

Enseignements **spécifique**
et de **spécialité**

Nouveau
programme

Term **maths** repères

livre du professeur

hachette
ÉDUCATION

Nouveau
programme

TermS maths repères

livre du professeur

Fabienne Bruneau

professeur à l'Externat des Enfants
Nantais de Nantes (44)

Maxime Cocault

professeur au lycée
Chateaubriand de Rennes (35)

Boris Hanouch

professeur au lycée
Condorcet de Limay (78)

Frédéric Lavancier

maître de Conférences à l'université
de Nantes (44)

Agnès Choquer-Raoult

professeur au lycée
Léopold-Sédar-Senghor de Magnanville (78)

Frédéric Ferré

professeur au lycée
Jean-Macé de Lanester (56)

Thierry Joffrédo

professeur détaché au Rectorat de Rennes
auprès du département de développement
des usages des TICE (35)

Hervé Mauxion

professeur au lycée
Henri-Avril de Lamballe (22)

David Simon

professeur au lycée
Notre-Dame-de-Toutes-Aides de Nantes (44)

hachette
ÉDUCATION

Sommaire

Fonctions

Chapitre 1	Suites et limites	4
Chapitre 2	Fonctions : limite, continuité, calculs de dérivées - Trigonométrie	22
Chapitre 3	Fonction exponentielle - Fonction logarithme népérien	45
Chapitre 4	Intégration	64

Géométrie

Chapitre 5	Nombres complexes	88
Chapitre 6	Géométrie dans l'espace	107

Probabilité et statistiques

Chapitre 7	Probabilités conditionnelles et lois continues	122
Chapitre 8	Loi normale et estimation	137

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Chapitre 1	Arithmétique	151
Chapitre 2	Calcul matriciel et applications	172

Couverture et maquette intérieure : **Nicolas Piroux**
Composition et schémas : **APS-Chromostyle**



Suites et limites

Programme officiel

Contenus	Capacités attendues
Suites	
Raisonnement par récurrence.	• Savoir mener un raisonnement par récurrence.
Limite finie ou infinie d'une suite.	• Dans le cas d'une limite infinie, étant donné une suite croissante (u_n) et un nombre réel A, déterminer à l'aide d'un algorithme un rang à partir duquel u_n est supérieur à A.
Limites et comparaison.	• Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que : – u_n est inférieur ou égal à v_n à partir d'un certain rang ; – u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$; alors v_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
Opérations sur les limites.	• Étudier la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux suites.
Comportement à l'infini de la suite (q^n) , q étant un nombre réel.	• Démontrer que la suite (q^n), avec $q > 1$, a pour limite $+\infty$. • Déterminer la limite éventuelle d'une suite géométrique.
Suite majorée, minorée, bornée.	• Utiliser le théorème de convergence des suites croissantes majorées.

Découverte (p. 8-9)

1. Abonnements à « Paris Maths »

A. Point de vue éditorial

1. $A_n = A_{n-1} \times 0,8 + 600$;

Le taux de réabonnement est de 80 % donc chaque année 20 % des abonnés arrêtent mais 600 nouveaux arrivent.
Avec le tableur, $A_n = 3000$ pour $n = 43$.

2. C'est une droite dont les points se densifient avec n croissant vers $A_n = 3000$.

3. On conjecture donc que 3 000 est un nombre d'abonnés stable.

4. Oui.

B. Point de vue mathématique

1. Cf. A. 1. : $a_{n+1} = 0,8a_n + 600$.

2. $b_n = a_n - 3000$;
 $b_{n+1} = 0,8a_n - 3000 + 600 = 0,8(a_n - 3000) = 0,8b_n$.
 b_n est géométrique de raison 0,8.

3. $b_n = a_0 0,8^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n b_0$; $b_0 = a_0 - 3000 = 5000$;

$b_n = 5000 \left(\frac{4}{5}\right)^n$; d'où $a_n = 3000 + 5000 \left(\frac{4}{5}\right)^n$.
 b_n est géométrique de raison 0,8.

4. $a_{n+1} - a_n = 3000 + 5000 \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} - 3000 - 5000 \left(\frac{4}{5}\right)^n$
 $= 5000 \left(\frac{4}{5}\right)^n \left(\frac{4}{5} - 1\right) = \frac{1}{5} 5000 \left(\frac{4}{5}\right)^n < 0$.

a_n est décroissante (strictement).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{4}{5}\right)^n 5000 > 0$ donc $a_n \geq 300$.

5. a. Si $a_n = 300$, alors $a_{n+1} = 3000 \times 0,8 + 600 = 2400 + 600$, donc $a_{n+1} = 3000$.

Si $a_{n+1} = 3000$, alors $0,8a_n + 600 = 3000$,

donc $a_n = \frac{2400}{0,8} = 3000$. CQFD.

b. $a_n = 3000 + \left(\frac{4}{5}\right)^n \times 5000$, donc $a_n > 3000$ ($\left(\frac{4}{5}\right)^n 5000 > 0$), donc $a_n \neq 3000, \forall n \in \mathbb{N}$.

6. La phrase est vraie, c'est la définition de la limite et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 3000$; $\left(0 < \frac{1}{4} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 5000 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0\right)$.

7. Le nombre d'abonnés devrait diminuer jusqu'à 3 000 au cours des 431^{re} années puis stagner à 3 000.

2. Démontrer « Pour tout »

Pour tout entier naturel n , $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n - 1 \end{cases}$.

1. $u_0 = 1$; $u_1 = 1 + 2 \times 0 - 1 = 0$; $u_2 = 0 + 2 \times 1 - 1 = 1$ et $u_3 = 1 + 2 \times 2 - 1 = 4$.

2. a. $= B2 + 2 \times A2 - 1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : "u_n = (n-1)^2"$.

a. Il semble que $P(n)$ soit vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $P(n)$ est vraie (n est fixe) dans $u_{n+1} = (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2 = ((n+1)-1)^2$.

D'où $P(n)$ est héréditaire.

c. On serait tenté de dire oui ! ... Mais NON !

4. b. On peut difficilement.

c. Même travail justement !

5. a. Le problème réside dans le fait que pour deux termes initiaux différents, on aura deux générations différentes alors que la définition par récurrence est la même.

b. Que l'on ait u_0 .

c. La donnée du terme initial et de la propriété !

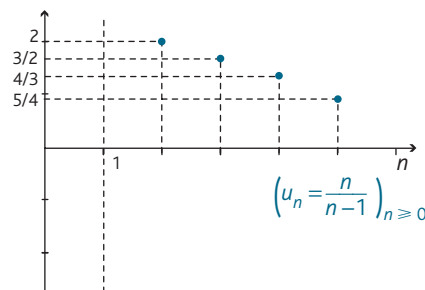
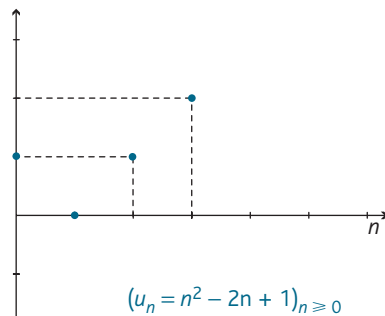
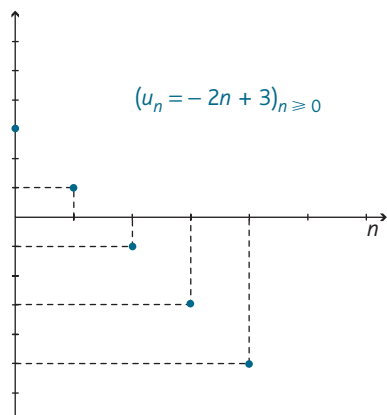
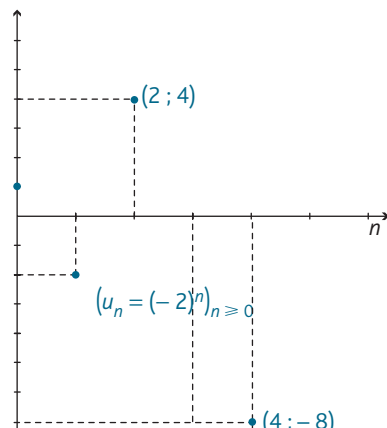
Exercices (p. 28)

1. à 17. Corrigés dans le manuel.

1. Commençons par les premiers termes

18. et 19. Corrigés dans le manuel.

20.



21. Corrigé dans le manuel.

22. (u_n) est croissante, appartient à l'intervalle $[1; 5]$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$.
 (v_n) n'est pas monotone, est bornée
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0,5$.

23. Corrigé dans le manuel.

2. Démontrer par récurrence

24. et 25. Corrigés dans le manuel.

26. a. • $P(0) : n^3 - n = 0 - 0 = 0$ donc divisible par 3.

• Hérédité : $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $3 \times k = n^3 - n$

$$\begin{aligned} P(n+1) : (n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\ &= n^3 - n + 3n^2 + 3n \\ &= 3 \times k + 3(n^2 + n) \\ &= 3 \times (n^2 + n + k) \end{aligned}$$

donc divisible par 3.

b. • $P(0) : 4^0 - 1 - 3 \times 0 = 0$ divisible par 9.

• Hérédité : $P(n)$ est supposée vraie, donc $\exists k \in \mathbb{N} \mid 4^n - 1 - 3n = 9 \times k$.

$$\begin{aligned} P(n+1) : 4^{n+1} - 1 - 3(n+1) &= 4 \times (4^n - 4) - 12n + 9n \\ &= 4 \times (4^n - 1 - 3n) + 9n \\ &= 4 \times (9 \times k) + 9n = 9(4k + n) \end{aligned}$$

donc divisible par 9.

c. • $P(0) : 7 \times 3^{5n} + 4 = 7 + 4 = 11$ divisible par 11.

• Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie : $\exists k \in \mathbb{N} \mid 7 \times 3^{5n} + 4 = 11 \times k$.

$$\begin{aligned} P(n+1) : 7 \times 3^{5(n+1)} + 4 &= 3^5 \times 7 \times 3^{5n} + 4 \\ &= 343 \times 7 \times 3^{5n} + 4 + 968 - 968 \\ &= 343(7 \times 3^{5n} + 4) - 968 \\ &= 343 \times 11 \times k - 11 \times 88 \\ &= 11(343 \times k - 88) \end{aligned}$$

donc divisible par 11.

27. 1. $P(n) : \exists k \in \mathbb{N} \mid 3 \times k = 4^n - 1$.
 $P(n+1) : 4^{n+1} - 1 = 4(4^n - 1) + 3$
 $= 4 \times 3 \times k + 3 = 3(4k + 1)$
 divisible par 3 donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

2. $Q(n) : \exists k \in \mathbb{N} \mid 3 \times k = 4^n + 1$.
 $Q(n+1) : 4^{n+1} + 1 = 4(4^n + 1) - 3$
 $= 4(3k) - 3 = 3(4k - 1)$
 divisible par 3.

3. $P(0) : 4^0 - 1 = 0$ divisible par 3.
 Ayant montré l'hérédité en 1, on peut conclure par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. $Q(0) : 4^0 + 1 = 2$; $Q(1) : 5$; $Q(2) : 17$;
 $Q(3) : 65$; $Q(4) : 257$.
 Q semble fausse pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. a. Soient a et b deux entiers multiples de 3. Par définition $\exists a'$ et $b' \in \mathbb{N}$ tels que $a = 3a'$ et $b = 3b'$ donc $a - b = 3(a' - b')$, $a' - b' \in \mathbb{N}$ donc $a - b$ est divisible par 3.

b. Supposons Q_n vraie. $P(n)$ est vraie donc $P(n) - Q(n)$ est divisible par 3.
 $P(n) - Q(n) = 4^n - 1 - 4^n - 1 = -2$ qui est non divisible par 3 à contradiction.

28. Corrigé dans le manuel.

29. Posons $(v_n) \mid \forall n \in \mathbb{N}$, alors $v_0 = 3$ et $v_n = u_n - 5$

$$= \frac{2}{5}u_n + 3 - 5 = \frac{2}{5}(u_n - 5) = \frac{2}{5}v_n.$$

(v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ donc $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n \times v_0$; $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = v_n + 5 = \left(\frac{2}{5}\right)^n v_0 + 5 = 3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5.$$

31. Corrigé dans le manuel.

32. $P(0) : \frac{11}{4} \times 3^0 - \frac{3}{4} - 0 = \frac{11-3}{4} = 2 = u_0$.
 Hérédité : supposons $P(n)$ vraie, et montrons $P(n+1)$.

Par définition : $u_{n+1} = 3u_n + n + 1$

$$= 3\left(\frac{11}{4}3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}\right) + n + 1$$

$$= \frac{11}{4}3^{n+1} - \frac{9}{4} - \frac{3n}{2} + n + 1$$

$$= \frac{11}{4}3^{n+1} - \frac{5}{4} - \frac{n}{2}$$

$$= \frac{11}{4}3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}.$$

$P(n+1)$ est vraie.

33. Corrigé dans le manuel.

34. 1. $= B2 + 2 \times A2 + 1$.

3. Conjecture : $u_n = n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
 $P(0) : 0^2 = 0 = u_0$.

$P(n) \Rightarrow P(n+1) ?$

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

35. (u_n) constante en 4 $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4$.

$P(0)$ est vraie et $P(1)$ aussi.

Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraie, et montrons $P(n+1) : u_{n+2} = \frac{5}{2}u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n$

$$= \frac{5}{2} \times 4 - \frac{3}{2} \times 4 = 4.$$

36. Corrigé dans le manuel.

37. 1. $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$
 $= 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi + 1.$

2. $P(2) : u_{n-1} = u_1 = 1$ et $u_{n-2} = u_0 = 1$ donc on a bien (d'après 1.) $\phi^2 = u_{2-1} \times \phi + u_{2-2}$; $P(2)$ est vraie.

Supposons $P(n)$ vraie ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$) :
 $\phi^{n+1} = \phi \times \phi^n = \phi^2 u_{n-1} + \phi u_{n-2}$

$$= \phi \left(\overbrace{u_{n-1} + u_{n-2}}^{u_n} \right) + u_{n-1}$$

car $\phi^2 = \phi + 1$

$$= \phi u_n + u_{n-1} = \phi u_{(n+1)-1} + u_{(n+1)-2};$$

$P(n+1)$ est vraie.

38. Corrigé dans le manuel.

39. 2. Pour n suffisamment grand, on conjecture que $n! \geq 3^n$.

3. $P(7) : 3^7 = 2187$; $7! = 5040$;
 $5040 \geq 2187$; donc $7! \geq 3^7$; $P(7)$ est vraie.

Montrons que pour tout :

$$n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\},$$

$$P(n) \Rightarrow P(n+1).$$

$P(n)$ étant vraie, $n! \geq 3^n$ or $n \geq 7 \geq 3$, donc $(n+1) \geq 3$, d'où $(n+1) \times n! \geq 3 \times 3^n$
 $(n+1) \geq 3^{n+1}$

donc $P(n+1)$ est vraie.

40. $P(1) : (a-b) \sum_{i=0}^{1-1} a^{1-1-i} b^i$
 $= (a-b) a^0 b^0 = a-b = a^1 - b^1$;
 $P(1)$ est vraie.

$P(n) \Rightarrow P(n+1) : a^{n+1} - b^{n+1} = aa^n - bb^n$
 $= a(a^{n-1} - b^{n-1}) + ab^n - bb^n$

$$= a(a-b) \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i + (a-b)b^n$$

$$= (a-b)a^0 b^n + (a-b) \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i$$

$$= (a-b) \left(a^0 b^n + \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i \right) = (a-b) \sum_{i=0}^n a^{n-i} b^i$$

$$= (a-b) \sum_{i=0}^{(n+1)-1} a^{(n+1)-1-i} b^i; P(n+1) \text{ est vraie.}$$

41. Corrigé dans le manuel.

42. $P(0) : u_0 \in I$ donc on peut définir $u_1 = f(u_0)$.

$P(n) \Rightarrow P(n+1) : \text{on suppose } P(n) \text{ vraie :}$
 $u_n \in I$ donc $f(u_n)$ est définie donc u_{n+1} est définie.

On a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n est bien défini donc (u_n) est définie.

$P(0) : u_0 \in I$ par définition donc $P(0)$ est vraie.

$P(n) \Rightarrow P(n+1) : u_n \in I$ donc $f(u_n) \in I$ donc $u_{n+1} \in I$, $P(n+1)$ est vraie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

3. Calculs des sommes

43. et 44. Corrigés dans le manuel.

45. a. $\sum_{p=0}^{n-1} p(p+1) = \sum_{p=0}^{n-1} p^2 + \sum_{p=0}^{n-1} p$
 $= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2}$

$$= \frac{n(n-1)}{6}(3+2n-1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

b. $\sum_{p=1}^{n+1} (p-2)^2 = \sum_{p=1}^{n+1} p^2 - 4 \sum_{p=1}^{n+1} p + \sum_{p=1}^{n+1} 4$
 $= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - 4 \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 4(n+1)$
 $= (n+1) \left(\frac{(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{12(n+2)}{6} + \frac{24}{6} \right)$
 $= (n+1) \frac{(2n^2 - 5n + 6)}{6}.$

46. a. $\sum_{p=0}^{p=n} 3^{2p+1} = 3 \times \sum_{p=0}^{p=n} (3^2)^p = 3 \times \sum_{p=0}^{p=n} 9^p$
 $= 3 \times \frac{1-9^{n+1}}{1-9} = \frac{3}{8}(9^{n+1} - 1)$

b. $\sum_{p=0}^{p=n-1} 3 \times 2^p - 1 = 3 \sum_{p=0}^{p=n-1} 2^p - 1$
 $= 3 \times \frac{1-2^n}{1-2} - 1 = 3 \times 2^n - 4$

47. et 48. Corrigés dans le manuel.

4. Majoration, minoration

49. et 50. Corrigés dans le manuel.

51. a. $\frac{n^2}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - 2n - 1}{n+1}$
 $= n+1 - \frac{2n+1}{n+1} = n - \frac{n}{n+1}$

$(-1)^n$ vaut -1 ou 1 suivant n impair/pair donc u_n n'a pas de limite.

b. $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq n^2 - 2n + 1 \leq n^2 + 1$
 $\leq n^2 + 2n + 1$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (n-1)^2 \leq n^2 + 1 \leq (n+1)^2.$$

Comme $\sqrt{\cdot}$ est croissante :

$$\sqrt{(n-1)^2} \leq \sqrt{n^2 + 1} \leq \sqrt{(n+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow n-1 \leq \sqrt{n^2+1} \leq n+1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \sqrt{n^2+1} - n \leq +1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq u_n \leq +1 ; u_n \text{ est bornée.}$$

c. $u_n = \pi^n \left(1 - \left(\frac{3}{\pi}\right)^n\right)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
($\pi > 3,14 < 3$) donc pas majorée et minorée par 0.

52. a. $u_n = \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} - 2n$
 $= \sqrt{n^2} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - 2n = n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - 2 \right)$
 $\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\lim} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\lim} -1$
donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

u_n est décroissante donc $u_0 \geq u_n$
 $\forall n \in \mathbb{N} ; (u_n)$ est majorée par $u_0 = 1$.

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{1^2 + 3n + 3} - 2n - 2 - \sqrt{n^2 + n + 1} + 2n$$

$$= \sqrt{n^2 + 3n + 3} - (2 + \sqrt{n^2 + n + 1})$$

$$\begin{matrix} a(n) > 0 & b(n) > 0 \end{matrix}$$

$$a_n^2 - b_n^2 = (n^2 + 3n + 3) - (4 + n^2 + n + 1 + 2\sqrt{n^2 + n + 1})$$

$$= 2n - 2 - 2\sqrt{n^2 + n + 1} = 2(n - (1 + \sqrt{n^2 + n + 1}))$$

$$= 2(n - \left(1 + n\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}\right))$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\lim} > 1$$

$a_n \leq b_n$ et comme a_n et $b_n \geq 0$, $a_n \leq b_n$
donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin \frac{1}{n} \leq 1$ car $\sin$ est bornée dans $[-1; 1]$

$$-\frac{1}{n} \leq \sin \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
(gendarmes).

0 est une limite finie de (u_n) est bornée (dans $[-1; 1]$).

c. Pour $n \geq 1$, $2^n \pi = 2\pi \times 2^{n-1}$
 $= 0 + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{N})$

donc $\sin 2^n \pi = 0$ pour $n \geq 1$.

$u_0 = \sin \pi = 0$ (u_n) est constante en 0 donc bornée.

53. a. $\forall n$, $-1 \leq \sin \frac{1}{n} \leq +1$

$$\Leftrightarrow -2 \leq -2 \sin \frac{1}{n} \leq +2$$

$$\Leftrightarrow 8 \leq 10 - 2 \sin \frac{1}{n} \leq 12 \text{ d'où } (u_n) \text{ bornée dans } [8; 12].$$

b. $n \geq 0$ et $n+2 > 0$ donc $\frac{n}{n+2} \geq 0$;

$$n+2 > n \quad \frac{n}{n+2} < 1 ; \text{ d'où } \forall n \in \mathbb{N}$$

$$0 \leq u_n < 1, (u_n) \text{ est bornée.}$$

c. $\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1 - \sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$
 $\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\lim} 0 \quad \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\lim} 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 - 0 = 0$; donc (u_n) est bornée.

54. a. $u_n = \sum_{i=0}^n \left(\frac{2}{7}\right)^i = \frac{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{7}} = \left(1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}\right)$
donc $0 \leq u_n < \frac{7}{5}$.

b. $u_n = 30 + \sum_{i=0}^n \frac{1}{5} = 30 + \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}}$
 $= \frac{75}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$

d'où $0 \leq u_n < \frac{75}{2}$.

c. $u_n = 12 + \sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{1}{3}\right)^i = 12 + \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{3}}$
 $= 18 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$

d'où $0 \leq u_n \leq 18$.

55. Corrigé dans le manuel.

56. $P(0) : u_0 = 3$ donc $2 \leq u_0 \leq 3$.

$P(n) : 2 \leq u_n \leq 3$ donc $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ car $\frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

$$2 \leq \frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} \leq 2 + \frac{1}{u_n} \leq 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq u_{n+1} \leq 3 ; P(n+1) \text{ est vraie.}$$

57. $\cdot 1 \geq 1$ et $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \geq 1$ d'où $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

• On suppose $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies,

alors $\frac{1}{2} u_{n+1} \geq \frac{1}{2} (u_{n+1} \geq 1)$

et $\frac{2}{3} u_n \geq \frac{2}{3} (u_n \geq 1) ;$

$$\text{d'où } \frac{1}{2} u_{n+1} + \frac{2}{3} u_n \geq \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 6 \geq 1$$

$$u_{n+2} \geq 1 \text{ d'où } P(n+1) \text{ est vraie.}$$

58. a. $P(0) : u_0 = \frac{2}{7} > 0$ donc $P(0)$ est vraie.

$P(n) : u_n > 0$ alors $\frac{1}{3} u_n > 0$

et $\frac{1}{3} u_n + \frac{1}{2} > 0$ donc $u_{n+1} > 0$.

Donc $P(n) \Rightarrow P(n+1) ; \forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$.

b. $P(0) : \text{on a } \frac{2}{7} < \frac{3,5}{7} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} < \frac{3}{4}$

donc $P(0)$ est vraie.

$P(n) : u_n < \frac{3}{4}$ donc $\frac{1}{3} u_n < \frac{1}{4}$

donc $\frac{1}{3} u_n + \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ soit $u_{n+1} < \frac{3}{4}$.

On a montré que $P(n) \Rightarrow P(n+1) ;$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > \frac{3}{4}.$$

5. Limites d'une suite

59. à 61. Corrigés dans le manuel.

62. Soit $A \in \mathbb{R}$

• Pour $a > 0$, $\exists p \in \mathbb{N} \mid pa > -b$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^* ; n \geq p \Rightarrow na \geq pa$
(car $a > 0$)
 $\Rightarrow na + b \geq pa + b$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ et $pa + b > 0 ;$

donc $\exists q \in \mathbb{N} \mid q(pa + b) > A - c$.

Posons $r = \max(p, q)$

$$r(ra + b) > q(pa + b) > A - c$$

car $\begin{cases} 2 \geq q \text{ et } r \geq p \text{ donc} \\ ra + b \geq pa + b \end{cases}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Rightarrow n(na + b) \geq r(ra + b) > A - c.$$

Pour tout $n \geq r$, $an^2 + bn + c > A$

donc $(u_n) \in]A ; +\infty[$ pour tout $n \geq r$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} an^2 + bn + c = +\infty \text{ pour } a > 0.$$

• Pour $a < 0$, $-a > 0$ donc il existe

$$p \in \mathbb{N} \mid -ap > +b$$

donc $ap + b < 0$.

$-(ap + b) > 0$ et $-A + c \in \mathbb{R}$ donc

il existe $q \in \mathbb{N} \mid -(ap + b) > -A + c$.

donc $(x-1)(ap + b)q < A - c$

et $(ap + b)q + c < A$.

Posons $r = \max(p, q) ; r \geq p$

donc $ar \leq ap \leq 0$ car $a < 0$

d'où $ar + b \leq ap + b \leq 0$

donc comme $r \geq q$ (et $ar + b \leq 0$)
(et $ap + b \leq 0$)

$$(ar + b)r \leq (ap + b)q \leq 0$$

$$(ar + b)r + c \leq (ap + b)q + c$$

donc $(ar + b)r + c < A$.

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq r \Rightarrow an \leq ar$ car $a < 0$

d'où $(na + b) \leq (ar + b) \leq 0$

donc $n(na + b) \leq r(ar + b)$

donc $an^2 + bn + c \leq ar^2 + br + c$

donc $an^2 + bn + c < A$ pour tout $n \geq r$

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq r \Rightarrow an^2 + bn + c \in]-\infty ; A[$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

63. 1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \frac{1}{2}$.

2. L'algorithme retrouve toujours un entier n .

3. Rendre un entier naturel n tel que

$$f_n \in \left[\frac{1}{2} - \varepsilon ; \frac{1}{2} + \varepsilon\right].$$

4. Parce que l'algorithme rend un entier et non un entier à partir duquel on avait

$$f_n \in \left[\frac{1}{2} - \varepsilon ; \frac{1}{2} + \varepsilon\right].$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$, $f_n - \frac{1}{2} = \frac{5}{4n+2}$.

6. $x \mapsto \frac{5}{4x+2}$ est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

7. $(f_n)_{n \geq 0}$ est donc strictement croissante et minorée par $\frac{1}{2}$, donc l'entier fourni par l'algorithme est bien un entier à partir duquel on aura $f_n \in \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \varepsilon\right]$.

8. L'algorithme fournit le plus petit rang associé à la définition de la convergence de f_n vers $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} 64. \frac{an^2 + bn + c}{a'n^2 + b'n + c'} &= \frac{an^2}{a'n^2} \frac{1 + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}}{1 + \frac{b'}{n} + \frac{c'}{n^2}} \\ &= \frac{a}{a'} \frac{1 + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}}{1 + \frac{b'}{n} + \frac{c'}{n^2}} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k}{n^2} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}\right) = 1 \quad (\text{par somme de limites})$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{b'}{n} + \frac{c'}{n^2}\right) = 1$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}}{1 + \frac{b'}{n} + \frac{c'}{n^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

(par quotient de limites)

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{an^2 + bn + c}{a'n^2 + b'n + c'} = \frac{a}{a'} \times 1 = \frac{a}{a'}.$$

$$\begin{aligned} 65. \text{ a. } \frac{a'n + b'}{an^2 + bn + c} &= \frac{n}{n^2} \frac{a' + \frac{b'}{n}}{a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{a' + \frac{b'}{n}}{a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(a' + \frac{b'}{n}\right) = a' + 0 = a';$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}\right) = a + 0 + 0 = a;$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a'n + b'}{an^2 + bn + c} = 0 \times \frac{a'}{a} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{b. et c. } \frac{an^2 + bn + c}{a'n + b'} &= \frac{n}{n^2} \times \frac{a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}}{a' + \frac{b'}{n}} \\ &= n \times \frac{a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}}{a' + \frac{b'}{n}} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \times \frac{a}{a'};$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= +\infty \text{ pour } \frac{a}{a'} > 0 \\ &\equiv (a > 0 \text{ et } a' > 0) \text{ ou } (a < 0 \text{ et } a' < 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= -\infty \text{ pour } \frac{a}{a'} < 0 \\ &\equiv (a > 0 \text{ et } a' < 0) \text{ ou } (a < 0 \text{ et } a' > 0). \end{aligned}$$

$$\text{signe}(a) = \text{signe}(a') \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty;$$

$$\text{signe}(a) \neq \text{signe}(a') \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

66. (u_n) n'est pas majorée :

Soit $A \in \mathbb{R}$, $\exists p \in \mathbb{N} \mid u_p > A$.

(u_n) est croissante : $n \geq p \Rightarrow u_n \geq u_p$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $n \geq p$; $u_n \geq u_p > A$ donc $u_n \geq A$.

$\exists p \in \mathbb{N} \mid n \geq p \Rightarrow u_n \in]A; +\infty[$

soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

67. 1. est faux.

$(-1)^n n$ n'est pas majorée et elle diverge donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n n \neq +\infty$.

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Supposons que (u_n) est majorée. Alors il existe $M \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \notin]1 + M; +\infty[$ ce qui contredit l'hypothèse.

$$68. 1. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 5 + \lim_{n \rightarrow +\infty} (-2 \times n) = -\infty \text{ car } -2 < 0.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^2} = 0 \text{ car } 3 > 0.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n^2 + \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n + 5 - 0 = +\infty \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n^2 = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty.$$

69. et 70. Corrigés dans le manuel.

$$71. 1. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n^2 + \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = +\infty - 1 + 0 = +\infty.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} 6^n = -\infty.$$

$$\begin{aligned} 3. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \times \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 \\ &\text{car } \frac{2}{3} > 0 \text{ et } \frac{2}{3} < 1 \\ &= +\infty \text{ car } 3 > 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 72. 1. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} -3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - 3 \times 0 = 1. \end{aligned}$$

$$\text{car } -1 < -\frac{2}{3} < 0.$$

$$\begin{aligned} 2. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} 6}{\lim_{n \rightarrow +\infty} (5 - 7^n)} \\ &= \frac{6}{\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 + \lim_{n \rightarrow +\infty} (-7^n)} = 0 \end{aligned}$$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} -7^n = -\infty$.

$$\begin{aligned} 3. u_n &= \frac{3^n \left(1 - \frac{2}{3^n}\right)}{4^n \left(1 - \frac{3^n}{4^n}\right)} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1 - \frac{2}{3^n}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n} \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \times \frac{1}{1} = 0. \end{aligned}$$

$$73. 1. \lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 4^n) = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n + 4^n} = 0.$$

$$\begin{aligned} 2. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 9^n - 10^n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 10^n \left(\left(\frac{9}{10}\right)^n - 1\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 10^n \times \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{9}{10}\right)^n - 1\right] \\ &= -1 \times \lim_{n \rightarrow +\infty} 10^n = -\infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} [5^{n-1} (5^3 - 5^2 + 1)] \\ &= 101 \times \lim_{n \rightarrow +\infty} 5^{n-1} = +\infty. \end{aligned}$$

74. et 75. Corrigés dans le manuel.

76. Soit (u_n) à valeurs dans $[a; b]$ qui admet pour limite l , ($l \in \mathbb{R}$) et telle que $l \notin [a; b]$.

• Supposons $l > b$, soit I un intervalle contenant l tel que $I \cap [ab] = \emptyset$, il existe alors un rang à partir duquel tous les u_n sont contenus dans I et donc, aussi par définition dans $[a; b]$, or $I \cap [a; b] = \emptyset$. Ce qui est donc absurde.

On conclut que : $l \in [a; b]$.

• Supposons $l < a$, on fait exactement de même.

$$77. \text{ Soit } A \in \mathbb{R}; \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

$$\text{donc } \exists p \mid n \geq p \Rightarrow u_n \in]l - A; l + A[.$$

Posons $M = \max(u_n)_{n \leq p}$

et $m = \min(u_n)_{n \leq p}$.

M et m sont définis et $\in \mathbb{R}$ car $(u_n)_{n \leq p}$ est ensemble fini (de cardinal $\leq p + 1$).
Pour $n \leq p$ on a $u_n \leq M$ et $u_n \geq m$.
Pour $n \geq p$ on a $u_n \leq l + A$ et $u_n \geq l - A$;
donc $\forall n \in \mathbb{N}$,
 $\min(m, l - A) \leq u_n \leq \max(M, l + A)$
d'où (u_n) est bornée.

78. Soit $A \in \mathbb{R}$,
 $\exists p \in \mathbb{N} \mid n \geq p \Rightarrow v_n < A$
(car $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$).
Par hypothèse :
 $\exists q \in \mathbb{N} \mid n \geq p \Rightarrow |u_n - l| \leq v_n$;
Posons $r = \max(p, q)$ alors
 $n \geq r \Rightarrow |u_n - l| \leq v_n$ et $v_n < A$
d'où $|u_n - l| < A$ pour tout $n \geq r$.
Si $u_n \geq l$ alors $0 \leq u_n - l < A$
d'où $l \leq u_n < l + A$, $u_n \in [l ; l + A[$.
Si $u_n \leq l$ alors $-A \leq u_n - l < 0$
d'où $-A + l \leq u_n < l$, $u_n \in]l - A ; l]$.
D'où $u_n \in]l - A ; l + A[$
 $=]l - A ; l] \cup [l ; l + A[$
 $\exists r \in \mathbb{N} \mid n \geq p \Rightarrow u_n \in]l - A ; l + A[$
d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

79. $(-1)^n$ est bornée par -1 et $+1$ donc elle n'a pas de limite infinie.
Or $(-1)^n$ ne converge pas car $(-1)^n$ alterne entre -1 et $+1$. $(-1)^n$ est donc divergente. On en conclut que l'ensemble des suites divergentes est distinct de l'ensemble des suites de limite infinie.

80. à 82. Corrigés dans le manuel.

83. 1. Pour $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$;
 $0 \leq n - 1 \leq n + (-1)^n \leq n + 1$
car $-1 \leq (-1)^n \leq 1$
donc $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+(-1)^n} \leq \frac{1}{n-1}$
car $\frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$
donc $\frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{n+(-1)^n} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{n-1}$
car $\sqrt{n+1} > 0$.

$$2. \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} = 0$$

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \frac{2}{\sqrt{n+1}}}$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n-1} = \frac{1}{+\infty - 0} = 0.$$

3. Par le théorème des gendarmes, on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 1) = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

84. 1. On revient à la définition d'une limite finie :

$A \in \mathbb{R}$,
 $\exists p \in \mathbb{N} \mid n \geq p \Rightarrow u_n \in]l - A ; l + A[$
or $2n \geq n$ donc $2n \geq p$
donc $u_{2n} \in]l - A ; l + A[$
 $2n + 1 \geq n$ donc $2n + 1 \geq p$
donc $u_{2n+1} \in]l - A ; l + A[$.
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = l$.

2. a. u_n est bornée par -1 et 1 donc (u_n) n'a pas de limite infinie.

$$\text{b. } u_{2n} = (-1)^{2n} = ((-1)^2)^n = 1^n = 1$$

$$u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = (-1) \times 1 = -1.$$

c. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lambda$.

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lambda \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \lambda$$

(d'après 1.)

donc $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$ ce qui est absurde.

(u_n) n'a pas de limite finie.

85. • $-1 \leq \sin n \leq +1$ donc si $\sin n$ a une limite, alors elle est finie.

$$\bullet \quad u_{2n} = \sin 2n \text{ et } u_{2n+1} = \sin(2n+1).$$

$$u_{2n+1} - u_{2n} = \sin(2n+1) - \sin 2n$$

$$= 2 \cos\left(\frac{2n+1+2n}{2}\right) \sin\left(\frac{2n+1-2n}{2}\right)$$

$$= 2 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{4n+1}{2}.$$

D'après ce qui précède si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lambda$

$$\text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \lambda ;$$

$$\text{donc en passant à la limite}$$

$$\lambda - \lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{4n+1}{2} ;$$

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \sin \frac{1}{2} \cos\left(2n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\neq 0 \text{ car } 0 < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$$

et strictement croissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos\left(2n + \frac{1}{2}\right)\right) = 0.$$

$$\text{Posons } v_n = \cos\left(n - \frac{1}{2}\right).$$

$$v_{2n+1} - v_{2n} = \cos\left(2n + \frac{1}{2}\right) - \cos\left(2n - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -2 \sin(2n) \sin \frac{1}{2}.$$

En passant à la limite, on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(2n) = 0$ donc $\lambda = 0$

$$\cos\left(2n + \frac{1}{2}\right) = \cos 2n \cos \frac{1}{2} - \sin 2n \sin \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(2n + \frac{1}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(2n)) \cos \frac{1}{2} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(2n) \sin \frac{1}{2}$$

$$0 = (\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(2n)) \times \cos \frac{1}{2} - 0 \times \sin \frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos 2n = 0 \text{ car } \cos \frac{1}{2} \neq 0.$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \cos^2 n + \sin^2 n = 1$$

$$\text{donc } \cos^2 2n + \sin^2 2n = 1$$

(car $2n \in \mathbb{N}$).

En passant à la limite $0 + 0 = 1$
car on a montré que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin 2n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos 2n = 0$,
ce qui est absurde, il n'y a donc pas $\lambda \in \mathbb{R}$
tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lambda$.

$(\sin n)$ n'admet pas de limite.

86. 1. $u_1 = 0$ donc $u_2 = \sqrt{0^2 + 1} = 1$;

$$u_3 = \sqrt{u_2^2 + 1} = \sqrt{2} ;$$

$$u_4 = \sqrt{u_3^2 + 1} = \sqrt{3}.$$

On conjecture : $u_n = \sqrt{n-1}$.

$$2. \sqrt{11} = \sqrt{0} = 0 = u_1$$

donc $P(1)$ est vraie.

$$P(n) : u_n = \sqrt{n-1} \quad n \geq 1.$$

Alors $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$

$$= \sqrt{(\sqrt{n-1})^2 + 1}$$

$$= \sqrt{n-1+1} = \sqrt{n},$$

donc si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.

La conjecture est démontrée par récurrence.

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

87. $u_{n+1} - u_n = (n+1) \times n! - n!$

$$= n! (n+1 - 1)$$

$$= n! \times n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(u_n) est croissante.

L'axiome d'Archimède montre que $n!$ n'est pas majorée.

$A \in \mathbb{R}$, $1 \in \mathbb{R}$ et $1 > 0$ donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \times 1 > A$

$p! > p > A$ donc comme (u_n) est croissante, $n \geq p \Rightarrow n! \geq p!$ d'où $n! > A$ pour tout $n \geq p$.

(u_n) est croissante et non majorée donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

6. À partir de suites arithmétiques ou géométriques

88. 1. • $P(0) : u_0 = u_0 + r \times 0$

donc $P(0)$ est vraie.

• Hérédité : supposons que $u_n = u_0 + nr$

$$\begin{aligned} \text{alors } u_{n+1} &= u_n + r = u_0 + nr + r \\ &= u_0 + (n+1)r \end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

2. Si le premier terme est u_1 , on décale la propriété de 1, soit $u_n = (n-1)r + u_1$ pour $u \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$.

$P(1) : u_1 + u_1 + (1-1)r \rightarrow P(1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} P(n) \text{ donc } u_{n+1} &= u_1 + r \\ &= u_1 + (n-1)r + r \\ &= u_1 + ((n+1)-1)r; \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

3. On généralise :

Pour $n \geq p$, $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + (n-p)r$.
 $P(p) : u_p = u_p + (p-p)r$; $P(p)$ est vraie.

Hérédité : $u_n = u_p + (n-p)r$

$$\begin{aligned} \text{donc } u_{n+1} &= u_n + r = u_p + (n-p)r + r \\ &= u_p + ((n+1)-p)r. \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

89. 1. $P(0) : v_0 = v_0 \times 1 = v_0 \times q^0$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : $P(n) : v_n = v_0 q^n$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n \times q = v_0 \cdot q^n \cdot q = v_0 \cdot q^{n+1}; \\ P(n+1) &\text{ est vraie.} \end{aligned}$$

2. $P(n)$ devient $v_n = v_1 q^{n-1}$ pour $n \geq 1$.

$P(1) : v_1 = v_1 \times 1 = v_1 \cdot q^{1-1}$;

$P(n+1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $v_n = v_1 \times q^{n-1}$;

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n \times q = v_1 \times q^{n-1} \times q = v_1 \cdot q^{(n+1)-1}; \\ P(n+1) &\text{ est vraie.} \end{aligned}$$

3. $v_n = v_p q^{n-p}$ pour $n \geq p$

$P(p) : v_p = v_p \times 1 = v_p q^{p-p}$.

Hérédité :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n \times q = v_p q^{n-p} q = v_p q^{(n+1)-p}; \\ P(n+1) &\text{ est vraie.} \end{aligned}$$

90. 1. Les lignes démasquées sont :

S prend la valeur $S + u$

u prend la valeur $u + r$.

2. Il y a effectivement plus simple puisqu'on connaît une formule explicite :

Pour $n \in \mathbb{N}$ et (u_n) arithmétique de raison r et de premier terme u_0 , on a :

$$\sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \left(u_0 + \frac{nr}{2} \right).$$

D'où l'algorithme :

variables

n entier naturel

u_0 un réel

r un réel

Début

Saisir n

Saisir u_0

Saisir r

Afficher « la somme vaut »

Afficher « $(n+1) * u_0 + (n * r)/2$ ».

Fin

91. 1. Les lignes démasquées sont :

S prend la valeur $S + u$

u prend la valeur $u * q$

2. On reprend le même algorithme, mais

avec la formule $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)$.

Donc, seul l'affichage est modifié.

$$\mathbf{92. 1.} \quad u_n = \sum_{i=1}^{i=n} 9 \times 10^{-i}$$

Somme de la suite géométrique

$$v_n = v_0 \left(\frac{1}{10} \right)^n.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2.} \quad u_n + 9 &= \sum_{i=1}^{i=n} 9 \times \left(\frac{1}{10} \right)^i \\ &= 9 \times \frac{1 - \frac{1}{10^{n+1}}}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= 9 \times \frac{1 - \frac{1}{10^{n+1}}}{\frac{9}{10}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_n &= 10 \times \left(1 - \frac{1}{10^{n+1}} \right) - 9 \\ &= 10 \times \frac{1}{10^n} - 9 = 1 - \frac{1}{10^n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{3.} \quad \lim_{+\infty} u_n &= 1 - \lim_{+\infty} \frac{1}{10^n} = 1 - 0 = 1 \\ \text{donc } 0,999... &= 1! \end{aligned}$$

$$\mathbf{93. 1.} \quad u_n = \sum_{i=1}^{i=n} 27 \times \frac{1}{100^i}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2.} \quad u_n + 27 &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{27}{100^i} = 27 \frac{1 - \frac{1}{100^{n+1}}}{1 - \frac{1}{100}} \\ &= \frac{27}{99} \left(100 - \frac{100}{100^{n+1}} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } u_n &= \frac{27}{99} \left(100 - \frac{1}{100^n} \right) - 27 \\ &= \frac{27}{99} \left(100 - \frac{1}{100^n} - 99 \right) = \frac{27}{99} - \frac{27}{99 \times 100^n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{3.} \quad \lim_{+\infty} u_n &= \frac{27}{99} - \frac{27}{99} \lim_{+\infty} \frac{1}{100^n} = \frac{27}{99} - \frac{27}{99} \times 0 \\ &= \frac{27}{99} = \frac{3}{11} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } 0,272\,727\,272\,727... = \frac{3}{11}.$$

$$\mathbf{94.} \quad u_n = \sum_{i=0}^{i=n} \overline{ab} \times \frac{1}{100^i}.$$

$$\begin{aligned} u_n + \overline{ab} &= \sum_{i=0}^{i=n} \overline{ab} \times \frac{1}{100^i} = \frac{\overline{ab}}{99} \left(100 - \frac{100}{100^{n+1}} \right) \\ u_n \frac{\overline{ab}}{99} \left(100 - \frac{1}{100^n} - 99 \right) &= \frac{\overline{ab}}{99} \left(1 - \frac{1}{100^n} \right) \\ &= \frac{\overline{ab}}{99} - \frac{\overline{ab}}{99 \times 100^n}. \end{aligned}$$

$$\lim_{+\infty} \left(1 - \frac{1}{100^n} \right) = 1 \text{ donc } \lim_{+\infty} u_n = \frac{\overline{ab}}{99}.$$

$$\mathbf{95.} \quad u_n = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{abc} \times \frac{1}{1000^i}.$$

$$\begin{aligned} u_n + \overline{abc} &= \overline{abc} \times \frac{1 - \frac{1}{1000^{n+1}}}{1 - \frac{1}{1000}} \\ &= \frac{\overline{abc}}{99} \times \left(1000 - \frac{1}{1000^n} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } u_n &= \frac{\overline{abc}}{999} \left(1000 - \frac{1}{1000^n} - 999 \right) \\ &= \frac{\overline{abc}}{999} \left(1 - \frac{1}{1000^n} \right). \end{aligned}$$

$$\lim_{+\infty} u_n = \frac{\overline{abc}}{999}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{96. 1.} \quad u_2 &= 6u_1 - 9u_0 = 36 - 18 = 18; \\ u_3 &= 6 \times 18 - 9 \times 6 = 6 \times 9 = 54; \\ u_4 &= 6 \times 54 - 9 \times 18 = 9 \times 18 = 162; \\ u_5 &= 6 \times 162 - 9 \times 54 = 9 \times 54 = 486; \\ u_6 &= 6 \times 486 - 9 \times 162 = 9 \times 162 = 1458. \end{aligned}$$

2. On conjecture $u_n = 2 \times u_3^n = u_0 3^n$.

3. $P(0) : u_0 = u_0 \times 1 = u_0 \times 3^0$.

$P(1) : u_1 = 2 \times 3 = 2 \times 3^1 = u_0 \times 3^1$

$P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

Hérédité : $u_{n+1} = 6 \times u_n - 9 \times u_{n-1}$

$$= u_0 (6 \times 3^n - 9 \times 3^{n-1}) = u_0^0 (9 \times 3^{n-1})$$

$$= u_0 \times 3^{n+1}; P(n+1) \text{ est vraie.}$$

$$\mathbf{97. 1.} \quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2u_n + 3 - u_n - 4}{u_n + 4} \\ &= \frac{2u_n + 3 + 3u_n + 12}{u_n + 4} \\ &= \frac{u_n - 1}{u_n + 4} \times \frac{u_n + 4}{5u_n + 15} \\ &= \frac{u_n - 1}{5(u_n + 3)} = \frac{1}{5}v_n. \end{aligned}$$

On peut simplifier par $u_n + 4$ car $u_n > 0$ (par récurrence) pour $u_n \geq 1$ $v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n v_0$; $v_0 = \frac{0-1}{0+3}$.

2. D'où $v_n = \frac{1}{3} \frac{1}{5^n}$; $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{5^n}$

d'où $-\frac{1}{3} \frac{1}{5^n} (u_n + 3) = u_n - 1$;

donc $1 - \frac{1}{5^n} = u_n + \frac{1}{3} \frac{u_n}{5^n}$

soit $u_n = \frac{1 - \frac{1}{5^n}}{1 + \frac{1}{3} \frac{1}{5^n}}$.

3. $0 < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.

98. 1. a. $u_1 = 1,05 \times 12\,000 = 12\,600$.

b. $u_n = (1,05)^n \times 12\,000$; $u_8 = 17\,729,47$.

c. $\sum_{k=0}^8 u_k = 12\,000 \times \frac{1 - (1,05)^9}{1 - 1,05} = 132\,318,77$.

2. a. $v_1 = 12\,000 + 750 = 12\,750$.

b. $v_n = 12\,000 + 750_n$;

$v_8 = 12\,000 + 750 \times 8 = 18\,000$

c. $\sum_{i=0}^8 v_i = 9 \times 10\,000 + 750 \times \frac{8 \times (8+1)}{2} = 135\,000$.

3. Le contrat 1 est plus avantageux.

99. 1. Par récurrence :

• $v_0 \in \mathbb{R}$; $P(0)$ est vraie.

• Hérédité : $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n - 1$. Comme

$v_n \in \mathbb{R}$, $\frac{2}{3}v_n - 1$ aussi donc $v_{n+1} \in \mathbb{R}$.

(v_n) est définie dans $\mathbb{R}$.

On démontre la même chose pour (w_n) avec $w_0 = 3$.

2. $w_{n+1} = 2v_{n+1} + 6 = \frac{4}{3}v_n - 2 + 6$
 $= \frac{2}{3}(2v_n + 6) = \frac{2}{3}w_n$.

Donc (w_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et premier terme 3.

3. $w_n = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ ($0 < \frac{2}{3} < 1$).

$v_n = \frac{w_n}{2} - 3 = \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -3$.

4. $S_n = \sum_{k=0}^n w_k 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}}$
 $= 9 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$.

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 9$.

100. 1. a. $u_0 = 1$; $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 1 - 1 = \frac{1}{2}$;

$u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 2 - 1 = 1 + \frac{1}{4}$;

$u_3 = \frac{1}{2}u_2 + 2 - 1 = \frac{5}{8} + 1 \geq 0$. $P(3)$ est vraie.

Hérédité : supposons $P(n)$ vraie ($n \geq 3$) :

$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$; $u_{n+1} \geq 0$ car $\frac{1}{2}u_n \geq 0$ (hypothèse) $n - 1 \geq 0$ pour $n \geq 3$. $P(n+1)$ est vraie.

b. $P(4)$: $u_4 \geq 4 - 2$.

On a $u_3 \geq 0$ car $3 \geq 3$ et 1. a. donc $\frac{1}{2}u_3 \geq 0$.

On a $3 - 1 \geq 2$ donc $u_4 = \frac{1}{2}u_3 + 3 - 1 \geq 2$ donc $P(4)$ est vraie.

Hérédité : $P(n)$ est supposée vraie : $u_n \geq n - 2$ pour $n \geq 4$.

$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 2$. Or $\frac{1}{2}u_n \geq 0$ (1. a.)

et $n \geq 4 \Rightarrow n - 2 \geq 2$, donc $u_{n+1} \geq 2$. $P(n+1)$ est vraie.

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, on a : $u_n \geq n - 2$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 2 = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. a.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 4u_{n+1} - 8(n+1) \\ &= 2u_n + 4_n - 4 - 8n - 8 + 24 \\ &= 2u_n - 4_n + 12 = \frac{1}{2}(4u_n - 8n + 24) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

(pour tout $n \in \mathbb{N}$).

(v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 4u_0 - 8 \times 0 + 24 = 28$.

b. $u_n = \frac{1}{4}(v_n + 8n - 24) = \frac{v_n}{4} + 2n - 6$
 $= \frac{1}{4} \left(28 \frac{1}{2^n}\right) + 2n - 6 = \frac{7}{2^n} + 2n - 6$.

c. On pose $x_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $y_n = 2n - 6$.

(x_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 7 ;

(y_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme - 6.

d. $\sum_{i=0}^n x_i = 7 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 14 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

$$\sum_{i=0}^{n-1} y_i = 2 \times \frac{n(n-1)}{2} - 6(n-1) = (n-1)(n-6)$$

D'où $S_n = 14 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + (n-1)(n-6)$.

101. 1. $t_n = \lambda^n$.

$(t_n) \in E \Rightarrow \lambda^{n+1} - \lambda^n = 0,24\lambda^{n-1}$

$\Leftrightarrow \lambda^{n-1}(\lambda^2 - \lambda - 0,24) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 0,24 = 0$ car $\lambda \neq 0$

$\Leftrightarrow \lambda$ est une solution de

$x^2 - x - 0,24 = 0$.

Supposons que λ est une solution de $x^2 - x - 0,24 = 0$.

Alors $\lambda^{n+1} - \lambda^n = 0,24\lambda^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

En posant $t_n = \lambda^n$ on obtient $t_{n+1} - t_n = 0,24t_{n-1}$; donc $(t_n) \in E$.

2. $u_n = \alpha(1,2)^n + \beta(-0,2)^n$.

Si $u_0 = 6$ alors $6 = \alpha + \beta$ (1).

Si $u_1 = 6,6$ alors $6,6 = 1,2\alpha - 0,2\beta$
 $= \frac{6}{5}\alpha - \frac{1}{5}\beta = \frac{33}{5}$ (2)

$\Leftrightarrow 33 = 6\alpha - \beta = 6\alpha - 6 + \alpha$ (d'après (2)).

$\alpha = \frac{39}{7}$ donc $\beta = \frac{3}{7}$ ((1)).

$u_n = \frac{39}{7}(1,2)^n + \frac{3}{7}(-0,2)^n$.

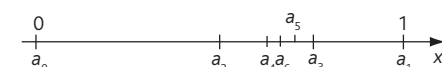
3. $1,2 > 1$ donc $\frac{39}{7}(1,2)^n$ diverge vers $+\infty$.

$|-0,2| < 1$ donc $\frac{3}{7}(-0,2)^n$ diverge vers 0.

Par somme des limites, on obtient

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

102. 1. a.



b. $a_2 = \frac{a_1 - a_0}{2} = \frac{1}{2}$

$a_3 = \frac{a_1 - a_2}{2} + a_2 = \frac{3}{4}$

$a_4 = \frac{a_3 - a_2}{2} + a_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

$a_5 = \frac{a_3 - a_4}{2} + a_4 = \frac{1}{16} + \frac{5}{8} = \frac{11}{16}$

$a_6 = \frac{a_5 - a_4}{2} + a_5 = \frac{1}{32} + \frac{11}{16} = \frac{23}{32}$

c. A_{n+2} est le milieu du segment $[A_n A_{n+1}]$ en terme d'abscisse (a_i) cela se

traduit par $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$.

2. $a_1 = 1$ et $1 - \frac{a_0}{2} = 1$ donc $a_1 = 1 - \frac{a_0}{2}$; $P(0)$ est vraie.

Hérédité : $P(n) : a_{n+1} = 1 - \frac{a_n}{2}$ donc
 $a_n = 2(1 - a_{n+1})$.

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2} = \frac{a_{n+1}}{2} + 1 - a_{n+1} = 1 - \frac{a_{n+1}}{2};$$

$P(n+1)$ est vraie.

3.
 $v_{n+1} = a_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2}v_n$.
 (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

4. Comme $|\frac{1}{2}| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$; $v_n = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
 $v_n = a_n - \frac{2}{3}$ donc $a_n = v_n + \frac{2}{3}$ donc
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{2}{3}$.

7. Convergence monotone

103. a. Faux : $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ est croissante (strictement) et tend vers 1.

b. Faux : $(n + (-1)^n \times 2)$ tend vers $+\infty$ mais n'est pas croissante.

104. (u_n) est strictement croissante car $u_{n+1} - u_n = p_n + 10^{-\varphi_{n+1}}$ où p_n est le n^e nombre premier et φ_{n+1} la somme des nombres de chiffres utilisés pour écrire les $n+1$ premiers nombres premiers, c'est-à-dire la position après la virgule du $(n+1)^e$ nombre premier dans le nombre d'Erdős.

(u_n) est majorée par 1 car $u_n \leq 0,9 \dots 9$.
 (u_n) est croissante et majorée, elle admet donc une limite finie, elle converge vers une limite finie.

105. 1. $u_{n+1} - u_n = 1,9 \dots 335 \dots 555$
 $= -0,0 \dots 0 \underbrace{19 \dots 945}_{n \text{ fois}} < 0$

donc (u_n) est décroissante.

(u_n) est minorée par 1

$$(u_n = 1 + 0, \underbrace{3 \dots 3}_{n \text{ fois}} + 0, \underbrace{0 \dots 0}_{n \text{ fois}} \underbrace{5 \dots 5}_{n \text{ fois}})$$

Donc (u_n) converge vers une limite finie.

$$\begin{aligned} 2. \quad u_n - \frac{4}{3} &= 1, \underbrace{3 \dots 3}_{n \text{ fois}} \underbrace{5 \dots 5}_{n \text{ fois}} - 1, \underbrace{3 \dots 3}_{\infty} \\ &= 1, \underbrace{0 \dots 0}_{n \text{ fois}} \underbrace{1 \dots 6}_{\infty} \leq 1, \underbrace{0 \dots 0}_{n \text{ fois}} \\ &= 2 \cdot 10^{-n} \leq 2 \cdot 10^{-n}. \end{aligned}$$

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{10^n} = 0$ donc comme $\left|u_n - \frac{4}{3}\right| \leq \frac{2}{10^n}$;
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n - \frac{4}{3}\right) = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{4}{3}$.

106. Même résolution que **104.**

(u_n) est croissante et majorée donc converge vers une limite finie.

107. 1. Démonstration analogue à l'exercice **132.**

2. Pour $M < l$, on choisit l un intervalle contenant l et non contenant par M . Alors il existera une infinité de termes u_n inférieur à M à partir d'un certain rang.

3. D'après **1.** (u_n) est majorée par l . D'après **2.** c'est le plus petit.

108. 1. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^3} > 0$ donc (u_n) est croissante.

2. $u_1 = 1$ et $2 - \frac{1}{1} = 1$ donc $u_1 \leq 2 - \frac{1}{1}$;
 $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$,
 $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)^3}$ donc

$$u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^3}.$$

$$\text{Or } 2 - \frac{1}{n+1} - \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^3}\right)$$

$$= \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^3} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^3}$$

$$= \frac{(n+1)^2 - n}{(n+1)^3} = \frac{n^2 + n + 1}{(n+1)^3} > 0$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$; $P(n+1)$ est vraie.

3. (u_n) est majorée par 2.

109 A. 1. $x^2 - x - 1 = 0$; $\Delta = 5$;

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

$x_1 < 0$ car $4 < 5$ donc $\sqrt{5} > 2$; x_2 est l'unique solution positive.

2. $4 < 5 < 9$ donc $2 < \sqrt{5} < 3$ ($\sqrt{}$ croissante sur $[0; +\infty[$) d'où $\frac{3}{2} < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} < 2$.

3. Φ est une solution de $X^2 - X - 1 = 0$ donc $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$; d'où $\Phi^2 - \Phi + 1$. Comme $\Phi > 0$, on obtient $\sqrt{\Phi^2} = \Phi = \sqrt{\Phi + 1}$. $\Phi \neq 0$ donc $\Phi^2 = \Phi + 1 \Leftrightarrow \Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} \Leftrightarrow \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$.

B. 1. $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

2. $u_1 = 1$ et $1 < \varphi < 2$ donc $1 < u_1 < \varphi$;
 $P(1)$ est vraie.

Hérédité : On suppose $1 < u_n < \varphi$

donc $2 \leq 1 + u_n \leq 1 + \varphi$,
d'où $\sqrt{2} \leq \sqrt{1 + u_n} \leq \sqrt{1 + \varphi} = \varphi$;
 $P(n+1)$ est vérifiée.

$$\begin{aligned} 3. \quad u_{n+1} - u_n &= \sqrt{1 + u_n} - u_n \\ &= (\sqrt{1 + u_n} - u_n) \frac{\sqrt{1 + u_n} + u_n}{\sqrt{1 + u_n} + u_n} \\ &= \frac{1 + u_n - u_n^2}{\sqrt{1 + u_n} + u_n} \end{aligned}$$

$$\text{car } \underbrace{\sqrt{1 + u_n}}_{>0} + \underbrace{u_n}_{\geq 0} \neq 0.$$

Comme $\sqrt{1 + u_n} + u_n > 0$, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui de $1 + u_n - u_n^2$.

x	$-\infty$	$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
Signe de $(1 + x - x^2)$	-	0	+	0	-

Comme on a montré que $1 \leq u_n \leq \Phi$
 $\forall n \in \mathbb{N}$, on a donc : $1 + u_n - u_n^2 \geq 0$
 $\forall n \in \mathbb{N}$; donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$; (u_n) est croissante.

$$\begin{aligned} 4. \quad u_n &= \Phi = 1 + u_n - (1 + \Phi) \\ &= u_{n+1}^2 - \Phi^2 = (u_{n+1} - \Phi)(u_{n+1} + \Phi). \end{aligned}$$

$$\text{Or } u_{n+1} + \Phi \geq 2 \text{ donc } \frac{u_n - \Phi}{u_{n+1} - \Phi} \geq 2.$$

$$u_n - \Phi \leq 0 \text{ et } u_{n+1} - \Phi < 0 \text{ donc}$$

$$\frac{u_n - \Phi}{u_{n+1} - \Phi} = \frac{|u_n - \Phi|}{|u_{n+1} - \Phi|} \geq 2; \text{ d'où}$$

$$|u_{n+1} - \Phi| \leq \frac{1}{2} |u_n - \Phi|.$$

$$5. \quad |u_n - \Phi| = \Phi - u_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{2}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2};$$

$$2 \leq \sqrt{5} \leq 3 \text{ donc } \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \leq 1 = \frac{1}{2^0} = \frac{1}{2^{1-1}};$$

$P(1)$ est vérifiée.

Hérédité :

$$\text{Supposons } P(n) : |u_n - \Phi| \leq \frac{1}{2^{n-1}};$$

On vient de montrer que :

$$|u_{n+1} - \Phi| \leq \frac{1}{2} |u_n - \Phi|;$$

$$\text{donc } |u_{n+1} - \Phi| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n+1-1}};$$

$P(n+1)$ est vérifiée.

6. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \Phi$ d'où $\Phi = \sqrt{1 + \dots + \sqrt{1}}$.

7. Soit $\varepsilon > 0$ si $\varepsilon \geq \frac{1}{2^{n-1}}$ alors $|u_n - \Phi| \leq \varepsilon$

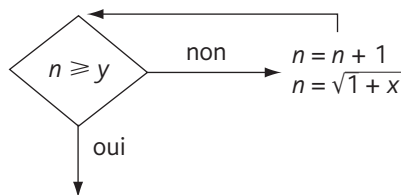
$$\varepsilon \geq \frac{1}{2^{n-1}} \Leftrightarrow 2^{n-1} \geq 1 \Leftrightarrow (n-1) \ln 2 + \ln \varepsilon \geq 1$$

$$\Leftrightarrow n - 1 \geq \frac{1 - \ln \varepsilon}{\ln 2} \Leftrightarrow n \geq 1 + \frac{1 - \ln \varepsilon}{\ln 2}.$$

8. • Entrer ε .

• Poser $n = 1, x = 1$.

$$\bullet y = 1 + \frac{1 - \ln \varepsilon}{\ln 2}.$$

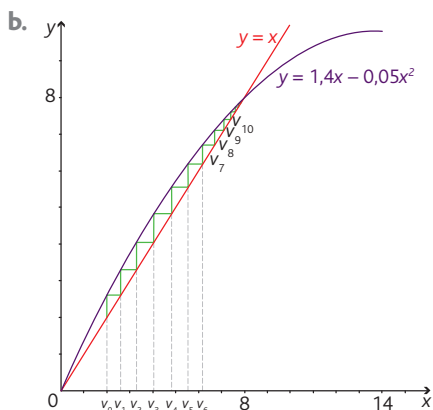


• Afficher x.

110. 1. a.

x	0	8
f(x)		

$f'(x) = 1,4 - 0,1x$
 $f'(x) > 0$ sur $[0; 8]$



c. On conjecture que (v_n) est croissante de limite finie 8.

3. $v_0 = 2$; $v_1 = 2,6$; $2 \leq v_0 \leq v_1 \leq 8$; $P(0)$ est vérifiée.

Hérédité :

Supposons $P(n) : 2 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 8$.

Par hypothèse, on a : $2 \leq v_{n+1}$

De même $v_{n+1} \leq 8$ et comme f est croissante sur $[0; 8]$,

$$f(v_{n+1}) \leq f(8)$$

soit $v_{(n+1)+1} \leq f(8) = 8$.

Enfin

$$\begin{aligned} v_{n+2} - v_{n+1} &= 1,4v_{n+1} - 0,05v_{n+1}^2 - v_{n+1} \\ &= 0,4v_{n+1} - 0,05v_{n+1}^2 \\ &= \underbrace{v_{n+1}}_{\geq 0} \underbrace{(0,4 - 0,05v_{n+1})}_{\geq 0} \end{aligned}$$

car $v_{n+1} \geq 0$ $v_{n+1} \in [0; 8]$

donc $v_{n+2} - v_{n+1} \geq 0$

soit $v_{n+2} \geq v_{n+1}$.

Récapitulons : $2 \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 8$;

$P(n+1)$ est vérifiée.

4. L'inégalité montrée en **2.** prouve que (v_n) est croissante et majorée, elle converge donc vers une limite finie.

$$\begin{aligned} f(x) - 8 &= 1,4x - 0,05x^2 - 8 \\ &= -0,05(x^2 - 28x + 160) \\ &= -0,05(x - 20)(x - 8) \end{aligned}$$

a. $8 - f(x) = 0,05(x - 20)(x - 8)$
d'où $8 - v_{n+1} = 0,05(v_n - 20)(v_n - 8)$
 $= 5(20 - v_n)(8 - v_n)$
 $12 \leq 20 - v_n \leq 18 \text{ car } v_n \in [2; 8]$

d'où $8 - v_{n+1} \leq 0,05 \times 18(8 - v_n)$
 $\leq 0,9(8 - v_n)$.

b. Par récurrence : $P(0) : v_0 = 2$
 $8 - v_0 = 6$; $0,9^0 \times 6 = 1 \times 6 = 6$
d'où $8 - v_0 \leq 6 \times 0,9^0$
donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose $8 - v_n \leq 6 \times 0,9^n$;
D'après **a.** $8 - v_{n+1} \leq 0,9(8 - v_n)$
donc $8 - v_{n+1} \leq 0,9 \times 6 \times 0,9^n$
 $\leq 6 \times 0,9^{n+1}$

donc $P(n+1)$ est vraie.

c. $8 - v_n = |8 - v_n|$ car $0 \leq v_n \leq 8$
donc $|8 - v_n| \leq 6 \times 0,9^n$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6 \times 0,9^n = 0$ car $0 < 0,9 < 1$;
d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} (8 - v_n) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 8$.

8. Problèmes

111. 1. $u_2 = 1 + 1 = 2$;
 $u_3 = 2 + 1 = 3$; $u_4 = 3 + 2 = 5$;
 $u_5 = 5 + 3 = 8$; $u_6 = 8 + 5 = 13$.

2. $B_4 : = B_2 + B_3$;
 $C_3 : = B_3/B_2$.

3. On conjecture que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une limite finie ($\approx 1,618...$).

4. a. Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = u_0 q^n$
 $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ par définition ;
 (u_n) est strictement croissante et $u_0 = 1$
donc $u_n > 0$

d'où $\frac{u_{n+2}}{u_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} + 1$

soit $q^2 = q + 1$ ou $q^2 - q - 1 = 0$.

$\Delta = 1 + 4 = 5$ donc il y a 2 solutions à cette équation donc 2 raisons possibles pour la suite.

b. On vient de montrer que $q_i^2 = q_i + 1$
 $q_i \neq 0$ car $0 \neq 0 + 1$ donc $q_i = 1 + \frac{1}{q_i}$
soit $\frac{1}{q_i} = q_i - 1$.

5. $f_{n+2} = \lambda q_1^{n+2} + \mu q_2^{n+2}$
 $= \lambda q_1^2 q_1^n + \mu q_2^2 q_2^n$
 $= \lambda(1 + q_1)q_1^n + \mu(1 + q_2)q_2^n$
 $= \lambda q_1^n + \lambda q_1^{n+1} + \mu q_2^n + \mu q_2^{n+1}$
 $= f_n + f_{n+1}$

a. $f_0 = \lambda + \mu = 1 = u_0$
 $f_1 = \lambda q_1 + \mu q_2 = 1 = u_1$
 $\rightarrow u_0 = \frac{1 - q_1}{q_2 - q_1} ; \lambda_0 = \frac{1 - q_2}{q_2 - q_1}$

(car $q_2 - q_1 \neq 0$ car on a montré que ce sont des racines distinctes ($\Delta \neq 0$)).

(μ_0, λ_0) est la solution du système à 2 inconnues, 2 équations donc unique.

$P(n) : u_n = \lambda_0 q_1^n + \mu_0 q_2^n$.

b. On a trouvé $u_0 = f_0 = \lambda_0 + \mu_0$ et $u_1 = f_1 = \lambda_0 q_1 + \mu_0 q_2$
donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

Hérédité : $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ ($n \geq 2$)
donc

$$\begin{aligned} u_n &= \lambda_0 q_1^{n-1} + \mu_0 q_2^{n-1} + \lambda_0 q_1^{n-2} + \mu_0 q_2^{n-2} \\ \text{par récurrence.} \\ u_n &= \lambda_0(q_1 + 1)q_1^{n-2} + \mu_0(q_2 + 1)q_2^{n-2} \\ &= \lambda_0 q_1^2 q_1^{n-2} + \mu_0 q_2^2 q_2^{n-2} \\ &= \lambda_0 q_1^n + \mu_0 q_2^n. \end{aligned}$$

c. $q_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$; $q_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

$4 < 5 < 9$ donc $2 < \sqrt{5} < 3$

donc $-1 < q_1 < -\frac{1}{2}$.

De même $q_2 > 1$.

D'où $q_1^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et $q_2^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

$$u_0 = \frac{1 - q_1}{q_2 - q_1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} > 0$$

donc $u_0 q_2^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$;

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (somme de limites)

Quant à $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\lambda_0 q_1^{n+1} + \mu_0 q_2^{n+1}}{\lambda_0 q_1^n + \mu_0 q_2^n} \\ &= \frac{q_2^{n+1}}{q_2^n} \frac{\lambda_0 \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^{n+1} + \mu_0}{\lambda_0 \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^n + \mu_0} \end{aligned}$$

$$\frac{\lambda_0 \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^{n+1} + \mu_0}{\lambda_0 \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^n + \mu_0}$$

Comme $q_1 < q_2$ et $q_2 > 0$, $\frac{q_1}{q_2} < 1$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^n = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = q_2 \times \frac{\mu_0}{\mu_0} = q_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

112. 1. Pour tout $n \geq 1$, $H_{n+1} - H_n > 0$.

2. H_n est majorée.

3. L'algorithme permet le calcul d'un entier p tel que $H_p \geq M$.

4. Les entiers p sont extrêmement grands.

5. On est tenté de conjecturer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$ mais sans certitude.

6. a. (u_{2^n}) est extraite de (u_n) donc, si $u_n \in I$ alors $u_{2^n} \in I$, du fait que $2^n \geq n$.

b. Si (u_{2^n}) ne converge pas, alors (u_n) ne converge pas.

c. Un raisonnement par récurrence permet d'établir que $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$.

7. Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_{2^n} = +\infty$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$.

$$\textbf{113. 1. } u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times (-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Donc (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

$$\textbf{2. a. } v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times (-1) = 1.$$

$$\textbf{b. } v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}v_n.$$

c. Donc (v_n) est géométrique.

$$\textbf{d. } \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{2^n}.$$

$$\textbf{3. a. } w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{-1}{1} = -1.$$

$$\begin{aligned} \textbf{b. } w_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1}} \\ &= \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{v_n + \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}v_n - \frac{1}{4}u_n} \\ &= \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n - \frac{1}{4}u_n} = 2 + \frac{u_n}{v_n} = 2 + w_n. \end{aligned}$$

c. Ainsi (w_n) est arithmétique de raison 2.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -1 + 2n$.

$$\textbf{4. } \text{Donc, } u_n = w_n \times v_n = (2n - 1) \times \frac{1}{2^n} = \frac{2n - 1}{2^n}.$$

5. Immédiat.

114. 1. p_0 est la population en 1969 exprimée en milliers.

Par hypothèse : $p_0 = 44\,500$.

2. Par données,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + \frac{35}{1000}p_n + 25 - \frac{17}{1000}p_n - 9 \\ &= 1,018p_n + 16. \end{aligned}$$

3. On cherche l tel que $u_{n+1} = ku_n$ avec $u_n = p_n - l$

$$u_{n+1} = 1,018p_n + 16 - l = kp_n - kl$$

$$\text{On obtient } k = 1,018p_n \text{ et } l = -\frac{8000}{9}.$$

$$\textbf{4. } u_n = p_n + \frac{8000}{9} \text{ et}$$

$$u_n = u_0(1,018)^n = \left(44\,500 + \frac{8000}{9}\right) 1,018^n$$

$$\begin{aligned} p_n &= u_n - l = u_0(1,018)^n - \frac{8000}{9} \\ &= \left(44\,500 + \frac{8000}{9}\right) 1,018^n - \frac{8000}{9}. \end{aligned}$$

5. Population en 2012 :

$$\begin{aligned} p_{43} &= \left(44\,500 + \frac{8000}{9}\right) 1,018^{43} - \frac{8000}{9} \\ &\approx 96\,858. \end{aligned}$$

6. $p_m = 3p_0$

$$\Leftrightarrow 3 \times 44\,500 = \left(44\,500 + \frac{8000}{9}\right) 1,018^m - \frac{8000}{9}$$

$$\Leftrightarrow 1,018^m = \left(133\,500 + \frac{8000}{9}\right) \left(44\,500 + \frac{8000}{9}\right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1}{\ln 1,018} \left(\ln \left(133\,500 + \frac{8000}{9}\right) - \ln \left(44\,500 + \frac{8000}{9}\right) \right)$$

$$\Leftrightarrow m \approx 61.$$

La population en 2030 sera le triple de celle de 1969.

$$\begin{aligned} \textbf{115. a. } 10w_{10} &= 11w_9 + 1 \\ &= 209 + 1 = 210 \end{aligned}$$

d'où $w_{10} = 21$.

b. On conjecture que $w_n = 1 + 2n$ ($P(n)$).

c. $w_0 = 1 = 1 + 2 \times 0$; $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $w_n = 1 + 2n$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } (n+1)w_{n+1} &= (n+2)w_n + 1 \\ &= n + 2 + 2n^2 + 4n + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } w_{n+1} &= \frac{2\left(n^2 + \frac{5}{2}n + \frac{3}{2}\right)}{n+1} \\ &= 2\left(n + \frac{3}{2}\right) = 2n + 3 \\ &= 2(n+1) + 1; \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

$$\textbf{d. } w_{2013} = 1 + 2 \times 2013 = 4027.$$

$$\textbf{116. 1. } u_1 = \frac{1}{3} \times 1 + 0 - 2 = -\frac{5}{3};$$

$$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 1 - 2 = -\frac{14}{9};$$

$$u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 - 2 = -\frac{14}{27}.$$

$$\textbf{2. } u_4 = \frac{1}{3}u_3 + 3 - 2 = 1 - \frac{14}{81} \geq 0.$$

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie :

$u_n \geq 0$ avec $n \geq 4$.

$$\text{Alors } u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$$

$$\text{donc } u_{n+1} \geq 0$$

car $\frac{1}{3}u_n \geq 0$ et $n - 2 \geq 0$ pour $n \geq 4$;

$P(n+1)$ est vraie.

3. On a $u_n \geq 0$ et $u_5 = \frac{1}{3}u_4 + 4 - 2$

$$\text{donc } u_5 \geq 4 - 2 = 2 = 5 - 3$$

$P(n)$ est vraie pour $n = 5$.

Hérédité : Supposons $u_n \geq n - 3$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$.

$$\text{Alors } u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$$

$$\text{donc } u_{n+1} \geq \frac{n-3}{3} + n - 2$$

$$u_{n+1} \geq \frac{n}{3} + n - 3$$

$$\text{donc } u_{n+1} \geq n - 2 \text{ car } \frac{n}{3} \geq \frac{5}{3} \geq 1$$

pour $n \geq 5$

$$u_{n+1} \geq (n+1) - 3 ; P(n+1) \text{ est vraie.}$$

4. On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n-3) = +\infty$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

$$\textbf{117. A. 1. } 1 - u_0 = 13 = 1 + \frac{12}{1} = 1 + \frac{12}{5^0}$$

$P(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{12}{5^{n+1}} + \frac{4}{5} \\ &= 1 + \frac{12}{5^{n+1}}. \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} \textbf{2. a. } S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^n u_k \\ &= u_{n+1} = 1 + \frac{12}{5^{n+1}} \geq 0. \end{aligned}$$

donc $S(n)$ est croissante.

$$\begin{aligned} \textbf{b. } S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{12}{5^k}\right) = (n+1) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{12}{5^k} \\ &= (n+1) + 12 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} \end{aligned}$$

$$= n + 1 + 15 \times \left(1 + \frac{1}{5^{n+1}}\right)$$

$$= n + 16 - \frac{3}{5^n}.$$

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 16) = +\infty$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

B. P1 est fausse : $x_n = 1$ (x_n) converge vers 1 mais $S_n = n + 1$ tend vers $+\infty$.

P2 est fausse : $x = \frac{1}{2^n}$ (x_n) est décroissante et (S_n) est croissante.

118. 1. Si u_0 est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_0 = 2k$;

d'où $u_1 = -\sin\left(\frac{\pi}{2}2k\right) = -\sin(k\pi) = 0$.

Il est alors clair que $u_n = 0$ pour $n \geq 1$

car $u_2 = -\sin\frac{\pi}{2}u_1 = -\sin 0 = 0$;

$u_3 = -\sin\frac{\pi}{2}u_2 = -\sin 0 = 0$;

(ou récurrence).

2. Soit u_0 impair : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_0 = 2k + 1$.

$u_1 = -\sin\left(\frac{\pi}{2}(2k + 1)\right) = -\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

donc $u_1 = -1$ ou 1 ; P(1) est vraie.

Hérédité : $u_n \in \{-1 ; 1\}$.

Alors $u_{n+1} = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

ou $u_{n+1} = -\sin\frac{\pi}{2}$,

donc $u_{n+1} = -1$ ou 1 ,

$u_{n+1} \in \{-1 ; 1\}$

P(n + 1) est vraie.

3. sin est à valeur dans $[-1 ; 1]$ donc (u_n) est à valeur dans $[-1 ; 1]$.

Partie B.

4. a.

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
sinx	-1	0	1

d'où

x	-1	0	1
$-\sin\frac{\pi}{2}x$	1	0	-1

b. Pour $n \geq 1$, $u_n \in [-1 ; 1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$\min(u_0, -1) \leq u_n \leq \min(u_0, 1)$

donc (u_n) est bornée.

c. (u_n) est donc convergente si et seulement si elle est monotone.

5. a. Pour tout $x \in]-1 ; 0[\cup]0 ; 1[$,

$\frac{\pi}{2}x \in]-\frac{\pi}{2} ; 0[\cup]0 ; \frac{\pi}{2}[$.

Or sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ sinx est nul seulement en 0 et $|\sin x| = 1$ seulement en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$;

donc $f(x) \in]-1 ; 0[\cup]0 ; 1[$.

b. P(0) est vraie par définition.

Hérédité : supposons P(n) vraie : u_n n'est pas entier.

Alors

$u_{n+1} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}u_n\right) \in]-1 ; 0[\cup]0 ; 1[$

puisque u_n n'est pas entier ;

P(n + 1) est vérifiée.

6. a. À partir du tableau en **4. a.**, on déduit que $f(]-1 ; 0]) =]0 ; 1[$ et

$f(]0 ; 1]) =]-1 ; 0[$.

b. $u_{n+1} = f(u_n)$

donc si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} < 0$

et $u_{n+2} = f(u_{n+1}) > 0$;

et si $u_n < 0$ alors $u_{n+1} > 0$

et $u_{n+2} = f(u_{n+1}) < 0$.

Donc (u_n) n'est pas monotone.

7. On est en contradiction avec la condition nécessaire en **4. c.** donc (u_n) ne converge pas quand $u_0 \notin \mathbb{N}$.

En route vers le bac (p. 48-49)

120. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$P_{(n)} : u_n = -7 \times 2^{n+8}$.

• $P_{(0)}$ est vraie, car $u_0 = 1$;

• Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P_{(n)}$ est vraie.

$u_{n+1} = 2(-7 \times 2^n + 8) - 8 = -7 \times 2^{n+1} + 8$

donc $P_{(n)}$ est héréditaire.

On conclut.

121. On procède comme pour l'exercice précédent :

soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 2 + \frac{1}{3^n - 1}$,

alors :

$$u_{n+1} = \frac{5\left(2 + \frac{1}{3^n - 1}\right) - 4}{2\left(2 + \frac{1}{3^n - 1}\right) - 1} = \frac{(6 \times 3^n - 2) + 1}{3 \times 3^n - 1} = 2 + \frac{1}{3^{n+1} - 1}.$$

De plus, $u_1 = \frac{5}{2}$.

122. Vrai. Vrai. Vrai. Faux ($u_n = n$).

123. 1.

Début

U prend la valeur 1

Saisir N

Pour I allant de 0 à N - 1,

de 1 en 1

U prend la valeur

U + 2 × I + 3

Afficher U

Fin de Pour

Fin

3. On obtient alors :

$u_0 = 1 ; u_1 = 4 ; u_2 = 9 ; u_3 = 16 ;$

$u_4 = 25 ; u_5 = 36 ; u_7 = 64 ; u_8 = 81 ;$

$u_9 = 100$ et $u_{10} = 121$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2n + 3 > 0$; (u_n) est strictement croissante.

5. a. • $u_0 = 1$ donc $u_0 > 0^2$;

• soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > n^2$;

Variables

U un réel

N un entier

I un entier

alors $u_{n+1} > (n + 1)^2$,

(car $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ donc

$u_{n+1} > n^2 + 2n + 3 > n^2 + 2n + 1$).

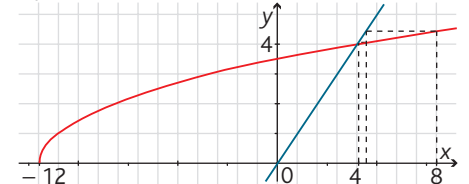
b. D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$.

6. On montre sans difficulté que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n + 1)^2$.

124. 1. $u_0 \geq 4$;

$u_n \geq 4 \Rightarrow \sqrt{u_n + 12} \geq 4$, car $u \mapsto \sqrt{u}$ est croissant sur $[4 ; +\infty[$.

2.



(u_n) semble converger vers 4 en étant décroissante et minorée par 4.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 4 = \sqrt{u_n + 12} - 4$;

soit $u_{n+1} - 4 = \frac{u_n - 4}{\sqrt{u_n + 12} + 4}$;

avec $\sqrt{u_n + 12} \geq 4 \geq 0$

d'où $0 \leq u_{n+1} - 4 \leq \frac{1}{4}(u_n - 4)$.

b. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, on en déduit que :

$0 \leq u_n - 4 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

4. Le théorème des gendarmes apporte la conclusion souhaitée.

125. Soit $x \geq 0$ et $k > x$ ($k \in \mathbb{N}$) donc $k \geq 1$.

a. Pour $k = n$ c'est évident.

Soit $k \leq n$ fixé tel que $\frac{k^n}{k!} \leq \frac{k^k}{k!}$;

on sait que $n \geq k$ donc $n + 1 \geq k$ et donc

$0 < \frac{k}{n+1} \leq 1$.

Ainsi $\left(\frac{k}{n+1}\right) \times \frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^n}{n!}$;

soit $\frac{k^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{k^n}{n!}$.

b. Soit $n \geq k$, $\frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{k^n} \times \frac{k^n}{n!} = \left(\frac{n}{k}\right)^n \times \frac{k^n}{n!}$

et ce qui précède fournit la majoration attendue.

c. Vu que $k > x$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{k}\right)^n = 0$ on peut donc conclure.

2. a. Soit $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \frac{n^{n-1}}{n!} &= \frac{1 \times \overbrace{n \times \dots \times n}^{(n-1) \text{ facteurs}}}{1 \times 2 \times \dots \times n} \\ &= 1 \times \left(\frac{n}{2}\right) \times \left(\frac{n}{3}\right) \times \dots \times \left(\frac{n}{n}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{n^{n-1}}{n!} \geq 1$, pour $n \geq 2$.

b. Soit $n \geq 2$.

$\frac{n^n}{n!} = n \times \frac{n^{n-1}}{n!}$.

Ainsi, $\frac{n^n}{n!} \geq n$.

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^n}{n!}\right) = +\infty$.

126. a. Vrai. b. Faux. c. Vrai.

127. a. Faux. b. Vrai. c. Faux. d. Faux.

128. a. Faux. b. Vrai. c. Vrai.

129. a. Vrai. b. Vrai. c. Vrai. d. Vrai.

130. a. Vrai. b. Faux. c. Faux. d. Faux. e. Vrai.

131. Soit l_1 et l_2 deux réels tels que $l_1 \neq l_2$.

Soit alors I_1 et I_2 deux intervalles tels que $l_1 \in I_1$ et $l_2 \in I_2$ et $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.

(C'est possible car $l_1 \neq l_2$.)

• (u_n) converge vers l_1 donc tous les u_n sont contenus dans I_1 à partir d'un rang N_1 .

• (u_n) converge vers l_2 donc tous les u_n sont contenus dans I_2 à partir d'un rang N_2 .

Conclusion : à partir d'un rang supérieur ou égal aux rangs N_1 et N_2 , les u_n sont contenus dans I_1 et dans I_2 . Ce qui est absurde car $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$.

132. Soit (u_n) telle que :

$\begin{cases} \bullet (u_n) \text{ est décroissante ;} \\ \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \end{cases}$.

Supposons qu'il existe $u_p < 0$.

Soit I un intervalle contenant O mais pas u_p . Il existe un rang q à partir duquel tous ces u_n sont contenus dans I . Or à partir d'un rang supérieur égal à p et q , les u_n sont dans les intervalles I et $]-\infty ; u_p]$ (car (u_n) est décroissante). Ce qui est absurde.

133. 1. Il existe deux rangs N_1 et N_2 tels que :

• À partir du rang N_1 tous les u_n sont contenus dans I ;

• À partir du rang N_2 tous les w_n sont contenus dans I .

2. Prenons un rang N supérieur ou égal à N_1 et aussi à N_2 . Alors, à partir de ce rang N , les u_n et les v_n sont contenus dans l'intervalle I donc aussi tous les réels compris entre eux deux. Ainsi, à partir du rang N , l'intervalle $[u_n ; w_n]$ est inclus dans I , donc $w_n \in I$, ce que l'on voulait.

Accompagnement personnalisé (p. 50-51)

134. $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} k(k+1)$; $u_0 = 0 = \frac{0(0+1)(0+2)}{3}$, $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie ;

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)(n+2) + u_n = (n+1)(n+2) + \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \\ &= (n+1)(n+2) \left(1 + \frac{n}{3}\right) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1((n+1)+3))}{3} ; P(n+1) \text{ est vérifiée.} \end{aligned}$$

135. $u_0 = 1$; $u_1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{u_0}} = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{u_1}} = \frac{1}{3}$; $u_3 = \frac{1}{1 + \frac{1}{u_2}} = \frac{1}{4}$.

$P(n) : u_n = \frac{1}{n+1}$?

Hérédité : On suppose $u_n = \frac{1}{n+1}$.

Alors $u_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{u_n}} = \frac{1}{1 + n + 1} \Rightarrow P(n+1)$ est vérifiée.

136. $P(0) : 1 \geq 1 = 2^0$ donc $v_0 \geq 2^0$; $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $v_n \geq 2^n$.

Alors $v_{n+1} = v_n^2 + 1$.

$v_{n+1} \geq (2^n)^2 + 1 = 2^{2n} + 1 \geq 2^{n+1}$ pour $n \geq 1$.

si $n = 0$ $(2^0)^2 + 1 = 2 \geq 2^{0+1} = 2$.

$v_{n+1} \geq 2^{n+1}$.

137. w_n est un quotient de facteurs positifs donc $w_n \geq 0$.

$1 - w_n = \frac{n^2 + 1 - n}{1 + n^2} = \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{1 + n^2} \geq 0$ donc $1 \geq w_n$.

138. $x_1 = \sqrt{-3 + 4} = 1$ donc $0 \leq x_1 \leq 4$; $P(n)$ est vraie.

Hérédité : On suppose $0 \leq x_n \leq 4$.

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4} \geq 0$$

$$\text{et } 3 \times 0 + 4 \leq 3x_n + 4 \leq 3 \times 4 + 4 = 16$$

d'où $\sqrt{4} \leq \sqrt{3x_n + 4} \leq \sqrt{16} = 4$ donc $x_{n+1} \leq 4$ ($\sqrt{\quad}$ est croissante).

D'où $0 \leq x_{n+1} \leq 4$; $P(n+1)$ est vérifiée.

139. $w_1 = \frac{n \times 1}{n(n + \frac{1}{n})}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_1 = \frac{1}{n + \frac{1}{n}}$.

$$\lim_{+\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right) = \lim_{+\infty} n + \lim_{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty \text{ donc } \lim_{+\infty} w_n = 0.$$

$$\begin{aligned} \textbf{140. } 4 - x_{n+1} &= 4 - \sqrt{3x_n + 4} \times \frac{4 + \sqrt{3x_n + 4}}{4 + \sqrt{3x_{n+1} + 4}}, \\ &\quad \text{car } 4 + \sqrt{3x_n + 4} \geq 4 > 0. \\ &= \frac{16 - 3x_n - 4}{4 + x_{n+1}} = 3 \frac{(4 - x_n)}{4 + x_{n+1}} \leq 3 \frac{4 - x_n}{4} \\ &\quad \text{car } x_{n+1} \geq 0. \end{aligned}$$

$$4 - x_{n+1} \leq \frac{3}{4} (4 - x_n) \Leftrightarrow |4 - x_{n+1}| \leq \frac{3}{4} |4 - x_n| \text{ car } 0 \leq x_n \leq 4.$$

$$|4 - x_0| = 5 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0 \times 5 \quad P(n) : |4 - x_n| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \times 5 \text{ est vraie pour } n = 0.$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $P(n)$ vraie.

$$\text{On sait que } |4 - x_{n+1}| \leq \frac{3}{4} |4 - x_n|$$

$$\text{donc } |4 - x_{n+1}| \leq \frac{3}{4} \frac{3^n}{4} \times 5 = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \times 5 \quad P(n+1) \text{ est vraie.}$$

$$\text{Comme } \frac{3}{4} \in [0; 1[, \lim_{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \text{ donc } \lim_{+\infty} x_n = 4.$$

141. $a_0 = 0$; $a_1 = a_0 + 2 \times 0 + 1 = 1$; $a_2 = a_1 + 2 + 1 = 4$;
 $a_3 = a_2 + 4 + 1 = 9$; $a_4 = a_3 + 6 + 1 = 16$.

$$P(n) : a_n = n^2.$$

$P(0)$ est évident.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $a_n = n^2$;
 $a_{n+1} = a_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$; $P(n+1)$ est vérifiée.

142. $b_0 = 0$; $b_1 = 0^2 + 1 = 1$; $b_2 = 1^2 + 1 = 2$; $b_3 = 2^2 + 1 = 5$;
 $b_4 = 5^2 + 1 = 26$.

$$P(n) : b_n \geq 1 + n.$$

$$b_3 = 5 \geq 3 + 1 \text{ donc } P(3) \text{ est vraie.}$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, on suppose $P(n)$ vraie :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= (b_n)^2 + 1 \geq (n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 \\ &= n(n+2) + 1 \end{aligned}$$

$$\text{donc } b_{n+1} \geq (n+2) + 1 = ((n+1) + 1) \text{ car } n \geq 1 \text{ pour } n \geq 3, \\ \text{donc } n(n+2) \geq n+2.$$

$$\lim_{+\infty} (1+n) = +\infty \text{ et } b_n \geq n+1.$$

On en déduit que $\lim_{+\infty} b_n = +\infty$.

143. Soit u_{n+1} l'intersection de la tangente à $\mathcal{C}$ en $(u_n, f(u_n))$ avec l'axe des abscisses.

$$f \text{ est dérivable sur } [0, +\infty[\text{ donc : } f'(u_n) = \frac{f(u_n) - 0}{u_n - u_{n+1}}$$

$$u_n - u_{n+1} = \frac{u_n^2 - 2}{2u_n} \quad (u_n \neq 0 \text{ car } u_n \in]0; +\infty[)$$

$$\text{d'où } u_{n+1} = u_n - \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

1. $1 < 2 < 4$ donc $\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$ car $\sqrt{\quad}$ est croissante sur $]0, +\infty[$ d'où $1 < \sqrt{2} < 2$.

2. (u_n) est définie si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

• $u_0 = 2 > 0$ donc $P(0)$ est vraie ;

• Hérédité : Supposons $u_n > 0$ pour n donné.

$$\text{Alors } u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) > 0 \quad P(n+1) \text{ est vraie.}$$

3. $P(n) : 1 \leq u_n \leq 2$ $P(0)$ est vraie car $1 \leq u_0 \leq 2$ ($u_0 = 2$).

Hérédité : On suppose que $1 \leq u_n \leq 2$ pour n donné.

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \text{ donc } 1 \leq \frac{2}{u_n} \leq 2 \text{ car } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_n} \leq 1 \text{ et alors}$$

$$1 + 1 \leq u_n + \frac{2}{u_n} \leq 2 + 2 \quad \text{d'où} \quad \frac{1+1}{2} \leq u_{n+1} \leq \frac{2+2}{2},$$

$1 \leq u_{n+1} \leq 2$; $P(n+1)$ est vérifiée.

$$\begin{aligned} \textbf{4. } u_{n+1} - \sqrt{2} &= \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n} - \sqrt{2} = \frac{2u_n^2 - u_n^2 + 2}{2u_n} \\ &= u_n - \frac{u_n^2 - 2}{2u_n} - \sqrt{2} = u_n - \sqrt{2} - \frac{(u_n - \sqrt{2})(u_n + \sqrt{2})}{2u_n} \\ &= (u_n - \sqrt{2}) \left(1 - \frac{u_n + \sqrt{2}}{2u_n}\right) = (u_n - \sqrt{2}) \frac{u_n - \sqrt{2}}{2u_n} \\ &= \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \times \frac{1}{2u_n}. \end{aligned}$$

$$\text{Comme } \frac{1}{u_n} \leq 1 \quad (u_n \geq 1) \text{ on a donc } u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2}.$$

5. L'écart d'un terme à $\sqrt{2}$ est inférieur à la moitié de l'écart au carré du terme précédent à racine de 2.

Dès que $u_n - \sqrt{2}$ devient inférieur à 1, l'écart diminue d'autant plus vite, puisque $(u_n - \sqrt{2})^2 \leq (u_n - \sqrt{2})$.

6. Récurrence : $P(n) : |u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

$$P(0) : u_0 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} \leq 2 - 1 = 1 \text{ car } \sqrt{2} \geq 1.$$

$$\frac{1}{2^{2^0 - 1}} = 1 \text{ d'où } P(0) \text{ est vérifiée.}$$

Hérédité : Supposons que $P(n)$ est vraie pour un n donné :

$$\text{On a vu : } |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} (u_n - \sqrt{2})^2$$

$$\text{donc } |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} (u_n - \sqrt{2})^2 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{n-1-1}}\right)^2$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{2^{n-1}-1}}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{2^{2^{n-1}-2}} = \frac{1}{2^{2^{n-1}-1}}$$

$$\text{d'où } |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^{2^{n-1}-1}} \text{ donc } P(n+1) \text{ est vérifiée.}$$

$$(u_n) \text{ converge vers } \sqrt{2} \text{ car } \lim_{+\infty} \frac{1}{2^{2^{n-1}-1}} = 0.$$

$$\textbf{7.} \text{ Pour être à } 10^{-10} \text{ près, il faut } \frac{1}{2^{2^{n-1}-1}} \leq \frac{1}{10^{10}}$$

d'où $2^{2^n-1} \geq 10^{10}$ soit $(2^n - 1) \ln 2 \geq 10 \ln 10$

d'où $2^n \geq \frac{10 \ln 10}{\ln 2} + 1$

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{10 \ln 10}{\ln 2} + 1\right)}{\ln 2}.$$

144. I. 1. $w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n)$
 $= \underbrace{(v_{n+1} - v_n)}_{\text{car } (v_n) \nearrow} + \underbrace{(u_n - u_{n+1})}_{\text{car } (u_n) \nearrow}$

donc $w_{n+1} - w_n \leq 0$ (w_n) est décroissante.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ (w_n) décroissante donc $w_n \geq 0$ (sinon il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $w_p < 0$ et alors pour tout $n \geq p$, $w_n \leq w_p < 0$).

3. $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$,
 $w_n \geq 0$ donc $v_n \geq u_n$ et comme $u_n \geq u_0$, $v_n \geq u_0$.

Donc (v_n) est décroissante et minorée : elle converge ie il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lambda$.

De même (u_n) est croissante et majorée par v_0 , donc elle converge.

Comme on a vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$, alors (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite finie.

II. 1. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(1+n)!} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^* \rightarrow (u_n)$ est strictement croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(1+n)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{(n+1)n + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}$$

$$= -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \rightarrow (v_n) \text{ est strictement décroissante.}$$

2. $u_n - v_n = -\frac{1}{n \cdot n!}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

De 1. et 2. on déduit que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

3. a. $u_n \leq e$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car (u_n) est croissante et tend vers e . De même, $v_n \geq e$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $e - u_n \geq 0$ et $v_n - e \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$v_n - u_n = \frac{1}{n \cdot n!} = \underbrace{v_n - e}_{\geq 0} + \underbrace{e - u_n}_{\geq 0} \text{ donc } |v_n - e| = v_n - e \leq \frac{1}{n \cdot n!} < \varepsilon$$

$$\text{et } |u_n - e| = e - u_n \leq \frac{1}{n \cdot n!} < \varepsilon.$$

b. U est u_n , V est v_n .

Initialisation : On définit la marge d'approximation ε .

U et V sont affectés à u_1 et v_1 .

Boucle : Condition de poursuite $U_n - V_n \geq \varepsilon$.

On incrémente alors n et on calcule u_n et v_n que l'on affecte à U et V respectivement.

Sortie : affichage de n (nombre d'itérations)

affichage de U et V c'est-à-dire la valeur approchée de e à ε près.

d. U et V est donnent un encadrement de e .

4. On suppose que $e = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}, \mathbb{N}^*$.

Comme $u < e < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a en particulier : (u_n) et (v_n) sont strictement monotones.

$$u_q < e < v_q = u_q + \frac{1}{q \cdot q!}$$

$$\text{donc } u_q < \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{q \cdot q!},$$

$$\text{d'où } q \cdot q! u_q < pq! < q \cdot q! u_q + 1.$$

Or $u_q = \sum_{i=1}^{i=q} \frac{1}{i!}$ donc $qq! u_q$ est un entier car somme d'entiers

puisque $i!$ divise $qq!$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, q\}$.

Il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $qq! u_q = m$, d'où $m < pq! < m + 1$ ce qui revient à dire que $pq!$ n'est pas entier, ce qui est absurde.

5 On ne peut pas trouver d'entier p, q pour exprimer e sous forme de fraction, e est donc irrationnel.

TP Info (p. 52)

Partie A

1. $C_6 = \frac{4,5}{100} \times \frac{1}{12} \times E_5$ (intérêt)

$D_6 = B_6 - C_6 = 100 - C_6$ (capital amorti)

$E_6 = E_5 - D_6$ (capital restant dû)

2. On arrête de rembourser quand le capital restant dû est ≤ 0 .

3. La dernière mensualité est ≤ 100 , elle correspond au capital restant dû au mois précédent.

4. Il y aura 38 mensualités, 37×100 et 58,85 pour la 38^e.

Partie B

1. $u_{n+1} = u_n - \left(M - \frac{4,5}{100} \times \frac{1}{12} \times u_n\right)$
 $= \frac{1204,5}{1200} u_n - M = \frac{803}{800} u_n - M.$

2. $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{M}{0,00375}$
 $= \frac{803}{800} u_n - M - \frac{M}{0,00375}$
 $= \frac{803}{800} u_n - M \left(1 + \frac{1}{0,00375}\right)$
 $= \frac{803}{800} u_n - M \times \frac{1,00375}{0,00375}$
 $= \frac{803}{800} u_n - M \frac{100375}{375}$
 $= \frac{803}{800} u_n - \frac{803}{3} M$
 $= \frac{803}{800} \left(u_n - \frac{800}{803} \frac{803}{3} M\right)$
 $= \frac{803}{800} \left(u_n - \frac{800}{803} M\right).$

$$\frac{1}{0,00375} = \frac{100000}{375} = \frac{20000}{75} = \frac{4000}{15} = \frac{800}{3}.$$

$$\text{d'où } v_{n+1} = \frac{803}{800} \left(u_n - \frac{M}{0,00375} \right) = \frac{803}{800} v_n.$$

3. (v_n) est géométrique de raison $\frac{803}{800}$ d'où $v_n = \left(\frac{803}{800}\right)^n v_0$.

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + \frac{M}{0,00375} = \left(\frac{803}{800}\right)^n v_0 + \frac{M}{0,00375} \\ &= \left(\frac{803}{800}\right)^n \left(u_0 - \frac{M}{0,00375} \right) + \frac{M}{0,00375}. \end{aligned}$$

On veut $u_{24} = 0$;

d'où

$$0 = \left(\frac{803}{800}\right)^{24} \left(3500 - \frac{M}{0,00375} \right) + \frac{M}{0,00375} ;$$

$$0 = 3500 \left(\frac{803}{800}\right)^{24} - \left(\frac{803}{800}\right)^{24} \frac{M}{0,00375} + \frac{M}{0,00375} ;$$

$$\frac{M}{0,00375} \left(\left(\frac{803}{800}\right)^{24} - 1 \right) = 3500 \times \left(\frac{803}{800}\right)^{24}$$

$$M = 0,00375 \frac{3500 \times \left(\frac{803}{800}\right)^{24}}{\left(\frac{803}{800}\right)^{24} - 1} \simeq 152,767.$$

Mensualité = 152,77 (arrondi au supérieur, sinon $u_{24} > 0$).

Sur les pas du supérieur (p. 53)

I. 1. (u_{2n}) est la sous-suite des termes pairs de (u_n) .

(u_{2n+1}) est la sous-suite des termes impairs de (u_n) .

