(-1)=8$

2) On a : si $x\in$ IR ; $2\times0-x=-x\in$ IR ;

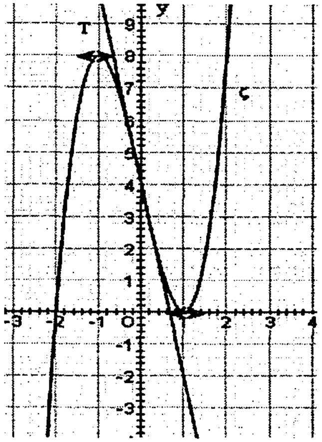
$f(2\times0-x)=f(-x)=2(-x)^3+6x+4$

$=-2x^3-6x+4+4-4=-(2x^3-6x+4)+8=2\times4-f(x)$

D'où $I(0;4)$ est un centre de symétrie à ξ_f

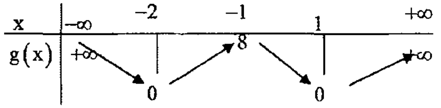
3) $T: y=f'(0)x+f(0)=-6x+4$

4) $f(x)=y=2x^3-6x+4+6x-4=2x^3$ .5) Voir courbe



6) $x^3-3=\frac{m-4}{2x}$ signifie que $2x^2-6x+4=m$

- Si $m\in\,]0;8[$; l'équation admet 3 solutions.
- Si $m\in\,]8;+\infty[$; l'équation admet 1 solution.
- Si $m\in\,]-\infty;0[$; l'équation admet 1 solution.
- Si $m=8$; l'équation admet 2 solutions.
- Si $m=0$; l'équation admet 2 solutions.



7) β et $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $\alpha<\beta$ alors $\cos(\alpha)>\cos(\beta)$ car

$x\mapsto \cos x$ est décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; $\cos(\alpha)$ et $\cos(\beta)$ sont deux éléments $[0;1]$ et f est décroissante sur $[0;1]$ donc $f(\cos(\alpha))<f(\cos(\beta))$.

8) $g(x)=|2x+4|(x-1)^2$ .a) $g(x)=|f(x)|$; Soit ζ_1 la partie de ζ_f située au-dessus de $(O;\vec{i})$ et ζ_2 la partie de ζ_f située au-dessous de $(O;\vec{i})$ donc $\zeta_g=\zeta_1\cup S_{(O;\vec{i})}(\zeta_2)$

Devoir de contrôle n°3

Exercice 1 :A) a) $N_1=C_5^3+C_3^3=11$ b) $N_2=C_2^1\times C_8^2=56$ c) $N_3=C_4^1\times C_2^1\times C_1^1+C_3^2\times C_2^1=8+6=14$

d) $N_4=C_{10}^3-C_6^3=100$

B) 1)a) $(k+1)!-k!=(k+1)k!-k!=k!(k+1-1)=k!k$

b) On a $1(1!)=2!-1!$

$2(2!)=3!-2!$

$3(3!)=4!-3!$

.... En faisant la somme on obtient : $1(1!)+2(2!)+....+n(n!)=(n+1)!-1$

....

$n(n!)=(n+1)!-n!$

2) $\frac{1(1!)+2(2!)+....+n(n!)}{(n-1)!}=12 \Leftrightarrow \frac{1+(n+1)!-1}{(n-1)!}$

$\Leftrightarrow n(n+1)=12 \Leftrightarrow n^2+n-12=0$

$\Delta=1+48=49$, $n=-4\notin \mathbb{N}$ ou $n=3\in\mathbb{N}$, $S_N=\{3\}$

Exercice2 : $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x+1}$ 1) $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$; $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$ D'autre part $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2+x}\right]=a \Leftrightarrow \boxed{a=1}$

b) $\lim_{x\to(-1)}(x+1)f(x)=\lim_{x\to(-1)}(x^2-2x+1)=4$ D'autre part

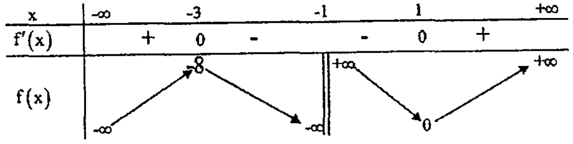
$\lim_{x\to(-1)}(x+1)f(x)=\lim_{x\to(-1)}(x+1)(ax+b)+c=c \Leftrightarrow \boxed{c=4}$

c) $f(0)=1$ d'autre part $f(0)=b+c \Leftrightarrow b+c=1 \Leftrightarrow b=1-c \Leftrightarrow \boxed{b=-3}$