2. Si (u_n) admet une limite finie l , il est clair que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers cette limite (en appliquant la définition même de la limite finie d'une suite).

Supposons que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont pour limite $l \in \mathbb{R}$.

Alors pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$, il existe p et q tels que :

$$\text{pour tout } 2n \geq p \quad |u_{2n} - l| \leq \varepsilon$$

$$\text{et pour tout } 2n+1 \geq q \quad |u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon$$

En posant $r = \max\left(\frac{p}{2}; \frac{q-1}{2}\right)$, on obtient donc

$$\text{pour tout } n \geq r \quad |u_n - l| \leq \varepsilon$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l.$$

Application : $q^{2n} = (q^2)^n \geq 1$ car $q^2 \geq 1$

$$q^{2n+1} = q(q^2)^n \leq 1 \text{ car } q^2 \geq 1 \text{ et } q \leq -1$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^{2n} \geq 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^{2n+1} \leq -1$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^{2n} \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} q^{2n+1}$$

d'où (q^n) ne converge pas vers une $\lim l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$.

$$\text{II. 1. } u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d} = \frac{\frac{1}{d}adu_n + bd}{\frac{1}{d}bcu_n + bd},$$

donc si $ad - bc = 0$ alors $ad = bc$ d'où $u_{n+1} = \frac{b}{d}$.

On montre alors par récurrence que (u_n) est constante en $\frac{b}{d}$ à partir du rang 1.

2. Les solutions de (E) sont les abscisses des points d'intersection de :

$$\begin{cases} \mathcal{C}_1 : y = x & \text{et} \\ \mathcal{C}_2 : y = f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \end{cases}$$

$$3. x = \frac{ax + b}{cx + d} \Leftrightarrow cx^2 + (d-a)x - b = 0 \quad \text{sur } \left(\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}\right)$$

Le déterminant de ce polynôme est $\Delta = (d-a)^2 + 4bc$

$$= (d+a)^2 - 4ad + 4bc$$

$$= (d+a)^2 - 4(ad+bc).$$

4. a. Cas $\Delta = 0$:

Alors la racine unique est $\gamma = \frac{a\gamma + b}{c\gamma + d}$ (solution de E).

Montrons par récurrence que (v_n) est définie

$P(0) : v_0$ est défini car $v_0 = \frac{1}{u_0 - \gamma}$ et $u_0 \neq \gamma$.

Hérédité : Supposons que v_n est défini : $u_n \neq \gamma$

donc $\frac{au_n + b}{cu_n + d} \neq \gamma$ ($u_n \neq \gamma \Leftrightarrow u_n$ n'est pas une solution de (E))

d'où $u_{n+1} \neq \gamma$ donc v_{n+1} est défini.

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - \gamma} - \frac{1}{u_n - \gamma}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\frac{au_n + b}{cu_n + d} - \gamma} - \frac{1}{u_n - \gamma} \\ &= \frac{1}{\frac{cu_n + d}{(a - \gamma c)u_n + (b - d\gamma)}} - \frac{1}{u_n - \gamma} \\ &= \frac{cu_n + d}{(a - \gamma c)u_n + (b - d\gamma)} - \frac{1}{u_n - \gamma}. \end{aligned}$$

Calculons f^{-1} :

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \text{ donc } ycx + yd = ax + b \text{ d'où } (yc - a)x = b - yd$$

$$\text{soit } x = \frac{b - yd}{yc - a}; \quad f^{-1}(x) = \frac{b - xd}{xc - a}.$$

$$\text{Comme } v_{n+1} - v_n = \frac{cu_n + d}{(a - \gamma c)u_n + (b - d\gamma)} - \frac{1}{u_n - \gamma}$$

$$= \frac{cu_n + d}{(a - \gamma c)u_n - \frac{b - d\gamma}{\gamma c - a}} - \frac{1}{u_n - \gamma}.$$

Comme $\gamma = f(\gamma)$, $f^{-1}(\gamma) = f^{-1} \circ f(\gamma) = \gamma$ d'où $\frac{b - d\gamma}{\gamma c - a} = \gamma$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } v_{n+1} - v_n &= \frac{cu_n + d}{(a - \gamma c)(u_n - \gamma)} - \frac{1}{u_n - \gamma} \\ &= \frac{cu_n + d - a + \gamma c}{(a - \gamma c)(u_n - \gamma)} = \frac{cu_n + d + \frac{a-d}{2}}{(a - \gamma c)(u_n - \gamma)} \\ &= \frac{cu_n + \frac{d-a}{2}}{(a - \gamma c)(u_n - \gamma)} = \frac{c(u_n + \frac{d-a}{2c})}{(a - \gamma c)(u_n - \gamma)} \\ &= \frac{c}{a - \frac{a-d}{2}} \frac{u_n - \gamma}{u_n - \gamma} = \frac{2c}{a+d} \quad \text{car } u_n \neq \gamma. \end{aligned}$$

(v_n) est donc une suite arithmétique de raison $\frac{2c}{a+d}$.

b. Par récurrence, $u_0 \notin \{\alpha; \beta\}$ donc $v_0 = \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$ est défini, $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons v_n défini donc $u_n \neq \beta$

$$u_{n+1} = \beta \Leftrightarrow \frac{au_n + b}{cu_n + d} = \beta \Leftrightarrow u_n = \beta$$

car β est une solution de (E).

On en déduit que $u_{n+1} \neq \beta$ et donc que v_{n+1} est défini.

Calculons v_{n+1} :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \frac{\frac{au_n + b}{cu_n + d} - \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}}{\frac{au_n + b}{cu_n + d} - \frac{a\beta + b}{c\beta + d}} \\ &= \frac{\frac{au_n c\alpha + au_n d + bc\alpha + bd - a\alpha cu_n - bcu_n - da\alpha - db}{(cu_n + d)(\alpha c + d)}}{\frac{au_n c\beta + adu_n + bc\beta + bd - a\beta cu_n - a\beta d - bcu_n - db}{(cu_n + d)(c\beta + d)}} \\ &\quad \times \frac{(cu_n + d)(c\beta + d)}{au_n c\beta + adu_n + bc\beta + bd - a\beta cu_n - a\beta d - bcu_n - db} \\ &= \frac{(ad - bc)u_n + \alpha(bc - da)}{\alpha c + d} \frac{c\beta + d}{(ad - bc)u_n + \beta(bc - ad)} \\ &= \frac{c\beta + d}{\alpha c + d} \frac{(ad - bc)(u_n - \alpha)}{(ad - bc)(u_n - \beta)} = \frac{c\beta + d}{\alpha c + d} \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} \end{aligned}$$

$$\text{car } ad - bc \neq 0 \text{ d'où } v_{n+1} = \frac{c\beta + d}{\alpha c + d} v_n.$$

On a montré que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{c\beta + d}{\alpha c + d}$.

$$\text{5. } u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d} \text{ avec } a = 3, b = 2, c = 1 \text{ et } d = 4$$

$$ad - bc = 12 - 2 = 10 \neq 0$$

$$\text{et } \Delta = (4 + 3)^2 - 4(3 \times 4 - 2 \times 1) = 49 - 40 = 9 > 0.$$

$$\alpha = \frac{-(4-3) + \sqrt{9}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2};$$

$$\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \beta = -2.$$

$$\text{Posons } v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}.$$

(v_n) est une suite géométrique de raison

$$\frac{c\beta + d}{c\alpha + d} = \frac{1 \times (-2) + 4}{1 \times 1 + 4} = \frac{2}{5}$$

$$\left| \frac{2}{5} \right| < 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

$$\text{Comme } v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}, \text{ on calcule } u_n = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, (u_n) est définie à partir d'un rang $n \in \mathbb{N}$.

En appliquant les opérations sur les limites, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1 + 2 \times 0}{1 - 0} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{III. 1. } v_n - l &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k - l = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k - \frac{1}{n+1} (n+1)l \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n l = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (u_k - l). \end{aligned}$$

$$\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}, u_k - l \leq |u_k - l|$$

$$\text{donc } \sum_{k=0}^n (u_k - l) \leq \sum_{k=0}^n |u_k - l|$$

$$\text{De même } l - u_k \leq |l - u_k| = |u_k - l|$$

$$\text{d'où } l - v_n \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |u_k - l|.$$

$$\text{On en déduit } |v_n - l| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |u_k - l|.$$

2. a. C'est la définition de (u_n) converge vers l (qui est l'hypothèse de départ).

Pour $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq n_0 \Rightarrow |u_k - l| < \varepsilon$, on a :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |u_k - l| < \frac{n - n_0 + 1}{n+1} \varepsilon < \varepsilon.$$

b. (u_n) converge donc elle est bornée.

On en déduit qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|u_k - l| \leq M$$

$$\text{d'où } \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - l| \leq \frac{n_0}{n+1} M$$

ε est un réel > 0 et $n_0 M - \varepsilon$ est un réel.

D'après l'axiome d'Archimède, il existe donc $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n_1 \varepsilon > n_0 M - \varepsilon \quad \text{d'où} \quad (n_1 + 1) \varepsilon > n_0 M$$

$$\text{donc pour } n \geq n_1, \text{ on a } (n+1) \varepsilon > n_0 M.$$

$$\text{On en déduit que } \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - l| \leq \frac{n_0 M}{n+1} < \varepsilon$$

donc $n \geq n_1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - l| < \varepsilon$.

3. $\frac{\varepsilon}{2}$ est un réel > 0 donc 2. a. et 2. b. donnent :

– il existe $n'_0 \in \mathbb{N} : n \geq n'_0 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \sum_{k=n'_0}^{k=n} |u_k - l| < \frac{\varepsilon}{2}$

– il existe $n'_1 \in \mathbb{N} : n \geq n'_1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{k=n'_1-1} |u_k - l| < \frac{\varepsilon}{2}$.

En posant $n_2 = \max(n'_0 ; n'_1)$ et en additionnant les 2 inégalités ci-dessus membre à membre, on obtient :

$$n \geq n_1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{k=n} |u_k - l| < \varepsilon$$

d'où $n \geq n_2 \Rightarrow |v_n - l| < \varepsilon$, (v_n) converge vers l .

Fonctions : limites, continuité, calculs de dérivées Trigonométrie

Programme officiel

Contenus	Capacités attendues
Limites de fonctions Limite finie ou infinie d'une fonction à l'infini. Limite infinie d'une fonction en un point. Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de deux fonctions. Limites et comparaison. Asymptote parallèle à l'un des axes de coordonnées.	• Déterminer la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de deux fonctions. • Déterminer des limites par minoration, majoration et encadrement. • Interpréter graphiquement les limites obtenues.
Continuité sur une intervalle, théorème des valeurs intermédiaires	• Exploiter le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas où la fonction est strictement monotone, pour résoudre un problème donné.
Calculs de dérivées : compléments	• Calculer les dérivées des fonctions : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$; $x \mapsto (u(x))^n$, n entier relatif non nul ; $x \mapsto e^{u(x)}$; $x \mapsto \ln(u(x))$. • Calculer la dérivée d'une fonction $x \mapsto f(ax + b)$ où f est une fonction dérivable, a et b deux nombres réels.
Fonctions sinus et cosinus	• Connaître la dérivée des fonctions sinus et cosinus. • Connaître quelques propriétés de ces fonctions, notamment parité et périodicité. • Connaître les représentations graphiques de ces fonctions.

Découverte (p. 56-57)

1. Où sont les limites ?

1. Limite d'une fonction en $-\infty$ et en $+\infty$

1.

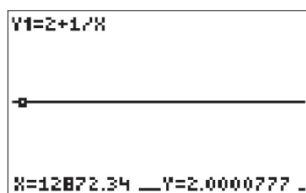
x	-10^5	-10^3	-100	-10
$f(x)$	1,999 99	1,999	1,99	1,9
$g(x)$	9999999995	999995	9995	95
$h(x)$	-2×10^{14}	-200000004	-200004	-204

x	10	100	10^3	10^5
$f(x)$	2,1	2,01	2,001	2,000 01
$g(x)$	95	9995	999995	9999999995
$h(x)$	196	199996	199999996	2×10^{14}

2. Quand x est un réel de plus en plus grand, $f(x)$ semble se rapprocher de 2.

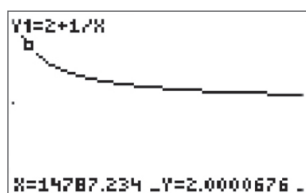
3. Quand x est un réel négatif de plus en plus grand en valeur absolue, $f(x)$ semble se rapprocher de 2.

4. Pour $10\,000 \leq x \leq 100\,000$ et $1,5 \leq y \leq 2,5$:



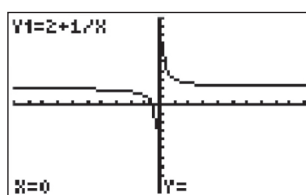
La courbe semble droite.

Pour $1,999\,9 \leq x \leq 2,000\,1$:



En zoomant, on voit que la courbe n'est pas droite.

5. Avec $-10 \leq x \leq 10$ et $-10 \leq y \leq 10$:



La représentation graphique de f semble se rapprocher de la droite d'équation $y = 2$ lorsque x est un réel de plus en plus grand ou négatif de plus en plus grand en valeur absolue.

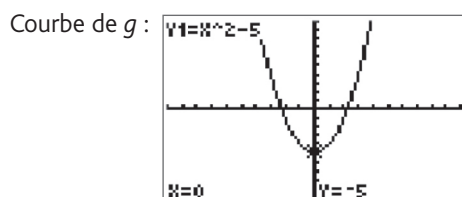
6. Quand x est un réel de plus en plus grand et quand x est un réel négatif de plus en plus grand en valeur absolue, $g(x)$ semble de plus en plus grand.

Quand x est un réel de plus en plus grand, $h(x)$ semble de plus en plus grand.

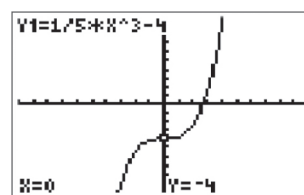
Quand x est un réel négatif de plus en plus grand en valeur absolue, $h(x)$ est négatif et semble de plus en plus grand en valeur absolue.

La courbe de g « monte » à droite et à gauche du graphique.

La courbe de h « monte » à droite du graphique et « descend » à gauche.



Courbe de h :



2. Limite infinie d'une fonction en un point

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$.

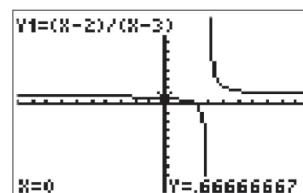
1. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	2,9	2,99	2,999	2,999 9	3,000 1	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	-9	-99	-999	-9 999	100 015	1001	101	11

2. Quand x s'approche de 3 en étant plus grand que 3, $f(x)$ semble de plus en plus grand.

Quand x s'approche de 3 en étant plus petit que 3, $f(x)$ semble négatif et de plus en plus grand en valeur absolue.

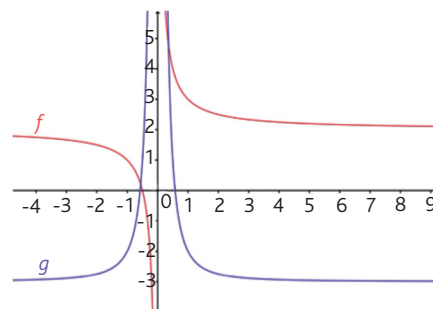
3. Courbe représentative de f :



4. Quand x se rapproche de 3, cette courbe semble se rapprocher de la droite d'équation $x = 3$.

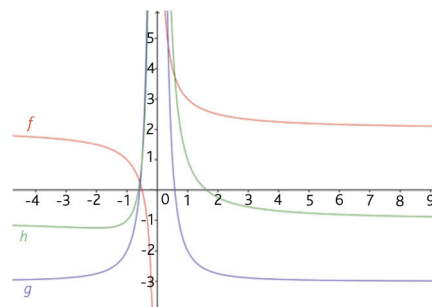
2. Limite et opérations

1.



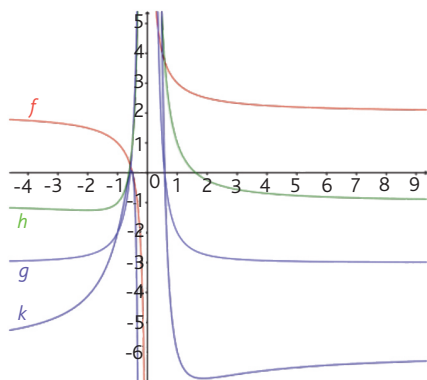
2. Graphiquement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -3$.

3. a.



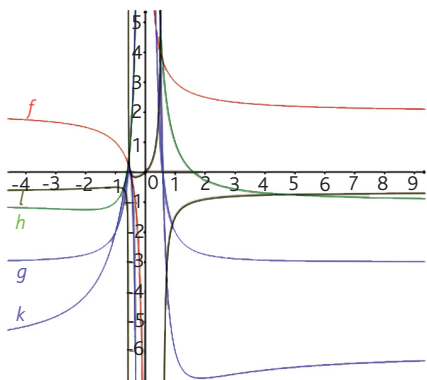
b. Graphiquement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -1$.

4. a.



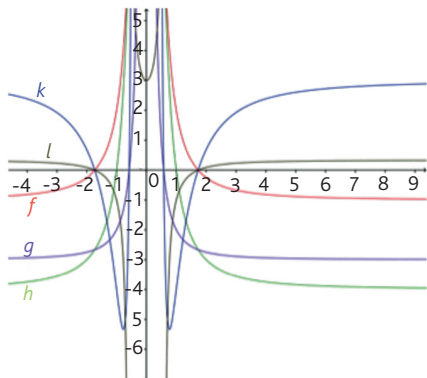
Graphiquement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = -6$.

b.



Graphiquement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} l(x) \approx -0,66$.

5. a.

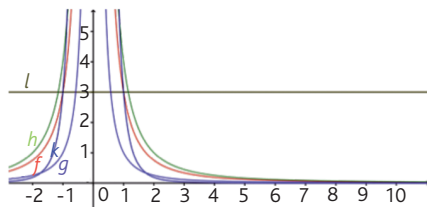


b. Graphiquement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -4$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} l(x) \approx 0,33$.

6. La limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de fonctions dont on connaît les limites réelles non nulles semble être la somme, le produit ou le quotient des limites.

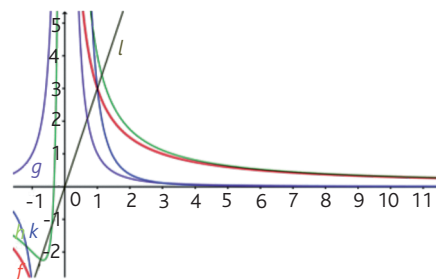
7. Cas des limites nulles :

a. $f(x) = \frac{3}{x^2}$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$



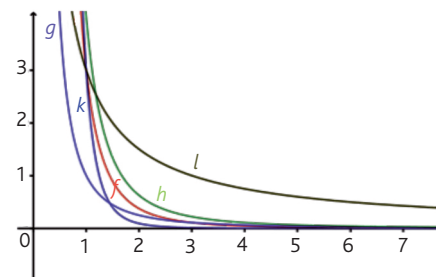
Graphiquement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} l(x) = 3$.

b. $f(x) = \frac{3}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$



Graphiquement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} l(x) = +\infty$.

c. $f(x) = \frac{3}{x^3}$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$



Graphiquement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} l(x) = 0$.

8. On ne peut pas conclure sur la limite d'un quotient lorsque les deux limites sont nulles.

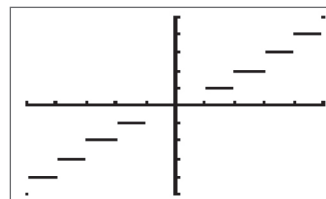
3. Continuité... ou pas

1. a.

x	-6,2	-5	-0,8	3,79	3,9	3,99	3,999 99	4
E(x)	-7	-5	-1	3	3	3	3	4

b. La limite à gauche en 4 de E semble être égale à 3. Or $E(4) = 4$.
Donc cette limite n'est pas égale à $E(4)$.

2.



3. La courbe est en plusieurs morceaux.

4. Dérivons

1. a. La fonction $f: x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

b. i) $f: x \mapsto \sqrt{3x-5}$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{3x-5}) \quad \frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$$

ii) $g : x \mapsto \sqrt{4x^3 - x^2 + 5x - 1}$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{4x^3 - 3x^2 + 5x - 1}) \quad \frac{12x^2 - 6x + 5}{2\sqrt{4x^3 - 3x^2 + 5x - 1}}$$

iii) $h : x \mapsto \sqrt{x^5}$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x^5}) \quad \frac{5x^4}{2\sqrt{x^5}}$$

c. On peut conjecturer que la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ où u est une fonction à valeurs positives admet pour dérivée la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

2. a. La fonction $x \mapsto x^n$ où n est un entier relatif non nul est dérivable sur $\mathbb{R}$ si $n > 0$ et sur $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$ et sa fonction dérivée est $x \mapsto nx^{n-1}$.

b. i) $f : x \mapsto (7x + 2)^5$

$$\frac{d}{dx}((7x+2)^5) \quad 35 \cdot (7x+2)^4$$

ii) $g : x \mapsto (x^4 - 5x^3 + x - 6)^3$

$$\frac{d}{dx}((x^4 - 5x^3 + x - 6)^3) \quad 3 \cdot (4x^3 - 15x^2 + 1) \cdot (x^4 - 5x^3 + x - 6)^2$$

iii) $h : x \mapsto (x^2 - 5x + 1)^{-3}$

$$\frac{d}{dx}((x^2 - 5x + 1)^{-3}) \quad \frac{-3 \cdot (2x - 5)}{(x^2 - 5x + 1)^4}$$

iiii) $k : x \mapsto (x^5 - 4x^2 + 7x + 2)^{-4}$

$$\frac{d}{dx}((x^5 - 4x^2 + 7x + 2)^{-4}) \quad \frac{-4 \cdot (5x^4 - 8x + 7)}{(x^5 - 4x^2 + 7x + 2)^5}$$

c. On peut conjecturer que la fonction $x \mapsto [u(x)]^n$ où u est une fonction et n un entier relatif non nul a pour fonction dérivée $x \mapsto n \times u'(x) \times [u(x)]^{n-1}$.

Exercices résolus (p. 74 à 85)

Page 74

1. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5) = -5$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = +\infty$.

2. a. Pour tout réel $x \neq 0$,

$$x^4 \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^4}\right) = x^4 \times 1 + x^4 \times \frac{3}{x} - x^4 \times \frac{5}{x^4} = x^4 + 3x^3 - 5 = f(x).$$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{x}\right) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{5}{x^4}\right) = 0$. Donc d'après la propriété sur les limites de sommes, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^4}\right) = 1$. De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4) = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = +\infty$.

2. On ne peut pas déterminer directement les limites demandées.

Pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = -x^5 \left(1 - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{3}{x^5}\right)$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{3}{x^5}\right) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^5) = -\infty$,

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^5) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = +\infty$

Page 75

1. Pour tout réel $x \neq 0$,

$$\frac{3}{x^3} \left(\frac{1 - \frac{5}{3x}}{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^4}} \right) = \frac{3 - \frac{5}{x}}{x^3 + 2x + \frac{4}{x}} = \frac{\frac{3x - 5}{x}}{\frac{x^4 + 2x^2 + 4}{x}} = f(x)$$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1 - \frac{5}{3x}}{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^4}} \right) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{x^3} \right) = 0$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = 0$.

Page 76

Limite de f en $-\infty$:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - x + 3}) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x) = -\infty$. D'où une forme indéterminée.

Pour tout réel $x < 0$,

$$f(x) = \frac{(\sqrt{4x^2 - x + 3} + 2x) \times (\sqrt{4x^2 - x + 3} - 2x)}{\sqrt{4x^2 - x + 3} - 2x}$$

$$= \frac{4x^2 - x + 3 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - x + 3} - 2x} = \frac{-x + 3}{\sqrt{4x^2 - x + 3} - 2x}$$

$$f(x) = \frac{-x + 3}{\sqrt{x^2 \left(4 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)} - 2x} = \frac{-x + 3}{-x \sqrt{x^2 \left(4 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)} - 2x}$$

car pour $x < 0$, $\sqrt{x^2} = |x| = -x$

$$f(x) = \frac{-1 + \frac{3}{x}}{-\sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - 2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 + \frac{3}{x}\right) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - 2}\right) = -4,$$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = \frac{1}{4}$.

Limite de g en $-\infty$:

Pour tout réel x , $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, donc $1 \leq \sin(x) + 2 \leq 3$, d'où $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{\sin(x) + 2} \leq 1$.

Pour $x < 3$, $3 - x > 0$, donc $\frac{3 - x}{3} \leq \frac{3 - x}{\sin(x) + 2} \leq 3 - x$.

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3 - x}{3}\right) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x)) = +\infty$.

Page 77

$f = u^5$ où $u : x \mapsto \frac{1}{9x^2 - 4}$.

Pour que f existe et soit dérivable, il faut que $9x^2 - 4 \neq 0$.

$9x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ ou $x = \frac{2}{3}$, donc l'ensemble de définition et

de dérivabilité de f est $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$.

La fonction u est dérivable sur D et pour tout x de D ,

$$u'(x) = -\frac{18x}{(9x^2 - 4)^2}.$$

Pour tout x de D ,

$$f'(x) = 5 \times u'(x) \times (u(x))^{5-1} = -\left(\frac{18x}{(9x^2 - 4)^2}\right) \times \left(\frac{1}{9x^2 - 4}\right)^4 = -\frac{90x}{(9x^2 - 4)^6}.$$

Page 79

$$1. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (f(x)) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (f(x)) = +\infty \quad \text{et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = \frac{3}{4}.$$

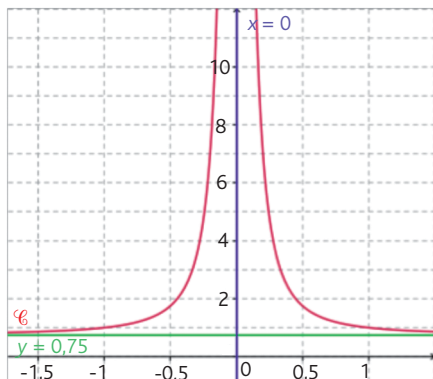
2. L'axe des abscisses est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

La droite d'équation $y = \frac{3}{4}$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f(x) - \frac{3}{4} = \frac{1}{4x^2} > 0$ donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite d'équation $y = \frac{3}{4}$.

4. Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{1}{8x^3}$, donc pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $f'(x) < 0$, ainsi f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout x de $\mathbb{R}^-$, $f'(x) > 0$, ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}^-$.

5.



Page 80

1. $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$, donc $D_f = [-1; 1]$.

2. Les fonctions $u : x \mapsto x - 1$ et $v : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ sont continues sur $[-1; 1]$. Donc f est continue sur $[-1; 1]$.

Étude de la dérivabilité de f : Les fonctions u et v sont dérivables sur $] -1; 1[$ et pour tout réel x de $] -1; 1[$, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

$f = u \times v$, donc f est dérivable sur $] -1; 1[$ et $f' = u' \times v + u \times v'$.

D'où pour tout réel x de $] -1; 1[$,

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{1 - x^2} + (x - 1) \times \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 + x - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

En (-1) : Pour tout réel h tel que $(-1 + h) \in D_f$,

$$t_{-1}(h) = \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} = \frac{(-2 + h)\sqrt{2h - h^2} - 0}{h} = \frac{(-2 + h)\sqrt{h(2 - h)}}{h} = \frac{(-2 + h)\sqrt{2 - h}}{\sqrt{h}}.$$

Donc $\lim_{h \rightarrow 0} ((-2 + h)\sqrt{2 - h}) = -2\sqrt{2}$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{h} = 0^+$,

d'où $\lim_{h \rightarrow 0} t_{-1}(h) = -\infty$.

Ainsi f n'est pas dérivable en (-1) .

En 1 : Pour tout réel h tel que $(-1 + h) \in D_f$,

$$t_1(h) = \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{h\sqrt{-2h - h^2} - 0}{h} = \sqrt{-2h - h^2}.$$

Donc $\lim_{h \rightarrow 0} t_1(h) = 0$.

Ainsi f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$.

Par conséquent, f est dérivable sur

$$]-1; 1[\quad \text{et} \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{1 + x - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} & \text{si } -1 < x < 1. \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Page 81

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 - 6x^2 + 18x + 59$. On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 0$. f est une fonction polynôme, donc f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Étude des limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$:

Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = -2x^3 \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{9}{x^2} - \frac{59}{2x^3}\right)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{9}{x^2} - \frac{59}{2x^3}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3) = -\infty$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{9}{x^2} - \frac{59}{2x^3}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = +\infty$$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = +\infty$.

Étude du sens de variation de la fonction f :

Pour tout réel x ,

$$f'(x) = -6x^2 - 12x + 18 = -6(x^2 + 2x - 3) = -6(x - 1)(x + 3).$$

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	5	69	$-\infty$

Résolution de l'équation $f(x) = 0$:

• Sur l'intervalle $]-\infty ; 1]$, la fonction f est strictement positive puisqu'elle admet 5 comme minimum, qu'elle atteint en (-3) . Par conséquent, l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty ; 1]$.

• La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = -\infty$ et $f(1) = 69$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque $0 \in]-\infty ; 69]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

2. On obtient $3 < \alpha < 3,1$.

Page 85 haut de page

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

2. $f = v \circ u$ où v est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = x^4$ et u est la fonction définie sur D_f par $u(x) = \frac{2x+1}{x-3}$.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 2} v(x) = 16$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 16$.

Donc la courbe représentant f dans un repère admet pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = 16$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 3} (2x+1) = 7$ et $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{2x+1}{x-3} \right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0^-$ donc $\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{2x+1}{x-3} \right) = -\infty$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = +\infty$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$.

Par conséquent, la droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à la courbe de f .

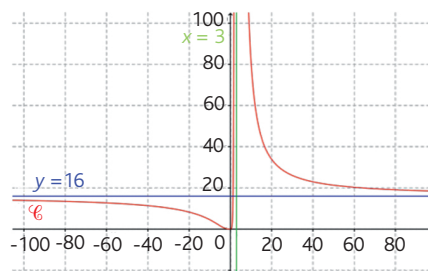
4. f est dérivable sur D_f et pour tout réel x de D_f ,

$$f'(x) = 4 \times u'(x) \times (u(x))^3$$

$$f'(x) = 4 \times \frac{-7}{(x-3)^2} \times \left(\frac{2x+1}{x-3} \right)^3 = \frac{-28(2x+1)^3}{(x-3)^5}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
Signe de $2x+1$	-	0	+	+
Signe de $x-3$	-	-	0	+
Signe de $f'(x)$	-	0	+	-
Variations de f	16		0	16

5.



Page 85 bas de page

Notons g la fonction $x \mapsto \sin(x - \pi)$. Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $g'(x) = \cos(x - \pi)$.

Puisque $g(\pi) = \sin(\pi - \pi) = \sin(0) = 0$, pour tout réel x non nul, $\sin(x - \pi) = \frac{g(x) - g(\pi)}{x - \pi}$.

Or, puisque g est dérivable en π , $\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{g(x) - g(\pi)}{x - \pi} \right) = g'(\pi)$.

Donc $\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\sin(x - \pi)}{x - \pi} \right) = g'(\pi) = \cos(0) = 1$. Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\sin(x - \pi)}{x - \pi} \right) = f(\pi).$$

Ainsi f est continue en π .

Les fonctions $x \mapsto \sin(x - \pi)$ et $x \mapsto x$ sont continues sur $]-\infty ; \pi[$ et sur $]\pi ; +\infty[$, donc f l'est aussi. Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercices (p. 86)

1. à 30. Corrigés dans le manuel.

1. Limites

31. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

32. Corrigé dans le manuel.

33. 1. $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = -\infty$

$$\begin{array}{ll} x \rightarrow \frac{7}{2} & x \rightarrow \frac{7}{2} \\ x < \frac{7}{2} & x > \frac{7}{2} \end{array}$$

2. $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8} f(x) = +\infty$.

$$\begin{array}{ll} x < 8 & x > 8 \end{array}$$

3. $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} f(x) = -\infty$.

$$\begin{array}{l} x \rightarrow \frac{2}{3} \\ x > \frac{2}{3} \end{array}$$

34. La courbe représentant f dans un repère admet une asymptote horizontale d'équation $y = -2$ en $+\infty$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $-\infty$.

35. L'équation d'une asymptote verticale à la courbe représentant f dans un repère est $x = 3$.

36. La courbe représentant f dans un repère admet une asymptote horizontale d'équation $y = 5$ en $+\infty$ et en $-\infty$. L'équation d'une asymptote verticale à cette courbe est $x = \frac{2}{3}$.

37. 1. Il semble que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \approx 5$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \approx 2$.

2. Il semble que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

38. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty.$$

2. La courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$ comme asymptotes verticales et la droite

d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

39. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

3. La courbe représentative de la fonction f admet l'axe des abscisses comme asymptote verticale et la droite d'équation $y = -2$ comme asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

40. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$.

41. Corrigé dans le manuel.

42. 1. L'ensemble de définition de la fonction f est $[0 ; 2[\cup]2 ; 7]$.

2. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$.

3. L'équation de l'asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f est $x = 2$.

43. 1. L'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

2. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

3. L'équation de l'asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f est $x = -3$.

La droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ et la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$.

44. Corrigé dans le manuel.

45. 1. Pour tout x de D_f ,

$$-2 - \frac{5}{x-3} = \frac{-2(x-3) - 5}{x-3} = \frac{-2x+1}{x-3} = f(x).$$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2 - \frac{5}{x-3}\right) = -2$.

Même résultat en $-\infty$.

Donc l'équation de l'asymptote horizontale (d) à la courbe $\mathcal{C}$ en $-\infty$ et en $+\infty$ est $y = -2$.

3. Pour tout x de D_f ,

$$f(x) - (-2) = -2 - \frac{5}{x-3} + 2 = -\frac{5}{x-3}.$$

Si $x < 3$, alors $x - 3 < 0$, donc $f(x) - (-2) > 0$, d'où $f(x) > (-2)$.

Ainsi $\mathcal{C}$ est au-dessus de (d) sur $]-\infty ; 3[$.
Si $x > 3$, alors $x - 3 > 0$, donc $f(x) - (-2) < 0$, d'où $f(x) < (-2)$.

Ainsi $\mathcal{C}$ est au-dessous de (d) sur $]3 ; +\infty[$.

46. 1. Pour tout x de $\mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \frac{5x}{x} - \frac{2}{x} = 5 - \frac{2}{x}.$$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$.

3. Donc l'équation de l'asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $-\infty$ et en $+\infty$ est $y = 5$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

Donc la droite d'équation $x = 0$ (axe des abscisses) est l'asymptote verticale de $\mathcal{C}$.

47. 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$.

2. La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
La droite d'équation $x = 1$ est l'asymptote verticale de $\mathcal{C}$.

48. 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$.

2. La droite d'équation $y = -3$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$ sont asymptotes verticales de $\mathcal{C}$.

3.

solve(f>-3,x)	
	$(x > (-2)) \text{ and } (x < 2)$
solve(f<-3,x)	
	$(x < (-2)) \text{ and } (x > 2)$

Donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite d'équation $y = -3$ sur l'intervalle $] -2 ; 2[$.

Et $\mathcal{C}$ est au-dessous de la droite d'équation $y = -3$ sur $]-\infty ; -2[$; $]2 ; +\infty[$.

2. Limites et opérations

49. 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = -\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = +\infty$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} (-2x + 1) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{x}\right) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x)) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{x}\right) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x)) = -\infty$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x}) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$
donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = +\infty$.

50. 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 4) = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 5) = +\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = +\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5) = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 3\right) = -3$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = -\infty$.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x) = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} + 2) = +\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = -\infty$.

51. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (8x^3 - 1) = +\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = 0$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x}) = 0^+$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x)) = -\infty$.

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (9x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-6x) = +\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (9x^2 - 6x + 1) = +\infty$

d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = 0$.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x + 1) = +\infty$

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = 0$.

52. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} (-7x^3 + 3x - 4) = -4$

et $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x)) = -\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow -5} (x^2 - 3) = 22$;

$\lim_{x \rightarrow -5} (x + 5) = 0^-$; $\lim_{x \rightarrow -5} (x + 5) = 0^+$

donc $\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = -\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = +\infty$.

53. Fonction f : courbe 3 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$.

Fonction g : courbe 1 $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2} g(x) = +\infty$

Fonction h : courbe 2 $\lim_{x \rightarrow -2} h(x) = \lim_{x \rightarrow -2} h(x) = -\infty$

54. Corrigé dans le manuel.

55. 1. Pour tout réel x ,

$$f(x) = -8x^5 \left(1 + \frac{3}{8x} + \frac{1}{4x^3} - \frac{1}{8x^5}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{8x} + \frac{1}{4x^3} - \frac{1}{8x^5} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{8x} + \frac{1}{4x^3} - \frac{1}{8x^5} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-8x^5) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-8x^5) = -\infty.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$2. \text{ De même, } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$3. \text{ De même, } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

56. Corrigé dans le manuel.

57. 1. Pour tout réel x ,

$$f(x) = \frac{-2x \left(1 - \frac{1}{2x} \right)}{4x^4 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x^4} \right)} = -\frac{1}{x^3} \left(\frac{1 - \frac{1}{2x}}{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x^4}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{2x}}{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x^4}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{2x}}{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x^4}} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x^3} \right) = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^3} \right) = 0^-.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^-.$$

$$2. \text{ De même, } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

$$3. \text{ De même, } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 5.$$

$$58. 1. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^- \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+.$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} (x-2) = -\frac{5}{3} \text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} (3x-1)^2 = 0^+$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} f(x) = -\infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} h(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 5} h(x) = +\infty.$$

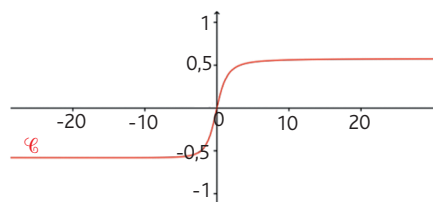
59. 1. On cherche pour quels x , $3x^2 + x + 7 \geq 0$.

$$\Delta = -83.$$

$\Delta < 0$ donc, puisque le coefficient de x^2 est positif, $3x^2 + x + 7 \geq 0$ pour tout réel x .

Ainsi $D = \mathbb{R}$.

2. a.



b. Il semble que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \approx 0,5$.

c. Pour tout réel $x > 0$,

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(3 + \frac{1}{x} + \frac{7}{x^2} \right)}} = \frac{x}{x \sqrt{3 + \frac{1}{x} + \frac{7}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{3 + \frac{1}{x} + \frac{7}{x^2}}}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

60. 1. On cherche pour quels x ,

$$x^2 - x - 6 \geq 0.$$

$\Delta = 25$, donc ce trinôme a deux racines : (-2) et 3 .

$$\text{Donc } D =]-\infty; -2] \cup [3; +\infty[.$$

2. Pour tout x de D ,

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2 - x - 6} - x)(\sqrt{x^2 - x - 6} + x)}{\sqrt{x^2 - x - 6} + x} = \frac{x^2 - x - 6 - x^2}{\sqrt{x^2 - x - 6} + x} = \frac{-x - 6}{\sqrt{x^2 - x - 6} + x} = \frac{-x \left(1 + \frac{6}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}} + 1 \right)} = \frac{1 + \frac{6}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}} + 1}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}.$$

3. Limites et composées de fonctions

61. 1. Pour tout réel x ,

$$g \circ f(x) = g(4x^2 + 1) = (4x^2 + 1)^3.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^2 + 1) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f(x)) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^2 + 1) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f(x)) = +\infty.$$

62. 1. $f = h \circ g$ où g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 5x^2 + 3$ et h est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $h(x) = \frac{1}{x}$.

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^2 + 3) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^2 + 3) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = 0.$$

63. 1. Pour tout réel x ,

$$g \circ f(x) = g(5x^3 - x^2 + 4) = (5x^3 - x^2 + 4)^2.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^3 - x^2 + 4) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f(x)) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 - x^2 + 4) = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} (g \circ f(x)) = +\infty.$$

64. 1. Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{5} \right\}$,

$$f \circ g(x) = f(-5x + 1) = \frac{1}{-5x + 1}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} (-5x + 1) = 0^- \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$x > \frac{1}{5}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} (f(x)) = -\infty.$$

$$x < \frac{1}{5}$$

$$x > \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} (-5x + 1) = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$x < \frac{1}{5}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} (f(x)) = +\infty.$$

$$x < \frac{1}{5}$$

$$x < \frac{1}{5}$$

2. Pour tout réel x ,

$$x^2 - x - 2 = (x-1)(x+2).$$

Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$,

$$f \circ g(x) = f(x^2 - x - 2) = \frac{1}{x^2 - x - 2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x - 2) = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 1} (f(x)) = +\infty.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x^2 - x - 2) = 0^- \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

$$\text{donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty.$$

3. Pour tout x de $]3; +\infty[$,

$$f \circ g(x) = f(\sqrt{x-3}) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x-3}) = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty.$$

4. Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$,

$$f \circ g(x) = f((x+4)^2) = \frac{1}{(x+4)^2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} (x+4)^2 = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -4} f(x) = +\infty.$$

65. 1. $3x - 2 > 0$ pour $x > \frac{2}{3}$.

Pour tout x de $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$,

$$f \circ g(x) = f(3x - 2) = \sqrt{3x - 2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 2) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x}) = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

2. $\frac{1}{x} + 3 > 0$ pour $x < -\frac{1}{3}$ ou $x > 0$.

Pour tout x de $]-\infty; \frac{1}{3}] \cup]0; +\infty[$,

$$f \circ g(x) = f\left(\frac{1}{x} + 3\right) = \sqrt{\frac{1}{x} + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 3\right) = 3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x}) = \sqrt{3}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{3}.$$

3. Pour tout x de $[2; +\infty[$,

$$f \circ g(x) = f(x^4 - 3x^2 - 4) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 3x^2 - 4) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x}) = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

66. 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^3 - 5x - 2) = -\infty$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^3 - 5x - 2) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x + 1) = +\infty$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x + 1) = 0^- \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{4} \\ x > \frac{1}{4}}} (-4x + 1) = 0^-$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} f(x) = -\infty.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{4} \\ x > \frac{1}{4}}} (-4x + 1) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{4} \\ x < \frac{1}{4}}} (-4x + 1) = 0^+$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{4} \\ x < \frac{1}{4}}} (-4x + 1) = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + 4x^2 + 3) = +\infty$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x}) = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 + 4x^2 + 3) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x}) = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

67. 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^2 + 12x + 9) = +\infty$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} (4x^2 + 12x + 9) = 0^+$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} (4x^2 + 12x + 9) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^2 + 12x + 9) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

2. La courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $x = -\frac{3}{2}$ pour asymptote verticale.

3. Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$,
 $f(x) = \frac{1}{(2x+3)^2}$ donc $f(x) > 0$.

Ainsi $\mathcal{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses.

68. 1. $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$.

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}.$$

2. $f = u \circ v \circ w$ où u est la fonction inverse, v est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $v(x) = x^5$ et w est définie sur D_f par $w(x) = x^2 - x - 6$.

3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} (x^2 - x - 6) = 0^-$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^5) = 0^+$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} (x^2 - x - 6) = 0^+; \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^5) = 0^+ \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty.$$

4. Limites et comparaisons

69. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} + 3\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 3\right) = 3$,
donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.

70. $\lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{1}{x-4}\right) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$.

71. $\lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}} \left(\frac{1}{5-2x}\right) = -\infty$

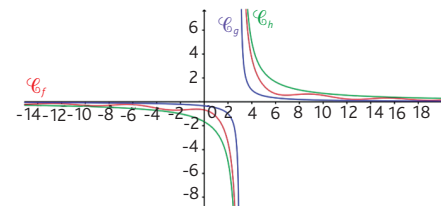
$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}} f(x) = -\infty.$$

72. 1. Il semble que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 2.$$

2. D'après le théorème de comparaison,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

73. 1. a. b.



c. Il semble que pour $x < 3$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_h$ et au-dessous de $\mathcal{C}_g$, et pour $x > 3$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ et au-dessous de $\mathcal{C}_h$.

d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$, donc par comparaison, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$, donc par comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2. a. Pour tout $x > 3$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$,
donc $-1 \leq -\cos(x) \leq 1$, d'où
 $2 \leq 3 - \cos(x) \leq 4$, ainsi (puisque
 $x - 3 > 0$) $\frac{2}{x-3} \leq \frac{3 - \cos(x)}{x-3} \leq \frac{4}{x-3}$,

$$\text{donc } \frac{1}{x-3} \leq \frac{3 - \cos(x)}{x-3} \leq \frac{5}{x-3}.$$

Pour tout $x > 3$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$,
donc $-1 \leq -\cos(x) \leq 1$, d'où
 $2 \leq 3 - \cos(x) \leq 4$, ainsi (puisque
 $x - 3 < 0$) $\frac{2}{x-3} \geq \frac{3 - \cos(x)}{x-3} \geq \frac{4}{x-3}$,

$$\text{donc } \frac{1}{x-3} \geq \frac{3 - \cos(x)}{x-3} \geq \frac{5}{x-3}.$$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$, donc d'après le théorème de comparaison, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$, donc d'après le théorème de comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

74. Pour tout $x > 0$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, donc $-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

75. Pour tout $x > 0$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, donc $\frac{4}{x} \leq \frac{\sin(x) + 5}{1} \leq \frac{6}{x}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{x}\right) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

76. 1. Pour tout $x \neq 2$,

$$f(x) = \frac{3 \cos(x)}{x-2} + 1.$$

Pour tout $x > 2$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, donc

$$\frac{-3}{x-2} \leq \frac{3 \cos(x)}{x-2} \leq \frac{3}{x-2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{x-2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x-2}\right) = 0$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

2. La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y = 1$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

77. Pour tout $x > 0$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, donc $\frac{-2}{x} - 4 \leq \frac{2 \sin(x)}{x} - 4 \leq \frac{2}{x} - 4$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{x} - 4\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} - 4\right) = -4$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

2. La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y = -4$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

78. 1. Pour tout réel x , $-1 \leq \cos(x) \leq 1$. Donc $-5 \leq \cos(x) - 4 \leq -3$.

2. Pour tout réel x ,

$$-5 \leq \cos(x) - 4 \leq -3, \text{ donc}$$

$$-\frac{1}{3} \leq \frac{1}{\cos(x) - 4} \leq -\frac{1}{5},$$

d'où :

$$\text{si } x > \frac{5}{3}, -\frac{3x-5}{3} \leq \frac{3x-5}{\cos(x)-4} \leq -\frac{3x-5}{5},$$

c'est-à-dire

$$-x - \frac{5}{3} \leq \frac{3x-5}{\cos(x)-4} \leq -\frac{3x}{5} - 1.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x - \frac{5}{3}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3x}{5} - 1\right) = -\infty,$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

79. 1. Pour tout réel x , $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.

Donc $-1 \leq \cos(x) \times \sin(x) \leq 1$.

$$\text{D'où } -\frac{1}{x^2} \leq \cos(x) \times \sin(x) \leq \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$$\text{De même, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

2. La courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

5. Continuité

80. Les courbes a. et b. semblent représenter des fonctions continues sur tout intervalle de leurs ensembles de définition.

81. 1. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ et $f(2) = -1$ donc f n'est pas continue en 2.

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $f(0) = 3$ donc f n'est pas continue en 0.

3. $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} f(x) = 0$ et $f\left(\frac{2}{3}\right) = 0$, de plus

$x \mapsto \sqrt{-3x+2}$ est continue sur $]-\infty; \frac{2}{3}]$

et $x \mapsto 3x-2$ est continue sur $[\frac{2}{3}; +\infty[$

donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

4. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \times 2 + 1 = 9$ et

$$f(2) = (-2 \times 2 + 1)^2 = 9 \text{ de plus}$$

$x \mapsto 4x+1$ et $x \mapsto (-2x+1)^2$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

82. Corrigé dans le manuel.

83. 1. $x \mapsto (x-4)^2$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc on cherche k tel que $\lim_{x \rightarrow 5} (x-4)^2 = k$. Ainsi $k = 1$.

2. $x \mapsto x^3 - 2x^2 + 3$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc on cherche k tel que $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2x^2 + 3) = k$. Ainsi $k = 2$.

84. f est la restriction d'une fonction polynôme, donc dérivable sur $[0; 4]$.

Pour tout réel x de $[0; 4]$, $f'(x) = -6(-2x+5)^2$.

Donc pour tout réel x de $[0; 4]$, $f'(x) < 0$.

Ainsi f est strictement décroissante sur $[0; 4]$. De plus, f est continue sur $[0; 4]$.

$$f(0) = 125 \text{ et } f(4) = -27.$$

$$40 \in [-27; 125]$$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 40$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0; 4]$.

85. 1. $x \mapsto -5x+2$ et $x \mapsto 4x-25$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} (-5x+2) = -13$$

et $\lim_{x \rightarrow 3} (4x-25) = -13$. Donc $k = -13$.

2. $x \mapsto (2x+1)^3$ et $x \mapsto 5x+4$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} (2x+1)^3 = -1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -1} (5x+4) = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} (5x+4) = 29. \text{ Donc } k = 29.$$

3. $x \mapsto x^3 - 2x^2 + 7$ et $x \mapsto 3x+3$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 2x^2 + 7) = -9$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -2} (3x+3) = -3.$$

Donc f n'est pas continue en (-2) , ainsi k n'existe pas.

86. Notons f la fonction

$$x \mapsto -2x^3 + 3x - 4.$$

f est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x ,

$$f'(x) = -6x^2 + 3 = -6\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = -6\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

D'où :

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$	
Signe de f'	-	0	+	0	-
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$-\infty$

$$f(-2) = 6 \text{ et } 0 \in \left] \frac{-8-5\sqrt{2}}{2}; 6 \right].$$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[-2; 5]$.

87. 1. Sur $[-5; 3]$, f admet 4 comme maximum.

Donc l'équation $f(x) = 8$ n'admet pas de solution dans $[-5; 3]$.

$0 \in]f(3); f(7)[$ et f est continue et strictement croissante sur $[3; 7]$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution dans $[3; 7]$.

Ainsi l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution dans $[-5; 7]$.

2. Sur $[-5; 2]$, f admet 1 comme minimum et 4 comme maximum.

Donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $[-5; 2]$.

$0 \in [f(3); f(2)]$ et f est continue et strictement décroissante sur $[2; 3]$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[2; 3]$.

$0 \in [f(3); f(7)]$ et f est continue et strictement croissante sur $[3; 7]$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[3; 7]$.

Ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans $[-5; 7]$.

3. De même, l'équation $f(x) = -3$ admet une unique solution dans $[-5; 7]$.

4. L'équation $f(x) = 2$ admet trois solutions dans $[-5; 7]$.

5. L'équation $f(x) = -4$ n'admet aucune solution dans $[-5; 7]$.

88. Corrigé dans le manuel.

89. Si $k < 0$, alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
Si $k = 0$, alors l'équation $f(x) = k$ admet trois solutions dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Si $0 < k < 3$, alors l'équation $f(x) = k$ admet quatre solutions dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Si $k = 3$, alors l'équation $f(x) = k$ admet trois solutions dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Si $3 < k \leq 6$, alors l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Si $k > 6$, alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

90. f est la restriction d'une fonction polynôme, donc dérivable sur $[-3; 4]$.

Pour tout réel x de $[-3; 4]$, $f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$.

$\Delta = -44$; $\Delta < 0$, donc pour tout réel x de $[-3; 4]$, $f'(x) > 0$.

$f(-3) = -64$ et $f(4) = 48$.

x	-3	4
Signe de f'	+	
Variations de f	-64	48

2. $2 \in [f(-3); f(4)]$ et f est continue et strictement croissante sur $[-3; 4]$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution dans $[-3; 4]$.

91. f est la restriction d'une fonction polynôme, donc dérivable sur $[-2; 2]$.

Pour tout réel x de $[-2; 2]$, $f'(x) = -9x^2 + 2x - 1$.

$\Delta = -32$; $\Delta < 0$, donc pour tout réel x de $[-2; 2]$, $f'(x) < 0$.

$f(-2) = 34$ et $f(2) = -18$.

x	-2	2
Signe de f'	-	
Variations de f	34	-18

2. $5 \in [f(2); f(-2)]$ et f est continue et strictement décroissante sur $[-2; 2]$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α dans $[-2; 2]$.

3. résoudre $(-3x^3 + x^2 - x + 4 = 5, x)$
[-0.46939642457]

On trouve $\alpha \approx -0,47$.

92. f est la restriction d'une fonction polynôme, donc dérivable sur $[-1; 3]$.

Pour tout réel x de $[-1; 3]$,

$$f'(x) = 2x^4 - 16x = 2x(x^3 - 8) = 2x(x - 2)(x^2 + 2x + 4).$$

$f(-1) = -11,4$; $f(0) = -3$;

$f(2) = -22,2$ et $f(3) = 22,2$.

3.

x	-1	0	2	3	
Signe de f'	+	0	-	0	+
Variations de f	-11,4	-3	-22,2	22,2	

2. $2 \in [f(2); f(3)]$ et f est continue et strictement croissante sur $[2; 3]$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans $[2; 3]$.

x	y_1
2,777	1,9674
2,786	2,0432
2,787	2,1192
2,788	2,1953
2,789	2,2716
2,79	2,3481
2,791	2,4247

On trouve $\alpha \approx 2,79$.

93. Notons f la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{2}; 0]$ par $f(x) = \cos(2x) + x$.

Alors pour tout réel x de $[-\frac{\pi}{2}; 0]$, $f'(x) = -2\sin(2x) + 1$.

Pour tout x de $[-\frac{\pi}{2}; 0]$,
 $-1 \leq \sin(2x) \leq 0$,

donc $0 \leq -2\sin(2x) \leq 2$,

d'où $1 \leq -2\sin(2x) + 1 \leq 3$,

ainsi $f'(x) > 0$.

Donc f est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}; 0]$. De plus, f est continue sur $[-\frac{\pi}{2}; 0]$.

$f(-\frac{\pi}{2}) = -1 - \frac{\pi}{2}$ et $f(0) = 1$.

$-1 \in [-1 - \frac{\pi}{2}; 1]$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\cos(2x) + x = -1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; 0]$.

94. Notons f la fonction définie sur $[-\pi; \pi]$ par $f(x) = 3\sin(x) - 5x$.

Alors pour tout réel x de $[-\pi; \pi]$, $f'(x) = 3\cos(x) - 5$.

Pour tout x de $[-\pi; \pi]$,

$-1 \leq \cos(x) \leq 1$,

donc $-3 \leq 3\cos(x) \leq 3$,

d'où $-8 \leq 3\cos(x) - 5 \leq -2$,

ainsi $f'(x) < 0$.

Donc f est strictement décroissante sur $[-\pi; \pi]$. De plus, f est continue sur $[-\pi; \pi]$.

$f(-\pi) = 5\pi$ et $f(\pi) = -5\pi$.

$4 \in [-5\pi; 5\pi]$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $3\sin(x) - 5 = 4$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

95. 1. Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(4x + 2) - 8x$.

Alors pour tout réel x de $\mathbb{R}$,

$f'(x) = -4\sin(4x + 2) - 8$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$-1 \leq \sin(4x + 2) \leq 1$,

donc $-4 \leq -4\sin(4x + 2) \leq 4$,

d'où $-12 \leq -4\sin(4x + 2) - 8 \leq -4$,

ainsi $f'(x) < 0$.

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , $f(x) > -8x - 1$,

or $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-8x - 1) = +\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

et pour tout réel x , $f(x) < -8x + 1$,

or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-8x + 1) = -\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\cos(4x + 2) - 8x = -1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

2. $0,05 < \alpha < 0,06$.

6. Dérivées

96. $x \mapsto \sqrt{5x-3}$ a pour dérivée
 $x \mapsto \frac{5}{2\sqrt{5x-3}}$.

$x \mapsto \sqrt{3-5x}$ a pour dérivée
 $x \mapsto \frac{-5}{2\sqrt{-5x+3}}$.

$x \mapsto \frac{1}{5x-3}$ a pour dérivée

$x \mapsto -\frac{5}{(5x-3)^2}$.

$x \mapsto (5x-3)^4$ a pour dérivée
 $x \mapsto 20(5x-3)^3$.

$x \mapsto 2\sqrt{5x-3}$ a pour dérivée
 $x \mapsto \frac{5}{\sqrt{5x-3}}$.

97. $x \mapsto \sqrt{x^4+6x-2}$ a pour dérivée
 $x \mapsto \frac{2x^3+3}{\sqrt{x^4+6x-2}}$.

$x \mapsto (2x^3+3)^2$ a pour dérivée
 $x \mapsto 12x^2(2x^3+3)$.

$x \mapsto \sqrt{2x^3+3}$ a pour dérivée
 $x \mapsto \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3+3}}$.

$x \mapsto (x^4+6x-2)^2$ a pour dérivée
 $x \mapsto 2(4x^3+6)(x^4+6x-2)$.

98. 1. $D = \left] \frac{7}{3}; +\infty \right[$
et $f' : x \mapsto \frac{3}{2\sqrt{3x-7}}$.

2. Pour tout réel x ,
 $4x^2 + 4x + 1 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

donc $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$

et $g' : x \mapsto \frac{4x+2}{\sqrt{4x^2+4x+1}}$.

3. Pour tout réel x ,
 $2x^2 - 3x - 2 = 2\left(x - 2\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$
donc $D = \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[\cup] 2; +\infty[$

et $h' : x \mapsto \frac{4x-3}{2\sqrt{2x^2-3x-2}}$.

99. 1. $D = \mathbb{R}$
et $f' : x \mapsto 30x^2(5x^3-4)$.

2. $D = \mathbb{R}$
et $g' : x \mapsto 6(20x^3-3)(5x^4-3x+2)^5$.

3. $D = \mathbb{R} \setminus \{-6\}$
et $h' : x \mapsto \frac{-3}{(x+6)^4}$.

100. 1. $D = \mathbb{R}$
et $f' : x \mapsto -35(-7x+3)^4$.

2. $D = \mathbb{R}$
et $g' : x \mapsto -5\sin(5x+3)$.

3. $D = \mathbb{R}^*$
et $h' : x \mapsto -6\cos(-3x+2) + \frac{4}{x^2}$.

4. $D =]7; +\infty[$
et $k' : x \mapsto \frac{-20}{(-5x+2)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x-7}}$.

5. $D = \left] -\frac{5}{2}; \frac{1}{3} \right[\cup \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$
et $l' : x \mapsto \frac{-15}{(3x-1)^2} + \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$.

101. Corrigé dans le manuel.

102. 1. On cherche l'ensemble des x tels que $-3x^2 + 11x + 4 \geq 0$.
 $\Delta = 169$. Ce trinôme a pour racines 4 et $-\frac{1}{3}$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	4	$+\infty$	
signe de $-3x^2 + 11x + 4$	-	0	+	0	-

Donc $D_f = \left[\frac{1}{3}; 4 \right]$

2. Pour tout x de $\left] -\frac{1}{3}; 4 \right[$,

$f'(x) = \frac{-6x+11}{2\sqrt{-3x^2+11x+4}}$.

x	$-\frac{1}{3}$	$\frac{11}{6}$	4
Signe de f'		$\begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array}$	
Variations de f	$0 \nearrow$	$\frac{13\sqrt{3}}{6}$	$\searrow 0$

103. 1. $\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$
 $\Leftrightarrow x = 0 + \frac{k\pi}{3}$.

Donc $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{3} \right\}$ avec k entier relatif.

2. Pour tout x de D ,
 $f'(x) = \frac{-3\left(\sin 3x + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos^2\left(\sin 3x + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{3\cos(3x)}{\sin^2(3x)}$

car pour tout réel x ,

$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$

et $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$.

104. 1. f est dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

Pour tout x de $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$,

$f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos(x)}}$.

2.

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
Signe de f'	+	0	-
Variations de f	0	1	0

105. Pour tout réel x ,
 $f'(x) = 5\cos(x)\sin^4(x)$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de f'	+	0	-
Variations de f	0	1	0

De plus, f est impaire et périodique de période 2π .

7. Fonctions trigonométriques

106. 1. Pour tout réel x ,
 $f(-x) = 3\cos(-x) - (-x)^2$
 $= 3\cos(-x) - x^2 = f(x)$,

donc f est paire.

2. Pour tout réel x ,
 $f(-x) = -5x\sin(-x) - 1$
 $= -5x \times (-\sin(x)) - 1$
 $= 5x\sin(x) - 1 = f(x)$,
donc f est paire.

3. Pour tout réel x ,
 $f(-x) = \sin(-3x) - 2x$
 $= \sin(3x) - 2x$
 $= -(\sin(3x) + 2x) = -f(x)$,
donc f est impaire.

4. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{7\sqrt{2}}{2}$
donc f n'est ni paire ni impaire.

107. 1. Pour tout réel x ,

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(4x + 2\pi) - 5 \\ = \cos(4x) - 5 = f(x)$$

donc f est périodique de période $\frac{\pi}{2}$.

2. Pour tout réel x ,

$$f(x + 2\pi) = -3 \sin(x + 2\pi) + 5 \cos^2(x + 2\pi) \\ = -3 \sin(x) + 5 \cos^2(x) = f(x)$$

donc f est périodique de période 2π .

108. 1. Pour tout réel x ,

$$f(-x) = |\sin(-x)| = |-\sin(x)| \\ = |\sin(x)| = f(x)$$

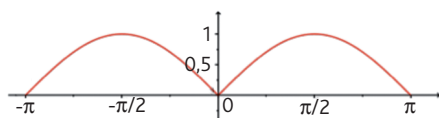
donc f est paire.

2. Pour tout réel x ,

$$f(x + \pi) = |\sin(x + \pi)| = |-\sin(x)| \\ = |\sin(x)| = f(x)$$

donc f est périodique de période π .

3.



109. 1. Pour tout réel x ,

$$f(-x) = |\cos(-x)| + \cos(-x) \\ = |\cos(x)| + \cos(x) = f(x)$$

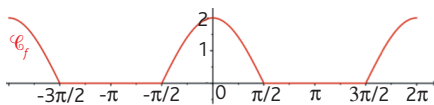
donc f est paire.

2. Pour tout réel x , Pour tout réel x ,

$$f(x + 2\pi) = |\cos(x + 2\pi)| + \cos(x + 2\pi) \\ = |\cos(x)| + \cos(x) = f(x)$$

donc f est périodique de période 2π .

3.



110. 1. Pour tout réel x ,

$$f(-x) = \cos(-2x) - 2 \cos(-x) \\ = \cos(2x) - 2 \cos(x) = f(x),$$

donc f est paire.

2. Pour tout réel x ,

$$f(x + 2\pi) = \cos(2x + 4\pi) - 2 \cos(x + 2\pi) \\ = \cos(2x) - 2 \cos(x) = f(x)$$

donc f est périodique de période 2π .

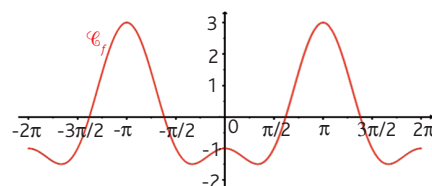
3. f est paire, donc l'étude de f sur $[0; \pi]$ permet, par symétrie, de connaître aussi f sur $[-\pi; 0]$, donc sur $[-\pi; \pi]$ qui est un intervalle d'amplitude 2π , donc puisque f est périodique de période 2π , on connaît alors f sur $\mathbb{R}$.

4. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$f'(x) = -2 \sin(2x) + 2 \sin(x) \\ = -2 \sin(x)(2 \cos(x) - 1).$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π	
$\cos(x)$		+	0	-
$\sin(x)$	0	+	+	0
Signe de f'	0	-	+	
Variations de f	-1		$-\frac{3}{2}$	3

5.



111. 1. Pour tout réel x ,

$$f(-x) = \cos(-3x) + 1 \\ = \cos(3x) + 1 = f(x)$$

donc f est paire.

2. Pour tout réel x ,

$$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos(3x + 2\pi) + 1 \\ = \cos(3x) + 1 = f(x),$$

donc f est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$f'(x) = -3 \sin(3x).$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$
Signe de f'	0	-	0
Variations de f	2		

x	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
Variations de f	0	2	0	2	0	2	0

112. 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x - \sin(x)$.

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout réel x de $\mathbb{R}^+$, $f'(x) = 1 - \cos(x)$.

Donc, pour tout réel x de $\mathbb{R}^+$, $f'(x) \geq 0$.

Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}$. Or $f(0) = 0$.

Donc pour tout réel x de $\mathbb{R}^+$, $f(x) \geq 0$.

Ainsi pour tout réel x de $\mathbb{R}^+$, $x - \sin(x) \geq 0$, c'est-à-dire $\sin(x) \leq x$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$.

Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout réel x de $\mathbb{R}^+$, $g'(x) = -\sin(x) + x$.

Ainsi, d'après 1., pour tout réel x de $\mathbb{R}^+$, $g'(x) \geq 0$. Donc g est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Or $g(0) = 0$, donc pour tout réel x de $\mathbb{R}^+$, $g(x) \geq 0$, c'est-à-dire pour tout réel x de $\mathbb{R}^+$, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x)$.

D'autre part, pour tout réel x de $\mathbb{R}^+$, $\cos(x) \leq 1$.

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$.

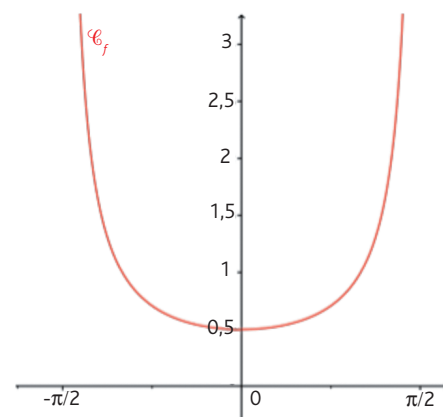
Alors h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout réel x de $\mathbb{R}^+$, $h'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$.

Ainsi, d'après 2., pour tout réel x de $\mathbb{R}^+$, $h'(x) \geq 0$. Donc h est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Or $h(0) = 0$, donc pour tout réel x de $\mathbb{R}^+$, $h(x) \geq 0$, c'est-à-dire pour tout réel x de $\mathbb{R}^+$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x)$.

D'autre part, d'après 1., pour tout réel x de $\mathbb{R}^+$, $\sin(x) \leq x$.

113. Partie A

1.



2. Il semble que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

Partie B

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin(x)) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin(2x)) = 0$

2. On ne peut pas conclure car on obtient une forme indéterminée.

3. Pour tout réel x , $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$.

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{\sin(2x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{2 \sin(x) \cos(x)} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2 \cos(x)} \right) = \frac{1}{2}.$$

114. 1. $h = \sin(x)$.

2. Pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\mathcal{A}(x) = \frac{(AB + DC) \times h}{2}$$

$$\text{or } DC = AB + 2 \cos(x) = 1 + 2 \cos(x).$$

Donc pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \frac{(2 + 2 \cos(x)) \times \sin(x)}{2} \\ &= (1 + \cos(x)) \times \sin(x). \end{aligned}$$

1	assume (x>=0)and(x<=pi/2);f:=(cos(x)+1)*sin(x)
2	(x and ((pi/2)>=x), (cos(x)+1)*sin(x))
2	g:=simplify(derive(f))
	$2 \cdot \cos(x)^2 + \cos(x) - 1$
3	resoudre(g=0)
	$\pi, \frac{\pi}{3}$
4	resoudre(g>0)
	$(x \geq 0) \text{ and } (x < (\frac{\pi}{3}))$
5	resoudre(g<0)
	$(x > (\frac{\pi}{3})) \text{ and } (x < \pi), x > \pi$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Signe de $\mathcal{A}'$	+	0	-
Variations de $\mathcal{A}$	$\begin{array}{c} \nearrow \frac{3\sqrt{3}}{4} \searrow \\ 0 \qquad \qquad 1 \end{array}$		

b. L'aire du trapèze semble maximale pour $x = \frac{\pi}{3}$.

4. a. Pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'(x) &= -\sin(x) \times \sin(x) + (1 + \cos(x)) \times \cos(x) \\ &= -\sin^2(x) + \cos^2(x) + \cos(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'(x) &= -\sin^2(x) - \cos^2(x) + 2 \cos^2(x) + \cos(x) \\ &= -1 + 2 \cos^2(x) + \cos(x) \end{aligned}$$

b. Pour tout réel X ,

$$2X^2 + X - 1 = 2 \left(X - \frac{1}{2}\right) (X + 1)$$

X	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$		
Signe de $2X^2 + X - 1$		+	0	-	0	+

b. On pose $X = \cos(x)$.

$$\text{Pour } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

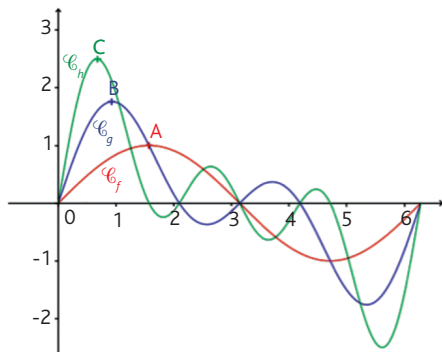
$$\text{et } \cos(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{3}.$$

$$\cos(x) = -1 \text{ n'a pas de solution dans } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Signe de $\mathcal{A}'$		$\begin{array}{c} + \\ \\ 0 \\ \\ - \end{array}$	
Variations de $\mathcal{A}$	$\begin{array}{ccc} & \frac{3\sqrt{3}}{4} & \\ \nearrow & & \searrow \\ 0 & & 1 \end{array}$		

d. L'aire du trapèze semble maximale pour $x = \frac{\pi}{3}$.

115. 1. et 2.



3. Pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f_1(x + 2\pi) &= \sin(x + 2\pi) \\ &= \sin(x) = f_1(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1(x + 2\pi) &= \sin(x + 2\pi) + \sin(2x + 4\pi) \\ &= \sin(x) + \sin(2x) = g_1(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_1(x + 2\pi) &= \sin(x + 2\pi) + \sin(2x + 4\pi) + \sin(3x + 6\pi) \\ &= \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = h_1(x) \end{aligned}$$

Donc ces fonctions sont périodiques de période 2π .

8. Problèmes

116. Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{3}\right\}$,

$$f(x) = \frac{1}{(3x - 4)^2}.$$

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} f(x) = +\infty.$$

2. $\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$. $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $x = \frac{4}{3}$ comme asymptote verticale.

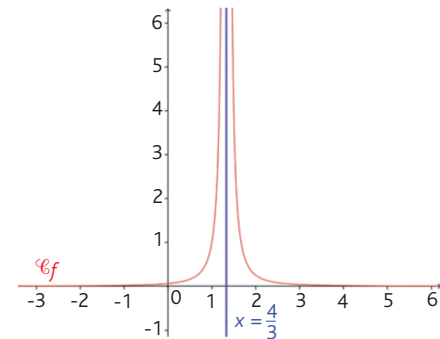
3. Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{3}\right\}$, $f(x) > 0$, donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses.

4. Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{3}\right\}$,

$$f'(x) = \frac{-6}{(3x - 4)^3}.$$

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
Signe de f'	+		-
Variation de f	$\begin{array}{c} \nearrow +\infty \searrow \\ 0 \qquad \qquad 0 \end{array}$		

5.



117. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$ donc $a = 4$.

Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{3\}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{a(x - 3) - (ax + b)}{(x - 3)^2} \\ &= \frac{-3a - 3b}{(x - 3)^2} = \frac{-12 - b}{(x - 3)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-12 - b}{(1 - 3)^2} = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow b = -10. \end{aligned}$$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$;

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = -\infty$$

3. f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ et pour tout

$$x \text{ de } \mathbb{R} \setminus \{3\}, f'(x) = \frac{-2}{(x - 3)^2}.$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
Signe de f'	-		-
Variation de f	$\begin{array}{c} \nearrow +\infty \searrow \\ 4 \qquad \qquad 4 \end{array}$		

118. On considère la fonction

$$f: x \mapsto \frac{-2}{(x^2 + 3x - 10)^3}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

$$1. f: x \mapsto \frac{-2}{((x - 2)(x + 5))^3}.$$

Donc l'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R} \setminus \{-5; 2\}$.

2. $f = u \circ v \circ w$ avec u définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-5; 2\}$ par $u(x) = x^2 + 3x - 10$; v définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = x^3$ et w définie sur $\mathbb{R}^*$ par $w(x) = \frac{-2}{x}$.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (u(x)) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (v(x)) = +\infty$; donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (v \circ u(x)) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (w(x)) = 0$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = 0$.

On obtient de même $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow -5} (u(x)) = 0^+$; $\lim_{x \rightarrow 0} (v(x)) = 0^+$

donc $\lim_{x \rightarrow -5} (v \circ u(x)) = 0^+$.

$\lim_{x \rightarrow 0} (w(x)) = -\infty$,

d'où $\lim_{x \rightarrow -5} (f(x)) = -\infty$.

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x)) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x)) = -\infty$.

4. Équations des asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$: $x = 2$; $x = -5$; $y = 0$ (axe des abscisses) en $+\infty$ et en $-\infty$.

5. $f(x) > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+5) > 0$
 $\Leftrightarrow x \in]-\infty; -5[\cup]2; +\infty[$.

Donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $]-\infty; -5[$ et sur l'intervalle $]2; +\infty[$ et $\mathcal{C}$ est au-dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $]-5; 2[$.

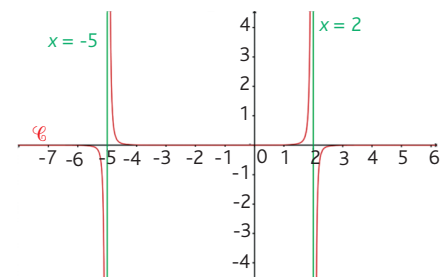
6. f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-5; 2\}$ et pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-5; 2\}$,

$$f'(x) = \frac{6(2x+3)}{(x^2+3x-10)^4}.$$

x	$-\infty$	-5	$-\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$f(-\frac{3}{2})$	$+\infty$	$-\infty$

Remarque: $f(-\frac{3}{2}) = \frac{128}{117649}$.

7.



119. Première partie

1. $x \mapsto x(4-x)$ est dérivable sur $]0; 4[$ comme produit de fonctions dérivables.

Pour tout x de $]0; 4[$, $x(4-x) > 0$. Donc $x \mapsto \sqrt{x(4-x)}$ est dérivable sur $]0; 4[$.

$f = \sqrt{u \times v}$ où u et v sont définies et dérivables sur $]0; 4[$ et pour tout x de $]0; 4[$, $u(x) = x$; $v(x) = 4-x$; $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -1$.

$$f' = \frac{u'v + uv'}{2\sqrt{u \times v}}.$$

Donc pour tout x de $]0; 4[$,

$$f'(x) = \frac{4-x-x}{2\sqrt{x(4-x)}} = \frac{4-2x}{2\sqrt{x(4-x)}} = \frac{2-x}{\sqrt{x(4-x)}}.$$

2. Dérivabilité de f en 0 :

Pour tout x de $]0; 4[$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x(4-x)}}{x} = \sqrt{\frac{4-x}{x}} = \sqrt{\frac{4}{x} - 1}.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{4}{x} - 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{4}{x} - 1} = +\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0.

Dérivabilité de f en 4 :

Pour tout h de $]0; 4[$,

$$\frac{f(4) - f(4-h)}{h} = \frac{-\sqrt{h(4-h)}}{h} = \sqrt{\frac{4-h}{h}} = \sqrt{\frac{4}{h} - 1}.$$

$\lim_{h \rightarrow 0} (\frac{4}{h} - 1) = +\infty$

donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4) - f(4-h)}{h} = -\infty$.

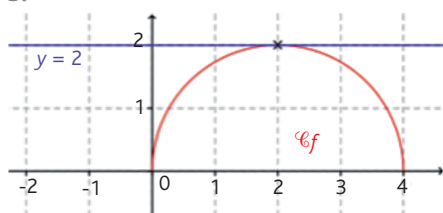
Donc f n'est pas dérivable en 4.

3.

x	0	2	4		
Signe de f'	0	+	4	-	
Variation de f	0		2		0

4. $f'(2) = 0$ et $f(2) = 2$ donc l'équation de la tangente au point d'abscisse 2 est $y = 2$.

5.



Deuxième partie

1. g est dérivable sur $]0; 4[$ comme produit de fonctions dérivables.

$g = u \times f$ où u et f sont définies et dérivables sur $]0; 4[$ et pour tout x de $]0; 4[$, $u(x) = x$ et $u'(x) = 1$.

$$g' = u' \times f + u \times f',$$

Donc pour tout x de $]0; 4[$,

$$g'(x) = \sqrt{x(4-x)} + x \times \frac{2-x}{\sqrt{x(4-x)}} = \sqrt{x(4-x)} + \frac{2x-x^2}{\sqrt{x(4-x)}} = \frac{x(4-x) + 2x\sqrt{x(4-x)}}{\sqrt{x(4-x)}} = \frac{x(4-x) + 2x\sqrt{x(4-x)}}{\sqrt{x(4-x)}} = \frac{6-2x^2}{\sqrt{x(4-x)}}.$$

$$g'(x) = \frac{2x(3-x)}{\sqrt{x(4-x)}}.$$

2. a. Dérivabilité de g en 0 :

Pour tout x de $]0; 4[$,

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{x\sqrt{x(4-x)}}{x} = \sqrt{x(4-x)}.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x(4-x)} = 0$ donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 2$.

b. Dérivabilité de g en 4 :

Pour tout h de $]0; 4[$,

$$\frac{g(4) - g(4-h)}{h} = \frac{(4-h)\sqrt{h(4-h)}}{h} = \frac{(4-h)\sqrt{4-h}}{\sqrt{h}}.$$

$\lim_{h \rightarrow 0} ((4-h)\sqrt{4-h}) = 8$

et $\lim_{h \rightarrow 0} (\frac{1}{\sqrt{h}}) = +\infty$

donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(4) - g(4-h)}{h} = -\infty$.

Donc g n'est pas dérivable en 4.

3.

x	0	3	4		
Signe de g'	0	+	0	-	
Variation de g	0	$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	0

4. g est continue sur $[0; 3]$ comme produit de fonctions continues.

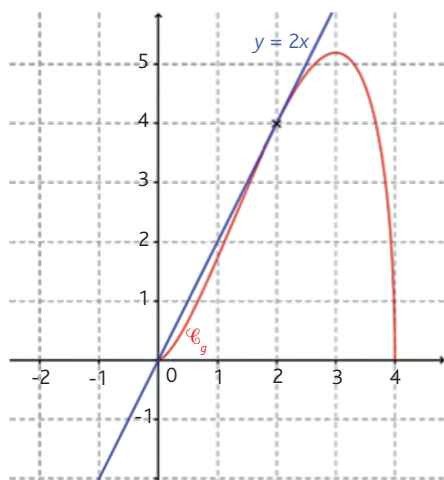
$$2 \in [g(0); g(3)]$$

donc l'équation $g(x) = 2$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0; 3]$.

Elle est comprise entre 0,66 et 0,67.

$$5. g'(2) = \frac{4}{\sqrt{2 \times 2}} = 2 \text{ et } g(2) = 4$$

La tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 2 a pour équation $y = g'(2)(x - 2) + g(2)$ d'où $y = 2x$.



Troisième partie

1. Pour tout x de $]0; 4[$,

$$k(x) = \sqrt{\frac{4-x}{x}} = \sqrt{\frac{4}{x} - 1}$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = +\infty$.

2. $k = \frac{f}{u}$ où u et f sont définies et dérivables sur $]0; 4[$ et pour tout x de $]0; 4[$, $u(x) = x$ et $u'(x) = 1$.

$$k' = \frac{f'u - fu'}{u^2};$$

Donc pour tout x de $]0; 4[$,

$$k'(x) = \frac{\frac{2-x}{\sqrt{x(x-4)}} \times x - \sqrt{x(x-4)}}{x^2} = \frac{-2}{x\sqrt{x(x-4)}}.$$

3. Pour tout h de $]0; 4[$,

$$\frac{k(4) - k(4-h)}{h} = \frac{\sqrt{h(4-h)}}{h(4-h)} = -\frac{1}{\sqrt{h(4-h)}}.$$

$$\text{donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(4) - k(4-h)}{h} = -\infty.$$

Donc k n'est pas dérivable en 4.

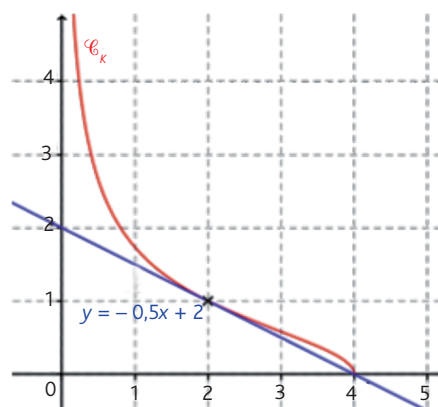
4.

x	0	4
Signe de g'		-
Variation de g	$+\infty$	0

5. $k'(2) = \frac{-2}{2\sqrt{2} \times 2} = -\frac{1}{2}$ et $k(2) = 1$.

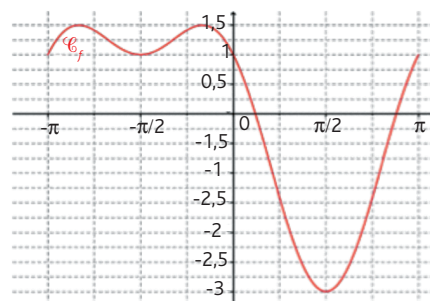
La tangente à $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse 2 a pour équation $y = k'(2)(x - 2) + k(2)$ d'où $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

6.



120. Conjecture

1.



2. Il semble que l'équation $f(x) = k$ n'admet aucune solution si $k < -3$ et si $k > 1,5$ et que l'équation $f(x) = k$ admet :

- * une seule solution si $k = -3$
- * deux solutions si $k \in]-3; 1[\cup \{1,5\}$
- * quatre solutions si $k \in [1; 1,5[$

Démonstration

1. f est dérivable sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$

et pour tout x de $[-\pi; \pi]$, $f'(x) = -2 \sin(2x) - 2 \cos(x)$.

2. Pour tout x de $[-\pi; \pi]$, $f'(x) = -2 \sin(2x) - 2 \cos(x)$
 $= -4 \sin(x) \cos(x) - 2 \cos(x)$
 $= -2 \cos(x) (2 \sin(x) + 1).$

x	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	π		
Signe de $-2 \cos(x)$	+	+	0	-	-	0	+	
Signe de $x - 3$	+	0	-	-	0	+	+	
Signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+	-	0	+
Variations de f		$\nearrow \frac{3}{2}$	$\searrow 1$	$\nearrow \frac{3}{2}$	$\searrow -3$	$\nearrow 1$		

3. Les conjectures sont vérifiées.

121. 1. Pour tout x de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $(-x) \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Pour tout x de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$,

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -f(x).$$

Donc f est impaire.

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0^+$,
 $x < \frac{\pi}{2}$

donc $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos(x) = +\infty$.

$x < \frac{\pi}{2}$

3. La courbe représentative de f admet comme asymptote verticale la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ et par parité, la droite d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$.

4. $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont dérivables sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et pour tout x de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $\cos(x) \neq 0$.

Donc f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Pour tout x de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$,

$$f'(x) = \frac{\cos(x) \times \cos(x) - \sin(x) \times (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + [f(x)]^2.$$

5. Pour tout x de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

6. f est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty,$$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel k , l'équation admet une unique solution dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

7. Pour $k = 2$, $\alpha \approx 1,11$.

8. Pour tout x de $\mathcal{D}_g$,

$$g(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = g(x).$$

Donc g est périodique de période π .

Ainsi on obtient la courbe de g par translation de celle de f de vecteur $k\pi\vec{i}$ où k est entier.

122. 1. a. $l_1 = OH + OB = \cos(x) + 1$

b. $l_2 = HA + AB = 1 - \cos(x) + x$.

2. a. f est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = -2 \sin(x) - 1$.

Or pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geq 0$, donc $f'(x) < 0$.

Ainsi f est strictement décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

b. f est continue et strictement décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

$f(0) = 2$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$ et $0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; 2\right]$.
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

c. $\alpha \approx 1,03$.

d. $l_1 = l_2 \Leftrightarrow 2 \cos(x) - x = 0 \Leftrightarrow x \approx 1,03$.
Donc les longueurs des deux chemins sont à peu près égales lorsque $x \approx 1,03$ rad.

123. Partie 1

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$;

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

2. $\mathcal{C}$ a pour asymptote horizontale l'axe des abscisses en $-\infty$ et en $+\infty$ et pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 1$.

Partie 2

1. f est une fonction rationnelle, donc elle est dérivable sur son ensemble de définition et pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$f'(x) = \frac{-4x^3 - 3x^2 - 2}{(x^3 - 1)^2}.$$

2. a. g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $g'(x) = -6x(2x + 1)$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$
Signe de g'	-	0	+	0	-
Variations de g	$+\infty$	$-\frac{9}{4}$	-2	-9	$-\infty$

b. Sur $\left[-\frac{1}{2}; 1\right[\cup]1; +\infty[$, le maximum de g est (-2) , donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

Sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$, g est continue et strictement décroissante avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ et $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.

Ainsi, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

c. $\alpha \approx -1,137$.

d. Pour tout $x < \alpha$, $g(x) > 0$.

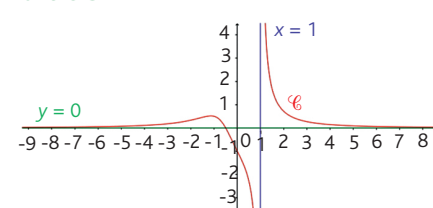
Pour tout x de $]\alpha; 1[\cup]1; +\infty[$, $g(x) < 0$.

3.

x	$-\infty$	α	1	$+\infty$
Signe de g	+	0	-	-
Variations de f	0	$f(\alpha)$	$+\infty$	0

avec $f(\alpha) \approx 0,5$.

Partie 3



Partie 4

1. T a pour équation

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \text{ avec } f(0) = -1 \text{ et } f'(0) = -2.$$

Donc T a pour équation $y = -2x - 1$.

2. Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$f(x) - (-2x - 1) = \frac{x^3(2x + 1)}{x^3 - 1}.$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$
Signe de x^3	-	-	0	+	+
Signe de $2x + 1$	-	0	+	+	+
Signe de $x^3 - 1$	-	-	-	0	+
Variations de $f(x) - (-2x - 1)$	-	0	+	0	+

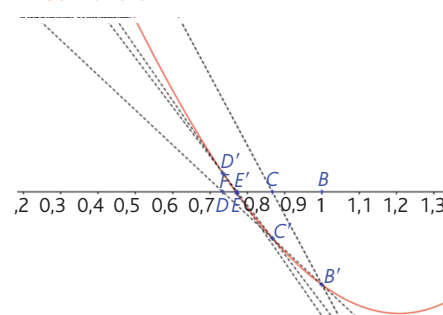
Donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de T sur $\left[-\frac{1}{2}; 0\right[\cup]1; +\infty[$ et $\mathcal{C}$ est au-dessous de T sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup]0; 1[$.

124. 1. Si $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas du même signe, alors $0 \in [f(a); f(b)]$ et on

applique le théorème des valeurs intermédiaires.

2. Si $(f - g)(a)$ et $(f - g)(b)$ ne sont pas du même signe, alors d'après 1., il existe un réel c dans l'intervalle $[a; b]$ tel que $(f - g)(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = g(c)$.

125. Partie 1



Cette solution est proche de 0,769 453 08.

Partie 2

1. $y = mx + p$ où $m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

et $y_{B'} = mx_{B'} + p$,

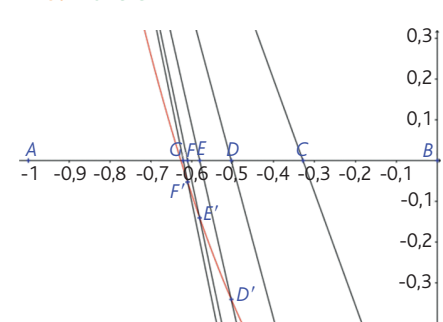
c'est-à-dire $f(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \times b + p$.

2. $y_C = 0$ donc $c = b - \frac{(b - a)}{f(b) - f(a)} \times f(b)$.

Partie 3

Cette solution est proche de 1,606 394 183.

126. Partie 1

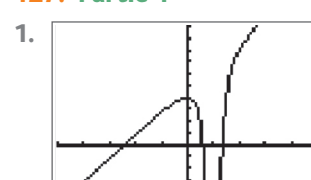


Cette solution est proche de $-0,62$.

Partie 2

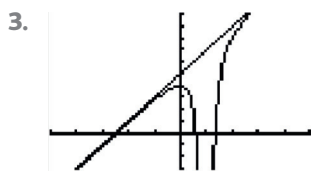
Voir exercice 125.

127. Partie 1



2. Il semble que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$;

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.



La droite et la courbe semblent très proches quand x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$.

Partie 2

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 5) = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{(x-1)^2} \right) = 0$,

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 5) = 7$

et $\lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{1}{(x-1)^2} \right) = -\infty$,

donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 5) = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{(x-1)^2} \right) = 0$,

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x + 5))$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{(x-1)^2} \right) = 0$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (2x + 5))$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{(x-1)^2} \right) = 0$.

3. Pour tout $x \neq 1$,

$f(x) - (2x + 5) = -\frac{1}{(x-1)^2}$, donc

$f(x) - (2x + 5) < 0$.

Ainsi $\mathcal{C}$ est au-dessous de (d) sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

128. 1. Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{4\}$,

$f(x) = x - 3 + \frac{2}{x-4}$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -\infty$;

$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. La droite (d_1) d'équation $x = 4$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

4. f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ et pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{4\}$, $f'(x) = \frac{x^2 - 8x + 14}{(x-4)^2}$.

Discriminant de $x^2 - 8x + 14$: $\Delta = 8$

x	$-\infty$	$4 - \sqrt{2}$	4	$4 + \sqrt{2}$	$+\infty$	
Signe de f'	+		-	-		+
Variations de f		$1 - 2\sqrt{2}$		$1 + 2\sqrt{2}$		$+\infty$

5. Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{4\}$,

$f(x) - (x - 3) = \frac{2}{x-4}$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 3)) = 0$ et

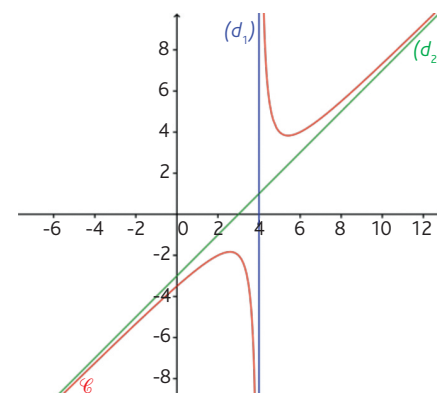
$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x - 3)) = 0$.

6. Pour tout x de $]-\infty ; 4[$,

$f(x) - (x - 3) < 0$. Donc $\mathcal{C}$ est au-dessous de (d_2) sur $]-\infty ; 4[$.

Pour tout x de $]4 ; +\infty[$, $f(x) - (x - 3) > 0$.
 Donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de (d_2) sur $]4 ; +\infty[$.

7.



En route vers le bac (p. 102-105)

129. Définition par récurrence.

• $u_0 \in I$;

• Si $u_n \in I$ alors $f(u_n) \in I$ c'est-à-dire $u_{n+1} \in I$.

Donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \in I$.

130. $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = l$ et f est continue en l

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$.

Or pour tout n de $\mathbb{N}$, $f(u_n) = u_{n+1}$, donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = l$.

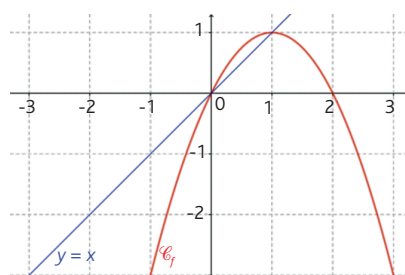
Donc par unicité de la limite, $l = f(l)$.

131. Partie A

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = -2x + 2$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Signe de f'		+	-
Variations de f	$-\infty$	1	$-\infty$

2.



3. $f(x) = x \Leftrightarrow x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.

Partie B

1. $f(0) = f(2) = 0$ et $f(1) = 1$, donc si $u_0 \in \{0 ; 1 ; 2\}$, alors pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \in \{0 ; 1 ; 2\}$.

2.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Signe de $x(1-x)$		-	+	-

3. Pour tout n de $\mathbb{N}$,

$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n(2 - u_n) - u_n$
 $= u_n - u_n^2 = u_n(1 - u_n)$.

4. a. $f([0 ; 1]) =]0 ; 1[$, donc d'après le résultat de l'exercice 129, $u_n \in]0 ; 1[$.

b. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$.
 Donc (u_n) est croissante. De plus (u_n) est majorée, donc (u_n) admet une limite égale à 1.

5. a. $f([1 ; 2]) =]0 ; 1[$ et

$f([0 ; 1]) =]0 ; 1[$ donc pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n \in]0 ; 1[$.

b. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$.
 Donc (u_n) est croissante. De plus (u_n) est majorée, donc (u_n) admet une limite égale à 1.

6. a. $f([-\infty ; 0]) =]-\infty ; 0[$ donc pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n < 0$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$. Donc (u_n) est décroissante.

b. (u_n) n'est pas minorée donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

7. a. $f([2; +\infty[) =]-\infty; 0]$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n < 0$.

b. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$. Donc (u_n) est décroissante.

c. (u_n) n'est pas minorée donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

132. 1. Une suite croissante admet une limite finie, si et seulement si, elle est majorée.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 1$. Donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$. Ainsi (u_n) est croissante.

3. $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$, ainsi l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

4. Si (u_n) avait une limite finie l , on aurait $l = f(l)$, ce qui est impossible, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

133. 1. Supposons $a = 1$. Alors pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + b$. Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $b \neq 0$. Ainsi (u_n) est strictement croissante ou strictement décroissante et a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$.

Par conséquent, si (u_n) a une limite finie, alors $a \neq 1$.

2. a. Alors pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - l}{u_n - l}$$

$$\frac{au_n + b - \frac{b}{1-a}}{u_n - \frac{b}{1-a}} = \frac{a(1-a)u_n - ab}{(1-a)u_n - b} = \frac{a((1-a)u_n - b)}{(1-a)u_n - b} = a$$

Donc (v_n) est géométrique de raison a .

b. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = (u_0 - l) \times a^n$.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = (u_0 - l) \times a^n + l$. Si $a > 1$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Si $a < -1$, alors a^n n'a pas de limite.

Si $-1 < a < 1$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^n = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = l$.

134. 1. a. La fonction f est dérivable de $f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 - 2}{x^2} \right)$

Le signe de f' est donc celui de $x^2 - 2$, car $x^2 > 0$, pour $x > 0$.

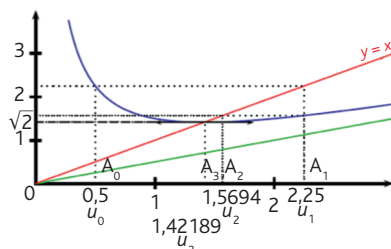
Or sur $]0; +\infty[$, $x^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{2}$.

La fonction est :

– décroissante sur $]0; \sqrt{2}[$;

– croissante sur $]\sqrt{2}; +\infty[$.

D'où la courbe représentative de f :



2. a. On a quel que soit n ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) = f(u_n).$$

On vient de voir que :

$$u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2,25 \geq \sqrt{2}.$$

L'affirmation est vraie au rang 1.

Supposons $u_n \geq \sqrt{2}$. D'après la question 1, la fonction f est croissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$. Donc par application de cette croissance $f(u_n) \geq f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. Donc $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$. La relation est héréditaire.

Conclusion : quel que soit :

$$n \geq 1, u_n \geq \sqrt{2}.$$

b. Soit :

$$f(x) - x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2} = \frac{2 - x^2}{2x}.$$

On a vu que si $x \geq \sqrt{2}$, $2 - x^2 \leq 0$.

Conclusion : si $x \geq \sqrt{2}$,

$$f(x) - x \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq x.$$

c. On a vu que pour $n > 0$, $u_n \geq \sqrt{2}$; donc d'après la question précédente $f(u_n) \leq u_n$; or $f(u_n) = u_{n+1}$.

Conclusion : $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n > 0$. La suite est (u_n) décroissante.

d. La suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$. Elle converge donc vers un réel supérieur ou égal à $\sqrt{2}$.

3. La fonction f est définie et continue sur $[\sqrt{2}; +\infty[$; la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers $\ell = f(\ell)$.

ℓ est donc solution de l'équation $\frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) = x \Leftrightarrow 2x = x + \frac{2}{x}$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = x^2 + 2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2},$$

seule solution supérieure ou égale à $\sqrt{3}$.

La suite (u_n) converge vers $\ell = \sqrt{2}$.

135. 1. a. f est une fonction rationnelle donc dérivable sur son ensemble de définition.

Pour tout x de $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$, $f'(x) = \frac{2(x^2 - x - 1)}{(2x - 1)^2}$.

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
Signe de f'	-	+	
Variations de f	$+\infty$	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$+\infty$

b. Sur $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$, le minimum de f est ϕ .

$$2. f\left(\left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; 2\right]\right) = \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{5}{3}\right]$$

$$\text{donc } f\left(\left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; 2\right]\right) \subset \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; 2\right],$$

d'où d'après l'exercice 129, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \subset \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; 2\right]$, c'est-à-dire : $\phi \leq u_n \leq 2$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n + 1}{2u_n - 1}, \text{ donc pour}$$

$$u_n \geq \phi, u_{n+1} - u_n \leq 0.$$

b. Dans $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[: x = f(x) \Leftrightarrow x = \frac{x^2 + 1}{2x - 1}$
 $\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \phi.$

c. (u_n) est décroissante et est minorée donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = \phi$.

3. a. Pour tout x de $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$,

$$f(x) - \phi = \frac{x^2 + 1}{2x - 1} - \phi = \frac{x^2 + 1 - 2x\phi + \phi}{2x - 1} = \frac{x^2 - 2x\phi + \phi^2}{2x - 1} = \frac{(x - \phi)^2}{2x - 1}.$$

Donc pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - \phi = f(u_n) - \phi = \frac{(u_n - \phi)^2}{2u_n - 1},$$

or $u_n \geq \phi$ donc $2u_n - 1 \geq 2\phi - 1$

$$\text{d'où } \frac{(u_n - \phi)^2}{2u_n - 1} \leq \frac{(u_n - \phi)^2}{2\phi - 1} \leq \frac{1}{2} (u_n - \phi)^2$$

car $2\phi - 1 \geq 2$.

b. oui

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = \phi$.

4. Par récurrence :

• Vrai pour $n = 0$.

• Si $u_n - \phi \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}-1}$,

$$\text{alors : } u_{n+1} - \phi \leq \frac{1}{2} (u_n - \phi)^2 \leq \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{2^{n+1}-1} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^{2^{n+2}-1}.$$

5. $u_9 - \phi \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^9+1-1}$.

Le logiciel Xcas nous donne :

(0.5)^(2^10-1)
1.11253692925e-308

136. 1. Faux. Contre-exemple :

Sur $]0; +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

2. Faux. Contre-exemple :

Sur $\mathbb{R}$, $f(x) = -x$ et $g(x) = x^4$.

3. Vrai, d'après le théorème de comparaison.

4. Faux. Contre-exemple :

Sur $\mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

137. Faux. Contre-exemple :

Sur $[1; +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x$.

138. Vrai : $f(x) = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow x \sin(3x) = \frac{1}{2}x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ \sin(3x) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ 3x = \frac{\pi}{6} [2\pi] \\ \text{ou} \\ 3x = \frac{5\pi}{6} [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{18} [\frac{2\pi}{3}] \\ \text{ou} \\ x = \frac{5\pi}{18} [\frac{2\pi}{3}] \end{cases}$$

139. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = +\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0$.

3. Troisième tableau.

140. f est une fonction rationnelle donc dérivable sur son ensemble de définition.

Pour tout x de $]-\infty; \frac{5}{2}[$,

$$f'(x) = \frac{2(2x-5)(2x-9)}{(2x-7)^2}$$

x	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$+\infty$
Signe de f'	-	-	0	+
Variations de f	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 8$	$8 \nearrow +\infty$	

141. f est une fonction rationnelle donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout x de $[0; 1]$,

$$f'(x) = \frac{-x^3 - 3x^2}{(x+2)^2} = \frac{-x^2(x+3)}{(x+2)^2}$$

Donc pour tout x de $[0; 1]$, $f'(x) < 0$.

Ainsi f est décroissante sur $[0; 1]$.

142. 1. f est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x ,

$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{1+(-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = f(x).$$

Donc f est paire.

2. Pour tout réel x ,

$$f'(x) = -\frac{x}{(\sqrt{1+x^2})(1+x^2)}$$

Pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $f(x) < 0$. Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

3.



4. f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. $f(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel y de $]0; 1]$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$ qui est égale à $\sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}$.

143. 1. f est la restriction d'une fonction rationnelle, donc f est dérivable sur $[0; 2]$ et pour tout réel x de $[0; 2]$, $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$.

Pour tout réel x de $[0; 2]$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $[0; 2]$.

2. $f(1) = \frac{3}{2}$ et $f(2) = \frac{5}{3}$, donc si $x \in [1; 2]$, alors $f(x) \in [\frac{3}{2}; \frac{5}{3}]$, d'où $f(x) \in [1; 2]$.

144. 1. Trigonométrie dans le triangle ABD rectangle en B : $\cos \theta = \frac{AB}{AD}$ et $\sin \theta = \frac{BD}{AD}$.

$$\text{Donc } AD = \frac{AB}{\cos \theta} = \frac{4}{\cos \theta} \text{ et}$$

$$CD = CB + BD = 7 + 4AD \sin \theta$$

$$= 7 + 4 \tan \theta.$$

$$t_1 = \text{temps en heure} = \frac{\text{distance (en km)}}{\text{vitesse (en km/h)}} = \frac{AD}{30} = \frac{4 \times 10^{-3}}{30 \cos \theta}$$

$$t_2 = \frac{CD}{60} = \frac{(7 + 4 \tan \theta) 10^{-3}}{60}$$

2. Le lapin traverse la route avant le passage du camion s'il met moins de temps pour arriver en D donc si $t_1 < t_2$, c'est-à-dire si $\frac{4 \times 10^{-3}}{30 \cos \theta} < \frac{(7 + 4 \tan \theta) 10^{-3}}{60}$

en multipliant par 30×10^3 on a : $\frac{4}{\cos \theta} < \frac{7 + 4 \tan \theta}{2}$ d'où $f(\theta) > 0$.

3. Conclusion : cherchons quand on aura $f(\theta) > 0$ pour $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

$$f'(\theta) = \frac{2(1 - 2 \sin \theta)}{\cos^2 \theta} \text{ or } \cos^2 \theta > 0 \text{ donc}$$

f' est du signe de $1 - 2 \sin \theta$.

$$1 - 2 \sin \theta > 0 \Leftrightarrow \sin \theta < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \theta < \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \theta < \frac{\pi}{6}$$

car sinus est une fonction croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0; \frac{\pi}{6}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}]$ et :

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4 \times 2}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3} - 12}{2\sqrt{3}} > 0$$

donc il existe deux réels a et b de $[0; \frac{\pi}{2}]$ tels que $a < \frac{\pi}{6} < b$ et $f(\theta) > 0$ sur $]a; b[$ avec $a \approx 0.395$ et $b \approx 0.644$.

Le lapin traversera la route sans se faire tuer par le camion si $\theta \approx \frac{\pi}{6}$ ou $\theta \in]a; b[$.

145. 1. a. Pour tout réel x de $[0; 20]$, $f(x) = \frac{1}{10}(20x - x^2)$.

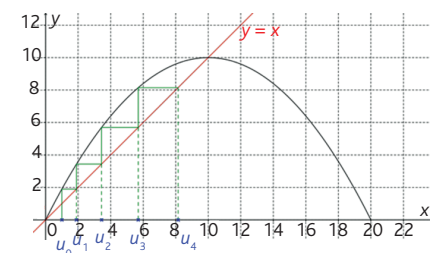
f est dérivable sur $[0; 20]$ et pour tout réel x de $[0; 20]$, $f'(x) = \frac{1}{10}(20 - 2x) = \frac{1}{5}(10 - x)$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	0	10	20
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	10	0

b. f admet donc un minimum égal à 0 atteint en $x = 0$ et $x = 20$ et un maximum égal à 10 atteint en $x = 10$. Donc, pour tout $x \in [0; 20]$, $f(x) \in [0; 10]$.

c. Représentation graphique de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$:



2. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

• On a $u_0 = 1$ puis $u_1 = f(u_0) = 1,9$ et donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 10$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$, puisque f est croissante sur $[0; 10]$, on a $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(10)$ c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

3. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante et majorée par 10. On en déduit que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers un réel que l'on note ℓ . De plus, comme pour tout entier n , on a $1 \leq u_n \leq 10$ (car $u_0 = 1$ et car la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante), quand n tend vers $+\infty$, on obtient $1 \leq \ell \leq 10$.

Ensuite, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n(20 - u_n)$ et quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\ell = \frac{1}{10}\ell(20 - \ell)$ puis $10\ell = \ell(20 - \ell)$ puis $10 = 20 - \ell$ (car $\ell \neq 0$) et enfin $\ell = 10$. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = 10$.

Accompagnement personnalisé (p. 106-107)

146. 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2. Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = 4x^5 \left(1 - \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{4x^5}\right)$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

147. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = 3x^6 \left(1 + \frac{1}{3x^3} + \frac{5}{3x^4} - \frac{7}{3x^6}\right)$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

148. Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = -x^4 \left(1 - \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{7}{x^4}\right)$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

149. 1. Pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{3x^3 \left(1 - \frac{1}{3x^2}\right)}{4x^2 \left(1 - \frac{5}{4x} + \frac{1}{2x^2}\right)} = \frac{3x}{4} \times \left(\frac{1 - \frac{1}{3x^2}}{1 - \frac{5}{4x} + \frac{1}{2x^2}} \right).$$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

150. 1. Pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{4x^2 \left(1 - \frac{7}{4x^2}\right)}{5x^2 \left(1 + \frac{1}{5x} + \frac{3}{5x^2}\right)} = \frac{4}{5} \times \left(\frac{1 - \frac{7}{4x^2}}{1 + \frac{1}{5x} + \frac{3}{5x^2}} \right).$$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{4}{5}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{4}{5}$.

151. 1. Pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{2x \left(1 - \frac{7}{2x}\right)}{5x^4 \left(1 - \frac{2}{5x^2} + \frac{1}{5x^4}\right)} = \frac{2}{5x^3} \times \left(\frac{1 - \frac{7}{2x}}{1 - \frac{2}{5x^2} + \frac{1}{5x^4}} \right).$$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

152. a. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$.

c. $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$.

153. a. Pour tout $x \neq 0$, $-1 \leq \sin(3x + 1) \leq 1$, donc $-\frac{1}{x^4} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^4}$.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^4}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^4}\right) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2. a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$.

154. 1. f est dérivable sur $[-2; 0]$ et pour tout x de $[-2; 0]$, $f'(x) = 6x^2 - 2x + 1$.

$\Delta = -20$, donc pour tout x de $[-2; 0]$, $f'(x) > 0$.

x	-2	0
Signe de f'	+	
Variation de f	-17	5

2. $0 \in [-17; 5]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires et le tableau de variations ci-dessus, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[-2; 0]$.

155. a. f est dérivable sur $] -3; 3[$ et pour tout x de $] -3; 3[$, $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$.

b. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $g'(x) = -28x^3(-x^4 + 6)^6$.

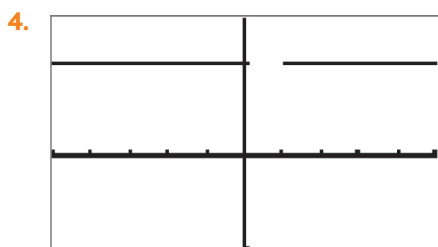
c. h est dérivable sur $]-\frac{7}{3}; +\infty[$ et pour tout x de $]-\frac{7}{3}; +\infty[$, $h'(x) = -\frac{15}{(3x+7)^2} - \frac{3}{2\sqrt{3x+7}} + 2\sin(-2x+6)$.

156. 1.

x	-2,5	-2,3	-2	-1,7	-1,5	-1	-0,5	-0,2
$f(x)$	0	0	1	0	0	1	0	0

x	0	0,4	0,8	1	1,3	1,5	2	2,5
$f(x)$	1	0	0	1	0	0	1	0

3. f n'est pas continue.



On ne voit pas les discontinuités...

157. Pour tout réel positif t , $x(t) = 2 \cos(3\sqrt{2}t)$.
Donc $x'(t) = -6\sqrt{2} \sin(3\sqrt{2}t)$ et $x''(t) = -36 \cos(3\sqrt{2}t)$.
D'où pour tout réel positif t ,
$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = -36 \cos(3\sqrt{2}t) + \frac{3,6}{0,2} \times 2 \cos(3\sqrt{2}t)$$
$$= -36 \cos(3\sqrt{2}t) + 36 \cos(3\sqrt{2}t) = 0.$$

158. 1. a. Pour tout réel t de l'intervalle $[-\pi; \pi]$,

$$\begin{cases} x(-t) = 5 \cos(t) \\ y(-t) = -3 \sin(t) \end{cases}$$

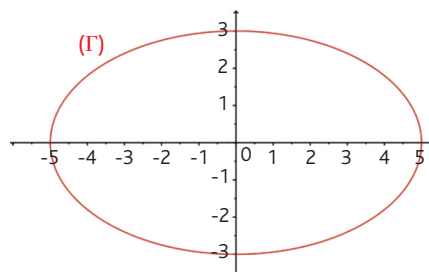
$M(-t)$ est l'image du point $M(t)$ de (Γ) par la symétrie d'axe (Ox) .

b. Pour tout réel t de l'intervalle $[-\pi; \pi]$, $\begin{cases} x(\pi - t) = -5 \cos(t) \\ y(\pi - t) = 3 \sin(t) \end{cases}$

$M(\pi - t)$ est l'image du point $M(t)$ de (Γ) par la symétrie d'axe (Oy) .

2. Pour tout réel t de l'intervalle $[-\pi; \pi]$, $\begin{cases} x'(t) = -5 \sin(t) \\ y'(t) = 3 \cos(t) \end{cases}$

t	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de x'	+	+	0	-	-
Variation de x	-5	0	5	0	-5
Signe de y'	-	0	+	+	-
Variation de y	0	-3	0	3	0



159. Pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} \times \sin(x)}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} \sin(x)}{x} = \sqrt{x} \times \frac{\sin(x)}{x}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

160. f est une fonction homographique telle que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3$

et $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -\infty$ donc on cherche b tel que pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{4\}$,

$$f(x) = \frac{-3x + b}{x - 4}.$$

La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 a pour équation $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$.

Donc $f'(1) = \frac{4}{3}$. Or pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{4\}$, $f'(x) = \frac{12 - b}{(x - 4)^2}$.

D'où $\frac{12 - b}{(-3)^2} = \frac{4}{3}$. Ainsi $b = 0$. D'où pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{4\}$,

$$f(x) = \frac{-3x}{x + 4}.$$

161. MOI équilatéral $\Leftrightarrow IM = OI = MO$ or $OI = 1$

Donc : MOI équilatéral $\Leftrightarrow IM^2 = 1$

$$\Leftrightarrow (\cos(x) - 1)^2 + \sin^2(x) = 1 \Leftrightarrow 1 - 2\cos(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}.$$

Sur les pas du supérieur (p. 109)

I. 1. f est dérivable sur $[0; 1[\cup]1; +\infty[$ et pour tout x de

$$[0; 1[\cup]1; +\infty[, f'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}.$$

Pour tout x de $[0; 1[\cup]1; +\infty[, f'(x) > 0$.

Donc f est croissante sur $[0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

$$2. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (1-x^2) = 0^+ \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (1-x^2) = 0^- \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$$

$$\text{et pour tout } x \text{ de }]1; +\infty[, f(x) = \frac{x}{x^2 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right)} = \frac{1}{x \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right)}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

3. f est continue sur son ensemble de définition, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f décrit $\mathbb{R}$.

II. 1. Pour tout t de $[0; \pi]$,

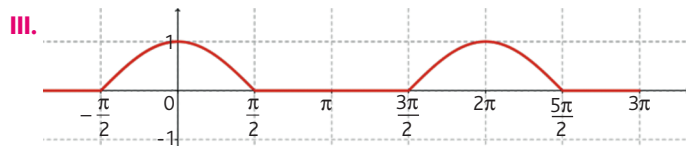
$$g'(t) = -2 \sin(t) \cos(t) \times \sin^2(t) + (1 + \cos^2(t)) \times 2 \sin(t) \cos(t)$$

$$g'(t) = 2 \sin(t) \cos(t) (1 + \cos^2(t) - \sin^2(t))$$

$$g'(t) = 2 \sin(t) \cos(t) (2 \cos^2(t))$$

$$g'(t) = 4 \sin(t) \cos^3(t)$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de g'	+	0	-
Variations de g	0	1	0



IV. Partie A

$$\begin{cases} V(1) = 10 \\ V(12) = 61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A - B = 10 \\ 12(A - B\sqrt{12}) = 61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1379 + 118\sqrt{3}}{132} \\ B = \frac{59 + 118\sqrt{3}}{132} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \approx 11,995 \\ B \approx 1,995 \end{cases}$$

Partie B

$$1. V(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(6 - \sqrt{x}) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 36$$

2. V est dérivable sur $]1; +\infty[$ et pour tout réel $x > 1$,

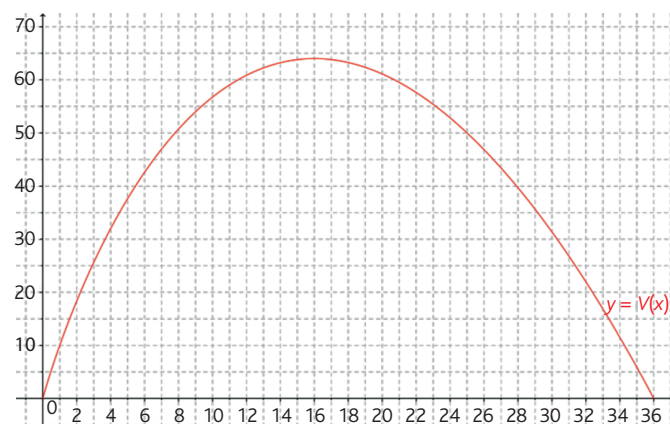
$$V'(x) = 12 - 3\sqrt{x} = 3(4 - \sqrt{x}).$$

D'où :

x	1	16	$+\infty$
$V'(x)$		+	-
$V(x)$	10	64	$-\infty$

3. Tableau de valeurs :

x	1	4	8	12	16	20	24	28	32	36
$V(x)$	10	32	51	61	64	61	53	40	22	0



Partie C

1. Le maximum est atteint en $x = 16$, c'est-à-dire en avril 2001.

2. $V(x) < 10$ au cours du 35^{ème} mois, soit en novembre 2002.

Fonction exponentielle Fonction logarithme népérien

Programme officiel

Contenus	Capacités attendues
Fonction exponentielle Fonction $x \mapsto \exp(x)$. Relation fonctionnelle, notation e^x .	- Démontrer l'unicité d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0. - Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. - Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. - Connaître le sens de variation et la représentation graphique de la fonction exponentielle. - Connaître et exploiter $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$.
Fonction logarithme népérien Fonction $x \mapsto \ln x$. Relation fonctionnelle dérivée.	- Connaître le sens de variation, les limites et la représentation graphique de la fonction logarithme népérien. - Utiliser, pour a réel strictement positif et b réel, l'équivalence $\ln a = b \Leftrightarrow a = e^b$. - Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. - Connaître et exploiter $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

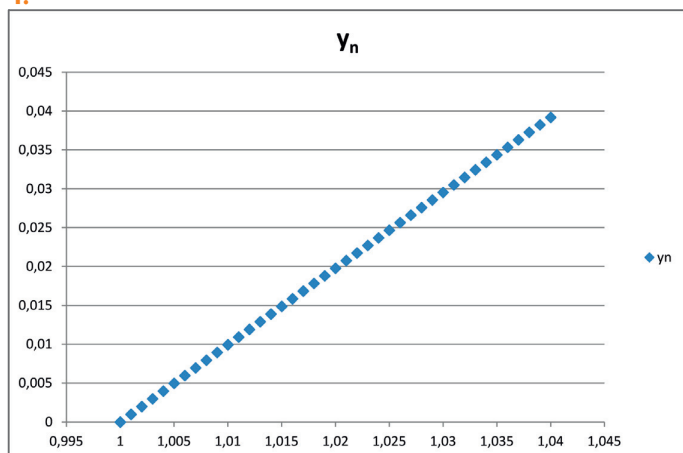
Découverte (p. 112-113)

1. Fonction exponentielle et méthode d'Euler

- $x_n = x_0 + nh = nh$.
- $y_{n+1} = y_n + hf'(x_n) = y_n + hf(x_n) = y_n + hy_n = y_n(1 + h)$. La suite (y_n) est géométrique de raison $1 + h$ et de premier terme $y_0 = 1$.
- b.** En **B3** on écrit : `=B2+$D$4`. En **C2** on écrit : `1`.
c. En **C3** on écrit : `=C2*(1+$D$4)`.
On obtient le tableau suivant :

	A	B	C	D
1	n	xn	yn	
2	0	0	1	
3	1	0,1	1,1	h
4	2	0,2	1,21	0,1
5	3	0,3	1,331	
6	4	0,4	1,4641	
7	5	0,5	1,61051	
8	6	0,6	1,771561	
9	7	0,7	1,9487171	
10	8	0,8	2,14358881	
11	9	0,9	2,35794769	
12	10	1	2,59374246	
13	11	1,1	2,85311671	
14	12	1,2	3,13842838	
15	13	1,3	3,45227121	
16	14	1,4	3,79749834	
17	15	1,5	4,17724817	
18	16	1,6	4,59497299	
19	17	1,7	5,05447028	
20	18	1,8	5,55991731	
21	19	1,9	6,11590904	
22	20	2	6,72749995	
23	21	2,1	7,40024994	
24	22	2,2	8,14027494	
25	23	2,3	8,95430243	
26	24	2,4	9,84973268	

4.



5. On obtient le tableau suivant :

999	997	0,997	2,70878943
1000	998	0,998	2,71149822
1001	999	0,999	2,71420972
1002	1000	1	2,71692393
1003	1001	1,001	2,71964086
1004	1002	1,002	2,7223605
1005	1003	1,003	2,72508286

Ainsi $f(1) \approx 2,7169$.

2. Fonction logarithme et méthode d'Euler

1. $x_n = x_0 + nh = 1 + nh$.

2. $y_{n+1} = y_n + hf'(x_n) = y_n + h \times \frac{1}{x_n} = y_n + h \times \frac{1}{1 + xnh}$.

3. b. En B3 on écrit : `=B2+$D$4`. En C2 on écrit : `0`.

c. En C3 on écrit : `=C2+$D$4/(1+A3*$D$4)`.

On obtient le tableau suivant :

	A	B	C	D
1	n	xn	yn	
2	0	1	0	
3	1	1,1	0,09090909	h
4	2	1,2	0,17424242	0,1
5	3	1,3	0,2511655	
6	4	1,4	0,32259407	
7	5	1,5	0,38926074	
8	6	1,6	0,45176074	
9	7	1,7	0,51058427	
10	8	1,8	0,56613982	
11	9	1,9	0,6187714	
12	10	2	0,6687714	
13	11	2,1	0,71639045	
14	12	2,2	0,761845	
15	13	2,3	0,80532326	
16	14	2,4	0,84698992	
17	15	2,5	0,88698992	
18	16	2,6	0,92545146	
19	17	2,7	0,9624885	
20	18	2,8	0,99820278	
21	19	2,9	1,03268554	
22	20	3	1,06601888	

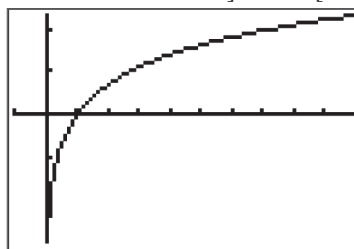
5. On obtient le tableau suivant :

997	995	1,995	0,69039474
998	996	1,996	0,69089574
999	997	1,997	0,69139649
1000	998	1,998	0,69189699
1001	999	1,999	0,69239724
1002	1000	2	0,69289724
1003	1001	2,001	0,69339699
1004	1002	2,002	0,69389649
1005	1003	2,003	0,69439574
1006	1004	2,004	0,69489475

Ainsi $f(2) \approx 0,693$.

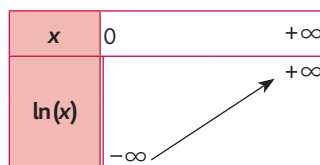
3. Découvrir la fonction ln avec sa calculatrice

1. On trouve $D \ln =]0 ; +\infty[$.



3. On peut conjecturer que la fonction ln est croissante sur $]0 ; +\infty[$.

4. On peut conjecturer que $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.



6. On peut conjecturer que $\ln(x) \geq 0$ lorsque $x \leq 1$ et que $\ln(x) > 0$ lorsque $0 < x < 1$.

7. La calculatrice ne permet pas de donner le résultat car il est trop grand. À l'aide d'un logiciel de calcul formel on trouve :

$$\ln(6.4E873) \quad 2012.01308417$$

Exercices résolus (p. 130 à 137)

Page 130

$$\frac{e^{3x} - e^{x+1}}{e^x - e^{1-x}} = \frac{e^{2x}(e^x - e^{-x+1})}{e^x - e^{1-x}} = e^{2x};$$

$$\ln(x^2 - 2x - 3) - 2\ln(x+1) = \ln(x^2 - 2x - 3) - \ln(x+1)^2$$

$$= \ln\left(\frac{x^2 - 2x - 3}{(x+1)^2}\right) = \ln\left(\frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{x-3}{x+1}\right).$$

Page 132

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \ln(1 + e^{-2x})) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(e^x) + \ln(1 + e^{-2x}))$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x(1 + e^{-2x})) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + e^{-x}) = +\infty.$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-2x}) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ donc
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln(1 + e^{-2x})) = +\infty.$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{1 + 2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{1 + 2e^{2x}}.$
 Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - 1 = -1$ donc
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}(e^{2x} - 1) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + 2e^{2x} = 1.$
 Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{1 + 2e^{2x}} = -\infty.$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{1 + 2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(e^{-x} + 2e^x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{e^{-x} + 2e^x}.$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-2x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + 2e^x) = +\infty$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{1 + 2e^{2x}} = 0.$$

Page 133

1. $e^{-2x} - e^{4x-2} = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} = e^{4x-2} \Leftrightarrow -2x = 4x - 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$
 $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}.$

2. $e^x - 4e^{-x} = 2 \Leftrightarrow e^{2x} - 4 = 0.$ On pose $X = e^x$ et on a
 $X^2 - 2X - 4 = 0$ d'où $X = 1 - \sqrt{5}$ ou $X = 1 + \sqrt{5}$ or $X = e^x$
 donc $X > 0$ ainsi $X = 1 + \sqrt{5}$ soit $e^x = 1 + \sqrt{5}$ ce qui nous
 donne $x = \ln(1 + \sqrt{5}).$

3. $\frac{e^2}{e^{x^2}} \leq e^{3x+4} \Leftrightarrow e^{2-x^2} \leq e^{3x+4} \Leftrightarrow 2 - x^2 \leq 3x + 4$
 $\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 \geq 0$ soit $x \in]-\infty; -2] \cup [-1; +\infty[.$

Page 135

1. On pose $X = \ln x$ ainsi $2(\ln x)^2 - 5\ln x - 3 < 0$
 $\Leftrightarrow 2X^2 - 5X - 3 < 0 \Leftrightarrow X \in \left]-\frac{1}{2}; 3\right[\Leftrightarrow x \in \left]e^{-\frac{1}{2}}; e^3\right[.$

2. On pose $X = e^{-x}$ ainsi $e^{-2x} - 8e^{-x} + 12 = 0$
 $\Leftrightarrow X^2 - 8X + 12 = 0 \Leftrightarrow (X-2)(X-6) = 0 \Leftrightarrow X = 2.$
 soit $x = -\ln 2$ ou $x = -\ln 6.$

Exercices (p. 138)

1. à 42. Corrigés dans le manuel.

1. Calculs algébriques

43. $A = (e^{-x})^2 = e^{-2x};$
 $B = \frac{e^{-x+4}}{e^{x+4}} = e^{-2x};$
 $C = (e^{x+3} \times e^{-2x-2})^2 = (e^{-x+1})^2 = e^{-2x+2}.$

44. 1. $(e^{2-\sqrt{3}})^{2+\sqrt{3}} = e^{(2-\sqrt{3}) \times (2+\sqrt{3})} = e^{4-3} = e^1.$

2. $e^2 \times e^{-1.4} = e^{0.6}.$

3. $\frac{e^{3.6}}{e^{2.7}} = e^{3.6-2.7} = e^{0.9}.$

4. $\frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{3}}} = e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{6}}.$

45. 1. $4e^{4x} \times (-5e^{-3x+2}) = -20e^{x+2}.$

2. $\frac{e^{3x} + e^{-3x}}{2} \times \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2} = \frac{e^{6x} - e^{-6x}}{4}.$

3. $\frac{e^{-3x+5} \times (e^{x+2})^3}{e^{-2x-6}} = \frac{e^{-3x+5} \times e^{3x+6}}{e^{-2x-6}} = e^{11+2x+6} = e^{2x+17}.$

4. $e^{3x+5} \times (e^{-x+1})^3 \times (e^{2-2x})^2$

$$= e^{3x+5} \times e^{-3x+3} \times e^{4x-4} = e^{4x+4} = (e^x + 1)^4.$$

46. 1. $\frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{e^x}{e^x + 1}.$

2. $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}(e^x - e^{-x})}{e^{-x}(e^x + e^{-x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$

47. 1. $\frac{e^{-x}}{e^{-x} + x^2} = \frac{e^x \times e^{-x}}{e^x(e^{-x} + x^2)} = \frac{1}{1 + x^2 e^x}.$

2. $1 - \frac{7}{e^x + 3} = \frac{e^x + 3 - 7}{e^x + 3} = \frac{e^x - 4}{e^x + 3}.$

48. $\frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$
 $1 - \frac{2}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - 2}{e^x + 1} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$

49. • $f(x) = \ln(2x-1) + \ln(-x+5).$
 On doit avoir $x > \frac{1}{2}$ et $-x > -5$ soit
 $x < 5.$
 $Df = \left]\frac{1}{2}; 5\right[.$
 • $g(x) = \ln((2x-1)(-x+5))$
 $= \ln(2x-1) + \ln(-x+5); Dg = Df.$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	5	$+\infty$
$2x-1$	-	0	+	+
$-x+5$	+	+	0	-
$(2x-1)(-x+5)$	-	0	+	-

• $h(x) = \ln(1+x^2).$
 $1+x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ donc
 $Dh = \mathbb{R}$

• $i(x) = \ln(1+e^{2x}).$
 $e^{2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R};$
 $1+e^{2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ donc
 $Di = \mathbb{R}.$

50. $\ln 8 = 3\ln 2; \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -2\ln 2;$
 $\ln(16e) = 4\ln 2 + 1; \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2;$
 $\ln\left(\frac{64}{e^2}\right) = 5\ln 2 - 2.$

51. $\ln 10 = \ln 5 \times 2 = \ln 5 + \ln 2.$
 $\ln 100 = \ln 10^2 = 2\ln 10 = 2(\ln 5 + \ln 2).$
 $\ln 0,0001 = \ln 10^{-4} = -4\ln 10$
 $= -4(\ln 5 + \ln 2).$
 $\ln \sqrt{1000} = \ln 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}(\ln 5 + \ln 2).$

$$\ln \frac{8}{25} = 3 \ln 2 - 2 \ln 5.$$

$$\ln(8 \times 10^5) = \ln 8 + \ln 10^5$$

$$= 3 \ln 2 + 5(\ln 5 + \ln 2) = 5 \ln 5 + 8 \ln 2.$$

$$\ln(32 \times 10^{-8}) = 5 \ln 2 - 8(\ln 5 + \ln 2) \\ = -8 \ln 5 - 3 \ln 2.$$

$$\ln 0,000004 = \ln(4 \times 0,000001)$$

$$= 2 \ln 2 - 6 \ln 5 - 6 \ln 2$$

$$= -6 \ln 5 - 4 \ln 2.$$

$$52. \ln((\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)) = \ln(2 - 1) \\ = \ln 1 = 0.$$

$$\ln(\sqrt{7} - 2) + \ln(\sqrt{7} + 2)$$

$$= \ln((\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 2)) = \ln(7 - 4) = \ln 3.$$

$$\ln \sqrt{\sqrt{11} - 3} + \ln \sqrt{\sqrt{11} + 3}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln(\sqrt{11} - 3) + \ln(\sqrt{11} + 3))$$

$$= \frac{1}{2} \ln(11 - 9) = \frac{1}{2} \ln 2.$$

$$53. \ln((x - 1) \times (x - 2)) - (\ln(x - 1) \\ + \ln(x - 2)) = 0.$$

$$\ln(x - 1) + \ln(x - 2) - \ln(x - 1) \\ - \ln(x - 2) = 0.$$

L'égalité affichée par le logiciel est vraie.

$$54. \ln(e^1 \times x^2) - 2 \ln x = \ln e^1 + \ln x^2 - 2 \ln x \\ = \ln e + 2 \ln x - 2 \ln x = \ln e = 1.$$

2. Équations et inéquations

55. à 58. Corrigés dans le manuel.

$$59. 1. e^{-2x+5} = e^3 \Leftrightarrow -2x + 5 = 3 \\ \Leftrightarrow -2x = -2 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$2. e^{x^2} = e^{4x+3} \Leftrightarrow x^2 - 4x - 3 = 0.$$

$$\Delta = 16 + 12 = 28 \text{ soit } \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{7}.$$

$$x_1 = \frac{4-2\sqrt{7}}{2} = 2-\sqrt{7} \text{ et } x_2 = 2+\sqrt{7}.$$

$$3. e^{x+7} = (e^{-2x+5})^3 \Leftrightarrow e^{x+7} = e^{-6x+15}$$

$$\Leftrightarrow x + 7 = -6x + 15 \Leftrightarrow 7x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{7}.$$

$$4. \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5}{2} \right\}.$$

$$\frac{x+1}{e^{-2x+5}} = e^3 \Leftrightarrow x + 1 = -6x + 15 \Leftrightarrow 7x \\ = 14 \Leftrightarrow x = 2.$$

60. 1.

$$e^{2x} - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \\ \text{ou } e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow \text{pas de solution ou } e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$2. D = [-1; +\infty[.$$

$$e^x = e^{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow x = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^2 = x + 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5; x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

$$3. D =]0; +\infty[.$$

$$(e^{\ln x})^2 + 5e^{\ln x} = 6 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0.$$

$$\Delta = 25 + 24 = 49;$$

$$x_1 = \frac{-5-7}{2} = -6 \notin D \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-5+7}{2} = 1.$$

$$4. xe^x \leq 0 \text{ pour } x \in]-\infty; 0].$$

$$5. e^{1-x^2} \leq 0 \text{ pas de solution.}$$

$$61. 1. e^{-x} \leq e^x \Leftrightarrow e^{-x} - e^x \leq 0 \\ \Leftrightarrow e^x(e^{-2x} - 1) \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow e^{-2x} - 1 \leq 0 \\ \Leftrightarrow e^{-2x} \leq 1 \Leftrightarrow -2x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

$$2. e^{4x} > 1 \Leftrightarrow e^{4x} > e^0 \Leftrightarrow 4x > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

$$3. e^{x^2-x} \leq 1 \Leftrightarrow e^{x^2-x} \leq e^0 \Leftrightarrow x^2 - x \leq 0 \\ \Leftrightarrow x(x-1) \leq 0.$$

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	-	0	+	+
$x-1$	-	-	0	+
$x(x-1)$	+	0	-	+

$$\text{Donc } e^{x^2-x} \leq 1 \Leftrightarrow x \in [0; 1].$$

$$4. e^{2x+1} > \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow e^{2x+1} > e^{-x} \\ \Leftrightarrow 2x + 1 > -x \Leftrightarrow 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}.$$

$$62. 1. e^x \leq e^{2x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} \leq 2x - 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 2x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 + x + 1}{x} \leq 0.$$

On calcule le discriminant du polynôme au numérateur : $\Delta = 1 + 8 = 9$;

$$x_1 = \frac{-1-3}{-4} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-1+3}{-4} = -\frac{1}{2}.$$

On dresse alors le tableau de signes :

	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$
x	-	-	0	+	+
$-2x^2+x+1$	-	0	+	+	-
$\frac{-2x^2+x+1}{x}$	+	0	-	+	-

$$\text{Donc } \frac{1}{e^x} \leq e^{2x-1} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right] \cup [1; +\infty[.$$

$$2. e^{5x} - e^{x^2-3x-9} > 0 \Leftrightarrow e^{5x} > e^{x^2-3x-9} \\ \Leftrightarrow 5x > x^2 - 3x - 9 \Leftrightarrow -x^2 + 8x + 9 > 0.$$

$$\Delta = 100; x_1 = \frac{-8-10}{-2} = 9 \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-8+10}{-2} = -1.$$

On dresse le tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	9	$+\infty$
$-x^2+8x+9$	-	0	+	-

$$\text{Donc } e^{5x} - e^{x^2-3x-9} > 0 \Leftrightarrow x \in]-1; 9[$$

$$3. e^{x^2} e^x \geq (e^3)^2 \Leftrightarrow e^{x^2+x} \geq e^6 \\ \Leftrightarrow x^2 + x - 6 \geq 0.$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25; x_1 = \frac{-1-5}{2} = -3 \text{ et } x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2.$$

On dresse le tableau de signes :

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$-x^2+x-6$	-	0	-	+

Donc

$$e^{x^2} e^x \geq (e^3)^2 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -3] \cup [2; +\infty[.$$

$$4. e^{x^2-x} < e \Leftrightarrow x^2 - x - 1 \leq 0.$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5; x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

On dresse le tableau de signes :

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
x^2-x-1	+	0	-	+

Donc

$$e^{x^2-x} < e \Leftrightarrow x \in \left] \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right[.$$

$$63. 1. e^{6-2x} \geq 11 \Leftrightarrow e^{6-2x} \geq e^{\ln 11} \\ \Leftrightarrow 6 - 2x \geq \ln 11 \Leftrightarrow -2x \geq \ln 11 - 6 \\ \Leftrightarrow x \leq \frac{\ln 11 - 6}{-2} \Leftrightarrow x \leq \frac{-\ln 11 + 6}{2}.$$

$$2. (e^x - 2)(e^x - 6) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \text{ ou } e^x - 6 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \text{ ou } e^x = 6 \Leftrightarrow x = \ln 2 \\ \text{ou } x = \ln 6.$$

$$3. (e^{-x} - 3)(e^x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} - 3 > 0 \\ (\text{puisque } e^x + 1 > 0) \\ \Leftrightarrow e^{-x} > 3 \Leftrightarrow -x > \ln 3 \Leftrightarrow x < -\ln 3.$$

$$4. D =]0; +\infty[.$$

$$e^{2+\ln x} > \ln 3 \Leftrightarrow e^2 \times e^{\ln x} > \ln 3 \Leftrightarrow x > \frac{\ln 3}{e^2}.$$

$$5. \frac{e^x}{2-e^x} = 7 \Leftrightarrow e^x = 14 - 7e^x. \\ \Leftrightarrow 8e^x = 14 \Leftrightarrow e^x = \frac{14}{8} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow x = \ln \frac{7}{4}.$$

$$64. 1. (x-4)e^{-\sqrt{1+x^2}} < 0.$$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$x-4$	-	0	+
$e^{-\sqrt{1+x^2}}$	+	+	+
$(x-4)e^{-\sqrt{1+x^2}}$	-	0	+

$$\text{Donc } (x-4)e^{-\sqrt{1+x^2}} < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 4[.$$

$$2. D = \mathbb{R} - \{-4\}.$$

$$\frac{e^x - e}{e^{x+4} - 1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x - e > 0 \text{ et } e^{x+4} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow e^x > e \text{ et } e^{x+4} > 1$$

$$\Leftrightarrow x > \ln e \text{ et } x + 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 1 \text{ et } x > -4$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -4[\cup]1; +\infty[.$$

$$3. e^{2-x} \times e^{-1+3x} < (e^4)^2 \Leftrightarrow e^{2x+1} < e^8$$

$$\Leftrightarrow 2x - 7 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{7}{2}.$$

$$4. D = \mathbb{N} - \{0\}.$$

$$\frac{e^x - 1}{x} \geq 0.$$

$$\bullet e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	-	0	+
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{e^x - 1}{x}$	+	+	+

Donc

$$\frac{e^x - 1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[.$$

$$65. 1. D =]2; +\infty[.$$

$$\ln(x - 2) = 11 \Leftrightarrow x - 2 = e^{11} \Leftrightarrow x = e^{11} + 2.$$

$$2. D =]-\infty; \frac{3}{2}[.$$

$$\ln(3 - 2x) = -11 \Leftrightarrow 3 - 2x = e^{-11}$$

$$\Leftrightarrow -2x = e^{-11} - 3 \Leftrightarrow x = \frac{-e^{-11} + 3}{2}.$$

$$3. D =]-\frac{1}{4}; +\infty[.$$

$$\ln(4x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(4x + 1) = \ln(1)$$

$$\Leftrightarrow 4x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$4. D =]-\infty; 14[.$$

$$\ln\left(7 - \frac{1}{2}x\right) = 1 \Leftrightarrow \ln\left(7 - \frac{1}{2}x\right) = \ln e$$

$$\Leftrightarrow 7 - \frac{1}{2}x = e \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x = e - 7$$

$$\Leftrightarrow x = -2e + 14.$$

$$66. 1.$$

	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x + 1$	-	0	+	+
$2x + 1$	-	-	0	+
$\frac{x+1}{2x+1}$	+	0	-	+

$$\text{Donc } D =]-\infty; -1[\cup]-\frac{1}{2}; +\infty[.$$

$$\ln\left(\frac{x+1}{2x+1}\right) = \ln\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3x + 3 = 2x + 1 \Leftrightarrow x = -2.$$

$$2. 3x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3};$$

$$x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2 \text{ donc } D =]2; +\infty[.$$

$$\ln(3x - 1) - \ln(x + 2) = -\ln(2)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) = \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x+2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6x - 2 = x + 2 \Leftrightarrow 5x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}.$$

$$67. 1.$$

x	$-\infty$	-3	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x - 1$	-	-	+	+
$x + 3$	-	0	+	+
$(2x-1)(x+3)$	+	0	-	+

$$\text{Donc } D =]-\infty; -3[\cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[.$$

$$\ln((2x - 1)(x + 3)) \geq \ln 15$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)(x + 3) \geq 15$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 6x - x - 3 \geq 15$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 18 \geq 0.$$

$$\Delta = 25 + 144 = 169; x_1 = \frac{-5 - 13}{4} = \frac{-9}{2}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-5 + 13}{4} = 2.$$

$$\text{Donc } x \in \left[-\frac{9}{2}; -3\right[\cup \left[\frac{1}{2}; 2\right[.$$

$$2. 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \text{ et}$$

$$x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3, \text{ donc } D = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[.$$

$$\ln(2x - 1) + \ln(x + 3) \geq \ln 15.$$

$$\text{d'après 1. } x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right[.$$

$$68. 1. x > 0 \text{ et } x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

$$\text{donc } D =]0; +\infty[.$$

$$\ln x \geq \ln 4 - \ln(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x \times (x + 1)) \geq \ln 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 4 \geq 0$$

$$\Delta = 1 + 16 = 17; x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}.$$

$$\text{Donc } x \in \left[\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; +\infty\right[.$$

$$2. D =]-\infty; 0[.$$

$$\ln(1 + e^x) + \ln(1 - e^x) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln(1 - e^{2x}) \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{2x} \geq \sqrt{e} \Leftrightarrow -e^{2x} \geq \sqrt{e} - 1$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} \leq 1 - \sqrt{e} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{e} < 0.$$

Cette inéquation n'a donc pas de solution.

$$69.$$

$$(E): 4(\ln x)^3 = 11(\ln x)^2 - 246 \ln x + 189 = 0$$

$$\text{avec } x \in]0; +\infty[.$$

$$1. \text{ On pose } X = \ln x \text{ avec } x \in]-\infty; +\infty[.$$

$$\text{On a donc } 4X^3 - 11X^2 - 246X + 189 = 0.$$

$$2. \text{ On entre "solve"$$

$$(4X^3 - 11X^2 - 246X + 189 = 0, X) \text{ et on}$$

$$\text{trouve } S = \left\{-7; \frac{3}{4}; 9\right\}.$$

$$3. S = \{e^{-7}; e^{3/4}; e^9\}.$$

$$70. 1. e^x + e^{-x} = 5.$$

$$2.$$

$$x_1 + x_2 = \ln\left(\frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right) + \ln\left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)$$

$$= \ln \frac{25 - 21}{2} = \ln 2.$$

$$71. 1. e^{2x} - 7e^x + 10 = 0.$$

On pose $X = e^x$ avec $X \in]0; +\infty[$ on a donc

$$X^2 - 7X + 10 = 0.$$

$$\Delta = 49 - 40 = 9; X_1 = \frac{7-3}{2} = 2 \text{ et}$$

$$X_2 = \frac{7+3}{2} = 5 \text{ soit } e^{x_1} = 2 \text{ et } e^{x_2} = 5 \text{ et}$$

finalement $x_1 = \ln 2$ et $x_2 = \ln 5$.

$$2. 2e^x - 9e^{-x} = -3$$

$$\Leftrightarrow 2e^{2x} - 9 = -3e^x$$

$$\Leftrightarrow 2e^{2x} + 3e^x - 9 = 0.$$

On pose $X = e^x$ avec $X \in]0; +\infty[$; on a donc $2X^2 + 3X - 9 = 0$

$$\Delta = 9 + 72 = 81; X_1 = \frac{-3-9}{4} = -3$$

$$\text{et } X_2 = \frac{-3+9}{4} = \frac{3}{2}. X_1 \text{ est impossible,}$$

$$\text{donc } e^{2x} = \frac{3}{2} \text{ soit } x_2 = \ln \frac{3}{2}.$$

$$72. 1.$$

$$e^{2x} = 24 - 5e^x \Leftrightarrow e^{2x} + 5e^x - 24 = 0.$$

On pose $X = e^x$ avec $X \in]0; +\infty[$ on a donc $X^2 + 5X - 24 = 0$.

$$\Delta = 25 + 96 = 121; X_1 = \frac{-5-11}{2} = -8$$

$$\text{et } X_2 = \frac{-5+11}{2} = 3. X_1 \text{ est impossible,}$$

$$\text{donc } e^{x-2} = 3 \text{ soit } x_2 = \ln 3.$$

$$2. e^{-x} - 3e^x = -1 \Leftrightarrow -3e^{2x} + e^x + 1 = 0.$$

On pose $X = e^x$ avec $X \in]0; +\infty[$ on a donc $-3X^2 + X + 1 = 0$.

$$\Delta = 1 + 12 = 13;$$

$$X_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{-6} = \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \text{ et}$$

$$X_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{-6} = \frac{-1 - \sqrt{13}}{6} \text{ impos-}$$

$$\text{sible. Donc } e^{x_1} = \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \text{ soit } x_1 = \ln \frac{1 + \sqrt{13}}{6}.$$

73. L'équation que Célia souhaite résoudre est différente de celle du logiciel de calcul formel.

$$74.$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x - 2$	-	0	+
e^{-x}	+	+	+
$f(x)$	-	0	+

$g(x) = e^{2x} + e^x$; $g(x)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

$$75. \bullet f(x) = e^{2x} - e^x = e^x(e^x - 1).$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	+	+	+
$e^x - 1$	-	0	+
$f(x)$	-	0	+

• $g(x) = e^{2x} - 2e^x - 3$. On pose $X = e^x$ avec $X \in]0; +\infty[$ on a donc $X^2 - 2X - 3$.

$$\Delta = 4 + 12 = 16; \quad X_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{2+4}{2} = 3 \quad \text{soit } x_2 = \ln 3.$$

	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

76. • $D_f =]-\frac{5}{8}; +\infty[$.

$$\ln(8x+5) > 0 \Leftrightarrow 8x+5 > 1 \Leftrightarrow 8x > -4 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}.$$

	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

• $D_g =]1; +\infty[$.

$$g(x) = \ln x + \ln(x-1) = \ln x(x-1). \\ \ln x(x-1) > 0 \Leftrightarrow x(x-1) > 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 > 0.$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5;$$

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

x	1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

77. • $D_f =]5; +\infty[$.

$$f(x) = \ln(x-5) - \ln(x+4) = \ln \frac{x-5}{x+4}.$$

$$\ln \frac{x-5}{x+4} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-5}{x+4} > 1 \\ \Leftrightarrow \frac{x-5-x-4}{x+4} > 0 \Leftrightarrow \frac{-9}{x+4} > 0.$$

x	5	$+\infty$
$f(x)$	-	

• $D_g =]0; +\infty[$.

$$g(x) = \ln x + \ln(1+x^2) - \ln(5+3e^x) \\ \frac{x(1+x^2) - 5 - 3e^x}{5+3e^x} > 0. \quad = \ln \frac{x(1+x^2)}{5+3e^x}$$

78. 1.

$$0,999^n < 10^{-11} \Leftrightarrow n \ln 0,999 < -11 \ln 10 \\ \Leftrightarrow n > \frac{-11 \ln 10}{\ln 0,999}.$$

2.

$$1,000\,01^n > 10^9 \Leftrightarrow n \ln 1,000\,01 > 9 \ln 10 \\ \Leftrightarrow n > \frac{9 \ln 10}{\ln 1,000\,01}.$$

3.

$$5 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \geq 4,999\,9 \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{3}\right)^n \geq -0,000\,1 \\ \Leftrightarrow n \leq -\frac{0,000\,1}{\ln 3}.$$

79. $x \ln(x+1) + 3 > \ln(x+1) + 3x$.

1. Le logiciel de calcul formel utilisé ne permet pas de résoudre l'inéquation.

2. $D =]-1; +\infty[$.

$$x \ln(x+1) - \ln(x+1) + 3 - 3x > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \ln(x+1) - 3(x-1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \ln(x+1) - 3 > 0.$$

$$\ln(x+1) - 3 > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) > 3 \\ \Leftrightarrow x+1 > e^3 \Leftrightarrow x > e^3 - 1.$$

	-1	1	e^3-1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+	+
$\ln(x+1)-3$	-	-	0	+
$(x-1)(\ln(x+1)-3)$	+	0	-	+

$$x \in]-1; 1[\cup]e^3-1; +\infty[.$$

80. XCAS ne tient pas compte du domaine de définition (résolution) de l'inéquation.

$\ln(x-1)$ et $\ln(x+4)$ ne sont pas définies pour $x = -5$. $S = \{2\}$.

81. $\begin{cases} e^x e^y = 12 \\ e^{x-y} = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x e^y = 12 \\ e^x e^{-y} = \frac{4}{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 12/e^y \\ 12e^{-2y} = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 12e^{-y} \\ e^{-2y} = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 12e^{-y} \\ -2y = -\ln 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 12e^{-y} \\ y = \frac{\ln 9}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 12e^{-\frac{\ln 9}{2}} \\ y = \frac{\ln 9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln 12 - \frac{\ln 9}{2} \\ y = \frac{\ln 9}{2} \end{cases}.$$

82. 1.

$$\begin{cases} 3x - y = 17 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 17 \\ 2x + 9x - 51 = 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 17 \\ 11x = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 17 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow S = \{(6; 1)\}.$$

2. On pose $X = e^x$ et $Y = e^y$

$$\begin{cases} 3X - Y = 17 \\ 2X + 3Y = 15 \end{cases}$$

d'après 1. $X = 6$ et $Y = 1$

soit $e^x = 6$ et $e^y = 1$

puis $x = \ln 6$ et $y = 0$. $S = \{(\ln 6; 0)\}$.

83. $\begin{cases} 4e^x + e^y = 13 \\ e^x - 2e^y = -8 \end{cases}$ on pose $X = e^x$ et $Y = e^y$

$$\begin{cases} Y = 13 - 4X \\ X - 2(13 - 4X) = -8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = 13 - 4X \\ X - 26 + 8X = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 13 - 4X \\ 9X = 18 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 5 \\ X = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^y = 5 \\ e^x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \ln 5 \\ x = \ln 2 \end{cases} \\ S = \{(\ln 2; \ln 5)\}.$$

84. 1.

$$\begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ 3x - 7y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 15y = -3 \\ 6x - 14y = 26 \end{cases}$$

On ajoute les égalités : $y = 23$

d'où $2x + 115 = -1$ soit $x = -58$.

2. $\begin{cases} \ln x = -58 \\ \ln y = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{-58} \\ y = e^{23} \end{cases}$

$$S = \{(e^{58}; e^{23})\}$$

85. $\begin{cases} 6 \ln x + \ln y = 1 \\ \ln x - 5 \ln y = -5 \end{cases}$

on pose $X = \ln x$ et $Y = \ln y$

$$\begin{cases} 6X + Y = 1 \\ X - 5Y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 1 - 6X \\ X - 5 + 30X = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = 1 \\ X = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ \ln y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = e \end{cases}$$

$$S = \{(1; e)\}.$$

86. $\begin{cases} x + y = 5 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 + \ln 2 \end{cases}$

$x > 0$ et $y > 0$

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ \ln(xy) = \ln 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ \ln((5-y)y) = \ln 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ \ln(-y^2 + 5y) = \ln 6 \end{cases} \Leftrightarrow -y^2 + 5y = 6 \\ \Leftrightarrow -y^2 + 5y - 6 = 0 \Leftrightarrow (y-3)(y-2) = 0. \\ S = \{(2; 3), (3; 2)\}.$$

3. Limites

87. à 90. Corrigés dans le manuel.

91. 1. $\frac{\ln x}{x+2} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{\left(1+\frac{2}{x}\right)}$

$$D =]0; +\infty[. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 2 = 2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x+2} = -\infty. \end{array} \right\}$$

$x = 0$ asymptote verticale à la courbe représentative de $\frac{\ln x}{x+2}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{2}{x}\right)} = 1 \quad \left. \begin{array}{l} \text{par produit} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{\left(1+\frac{2}{x}\right)} = 0. \end{array} \right\}$$

$y = 0$ asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe représentative de $\frac{\ln x}{x+2}$.

2. $D =]-1; +\infty[$.

On pose $X = x + 1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1} x \ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow 0} (X-1) \ln X$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} (X-1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln X = -\infty \end{array} \right\} \text{par produit}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (X-1) \ln X = +\infty.$$

$x = -1$ asymptote verticale.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (X-1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty \end{array} \right\} \text{par produit}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (X-1) \ln X = +\infty.$$

3. $D =]0 ; +\infty[$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{array} \right\} \text{par produit}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+1) (\ln x) = -\infty.$$

$x = 0$ asymptote verticale.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right\} \text{par produit}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \times (\ln x) = +\infty.$$

4. $D =]-\infty ; -1[\cup]0 ; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln X = 0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$$

donc $y = 0$ est asymptote horizontale.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x+1} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -1} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = +\infty$$

donc $x = -1$ asymptote verticale.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+1} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = -\infty$$

donc $x = 0$ est asymptote verticale.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln X = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$$

donc $y = 0$ est asymptote horizontale.

92. 1. $D =]0 ; +\infty[$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} -\ln x = +\infty \end{array} \right\} \text{par addition}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x - \ln x = +\infty ;$$

$x = 0$ est asymptote verticale.

$$x - \ln x = x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty.$$

2. $D =]0 ; +\infty[$.

$$x \ln x = \frac{1}{2} x \ln x ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} x \ln x = 0 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} x \ln x = +\infty ;$$

3. $D =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -\ln(x^2) = -\infty \end{array} \right\} \text{par somme}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x - \ln(x^2) = -\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} -\ln(x^2) = +\infty \end{array} \right\} \text{par somme}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x - \ln(x^2) = +\infty.$$

de même $\lim_{x \rightarrow 0^+} x - \ln(x^2) = +\infty$ donc

$x = 0$ asymptote verticale.

$$x - \ln(x^2) = x \left(1 - \frac{\ln(x^2)}{x}\right) ;$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln(x^2)}{x} = 1 \end{array} \right\} \text{par produit}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln(x^2)}{x}\right) = +\infty.$$

4. $D =]0 ; +\infty[$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \ln(2x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 1 = 1 \end{array} \right\} \text{par quotient}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x)}{x^2 + 1} = -\infty$$

donc $x = 0$ asymptote

verticale.

$$\frac{\ln(2x)}{x^2 + 1} = \frac{\ln 2}{x^2 + 1} = \frac{\ln x}{x^2 + 1} ;$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{x^2 + 1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} = 0 \end{array} \right\} \text{par somme}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{x^2 + 1} + \frac{\ln x}{x^2 + 1} = 0$$

donc $y = 0$ asymptote horizontale.

93. 1. $D =]-\infty ; +\infty[$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^x = 0 \end{array} \right\} \text{par somme}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x - e^x = -\infty$$

$$x - e^x = x \left(1 - \frac{e^x}{x}\right) ;$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty \end{array} \right\} \text{par produit}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty.$$

2. $D =]-\infty ; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty ; \text{de même}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2-x} = +\infty.$$

3. $D =]-\infty ; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x^2}{2} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

donc $y = 0$ asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$ de même

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$$

4. $D =]-\infty ; +\infty[$.

$$e^x - e^{-x} = e^x - \frac{1}{e^x} ;$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{e^x} = -\infty \end{array} \right\} \text{par somme}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - \frac{1}{e^x} = -\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{e^x} = 0 \end{array} \right\} \text{par somme}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - \frac{1}{e^x} = +\infty.$$

94. 1. $D =]-\infty ; +\infty[$.

On pose $X = -x$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-5)e^{-x}$;

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x-5) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right\} \text{par produit}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x-5)e^x = -\infty.$$

$$(x-5)e^{-x} = \frac{x}{e^{+x}} - \frac{5}{e^x} ;$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{5}{e^x} = 0 \end{array} \right\} \text{par somme}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} - \frac{5}{e^x} = 0$$

donc $y = 0$ asymptote horizontale.

2. $D =]-\infty ; +\infty[$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1 \end{array} \right\} \text{par quotient}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{e^x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{e^x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}\right)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} = +\infty \end{array} \right\} \text{par quotient}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}} = 0$$

donc $y = 0$ asymptote horizontale.

3. $D =]-\infty ; -4[\cup]-4 ; +\infty[$.

On pose $X = 2x$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x+4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^X}{X+8}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^X = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{X+8} = 0 \end{array} \right\} \text{par produit}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^X}{X+8} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{e^{2x}}{x+4} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{e^{2x}}{x+4} = +\infty$$

donc $x = -4$ asymptote verticale.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{X+8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{X\left(1 + \frac{8}{X}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{X} = +\infty.$$

4. $D =]-\infty; +\infty[$

$$\frac{e^{2x} - e^x}{e^{3x} + 1} = \frac{e^{2x}\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^{3x}\left(1 + \frac{1}{e^{3x}}\right)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - e^x}{e^{3x} + 1} = 0$$

car $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - e^x}{e^{3x} + 1} = 0$ par quotient

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - e^x}{e^{3x} + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - e^x}{e^{3x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \text{ donc } y = 0 \text{ asymptote horizontale.}$$

95. 1. $D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

On pose $X = x^2$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x^2 + 1} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \text{ donc } y = 0 \text{ asymptote horizontale en } -\infty \text{ et en } +\infty.$$

De même $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x^2 + 1} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln(x^2 - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x^2 + 1} = -\infty$$

de même $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x^2 + 1} = -\infty$ donc $x = 1$ asymptote verticale.

2. $D =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x-1} = 3; \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{3x}{x-1} = \ln 3;$$

De même $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{3x}{x-1} = \ln 3$ donc $y = \ln 3$ asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x-1} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \ln X = -\infty \text{ donc } x = 0 \text{ est asymptote verticale.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x}{x-1} = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$$

donc $x = 1$ est asymptote verticale.

3. $D =]0; +\infty[$.

On pose $X = \ln x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2(\ln x)^2 - 5 \ln x + 1 = \lim_{X \rightarrow -\infty} 2X^2 - 5X + 1 = +\infty.$$

Donc $x = 0$ asymptote verticale.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2X^2 - 5 + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2X^2 = +\infty.$$

4. $D =]0; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 - x + 2 \ln x + 1 = -\infty \text{ donc } x = 0 \text{ asymptote verticale.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x + 2 \ln x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2 \ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty.$$

96. 1. On pose $X = x + 1$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} X - 1 - \ln X = \lim_{X \rightarrow +\infty} X \left(1 - \frac{1}{X} - \frac{\ln X}{X}\right) = +\infty.$$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2$;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^2$$
 ;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{\ln X}{X}$

en posant $X = -x$.

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{2x} = 0$.

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + 2e^x}{e^{2x} + 1} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1} \ln X = 0$.

5.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2e^x}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(2 + \frac{1}{e^x}\right)}{e^{2x} \left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right)} = 0.$$

97. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 = +\infty$ } par différence

$$\lim_{x \rightarrow 0} x - (\ln x)^2 = -\infty.$$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - (\ln x)^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{(\ln x)^2}{x}\right)$.

On pose $X = \ln x$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - (\ln x)^2) = \lim_{X \rightarrow +\infty} (e^X - X^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} X^2 = +\infty$$
 ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} X^2 \left(\frac{e^X}{X^1} - 1\right)$

par produit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} X^2 \left(\frac{e^X}{X^1} - 1\right) = +\infty.$$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ } par différence

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \ln(1 + e^x)) = -\infty.$$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(1 + e^x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(e^x(e^{-x} + 1)))$.

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(e^{-x} + 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln(e^{-x} + 1) = 0.$$

98. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \ln(1 + e^{-x})) = \lim_{x \rightarrow 0} x + \ln e^{-x} + \ln(1 + e^x)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x + \ln e^{-x} + \ln(1 + e^x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + e^x = 1 ; \lim_{x \rightarrow 1} \ln X = 0.$$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1} \ln X = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln(1 + e^{-x})) = +\infty$.

3. On pose $X = 3x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(3x) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{3} \times \ln X$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} X \ln X = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(3x) = 0.$$

4. On pose $X = 3x$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(3x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \times \ln X = +\infty.$$

99. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ } par produit

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) = 0$$
 ; $\lim_{x \rightarrow 0} \ln X = -\infty$ }

par produit $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 1) \ln(x + 1) = -\infty$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x)^3 = 1^+ ; \lim_{x \rightarrow 0} e^{3x} - 1 = 0^+ ;$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(e^{3x} - 1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln X = -\infty.$$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x)^3 = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x} - 1 = +\infty ;$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{3x} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty.$$

100. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ } par produit

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x} = -\infty$$
 ; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ } par produit

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x} \ln x = +\infty.$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + x = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x} \ln x = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln X}{\ln X} = \lim_{X \rightarrow 1} 1 = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} 1 + 2x = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+2x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln 2x} = \frac{1}{\ln 2}.$$

101. 1. On pose $X = x - 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1.$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{3}.$

3. On pose $X = 6x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x)}{3x} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+X)}{X} = 2.$$

4. On pose $X = -5x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-5x)}{2x} = \lim_{X \rightarrow 0} -\frac{5 \ln(1+X)}{2X} = -\frac{5}{2}.$$

102. 1. On pose $X = x^2$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{2x} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{2\sqrt{X}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sqrt{X} \ln(1+X)}{2X} = 0.$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + x = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1)}{\ln(1)} = 1$;

$\lim_{x \rightarrow 0} 1 + 2x = 1$.

3. idem qu'en 2..

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1)}{\ln(1)} = 1$.

103. 1. On pose $X = 2x$: $x^2 = \frac{1}{4}X^2$.

$\lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2 \ln(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{4}X^2 \ln X}$.

$\lim_{x \rightarrow 0} X^2 \ln X = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{4}X^2 \ln X} = 1$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$.

5. $\lim_{x \rightarrow 0} (x+3) \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x + 3 \ln x = -\infty$.

6. $\lim_{x \rightarrow 0} (x+0) \ln x$ idem qu'en 5..

4. Dérivées

104. et 105. Corrigés dans le manuel.

106. $D' = \mathbb{R}$; $f'(x) = 5e^{5x}$.

$D' = \mathbb{R}$; $g'(x) = -e^{4-x}$.

107. $x^2 - 3x$ et e^x sont des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc $f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composé de 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = (2x-3)e^{x^2-3x}$.
 $g(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composé de 2 fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$: $g'(x) = \cos x e^{\sin x}$.

$h(x) = e^{\frac{1}{x}}$; e^x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$; $\frac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc $h(x)$ aussi et : $h'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$.

108. $D' = \mathbb{R}$; $f'(x) e^x + x e^x = e^x(1+x)$.
 $D' =]0 ; +\infty[$; $g'(x) \frac{x e^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$.

109. $D' =]0 ; +\infty[$; $f'(x) \ln x + 1$.

$D' =]0 ; +\infty[$; $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

110. $g'(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$.

111. $\ln x$ définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$; x^2 sur $\mathbb{R}$; $(\ln x)^2$ sur $]0 ; +\infty[$:
 $f'(x) = \frac{2}{x} \ln x$.

$\ln x$ définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$;

$\ln(\ln x)$ sur $]1 ; +\infty[$: $g'(x) = \frac{1}{\ln x} \times \frac{1}{x \ln x}$.

$\frac{x+1}{x-1}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$; en x sur $]0 ; +\infty[$.

$$h'(x) = \frac{\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$$

x	-1	0	1
x+1	-	0	+
x-1	-	-	0
$\frac{x+1}{x-1}$	+	0	+

$h(x)$ définie et dérivable sur $]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$.

112. $f'(x) = \frac{4}{x^3} e^{-\frac{2}{x^2}}$.

$g'(x) = 2e^{-3x} + (2x+1) \times (-3) \times e^{-3x}$
 $= e^{-3x}(2-6x-3) = e^{-3x}(-6x-1)$.

$h'(x) = \frac{3e^{3x}(e^{3x}+1) - (e^{3x}-1) \times 3 \times e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2}$
 $= \frac{6e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2}$.

$i'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2 \times (-2x)e^{-x^2}$
 $= e^{-x^2}(2x-2x^3) = 2xe^{-x^2}(1-x^2)$.

113. $f'(x) = \frac{2e^x}{1+e^{2x}} - 1 = \frac{e^{2x}-1}{1+e^{2x}}$;

$1 - \frac{2}{e^{2x}+1} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = f'(x)$.

114. $f'(x) = (2x-4)e^{x^2-4x+1}$.
 $f'(x) = \frac{-\sin x e^{\cos x} \times e^{\sin x} - \cos x e^{\sin x} \times e^{\cos x}}{(e^{\sin x})^2}$
 $= \frac{-e^{\sin x + \cos x}(\sin x + \cos x)}{(e^{\sin x})^2}$.

115. $f'(x) = \frac{6}{x} \ln x - \frac{4}{x}$.

$g'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

116. $f'(x) = 2x \ln(2-x) + x^2 \times \frac{-1}{2-x}$.

$g'(x) = \frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2(x-1)}$.

117. $f'(x) = e^{-x+3} + (x+1) \times (-1) e^{-x+3}$
 $= e^{-x+3}(1-x-1) = -xe^{-x+3}$.

$g'(x) = \frac{2e^{2x}(3x+1) - e^{2x} \times 3}{(3x+1)^2}$
 $= \frac{e^{2x}(6x-1)}{(3x+1)^2}$.

118. $(xe^{-2x})' = (1-2x)e^{-2x}$.

$(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$.

$f(x) = x^n e^{-\ln x} = (xe^{-2x})^n$.

$f'(x) = n \times (1-2x)e^{-2x} \times (xe^{-2x})^{n-1}$.

119. $f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+9}$.

$g'(x) = \frac{(1-x) + x + 2}{\left(\frac{x+2}{1-x}\right)} = \frac{3 \times (1-x)}{x+2}$.

120. 1. $f(x) = x - \ln(x+1)$.

2. $f'(x) = \frac{x}{x+1}$.

121. 1. $f'(x) = \frac{-x^2-2x+1}{x^3+x^2+x+1}$
 $= \frac{-(x-\sqrt{2}+1)(x+\sqrt{2}+1)}{(x+1)(x^2+1)}$.

2.

x	-1	$\sqrt{2}-1$	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f(x)	$-\infty$		$-\infty$

122. $f'(x) = \frac{(-3x^2+2x+12)e^{\frac{3x-1}{x^2+4}}}{(x^2+4)}$.

$g'(x) = \frac{-28x}{3x^4+16x^2+5}$
 $= \frac{-28x}{(x^2+5)(3x^2+1)}$.

123. 1.

x	0	$\ln \frac{\sqrt{6}}{2}$	$\ln \frac{3\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	
f(x)	$-\infty$	0	α	0

2. $x=0$ asymptote verticale et $y=0$ asymptote horizontale en $+\infty$.

3. $f(x) < 0$ pour $x \in]0 ; \ln\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)[$;

$f(x) > 0$ pour $x \in]\ln\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) ; +\infty[$;

$f(x) = 0$ pour $x = \ln\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

124. 1. $f'(x) = \frac{(x^2-10x-5)e^{\frac{x^2+x}{x^2-10x+25}}}{x^2-10x+25}$.

2. $f'(x) = (x-\sqrt{30}-5)(x+\sqrt{30}-5) \frac{e^{\left(\frac{x^2+x}{x-5}\right)}}{(x-5)^2}$.

3. $f'(x) > 0$ pour $x < -\sqrt{30}+5$ ou $x > \sqrt{30}+5$.

4.

x	$-\infty$	$-\sqrt{30}+5$	5
f'(x)	+	0	-
f(x)	0		0

125. 1. $f(x) = \ln\left(\frac{1+2e^x}{e^{2x}-1}\right)$.

2. $f'(x) = \frac{-2e^x(e^{2x}+e^x+1)}{(e^x-1)(e^x+1)(2e^x+1)}$.

3. $-2e^x(e^{2x}+e^x+1) < 0$;
 $(e^x-1)(e^x+1)(2e^x+1) > 0$
 pour $x \in]0; +\infty[$ donc $f'(x) < 0$.
 solve $\left(\frac{d}{dx}f(x) < 0, x\right)$.

5. Avec un logiciel de calcul formel

126. et 127. Corrigés dans le manuel.

128. 1. $f'(x) = -2e^{-2x} \times \frac{1}{1+e^{-2x}}$.

2. $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$.

3.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		-	
$f(x)$	$-\infty$		0

129. 1. Les capacités du logiciel ne permettent pas de résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.

2. a.

x	0	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	0	$\frac{5}{2}$	$\approx 2,46$	$+\infty$

b. $f(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.

c. $S =]0; +\infty[$.

130. 1. $f'(x) = x(2\ln x + 1)$.

2. $f'(x) < 0$ sur $]0; e^{-\frac{1}{2}}[$;

$f'(x) > 0$ sur $]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$.

3.

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	0		$e^{-\frac{1}{2}}$

4. L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est : $y = x - 1$.

131. 1. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}x}$
 sur $\mathbb{R}$;

$f'(x) = x + \frac{3}{4} - \frac{3e^{-\frac{3}{4}x}}{8}$;

$f''(x) = 1 + \frac{9e^{-\frac{3}{4}x}}{32}$.

2. $f''(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

3.

x	$-\infty$	$\alpha \approx -0,29$	$+\infty$
$f''(x)$		+	
$f'(x)$	$-\infty$		$+\infty$

$-0,29 \leq \alpha \leq -0,28$

4. La fonction $f'(x)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

$-0,29 \leq \alpha \leq -0,28$

5.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

6. L'équation $f(x)$ possède deux solutions dans $\mathbb{R}$.

L'une sur l'intervalle $[-2; 0]$, l'autre sur l'intervalle $[0; 3]$.

L'instruction fsolve, qui utilise une méthode de calcul différentielle de solve permet d'évaluer ses solutions.

132.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	e^1		e^1

6. Problèmes

135. A. 1. $\forall x \in [0; +\infty[$,
 $f'(x) = e^{-x^2}(2x - 2x^3) = 2xe^{-x^2}(1 - x^2)$
 $= 2xe^{-x^2}(1 - x)(1 + x)$.

2. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; 1]$

et $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1; +\infty[$.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

B. 1.

$f'(x) = (e^{-k}(k^2 - k)x^{k-2} - k^2e^{-k}\left(\frac{x}{c}\right)^k x^{k-2})e^{-\left(\frac{x^k}{c}\right)}$.

2. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[0; \left(\frac{k-1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}\right]$

et $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\left(\frac{k-1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}; +\infty\right[$.

3. Lorsque $x \rightarrow +\infty$

alors $\left(\frac{x}{c}\right)^k \rightarrow +\infty$ (en $c > 0$ et $k \geq 2$)

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} kXe^{-x} = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

4.

x	0	$\left(\frac{k-1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0		0

137. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

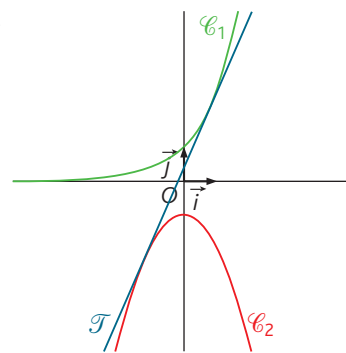
b. $\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$.

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{\sqrt{2}e}{2}$	0

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}e}{2}$.

f admet sur $[0; +\infty[$ un maximum, qui vaut $\frac{\sqrt{2}e}{2}$ atteint en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

138. 1.



2. a. $(\mathcal{T}_a): y = e^a(x - a) + e^a$.

b. $(\mathcal{T}_b): y = -2b(x - b) - b^2 - 1$.

c. $(\mathcal{T}_a) = (\mathcal{T}_b)$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^a = -2b \\ -ae^a + e^a = 2b^2 - b^2 - 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^a = -2b \\ -ae^a + e^a = b^2 - 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^a = -2b \\ -ae^a + e^a = \frac{e^{2a}}{4} - 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}$

3. (E) : $e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = 0$.

a. $\forall x < 0 ; e^{2x} < e^0 \Leftrightarrow e^{2x} < 1$

donc $e^{2x} - 4 < -3 < 0$.

$\forall x < 0 ; x - 1 < -1 < 0$ or $e^x > 0$

donc $4e^x(x - 1) < 0$.

b. $f(x) = e^{2x} - 4 + 4e^x(x - 1)$

donc d'après a. $\forall x < 0 \quad f(x) < 0$

Ainsi (E) n'admet pas de solution sur $] -\infty ; 0[$.

c. $\forall x \geq 0$,

$f'(x) = 2e^{2x} + 4e^x + 4xe^x - 4e^x$

$= 2e^x(e^x + 2x)$

or $x > 0$ donc $e^x > 0$ et $x > 0$

donc $f'(x) > 0$.

f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

d. $f(0) = e^0 + 0 - 4 - 4 = -7$

et $f(x) = e^x(e^x + 4x - 4) - 4$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 4x - 4 = +\infty$ } $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

En utilisant le théorème de la bijection,

$\exists ! a \in [0 ; +\infty[\mid f(a) = 0$.

À l'aide de la calculatrice : $0,84 < a < 0,85$

x	0	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)	-7	$+\infty$

4. $b = \frac{1}{2}e^a$ donc : $e^{0,84} < e^a < e^{0,85}$

soit $-\frac{1}{2}e^{0,85} < b < -\frac{1}{2}e^{0,84}$

d'où $-1,16 < b < -0,92$.

140. 1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (cours).

2. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$

donc par composition $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

3. a. $\ln v_n = \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)$.

On pose $X = \frac{a}{n}$ et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = a$.

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^a$.

141. 1.

$\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+] = -\log(5 \times 10^{-9}) \approx 8,3$.

Si $[\text{H}_3\text{O}^+] = 0,1 \text{ mol} \cdot \ell^{-1}$

alors $\text{pH} = -\log 0,1 \approx 1$ très acide.

2. $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-7}$ pour une solution neutre.

3. La fonction $[\text{H}_3\text{O}^+] \rightarrow -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$ est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

4. Ajouter des ions $[\text{H}_3\text{O}^+]$ pour diminuer le pH.

142. 1. Si $I = I_0$ alors $N = 0$,

si $I = 10I_0$ alors $N = 10$.

2. $N = 20 \text{ dB}$ donc $10 \log \frac{I}{I_0} = 20$;

$\log \frac{I}{I_0} = 2$ soit $\frac{I}{I_0} = 10^2$; $I = 100I_0$.

Si $N = 50 \text{ dB}$ alors $I = 100\,000I_0$.

3. Si $N = 120 \text{ dB}$, $I = 10^{12}I_0$.

4. $\frac{I}{I_0} = 10^{10,5} \approx 3,2 \times 10^{10}$.

143. 1. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f'_k(x) = e^{-x}(-x + 1 - k)$ donc f_k est croissante sur $[0 ; 1 - k]$ et f_k est décroissante sur $[1 - k ; +\infty[$. Donc f_k admet un maximum en $x = 1 - k$.

2. $M_k \left(\frac{1-k}{f_k(1-k)} \right)$ or

$f_k(1-k) = (1-k+k)e^{-(1-k)} = e^{-1+k}$

donc $M_k \in \Gamma$.

3. En noir Γ , en rouge $\mathcal{C}_k$ avec $k = 2$. L'unité graphique est 1 graduation.

144. 2. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{1}{3}x = D$ donc (D) est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.

c. $f(x) - \frac{1}{3}x = \ln(1 + e^{-x})$

or $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$

donc $\ln(1 + e^{-x}) > 0$

donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de (D).

d. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f(x) = \ln(e^{-x}(e^x + 1)) + \frac{1}{3}x$

$= \ln(e^{-x}) + \ln(e^x + 1) + \frac{1}{3}x$

$= -\frac{2}{3} + \ln(e^x + 1)$.

e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

3. a. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}$.

b.

x	0	$\ln 2$	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$	$\frac{1}{3} \ln\left(\frac{27}{4}\right)$	$+\infty$

145. 1. $f_n(0) = \frac{1}{2}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A\left(\frac{1}{2}\right) \in \mathcal{C}_n$.

2. a. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_0(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$

donc f_0 est croissante sur $\mathbb{R}$.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = 1$;

(Ox) est asymptote à $\mathcal{C}_{f_0}$ au voisinage de $-\infty$ et $D : y = 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_{f_0}$ au voisinage de $+\infty$.

c.

x	$-\infty$	$+\infty$
f'_0		+
f_0	0	1

3. a.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(-x) = \frac{e^{-(-x)}}{1 + e^{-(-x)}} = \frac{e^x}{1 + e^x}$
 $= \frac{1}{e^{-x} + 1} = f_0(x)$.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(-x) = 1$;
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$f'_1(x) = \frac{-e^{-x}(1 + e^{-x}) - e^{-x} \times (-e^{-x})}{(1 + e^{-x})^2}$
 $= \frac{-e^{-x} - e^{-2x} + e^{-2x}}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{-e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$

donc f_1 est décroissante sur $\mathbb{R}$.

c. $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ sont symétriques par rapport à (Oy).

4. a. $\forall n \geq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}$.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

c. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$f'_n(x) = -\frac{ne^{nx} + (n-1)e^{(n-1)x}}{(e^{nx} + e^{(n-1)x})^2}$

$= -e^{(n-1)x} \frac{ne^{nx} + n - 1}{(e^{nx} + e^{(n-1)x})^2}$

or $\forall n \geq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $ne^{nx} + n - 1 > 0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
f'_n		-
f_n	$+\infty$	0

146. 1. f semble croissante sur $[-3; 2]$.

2. $\mathcal{C}_f$ semble en dessous de (xx') sur $]-\infty; 0]$ et $\mathcal{C}_f$ semble au-dessus de (xx') sur $[0; +\infty[$.

A. 1. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{x-1} + x^2e^{x-1} - x \\ &= xe^{x-1}(2+x) - x \\ &= x[e^{x-1}(x+2) - 1]. \end{aligned}$$

2. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1.$$

b. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = e^{x-1} + (x+2)e^{x-1} = e^{x-1}(x+3).$$

c.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	-1	$-e^{-4} - 1$	$+\infty$

d. $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et $0,20 < \alpha < 0,21$.

e.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

3. a.

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$
$g(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$		0		

b.

c. La première conjecture est donc fausse.

B. 1. $g(x) = 0 \Leftrightarrow (\alpha+2)e^{\alpha-1} = 0$
 $\Leftrightarrow e^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha+2}$

$$\begin{aligned} \text{et } f(\alpha) &= \alpha^2 e^{\alpha-1} - \frac{\alpha^2}{2} \\ &= \alpha^2 \times \frac{1}{\alpha+2} - \frac{\alpha^2}{2} \\ &= \alpha^2 \times \frac{-\alpha}{2(\alpha+2)}. \end{aligned}$$

2. a. $\forall x \in [0; 1]$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{-3x^2 \times 2(x+2) + x^3 \times 2}{4(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2(-3x-6+x)}{2(x+2)^2} = \frac{x^2(-2x-6)}{2(x+2)^2} \\ &= \frac{-x^2(-x+3)}{(x+2)^2}. \end{aligned}$$

x	0	1
$h'(x)$	$-$	
$h(x)$	0	$-\frac{1}{6}$

b. $0,20 < \alpha < 0,21$

$$h(0,20) < h(\alpha) < h(0,21)$$

$$h(0,20) < f(\alpha) < h(0,21)$$

3. a. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(e^{x-1} - \frac{1}{2})$
 $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1 - \ln 2$.

b. $\mathcal{C}$ est en dessous de (xx') sur $]-\infty; 1 - \ln 2]$ et $\mathcal{C}$ est au-dessus de (xx') sur $]1 - \ln 2; +\infty[$.

c. La deuxième conjecture est donc fausse.

4.

x	$-0,2$	$-0,15$	$-0,1$	$-0,05$
$f(x)$	-80×10^{-4}	-41×10^{-4}	-17×10^{-4}	-4×10^{-4}

x	0	$0,05$	$0,1$	$0,15$
$f(x)$	0	-3×10^{-4}	-9×10^{-4}	-16×10^{-4}

x	$0,2$	$0,25$	$0,3$	$0,35$
$f(x)$	-20×10^{-4}	-17×10^{-4}	-3×10^{-4}	27×10^{-4}

x	$0,4$
$f(x)$	78×10^{-4}

147. A. 1. $\forall x > 0$,

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} \quad f'(x) > 0.$$

f est croissante sur $]0; +\infty[$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

D'après le théorème de la bijection,

$$\exists ! \alpha \in]0; +\infty[\mid f(\alpha) = 0.$$

3. $f(\frac{1}{2}) < 0$ et $f(1) = 1$; $f(1) > 0$
 donc $\alpha \in [\frac{1}{2}; 1]$.

B. 1. a. $\forall x > 0$,

$$g'(x) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5x} = \frac{4x-1}{5x}.$$

g est décroissante sur $]0; \frac{1}{4}]$ et croissante sur $[\frac{1}{4}; +\infty[$.

b.

x	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$\frac{1+\ln 4}{5}$	$+\infty$

g est donc croissante sur $[\frac{1}{2}; 1]$

ainsi $\forall x \in [\frac{1}{2}; 1], g(\frac{1}{2}) \leq g(x) \leq g(1)$

soit $\frac{2+\ln 2}{5} \leq g(x) \leq \frac{4}{5}$

$\frac{2+\ln 2}{5} \approx 0,54$ donc $g(x) \in [\frac{1}{2}; 1]$.

c. $g(x) = x \Leftrightarrow \frac{4x - \ln x}{5} = x \Leftrightarrow x + \ln x = 0.$

2. a. À l'aide de B. 1. b. on démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

À l'aide de B. 1. a. on démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.

b. (u_n) est croissante et majorée par 1 donc (u_n) converge vers $\alpha \in [\frac{1}{2}; 1]$.

3. a. $u_{10} \approx 0,567099$.

b. $0,567 \leq \alpha \leq 0,568$.

148. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$

2. $\forall x \geq 0$,

$$f'(x) = \frac{(e^{-x} - xe^{-x})}{1 + xe^{-x}} = \frac{(1-x)e^{-x}}{1 + xe^{-x}}$$

qui est du signe de $1-x$.

3.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\ln(1+e^{-1})$	0

149. 1. a. On vérifie que

$$\frac{dv}{dt} - 9,8 + 0,0035v^2 = 0 \quad \text{à l'aide d'un logiciel de calcul formel.}$$

b. $v'(t) = \frac{196}{5(e^{\frac{7\sqrt{7}t}{100}} + e^{-\frac{7\sqrt{7}t}{100}})^2}.$

c. $\forall t \geq 0, v'(t) > 0.$

d. $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 20\sqrt{7}$

soit environ $52,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

soit $190 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ environ.

e.

t	0	$+\infty$
$v'(t)$	$+$	
$v(t)$	0	$20\sqrt{7}$

2. $t \ 190 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$

150. 1. f semble croissante puis décroissante et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$

g semble croissante sur $[2; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$

2. $\forall x \geq 0, f'(x) = (1-x)e^{-x}.$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	e^{-1}	0

$\forall x \geq 0, g'(x) = x(2-x)e^{-x}$.

x	0	2	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$	0	$4e^{-2}$	0

3. $f(x) - g(x) = xe^{-x}(1-x)$.

Sur $[0; 1]$ $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$; sur $[1; +\infty[$ $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$.

151. A. 1. a.

$\forall t \in \mathbb{R}_+, f'(t) = -100e^{-\frac{t}{2}}$

donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

b. $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 20$; $\mathcal{D}: y = 20$ est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.

2. a. On trouve $t \approx 3,79$ soit $3^h 47' 24''$.

b. $t = -2 \ln\left(\frac{3}{20}\right) \approx 3,79$ soit $3^h 47' 39''$ plus précisément.

B. 1. a.

$d_0 \approx 78,7$; $d_1 \approx 47,7$; $d_2 \approx 28,9$.

b. $d_n = -200e^{-\frac{n+1}{2}} + 20 + (200e^{-\frac{n}{2}} + 20)$
 $= -200e^{-\frac{n}{2}}(-e^{-\frac{n}{2}} + 1)$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0$.

2. On trouve $n = 6$.

152. 1. $\forall t \in \mathbb{R}_+, f'(t) = ake^{kt}$ donc $f'(t) - k(f(t) - 20) = ake^{kt} - kae^{kt} = 0$.

2. $f(0) = 210 \Leftrightarrow 20 + a \Leftrightarrow a = 190$.

3. $f(40) = 110 \Leftrightarrow 20 + 190e^{40k}$
 $\Leftrightarrow e^{40k} = \frac{90}{190}$
 $\Leftrightarrow k = \frac{1}{40} \ln\left(\frac{9}{19}\right)$.

4. $\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t) = 20 + 190e^{\frac{t}{40} \ln\left(\frac{9}{19}\right)}$;

$f'(t) = \frac{19}{4} \ln\left(\frac{9}{19}\right) e^{\frac{t}{40} \ln\left(\frac{9}{19}\right)} < 0$;

f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f(t)$	210	20

5. $f(t) \leq 35 \Leftrightarrow e^{\frac{t}{40} \ln\left(\frac{9}{19}\right)} \leq \frac{5}{190}$
 $\Leftrightarrow \frac{t}{40} \ln\left(\frac{9}{19}\right) \leq \ln\left(\frac{3}{38}\right)$
 $\Leftrightarrow t \geq 40 \frac{\ln\left(\frac{3}{38}\right)}{\ln\left(\frac{9}{19}\right)}$.

Soit $t \geq 136$. À partir de 16 heures 16 minutes.

6. Début

$190 \rightarrow A$
 $\frac{1}{40} \ln\left(\frac{9}{19}\right) \rightarrow k$

TantQue $20 + Ae^{kt} > 35$

T + 1 $\rightarrow$ T

Fin TantQue

Afficher T

7. On retrouve $t = 136$.

153. 1. $\forall x \in [0; +\infty[$,

$f'(x) = \frac{15,2 \times 0,54e^{-0,054x}}{(1 + 15,2e^{-0,054x})^2}$

donc $f'(x) < 0$.

f est décroissante sur $[0; +\infty[$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

3. $f(x) \geq 0,5 \Leftrightarrow 1 + 15,2e^{-0,054x} \leq \frac{1}{0,5}$
 $\Leftrightarrow e^{-0,054x} \leq \frac{1}{15,2}$
 $\Leftrightarrow x \geq \frac{\ln 15,2}{0,054}$

soit $x \geq 50,4$. À partir de 51 ans.

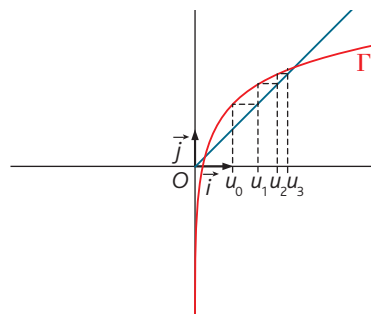
154. 1. a. $\forall x \geq 1, g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

x	1	α	$+\infty$
$g'(x)$		-	
$g(x)$	$\ln 2$	0	$-\infty$

En utilisant le théorème de la bijection $\exists \alpha \in [1; +\infty[/ g(x) = 0$.

b. $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln(2\alpha) + 1 - \alpha = 0$
 $\Leftrightarrow \ln(2\alpha) + 1 = \alpha$

2. a.



b. On démontre par récurrence que

$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

c. (u_n) est croissante et majorée par 3 donc (u_n) converge.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1; 3], u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \ln(2x) + 1$.

f est continue sur $[1; 3]$ et (u_n) converge vers $\beta \in [1; 3]$

donc $f(\beta) = \beta \Leftrightarrow \ln(2\beta) + 1 = \beta$

donc $\beta = \alpha$ d'après 1..

155. 1. a. $\forall x \geq 0$,

$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$ donc $f'(x) \geq 0$.

f est croissante sur $[0; +\infty[$.

Ainsi $\forall x \geq 0, f(x) \geq f(0)$;

soit $x - \ln(1+x) \geq 0$

donc $\ln(1+x) \leq x$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$;

$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1$; $\ln u_n \leq 1$.

c. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n = +\infty$

ce qui est contradictoire avec 2..

2. a. $v_n = \ln u_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

b. 1; donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$.

157. 1. a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x+2) = 0$ donc $\mathcal{D}_1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$.

c. $f(x) - (x+2) = \frac{-4e^x}{e^x + 3} < 0$ donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}_1$ sur $\mathbb{R}$.

2. a. $\forall n \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = 1 - \frac{4e^x(e^x + 3) - 4e^x \times e^x}{(e^x + 3)^2}$
 $= \frac{(e^x + 3)^2 - 4e^{2x} - 12e^x + 4e^{2x}}{(e^x + 3)^2}$
 $= \frac{e^{2x} + 6e^x + 9 - 12e^x}{(e^x + 3)^2} = \frac{(e^x - 3)^2}{(e^x + 3)^2}$.

f est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3. a.

$\mathcal{D}_2: y = f'(x) = (\ln 3)(x - \ln 3) + f(\ln 3)$.

$y = 4 + \ln 3$

$f(\ln 3) = \ln 3 + 2 - \frac{12}{6} = \ln 3 + 4$.

$$f'(\ln 3) = 0.$$

$\mathcal{D}_2$ est parallèle à l'axe des abscisses.

b. $\mathcal{C}$ est en dessous de $\mathcal{D}_2$ sur $[\ln 3; +\infty[$.

4. a.

$$\mathcal{D}_2: y = f'(0)x + f(0); f(0) = 2 - \frac{4}{4} = 1; \\ f'(0) = \left(\frac{-2}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1.$$

b.

$$f(x) - \left(\frac{1}{4}x + 1\right) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} - \frac{1}{4}x - 1 \\ \frac{3}{4}x + 1 - \frac{4e^x}{e^x + 3}.$$

$$\text{Soit } g(x) = f(x) - \left(\frac{1}{4}x + 1\right);$$

$$g''(x) = f''(x) = \frac{12e^x(e^x - 3)}{(e^x + 3)^3}; \quad g''(x) \leq 0 \\ \text{sur }]-\infty; \ln 3].$$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{4}.$$

x	$-\infty$	0	$\ln 3$
$g''(x)$		-	
$g'(x)$	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$
$g(x)$		0	

$\mathcal{D}_3$ est au-dessus de $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{R}$.

5. On trace $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{C}$.

158. 1. a. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$
 $= \ln(e^x(1 + 2e^{-2x})) = \ln e^x + \ln(1 + 2e^{-2x})$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$.
 Donc (d) est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + \ln 2) = 0$. Donc (d') est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$.

a. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}},$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x > 2e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} \geq 2$
 $\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \ln 2.$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2} \ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{3}{2} \ln 2$	$+\infty$

$$f\left(\frac{1}{2} \ln 2\right) = \ln\left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \ln 2$$

159. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$;
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0.$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3. En appliquant le théorème de la bijection $\exists |\alpha| \in]0; +\infty[\mid f(x) = 0$.
 On trouve $1,55 < \alpha < 1,56$.

160. 1. a. $\forall x > -1,$
 $f'(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{1+x}.$

b. $\forall x > -1, f'(x) = \frac{x^3}{1+x} > 0.$

c.

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

d. D'après le tableau de variation, $\forall x > -1, f(x) \geq 0$.

2. a. $\forall x > -1,$
 $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{x+1}.$

b. $\forall x > -1, g'(x) \geq 0.$

c.

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

d. D'après c. $\forall x \geq 0, g(x) \geq 0$.

3. D'après 1. d. et 2. d $\forall x \geq 0,$
 $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$

4. $\forall x > 0,$
 $1 - \frac{x}{2} \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}.$
 $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{x}{2} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} = 1$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(1+x)}{x} = 1.$

5. a. $\frac{x^3}{3}.$

b. Si $x = 0,00001$

alors $x - \frac{x^2}{2} = 10^{-5} - \frac{10^{-10}}{2};$

$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} = 10^{-5} - \frac{10^{-10}}{2} + \frac{10^{-15}}{3}.$

$\ln(1,00001) \approx 10^{-5} - \frac{10^{-10}}{2}$
 $= 0,00000999995$

à 10^{-15} près.

161. 1. $\forall t \geq 0; h'(t) = -1 + t + e^{-t};$
 $h''(t) = 1 - e^{-t}; h'(0) = 0$ et $h''(0) = 0.$

2. $\forall t \geq 0; -1 \leq 0; e^{-t} \leq e^0; e^{-t} \leq 1;$
 $h''(t) \geq 0.$

Soit $f(t) = t - h''(t) = t - 1 + e^{-t};$
 $f'(t) = 1 - e^{-t} \geq 0.$

$\forall t \geq 0 f(t) \geq f(0); t - 1 + e^{-t} \geq 0;$
 $1 - e^{-t} \leq t.$

Ainsi $\forall t \geq 0, 0 \leq h''(t) \leq t$

donc $0 \leq h'(t) - h'(0) \leq \frac{t^2}{2};$

soit $0 \leq h(t) \leq \frac{t^3}{6}.$

3. D'après 2. $\forall x \geq 0,$

$1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \leq e^{-t} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2}.$

162. A. 1. $\forall t > 0; u'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0.$

u est croissante sur $]0; +\infty[$.

$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty.$

2. a. On utilise le théorème de la bijection.

b. $1,31 \leq \alpha \leq 1,32.$

3.

x	0	α	$+\infty$
$u(x)$		-	+

4.

$u(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = 2 - \alpha^2.$

B. 1. $\forall x > 0,$

$f'(x) = 2x + 2x\left(-\frac{1}{x}\right)(2 - \ln x)$
 $= \frac{2}{x}(x^2 - 2 + \ln x) = \frac{2}{x}u(x).$

2. f est décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.

C. 1. $A\left(\frac{0}{2}\right); M\left(\frac{x}{\ln x}\right)$ donc

$AM = \sqrt{f(x-0)^2 + (\ln x - 2)^2} = \sqrt{f(x)}.$

2. a. La fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc f et g ont les mêmes variations sur $]0; +\infty[$.

b. AM est minimal pour $x = \alpha. P\left(\frac{\alpha}{1\alpha}\right).$

c. $AP = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\alpha^2 + (\ln \alpha - 2)^2}$
 $= \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} = \alpha \sqrt{1 + \alpha^2}.$

3. $\vec{AP} \left(\frac{x}{\ln x - 2} \right)$. $\mathcal{D}$ admet

$\vec{u} \left(\frac{1}{\alpha} \right)$ comme vecteur directeur.

$$\vec{AP} \cdot \vec{u} = \alpha + \frac{1}{\alpha}(\ln \alpha - 2)$$

$$= \frac{1}{\alpha} u(x) = 0.$$

163. 1. a. $m = \frac{1}{4}$ et $p = \frac{1}{2}$.

b. $2g' + g = e^{-\frac{x}{2}}(x + 1)$

$$\Leftrightarrow 2g' + g = 2f' + f$$

$$\Leftrightarrow 2(g - f) + g - f = 0$$

2. $\forall x \in \mathbb{R}$;

$$h'(x) = -\frac{1}{8}e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x) + \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(2x + 2)$$

$$= e^{-\frac{x}{2}} \left(-\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right)$$

$$= e^{-\frac{x}{2}} \left(-\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \right)$$

$$h'(x) = -\frac{1}{8}e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x + 4), h \text{ est donc}$$

décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.

4. a. $f(x) - e^{-\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 1 \right)$

$$= \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x - 4).$$

$\mathcal{C}$ est au-dessus de Γ
sur $]-\infty ; -1 - \sqrt{5}]$ et
sur $[-1 + \sqrt{5} ; +\infty[$.
 $\mathcal{C}$ est en dessous de Γ
sur $[-1 - \sqrt{5} ; -1 + \sqrt{5}]$.

164. A. 1. $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x + 7} = \frac{4}{1 + 7e^{-x}}$.

2. a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 4$.
 $\mathcal{C}_1$ admet (Ox) comme asymptote au voisinage de $-\infty$.
 $\mathcal{C}_1$ admet $\mathcal{D} : y = 4$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$.

b. $\forall x \in \mathbb{R}$;

$$f_1'(x) = \frac{4e^x(e^x + 7) - 4e^{2x}}{(e^x + 7)^2}$$

$$= \frac{28e^x}{(e^x + 7)^2} > 0.$$

f_1 est croissante stricte sur $\mathbb{R}$.

c. $\forall x \in \mathbb{R}$;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) < f(x) < \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\Leftrightarrow 0 < f(x) < 4.$$

3. a. $f_1'(\ln 7) = \frac{28 \times 7}{14^2} = 1$;

$$f_1(\ln 7) = \frac{4 \times 7}{7 + 7} = 2.$$

$$(T_1) : y = 1 \times (x - \ln 7) + 2$$

$$y = x - \ln 7 + 2.$$

4. a. $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = 4 \ln(e^x + 7)$.

b. $m = \frac{1}{\ln 7} \int_0^{\ln 7} f_1(x) dx$

$$= \frac{1}{\ln 7} (4 \ln 14 - 4 \ln 8) = \frac{4 \ln \left(\frac{7}{4} \right)}{\ln 7}.$$

B. 1. $f_n(0) = \frac{4}{1 + 7} = \frac{1}{2}$

donc $A \left(0 ; \frac{1}{2} \right) \in \mathcal{C}_n$.

2. a. $M \left(\frac{x}{y} \right) \in \mathcal{C}_n \cap \mathcal{D} : y = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7} \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4e^{nx} = 2e^{nx} + 14 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{nx} = 7 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\ln 7}{n} \\ y = 2 \end{cases}$$

donc $I_n \left(\frac{\ln 7}{n} \right) \in \mathcal{C}_n \cap \mathcal{D}$.

b. $(T_n) : y = f_n' \left(\frac{\ln 7}{n} \right) \left(n - \frac{\ln 7}{n} \right) + f_n \left(\frac{\ln 7}{n} \right)$;

$$f_n'(x) = \frac{4ne^{nx}(e^{nx} + 7) - 4e^{nx}ne^{nx}}{(e^{nx} + 7)^2}$$

$$= \frac{28ne^{nx}}{(e^{nx} + 7)^2}.$$

$$f_n' \left(\frac{\ln 7}{n} \right) = \frac{28n \times 7}{14^2} = n$$

$$f_n \left(\frac{\ln 7}{n} \right) = \frac{4 \times 7}{7 + 7} = 2.$$

$$(T_n) : y = n \left(x - \frac{\ln 7}{n} \right) + 2$$

$$(T_n) : y = nx - \ln 7 + 2$$

165. A. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = -\infty$.

2. $\forall x > 0$,

$$f_n'(x) = -\ln x - x + \frac{1}{x} = -\ln x - 1.$$

f_n est croissante sur $\left] 0 ; \frac{1}{e} \right]$ et

f_0 est décroissante sur $\left] \frac{1}{e} ; +\infty \right[$.

B. 1. $\forall x > 0$,

$$f_n'(x) = -n - 1 - \ln x.$$

2. a. $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -e^{-n-1}$.

$A_n \left(e^{-1-n}, \frac{1}{e^{-1-n}} \right)$ car

$$f_n(e^{-n-1}) = -ne^{-n-1} - e^{-n-1}(-1-n)$$

$$= e^{-n-1}.$$

b. $A_x \in \Delta$.

c. On place A_0, A_1, A_2 .

3. a. $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = e^{-n}$
or $x > 0$ donc $x = e^{-n}$.

$B_n(e^{-n} ; 0)$.

b. $f_n'(e^{-n}) = -n - 1 - (-n) = -1$.

c. On place B_0, B_1, B_2 .

166. A. 1. $T_a : y = e^a(x - a) + e^a$.

$y = 0 \Leftrightarrow x - a + 1 = 0 \Leftrightarrow x = a - 1$.

2. $M \left| \begin{smallmatrix} a & a \\ e^a & N \end{smallmatrix} \right|_0^a \left| \begin{smallmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right|$ donc $\vec{NP} = -\vec{i}$.

B. 1. $M \left| \begin{smallmatrix} a & a \\ g(a) & N \end{smallmatrix} \right|_0^a$

$T : y = g'(a)(x - a) + g(a)$.

$y = 0 \Leftrightarrow x = a - \frac{g(a)}{g'(a)}$ $\left| \begin{smallmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right|$ $\frac{g(a)}{g'(a)}$.

2. $\frac{g(0) = 2}{\vec{NP} = \vec{i}} \Leftrightarrow \begin{cases} g(0) = 2 \\ -\frac{g(a)}{g'(a)} = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(0) = 2 \\ g'(a) = -g(a) \end{cases}$$

$g(x) = 2e^{-x}$ convient.

167. 1. $\forall x \geq 0, f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 4} \geq 0$,

f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2. a. $\forall x \geq 0, g'(x) = f'(x) - 1$

$$= \frac{-x^2 + 2x - 4}{x^2 + 4} < 0,$$

g est décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

b. $\alpha = 2, 2$ à 10^{-1} près.

c. $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.

168. 1. a. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

b. $\forall x \in]0 ; 1], x \ln x \leq 0$
donc $x \ln x + 1 \leq 1$ soit $f(x) \leq 1$.

2. a. $\forall x \in]0 ; 1], f'(x) = x \ln x + 1$.

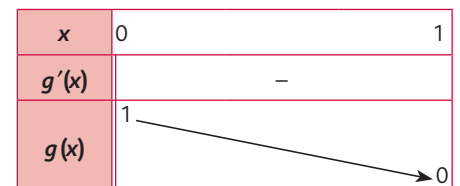
b. La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1).$$

$y = x - 1 + 1$ soit $y = x$ qui est (T) .

3 a. $\forall x \in]0 ; 1], g'(x) = \ln x$.

g est décroissante sur $]0 ; 1]$.



b. $\forall x \in]0 ; 1], g(x) \geq 0$ soit $f(x) \geq x$;
 $\mathcal{C}$ est au-dessus de T sur $]0 ; 1]$.

En route vers le bac (p. 160 et 161)

169. Soit $x \mapsto e^{\ln x} = x$ avec $x > 0$

$$(e^{\ln x})' = (\ln x)' \times (e^{\ln x})$$

$$\text{soit } (\ln x)' \times e^{\ln x} = 1$$

$$\Leftrightarrow (\ln x)' \times x = 1$$

$$\Leftrightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

170. $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$ sur $]0; +\infty[$

a. La fonction $f(x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme la différence de 2 fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}$$

$$2x > 0 \text{ car } x > 0.$$

$$\text{donc : } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4$; f décroissante sur cet intervalle ;

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 4$; f est croissante sur cet intervalle ;

$f(x)$ a un minimum pour $x = 4$ et sa valeur est $f(4) = \sqrt{4} - \ln 4$.

$$f(4) \approx 0,62.$$

b. $f(4) > 0$ donc $f(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \ln x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > \ln x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{x} > \frac{\ln x}{x} \text{ car } x > 0.$$

$$\text{Comme } x > 1 : \frac{\ln x}{x} > 0$$

$$\text{donc } 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

171. On pose $X = \frac{e^x}{x}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} X = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{X} = 0 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0.$$

172. On pose $X = \ln x$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\ln x}}{\ln x} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{X}{\ln X} = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0.$$

173. Prérequis : $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$.

Appliquons la propriété $x = y = \sqrt{m}$ avec $m > 0$.

$$\ln(\sqrt{m} \times \sqrt{m}) = \ln \sqrt{m} + \ln \sqrt{m}$$

$$\ln m = 2 \ln \sqrt{m}$$

$$\ln \sqrt{m} = \frac{1}{2} \ln m.$$

174. Soit $f(x) = \ln(ax) - \ln x$ sur $]0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{a}{ax} - \frac{1}{x} = 0 \text{ donc } f \text{ est constante sur }]0; +\infty[.$$

$$f(1) = \ln(a) - \ln(1) = \ln a.$$

$$\text{Donc } \forall x \in]0; +\infty[.$$

$$f(x) = \ln a \Leftrightarrow \ln(ax) - \ln x = \ln a$$

$$\Leftrightarrow \ln(ex) - \ln e + \ln x.$$

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) + \ln(b) = \ln\left(\frac{1}{b} \times b\right) = \ln(a) = 0$$

$$\text{avec } b > 0.$$

$$\text{donc } \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b).$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b \text{ avec } a > 0.$$

175. A. 1. $g(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0; +\infty[$;

$$g'(x) = e^x - 1.$$

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0.$$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	+
$g(x)$		

2. $g(x) = 0$, d'après le sens de variation de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

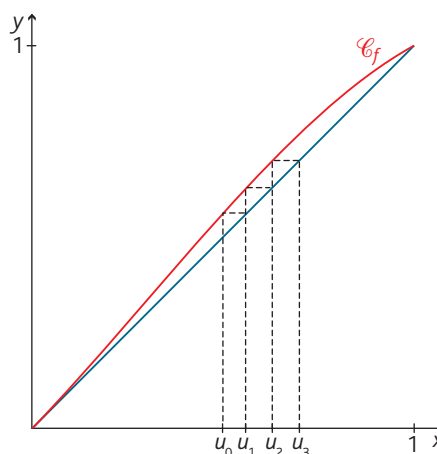
$$g(x) \geq 0 \text{ sur }]0; +\infty[.$$

$$3. g(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x - x \geq 1 \Leftrightarrow e^x - x > 0.$$

$$\text{B. 1. } f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \text{ sur }]0; 1];$$

$$f(0) = 0 ; f(1) = \frac{e - 1}{e - 1} = 1.$$



$$2. 0 \leq x \leq 1 ;$$

$$f(0) \leq f(x) \leq f(1) \text{ car } f(x) \text{ est croissante sur }]0; 1];$$

$$0 \leq f(x) \leq 1.$$

3. a.