2)a) $f(x)=x-3+\frac{4}{x+1}$ On a : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-3)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x+1}=0$ donc la droite $\Delta: y=x-3$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de$(+\infty)$, de même au voisinage de$(-\infty)$.

x	−∞		−1		+∞
$f(x)-(x-3)$		-	‖	+	
Position de ζ_f % à Δ		ζ_f est au dessous de Δ	‖	ζ_f est au dessous de Δ	



b

$f(x)-(x-3)=\frac{4}{x+1}$; $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

3) f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$ et on a : $f'(x)=1-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}$

$$= \frac{(x+1-)(x+1+2)}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}$$,

$f'(x)=0 \Rightarrow x=1$ ou $x=-3$

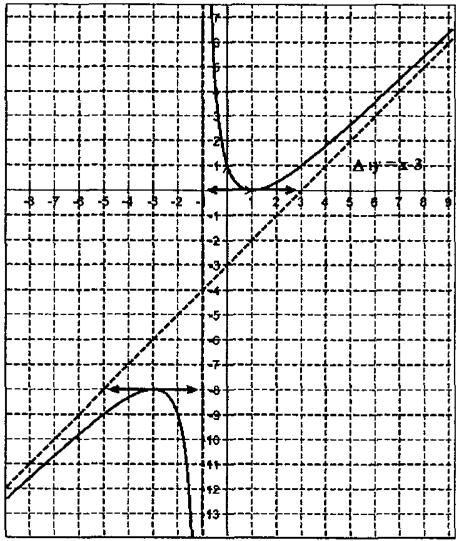
5) $h(x)=\dfrac{f(x)-|f(x)|}{2}$

⊗ si $f(x)\geq 0 \Rightarrow \begin{cases} |f(x)|=f(x) \\ \text{et } x\in\left]-1,+\infty\right[\end{cases}$

$\Rightarrow h(x)=0, \forall x\in\left]-1,+\infty\right[$ donc ζ_h est la demi-droite d'équation : $\begin{cases} y=0 \\ \text{et } x\geq -1 \end{cases}$.

⊗ si $f(x)<0 \Rightarrow \begin{cases} |f(x)|=-f(x) \\ \text{et } x\in\left]-\infty,-1\right[\end{cases}$

$\Rightarrow h(x)=f(x), \forall x\in\left]-\infty,-1\right[$ donc $\zeta_h=\zeta_f\ \forall x\in\left]-\infty;-1\right[$.



Exercice3 : $f(x)=\sin(2x)$

1) f est périodique de période $T=\dfrac{2\pi}{|a|}=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

2)a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0,\pi]$ et on a : $f'(x)=2\cos 2x$

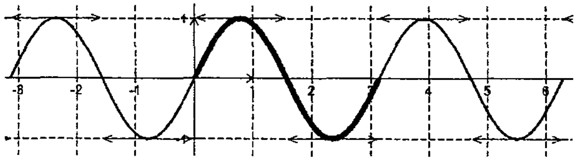
$f'(x)=0 \Leftrightarrow \cos 2x=0$

$\Leftrightarrow 2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}; k\in\mathbb{Z}$ ou $x\in[0,\pi]$

$\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}$ ou $x=\dfrac{3\pi}{4}$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	0	↗	1	↘	-1	↗	0



b) Soit $M(x,y)\in C_f\cap(O,\vec{i}) \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow \sin 2x=0 \Leftrightarrow 2x=k\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{2}$ or $x\in[0,\pi]$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\dfrac{\pi}{2}$ ou $x=\pi$ $\quad C_f\cap(O,\vec{i})=\left\{O(0,0);(\frac{\pi}{2},0);(\pi,0)\right\}$

Soit $A(4,4)\in C_f\cap(O,\vec{j}) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=f(0)=0 \end{cases} \Rightarrow C_f\cap(O,\vec{j})=\{O(0,0)\}$

3) * si $m\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\Rightarrow$ il n'y a pas de solutions

* si $m=-1$ ou $m=1 \Rightarrow 2$ solutions

*si $-1<m<1 \Rightarrow 4$ solutions

4)) ⊗ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\tan(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x}}{\frac{\tan(x)}{x}}$ or $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1$ et

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\text{ avec } g(x)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\text{donc}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x}=g'(0)=2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-1 \text{ alors } \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\tan(x)}=-1}.$$

$$⊗⊗\ \lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\frac{2f(x)+1}{x+\frac{\pi}{12}}=2\times\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\frac{f(x)+\frac{1}{2}}{x+\frac{\pi}{12}}=2\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\frac{f(x)-f\left(-\frac{\pi}{12}\right)}{x-\left(-\frac{\pi}{12}\right)}=2\times f'\left(-\frac{\pi}{12}\right)=2\times 2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}$$

Exercice 4 :

A) 1- C 2- C 3-A 4-B 5-B

***B)*I)**1) Faux 2) Vrai 3) Faux

II) 1) Faux 2) Faux 3) Faux 4) Faux 5) Faux

Devoir de synthèse n3 exempele1

Exercice n°1 :

1) a) $\bar{X}=\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}X_i=13;\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ où $V(X)=\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}x_i^2-\bar{X}^2=40$ alors $\sigma(X)=\sqrt{40}\approx 6,32$

b) $\bar{Y}=\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}Y_i=4;\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}$ où $V(Y)=\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}Y_i^2-\bar{Y}^2\approx 0,08$ alors $\sigma(Y)\approx 0,28$

2) $G(\bar{X},\bar{Y})\Leftrightarrow G(13,4)$

3) a) $G_1(\bar{X}_1,\bar{Y}_1);\bar{X}_1=\frac{4+6+9}{3}\approx 6,33$ et $\bar{Y}_1=\frac{3,7+3,75+3,8}{3}=3,75\Rightarrow G_1(6,33,3,75)$

$G_2(\bar{X}_2,\bar{Y}_2);\bar{X}_1=\frac{14+17+19+22}{4}=18$ et $\bar{Y}_2=\frac{3,9+4+4,35+4,5}{4}\approx 4,19\Rightarrow G_1(18,4,19)$

b- $Y=aX+b$ avec $a=\dfrac{\bar{Y}_2-\bar{Y}_1}{\bar{X}_2-\bar{X}_1}\approx 0,04; b=\bar{Y}_1-0,04\bar{X}_1\approx 3,5\Rightarrow Y=0,04X+3,5$.

1444) On prend $X=30\Rightarrow Y=0,04\times 30+3,5=4,7kg$.

Exercice 2 : 1)a) $f(0)=-\frac{3}{2}$

b)* $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty} a+\underbrace{\boxed{\frac{b}{x}}}_{\to0}+\underbrace{\boxed{\frac{c}{x(x-2)}}}_{\to0}\Rightarrow a=-1$ * $\lim\limits_{x\mapsto2}(x-2)f(x)=\lim\limits_{x\mapsto2}\underbrace{(x-2)(ax+b)}_{\to0}+c=c\Rightarrow c=3$

*$f(0)=b-\frac{c}{2}$ d'où le système : $\begin{cases}b-\frac{c}{2}=-\frac{3}{2}\\a=-1\\c=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=0\\c=3\end{cases}$

2) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$; $\forall x\in D_f$ on a : $x\neq2\Leftrightarrow-x\neq-2\Leftrightarrow4-x\neq2\Leftrightarrow(4-x)\in D_f$