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{e^x - 1}{e^x - x} - x = \frac{e^x - 1 - x e^x + x^2}{e^x - x} \\ &= \frac{e^x(1 - x) + (x - 1)(x + 1)}{e^x - x} \\ &= \frac{(1 - x)[e^x - (x + 1)]}{e^x - x} \\ &= \frac{(1 - x)[e^x - x - 1]}{e^x - x} = \frac{(1 - x)g(x)}{e^x - x}. \end{aligned}$$

b.

x	0	1
$1 - x$		+
$g(x)$		+
$e^x - x$		+
$(1 - x)g(x)$		+
$e^x - x$		+

La courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite D sur $]0; 1[$.

c. 1. Voir graphique.

2. Initialisation :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } f(x) - x \geq 0.$$

$$f(u_0) - u_0 \geq 0 \Leftrightarrow u_1 \geq u_0.$$

$$\text{On a donc : } \frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 1.$$

Hérédité :

Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\frac{1}{2} \leq u_p \leq u_{p+1} \leq 1 ;$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_p) \leq f(u_{p+1}) \leq f(1)$$

f est croissante sur $]0; 1[$.

$$u_{p+1} \leq u_{p+2} \leq 1$$

$$\text{et } u_1 > u_0 = \frac{1}{2},$$

$$\text{on a donc : } \frac{1}{2} \leq u_{p+1} \leq u_{p+2} \leq 1.$$

Conclusion :

La propriété est vraie au premier rang. Si la propriété est vraie au rang p , elle est vraie au rang $p + 1$.

Donc la propriété est vraie pour tout entier n .

3. La suite u_n est strictement croissante et majorée par 1, elle converge donc vers un réel $l \leq 1$.

f est continue donc $u_{n+1} = f(u_n)$ et par

continuité $l = f(l)$ qui a pour solution 1

dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

176. 1. $f(x) = xe^x - 1$ sur $[0; +\infty[$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 = -1 \end{array} \right\} \text{ par somme } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$f(x)$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ car les fonctions x et e^x sont dérivables sur $[0; +\infty[$.

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

e^x et $(1+x) \geq 0$ sur $[0; +\infty[$

donc $f'(x) \geq 0$ et $f(x)$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

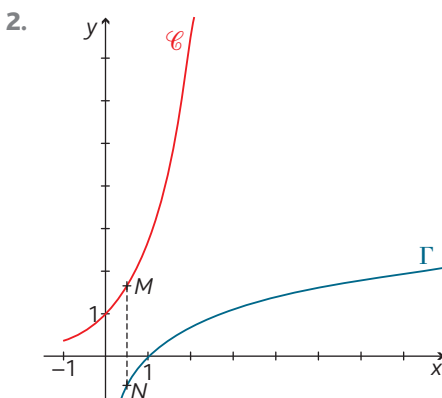
b. La fonction f est continue, dérivable et strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[0; +\infty[$ sur l'intervalle $[f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [-1; +\infty[$. Comme $0 \in [-1; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution α dans $[0; +\infty[$.

$$\alpha \approx 0,57 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

c.

x	0	α	$+\infty$
f(x)	-	0	+

car $f(x)$ est croissante sur $[0; +\infty[$.



Pour tout $x > 0$, on a $M(x; e^x)$ et $N(x; \ln x)$

donc $MN = |e^x - \ln x| = e^x - \ln x$ d'après l'énoncé.

Soit $g(x) = e^x - \ln x$ $g(x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, on a :

$$g'(x) = e^x - \frac{1}{x}.$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow xe^x - 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0.$$

x	0	α	$+\infty$
g'(x)	-	0	+
g(x)		$g(\alpha)$	

D'après la question 1., la distance MN est donc minimale lorsque $x = \alpha$ et cette longueur minimale vaut alors $e^\alpha - \ln(\alpha) \approx 2,33$ à 10^{-2} près.

D'après 1. b., on a $f(\alpha) = 0$ donc $\alpha e^\alpha - 1 = 0$ d'où $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$.

La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse α a pour coefficient directeur : e^α .

La tangente à Γ au point d'abscisse α a pour coefficient directeur : $\frac{1}{\alpha} = e^\alpha$.

Les deux tangentes ayant le même coefficient directeur, elles sont donc parallèles.

177. 1. a.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right\} \text{ par produit } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

b. $f(x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme le produit de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$$

$$2x \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}}$$

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)		$f(e^{-\frac{1}{2}})$	

2. Une équation de la tangente (Γ) à ($\mathcal{C}$) en un point de coordonnées $(x_0; x_0^2 \ln x_0)$ est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow y = x_0(2 \ln x_0 + 1)(x - x_0) + x_0^2 \ln x_0.$$

Si la tangente à ($\mathcal{C}$) en x_0 passe par $O(0; 0)$ alors :

$$\Leftrightarrow 0 = x_0(2 \ln x_0 + 1)(-x_0) + x_0^2 \ln x_0$$

$$\Leftrightarrow 0 = -x_0^2 \ln x_0 - x_0^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = -x_0^2(\ln x_0 + 1)$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ (impossible) ou } \ln x_0 + 1 = 0$$

soit $\ln x_0 = -1$ et $x_0 = e^{-1}$.

Une équation de la tangente est donc :

$$y = e^{-1}(-1)(x - e^{-1}) + e^{-2} \ln e^{-1}$$

$$= -e^{-1}x + e^{-2} - e^{-2}$$

soit $y = -\frac{1}{e}x$.

178. $f(1) = -1 + 10 = 9$ réponse b.

179. $f'(x) = -1 + 2\frac{1}{x} = \frac{-x+2}{x}$

réponse b.

180. $g'(x) = \frac{-e^x - e^x(-x+10)}{(e^x)^2}$

$g'(0) = \frac{-1 - 1(10)}{1} = -11$ réponse c.

Accompagnement personnalisé (p. 162-163)

181. a. $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

b. $S = \{-1; 1\}$.

c. $S = \emptyset$.

182. a. $S = [0; +\infty[$.

b. $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$; $S =]-\infty; 0[$.

183. a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2-x} = +\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$.

184. a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0$.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2$.

185. a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -Xe^{-X} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\left(\frac{e^x}{x}\right) = 0$.

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} Xe^X = 0$.

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} Xe^X = 0$.

186. a. $f'(x) = xe^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$.

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1; +\infty[$; $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]0; 1]$.

b. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

c.

x	0	1	$+\infty$
f(x)		- 0 +	
f'(x)	$+\infty$		$+\infty$

e

d. $f(x) - (x+1) = xe^{\frac{1}{x}} - x - 1 = x(e^{\frac{1}{x}} - 1) - 1$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X - 1}{X} = 1.$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+1) = 0.$

e. On trace (D) et $\mathcal{C}_f.$

187. a. $S = \{1\}.$

b. $S = \{1; e^x\}.$

c. $S = \{2\sqrt{2} - 1\}$ (On résout $(3-x)(x+5) = (x+1)^2$).

188. a. $S =]-\sqrt{\ln 3}; \sqrt{\ln 3}[.$

b. $(\ln x)^2 + \ln x - 2 > 0; X = \ln x.$

$x^2 + x - 2 > 0; (x+2)(x-1) > 0.$

$S =]-\infty; e^{-2}[\cup]+\infty; 0[.$

c. $x^2 - x - 2 < (3-x)^2; X = \ln x.$

$x^2 - x - 2 < x^2 - 6x + 9;$

$5x < 11; x < \frac{11}{5}.$

$S =]-\infty; -1[\cup]2; \frac{11}{5}[.$

189. a. $+\infty.$

b. 0.

190. a. $-\infty.$

b. $+\infty.$

191. a. $+\infty.$

b. 0.

192. a. $f'(x) = \frac{2(1+x) - 2x}{(1+x)^2} - \frac{1}{4x} = \frac{1-x}{(1+x)^2};$

$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1; +\infty[; f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; 1].$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$

c.

x	0	1	$+\infty$
f'(x)		+ 0 -	
f(x)	0	$1 - \ln 2$	$-\infty$

d. On le montre à l'aide du c. et du théorème de la bijection.

e. $\alpha \approx 3,92.$

193. a. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ donc $f(x) = f(x+y) - f(y).$

b. $f'(x+y) = f'(x).$

c. f' est donc constante.

d. $g'(x) = f'(x) - a = f'(x) - f'(0) = 0.$

e. $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = g(0); f(x) - ax - b = f(0) - b = 0.$

f. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b.$

Or $f(0) = f(0) + f(0)$ de $f(0) = 0$ d'où $b = 0.$

g. f linéaire $\Rightarrow f$ solution de (1) et d'après ce qui précède, la réciproque est vraie.

194. a. $f(1) = f^2(1)$ donc $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$ or $f(1) > 0$ donc $f(1) = 1.$

b. $\forall y > 0, g'(y) = xf'(xy) = xg'(xy).$

c. $\forall y > 0, xf'(xy) = f(x)f'(y).$

d. En prenant $y = 1: \forall x > 0, xf'(x) = f(x)f'(1).$

e. $h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{f'(1)}{x} = \frac{xf'(x) - f'(1)f(x)}{xf(x)} = 0.$

h est donc constante sur $]0; +\infty[.$

f. $h(1) = \ln f(1) - f'(1) \ln 1 = \ln 1 - 0$, donc $\forall x > 0, h(x) = 0.$

g. $\forall x > 0, \ln(f(x)) - f'(1) \ln x = 0; \ln(f(x)) = a \ln x, f(x) = x^a.$

h. Si $f(x) = x^a$ alors (2) est vraie. La réciproque a été faite ci-dessus.

195. a.

$\forall t \geq 0, g'(t) = f'(t)e^{-kt} + f(t)(te^{-kt}) = e^{-kt}(f'(t) - kf(t)).$

b. $\forall t \geq 0, g'(t) = 0; g$ est constante sur $[0; +\infty[.$

c. $\forall t \geq 0, g(t) = g(0) \Leftrightarrow f(t)e^{-kt} = f(0) \Leftrightarrow f(t) = ae^{kt}.$

d. $f(1) - f(0) = 55, ae^k - a = 55$ et $ae^0 = 3023$ donc $a = 3023$ et $k = \ln\left(\frac{3078}{3023}\right).$

e. $f(20) \approx 4336; f(30) \approx 5192; f(48) \approx 7183.$

Le modèle semble valable sauf à partir de 2008...

196. a. $\forall t \geq 0, f(t) = \frac{Ce^{at}}{e^{at} + k}.$

b. $\begin{cases} f(0) = \frac{C}{1+k} \\ f(10) = \frac{Ce^{10a}}{e^{10a} + k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{C}{1+k} = 3023 \\ \frac{C}{1+ke^{-10a}} = 3689 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{C}{1+k} = 3023 \\ \frac{C}{1+ke^{-10a}} = \frac{3689}{3023} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{6977}{3023} \\ 1a = -\frac{1}{10} \ln\left(\frac{19078153}{25738153}\right) \end{cases}$

e. $f(20) \approx 4409; f(30) \approx 5155; f(48) \approx 6459.$ Ce modèle semble sous évalué.

TP Info (p. 164)

À vous de jouer

1. a. $f(x) = x + (\ln x)^2$.

b. $f'(x) = 2x + \frac{2}{x} \ln x = 2 \frac{x^2 + \ln x}{x}$.

2. a. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

b. $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$; g est croissante sur $]0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

d. $\alpha \approx 0,653$.

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+
f.	$+\infty$ $\searrow$ $\nearrow$ $+\infty$ $\alpha^2 + (\ln \alpha^2)$		

g. f admet donc un minimum.

h. $f(\alpha) = \alpha^2 + (\ln \alpha)^2 = \alpha^2 + (-\alpha^2)^2 = \alpha^2 + \alpha^4 \approx 0,608$.

Sur les pas du supérieur (p. 165)

I. 1. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = \frac{5 \times 95}{16}$; $\lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(t) = \frac{5 \times 95}{16}$; $\mathcal{D}: y = \frac{5 \times 95}{16}$ est asymptote aux deux courbes.

2. $\forall t \geq 0, \alpha'(t) = -\frac{4}{125} \times \frac{5}{16} \times 33e^{\frac{-4t}{125}} < 0$; α est décroissante sur $[0; +\infty[$.

$\forall t \geq 0, \beta'(t) = +\frac{4}{125} \times \frac{5}{16} \times 63 > 0$; β est croissante sur $[0; +\infty[$.

3. $\alpha(t) = \beta(t) < 1 \Leftrightarrow \alpha > 107$.

II. 1. a. $C(10) \approx 21,14$ $C(20) \approx 33,03$. Le coût n'est pas proportionnel.

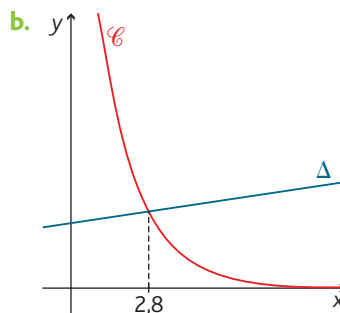
b. 56,24 %.

2. a. $f'(x) = 2 - 20 \times \frac{0,1}{0,1x + 1} = 2 - \frac{2}{0,1x + 1} = \frac{0,2}{0,1x + 1}$.

f est donc croissante sur $[0; 60]$.

b. $f(60) = 96,08$

III. 1. a. $f'(x) = -14e^{-0,7x}$; f est décroissante sur $[1; 3]$.



2. a. $\forall x \in [1; 3], h'(x) = -14e^{-0,7x} \times 0,15 < 0$. h est croissante sur $[1; 3]$.

b. $\alpha \approx 2,82$.

c. $f(\alpha) = g(\alpha) \approx 2,77$. L'offre est 1,277 unités pour 2,82 €.

4

Intégration

Programme officiel

Contenus	Capacités attendues
Intégration Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a, b]$ comme aire sous la courbe. Notation $\int_a^b f(x) dx$. Théorème : si f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$, la fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a, b]$ et a pour dérivée f. Primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Théorème : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives. Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque. Linéarité, positivité, relation de Chasles. Valeur moyenne.	• Déterminer des primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées. • Connaître et utiliser les primitives de $u'e^u$, $u'u^n$ (n entier relatif, différent de -1) et, pour u strictement positive, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, $\frac{u'}{u}$. • Calculer une intégrale. • Utiliser le calcul intégral pour déterminer une aire. • Encadrer une intégrale. • Pour une fonction monotone positive, mettre en œuvre un algorithme pour déterminer un encadrement d'une intégrale.

Exercices (p. 196)

1. à 35. Corrigés dans le manuel.

1. Calculs algébriques

36. $\int_{-2}^2 x dx = 0.$

$\int_{-2}^9 7 dx = 77.$

$\int_{-2}^2 7 dx = 28.$

$\int_{-2}^2 (x + 7) dx = \int_{-2}^2 x dx + \int_{-2}^2 7 dx$
 $= 0 + 28 = 28.$

37. $\int_2^5 f(x) dx = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}.$

38. Sur l'intervalle $[-2; 3]$;

$f(x) = -\frac{3}{2}x - 3.$

$\int_{-2}^3 (x + 7) dx = -\frac{75}{4}.$

39. $\int_{-3}^1 (x + 7) dx = -8.$

$\int_1^4 f(x) dx = 4,5.$

$\int_{-3}^4 f(x) dx = \int_{-3}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx$
 $= -8 + 4,5 = -3,5.$

40. 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
 $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}.$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx = \frac{\pi}{4}.$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x + \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}.$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}.$

$\frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}.$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$

41. 1. $\int_{-2}^4 x^2 dx = 24$ et $\int_{-2}^4 x^3 dx = 60.$

2. $I = \int_{-2}^4 (x^3 + x^2) dx$
 $= \int_{-2}^4 x^3 dx + \int_{-2}^4 x^2 dx$
 $= 60 + 24 = 84.$

$J = \int_{-2}^4 (2x^3 + 3x^2) dx$
 $= 2 \int_{-2}^4 x^3 dx - 3 \int_{-2}^4 x^2 dx$
 $= 2 \times 60 - 3 \times (24) = 120 - 72 = 48.$

$K = \int_{-2}^4 -x^3 + 2x^2 + 2 dx$

$= -\int_{-2}^4 x^3 dx + 2 \int_{-2}^4 x^2 dx + \int_{-2}^4 2 dx$
 $= -60 + 2 \times 24 + [8 + 4]$
 $= -60 + 48 + 12 = 0.$

42. 1. $\int_{-3}^1 (-x + 1) dx = 8.$

$\int_1^2 (x - 1) dx = -\frac{1}{2}.$

2. $|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{sur } [1; +\infty[\\ -x + 1 & \text{sur }]-\infty; 1] \end{cases}.$

$\int_{-3}^2 |x - 1| dx$
 $= \int_{-3}^1 -1 + x dx + \int_1^2 x - 1 dx$
 $= 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}.$

43. 1. $1 \leq f(x) + g(x) \leq 7$ sur $[-5; 2].$

2. $-2 \leq 2f(x) \leq 4;$

$-15 \leq -3g(x) \leq -6$

d'où

$-17 \leq 2f(x) - 3g(x) \leq -2$ sur $[-5; 2].$

3. $1 \leq f(x) + g(x) \leq 7$

$\Leftrightarrow \int_{-5}^2 1 dx \leq \int_{-5}^2 f(x) + g(x) dx \leq \int_{-5}^2 7 dx$

$\Leftrightarrow 1(2 - (-5)) \leq \int_{-5}^2 f(x) + g(x) dx \leq 7(2 - (-5))$

$\Leftrightarrow 7 \leq \int_{-5}^2 f(x) + g(x) dx \leq 49.$

de même

$-17 \times 7 \leq \int_{-5}^2 2f(x) - 3g(x) dx \leq -2 \times 7$

$\Leftrightarrow -119 \leq \int_{-5}^2 2f(x) - 3g(x) dx \leq -14.$

44. $\int_0^{\pi} x \cos(x) dx = -2.$

$\int_1^2 \ln(x) dx = 2 \ln 2 - 1.$

$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2.$

45 $4 = \frac{1}{3 - (-1)} \int_{-1}^3 f(x) dx$

$\Leftrightarrow 4 = \frac{1}{4} \int_{-1}^3 f(x) dx$

$\Leftrightarrow \int_{-1}^3 f(x) dx = 16.$

2. Recherche de primitives

46. à 54. Corrigés dans le manuel.

55 1. $F(x) = \frac{1}{5}(x^2 + 3)^5.$

2. $F(x) = \frac{1}{4}(x^3 + 2x + 3)^4.$

3. $F(x) = \frac{1}{6}(x^2 + x + 1)^6.$

56 1. $f(x) = \sin(x) \cos^4(x) ; I = \mathbb{R}.$

$f(x) = -\frac{1}{5} \times 5 \times (-\sin(x)) \times (\cos(x))^4.$

$F(x) = -\frac{1}{5}(\cos(x))^5.$

2. $f(x) = (x + 1)(x^2 + 2x - 5)^4 ; I = \mathbb{R}.$

$f(x) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}(2x + 2) \times 5 \times (x^2 + 2x - 5)^4$

$F(x) = \frac{1}{10}(x^2 + 2x - 5)^5.$

3. $f(x) = (2 - x)(x^2 - 4x + 2)^5 ; I = \mathbb{R}.$

$f(x) = \frac{1}{6} \times -\frac{1}{2}(2x - 4) \times 6 \times (x^2 - 4x + 2)^5$

$F(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)^6.$

57 1. $f(x) = (3x - 1)(3x^2 - 2x + 3)^3 ; I = \mathbb{R}.$

$f(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}(6x - 2) \times 4 \times (3x^2 - 2x + 3)^3.$

$F(x) = \frac{1}{8}(3x^2 - 2x + 3)^4.$

2. $f(x) = (x^3 - 3x + 4)^5(2x^2 - 2) ; I = \mathbb{R}.$

$f(x) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3}(3x^2 - 3) \times 6 \times (x^3 - 3x + 4)^5.$

$F(x) = \frac{1}{9}(x^3 - 3x + 4)^6.$

3. $f(x) = 4(4x + 3)^3 ; I = \mathbb{R}.$

$f(x) = \frac{1}{4} \times 4 \times 4(4x + 3)^3.$

$F(x) = \frac{1}{4}(4x + 3)^4.$

4. $f(x) = (-2x + 1)^4 ; I = \mathbb{R}.$

$f(x) = \frac{1}{5} \times -\frac{1}{2} \times -2 \times 5 \times (-2x + 1)^4.$

$F(x) = -\frac{1}{10}(-2x + 1)^5.$

58 1. $f(x) = \frac{1}{x} \times \ln^3(x) ; I =]0; +\infty[.$

$f(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{x} \times 4 \times (\ln x)^3.$

$F(x) = \frac{1}{4}(\ln x)^4.$

2. $f(x) = \cos(x) \sin^3(x) ; I = \mathbb{R}.$

$f(x) = \frac{1}{4} \times \cos(x) \times 4 \times \sin^3(x).$

$F(x) = \frac{1}{4}(\sin(x))^4.$

3. $f(x) = \frac{x}{1 + x^2} \ln(1 + x^2) ; I = \mathbb{R}.$

$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2x}{1 + x^2} \times 2 \ln(1 + x^2).$

$F(x) = \frac{1}{4}(\ln(1 + x^2))^2.$

59 1. $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} ;$

$f'(x) = \frac{\cos(x) \cos(x) - \sin(x) \times (-\sin(x))}{\cos^2 x}$

$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}.$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \tan^2(x). \\ g(x) &= (1 + \tan^2(x)) \tan^4(x). \\ &= \frac{1}{5} \times 5 \times (1 + \tan^2(x)) \times \tan^4(x). \end{aligned}$$

$$G(x) = \frac{1}{5} \tan^5(x).$$

$$3. f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)};$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

$$\begin{aligned} 4. h(x) &= \frac{\tan^3(x)}{\cos^2(x)}; \\ &= \frac{1}{4} \times 4 \times \frac{1}{\cos^2(x)} \times (\tan(x))^3. \end{aligned}$$

$$H(x) = \frac{1}{4} \times (\tan(x))^4.$$

$$\begin{aligned} 60. 1. f(x) &= \tan^4(x) + \tan^6(x), I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\\ &= \tan^4(x)(1 + \tan^2(x)) \\ &= \frac{1}{5} \times 5 \times (1 + \tan^2(x)) \times (\tan(x))^4. \end{aligned}$$

$$F(x) = \frac{1}{5} \tan^5(x).$$

$$\begin{aligned} 2. f(x) &= \tan 3x + \tan^3 3x, I = \left] -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \right[\\ &= (1 + \tan^2(3x)) \times \tan(3x) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 3 \times (1 + \tan^2(3x)) \times 2 \times \tan(3x). \\ F(x) &= \frac{1}{6} (\tan(3x))^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 61. 1. \sin^3 x &= \sin(x)(\sin^2(x)) \\ &= \sin(x)(1 + \cos^2(x)) \\ &= \sin(x) - \sin(x)\cos^2(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. f(x) &= \sin^3 x = \sin(x) - \sin(x)\cos^2(x) \\ &= \sin(x) + (-\sin(x)) \times \frac{1}{3} \times 3 \times \cos^2(x). \\ F(x) &= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3(x). \end{aligned}$$

$$62. 1. F(x) = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{(x^2 + 5x)^3}.$$

$$2. F(x) = -\frac{1}{(x^3 + 2x)}.$$

$$3. f(x) = \frac{x}{(x^3 + 1)^3} = \frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2 + 1)^3}.$$

$$F(x) = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$63. 1. f(x) = \frac{7}{(x-1)^4} = 7 \times \frac{1}{(x-1)^4}.$$

$$F(x) = -\frac{7}{3} \times \frac{1}{(x-1)^3}.$$

$$2. f(x) = \frac{9}{(4x+1)^3} = \frac{9}{4} \times \frac{4}{(4x+1)^3}.$$

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{1}{2} \times \frac{9}{4} \times \frac{1}{(4x+1)^2} \\ &= -\frac{9}{8} \times \frac{1}{(4x+1)^2}. \end{aligned}$$

$$3. f(x) = \frac{2}{3(2x+3)^2} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{(2x+3)^2}.$$

$$F(x) = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{(2x+3)}.$$

$$\begin{aligned} 64. 1. f(x) &= \frac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3} \\ &= -\frac{1}{3} \times \frac{3x^2-3}{(x^3-3x+1)^3} \\ &= -\frac{1}{2} \times -\frac{1}{3} \times \frac{1}{(x^3-3x+1)^2} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{(x^3-3x+1)^2}. \end{aligned}$$

$$2. F(x) = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{(x^2+2x)^3}.$$

$$\begin{aligned} 3. f(x) &= \frac{-\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}}{(x^2-4x+9)^4} \\ &= -\frac{1}{12} \times \frac{2x-4}{(x^2-4x+9)^4}. \\ F(x) &= -\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{12}\right) \times \frac{1}{(x^2-4x+9)^3} \\ &= \frac{1}{36} \times \frac{1}{(x^2-4x+9)^3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 65. 1. f(x) &= \frac{x-1}{(3x^2-6x+11)^7} \\ &= \frac{1}{6} \frac{6x-6}{(3x^2-6x+11)^7}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{(3x^2-6x+11)^6} \\ &= -\frac{1}{36} \times \frac{1}{(3x^2-6x+11)^6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. f(x) &= \frac{6-4x}{(x^2-3x-4)^5} \\ &= 2 \frac{2x-3}{(x^2-3x-4)^5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{1}{4} \times (-2) \times \frac{1}{(x^2-3x-4)^4} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{(x^2-3x-4)^4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 66. 1. f(x) &= \frac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3} \\ &= -\frac{1}{3} \frac{3x^2-3}{(x^3-3x+1)^3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{(x^3-3x+1)^2} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{(x^3-3x+1)^2}. \end{aligned}$$

$$2. F(x) = \frac{5}{3} \times \frac{1}{(x^3+2x)^3}.$$

$$3. F(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sin^2(x)}.$$

$$\begin{aligned} 67. 1. f(x) &= \frac{\tan x}{(1 + \tan^2 x)^2} \\ &= \sin x \times \cos^3(x). \end{aligned}$$

$$F(x) = -\frac{1}{4} \cos^4(x).$$

$$2. f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3(x)} = -\frac{-\sin x}{\cos^3(x)}.$$

$$F(x) = +\frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

$$\begin{aligned} 3. f(x) &= \frac{\cos(x)}{\sin^3(x)(1 - \cos^2 x)^6} \\ &= \frac{\cos(x)}{\sin^3(x) \times (\sin^2 x)^6} = \frac{\cos(x)}{\sin^{15}(x)}. \\ F(x) &= -\frac{1}{14} \times \frac{1}{\sin^{14}(x)}. \end{aligned}$$

$$68. 1. F(x) = 2 \times \sqrt{3x+1}.$$

$$2. f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-5x}} = -\frac{1}{5} \times \frac{-5}{\sqrt{4-5x}}.$$

$$F(x) = -\frac{2}{5} \sqrt{4-5x}.$$

$$\begin{aligned} 3. f(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}. \\ F(x) &= \sqrt{x^2+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 69. 1. f(x) &= \frac{5}{\sqrt{2x+1}} = \frac{5}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2x+1}}. \\ F(x) &= 5 \times \sqrt{2x+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. f(x) &= \frac{-2}{\sqrt{x-6}} = -2 \times \frac{1}{\sqrt{x-6}}. \\ F(x) &= -4\sqrt{x-6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. f(x) &= \frac{x-1}{\sqrt{x(x-2)}} = \frac{1}{2} \times \frac{2x-2}{\sqrt{x(x-2)}}. \\ F(x) &= \sqrt{x(x-2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 70. 1. f(x) &= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}. \end{aligned}$$

$$F(x) = \sqrt{x^2+2x+5}.$$

$$\begin{aligned} 2. f(x) &= \frac{5x^2+5x+5}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+1}} \\ &= \frac{5}{6} \frac{6x^2+6x+6}{\sqrt{2x^3+3x^2+6x+1}}. \\ F(x) &= \frac{5}{3} \sqrt{2x^3+3x^2+6x+1}. \end{aligned}$$

$$71. 1. F(x) = \frac{2}{3} \sqrt{2x^3-3\cos x+3}.$$

$$2. F(x) = \sqrt{1+\sin^2 x}.$$

$$72. 1. F(x) = \frac{1}{2} \sin(2x).$$

$$2. F(x) = -e^{-x}.$$

$$\begin{aligned} 3. f(x) &= x^3(x^4 - 2)^3 \\ &= \frac{1}{4} \times 4 \times \frac{1}{4} \times 4x^3(x^4 - 2)^3. \\ F(x) &= \frac{1}{16}(x^4 - 2)^4. \end{aligned}$$

73. 1. $F(x) = \frac{4}{3}e^{3x}$.

2. $F(x) = -\frac{1}{5}\cos(5x)$.

3. $f(x) = \frac{4}{(2x+3)^3} = 2 \times \frac{2}{(2x+3)^3}$.

$$F(x) = \frac{1}{(2x+3)^2}.$$

4. $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)} = \frac{1}{\ln(x)}$.

$$F(x) = \ln(\ln(x)).$$

74. 1. $F(x) = \ln(e^x + 2)$.

2. $f(x) = \frac{x}{x^2+3} = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+3}$.

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+3).$$

3. $f(x) = \frac{1}{x \ln^3(x)} = \frac{1}{\ln^3(x)}$.

$$F(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\ln^2(x)}.$$

4. $f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}+2x} = \frac{1}{2} \frac{e^{2x}+2}{e^{2x}+2x}$.

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(e^{2x}+2x).$$

75. 1. $F(x) = -e^x$.

2. $F(x) = 4x - \frac{3}{2} \ln(2x+6)$.

3. $F(x) = -\frac{1}{2}e^{3-2x}$.

4. $F(x) = e^{x^2}$.

76. 1. $f(x) = \frac{\cos(3x)}{\sin^4(3x)} = \frac{1}{3} \frac{3\cos(3x)}{\sin^4(3x)}$.

$$F(x) = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sin^3(3x)} = -\frac{1}{9} \times \frac{1}{\sin^3(3x)}.$$

2. $f(x) = \frac{1}{2} \times 2e^{2x} \times \frac{1}{6} \times 6 \times (1+e^{2x})^5$.

$$F(x) = \frac{1}{12} \times (1+e^{2x})^6.$$

3. $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2-2x+5}$.

4. $F(x) = \sin(3x)$.

77. 1. $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - x + K$;

$$F(-1) = \frac{3}{2} + 1 + K \Leftrightarrow 3 = \frac{5}{2} + K$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{1}{2}.$$

$$\text{D'où } F(x) = \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}.$$

2. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} + K$;

$$-1 = \frac{1}{2} + 1 + K \Leftrightarrow K = -1 - \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow K = -\frac{5}{2}.$$

$$\text{D'où } F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} - \frac{5}{2}.$$

3. $F(x) = \ln x + 2x + K$;

$$0 = \ln e + 2e + K \Leftrightarrow K = -1 - 2e$$

$$\text{D'où } F(x) = \ln(x) + 2x - 1 - 2e.$$

78. 1. $F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x) + K$;

$$1 = \frac{1}{3} \times 0 + K \Leftrightarrow K = 1.$$

$$\text{D'où } F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x) + 1.$$

2. $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+5) + K$;

$$0 = \frac{1}{2}\ln 6 + K \Leftrightarrow K = -\frac{1}{2}\ln 6.$$

$$\text{D'où } F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+5) - \frac{1}{2}\ln 6.$$

3. $F(x) = \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{1}{2}x^2 + K$;

$$-2 = \frac{1}{4} + K \Leftrightarrow K = -\frac{9}{4}.$$

$$\text{D'où } F(x) = \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{4}.$$

79. 1. $F(x) = e^{\sin x} + K$;

$$1 = e^{\sin \frac{\pi}{2}} + K \Leftrightarrow K = 0.$$

$$\text{D'où } F(x) = e^{\sin x}.$$

2. $f(x) = \frac{3}{2} \frac{2}{(2x+1)^3}$;

$$F(x) = -\frac{3}{4} \frac{1}{(2x+1)^2} + K.$$

$$0 = -\frac{3}{4} + K \Leftrightarrow K = \frac{3}{4}.$$

$$\text{D'où } F(x) = -\frac{3}{4} \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{3}{4}.$$

3. $F(x) = -\ln(\cos(x)) + K$;

$$1 = -\ln(1) + K \Leftrightarrow K = 1.$$

$$\text{D'où } F(x) = -\ln(\cos(x)) + 1.$$

80. 1. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} - 2\sqrt{x} + K$;

$$2 = \frac{1}{2} + 1 - 2 + K \Leftrightarrow K = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{D'où } F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} - 2\sqrt{x} + \frac{3}{2}.$$

2. $f(x) = \frac{1}{(2x+5)^4} = \frac{1}{2} \frac{2}{(2x+5)^4}$.

$$F(x) = -\frac{1}{6} \frac{1}{(2x+5)^3} + K;$$

$$0 = \frac{1}{6} + K \Leftrightarrow K = -\frac{1}{6}.$$

$$\text{D'où } F(x) = -\frac{1}{6} \frac{1}{(2x+5)^3} - \frac{1}{6}.$$

3. $f(x) = \frac{x^4+3x^2-2}{x^2} = x^2 + 3 - \frac{2}{x^2}$.

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x + \frac{2}{x} + K;$$

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{8}{3} + 6 + 1 + K \Leftrightarrow K = -1 - \frac{29}{3} \\ &\Leftrightarrow K = -\frac{32}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x + \frac{2}{x} - \frac{32}{3}.$$

4. $f(x) = \sin(x)\cos^3(x)$;

$$= \frac{-1}{4} \times 4 \times (-\sin(x)) \times \cos^3(x).$$

$$F(x) = \frac{-1}{4}\cos^4(x) + K;$$

$$0 = \frac{-1}{4} \times 1 + K \Leftrightarrow K = \frac{1}{4}.$$

$$\text{D'où } F(x) = \frac{-1}{4}\cos^4(x) + \frac{1}{4}.$$

3. Fractions rationnelles

81. et 82. Corrigés dans le manuel.

83. 1. $f(x) = a + \frac{b}{x-3} = \frac{ax-3a+b}{x-3}$.

Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} a = 5 \\ -3a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ -15 + b = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 13 \end{cases}.$$

2. $f(x) = 5 + \frac{13}{x-3}$;

$$F(x) = 5x + 13\ln(x-3) + K.$$

84. 1. $ax + b + \frac{c}{x+2} = \frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2} = \frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2} = \frac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2}.$

Par identification des coefficients :

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 5 \\ 2b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -7 \end{cases}.$$

2. $f(x) = x + 3 - \frac{7}{x+2}$;

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 7\ln(x+2) + K.$$

$$F(1) = 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2} + 3 - 7\ln 3 + K$$

$$K = \frac{-7}{2} + 7\ln 3 = 7\left(\frac{-1}{2} + \ln 3\right).$$

D'où :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 7\ln(x+2) + 7\left(\frac{-1}{2} + \ln 3\right).$$

85. 1. $a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} = \frac{a(x-1)^2 + b(x-1) + c}{(x-1)^2} = \frac{a(x^2-2x+1) + bx - b + c}{(x-1)^2} = \frac{ax^2 - 2ax + a + bx - b + c}{(x-1)^2}$

$$= \frac{ax^2 + (-2a + b)x + a - b + c}{(x-1)^2}.$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ -2a + b = -3 \\ a - b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases}.$$

$$2. f(x) = 2 + \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}.$$

$$F(x) = 2x + \ln(x-1) - \frac{3}{x-1} + K.$$

$$F(2) = 3 \Leftrightarrow 3 = 4 + 0 - 3 + K \\ \Leftrightarrow K = 2.$$

$$\text{D'où } F(x) = 2x + \ln(x-1) - \frac{3}{x-1} + 2.$$

$$86. 1. \frac{a}{(x+3)^2} + \frac{b}{(x+3)^3} = \frac{ax + 3a + b}{(x+3)^3}.$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ 3a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}.$$

$$2. f(x) = \frac{2}{(x+3)^2} - \frac{3}{(x+3)^3}.$$

$$F(x) = \frac{-2}{(x+3)} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{(x+3)^2} + K.$$

$$F(-4) = 0 \Leftrightarrow 0 = 2 + \frac{3}{2} \times 1 + K \\ \Leftrightarrow K = -\frac{7}{2}.$$

$$\text{D'où } F(x) = \frac{-2}{x+3} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{(x+3)^2} - \frac{7}{2}.$$

$$87. 1. \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} - \frac{c}{(x+3)^2} = \frac{a(x+3)^2 + b(x-1)(x+3) - c(x-1)}{(x-1)(x+3)^2} \\ = \frac{a(x^2 + 6x + 9) + b(x^2 + 2x - 13) - cx + c}{(x-1)(x+3)^2} \\ = \frac{ax^2 + 6ax + 9a + bx^2 + 2bx - 3b - cx + c}{(x-1)(x+3)^2} \\ = \frac{(a+b)x^2 + (6a+2b-c)x + 9a-3b+c}{(x-1)(x+3)^2}.$$

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ 6a + 2b - c = 21 \\ 9a - 3b + c = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ 6a + 2b - c = 21 \\ 15a - b = 43 \end{cases} \\ \begin{cases} a + b = 5 \\ 16a = 48 \\ 6a + 2b - c = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}.$$

$$2. f(x) = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+3} - \frac{1}{(x+3)^2}.$$

$$F(x) = 3 \ln(x-1) + 2 \ln(x+3) + \frac{1}{(x+3)} + K.$$

$$F(2) = 0 \Leftrightarrow 0 = 2 \ln 5 + \frac{1}{25} + K \\ \Leftrightarrow K = -2 \ln 5 - \frac{1}{25}.$$

D'où :

$$F(x) = 3 \ln(x-1) + 2 \ln(x+3) + \frac{1}{x+3} - 2 \ln 5 - \frac{1}{25}.$$

$$88. 1. a + \frac{b}{3x-1} + \frac{c}{2x+1} + \frac{d}{(2x+1)^2} = \frac{a(3x-1)(2x+1)^2 + b(2x+1)^2 + c(3x-1)(2x+1)}{(3x-1)(2x+1)^2} \\ = \frac{a(3x-1)(4x^2+4x+1) + b(4x^2+4x+1) + c(6x^2+x-1) + 3dx-d}{(3x-1)(2x+1)^2} \\ = \frac{a(12x^3+8x^2-x-1) + b(4x^2+4x+1) + c(6x^2+x-1) + 3dx-d}{(3x-1)(2x+1)^2} \\ = \frac{12ax^3 + 8ax^2 - ax - a + 4bx^2 + 4bx + b + 6cx^2 + cx - c + 3dx - d}{(3x-1)(2x+1)^2} \\ = \frac{12ax^3 + (8a+4b+6c)x^2 + (-a+4b+c+3d)x + (-a+b-c-d)}{(3x-1)(2x+1)^2}.$$

$$\begin{cases} 12a = 24 \\ 8a + 4b + 6c = 18 \\ -a + 4b + c + 3d = 10 \\ -a + b - c - d = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 2b + 3c = 1 \\ 4b + c + 3d = 12 \\ b - c - d = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 2b + 3c = 1 \\ 5b + 2d = 5 \\ 5c + 7d = 40 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 10b + 15c = 5 \\ 10b + 4d = 10 \\ 5c + 7d = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 15c - 4d = -5 \\ 5c + 7d = 40 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 15c - 4d = -5 \\ 15c + 21d = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ -25d = -125 \\ 15c - 4d = -5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ d = 5 \\ c = 1 \\ b = -1 \end{cases}.$$

$$2. f(x) = 2 + \frac{-1}{(3x-1)} + \frac{1}{(2x+1)} + \frac{5}{(2x+1)^2}.$$

$$F(2) = 2x - \frac{1}{3} \ln(3x-1) + \frac{1}{2} \ln(2x-1) - \frac{5}{2} \frac{1}{(2x+1)} + K.$$

$$89. 1. G'(x) = (2ax+b)e^{2x} + 2(ax^2+bx+c)e^{2x}.$$

$$2. G'(x) = (2ax^2 + (2a+2b)x + b+2c)e^{2x}.$$

$$\begin{cases} a = 25 \\ 2a + 2b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}.$$

$G(x) = (2 - x^2 - 2x + 1)e^{2x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

4. Calcul d'intégrales

90. à 92. Corrigés dans le manuel.

$$93. 1. \int_0^\pi \cos 2t - \sin t \, dt = \left[\frac{1}{2} \sin 2t + \cos t \right]_0^\pi \\ = (-1) - 1 = -2.$$

$$2. \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin 3u - 4 \cos u \, du = \left[-\frac{1}{3} \cos 3u - 4 \sin u \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 \\ = \left(-\frac{1}{3} \right) - 4 = -\frac{13}{3}.$$

$$3. \int_0^\pi \cos(3x) \, dx = \left[\frac{1}{3} \sin(3x) \right]_0^\pi = 0$$

$$4. \int_{-1}^0 e^{-2x+1} \, dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-2x+1} \right]_{-1}^0 \\ = \left(-\frac{1}{2} e \right) - \left(-\frac{1}{2} e^3 \right) \\ = \frac{1}{2} (-e + e^3) \\ = \frac{1}{2} e(-1 + e^2).$$

$$94. 1. \int_0^1 \frac{5}{2x-3} \, dx = \left[\frac{5}{2} \ln(-2x+3) \right]_0^1 \\ = 0 - \frac{5}{2} \ln 3 = -\frac{5}{2} \ln 3.$$

car $2x-3 < 0$ sur $[0; 1]$.

$$2. \int_0^1 \frac{2x-3}{5} \, dx = \left[\frac{1}{5} x^2 - \frac{3}{5} x \right]_0^1 = \left(-\frac{2}{5} \right).$$

$$3. \int_0^1 e^{3x} \, dx = \left[\frac{1}{3} e^{3x} \right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} e^3 \right) - \frac{1}{3} \\ = \frac{1}{3} (e^3 - 1).$$

$$4. \int_0^1 \sqrt{e^x} \, dx = \int_0^1 e^{\frac{1}{2}x} \, dx \\ = \left[2e^{\frac{1}{2}x} \right]_0^1 = \left(2e^{\frac{1}{2}} \right) - 2 \\ = 2 \left(e^{\frac{1}{2}} - 1 \right).$$

$$95. 1. \int_1^1 (e^x + e^{-x}) \, dx = [e^x + e^{-x}]_1^1 \\ = (e - e^{-1}) - (e^{-1} + e^1) \\ = e - e^{-1} - e^{-1} + e^1 = 2e - 2e^{-1} \\ = 2e - \frac{2}{e}.$$

$$2. \int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^2} \, dx = \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{(2x+1)} \right]_0^1 \\ = -\frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{3}.$$

$$3. \int_0^1 (2x+1)^2 \, dx = \left[\frac{1}{6} (2x+1)^3 \right]_0^1 \\ = \left(\frac{9}{6} \right) - \frac{1}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}.$$

$$4. \int_1^2 \frac{1}{x} \times (\ln(x))^3 \, dx = \left[\frac{1}{4} (\ln(x))^4 \right]_1^2 \\ = \left[\frac{1}{4} (\ln 2)^4 \right].$$

$$96. 1. \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2t-1) \, dt = \left[t^2 - t \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} \\ = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) - (1 + 1) \\ = -\frac{1}{4} - 2 = -\frac{9}{4}.$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^3 (-2t+1) \, dt = \left[-t^2 + t \right]_{\frac{1}{2}}^3 \\ = (-9 + 3) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= -6 - \frac{1}{4} = -\frac{25}{4}.$$

$$2. |2t - 1| = \begin{cases} -2t + 1 & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ 2t - 1 & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 |2t - 1| dt &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} -2t + 1 dt + \int_{\frac{1}{2}}^3 2t - 1 dt \\ &= -\int_{-1}^{\frac{1}{2}} 2t - 1 dt - \int_{\frac{1}{2}}^3 -2t + 1 dt \\ &= +\frac{9}{4} + \frac{25}{4} = \frac{34}{4} = \frac{17}{2}. \end{aligned}$$

$$97. |t + 1| = \begin{cases} -t - 1 & \text{si } t \leq -1 \\ t + 1 & \text{si } t \geq -1 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 |t + 1| dt &= \int_{-2}^{-1} -t - 1 dt + \int_{-1}^1 t + 1 dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}t^2 - t \right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{1}{2}t^2 + t \right]_{-1}^1 \\ &= \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) - (-2 + 2) + \left(\frac{1}{2} + 1 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} - 0 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

$$98. 1. |2t + 5| = \begin{cases} -2t - 5 & \text{si } t \leq -\frac{5}{2} \\ 2t + 5 & \text{si } t \geq -\frac{5}{2} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 |2t + 5| dt &= \int_{-1}^3 2t + 5 dt \\ &= [t^2 + 5t]_{-1}^3 \\ &= (9 + 15) - (1 - 5) \\ &= 24 + 4 = 28. \end{aligned}$$

$$2. |x - 4| = \begin{cases} -x + 4 & \text{si } x \leq 4 \\ x - 4 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 |x - 4| dx &= \int_{-1}^3 -x + 4 dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 4x \right]_{-1}^3 \\ &= \left(-\frac{9}{2} + 12 \right) - \left(-\frac{1}{2} - 4 \right) \\ &= \frac{15}{2} + \frac{9}{2} = 12. \end{aligned}$$

$$3. |4x + 1| = \begin{cases} -4x - 1 & \text{si } x \leq -\frac{1}{4} \\ 4x + 1 & \text{si } x \geq -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \int_{-4}^3 |4x + 1| dx &= \int_{-4}^{-\frac{1}{4}} -4x - 1 dx + \int_{-\frac{1}{4}}^3 4x + 1 dx \\ &= \left[-2x^2 - x \right]_{-4}^{-\frac{1}{4}} + \left[2x^2 + x \right]_{-\frac{1}{4}}^3 \\ &= \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \right) - (-32 + 4) + (18 + 3) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8} + 28 + 21 + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} + 49 = \frac{197}{4}.$$

99. 1.

$$\Delta = 16 - 4 \times 1 \times 3 = 4 \begin{cases} x_1 = \frac{4+2}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}.$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		+	-	+

$$\begin{aligned} \int_1^5 |x^2 - 4x + 3| dx &= \int_1^3 -x^2 + 4x - 3 dx + \int_3^5 x^2 - 4x + 3 dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_1^3 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_3^5 \\ &= (-9 + 18 - 9) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3 \right) \\ &\quad + \left(\frac{125}{3} - 50 + 15 \right) - (9 - 18 + 9) \\ &= \frac{1}{3} + 1 + \frac{125}{3} - 35 = \frac{126}{3} - 34 \\ &= 42 - 34 = 8. \end{aligned}$$

100. 1.

$$\Delta = 4 - 4 \times (-1) \times (3) = 16 \begin{cases} x_1 = \frac{-2+24}{-2} = -11 \\ x_2 = \frac{-2-24}{-2} = 11 \end{cases}.$$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$-x^2 + 2x + 3$		-	+	-

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 |-x^2 + 2x + 3| dx &= \int_{-2}^{-1} x^2 - 2x - 3 dx + \int_{-1}^3 -x^2 + 2x + 3 dx \\ &\quad + \int_3^4 x^2 - 2x - 3 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x \right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right]_{-1}^3 \\ &\quad + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x \right]_3^4 \\ &= \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3 \right) - \left(-\frac{8}{3} - 4 + 6 \right) + (-9 + 9 + 9) \\ &\quad - \left(+\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) + \left(\frac{64}{3} - 16 - 12 \right) - (9 - 9 - 9) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - \frac{8}{3} + \frac{8}{3} + \frac{64}{3} - 28 + 9 \\ &= 2 - 8 + \frac{64}{3} = \frac{46}{3}. \end{aligned}$$

$$101. \int_0^\pi |\sin(x)| + |\cos(x)| dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\pi \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi -\cos x dx \\ &= [-\cos x]_0^\pi + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [-\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\ &= (1 + 1) + 1 + 1 = 4. \end{aligned}$$

$$102. \int_1^3 |x - 1| + |x - 2| dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_1^2 x - 1 dx + \int_2^3 -x + 2 dx + \int_3^4 x - 2 dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^2 + \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_2^3 + \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_3^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{9}{2} - 3 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) + (-2 + 4) \\ &\quad - \left(-\frac{1}{2} + 2 \right) + \left(\frac{9}{2} - 6 \right) - (2 - 4) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + 2 = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 103. 1. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^3} dx &= \left[-\frac{1}{2} \times \frac{1}{(1 + \sin x)^2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(-\frac{1}{8} \right) + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) - 1 dx \\ &= [\tan x - x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) - \left(-1 + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+5)^3}} &= \left[\frac{-2}{\sqrt{(x+5)^3}} \right]_0^1 \\ &= -\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ &= \frac{-5\sqrt{6} + 6\sqrt{5}}{15}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos x} dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \\ &= \left[-\frac{1}{\cos x} \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{(2 + 3 \sin(2x))^3} dx &= \left[-\frac{1}{12} \frac{1}{(2 + 3 \sin(2x))^2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\frac{1}{300} + \frac{1}{48} = \frac{252}{14400} \\ &= \frac{28}{1600} = \frac{14}{800} = \frac{7}{400}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 104. \text{ Si } k \leq -3 ; l = 6 - 6k \\ \text{ Si } -3 \leq k \leq 3 ; l = k^2 + 15 \\ \text{ Si } k \geq 3 ; l = 6 + 6k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 105. I &= \int_0^{\sqrt{\pi}} (4x - 1) \sin(2x^2 - x) dx \\ &= [-\cos(2x^2 - x)]_0^{\sqrt{\pi}} \\ &= (-\cos(2\pi - \sqrt{\pi})) + 1 \\ &= 1 - \cos(2\pi - \sqrt{\pi}). \end{aligned}$$

$$J = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x - 2} dx$$

$$= \left[+ \ln(-\sin x + 2) \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \ln 1 - \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \right)$$

$$= -\ln \left(\frac{\sqrt{2} + 4}{2} \right).$$

$$K = \int_0^{\pi} \cos(3x) \sin^4(3x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{5} \sin^5(3x) \right]_0^{\pi} = 0 - 0 = 0.$$

106. $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x + \cos(2x)}{(x^2 + \sin(2x))^3} dx$

$$= \left[-\frac{1}{4} \frac{1}{(x^2 + \sin 2x)^2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{4\pi^4} - \left(-\frac{14}{\pi^4} \right)$$

$$= \frac{-1 + 16}{4\pi^4} = \frac{15}{4\pi^4}.$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x \sin x dx = \left[-\frac{1}{9} \cos^9 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (0) - \left(-\frac{1}{9} \right) = \frac{1}{9}.$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) (1 - \cos(2x))^5 dx$$

$$= \left[\frac{1}{12} (1 - \cos(2x))^{26} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{17}{3} \right) - (0) = \frac{17}{93}.$$

107. $I = \int_0^1 (x-1)(x^2-2x+8)^5 dx$

$$= \left[\frac{1}{8} (x^2-2x+8)^4 \right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{8} (7)^4 \right) - \left(\frac{1}{8} \times 8^4 \right) = -\frac{1695}{8}.$$

$$J = \int_1^2 \frac{x}{3x^2-2} dx = \left[+\frac{1}{6} \ln(3x^2-2) \right]_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{6} \ln 10 \right) - \left(\frac{1}{6} \ln 1 \right) = \frac{1}{6} \ln 10.$$

$$K = \int_3^4 \frac{6x-3}{(x^2-x)^3} dx = \left[-\frac{3}{2} \times \frac{1}{(x^2-x)^2} \right]_3^4$$

$$= -\frac{3}{288} + \frac{3}{72} = \frac{9}{288} = \frac{1}{32}.$$

108. $I = \int_{-2}^3 |x+4| - 2|x+1| dx$

$$= \int_{-1}^{-1} x+4-2(-x-1) dx + \int_{-1}^{-3} x+4-2x-2 dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} 3x+6 dx + \int_{-1}^{-3} -x+2 dx$$

$$= \left[\frac{3}{2} x^2 + 6x \right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{1}{2} x^2 + 2x \right]_{-1}^{-3}$$

$$= \left(\frac{3}{2} - 6 \right) - (6 - 12) + \left(-\frac{9}{2} + 6 \right) - \left(-\frac{1}{2} - 2 \right)$$

$$= \frac{3}{2} - 6 - 6 + 12 - \frac{9}{2} + 6 + \frac{1}{2} + 2$$

$$= -\frac{5}{2} + 8 = \frac{11}{2}.$$

$$J = \int_0^2 \frac{2}{x-5} - \frac{3}{2x+1} + \frac{1}{(x-3)^2} dx$$

$$= \left[2 \ln(-x+5) - \frac{3}{2} \ln(2x+1) - \frac{1}{(x-3)} \right]_0^2$$

$$= \left(2 \ln 3 - \frac{3}{2} \ln 5 + 1 \right) - \left(2 \ln 5 - \frac{3}{2} \ln 1 + \frac{1}{3} \right)$$

$$= 2 \ln 3 - \frac{7}{2} \ln 5 + \frac{2}{3}.$$

$$K = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} dx$$

$$= \left[\ln(-x) + \frac{2}{x} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right]_{-2}^{-1}$$

$$= \left(\ln(1) - 2 - \frac{1}{2} \right) - \left(\ln 2 - 1 - \frac{1}{8} \right)$$

$$= -1 - \ln 2 - \frac{3}{8} = -\ln 2 - \frac{11}{8}.$$

109. $I - J = \int_1^2 \frac{1-x^2}{1-2x} - \frac{1}{2} x dx$

$$= \int_1^2 \frac{1-x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + x^2 + \frac{1}{2}x}{1-2x} dx$$

$$= \int_1^2 \frac{\frac{3}{4}}{1-2x} dx = \left[-\frac{3}{8} \ln(2x-1) \right]_1^2$$

$$= -\frac{3}{8} \ln 3 + \frac{3}{8} \ln 1 = -\frac{3}{8} \ln 3.$$

D'où $I = 1 - \frac{3}{8} \ln 3.$

110 1. $\mu = \frac{1}{\pi-0} \int_0^{\pi} \cos 2x dx$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \times 0 = 0.$$

2. $\mu = \frac{1}{1+1} \int_{-1}^1 2x^2 + x - 2 dx$

$$= \left[\frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - 2x \right]_{-1}^1$$

$$= \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) - \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 2 \right)$$

$$= \left(\frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{12}{6} \right) - \left(-\frac{4}{6} + \frac{3}{6} + \frac{12}{6} \right)$$

$$= -\frac{5}{6} - \frac{11}{6} = -\frac{16}{6} = -\frac{8}{3}.$$

3. $\mu = \frac{1}{3} \int_{-2}^1 \frac{3}{x-2} dx$

$$= \frac{1}{3} [3 \ln(-x+2)]_{-2}^1$$

$$= \frac{1}{3} [3 \ln(1) - 3 \ln 4]$$

$$= -\ln 4 = -2 \ln 2.$$

111 1. $\mu = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 \frac{x}{x^2+1} dx$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_{-2}^2$$

$$= \frac{1}{8} [\ln 5 - \ln 5] = 0$$

2. $\mu = \frac{1}{2 \ln 2} \int_0^{2 \ln 2} e^{\frac{1}{2} x} dx$

$$= \frac{1}{2 \ln 2} \left[2 e^{\frac{1}{2} x} \right]_0^{2 \ln 2}$$

$$= \frac{1}{\ln 2} [2 - 1] = \frac{1}{\ln 2}.$$

3. $\mu = \frac{1}{4} \int_{-1}^3 x(x^2+1)^3 dx = 312.$

5. Calculs d'aires

112. à 116. Corrigés dans le manuel.

117. 1. $\mathcal{A} = 3,11 \text{ cm}^2.$

2. $\mathcal{A}_{\text{bleue}} = 9 - \mathcal{A} = 5,89 \text{ cm}^2.$

118. 1. $f(x) - g(x) = 3 - x^2 - (x^2 - 3x + 4)$

$$= 3 - x^2 - x^2 + 3x - 4$$

$$= -2x^2 + 3x - 1.$$

$$\Delta = 9 - 4 \times (-2) \times (-1) = 1 \quad \begin{cases} x_1 = \frac{-3+1}{-4} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{-3-1}{-4} = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$-2x^2 + 3x - 1$	-	0	0	-

$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[.$

$\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $\left] -\infty; \frac{1}{2} \right[\cup] 1; +\infty [.$

2. $\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{2}}^1 -2x^2 + 3x - 1 dx$

$$= \left[-\frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - x \right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= \left(-\frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 1 \right) - \left(-\frac{1}{12} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \left(-\frac{4}{6} + \frac{9}{6} - \frac{6}{6} \right) - \left(-\frac{2}{24} + \frac{9}{8} - \frac{12}{24} \right)$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{5}{24} = \frac{1}{24} \text{ u.a.}$$

$1 \text{ u.a.} = 15 \text{ cm}^2.$

$\mathcal{A} = 15 \times \frac{1}{24} = 0,625 \text{ cm}^2.$

119 1. $1 > \frac{1}{2}$

$$\swarrow \quad \searrow$$

$$\begin{array}{ll} \text{si } x > 0 & \text{si } x < 0 \\ x > \frac{x}{2} & x < \frac{x}{2} \\ e^x > e^{\frac{x}{2}} & e^x < e^{\frac{x}{2}} \end{array}$$

e^x croissante sur $\mathbb{R}$

Sur $]0; +\infty[$ $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

Sur $]-\infty; 0[$ $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$.

$$\begin{aligned} 2. \mathcal{A}_1 &= \int_{-1}^0 e^{\frac{x}{2}} - e^x dx = \left[2e^{\frac{x}{2}} - e^x \right]_{-1}^0 \\ &= 1 - \left(2e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1} \right) \\ &= 1 + e^{-1} - 2e^{-\frac{1}{2}} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \mathcal{A}_2 &= \int_0^1 e^x - e^{\frac{x}{2}} dx = \left[e^x - 2e^{\frac{x}{2}} \right]_0^1 \\ &= e - 2e^{\frac{1}{2}} - (-1) \\ &= 1 + e - 2e^{\frac{1}{2}} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 120. 1. \int_0^\pi \sin^4(x) dx &= \int_0^\pi \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x) dx \\ &= \left[\frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{32} \sin(4x) \right]_0^\pi = \frac{3}{8}\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. g(x) &= \pi \mathbb{R}^2 \quad \text{avec } \mathbb{R} = \sin^2(x) \\ g(x) &= \pi \times \sin^4(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. V &= \int_0^\pi g(x) dx = \pi \int_0^\pi \sin^4(x) dx \\ &= \frac{3}{8}\pi \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

121. 1. Soit $f: x \mapsto xg(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right) + x \times \frac{1(3-x) - (3+x) \times (-1)}{\left(\frac{3+x}{3-x}\right)^2} \\ &= \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right) + x \times \frac{6 \times (3-x)}{(3-x)^2 \times (3+x)} \\ &= \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right) + \frac{6x}{(3-x)(3+x)}. \end{aligned}$$

$$122. 1. f'(x) = \frac{1}{x} \times x - (1 + \ln x) = -\frac{\ln x}{x^2}.$$

x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$-\infty$		1	0

$$f(1) = 1.$$

2.

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$1 + \ln x$	-	0	+
x	+	+	+
$f(x)$	-	0	+

$$1 + \ln x > 0.$$

$$\ln x > -1$$

$$x > \frac{1}{e}.$$

$$\begin{aligned} 3. \mathcal{A}_1 &= -\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{1 + \ln x}{x} dx \\ &= -\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} dx \\ &= -\left[\ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \\ &= -\left[\left(-1 + \frac{1}{2} \right) - \left(-2 + 2 \right) \right] \\ &= +\frac{1}{2} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{1}{2} = 0,75 \text{ cm}^2.$$

$$\begin{aligned} 4. \mathcal{A}_2 &= -\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} dx \\ &= \left[\ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_{\frac{1}{e}}^1 \\ &= 0 - \left(-1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_2 = 0,75 \text{ cm}^2.$$

6. Intégration par parties

$$123. 1. (u \times v)' = u'v + uv' \\ uv' = (uv)' - u'v$$

$$\begin{aligned} 2. \int_a^b uv' &= \int_a^b (uv)' - u'v \\ &= \int_a^b (uv)' - u'v - \int_a^b u'v \\ &= [uv]_a^b - \int_a^b u'v. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. u(x) &= x ; \quad u'(x) = 1 ; \\ v'(x) &= e^x ; \quad v(x) = e^x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^x dx &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - [e^x]_0^1 = e - [e - 1] = +1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. u(x) &= x ; \quad u'(x) = 1 ; \\ v'(x) &= \cos(2x) ; \quad v(x) = \frac{1}{2} \sin(2x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(2x) dx &= \left[\frac{1}{2} x \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin(2x) dx \\ &= 0 - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{4} [-1 - (1)] = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$124. \cdot u(x) = \ln(x) ; \quad u'(x) = \frac{1}{x} ; \\ v'(x) = x^2 ; \quad v(x) = \frac{1}{3}x^3.$$

$$\begin{aligned} I &= \left[\ln(x) \times \frac{1}{3}x^3 \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{3}x^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}e^3 \right] - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_1^e \\ &= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot u(x) &= \ln(x) ; \quad u'(x) = \frac{1}{x} ; \\ v'(x) &= \frac{1}{x^2} ; \quad v(x) = -\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x^2} dx \\ &= -\frac{1}{e} - \left[\frac{1}{x} \right]_1^e = -\frac{1}{e} - \left[\frac{1}{e} - 1 \right] = -\frac{2}{e} + 1. \end{aligned}$$

$$125. \cdot u(x) = \ln(x) ; \quad u'(x) = \frac{1}{x} ; \\ v'(x) = 1 ; \quad v(x) = x.$$

$$\begin{aligned} I &= [x \ln x]_{\frac{1}{e}}^1 - \int_{\frac{1}{e}}^1 1 dx = -\frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} - [x]_{\frac{1}{e}}^1 \\ &= \frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{e} \right) = \frac{2}{e} - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot u(x) &= \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) ; \quad u'(x) = -\frac{1}{x(x+1)} ; \\ v'(x) &= 1 ; \quad v(x) = x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x+1} \\ &= e \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) - \ln 2 + \int_1^e \frac{1}{x+1} \\ &= e \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) - \ln 2 + [\ln(x+1)]_1^e \\ &= e \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) - \ln 2 + \ln(e+1) - \ln 2 \\ &= (e+1)(\ln(e+1)) - e - 2 \ln 2. \end{aligned}$$

$$126. \cdot u(x) = x^2 ; \quad u'(x) = 2x ; \\ v'(x) = e^x ; \quad v(x) = e^x.$$

$$I = [x^2 e^x]_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx = e - 2 \int_0^1 x e^x dx.$$

$$u(x) = x ; \quad u'(x) = 1 ; \\ v'(x) = e^x ; \quad v(x) = e^x.$$

$$\begin{aligned} I &= e - 2 \left[[x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right] \\ &= e - 2[e - [e^x]_0^1] = e - 2[e - e + 1] \\ &= e - 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot u(t) &= t^2 ; \quad u'(t) = 2t ; \\ v'(t) &= e^{\frac{t}{2}} ; \quad v(t) = 2e^{\frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

$$J = \left[2t^2 e^{\frac{t}{2}} \right]_{-1}^0 - 4 \int_{-1}^0 t e^{\frac{t}{2}} dt$$

$$= 2e^{-\frac{1}{2}} - 4 \int_{-1}^0 t e^{\frac{t}{2}} dt.$$

$$u(t) = t \quad ; \quad u'(t) = 1 ;$$

$$v'(t) = e^{\frac{t}{2}} \quad ; \quad v(t) = 2e^{\frac{t}{2}}.$$

$$J = 2e^{-\frac{1}{2}} - 4 \left[\left[2te^{\frac{t}{2}} \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 2e^{\frac{t}{2}} dt \right]$$

$$= 2e^{-\frac{1}{2}} - 4 \left[2e^{-\frac{1}{2}} - 2 \left[2e^{\frac{t}{2}} \right]_{-1}^0 \right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{e}} - 4 \left[\frac{2}{\sqrt{e}} - 2 \left[2 - 2e^{-\frac{1}{2}} \right] \right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{e}} - \frac{8}{\sqrt{e}} + 16 - \frac{16}{\sqrt{e}} = -\frac{22}{\sqrt{e}} + 16.$$

127. 1. $u(t) = t + 1 \quad ; \quad u'(t) = 1 ;$

$$v'(t) = e^t \quad ; \quad v(t) = e^t.$$

$$\int_0^x (t+1)e^t dt = \left[(t+1)e^t \right]_0^x - \int_0^x e^t dt$$

$$= (x+1)e^x - 1 - [e^t]_0^x$$

$$= (x+1)e^x - 1 - e^x + 1 = xe^x.$$

2. Soit $f(t) = (t+1)e^t$;

$$\int_0^x (t+1)e^t dt = \int_0^x f(t) dt = F(x) - F(0)$$

$$= F(x) - 1.$$

D'après le 1.

$$F(x) - 1 = xe^x = xe^x + 1.$$

7. Calcul approché d'intégrale

128. 1. $\mathcal{A}_{R_k} = \frac{1}{n} \times f\left(\frac{k}{n}\right).$

2. $S_n = \frac{1}{n} \times f\left(\frac{0}{n}\right) + \frac{1}{n} \times f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n} \times f\left(\frac{n-1}{n}\right)$

$$= \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{0}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

3. $S_{10} \approx 0,778.$

$$S_{50} \approx 0,753.$$

$$S_{100} \approx 0,750.$$

4. $\mathcal{A}_{R_k} = \frac{1}{n} \times f\left(\frac{k+1}{n}\right).$

5. $S_n = \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n} \times f\left(\frac{n}{n}\right)$

$$= \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

$$S_{10} \approx 0,715 ; S_{50} \approx 0,740 ; S_{100} \approx 0,744.$$

6. $S_n - s_n = \frac{1}{n} (f(0) - f(1)).$

7. Pour $n = 100$;

$$\frac{S_{100} - s_{100}}{S_{100}} = \frac{|0,750 - 0,744|}{0,750} = 8 \times 10^{-3}.$$

129. 1. $s_{100} = 0,783 \quad S_{100} = 0,788.$

2. $0,78 \leq I \leq 0,79.$

3. $\frac{S_n - I}{I} \leq 10^{-3}$

$$S_n \leq I(1,001)$$

en prenant $S_n \leq 0,78078$ d'après le tableau $n = 53$.

131. Demander la valeur de n .

S prend la valeur 0.

s prend la valeur 0.

Pour $i = 0$ à $n-1$

$$S = S + e^{-\left(\frac{i+1}{n}\right)^2}$$

$$s = s + e^{-\left(\frac{i+1}{n} + 1\right)^2}$$

Fin Pour

$$K = \frac{S-s}{S}$$

Afficher K, s, S.

132. 1. Démontrer la formule de Simpson en TS, ce n'est pas un peu raide ?

J'avoue que je ne sais pas la démontrer moi-même au pied levé.

2. Application directe de la formule de Simpson.

3. Le reste de l'exercice nécessite un logiciel de calcul formel que je n'ai pas.

133. Partie A :

1. $\int_1^x (2+t) dt = \left[2t - \frac{1}{2}t^2 \right]_1^x$

$$= \left(2x - \frac{1}{2}x^2 \right) - \left(2 - \frac{1}{2} \right)$$

$$= 2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}.$$

2. $(2+t) - \frac{1}{t} = \frac{-t^2 + 2t - 1}{t}.$

Étudions le signe de $-t^2 + 2t - 1$:

$$\Delta = 4 - 4 \times (-1) \times (-1) = 0 ;$$

$$x_a = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

x	1	$+\infty$
$\frac{-t^2 + 2t - 1}{t}$	0	-

$$(2-t) - \frac{1}{t} \leq 0 \Leftrightarrow (2-t) \leq \frac{1}{t}.$$

3. $(2+t) \leq \frac{1}{t}.$

$$\int_1^x (2+t) dt \leq \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

$$2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2} \leq \ln x.$$

Partie B :

1. a. $\int_1^4 h(x) dx = \int_1^4 -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} dx$

$$= \left[-\frac{1}{6}x^3 + x^2 - \frac{3}{2}x \right]_1^4$$

$$= \left(-\frac{32}{3} + 16 - 6 \right) - \left(-\frac{1}{6} + 1 - \frac{3}{2} \right)$$

$$= \left(-\frac{32}{3} + \frac{48}{3} - \frac{18}{3} \right) - \left[-\frac{1}{6} + \frac{6}{6} - \frac{9}{6} \right]$$

$$= \left(-\frac{2}{3} \right) + \frac{4}{6} = 0.$$

L'aire comprise entre l'axe des abscisses $\mathcal{C}_h$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$ est égale à l'aire comprise entre l'axe des abscisses $\mathcal{C}_h$ et les droites d'équation $x = 3$ et $x = 4$.

2. $\mathcal{A}_{\text{ire}_D} = \int_1^4 \ln x dx = \int_1^4 1 \times \ln x dx.$

$$u(x) = \ln x \quad ; \quad u'(x) = \frac{1}{x} ;$$

$$v'(x) = 1 \quad ; \quad v(x) = x.$$

$$\mathcal{A}_0 = [x \ln x]_1^4 - \int_1^4 x \times \frac{1}{x} dx$$

$$= 4 \ln 4 - [x]_1^4 = 4 \ln 4 - (4 - 1)$$

$$= 4 \ln 4 - 3.$$

134. 1. Pour tout $x > 1$ on a :

$$2x \leq x^2 + x \leq 2x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2x} \leq \frac{1}{x^2 + x} \leq \frac{1}{2x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2 \ln x}{x^2 + x} \leq \frac{\ln x}{x^2}.$$

2. a. $I = \int_2^4 \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_2^4$

$$= \frac{1}{2} (\ln 4)^2 - \frac{1}{2} (\ln 2)^2$$

$$= \frac{1}{2} (\ln 8) (\ln 2).$$

b. $J = -\frac{1}{4} \ln(4) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{1}{2}$

$$= -\frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

c. $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$

$$\Leftrightarrow \int_2^4 \frac{\ln x}{x^2} \leq \int_2^4 f(x) \leq \int_2^4 \frac{\ln x}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \int_2^4 f(x) \leq \frac{1}{2} (\ln 4)^2 - \frac{1}{2} (\ln 2)^2$$

3. $1 \text{ u.a.} = 4 \text{ cm}^2$.

$$\frac{1}{4} \times 4 \leq \mathcal{A} \leq 4 \times \frac{1}{2} \times \ln 8 \times \ln 2$$

$$1 \leq \mathcal{A} \leq 2 \ln 8 \times \ln 2.$$

135. 1. $ax^2 + bx + c + \frac{d}{x-1} + \frac{e}{x+1}$

$$= \frac{ax^2(x^2-1) + bx(x^2-1) + c(x^2-1) + d(x+1) + e(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{ax^4 - ax^2 + bx^3 - bx + cx^2 - c + dx + d + ex - e}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{ax^4 + bx^3 + (-a+c)x^2 + (d+e)x + (-c+d-e)}{(x-1)(x+1)}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ -a+c=5 \\ d+e-b=-3 \\ -c+d-e=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=6 \\ d+e=-6 \\ d-e=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=6 \\ d=\frac{1}{2} \\ e=-\frac{13}{2} \end{cases}.$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 6 + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{13}{2(x+1)}.$$

2. $F_1(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x$
 $+ \frac{1}{2}\ln(-x+1) - \frac{13}{2}\ln(x+1) + K_1$

avec $F_1(0) = 0 \Leftrightarrow K_1 = 0$.

$$F_1(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x$$

$$+ \frac{1}{2}\ln(-x+1) - \frac{13}{2}\ln(x+1);$$

$$F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x$$

$$+ \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{13}{2}\ln(x+1) + K_2.$$

avec $F_2(2) = 1$

$$F_2(2) = \frac{8}{3} - 6 + 12 - \frac{13}{2}\ln 3 + K_2.$$

$$\Leftrightarrow K_2 = 1 - \frac{26}{3} + \frac{13}{2}\ln 3.$$

$$\Leftrightarrow K_2 = -\frac{23}{3} + \frac{13}{2}\ln 3.$$

$$F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x + \frac{1}{2}\ln(x-1)$$

$$- \frac{13}{2}\ln(x+1) - \frac{23}{3} + \frac{13}{2}\ln 3.$$

3. $\int_2^{\frac{1}{2}} f(x) dx$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x + \frac{1}{2}\ln(-x+1) - \frac{13}{2}\ln(x+1) \right]_2^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{24} - \frac{3}{8} + 3 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{13}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) \right]$$

$$= -\frac{8}{24} + 3 - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{13}{2}\ln 3 + \frac{13}{2}\ln 2$$

$$= -\frac{1}{3} + 3 + 6\ln 2 - \frac{13}{2}\ln 3$$

$$= \frac{8}{39} + 6\ln 2 - \frac{13}{2}\ln 3$$

136. 1. $K = \int_0^\pi e^x \cos(2x) dx.$

2. $I = \int_0^\pi e^x \cos^2(x) dx$

et $J = \int_0^\pi e^x \sin^2(x) dx.$

$$I + J = \int_0^\pi e^x (\cos^2 x + \sin^2 x) dx$$

$$= \int_0^\pi e^x dx = [e^x]_0^\pi = e^\pi - 1.$$

3. $I - J = \int_0^\pi e^x (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$

$$= \int_0^\pi e^x \cos(2x) dx.$$

137. 1. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$; $D_f = [0; 1]$.

a. $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

b. $f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}}{x + \sqrt{x^2 + 2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}.$

c. $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}} = [\ln(x + \sqrt{x^2 + 2})]_0^1$

$$= \ln(1 + \sqrt{3}) - \frac{1}{2}\ln 2.$$

2. a. $J + 2I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx$

$$= \int_0^1 \frac{2 + x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2} dx = K.$$

b. $\int_0^1 \frac{2x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 2}} =$

c. On trouve $\sqrt{3}$.

d. $J = \frac{\ln(2 - \sqrt{3}) + \sqrt{3}}{2};$

$$K = \frac{\ln(2 + \sqrt{3}) + \sqrt{3}}{2}.$$

138. 1. $A = \int_0^1 \frac{ex}{1 + e^x} dx = [\ln(1 + e^x)]_0^1$

$$= \ln(1 + e) - \ln 2.$$

$B = \int_0^1 \frac{ex}{(1 + e^x)^2} dx = \left[-\ln \frac{1}{(1 + e^x)} \right]_0^1$

$$= -\frac{1}{1 + e} + \frac{1}{2}.$$

2. a. $\frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2}$

$$= \frac{a(1 + 2t + t^2) + bt(1+t) + ct}{(1+t)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a + 2at + at^2 + bt + bt^2 + ct}{(1+t)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)t^2 + (2a+b+c)t + a}{(1+t)^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \\ 2a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$$

Donc $\frac{1}{(1+t)^2} = 1 - \frac{1}{1+t} - \frac{t}{(1+t)^2}.$

3. $\frac{1}{(1+e^x)^2} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2};$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$$

$$= \int_0^1 1 dx - \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx - \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$$

$$= 1 - A - B$$

$$= 1 - \ln(1+e) + \ln 2 + \frac{1}{1+e} - \frac{1}{2}$$

$$= 1 - \ln(1+e) + \ln 2 + \frac{1}{1+e}.$$

139. 1. $\varphi(0)$ est l'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle d'amplitude nulle : donc $\varphi(0) = 0$.

Par définition de l'intégrale $\varphi'(t) = \frac{10t^2}{1+t^2}.$

2. $y_{n+1} = y_n + \frac{10 \times \frac{n^2}{100}}{1 + \frac{n^2}{100}} \times 0,1$

$$= y_n + \frac{n^2}{100 + n^2}.$$

3. $y_0 = 0$ et $y_{n+1} = y_n + \frac{n^2}{100 + n^2}.$

$$y_1 = y_0 + \frac{0^2}{100 + 0^2} = 0;$$

$$y_2 = \frac{1}{101};$$

$$y_3 = \frac{1}{101} + \frac{4}{104};$$

$$y_4 = \frac{1}{101} + \frac{4}{104} + \frac{9}{109};$$

$$y_5 = \frac{1}{101} + \frac{4}{104} + \frac{9}{109} + \frac{16}{116} \approx 0,269.$$

140. Partie A :

1. $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$

$$= -\frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$= \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)}.$$

2. $n \in \mathbb{N}^*$ donc $-3n - 2 < 0$
et $n(2n + 2)(2n + 1) > 0$;
donc $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est
strictement décroissante.

3. Pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$ la suite (u_n)
est donc décroissante et minorée par 0,
elle est donc convergente.

Partie B :

1. a. $n \leq x \leq n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}.$$

$$\Leftrightarrow \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}.$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx &= [\ln x]_n^{n+1} = \ln(n+1) - \ln(n) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{1}{n} - f(n) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right). \end{aligned}$$

$$\text{On a donc bien } \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{n} - f(n).$$

$$\text{c. } \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} - f(n) \leq \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \leq -f(n) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)}.$$

2. a. D'après la question 1. c. on a :

$$0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)} ;$$

$$+ \quad 0 \leq f(n+1) \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} ;$$

$$\vdots$$

$$+ \quad 0 \leq f(2n) \leq \frac{1}{2n(2n+1)}$$

$$0 \leq f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) \leq S_n$$

$$\text{b. } \frac{a(x+1) + bx}{x(x+1)} \leq \frac{(a+b)x + a}{x(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

$$\text{c. } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \text{d'après 2. b.}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}.$$

Par somme :

$$S_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+1-n}{n(2n+1)} = \frac{n+1}{n(2n+1)}.$$

$$\text{d. } 0 \leq \sum_{k=n}^{2n} f(k) \leq S_n.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n^2} = 0.$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} f(k) = 0.$$

$$\text{e. } f(n) = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n} + \ln n - \ln(n+1)$$

$$f(n+1) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln(n+2)$$

$$+$$

$$f(2n) = \frac{1}{2n} + \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n} + \ln(2n) - \ln(2n+1)$$

$$f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) = u_n + \ln(n) - \ln(2n+1)$$

$$= u_n - (\ln(2n+1) - \ln(n))$$

$$= u_n - \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

$$= u_n - \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

$$\text{f. } u_n = (f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n)) + \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2.$$

$$\text{141. 1. a. } u_2 = u_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} ;$$

$$u_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} ;$$

$$u_4 = \frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}.$$

$$\text{b. } \mathcal{P}_n : u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} ; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Initialisation :

$$\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} = 1 = u_1 \quad \mathcal{P}_1 \text{ vrai.}$$

Hérédité : je suppose $\mathcal{P}_n$ vraie au rang n ,

démontrons alors que $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang 1, si $\mathcal{P}_n$
est vraie au rang $n+1$, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour
tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. a. $k \leq x \leq k+1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$$

$$\Leftrightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}.$$

$$\text{b. } \frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx \leq 1 ;$$

$$+ \quad \frac{1}{3} \leq \int_2^3 \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{2} ;$$

$$\vdots$$

$$+ \quad \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n-1}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

$$u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n}$$

Avec l'inégalité de gauche :

$$u_n - \ln n \leq 1 ; v_n \leq 1.$$

Avec l'inégalité de droite :

$$\frac{1}{n} \leq u_n - \ln n ; 0 \leq u_n - \ln n ; 0 \leq v_n.$$

On a donc : $0 \leq v_n \leq 1$.

3. a. $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - \ln(n+1) - u_n + \ln(n)$

$$= (u_{n+1} - u_n) - (\ln(n+1) - \ln(n))$$

$$= \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx.$$

b. D'après l'encadrement de la question

2. a. :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{n+1} - \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq 0$$

Donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$, la suite v_n est
décroissante.

4. La suite v_n est décroissante et minorée
(par 0), elle est donc convergente vers un
nombre $\gamma \geq 0$.

$$v_n = u_n - \ln(n)$$

$$u_n = v_n + \ln(n)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \gamma ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$$

Par somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

142. 1. $\ln(x+3)$ est la composée d'une
fonction affine $(x+3)$ et de la fonction
 $\ln$. Elle est donc dérivable sur $x > -3$. Le
dénominateur est une fonction affine.

f est donc dérivable comme quotient de
fonctions dérivables sur $[0 ; +\infty[$ ($x+3$
s'annule pour $x = -3 \notin [0 ; +\infty[$).

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+3} \times (x+3) - \ln(x+3)}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{1 - \ln(x+3)}{(x+3)^2}.$$

$$\begin{aligned} 1 - \ln(x+3) \geq 0 &\Leftrightarrow -\ln(x+3) \geq -1 \\ &\Leftrightarrow \ln(x+3) \geq 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x+3) \geq \ln e$$

$$\Leftrightarrow x \leq e-3 < 0.$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$\frac{\ln 3}{3}$	0

$$f(0) = \frac{\ln 3}{3} ; \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

2. a. Si $n \leq x < n+1$

alors $f(n+1) \leq f(x) < f(n)$ car la fonction $f(x)$ est décroissante sur $[0; +\infty[$.

b. $f(n+1) \leq f(x) < f(n)$

$$\Leftrightarrow \int_n^{n+1} f(n+1) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx < \int_n^{n+1} f(n) dx$$

$$\Leftrightarrow f(n+1) \leq u_n < f(n)$$

$$\text{c. } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1) = 0.$$

D'après le théorème des gendarmes
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$

3. $F(x) = [\ln(x+3)]^2$ sur $[0; +\infty[$.

a. La fonction $x \mapsto \ln(x+3)$ est dérivable sur $[0; +\infty[$.

La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $[0; +\infty[$.

Par composée, la fonction F est dérivable sur $[0; +\infty[$.

$$F'(x) = 2 \times \frac{1}{x+3} \times \ln(x+3)$$

$$= \frac{2}{x+3} \ln(x+3) = 2f(x).$$

$$\text{b. } I_n = \int_0^n f(x) dx = \frac{1}{2} [F(x)]_0^n$$

$$= \frac{1}{2} (F(n) - F(0))$$

$$= \frac{1}{2} ((\ln(n+3))^2 - (\ln(3))^2).$$

$$\text{4. } S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n+1}$$

$$= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x) dx$$

$$= \int_0^n f(x) dx = I_n.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(x+3) = +\infty \\ \lim_{u \rightarrow +\infty} u^2 = +\infty \end{array} \right\} \text{ par composée}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(x+3))^2 = +\infty$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty,$

la suite S_n diverge.

143. 1. $0 \leq x \leq 1$

$$n \leq x+n \leq 1+n \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\frac{1}{1+n} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{donc } \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}.$$

Démontrons maintenant que

$$\frac{1}{x+n} \geq \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2}$$

$$\frac{1}{x+n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \right) \geq 0.$$

$$\frac{1}{x+n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \right) = \frac{1}{x+n} - \frac{n-x}{n^2}$$

$$= \frac{n^2 - (n-x)(x+n)}{(x+n)n^2}$$

$$= \frac{n^2 + (x-n)(x+n)}{n^2(x+n)}$$

$$= \frac{n^2}{n^2(x+n)} \geq 0.$$

$$\text{Donc } \frac{1}{n+x} \geq \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2}.$$

$$\text{2. a. } \int_0^1 \frac{1}{n+x} dx = [\ln(x+n)]_0^1$$

$$= \ln(n+1) - \ln(n)$$

$$= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

$$\text{b. } \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x+n} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{n} dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} dx \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

$$\text{3. } U(n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

$$U(n+1) - U(n)$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Or d'après **2. b.**

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$- \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$$

$$\frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$$

$$\frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{2n^2 - 2n(n+1) + (n+1)}{2n^2(n+1)}$$

$$\leq \frac{1-n}{2n^2(n+1)}.$$

$$\text{Or } n \geq 1 \Leftrightarrow 1-n \leq 0$$

$$\text{donc } \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq 0$$

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

U_n est décroissante.

$$\text{4. } V(n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1).$$

$$V(n+1) - V(n)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right).$$

Or d'après **2. b.**

$$\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\text{et } V(n+1) - V(n) \geq 0$$

V_n est croissante.

5. D'après les questions **3.** et **4.** les U_n et V_n sont respectivement décroissante et croissante.

De plus :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) - \ln(n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\frac{n+1}{n} = 0.$$

Les suites U_n et V_n sont donc adjacentes, elles sont donc convergentes et convergent vers la même limite γ .

$$V(n) \leq \gamma \leq U(n)$$

$$\text{On cherche } n \text{ tel que } U(n) - V(n) \leq 10^{-2}$$

$$\text{soit } \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 10^{-2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} \leq e^{0,01}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq e^{0,01} - 1$$

$$n \geq \frac{1}{e^{0,01} - 1} \approx 99,5 \quad \text{soit } n = 100$$

$$U_{100} \approx 0,582 \quad \text{et } V_{100} \approx 0,573.$$

Soit $\gamma \approx 0,58$ à 10^{-2} près.

144. I. Première partie

1. $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1$;
 $\frac{-x}{1+x} \leq 0$ sur $[0 ; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0	$f(0) = 0$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1 - (1+x) + x(1+x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0.$$

x	0	$+\infty$
$g(x)$	0	$g(0) = 0$

2. $\ln(1+x) - x \leq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leq x$
 $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$
soit $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

II. Deuxième partie

1. $\mathcal{P}_n : u_n > 0$.

Initialisation : $u_1 = \frac{3}{2} > 0$; $\mathcal{P}_n$ vraie.

Hérédité :

$u_n > 0$

$u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > 0 \quad \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 0\right)$

$u_{n+1} > 0$.

Conclusion :

$\mathcal{P}_1$ est vraie
si $\mathcal{P}_n$ vraie
alors $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie

2. Initialisation :

$\ln u_1 = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ vraie.

Hérédité :

$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$

$\ln u_n + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

$\ln u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

$\ln u_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

Conclusion :

$\mathcal{P}_1$ est vraie
si $\mathcal{P}_n$ vraie
alors $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie

D'après la première partie :

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4^2} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \leq \frac{1}{2^2}$

$\vdots$

$\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4^n} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$

$S_n - \frac{1}{2} \times T_n \leq \ln u_n \leq S_n$

1. S_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{4}$ et de raison $\frac{1}{4}$

$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{2^n}$.

4. S_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{4}$ et de raison $\frac{1}{4}$.

T_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{4}$ et de raison $\frac{1}{4}$.

$T_n = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$.

$\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ sont compris entre 0 et 1

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{1}{3}$.

5. a. D'après la question 1. $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geq 1$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1$.

La suite u_n est donc strictement croissante.

b. $\ln u_n \leq S_n$; $u_n \leq e^{S_n}$.

La suite u_n est donc croissante et majorée (par e^{S_n}), elle est donc convergente vers une limite ℓ .

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n = \ln \ell$.

D'après la question 3..

$S_n - \frac{1}{2} T_n \leq \ln u_n \leq S_n$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \frac{1}{2} T_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

$1 - \frac{1}{6} \leq \ln \ell \leq 1$.

$e^{\frac{5}{6}} \leq \ell \leq e$.

145. Partie A :

1. $f(0) = 1$ et $g(0) = 0$ ce qui permet de distinguer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2. $f'(x) = -2xe^{-x^2}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	1	0

On pose $x = x^2$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

$g'(x) = 2xe^{-x^2} - 2x^3e^{-x^2}$
 $= 2xe^{-x^2}(1 - x^2)$

x	$-\infty$	-1	0	+1	$+\infty$
x	-	-	0	+	+
$1 - x^2$	-	0	+	+	0
$g'(x)$	+	0	-	0	-
$g(x)$	0		0		0

$g(-1) = g(1) = \frac{1}{e}$

$g(0) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2}$

(en posant $x = x^2$)

3. $f(x) - g(x) = e^{-x^2}(1 - x^2)$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x) - g(x)$	-	0	+	0

Sur $[-1 ; 1]$, $f(x) \geq g(x)$ donc $\mathcal{C}_f$ est en dessus de $\mathcal{C}_g$.

Sur $]0 ; -1[\cup]1 ; +\infty[$, $f(x) < g(x)$,

$f(x) \geq g(x)$ donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$.

Partie B :

1. g étant dérivable donc continue, G est la primitive de la fonction g qui s'annule en 0.

2. $G(x)$ représente l'aire délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = x$.

3. $G'(x) = g(x)$ et $g(x) \geq 0$ d'après la question 2.

$G(x)$ est donc croissant sur $\mathbb{R}$.

4. $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$;

$$G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt = \int_0^x -\frac{1}{2} \times (-2t e^{-t^2}) dt.$$

$$u(t) = -\frac{1}{2}; u'(t) = -\frac{1}{2};$$

$$v'(t) = -2te^{-t^2}; v(t) = -e^{-t^2}.$$

$$G(x) = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$= -\frac{x}{2} e^{-x^2} + \frac{1}{2} F(x)$$

$$= \frac{1}{2} [F(x) - x e^{-x^2}].$$

5. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ell.$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \frac{1}{2} \ell.$

b. $N = \int_0^1 (1 - t^2) e^{-t^2} dt.$
N représente l'aire de la surface limitée par les 2 courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$; $x = 1$.

c. $\frac{\ell}{2}$ est l'aire de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $X = 0$; $X = x$.
On voit graphiquement que $N \geq \frac{\ell}{2}$

146. 1.

$$f'(x) = \frac{e^x (x e^x + 1) - (e^x - 1)(e^x + x e^x)}{(x e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{x e^{2x} + e^x - (e^{2x} + x e^{2x} - e^x - x e^x)}{(x e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{x e^{2x} + e^x - e^{2x} - x e^{2x} + e^x + x e^x}{(x e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^x (2 - e^x - x)}{(x e^x + 1)^2}$$

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 1(x - 0) + 0 = x$$

2. a.

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1}{x e^x + 1} - \frac{x^2 e^x + x}{x e^x + 1} = \frac{e^x - 1 - x^2 e^x - x}{x e^x + 1}$$

$$(x + 1)u(x) = (x + 1)(e^x - x e^x - 1)$$

$$= x e^x - x^2 e^x - x + e^x - x e^x - 1$$

$$f(x) - x = \frac{(x + 1)u(x)}{x e^x + 1}$$

avec $u(x) = e^x - x e^x - 1.$

b. $u(x) = e^x - x e^x - 1$
 $u'(x) = e^x - e^x - x e^x = -x e^x.$

x	0	+	+	+
u'(x)		-		
	0			

$$u(0) = 0$$

$$u(x) \leq 0 \text{ sur l'intervalle } [0; +\infty[.$$

c. $f(x) - x$ est du signe de $u(x)$, donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de la tangente T sur l'intervalle $[0; +\infty[.$

4.

$$\frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} = \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{x + \frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{e^x - 1}{e^x}}{\frac{x e^x + 1}{e^x}} = \frac{e^x - 1}{x e^x + 1} = f(x).$$

5. $F(x) = \ln(x + e^{-x}).$

6. $\int_0^x f(x) dx = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} dx = [h(x + e^{-x})]_0^1$
 $= + \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right).$

$$\int_0^1 x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} - \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) \text{ u.a.}$$

$$\mathcal{A} = 16 \times \left(\frac{1}{2} - \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) \right) \text{ cm}^2.$$

$$\mathcal{A} \approx 299 \text{ mm}^2.$$

7. a. $v_0 = \int_0^1 f(x) dx = \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right);$

$$v_1 = \int_1^2 f(x) dx = [\ln(x + e^{-x})]_1^2$$

$$= \ln(2 + e^{-2}) - \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right)$$

$$v^2 = \int_2^3 f(x) dx = \ln(3 + e^{-3}) - \ln(2 + e^{-2}).$$

b. v_n est l'aire du domaine situé entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = n$ et $x = n + 1$.

147. 1.

$$h(x) = f(x) - g(x) = \ln(1 + x) - \frac{2}{2 + x}$$

$$h'(x) = \frac{1}{1 + x} - \frac{2(1 + x) - 2x}{(2 + x)^2}$$

$$= \frac{x^2}{(x + 1)(2 + x)^2}.$$

h est croissante sur $[0; +\infty[.$

148. I. 1. $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x};$

$$2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	+	+
g'(x)		-	0	+
g(x)				

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 - \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 + \ln 2$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 > 0.$$

2. $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 > 0$ et d'après le tableau de variation de $g(x)$ on a $g(x) > 0$ sur $]0; +\infty[.$

II. 1. $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \end{array} \right\} \text{ par addition : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x = 0$ comme asymptote verticale.

2. $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{array} \right\} \text{ par addition : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$f(x) - x = \frac{\ln x}{x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

La droite $\mathcal{D}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

3. $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} \times x - \ln x$
 $= \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2}$
 $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$

4. D'après les questions précédentes : $f'(x) > 0$, la fonction $f(x)$ est croissante sur $]0; +\infty[.$

x	0	+	+	+
f(x)				

III. 1. $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$

2. $\int_1^e f(x) dx = \int_1^e x dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$
 $= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^e + \frac{1}{2}$
 $= \frac{e^2}{2} \text{ u.a.}$

$$\mathcal{A} = 9 \times \frac{e^2}{2} \text{ cm}^2.$$

149. 1. $f'(x) = \frac{e^x(1 + x) - e^x}{(1 + x)^2} = \frac{x e^x}{(1 + x)^2}.$

x	0	1		
f'(x)		+		
f(x)	1			

$$f(0) = 1; f(1) = \frac{e}{2}.$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{5} \right)$$

$$\frac{k}{5} \leq x \leq \frac{k+1}{5}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{k}{5}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{k+1}{5}\right);$$

$f(x)$ est croissante sur $[0; 1]$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f\left(\frac{k}{5}\right) dx &\leq \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(x) dx \\ &\leq \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f\left(\frac{k+1}{5}\right) dx \\ \Leftrightarrow \frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right) &\leq \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(x) dx \leq \frac{1}{5} f\left(\frac{k+1}{5}\right). \end{aligned}$$

L'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$ est comprise entre l'aire du rectangle r_k située en dessous de la courbe et celle du rectangle R_k situé en dessus de la courbe ces rectangles ayant par largeur $\frac{1}{5}$ et pour largeurs respectives $f\left(\frac{k}{5}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{b. } \sum_{k=0}^4 \frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right) &\leq \sum_{k=0}^4 \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{e^x}{1+x} dx \\ &\leq \sum_{k=0}^4 \frac{1}{5} f\left(\frac{k+1}{5}\right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \sum_{k=0}^4 f\left(\frac{k}{5}\right) \leq \sum_{k=0}^4 \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{e^x}{1+x} dx \leq \frac{1}{5} \sum_{k=0}^4 f\left(\frac{k+1}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} S_4 \leq \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx \leq \frac{1}{5} \left(\sum_{k=0}^5 f\left(\frac{k}{5}\right) - f(0) \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} S_4 \leq \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx \leq \frac{1}{5} (S_4 - 1)$$

$$\text{c. } S_4 \approx 5,4587 \text{ et } S_5 \approx 6,8178$$

$$\frac{1}{5} S_4 \approx 1,091 \text{ par défaut}$$

$$\frac{1}{5} (S_5 - 1) \approx 1,164 \text{ par excès}$$

$$\text{d'où : } 1,091 \leq \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx \leq 1,164.$$

$$\begin{aligned} \text{3. a. } 1-x + \frac{x^2}{1+x} &= \frac{(1-x)(1+x) + x^2}{1+x} \\ &= \frac{1-x^2+x^2}{1+x} = \frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx &= \int_0^1 (1-x)e^x + \frac{x^2 e^x}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 (1-x)e^x dx + \int_0^1 \frac{x^2 e^x}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 (1-x)e^x dx + I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \int_0^1 (1-x)e^x dx \\ u(x) = (1-x); u'(x) = -1; \\ v'(x) = e^x; v(x) = e^x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-x)e^x dx &= [1-x]e^x \Big|_0^1 + \int_0^1 e^x dx \\ &= -1 + [e^x]_0^1 = -1 + e - 1 = e - 2 \end{aligned}$$

d. D'après les questions précédentes :
 $1,091 - (e - 2) \leq I \leq 1,164 - (e - 2)$
 $0,37 \leq I \leq 0,45.$

150. 1. a.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} 1-x &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x &= +\infty \end{aligned} \right\} \text{ par composée}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 &= +\infty \end{aligned} \right\} \text{ par produit}$$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

b. f est dérivable comme produit et composée de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2xe^{1-x} - x^2 e^{1-x} = xe^{1-x}(2-x).$$

c.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x	-	0	+	+
2-x	+	+	0	-
f'(x)	-	0	+	-
f(x)	$+\infty$	0	$\frac{4}{e}$	0

$$f(0) = 0; f(1) = \frac{4}{e}.$$

$$\text{2. } I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx = [-e^{1-x}]_0^1 = -1 + e$$

$$I_1 = I_0 - 1 + e - 1 = e - 2$$

$$I_2 = 2(-2 + e) - 1 = 2e - 5$$

$$I_2 = \int_0^1 x^2 e^{1-x} dx = \int_0^1 f(x) dx$$

donc I_2 représente l'aire exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

3. a. 0 $\leq x \leq 1$

$$\Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1-x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq e^{1-x} \leq e \quad \text{la fonction expo est croissante sur } \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e \quad x^n \geq 0.$$

$$\text{b. } \int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq \int_0^1 x^n e dx$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \leq I_n \leq e \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0, \text{ d'après le théorème des gendarmes}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

151. Partie 1 :

$$\text{1. } \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} &= -\infty \end{aligned} \right\} \text{ par addition : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} &= -\infty \end{aligned} \right\} \text{ par addition : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et composée de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

x	0	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)	$-\infty$	$+\infty$

3. $f(1) = 0$, de plus $f(x)$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
f(x)	-	0	+

4. $F(x) = x \ln x - \ln x$

$F(x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

$$F'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x} = f(x)$$

$F(x)$ est donc bien une primitive de $f(x)$ sur $]0; +\infty[$.

5. $F'(x) = f(x)$ or d'après le tableau de signe de la question 3., $f(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$ donc $F(x)$ est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

6. $F(1) = 0$ et $F(e) = e - 1 \approx 1,7$

$$1 - \frac{1}{2} \approx 0,63 \quad 0 < 0,63 < 1,7$$

$$1 < 1 - \frac{1}{e} < e.$$

La fonction F est continue, dérivable et strictement croissante sur $]1; e[$ et $1 < 1 - \frac{1}{e} < e$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in [1; e]$ tel que $F(\alpha) = 1 - \frac{1}{e}$.

7. Avec la calculatrice $1,9 < \alpha < 2,0$

Partie 2 :

1. $\ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$
donc $A\left(\frac{1}{e}; 0\right)$.

2. $g(x) = h(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = h(x) + 1$
 $\Leftrightarrow \ln(x) + 1 - \frac{1}{x} = 0$
 $\Leftrightarrow f(x) = 0$.

D'après la **partie 1**, $f(1) = 0$; l'abscisse du point P est 1.

$g(1) = \frac{1}{1} = 1$ donc $P(1; 1)$.

3. a. $\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{e}}^1 g(x) - h(x) dx$

car $g(x) \geq h(x)$ sur $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$

$\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{e}}^1 -f(x) dx$.

b. $\mathcal{A} = - \int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx = - \left[x \ln x - \ln x \right]_{\frac{1}{e}}^1$
 $= + \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} - \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e} + 1$.

4. a. Sur l'intervalle $[1; +\infty[$,
 $h(x) \geq g(x)$ donc

$\mathcal{B}_t = \int_1^t h(x) - g(x) dx = \int_1^t f(x) dx$
 $= [x \ln x - \ln x]_1^t = + \ln t - \ln t$

b. D'après la **partie 1** $\mathcal{B}_t = 1 - \frac{1}{e}$ pour
 $t = \alpha \approx 1,9$.

152. 1.

$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1) dx - \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$
 $= \int_0^1 x^n (x-1) \ln(x+1) dx$

Sur l'intervalle $[0; 1]$:

x	0	1
x^n	0	+
$x-1$	-	-
$\ln(x-1)$	0	+
$x^n(x-1)\ln(x-1)$	0	-

$x^n(x-1)\ln(x-1) \leq 0$ et

$\int_0^1 x^n(x-1)\ln(x-1) dx \leq 0$.

Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$, la suite u_n est décroissante.

Pour tout $[0; 1]$; $x^n \ln(x+1) \geq 0$

$\Leftrightarrow \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx \geq \int_0^1 x^n 0 dx$

$\Leftrightarrow u_n \geq 0$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers un réel ℓ .

1. $0 \leq x \leq 1$

$\Leftrightarrow 1 \leq x+1 \leq 2$
 $\Leftrightarrow 0 \leq \ln(x+1) \leq \ln 2$
 $\Leftrightarrow 0 \leq x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln 2$

$\Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \times \ln 2$

$\Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{1 \times \ln 2}{n+1}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0$, d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

153. Partie A :

$f(x)$ est dérivable sur $[0; +\infty[$

$f'(x) = 1 - e^{-x}$

$1 - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow -e^{-x} > -1 \Leftrightarrow e^{-x} < 1$
 $\Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0$

x	0	$+\infty$
$f(x)$		+
$f'(x)$	1	

$f(0) = 1$

$x = -x$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$

par addition : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$f(x) - x = e^{-x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$.

La droite d'équation est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Partie B : 1. $g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$
donc $g'(x) \geq 0$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	0	

$g(0) = 0$

donc $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - \ln(1+x) \geq 0$
 $\Leftrightarrow x \geq \ln(1+x)$.