Montrons que $f(4-x)+f(x)=-4$ On a : $f(x)=-x+\frac{3}{x-2}$

$f(4-x)+f(x)=-4+\cancel{x}+\frac{\cancel{3}}{\cancel{2-x}}+(\cancel{-x})+\frac{\cancel{3}}{\cancel{x-2}}=-4$ Donc $I(2,-2)$ est un centre de symétrie pour ζ_f

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)-y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\cancel{-x}+\frac{3}{x-2}+\cancel{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x-2}=0$ Donc $\Delta:y=-x$ est un asymptote oblique à (ζ_f)

4) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$$f'(x)=\frac{(-2x+2)(x-2)-(-x^2+2x+3)}{(x-2)^2}=\frac{-2x^2+4x+\cancel{2x}-4+x^2-\cancel{2x}-3}{(x-2)^2}=\frac{-x^2+4x-7}{(x-2)^2}$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow-x^2+4x-7=0$, $\Delta=b^2-4ac=16-28=-12<0$

Pas de racine donc $f'(x)$ prend le signe de $a=-1<0\Rightarrow f'(x)<0$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	‖	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{\overbrace{-x^2+2x+3}^{\to3}}{\underbrace{x-2}_{\to0^-}}=\frac{3}{0^-}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\frac{3}{0^+}=+\infty$

5)

x	0	1	2	3	4
f(x)	$-\frac{3}{2}$	-4	▨	0	$-\frac{5}{2}$

x	0	1
y	0	-1

6)a) $Dg=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$

$\forall x\in Dg: x\neq2$ et $x\neq-2\Leftrightarrow-x\neq-2$ et $-x\neq2)\Leftrightarrow-x\in Dg$ et $g(-x)=-|-x|+\frac{3}{|-x|-2}$

$\Leftrightarrow g(-x)=-|x|+\frac{3}{|x|-2}=g(x)$ donc g est paire alors $(O,\vec{j})$ est un axe de symétrie pour (ζ_g) de plus si $x\geq0$ alors $g(x)=-x+\frac{3}{x-2}=f(x)\Rightarrow\zeta_g=\zeta_f$ d'où la construction de (ζ_g) (voir figure)

7) $M(x,y)\in(\zeta_f)\cap D_k\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{-x^2+2x+3}{x-2}\\y=k\end{cases}\Leftrightarrow\frac{-x^2+2x+3}{x-2}=k\Leftrightarrow-x^2+2x+3=kx-2k$

$\Leftrightarrow\boxed{-x^2+(2-k)x+3+2k=0}$: (E) $\begin{cases}a=-1\\b=2-k\\c=3+2k\end{cases}\Rightarrow\Delta_x=(2-k)^2+4(3+2k)=k^2+4k+16$

$\begin{cases}a'=1\\b'=4\\c'=16\end{cases}\Rightarrow\Delta_k=16-64=-84<0$ Donc

Δ_x prend le signe de $a'=1>0\Rightarrow\Delta_k>0$

Donc (E) admet deux racines x' et x'' alors

$\zeta_f\cap D_k=\{M'(x',y');M''(x'',y'')\}$

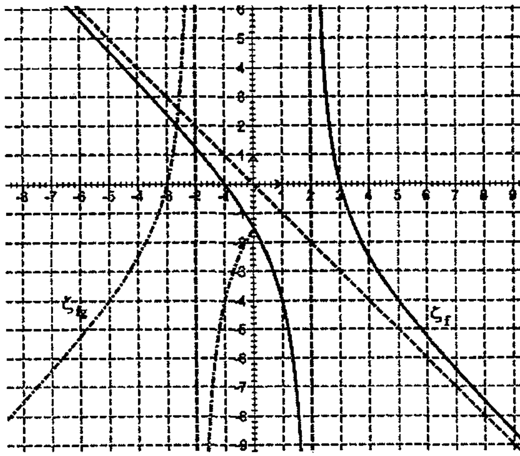
On pose

$I(x,y)$ on a $\begin{cases}x=\frac{x'+x''}{2}=\frac{s}{2}=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)}{2}=\frac{2-k}{2}\\y=\frac{y'+y''}{2}=\frac{k+k}{2}=k\end{cases}$

$\Leftrightarrow y=\frac{2-x}{2}$

donc l'ensemble des points I est la droite

$D:y=-\frac{1}{2}x+1$



Exercice 3 : 1) $card(\Omega)=C_{12}^4=495$ $card\,A=C_4^2C_3^1C_5^1+C_3^2C_4^1C_5^1+C_5^2C_4^1C_3^1=270\Rightarrow P(A)=\frac{270}{495}=\frac{6}{11}$

$card\,B=C_4^4+C_5^4+C_4^2C_5^2=66\Rightarrow P(B)=\frac{66}{495}=\frac{2}{15}$

$card\,C=C_4^4+C_3^3C_9^1=10, P(C)=\frac{1}{495}=\frac{2}{99}$, $card\,D=C_1^1C_3^2C_6^1+C_2^1C_3^1C_6^1=18+90=108$ $P(D)=\frac{108}{495}=\frac{12}{55}$

2) $card\,\Omega=A_{12}^3=12\times11\times10=1320$ $card\,E=3!A_4^1\times A_3^1\times A_5^1=360\Rightarrow P(E)=\frac{360}{1320}=\frac{3}{11}$,

$card\,F=\frac{3!}{2!}A_5^2\times A_3^1=180\Rightarrow P(F)=\frac{180}{1320}=\frac{3}{22}$ Pour $E\cap F$ il ya 3 cas $\begin{cases}B\ \ 0\ \ \ \ \ 1\ \ \ \ \ \ \ 1\\N\ \ 1\text{ ou }1\text{ ou}\ \ \ 0\\R\ \ 1\ \ \ \ \ 0\ \ \ \ \ \ \ 1\end{cases}$

$card\,E\cap F=3!A_1^1\times A_2^1\times A_2^1+3!A_1^1\times A_2^1\times A_1^1+3!A_1^1\times A_1^1\times A_2^1=48\Rightarrow P(E\cap F)=\frac{48}{1320}=\frac{2}{55}$

$P(E\cup F)=P(E')+P(F)-P(E\cap F)=\frac{3}{11}+\frac{3}{22}-\frac{2}{55}$

$E'=\overline{E}\Rightarrow P(E')=P(\overline{E})=1-p(E)=1-\frac{3}{11}=\frac{8}{11}$

Exercice n°4 : 1) a) $(BC)=D_{(B,\overrightarrow{BC})}=\left\{M(x,y,z)\in\xi \text{ tel que : } \overrightarrow{BM}=\alpha\overrightarrow{BC},\alpha\in\mathbb{R}\right\}$. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x_C-x_B\\y_C-y_B\\z_C-z_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\-4\end{pmatrix}$

$\Rightarrow(BC)\begin{cases}x=-1+3\alpha\\y=-1+4\alpha,\alpha\in\mathbb{R}.\\z=2-4\alpha\end{cases}$

b) $\bullet\vec{u}_\Delta\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$, $\frac{0}{3}=0$ et $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{0}{3}\neq\frac{2}{4}\Rightarrow\vec{u}_\Delta$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires donc Δ et (BC) ne sont pas parallèles. • Δ et (BC) sont elles sécantes ?. Posons $M(x,y,z)\in\Delta$ et $(BC)\Rightarrow$

$\begin{cases}1=-1+3\alpha\\-2+2t=-1+4\alpha\\-1+2t=2-4\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{2}{3}\\-2+2t=-1+4\times\frac{2}{3}\\-1+2t=2-4\times\frac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\left.\begin{cases}\alpha=\frac{2}{3}\\t=\frac{11}{6}\\t=\frac{1}{6}\end{cases}\right\}$ ce qui est impossible donc Δ et (BC) ne sont pas sécantes

donc Δ et (BC) ne sont pas coplanaires.