2. On pose $x = \frac{1}{n}$:

$\frac{1}{n} \geq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq \ln(n+1) - \ln(n)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n} + \ln(n) \geq \ln(n+1)$

3. $f(x) = x + e^{-x}$;

$f(\ln(n)) = \ln(n) + e^{-\ln(n)} = \ln(n) + e^{-\ln n - 1}$

$= \ln(n) + \frac{1}{n}$.

4. $\mathcal{P}_1 : \ln(n) \leq u_n$ pour $n \geq 1$.

Initialisation : $\mathcal{P}_1 : \ln(1) \leq u_1$

$\Leftrightarrow 0 \leq 0$; $\mathcal{P}_1$ vraie.

Hérédité : On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie par un certain rang n .

$\ln(n) \leq u_n$

$\Leftrightarrow f(\ln(n)) \leq f(u_n)$

$\Leftrightarrow \ln(n+1) \leq \ln(n) + \frac{1}{n} \leq u_{n+1}$

$\Leftrightarrow \ln(n+1) \leq u_{n+1}$

Conclusion :

$\mathcal{P}_n$ est vraie en premier rang
si $\mathcal{P}_n$ vraie alors $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie

$\mathcal{P}_n$ vraie pour tout $n \geq 1$.

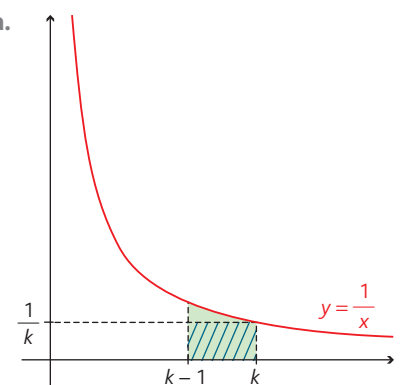
5. $\ln(n) \leq u_n$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$ par comparaison

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

$u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$ pour tout $n \geq 2$.

6. a.



$\mathcal{A}_{\text{hachurée}} = \frac{1}{e} \times 1 = \frac{1}{e}$

$\int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$.

On voit graphiquement que :

$\frac{1}{e} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$.

b. D'après l'égalité du 5. et celle du 6. a.

on a :

$u_n < 1 + \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \dots + \int_{n-2}^{n-1} \frac{1}{x} dx$

$\Leftrightarrow u_n \leq 1 + \int_1^{n-1} \frac{1}{x} dx$

$\Leftrightarrow u_n \leq 1 + [\ln x]_1^{n-1}$

$\Leftrightarrow u_n \leq 1 + \ln(n-1)$.

7. Pour tout entier $n \geq 2$ on a donc :

$\ln(n) \leq \ln(n-1) + \ln(n)$.

$\Leftrightarrow \frac{\ln(n)}{\ln(n)} \leq \frac{u_n}{\ln(n)} \leq \frac{1 + \ln(n-1)}{\ln(n)}$

$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{u_n}{\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln(n)} + 1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n)} + 1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1.$$

D'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 1.$$

154. 1. a.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right\} \text{ par produit } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{b. } f'(x) = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$$

$$2 \ln x + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x > -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}} \text{ (} e^x \text{ est une fonction croissante sur } \mathbb{R} \text{)}$$

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$g'(x)$		+	+
$2 \ln x + 1$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$	

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{2e}.$$

2. Équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse x_0 :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = x_0(2 \ln x_0 + 1)(x - x_0) + x_0^2 \ln x_0$$

Si cette tangente posée par l'origine du repère alors :

$$0 = -x_0^2(2 \ln x_0 + 1) + x_0^2 \ln x_0$$

$$\Leftrightarrow 0 = -x_0^2(\ln x_0 + 1)$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ n'est pas possible}$$

$$\text{donc } \ln x_0 + 1 = 0$$

$$\ln x_0 = -1$$

$$x_0 = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$y = \frac{1}{e} \left(2 \ln \left(\frac{1}{e} \right) + 1 \right) \left(x - \frac{1}{e} \right) + \left(\frac{1}{e} \right)^2 \ln \frac{1}{e}$$

$$= \left(-\frac{2}{e} + \frac{1}{e} \right) \left(x - \frac{1}{e} \right) - \left(\frac{1}{e} \right)^2$$

$$= -\frac{1}{e}x + \left(\frac{1}{e} \right)^2 - \left(\frac{1}{e} \right)^2 = -\frac{1}{e}x.$$

$$\text{3. a. Soit } g(x) = \frac{x^5}{25}(5 \ln x - 1)$$

$$g'(x) = \frac{5x^4}{25}(5 \ln x - 1) + \frac{x^5}{25} \times \left(\frac{5}{x} \right)$$

$$= x^4 \ln x - \frac{5x^4}{25} + \frac{5x^4}{25}.$$

$$\text{b. } V = \int_{\frac{1}{e}}^1 \pi ((f(x))^2 dx$$

$$= \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 x^4 \ln x \times \ln x dx ;$$

$$u = \ln x ; u' = \frac{1}{x} ;$$

$$v' = x^4 \ln x ; v = \frac{x^5}{25}(5 \ln x - 1).$$

$$V = \pi \left[\frac{x^5}{25}(5 \ln x - 1) \times \ln x \right]_{\frac{1}{e}}^1 - \int_{\frac{1}{e}}^1 (5 \ln x - 1) \times \frac{1}{x} dx$$

$$= \pi \left[\frac{-6}{25e^5} - \frac{1}{25} \left(\int_{\frac{1}{e}}^1 5x^4 \ln x dx - \int_{\frac{1}{e}}^1 x^4 dx \right) \right]$$

$$= \pi \left[\frac{-6}{25e^5} - \frac{1}{25} \left[\frac{x^5}{5}(5 \ln x - 1) - \frac{1}{5}x^5 \right]_{\frac{1}{e}}^1 \right]$$

$$= \pi \left[\frac{-6}{25e^5} - \frac{1}{25} \left[-\frac{1}{5} - \frac{1}{5} - \left(-\frac{7}{5e^5} \right) \right] \right]$$

$$= \pi \left[\frac{-6}{25e^5} + \frac{2}{125} - \frac{7}{125e^5} \right]$$

$$= \frac{\pi}{125} \left(2 - \frac{37}{e^5} \right)$$

155. Partie A : 1. a.

$$f'(x) = - \left(\frac{4e^x(e^{2x} + 1) - 4e^x(2e^{2x})}{(e^{2x} + 1)^2} \right)$$

$$= - \left(\frac{4e^x(-e^{2x} + 1)}{(e^{2x} + 1)^2} \right)$$

$$= - \frac{4e^x(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2}$$

b. • $4e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$

$$\bullet (e^{2x} + 1)^2 > 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$\bullet x > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 > 0 \text{ sur }]0 ; +\infty[.$$

Conclusion $f'(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$ donc f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

2. $f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$

$$f(-x) = 1 - \frac{4e^{-x}}{e^{-2x} + 1} = 1 - \frac{e^x}{\frac{1}{e^{2x}} + 1} = 1 - \frac{4}{e^x} \times \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}$$

$$= 1 - \frac{4e^{-x}}{e^{-2x} + 1} = f(x)$$

La fonction $f(x)$ est donc paire, sa courbe représentative sur $\mathbb{R}$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

$$\text{3. a. } f(0) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4e^a}{e^{2a} + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2a} + 1 - 4e^a}{e^{2a} + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^a)^2 - 4e^a + 1 = 0$$

En posant $c = e^a$ or c solution de l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$

$$\Delta = 16 - 4 \times 1 \times 1 = 12 :$$

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = 2 + \sqrt{3} ; x_2 = 2 - \sqrt{3}.$$

$$e^a = 2 + \sqrt{3}$$

$$a = \ln(2 + \sqrt{3}) \text{ ou } a = \ln(2 - \sqrt{3}).$$

Le point A ayant une abscisse positive on a : $a = \ln(2 + \sqrt{3})$.

b. D'après les questions précédentes

x	$-\infty$	$-a$	$+a$	$+\infty$	avec $a = \ln(2 + \sqrt{3})$
$f(x)$	+	0	-	0	+

Partie B :

1. $F'(x) = f(x)$ et d'après la **partie I.**

$F(x)$ est strictement croissante sur $]-\infty ; -a[\cup [a ; +\infty[$.

$F(x)$ est strictement décroissante sur $[-a ; a]$.

$$\text{2. } F(0) = \int_0^a f(0) dt$$

$f(x) < 0$ sur $[0 ; a]$ donc $F(0)$ est l'opposé de l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.

$f(0) = -1$ et le point A a pour abscisse a . L'aire du domaine est donc contenue dans un rectangle de longueur a et de largeur 1. $-a \leq F(0) \leq 0$

$$\text{3. a. } f(t) = 1 - \frac{4e^t}{e^{2t} + 1} = 1 - 4e^t \left(\frac{1}{e^{2t} + 1} \right)$$

$$\text{or } \frac{1}{e^{2t} + 1} < 1$$

$$\text{donc } f(t) \geq 1 - 4e^{-t}$$

$$\text{b. } f(t) \geq 1 - 4e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt \geq \int_0^x 1 - 4e^{-t} dt$$

$$\Leftrightarrow F(x) \geq [t + 4e^{-t} dt]_0^x$$

$$\Leftrightarrow F(x) \geq x + 4e^{-x} - 4 \geq x - 4 \text{ car}$$

$$4e^{-x} > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 4 = +\infty.$$

Par comparaison : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

4. Il me semble qu'il y a un problème d'énoncé car la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ a déjà été déterminée à la question **3.**

156. 1. $F'(x) = -e^{-x} + (x + 1)e^{-x} = xe^{-x}$

$$I_1 = \int_0^x xe^{-x} dx \text{ d'après la question 1..}$$

$$I_1 = [-(x + 1)e^{-x}]_0^x = -2e^{-1} + 1.$$

2. a. Pour tout $x \in [0 ; 1]$ $x^n e^{-x} \geq 0$ donc I_n représente l'aire du domaine située entre $\mathcal{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

On voit que lorsque n augmente cette aire diminue donc I_n semble décroissante.

$$\text{b. } I_{n+1} = I_n = \int_0^1 x^n (x - 1)$$

• $x^n \geq 0$
• $e^{-x} > 0$
• $x - 1 \leq 0$ sur $[0; 1]$
donc $x^n(x-1)e^{-x} \leq 0$ sur $[0; 1]$ et $I_{n+1} - I_n \leq 0$.
Donc la suite I_n est décroissante sur $[0; 1]$.
c. $I_n \geq 0$ car $x^n e^{-x} \geq 0$ donc la suite I_n est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.
d. $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \geq -x \geq -1 \Leftrightarrow e^{-x} \leq e^0$
 $\Leftrightarrow e^{-x} \leq 1 \Leftrightarrow x^n e^{-x} \leq x^n \Leftrightarrow \int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^n dx \Leftrightarrow I_n \leq \frac{1}{n+1}$
donc $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.
D'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

157. 1. a. $f(x) = \frac{e^x}{2-x}$ sur $[0; 1]$.
 $f'(x) = \frac{(x-1)e^{-x}}{(x-1)^2}$; f est décroissante sur $[0; 1]$.
 $\forall x \in [0; 1];$
 $f(1) \leq f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow \frac{1}{e} \leq \frac{e^{-x}}{2-x} \leq \frac{1}{2}$.

2. a. $G(x) = (ex^2 + bx + c)e^x$
 $G'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x}$
 $= e^{-x}(ex^2 + (2a-b)x + b-c)$

$$\begin{cases} a=0 \\ 2a-b=1 \\ b-c=2 \end{cases} \begin{cases} e=0 \\ b=-1 \\ c=-3 \end{cases}$$

$$G(x) = (-x-3)e^{-x}$$

$$\text{b. } J = \int_0^1 (2+x)e^{-x} dx = [(-x-3)e^{-x}]_0^1 = -4e^{-1} + 3.$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \frac{1}{e} &\leq f(x) \leq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x^2 \frac{1}{e} &\leq x^2 f(x) \leq x^2 \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{x^2}{e} dx &\leq K \leq \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 dx \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 &\leq K \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3e} &\leq K \leq \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } J + K &= \int_0^1 (2+x)e^{-x} + x^2 f(x) dx \\ &= \int_0^1 (2+x)e^{-x} + x^2 \frac{e^{-x}}{2-x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{(2+x)(2-x)e^{-x} + x^2 e^{-x}}{(2-x)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{(4-x^2)e^{-x} + x^2 e^{-x}}{(2-x)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{4e^{-x}}{2-x} dx = 4 \int_0^1 \frac{e^{-x}}{2-x} dx = 4I. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e. } J &= -4e^{-1} + 3 \\ \frac{1}{3e} &\leq K \leq \frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3e} - \frac{4}{e} + 3 &\leq K + J \leq \frac{1}{6} - \frac{4}{e} + 3 \\ \Leftrightarrow \frac{-11}{3e} + 3 &\leq K + J \leq \frac{19}{6} - \frac{4}{e} \\ \Leftrightarrow \frac{-11}{3e} + 3 &\leq 4I \leq \frac{19}{6} - \frac{4}{e} \\ \Leftrightarrow \frac{-11}{12e} + \frac{3}{4} &\leq I \leq \frac{19}{24} - \frac{1}{e} \\ I &\approx 0,42 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.} \end{aligned}$$

158. 1. a. $f_1(x) = \ln(1+x)$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1+x = +\infty$ par composée :
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ } $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b. $f'_1(x) = \frac{1}{1+x}$
 $f'_1(x) > 0$ sur $[0; +\infty[$ donc $f_1(x)$ est croissante sur $[0; +\infty[$.

c. $I = \int_0^1 \ln(1+x) dx$
 $u'(x) = 1; u(x) = x;$
 $v(x) = \ln(1+x); v'(x) = \frac{1}{1+x};$

$$\begin{aligned} I &= [x \ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx \\ &= \ln 2 - \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x} dx \\ &= \ln 2 - [x - \ln(1+x)]_0^1 \\ &= \ln 2 - [1 - \ln 2] \\ &= 2 \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

2. a.
 $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^n \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x^n + 1 \leq 2$
 $\Leftrightarrow \int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 \ln(x^n + 1) dx \leq \int_0^1 \ln 2 dx$
 $\Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \ln 2$.

b. Comme $0 \leq x \leq 1;$
 $x^{n+1} \leq x^n$
 $\Leftrightarrow \ln(1+x^{n+1}) \leq \ln(1+x^n)$
 $\Leftrightarrow \int_0^1 \ln(1+x^{n+1}) \leq \int_0^1 \ln(1+x^n)$

$I_{n+1} \leq I_n$.
La suite (I_n) est décroissante.

c. I_n est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.

3. a. $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$ sur $[0; +\infty[; g'(x) \leq 0; g(x)$ strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

b. $g(0) = 0$, comme $g(x)$ est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
 $g(x)$ est négative sur $[0; +\infty[$.
 $x \in [0; +\infty[$ pour tout $x \in [0; +\infty[$
donc $g(x^n) = \ln(1+x^n) - x^n \leq 0$
 $\ln(1+x^n) \leq x^n$

c. $0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 0 dx &\leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \int_0^1 x^n dx \\ \Leftrightarrow 0 &\leq I_n \leq \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

or $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, d'après le théorème des gendarmes $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

$$\begin{aligned} \text{159. } u_n &= \frac{n}{\ln 7} \int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f(n)(x) dx \\ &= \frac{n}{\ln 7} \left[\frac{4}{n} \ln(e^{nx} + 7) \right]_0^{\frac{\ln 7}{n}} \\ &= \frac{4}{\ln 7} [\ln 14 - \ln 8] \\ &= \frac{4}{\ln 7} \ln \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

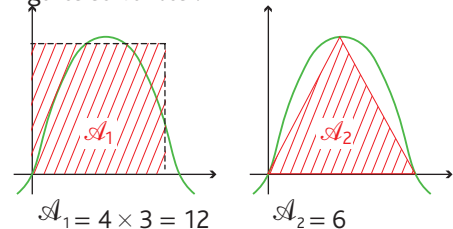
Or $\frac{4}{\ln 7} \ln \left(\frac{7}{4} \right)$ ne dépend pas de n donc la suite (u_n) est constante.

160. 1. a. $F(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0$
b. Sur $[0; 4] f(x) \geq 0$ donc $F(x) \geq 0$.
Sur $[-3; 0] f(x) \leq 0$
donc $\int_x^0 f(t) dt \leq 0 \Leftrightarrow -\int_0^x f(t) dt \leq 0$
 $\Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt \geq 0 \Leftrightarrow F(x) \geq 0$.

car $x \leq 0$ sur $[-3; 0]$.

c. $F(4) = \int_0^4 f(t) dt$.
 $F(4)$ représente l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de $f(x)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=4$ sur l'intervalle $[0; 4] f(x) \geq 0$.

On voit graphiquement que l'axe du domaine est encadrée par l'aire des deux figures suivantes :



donc $6 \leq F(4) \leq 12$.

2. a. f représente la dérivée de F .

b.

x	-3	0	4	8	
$F'(x) = f(x)$	-	$\circ$	+	$\circ$	-
$F(x)$	$F(-3)$	$F(0)$	$F(4)$	$F(8)$	

2. Nous savons que $F(0) = 0$ et que $6 \leq F(4) \leq 12$.

Aucune de ces 2 courbes ne peut être la représentation graphique de $F(x)$.

161. 1. a.

$$u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{1e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$$

$$= \int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1.$$

b. $u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = [-\ln(1+e^{-x})]_0^1$

$$= -\ln\left(1+\frac{1}{e}\right) + \ln 2.$$

2. $\forall x \in [0; 1] \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} > 0$, or l'intégrale d'une fonction positive sur $[0; 1]$ est positive donc u_n est positive ou nulle.

3. a.

$$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1+e^{-x})}{1+e^{-x}} dx$$

$$= \int_0^1 e^{-nx} dx = \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1$$

$$= -\frac{e^{-n}}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1-e^{-n}}{n}.$$

b. $u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$

$$u_n = \frac{1-e^{-n}}{n} - u_{n+1} \text{ or } u_{n+1} \geq 0$$

donc $u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$.

4.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-e^{-n}}{n} = 1 \left\{ \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} n = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-e^{-n}}{n} = 0.$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-e^{-n}}{n} = 0.$$

162. 1.

$$I_2 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

2. $I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n+1}} + (1-n)I_n$.

$$I_3 = e - \frac{\sqrt{e}}{2} - I_2 = e - \frac{\sqrt{e}}{2} - \frac{1}{2} + 1 = e - \frac{\sqrt{e}}{2} + \frac{1}{2}.$$

3. a. $1 \leq x \leq 2$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow e^0 \leq e^{\frac{1}{x}} \leq e^1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 \leq e^{\frac{1}{x}} \leq e$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n} \text{ car } \frac{1}{x^n} > 0.$$

b. $\int_1^2 0 dx \leq \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx \leq \int_1^2 \frac{e}{x^n} dx$.

$$\Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq e \left[-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}} \right]_1^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq e \left[-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \right]$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n-1} \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{n-1} = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{par produit} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right] = 1 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{n-1} \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right] = 0.$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

163. 1.

$$J_{n+1} - J_n = \int_1^{n+1} e^{-t} \sqrt{1+t} dt + \int_1^n e^{-t} \sqrt{1+t} dt$$

$$= \int_1^{n+1} e^{-t} \sqrt{1+t} dt$$

pour tout : $t \in [n; n+1] e^{-t} \sqrt{1+t} \geq 0$. Donc $J_{n+1} - J_n \geq 0$

$J_{n+1} \geq J_n$, la suite J_n est donc croissante.

2. a. $0 \leq \sqrt{u} \leq u$ sur $[2; +\infty]$ car $0 \leq u \leq u^2$.

En posant $u = t+1$ on obtient $0 \leq \sqrt{t+1} \leq t+1$.

b. $\sqrt{1+t} \leq t+1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t+1} e^{-t} \leq (t+1) e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^{n+1} \sqrt{t+1} e^{-t} dt \leq \int_1^{n+1} (t+1) e^{-t} dt$$

$$\Leftrightarrow J_n \leq I_n$$

c. $I_n = \int_1^n (t+1) e^{-t} dt$.

On pose $u(t) = t+1$; $u'(t) = 1$; $v'(t) = e^{-t}$; $v(t) = -e^{-t}$.

$$I_n = [(t+1) \times (-e^{-t})]_1^n + \int_1^n e^{-t} dt$$

$$= [-(n+1)e^{-n} + 2e^{-1}] + [-e^{-t}]_1^n$$

$$= [-(n+1)e^{-n} + 2e^{-1}] + [-e^{-n} + e^{-1}]$$

$$= -(n+1)e^{-n} + 3e^{-1} \leq 3e^{-1}$$

$$\text{car } -(n+2)e^{-n} \leq 0.$$

d. $J_n \leq I_n \leq 3e^{-1}$.

La suite J_n est croissante et majorée, elle est donc convergente.

164. 1. a. $e^{-x} > 0$ donc $f(x)$ est du signe de $(1+x)$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

b. On pose $X = -x$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) = -\infty \left\{ \begin{array}{l} \text{par produit} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f(x) = (1+x)e^{-x} = \frac{1}{e^x} + \frac{x}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{par somme} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

c. $f'(x) = e^{-x} - (1+x)e^{-x} = -xe^{-x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	0

2. a. Sur l'intervalle $[-1; n]$ $f(x) \geq 0$ donc $I_n \geq 0$.

b. $I_{n+1} - I_n = \int_{-1}^{n+1} f(x) dx - \int_{-1}^n f(x) dx$

$$= \int_n^{n+1} f(x) dx \geq 0.$$

Donc $I_{n+1} \geq I_n$, la suite I_n est croissante.

3. b.

$$I_n = (-2-n)e^{-n} + (2-1)e^1 = (-2-n)e^{-n} + e.$$

c. $I_n = \frac{-2}{e^n} - \frac{n}{e^n} + e$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{e^n} = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{par somme :} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} I_n = e.$$

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f(x)$ est positive sur $[-1; n]$ donc I_n mesure l'aire du domaine limité par les droites d'équations $x = -1$, $x = n$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f .

Cette aire a pour limite e quand n tend vers $+\infty$.

4. $\int_{-1}^{\alpha} f(x) dx = e \Leftrightarrow (-2-\alpha)e^{-\alpha} + e = e$

$$\Leftrightarrow (-2-\alpha)e^{-\alpha} = 0$$

$$e^{-\alpha} \neq 0$$

$$\text{donc } -2-\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$$

$$\int_{-1}^{-2} f(x) dx = - \int_{-2}^{-1} f(x) dx = e.$$

Cette intégrale correspond à l'aire du domaine délimité par les droites d'équation $x = -2$, $x = -1$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de $f(x)$.

165. Partie A :

1. a. $f(x) = x \times \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{x^2}.$

On pose $X = x^2$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{X}} = 0 \end{array} \right\} \text{ par produit : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

b. $f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2}$
 $= e^{-x^2} (1 - 2x^2).$

$$1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$			

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}.$$

2. $F(a) = \int_0^a x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^a$
 $= -\frac{1}{2} e^{-a^2} + \frac{1}{2}.$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(a) = \frac{1}{2}.$$

Partie B :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx.$$

1. a. $n \leq x \leq n+1$
 $\Leftrightarrow f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$
 car $f(x) \searrow$ sur $[2; +\infty[.$

$$\Leftrightarrow \int_n^{n+1} f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx$$

$$\Leftrightarrow f(n+1) \leq u_n \leq f(n).$$

b. $f(n+2) \leq u_{n+1} \leq f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$
 donc $u_{n+1} \leq u_n$, la suite est donc décroissante pour $n \geq 2$.

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$
 donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, la suite converge vers 0.

2. a. $\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x) dx$
 $= \int_0^n f(x) dx = F(n)$

car $F(0) = 0$ (voir question 2. de la partie A).

b. $F(n)$ converge vers $\frac{1}{2}$ (déjà démontré à la question 2. de la partie A), de plus $F(5)$

est une bonne approximation de l'aire du domaine délimité par les droites d'équation $x = 0$, $x = n$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de $f(x)$.

166. 1. a. $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$

$$\Leftrightarrow -1 \leq -x^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e} \leq e^{-x^2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e} \leq f(x) \leq 1.$$

b. $\int_0^1 \frac{1}{e} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 1 dx$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{e} \leq u_0 \leq 1.$

2. $u_1 = \int_0^1 x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^1$
 $= -\frac{1}{2} e^{-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{e} \right].$

3. a. $0 < 1$ et $x^n e^{-x^2} \geq 0$ donc $u_n \geq 0$.

b. $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x^2} dx - \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx$
 $= \int_0^1 x^n e^{-x^2} (x - 1) dx.$

Or $x - 1 \leq 0$ sur $[0; 1]$
 donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$
 $u_{n+1} \leq u_n$

La suite u_n est décroissante.

c. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.

4. a. $f(x) \leq 1 \Leftrightarrow x^n f(x) \leq x^n$
 $\Leftrightarrow \int_0^1 x^n f(x) dx \leq \int_0^1 x^n dx$
 $\Leftrightarrow u_n \leq \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1$
 $\Leftrightarrow u_n \leq \frac{1}{n+1}.$

b. $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

167. 1. $e^{-x} > 0 \Leftrightarrow 1 + e^{-x} > 1$
 $\Leftrightarrow \ln(1 + e^{-x}) > \ln 1$
 $\Leftrightarrow \ln(1 + e^{-x}) > 0.$

2. $f(x) = \ln(1 + x) - x$ sur $[0; +\infty[.$

a. $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}.$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	0	

$f(0) = 0.$

b. $f(x) \leq 0$ cf tableau de variation ci-dessus.

c. $\ln(1 + x) - x \leq 0 \Leftrightarrow \ln(1 + x) \leq x$
 en posant $x = e^{-x}$ $e^{-x} \in [0; +\infty[$
 $\Leftrightarrow \ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}.$

3. $d_n = \int_0^n \ln(1 + e^{-x}) dx$
 $\ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$
 $\Leftrightarrow \int_0^n \ln(1 + e^{-x}) dx \leq \int_0^n e^{-x} dx$
 $\Leftrightarrow d_n \leq [-e^{-x}]_0^n$
 $\Leftrightarrow d_n \leq -e^{-n} + 1 \leq 1.$

$$d_{n+1} - d_n = \int_0^{n+1} \ln(1 + e^{-x}) dx - \int_0^n \ln(1 + e^{-x}) dx$$

$$= \int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-x}) dx$$

or $\ln(1 + e^{-x}) > 0$
 donc $d_{n+1} - d_n \geq 0 \Leftrightarrow d_{n+1} \geq d_n$
 la suite d_n est croissante et majorée par 1, elle est donc convergente.

168. 1. $u_1 = \int_0^1 f_1(x) dx$
 $= \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx$
 $= [-\ln(1 + e^{-x})]_0^1$
 $= -\ln(1 + e^{-1}) + \ln 2.$
 $u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1 + e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx$
 $= \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^1 1 dx = 1.$
 $u_0 = 1 - u_1 = 1 + \ln(1 + e^{-x}) - \ln 2.$

2. $e^{-x} > 0 \Leftrightarrow 1 + e^{-x} > 1$
 $\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{1 + e^{-x}} < 1$
 $\Leftrightarrow 0 < \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} < e^{-nx}$
 $\Leftrightarrow \int_0^1 0 dx < \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} dx < \int_0^1 e^{-nx} dx.$

3. $0 < u_n < \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \right]_0^1$
 $\Leftrightarrow 0 < u_n < -\frac{e^{-n}}{n} + \frac{1}{n}$
 $\Leftrightarrow 0 < u_n < \frac{1}{n} (1 - e^{-n})$
 $\Leftrightarrow 0 < u_n < \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{e^n} \right).$

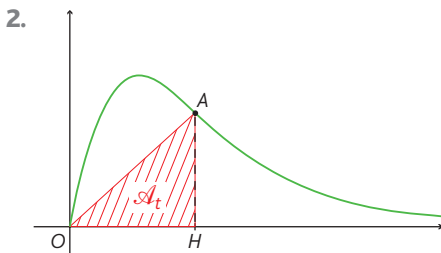
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{e^n} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{array} \right\} \text{ par produit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{e^n} \right) = 0.$$

D'après le théorème des gendarmes :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, la suite est donc convergente.

169. Partie A :

$$1. \int_0^1 f'(x) dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = \frac{1}{2e} - 0 = \frac{1}{2e}.$$



Soit $\mathcal{A}_t$ l'aire du triangle OAH.

$$\mathcal{A}_t = \frac{OA \times HA}{2} = \frac{1 \times \frac{1}{2e}}{2} = \frac{1}{4e}.$$

Graphiquement on voit que :

$$\int_0^1 f(x) dx \geq \frac{1}{4e}.$$

Partie B : 1.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 1 = +\infty \end{array} \right\} \text{par quotient : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

2. $g'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0$ sur $[0; +\infty[$.

x	0	α	1	$+\infty$
$g'(x)$				+
$g(x)$	-1	0	2	

$$g(0) = -1 \quad g(1) = 2$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $\alpha \in [0; 1]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

$$\begin{aligned} 3. a. f'(x) &= \frac{(1-x)e^{-x}(x^2+1) - 2x(xe^{-x})}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2e^{-x} + e^{-x} - x^3e^{-x} - xe^{-x} - 2x^2e^{-x}}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{e^{-x}(-x^3 - x^2 - x + 1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-e^{-x}(x^3 + x^2 + x - 1)}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

$f'(x)$ et $g'(x)$ sont de signes contraires.

b.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$			

$$4. u_n = \int_n^{2n} f(x) dx \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} a. (x-1)^2 &\geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2x} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2} \\ &\text{car } x \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b. 0 &\leq \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{xe^{-x}}{x^2 + 1} \leq \frac{e^{-x}}{2} \quad e^{-x} > 0 \\ &\Leftrightarrow \int_n^{2n} 0 dx \leq \int_n^{2n} \frac{xe^{-x}}{x^2 + 1} dx \leq \int_n^{2n} \frac{e^{-x}}{2} dx \\ &\Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \left[-\frac{1}{2}e^{-x} \right]_n^{2n} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq -\frac{1}{2}e^{-2n} + \frac{1}{2}e^{-n} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}(e^{-n} - e^{-2n}) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^{2n}}\right). \end{aligned}$$

$$c. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2n}} = 0.$$

D'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

$$170. 1. a. \text{ Si } x \geq 1 \\ e^x \geq e > 1 \\ e^x - 1 > 0$$

donc $f(x)$ est bien définie sur $[1; +\infty[$.

$f(x)$ est une fonction continue et définie sur $[1; +\infty[$ donc $H(x) = \int_1^x f(t) dt$ est bien définie sur $[1; +\infty[$.

b. $H'(x) = f(x)$, H est la primitive de f qui s'annule en 1.

c. $f(x)$ est positive sur l'intervalle $[1; 3]$. $H(3)$ est donc l'aire du domaine délimité par les droites $x = 1$, $x = 3$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de $f(x)$.

$$\begin{aligned} 2. a. \frac{x}{e^x - 1} &= \frac{x \times e^{-x}}{(e^x - 1) \times e^{-x}} \\ &= \frac{x \times e^{-x}}{1 - e^{-x}} = x \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}. \end{aligned}$$

$$b. \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 x \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx.$$

On pose :

$$u = x \quad ; \quad u' = 1;$$

$$v' = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \quad ; \quad v = + \ln(1 - e^{-x}).$$

$$\begin{aligned} \int_1^3 f(x) dx &= [x \ln(1 - e^{-x})]_1^3 - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \\ &= 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c. 1 \leq x \leq 3 &\Leftrightarrow -3 \leq -x \leq -1 \\ &\Leftrightarrow e^{-3} \leq e^{-x} \leq e^{-1} \\ &\Leftrightarrow -e^{-1} \leq -e^{-x} \leq -e^{-3} \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{e} \leq 1 - e^{-x} \leq 1 - \frac{1}{e^3} \\ &\Leftrightarrow \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right). \end{aligned}$$

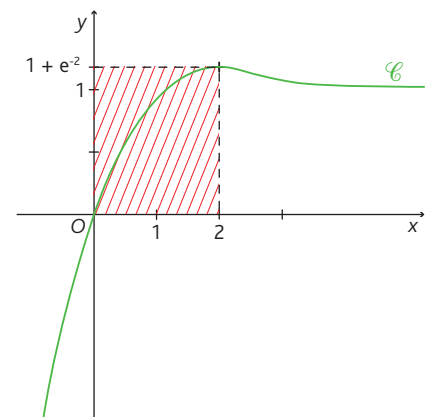
$$\begin{aligned} d. \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) &\leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) \\ &\Leftrightarrow \int_1^3 \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) dx \leq \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \leq \int_1^3 \ln\left(1 + \frac{1}{e^3}\right) dx \\ &\Leftrightarrow 2 \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) \leq \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \leq 2 \ln\left(1 + \frac{1}{e^3}\right). \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la question b. :

$$\begin{aligned} 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - 2 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) &\leq \int_1^3 f(x) dx \\ &\leq -2 \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) + 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \\ \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) &\leq \int_1^3 f(x) dx \leq -3 \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) + 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right). \end{aligned}$$

171. Partie A :

1.



2. a. $g(2)$ représente l'aire du domaine délimité par les droites d'équation $x = 0$, $x = 2$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de $f(x)$.

$$b. \mathcal{A}_{\text{rectangle}} = 2x(1 + e^{-2}) \leq 2,5.$$

donc $0 \leq g(2) \leq 2,5$.

3. a. Pour $x \geq 2$, $f(x) \geq 1$.

$$\Leftrightarrow \int_2^x f(t) dt \geq \int_2^x 1 dt.$$

$$\Leftrightarrow \int_2^x f(t) dt \geq x - 2.$$

$$\int_2^x f(t) dt = \int_0^x f(t) dt - \int_0^2 f(t) dt$$

$$= \int_0^x f(t) dt - g(2).$$

$$g(x) - g(2) \geq x - 2.$$

$$g(x) \geq x - 2 + g(2) \geq x - 2 \text{ car } g(2) \geq 0.$$

$$\text{b. } g(x) \geq x - 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = +\infty, \text{ par comparaison}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

$$4. g'(x) = f(x).$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x) = f(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘ ↗		

Partie B :

$$1. F'(t) = ae^{-t} - (et + b)e^{-t}$$

$$= ate^{-t} + (a - b)e^{-t}$$

$$= (-at + (a - b))e^{-t}.$$

$$\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Donc $F(t) = (-t)e^{-t}$; $F(t)$ et la primitive de $(t - 1)e^{-t}$ pas de $(t - 1)e^{-t} + 1$.

$$2. \int_0^x (t - 1)e^{-t} dt = [-te^{-t}]_0^x = -xe^{-x}$$

$$g(x) = \int_0^x (t - 1)e^{-t} dt + 1dt$$

$$= \int_0^x (t - 1)e^{-t} dt + \int_0^x 1dt$$

$$= -xe^{-x} + x$$

$$= x(1 - e^{-x})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^{-x}) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{array} \right\} \text{ par produit : } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty.$$

$$172. 1. \text{ a. Pour } t \in [0; 1]; t^n \geq 0 \text{ et } 0 \leq \cos t \leq 1 \text{ car } 1 < \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Donc } t^n \leq \cos t \leq 1 \text{ et } \int_0^1 t^n \leq \int_0^1 \cos t dt \leq 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{b. } x_{n+1} - x_n = \int_0^1 t^{n+1} \cos t dt - \int_0^1 t^n \cos t dt$$

$$= \int_0^1 t^n \cos t (t - 1) dt$$

$$\text{pour } t \in [0; 1]:$$

$$\bullet t^n \cos t \geq 0$$

$$\bullet t - 1 \leq 0$$

Donc

$$x_{n+1} - x_n \leq 0 \quad x_{n+1} \leq x_n, \text{ la suite } (x_n) \text{ est décroissante.}$$

$$\text{c. La suite } (x_n) \text{ est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.}$$

$$2. \text{ a. Pour } t \in [0; 1]:$$

$$0 \leq \cos t \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq t^n \cos t \leq t^n$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 0 dt \leq \int_0^1 t^n \cos t dt \leq \int_0^1 t^n dt$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x_n \leq \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{b. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

D'après le théorème des gendarmes

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0.$$

$$3. \text{ a. } x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1).$$

$$\text{On a : } y_n = \frac{x_{n+1} - \sin(1)}{-(n+1)} = \frac{\sin(1) - x_{n+1}}{(n+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = 0$$

$$0 \leq \sin 1 \leq 1.$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{\sin 1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1)}{n+1} = 0 \text{ d'après le théorème des gendarmes } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0.$$

$$4. y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

$$y_{n+1} = nx_n + x_n - \cos(1)$$

$$nx_n = y_{n+1} - x_n + \cos(1)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = \cos(1)$$

$$x_{n+1} = -ny_n - y_n + \sin(1)$$

$$ny_n = -x_{n+1} - y_n + \sin(1)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} ny_n = \sin(1).$$

173. Partie A :

1.

$$f'(x) = \frac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x = \frac{1 - (1 - 2 \ln x)}{x^4}$$

$$1 - 2 \ln x > 0 \Leftrightarrow -2 \ln x > -1$$

$$\Leftrightarrow \ln x < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x < e^{\frac{1}{2}}$$

• la fonction $f(x)$ est croissante sur l'intervalle $]0; e^{\frac{1}{2}}]$ et décroissante sur l'intervalle $[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$.

$$\bullet f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\ln e^{\frac{1}{2}}}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{e} = \frac{1}{2e}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0^+ \end{array} \right\} \text{ par quotient : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ par croissance composée.}$$

$$2. T : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$T : y = \frac{x_0(1 - 2 \ln x_0)}{x_0^4}(x - x_0) + \frac{\ln(x_0)}{x_0^2}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{-1 + 2 \ln x_0}{x_0^2} + \frac{\ln(x_0)}{x_0^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1 + 3 \ln x_0}{x_0^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -1 + 3 \ln x_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x_0 = e^{\frac{1}{3}}.$$

Il existe donc une tangente à $\mathcal{C}$ passant par l'origine du repère O, c'est la tangente

au point d'abscisse $x = e^{\frac{1}{3}}$ et d'équation : $y = \frac{1}{3e}x.$

Partie B :

1. a. $g(x)$ est la primitive de f sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1 où f est la dérivée de g sur $]0; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x) = f(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘ ↗		

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$g(1) = 0.$$

2 $g(3) = \int_1^3 f(t) dt$, $f(t)$ est continue et positive sur l'intervalle $[1; 3]$ donc $g(3)$ est l'aire du domaine délimité par les droites $x = 1$, $x = 3$ l'axe des abscisses et la courbe représentative de f .

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \int_1^{\frac{1}{2}} f(t) dt = -\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt = -f(t) dt,$$

$f(t)$ est continue et négative sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ donc $g\left(\frac{1}{2}\right)$ est l'axe du domaine délimité par les droites $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ l'axe des abscisses et la courbe représentative de f .

$$3. \text{ a. } g(x) = 1 - \frac{\ln x + 1}{x}.$$

$$\text{b. } g(x) = 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array} \right\} \text{ par somme : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g(x) = 1.$$

TP Info (p. 226)

Partie 1

On conjecture que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = 1.$$

Partie 2

1. a. $\forall x \in [0, \alpha] \ 0 \leq x^n \leq \alpha^n$,

donc $1 \leq 1 + x^n \leq 1 + \alpha^n$.

Étant donné que tous les membres sont strictement positifs, on en déduit que :

$$\frac{1}{1 + \alpha^n} \leq \frac{1}{1 + x^n} \leq 1.$$

b. On sait que :

$$\forall x \in [0, \alpha] \ \frac{1}{1 + \alpha^n} \leq \frac{1}{1 + x^n} \leq 1 \text{ donc}$$

$$\int_0^\alpha \frac{1}{1 + \alpha^n} dx \leq \int_0^\alpha \frac{1}{1 + x^n} dx \leq \int_0^\alpha 1 dx$$

soit

$$\frac{1}{1 + \alpha^n} \times (\alpha - 0) \leq \int_0^\alpha f_n(x) dx \leq 1 \times (\alpha - 0)$$

$$\text{donc } \frac{\alpha}{1 + \alpha^n} \leq \int_0^\alpha f_n(x) dx \leq \alpha.$$

2. a. $\forall x \in [\alpha, 1] \ 0 \leq x \leq 1$,

car $0 \leq \alpha < 1$

donc $0 \leq x^n \leq 1$ ainsi $1 \leq 1 + x^n \leq 2$

$$\text{donc } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1 + x^n} \leq 1$$

$$\text{soit } 0 \leq \frac{1}{1 + x^n} \leq 1.$$

On en déduit que :

$$0 \leq \int_\alpha^1 \frac{1}{1 + x^n} dx \leq \int_\alpha^1 1 dx$$

$$\text{donc } 0 \leq \int_\alpha^1 f_n(x) dx \leq 1 - \alpha.$$

b. D'après 1. b. et 2. a. on a par addition :

$$\frac{\alpha}{1 + \alpha^n} \leq \int_0^\alpha f_n(x) dx + \int_\alpha^1 f_n(x) dx \leq \alpha + 1 - \alpha.$$

$$\text{soit } \frac{\alpha}{1 + \alpha^n} \leq \int_0^1 f_n(x) dx \leq 1.$$

3. a.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x \in [0, 1] \ 0 \leq x^{n+1} \leq x^n$$

$$\text{donc } \frac{1}{1 + x^n} \leq \frac{1}{1 + x^{n+1}}.$$

b.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x \in [0, 1] \ \frac{1}{1 + x^n} \leq \frac{1}{1 + x^{n+1}}$$

$$\text{donc } \int_0^1 f_n(x) dx \leq \int_0^1 f_{n+1}(x) dx$$

soit $l_n \leq l_{n+1}$ ce qui prouve que la suite (l_n) est croissante.

c. La suite (l_n) est croissante et majorée par 1, donc d'après le théorème de convergence monotone elle converge vers un réel $l \in [0 ; 1]$.

d. D'après 2. b. $\forall \alpha \in [0 ; 1[$ on a :

$$\frac{1}{1 + \alpha^n} \leq \int_0^1 f_n(x) dx \leq 1.$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{1 + \alpha^n} = \alpha.$$

Donc après passage à la limite, l'inégalité du 2. b. devient :

$$\alpha \leq l \leq 1 - \alpha \leq 1.$$

e. Supposons $l \neq 1$ donc $0 \leq l < 1$. Pre-

nons $\alpha = l + \frac{1-l}{2} = \frac{1+l}{2}$ ainsi

$\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ en appliquant l'inégalité 3. d. on a $\alpha = l$ soit $\frac{1-l}{2} \leq l$ donc $l \geq 1$ ce qui est impossible.

L'hypothèse $l \neq 1$ est fautive, donc $l = 1$.

Sur les pas du supérieur (p. 227)

$$\text{I. A. 2. a. } F'(t) = -e^{-0,2t} + (0,2t + 1)e^{-0,2t} = 0,2te^{-0,2t} = f(t).$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \mu &= \frac{1}{23} \int_0^{23} 0,2te^{-0,2t} dt \\ &= \frac{1}{23} [(-t - 5)e^{-0,2t}]_0^{23} \\ &= \frac{1}{23} [-28e^{-4,6} + 5] \approx 0,21. \end{aligned}$$

c. Pendant 23 minutes, la quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du patient est de 0,21 ml/min.

$$\text{II. 1. a. } f'(x) = (4x + 3)e^{-x} - (2x^2 + 3x)e^{-x} = e^{-x}(-2x^2 + x + 3).$$

$$\text{Or } (-2x^2 + 3)(x + 1) = -2x^2 - 2x + 3x + 3 = -2x^2 + x + 3.$$

$$\text{Donc } f'(x) = e^{-x}(-2x + 3)(x + 1).$$

b.

x	0	$\frac{3}{2}$	6
$-2x + 3$	+	0	-
$x + 1$	+	+	+
e^{-x}	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-

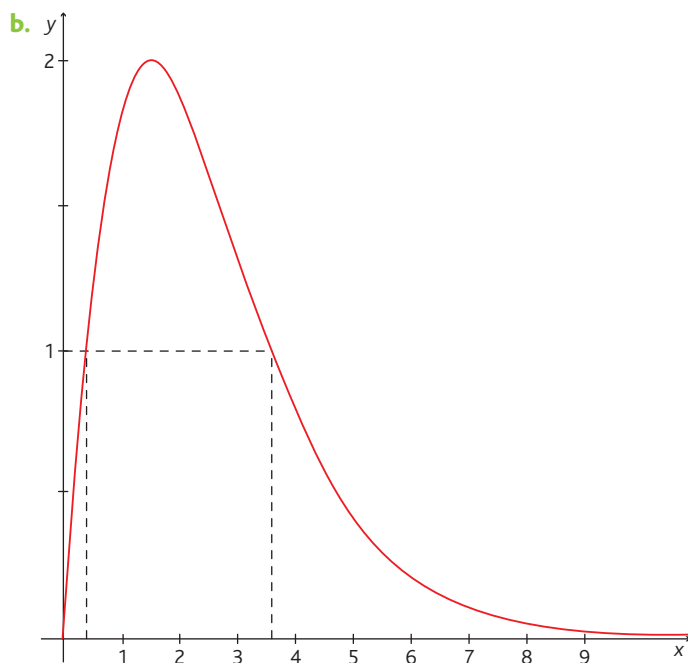
c.

x	0	$\frac{3}{2}$	6
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\approx 2,01$	

$$f\left(\frac{3}{2}\right) \approx 2,01$$

2. a.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	1,84	1,90	1,34	0,81	0,44	0,22



c. $f(x) = 1$ pour $x \approx 0,5$ et $x \approx 3,5$.

B. 1. $F'(x) = (-4x - 7)e^{-x} - (-2x^2 - 7x - 7)e^{-x}$
 $= e^{-x}(2x^2 + 3x) = f(x).$

2. $I = \int_0^6 f(x) dx$
 $= [(-2x^2 - 7x - 7)e^{-x}]_0^6 = -121e^{-6} + 7.$

C. 1. La production journalière sera maximale au bout de 150 jours. La production sera donc d'environ 2 milliers de tonnes.

2. La production journalière sera revenue à 1000 tonnes environ 350 jours après l'ouverture du site.

3. $V_m = \frac{1}{6} [7 - 121e^{-6}] \approx 1,117.$

III. 1. $\frac{e^{0,125t} : e^{0,125t}}{4,9 + e^{0,125t} : e^{0,125t}} = \frac{1}{4,9e^{0,125t} + 1}.$

2. $F'(t) = 8 \times \frac{0,125e^{0,125t}}{4,9 + e^{0,125t}} = \frac{e^{0,125t}}{4,9 + e^{0,125t}} = f(t).$

3. $V_m = \frac{1}{20-10} \int_{10}^{20} \frac{e^{0,125t}}{4,9 + e^{0,125t}} dt = \frac{1}{10} [8 \ln(4,9 + e^{0,125t})]_{10}^{20}$
 $= 0,8 [\ln(4,9 + e^{2,5}) - \ln(4,9 + e^{1,25})]$
 $= 0,8 \ln \left(\frac{4,9 + e^{2,5}}{4,9 + e^{1,25}} \right).$

4. $V_m \approx 0,569.$

IV. 1. $I = \int_3^{100} g(x) dx = [500e^{0,02x + 0,28}]_1^{100} = 500(e^{2,28} - e^{0,3}).$

2. $\mu = \frac{1}{99} \times 500(e^{2,28} - e^{0,3}) \approx 42,56.$

Nombres complexes

Programme officiel

Contenus	Capacités attendues
Nombres complexes Forme algébrique, conjugué. Somme, produit, quotient. Équation du second degré à coefficients réels. Représentation géométrique. Affixe d'un point, d'un vecteur. Forme trigonométrique : – module et argument, interprétation géométrique dans un repère orthonormé direct ; – notation exponentielle.	• Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes. • Résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du second degré à coefficients réels. • Représenter un nombre complexe par un point ou un vecteur. • Déterminer l'affixe d'un point ou d'un vecteur. • Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement. • Connaître et utiliser la relation $z\bar{z} = z ^2$ • Effectuer des opérations sur les nombres complexes écrits sous différentes formes.

Découverte (p. 230-231)

1. Un nouvel ensemble de nombres

1. $z^2 = i^2$ donc $S = \{-i ; i\}$.
 $z^2 = (2i)^2$ donc $S = \{-2i ; 2i\}$.

2. $(z-1)^2 + 1 = z^2 - 2z + 1 + 1 = z^2 - 2z + 2$;
 $z^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 = i^2$.
 $S = \{1-i ; 1+i\}$.

3. $z^2 - 4z + 13 = 0 \Leftrightarrow (z-2)^2 - 4 + 13 = 0$
 $\Leftrightarrow (z-2)^2 = -9 = (3i)^2$.
 $S = \{2-3i ; 2+3i\}$.

2. Première interprétation géométrique des nombres complexes

1. $M(a ; 0)$ et $M'(a' ; 0)$.

a. Si $a > 0$ et $a' > 0$ alors $r = a$ $r' = a'$ et $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM}) = 0$;
 $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM'}) = 0[2\pi]$.

Si $a > 0$ et $a' > 0$ alors $r = a$ $r' = a'$ et $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM}) = 0$;
 $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM'}) = \pi[2\pi]$.

Si $a < 0$ et $a' > 0$ alors $r = -a$ $r' = a'$ et $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM}) = \pi$;
 $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM'}) = 0[2\pi]$.

Si $a > 0$ et $a' > 0$ alors $r = -a$ $r' = -a'$ et $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM}) = \pi$;
 $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM'}) = 0[2\pi]$.

b. Si $a > 0$ et $a' > 0$ alors $r'' = aa'$ et $\theta'' = 0[2\pi]$.
 Si $a > 0$ et $a' < 0$ alors $r'' = -aa'$ et $\theta'' = \pi[2\pi]$.
 Si $a < 0$ et $a' > 0$ alors $r'' = -aa'$ et $\theta'' = \pi[2\pi]$.
 Si $a < 0$ et $a' < 0$ alors $r'' = aa'$ et $\theta'' = 0[2\pi]$.

2. $J(0, 1)$ donc $r = 1$ et $\theta = \frac{\pi}{2}[2\pi]$; donc $J \times J$ alors $r'' = 1$ et $\theta'' = \pi[2\pi]$ donc $J \times J$ a pour coordonnée cartésienne $(-1, 0)$ donc $i^2 = -1$.

3. a. $(x + iy)(x' + iy') = xx' + ixy' + iyx' + i^2yy'$
 $= (xx' - yy') + i(xy' + yx')$.

b. $r'' = rr'$ et $\theta'' = \theta + \theta'$
 donc $x'' = rr' \cos(\theta + \theta') = rr'(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta')$
 $y'' = rr' \sin(\theta + \theta') = rr'(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')$.

c. $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ et $\begin{cases} x' = r' \cos \theta' \\ y' = r' \sin \theta' \end{cases}$.

d.
 $xx' - yy' = rr' \cos \theta \sin \theta' - rr' \sin \theta \sin \theta' = rr'(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') = x''$
 $xy' - x'y' = rr' \cos \theta \sin \theta' + rr' \sin \theta \cos \theta' = rr'(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta') = y''$.
 Donc la méthode d'Argand est compatible avec les règles de calcul prolongeant $\mathbb{R}$.

Exercices (p. 258)

1. à 40. Corrigés dans le manuel.

1. Calcul dans $\mathbb{C}$

41. à 45. Corrigés dans le manuel.

46. a. $(i-1)^2 = -1 + 1 - 2i = 0 + i(-2)$.

b. $(1+i)^2 = 1^2 + i^2 + 2i = 0 + i2$.

47. a. $(1+i\sqrt{3})^2 = 1 + 3i^2 + 2i\sqrt{3} = -2 + i2\sqrt{3}$.

b. $(\sqrt{3}-1)^2 = 3 + 1 - 2\sqrt{3} = (4-2\sqrt{3}) + i0$.
 $(i\sqrt{3}-1)^2 = -3 + 1 - 2i\sqrt{3} = -2 + i(-2\sqrt{3})$.

48. a. $(2-i)^3 = 2^3 + 3 \times 2^2(-i) + 3 \times 2(-i)^2 + (-i)^3 = 8 - 12i - 6 + i = 2 + i(-11)$.

b. $(1+3i)^3 = 1^3 + 3 \times 3i + 3(3i)^2 + (3i)^3 = 1 + 9i - 27 - 27i = -26 - 18i$.

49. a. $\frac{1}{i} = 0 + i(-1)$.

b. $-\frac{2}{3i} = \frac{1}{-\frac{3}{2}i} = \frac{\frac{3}{2}i}{(\frac{3}{2})^2} = 0 + i\frac{2}{3}$.

50. a. $\frac{2-i}{2+i} = \frac{(2-i)^2}{5} = \frac{3}{5} + i\left(\frac{-4}{5}\right)$.

b. $\frac{1}{1-i} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$.

51. a. $\frac{3-5i}{i} = i(3-5i) = -5 + i(-3)$.

b. $\frac{i}{2+i} = \frac{i(2-i)}{5} = \frac{1}{5} + i\frac{2}{5}$.

52. a. $\frac{2+7i}{4-2i} = \frac{(2+7i)(4+2i)}{20} = \frac{8-14}{20} + i\frac{28+4}{20} = -\frac{3}{10} + i\frac{8}{5}$.

b. $\frac{-1-2i}{4-i} = \frac{(-1-2i)(4+i)}{17} = \frac{-2}{17} + i\frac{-9}{17}$.

53. a. $\frac{1}{i-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{-1}{4}$.

b. $\frac{i+\sqrt{3}}{1+i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$
 $= \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

54. a. $\frac{3-5i}{1+i} = \frac{(3-5i)(1-i)}{2} = -1 + i(-4)$.

b. $\frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+2i} = \frac{(\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}-2i)}{6} = 0 + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

c. $\frac{6+2i}{-1+3i} = \frac{(6+2i)(-1-3i)}{10} = 0 + i(-2)$.

55. a. $\frac{1}{1-i} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$.

b. $\frac{1}{1+\frac{1}{1-i}} = \frac{1}{\frac{1-i+1}{1-i}} = \frac{1-i}{2-i} = \frac{(1-i)(2+i)}{5} = \frac{3}{5} + i\left(\frac{-1}{5}\right)$.

56. et 57. Corrigés dans le manuel.

58. a. $z_1 + z_2 = 3 + i(-3)$.

b. $z_1 z_2 = (2-5i)(1+2i) = 12 + i(-1)$.

c. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-5i}{1+2i} = \frac{(2-5i)(1-2i)}{5} = -\frac{8}{5} + i\left(\frac{-9}{5}\right)$.

d. $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = \frac{z_1^2}{z_2^2} = \frac{-21-20i}{7^2-3+4i} = \frac{(-21-20i)(-3+4i)}{25} = -\frac{17}{25} + i\frac{144}{25}$.

e. $z_1 z_2^2 = (z_1 z_2) z_2 = (12-i)(i+2i) = 14 + i23$.

59. a. $2z + i = 5 - 2i \Leftrightarrow z = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$.

b. $iz + 1 = i (\Leftrightarrow z + \frac{1}{i} = 1 \text{ (car } i \neq 0))$.
 $\Leftrightarrow -z + i = -1 \Leftrightarrow z = 1 + i$.

60. a. $1-2z = 3iz + 5-i \Leftrightarrow (3i+2)z = -4+i$
 $\Leftrightarrow z = \frac{-4+i}{2+3i} \Leftrightarrow z = \frac{(-4+i)(2-3i)}{13} = \frac{-5}{13} + i\left(\frac{+14}{13}\right)$.

b. $iz + 1 = z - i \Leftrightarrow 1 + i = z(1-i)$
 $\Leftrightarrow z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i$.

61. a. $\frac{2z+1}{z-1} = 1 \Leftrightarrow 2z+1 = z-i \Leftrightarrow z = -1-i$.
 et $z \neq i$

b. $\frac{1-z}{1+z} = i \Leftrightarrow z \neq -1$ et $1-z = i + zi$
 $\Leftrightarrow 1-i = z(1+i)$
 $\Leftrightarrow z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i$.
 $z \neq -1$

62. a. $\frac{2+iz}{2-iz} = \frac{2+i}{2-i}$
 $\Leftrightarrow \cancel{4} + \cancel{z} + 2iz - \cancel{z}i = \cancel{4} + \cancel{z}i - 2iz + \cancel{z}$
 et $z \neq -2i$
 $\Leftrightarrow z-1 = 1-z$ et $z \neq -2i$.
 $\Leftrightarrow z = 1$.

b. $\frac{2}{iz+\sqrt{3}} = \frac{iz+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (iz+\sqrt{3})^2 = 4$

et $z \neq i\sqrt{3}$.

$\Leftrightarrow -z^2 + 3 + 2i\sqrt{3}z - 4 = 0$ et $z \neq i\sqrt{3}$.

$\Leftrightarrow (z^2 - 2i\sqrt{3}z) - 1 = 0$ et $z \neq i\sqrt{3}$.

$\Leftrightarrow z = 2i\sqrt{3} \pm \sqrt{-12+4} = i\sqrt{3} \pm \frac{2i\sqrt{2}}{2}$

et $z \neq i\sqrt{3}$.

$\Leftrightarrow z = (\sqrt{3} + \sqrt{2})i$ ou $z = (\sqrt{3} - \sqrt{2})i$.

2. Conjugué d'un nombre complexe

63. à 67. Corrigés dans le manuel.

68. 1. z_1 et z_2 sont conjugués ($\overline{z_1} = z_2$).

2. $z_1 = \frac{2+3i}{4+i} = \frac{(2+3i)(4-i)}{17} = \frac{11}{17} + i\frac{10}{17}$

donc $z_2 = \frac{11}{17} - i\frac{10}{17}$;

$z_1 + z_2 = \frac{22}{17}$ et $z_1 - z_2 = \frac{20}{17}i$.

69. $\overline{P(z)} = \overline{az^2 + bz + c} = \overline{az^2} + \overline{bz} + \overline{c}$
 $= \overline{a}\overline{z^2} + \overline{b}\overline{z} + \overline{c}$; (c est réel)
 $= a\overline{z^2} + b\overline{z} + c$; (a, b réels)
 $= P(\overline{z})$.

70. $z^2 - 2$ dépend de z ;

$z\overline{z}$ est réel;

$z + \overline{z}$ est réel;

$z - \overline{z}$ est imaginaire pur;

$(z+iz)(z-iz) = z^2 + z^2 = 2z^2$ dépend de z .

$\frac{z+iz}{z-iz} = \frac{(z+iz)(z-iz)}{-2iz^2} = \frac{2z^2}{-2iz^2} = i$.

$\frac{z+iz}{z-iz} = \frac{(z+iz)(z-iz)}{(z-iz)} = \frac{2z^2}{-2iz^2} = -\frac{1}{i} = i$

pour $z \neq 0$ donc imaginaire pur.

71. 1. $\vec{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$j^2 = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \vec{j}$

$\frac{1}{j} - \frac{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = j^2 = \vec{j}$.

2. $(\vec{j})^2 = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$= -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$1 + \vec{j} + j^2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = 0$.

3. $z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ou } z = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = (j)$$

d'où $z^2 + z + 1 = (z - j)(z + j)$.

Ou bien j est une solution évidente d'après 2.

Le polynôme est à coefficients réels donc les 2 racines sont conjuguées.

D'où 2 solutions sont j et $\bar{j}$ d'où la factorisation.

72. à 76. Corrigés dans le manuel.

3. Équations de degré 2

77. et 78. Corrigés dans le manuel.

79. a.

$$z^2 - \sqrt{3}z + 31 = 0 \Leftrightarrow \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{121i}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{11i}{2}\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{11i}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{3} + 11i}{2} \text{ ou } z = \frac{\sqrt{3} - 11i}{2}$$

b. $z^2 - 3z + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3i^2}{4} = 0$

$$\Leftrightarrow z = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$$

80. a. $z^2 - 6z + 10 = 0 \Leftrightarrow (z - 3)^2 - i^2 = 0$

$$\Leftrightarrow z = 3 - i \text{ ou } z = 3 + i$$

b. $z^2 - 22z + 410 = 0 \Leftrightarrow (z - 11)^2 - i^2 \times 289$

$$\Leftrightarrow z = 11 - 17i \text{ ou } z = 11 + 17i$$

81. a. $\delta^2 = \sin^2 \theta \Leftrightarrow \delta^2 i^2 \sin^2 \theta = 0$

$$\Leftrightarrow \delta = i \sin \theta \text{ ou } \delta = -i \sin \theta$$

b. On pose $z = \cos \theta = \delta$. Alors (E) revient à $(z - \cos \theta)^2 + 1 - \cos^2 \theta = 0$

$$\Leftrightarrow \delta^2 - i^2 \sin^2 \theta = 0$$

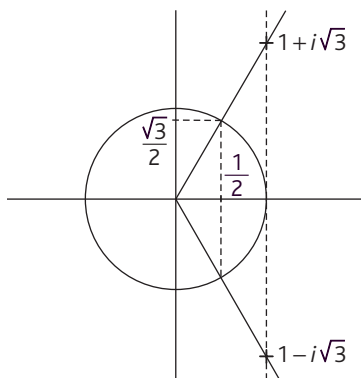
d'où $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ou $z = \cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$.

82. à 84. Corrigés dans le manuel.

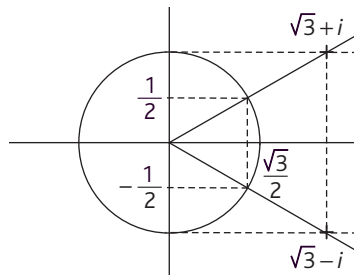
4. Représentation graphique d'un nombre complexe

85. à 87. Corrigés dans le manuel.

88. a.



b.



89. Soit J le milieu de FH et I le milieu de GE ;

$$z_J = \frac{z_F + z_H}{2} = \frac{z_B + z_C}{4} + \frac{z_A + z_D}{4} = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}$$

car F et H sont respectivement les milieux de $[BC]$ et $[AD]$.

De même $z_I = \frac{z_E + z_G}{2} = \frac{z_A + z_B}{4} + \frac{z_C + z_D}{4} = z_J$, donc I et J sont confondus donc si $(EFGH)$ est un quadrilatère, ses diagonales se coupent en leur milieu, $(EFGH)$ est donc un parallélogramme.

90. a. G est le centre de gravité du triangle, l'intersection des 3 médianes, il est le barycentre.

b. Soit A' le milieu de $[BC]$, B' le milieu de $[AC]$ et C' celui de $[AB]$:

$$\frac{z_{A'} - z_A}{z_G - z_A} = \frac{\frac{z_B + z_C}{2} - z_A}{\frac{z_A + z_B + z_C}{3} - z_A} = \frac{\frac{1}{2}(z_B + z_C - 2z_A)}{\frac{1}{3}(z_B + z_C + z_A)} = \frac{2}{3}$$

(car $z_A \neq \frac{z_B + z_C}{2}$ A n'est pas le milieu de $[BC]$) d'où $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AA'}$ donc G est sur la médiane issue de A . De même on montre : $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CC'}$ donc G est sur les 3 médianes.

91. 1. $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow a(z_A - z_G) + b(z_B - z_G) + c(z_C - z_G) = 0$$

$$\Leftrightarrow az_A + bz_B + cz_C = (a + b + c)z_G$$

$$\Leftrightarrow z_G = \frac{az_A + bz_B + cz_C}{a + b + c} \quad (a + b + c \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{a}{a + b + c} \overrightarrow{OA} + \frac{b}{a + b + c} \overrightarrow{OB} + \frac{c}{a + b + c} \overrightarrow{OC}$$

($a + b + c \neq 0$)

donc G est défini et unique.

2. Si $a = b = c$ alors

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{OC}$$

G est l'intersection des médianes, le centre de gravité.

5. Écriture trigonométrique

92. à 95. Corrigés dans le manuel.

96. $|z_A| = 5$ et $\arg(z_A) = 0[2\pi]$;
 $|z_B| = 4\sqrt{2}$ et $\arg(z_B) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$;

$$|z_C| = 4 \text{ et } \arg(z_C) = \frac{\pi}{2}[2\pi] ;$$

$$|z_D| = 4\sqrt{2} \text{ et } \arg(z_D) = \frac{5\pi}{4}[2\pi] ;$$

$$|z_E| = 6 \text{ et } \arg(z_E) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] ;$$

$$|z_F| = 6 \text{ et } \arg(z_F) = \frac{5\pi}{6}[2\pi] ;$$

$$|z_G| = 6 \text{ et } \arg(z_G) = -\frac{\pi}{3}[2\pi] .$$

97. a. $|-5i| = 5$, $\arg(-5i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b. $|-3| = 3$, $\arg(-3) = \pi[2\pi]$.

c. $|\sqrt{3} + 1| = 1 + \sqrt{3}$,
 $\arg(\sqrt{3} + 1) = 0[2\pi]$.

d. $|-i(2 + \sqrt{2})| = 2 + \sqrt{2}$,
 $\arg(-1(2 + \sqrt{2})) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

98. a. $z_1 = (-1 + i)(-1 + i\sqrt{3})$

$$= \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) 2 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 2\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$= 2\sqrt{2} e^{i\frac{17\pi}{12}} \text{ d'où } |z_1| = 2\sqrt{2}$$

et $\arg z_1 = \frac{17}{12}\pi$.

b. $z_2 = 4 - 4i = 4(1 - i) \Rightarrow |z_2| = 4\sqrt{2}$,
 $\arg z_2 = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

c. $z_3 = (\sqrt{3} + 2) \frac{1}{\sqrt{6} + i\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{3} + i}$

$$= \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 2}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

d'où $|z_3| = \frac{\sqrt{3} + 2}{2\sqrt{2}}$ et $\arg z_3 = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

d. $z_4 = -i(2\sqrt{3} - 6i) = -i2\sqrt{3}(1 - \sqrt{3}i)$

$$= -i4\sqrt{5} \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} ; |z_4| = 4\sqrt{3} \text{ et } \arg z_4 = \left(-\frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{3}\right)[2\pi] = -\frac{5\pi}{6}[2\pi]$$

99. a. $|(4 + 3i)(5 - 1)| = |4 + 3i| \times |5 - i|$

$$= 5\sqrt{26}.$$

b. $|(2 - 3i)^5| = (|2 - 3i|)^5 = \sqrt{13}^5 = 169\sqrt{13}$.

c. $\left|\frac{5}{(6 - 1)^2}\right| = \frac{|5|}{|6 - 1|^2} = \frac{5}{37}$.

100. a. $\left|\frac{x + iy}{x - iy}\right| = \frac{|x + iy|}{|x - iy|} = 1$.

b. $\left|\frac{3 - 7i}{(1 - i)^4}\right| = \frac{|3 - 7i|}{|1 - i|^4} = \frac{\sqrt{58}}{4}$.

c. $\left|\frac{1}{4 + 5i} + \frac{1}{6 + 7i}\right| = \left|\frac{6 + 7i + 4 + 5i}{(4 + 5i)(6 + 7i)}\right|$

$$= \frac{|10 + 12i|}{|4 + 5i| \times |6 + 7i|} = \frac{\sqrt{244}}{\sqrt{41}\sqrt{85}} = \frac{2\sqrt{61}}{\sqrt{41}\sqrt{85}}$$

101. a. $z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12}\right)$

$$= 2 \left(\cos -\frac{\pi}{12} + i \sin -\frac{\pi}{12}\right)$$

d'où $|z_1| = 2$ et $\arg z_1 = -\frac{\pi}{12}[2\pi]$.

$$\begin{aligned} \text{b. } z_2 &= -2 \left(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \right) \\ &= 3 \left(-\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \\ &= 3 \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

d'où $|z_2| = 3$ et $\arg z_2 = -\frac{5\pi}{12}[2\pi]$.

$$\begin{aligned} \text{102. } 1+i &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\ \text{d'où } |1+i| &= \sqrt{2} \text{ et } \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}. \\ (1+i)^{2012} &= \left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^{2012} = (\sqrt{2})^{2012} e^{i\frac{\pi}{4} \times 2012} \\ &= 2^{1006} e^{i503\pi} = 2^{1006} e^{i\pi} = 2^{1006}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{103. a. } |z_1| &= |-1+i| \times |\sqrt{2} + \sqrt{2}i|^3 \\ &= \sqrt{2} \times 2^3 = 8\sqrt{2}; \\ \arg(z_1) &= \arg(i-1) + 3\arg(\sqrt{2} + \sqrt{2}i) \\ &= +\frac{3\pi}{4} + 3 \times \frac{3\pi}{4} = \pi[2\pi]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } |z_2| &= |-2i| \times |1+i\sqrt{3}|^6 \\ &= 2 \times 2^6 = 2^7 = 128; \\ \arg z_2 &= \arg(-2i) + 6\arg(1+i\sqrt{3}) \\ &= -\frac{\pi}{2} + 6 \times \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}[2\pi]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } |z_3| &= \left| \frac{(\sqrt{3}+i)^2}{-1-i} \right| = \left(\frac{|\sqrt{3}+i|}{|-1-i|} \right)^2 \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right)^2 = 2; \\ \arg z_3 &= 2(\arg(\sqrt{3}+i) - \arg(-1-i)) \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{5\pi}{4} \right) \right) = -\frac{\pi}{6}[2\pi]. \end{aligned}$$

$$\text{104. a. } \sqrt{(3-1)^7} = \sqrt{2^7} (\cos 0 + i \sin 0).$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \frac{(1+i)^2}{(1-i)^3} &= \frac{2 \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^2}{2\sqrt{2} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} \right)^3} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \frac{2+2i}{3-3i\sqrt{3}} &= \frac{2}{3} \frac{1+i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{6} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } \left(\frac{1}{1-i} \right)^{2012} &= \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}} \right)^{2012} = \frac{1}{2^{1006}} \left(e^{i\frac{3\pi}{4}} \right)^{2012} \\ &= \frac{1}{2^{1006}} e^{i509\pi} = \frac{1}{2^{1006}} (\cos \pi + i \sin \pi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e. } 1+i \sin \frac{\pi}{6} &= 1+i \frac{1}{2} = 1+\frac{i}{2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \cos \left(\arctan \left(\frac{1}{2} \right) \right) + i \sin \left(\arctan \left(\frac{1}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

$$\text{f. } -i \cos \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12} (-i)$$

$$= \left(\cos \frac{\pi}{12} \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right).$$

$$\begin{aligned} \text{105. a. } (2+2i)^6 &= \left[2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]^6 \\ &= \left(2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right)^6 \\ &= (2\sqrt{2})^6 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^6 \\ &= 2^9 \left(\cos \frac{6\pi}{4} + i \sin \frac{6\pi}{4} \right) = -512i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } (1-i)^9 &= \left(\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)^9 \\ &= \sqrt{2}^9 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)^9 \\ &= 16\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{9\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{9\pi}{4} \right) \right) \\ &= 16\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \\ &= 16-16i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } (\sqrt{3}-3i)^6 &= \sqrt{3}^6 (1-\sqrt{3}i)^6 \\ &= 27 \times 2^6 \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^6 \\ &= 27 \times 64 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)^6 \\ &= 27 \times 64 \left(\cos \left(-\frac{6\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{6\pi}{3} \right) \right) = 1728. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } \frac{1}{(1-i)^{12}} &= \frac{1}{\sqrt{2}^{12} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)^{12}} \\ &= \frac{1}{2^6} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{12} \\ &= \frac{1}{64} \left(\cos \frac{12\pi}{4} + i \sin \frac{12\pi}{4} \right) = \frac{-1}{64}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e. } (1-i\sqrt{3}) &= 2^{16} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)^{16} \\ &= 2^{16} \left(\cos \left(-\frac{16\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{16\pi}{3} \right) \right) \\ &= 2^{16} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2^{15} + i2^{15}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f. } \frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}+i)^2} &= \frac{\sqrt{2}^4 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^4}{2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^2} \\ &= \frac{\cos \pi + i \sin \pi}{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \\ &= -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

106. Soit $P(n)$ la proposition : $\forall \theta \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$. $P(0)$ est vraie car $(\cos \theta + i \sin \theta)^0 = 1$ et $\cos 0 + i \sin 0 = 1$.

Supposons $P(n)$ vraie pour n donné.

$$\begin{aligned} \text{Alors } (\cos \theta + i \sin \theta)^{n+1} &= (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta + i \sin \theta)^n \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \\ &= \cos \theta \cos(n\theta) - \sin \theta \sin(n\theta) \\ &\quad + i(\sin \theta \cos(n\theta) + \cos \theta \sin(n\theta)). \end{aligned}$$

Or $\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a+b)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
et $\cos a \sin b + \sin a \cos b = \sin(a+b)$

D'où :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^{n+1} = \cos((n+1)\theta) + i \sin((n+1)\theta).$$

$P(n+1)$ est donc vraie.

On a montré par récurrence que $P(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

107. 1.

$$|z| = |-3-3i| = 3\sqrt{2} \quad \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = 3\sqrt{2}$$

$$\text{et } \arg z = -\frac{5\pi}{4}[2\pi].$$

$$|z'| = |\sqrt{3}+i| = 2 \quad \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right| = 2$$

$$\text{et } \arg z = \frac{\pi}{6}[2\pi].$$

$$\begin{aligned} \text{2. } zz' &= 3\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right) \\ &\quad \times 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &= 6\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} \right) \right) \\ &= 6\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{7\pi}{12} \right) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{z'} &= \frac{3\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right)}{2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)} \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}} \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right) \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

$$|zz'| = 62, \quad \arg zz' = \frac{7\pi}{12}[2\pi], \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ et } \arg \frac{z}{z'} = \frac{\pi}{12}.$$

$$\text{108. a. } z_1 = 1+i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right);$$

$$z_2 = 1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{b. } z_3 &= \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{2} \\ &= \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i \frac{\sqrt{3}-1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)}{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

109.

$$|z+z'| + |z-z'|^2 = (z+z')(\overline{z+z'}) + (z-z')(\overline{z-z'}) \\ = (z+z')(\overline{z} + \overline{z'}) + (z-z')(\overline{z} - \overline{z'}).$$

$$\begin{aligned} \text{110. } &= \overline{z}z + \overline{z}z' + z\overline{z} + z\overline{z'} + \overline{z}z - \overline{z}z' - z\overline{z} + z\overline{z'} \\ &= 2\overline{z}z + 2z\overline{z'} \\ &= 2|z|^2 + 2|z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2) \\ z &= \overrightarrow{AB} \text{ et } z' = \overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

Dans un parallélogramme $(ABCD)$, la somme des carrés des diagonales $(z + z'$ et $z - z')$ est égale à la somme des carrés de tous les côtés (z, z', z, z') .

$$\begin{aligned} 111. \text{ a. } z^2 &= 25(-\sqrt{2} + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - \sqrt{2})^2 \\ &= 25(2 + \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2} - 2i(\sqrt{2} + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})) \\ &= 25(2\sqrt{2} - 2i\sqrt{4} - 2 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}) \\ &= 25(2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i) \\ &= 100\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 100\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right). \end{aligned}$$

$$\text{D'où } z = 10\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\text{ou } z = -10\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Comme la partie réelle de z est négative $(-5\sqrt{2} + \sqrt{2})$,

$$z = -10\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 10\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$\text{d'où } |z| = 10 \text{ et } \arg z = \frac{7\pi}{4} [2\pi].$$

$$\begin{aligned} 112. \text{ 1. } a^2 &= (\sqrt{2} - \sqrt{3} - i\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \\ &= 2 - \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} - 2i\sqrt{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} \\ &= 2\sqrt{3} - 2i = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) \\ &= 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

$$|a^2| = 4 \text{ et } \arg(a^2) = \frac{7\pi}{6}.$$

$$2. \text{ a} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$\text{ou } a = -2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

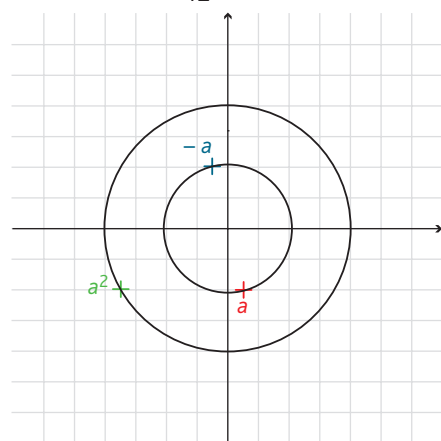
$$= 2\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right).$$

Comme $\operatorname{Re}(a) = \sqrt{2} - \sqrt{3} > 0$,

$$a = 2\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$$

(car $\cos\frac{19\pi}{12} > 0$ et $\cos\frac{7\pi}{12} < 0$).

$$|a| = 2 \text{ et } \arg a = \frac{19\pi}{12} [2\pi].$$



$$3. \cos\frac{7\pi}{12} = -\cos\frac{19\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{et } \sin\frac{7\pi}{12} = -\sin\frac{19\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{2}\right) = +\sin\frac{7\pi}{12} = +\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\frac{7\pi}{12} = +\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}.$$

113.

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + \cos\theta - i\sin\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ &= 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

$$= 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$\text{d'où } |z_1| = 2\cos\frac{\theta}{2} \text{ et } \arg z_1 = \frac{\theta}{2} [2\pi]$$

$$\text{pour } \cos\frac{\theta}{2} \geq 0 \text{ soit } \theta \in [0; \pi].$$

$$= -2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$\text{d'où } |z_1| = -2\cos\frac{\theta}{2} \text{ et } \arg z_1 = \pi - \frac{\theta}{2} [2\pi]$$

$$\text{pour } \cos\frac{\theta}{2} \leq 0 \text{ soit } \theta \in [\pi; 2\pi].$$

$$z_2 = 1 - \cos\theta + i\sin\theta = 1 + \cos(\pi + \theta) - i\sin(\pi + \theta).$$

En reprenant le calcul pour z_2 :

$$z_2 = 2\cos\left(\frac{\pi + \theta}{2}\right)\left(\cos\left(-\frac{\theta + \pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\theta + \pi}{2}\right)\right)$$

$$= -2\cos\left(\frac{\pi + \theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right)\right)$$

$$\text{d'où } |z_2| = -2\cos\frac{\pi + \theta}{2} \text{ et } \arg z_2 = \frac{\pi + \theta}{2} [2\pi]$$

$$\text{pour } -\cos\frac{\pi + \theta}{2} \geq 0 \text{ soit } \theta \in [0; 2\pi].$$

$$\frac{z_1}{z_2} \text{ est défini sur }]0; 2\pi[.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2\cos\frac{\pi + \theta}{2}e^{-i\frac{\theta + \pi}{2}}} = -\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}e^{-\frac{2}{2}(\theta - \theta - \pi)}$$

$$= -\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\pi}{2}} = -i\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}};$$

$$= -i\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}};$$

$$\text{d'où sur }]0; \pi[, \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\text{et } \arg\frac{z_1}{z_2} = -\frac{\pi}{2} [2\pi] = (\arg z_1 - \arg z_2);$$

$$\text{sur } [\pi; 2\pi[, \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{-\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\text{et } \arg\frac{z_1}{z_2} = \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

114. Soit N le point tel que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OM'}$; $(OMNM')$ est un parallélogramme. On a $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$ d'où : $z_N = z + z'$.

Or $OM \leq OM' + MM'$. Comme O, M et M' sont des points quelconques, on a aussi : $ON \leq OM' + NM'$ donc $ON \leq OM' + OM$ ($OMNM'$ étant un parallélogramme : $OM = NM'$) d'où $|z = z'| \leq |z'| + |z|$.

6. Les nombres complexes et la géométrie

115. et 116. Corrigés dans le manuel.

117. 1. b.

$$u = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{4 + 2i - (-2 + 2i)}{-2 - 4i - (-2 + 2i)} = \frac{6}{-6i} = i;$$

d'où $|u| = 1$ et $\arg u = \frac{\pi}{2} [2\pi] = (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$ donc (ABC) est un triangle en A et isocèle.

$$2. \overrightarrow{AB} : z = 4 + 2i - (-2 + 2i) = 6;$$

$$\overrightarrow{AC} : z = -2 - 4i - (-2 + 2i) = -6;$$

$$\overrightarrow{BC} : z = -2 - 4i - 4 - 2i = -6 - 6i.$$

3. $\overrightarrow{AB}$ est réel pur et $\overrightarrow{AC}$ est imaginaire pur donc (AB) et (AC) sont perpendiculaires donc (ABC) est rectangle en A . $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = 6$ donc (ABC) est aussi isocèle.

$$118. 2. u = \frac{b - a}{d - a} = \frac{2i + 3}{-1 - 3i + 3} = \frac{3 + 2i}{2 - 3i} = \frac{(3 + 2i)(2 + 3i)}{13} = i$$

d'où $(AB) \perp (AD)$ et $AB = AD$; (ABC) est rectangle isocèle en A .

3. C tel que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ donc :

$$z_C = z_D - z_A + z_B = -1 - 3i + 3 + 2i = 2 - i.$$

119. 2. Calculons :

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{1 + 2i}{-2 + i} = \frac{(1 + 2i)(-2 - i)}{5} = -i$$

donc (ABC) est rectangle isocèle en C .

$$2. z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{-1 + 2 + i + 1 - i}{3} = \frac{2}{3}.$$

121. 1.

$$z_1 = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

$$z_B = 2(\cos 0 + i\sin 0).$$

$$z_C = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

$$2. \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2(0 - \sqrt{3}i)}{2(1 - \sqrt{3}i)} = \frac{\sqrt{3}(-i)}{\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)}$$

$$= \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{d'où } (\vec{AB}; \vec{AC}) = -\frac{\pi}{3}$$

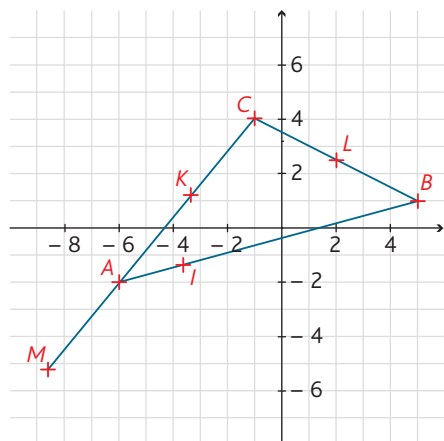
$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{z\left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{z\left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} = \frac{\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)}{\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}}{\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{d'où } (\vec{BC}; \vec{BA}) = -\frac{\pi}{3}.$$

Comme la somme des angles aux sommets d'un triangle est π , on en déduit que les 3 angles aux sommets sont égaux ce qui caractérise un triangle équilatéral.

122. 1.



$$2. z_K = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-6 - 2i - 1 + 4i}{2} = -\frac{7}{2} + i$$

$$z_L = \frac{z_C + z_B}{2} = -2 + \frac{5}{2}i.$$

$$3. M \text{ est tel que } z_A = \frac{z_M + z_K}{2}$$

$$\text{d'où } z_M = 2z_A - z_K = -\frac{17}{2} - 5i.$$

4.

$$3\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\vec{IA} + \vec{AI} = \vec{0} \Leftrightarrow -4\vec{IA} = \vec{AB} \\ \Leftrightarrow \vec{AI} = \frac{1}{4}\vec{AB} \text{ donc } I \text{ est unique.}$$

$$\text{Ou bien : } 3\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow 3(z_A - z_I) + (z_B - z_I) = 0$$

$$\Leftrightarrow z_I = \frac{3z_A + z_B}{4} = -\frac{13}{4} - \frac{5}{4}i \text{ donc } I \text{ est unique.}$$

5.

$$z_M - z_I = -\frac{17}{2} + \frac{13}{4} - 5i + \frac{5}{4}i = -\frac{21}{4} - \frac{15}{4}i \\ z_I - z_L = -\frac{13}{4} - 2 - \frac{5}{4}i - \frac{5}{2}i = -\frac{21}{4} - \frac{15}{4}i \quad \text{égalité}$$

6. On en déduit que $\vec{IM} = \vec{LI}$
donc $\vec{LI} + \vec{IM} = 2\vec{LI}$ donc $\vec{LI} = \frac{1}{2}\vec{LM}$
donc I est le milieu de $[LM]$.

123. 1. $z - 2i = z_{\vec{BC}}$ et $1 - 2i = z_{\vec{BA}}$

donc : $\left|\frac{z - 2i}{1 - 2i}\right|$ est le support $\frac{BC}{BA}$ et

$\arg\left(\frac{z - 2i}{1 - 2i}\right)$ est une mesure de l'angle $(\vec{BA}; \vec{BC})$.

$$2. \forall \theta \in \mathbb{R}, \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \text{ donc } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10} \text{ donc } \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Comme $\alpha \in]-\pi; 0]$, $\sin \alpha \leq 0$ donc $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$

3. Par construction de C , on a :

$$\left|\frac{z - 2i}{1 - 2i}\right| = \sqrt{\frac{2}{5}} \text{ (car } \frac{BC}{BA} = \sqrt{\frac{2}{5}} \text{)}$$

et $\arg\left(\frac{z - 2i}{1 - 2i}\right) = \alpha [2\pi]$ donc :

$$\left|\frac{z - 2i}{1 - 2i}\right| = \sqrt{\frac{2}{5}} (\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ = \sqrt{\frac{2}{5}} \left(\frac{1}{\sqrt{10}} - i \frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$

$$\left|\frac{1 - 3i}{5}\right| = \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{\sqrt{2}}{5} \text{ et}$$

$$\frac{1 - 3i}{5} = \sqrt{\frac{2}{5}} \left(\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{3}{\sqrt{10}}i\right) \\ = \sqrt{\frac{2}{5}} (\cos \alpha + i \sin \alpha), \text{ donc}$$

$$\frac{z - 2i}{1 - 2i} = \frac{1 - 3i}{5} \text{ (même module et même argument).}$$

$$\text{D'où } z = 2i + \frac{(1 - 2i)(1 - 3i)}{5} \\ = 2i + \frac{1 - 6 - 5i}{5} = -1 + i.$$

4. $AB = |z_B - z_A| = |2i - 1| = \sqrt{5}$
 $AC = |z_C - z_A| = |-2i + i| = \sqrt{5}$ donc :
 $AB = AC$ donc (ABC) est isocèle en A .

124. 1. b. $(ABQK)$ est un parallélogramme donc $\vec{QK} = \vec{BA}$.

$$z_Q = \frac{z_B + z_O}{2} = 2i + i\sqrt{3} \text{ et}$$

$$z_K = z_A - z_B + z_Q \\ = 5 - i\sqrt{3} - 4 - 2i\sqrt{3} + 2 + i\sqrt{3} \\ = 3 - 2i\sqrt{3}.$$

$$\text{c. } u = \frac{k - a}{k} = \frac{3 - 2i\sqrt{3} - 5 + i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3}} \\ = \frac{-2 - i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3}} = -\frac{(2 + i\sqrt{3})}{21}(3 + 2i\sqrt{3}) \\ = -\frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{-i}{\sqrt{3}} \text{ donc } (\vec{QK}; \vec{AK}) = -\frac{\pi}{2}.$$

d. (OK) et (AK) sont deux droites perpendiculaires.

2. Cf 1. b..

3. Cf 1. c..

Donc (OKA) est un triangle en K :

$$\left(u = \frac{z_K - z_A}{z_K - z_O} \text{ imaginaire pur}\right).$$

$(OQAK)$ est un (parallélogramme) rectangle.

En effet $(ABQK)$ étant un parallélogramme, $\vec{BQ} = \vec{AK}$.

Or Q est le milieu de $[OB]$ donc $\vec{BQ} = \vec{QO}$
d'où $\vec{QO} = \vec{AK}$.

Donc $(AKOQ)$ est un parallélogramme et il a un angle droit.

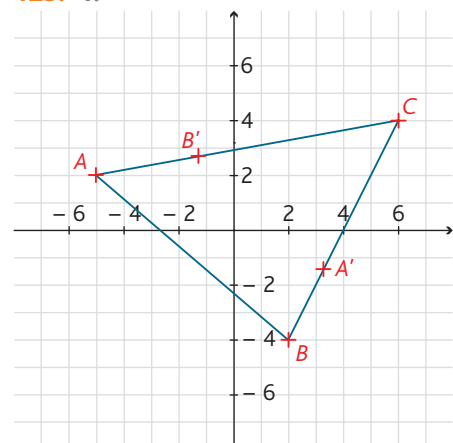
4. On conjecture que B, C, L sont alignés.

Calculons $\frac{k - b}{k - c}$ pour le vérifier :

$$\frac{3 - 2i\sqrt{3} - 4 - 2i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3} - \frac{10}{3} + \frac{2i\sqrt{3}}{3}} = \frac{-1 - 4i\sqrt{3}}{\frac{-1 - 4i\sqrt{3}}{3}} \\ \frac{k - b}{k - c} = \frac{5 + 12i\sqrt{3}}{1 + 4i\sqrt{3}} = \frac{(3 + 12i\sqrt{3})(1 - 4i\sqrt{3})}{49} \\ = \frac{3 - 12i\sqrt{3} + 12i\sqrt{3} + 144}{49} = \frac{147}{49} = 3.$$

D'où $\vec{BK} = 3\vec{CK}$ et $\vec{KC} = \frac{1}{3}\vec{KB}$ donc K, B, C sont effectivement alignés.

125. 1.



$$2. 2\vec{A'B} + \vec{A'C} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow 2(z_B - z_{A'}) + z_C - z_{A'} = 0 \\ \Leftrightarrow z_{A'} = \frac{2z_B + z_C}{3}.$$

Donc A' existe et est unique.

En remplaçant A' par B' et B par A , on a de même : $z_{B'} = \frac{2z_A + z_C}{3}$ B' donc existe et est unique.

$$z_{A'} = \frac{10}{3} - \frac{4}{3}i \text{ et } z_{B'} = \frac{-4}{3} + \frac{8}{3}i.$$

b. $|3z + 6| = 3|z - 1 + i| \Leftrightarrow 3|i(z - 2i)|$
 $= 3|z - 1 + i| \Leftrightarrow |z - 2i| = |z - 1 + i|$.
 E_2 est la médiatrice de $[CD]$ où $C : 2i$ et $D : 1 - i$.

c. $|-2\bar{z} + 4| = 2|z + 4i|$
 $\Leftrightarrow |\bar{z} - 2| = |z + 4i|$
 $\Leftrightarrow |z - 2i| = |z + 4i|$.

E_3 est la médiatrice de $[EF]$ où $E : 2i$ et $F : -4i$.

137. a. $|z - 1| = |z + 2i|$: médiatrice de $[AB]$ avec $A : 1$ et $B : -2i$.

b. $|\bar{z} + 2i| = 2 \Leftrightarrow |z - 2i| = 2$: cercle de centre $O : 2i$ et de rayon 2.

c. $\sqrt{2}|z - i + 1| = |(1 - i)z|$
 $\Leftrightarrow \sqrt{2}|z - 1 + i| = |(1 - i)z| = \sqrt{2}|z|$
 médiatrice de $[AB]$ avec $A : 1 - i$ et $B : 0$.

d. $|2i\bar{z} + 1 - i| = 2|z + 1|$
 $\Leftrightarrow |\bar{z} + \frac{1-i}{2}| = |z + 1|$
 $\Leftrightarrow |z + \frac{1-i}{2}| = |z + 1|$

médiatrice de $[AB]$ avec $A : \frac{1-i}{2}$ et $B : -1$.

138. a. Cf. **140. a.**

b. $\arg z = \frac{\pi}{2}[\pi]$: axe des ordonnées privé de l'origine.

c. $\arg(z) = 0[2\pi]$: point sur l'axe des abscisses et l'abscisse strictement positive.

139. a. $\arg(z) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$;

$(\vec{u}; \vec{OM}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$;

point sur la bissectrice ($xy > 0$) des axes abscisses et ordonnées avec $x > 0$ et $y > 0$.

b. $\arg(z + 2) = \frac{\pi}{4}[\pi]$;

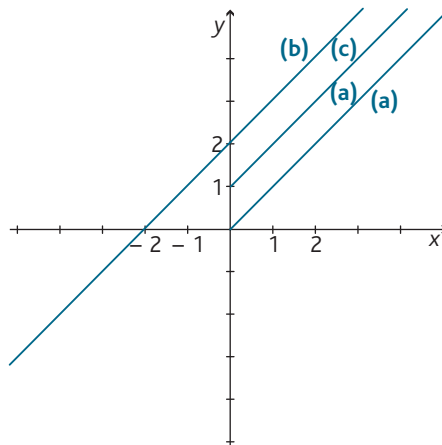
$(\vec{u}; \vec{AM}) = \frac{\pi}{4}[\pi]$;

point sur l'axe passant par A d'affixe -2 et d'angle $\frac{\pi}{4}$ avec l'axe des abscisses et privé de point A .

c. $\arg(z - i) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$;

$(\vec{u}; \vec{BM}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$;

demi-axe issu de B (d'affixe i) privé de B d'angle $\frac{\pi}{4}$ avec l'axe des abscisses et à « droite » de B .



140. a.

$\arg(z) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \rightarrow (\vec{u}; \vec{OM}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

donc M parcourt l'axe des ordonnées avec $y > 0$.

b. $\arg(z - 1) = \frac{\pi}{2}[\pi] \rightarrow (\vec{u}; \vec{AM}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$
 donc M parcourt l'axe d'abscisse 1 privé du point $1 + 0i$.

c. $\arg(\bar{z}) = \frac{\pi}{4}[2\pi] \Leftrightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$
 donc $(\vec{u}; \vec{OM}) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$: bissectrice des axes abscisses et ordonnées ($xy < 0$) tel que $x > 0$ et $y < 0$.

d. $\arg(iz) = \frac{\pi}{3}[\pi] \Leftrightarrow \arg(i) + \arg(z) = \frac{\pi}{3}[\pi]$
 $\Leftrightarrow \arg(z) = (\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2})[\pi] = -\frac{\pi}{6}[\pi]$: axe privé de l'origine, passant par l'origine et le point $\frac{\sqrt{3}}{2} - i \times \frac{1}{2}$.

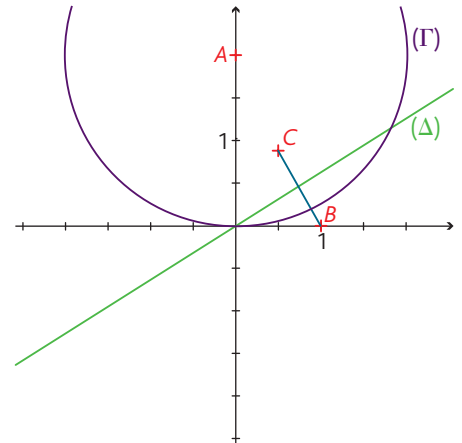
141. a. $\frac{z+1}{z-2i}$ est un réel

$\Leftrightarrow z + 1 = r(z - 2i)$ et $z \neq 2i$ avec $r \in \mathbb{R}$
 c'est la droite (AB) privée de A avec A d'affixe $2i$ et $B : -1$.

b. $\frac{z+1}{z-2i}$ est imaginaire pur implique $(AM) \perp (BM)$ et $M \neq A$ avec A d'affixe $2i$ et $B : -1$.

M est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A .

142. 1.



2. Γ est le cercle de centre A et de rayon 2, partiellement représenté sur le graphe ci-dessus.

3. Δ est la médiatrice de $[BC]$.

143. 1. $f(-3 + i) = \frac{-3 + i + 1 - 2i}{-3 + i + 2 + i}$
 $= \frac{-2 - i}{-1 + 2i}$
 $= \frac{(-2 - i)(-1 - 2i)}{5}$
 $= \frac{2 - 2 + 4i + i}{5} = i$.

2. $f(z) = 2i \Leftrightarrow z + i - 2i = 2iz + 4i - z$
 $\Leftrightarrow (1 - 2i)z = -3 + 6i$
 $\Leftrightarrow z = -3$.

3. $f(x + iy) = \frac{(x + 1) + (y - 2)i}{(x + 2) + (y + 1)i}$
 $= \frac{((x + 1) + (y - 2)i)((x + 2) - (y + 1)i)}{(x + 2)^2 + (y + 1)^2}$
 $= \frac{(x + 1)(x + 2) + (y - 2)(y + 1) + i((y - 2)(x + 2) - (x + 1)(y + 1))}{(x + 2)^2 + (y + 1)^2}$
 $\text{Re}(z) = \frac{yx - 2x + 2y - 4 - xy - x - y - 1}{(x + 2)^2 + (y + 1)^2}$
 $\text{Im}(z) = \frac{-3x + y - 5}{(x + 2)^2 + (y + 1)^2}$.

4. $f(z)$ est réel $\Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$
 $\Leftrightarrow y = 3x + 5$ et $z \neq -2 - i$.
 C'est la droite $y = 3x + 5$ privée de $(-2; -1)$.

$f(z)$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -2 - i \\ x^2 + 3x + 2 + y^2 - y - 2 = 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow z \neq -2 - i$ et
 $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 0$
 $\Leftrightarrow z \neq -2 - i$ et

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow M \neq (-2; -1)$$

et M parcourt le cercle de centre $\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

144. 1. a. $f(z) = z \Leftrightarrow z = \frac{2z}{z-2i}$

$$\Leftrightarrow z^2 - 2(1+i)z = 0 \text{ et } \Leftrightarrow z \neq -2-i$$

$$\Leftrightarrow z(z-2-2i) = 0 \text{ et } \Leftrightarrow z \neq 2i$$

d'où $z = 0$ et $z = 2 + 2i$ sont invariants par f .

b. $z_f = \frac{2i+2}{2} = i+1$.

$$f(B) = f(z) = \frac{4}{2-2i} = 2 \frac{1+i}{2} = 1+i.$$

$$f(I) = \frac{2+2i}{1+i-2i} = 2 \frac{1+i}{1-i} = (1+i)^2 = 2i.$$

2. $|z'| = \left| \frac{2z}{z-2i} \right| = \frac{2|z|}{|z-2i|}$

d'où $OM' = \frac{2OM}{AM}$.

$$\arg z' = \arg \frac{2z}{z-2i} = \arg 2 + \arg \frac{z}{z-2i}$$

$$= 0 + \arg \frac{2z}{z-2i};$$

d'où $(\vec{u}; \vec{OM'}) = (\vec{AM}; \vec{OM}) + k2\pi$.

3. Δ est l'ensemble des points qui vérifient : $|z| = |z-2i|$.

$$f(z) = \frac{2z}{z-2i}$$

donc $|f(z)| = |OM'| = \frac{2|z|}{|z-2i|} = 2$.

$\mathcal{C}$ est de centre l'origine et de rayon 2.

4. Γ est l'ensemble des points qui vérifient :

$$(\vec{MA}; \vec{MO}) = \frac{\pi}{2}[\pi] \text{ et } M \neq A$$

$$\Leftrightarrow (\vec{AM}; \vec{OM}) = \frac{\pi}{2}[\pi] \text{ et } M \neq A$$

$$\Leftrightarrow \arg \left(\frac{z}{z-2i} \right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg \left(\frac{z'}{2} \right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg(z') = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

car $\arg \left(\frac{z'}{2} \right) = \arg(z') - \arg(2) = 0$.

Or $O \in \Gamma$ donc $O \in f(\Gamma)$;

D'où $f(\Gamma)$ est la droite des ordonnées.

8. Forme exponentielle

145. à 147. Corrigés dans le manuel.

148. $\bar{j} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$;

$$j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}};$$

$$j+j^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -1 = e^{i\pi};$$

$$1+j = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}};$$

$$j-j^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = i\sqrt{3} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}};$$

$$1-j = 1 + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3-i\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right)$$

$$= \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

149. $z = (i-1)^{29} = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} \right)^{29}$

$$= 2^{14} \sqrt{2} e^{-\frac{87\pi}{4}}$$

d'où $|z| = 2^{14} \sqrt{2}$

et $\arg z = -\frac{87}{4}\pi[2\pi]$.

$$z = (\sqrt{3}-i)^5 = \left(2e^{-i\frac{\pi}{6}} \right)^5 = 32e^{-\frac{5\pi}{6}}$$

d'où $|z| = 32$

et $\arg z = \frac{5\pi}{6}[2\pi] = \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

$$z = (2-2i\sqrt{3})^{78} = \left(4e^{-i\frac{\pi}{3}} \right)^{78}$$

$$= 2^{156} e^{-i\frac{78\pi}{3}}$$

d'où $|z| = 2^{156}$

et $\arg z = -\frac{78\pi}{3}[2\pi] = 0[2\pi]$.

150. $\frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}$

d'où $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\arg z = \frac{\pi}{12}[2\pi]$.

$$\frac{2i(1-i)}{3+3i\sqrt{3}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{6+e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

d'où $|z| = \frac{\sqrt{2}}{3}$ et $\arg z = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

$$\frac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{\pi}{2}} (=i)$$

d'où $|z| = 1$ et $\arg z = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

151. $\frac{(\sqrt{3}+i)^{26}}{(1-i\sqrt{3})^{11}} = \frac{2^{26}e^{i\frac{\pi}{6} \times 26}}{2^{11}e^{-i\frac{\pi}{3} \times 11}}$

$$= \frac{2^{15}e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} = 2^{15}e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

152. $a = -2(1-i)$

$$= -2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$b = -\sqrt{3}(\sqrt{3}+i)$$

$$= -2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

d'où $ab = 4\sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

153. 1. $\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2-2i} = \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(2+2i)}{8}$

$$= \frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}+i(2\sqrt{6}+2\sqrt{2})}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

2. $z_1 = \sqrt{2}(\sqrt{3}-i) = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

et $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

d'où $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}e^{-i(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})} = e^{-i\frac{\pi}{12}}.$

3. De 1. et 2. on déduit

$$e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

d'où $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$

154. 1. $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}.$

2. $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$ et $\bar{j} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$

Or $\frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ donc $j^2 = \bar{j}.$

$$j^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)^3 = e^{i2\pi} = 1.$$

$$1+j+j^2 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0.$$

2. a. (ABC) est équilatéral de sens direct

$$\Leftrightarrow \arg \left(\frac{c-a}{b-a} \right) = \frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ et } \left| \frac{c-a}{b-a} \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}} = -e^{i\frac{4\pi}{3}} = -j^2.$$

b. $\frac{c-a}{b-a} = -j^2 \Leftrightarrow c-a = -j^2b + j^2a$

$$\Leftrightarrow c-j^2b - (1+j^2)a = 0$$

$$\Leftrightarrow cj^2 + j^3b - (-j)^2a = a + bj + cj^2 = 0$$

D'où, d'après a. $a + bj + cj^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ (ABC) est équilatéral de sens direct.

155. a. Pour $\theta \in]0; \pi[$,

$$|1 + e^{i\theta}| = (1 + e^{i\theta})(1 + e^{-i\theta})$$

$$\text{car } |z|^2 = z\bar{z}$$

$$\begin{aligned} &= 1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta} + e^{\theta} \\ &= 2 + 2 \cos \theta \\ &\quad \left(\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right) \\ &= 2(1 + 2 \cos \theta) \end{aligned}$$

$$(1 + \cos \theta) > 0 \text{ pour } \theta \in]0; \pi[$$

$$\text{donc } |1 + e^{i\theta}| = \sqrt{2(1 + \cos \theta)}.$$

$$\text{Or } \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\text{donc } |1 + e^{i\theta}| = \sqrt{2 \times 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = 2 \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\text{car } \cos \frac{\theta}{2} > 0 \text{ sur } \theta \in]0; \pi[.$$

$$\begin{aligned} 1 + e^{i\theta} &= 1 + \cos \theta + i \sin \theta \\ &= 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ &= 2 \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \arg(1 + e^{i\theta}) = \frac{\theta}{2} [2\pi]$$

$$\text{pour } \theta \in]0; \pi[.$$

$$\text{b. Pour } \theta \in]\pi; 2\pi[,$$

$$\text{on a toujours}$$

$$|e^{i\theta} + 1|^2 = 2(1 + \cos \theta) = 4 \cos^2 \frac{\theta}{2}.$$

$$\text{Comme } \cos \frac{\theta}{2} < 0 \text{ sur } \theta \in]\pi; 2\pi[,$$

$$\text{on a } |e^{i\theta} + 1| = -2 \cos \frac{\theta}{2}.$$

$$\text{D'où}$$

$$\begin{aligned} 1 + e^{i\theta} &= -2 \cos \frac{\theta}{2} \left(-\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ &= -2 \left(\cos \frac{\theta}{2} \left(-\cos \pi + \frac{\theta}{2} \right) - i \sin \left(\pi + \frac{\theta}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \arg(1 + e^{i\theta}) = \pi + \frac{\theta}{2} [2\pi].$$

$$\text{156. a. } z = 1 - e^{i\theta}, \theta \in]0; 2\pi[.$$

$$z = 1 - \cos \theta - i \sin \theta$$

$$\text{d'où } |z|^2 = 1 + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta + \sin^2 \theta = 2(1 - \cos \theta)$$

$$\forall \theta \in]0; 2\pi[, 1 - \cos \theta \geq 0$$

$$\text{donc } |z| = \sqrt{2(1 - \cos \theta)} = \sqrt{2(1 + \cos(\pi + \theta))}$$

$$1 + \cos(\theta + \pi) = 2 \cos^2 \left(\frac{\theta + \pi}{2} \right)$$

$$\cos \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \geq 0 \text{ ne se réalise pas sur }]0; 2\pi[$$

$$\text{donc } |z| = -2 \cos \frac{\theta + \pi}{2}$$

$$\begin{aligned} z &= 1 - \cos \theta - i \sin \theta \\ &= 1 + \cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi) \\ &= 2 \cos^2 \frac{\theta + \pi}{2} + 2i \sin \left(\frac{\theta + \pi}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta + \pi}{2} \right) \\ &= 2 \cos \frac{\theta + \pi}{2} \left(\cos \frac{\theta + \pi}{2} + i \sin \frac{\theta + \pi}{2} \right) \end{aligned}$$

$$= -2 \cos \frac{\theta + \pi}{2} \left(\cos \frac{\theta + 3\pi}{2} + i \sin \frac{\theta + 3\pi}{2} \right)$$

$$\text{d'où } \arg(z) = \frac{\theta + 3\pi}{2} [2\pi] = \frac{\theta - \pi}{2} [2\pi].$$

$$\text{b. } 1 - e^{-i\theta} = 1 - e^{i\theta}$$

$$\text{d'où } |z| = -2 \cos \frac{\theta + \pi}{2} \text{ sur }]0; 2\pi[$$

$$\text{et } \arg(z) = \frac{\pi - \theta}{2} [2\pi].$$

$$\begin{aligned} \text{157. a. } z_1 &= (3 - 3\sqrt{3}i)^4 \\ &= (\sqrt{3})^4 (\sqrt{3} - i)^4 \\ &= 9 \times 2^4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right)^4 \\ &= 9 \times 2^4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right)^4 \\ &= 9 \times 16 \times e^{(-i\frac{\pi}{6})^4} \\ &= 144 e^{-i\frac{2\pi}{3}}. \end{aligned}$$

$$\text{b. } z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{c. } z_3 &= \frac{\sin \frac{\pi}{12} - i \cos \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}} \\ &= \frac{e^{i(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2})}}{e^{i\frac{\pi}{12}}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{158. 1. } z_1 &= 3\sqrt{3} + 3i \\ &= 3 \times 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = 6e^{i\frac{\pi}{6}}. \end{aligned}$$

$$\text{2. } -z = 6e^{-i\frac{5\pi}{6}};$$

$$z^2 = 6^2 e^{i\frac{\pi}{3}} = 36e^{i\frac{\pi}{3}};$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{6} e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

$$\text{159. 1. } z_1 = -2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{5\pi}{2}}.$$

$$z^2 = ie^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

$$\text{2. } z_1 z_2 z_3 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} e^{i\frac{5\pi}{6}} 4e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 8e$$

$$z_2 z_1^2 = e^{i\frac{5\pi}{6}} \times 2^2 e^{i\frac{3\pi}{2}} = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

$$\text{3. } (z_1)^3 = \left(2e^{i\frac{3\pi}{2}} \right)^3 = 8e^{i\frac{9\pi}{2}} = 8e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{160. } (-1 + i)^4 (3 + 3i\sqrt{3})^6 \\ &= \sqrt{2}^4 \left(e^{i\frac{3\pi}{4}} \right)^4 6^6 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^6 \\ &= 4 \times 6^6 \underbrace{e^{i3\pi}}_{-1} \underbrace{e^{i3\pi \times 6}}_{-1} = -4 \times 6^6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{161. } \sqrt{6} + i\sqrt{2} &= \sqrt{2}(\sqrt{3} + i) \\ &= 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) \\ &= 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{6}}. \end{aligned}$$

Donc $(\sqrt{6} + i\sqrt{2})^n$ est réel si et seulement si $\left(e^{i\frac{\pi}{6}} \right)^n$ est réel

$$\text{soit } e^{i\frac{n\pi}{6}} \text{ est réel donc } \sin \frac{n\pi}{6} = 0$$

$$\text{d'où } \frac{n\pi}{6} = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{d'où } n = 6k, n \text{ est un multiple de 6.}$$

$$\text{162. 1. } z = e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta$$

de module $2 \sin \theta$ sur $]0; \pi[$ et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

$$\text{2. } z = 1 + e^{2i\theta} = e^{i\theta}(e^{-i\theta} + e^{i\theta}) = 2 \cos \theta e^{i\theta}$$

de module $2 \cos \theta$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et d'argument θ .

$$\text{3. } z = 1 - e^{2i\theta} = e^{i\theta}(e^{-i\theta} - e^{i\theta}) = -2i \sin \theta e^{i\theta}$$

$$= -2 \sin \theta e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} = 2 \sin \theta e^{i(\theta + \frac{\pi}{2} + \pi)}$$

de module $+2 \sin \theta$ sur $]0; \pi[$ et d'argument $\theta + \frac{3\pi}{2}$.

$$\text{4. } z = e^{2i\theta} - e^{-2i\theta} = 2i \sin 2\theta$$

de module $2 \sin 2\theta$ sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et d'argument $\frac{\pi}{2}$;

de module $-2 \sin 2\theta$ sur $]\frac{\pi}{2}; \pi[$ et d'argument $-\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{163. } z + \frac{1}{z} &= e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{2\pi}{3}} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ &= -1 = e^{i\pi}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{164. } z' &= z \left(z + \frac{1}{z} \right) = z^2 + 1 = 1 + e^{i2\theta} \\ &= 1 + \cos 2\theta + i \sin 2\theta \\ &= 2 \cos^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta \\ &= 2 \cos \theta (\cos \theta + i \sin \theta). \end{aligned}$$

Pour $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right], |z'| = 2 \cos \theta$
et θ est un argument de z' .

Pour $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right], |z'| = -2 \cos \theta$
et $\theta + \pi$ est un argument de z' .

$$\text{165. } z^n + \frac{1}{z^n} = e^{inx} + e^{-inx} = 2 \cos nx$$

(formule de Moivre)

donc $z^n + \frac{1}{z^n}$ est un réel.

$$\text{166. } \frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2} = \frac{(e^{ia} + e^{ib})^2}{e^{ia} e^{ib}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{2ia} + e^{2ib} + 2e^{ia}e^{ib}}{e^{ia}e^{ib}} \\ &= e^{i(a-b)} + e^{i(b-a)} + 2 \\ &= 2\cos(a-b) + 2 \\ &= 2(\cos(a-b) + 1) \\ &= 2\cos^2 \frac{a-b}{2} \geq 0. \end{aligned}$$

167. A. 1. $z_1 = az_0$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4} + i \frac{\sqrt{3}-1}{4} \right) (6+6i) \\ &= 6 \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4} - \frac{\sqrt{3}-1}{4} + i \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4} + \frac{\sqrt{3}+1}{4} \right) \right) \\ &= 6 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3 + i3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4} \right)^2 + 2i \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{4 \times 4} \\ &= \frac{4+2\sqrt{3}-4+2\sqrt{3}}{16} + \frac{1}{8}(3-1) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}. \end{aligned}$$

$$z_1 = 6 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 6e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

$$a^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

2. $z_1 = a^3 z_0 = a^2 a z_0 = a^2 z_1$
 $z_7 = a^7 z_0 = (a^2)^3 a z_0 = (a^2)^3 z_1$
d'où $\begin{cases} z_3 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \\ z_7 = \frac{1}{8} e^{i\frac{\pi}{2}} 6e^{i\frac{\pi}{3}} \end{cases}$

B. 1. $r_n = |a^n z_0| = |a^n| |z_0| = |a|^n |z_0|$
 $= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n 6\sqrt{2} \left| \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right|$
 $= \frac{3}{4} e^{i\frac{5\pi}{6}} = 6\sqrt{2} \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$
 $= 12 \frac{1}{(\sqrt{2})^{n+1}} = 12 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n+1}.$

2. (r_n) est donc une suite géométrique de 1^{er} terme $r_0 = 6\sqrt{2}$ et de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. $OA_p = r_p \leq 10^{-3} \Leftrightarrow 6\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^p \leq 10^{-3}$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^p \leq \frac{10^{-3}}{6\sqrt{2}}$
 $\Leftrightarrow p \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \ln \frac{10^{-3}}{6\sqrt{2}}$ car $\ln$ est croissante,
 $\Leftrightarrow p \geq \frac{\ln 10^{-3} - \ln 6\sqrt{2}}{\ln \frac{\sqrt{2}}{2}}$

car $\ln \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1 \right),$
 $\Leftrightarrow p \geq 27.$

D'où $(\vec{u}; \vec{OA}_p) = \arg(z_p)$
 $= (\vec{u}; \vec{OA}_0) + p \arg(a)$

$$\begin{aligned} &= \arg(z_0) + p \arg(a) \\ &= \frac{\pi}{4} + 27 \times \frac{\pi}{12} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{12} + 2\pi \\ &= \frac{\pi}{2} [2\pi]. \end{aligned}$$

168. 1. Comme $\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x)$,
on a $\cos \frac{6\pi}{7} = \cos \frac{8\pi}{7}$, $\cos \frac{2\pi}{7} = \cos \frac{12\pi}{7}$ et
 $\cos \frac{4\pi}{7} = \cos \frac{10\pi}{7}$
d'où $S = S'$.

Comme $\sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x)$, on a
 $\Sigma = -\Sigma'$.

2. $S + S' + i(\Sigma + \Sigma') = S + S'$
 $= 2S$ (d'après 1.)

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^6 \cos \frac{2k\pi}{7} + i \sum_{k=1}^6 \sin \frac{2k\pi}{7} \\ &= \sum_{k=1}^6 \left(\cos \frac{2k\pi}{7} + i \sin \frac{2k\pi}{7} \right) \\ &= \sum_{k=0}^6 \left(e^{i\frac{2\pi}{7}} \right)^k - 1. \end{aligned}$$

3. $S + S' + i(\Sigma + \Sigma') = \frac{1 - e^{i\frac{2\pi}{7}}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{7}}} - 1$
 $= \frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{7}}} - 1$
 $= -1 = 2S$

d'où $S = -\frac{1}{2}.$

169. 1.
 $S + iS' = 1 + \sum_{k=1}^n \cos kx + i \left(1 + \sum_{k=1}^n \sin kx \right)$
 $= 1 + i + \sum_{k=1}^n (\cos kx + i \sin kx)$
 $= 1 + i + \sum_{k=1}^n e^{ikx}$
 $= \chi + i + \frac{1 - (e^{ix})^{n+1}}{1 - e^{ix}}$
 $= i + \frac{1 - e^{ix(n+1)}}{1 - e^{ix}}.$

2. $S + iS' = i + \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}$
 $= i + \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \frac{1 - e^{-ix}}{1 - e^{-ix}}$
 $= i + \frac{1 - e^{-ix} - e^{i(n+1)x} + e^{-inx}}{2(1 + \cos x)}$
 $= \frac{1 - \cos x + \cos nx - \cos(n+1)x}{2(1 + \cos x)}$
 $+ i \left(\frac{\sin x + \sin nx - \sin(n+1)x}{2(1 + \cos x)} \right).$

9. Un peu de tout

170. 1. $z^2 - z + 4 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 + 3 = 0$
 $\Leftrightarrow (z-1)^2 - 3i^2 = 0$
 $\Leftrightarrow (z-1-i\sqrt{3})(z-1+i\sqrt{3}) = 0$
D'où $z' = 1 + i\sqrt{3}$ et $z'' = 1 - i\sqrt{3}.$

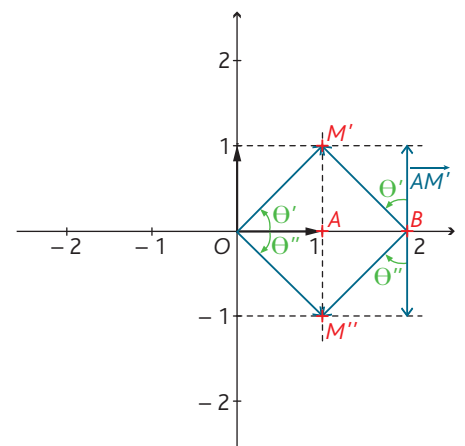
2. $z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}; z'' = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$

3. $(z')^{2012} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^{2010+2}$
 $= 2^{2012} \left(\left(e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^6 \right)^{335} \left(e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^2$
 $= 2^{2012} (e^{i0})^{335} e^{i\frac{2\pi}{3}}$
 $= 2^{2012} e^{i\frac{2\pi}{3}}$
 $= -2^{2011} + i2^{2011}\sqrt{3}.$

171. 1. $\frac{z-2}{z-1} = i \Leftrightarrow z-2 = i(z-1)$
et $z \neq 1$
 $\Leftrightarrow x + iy - 2 = ix - y - i$
et $(x; y) \neq (1; 0)$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=12 \end{cases}$

d'où $(x; y) \neq \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right); z = \frac{3}{2} + \frac{i}{2}.$

2. $\frac{z-2}{z-1} = z \Leftrightarrow z-2 = z^2 - z$ et $z \neq 1$
 $\Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$ et $z \neq 1$
 $\Leftrightarrow (z-1) - i^2 = 0$
 $\Leftrightarrow z = 1 - i$ ou $z = 1 + i$



$OM' = \frac{BM'}{AM'}$ et $(\vec{u}; \vec{OM'}) = (\vec{AM}; \vec{BM}).$

172. 1.
 $z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0.$
 $\Leftrightarrow (z - (1 + 2\cos\theta))^2 - 1 - 4\cos\theta$
 $- 4\cos^2\theta + 5 + 4\cos\theta = 0$
 $\Leftrightarrow (z - (1 + 2\cos\theta))^2 + 4\sin^2\theta = 0$
 $\Leftrightarrow (z - 1 - 2\cos\theta - i2\sin\theta)(z - 1 - 2\cos\theta + i2\sin\theta) = 0$
 $z = 1 + 2\cos\theta + 2i\sin\theta$ ou
 $z = 1 + 2\cos\theta - i2\sin\theta$
soit $z = 1 + 2be^{i\theta}$ ou $z = 1 + 2e^{-i\theta}.$

2. z décrit un cercle de rayon 2 et de centre d'affixe 1 car $|z - 1| = |2e^{i\theta}| = 2$.
Idem avec $z = 1 + 2e^{-i\theta}$.

173. 1. $P(Z) = Z^4 - 1 = (Z^2 - 1)(Z^2 + 1)$
 $= (Z - 1)(Z + 1)(Z - i)(Z + i)$.

2. L'ensemble des solutions est :

$\{-1; 1; -i; i\}$.

3. On pose : $Z = \frac{2z+1}{z-1}$.

Alors $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right) = 1$ revient à $\frac{2z+1}{z-1} = 1$
ou -1 ou i ou $-i$.

$(2z+1=z-i \text{ et } z \neq 1)$ ou $(2z+1=1-z)$
ou $(2z+1=iz-i \text{ et } z \neq 1)$ ou $(2z+1=i-iz \text{ et } z \neq 1)$.

$z = -2$ ou $z = 0$ ou $2x+2iy+1=ix-y-i$
ou $2x+2iy+1=i-ix+y$

$\Leftrightarrow z = -2$ ou $z = 0$ ou $\begin{cases} 2x+1+y=0 \\ -x+2y+1=0 \end{cases}$

ou $\begin{cases} 2x+1-y=0 \\ 2y-1+x=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow z = -2$ ou $z = 0$ ou $z = -\frac{1+3i}{5}$ ou $z = -\frac{1-3i}{5}$.

174. 1. $P(z) = z^4 + z^2 + 1$
 $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = e^{i\frac{\pi}{3} \times 2} = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
 $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = e^{i\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $P(Z) = Z^2 + Z + 1 = \left(Z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}i^2$
 $= \left(Z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(Z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$z^2 = Z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ ou

$Z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = z^2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

d'où $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou

$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

175. 1. Si z est solution de (E) alors
 $(1+iz)^3(1-i\tan\alpha) = (1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$
donc $|(1+iz)^3| = |(1-iz)^3|$ car $1+i\tan\alpha$
et $1-i\tan\alpha$ ont le même module car ils
sont conjugués donc $|1+iz|^3 = |1-iz|^3$.
Comme $|z| \geq 0$ ($\forall z \in \mathbb{C}$), $|1+iz| = |1-iz|$.

2. On pose $x+iy=z$ avec $x, y \in \mathbb{R}$,
alors $|1+ix-y| = |1+y-ix|$,
d'où $(1-y)^2 + x^2 = (1+y)^2 + x^2$
 $\Leftrightarrow 1+y^2-2y=1+y^2+2y$ d'où $y=0$.
Donc z est réel.

3. $\frac{1-i\tan\alpha}{1+i\tan\alpha} = \frac{1-i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\frac{1}{\cos\alpha} \cos\alpha - i\sin\alpha}{\frac{1}{\cos\alpha} \cos\alpha + i\sin\alpha} = \frac{e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha}} = \frac{1}{(e^{i\theta})^2}$.

4. Avec 3. et en posant $z = \tan\phi$, (E)
devient $\frac{1}{(e^{i\alpha})^2} = \frac{1}{((e^{i\phi})^2)^3}$

d'où $e^{i2\alpha} = e^{i6\phi}$

$\Leftrightarrow 6\phi = 2\alpha + 2k\pi$

$\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $6\phi = 2\alpha + 2k\pi$ d'où

$\phi = \frac{\alpha + k\pi}{3}$.

Comme $\alpha, \phi \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, seules 3 valeurs

de k vérifient $\phi = \frac{\alpha + k\pi}{3}$.

Si $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $\frac{\alpha}{3} \in]-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}[$ donc

$\phi = \frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3} \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ ssi $k \in \{-1; 0; 1\}$

$z_1 = \tan\phi_1 = \tan\frac{\alpha - \pi}{3}$;

$z_2 = \tan\phi_0 = \tan\frac{\alpha}{3}$ et $z_3 = \tan\phi_1 = \tan\frac{\alpha + \pi}{3}$.

176. 1. $\omega^5 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5 = e^{i2\pi} = e^{i0} = 1$
 $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \frac{1-\omega^5}{1-\omega} = 0$.

2. $u + v = \omega + \omega^4 + \omega^2 + \omega^3$
 $= 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 - 1 = -1$.
 $uv = (\omega + \omega^4)(\omega^2 + \omega^3)$
 $= \omega^3 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^7$
 $= \omega^3 + \omega^4 + \omega^5\omega + \omega^5\omega^2$
 $= \omega\omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 1$.

u et v sont solutions de $(z-u)(z-v) = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - (u+v)z + uv = 0$

$\Leftrightarrow z^2 + z - 1 = 0 = \left(z\frac{1}{2}\right) - \frac{5}{4}$.

D'où $\{u; v\} = \left\{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$

3. $u = \omega + \omega^4 = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{2\pi}{5}} e^{-i\frac{2\pi}{5}}$
 $= e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} = \omega + \bar{\omega}$
 $= 2\cos\frac{2\pi}{5}$

$0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{5}{10}\pi = \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$

d'où $u = 2\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

177. Comme A, B, C sont sur un cercle de centre O , on a $OA = OB = OC$. Comme le cercle existe, $OA > 0$ donc dans le repère $(\vec{O}; \vec{u}; \vec{v})$, l'affixe a du point A peut s'écrire $a = re^{i\theta_A}$ avec $r = OA$. De même $b \neq 0$ et $c \neq 0$ donc $b = re^{i\theta_B}$ et $c = re^{i\theta_C}$ avec θ_A, θ_B et θ_C des réels.

178. 3. (MNP) est équilatéral.

4. $m + nj + pj^2 = 0$ donc

$mj + nj^2 + pj^3 = 0 = p + mj + nj^2$ car $j^3 = 1$ et donc $pj + mj^2 + nj^3 = 0$ d'où $n + pj + mj^2 = 0$

$(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MP}) = \arg\left(\frac{p-m}{n-m}\right)$

$= \arg\left(\frac{p-m}{-pj - mj^2 - m}\right)$

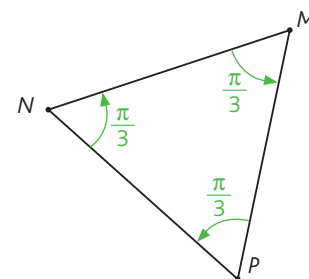
$= \arg\left(\frac{p-m}{-pj - (1+j^2)m}\right)$.

$1 + j^2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -j$

d'où $(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MP}) = \arg\left(\frac{p-m}{-pj + jm}\right)$

$= \arg\left(\frac{p-m}{-j(p-m)}\right) = -\arg(-j) = \frac{\pi}{3}$.

De même on montre que $(\overrightarrow{NP}; \overrightarrow{NM}) = \frac{\pi}{3}$,
 (MNP) est donc un triangle équilatéral direct.



5. Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle équilatéral (MNP) . Soit D le centre de $\mathcal{C}$, d'affixe ω .

$u = m + nj + pj^2 = (\omega + (m-\omega)) + (\omega + (n-\omega))j + (\omega + (p-\omega))j^2$
 $= (m-\omega) + (n-\omega)j + (p-\omega)j^2 + \omega(1+j+j^2)$
 $= (m-\omega) + (m-\omega)j + (p-\omega)j^2$ car $1+j+j^2=0$

$m-\omega$ est l'affixe de $\overrightarrow{SLN}$ et $(n-\omega)j$ est l'affixe de $\overrightarrow{SLN}$ après une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ de centre Ω . C'est donc l'affixe de $\overrightarrow{OP}$ car (MNP) est équilatéral direct.

De même $(p-\omega)j^2$ est l'affixe de $\overrightarrow{SLN}$ car $j^2(p-\omega)$ est une rotation $\overrightarrow{OP}$ de centre Ω et d'angle $\frac{4\pi}{3}$ (ou $-\frac{2\pi}{3}$).

Donc u est l'afixe de $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{ON}$ qui est le vecteur $\vec{O}$ car (MNP) est équilatéral d'où $u = 0$.

On a montré (Cf. 4. et 5.) que $u = 0 \Leftrightarrow (MNP)$ est un triangle équilatéral direct donc on caractérise le fait que (MNP) est équilatéral direct.

6. B est l'image de A par une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ donc $b = ae^{i\frac{\pi}{3}}$.

De même $d = ce^{i\frac{\pi}{3}}$ et $f = e \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$.

7. M est le milieu de $[BC]$ donc

$$m = \frac{b+c}{2} = \left(ae^{i\frac{\pi}{3}} + c \right) \frac{1}{2};$$

$$n = \frac{d+e}{2} = \left(ce^{i\frac{\pi}{3}} + e \right) \frac{1}{2};$$

$$p = \frac{f+a}{2} = \frac{f+a}{2} = \frac{e \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} + a}{2}.$$

8. Alors $m + nj + pj^2$

$$\begin{aligned} &= \frac{ae^{i\frac{\pi}{3}} + c}{2} + \frac{ce^{i\pi} + ee^{i\frac{2\pi}{3}}}{2} + \frac{ee^{i\frac{5\pi}{3}} + ae^{i\frac{\pi}{3}}}{2} \\ &= \frac{ae^{i\frac{\pi}{3}}}{2} + \left(\frac{1+e^{i\pi}}{2} \right) c + \frac{c}{2} \left(\frac{1-1}{2} \right) + ee^{i\frac{2\pi}{3}} + \left(\frac{1+e^{i\pi}}{2} \right) e \\ &= 0 + 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Donc (MNP) est équilatéral direct.

179. 2. On a $g = \frac{a+b+c}{3}$, affixe du centre de gravité de (ABC) .

$$(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AQ}) = \frac{\pi}{3} \text{ donc } q - a = (c-a)e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

De même on trouve :

$$\text{et } \begin{cases} r - b = (a-b)e^{i\frac{\pi}{3}} \\ p - c = (b-c)e^{i\frac{\pi}{3}} \end{cases}$$

U est le centre de gravité de (BPC) donc

$$u = \frac{b+p+c}{3} = \frac{b+2c+(b-c)e^{i\frac{\pi}{3}}}{3}.$$

De même,

$$v = \frac{a+c+q}{3} = \frac{2a+c+(c-a)e^{i\frac{\pi}{3}}}{3}$$

$$w = \frac{a+r+b}{3} = \frac{a+2b+(a-b)e^{i\frac{\pi}{3}}}{3}.$$

Soit g' l'afixe du centre de gravité de (UVW) .

$$\text{On a } g' = \frac{u+v+w}{3}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{9} [b+2c+(b-c)e^{i\frac{\pi}{3}} + 2a \\ &\quad + c+(c-a)e^{i\frac{\pi}{3}} + a+2b+(a-b)e^{i\frac{\pi}{3}}] \\ &= \frac{1}{9} (3b+3c+3a+e^{i\frac{\pi}{3}}(b-c+c-a+a-b)) \\ &= \frac{a+b+c}{3} = g. \end{aligned}$$

G' et G sont confondus car ils ont la même affixe.

(ABC) et (UVW) ont le même centre de gravité.

En route vers le bac (p. 272-275)

180. $|z|$ est réel donc

$\text{Im}(\bar{z} + |z|) = \text{Im}(\bar{z}) = -\text{Im}(z)$ d'où $\text{Im}(z) = -2$.
Il reste donc a ou b .

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{64+36}{9}} = \frac{10}{3} \text{ donc}$$

$$\text{Re}(z) = \text{Re}(\bar{z}) = 6 - \frac{10}{3} = \frac{8}{3}. \text{ Réponse a..}$$

$$\begin{aligned} 181. |z-1| &= |z+i| \Leftrightarrow |(x-1)+iy| \\ &= |x+(1+y)i| \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \\ &= x^2 + (1+y)^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow y = -x. \text{ Réponse b..}$$

$$\begin{aligned} 182. (1+i\sqrt{3})^n &= 2^n \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n \\ &= 2^n \left(e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}} \end{aligned}$$

donc $(1+i\sqrt{3})^n$ est réel pour $u = 3k$.
Réponse c..

$$\begin{aligned} 183. \frac{6-z}{3-z} &= z \Leftrightarrow z \neq 3 \text{ et} \\ z^2 - 4z + 6 &= 0 = (z-2)^2 - 2i^2, \\ \text{donc } z &= 2 - i\sqrt{2} \text{ ou } 2 + i\sqrt{2}. \\ \text{Réponse b..} \end{aligned}$$

$$184. \arg\left(\frac{z+2}{z-2i}\right) = \frac{\pi}{2}(\pi) \text{ donc}$$

$$(\overrightarrow{BZ}; \overrightarrow{AZ}) = \frac{\pi}{2}(\pi).$$

Z décrit le cercle de diamètre $[AB]$.
Réponse d..

Le milieu de $[AB]$ est d'afixe

$$\frac{a+b}{2} = \frac{-2+2i}{2} = -1+i \text{ donc c. n'est pas solution.}$$

185. On pose $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
 $\text{Re}(z) = x$ et $-iz = -ix+y$
d'où $\text{Im}(-iz) = -x$. Réponse d..

186. La partie réelle est négative donc l'argument n'est pas dans $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$

$$-\sqrt{2} + i\sqrt{6} = 2\sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2\sqrt{2} e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

pour s'en assurer. Réponse d..

$$187. -2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

Réponse a..

$$188. = 187. \text{ Réponse a..}$$

$$\begin{aligned} 189. e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{2\pi}{3}} &= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = 1. \\ \text{Réponse c..} \end{aligned}$$

190. $|z-i| = 0 \Leftrightarrow z = i$ donc la solution est un point. Réponse b..

191. Médiatrice des points d'affixes 0 et 1. Réponse a..

192. $|z-1| = |-1-i| = \sqrt{2}$, M décrit un cercle. Réponse c..

193. 1.

$$z^2 = 2 + \sqrt{z} - (2 - \sqrt{z}) - 2i\sqrt{(2+\sqrt{z})(2-\sqrt{z})} = 2\sqrt{z} - 2i\sqrt{z}. \text{ Réponse b..}$$

$$2. z^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}. \text{ Réponse b..}$$

$$3. z = 2e^{-i\frac{\pi}{8}} \text{ ou } -2e^{-i\frac{\pi}{8}}.$$

Comme $\text{Re}(z) = -\sqrt{2+2} \leq 0$,

$$z = -2e^{-i\frac{\pi}{8}} = 2e^{i\frac{7\pi}{8}}. \text{ Réponse a..}$$

$$4. \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} = -\cos\frac{7\pi}{8} \text{ et } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{7\pi}{8}. \text{ Réponse d..}$$

194. 1. Soit θ un argument de z . On a $\cos\alpha = \cos\theta$ et $\sin\alpha = -\sin\theta$ donc $\theta = -\alpha(2\pi)$. Réponse b..

2. On a $\cos\theta = -\sin\alpha$ et $\sin\theta = \cos\alpha$ d'où $\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}(\pi)$. Réponse d..

$$3. |Z| = \frac{|\sqrt{2}|}{|1+i|} \left| e^{i\frac{\pi}{3}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times 1 = 1.$$

Réponse a..

b. est contradictoire avec a. donc b. est faux.

$$\begin{aligned} Z &= \frac{-\sqrt{2}(1-i)}{1+i} e^{i\frac{\pi}{3}} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= e^{i\frac{3\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{13\pi}{12}} \end{aligned}$$

donc c. est faux.

195. 1. faux : $|1| = |i|$.

2. vrai.

$$\mathbf{3. a.} \quad Z = e^{i\frac{\pi}{3}} e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{12}} \\ = 2 \cos \frac{\pi}{12} \neq 0 \rightarrow \text{faux.}$$

$$\mathbf{4.} \quad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} (2\pi) \text{ donc}$$

$$\arg((1+i)^{20}) = \frac{20\pi}{4} (2\pi) = \pi(2\pi) \rightarrow \text{vrai.}$$

$$\mathbf{5.} \quad (z+1-2i)(\bar{z}+1+2i) = 4$$

$$\Leftrightarrow (z+1-2i)(\bar{z}+1-2i) = 4 \\ \Leftrightarrow |z+1-2i|^2 = 4 \Leftrightarrow |z+1-2i| = 2$$

$\rightarrow$ cercle de centre $-1+2i$ et de rayon $2 \rightarrow$ **faux.**

6. C'est (AB) privée de $B(i)$ uniquement $\rightarrow$ **faux.**

196. 1. L'équation est à coefficient réels donc les solutions sont conjuguées. Leur somme est donc réelle $\rightarrow$ **faux.**
Les solutions sont non nulles $\rightarrow$ **faux.**

$$\mathbf{2.} \quad I\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right), \text{ réel et non nul} \rightarrow \text{faux.}$$

3. (OI) est l'axe des abscisses, M_1 et M_2 ont la même abscisse donc (M_1M_2) est parallèle à l'axe des ordonnées $\rightarrow$ **vrai.**

$$\mathbf{4.} \quad z^2 - 4z + 6 = (z-2) - 2i^2 \\ = (z-2-i\sqrt{2})(z-2+i\sqrt{2}); \\ z_1 = 2+i\sqrt{2}; z_2 = 2-i\sqrt{2}; \\ z_1 - z_2 = 2\sqrt{2}i;$$

$$|z_1| = \sqrt{4+2} = \sqrt{6} \neq |z_1 - z_2| = 2\sqrt{2}; \\ \text{donc } (OM_1, M_2) \text{ n'est pas équilatéral} \rightarrow \text{faux.}$$

$$\mathbf{197.} \quad z^2 + (1+\alpha)z + \alpha^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{1+\alpha}{2}\right)^2 + \alpha^2 - \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2 = 0.$$

1. faux, une solution est fonction de α , vrai pour $\alpha = 3$.

$$\mathbf{2.} \quad \Delta = (1+\alpha)^2 - 4\alpha^2 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 - 4\alpha^2 = -3\alpha^2 + 2\alpha + 1 \\ \Delta = 0 \text{ si } \alpha = 1 \text{ donc } (E_\alpha) \text{ admet une solution unique si } \alpha = 1; (z = -1) \rightarrow \text{faux.}$$

3. $\alpha > 1 \Rightarrow \Delta < 0$ donc les solutions sont complexes conjuguées d'où $OM_\alpha = OM'_\alpha$. $OM_\alpha OM'_\alpha$ est isocèle $\rightarrow$ **vrai.**

$$\mathbf{4.} \quad \text{Pour } \alpha > 1 \\ (E_\alpha): \left(z + \frac{1+\alpha}{2}\right)^2 + \frac{3\alpha^2 - 2\alpha - 1}{4} = 0 \\ = \left(z + \frac{1+\alpha}{2} - i\frac{\sqrt{3\alpha^2 - 2\alpha - 1}}{2}\right) \\ \left(z + \frac{1+\alpha}{2} + i\frac{\sqrt{3\alpha^2 - 2\alpha - 1}}{2}\right)$$

$$M_\alpha M'_\alpha = \sqrt{3\alpha^2 - 2\alpha - 1} \\ = \sqrt{(3\alpha+1)(\alpha-1)} \rightarrow \text{vrai.}$$

198. 1. réels et positifs.

$$\mathbf{2.} \quad zz' = r'(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \alpha' + i \sin \alpha') \\ = r'(\cos \alpha \cos \alpha' - \sin \alpha \sin \alpha' + i \cos \alpha \sin \alpha' + i \sin \alpha \cos \alpha') \\ = r'(\cos(\alpha + \alpha') + i \sin(\alpha + \alpha')).$$

3.

$$|zz'| = |r'(\cos(\alpha + \alpha') + i \sin(\alpha + \alpha'))| \\ = |r'| \times |\cos(\alpha + \alpha') + i \sin(\alpha + \alpha')| \\ = |r'| \times |1| = |r'| = |z| \times |z'|$$

rr' est réel et positif donc $\alpha + \alpha'$ est un argument de zz' d'où

$$\arg(zz') = (\arg z + \arg z') [2\pi].$$

199. 1. $\arg(1) = 0[\pi]$ car 1 est réel.

$$[2\pi]0 = \arg(1) = \arg\left(z \times \frac{1}{z}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$\text{d'où } \arg\frac{1}{z} = -\arg z [2\pi].$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) = \left(\arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right)\right) [2\pi] \\ = (\arg z - \arg z') [2\pi].$$

$$\mathbf{2.} \quad z = \left(\sqrt{3}\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{d'où } \arg(z) = \frac{\pi}{3} [2\pi].$$

$$z' = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$\text{d'où } \arg(z') = -\frac{\pi}{6} [2\pi].$$

$$\text{D'où } \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) = -\frac{\pi}{3} [2\pi];$$

$$\text{et } \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = -\arg(z) - \arg(z') [2\pi] = \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

200. 1. Montrons par récurrence que :

$$\arg(z^n) = n \arg(z) [2\pi] (P(n)) \text{ pour } n \geq 1.$$

$$\bullet P(1): \arg(z^1) = \arg(z) = 1 \times \arg(z) [2\pi];$$

$P(1)$ est vraie.

$\bullet$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que :

$$\arg z^n = n \arg z [2\pi]. \text{ Alors :}$$

$$\arg(z^{n+1}) = \arg(z^n \times z) = (\arg z^n + \arg(z)) [2\pi] \\ = n \arg(z) + \arg(z) [2\pi] \\ = (n+1) \arg(z) [2\pi].$$

$P(n+1)$ est vraie.

$$\mathbf{2.} \quad 1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \text{ donc}$$

$$\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ et donc :}$$

$$((1-i)^7) = -\frac{7\pi}{4} [2\pi] = \frac{\pi}{4} [2\pi].$$

$$\mathbf{201. 1.} \quad \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{e^{i\frac{\alpha - \beta}{2}} - e^{-i\frac{\alpha - \beta}{2}}}{2i}.$$

$$\mathbf{2.} \quad 2ie^{i\frac{\alpha + \beta}{2}} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2ie^{i\frac{\alpha + \beta}{2}} \frac{e^{i\frac{\alpha - \beta}{2}} - e^{-i\frac{\alpha - \beta}{2}}}{2i} \\ = e^{i\alpha} - e^{i\beta}.$$

$$\mathbf{3.} \quad \left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 \times \frac{a}{b} = \left(\frac{e^{i\beta} - e^{i\delta}}{e^{i\alpha} - e^{i\delta}}\right)^2 \times \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} \\ = \frac{2ie^{i\frac{\beta + \delta}{2}} \sin\left(\frac{\beta - \delta}{2}\right)}{2ie^{i\frac{\alpha + \delta}{2}} \sin\left(\frac{\alpha - \delta}{2}\right)} \times e^{i(\alpha - \beta)} \\ = \left(\frac{e^{i\frac{\beta - \alpha}{2}} \sin\left(\frac{\beta - \delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha - \delta}{2}\right)}\right)^2 e^{i(\alpha - \beta)} \\ = \left(\frac{\sin\left(\frac{\beta - \delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha - \delta}{2}\right)}\right)^2.$$

4. On a donc :

$$\arg\left(\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 \times \frac{a}{b}\right) = \arg\left(\left(\frac{\sin\left(\frac{\beta - \delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha - \delta}{2}\right)}\right)^2\right) = 0 [2\pi]$$

$$\text{car } ()^2 \geq 0 \text{ d'où } \arg\left(\frac{a}{b}\right) = -2 \arg\left(\frac{a-b}{a-c}\right)$$

$$\text{d'où } (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA}) = -2(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) \\ (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}).$$

202. 1. Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u}' = k\vec{u}$ alors $\frac{z'}{z} = \frac{kz}{z} = k$ donc $\frac{z'}{z}$ est réel.

• Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z'}{z} = k$, alors $z' = kz$ d'où $\vec{u}' = k\vec{u}$. Comme k est réel, $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.

$$\mathbf{2.} \quad (\vec{u}; \vec{u}') = \frac{\pi}{2} [\pi] \text{ donc } \frac{z'}{z} = \frac{\pi}{2} [\pi] \\ \text{donc } \frac{z'}{z} \text{ est imaginaire pur.}$$

$$\bullet \text{ Soit } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \frac{z'}{z} = ki \text{ donc} \\ \arg \frac{z'}{z} = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ pour } k > 0 \\ = -\frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ pour } k < 0 \text{ donc } \vec{u} \perp \vec{u}'.$$

$$\mathbf{3. a.} \quad \frac{z'}{z} = \frac{4+6i}{-3+2i} = -2i \text{ donc } \vec{u} \perp \vec{u}'.$$

$$\mathbf{b.} \quad \frac{z'}{z} = \frac{2-8i}{-\frac{1}{2}+2i} = -4 \text{ donc } \vec{u} \text{ et } \vec{u}' \text{ sont colinéaires.}$$

$$\mathbf{203. 1.} \quad \text{Soit } N \text{ tel que } \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{AM} \text{ alors} \\ \arg(z_N) = (\vec{u}; \overrightarrow{ON}) = (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \arg(z-a). \\ \arg \frac{z-a}{z-b} = (\arg(z-a) - \arg(z-b)) [2\pi] \\ = (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) - (\vec{u}; \overrightarrow{BM}) [2\pi] \\ = (\overrightarrow{BM}; \vec{u}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AM}) [2\pi] \\ = (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}) [2\pi] \\ = (\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MA}) [2\pi].$$

$$\mathbf{2.} \quad |z'| = \left| \frac{z-a}{z-b} \right| = \frac{|z-a|}{|z-b|} = \frac{AM}{BM}.$$

3. a. z' est imaginaire pur :

$$\Leftrightarrow z = a \text{ ou } \arg \frac{z-a}{z-b} = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

$$\Leftrightarrow M = A \text{ ou } \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}.$$

L'ensemble des points M est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de B .

b. z' est réel $\Leftrightarrow z = a$ ou $\arg \frac{z-a}{z-b} = 0[\pi]$

$\Leftrightarrow M = A$ ou $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires.
 M décrit la droite (AB) privée de B .

c. $|z'| - 1 \Leftrightarrow AM = BM$; M décrit la médiatrice de $[AB]$.

204. 1. A, B, C sont alignés :

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) \text{ est un angle plat ou nul}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg \frac{c-b}{a-b} = 0[\pi].$$

2. $(AB) \perp (BC) \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{BA}$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg \frac{c-b}{a-b} = \frac{\pi}{2}[\pi].$$

$$\begin{aligned} \mathbf{3.} \quad c-b &= 2-i\sqrt{3}-3 = -1-i\sqrt{3} \\ &= -2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

$$a-b = -1-3 = -4.$$

$$\begin{aligned} c-a &= 2-i\sqrt{3}+1 = 3-i\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

$$\arg(c-b) = \frac{4\pi}{3}[2\pi].$$

$$\arg(c-a) = -\frac{\pi}{6}[2\pi].$$

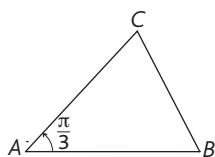
$$\begin{aligned} \arg \frac{c-b}{c-a} &= \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6}[2\pi] = \frac{3\pi}{2}[2\pi] \\ &= \frac{3\pi}{2}[2\pi] = \frac{\pi}{2}[\pi] \rightarrow (AC) \perp (BC). \end{aligned}$$

205. 1. $\left| \frac{z'-\omega}{z-\omega} \right| = \frac{|z'-\omega|}{|z-\omega|} = \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1.$

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) &= \theta[2\pi] \text{ d'où } \frac{z'-\omega}{z-\omega} = \theta[\pi] \\ \text{donc } \frac{z'-\omega}{z-\omega} &= e^{i\theta}. \end{aligned}$$

2. $\frac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta}$ d'où $z' = e^{i\theta}(z-\omega) + \omega.$

3.



$$\frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\begin{aligned} c &= e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) + a \\ &= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2-5i-3-i) + 3+i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+6i) + 3+i \\ &= -\frac{1}{2} - 3i - \frac{\sqrt{3}}{2} + 3\sqrt{3} + 3+i \\ &= \frac{5+6\sqrt{3}}{2} - i\frac{4+\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

206. 1. a. $a' = a + i - \frac{1}{a} = i + i - \frac{1}{i} = 3i.$

$$b' = e^{i\frac{\pi}{6}} + i - e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2i \sin \frac{\pi}{6} = 2i.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c.} \quad \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{2i - e^{i\frac{\pi}{6}}} &= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}}{2i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}} \\ &= \frac{-e^{i\frac{\pi}{6}}}{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} + i} = \frac{-e^{i\frac{\pi}{6}}}{-e^{i\frac{5\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{6}}} \\ &= \frac{-e^{i\frac{\pi}{6}}}{-e^{i\frac{4\pi}{6}}(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}})} \\ &= \frac{-e^{i(\frac{\pi}{6} - \frac{4\pi}{6})}}{2 \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{-e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2 \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{i}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}i. \end{aligned}$$

b. $\frac{-b}{b'-b} = \frac{\sqrt{3}}{3}i$ donc $\frac{0-b}{b'-b}$ est imaginaire pur donc $(OB \perp (BB'))$. OOB' est un triangle rectangle en B .

2. a. $z^2 + iz - 1 = \left(z + \frac{i}{2}\right)^2 - \frac{i^2}{4} - 1$
 $= \left(z + \frac{i}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} = \left(z + \frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b. $f(z) = 0$ et $z \neq 0$

$$\Leftrightarrow z + i - \frac{1}{z} = 0$$

et $z \neq 0$

$$\Leftrightarrow z^2 + iz - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \text{ ou } z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.$$

$$(E) = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right\}.$$

c. $\left| -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right| = \left| \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$

donc les points d'affixes $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1 ($i\epsilon \Gamma$)).

3. a. $f(e^{i\theta}) = e^{i\theta} + i - e^{-i\theta}$
 $= 2i \sin \theta + 1 = (2 \sin \theta + 1)i.$

b. $\sin \theta \in [-1; 1]$ donc $f(e^{i\theta}) \in [-i; 3i].$

Si M est d'affixe $e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, alors $f(M) \in [CA'] : [A'C].$

207. 1.

$$\left. \begin{aligned} |\overrightarrow{OA}|^2 &= 2^2 + 5^2 = 29 \\ |\overrightarrow{OB}|^2 &= 7^2 + 3^2 = 58 \\ |\overrightarrow{AB}|^2 &= 5^2 + 2^2 = 29 \end{aligned} \right\} \text{ donc } |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{AB}|.$$

Vrai.

2. Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe $-2i$. Soit z l'affixe d'un point M .

$|z-i| = |z+2i| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M$ décrit la médiatrice de $[AB]$ donc $(\Delta) \perp (AB)$.

Comme i et $-2i$ sont imaginaires purs, (AB) est l'axe des ordonnées imaginaires purs.

Comme le repère est orthonormé, (AB) est perpendiculaire à l'axe des réels abscisses donc $(\Delta) \parallel$ avec des réels. **Vrai.**

3. $z = 3 + i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

donc $\arg z = \frac{\pi}{6}[2\pi]$ d'où

$\arg z^{3n} = 3n \arg z = n \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc pour

$n = 2$, $\arg z^6 = \pi[2\pi]$ donc z^6 est réel.

Faux.

4. Il existe $r \in \mathbb{R}^*$ tel que $z = re^{i\frac{\pi}{2}}$ donc

$$|i + re^{i\frac{\pi}{2}}| = |e^{i\frac{\pi}{2}} + re^{i\frac{\pi}{2}}| = |(1+r)e^{i\frac{\pi}{2}}| = 1+r = 1+|z|.$$

Vrai.

5. Il existe $\theta \in \mathbb{R}^*$ tel que $z = e^{2i\theta}$. Donc

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} = 2 \cos 2\theta \text{ qui est réel. Vrai.}$$

208. 2.

$$\left. \begin{aligned} AJ &= |i+3+i| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \\ BJ &= |i+2+4i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \\ CJ &= |i-3+i| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \end{aligned} \right\} \text{ donc } AJ = BJ = CJ.$$

J est le centre du cercle circonscrit à ABC , de rayon $\sqrt{13}$.

3. $\frac{b-c}{h-a} = \frac{-2+4i-3+i}{-2+3+i} = \frac{-5+5i}{1+i}$
 $= \frac{(-5+5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-5+5i+5i+5}{2} = 5i.$

$\frac{b-c}{h-a}$ est imaginaire pur donc $\overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{AH}$ donc $(AH) \perp (BC).$

4. $g-a = \frac{2b-a+c-a}{3} = \frac{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$
d'où $g = \frac{b+c-2a}{3} + a = \frac{a+b+c}{3}$
 $= \frac{-3i-2+4i+3-i}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i.$

5. $\frac{g-h}{j-h} = \frac{-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i + 2}{i+2} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}i}{2+i} = \frac{2}{3}$

donc $\overrightarrow{HG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HJ}$. G, H et J sont alignés.

6. a. $a' = \frac{b+c}{2} = \frac{-2+4i+3-i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.

b. On a $\overrightarrow{A'A_1} = -\overrightarrow{A'H}$ donc $a_1 - a' = -(h - a')$
d'où $a_1 = 2a' - h = 1 + 3i + 2 = 3 + 3i$.

c. $A_1J = |i - 3 - 3i| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ donc
 A_1 est sur le cercle de centre J et de rayon
 $\sqrt{13}$ c'est-à-dire $\mathcal{C}$.

d. On a A' milieu de $[HA_1]$ car A_1 est le
symétrique de M par rapport à A' .

A' milieu de $[BC]$ par construction.

Donc $[HA_1]$ et $[BC]$ ont le même milieu
d'où $[BA_1]CH$ est un parallélogramme.

e. On en déduit $(BH) \parallel (A_1C)$ donc
 $(A_1C) \perp (AC)$ d'où C est sur le cercle $\mathcal{C}'$

de diamètre $[AA_1]$. $(CH) \parallel (A_1B)$ donc
 $(A_1B) \perp (AB)$ d'où B est sur le cercle $\mathcal{C}'$
de diamètre $[AA_1]$.

A, B et C sont 3 points distincts, non ali-
gnés et $A, B, C \in \mathcal{C}$ $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$.

$A, B, C \in \mathcal{C}'$
 $A_1 \in \mathcal{C}'$ donc $A_1 \in \mathcal{C}$.

209. 1.

$$\frac{e-a}{d-a} = e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow e = a + (d-a)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 1 + (-i-1)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$e = 1 - \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= (1-i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Réponse b.

2. $|z+i| = |z-1| \Leftrightarrow MD = MA$.

Réponse d.

3. $\operatorname{Re}\left(\frac{z+i}{z+i}\right) = 0$ et $z \neq -1 \Leftrightarrow \overrightarrow{DM} \perp \overrightarrow{CM}$

et $M \neq C \Leftrightarrow M$ est sur le cercle de dia-
mètre $[CD]$ privé de C . Réponse c.

4. $\arg(z-i) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{BM})$
 $= -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Réponse c..

Accompagnement personnalisé (p. 276-277)

210. a. $(1+i)^3 = \sqrt{2}^3 e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$
 $= 2\sqrt{2} \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
 $= -2 + 2i$.

b. $(\sqrt{3}-i)^4 = 2^4 e^{-i\frac{4\pi}{6}} = 16e^{i\frac{2\pi}{3}}$
 $= 16\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
 $= -8 - i8\sqrt{3}$.

c. $-2\sqrt{2} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} \left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$
 $= 2\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}$
 $= -2 - 2i$.

d. $\frac{1-i}{1+i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$
 $= e^{-i\frac{\pi}{2}}$
 $= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

e. $\frac{8+i}{3-i} = \frac{(8+i)(3-i)}{10} = \frac{24+8+12i-4}{10} = 2+2i$
 $= 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$
 $= 2\sqrt{2} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

f. $-2e^{-i\frac{7\pi}{3}} = -2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$
 $= 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$
 $= -1 + i\sqrt{3}$.

g. $\frac{2012}{6} = 335 + \frac{1}{3}$ d'où

$$2ie^{-i\frac{2012}{6}\pi} = 2ie^{-i\frac{4}{3}\pi} = 2e^{-i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}\pi\right)} = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

$$= 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

$$= -\sqrt{3} - i.$$

211. On pose A d'affixe i et B d'affixe $1+i$ et M le point d'affixe z .

a. z' est réel $\Leftrightarrow \frac{z-i}{z-1-i}$ est réel $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{BM}$ donc M décrit la
droite (AB) privée de B .

b. z' est imaginaire par $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$ donc M décrit le cercle de
diamètre $[AB]$ privée de B .

212. a. $\frac{b-c}{a-c} = \frac{-11+2i+5+5i}{2+i+5+5i} = \frac{-6+7i}{7+6i}$
 $= \frac{(-6+7i)(7+6i)}{7^2+6^2} = \frac{-42+36i+49i+42}{7^2+6^2} = i$.

ABC est rectangle isocèle en C .

b. $\frac{a-b}{c-b} = \frac{2+i-1-i}{i-i-1-i} = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}$ donc (ABC) est rectangle en B .

c. $\frac{a-c}{b-c} = \frac{-1+i\sqrt{3}-2}{-1-i\sqrt{3}-2} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{-3-i\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)}{2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)} = \frac{e^{i\frac{5\pi}{6}}}{e^{i\frac{7\pi}{6}}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

d'où ABC est un triangle équilatéral.

d. $\frac{c-a}{b-a} = \frac{2+1+2i}{-10-8i+1+2i} = \frac{3+2i}{-9-6i} = -\frac{1}{3}$ d'où A, B et C
sont alignés.

213. a. $a - |z'| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-3i}{z+1}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-3i|}{|z+1|} = 1$.

On pose A le point d'affixe $3i$ et B d'affixe -1 .

Alors $\frac{AM}{BM} = 1$ d'où $AM = BM$ d'où M décrit la médiatrice de
 $[AB]$.

b. z' est réel $\Leftrightarrow \frac{z-i}{z+1}$ est imaginaire par $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$. M décrit
le cercle de diamètre $[AB]$ privée de B .

c. z' est imaginaire par $\Leftrightarrow \frac{z-3i}{z+1}$ est réel $\Leftrightarrow AM$ et B sont alignés. M décrit la droite (AB) privée de B .

d. $z' = i \Leftrightarrow \frac{z-3i}{z+1} = 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow 3i = -1$.
→ ensemble vide.

214. A. 1. Soit $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$ tels que :

$$z = x + iy \text{ et } z' = x' + iy'.$$

$$\overline{z \times z'} = \overline{xx' - yy' + i(xy' + yx')} = (xx' - yy') - i(xy' + yx') \text{ et}$$

$$\overline{z} \times \overline{z'} = (x - iy)(x' - iy') = xx' - yy' - iyx' - ixy' = (xx' - yy') - i(yx' + xy')$$

d'où $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

2. $P(n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$: $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

• $P(1)$ est évidemment vraie : $\overline{z^1} = (\overline{z})^1$.

• Pour n donné, supposons $P(n)$ vraie : $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

$$\text{On a } \overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \overline{z} = (\overline{z})^n \times \overline{z} = (\overline{z})^{n+1}$$

d'où $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

La proposition est donc démontrée par récurrence.

B. 1. $(-z)^4 = ((-z)^2)^2 = (z^2)^2 = z^4$ donc si $z^4 = -4$ alors $(-z)^4 = -4$.

$-4 = -4$ donc si $z^4 = -4$ alors $\overline{z^4} = -4$ donc $(\overline{z})^4 = -4$ donc si z est solution $\overline{z}$ est aussi solution.

2. a. $z_0 = 1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b. $z_0^4 = \sqrt{2}^4 e^{i\pi} = -4$ donc z_0 est solution de $z^4 = -4$

3. z_0 est solution donc $\overline{z_0}$ est solution $\overline{z_0} = 1 - i$,

donc $-\overline{z_0}$ est solution $-\overline{z_0} = -1 - i$,

$\overline{z_0}$ est solution donc $-\overline{z_0}$ est solution $-\overline{z_0} = -1 + i (= -\overline{z_0})$.

C. 1. $\frac{e-c}{b-c} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} \text{d'où } e(b-c) &= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (b-c) + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (1+i+1+i) - 1-i \\ &= i + \sqrt{3} - 1 - i \\ e &= -1 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \frac{f-c}{d-c} &= e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ d'où } f = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (d-c) + c \\ &= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (1-i+1+i) - 1-i \\ &= i - i\sqrt{3} - 1 - i = -i(1 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \frac{a-e}{a-f} &= \frac{1+i+1-\sqrt{3}}{1+i+i+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}+i}{1+i(2+\sqrt{3})} = \frac{((2-\sqrt{3})+i)(1-i(2+\sqrt{3}))}{1^2 + (2+\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{2-\sqrt{3}+i-i(4-3)+2+\sqrt{3}}{1^2 + (2+\sqrt{3})^2} = \frac{4}{1+(2+\sqrt{3})^2} \end{aligned}$$

donc $\frac{a-e}{a-f}$ est réel.

4. A, E et F sont alignés.

215. 1. $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{3}$ et $AD = AE$ d'où $\frac{e-a}{d-a} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$$\begin{aligned} z_E &= e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_A) + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (1-i) + i = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + i \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = (1+i)\frac{1+\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

2. $z' = \frac{2 \times 1 - i}{i \times 1 + 1} = \frac{2-i}{i+1} = \frac{(2-i)(1-i)}{2} = \frac{2-1-2i+i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.

3. a. $z' = \frac{2z-i}{iz+1}$ donc pour $z \neq 1$, $z'(iz+1) - 2z + i = 0$

$$\Leftrightarrow z'iz + z' - 2z + i = 0 \Leftrightarrow z'z - iz' + 2iz + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z'(z-i) + 2iz + 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow z'(z-i) + 2i(z-i) = 1$$

$$\Leftrightarrow (z' + 2i)(z-i) = 1$$

b. donc $|(z' + 2i)(z-i)| = 1$ d'où $|z' + 2i| \times |z-i| = 1$ d'où $BM' \times AM = 1$

$$\text{et } \arg((z' + 2i)(z-i)) = 0[2\pi] = \arg(z' + 2i) + \arg(z-i)$$

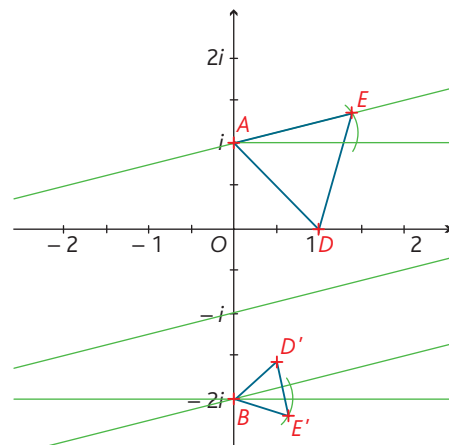
$$\text{donc } 0[2k] = (\vec{u}; \overrightarrow{BM'}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AM'})$$

$$\text{seulement : } \begin{pmatrix} BM' = \frac{1}{AM} \\ (u; \overrightarrow{BM'}) = -(\vec{u}; \overrightarrow{AM'}) + k2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}. \end{pmatrix}$$

4. a. ADE est équilatéral donc $AD = AE$ d'où D et E sont sur un cercle de centre A et de rayon AD .

$$AD = |1-i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

b.



$$\begin{aligned} c. z_{E'} &= \frac{2z_E - i}{iz_E + 1} = \frac{2 \frac{1+\sqrt{3}}{2} (1+i) - i}{i \frac{1+\sqrt{3}}{2} (1+i) - i} = \frac{1 + \sqrt{3} + i\sqrt{3}}{\frac{1+\sqrt{3}}{2} i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3} + i\sqrt{3}}{\frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} i} = 2 \frac{(1+\sqrt{3}) + i\sqrt{3}}{(1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})i} \\ &= 2 \frac{(1+\sqrt{3}) + i\sqrt{3}}{(1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})i} \times \frac{(1-\sqrt{3}) - (1+\sqrt{3})i}{(1-\sqrt{3}) - (1+\sqrt{3})i} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3} + (-7 - \sqrt{3})}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_{D'} - z_B}{z_{E'} - z_B} &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i + 2i}{\frac{1 + \sqrt{3}}{4} - i\frac{\sqrt{3} + 7}{4} + 2i} = \frac{\frac{1}{2}(1 + i)}{\frac{1 + \sqrt{3}}{4} + \frac{1 - \sqrt{3}}{4}i} \\ &= 2 \frac{1 + i}{(1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i} \times \frac{(1 + \sqrt{3}) - (1 - \sqrt{3})i}{(1 + \sqrt{3}) - (1 - \sqrt{3})i} \\ &= \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3} - i + i\sqrt{3} + i + i\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3}) \\ &= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}. \end{aligned}$$

D'où $BD' = BE'$ et $(\overrightarrow{BE'}; \overrightarrow{BD'}) = \frac{\pi}{3}$ d'où $BE'D'$ est équilatéral direct.

216. 1. $c = s + 3(a - s) = -5 + 5i + 3(-2 + 4i + 5 - 5i)$
 $= -5 + 5i + 9 - 3i = 4 + 2i.$

$d = s + 3(b - s) = -5 + 5i + 3(-4 + 2i + 5 - 5i)$
 $= -5 + 5i + 3 - 9 = -2 - 4i.$

2. $|a| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} = |d|$, d'où $OA = OB = OC = OD$.
 $|b| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} = |c|$,

A, B, C, D sont sur le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{5}$.

3. $|AS| = |s - a| = |-5 + 5i + 2 - 4i| = |-3 + i| = \sqrt{10}$
 $|BS| = |s - b| = |-5 + 5i + 4 - 2i| = |-1 + 3i| = \sqrt{10} \rightarrow AS = BS.$

$|A\Omega| = |w - a| = |-2 + 2i + 2 - 4i| = |-2i| = 2$
 $|B\Omega| = |w - b| = |-2 + 2i + 4 - 2i| = |2| = 2 \rightarrow A\Omega = B\Omega.$

S et Ω sont chacun équidistants de A et B donc (Ω) est la médiatrice de $[AB]$.

4. a. $p = \frac{a + c}{2} = \frac{-2 + 4i + 4 + 2i}{2} = 1 + 3i.$

b. $\frac{w - p}{d - b} = \frac{-2 + 2i - 1 - 3i}{-2 - 4i + 4 - 2i} = \frac{-3 - i}{2 - 6i} = \frac{-3 - i}{2 - 6i} \cdot \frac{2 + 6i}{2 + 6i}$
 $= \frac{-6 - 18 - 2i + 6}{40} = -\frac{1}{2}i = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$

d'où $(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{P\Omega}) = -\frac{\pi}{2}.$

5. $q = \frac{b + d}{2} = \frac{-4 + 2i - 2 - 4i}{2} = -3 - i$

$\frac{p - \omega}{q - s} = \frac{1 + 3i + 2 - i}{-3 - i + 5 - 5i} = \frac{3 + i}{2 - 6i} = \frac{3 + i}{2 - 6i} \cdot \frac{2 + 6i}{2 + 6i} = \frac{6 + 18i + 2i - 6}{40} = \frac{1}{2}i$

d'où $(QS) \perp (PQ).$

$\frac{q - \omega}{p - s} = \frac{-3i - i + 2 - 2i}{1 + 3i + 5 - 5i} = \frac{-3 - i}{6 - 2i} = \frac{6 + 2i}{6 - 2i} = \frac{-6 - 2i - 18i + 6}{40} = -\frac{1}{2}i$

d'où $(PS) \perp (Q\Omega).$

Ω est donc l'orthocentre de PQS .

TP Info (p. 278-279)

1. a. Soit m, n, p, q 4 entier. Soit U et V les entiers tels que $U = m^2 + n^2$ et $V = p^2 + q^2$. La question est : existe-t-il 2 entiers a et b tels que $UV = a^2 + b^2$.

b. $0 = 0^2 + 0^2$ et $0 \times 0 = 0 = 0^2 + 0^2$ donc 0 et 0 vérifient la propriété.

$1 = 0^2 + 1^2$ et $2 = 1^2 + 1^2$, ensuite $2 \times 1 = 2 = 1^2 + 1^2$ donc 1 et 2 vérifient la propriété.

c. La décomposition n'est pas unique : $100 = 10^2 + 0^2 = 6^2 + 8^2$.

d. i. 3 n'est pas décomposable en somme de 2 carrés.

ii. L'algorithme trouve toutes les décompositions d'un entier en somme de deux carrés d'entiers.

iii. Cet algorithme permet de trouver des entiers U, V somme de 2 carrés d'entiers. Puis de vérifier si leur produit UV est également une somme de 2 carrés d'entiers. La propriété semble vraie.

2. $N = x^2 + y^2$ et $N' = x'^2 + y'^2$.

1. $N \cdot N' = (xx')^2 + (yy')^2 + (yx')^2 + (xy')^2$.
 On ne voit pas apparaître une somme de 2 carrés d'entiers.

2. a. $N = \overline{z}z = |z|^2$, $N' = \overline{z'}z' = |z'|^2$.

b. $N \cdot N' = \overline{z}z \cdot \overline{z'}z' = \overline{zz'} \cdot zz' = \overline{zz'}$.

Or

$\overline{zz'} = (x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' - yx')$
 $= p + iq$

avec $p = xx' - yy' \in \mathbb{N}$
 et $q = xy' + yx' \in \mathbb{N}$ car $x, x', y, y' \in \mathbb{N}$.

d'où $N \times N' = p^2 + q^2$.

c. Soit $U = a^2 + b^2$ et $V = c^2 + d^2$ avec $U, V, a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

$U \times V = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$
 $= (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2$
 $= \underbrace{(ac - bd)^2}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{(ad + bc)^2}_{\in \mathbb{N}}.$

$U \times V$ est bien une somme de 2 carrés d'entiers.

d. Le résultat ci-dessus est applicable à des nombres réels.

On reprend le raisonnement avec les complexes :

$U = \overline{z}z$, $V = \overline{z'}z'$ et $W = \overline{z''z''}$.

$U \times V \times W = \overline{z}z \cdot \overline{z'}z' \cdot \overline{z''z''} = \overline{zz'z''} \cdot \overline{zz'z''}$

avec $z = a_1 + b_1i$, $z' = a_2 + b_2i$,
 $z'' = a_3 + b_3i$ et

$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \in \mathbb{N}$

$zz'z'' = p + qi$ avec $p, q \in \mathbb{N}$ donc
 $U \times V \times W = p^2 + q^2$ (somme de produit d'entiers).

Sur les pas du supérieur (p. 279)

I. 1. $\omega^n = \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = e^{-i2k\pi} = (e^{i2k\pi})^k = 1^k = 1$, donc ω solution de (E).

2. $z^n = 1 \Rightarrow |z^n| = 1 = |z|$ et comme $|z| > 0$, on a donc $|z| = 1$
 $z^n = 1 \Rightarrow \arg|z^n| = 0[2\pi] = u \arg(z)$.

Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n \arg|z| = 2\pi k$ d'où $\arg|z| = \frac{2\pi k}{n}$.

La réciproque a été vue en 1.

On a donc $z^n = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$ et $\arg z = \frac{2\pi k}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3. Les solutions de (E) s'écrivent donc $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. $\omega^n = e^{i2k\pi} = e^{i0} = \omega_0$;

$$\omega_{n+1} = e^{i2k\pi} e^{i\frac{2\pi \times 1}{n}} = \omega_1.$$

Soit $k \in \mathbb{Z}$; il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $k = m + ln$ avec $m \in \{0, \dots, n-1\}$.

$$\text{Donc } \omega_k = \omega_{m+ln} = \omega^{i\frac{2\pi(m+ln)}{n}} = \omega^{i\frac{2\pi m}{n}} \omega^{i2\pi l} = \omega^{i\frac{2\pi m}{n}}.$$

Pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $\frac{2k\pi}{n} \in [0; 2\pi]$ donc les ω_k sont distinctes.

On en déduit que les solutions de (E) correspondent exactement aux valeurs de k dans $\{0; 1; \dots; n-1\}$ soit n solutions.

$$5. \frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \frac{e^{i\frac{2\pi(k+1)}{n}}}{e^{i\frac{2\pi k}{n}}} = e^{i\frac{2\pi}{n}} \text{ d'où } \left| \frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} \right| = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k}\right) = \frac{2\pi}{n}.$$

6. À partir du point d'affixe 1, on trouve la solution $k+1$ en reportant l'angle $\frac{2\pi}{n}$ à partir du point k sur le cercle de centre 0 et de rayon 1.

$$7. \omega_k = \omega^{i\frac{2\pi k}{n}} = \left(\omega^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = \omega^k.$$

$$8. \omega_n = \omega^{i\frac{2\pi n}{n}} = \omega^{i2\pi} = \omega^{i0} = 1.$$

$$1 + \omega + \dots + \omega^{n-1} = \omega^0 + \omega^1 + \dots + \omega^{n-1} = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = \frac{1 - 1}{1 - \omega} = 0.$$

$$9. 1 + \omega + \dots + \omega^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos \left(\frac{2k\pi}{n} \right) + i \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{2k\pi}{n}.$$

Comme $1 + \omega + \dots + \omega^{n-1} = 0 = 0i$ et comme la forme algébrique et un complexe est unique, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2k\pi}{n} = 0 \text{ et idem pour sin.}$$

10. $n = 2 \rightarrow \omega_k = e^{i\frac{2\pi k}{2}}$ pour $k \in \{0; 1\}$ soit $\omega_0 = 1$ et $\omega_1 = e^{i\pi} = -1$.

$$n = 3 \rightarrow \omega_k = e^{i\frac{2\pi k}{3}} \text{ pour } k \in \{0; 1; 2\} \text{ soit } \omega_0 = 1; \\ \omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \omega_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$n = 4 \rightarrow \omega_k = e^{i\frac{2\pi k}{4}} \text{ pour } k \in \{0; 1; 2; 3\} \text{ soit } \omega_0 = 1;$$

$$\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{4}} = i, \omega_2 = e^{i\pi} = -1 \text{ et } \omega_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i.$$

$$II. 1. z_0^n = \left(\sqrt[n]{m} e^{i\frac{\alpha}{n}}\right)^n = (\sqrt[n]{m})^n e^{i\alpha} = m e^{i\alpha}.$$

$$m e^{i\alpha} = a \text{ car } |a| = m \text{ et } \alpha = \arg a[2\pi].$$

$$2. a \neq 0 \text{ donc } z^n = a \Leftrightarrow \frac{z^n}{a} = 1.$$

Or $a = z_0^n$ d'où $\left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1$ est équivalent à (E).

3. Les solutions de $\left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1$ sont celles de $z^n = 1$ avec $Z = \frac{z}{z_0}$.

Les solutions de $z^n = 1$ sont les racines n -ièmes de l'unité soit n solutions :

$$\omega_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}} \text{ avec } k \in \{0; 1; \dots; n-1\}, \\ \text{d'où } z_k = z_0 \omega_k.$$

$$4. a. (1 - 2i)^4 = ((1 - 2i)^2)^2 = (1 - 4 - 4i)^2 = (-3 - 4i)^2 = 9 - 16 + 24i = -7 + 24i.$$

b. $1 - 2i$ est une solution de $z^4 = -7 + 24i$ car

$$(1 - 2i)^4 = -7 + 24i.$$

Les solutions de $z^4 = 1$ sont $1, i, -1$ et $-i$ d'où les solutions de $z^4 = -7 + 24i$ sont $\{1 - 2i; 2 + i; -1 + 2i; -2 - i\}$.

c. 0 n'est pas solution de $(2z - 1)^4 = z^4$ donc les solutions sont les mêmes que celles de $\left(\frac{2z - 1}{z}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \frac{2z - 1}{z} = 1$ ou

$$\frac{2z - 1}{z} = i \text{ ou } \frac{2z - 1}{z} = -1 \text{ ou } \frac{2z - 1}{z} = -i.$$

6

Géométrie dans l'espace

Programme officiel

Contenus	Capacités attendues
Droites et plans Positions relatives de droites et de plans : intersection et parallélisme. Orthogonalité : – de deux droites ; – d'une droite et d'un plan.	- Étudier les positions relatives de droites et de plans. - Établir l'orthogonalité d'une droite et d'un plan.
Géométrie vectorielle Caractérisation d'un plan par un point et deux vecteurs non colinéaires. Vecteurs coplanaires. Décomposition d'un vecteur en fonction de trois vecteurs non coplanaires. Repérage. Représentation paramétrique d'une droite.	- Choisir une décomposition pertinente dans le cadre de la résolution de problèmes d'alignement ou de coplanarité. - Utiliser les coordonnées pour : - traduire la colinéarité ; - caractériser l'alignement ; - déterminer une décomposition de vecteurs.
Produit scalaire Produits scalaire de deux vecteurs dans l'espace : définition, propriétés. Vecteur normal à un plan. Équation cartésienne d'un plan.	- Déterminer si un vecteur est normal à un plan. - Caractériser les points d'un plan de l'espace par une relation $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b, c trois nombres réels non tous nuls. - Déterminer une équation cartésienne d'un plan connaissant un point et un vecteur normal. - Déterminer un vecteur normal à un plan défini par une équation cartésienne. - Déterminer qu'une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. - Choisir la forme la plus adaptée entre équation cartésienne et représentation paramétrique pour : - déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan ; - étudier la position relative de deux plans.

Découverte (p. 282-283)

1. Démontrer la perpendicularité dans l'espace

Il s'agit de solliciter les élèves sur la vision des droites et faces dans le cube, en introduisant la notion d'orthogonalité. On essaiera de mettre en place quelques raisonnements simples en utilisant la perpendicularité des diagonales des carrés et la position particulière des arêtes par rapports aux faces du cube (perpendiculaires, parallèles).

1. À l'aide de *Carmétal* ou sur une feuille

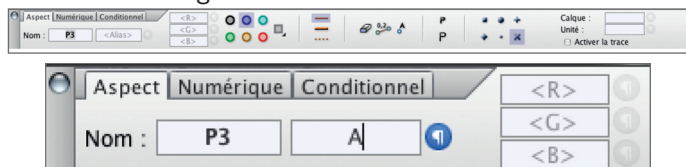
Sous *Carmétal* : Nouvelle figure 3D, choisir l'outil cube et en placer un sur la figure.



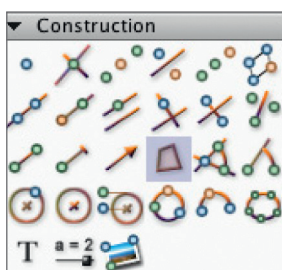
Si le cube est trop grand, dans le menu édition choisir « Zoomer

ou déplacer » puis en restant cliqué au centre du cube on peut agrandir (en tirant vers l'extérieur) ou réduire (en tirant vers l'intérieur du cube).

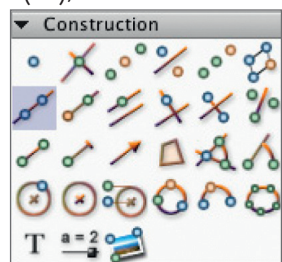
Pour nommer les sommets, un clic avec le bouton droit de la souris permet d'ouvrir une fenêtre gérant l'aspect de chaque objet : il suffit d'un clic-droit sur chaque sommet et d'indiquer le sommet en renseignant l'« <Alias> » dans la fenêtre du haut :



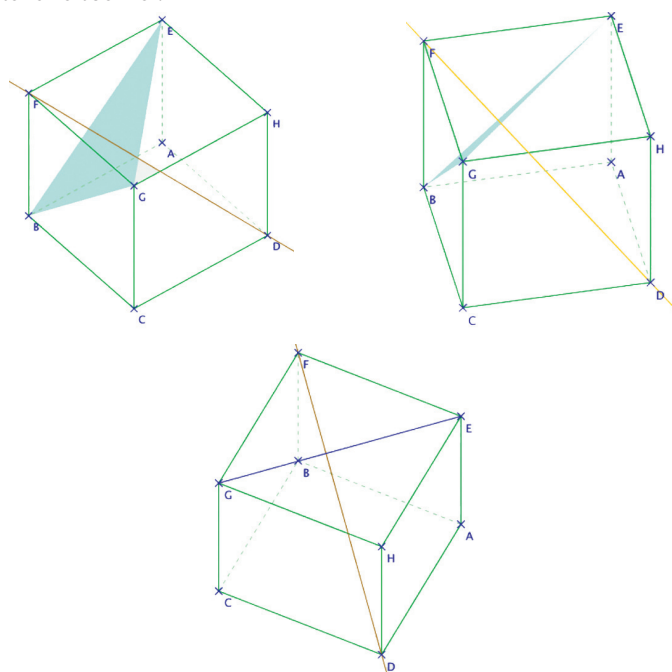
Pour tracer le plan (BGE), on utilisera l'outil « polygone » (touche Esc pour le finir) :



Pour tracer la droite (FD), on utilisera l'outil « droite » :



Pour changer l'angle de vue, tout en cliquant sur le bouton droit de la souris, on fera glisser la souris sur le cube, ce qui permet de le faire tourner.



2. Vers une démonstration

1. On souhaite démontrer que la droite (BG) est orthogonale à deux droites de (FCD).

En traçant le cube, on constate que (BG) et (FC) sont perpendiculaires étant les diagonales du carré BCGF.

1^{er} raisonnement : Si on trace le plan (FCD) dans le cube, il coupe la face EGDH selon la droite parallèle à (FC) passant par D. C'est la droite (ED).

Et donc (ED) est parallèle à (FC), elle est donc orthogonale à (BG).

2^e raisonnement : Si on note B' le point d'intersection de (FC) et (BG) alors la parallèle à la droite (CD) passant par B' est perpendiculaire à la droite (BG) car la droite (CD) est perpendiculaire au plan (BCGF). Donc (BG) est orthogonale à (CD).

On conclut que (BG) est orthogonale à deux droites de (FCD).

2. On procède de même avec la droite (EG) et le plan (FHD). (EG) et (FH) sont des diagonales du carré EFGH et la droite (HD) perpendiculaire au plan (EFGH) donc orthogonale à la droite (EG).

3. La droite (FD) est orthogonale à (BG) et à (EG) sécantes en G. Cela nous permet d'affirmer que (FD) est perpendiculaire au plan (BGE).

3. Avec un deuxième plan

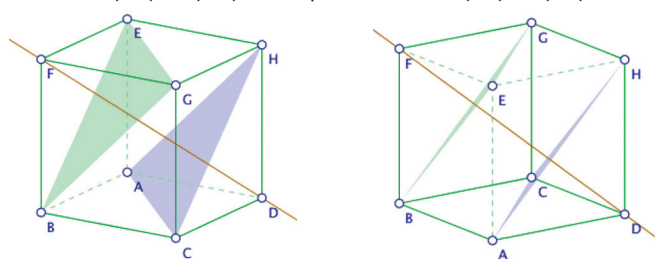
Avec le plan (ACH) on peut proposer deux raisonnements différents :

1^{er} raisonnement : On refait toute la démonstration précédente pour démontrer que la droite (FD) est perpendiculaire au plan (ACH).

2^e raisonnement : On démontre que les plans (BEG) et (ACH) sont parallèles et puisque (FD) est perpendiculaire à l'un alors elle est perpendiculaire à l'autre.

(BEG) et (ACH) sont parallèles car ils contiennent deux droites sécantes parallèles :

les droites (BG) et (CH) ainsi que les droites (EG) et (AC).



2. Du plan à l'espace : calcul du produit scalaire

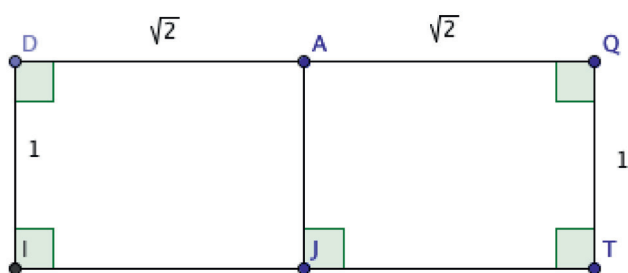
Il s'agit de faire le lien entre la formule $xx' + yy'$ du produit scalaire dans le plan muni d'un repère orthonormé avec la formule $xx' + yy' + zz'$ dans l'espace.

On s'appuie sur les connaissances du repérage dans le plan, pour introduire un repère dans l'espace, les coordonnées des points dans l'espace et les premiers calculs avec celles-ci.

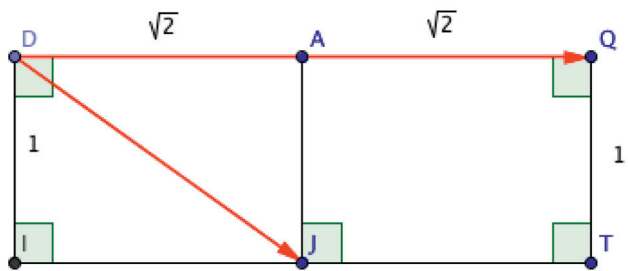
1. Du plan à l'espace :

1. Faire tracer la figure plane représentant les points dans le plan (DIJ) :

[DA] étant une diagonale du carré de côté 1, alors la longueur $DA = \sqrt{2}$.



Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DQ} \cdot \overrightarrow{DJ}$, on s'appuiera sur la formule donnée en première S avec le projeté orthogonal de J sur (DQ) : ici le point A et puisque les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DQ}$ sont de même sens alors $\overrightarrow{DQ} \cdot \overrightarrow{DJ} = DA \times DQ = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$.



1. Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors le produit scalaire est donné par $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

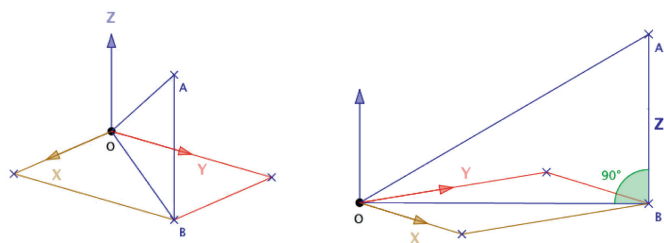
2. $D(1; -1; 1)$, $Q(-1; 1; 1)$ et $J(0; 0; 0)$

$$\overrightarrow{DQ} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DJ} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. On a alors $xx' + yy' + zz' = -2 \times (-1) + 2 \times 1 + 0 \times (-1) = 4$.
On retrouve la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{DQ} \cdot \overrightarrow{DJ}$.

2. Vers une démonstration

1.



Le triangle OAB est un triangle rectangle en B donc $OA^2 = OB^2 + AB^2$ (par Pythagore) et puisque $AB^2 = z^2$, on trouve $OA^2 = OB^2 + z^2$.

2. On a aussi $OB^2 = x^2 + y^2$ par Pythagore OB étant l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côté x et y . On en déduit que $\|\vec{u}\|^2 = OA^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

3. Par analogie au cas précédent $\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ et

$$\vec{u} - \vec{v} \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{pmatrix} \text{ alors } \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 2x'x - 2y'y - 2z'z.$$

$$4. \text{ En utilisant la } 2\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2xx' + 2yy' + 2zz';$$

on en déduit que $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

3. Écrire un programme :

Début

X, Y, Z, X1, Y1, Z1, P sont du type nombre réel.

Afficher « Donner les coordonnées de $\vec{u}$ »

Lire X, Lire Y, Lire Z

Afficher « Donner les coordonnées de $\vec{v}$ »

Lire X1, Lire Y1, Lire Z1

P prend la valeur $X \times X1 + Y \times Y1 + Z \times Z1$

Afficher « le produit scalaire est »

Afficher P

Fin

3. Vers une équation de plan :

1. Ensemble (E)

1.

$$AM^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 10z + 30$$

$$BM^2 = (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z + 14$$

$$2. AM^2 = BM^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 10z + 30 = x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z + 14$$

$$\Leftrightarrow 4x - 8y - 8z + 16 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 2z + 4 = 0$$

3. I le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $(2; 0; 3)$ et en remplaçant dans le membre de gauche de l'équation, on trouve : $2 - 2 \times 0 - 2 \times 3 + 4 = 0$.

Donc les coordonnées de I vérifient l'équation précédente.

2. Ensemble (E')

1. Le plan (E') est perpendiculaire à la droite (AB) , donc toute droite contenue dans le plan (E') est orthogonale à (AB) . Puisque M et I appartiennent à (E') alors la droite (MI) est perpendiculaire à (AB) . Donc le produit scalaire $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

$$2. \overrightarrow{MI} \begin{pmatrix} 2-x \\ -y \\ 3-z \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

donc

$$\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB} = 2(2-x) + 4y - 4(3-z) = -2x + 4y + 4z - 8.$$

$$\text{Or } \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\text{donc } 2x - 4y - 4z + 8 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 2z + 4 = 0.$$

3. On souhaite démontrer que (E) et (E') sont les mêmes ensembles.

$M \in (E')$, le plan perpendiculaire à la droite (AB) passant par I est équivalent à

$$AM^2 = IM^2 + IA^2 \text{ (par Pythagore car le triangle AIM est rectangle en I)}$$

$$AM^2 = IM^2 + IB^2 \text{ (car I est le milieu de [AB] donc IA = IB)}$$

$AM^2 = BM^2$ (par Pythagore car le triangle BIM est rectangle en I)
ce qui est équivalent à $AM = BM$ (car ce sont des distances positives), ce qui revient à dire que M est équidistant des points A et B , donc que $M \in (E)$.

L'équation du plan médiateur des points A et B est donc l'ensemble (E) ou (E') d'équation $x - 2y - 2z + 4 = 0$.

4. Algorithme donnant une équation cartésienne du plan médiateur en fonction des coordonnées de A et B .

On s'appuie sur la méthode du 2., où M appartient au plan médiateur de $[AB]$, si et seulement si $\vec{IM} \cdot \vec{AB} = 0$.

En prenant : x_A, y_A, z_A les coordonnées de A ; x_B, y_B, z_B les coordonnées de B ; on calcule les coordonnées du milieu : $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$, $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

$$y_I = \frac{y_A + y_B}{2}, z_I = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

On a :

$$\vec{IM} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow (x - x_I)(x_B - x_A) + (y - y_I)(y_B - y_A) + (z - z_I)(z_B - z_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_B - x_A)x + (y_B - y_A)y + (z_B - z_A)z + x_I(x_A - x_B) + y_I(y_A - y_B) + z_I(z_A - z_B) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \text{ avec}$$

$$a = (x_B - x_A),$$

$$b = (y_B - y_A),$$

$$c = (z_B - z_A),$$

$$\text{et } d = x_I(x_A - x_B) + y_I(y_A - y_B) + z_I(z_A - z_B).$$

Le programme peut donc s'écrire :

Début

$x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, a, b, c$ et d sont du type nombre réel.

Afficher « Donner les coordonnées du point A »

Lire , Lire , Lire

Afficher « Donner les coordonnées du point B »

Lire x_A , Lire y_A , lire z_A

a prend la valeur $x_B - x_A$

b prend la valeur $y_B - y_A$

c prend la valeur $z_B - z_A$

d prend la valeur $\left(\frac{x_A + x_B}{2}\right) \times (x_A - x_B) + \left(\frac{y_A + y_B}{2}\right) (y_A - y_B) + \left(\frac{z_A + z_B}{2}\right) (z_A - z_B)$

Afficher « l'équation du plan médiateur de $[AB]$ est

$ax + by + cz + d = 0$ avec »

Afficher « a= »,a

Afficher « b= »,b

Afficher « c= »,c

Afficher « d= »,d

Fin

Démonstrations (p. 298-299)

Page 298

Si $a = 0$ alors

Si $b \neq 0$, on prend le point $A\left(0; -\frac{d}{b}; 0\right)$ appartenant à (F) .

En effet $a \times 0 + b \times \left(-\frac{d}{b}\right) + c \times 0 + d = 0$.

Alors si on pose $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ alors pour tout point $M(x; y; z)$ appartenant à (F) , on a :

$$\vec{AM} \begin{pmatrix} x \\ y + \frac{d}{b} \\ z \end{pmatrix} \cdot \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = ax + b\left(y + \frac{d}{b}\right) + cz = ax + by + cz + d = 0.$$

Les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux donc M est sur le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Si $a = 0$ et si $b = 0$;

Alors si $c \neq 0$, le point $A\left(0; 0; -\frac{d}{c}\right)$ appartient à (F) et de la même manière

$$\vec{AM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z + \frac{d}{c} \end{pmatrix} \cdot \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = ax + b(y) + c\left(z + \frac{d}{c}\right) = ax + by + cz + d = 0.$$

Donc M est sur le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

La démonstration est terminée car a, b et c sont supposés non tous nuls.

Page 299

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{u}$

s'exprime donc de la façon suivante : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ alors on sait que :

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|^2 &= \vec{u} \cdot \vec{u} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \\ &= xx\vec{i} \cdot \vec{i} + yy\vec{j} \cdot \vec{j} + zz\vec{k} \cdot \vec{k} + xy\vec{i} \cdot \vec{j} + xz\vec{i} \cdot \vec{k} \\ &\quad + yx\vec{j} \cdot \vec{i} + yz\vec{j} \cdot \vec{k} + zx\vec{k} \cdot \vec{i} + zy\vec{k} \cdot \vec{j} \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

car $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$.

On en déduit que $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

En prenant le vecteur $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \vec{u}$, on en déduit que la

distance $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Exercices résolus (p. 300-305)

Page 304

$2x + y - 2z = 9$ est une équation du plan (P) de vecteur normal

$\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $-x - 0,5y + z = 3$ est une équation du plan (P') de vecteur normal $\vec{n'} \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Or $\vec{n} = -2\vec{n'}$, les vecteurs normaux sont donc colinéaires, les plans (P) et (P') sont donc parallèles ou confondus.

Le système $\begin{cases} 2x + y - 2z = 9 \\ -x - 0,5y + z = 3 \end{cases}$ n'est donc pas celui d'une droite.

C'est un seul plan si (P) et (P') sont confondus et c'est l'ensemble vide sinon.

Exercices (p. 306)

1. à 24. Corrigés dans le manuel.

1. L'espace sans produit scalaire

25. Corrigé dans le manuel.

26.

1. $(IJ) \parallel (GC)$; $(IJ) \perp (DC)$ et $(GC) \parallel (CB)$.
 $(IJ) \perp (DC)$ et $(IJ) \perp (CB)$: $(IJ) \perp (ABCD)$.

2. $\vec{BJ} = \vec{BI} + \vec{IJ}$, $\vec{BJ}$ n'est pas orthogonal à $\vec{IJ}$. Les droites (BJ) et (IJ) ne sont pas orthogonales.

4. $\vec{IJ} = \vec{BF}$ et $(BF) \perp (BI)$, $IJFB$ est un rectangle d'aire $2\sqrt{5}$.

27. On sait que $\vec{BB'} = \vec{DC}$ car B' est l'image de B par la translation de vecteur $\vec{DC}$. Donc $CDBB'$ est un parallélogramme dont les diagonales $[DB']$ et $[BC]$ se coupent en leur milieu que l'on note I .

De plus, la droite (AG) est une médiane du triangle ABC . Elle passe aussi par le milieu I de $[BC]$. La droite (AG) et le plan (ADB') ont au moins deux points communs le point A et le point I . Donc la droite (AG) est contenue dans le plan (ADB') .

28. 1. L'intersection du plan (IBM) et de la face (HCD) est la droite passant par M et parallèle à la droite (BI) .

29. Corrigé dans le manuel.

30. 1. $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{DC} - \frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{BF}$.

2. $\vec{JK} = \frac{1}{2}\vec{DC} - \frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{BF}$.

3. $\vec{IJ} = \vec{JK}$ les trois points sont alignés.

2. Colinéarité et coplanarité dans l'espace

31. et 32. Corrigés dans le manuel.

33. 1. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{AB} = -2\vec{AC}$,

A, B, C alignés.

2. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{AB} \neq k\vec{AC}$,

A, B, C non alignés.

34. 1. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\vec{AB} = \frac{1}{3}\vec{AC}$,

A, B, C alignés.

2. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{AB} = -\vec{AC}$,

A, B, C alignés.

35. 1. $\vec{AB} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{11}{8} \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{-5}{3} \\ \frac{-19}{8} \end{pmatrix}$;

$\vec{AB} \neq k\vec{AC}$, A, B, C non alignés.

2. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix}$; $\vec{AB} = -\frac{1}{8}\vec{AC}$,

A, B, C alignés.

3. cas 1. ABC coplanaire, cas 2 ABC forme une droite.

36. Corrigé dans le manuel.

37. 1. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{DC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{AB} \neq k\vec{DC}$,

les vecteurs ne sont pas colinéaires.

2. $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{AD} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$;

$\vec{AD} = -2\vec{AC} + 3\vec{AC}$,
donc les points sont coplanaires.

38. 1. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{DC} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{AB} \neq k\vec{DC}$,

les vecteurs ne sont pas colinéaires.

2. $\vec{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{AD} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$;

$\vec{AD} \neq k\vec{AC} + k'\vec{AC}$,
les points ne sont pas coplanaires.

39. et 40. Corrigés dans le manuel.

41. 1. $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $C \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $D \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $F \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{AD} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\vec{AD} \neq k\vec{AB} + k'\vec{AC}$,
les points ne sont pas coplanaires.

2. les points A, E et F appartiennent au plan $z = 0$, D n'appartient pas à ce plan donc les points ne sont pas coplanaires.

42. 1. $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $C \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $D \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$E \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $F \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\vec{AD} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$,
les points sont coplanaires.

$$2. \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},$$

les points A, B, C et E sont coplanaires.

$$3. \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF},$$

les points A, B, C, D et F sont coplanaires.

$$43. 1. \vec{FI} = \vec{FB} + \vec{BI}. \|\vec{FI}\| = \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

$$\vec{FJ} = \vec{FE} + \vec{EJ}. \|\vec{FJ}\| = \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

Le triangle FIJ est isocèle en F.

Dans un triangle isocèle, la médiane, la hauteur, la bissectrice et la médiatrice du sommet principal sont confondues. K est le milieu de [IJ]. La droite (KF) est perpendiculaire à la droite (IJ).

2. (FGK) définit un plan de l'espace. (IJ) est orthogonale à (GF) et à (KF). La droite (IJ) est orthogonale au plan (FGK).

3. P projeté orthogonal de G sur le plan (IJF). La droite (GP) est orthogonale à (IJF). (GP) est orthogonale à (IJ) et (IJ) est orthogonale à la droite (GF). La droite (IJ) est orthogonale au plan (GPF).

4. (IJ) est orthogonale aux plans (FGK) et (FGP). Les points G, B, F et P sont coplanaires.

5. Les points F, P et K appartiennent aux plans (IFJ) et (FGK). Ces points appartiennent à une même droite, ils sont donc alignés.

44. Corrigé dans le manuel.

$$45. 1. \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 1 = t - t' \\ -2 = -3t - 4t' \\ 2 = 3t + 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = t - 1 \\ t = \frac{6}{7} \\ t = \frac{4}{5} \end{cases},$$

donc les vecteurs sont non coplanaires.

2. oui, 3 vecteurs non coplanaires définissent un repère de l'espace.

$$3. M \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$4. \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} -1 = \alpha - \beta + \gamma \\ -2 = -3\alpha - 4\beta - 2\gamma \\ 2 = 3\alpha + 2\beta + 2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = \frac{-3}{2} \end{cases}.$$

$$46. 1. \vec{w} = k\vec{u} + k'\vec{v}.$$

$$\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k' \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 2k - k' = 0 \\ k = 0 \\ k' = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \text{les vecteurs sont non coplanaires.}$$

$$2. \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha - \beta \\ -2 = -\alpha - 3\gamma \\ 0 = 3\alpha + \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{7}{17} \\ \beta = \frac{-3}{17} \\ \gamma = \frac{9}{17} \end{cases}.$$

$$3. \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} 4 = 2\alpha - \beta \\ 3 = -\alpha - 3\gamma \\ 5 = 3\alpha + \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{54}{19} \\ \beta = \frac{32}{19} \\ \gamma = \frac{-1}{19} \end{cases}.$$

$$4. \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \text{ les coordonnées de C sont } \left(\frac{1051}{323}; \frac{487}{323}; \frac{154}{323} \right).$$

$$47. 1. \vec{w} = k\vec{u} + k'\vec{v}.$$

$$\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + k' \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} k - k' = 0 \\ 2k - 4k' = 0 \\ -k + 2k' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{les vecteurs sont non coplanaires.}$$

Ils forment un repère de l'espace.

$$2. \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} 3 = \alpha - \beta \\ 0 = 2\alpha - 4\beta \\ -1 = -\alpha + 2\beta - \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = 3 \\ \gamma = 1 \end{cases}.$$

Les coordonnées de B sont (6; 3; 1) dans le repère (A; $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$).

$$3. \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} -3 = \alpha - \beta \\ 4 = 2\alpha - 4\beta \\ -1 = -\alpha + 2\beta - \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -8 \\ \beta = -5 \\ \gamma = 1 \end{cases}.$$

Les coordonnées de C sont (-8; -5; 1) dans le repère (A; $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$).

4. Dans le repère (A; $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$), $\overrightarrow{AC} \neq k\overrightarrow{AB}$, les points ne sont pas alignés.

48. 1. C'est un repère dans l'espace si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires c'est-à-dire si l'équation $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ ne possède pas de solution autre que (0; 0; 0).

Avec le logiciel de calcul formel, on vérifie cette affirmation en saisissant la résolution du système avec les coordonnées des vecteurs.

Solve({3x+y=0,z=0,x+3y+z=0},{x,y,z}) nous donne (x = 0; y = 0; z = 0) donc (A; $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$) est un repère de l'espace.

$$2. \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solve({3x+y=7,z=-2,x+3y+z=1},{x,y,z}) nous donne b. (x = $\frac{11}{7}$; y = $\frac{8}{7}$; z = -2).

$$3. \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solve({3x+y=5,z=-2,x+3y+z=-1},{x,y,z}) nous donne b. (x = $-\frac{2}{7}$; y = $-\frac{4}{7}$; z = 0).

$$4. \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solve({3x+y=5,z=-2,x+3y+z=-1},{x,y,z}) nous donne a. (x = $\frac{11}{7}$; y = $\frac{8}{7}$; z = -2).

3. Calculer un produit scalaire dans un plan

$$49. 1. \vec{u} \cdot \vec{v} = 0; \vec{u} \cdot \vec{w} = 4.$$

$$2. \vec{u} \cdot \vec{v} = 0; \vec{u} \cdot \vec{w} = 0.$$

$$3. \vec{u} \cdot \vec{v} = 0; \vec{u} \cdot \vec{w} = 0.$$

50. 1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$; $\vec{u} \cdot \vec{w} = 6$.

2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$; $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$.

3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2a^2 - b^2$;
 $\vec{u} \cdot \vec{w} = 2a^2 + 2ab + b^2$.

51. 1. $\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 5 + 1 = 6$;

$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = -4 + 0 = -4$.

2. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 + 2 = 5$;

$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 6 + 2 = 8$.

3. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\vec{BC} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 84 + 42 = 126$;

$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = -35 + 7 = -28$.

52. 1. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -4 + 4 = 0$;

$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = -8 + 70 = 8$.

2. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -7\sqrt{13} \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -2\sqrt{13} \end{pmatrix}$;
 $\vec{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ 5\sqrt{13} \end{pmatrix}$.

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 + 14 \times 13 = 182$;

$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 35 \times 13 = 455$.

3. $\vec{AB} \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} - \sqrt{3} \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} - \sqrt{3} \end{pmatrix}$;
 $\vec{BC} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 1 - 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{6} - \sqrt{3}$;

$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 30 - 3\sqrt{2} + \sqrt{3} - 3\sqrt{6}$.

53. a. repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AD})$,

$\vec{AJ} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{DI} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{AJ} \cdot \vec{DI} = 0$.

Les droites (AJ) et (DI) sont orthogonales.

b. $\vec{DI} = \vec{DA} + \frac{1}{2}\vec{AB}$; $\vec{AJ} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC}$,
 $\vec{DI} \cdot \vec{AJ} = 0$. Les droites (AJ) et (DI) sont orthogonales.

54. Corrigé dans le manuel.

55. 1. $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = 12$.

2. $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 4$.

3. $AC^2 = 18$, $CB^2 = 10$;

$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = \frac{1}{2}(CA^2 + CB^2 - AB^2) = 6$.

4. Calculer un produit scalaire dans l'espace

56. 1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - 1 - 1 = 0$;

$\vec{u} \cdot \vec{w} = 8 - 6 - 2 = 0$.

2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2b - 12b + 1 \times 0 = 0$;

$\vec{u} \cdot \vec{w} = -2b + b + b = 0$.

3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = ab - ab + c^2 = c^2$;

$\vec{u} \cdot \vec{w} = a^2 + 0 - a^2 = 0$.

57. 1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 - 2 + 4 = 8$;

$\vec{u} \cdot \vec{w} = 4\sqrt{6} - 6 + 20 = 14 + 4\sqrt{6}$.

2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = a^2 - b^2 - a^2 + b^2 = 0$;

$\vec{u} \cdot \vec{w} = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2 = 2ab$.

3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -a^2 + 0 + a^2 = 0$;

$\vec{u} \cdot \vec{w} = 2a^2 + a^2 + 5a^2 = 8a^2$.

58. 1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2k + 10 + 3k = 0$;

$k = -2$.