2) a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}3\\4\\-4\end{pmatrix}$. On a $\frac{-2}{3}\neq\frac{-1}{4}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires et par suite les points **A, B et C déterminent un plan.**

b) $(ABC)=\left\{M(x,y,z)\in\xi \text{ tel que : dét}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AM}\right)=0\right\}$. $\text{dét}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AM}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-2&3&x-1\\-1&4&y\\1&-4&z-1\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow(-8z+8+3y+4x-4)-(4x-4+8y+3z+3)=0\Leftrightarrow-5y-5z+5=0\Rightarrow(ABC):y+z-1=0.$

c)Posons

$M(x,y,z)\in\Delta\cap(ABC)\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-2+2t\\z=-1+2t\\y+z-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-2+2t\\z=-1+2t\\-2+2t-1+2t-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\\z=1\\t=1\end{cases}\Rightarrow\Delta\cap(ABC)=\{A(1,0,1)\}$

3) a) $P=P\left(B,\vec{u}_\Delta,\overrightarrow{AB}\right)=\left\{M(x,y,z)\in\xi \text{ tel que : dét}\left(\overrightarrow{AB},\vec{u}_\Delta,\overrightarrow{BM}\right)=0\right\}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-2&0&x+1\\-1&2&y+1\\1&2&z-2\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow(-4z+8+0-2x-2)-(2x+2-4y-4+0)=0\Leftrightarrow-4x+4y-4z+8=0$ donc $P: x-y+z-2=0$

---

b)$\Delta'=P\cap(ABC)\Rightarrow\Delta':\begin{cases}y+z-1=0\\x-y+z-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\Delta':\begin{cases}y=1-z\\x=3-2z\end{cases}$.on pose $z=\alpha$ on obtient $\Delta':\begin{cases}y=1-\alpha\\x=3-2\alpha\end{cases}\alpha\in\mathbb{R}.$

Exercice n°5 : voirEXERCICE17 chapitre «Suites réelles »:

Devoir de synthèse n 3 exempele2 :

Exercice1 : A(1,0,0) ; B(0,0,1) ; C(1,1,1) et D(1,0,1)

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; a) $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=-1$

b) $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\neq0$ donc les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires

2)a) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ .b) $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est vecteur normal du plan (ABC)

Soit $M(x,y,z)\in(ABC)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0\Leftrightarrow-(x-1)+y-z=0\Leftrightarrow-x+1+y-z=0\Leftrightarrow-x+y-z+1=0$

3)a) $\text{Aire}_{(ABC)}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{1+1+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ .b) $V_{(ABCD)}=\frac{1}{3}\text{Aire}(ABC)\times h$ avec $h=d(D,(ABC))$

$h=\frac{|-1+0-1+1|}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ d'où $V_{(ABCD)}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{6}$

Exercice n°2 :1) $P(A)=\frac{C_4^3+C_5^3+C_3^3}{C_{12}^3}=\frac{4+10+1}{220}=\frac{15}{220}=\frac{3}{44}$. ; $P(B)=\frac{C_7^3+C_5^3}{C_{12}^3}=\frac{35+10}{220}=\frac{45}{220}=\frac{9}{44}$.

$C=A\cup B\Rightarrow p(C)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$ or $A\cap B$: « les trois représentantes choisis sont de même catégorie et de même sexe ». $P(A\cap B)=\frac{C_3^3+C_3^3}{C_{12}^3}=\frac{1+1}{220}=\frac{2}{220}=\frac{1}{110}$ donc $p(C)=\frac{3}{44}+\frac{9}{44}-\frac{1}{110}=\frac{29}{110}$.

$\overline{D}$: « il n'y a pas de médecin » donc $p(D)=1-p(\overline{D})=1-\frac{C_8^3}{C_{12}^3}=1-\frac{56}{220}=1-\frac{14}{55}=\frac{41}{55}$.

$P(E)=\frac{C_1^1\times C_4^2+C_3^1\times C_4^1\times C_4^1}{C_{12}^3}=\frac{1\times6+3\times4\times4}{220}=\frac{54}{220}=\frac{27}{110}$.

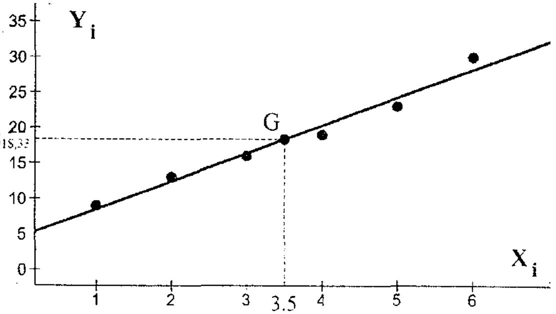
2) $P(F)=\frac{C_9^3}{C_{12}^3}=\frac{84}{286}=\frac{42}{143}$.

$P(G)=\frac{C_9^3+C_8^3}{C_{12}^3}=\frac{84+56}{286}=\frac{140}{286}=\frac{7C}{14:}$

Exercice n°3 : 1) a) Voir figure.

b) G(3,5;18,33)

2) $\sigma(X)=1,70$ et $\sigma(Y)=6,25$.



3) a) $G_1(2;12,66)$ et $G_2(5;24)$.

b) $(G_1G_2) : y = ax + b$

avec : $a = \dfrac{y_{G_2} - y_{G_1}}{x_{G_2} - x_{G_1}} = 3,78$ et $b = y_{G_1} - ax_{G_1} = 5,1$ donc $18,33\,(G_1G_2) : y = 3,78x + 51$

c)Pour l'année 2015 le rang correspondant est x = 13 donc le chiffre d'affaires est $y = 3,78 \times 13 + 51 = 54,24$

Exercice n°4 : 1) a) $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2$. $f'(x) = -a\sin x + b\cos x \Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$.

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \Leftrightarrow a\cos\frac{\pi}{6} + b\sin\frac{\pi}{6} = 2 \Leftrightarrow a\sqrt{3} + b = 4.$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow -a\sin\frac{\pi}{6} + b\cos\frac{\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow -a + b\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow a = b\sqrt{3} \text{ donc } 3b + b = 4 \Rightarrow b = 1 \text{ et } a = \sqrt{3}.$$

b) $2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 2\left(\cos x.\cos\dfrac{\pi}{6} + \sin x.\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\left(\cos x.\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \sin x.\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\cos x + \sin x = f(x)$.

c) $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6}\right) = 2\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

donc le signe de f(x) est :

x	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{6}$
Signe de f(x)		+	0	−	

2) a) $\forall x \in \mathbb{R}, \left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) \in \mathbb{R}$ et

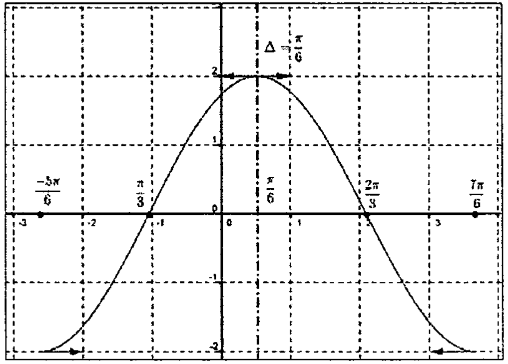
$$f\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = f(x)$$

donc $\Delta : x = \dfrac{\pi}{3}$ est un axe de symétrie de ζ_f.

b) f est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$

et comme $\Delta : x = \dfrac{\pi}{3}$ est un axe de symétrie de ζ_f alors il suffit d'étudier f sur un intervalle d'amplitude π dont l'un des extrémités est $\dfrac{\pi}{6}$ par exemple $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{7\pi}{6}\right]$.