2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = k^2 - 4k^2 + 3 = 0$;

$k = 1$ ou $k = -1$.

3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = k^2 - 2k^2 - 1 = 0$;

pas de solutions.

59. 1. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -4 + 1 + 0 = -3$;

$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 8 + 0 + 0 = 8$.

2. $\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 + 2 - 2 = 2$;

$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = -1 - 1 + 3 = 1$.

3. $\vec{AB} \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 18 + 14 + 6 = 38$;

$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = -9 - 7 - 9 = -25$.

60. 1. $\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 5 + 2 + 4 = 11$;

$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = -4 + 2 + 12 = 10$.

2. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$; $\vec{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$.

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 + 10 - 7 = 6$;

$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 6 - 6 + 8 = 8$.

3. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 + 2 + 2 = 6$;

$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = -1 - 1 - 1 = -3$.

61.

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - \|\vec{AB} - \vec{AC}\|^2)$

$= \frac{1}{2}(\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - \|\vec{CB}\|^2) = 0$.

$\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 = \|\vec{CB}\|^2 \Leftrightarrow \vec{AB}$ est perpendiculaire à $\vec{AC}$.

62. Corrigé dans le manuel.

63. 1.

$\vec{AG} \cdot \vec{BE} = (\vec{AF} + \vec{FG}) \cdot \vec{BE} = \vec{FG} \cdot \vec{BE}$
 $= \vec{FG} \cdot (\vec{BF} + \vec{FE})$
 $= \vec{FG} \cdot \vec{BF} + \vec{FG} \cdot \vec{FE} = 0$.

$\vec{AG} \cdot \vec{BD} = (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CG}) \cdot (\vec{BC} + \vec{CD})$
 $= \vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{BC} \cdot \vec{BC}$
 $+ \vec{BC} \cdot \vec{CD} + \vec{CG} \cdot \vec{BC} + \vec{CG} \cdot \vec{CD}$
 $= 0 - a^2 + a^2 + 0 = 0$.

2. $\vec{AG} \perp \vec{BE}$, $\vec{AG} \perp \vec{BD}$; $\vec{BE} \neq k\vec{BD}$
donc $(AG) \perp$ au plan (BED) .

3. Coordonnées des points

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$E \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $G \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\vec{AG} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{BE} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{BD} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\vec{AG} \cdot \vec{BE} = -1 \times 0 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$.

$\vec{AG} \cdot \vec{BD} = -1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 0 = 0$;

$\vec{AG} \perp \vec{BE}$, $\vec{AG} \perp \vec{BD}$ donc $(AG) \perp$ au plan (BED) .

64. a. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = l \times l \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{l^2}{2}$.

b. $\vec{AD} \cdot \vec{AK} = (\vec{AK} + \vec{KD}) \cdot \vec{AK} = \frac{l^2}{4}$.

c. $\vec{AB} \cdot \vec{IK} = \frac{-l^2}{2}$.

d. $\vec{AD} \cdot \vec{JK} = \vec{AD} \cdot (\vec{JD} + \vec{DA} + \vec{AK}) = \frac{-l^2}{2}$.

e. Soit L milieu de $[AB]$,

$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot (\vec{CL} + \vec{LD}) = 0$.

Les arêtes opposées dans un tétraèdre régulier sont orthogonales.

65. 1. $ABCD$ tétraèdre régulier, soit I milieu de $[BD]$, (AI) et (CI) médiatrice de $[BD]$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IA'}) \cdot \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{IA'} \cdot \overrightarrow{BD} = 0.\end{aligned}$$

De même avec J milieu de $[DC]$ on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{DC} &= (\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JA'}) \cdot \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{JA'} \cdot \overrightarrow{DC} = 0.\end{aligned}$$

2. (AA') est orthogonale à (BD) et à (DC) , 2 droites sécantes du plan (BDC) , (AA') est orthogonale à la face BDC .

5. Équations cartésiennes de plan

66. Corrigé dans le manuel.

67. $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{n}_3 \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$; $\vec{n}_4 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

68. A appartient à P_4 , B à P_2 , C à P_1 et P_2 , D à aucun plan.

69. A appartient à P_4 , B à P_3 , C à P_1 , D à P_2 .

70. 1. a. $P_1 : x - z - 3 = 0$.

b. $P_2 : 2x - y + 3z - 5 = 0$.

2. $\vec{n}_1$ vecteur normal de P_1 et $\vec{n}_2$ vecteur normal de P_2 non colinéaires, l'intersection de P_1 et P_2 est une droite.

71. 1. a. $y + 3z = 0$.

b. $y + 3z + 3 = 0$.

2. $\vec{v} = -2\vec{u}$, le point A n'appartient pas à P_2 , $(P_1) \cap (P_2) = \emptyset$.

72. $M(x; y; z)$ appartient au plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ si

$$\text{et seulement si } \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \cdot \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$$

donc d prend la valeur $-ax_A - by_A - cz_A$.

73. 1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

I milieu de $[AB]$, $I \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Une équation du plan médiateur à $[AB]$ est : $2x + y - z - 12 = 0$.

2. Le point C n'est pas solution de l'équation du plan ci-dessus.

3. Si $AM = BM = 2$ alors M appartient au plan médiateur de $[AB]$.

74. $-x + 2y + z - 4 = 0$.

75. 1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} \neq k\overrightarrow{AC}$,

les points A, B et C forment un plan.

2. $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = -a + 2b - 2c = 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = -5a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{11}{4}a \\ c = \frac{9}{4}a \end{cases}$.

3. Équation du plan : $4x + 11y + 9z - 17 = 0$.

76. 1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} \neq k\overrightarrow{AC}$,

les points A, B et C forment un plan.

2. $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = -b - c = 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = -3a - 2b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -c \\ a = \frac{4}{3}c \end{cases}$.

3. Équation du plan : $4x - 3y + 3z + 5 = 0$.

77. 1. $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2 = 3^2$.

2. $x - 2y + z + 7 = 0$.

78. 1. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + \frac{3}{2})^2 = (\frac{3}{2})^2$.

2. $x - 3y + \frac{7}{2}z - 5 = 0$.

79. 1. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 9 = 0$
 $\Leftrightarrow (x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 + z^2 + 9 = 0$
 $\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 2^2$.

Il s'agit de la sphère de centre C de coordonnées $(2; -3; 0)$ et de rayon 2.

2. Le plan d'équation est tangent à la sphère en A car $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est normal au

plan d'équation $x = 4$ et car la distance $AC = \sqrt{2^2} = 2$ est égale au rayon.

80. Corrigé dans le manuel.

81. 1. $(x - \frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2 + (y - \frac{b}{2})^2 - (\frac{b}{2})^2 + (z - \frac{c}{2})^2 - (\frac{c}{2})^2 + d = 0$:

équation de la sphère.

$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d > 0.$$

2. coordonnées du centre de la sphère : $(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2})$.

3. rayon de la sphère :

$$R = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d}.$$

6. Équations paramétriques

82. Corrigé dans le manuel.

83. 1. $\begin{cases} x = -t + 3t' + 1 \\ y = 2t + 3 \\ z = t + 2t' - 1 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n} = -a + 2b - 2c = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{n} = 3a + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{5}{4}a \\ c = -\frac{3}{2}a \end{cases}$.

3. $4x + 5y - 6z - 25 = 0$.

84. 1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et donc

un système d'équations paramétriques du plan (ABC) est

$$\begin{cases} x = 1t + 2t' + 0 \\ y = -3t - 2t' + 2, \quad t \text{ et } t' \in \mathbb{R} \\ z = 4t + 4t' - 3 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = t + 2t' \\ y = -3t - 2t' + 2, \quad t \text{ et } t' \in \mathbb{R} \\ z = 4t + 4t' - 3 \end{cases}$$

2. Oui car ce système est celui du plan passant par $A(0; 2; -3)$ et dirigé par les

vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3. Il suffit de vérifier que les trois points A, B et C appartiennent à ce plan :

Si $t' = -1$ et $t = -4$, on obtient les coordonnées de A ;

Si $t' = 0$ et $t = 0$, on obtient les coordonnées de B ;

Si $t' = 1$ et $t = 0$, on obtient les coordonnées de C . Donc c'est un système du plan (ABC) .

85. 1. $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t + 2 \\ z = 3t + 1 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = -t \\ z = 3t - 1 \end{cases}$.

86. 1.
$$\begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = 3 \\ z = t + 2 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

87. 1. $\vec{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$;

équation de la droite (AB).

$$\begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = 3t + 1 \\ z = 2t + 3 \end{cases}$$

2. ($t = 4$) le point C appartient à (AB), le point D n'appartient pas à (AB).

88. 1. a.
$$\begin{cases} x = -6t + 1 \\ y = 4t - 3 \\ z = 5t - 2 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = 1 \\ z = -2t + 1 \end{cases}$$
 ; avec $t \in [-1; 0]$.

c.
$$\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 4t - 3 \\ z = 3t - 2 \end{cases}$$
 ; avec $t > 0$.

2. Non pour les valeurs $t = 0$ ou $t = 1$ on ne retrouve pas les coordonnées des points B ou C.

89. 1. $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

intersection de la droite passant par A.

$$\begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -t + 1 \\ z = t \end{cases}$$

2. intersection de la droite passant par A et du plan P.

$$\begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -t + 1 \\ z = t \\ 2x - y + z + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2}{3} \\ y = \frac{7}{3} \\ z = \frac{-4}{3} \\ t = \frac{-4}{3} \end{cases}$$

3. $AH = \frac{4\sqrt{6}}{3}$.

90. 1. $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

intersection de la droite passant par A.

$$\begin{cases} x = t \\ y = t - 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Intersection de la droite passant par A et du plan P.

$$\begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \\ z = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ y = \frac{-3}{2} \\ z = 0 \\ t = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$AH = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

7. Intersection dans l'espace

91. 1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vecteurs directeurs respectivement des droites (D) et (D') :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} ; \vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{u}$$

Soit A $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ un point de (D),

$$\begin{cases} -3 = 1 + 2t' \\ -1 = 1 + t' \\ 2 = -4 + 3t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -2 \\ t' = -2 \\ t' = -2 \end{cases}$$

Le point A appartient à la droite (D'), les deux droites sont confondues.

2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vecteurs directeurs respectivement des droites (D) et (D') : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$$\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{v} = -2\vec{u}$$

Soit A $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ un point de (D),

$$\begin{cases} 0 = 1 - 2t' \\ -1 = 1 + 2t' \\ 3 = 4 - 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{1}{2} \\ t' = \frac{1}{2} \\ t' = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Le point A appartient à la droite (D'), les deux droites sont confondues.

92. 1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vecteurs directeurs respectivement des droites (D) et (D') :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} ; \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{v} \neq k\vec{u}$$

$$\begin{cases} -3 + 2t = -1 + t' \\ -1 + t' = -t' \\ 2 - 3t = -1 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 + 2t = -1 + 2 - t' \\ t' = 1 - t \\ 2 - 3t = -1 - (1 - t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = 1 - t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

Le point M d'intersection des deux droites

$$\text{est : } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vecteurs directeurs respectivement des droites (D) et (D') :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{v} \neq k\vec{u}$$

$$\begin{cases} t = 8 + t' \\ -1 - t' = -9 + t' \\ 3 + t = 11 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8 + t' \\ -1 - (8 + t') = -9 + t' \\ 3 + (8 + t') = 11 - t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 8 \\ t' = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$$

Le point M d'intersection des deux droites

$$\text{est : } \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

93. 1. a. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vecteurs directeurs des droites (D) et (D') :

$$\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} ; \vec{u}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u}_2 = -3\vec{u}_1$$

Soit A $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ un point de (D).

$$\begin{cases} 5 = -1 + 3t' \\ 0 = 6t' \\ 2 = -1 - 9t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 2 \\ t' = 0 \\ t' = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

Les deux droites sont parallèles et non confondues, elles sont coplanaires.

b. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vecteurs directeurs des droites (D) et (D') :

$$\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \vec{u}_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u}_2 = -2\vec{u}_1$$

Soit A $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ un point de (D).

$$\begin{cases} 0 = 1 - 2t' \\ -1 = 3 + 2t' \\ 3 = 2 - 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{-1}{2} \\ t' = -2 \\ t' = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Les deux droites sont parallèles et non confondues, elles sont coplanaires.

2. a. Soient A $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; B $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ des points

de (D) et C $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ un point de (D').

$$\begin{cases} 5a + 2c + d = 0 \\ -a - c + d = 0 \\ 6a + 2b - c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 3c = 0 \\ d = a + c \\ 7a + 2b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{-7}{2}a \\ c = -2a \\ d = -a \end{cases}$$

Une équation du plan est :

$$2x - 7y - 4z - 2 = 0.$$

b. Soient $A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ des points de

(D) et $C \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ un point de (D').

$$\begin{cases} -b + 3c + d = 0 \\ a + 3b + 2c + d = 0 \\ a + 4c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3c + d \\ a + 11c + 4d = 0 \\ a = -d - 4c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3c + d \\ 7c + 3d = 0 \\ a = -d - 4c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{3}c \\ b = \frac{2}{3}c \\ d = -\frac{7}{3}c \end{cases}$$

Une équation du plan est :

$$-5x + 2y + 3z - 7 = 0.$$

3. a. $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

M appartient au plan contenant les droites (D) et (D') si $\vec{AM} = t\vec{u} + t'\vec{AC}$.

$$\begin{cases} x = t - 6t' + 5 \\ y = 2t \\ z = -3t + t' + 2 \end{cases}$$

b. $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

M appartient au plan contenant les droites (D) et (D') si $\vec{AM} = t\vec{u} + t'\vec{AC}$.

$$\begin{cases} x = t + t' \\ y = -t - 4t' - 1 \\ z = t - t' + 3 \end{cases}$$

94. 1. $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ vecteurs normaux respectivement des plan (P) et (P') :

$$\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \vec{n}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{n}_1 = -\vec{n}_2.$$

Soit $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, appartient à (P), A appartient à (P'), les deux plans sont confondus.

2. $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ vecteurs normaux respectivement des plans (P) et (P') :

$$\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \vec{n}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{n}_1 = -\vec{n}_2.$$

Soit $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, appartient à (P), A n'appartient pas à (P'), (P) $\cap$ (P') = $\emptyset$. Les deux plans sont parallèles.

3. $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ vecteurs normaux respectivement des plan (P) et (P') :

$$\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{n}_1 \neq k\vec{n}_2.$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + t = 1 \\ x + y + t = 2 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$$

L'intersection des plans (P) et (P') est la

$$\text{droite (D) d'équation : } \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$$

95. $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs du

plan (P) et $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de la droite (D).

$$\vec{w} = 1\vec{u} + 0\vec{v}.$$

Le point $O \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à la droite

$$(D) \begin{cases} 0 = 2t + t' - 3 \\ 0 = t - t' - 1 \\ 0 = 2 - 3t + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2t + t' - 3 \\ 0 = t - t' - 1 \\ 0 = 1 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{-1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

La droite (D) n'est pas incluse dans le plan (P).

96. 1. $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$, si $\vec{w} = t\vec{u} + t'\vec{v}$ alors les vecteurs sont colinéaires.

3. Soit $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ un point de la droite (D)

$$\begin{cases} 1 = 1 + t + t' \\ 0 = -2 + t + t' \\ 2 = 2 - t + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + t' = 0 \\ t - t' = 2 \\ t - t' = 0 \end{cases}$$

pas de solutions au système. La droite (D) est parallèle au plan (P).

97. $\vec{n}$ vecteur normal du plan (P) et $\vec{u}$ vecteur directeur de la droite (D) : $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$.

Soit $M(1 ; 4 ; 3)$ un point de D, M n'appartient pas au plan (P). La droite (D) est parallèle au plan (P).

98.

Intersection de la droite (D) et du plan (P).

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 + t \\ z = 2 + t \\ 2x + y - 2z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 0 \\ t = -2 \end{cases}$$

99. $\vec{n}$ vecteur normal du plan (P) et $\vec{u}$ vecteur directeur de la droite (D) :

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0.$$

Le point $M(1 ; 4 ; 2)$ appartient à la droite (D) et au plan (P). La droite (D) est incluse dans le plan (P).

100. 1. Vecteurs normaux $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -1 + 2 - 1 = 0$. Les deux plans sont perpendiculaires.

2.

$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - t + 1 = 0 \\ -x + y + t = 0 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t - \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = t \end{cases}$$

101. 1. Équation du plan :

$$4x + y + 2z - 4 = 0.$$

2. $\begin{cases} -3 = 9 + 4t \\ 3 = 6 + t \\ -4 = 2 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = -3 \\ t = -3 \end{cases}$; B appartient à la droite (D).

3. $\vec{AM} \begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 2 \\ z - 3 \end{pmatrix}$; $\vec{AM} \begin{pmatrix} 10 + 4t \\ 4 + t \\ -1 + 2t \end{pmatrix}$.

$$AM^2 = (10 + 4t)^2 + (4 + t)^2 + (-1 + 2t)^2 = 21t^2 + 84t + 117.$$

4. distance minimale atteinte pour $t = -2$; $AM^2 = 33$.

102. 1. Vrai, les points A, B et C sont solutions du plan.

2. Faux car le vecteur $\vec{DE} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ n'est pas normal au plan (ABC) dont un vecteur normal est $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. Vrai : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

4. Faux : $\begin{cases} \frac{3}{5} = -2t + 2 \\ 4 = 4 \\ \frac{-9}{5} = -4t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-7}{10} \\ t = \frac{7}{10} \end{cases}$.

103. 1. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 16$,
 cercle de centre $\Omega \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et de rayon 4.
 Sphère verte.

2. $(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 13$, cercle
 de centre $\Omega \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et de rayon $\sqrt{13}$.

Sphère violette.

3. $\Omega\Omega' = \sqrt{5}$; $\sqrt{5} < 4 + \sqrt{13}$, les
 deux sphères sont donc sécantes.

5. équation cartésienne du plan médiateur de $\Omega\Omega'$: $4x + 2y - 17 = 0$.

6. Équations paramétrique de $\Omega\Omega'$:

$$\begin{cases} x = -2t + 2 \\ y = t + 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

7. a. $V_h = \pi \int_{R-h}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left[R^2x - \frac{x^3}{3} \right]_{R-h}^R = \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h)$.

b. Volume occupé par les 2 sphères :
 $\frac{4\pi}{3} 4^3 + \frac{4\pi}{3} \sqrt{13}^3 - \frac{\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^3 \left(12 - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) - \frac{\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^3 \left(3\sqrt{13} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right)$.

En route vers le bac (p. 318-321)

104. 1. a. $C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $I \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $J \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b. $\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CE} \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow M$ appartient
 à $[CE]$ pour t compris entre 0 et 1.

2. a. Équation du plan médiateur de IJ
 est $-x + y = 0$; C et E appartiennent à
 ce plan.

b. M appartient au plan médiateur,
 $MI = MJ$; MIJ est un triangle isocèle en M .

c. $IM^2 = 3t^2 - t + \frac{1}{4}$

3. a. θ défini sur $[0, \pi]$, $\frac{\theta}{2}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la
 fonction sinus est croissante sur cet inter-
 valle, θ est maximum quand le $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$
 est maximum.

b. Dans le triangle isocèle IMJ , K milieu
 de $[IJ]$. IMK triangle rectangle en K et
 $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{IK}{IM}$, IK est constant, la fonction
 sinus est maximale lorsque IM est mini-
 mal.

c. Le minimum de la fonction est obtenue
 pour $t = \frac{1}{6}$, le minimum est $f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$.

d. $f(t) = IM^2$, le minimum de IM^2 (donc
 de IM) correspond au maximum de l'angle
 (IMJ), donc M_0 de $[EC]$ de paramètre $\frac{1}{6}$ est
 l'unique solution.

e. La distance de M à (EC) est obtenue
 par le projeté orthogonal du point de M
 sur (EC) . Le point M_0 est le projeté ortho-
 gonal du point I sur $[EC]$.

105. 1. a. $(P) = 3 \times 1 + 1 \times 3 - 1 \times 2 - 1 = 3$,
 le point C n'appartient pas au plan (P) .

b. Pour $t = 0$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; pour $t = 1$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ces
 deux points appartiennent à la droite et au
 plan (P) . La droite (D) est incluse dans (P) .

2. a. Équation $(P') = -x + 2y - z - 3 = 0$.

b. Coordonnées de I : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases}$
 $-x + 2y - z - 3 = 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ t = 1 \end{cases}$

c. $CI = \sqrt{(0-1)^2 + (2-3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{3}$.

3. a. $CM^2 = (-t + 1 - 1)^2 + (2t - 3)^2 + (-t + 2 - 2)^2$
 $= 6t^2 - 12t + 9$.

b. $CM(t)$ est minimale lorsque $CM'(t)$ est
 nulle. $CM' = 12t - 12 = 0$, pour $t = 1$.

106. Partie A

1. I milieu de $[AD]$,
 $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})$
 $= (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2$.

2. $MI^2 = IA^2 \Leftrightarrow MI = IA$. L'ensemble (E)
 est une sphère de centre I passant par A .

Partie B

1. a. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = -3 \times 4 + 6 \times 2 + 0 \times 3 = 0$.

$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = -3 \times 4 + 0 \times 2 + 4 \times 3 = 0$ $\vec{n}$
 est bien un vecteur normal au plan (ABC) .

b. Équation du plan (ABC) .
 $4x + 2y + 3z - 12 = 0$

2. a. Équation de la droite $(\Delta) \begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$.

b. Coordonnées de
 $H: \begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \Leftrightarrow H \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 4 \\ t = 1 \end{cases}$;
 $H(-1; 2; 4)$.

c. $DH = \sqrt{(-1+5)^2 + 2^2 + (4-1)^2} = \sqrt{29}$.
 d. H et D appartiennent à la droite
 (Δ) . $\overrightarrow{HD}$ est orthogonal au plan (ABC) .
 Les points H et A appartiennent au plan
 (ABC) , donc $\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{HA} = 0$, H appartient à
 l'ensemble (E) .

107. 1. a. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 0 + 2 \times 2 - 2 \times 1 = 2$,
 $AB = \sqrt{17}$, $AC = \sqrt{5}$.

b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.
 $\cos \widehat{BAC} = \frac{2}{\sqrt{17} \sqrt{5}} = \cos \widehat{BAC} = 77^\circ$.

c. L'angle $\widehat{BAC}$ n'est ni nul ni plat, les
 3 points ne sont pas alignés.

2. pour A : $-4 + 0 + 2 + 2 = 0$, égalité
 vraie.
 Pour B : $2 - 2 - 2 + 2 = 0$, égalité vraie.
 Pour C : $-4 - 2 + 4 + 2 = 0$, égalité
 vraie.

Les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation, il s'agit bien d'une équation du plan (ABC) .

3. Coordonnées des vecteurs normaux respectivement de P_1 et P_2 $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, les plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite.

$$\begin{cases} x + y - 3z + 3 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3t + 3 = 0 \\ x - 2y + 6t = 0 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

4. Le vecteur directeur de la droite et le vecteur normal de (ABC) ne sont pas orthogonaux, la droite D n'est pas parallèle au plan ABC .

coordonnées du point d'intersection de D et du plan (ABC) :

$$\begin{cases} x = -2 \\ y - 1 + 3t \\ z = t \\ 2x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow H \begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \\ z = -1 \\ t = -1 \end{cases}$$

$$H(-2; -4; -1).$$

5. Équation de la sphère de centre Ω et de rayon 3.

a. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9$
 $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 2z + 2 = 0.$

b. Intersection de D et de la sphère :
 $(-3)^2 + (3t+2)^2 + (t-1)^2 = 9$
 $\Leftrightarrow 10t^2 + 10t + 5 = 0.$

$\Delta = 4 - 8 = -4$. Il n'y a pas d'intersection entre la droite et la sphère.

c. Pour montrer que le plan est tangent, il faut montrer que la distance de Ω avec le plan (ABC) est égale au rayon.

d. $d(\Omega, (ABC)) = \frac{2+3+2+2}{\sqrt{9}} = 3.$

108. 1. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, les 3 points définissent un plan. Les points A, B et C sont solutions de l'équation :
 $2x + y + 2z = 4.$

2. a. $\vec{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ équation du plan (P) passant par A et de vecteur directeur $\vec{BC}$: $x - 2y = 0.$

b. Le vecteur normal du plan (ABC) n'est pas colinéaire à $\vec{BC}$, les deux plans sont sécants :

$$M(x, y, z) \in \Delta \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y + 2z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -\frac{5}{2}t + 2 \end{cases}.$$

La droite (BC) est orthogonale à (P) et donc est orthogonale à Δ . Cette droite contient le point A et est perpendiculaire à $[BC]$. La droite Δ est donc la hauteur issue de A du triangle ABC .

3. a. I milieu de $[AC]$ $I \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{BI} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La droite Δ' a pour équation : $\begin{cases} x = t \\ y = 4 - 4t \\ z = t \end{cases}$

b. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$AB = 2\sqrt{2}$; $AC = 2\sqrt{5}$; $BC = 2\sqrt{5}$. Le triangle est isocèle.

4. H point d'intersection des droites Δ et Δ' .

$$\begin{cases} 4t = t' \\ 2t = 4 - t' \\ -5t + 2 = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t = t' \\ 2 = 9t \\ 2 = 9t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8}{9} = t' \\ \frac{2}{9} = t \end{cases} \text{ obtient alors } H \left(\frac{8}{9}; \frac{4}{9}; \frac{8}{9} \right).$$

Le point H commun à deux hauteurs est l'orthocentre du triangle ABC .

5. $\vec{OH} \cdot \vec{AB} = \frac{8}{9} \times 0 + \frac{4}{9} \times 4 + \frac{8}{9} \times (-2) = 0$;

$$\vec{OH} \cdot \vec{AC} = \frac{8}{9} \times 2 + \frac{4}{9} \times 0 + \frac{8}{9} \times (-2) = 0.$$

La droite (OH) est orthogonale au plan (ABC) .
 $OH^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{144}{81} \Rightarrow OH = \frac{4}{3}.$

109. 1. a. $\vec{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, si les vecteurs sont colinéaires alors il existe une valeur de t : $\begin{cases} -3 = 5t \\ -4 = 2t \\ 1 = 7t \end{cases}$. Impossible, les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$,
 $\vec{n}_1 \cdot \vec{AB} = -3 \times 1 - 4 \times (-1) - 1 \times 1 = 0.$
Le vecteur $\vec{n}_1$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, c'est un vecteur au plan (ABC) .

1. c. Équation du plan (ABC) :
 $x - y - z + 1 = 0.$

2. a. M appartient à (D) , on a $\vec{OM} = t\vec{n}$.
 $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases}$ équation de la droite (D) passant par O .

b. Coordonnées du point d'intersection O' de D et du plan (ABC) :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -t \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow O' \begin{cases} x = \frac{-1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} \\ t = \frac{-1}{3} \end{cases}.$$

3. H intersection de (BC) avec le plan (P) perpendiculaire à (BC) , on a : $\vec{OH} \cdot \vec{BC} = 0$, donc :

$$\vec{BO} \cdot \vec{BC} = \vec{BH} \cdot \vec{BC} = t\vec{BC} \cdot \vec{BC} = t\|\vec{BC}\|^2,$$

on a alors : $t = \frac{\vec{BO} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BC}\|^2} (B \neq C)$

$$\vec{BO} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}; \vec{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}, \text{ on a alors } t = \frac{9}{13}.$$

$$\vec{OH} = \vec{OB} + t\vec{BC} = \vec{OB} + \frac{9}{13} \vec{BC} = \begin{pmatrix} -44 \\ 13 \\ -24 \\ 13 \\ -7 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

110. 1. La droite (D) a pour vecteur directeur $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et passe par A .

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

2. La droite (D') a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\vec{u} \neq k \cdot \vec{AB}$. Les droites (D) et (D') ne sont pas parallèles.

$$\begin{cases} 2 - k = 1 + 2t \\ 1 + 2k = -2 - 3t \\ k = -1 - t \end{cases} \text{ pas de solutions au système. Les deux droites ne sont pas coplanaires.}$$

3. a. A et B appartiennent à (D) ,
 $P(A) = 4 \times 1 - 2 + 5(-1) + 3 = 0$;
 $P(B) = 4 \times 3 - 5 + 5 \times (-2) + 3 = 0$. Les points A et B appartiennent au plan P .

b. Coordonnées du point d'intersection C de (D') et du plan (P) :

$$\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 + 2k \\ z = k \\ 4x + y + 5z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C \begin{cases} x = 6 \\ y = -7 \\ z = -4 \\ k = -4 \end{cases}$$

4. La droite (Δ) passe par C et a pour vecteur directeur $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a. $\vec{u} \cdot \vec{u}_1 = (-1) \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$. Les deux droites sont orthogonales et possèdent comme point commun le point C , elles sont donc perpendiculaires.

b. $\vec{u}_1 \cdot \vec{AB} = (1) \times 2 + 1 \times (-3) + (-1) \times (-1) = 0$.
 $\begin{cases} 6 + k = 1 + 2t \\ -7 + k = -2 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ t = 2 \end{cases}$; le point E a pour coordonnées : $E \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}$.

111. 1. a.

2. b.

3. b.

4. c.

5. a.

6. b.

112. 1. a.

2. c.

113. 1. c.

2. d.

3. b.

4. c.

5. b.

114. 1. c.

2. b.

3. a.

115. 1. Faux, si $t = 1$ alors $x = 1$ (impossible).

2. $\vec{d} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, vecteur directeur de la droite (D) , équation du plan : $2x - 3y + z + d = 0$. O appartient au plan donc $d = 0$. Vrai.

3. $\vec{d} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, vecteur directeur de la droite (D) ; $\vec{d}' \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, vecteur directeur de la droite (D') . $\vec{d} \cdot \vec{d}' = 6 - 3 + 3 \neq 0$. Les deux droites ne sont pas orthogonales.

Faux.

4. $\vec{d}$ et $\vec{d}'$ sont non colinéaires. Le système $\begin{cases} 2t - 1 = 3t' \\ -3t + 2 = t' + 2 \\ t = 3t' - 1 \end{cases}$ n'a pas de solutions. Donc faux.

5. $d = \frac{|-2 + 3 + 1|}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$. Vrai.

116. 1. $\vec{d} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, vecteur directeur de la droite (D) ; $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0$. Il n'y a pas de point commun. D strictement parallèles. Vrai.

2. Faux : $\begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ 2x + 3y - 2z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ 7x + 5y = 21 \end{cases}$, l'intersection des deux plans est une droite.

3. $\begin{cases} 2 - 3t = 7 + 2u \\ -3 + 2t = -6 - u \\ 1 + t = 2 + 2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ u = -1 \end{cases}$. Vrai.

4. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$. Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc le plan (ABC) existe. Les coordonnées de A, B et C vérifient l'équation. Vrai.

5. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc C n'appartient pas à la droite (AB) . C ne peut être barycentre des points A et B donc faux.

Accompagnement personnalisé (p. 322-323)

117. 1. b. 2. d. 3. c.

118. Un vecteur normal d'un plan est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à ce plan. Un vecteur normal d'un plan est un vecteur directeur d'un plan parallèle. Un vecteur directeur d'une droite est un vecteur directeur d'une droite parallèle.

1. équation du plan : $2x + 3y - 5z + 4 = 0$.

2. $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t - 2 \\ z = 4t \end{cases}$ équation de D' .

3. $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 2 \\ z = -5t \end{cases}$ équation de D'' .

4. $\vec{A'B} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{A'C} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

équation du plan : $\begin{cases} x = -2t - 3t' + 1 \\ y = t - t' - 2 \\ z = t + t' \end{cases}$

119. a. $\vec{AM} \begin{cases} x - 0 = a \\ y - 0 = 0 \\ z - 3 = -a \end{cases} \Leftrightarrow M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 - a \end{pmatrix}$,

de même $\vec{BM'} \begin{cases} x' - 2 = 0 \\ y' - 0 = b \\ z' - 4 = b \end{cases} \Leftrightarrow M' \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 4 + b \end{pmatrix}$.

Donc $\vec{MM'} \begin{pmatrix} 2 - a \\ b \\ a + b + 1 \end{pmatrix}$.

b. $MM'^2 = (2 - a)^2 + b^2 + (a + b + 1)^2$
 $= 2a^2 + 2b^2 - 2a + 2b + 2ab + 5$
 $= a^2 + b^2 + 2ab + a^2 + 1 - 2a + b^2 + 2b + 1 + 3$
 $= (a + b)^2 + (a - 1)^2 + (b + 1)^2 + 3$.

c. et d. $\begin{cases} \vec{MM} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{MM} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 2 \\ a + 2b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$.

e. On obtient alors : $MM'^2 = 3 \Leftrightarrow MM' = \sqrt{3}$.

120. 1. $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$; $\vec{n}_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{n}_1 = 2\vec{n}_2$;

$\vec{n}_3 = 4\vec{n}_2$, les plans sont parallèles non confondus. $J = \emptyset$.

2. $P_1 \cap P_2 : \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 4t - 2 \\ z = t \end{cases}$; $\vec{d} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de $P_1 \cap P_2$.

$\vec{n}_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$.

$\vec{d} \cdot \vec{n}_3 = 0$. Le point de la droite $I \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient au plan P_3 ;

J est la droite incluse dans le plan P_3 .

3. résolution du système : $\begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0 \\ 2x + y + 4z - 2 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow J \text{ est un}$

point de coordonnées : $\begin{cases} x = -\frac{19}{9} \\ y = \frac{4}{3} \\ z = \frac{11}{9} \end{cases}$.

TP Info (p. 324)

1. Construction

2. a. La sphère (S) et le plan (P_1) ont pour intersection un cercle que l'on notera (C_1) .

b. (S) est la sphère de centre $C(2 ; -1 ; 1)$ et de rayon 2 donc une équation de la sphère (S) est donné par

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 2^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 2z + 4 + 1 + 1 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 2z + 2 = 0.$$

c. On remplace $z = 0$ dans la première équation :

si $z = 0$ alors $x^2 - 2x + y^2 + 2y + 2 = 0$ équivaut à $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 3$.

Dans le plan (xOy) on obtient le cercle (C_1) de centre $x = 2$ et $y = -1$ et de rayon $\sqrt{3}$.

3. a. L'intersection avec le plan (xOz) d'équation $y = 0$. On remplace $y = 0$ dans l'équation de (S) alors on obtient $(x-2)^2 + (1)^2 + (z-1)^2 = 4$ ce qui équivaut à $(x-2)^2 + (z-1)^2 = 3$.

On obtient le cercle (C_2) de centre $x = 2$ et $y = 1$ et de rayon $\sqrt{3}$.

b. Sur Géospace, on fait apparaître l'intersection des deux cercles et on voit qu'il y

a deux points communs nommés E et F sur la figure.

c. Déterminer leur coordonnées revient à résoudre $\begin{cases} (x-2)^2 + (z-1)^2 = 3 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 3 \\ z = 0 \text{ et } y = 0 \end{cases}$ On

trouve alors que $(x-2)^2 + 1 = 3$ ce qui nous donne deux solutions $x = 2 + \sqrt{2}$ et $x = 2 - \sqrt{2}$.

Et puisque $y = 0$ et $z = 0$, on obtient les deux points $E(2 - 2\sqrt{2} ; 0 ; 0)$ et $F(2 + 2\sqrt{2} ; 0 ; 0)$.

4. a. Avec Géospace, on ne voit rien apparaître.

b. $A(0 ; -1 ; 1)$ appartient à la sphère car ses coordonnées vérifient une équation de (S) (on peut aussi dire que la distance $AC = 2$).

c. Intersection avec le plan (Oyz) : si $x = 0$ alors $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$ équivaut à $(y+1)^2 + (z-1)^2 = 0$. Donc on obtient un seul point d'intersection tel que $x = 0$, $y = -1$ et $z = 1$. C'est le point $A(0 ; -1 ; 1)$.

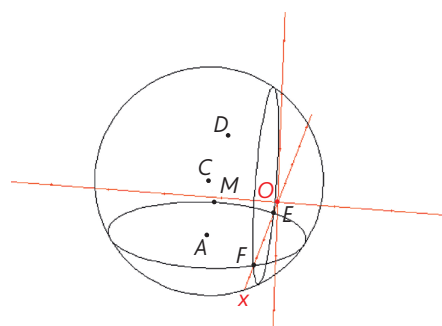
d. A appartenant à la sphère alors $AC = 2$. Le plan (yOz) a pour équation $x = 0$ et a

pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2-0 \\ -1-(-1) \\ 1-1 \end{pmatrix}$ donc le vecteur

$\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}$, normal à (yOz) .

Donc la droite (AC) et le plan (yOz) sont orthogonaux.

e. Le plan (yOz) est donc tangent au cercle (S) .



Sur les pas du supérieur (p. 325)

I. 1. a. faux.

b. faux.

c. faux.

d. vrai.

2. a. faux.

b. vrai.

c. faux.

d. vrai.

3. a. faux.

b. vrai.

c. vrai.

d. vrai.

$P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

II. 1. a. $O \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; **b.** $\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{AP} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. a. $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. b. $\vec{AP} \cdot \vec{w} = 2$. c. $V = \frac{1}{3}$.

3. a. $\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{IP} \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-y \\ 1-z \end{pmatrix}$; $\vec{AP} \cdot \vec{IP} = x - y = 0$.

b. $\vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{IP} \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-y \\ 1-z \end{pmatrix}$; $\vec{AB} \cdot \vec{IP} = x - z = 0$.

c. les coordonnées du point I sont $I \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

d. $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} : \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = 0$.

I est l'isobarycentre du triangle ABC .

Probabilités conditionnelles et lois continues

Programme officiel

Contenus	Capacités attendues
Conditionnement, indépendance Conditionnement par un événement de probabilité non nulle. Notation $P_A(B)$. Indépendance de deux événements.	• Construire un arbre pondéré en lien avec une situation donnée. • Exploiter la lecture d'un arbre pondéré pour déterminer des probabilités. • Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers. • Démontrer que si deux événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour $\bar{A}$ et B.
Notion de loi à densité à partir d'exemples Loi à densité sur un intervalle; Loi uniforme sur $[a, b]$. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme. Lois exponentielles. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.	• Connaître la fonction de densité de la loi uniforme sur $[a, b]$. • Calculer une probabilité dans le cadre d'une loi exponentielle. • Démontrer que l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$.

Découverte (p. 328-329)

1. Changement d'univers

1. a. $P(E) = 0,65$.
b. $P(F) = 0,45$.
c. $P(E \cap F) = 0,35$.
2. a. On note $P_F(E)$ la probabilité cherchée. En utilisant la loi équirépartie sur l'ensemble des femmes, on obtient :

$$P_F(E) = \frac{\text{Nombre de femmes qui gagne moins de 20000 €}}{\text{Nombre de femmes de l'entreprise}}.$$

En notant N le nombre d'employés de l'entreprise, on a :

$$P_F(E) = \frac{0,35 \times N}{0,45 \times N} = \frac{7}{9}.$$

b. $\frac{P(F \cap E)}{P(F)} = \frac{0,35}{0,45}$, d'après 1.

$$\frac{P(F \cap E)}{P(F)} = P_F(E).$$
3. a. b. Même méthode qu'au 2.

$$P_E(F) = \frac{0,35 \times N}{0,65 \times N} = \frac{7}{13} = \frac{P(F \cap E)}{P(E)}.$$

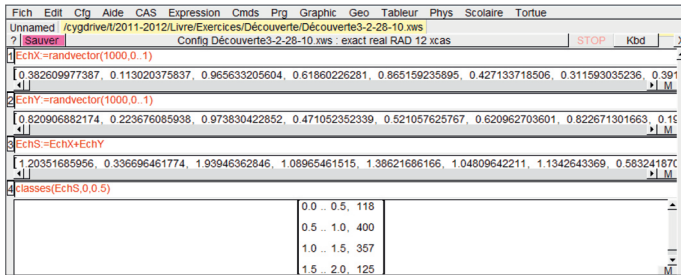
2. Avoir une bonne découpe

1. Il y a équirépartition entre les 10 segments puisqu'ils ont la même longueur.
Donc : $P(0,2 \leq X < 0,3) = \frac{1}{10}$.
2. On peut découper le segment $[0 ; 1]$ en 100 segments de même longueur $[0 ; 0,01[$, ..., $[0,99 ; 1]$. Choisir X dans l'intervalle $[0,21 ; 0,25[$, revient à tirer au hasard parmi les 100 segments, les 4 segments $[0,21 ; 0,22[$, ..., $[0,24 ; 0,25[$ qui forment le segment $[0,21 ; 0,25[$.
Donc : $P(0,21 \leq X < 0,25) = \frac{4}{100}$.
3. De même, on trouve : $P(0,216 \leq X < 0,219) = \frac{3}{1000}$.
4. On peut conjecturer que : $P(a \leq X < b) = b - a$.
5. $P(X = a) = 0$.

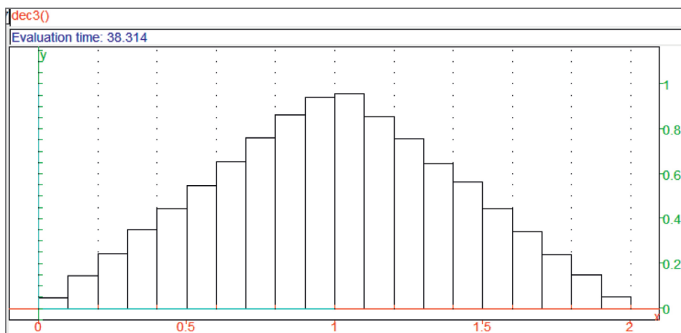
3. Vers la densité d'une loi de probabilité

1. a. S prend ses valeurs dans $[0 ; 2]$.

b. c. d.

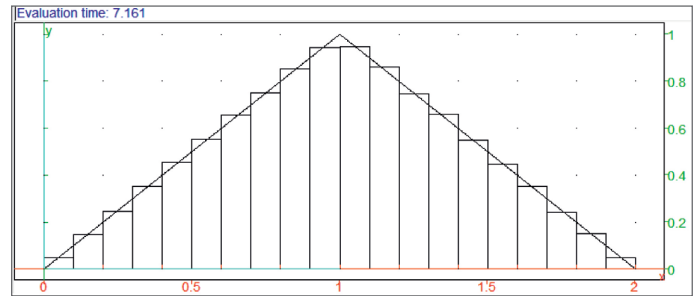


2. a. On obtient un histogramme de ce type :



On remarque que les histogrammes prennent la forme d'un triangle.

b.



c. Cette courbe semble être un bon modèle pour décrire la loi de la variable aléatoire S.

3. a. C'est l'aire d'un triangle, on obtient 1 u.a.

b. $\int_0^{0,5} f(t) dt$ est égale à l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$, $x = 0,5$ et $y = 0$.

$$\int_0^{0,5} f(t) dt \approx F(S < 0,5).$$

c.

Événement	$S \leq 1$	$S < 0,5$	$S > 1,2$	$0,6 \leq S \leq 1,2$	$S \leq 2$
Probabilité	0,5	0,125	0,32	0,5	0,1

d. Le modèle semble bon puisque les fréquences fluctuent autour des probabilités.

Exercices (p. 350)

1. à 29. Corrigés dans le manuel.

1. Probabilités conditionnelles

30. $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,01}{0,1} = 0,1$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,01}{0,2} = 0,05.$$

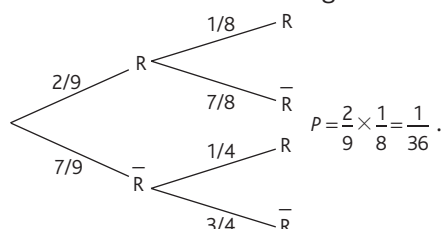
31. $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$; $(P(A) \neq 0)$
 $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P_B(A)} = \frac{1}{12} \times \frac{6}{1} = \frac{1}{2}.$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{3}{4}.$$

32. X : le résultat obtenu,
 $(X \geq 2) = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$
d'où $P_{X \geq 2}(\text{impair}) = \frac{2}{5}$.

33. R = on tire une boule rouge.



34. $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$ car sachant A, B ou $\bar{B}$ est certain. Sinon on calcule :

$$P_A(B) + P_A(\bar{B}) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} + \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) + P((A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}))}{P(A)} = \frac{P(A) + P(\emptyset)}{P(A)} = \frac{P(A) + 0}{P(A)} = 1.$$

35. 1. $P_A(+) = \frac{P(A \cap +)}{P(A)} = \frac{\frac{34}{100}}{\frac{40}{100}} = \frac{85}{100}$.

2. $P_-(B) = \frac{P(- \cap B)}{P(-)} = \frac{\frac{2}{100}}{\frac{16}{100}} = \frac{1}{8}$.

36. 1.

	malades	sains	
vaccinés	3	72	(75)
non vaccinés	7	18	(25)
	(10)	(90)	

1. $P_V(M) = \frac{P(V \cap M)}{P(V)} = \frac{3}{75}$.

37. 1. $P_C(D) = \frac{1}{13}$;

$$P_R(C) = \frac{1}{2} ;$$

$$P_R(F \cap T) = \frac{3}{52} ;$$

$$P_R(D \cup C) = P(D) + P(C) - P(D \cap C) = \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}.$$

2. $P(F \cap R) = \frac{6}{52} = \frac{3}{26}$.

3. $P_D(T) = P\left(\frac{D \cap T}{P(D)}\right) = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{13}} = \frac{1}{4}$.

38. $P_R(B) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)}$ avec

$$P(R) = P(B \cap R) + P(A \cap R)$$

$$\text{donc } P_R(B) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}} = \frac{4}{7}.$$

39. $P(A) = \frac{5}{100}$; $P_A(B) = \frac{20}{100}$

$$\text{et } P_{\bar{A}}(B) = \frac{3}{100}.$$

1. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = \frac{1}{100}$.

2. $P(B) = P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A})$

$$P(B) = \frac{20}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{3}{100} \times \left(1 - \frac{5}{100}\right)$$

$$P(B) = \frac{1}{100} + \frac{285}{10000} = \frac{385}{10000}$$

$$3. P_B(A) = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{385}{10000}} = \frac{100}{385} = \frac{20}{77}$$

40. 1. « A a au moins un as » est l'événement contraire de « A n'a pas d'as ».

$$P(\bar{A}) = \frac{48}{52} \times \frac{47}{51} \times \frac{46}{50} \times \frac{45}{49} \times \frac{44}{48} \approx 0,659$$

(sans hypothèse sur le B, son jeu est assimilé au « 1 as ») donc

$$P(A \text{ a au moins 1 as}) \approx 1 - 0,659 = 0,341.$$

2. B a un as revient à dire qu'on distribue 5 cartes à A d'un jeu de 47 cartes avec 3 as.

$$P(\bar{A}) = \frac{40 \times 41 \times 42 \times 43 \times 44}{45 \times 46 \times 47 \times 43 \times 44}$$

$$\text{d'où } P(A) = 1 - P(\bar{A}) \approx 0,292.$$

3. Idem **2.**, avec un jeu de 47 cartes avec 4 as.

$$P(\bar{A}) = \frac{(44 \times 45 \times 46 \times 47)}{(35 \times 40 \times 41 \times 42)} - 1$$

$$\text{d'où } P(A) = 1 - P(\bar{A}) \approx 0,372.$$

41. 1. $P(F) + P(A) + P(C) + P(I) = 2P(F) + 2P(F) + 2P(F) ;$
 $P(F) = \frac{1}{6} = P(A) \text{ et } P(C) = P(I) = \frac{1}{3}.$

2. a. On a :

$$P(S \cap A) = P_A(S) \times P(A) = 0,5 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

b. F, A, C, I forment une partition, s'il y a un chat c'est chez l'un des 4 et l'achat se fait sur un seul site (intersection vide).

(F, A, C, I sont non vides) d'où :

$$P(S) = P(S \cap A) + P(S \cap F) + P(S \cap I) + P(S \cap C) \\ = \frac{1}{12} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{3} \\ = \frac{5}{60} + \frac{2}{60} + \frac{8}{60} + \frac{2}{60} = \frac{17}{60}.$$

42. 1.

$$P(\text{« Gagné »}) = P(U=1) \times P_{(U=1)}(\text{« Gagné »}) \\ + P_{(U=2)} \times P_{(U=2)}(\text{« Gagné »})$$

$$P(\text{« Gagné »}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{15}.$$

Sur un grand nombre de parties, la fréquence de parties gagnées tend vers la probabilité, c'est-à-dire $\frac{4}{15}$.

2.

```
VARIABLES
U EST_DU_TYPE NOMBRE
k EST_DU_TYPE NOMBRE
N EST_DU_TYPE NOMBRE
C EST_DU_TYPE NOMBRE
F EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
LIRE N
C PREND_LA_VALEUR 0
POUR k ALLANT DE 1 A N
  DEBUT_POUR
  U PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(1,2)
  SI (U==1) ALORS
    DEBUT_SI
    SI (ALGOBOX_ALEA_ENT(1,5)<=1) ALORS
      DEBUT_SI
      C PREND_LA_VALEUR C+1
      FIN_SI
    FIN_SI
  SINON
    DEBUT_SINON
    SI (ALGOBOX_ALEA_ENT(1,3)<=1) ALORS
      DEBUT_SI
      C PREND_LA_VALEUR C+1
      FIN_SI
    FIN_SINON
  FIN_POUR
F PREND_LA_VALEUR C/N
AFFICHER "La fréquence de parties gagnées est égale à "
AFFICHER F
FIN_ALGORITHME
```

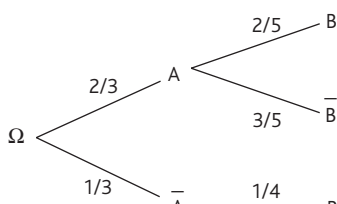
3. Les fréquences tendent vers $\frac{4}{15}$.

4. On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant respectivement 1 boule noire et 4 boules rouges et 1 boule noire et 2 boules rouges. On choisit une urne au hasard puis une boule dans l'urne choisie (les boules sont indiscernables au toucher). La partie est gagnée si l'on tire une boule noire.

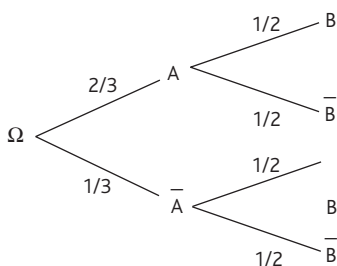
2. Arbres de probabilités

43. et 44. Corrigés dans le manuel.

45. a.

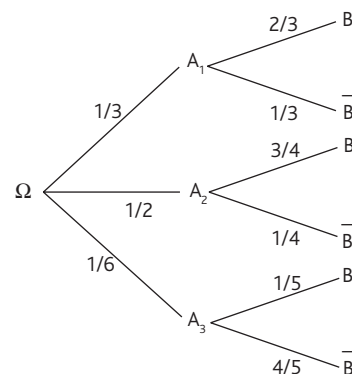


b.



$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} ; P_{\bar{A}}(B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})}.$$

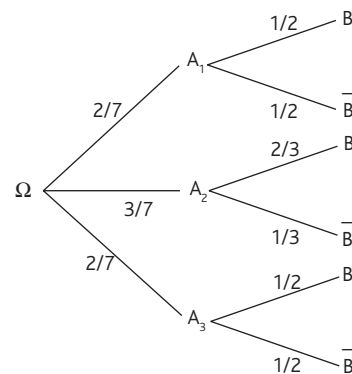
46. a.



$$P(A_3) = 1 - P(A_1) - P(A_2) ;$$

$$P_{A_i}(\bar{B}) = 1 - P_{A_i}(B).$$

b.



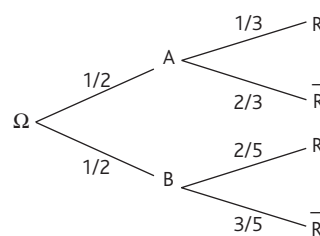
$$P(A_1 \cap B) = P(B) - P(A_2 \cap B) - P(A_3 \cap B) = \frac{1}{7} ;$$

$$P_{A_2}(B) = 1 - P_{A_2}(\bar{B}).$$

$$P_{A_1}(B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(A_1)} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{1}{2}.$$

$$P_{A_1}(B) = 1 - P_{A_1}(\bar{B}).$$

47. 1.



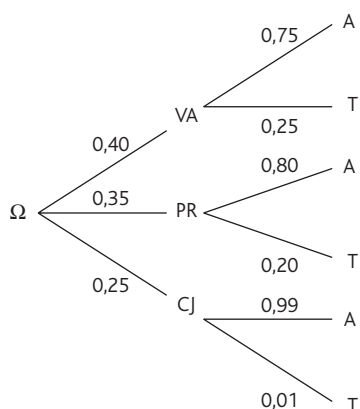
$$2. P_A(R) = \frac{1}{3} ; P_B(R) = \frac{2}{5}.$$

$$3. P(R) = P(A) \times P_A(R) + P(B) \times P_B(R) \\ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{11}{30}.$$

$$4. P_A(B) = \frac{P(R \cap B)}{P(R)} = \frac{P(B) \times P_B(R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}}{\frac{11}{30}} = \frac{6}{11}.$$

48. VA variétés, PR pop-rock, CJ classique jazz, A albums, T 2-titres.

1.



$$\begin{aligned} 2. P(A) &= P(VA \cap A) + P(PR \cap A) + P(CJ \cap A) \\ &= P(VA) \times P_{VA}(A) + P(PR) \times P_{PR}(A) + P(CJ) \times P_{CJ}(A) \\ &= \frac{4}{10} \times \frac{3}{4} + \frac{35}{100} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{99}{100} \\ &= \frac{3}{10} + \frac{7}{25} + \frac{99}{400} = \frac{120 + 112 + 99}{400} = \frac{331}{400} \end{aligned}$$

$$3. P_A(CJ) = \frac{P(CJ \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{99}{400}}{\frac{331}{400}} = \frac{99}{331}$$

3. Indépendance

49. et 52. Corrigés dans le manuel.

$$\begin{aligned} 53. P(A \cap B) &= P(A) \times P(B) = 0,06. \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0,2 + 0,3 - 0,06 = 0,44. \end{aligned}$$

$$54. P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,4.$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B)$$

car A et B sont indépendants donc $\bar{A}$ et B aussi ;

$$\text{d'où } P(B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{0,2}{0,4} = \frac{1}{2}.$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,6 \times \frac{1}{2} = 0,3.$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = 0,4 \times \frac{1}{2} = 0,2.$$

55. A et B indépendants donc

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \text{ d'où}$$

$$P(B) = \frac{0,15}{0,3} = \frac{1}{2}.$$

$P(A) \neq 0$ et A et B sont indépendants donc $P_A(B) = \frac{1}{2}$;

$P(A) \neq 0$ et A et B sont indépendants donc $P_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{2} = P(B)$.

56. A et B indépendants donc

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ donc } 0,65 = 0,3 + P(B) - 0,3P(B).$$

$$P(B) = \frac{0,35}{0,7} = \frac{1}{2}.$$

$$57. 1. P(A) = \frac{9}{100}; P(B) = \frac{6}{100};$$

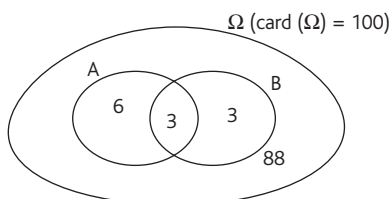
$$P(A \cap B) = \frac{3}{100}.$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{54}{10\,000} = \frac{0,54}{100} \text{ donc}$$

A et B ne sont pas indépendants.

$P(A) - P(A \cap B)$ est la probabilité que seul le défaut A soit présent d'où

$$P(A \text{ seul}) = \frac{9}{100} - \frac{3}{100} = \frac{6}{100}.$$



$$\begin{aligned} 3. P(\overline{A \cup B}) &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= \frac{100 - 9 - 6 + 3}{100} = \frac{88}{100} = \frac{22}{25} \end{aligned}$$

58. Pour chaque dé, $P(\text{pair}) = P(\text{impair}) = \frac{1}{2}$.

P - P ; P - I ; I - P ; I - I sont les 4 types de tirages possibles et ils sont équiprobables. P - P et P - I donnent une somme paire. P - I et I - P donnent une somme impaire.

On en déduit que $P(A) = \frac{1}{2}$.

$P(\bar{B})$: somme > 10 donc 11 ou 12 donc (5 ; 6) (6 ; 5) ou (6 ; 6)

$$P(\bar{B}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12};$$

$$P(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{36}; ((6 ; 6));$$

$$P(A) \times P(\bar{B}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{24}.$$

Donc A et $\bar{B}$ ne sont pas indépendants ; donc A et B ne sont pas indépendants.

59.

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{750}{1296}$

y_i	0	1	2	3	4
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{125}{1296}$	$\frac{625}{1296}$

1. Non X et Y ne sont pas indépendants.

$$P((X = 1) \cap (Y = 1)) = P(\emptyset) = 0$$

$$P(X = 1) \times P(Y = 1) = \frac{5}{216} \neq 0.$$

60.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

y_i	0	1	2
$P(Y = y_i)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{216}$

Il peut être utile de faire un arbre pour visualiser les résultats.

$$\begin{aligned} & \bullet P((X = 0) \cap (Y = 0)) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = P(X = 0) \times P(Y = 0) \\ & \bullet P((X = 0) \cap (Y = 1)) = \frac{5}{6} \times \frac{10}{36} = P(X = 0) \times P(Y = 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet P((X = 0) \cap (Y = 2)) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \\ & \quad = P(X = 0) \times P(Y = 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet P((X = 1) \cap (Y = 0)) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \\ & \quad = P(X = 1) \times P(Y = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet P((X = 1) \cap (Y = 1)) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{36} + \frac{5}{36}\right) \\ & \quad = P(X = 1) \times P(Y = 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet P((X = 1) \cap (Y = 2)) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \\ & \quad = P(X = 1) \times P(Y = 2) \end{aligned}$$

Donc : X et Y sont indépendantes.

4. Lois de probabilités continues

61. et 62. Corrigés dans le manuel.

63. • Pour tout x de $[-1 ; 1]$, $f(x) \geq 0$.

$$\begin{aligned} \bullet \int_{-1}^1 f(x) dx &= \left[-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x \right]_{-1}^1 \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = 1 \end{aligned}$$

Donc f est une densité de probabilité sur $[-1 ; 1]$.

64. • cos est positive et continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $f : x \mapsto k \cos x$; $k > 0$ est positive et continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\bullet \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} k \cos x dx = \left[k \sin x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = k - (-k) = 2k$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 1 \Leftrightarrow 2k = 1 \Leftrightarrow \boxed{k = \frac{1}{2}}$$

$$65. 1. \int_1^a \frac{1}{x} dx = 1$$

donc $\ln a - \ln 1 = 1$ d'où $a = e$.

$$2. \int_1^b \frac{1}{x} dx = 0,6$$

donc $\ln b = 0,6$; $b = e^{0,6}$.

66. 1. $P(2 \leq X \leq 5)$ est la surface du trapèze de sommets (2 ; 0), (5 ; 0), (2 ; f(2)) et (5 ; f(5))

$$\text{on trouve } f(5) = \frac{1}{4}f(2) = \frac{0,25}{4};$$

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 5) &= \frac{B + b}{2} \times h \\ &= \frac{0,25 + \frac{0,25}{4}}{2} \times 3 = \frac{3,75}{8} \end{aligned}$$

2. $P(X > 4)$ est la somme de :

• la surface du triangle rectangle de sommets (5 ; 0), (5 ; f(5)) et (9 ; 0) ;

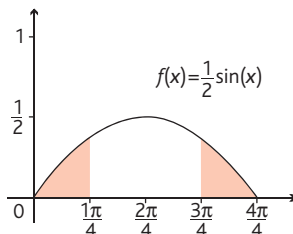
• la surface du trapèze de sommets (4 ; 0), (5 ; 0), (5 ; f(5)) et (4 ; f(4)) ;

$$\text{on trouve } f(54) = \frac{3}{16}f(5) = \frac{1}{4}.$$

$$P(X > 4) = \frac{0,25 \times 4}{2} + \frac{0,25 \times \frac{3}{16}}{2} \times 1$$

$$= 0,25 + \frac{7}{32} = \frac{23}{32}.$$

67.



$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ sur } [0; \pi]$$

$$F(x) = \left[-\frac{1}{2} \cos t \right]_0^x = \frac{1}{2} - \frac{\cos x}{2}$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4}.$$

$$1 - F\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{3\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4}.$$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est l'aire de la zone orange gauche ;
 $1 - F\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ est l'aire de la zone orange droite

Ces deux zones ont la même aire (sinus et symétrie par rapport à l'axe d'équation $x = \frac{\pi}{2}$).

68. 1. On cherche k tel que :

$$\int_{100}^{800} \frac{100-x}{k} (x-800) dx = 1$$

$$\text{or } \int_{100}^{800} \frac{100-x}{k} (x-800) dx$$

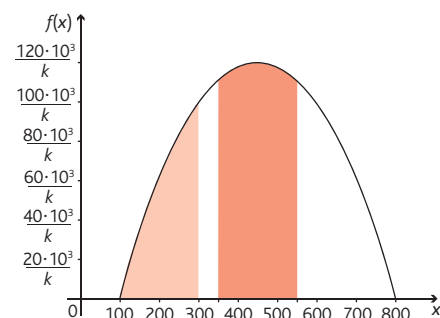
$$= \frac{1}{k} \int_{100}^{800} (-x^2 + 900x - 80000) dx$$

$$= \frac{1}{k} \left(\left[-\frac{x^3}{3} \right]_{100}^{800} + \left[900 \frac{x^2}{2} \right]_{100}^{800} - [80000x]_{100}^{800} \right)$$

$$= \frac{1}{k} \left(-\frac{800^3}{3} + \frac{900 \times 800^2}{2} - 80000 \times 800 \right.$$

$$\left. - \left(-\frac{100^3}{3} + \frac{900 \times 100^2}{2} - 80000 \times 100 \right) \right)$$

$$\text{d'où } k = \frac{1715}{3} \cdot 10^5.$$



2. Moins de 300 objets par semaine, c'est-à-dire $P(X \leq 300)$ soit la zone orange claire à gauche.

$$P(X \leq 300) = \int_{100}^{300} \frac{(100-x)(x-800)}{k} dx$$

$$= \frac{68}{343}.$$

$$3. P(350 \leq X \leq 550) = \int_{350}^{550} \frac{(100-x)(x-800)}{k} dx$$

$$= \frac{143}{343}.$$

C'est la zone orange foncée à droite.

$$4. E(X) = \int_{100}^{800} t f(t) dt$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} \right]_{100}^{800} + \left[900 \frac{x^3}{3} \right]_{100}^{800} - \left[80000 \frac{x^2}{2} \right]_{100}^{800} \times \frac{1}{\frac{1715}{3} \times 10^5}$$

$$= 450 = \frac{100+800}{2}.$$

f est symétrique par rapport à l'axe d'abscisse $x = 450$ donc on pourrait s'attendre à ce résultat car $P(450 - \delta) = P(450 + \delta)$.

69. A. 1. Par définition de f , densité de probabilité sur $[2; 6]$, on a :

$$\int_2^6 f(x) dx = 1 = \frac{1}{k} \int_2^6 (2-x)(x-6) dx$$

$$\int_2^6 (2-x)(x-6) dx = \int_2^6 (-12 + 8x - x^2) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} \right]_2^6 + [4x^2]_2^6 - [12x]_2^6$$

$$= -\frac{216}{3} + \frac{8}{3} + 144 - 16 - 72 + 24$$

$$= \frac{32}{3};$$

$$\text{d'où } 1 = \frac{1}{k} \times \frac{32}{3}; k = \frac{32}{3}.$$

$$2. E(X) = \frac{3}{32} \int_2^6 (-12 + 8x^2 - x^3) dx$$

$$= \left(\left[-\frac{x^4}{4} \right]_2^6 + \left[8 \frac{x^3}{3} \right]_2^6 - [6x^2]_2^6 \right) \times \frac{3}{32}$$

$$= \frac{192 - 64}{3} \times \frac{3}{32} = 4.$$

$$3. \int_2^6 (t - E(X)) f(t) dt$$

$$= \frac{3}{32} \int_2^6 (t - 4)(2 - t)(t - 6) dt$$

$$\int_2^6 (x - 4)(2 - x)(x - 6) dx$$

$$= - \int_2^6 (x - 2)(x - 4)(x - 6) dx$$

$$= - \int_2^6 (x + 2)x(x - 4) dx = 0$$

car $x \mapsto (x + 2)x(x - 2)$ est impaire.

$$B. 1. \int_a^b \frac{1}{k} (a - x)(x - b) dx = 1$$

car c'est une densité de probabilité

$$\text{donc } k = \int_a^b (a - x)(x - b) dx$$

$$= \int_a^b (-x^2 + (a + b)x - ab) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} \right]_a^b + \left[(a + b) \frac{x^2}{2} \right]_a^b - [abx]_a^b$$

$$= \frac{a^3 - b^3}{3} + \frac{(a + b)b^2}{2} - \frac{(a + b)a^2}{2} + a^2b - ab^2$$

$$= \frac{a^3}{3} - \frac{b^3}{3} + \frac{ab^2}{2} + \frac{b^3}{2} - \frac{a^3}{2} - \frac{ba^2}{2} + a^2b - ab^2$$

$$= \frac{b^3}{6} - \frac{a^3}{6} - \frac{ab^2}{2} + \frac{a^2b}{2}$$

$$= \frac{b^3 - a^3 + 3ba^2 - 3b^2a}{6} = \frac{(b - a)^3}{6}.$$

$$2. E(X) = \int_a^b t \frac{1}{k} (a - t)(t - b) dt$$

$$= \frac{1}{k} \int_a^b (-t^3 + (a + b)t^2 - abt) dt$$

$$= \frac{1}{k} \left(\left[-\frac{t^4}{4} \right]_a^b + \left[\frac{a + b}{3} t^3 \right]_a^b - \left[ab \frac{t^2}{2} \right]_a^b \right)$$

$$= \frac{1}{k} \left(\frac{a^4 - b^4}{4} + \frac{a + b}{3} (b^3 - a^3) + \frac{ab}{2} (a^2 - b^2) \right)$$

$$= \frac{6}{(b - a)^3} \left(-\frac{1}{4} (b^4 - a^4) + \frac{a + b}{3} (b^3 - a^3) - \frac{ab}{2} (b^2 - a^2) \right)$$

$$= \frac{6}{(b - a)^3} \left(-\frac{1}{4} (b^3 - ab^2 + a^2b + a^3)(b - a) \right.$$

$$\left. + \frac{a + b}{3} (b - a)(b^2 + ab + a^2) - \frac{ab}{2} (b - a)(b + a) \right)$$

$$(b - a \neq 0)$$

$$= \frac{6}{(b - a)^2} \left(\frac{-3b^3 + 3ab^2 - 3a^2b - 3a^3 + 4ab^2 + 4a^2b}{12} \right.$$

$$\left. + \frac{4a^3 + 4b^3 + 4ab^2 + 4ba^2 - 6ab^2 - 6a^2b}{12} \right)$$

$$= \frac{1}{2(b - a)^2} (b^3(-3 + 4) + ab^2(-3 + 4 + 4 - 6) + a^2b(-3 + 4 + 4 - 6) + a^3)$$

$$= \frac{b^3 - ab^2 - a^2b + a^3}{2(b - a)^2} = \frac{(b - a)(b^2 - a^2)}{2(b - a)^2}$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2b - a} = \frac{a + b}{2}.$$

5. Lois uniformes

70. à 72. Corrigés dans le manuel.

$$73. f: x \mapsto \frac{1}{2}; P(X \leq 1) = 1;$$

$$P(-2 \leq X \leq -1,5) = \frac{0,5}{2} = \frac{1}{4};$$

$$E(X) = \frac{-3 - 1}{2} = -2.$$

$$74. P(-5 \leq X \leq 25) = \frac{25 - (-5)}{40 - (-10)} = \frac{3}{5};$$

$$P(X \geq 10) = \frac{40 - 10}{50} = \frac{3}{5};$$

$$P(10 < X < 50) = P(10 \leq X \leq 40)$$

$$= \frac{40 - 10}{50} = \frac{3}{5}.$$

$$E(X) = \frac{-10 + 40}{2} = 15.$$

75. 1. $f: x \mapsto \frac{1}{385 - 365} \left(= \frac{1}{20} \right).$

2. $375 = \frac{365 + 385}{2} = E(X).$

3. $P(365 \leq X \leq 370) = \frac{370 - 365}{20} = \frac{1}{4}.$

76. 1. $P = P(15 \leq X \leq 20) + P(25 \leq X \leq 30) + P(X = 35)$
 $= \frac{20 - 15}{20} + \frac{30 - 25}{20} + 0 = \frac{1}{2}$

(Il attend au moins 5 minutes s'il arrive entre 5 min avant l'arrivée et l'arrivée d'un bus.)

2. $(X > 30)$: « il rate le bus » ;

$P(X > 30) = P(X \geq 30) = \frac{35 - 30}{20} = \frac{1}{4}.$

77. 1. $P(\text{random} < p) = \int_0^p f(t) dt$, avec f la densité de la variable aléatoire « random » qui suit une loi uniforme sur $[0 ; 1]$, donc $f(t) = 1$.

Donc $P(\text{random} < p) = p$.

2. Cet algorithme simule une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p puisqu'il renvoie 1 avec une probabilité égale à p et 0 avec une probabilité égale à $(1 - p)$.

3. **Variables** : p un réel ; X , n et k des entiers.

Début

Lire p

Lire n

X prend pour valeur 0

Pour k allant de 1 à n Faire

Si random $< p$

Alors

$X \leftarrow X + 1$

FinSi

Afficher X

Fin

78. A. 1. $g: x \mapsto \frac{1}{b - a}$ est la densité de probabilité X sur $[a ; b]$.

$F(x) = P(X \leq x) = P(a \leq X \leq x) = \frac{x - a}{b - a}.$

2. Pour $(a ; b) = (0 ; 1)$, $F(X) = x$.

B. 1. $G(y) = P(Y \leq y)$
 $= P((b - a)X + a \leq y)$
 $= P\left(X \leq \frac{y - a}{b - a}\right)$
 $= \frac{y - a}{b - a}.$

2. Y semble suivre une loi aléatoire uniforme sur $[a ; b]$.

C. Il suffit de taper $4 \times \text{random} + 2$ pour simuler une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[2 ; 6]$.

6. Lois exponentielles

79. à 81. Corrigés dans le manuel.

82. $P(X \geq 5) = [-e^{-0,34x}]_5^{+\infty} = e^{-1,7}.$

83. 1. Densité : $f: x \mapsto 0,512e^{-0,512x}.$

2. $P(X \geq 1) = 1 - \int_0^1 0,512e^{-0,512x} dx$
 $= e^{-0,512}.$

84. Densité : $f: x \mapsto \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}.$

$P_{(X \geq 1)}(X \geq 2) = \frac{P(X \geq 1 \cap X \geq 2)}{P(X \geq 1)}$
 $= \frac{P(X \geq 2)}{P(X \geq 1)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{1}{4}}} = e^{-\frac{1}{4}}.$

85. $\lambda = \frac{1}{10} ;$

$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 10 ;$

$P(X > 100) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [-e^{-\frac{1}{10}x}]_{100}^t = e^{-10}.$

86. $P(X \geq 2) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_2^t = e^{-2} \approx 0,135.$

87. Densité : $f: x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$

$P(X \leq 3) = \frac{2}{3} = [-e^{-\lambda x}]_0^3 = 1 - e^{-\lambda 3}$

d'où $\lambda = \frac{\ln 3}{3}.$

D'après le cours

$P_{(X \geq t)}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$

pour une variable aléatoire exponentielle donc $P_{(X \geq 2)}(X \geq 5) = P(X \geq 3)$

$= 1 - P(X < 3)$

$= 1 - P(X \leq 3)$

$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$

88. $E(X) = \frac{1}{\lambda} ;$

$P(X \geq E(X)) = P\left(X \geq \frac{1}{\lambda}\right) = [e^{-\lambda x}]_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty}$
 $= e^{-7 \times \frac{1}{\lambda}} = \frac{1}{e}.$

89. $P(X < t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t} ;$

$P(X \geq t) = \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda t} ;$

$P(X < t) = P(X \geq t) \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$

$\Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -\lambda t = -\ln 2$

$\Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{\lambda}.$

90. 1. Densité : $f: x \mapsto 10^{-4} \cdot e^{-10^{-4}x}$
 car $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 10^4.$

2. $P_{(T \geq 7000)}(T \geq 12000) = P(T \geq 5000)$
 (cf exercice 77.)

$= \lim_{t \rightarrow +\infty} [-e^{-10^{-4}x}]_{5000}^t$
 $= e^{-0,5} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$

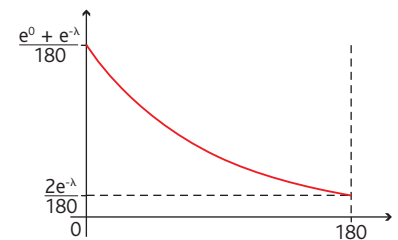
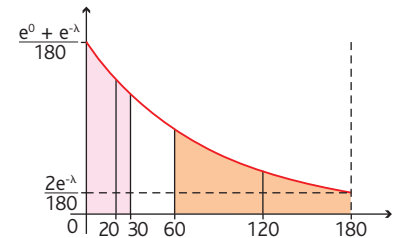
91. 1. λ vérifie :

$1 = \int_0^{180} \lambda (e^{-\lambda x} + e^{-1}) dx$

$= [e^{-\lambda x}]_0^{180} + \left[\frac{7}{e}x\right]_0^{180}$

$= 1 - e^{-180\lambda} + \frac{180}{e}\lambda ;$

$\lambda = \frac{1}{180}$ est une solution évidente.



2. a. $P(X = 20) = 0$ car $\int_{20}^{20} f(x) dx = 0.$

C'est la « surface » de l'axe d'abscisse 20 réduit au segment de limite/courbe et axe abscisse.

b. $P(0 \leq X \leq 30) = \int_0^{30} \left(\lambda e^{-\lambda x} + \frac{\lambda}{e}\right) dx$

$= [-e^{-\lambda x} + \frac{\lambda}{e}x]_0^{30} ; \left(\lambda = \frac{1}{180}\right)$

$= -e^{-\frac{30}{180}} + \frac{1}{6e} - (-e^0)$

$= 1 + \frac{1}{6e} - e^{-\frac{1}{6}} \approx 0,21.$

Surface rose (à gauche) sur le premier graphe.

c. $P(X \geq 60) = P(60 \leq X \leq 180)$

$$= \int_{60}^{180} \left(\frac{e^{-\frac{x}{180}}}{180} + \frac{1}{180e} \right) dx$$

$$= \left[-e^{-\frac{x}{180}} + \frac{x}{180e} \right]_{60}^{180}$$

$$= -e^{-1} + \frac{1}{e} + e^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3e}$$

$$\approx 0,59.$$

Surface orange (à droite) sur le premier graphe.

3. $P(60 \leq X \leq 190) = \int_{60}^{90} \left(\frac{e^{-\frac{x}{180}}}{180} + \frac{1}{180e} \right) dx$

$$= \left[-e^{-\frac{x}{180}} + \frac{x}{180e} \right]_{60}^{90}$$

$$= -e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2e} + e^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3e}$$

$$\approx 0,17.$$

donc

$$P_{(X \geq 60)}(60 \leq X \leq 90) = \frac{P(X \geq 60 \cap 60 \leq X \leq 90)}{P(X \geq 60)}$$

$$= \frac{P(60 \leq X \leq 90)}{P(X \geq 60)} \approx 0,29.$$

D'après 2. b., on a donc

$$P_{(X \geq 60)}(60 \leq X \leq 60 + 30) \neq P(0 \leq X \leq 30).$$

Ce n'est donc pas une loi sans vieillissement : plus le temps d'attente est long, plus la probabilité augmente.

7. Problèmes

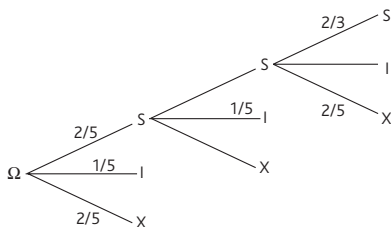
92. A. 1. $P(S) + P(X) + P(I) = 1$

car $\{S; X; I\}$ est l'univers

d'où $2P(I) + P(I) + P(I) = 1$

soit $P(I) = \frac{1}{3}$.

2.



Un seul chemin possible : S - I - X

d'où $P(a) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{125}$.

3. 6 chemins possibles : S - I - X, S - X - I, I - S - X, I - X - S, X - S - I et X - I - S.

Chacun est équiprobable d'où

$$P(F) = 6 \times P(S - I - X) = \frac{24}{125}.$$

B. L'événement complémentaire est $\bar{A}$: « aucun robot ne passe par le chemin S - I - X »

$P(\bar{A}) = (P(\bar{a}))^n$ car les déplacements des robots sont indépendants avec $\bar{a}$: « le robot i ne passe par le chemin S - I - X dans cet ordre »

$$P(\bar{a}) = 1 - P(a) = \frac{121}{125}, \text{ d'après A. 2.}$$

$$P(A) \geq 0,99 \Leftrightarrow P(\bar{A}) \leq 0,01$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{121}{125} \right)^n \leq 0,01$$

$$\Leftrightarrow n \ln \frac{121}{125} \leq \ln 0,01$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln \frac{121}{125}} \quad (\ln \text{ croissante})$$

car $\ln \frac{121}{125} < 0$ ($\frac{121}{125} < 1$)

or $\frac{\ln 0,01}{\ln \left(\frac{121}{125} \right)} \approx 141,6$

d'où n doit être égal à 142.

93. 1. a. Par hypothèse :

- $P(T_1) = P(G_1) = \frac{1}{2}$

car $P(T_1) + P(G_1) = 1$

car $\Omega = \{T; G\}$;

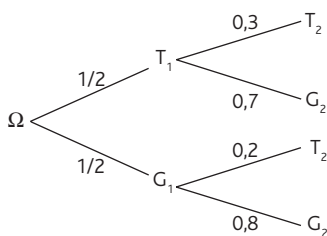
- $P_{T_1}(T_2) = 0,3$;

- $P_{G_1}(G_2) = 0,8$

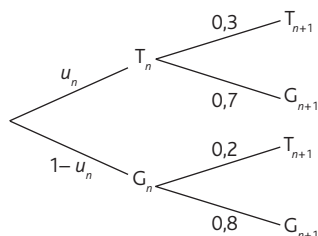
d'où $P_{G_1}(T_2) = 1 - 0,8 = 0,2$.

b. $P(T_2) = \frac{1}{2} \times 0,3 + \frac{1}{2} \times 0,2 = 0,15 + 0,1$

$$= 0,25 = \frac{1}{4}.$$



c.



b. $\forall n \geq 1,$

$P(T_{n+1}) = P(T_n) \times P_{T_n}(T_{n+1}) + P(G_n) \times P_{G_n}(T_{n+1})$
car $(T; G)$ est une partition de l'univers et $(T_1; G_1)$ est le premier élément de la séquence. (On a $\bar{G} = T$ car le toboggan est l'unique alternative du plongeon).

D'où $u_{n+1} = u_n \times 0,3 + (1 - u_n) \times 0,2$

$$= (0,3 - 0,2)u_n + 0,2$$

$$= 0,1 u_n + 0,2$$

2. a. $v_{n+1} = u_{n+1} = \frac{2}{9}$;

$$v_{n+1} = 0,1 u_n + 0,2 - \frac{2}{9} = 0,1 u_n - \frac{2}{90}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{10} \left(u_n - \frac{2}{10} \right) = \frac{1}{10} + v_n.$$

(v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$;

$v_1 = u_1 - \frac{2}{9} = \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}$ est le premier terme de $(v_n)_{n \geq 1}$.

b. D'où $v_n = \frac{1}{10^{n-1}} \frac{5}{18}$

et $u_n = v_n + \frac{2}{9} = \frac{2}{9} + \frac{5}{18} \cdot \frac{1}{10^{n-1}}$.

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{9} + \frac{5}{18} \times \frac{1}{10^{n-1}} = \frac{2}{9}$, car

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{10^{n-1}} = 0.$$

94. 1. $\bar{A}$: « Aucune personne sur les 50 ne répond ».

P (« Une personne au hasard ne répond pas ») = $1 - 0,1 = 0,9$.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(\bar{A}) = (1 - 0,1)^{50} \quad (\text{év}^{\text{ts}} \text{ indépendants})$$

$$\approx \frac{5}{1000}.$$

D'où $P(A) = 1 - \left(\frac{9}{10} \right)^{50} \approx \frac{995}{1000}$.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes acceptant de répondre. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(50; \frac{1}{20}\right)$.

Donc :

$$P(B) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \left(\frac{9}{10} \right)^{50} + 50 \times \frac{1}{10} \times \left(\frac{9}{10} \right)^{49} \approx 0,112$$

et $P(C) = \left(\frac{50}{3} \right) \times \left(\frac{1}{10} \right)^3 \times \left(\frac{9}{10} \right)^3 \approx 0,139$.

2. a. $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - P(X \leq 2)$

$$= 1 - P(X=0) \cup (X=1) = (X=2)$$

$$P(X=0) \cap (X=1) = \emptyset$$

et $P((X=0) \cup (X=1)) \cap (X=2) = \emptyset$

donc : $P((X=0) \cup (X=1) \cup (X=2))$

$$= P((X=0) \cup (X=1)) + P(X=2) - P(\emptyset)$$

$$= P(X=0) + P(X=1) - P(\emptyset) + P(X=2) - 0$$

$$= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \frac{e^{-a} a^0}{0!} + \frac{e^{-a} a^1}{1!} + \frac{e^{-a} a^2}{2!}$$

$$= e^{-a} \left(1 + a + \frac{a^2}{2} \right)$$

d'où $P(X \geq 3) = 1 - e^{-a} \left(1 + a + \frac{a^2}{2} \right)$.

b. $f(5) = 1 - e^{-5} \left(1 + 5 + \frac{25}{2} \right) \approx 0,875$
($n = 50$).

Sur l'ensemble des valeurs, ce modèle donne un résultat assez proche de la question 1. ($f(5) \approx P(\bar{B})$, avec $P(\bar{B}) \approx 0,888$).

3. a.

$$f'(x) = e^{-x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} \right) - e^{-x} (1 + x) = \frac{e^{-x} x^2}{2};$$

$$f'(x) \geq 0.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	$-\infty$	0	1

b. $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc $f(x) = 0,95$ admet une solution unique sur $]0; +\infty[$, $f(6,29) < 0,95$ et $f(6,3) > 0,95$ (calcul numérique) donc la solution est dans l'intervalle $]6,29; 6,3[$. Pour $a \geq 6,3$ on a donc $P(X \geq 3) \geq 0,95$ $a = \frac{n}{10}$ d'où pour $n \geq 63$, on a $P(X \geq 3) \geq 0,95$ (62 n'est pas bon car 62 est en dehors de l'intervalle).

95. Avant l'ouverture de la porte, la chance de trouver la voiture est $\frac{1}{3}$ car chaque porte est indiscernable et que la voiture est placée au hasard.

Si le candidat a initialement choisi la bonne porte ($\frac{1}{3}$), il perd forcément s'il change.

Si le candidat a choisi la mauvaise porte ($\frac{2}{3}$), il gagne forcément en changeant (car le présentateur ouvre la 2^e mauvaise). Donc, dans 2 cas sur 3, le candidat gagne en changeant, il faut changer !

Le présentateur donne une information décisive dans 2 cas sur trois.

96. 1. Les amis déjeunent ensemble si leurs instants d'arrivée sont distants d'au plus 10 minutes ($\frac{1}{6}$) h d'où la probabilité qu'ils déjeunent ensemble est :

$$P(|X - Y| \leq \frac{1}{6}).$$

2. C prend la valeur 0
saisir n

Pour i de 1 à n faire

x prend pour valeur un nombre aléatoire entre 0 et 1.

y prend pour valeur un nombre aléatoire entre 0 et 1.

Si alors $(x - y) \leq \frac{1}{6}$

Alors C prend une valeur C + 1

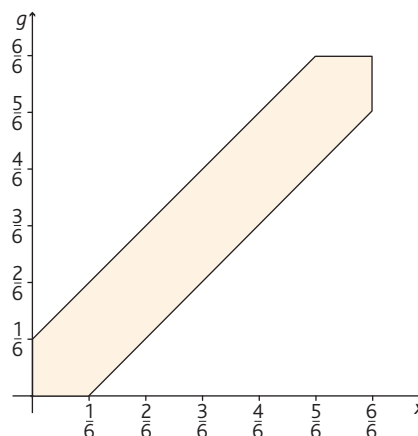
Fin Si

Fin Pour, afficher $\frac{C}{n}$

3. $S = 1 - 2 \times \left(\frac{5}{6} \right) \times \frac{1}{2} = \frac{11}{36}$

$$S \approx 0,30555...$$

$$P = S.$$

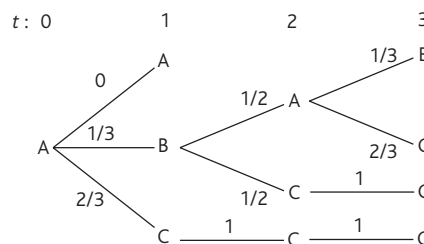


4.

- attribuer une valeur à n
- assigner une valeur S à 0 (S désigne la somme des temps d'attente)
- Pour i de 1 à n
- assigner (x, y) à des valeurs aléatoires dans $[0; 1]$
- $S \rightarrow S + \text{abs}(x - y)$
- Fin Pour
- afficher $\frac{S}{n}$

On trouve $\frac{1}{3}$ pour le temps moyen d'attente (20 minutes).

97. 1.



t_i	0	1	2	3
a_i	1	0	$\frac{1}{6}$	0
b_i	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{18}$
c_i	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{17}{18}$

2. a. À l'instant t_n , la puce est forcément en A, B ou C donc :

$$a_n + b_n + c_n = 1.$$

Pour que la puce soit en A à l'instant t_{n+1} , elle est forcément en B à t_n , elle ne peut être en A à t_{n+1} .

$$D'où $a_{n+1} = P_B(A) \times P(B_{t_n}) = \frac{1}{2} P(B_{t_n}) \frac{1}{2} b_n.$$$

Pour que la puce soit en B à t_{n+1} , elle est forcément en A à t_n car si en C elle reste en C et si elle est en B à t_n , elle ne peut être à B en t_{n+1} .

$$D'où $b_{n+1} = P_A(B) \times a_n = \frac{1}{3} a_n.$$$

b. $a_{n+2} = \frac{1}{2} b_{n+1}$ d'après 2. a.

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{3} a_n \text{ d'après 2. a.}$$

$$= \frac{a_n}{6}$$

c. $a_0 = 1$ donc $a_0 = \left(\frac{1}{6} \right)^0 = a_{2 \times 0}.$

Par récurrence, montrons que la propriété

$a_{2n} = \left(\frac{1}{6} \right)^n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$; on vient de montrer $P(0)$; supposons $P(n)$

pour n donné $a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \frac{a_{2n}}{6}$ d'après 2. b.

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6} \right)^n \text{ par hypothèse de récurrence}$$

$$= \left(\frac{1}{6} \right)^{n+1}.$$

$P(n+1)$ est vraie.

D'où $a_{2p} = \left(\frac{1}{6} \right)^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

• $a_1 = 0$ (cf. 1.). On montre de même par récurrence et en utilisant 2. b. que $a_{2p+1} = 0, \forall p \in \mathbb{N}$.

• $b_0 = 0$ d'après 1. donc $P(0)$ est vraie.

Supposons $P(n)$: « $b_{2n} = 0$ » pour n donné. $b_{2(n+1)} = b_{2n+2} = \frac{1}{3} a_{2n+1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} b_{2n} = \frac{1}{6} b_{2n} = 0$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, on a montré que $b_{2p} = 0, \forall p \in \mathbb{N}$.

• $b_1 = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} \right)^0 = b_{2 \times 0 + 1}$ donc $P(0)$ est vraie.

Supposons $P(n)$ vraie pour n donné :

$$b_{2n+1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} \right)^n.$$

$$b_{2(n+1)+1} = b_{2n+3} = \frac{1}{3} a_{2n+2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} b_{2n+1} \\ = \frac{11}{63} \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$

$P(n+1)$ est vraie.

D'où $b_{2p+1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^p$, pour tout $\forall p \in \mathbb{N}$.

3. $\lim_{p \rightarrow +\infty} a_{2p+1} = 0$ car (a_{2p+1}) est constante en 0 ;

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} a_{2p} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^p = 0 \text{ car } \left|\frac{1}{6}\right| < 1.$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $(a_n + b_n + c_n) = 1$ donc $c_n = 1 - a_n - b_n$, or $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$.

98. 1. $P(X \leq h)$ est la probabilité que le noyau vive moins de h .

$P_{X \geq t}(t \leq X \leq t+h)$ est la probabilité que le noyau vive moins de $t+h$ sachant qu'il a déjà vécu t .

Si on sait qu'un noyau est radioactif à l'instant t , la probabilité qu'il ne soit plus radioactif à $t+h$ est la même que celle qu'il avait de ne plus être radioactif à l'instant h après sa naissance.

2. On suppose que $a \leq b$.

$$F(b) - F(a) = \int_0^b f(t) dt - \int_0^a f(t) dt \\ = \int_0^b f(t) dt + \int_a^0 f(t) dt = \int_a^b f(t) dt \\ = P(a \leq X \leq b)$$

$$P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$$

3. D'après 2.

$$F(t+h) - F(t) = P(t \leq X \leq t+h) \\ = P((X \geq t) \cap (t \leq X \leq t+h)) \\ = P(X \geq t) \times P_{X \geq t}(t \leq X \leq t+h), \\ (P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)) \\ = (1 - P(X < t)) \times P(X \leq h)$$

par définition

$$= (1 - P(X \leq t)) \times P(X \leq h) \\ = (1 - F(t)) \times F(h)$$

4. $F(t) = \int_0^t f(x) dx$ donc F est l'unique primitive de f sur $[0; +\infty[$ qui s'annule

en 0. Donc F est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout t de $[0; +\infty[$, $F'(t) = f(t)$. Donc G est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout t de $[0; +\infty[$ $G'(t) = -f(t)$.

$$5. G(t+h) = 1 - F(t+h) \\ = 1 - F(t) - F(h)(1 - F(t))$$

d'après 5..

$$= G(t) - F(h)(1 - G(t)) \\ = (1 - F(h))G(t) \\ = G(h)G(t) \quad \forall t, h \in \mathbb{R}^+$$

6. De 4. et 5., on déduit que G est une exponentielle.

$\exists k \in \mathbb{R} \mid G(x) = e^{kx}$ et en posant $\lambda = -k$ on a $G(x) = e^{-\lambda x}$.

D'où $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

7. $P(X \leq t)$ tend vers 1 quand t tend vers $+\infty$ car X varie sur $[0; +\infty[$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(t) = 1$. On en déduit que λ est forcément positif ($\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\infty} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$).

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \\ \text{et } F(t) = P(X \leq t) = \int_0^t f(x) dx \\ \text{donc } f(x) = F'(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

X suit une loi exponentielle de paramètre λ .

Application

$$1. P(X \geq 1000) = \int_{1000}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ = 1 - \int_0^{1000} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ = 1 - [-e^{-\lambda x}]_0^{1000} \\ = 1 + e^{-\lambda 1000} - e^0 \\ = e^{-\lambda 1000} = e^{-0,121} \approx 0,886.$$

La probabilité que le noyau est encore radioactif après 1 000 ans est 0,886.

$$2. P(X \geq t) = P(X \leq t) \Leftrightarrow \int_t^{+\infty} = \int_0^t \\ \Leftrightarrow 1 - \int_0^t = \int_0^t \\ \Leftrightarrow \int_0^t e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow [-e^{-\lambda x}]_0^t = \frac{1}{2} = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda t = \ln \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-\lambda} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{1,21 \cdot 10^{-4}}$$

$t \approx 5728$ ans.

$$99. 1.a. P(T \leq 1) = 1 - e^{-\frac{1}{3}}, P(T \leq 1) \approx 0,2835$$

$$b. P(T > 1) = 1 - P(T \leq 1) = e^{-\frac{1}{3}}$$

$$2. a. P(A) = P(T > 1) = e^{-\frac{1}{3}}; P(A) \approx 0,7165 \\ P(B) = P(T > 3) = e^{-1}; P(B) \approx 0,3679$$

$$b. P_A(B) = P(T > 1 | T > 1) = P(T > 2) = e^{-\frac{2}{3}}; \\ P_A(B) \approx 0,5134$$

2. a. D'après 1. a., le pourcentage de poupées remboursées est d'environ 28,35 % à 10^{-2} près.

$$b. P(T \leq t) \leq 0,08 \Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{1}{3}t} \leq 0,08 \\ P(T \leq t) \leq 0,08 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}t \geq \ln(0,92) \\ P(T \leq t) \leq 0,08 \Leftrightarrow t \geq -3 \ln(0,92)$$

or $-3 \ln(0,92) \approx 0,2501$.

Le fabricant devrait proposer une garantie inférieure à 3 mois.

4. a. X suit la loi binomiale de paramètres $\left(3; 1 - e^{-\frac{1}{3}}\right)$.

$$P(X=3) = \left(1 - e^{-\frac{1}{3}}\right)^3 = p^3 \\ P(X=3) \approx 0,0228.$$

$$b. P(X=1) = \frac{3}{1} \times \left(1 - e^{-\frac{1}{3}}\right) \times \left(e^{-\frac{1}{3}}\right)^2, \\ P(X=1) \approx 0,4366 \\ P(X=1) = 3px(1-p)^2.$$

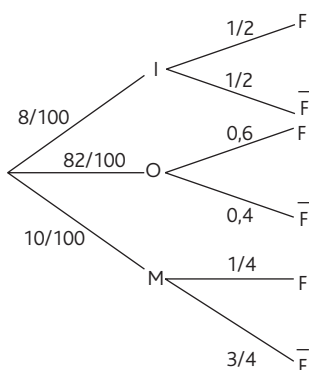
c.

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$(1-p)^3$	$3 \times p \times (1-p)^2$	$3 \times p^2 \times (1-p)$	p^3

$$d. E(X) = n \times p = 3 \times \left(1 - e^{-\frac{1}{3}}\right) \\ E(X) \approx 0,8504.$$

En route vers le bac (p. 362)

100. A. 1.



2. a. $P(M) = \frac{1}{10}$.

b. $P(M \cap F) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{40}$.

c. $P(F)$

$$= P_M(F) \times P(M) + P_O(F) \times P(O) + P_I(F) \times P(I)$$

$$= \frac{8}{100} \times \frac{1}{2} + \frac{82}{100} \times 0,6 + \frac{800}{100} \times \frac{1}{4} = \frac{557}{1000}$$

B. 1. $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$

Par hypothèse, $P(B) = 0,04$

et $P(B \cap \bar{A}) = 0,003$.

D'où $P(B \cap A) = 0,04 - 0,003 = 0,037$.

2. $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0,96$

et $P(\bar{B}) = P(\bar{B} \cap A) + P(\bar{B} \cap \bar{A})$.

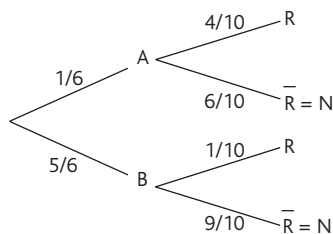
D'où $P(\bar{B} \cap \bar{A}) = 0,96 - \frac{2}{1000} = 0,958$;

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = 0,958 + 0,003 = 0,961 ;$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0,039.$$

3. $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,037}{0,039} = \frac{37}{39} \approx 95 \%$.

101. A.



1. $P(R) = P_A(R) \times P(A) + P_B(R) \times P(B)$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{10} \times \frac{5}{6}$$

$$= \frac{4}{60} + \frac{5}{60} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20} = 0,15$$

2. $P_R(A) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{4}{60}}{\frac{3}{20}} = \frac{4}{9}$

$$P_R(B) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{5}{60}}{\frac{3}{20}} = \frac{5}{9}$$

La probabilité que la boule rouge vienne de B est supérieure à celle qu'elle vienne de A.

B. 1.

$$(G = 2x) = (R ; R)$$

$$\rightarrow P = \left(\frac{3}{20}\right)^2 = \frac{9}{400} = P(G = 2x)$$

$$(G = x - 1) = (R ; N) \text{ ou } (N ; N)$$

$$\rightarrow P = 2 \times \frac{3}{20} \times \frac{17}{20} = \frac{102}{400} = P(G = x - 2)$$

$$(G = -4) = (N ; N)$$

$$\rightarrow P = \left(\frac{17}{20}\right)^2 = \frac{289}{400} = P(G = -4)$$

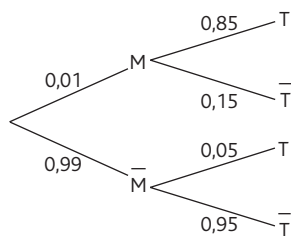
2. $E(X) = \frac{9}{400} \times 2x + \frac{102}{400} (x - 2) - 4 \times \frac{289}{400}$

$$= \frac{120}{400}x - \frac{136}{40}$$

$$= \frac{3}{10}x - \frac{34}{10}$$

3. $E(X) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{10}x \geq \frac{34}{10} \Leftrightarrow x \geq \frac{34}{3} = 11 + \frac{1}{3}$.

102. 1.



2. a.

$$P(M \cap B) = 0,0085 (= P_M(T) \times P(M)).$$

b. $P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T)$

$$= 0,0085 + 0,99 \times 0,05 = 0,58.$$

3. $P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0,0085}{0,058} = 0,1466$

4. a. X suit la loi binomiale $B(5 ; 0,058)$.

b. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0,2583$.

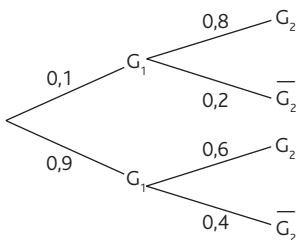
5. a.

$$E = 0 \times 0,9405 + 100 \times 0,058 + 1000 \times 0,0015$$

$$= 5,8 + 1,5 = 7,3.$$

b. La somme est $200 \times E = 1460$.

103. 1.



$$P_2 = P(G_2) = P(G_1 \cap G_2) + P(\bar{G}_1 \cap G_2)$$

$$= 0,08 + 0,54 = 0,62.$$

2. $P_{G_2}(\bar{G}_1) = \frac{P(G_2 \cap \bar{G}_1)}{P_2} = \frac{0,54}{0,62} = \frac{27}{31}$.

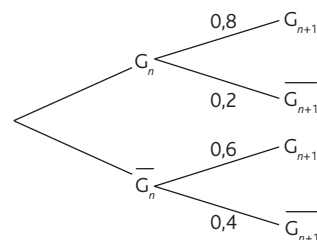
3. $P = 1 - P(\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3)$

$$= 1 - P(\bar{G}_1) \times P_{G_1}(\bar{G}_2) \times P_{G_2}(\bar{G}_3)$$

$$= 1 - 0,9 \times 0,4 \times 0,4$$

$$= 1 - 0,144 = 0,856$$

4.



$$P_{n+1}(G_{n+1}) = P_{G_n}(G_{n+1}) \times P(G_n) + P_{\bar{G}_n}(G_{n+1}) \times P(\bar{G}_n)$$

$$= 0,2P_n + 0,6$$

$$P_{n+1} = \frac{1}{5}P_n + \frac{3}{5}$$

5. On pose $P_n : \ll P_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n \gg$.

• $n = 1 \quad P_1 = 0,1$

et $\frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{15}{20} - \frac{13}{20} = 0,1$

P_1 est vraie.

• Soit n donné ($n \geq 1$). Supposons P_n vraie.

$$P_{n+1} = \frac{1}{5}P_n + \frac{3}{5} = \frac{1}{5} \left(\frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n \right) + \frac{3}{5}$$

$$= \frac{3}{20} + \frac{3}{5} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \text{ d'où } P_{n+1} \text{ est vraie.}$$

On a donc P_n vraie pour tout $n \geq 1$.

6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n \right) = \frac{3}{4}$,

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5^n} = 0, 0 < \frac{1}{5} < 1$.

7. $\frac{3}{4} - P_n < 10^{-7} \Leftrightarrow \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n < 10^{-7}$

$$\Leftrightarrow n \ln \frac{1}{5} < \ln \frac{4 \cdot 10^{-7}}{13}$$

$$\Leftrightarrow \left(\text{Comme } \ln \frac{1}{5} < 0 \right) \quad n > \frac{\ln \frac{4 \cdot 10^{-7}}{13}}{\ln \frac{1}{5}}$$

d'où $n \geq 11$ car $\frac{\ln \frac{4 \cdot 10^{-7}}{13}}{\ln \frac{1}{5}} \approx 10,8$.

104. 1. a.

$$R(t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx \\ = 1 - [-e^{-\lambda x}]_0^t = 1 + e^{-\lambda t} - 1 = e^{-\lambda t}.$$

b

$$P_{(X>t)}(X>t+s) = \frac{P(X>t \cap X>t+s)}{P(X>t)} \\ = \frac{P(X>t+s)}{P(X>t)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t} e^{-\lambda s}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} (P(X>s))$$

donc $P_{X>t}(X>t+s)$ est indépendant de t .

2. a.

$$P(X > 1000) = e^{-0,00026 \times 1000} = e^{-0,26}$$

$$P(X \leq 1000) = 1 - P(X > 1000) = 1 - e^{-0,26}$$

$$\text{b. } P(X > 2000) = P_{(X>1000)}(X > 2000) \\ = P_{(X>1000)}(X > 1000 + 1000) \\ = P(X > 1000) \text{ d'après 1. b.} \\ = e^{-0,26} \text{ d'après 2. a.}$$

105. 8 piques, 4 as, 1 as de pique donc 11 cartes sont (pique ou as) donc 21 cartes sont ni as, ni pique. Comme le tirage est au hasard, il y a équiprobabilité d'où **b.** : $\frac{21}{32}$.