4) ζ_f est l'union des images de ζ_0 par les translations des vecteurs $2k\pi\vec{i}$ avec k varie sur $\mathbb{R}$

5) $$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}} = f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1 \; ; \; \lim_{x \to \left(\frac{2\pi}{3}\right)^-} \frac{\sin x}{f(x)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^+} = +\infty$$

EXERCICE 5:1) a) On a : $\dfrac{1}{3} < U_0 \leq 1$ supposons que $\dfrac{1}{3} < U_n \leq 1$;

$$U_{n+1} - 1 = \frac{3U_n}{6U_n + 1} - 1 = \frac{3U_n - 6U_n - 1}{6U_n + 1} = \frac{-(3U_n + 1)}{6U_n + 1} \leq 0 \Rightarrow U_{n+1} \leq 1$$

$$U_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{3U_n}{6U_n + 1} - \frac{1}{3} = \frac{9U_n - 6U_n - 1}{3(6U_n + 1)} = \frac{3U_n - 1}{3(6U_n + 1)} = \frac{U_n - \frac{1}{3}}{6U_n + 1}$$

On a : $U_n > \dfrac{1}{3}$ donc $U_n - \dfrac{1}{3} > \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow U_{n+1} - \dfrac{1}{3} > 0 \Rightarrow U_{n+1} > \dfrac{1}{3}$ et par suite $\dfrac{1}{3} \leq U_{n+1} \leq 1$

Conclusion : d'après le principe de raisonnement par récurrence ; On a $\forall n \in IN$; $\dfrac{1}{3} < U_n \leq 1$

b) On a : $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{3}{6U_n + 1}$, Puisque $\dfrac{1}{3} < U_n \leq 1$ alors $2 < 6U_n \leq 6 \Leftrightarrow 3 < 6U_n + 1 \leq 7 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{6U_n + 1} \leq \dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{7} < \dfrac{3}{6U_n + 1} \leq 1$ donc $\forall n \in IN$; $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$ signifie que la suite (U_n) est décroissante.

2)a) $$V_{n+1} = \frac{-1 + 3U_{n+1}}{U_{n+1}} = \frac{-1 + \frac{9U_n}{6U_n + 1}}{\frac{3U_n}{6U_n + 1}} = \frac{-6U_n + 9U_n - 1}{3U_n} = \frac{3U_n - 1}{3U_n} = \frac{1}{3} \times \frac{-1 + 3U_n}{U_n} = \frac{1}{3}V_n$$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$

b) $V_n = V_0.q^n$; $V_0 = \dfrac{-1 + 3U_0}{U_0} = 2$ donc $V_n = 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

$$V_n = \frac{-1 + 3U_n}{U_n} \Leftrightarrow V_nU_n = -1 + 3U_n \Leftrightarrow U_n(V_n - 3) = -1 \Leftrightarrow U_n = \frac{-1}{V_n - 3} \text{ d'où } U_n = \frac{-1}{2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3}$$

c) $V_n = 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$; $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$ car $q = \dfrac{1}{3} \in]-1,1[$ ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \dfrac{1}{3}$

3) a) $$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{U_k} = \sum_{k=0}^{n} 3 - V_k = \sum_{k=0}^{n} 3 - \sum_{k=0}^{n} V_k = 3(n+1) - V_0\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 3(n+1) - 2\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}$$

$= 3(n+1) - 3\left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$ b) $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 3(n+1) - 3\left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = +\infty$

قرطاج
Carthage
للنشر والتوزيع

Collection«Pilote»

MATHEMATIQUES

Algèbre & Géométrie

Section
Sciences
TECHNIQUE

Rappels de cours
Recueil d'exercices corrigés
Extraits de devoirs corrigés

3ème année
Sciences
TECHNIQUE

Elaboré par :
Lamloumi Maâmmar

Collection «Pilote»

MATHEMATIQUES

B=C

ISBN: 978-9973-56-171-8

قرطاج
Carthage
للنشر و التوزيع

نهج حقوز عمارة أنيس 3000 صفاقس
الهاتف : 117 222 74 - الفاكس : 855 200 74
الجوال: 721 418 98 - 469 677 97
Site web: www.carthage-edition.tn
E-mail: contact@carthage-edition.tn

I.R.A

مطبعة التسفير الفني
Imprimerie Reliure d'Art
Tél.: +216 74 432 030 - Fax: +216 74 432 248

Prix: 9.750