106. Il y a 21 cartes ni as, ni piques donc C_2^{21} combinaisons de choisir 2 cartes ni as, ni piques

$$\text{d'où b. : } \frac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}} \text{ et a. : } \frac{105}{248}.$$

107. L'intervalle est $[0; 60]$ en minutes,

$$p = \frac{20-15}{60} = \frac{1}{12} \text{ d'où c.}$$

$$\text{108. } p = \binom{10}{1} 0,15 \times 0,85^9 = 10 \times 0,15 \times 0,85^9 \text{ d'où d.}$$

109. a. $P_n = 1 - (1 - 0,3)^n$ « Au moins une cible » est le complémentaire de « aucune cible »
 $= 1 - (0,7)^n \rightarrow n \geq 7$ d'où **b.**

$$\text{110. } p = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{125}{388} \text{ d'où a.}$$

$$\text{111. } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B).$$

$$P(A \cup B) - P(A) = (1 - P(A)) P(B)$$

$$P(B) = \frac{0,65 - 0,3}{0,7} = \frac{1}{2} \text{ d'où a.}$$

112. 1. d.

$$P(M_2 \cap N) = P(M_2) \times P_{M_2}(N) = 0,24$$

2. b.

$$P(N) = P(M_2) \times P_{M_2}(N) + P_{M_1}(N) \times P(M_1) \\ = 0,24 + 0,42 = 0,66.$$

$$\text{113. } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \text{ donc :}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{2}{5} + P(B) - \left(1 - \frac{2}{5}\right), P(B) = \frac{7}{12}.$$

P_1 est vraie, P_2 est fausse car

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{4}{5}$$

$$\text{et } P(\overline{A \cup C}) = 1 - P(A \cup C).$$

114. P_1 est vraie,

$$4 \times p \times (1-p)^3 = 8 \times (1-p)^4 \Rightarrow p \\ = 2(1-p) \Rightarrow p = \frac{2}{3}.$$

P_2 est vraie,

$$p \times (X=1) = 4 \times \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^5 = P(X=0)$$

$$\text{115. } P(X \geq t) = e^{-\lambda t} = e^{-0,07t}$$

$$P_1 \text{ est vraie car } e^{-0,07 \times 10} = 0,5 \pm 10^{-2}$$

P_2 est vraie car c'est une loi sans mémoire et car P_1 est vraie.

$$\text{116. 1. a. on a : } P(B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) = B \text{ donc}$$

$$P(B) = P((B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}))$$

$$= P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) - P\left(\frac{(B \cap A) \cap (B \cap \overline{A})}{\emptyset}\right)$$

$$\text{Comme } P(\emptyset) = 0, P(B) = P(B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$$

b. A et B indépendants

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Par hypothèse : $P(B \cap A) = P(B) \times P(A)$ et

$$P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(B \cap A) \text{ d'après 1. a.}$$

$$\text{d'où } P(B) \times P(A) = P(B) - P(B \cap \overline{A}) \text{ soit}$$

$$P(B \cap \overline{A}) = P(B)(1 - P(A)) = P(B) \times P(A)$$

donc B et $\overline{A}$ sont indépendants.

$$\text{2. a. } P(\overline{R} \cap S) = P(\overline{R}) \times P(S)$$

$$= 0,9 \times 0,05 = 0,045$$

car les événements sont indépendants, décorrelés.

$$\text{b. } P(\overline{R} \cap \overline{S}) = P(\overline{R}) \times P(\overline{S}) = 0,9 \times 0,95 = 0,855$$

$$\text{c. } P = \binom{5}{4} P(\overline{R})^4 P(R) + \binom{5}{5} P(\overline{R})^5 \\ = P(\overline{R})^4 (5P(R) + P(\overline{R})) = 0,91854.$$

117. 1.

$$P_{([t; +\infty])}([t; t+s]) = \frac{P([t; +\infty] \cap [t; t+s])}{P([t; +\infty])} \\ = \frac{P([t; t+s])}{P([t; +\infty])}$$

$$(\text{car } [t; +\infty] \cap [t; t+s] = [t; t+s])$$

$$= \frac{\int_e^{t+s} \lambda e^{-\lambda x} dx}{1 - P([0; t])} = \frac{\int_e^{t+s} \lambda e^{-\lambda x} dx - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx}{1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx}$$

$$= \frac{F(t+s) - F(t)}{1 - F(t)}$$

$$P_{[t; +\infty]}([t; t+s]) = \frac{\int_e^{t+s} \lambda e^{-\lambda x} dx}{1 - P([0; t])}$$

$$= \frac{[-e^{-\lambda x}]_t^{t+s}}{(1 - [-e^{-\lambda x}]_0^t)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda s})}{e^{-\lambda t}}$$

$$= 1 - e^{-\lambda s}$$

$$(\text{car } e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R})$$

et donc est indépendant de t .

2. « Le capteur ne tombe pas en panne les 2 premières années » est le complémentaire de l'événement « le capteur tombe en panne dans les premières années » dont la probabilité vaut $F(2)$.

Donc la probabilité recherchée est $1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-0,12 \times 2}) = e^{-0,24}$.

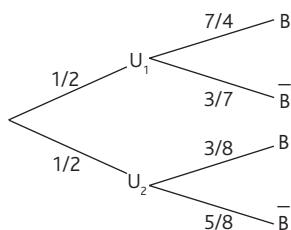
3. On cherche $P_{(X \geq 2)}(2 \leq X \leq 4 + 2)$.

D'après 1.,

$$P_{(X \geq 2)}(2 \leq X \leq 4 + 2) = P_{([2; +\infty])}([2; 2 + 4]) \\ = 1 - e^{0,2 \times 4} = 1 - e^{0,8}.$$

Accompagnement personnalisé (p. 367)

118. 1.



2. $P(U_1 \cap B) = P(U_1) \times P_{U_1}(B)$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}.$$

$$P(U_2 \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$$

3. $P(B) = P(U_1 \cap B) + P(U_2 \cap B)$ car $U_2 = \overline{U_1}$

$$= \frac{2}{7} + \frac{3}{16} = \frac{32 + 21}{112} = \frac{53}{112}.$$

4. $P_B(U_1) = \frac{P(B \cap U_1)}{P(B)} = \frac{2}{7} \times \frac{112}{53} = \frac{224}{371} = \frac{32}{53}.$

119. 1. $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}; P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}; P(A \cap B) = \frac{11}{32}.$

$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

2. $P(A) = \frac{1}{8} \times \frac{28}{31} + \frac{7}{8} \times \frac{4}{31} = \frac{7}{62} + \frac{7}{62} = \frac{14}{62} = \frac{7}{31};$

$$P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{24}{31} + \frac{8}{4} \times \frac{8}{31} = \frac{6}{31} + \frac{6}{31} = \frac{12}{31}.$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{32} \times \frac{31}{31} + \frac{31}{32} \times \frac{1}{31} + \frac{7}{32} \times \frac{3}{31} + \frac{3}{32} \times \frac{7}{31}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{21}{31 \times 32} + \frac{21}{31 \times 32}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{21}{31 \times 16} = \frac{31 + 21}{16 \times 31} = \frac{52}{16 \times 31} = \frac{13}{4 \times 31} = \frac{13}{124}.$$

$P(A) \times P(B) = \frac{7}{31} \times \frac{12}{31} = \frac{84}{961}$ donc $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$. A et B ne sont pas indépendants.

120. 1. $P(2 \leq X \leq 3,5) = \frac{3,5 - 2}{5} = \frac{1,5}{5} = \frac{3}{10}.$

2. $P(X > 4) = \frac{5 - 4}{5} = \frac{1}{5}.$

121. 1. $P(T \geq 7) = 1 - \int_0^7 \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - [-e^{-\lambda x}]_0^7 = e^{-7\lambda} = 0,6$

d'où $-7\lambda = \ln\left(\frac{6}{10}\right) \Leftrightarrow \lambda = \frac{-1}{7} \ln\left(\frac{6}{10}\right), \lambda \approx 0,173.$

2. $E(T) = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$ (cours)

$$E(T) = \frac{-7}{\ln\left(\frac{6}{10}\right)} \approx 13 \text{ ans et 8 mois.}$$

3. $P\left(T \leq \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\frac{0,073}{2}} \approx 0,036.$

4. $P(T \geq 10) = e^{-10\lambda}; P(T \geq 0) \approx 0,48.$

5. $P = 1 - P$ (tous les lave-linge s'arrêtent de fonctionner dans les 10 ans).

$$P = 1 - [P(X \leq 10)]^n = 1 - (1 - e^{-\lambda 10})^n,$$

$$0,9 \leq P \Leftrightarrow (1 - e^{-\lambda 10})^n \leq 0,1.$$

$$n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln(1 - e^{-\lambda 10})} \approx 3,5 \text{ (car } 1 - e^{-\lambda 10} \leq 1,$$

donc $\ln(1 - e^{-\lambda 10}) < 0$, d'où $n \geq 4$).

122. 1. $F_1(x) = \sqrt{1 - x^2}.$

3. (x, y) sont les coordonnées d'un point pris au hasard dans le arré ABCD, C est le nombre de points appartenant à $\mathcal{S}$.

5. Aire d'un disque de côté $1 = \pi R^2 = \pi$ donc on calcule $\frac{\pi}{4}$ de manière approchée avec cette algorithme.

123. 1. $P(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 F_1(x) dx$, comme F_1 est une densité de probabilité, c'est une fonction positive sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0; 1]$. Donc $P(0 \leq X \leq 1)$ correspond à l'aire du domaine $\mathcal{S}$.

2. VARIABLES

```
N EST_DU_TYPE NOMBRE
x EST_DU_TYPE NOMBRE
y EST_DU_TYPE NOMBRE
i EST_DU_TYPE NOMBRE
u EST_DU_TYPE NOMBRE
aire EST_DU_TYPE NOMBRE
```

DEBUT_ALGORITHME

LIRE N

u PREND_LA_VALEUR 0

POUR i ALLANT_DE 1 A N

DEBUT_POUR

x PREND_LA_VALEUR random()

y PREND_LA_VALEUR random()

SI $(y < (1/\sqrt{2 * \text{Math.PI}}) * \exp((-1/2) * (x * x)))$ ALORS

DEBUT_SI

u PREND_LA_VALEUR u+1

TRACER_POINT (x, y)

FIN_SI

FIN_POUR

AFFICHER u

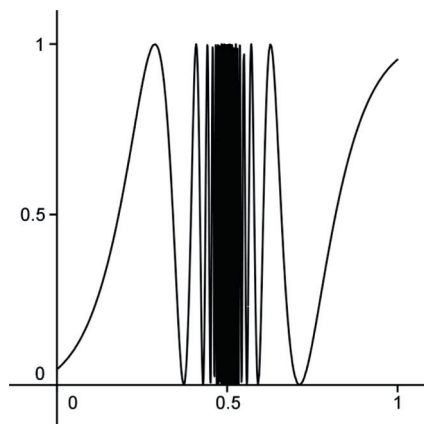
aire PREND_LA_VALEUR u/N

AFFICHER aire

FIN_ALGORITHME

3. On trouve une valeur proche de celle fournie par la calculatrice.

124. 1.



2. Non, f n'est pas définie en 0,5.

3.

```
VARIABLES
N EST_DU_TYPE NOMBRE
x EST_DU_TYPE NOMBRE
y EST_DU_TYPE NOMBRE
i EST_DU_TYPE NOMBRE
u EST_DU_TYPE NOMBRE
aire EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE N
  u PREND_LA_VALEUR 0
  POUR i ALLANT_DE 1 A N
    DEBUT_POUR
      x PREND_LA_VALEUR random()
      y PREND_LA_VALEUR random()
      SI (y <= (1/2)*(sin(1/(x-0.5))+1)) ALORS
        DEBUT_SI
          u PREND_LA_VALEUR u+1
          TRACER_POINT (x,y)
        FIN_SI
      FIN_POUR
    AFFICHER u
    aire PREND_LA_VALEUR u/N
  AFFICHER aire
FIN_ALGORITHME
```

4. Oui, car la courbe est symétrique par rapport au point A(0,5 ; 0,5).

TP Info (p. 368)

Pour cet exercice, le logiciel utilisé est « R ».

Partie A

1. La plus petite valeur est 5.

2. Si l'on fixe un entier N aussi grand que l'on peut, il suffit d'imaginer une alternance de N Pile et Face pour que le nombre de lancers atteigne N . Ce qui signifie que ce nombre de lancers peut prendre des valeurs aussi grandes que possible.

Partie B

1. On peut faire remarquer que la boucle du programme suivant pourrait tourner indéfiniment mais ce ne sera pas le cas et le pourquoi sera mis en évidence par la suite.

```
jeucorde = fonction(n)
{
  P = 0
  F = 0
  for (i in 1:n)
  {
    X = 0
    while ((X > -5) & (X < 5))
    {
      X = X + (-1)^(sample((0:1), 1))
    }
    if (X == 5) P = P + 1 else F = F + 1
  }
  print('la fréquence de victoire de P est égale à :')
  print(P/n)
  print('la fréquence de victoire de P est égale à :')
  print(F/n)
}
```

2. Il paraît logique que les deux équipes aient la même probabilité de gagner.

Partie C

1. On s'attend à ce que les élèves répondent NON à cette question. L'objectif est alors de leur faire comprendre que si l'on entend par prévoir : « émettre une hypothèse très probable », alors, on pourra peut-être donner une réponse à cette question sous la forme d'un intervalle de confiance (leur donner l'exemple des sondages).

2.

```
jeucordeC2 = fonction(n)
{
  for (i in 1:n)
  {
    X = 0
    L = 0
    while ((X>-5) & (X<5))
    {
      X = X + (-1)^(sample((0:1),1))
      L = L + 1
    }
    print(L)
  }
}
```

3. Sur 50 échantillons, très peu ont un nombre de lancers supérieur à 100.

4. On adapte le programme précédent afin qu'il calcule les fréquences demandées :

```
jeucordeC4 = fonction(n)
{
  c = 0
  for (i in 1:n)
  {
    X = 0
    L = 0
    while ((X>-5) & (X<5))
    {
      X = X + (-1)^(sample((0:1),1))
      L = L + 1
    }
    if (L>=100) c = c+1
  }
  print(c/n)
}
```

On remarque que moins de 1 % des parties se terminent avec un nombre de lancers supérieur ou égal à 100.

Partie D

1.

```
jeucordeD1 = fonction(n)
{
  M = 0
  R = 0
  for (i in 1:n)
  {
    X = 0
    L = 0
    while ((X>-5) & (X<5))
    {
      X = X + (-1)^(sample((0:1),1))
      L = L + 1
    }
    M = (M*(i-1)+L)/i
    R = c(R,M)
  }
  return(R)
}
```

La moyenne semble tendre vers 25.

2.

```
jeucordeD2 = fonction(n)
{
  M = 0
  R = 0
  for (i in 1:n)
  {
    X = 0
    L = 0
    while ((X>-5) & (X<5))
    {
      X = X + (-1)^(sample((0:1),1))
      L = L + 1
    }
    M = M + L
  }
  return(M/n)
}
```

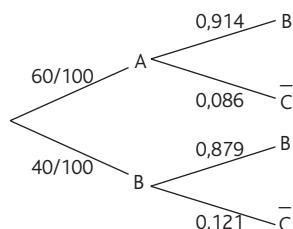
```
loidemoyenne = fonction(n1,n2)
{
  M = 0
  R = 0
  for (i in 1:n2)
  {
    M = jeucordeD2(n1)
    R = c(R,M)
  }
  return(hist(R))
}
```

Sur les pas du supérieur (p. 369)

I. A. 1. Comme on assimile le tirage à un tirage avec remise, chaque tirage est indépendant donc on peut associer la loi binomiale avec $n = 10$ et $p = 0,1$ (succès).

$$\begin{aligned} 2. P &= P(X \geq 8) \\ &= P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10). \\ &= \binom{10}{8} 0,9^8 0,1^2 + \binom{10}{9} 0,9^9 0,1 + \binom{10}{10} 0,9^{10}. \end{aligned}$$

B.



$$\begin{aligned} 1. P(A) &= 0,6 & P(B) &= 0,4 (= 1 - P(A)) \\ P_A(C) &= 0,914 & P_B(C) &= 0,879. \end{aligned}$$

$$2. P(C \cap A) = P(A) \times P_A(C) = 0,6 \times 0,914 \approx 0,548$$

$$P(C \cap B) = P(B) \times P_B(C) = 0,4 \times 0,879 \approx 0,352.$$

$$\begin{aligned} 3. P((C \cap A) \cup (C \cap B)) &= P(C \cap A) + P(C \cap B) - P((C \cap A) \cap (C \cap B)) \\ &= P(C \cap A) + P(C \cap B) - P(\emptyset) = 0 \\ &= 0,9. \end{aligned}$$

II. 1. A. Oui : $P(X \geq 1) = \frac{1}{2} P(X \geq 0) = \frac{1}{2}.$

B. Faux : $P(X \geq 2) = \frac{1}{2} P(X \geq 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$

C. Faux : $P(X \leq 2) = 0,75.$

D. Vrai : $P_{(X \geq 1)}(X \geq 2) = \frac{P(X \geq 1) \cap (X \geq 2)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X \geq 2)}{P(X \geq 1)} = \frac{0,25}{0,5} = 0,5.$

E. Oui :

$$P_{(X \geq 1)}(X \geq 4t) = \frac{P(X \geq 1+t) \cap (X \geq t)}{P(X \geq t)} = \frac{P(X \geq 1+t)}{P(X \geq t)} = \frac{\frac{1}{2} P(X \geq t)}{P(X \geq t)} = \frac{1}{2}.$$

2. A. Faux : $\int_2^1 2x^2 dx = \left[\frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \neq 1.$

B. Vrai : $\int_0^1 3x^2 dx = [x^3]_0^1 = 1.$

C. Vrai : $P(X \leq 0,5) = \int_0^{0,5} f(x) dx$
 $P(X \leq 0,5) = [x^3]_0^{0,5}$
 $P(X \leq 0,5) = 0,5^3 \leq 0,5$

D. Vrai $\left. \begin{array}{l} E(X) = \int_0^1 3x^3 dx = \left[\frac{3x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{4}. \end{array} \right\}$

E. Faux

3. A. Faux : $P(A \cap T) = 0,1$; $P(A) = 0,3$; $P(T) = 0,2$ donc $P(A) \times P(T) = 0,06 \neq P(A \cap T).$

B. Faux $P(A \cap T) = 0,1 \neq 0.$

C. Oui $\left. \begin{array}{l} P_T(A) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)} = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2}. \end{array} \right\}$

D. Faux

E. Faux

8

Loi normale et estimation

Programme officiel

Contenus	Capacités attendues
Loi normale entrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.	Connaître la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et sa représentation graphique.
Théorème de Moivre Laplace (admis).	- Démontrer que pour $\alpha \in]0, 1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$ lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. - Connaître les valeurs approchées $u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$.
Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ d'espérance μ et d'écart-type σ .	- Utiliser une calculatrice ou un tableur pour calculer une probabilité dans le cadre d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. - Connaître une valeur approchée de la probabilité des événements suivants : $\{X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]\}$, $\{X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]\}$ et $\{X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]\}$, lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Intervalle de fluctuation	- Démontrer que si la variable aléatoire X_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$, alors, pour tout α dans $]0, 1[$ on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha$ où I_n désigne l'intervalle $\left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$. - Connaître l'intervalle de fluctuation asymptotique (*) au seuil de 95 % : $\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ où p désigne la proportion dans la population.
Estimation Intervalle de confiance (*).	Estimer par intervalle une proportion inconnue à partir d'un échantillon.
Niveau de confiance.	Déterminer une taille d'échantillon suffisante pour obtenir, avec une précision donnée, une estimation d'une proportion au niveau de confiance 0,95.

Découverte (p. 372-373)

1. Un calcul impossible

1. $p_i = P(X_n = i) = \binom{n}{i} 0,5^i (1 - 0,5)^{n-i} = \binom{n}{i} 0,5^n = \binom{n}{i} 2^{-n}$.

2. Pour $n = 10\,000$, $E(X_n) = 10\,000 \times 0,5 = 5\,000$ et $\sigma_n = \sqrt{10\,000 \times 0,5 \times 0,5} = 100 \times 0,5 = 50$. Le résultat provient donc du fait que $[E(X_n) - 2\sigma_n; E(X_n) + 2\sigma_n] = [4\,900; 5\,100]$.

3.
$$P(4\,900 \leq X_n \leq 5\,100) = \sum_{i=4\,900}^{5\,100} p_i = \sum_{i=4\,900}^{5\,100} \binom{10\,000}{i} 2^{-10\,000} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10\,000} \sum_{i=4\,900}^{5\,100} \binom{10\,000}{i}$$

4. Le calcul de $\binom{10\,000}{4\,900}$ est impossible à effectuer pour une calculatrice. Il en est donc de même pour le calcul de $P(X_n \in [E(X_n) - 2\sigma_n; E(X_n) + 2\sigma_n])$ lorsque $n = 10\,000$.

2. Vers une approximation

1. $X_n \in [E(X_n) - 2\sigma_n; E(X_n) + 2\sigma_n] \Leftrightarrow -2 \leq \frac{X_n - E(X_n)}{\sigma_n} \leq 2$
 $\Leftrightarrow -2 \leq Z_n \leq 2$ par définition de Z_n .

2. X_n peut prendre toutes les valeurs i pour i entier compris entre 0 et n . Donc Z_n peut prendre toutes les valeurs $\frac{i - E(X_n)}{\sigma_n}$ pour i entier compris entre 0 et n . Or $E(X_n) = n \times 0,5 = \frac{n}{2}$ et $\sigma_n = \sqrt{n \times 0,5 \times 0,5} = \frac{\sqrt{n}}{2}$. Ainsi les valeurs prises par Z_n sont $\frac{i - E(X_n)}{\sigma_n} = \frac{i - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} = z_i$ pour tout i entier compris entre 0 et n .

3. D'après la définition de Z_n et la relation définissant z_i ci-dessus :

$$P(Z_n = z_i) = P\left(\frac{X_n - E(X_n)}{\sigma_n} = \frac{i - E(X_n)}{\sigma_n}\right) = P(X_n = i) = p_i.$$

4. et 5. En suivant les indications, on obtient des représentations telles que celle de l'énoncé. On observe que la courbe de $\frac{f}{\sigma_n}$ passe relativement près des points $(z_i; p_i)$, et ce d'autant plus que n est grand.

3. Utiliser la fonction de Gauss pour approcher la loi de X_n

1. L'écart entre z_i et z_{i+1} vaut :

$$|z_{i+1} - z_i| = \left| \frac{2(i+1) - n}{\sqrt{n}} - \frac{2i - n}{\sqrt{n}} \right| = \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

2. La base de chacun des rectangles est de longueur l'écart précédent, soit $\frac{2}{\sqrt{n}}$. La hauteur des rectangles varie de p_j à p_{k-1} . Ainsi l'aire totale est $\mathcal{A} = \sum_{i=j}^{k-1} \frac{2}{\sqrt{n}} p_i = \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{i=j}^{k-1} p_i$. Par ailleurs

$$P(z_j \leq Z_n < z_k) = \sum_{i=j}^{k-1} P(Z_n = z_i) = \sum_{i=j}^{k-1} p_i.$$

$$\text{Donc } \mathcal{A} = \frac{2}{\sqrt{n}} P(z_j \leq Z_n < z_k).$$

3. Géométriquement, lorsque n est grand, on observe que l'aire des rectangles est approximativement égale à l'aire située entre la courbe de $\frac{f}{\sigma_n}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = z_j$ et $x = z_k$.

$$\text{Donc } \mathcal{A} \approx \int_{z_j}^{z_k} \frac{f(x)}{\sigma_n} dx.$$

4. D'après 2. et 3., on obtient donc $\frac{2}{\sqrt{n}} P(z_j \leq Z_n < z_k) \approx \int_{z_j}^{z_k} \frac{f(x)}{\sigma_n} dx$.

$$\text{Or } \sigma_n = \sqrt{n \times 0,5 \times 0,5} = \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Donc si n est suffisamment grand, on peut conjecturer que $P(z_j \leq Z_n < z_k) \approx \int_{z_j}^{z_k} f(x) dx$.

5. $P(X_n \in [E(X_n) - 2\sigma_n; E(X_n) + 2\sigma_n]) = P(-2 \leq Z_n \leq 2)$.

D'après la conjecture précédente $P(-2 \leq Z_n \leq 2) \approx \int_{-2}^2 f(x) dx$ pour les grandes valeurs de n . On obtient à l'aide d'une calculatrice

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx 0,95, \text{ donc :}$$

$$P(X_n \in [E(X_n) - 2\sigma_n; E(X_n) + 2\sigma_n]) \approx 0,95.$$

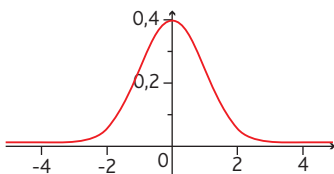
Exercices (p. 394)

1. à 38. Corrigés dans le manuel.

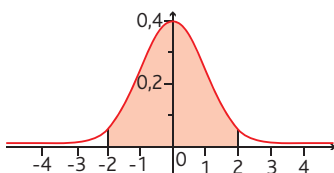
1. La loi normale centrée réduite

39. 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

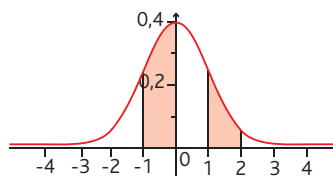
2.



3.



4.



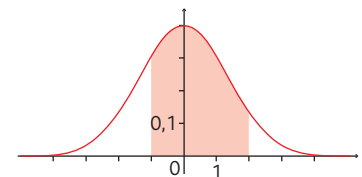
40. et 41. Corrigés dans le manuel.

42. 1. $I(1) = 0,683$ à 10^{-3} près ;
 $I(2) = 0,954$ à 10^{-3} près ; $I(3) = 0,997$ à 10^{-3} près ;
 $I(5) = 1$ à 10^{-3} près ;
 $I(10) = 1$ à 10^{-3} près.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = 1$.

3. La fonction f est positive, continue et $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = 1$, il s'agit bien d'une densité de probabilité.

43. 1. et 2.



44. 1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$2. f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = f(x).$$

3. $P(X \leq -u) = P(X \geq u)$.

$f(x)$ étant paire, l'aire entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = u$ et $x = a$ avec a tendant vers $+\infty$ est égale à l'aire entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -u$ et $x = -a$.

4. D'après 3. $P(X \leq 0) = P(X \geq 0)$.

Par ailleurs :

$$P(X \leq 0) = 1 - P(X > 0) = 1 - P(X \geq 0).$$

D'où $P(X \geq 0) = 1 - P(X \geq 0)$ donc

$$P(X \geq 0) = 0,5.$$

45. 1. $G'(x) = (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}.$

$$h'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} = G'(x).$$

2. $G'(x) = h'(x).$

$$\int_0^x G'(x) dx = \int_0^x h'(x) dx.$$

$$G(x) - G(0) = h(x) - h(0) \text{ or } G(0) = h(0) = 0.$$

$$G(x) = h(x).$$

3. $\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_0^x t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = h(x).$

$$\int_0^x t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_0^x \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt - \frac{h(x)}{\sqrt{2\pi}}.$$

$$\int_0^x t^2 f(t) dt = \int_0^x f(t) dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h(x).$$

4. $E(X) = 0.$

$$E(X^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 t^2 f(t) dt + \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y t^2 f(t) dt.$$

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2)$$

$$= \int_{-\infty}^0 f(t) dt - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h(x) + \int_0^{+\infty} f(t) dt - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h(x)$$

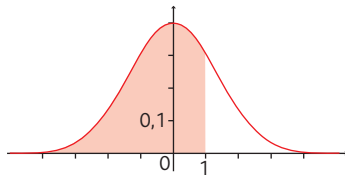
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1 \text{ car } f \text{ est la densité de probabilité de } X.$$

46. 1. $P(1 < X \leq 2) = \int_1^2 f(t) dt.$

2. a. $\int_1^2 f(t) dt \approx 0,1359$ à 10^{-4} près.

b. $P(1 < X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X < 1) \approx 0,1359$ à 10^{-4} près.

47. 1.



2. $P(X \leq 0) = 0,5.$

3. Géométriquement :

$$P(X < 1) = P(X \leq 0) + P(0 < X < 1).$$

4. $P(0 < X < 1) = 0,3416$ à 10^{-4} près.

$$P(X < 1) = 0,5 + 0,3413 = 0,8413 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

48. 1. $P(0 \leq X \leq 1) = 0,3413$ à 10^{-4} près.

2. $P(-2 \leq X \leq 0,3) = 0,5952$ à 10^{-4} près.

3. $P(X \geq 1) = P(X \leq -1) = 0,1587$ à 10^{-4} près.

4. $P(X < -0,5) = 1 - P(X \leq 0,5) = 0,3085$ à 10^{-4} près.

49. 1. $P(X \leq 1) = 0,84.$

2. $P(X > 1) = 0,16.$

3. $P(X \leq -1) = 0,16.$

4. $P(0 \leq X \leq 1) = P(X \leq 1) - P(X \leq 0) = 0,84 - 0,5 = 0,34.$

50. 1. $P((X \leq 1) \cup (X > 2)) = 0,84 + 0,02 = 0,86.$

2. $P((X \leq 1) \cap (X > 2)) = 0.$

3. $P((X \leq 1) \cap (X \leq 2)) = P(X \leq 1) = 0,84.$

4. $P((X > 1) \cup (X \leq 2)) = 1.$

5. $P((X < -2) \cup (X > 1)) = 0,02 + 0,16 = 0,18.$

6. $P(1 < X \leq 2) = 0,98 - 0,84 = 0,14.$

7. $P(-2 < X \leq 1) = P(X \leq 1) - P(X \leq -2) = 0,84 - 0,02 = 0,82.$

51. 1. $P(X < x) = 0,5$ pour $x = 0.$

2. $P(X > x) = 0,5$ pour $x = 0.$

3. $P(X = 0) = 0.$

52. Corrigé dans le manuel.

53. 1. $u = 1,96$ (cours).

2. À l'aide d'une calculatrice on trouve $v = 1,64$ à 10^{-2} près.

3. $I = [-1,64; +\infty[$ (cours).

4. Il y en a une infinité, par exemple pour $\alpha \in]0,45; 0,5[$, tous les intervalles $[a_\alpha; b_\alpha]$ avec a_α un réel négatif vérifiant $P(a_\alpha < X < 0) = \alpha$ et b_α un réel positif vérifiant $P(0 < X < b_\alpha) = 0,95 - \alpha.$

2. La loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

54. à 56. Corrigés dans le manuel.

57. 1. $E(X) = 32, V(X) = 49,$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 7.$$

2. $P(30 \leq X \leq 40) = 0,4859$ à 10^{-4} près.

3. $P(X < 30) = 0,3875$ à 10^{-4} près.

4. $P(X > 40) = 1 - P(X \leq 30) - P(30 \leq X \leq 40) = 1 - 0,4859 - 0,3875 = 0,1266.$

58. 1. $E(X) = 10, V(X) = 9,$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 3.$$

2. $P(X \leq 0) = 0,0004$ à 10^{-4} près.

3.

$$P((X \leq 5) \cup (X > 12)) = 0,0478 + (0,2525) = 0,3003 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

59. $P(|X| > 3) = P((X < -3) \cup (X > 3)).$

1. $\sigma = 1; P((X < -3) \cup (X > 3)) = 0,0013 + 0,0018 = 0,0026.$

2. $\sigma = 2; P((X < -3) \cup (X > 3)) = 2 \times 0,0668 = 0,1336.$

3. $\sigma = 3; P((X < -3) \cup (X > 3)) = 2 \times 0,1587 = 0,3174.$

60. 1. $P(6 < X < 8) = P\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} < Z < \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$

$$P(X < 7) = P(Z < 0);$$

$$P((X < 5) \cup (X > 9)) = P((Z < -\sqrt{2}) \cup (Z > \sqrt{2})).$$

2. $P(6 < X < 8) = 0,5204$; à 10^{-4} près.

$$P(X < 7) = 0,5;$$

$$P((X < 5) \cup (X > 9)) = 0,0786 + 0,0789 = 0,1572 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

61. $X < \mu \Leftrightarrow X - \mu < 0 \Leftrightarrow \frac{X - \mu}{\sigma} < 0.$

$$P(X < \mu) = P(Z < 0) \text{ avec } Z \text{ qui suit } \mathcal{N}(0; 1).$$

$$P(X < \mu) = 0,5.$$

62. $X > \mu \Leftrightarrow X - \mu > 0 \Leftrightarrow \frac{X - \mu}{\sigma} > 0.$

$$P(X > \mu) = P(Z > 0) \text{ avec } Z \text{ qui suit } \mathcal{N}(0; 1).$$

$$P(X > \mu) = 0,5.$$

63. 1. $Z < 1 \Leftrightarrow \frac{X - 8}{2} < 1 \Leftrightarrow X < 10;$

$$P(X < 10) = P(Z < 1) = 0,84.$$

2. $X \geq 0 \Leftrightarrow X + 5 \geq 5 \Leftrightarrow \frac{X + 5}{\sigma} \geq 1 \Leftrightarrow Z \geq 1;$

$$P(X \geq 0) = 1 - P(Z < 1) = 0,16.$$

3. $X < 0 \Leftrightarrow X - 5 < -5 \Leftrightarrow \frac{X - 5}{5} < -1 \Leftrightarrow Z < -1;$

$$P(X < 0) = P(Z < -1) = 1 - P(Z \leq 1) = 0,16.$$

4. $1 < X < 5 \Leftrightarrow 1 - 5 < X - 5 < 0 \Leftrightarrow -4 < X - 5 < 0 \Leftrightarrow -1 < \frac{X - 5}{4} < 0.$

$$P(1 < X < 5) = P(-1 < Z < 0) = 0,5 - 0,16 = 0,34.$$

64. 1. $X \leq x \Leftrightarrow X - 3 \leq x - 3;$

$$\Leftrightarrow \frac{X - 3}{2} \leq \frac{x - 3}{2} \Leftrightarrow Z \leq \frac{x - 3}{2}.$$

avec Z qui suit $\mathcal{N}(0; 1).$

$$P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x - 3}{2}\right).$$

2. $P\left(Z \leq \frac{x - 3}{2}\right) = 0,95 \Leftrightarrow \frac{x - 3}{2} = 1,64$
 $\Leftrightarrow x = 2 \times 1,64 + 3$
 $\Leftrightarrow x = 6,3.$

65. 1. $X \leq x \Leftrightarrow \frac{X + 4}{\sqrt{10}} \leq \frac{x + 4}{\sqrt{10}}.$

Or $\frac{X + 4}{\sqrt{10}}$ suit la loi normale centrée réduite. Donc $P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x + 4}{\sqrt{10}}\right)$

où Z est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

2. Le réel positif u vérifiant

$$P(Z \leq u) = 0,95 \text{ vaut } u = 1,64 \text{ à } 10^{-2}$$

près. Donc $P\left(Z \leq \frac{x+4}{\sqrt{10}}\right) = 0,95$ ssi $\frac{x+4}{\sqrt{10}} = 1,64$, soit $x = 1,19$ à 10^{-2} près.

66. 1. $x = 21,68$ à 10^{-2} près.

2. $x = 18,32$ à 10^{-2} près.

3. $P(-x \leq X - 20 \leq x) = P\left(\frac{-x}{2} \leq Z \leq \frac{x}{2}\right)$ où Z est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

$$\text{Or } P\left(\frac{-x}{2} \leq Z \leq \frac{x}{2}\right) = P\left(Z \leq \frac{x}{2}\right) - P\left(Z \leq -\frac{x}{2}\right) = 2P\left(Z \leq \frac{x}{2}\right) - 1.$$

Donc $P(-x \leq X - 20 \leq x) = 0,8$

ssi $P\left(Z \leq \frac{x}{2}\right) = 0,9$ ssi $\frac{x}{2} = 1,28$ ssi $x = 2,56$ à 10^{-2} près.

67. 1. $P(3-x \leq X \leq 3+x) = 0,95$ ssi $P\left(\frac{-x}{2} \leq Z \leq \frac{x}{2}\right) = 0,95$ où Z est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Donc $\frac{x}{2} = 1,96$ et $x = 3,92$ à 10^{-2} près.

$$\begin{aligned} \mathbf{2.} \quad P(|X - 3| > x) &= P(|Z| > \frac{x}{2}) \\ &= 1 - P\left(-\frac{x}{2} \leq Z \leq \frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Géométriquement, il est clair que $x \mapsto P\left(-\frac{x}{2} \leq Z \leq \frac{x}{2}\right)$ est croissante et donc $x \mapsto P(|X - 3| > x)$ est décroissante. On peut également étudier analytiquement la fonction $x \mapsto 1 - \int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} f(t) dt$ pour

s'en convaincre (où f désigne la densité de la loi normale centrée réduite). L'ensemble demandé est donc l'intervalle $]x_0; +\infty[$ où x_0 est le réel positif vérifiant $P(|X - 3| > x_0) = 0,01$, soit

$$\begin{aligned} 1 - P\left(-\frac{x_0}{2} \leq Z \leq \frac{x_0}{2}\right) &= 0,01 \\ \Leftrightarrow P\left(-\frac{x_0}{2} \leq Z \leq \frac{x_0}{2}\right) &= 0,99 \\ \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{x_0}{2}\right) &= 0,995 \\ \Leftrightarrow x_0 &= 5,16 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.} \end{aligned}$$

68. 1. $X \sim \mathcal{N}(100; 100)$.

$P(X > 120) = 0,0228$ à 10^{-4} près.

2. $P(100 - a \leq X \leq 100 + a) = 0,99$

$$\Leftrightarrow P\left(-\frac{a}{10} \leq Z \leq \frac{a}{10}\right) = 0,99$$

où Z est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. On obtient $\frac{a}{10} = 2,58$ soit $a = 25,8$ à 10^{-1} près.

69. Le document ressource du ministère contient des informations sur l'installation et l'utilisation du logiciel **R** et de son interface **R Commander**. Pour rappel, l'installation se fait à partir du site <http://cran.r-project.org/>. Si suite à la commande **library(Rcmdr)**, le package semble absent, il suffit de l'installer en allant dans le menu **Packages/Installer le(s) package(s)...**

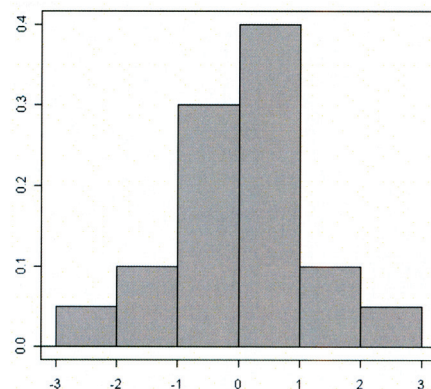
1. Il suffit de suivre l'instruction et d'entrer les valeurs à la main.

2. La moyenne de l'échantillon vaut 49,946 5 et son écart-type 0,973 038.

3. On peut approcher σ par l'écart-type observé sur l'échantillon soit 0,973 038.

4. et 5. En suivant les indications, on obtient le tableau et l'histogramme suivants :

	terreau	terreau normalisé
1	50.46	0.52772862
2	50.11	0.16803044
3	49.75	-0.20194484
4	51.10	1.18546244
5	47.35	-2.66844666
6	49.77	-0.18139065
7	50.03	0.08581371
8	48.95	-1.02411211
9	51.06	1.14435407
10	49.68	-0.27388447
11	50.16	0.21941589
12	52.10	2.21317153
13	49.74	-0.21222193
14	49.35	-0.61302847
15	50.06	0.11664498
16	49.41	-0.55136593
17	50.01	0.06525953
18	48.86	-1.11660593
19	50.28	0.34274098
20	50.70	0.77437880



6. On calcule $P(X > 52)$ à l'aide d'une calculatrice ou à l'aide du menu indiqué dans **R Commander** (en cochant « aire à droite »). On obtient $P(X > 52) = 0,023$ à 10^{-3} près.

$$\mathbf{7.} \quad P(X > 52) \leq 0,01 \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{2}{\sigma}\right) \leq 0,01$$

où Z est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Il faut et il suffit donc que $\frac{2}{\sigma} \geq 2,33 \Leftrightarrow \sigma \leq 0,86$ à 10^{-2} près.

3. Ajuster les paramètres d'une loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

70. et 71. Corrigés dans le manuel.

72. 1. $P(|X - \mu| < \sigma) = P(|Z| < 1)$ où Z est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Donc $P(|X - \mu| < \sigma) = 0,683$ à 10^{-3} près.

2. $P(|X - \mu| < 2\sigma) = P(|Z| < 2) = 0,954$ à 10^{-3} près.

3. $P(|X - \mu| < 3\sigma) = P(|Z| < 3) = 0,997$ à 10^{-3} près.

4. $P(|X - 100| < 10) = P\left(|Z| < \frac{10}{\sigma}\right)$ donc $\frac{10}{\sigma} = 1,96$ et $\sigma = 5,10$ à 10^{-2} près.

$$\begin{aligned} \mathbf{73. 1.} \quad X < 50 &\Leftrightarrow X - 30 < 20 \\ &\Leftrightarrow \frac{X - 30}{\sigma} < \frac{20}{\sigma}; \end{aligned}$$

$$P(X < 50) = P\left(Z < \frac{20}{\sigma}\right).$$

2. $P(Z < x) = 0,9$ $x = 1,28$ à 10^{-2} près.

$$\mathbf{3.} \quad \frac{20}{\sigma} = 1,28 \Leftrightarrow \sigma = \frac{20}{1,28} = 15,625.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{74. 1.} \quad -10 < X < 10 &\Leftrightarrow -10 < X - 0 < 10 \\ &\Leftrightarrow \frac{-10}{\sigma} < Z < \frac{10}{\sigma}. \end{aligned}$$

2. $x = 1,9600$ à 10^{-4} près.

$$\mathbf{3.} \quad \frac{10}{\sigma} = 1,9600 \Leftrightarrow \sigma = \frac{10}{1,96} = 5,1.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{75. 1.} \quad |X + 9| < 4 &\Leftrightarrow -13 < X < -5 \\ \Leftrightarrow -4 < X + 9 < 4 &\Leftrightarrow \frac{-4}{\sigma} < \frac{X + 9}{\sigma} < \frac{4}{\sigma} \\ \Leftrightarrow \frac{-4}{\sigma} < Z < \frac{4}{\sigma} & \cdot P(|X + 9| < 4) = 0,95 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{-4}{\sigma} < Z < \frac{4}{\sigma}\right) = 0,95.$$

$$\frac{4}{\sigma} = 1,96 \Leftrightarrow \sigma = \frac{4}{1,96} = 2,04 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

2. $X < 0$

$$X + 9 < 9$$

$$\frac{X + 9}{\sigma} < \frac{9}{\sigma}$$

$$Z < \frac{9}{\sigma}$$

$$P(X < 0) = 0,95 \Leftrightarrow P\left(Z < \frac{9}{\sigma}\right) = 0,95;$$

$$\frac{9}{\sigma} = 1,65$$

$$\sigma = \frac{9}{1,65} = 5,45 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

$$3. P(X \geq -10) = P\left(Z \geq -\frac{1}{\sigma}\right) \\ = 1 - P\left(Z < -\frac{1}{\sigma}\right).$$

Donc σ est tel que $P\left(Z < -\frac{1}{\sigma}\right) = 0,05$
soit $-\frac{1}{\sigma} = -1,64$ à 10^{-2}
et $\sigma = 0,61$ à 10^{-2} près.

$$76. 1. X < 100 \Leftrightarrow X - \mu < 100 - \mu \\ \frac{X - \mu}{3} < \frac{100 - \mu}{3} \Leftrightarrow Z < \frac{100 - \mu}{3}; \\ P(X < 100) = P\left(Z < \frac{100 - \mu}{3}\right).$$

$$2. P(Z < x) = 0,05 \Leftrightarrow x = 1,6449 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

$$3. \frac{100 - \mu}{3} = -1,6449 \\ \Leftrightarrow \mu = -(-1,6449 \times 3 - 100) \\ = 104,9347 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

$$77. 1. P(535 \leq X \leq 545) = P(X \leq 545) - P(X \leq 535) \\ = 0,683 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

$$2. X \leq 550 \Leftrightarrow \frac{X - m}{5} = \frac{550 - m}{5}. \\ P(X \leq 550) = 0,95 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{550 - m}{5}\right) = 0,95 \\ \frac{550 - m}{5} = 1,6449 \Leftrightarrow m = 550 - 5 \times 1,6449 \\ \Leftrightarrow m = 541,776$$

soit 542 arrondie à l'unité.

$$78. 1. Z = X - \mu \text{ suit une loi normale } \mathcal{N}(0; 1).$$

$$2. 99 \leq X \leq 101 \\ 99 - \mu \leq Z \leq 101 - \mu \\ g(\mu) = P(99 - \mu \leq Z \leq 101 - \mu).$$

$$3. f'(x) = f(x).$$

$$4. g(\mu) = F(101 - \mu) - F(99 - \mu).$$

$$5. g'(\mu) = -f(101 - \mu) + f(99 - \mu) \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{(99 - \mu)^2}{2}} - e^{-\frac{(101 - \mu)^2}{2}} \right).$$

$$6. g'(\mu) \geq 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{(99 - \mu)^2}{2}} \geq e^{-\frac{(101 - \mu)^2}{2}} \\ \Leftrightarrow -\frac{(99 - \mu)^2}{2} \geq -\frac{(101 - \mu)^2}{2} \Leftrightarrow \mu \geq 100.$$

On obtient donc le tableau de variations suivant :

		100	
$g'(\mu)$	+	0	-
$g(\mu)$			

$$7. \mu = 100 \text{ maximise} \\ P(99 \leq X \leq 101) = 0,6827 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

$$79. 1. P(1,35 \leq X \leq 1,65) \text{ avec } X \text{ qui suit } \mathcal{N}(1,5; 4,9 \times 10^{-3}). \\ P(1,35 \leq X \leq 1,65) = 0,9679 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

$$2. 1,35 \leq X_1 \leq 1,65 \Leftrightarrow -0,15 \leq X_1 - 1,5 \leq 0,15 \\ \Leftrightarrow \frac{-0,15}{\sigma} \leq \frac{X_1 - 1,5}{\sigma} \leq \frac{0,15}{\sigma} \\ \Leftrightarrow \frac{-0,15}{\sigma} \leq Z \leq \frac{0,15}{\sigma}.$$

$$P\left(\frac{-0,15}{\sigma} \leq Z \leq \frac{0,15}{\sigma}\right) = 0,99 \\ \frac{0,15}{\sigma} = 2,58 \text{ à } 10^{-2} \text{ près; } \sigma = 0,058.$$

$$80. 1. P(245 \leq V \leq 255) \text{ avec } V \text{ qui suit } \mathcal{N}(250; 16). \\ P(245 \leq V \leq 255) = 0,7887 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

$$2. 245 \leq V \leq 255 \\ \Leftrightarrow 245 - 250 \leq V - 250 \leq 255 - 250 \\ \Leftrightarrow \frac{-5}{\sigma} \leq \frac{V - 250}{\sigma} \leq \frac{5}{\sigma} \\ \Leftrightarrow \frac{-5}{\sigma} \leq Z \leq \frac{5}{\sigma}.$$

$$P\left(\frac{-5}{\sigma} \leq Z \leq \frac{5}{\sigma}\right) = 0,95 \\ \frac{5}{\sigma} = 1,96 \text{ à } 10^{-2} \text{ près} \\ \sigma = 2,55.$$

$$81. 1. -3,66 < X < 3,66 \Leftrightarrow \frac{-3,66}{\sigma} < \frac{X}{\sigma} < \frac{3,66}{\sigma} \\ \Leftrightarrow \frac{-3,66}{\sigma} < Z < \frac{3,66}{\sigma}.$$

$$P\left(\frac{-3,66}{\sigma} < Z < \frac{3,66}{\sigma}\right) = 0,95 \\ \Leftrightarrow \frac{3,66}{\sigma} = 1,96 \\ \Leftrightarrow \sigma = \frac{3,66}{1,96} = 1,87 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

$$2. \frac{3,66}{\sigma} = 2,5758 \\ \Leftrightarrow \sigma = \frac{3,66}{2,5758} = 1,42 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

$$3. P(X > 1) = P(X < -1) = 0,3 \text{ en mode amateur.}$$

La probabilité qu'il encaisse un but est donc de 0,7 en mode amateur.

$$P(X > 1) = P(X < -1) = 0,24 \text{ en mode pro.}$$

La probabilité qu'il encaisse un but est donc de 0,76 en mode pro.

$$4. P(-1 \leq X \leq 1) = 1 - 2 \times 0,3 = 0,4 \text{ en mode amateur.}$$

La probabilité qu'il encaisse un but est donc de 0,6 en mode amateur.

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 1 - 2 \times 0,24 = 0,52 \text{ en mode pro.}$$

La probabilité qu'il encaisse un but est donc de 0,48 en mode pro.

Daniel a donc intérêt à suivre le conseil de son ami.

$$82. 1. P(X \leq 40) = 1 - P(X > 40) \leq 1 - 0,95 = 0,05 \\ P(X \leq 60) \geq 0,999 \text{ (énoncé)}$$

$$2. \begin{cases} P\left(Z \leq \frac{40 - \mu}{\sigma}\right) \leq 0,05 \\ P\left(Z \leq \frac{60 - \mu}{\sigma}\right) \geq 0,999 \end{cases}$$

3. À l'aide d'une calculatrice :

$$\begin{cases} \frac{40 - \mu}{\sigma} \leq -1,64 \\ \frac{60 - \mu}{\sigma} \geq 3,09 \end{cases}$$

$$4. 40 - \mu \leq -1,64\sigma \quad \frac{60 - \mu}{\sigma} \geq 3,09 \\ -\mu \leq -1,64\sigma - 40 \quad 60 - \mu \geq 3,09\sigma \\ \mu \geq 1,64\sigma + 40 \quad -\mu \geq 3,09\sigma - 60 \\ \mu \leq 60 - 3,09\sigma$$

$$1,64\sigma + 40 \leq \mu \leq 60 - 3,09\sigma.$$

5. D'après l'encadrement de la question 4., il faut que :

$$60 - 3,09\sigma \geq 1,64\sigma + 40 \\ -4,73\sigma \geq -20$$

$$\sigma \leq \frac{20}{4,73} \\ \sigma \leq 4,23$$

d'où $\sigma_{\max} \approx 4,23$.

$$6. \text{ Pour } \sigma = \sigma_{\max} \\ 1,64\sigma + 40 = 60 - 3,09\sigma = \mu \\ \mu \approx 46,94.$$

4. Le théorème de Moivre-Laplace : approcher une loi binomiale par une loi normale

83. et 84. Corrigés dans le manuel.

$$85. 1. P(X = k) = \binom{36}{k} \times 0,2^k \times 0,8^{36-k}$$

$$2. E(X) = n \times p = 36 \times 0,2 = 7,2 \\ \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{5,76} = 2,4.$$

$$3. a. P\left(-1 \leq \frac{X - 7,2}{2,4} \leq 1\right) = P(4,8 \leq X \leq 9,6) \\ \approx 0,7055 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

$$b. P(20 < X \leq 36) \approx 2,65 \times 10^{-6}.$$

$$c. P(X \geq 72) \approx 0,56.$$

$$4. a. n = 36 \geq 30$$

$$n \times p = 7,2 \geq 5$$

$$n(1-p) = 28,8 \geq 5$$

Donc d'après le théorème de Moivre-Laplace

$$P\left(a < \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} \leq b\right) \approx P(a \leq Z \leq b),$$

où Z suit $\mathcal{N}(0; 1)$.

$$5. \text{ a. } P\left(-1 \leq \frac{X - 7,2}{2,4} \leq 1\right) \approx 0,6827 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

$$b. P(20 < X \leq 36) = P\left(5,33 < \frac{X - 7,2}{2,4} < 12\right) \approx 5 \times 10^{-8}$$

$$c. P(X \geq 7,2) \approx P\left(\frac{X - 7,2}{2,4} \geq 0\right) = 0,5.$$

$$86. 1. P(X = k) = \binom{64}{k} 0,1^k \times 0,9^{64-k}$$

$$2. E(X) = n \times p = 64 \times 0,1 = 6,4$$

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{5,76} = 2,4.$$

$$3. \text{ a. } P\left(-2 \leq \frac{X - 6,4}{2,4} \leq 0,5\right) = P(1,6 \leq X \leq 7,6) \approx 0,6826 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

$$b. P(4 \leq X \leq 10) = 0,8421 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

$$c. P(X \geq 6,4) = 0,4610 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

4. Les conditions permettant d'utiliser l'approximation de Moivre-Laplace sont réunies.

$$5. \text{ a. } P\left(-2 \leq \frac{X - 6,4}{2,4} \leq 0,5\right) \approx 0,6687 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

$$b. P(4 \leq X \leq 10) = P(-1 \leq Z \leq 1,5) \approx 0,7745 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

$$c. P(X \geq 6,4) = P(Z \geq 0) = 0,5 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

$$87. 1. E(X) = n \times p = 10,5;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} \approx 2,71.$$

$$2. \text{ a. } P(8 \leq X \leq 12) = 0,6403 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

$$b. P(X > 20) = 2,232 \times 10^{-4}.$$

$$c. P(X \leq 5) = 0,0269 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

$$3. Y = E(X) + Z\sigma(X)$$

$$a. P(8 \leq Y \leq 12) \approx P(-0,92 \leq Z \leq 0,55) = 0,53.$$

$$b. P(Y > 20) \approx P(Z > 2,76) \approx 2,9 \times 10^{-3}.$$

$$c. P(Y \leq 5) \approx P(Z \leq -2,03) \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

$$4. P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a - E(X)}{\sigma(X)} \leq \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} \leq \frac{b - E(X)}{\sigma(X)}\right) \approx P\left(\frac{a - E(X)}{\sigma(X)} \leq Z \leq \frac{b - E(X)}{\sigma(X)}\right)$$

d'après le théorème de Moivre-Laplace. La dernière approximation est justifiée par le fait que $n = 35$ et $p = 0,3$, ce qui valide les conditions $n \geq 30$, $np \geq 5$ et

$n(1-p) \geq 5$ pour l'application du théorème de Moivre-Laplace. On a enfin

$$P\left(\frac{a - E(X)}{\sigma(X)} \leq Z \leq \frac{b - E(X)}{\sigma(X)}\right) = P(a \leq Y \leq b)$$

ce qui conduit à

$$P(a \leq X \leq b) \approx P(a \leq Y \leq b).$$

$$88. 1. E(X) = n \times p.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}.$$

$$2. P\left(a < \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} < b\right) \approx P(a \leq Z \leq b)$$

où Z suit $\mathcal{N}(0; 1)$ aux conditions suivantes : $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

$$3. P(x \leq X \leq y) \approx P\left(\frac{x - E(X)}{\sigma(X)} \leq Z \leq \frac{y - E(X)}{\sigma(X)}\right).$$

$$4. \text{ a. } P(112 < X < 130)$$

$$\mathcal{B}(1000; 0,12)$$

$$E(X) = 120$$

$$\sigma(X) = \sqrt{120 \times (0,88)} \approx 10,28$$

$$P(112 < X < 130) \approx P(-0,78 \leq Z \leq 0,97) \approx 0,616.$$

$$b. P(53 < X < 59)$$

$$\mathcal{B}(365; 0,18)$$

$$E(X) = 65,7$$

$$\sigma(X) \approx 7,34$$

$$P(53 < X < 59) \approx P(-1,73 \leq Z \leq -0,91) \approx 0,14.$$

$$c. P(40 < X < 60)$$

$$\mathcal{B}(708; 0,05)$$

$$E(X) = 35,4$$

$$\sigma(X) \approx 5,8$$

$$P(40 < X < 60) \approx P(0,79 \leq Z \leq 4,24) \approx 0,215.$$

$$89. \mathcal{B}(70; 0,7)$$

$$1. P(45 \leq X \leq 55) = 0,8374 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

$$2. n \times p = 49 \geq 5 \quad n = 70 \geq 30$$

$$n(1-p) = 70 \times 0,3 = 21 \geq 5$$

$$3. E(X) = 49$$

$$\sigma(X) = \sqrt{49 \times 0,3} \approx 3,83$$

$$P(45 \leq X \leq 55) \approx P\left(\frac{45 - 49}{3,83} \leq Z \leq \frac{55 - 49}{3,83}\right) \approx P(-1 \leq Z \leq 1,57) \approx 0,7831 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

$$90. 1. P(X \geq 180) = 0,3867 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

$$2. P(X \geq 180) = \sum_{k=180}^{1760} \binom{1760}{k} 0,1^k 0,9^{1760-k}$$

3. La calculatrice renvoie une erreur : le calcul est hors de sa portée.

$$4. n = 1760 \geq 30 \quad n \times p = 176 \geq 5$$

$$n(1-p) = 1584 \geq 5$$

Les conditions sont réunies.

$$5. P(X \geq 180) \approx P(Z \geq 0,32) \approx 0,3745 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

$$E(X) = 176$$

$$\sigma(X) = \sqrt{176 \times (0,9)} \approx 12,59.$$

6. Les résultats de 5. et 1. ne sont pas tout à fait égaux, bien que proches. Cela signifie que la calculatrice n'utilise pas l'approximation de Moivre-Laplace pour effectuer le calcul.

$$91. \mathcal{B}(125; 0,3)$$

$$1. E(X) = 35,7$$

$$\sigma(X) = \sqrt{37,5 \times 0,7} \approx 5,12$$

$$2. n = 125 \geq 30 \quad n \times p = 37,5 \geq 5$$

$$n(1-p) = 125 \times 0,7 = 87,5 \geq 5$$

$$P(X > 35) \approx P\left(Z > \frac{35 - 37,5}{5,12}\right)$$

$$\approx P(Z > -0,49)$$

$$\approx 0,6879 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

92. Corrigé dans le manuel.

$$93. 1. E(X) = 24$$

$$\sigma(X) = \sqrt{24 \times 0,8} \approx 4,38$$

$$2. n = 120 \geq 30 \quad n \times p = 24 \geq 5$$

$$n(1-p) = 120 \times 0,8 = 96 \geq 5.$$

$$3. [-1,96; 1,96].$$

$$4. \frac{a}{\sigma(X)} = 1,96 \quad \text{et} \quad a = 8,76.$$

$$94. 1. \mathcal{B}(300; 0,03).$$

$$2. P(X = 4) \approx 0,0325;$$

$$P(X \leq 4) \approx 0,0524.$$

$$3. E(X) = n \times p = 300 \times 0,03 = 9;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{9 \times 0,97} \approx 2,95.$$

$$4. n = 300 \geq 30 \quad n \times p = 9 \geq 5$$

$$n(1-p) = 291 \geq 5.$$

$$5. P(X \leq 12) \approx P(Z < 1) \approx 0,84;$$

$$P(6 \leq X \leq 12) \approx P(-1 \leq Z \leq 1) \approx 0,68.$$

$$95. 1. \mathcal{B}(150; 0,4).$$

$$E(X) = 60;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{60 \times 0,6} = 6.$$

2. Théorème de Moivre-Laplace.

$$3. P(X \leq 72) \approx P(Z \leq 2) \approx 0,977$$

$$P(X \geq 69) \approx P(Z \geq 1,5) \approx 0,0668$$

$$P(69 \leq X \leq 72) \approx P(1,5 \leq Z \leq 2) \approx 0,044 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

$$96. \mathcal{B}(36; 0,2).$$

$$1. P(X = 0) = 3,245 \times 10^{-4}$$

$$2. P(X > 10) = 0,0889 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

3. $n = 36 \geq 30$ $np = 7,2 \geq 5$
 $n(1-p) = 28,8 \geq 5$.

4. D'après l'approximation de Moivre-Laplace,

$$P(X < 6) \approx P\left(Z < -\frac{1,2}{2,4}\right) = 0,31 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

5. $X \sim \mathcal{B}(36; p)$. On cherche p tel que $P(X < 6) \geq 0,5$.

$$\text{Or } P(X < 5) \approx P\left(Z < \frac{6-36p}{\sqrt{36p(1-p)}}\right)$$

d'après le théorème de Moivre-Laplace. Cette approximation est valable si $36p \geq 5 \Leftrightarrow p \geq 0,139$ et $36(1-p) \geq 5 \Leftrightarrow p \leq 0,861$. Suivant cette approximation, on cherche p tel que

$$P\left(Z < \frac{6-36p}{\sqrt{36p(1-p)}}\right) \geq 0,5 \text{ ce qui conduit}$$

$$\text{à } \frac{6-36p}{\sqrt{36p(1-p)}} \geq 0 \text{ ou de façon équiva-}$$

lente à $6-36p \geq 0$. On obtient donc $p \leq 0,17$. Il est à noter que pour cette valeur maximale de p l'approximation de Moivre-Laplace utilisée précédemment est légitime.

97. 1. $X \sim \mathcal{B}(1500; 0,9)$, $E(X) = 1350$ et $\sigma(X) = 11,62$.

2. Le calcul fait intervenir, au travers d'une somme, des coefficients binomiaux impossibles à calculer pour une calculatrice.

3. Ce choix est justifié par le théorème de Moivre-Laplace, que l'on peut appliquer ici car $n = 1500 \geq 30$, $np = 1350 \geq 5$ et $n(1-p) = 150 \geq 5$.

4. D'après 3.

$$P(X > 1340) \approx P\left(Z > \frac{1340-1350}{11,62}\right)$$

où Z désigne une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. On a

$$P\left(Z > \frac{1340-1350}{11,62}\right) = P(Z > -0,86) = 0,81$$

à 10^{-2} près.

5. Fluctuations d'une fréquence

98. et 99. Corrigés dans le manuel.

100. 1.

$$\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

à 95 %.

2. $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

101. 1.

$$\left[0,4 - 1,96 \frac{\sqrt{0,24}}{\sqrt{70}}; 0,4 + 1,96 \frac{\sqrt{0,24}}{\sqrt{70}}\right];$$

$[0,285; 0,515]$ à 10^{-3} près.

2. X peut prendre toutes les valeurs entières comprises entre 0 et 70 inclus.

3. $[0,285 \times 70; 0,515 \times 70]$

soit $[20; 36]$ à 95 %.

4. Il suffit de saisir sous **R** **rbinom(1,70,0.4)**. On obtient par exemple le nombre 29.

5. Pour l'exemple précédent, la réponse est oui.

6. Pour simuler 10 réalisations sous **R**, il suffit de saisir **rbinom(20,70,0.4)**. On obtient par exemple les valeurs 27, 18, 21, 25, 25, 30, 23, 29, 26, 32 : une d'elles n'appartient pas à l'intervalle calculé en 3.

7. Il devrait y avoir une proportion d'à peu près 5 % des valeurs en dehors de l'intervalle calculé en 3.

102. 1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

$$2. \left[p - 1,64 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,64 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

à 90 %.

$$\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

à 95 %.

$$\left[p - 2,58 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 2,58 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

à 99 %.

3. F appartient à

$$\left[p - 2 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 2 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \text{ lorsque}$$

$n \rightarrow +\infty$ avec une probabilité de 0,954 5 à 10^{-4} près.

4. F appartient à

$$\left[p - 3 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 3 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \text{ lorsque}$$

$n \rightarrow +\infty$ avec une probabilité de 0,997 3 à 10^{-4} près.

103. 1. $n = 60 \geq 30$; $n \times p = 24 \geq 5$; $n(1-p) = 36 \geq 5$.

2.

$$\left[0,4 - 1,96 \frac{\sqrt{0,24}}{\sqrt{60}}; 0,4 + 1,96 \frac{\sqrt{0,24}}{\sqrt{60}}\right]$$

$= [0,28; 0,52]$ à 95 %.

$$\left[0,4 - 2,58 \frac{\sqrt{0,24}}{\sqrt{60}}; 0,4 + 2,58 \frac{\sqrt{0,24}}{\sqrt{60}}\right]$$

$= [0,24; 0,56]$ à 99 %.

104. 1. $n = 43 \geq 30$; $np = 25,8 \geq 5$; $n(1-p) = 17,2 \geq 5$.

2.

$$\left[0,6 - 1,96 \frac{\sqrt{0,24}}{\sqrt{43}}; 0,6 + 1,96 \frac{\sqrt{0,24}}{\sqrt{43}}\right]$$

$= [0,45; 0,75]$ à 95 %.

3.

$$\left[0,6 - 2,58 \frac{\sqrt{0,24}}{\sqrt{43}}; 0,6 + 2,58 \frac{\sqrt{0,24}}{\sqrt{43}}\right]$$

$= [0,41; 0,79]$ à 99 %.

105. Corrigés dans le manuel.

106. 1. $n = 40 \geq 30$; $n \times p = 20,56 \geq 5$; $n(1-p) = 19,44 \geq 5$.

$$\left[0,514 - 1,96 \frac{\sqrt{0,2498}}{\sqrt{40}}; 0,514 + 1,96 \frac{\sqrt{0,2498}}{\sqrt{40}}\right]$$

$= [0,36; 0,67]$.

2. $\frac{16}{40} = 40$ %. On ne peut pas affirmer

qu'il y a dans cette classe une sous représentation des filles à 95 %.

3. Bonne question !

107. $n = 81 \geq 30$; $np = 41,31 \geq 5$; $n(1-p) = 39,69 \geq 5$.

1.

$$\left[0,51 - 1,96 \frac{\sqrt{0,2499}}{\sqrt{81}}; 0,51 + 1,96 \frac{\sqrt{0,2499}}{\sqrt{81}}\right];$$

à 95 %.

$[0,40; 0,62]$.

1. $\frac{17}{81} \times 100 \approx 21$ %. On peut donc affirmer

à 99 % que les admis d'origine socio-professionnelle « employés et ouvriers » sont sous représentés à l'ENA.

108. 1. $\mathcal{B}(n; 0,04)$.

$$2. \left[0,04 - 2,58 \frac{\sqrt{0,0384}}{\sqrt{n}}; 0,04 + 2,58 \frac{\sqrt{0,0384}}{\sqrt{n}}\right];$$

3.

$$\left[\left(0,04 - 2,58 \frac{\sqrt{0,0384}}{\sqrt{n}}\right)n; \left(0,04 + 2,58 \frac{\sqrt{0,0384}}{\sqrt{n}}\right)n\right]$$

4. En notant X le nombre de coupes abîmées, on cherche :

$$P(X < n_{\max}) = P\left(\frac{X - 0,04n}{\sqrt{0,0384n}} < \frac{n_{\max} - 0,04n}{\sqrt{0,0384n}}\right).$$

Or d'après la définition de $n_{\max}$, on

$$\text{obtient } \frac{n_{\max} - 0,04n}{\sqrt{0,0384}} = 2,58.$$

De plus, d'après l'approximation de Moivre-Laplace, si $n \geq 30$ et $0,04n \geq 5 \Leftrightarrow n \geq 125$ et $0,96n \geq 5 \Leftrightarrow n \geq 5,2$, autrement dit si $n \geq 125$,

$P\left(\frac{X - 0,04n}{\sqrt{0,0384n}} < 2,58\right) \approx P(Z < 2,58)$ où Z désigne une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

On obtient finalement $P(X < n_{\max}) \approx P(Z < 2,58) = 0,995$ à 10^{-3} près.

5. Il s'agit de résoudre $n - n_{\max} \geq 400$ soit $0,96n - 2,58\sqrt{0,0384n}\sqrt{n} - 400 \geq 0$. Le discriminant du polynôme en $\sqrt{n}$ à gauche de cette inégalité vaut $\Delta = 1\,536,256$. Ce polynôme admet donc deux racines dont une seule est positive (car $0,96 \times (-400) < 0$) : elle vaut 20,68. L'inégalité initiale est donc vérifiée si $n \geq 20,68^2$ c'est-à-dire $n \geq 428$.

109. 1. Soit X le nombre de spectateurs se rendant au spectacle. $X \sim \mathcal{B}(n; 0,9)$. La proportion de personnes se rendant au spectacle vaut $F = \frac{X}{n}$. Elle fluctue avec une probabilité asymptotique de 0,95 dans l'intervalle $\left[0,9 - 1,96\frac{\sqrt{0,09}}{\sqrt{n}}; 0,9 + 1,96\frac{\sqrt{0,09}}{\sqrt{n}}\right]$. Si $n = 200$, il vaut $[0,86; 0,94]$.

2. On cherche $n \geq 200$ tel que :

$$P(X \leq 200) = 0,95 \Leftrightarrow P\left(\frac{X - 0,9n}{0,3\sqrt{n}} \leq \frac{200 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}}\right) = 0,95.$$

D'après le théorème de Moivre-Laplace, si $n \geq 30$ et $0,9n \geq 5 \Leftrightarrow n \geq 5,56$ et $0,1n \geq 5 \Leftrightarrow n \geq 50$, autrement dit si $n \geq 50$ on a :

$$P\left(\frac{X - 0,9n}{0,3\sqrt{n}} \leq \frac{200 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}}\right) \approx P\left(Z \leq \frac{200 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}}\right)$$

où Z désigne une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. On cherche donc $n \geq 200$ tel que $P\left(Z \leq \frac{200 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}}\right) = 0,95$

$$\text{soit } \frac{200 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}} = 1,64 \quad \text{ou encore}$$

$0,9n + 0,492\sqrt{n} - 200 = 0$. La résolution de ce polynôme du second degré donne une seule racine positive $\sqrt{n} = 14,64$, soit $n = 214,33$. Le directeur de la salle peut donc vendre 214 tickets: il aura une probabilité de plus de 0,95 qu'au plus 200 personnes se présentent le soir du spectacle.

110. 1. $\mathcal{B}(5\,000; 0,03)$.

$$2. n = 5\,000 \geq 30; np = 150 \geq 5; n(1-p) = 4\,850 \geq 5.$$

$$\left[\left(0,03 - 1,96\frac{\sqrt{0,0291}}{\sqrt{5\,000}}\right); \left(0,03 + 1,96\frac{\sqrt{0,0291}}{\sqrt{5\,000}}\right)\right] = [0,025; 0,035].$$

$$3. P(127 \leq X \leq 174) \approx 0,9535 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

4. Moins de 5 %.

5. Non $172 \in [127; 174]$.

6. $0 \notin [127; 174]$ donc le lot aurait été jugé non conforme.

$$7. P(X \geq 170) \approx 0,055 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

8. Non.

9. Pascal.

10. $172 \geq 170$ donc le lot de Pascal est non conforme.

$$111. 1. n = 100 \geq 30; n \times p = 5 \geq 5; n(1-p) = 5 \geq 5.$$

$$\left[\left(0,05 - 1,96\frac{\sqrt{0,0475}}{\sqrt{100}}\right); \left(0,05 + 1,96\frac{\sqrt{0,0475}}{\sqrt{100}}\right)\right] = [0,007; 0,093];$$

soit $[0,7\%; 9,3\%]$.

2. Le test indique que Dominique a raison.

3. On a obtenu un intervalle de fluctuation à 95 %, il y a donc 5 % de chance que la fréquence observée n'appartienne pas à l'intervalle de la question 1.

$$4. \mathcal{B}(100; 0,09).$$

$$5. 0,007 \leq \frac{X}{100} \leq 0,093.$$

$$\Leftrightarrow 0,7 \leq X \leq 9,3.$$

$$P(F \in I) = P(0,7 \leq X \leq 9,3) \approx 0,59.$$

6. Avantage à Dominique, car même lorsque $p = 0,09$, son test conclut à $p = 0,05$ dans quasiment 60 % des cas.

7. 8 % est inclus dans l'intervalle de fluctuation $[0,7\%; 9,3\%]$.

$$8. \left[\left(0,05 - 1,96\frac{\sqrt{0,0475}}{\sqrt{200}}\right); \left(0,05 + 1,96\frac{\sqrt{0,0475}}{\sqrt{200}}\right)\right]$$

soit $[4; 16]$.

9. $9 + 8 = 17$ cartes défectueuses à tous les deux $17 \notin [4; 16]$, il semble donc que $p > 0,05$.

6. Intervalles de confiance

112. et 113. Corrigés dans le manuel.

$$114. 1. \mathcal{B}(50; p).$$

$$2. IC = \left[0,26 - \frac{1}{\sqrt{50}}; 0,26 + \frac{1}{\sqrt{50}}\right] = [0,12; 0,40].$$

$$115. IC = \left[0,07 - \frac{1}{\sqrt{370}}; 0,07 + \frac{1}{\sqrt{370}}\right] = [0,018; 0,122].$$

$$116. \frac{15}{60} = 0,25.$$

$$2. IC = \left[0,25 - \frac{1}{\sqrt{60}}; 0,25 + \frac{1}{\sqrt{60}}\right] = [0,12; 0,38].$$

$$117. 1. IC = \left[0,45 - \frac{1}{\sqrt{222}}; 0,45 + \frac{1}{\sqrt{222}}\right] = [0,38; 0,52] \quad \text{RnB.}$$

$$2. IC = \left[0,42 - \frac{1}{\sqrt{222}}; 0,42 + \frac{1}{\sqrt{222}}\right] = [0,35; 0,49] \quad \text{Pop/Rock.}$$

$$IC = \left[0,38 - \frac{1}{\sqrt{222}}; 0,38 + \frac{1}{\sqrt{222}}\right] = [0,31; 0,45] \quad \text{Rap.}$$

$$IC = \left[0,28 - \frac{1}{\sqrt{222}}; 0,28 + \frac{1}{\sqrt{222}}\right] = [0,21; 0,35] \quad \text{Electro.}$$

$$IC = \left[0,26 - \frac{1}{\sqrt{222}}; 0,26 + \frac{1}{\sqrt{222}}\right] = [0,19; 0,33] \quad \text{chanson française.}$$

3. Non car les intervalles de confiance associés aux styles RnB et Pop/Rock se chevauchent.

4. Selon le même critère seuls les styles « musiques électroniques » et « chanson française » (parmi les styles de l'enquête) sont moins écoutés que le RnB.

$$118. 1. F \approx \frac{96}{100} = 0,96$$

$$2. IC = \left[0,96 - \frac{1}{\sqrt{100}}; 0,96 + \frac{1}{\sqrt{100}}\right] = [0,86; 1].$$

$$119. 1. F = \frac{91}{100} = 0,91$$

$$2. IC = \left[0,91 - \frac{1}{\sqrt{100}}; 0,91 + \frac{1}{\sqrt{100}}\right] = [0,81; 1].$$

120. 1. Il suffit de recopier l'indication sous **R**.

2. **ech=sample(pop,100)** permet d'enregistrer l'échantillon tiré dans le vecteur **ech**. Le résultat du tirage peut être visualisé en tapant simplement **ech** sous **R**.

3. La commande **table(ech)** répond à la question. On obtient par exemple 47 « A », 2 « AB », 6 « B » et 45 « O ».

4. D'après l'échantillon précédent les proportions de chaque groupe dans la popula-

tion totale peuvent être estimées à 0,47 pour le groupe « A », 0,02 pour « AB », 0,06 pour « B » et 0,45 pour « O ». Pour obtenir une estimation par intervalle de confiance au niveau asymptotique 0,95, il suffit d'ajouter l'erreur $\frac{1}{\sqrt{100}} = 0,1$ de part et d'autre des estimations, soit $[0,37; 0,57]$ pour « A », $[0; 0,12]$ pour « AB », $[0; 0,16]$ pour « B » et $[0,35; 0,55]$ pour « O ».

5. Oui.

6. Si on tire un autre échantillon, on obtient évidemment de nouveaux intervalles de confiance pour l'estimation des proportions. Il peut arriver que certains d'entre eux ne contiennent pas la vraie proportion : cela arrive avec une probabilité inférieure à 0,05.

121. 1. $\mathcal{B}(n; p_1); \mathcal{B}(n; p_2)$.

2. $F_1 = \frac{10}{36} \approx 0,28$; $F_2 = \frac{12}{36} \approx 0,33$.

3. $IC_1 = \left[0,28 - \frac{1}{\sqrt{36}}; 0,28 + \frac{1}{\sqrt{36}}\right]$
 $= [0,11; 0,45]$.

$IC_2 = \left[0,33 - \frac{1}{\sqrt{36}}; 0,33 + \frac{1}{\sqrt{36}}\right]$
 $= [0,16; 0,50]$.

IC_1 et IC_2 se chevauchent, on ne peut donc pas départager Daniel et Frédéric.

4. $F_{11} = \frac{25}{90} \approx 0,28$; $F_{22} \approx 0,33$.

$IC_{11} = [0,17; 0,39]$ et $IC_{22} = [0,22; 0,44]$.

IC_{11} et IC_{22} se chevauchent, on ne peut donc pas départager Daniel et Frédéric.

5.

$$0,28 + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,33 - \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,05$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{2} \geq 20 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 40 \Leftrightarrow n \geq 1600.$$

Il faudra effectuer 1 600 tirs pour que de manière significative $p_1 < p_2$.

122. 1.

$$\left(F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < 0,02 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{n}} < 0,02$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{2} > 50 \Leftrightarrow \sqrt{n} > 100 \Leftrightarrow n > 10\,000.$$

L'institut devra interroger au moins 10 000 personnes.

123. 1. $f_{TIT} = \frac{6}{81} \approx 0,074 \approx 7,4 \%$.

$f_{\text{autre}} = \frac{14}{1303} \approx 0,011 \approx 1,1 \%$.

$$2. IC_{TIT} = \left[0,074 - \frac{1}{\sqrt{81}}; 0,074 + \frac{1}{\sqrt{81}}\right]$$

$$= [0; 0,185].$$

3.

$$IC_{\text{autres}} = \left[0,011 - \frac{1}{\sqrt{1303}}; 0,011 + \frac{1}{\sqrt{1303}}\right]$$

$$= [0; 0,039].$$

4. Les deux intervalles se chevauchent, il est donc impossible d'affirmer qu'il y a une probabilité plus importante qu'une prothèse de la marque TIT se rompe.

$$5. 0,074 - \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0,011 + \frac{1}{\sqrt{16n}}$$

$$\Leftrightarrow 0,074 - \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0,011 + 0,25 \times \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1,25}{\sqrt{n}} \leq 0,074 + 0,011$$

$$\Leftrightarrow \frac{1,25}{\sqrt{n}} \leq 0,085$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 14,71$$

$$\Leftrightarrow n \geq 217.$$

$$6. f_{TIT} = \frac{95}{2017} = 0,047 \approx 4,7 \%$$

$$f_{\text{autre}} = \frac{309}{29814} \approx 0,010 = 1,0 \%$$

$$IC_{TIT} = \left[0,047 - \frac{1}{\sqrt{2017}}; 0,047 + \frac{1}{\sqrt{2017}}\right]$$

$$= [0,025; 0,069].$$

$$IC_{\text{autres}} = \left[0,01 - \frac{1}{\sqrt{29814}}; 0,01 + \frac{1}{\sqrt{29814}}\right]$$

$$= [0,004; 0,016]$$

puisque $0,016 < 0,025$ on peut affirmer que la probabilité de rupture des prothèses TIT est supérieure à celle des autres marques.

7. Problèmes

124. 1. Les deux défauts sont indépendants donc :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(D_1 \cap D_2) = 0,02 \times 0,05 = 0,001.$$

$$2. P = P(\overline{D_1}) \times P(\overline{D_2}) = 0,98 \times 0,95 = 0,931.$$

$$3. \mathcal{B}(1\,000; 0,931);$$

$$E(X) = n \times p = 931;$$

$$\delta(X) = \sqrt{931 \times (0,069)} \approx 8.$$

$$4. n = 1\,000 \geq 30; np = 931 \geq 5;$$

$$n(1-p) = 69 \geq 5.$$

$$5. 927 \leq X \leq 935$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq X - 931 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow -0,5 \leq \frac{X - 931}{8} \leq 0,5$$

$$\Leftrightarrow -0,5 \leq Z \leq 0,5 \text{ avec } Z \text{ qui suit } \mathcal{N}(0; 1)$$

$$P(-0,5 \leq Z \leq 0,5) \approx 0,383.$$

$$6. P(Z \leq 1,64) = 0,95; \frac{X - 931}{8} \leq 1,64;$$

$$X \leq 944.$$

$$125. 1. E = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ ans.}$$

$$2. p = \int_0^2 \lambda e^{-\lambda x} = [-e^{-\lambda x}]_0^2 = -e^{-0,4} + 1 \approx 0,33.$$

$$3. \mathcal{B}(1\,400; 0,33);$$

$$E(X) = 462;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{462 \times 0,67} \approx 17,6.$$

4. Il s'agit de l'intervalle de fluctuation de

$$F = \frac{X}{1\,400} \text{ au niveau asymptotique } 0,95 :$$

$$\left[0,33 - 1,96 \frac{\sqrt{0,33(1-0,33)}}{\sqrt{1\,400}};$$

$$0,33 + 1,96 \frac{\sqrt{0,33(1-0,33)}}{\sqrt{1\,400}}\right] = [0,31; 0,35]$$

à 10^{-2} près.

$$5. P(X > 700) = 1 - P(X \leq 700)$$

$$= 1 - P(X - 462 \leq 238)$$

$$= 1 - P\left(\frac{X - 462}{17,6} \leq 13,5\right)$$

$$= 1 - P(Z \leq 13,5);$$

Z suit $\mathcal{N}(0; 1) \approx 0$.

$$126. A. 1. \mathcal{B}(n; 0,006);$$

$$E(X) = 0,006n;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0,006n(0,994)} = 0,077\sqrt{n}.$$

$$2. P(X = 0) = \binom{n}{0} 0,006^0 \times 0,994^n = 0,994^n.$$

$$3. n = 10\,000; E(X) = 60; \sigma(X) \approx 7,7.$$

$$-10 \leq X - 60 \leq 10$$

$$\Leftrightarrow -1,3 \leq \frac{X - 60}{7,72} \leq 1,3$$

$$P(50 \leq X \leq 70) = P(-1,3 \leq Z \leq 1,3)$$

avec Z qui suit $\mathcal{N}(0; 1)$

$$\approx 0,806 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

$$B. 1. f = \frac{85}{100} = 0,85.$$

$$2. IC = \left[0,85 - \frac{1}{\sqrt{100}}; 0,85 + \frac{1}{\sqrt{100}}\right]$$

$$= [0,75; 0,95].$$

3. Non : par définition la probabilité que l'intervalle de confiance contienne p est supérieure à 0,95, mais l'intervalle ne contient pas à coup sûr p . Ainsi étant donné un échantillon particulier, l'IC correspondant peut ne pas contenir p , mais ceci arrive avec une probabilité très faible.

$$127. A. 1. P(89,6 \leq X \leq 90,4);$$

$$-0,4 \leq X - 90 \leq 0,4$$

$$\Leftrightarrow -2,35 \leq \frac{X - 90}{0,17} \leq 2,35$$

$$\Leftrightarrow -2,35 \leq Z \leq 2,35 \text{ avec } Z \text{ qui suit } \mathcal{N}(0; 1).$$

$$P(89,6 \leq X \leq 90,4) = P(-2,35 \leq Z \leq 2,35) \approx 0,98.$$

2. $P(-a \leq Z \leq a) = 0,99$;
donc $a = 2,58$

$$\frac{90,4 - 90}{\sigma_1} = 2,58$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \frac{0,4}{2,58} \approx 0,155.$$

B. 1. $\mathcal{B}(4; 0,02)$.

2. $P(Y = 0) = 0,98^4 = 0,92$.

3. $P(Y = 1) = \binom{4}{1} 0,02^1 \times 0,98^3 = 0,075$.

$$P(Y \leq 1) = 0,995.$$

C. 1. $\mathcal{B}(1\,000; 0,02)$.

2. $n = 1\,000 \geq 3$; $np = 20 \geq 5$;

$$n(1-p) = 1\,000(0,98) = 980 \geq 5.$$

$$\sigma(Z) = \sqrt{10 \times 0,98} \approx 4,43.$$

3. $Z \leq 15$

$$\Leftrightarrow Z - 20 \leq -5$$

$$\Leftrightarrow \frac{Z - 20}{4,43} \leq -1,13$$

$$\Leftrightarrow W \leq -1,13 \text{ avec } W \text{ qui suit } \mathcal{N}(0; 1).$$

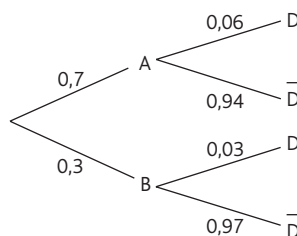
$$P(Z \leq 15) = P(W \leq -1,13) \approx 0,13.$$

128. A. 1. $E(E_A) = \frac{1}{0,02} = 50 \text{ } ^\circ\text{C}$.

2. $P(E_A > 140) \approx 0,061$.

3. $P(E_B > 140) \approx 0,032$.

B. 1.



$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cap D) + P(B \cap D) \\ &= P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) \\ &= 0,7 \times 0,06 + 0,3 \times 0,03 \\ &= 0,051. \end{aligned}$$

2. $\mathcal{B}(500; 0,051)$.

3. $n = 500 \geq 30$; $np = 25,5 \geq 5$;

$$n(1-p) = 474,5 \geq 5.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{25,5 \times 0,949} \approx 4,9.$$

4. $X > 30 \Leftrightarrow X - 25,5 > 4,5$

$$\Leftrightarrow \frac{X - 25,5}{4,9} > 0,92$$

$$\Leftrightarrow Z > 0,92 \text{ avec } Z \text{ qui suit}$$

$$\mathcal{N}(0; 1).$$

$$P(X > 30) \approx P(Z > 0,92) \approx 0,18.$$

En route vers le bac (p. 414-415)

129. 1. $P(3 \leq X \leq 4,4) \approx 0,68$

2. $\left[0,68 - 1,96 \frac{\sqrt{0,2176}}{\sqrt{400}} ; 0,68 + 1,96 \frac{\sqrt{0,2176}}{\sqrt{400}} \right]$;
 $[0,63 ; 0,73]$.

130. 1. $P(E) = \frac{1}{4}$;

$$\mathcal{B}(7\,500 ; 0,25) ;$$

$$E = 1875 ;$$

$$\sigma = \sqrt{1\,406,25} = 37,5.$$

2. $\left[0,25 - 1,96 \frac{\sqrt{0,1875}}{\sqrt{7\,500}} ; 0,25 + 1,96 \frac{\sqrt{0,1875}}{\sqrt{7\,500}} \right]$;
 $[0,24 ; 0,26]$.

3. $\frac{1\,740}{7\,500} = 0,232 \notin [0,24 ; 0,26]$.

4. $IC = \left[0,232 - \frac{1}{\sqrt{7\,500}} ; 0,232 + \frac{1}{\sqrt{7\,500}} \right]$;
 $= [0,22 ; 0,24]$.

131. A. 1. $\mathcal{B}(n ; 0,26)$.

2. $P(X = 2) = \binom{6}{2} 0,26^2 \times 0,74^4 \approx 0,30$.

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2).$$

$$P(X = 0) = 0,74^6 \approx 0,16.$$

$$P(X = 1) = 6 \times 0,26 \times 0,74^5 \approx 0,35.$$

$$P(X \leq 2) \approx 0,81.$$

3. $P(X = 0) = 0,74^n$.

4. $P(F) = 1 - P(X = 0)$

$$= 1 - 0,74^n$$

$$1 - 0,74^n \geq 0,95$$

$$-0,74^n \geq -0,05$$

$$0,74^n \leq 0,05$$

$$n \ln 0,74 \leq \ln 0,05$$

$$n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,74}$$

$$n \geq 10.$$

B. 1. $P(Y = 27) \approx 0,897$

2. $P(Y \leq 24,5) \approx 0,376$

132. 1. On sait que l'urne choisie pour les tirages est U_1 . De plus les tirages sont effectués avec remise et de façon indépendante. A chaque tirage, une boule rouge peut donc être tirée avec une probabilité $\frac{2}{5}$. Donc $X \sim \mathcal{B}(200 ; \frac{2}{5})$ et le résultat s'en suit.

2. Si les tirages sont effectués dans U_2 , on est sûr d'obtenir une boule rouge à chaque tirage puisque U_2 ne contient qu'une seule boule, qui est rouge. Ainsi : $P_{U_2}(X = 200) = 1$ et pour tout entier k entre 0 et 199, $P_{U_2}(X = k) = 0$. Au contraire, si les tirages sont effectués dans U_3 , on n'obtiendra jamais de boule rouge. Ainsi $P_{U_3}(X = 0) = 1$ et pour tout entier k entre 1 et 200, $P_{U_3}(X = k) = 0$. On en déduit l'égalité proposée.

3. D'après la formule des probabilités totales, pour tout entier k entre 1 et 199, $P(X = k) = P_{U_1}(X = k)P(U_1) + P_{U_2}(X = k)P(U_2) + P_{U_3}(X = k)P(U_3)$.

Or $P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$ et

$P_{U_2}(X = k) = P_{U_3}(X = k) = 0$ pour k entre 1 et 199 d'après 2..

On en déduit $P(X = k) = \frac{1}{3}P_{U_1}(X = k)$ pour tout entier k entre 1 et 199.

4. D'après 3. et 1. :

$$\begin{aligned} P(60 < X \leq 100) &= \sum_{k=61}^{100} P(X = k) = \sum_{k=61}^{100} \frac{1}{3}P_{U_1}(X = k) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=61}^{100} \binom{200}{k} \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{200-k} \end{aligned}$$

Or pour tout k compris entre 0 et 200,

$$P(T = k) = \binom{200}{k} \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{200-k} \text{ donc}$$

$$P(60 < X \leq 100) = \frac{1}{3} \sum_{k=61}^{100} P(T = k) = P(60 < T \leq 100).$$

5. $T \sim \mathcal{B}(n ; p)$ avec $n = 200$ et $p = \frac{2}{5}$. Puisque $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, il est raisonnable d'utiliser l'approximation normale issue du théorème de Moivre-Laplace. Ainsi

$$\begin{aligned} P(60 < T \leq 100) &= P\left(\frac{60 - 80}{6,93} < \frac{T - 80}{6,93} \leq \frac{100 - 80}{6,93}\right) \\ &\approx P(-2,89 < Z \leq 2,89) = 0,996 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.} \end{aligned}$$

133. 1. $G(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x f(t) dt = 1$ car f est une densité de probabilité.

2. $G(x) = P(-x \leq X \leq x)$ pour $x \geq 0$.

F est une primitive de f on a :

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-x}^x f(t) dt = \int_0^x f(t) dt - \int_0^{-x} f(t) dt \\ &= F(x) - F(-x). \end{aligned}$$

3. $F'(x) = f(x)$ et $F'(-x) = -f(-x)$
d'après la formule de dérivation d'une fonction composée.

Donc pour $x \geq 0$, $G'(x) = f(x) + f(-x)$.

4. $f(x) > 0$ pour tout x et donc $G(x) > 0$ pour tout $x \geq 0$. On en déduit que G est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

x	0	u_x	$+\infty$
$G'(x)$			+
$G(x)$	0	$1-\alpha$	1

5. La fonction G est continue, strictement croissante de $[0; +\infty[$ dans $[0; 1]$, il existe un unique u_α positif tel que $G(u_\alpha) = y$.

Donc $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = y$

$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha.$$

134. $\mathcal{B}(n; p)$ et $F_n = \frac{X_n}{n}$;

$$P(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 1 - \alpha \text{ avec}$$

$\alpha \in]0; 1[$; avec Z qui suit $\mathcal{N}(0; 1)$.

1. D'après le théorème de Moivre-Laplace :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(-u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha\right) = P(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 1 - \alpha.$$

$$2. -u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha$$

$$\Leftrightarrow -u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \leq X_n - np \leq u_\alpha \sqrt{np(1-p)}$$

$$\Leftrightarrow np - u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \leq X_n \leq np + u_\alpha \sqrt{np(1-p)}$$

$$\Leftrightarrow p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}.$$

$$3. p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \\ \Leftrightarrow F_n \in \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

135. $\mathcal{B}(n; p)$ et $F_n = \frac{X_n}{n}$.

$P(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$ avec $\alpha \in]0; 1[$ et Z qui suit $\mathcal{N}(0; 1)$.

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

2. $P(-2 \leq Z \leq 2) = 1 - \alpha$ pour Z suivant $\mathcal{N}(0; 1)$.

On trouve à l'aide d'une calculatrice $1 - \alpha \approx 0,954 > 0,95$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(p - 2 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + 2 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2) \approx 0,954 > 0,95.$$

3. Soit $g(p) = p(1-p)$ pour $p \in [0; 1]$;
 $g(p) = p - p^2$;
 $g'(p) = 1 - 2p$;
 $g'(p) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2p = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$g'(x)$		+	-
$g(x)$		$\frac{1}{4}$	

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

On a donc pour tout $p \in [0; 1]$, $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$.

$$4. 2 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq 2 \frac{\sqrt{\frac{1}{4}}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Donc :

$$\left[p - 2 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 2 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \subset \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

5. D'après les questions 2. et 4..

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(p - 2 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + 2 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) > 0,95.$$

$$6. \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(F_n \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geq 0,95.$$

$$\text{Or } F_n \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \Leftrightarrow p \in \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

Donc $P(p \in \text{IC}) \geq 0,95$ lorsque n est assez grand, ce qui montre que l'intervalle IC a un niveau de confiance de 95 % pour l'estimation de p .

Accompagnement personnalisé (p. 416-417)

136. Z suit $\mathcal{N}(0; 1)$.

$$P(0,5 \leq Z \leq 2) \approx 0,29 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

137. $P(Z \geq 4) = 1 - P(Z < 4) \approx 3 \times 10^{-5}$.

138. $P(Z < x) = 0,75 \Leftrightarrow x \approx 0,674 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$

139. $P(-x < Z < x) = 0,75 \Leftrightarrow x \approx \pm 1,15 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$

140. $-x - 3 < X < x - 3$

$$-x < X + 3 < x$$

$$\frac{-x}{3} < \frac{X+3}{3} < \frac{x}{3}$$

$$P\left(\frac{-x}{3} < Z < \frac{x}{3}\right) = 0,75 \text{ avec } Z \text{ qui suit } \mathcal{N}(0; 1).$$

$$\frac{x}{3} = 1,15$$

$$x = 3,45.$$

141. $P(|X - 2| > 3) = 0,05$

$$P(-1 < X < 5) = 0,95$$

$$P\left(\frac{-3}{\sigma} < \frac{X-2}{\sigma} < \frac{3}{\sigma}\right) = 0,95$$

$$P\left(\frac{-3}{\sigma} < Z < \frac{3}{\sigma}\right) = 0,95$$

avec Z qui suit $\mathcal{N}(0; 1)$.

$$\frac{3}{\sigma} = 1,96$$

$$\sigma \approx 1,53.$$

142. 1. $n = 64 \geq 30$; $n \times p = 6,4 \geq 5$; $n(1-p) = 57,6 \geq 5$.

$$E(X) = 6,4 ;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{6,4 \times (0,9)} = 2,4.$$

2. $P(5 < X < 7)$

$P(-0,58 < Z < 0,25)$ avec Z qui suit $\mathcal{N}(0; 1)$.

$P(5 < X < 7) \approx 0,32$.

143. 1. $E(X) = n \times p = 98$;

$\sigma(X) = \sqrt{98 \times 0,5} = 7$.

2. $n = 196 \geq 0$; $np = 98 \geq 5$; $n(1-p) = 196 \times 0,5 = 98 \geq 5$.

3. $98 - a \leq X \leq 98 + a \Leftrightarrow \frac{-a}{7} < Z < \frac{a}{7}$

$P\left(\frac{-a}{7} < Z < \frac{a}{7}\right) = 0,95$

$\Leftrightarrow \frac{a}{7} = 1,96 \Leftrightarrow a = 13,72$.

144. $f = \frac{1327}{2000} = 0,6635$;

$IC = \left[0,6635 - \frac{1}{\sqrt{2000}} ; 0,6635 + \frac{1}{\sqrt{2000}}\right] = [0,64 ; 0,69]$.

145. $\left(f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(f - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{n}} < 0,01$

$\frac{\sqrt{n}}{2} > 100 \Leftrightarrow \sqrt{n} > 200 \Leftrightarrow n > 40000$.

146. 1. $X \sim \mathcal{N}(73 ; \sigma^2)$.

$P(72,5 < X < 73,5) = P\left(-\frac{0,5}{\sigma} < Z < \frac{0,5}{\sigma}\right)$ où Z désigne une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

Ainsi $P(72,5 < X < 73,5) = 0,99$ ssi $\frac{0,5}{\sigma} = 2,58$ soit $\sigma = 0,194$.

2. $P((X < 72) \cup (X > 74)) = 1 - P(72 < X < 74) \approx 0$ à 10^{-6} près.

3. $P(X > L) < 10^{-4}$ ssi $L \geq L_0$ où L_0 vérifie $P(X > L_0) = 10^{-4}$.

On a $P(X > L_0) = 1 - P\left(Z \leq \frac{L_0 - 73}{0,194}\right)$ où Z désigne une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$. Ainsi $P(X > L_0) = 10^{-4}$ ssi

$P\left(Z \leq \frac{L_0 - 73}{0,194}\right) = 0,9999$ soit $\frac{L_0 - 73}{0,194} = 3,72$ et $L_0 = 73,72$.

4. $P(X < l) < 10^{-4}$ ssi $l \geq l_0$ où l_0 vérifie $P(X < l_0) = 10^{-4}$.

On obtient comme ci-dessus $P(X < l_0) = 10^{-4}$

ssi $P\left(Z \leq \frac{l_0 - 73}{0,194}\right) = 10^{-4}$ soit $\frac{l_0 - 73}{0,194} = -3,72$ et $l_0 = 72,28$.

147. 1. Pour le groupe A, la proportion vaut $f_A = \frac{37}{54} = 0,69$.

Pour le groupe B, la proportion vaut $f_B = \frac{34}{63} = 0,54$.

2. Pour A : $\left[0,69 - \frac{1}{\sqrt{54}} ; 0,69 + \frac{1}{\sqrt{54}}\right] = [0,55 ; 0,82]$.

3. Pour B : $\left[0,54 - \frac{1}{\sqrt{63}} ; 0,54 + \frac{1}{\sqrt{63}}\right] = [0,41 ; 0,67]$.

4. Non.

5. La proportion de personnes jugeant le placebo efficace est $\frac{18}{57} = 0,32$, ce qui fournit l'intervalle de confiance au niveau asymptotique 95 % :

$\left[0,32 - \frac{1}{\sqrt{57}} ; 0,32 + \frac{1}{\sqrt{57}}\right] = [0,18 ; 0,45]$.

Le médicament B n'est pas significativement plus efficace que le placebo. Par contre le médicament A l'est. On remarque ici un paradoxe de la comparaison deux à deux selon ce critère : les médicaments A et B sont indistinguables, le placebo et le médicament B sont indistinguables, mais le placebo et le médicament A ont des efficacités significativement différentes.

148. 1. $\left[0,63 - \frac{1}{\sqrt{100}} ; 0,63 + \frac{1}{\sqrt{100}}\right] = [0,53 ; 0,73]$.

2. $\left[0,79 - \frac{1}{\sqrt{100}} ; 0,79 + \frac{1}{\sqrt{100}}\right] = [0,69 ; 0,89]$.

3. Non, car les intervalles se chevauchent.

4. Les intervalles de confiance respectifs deviennent dans ce cas $\left[0,63 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 0,63 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et $\left[0,79 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 0,79 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$. La différence entre les deux types de cadre devient significative lorsque les deux intervalles ne se chevauchent pas, c'est à dire dès que $0,79 - \frac{1}{\sqrt{n}} > 0,63 + \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{n}} < 0,16 \Leftrightarrow n > 156,25$.

TP Info (p. 418)

1. a. Considérons comme « succès » le fait que l'erreur de mesure vale 1. La variable X_n représente donc le nombre de succès parmi n expériences de Bernoulli indépendantes (les E_i), qui ont toute même probabilité de succès 0,5.
Donc $X_n \sim \mathcal{B}(100; 0,5)$.

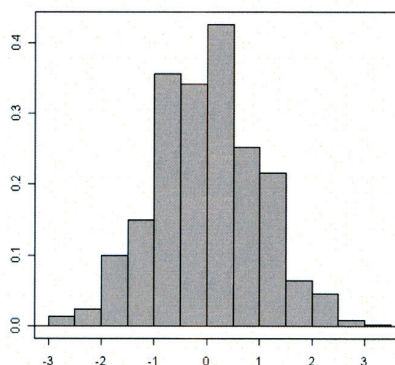
On a $E(X_n) = 50$ et $\sigma(X_n) = \sqrt{100 \times 0,5 \times 0,5} = 5$.

b. En procédant comme indiqué, on obtient un tableau à une ligne contenant des 0 et des 1 ainsi que leur somme comme ci-dessous (seule la fin du tableau est montrée) :

	obs94	obs95	obs96	obs97	obs98	obs99	obs100	sum
1	1	0	1	0	0	0	1	53

c. d. e. Une fois effectuées les étapes décrites dans **c.** et **d.** on obtient un tableau à 1 000 lignes dont la dernière colonne correspond à X_n centré réduit, comme ci-dessous. L'histogramme correspondant est en-dessous.

	obs95	obs96	obs97	obs98	obs99	obs100	sum	Xn.centré>
1	0	0	1	0	0	0	53	0.5583788
2	1	1	1	1	0	1	47	-0.6313488
3	0	1	0	1	0	0	52	0.3600909
4	0	0	1	1	0	1	47	-0.6313488
5	0	0	0	0	0	0	52	0.3600909
6	1	0	0	0	1	1	56	1.153243
7	0	1	0	0	0	0	44	-1.226213
8	0	0	1	1	0	0	55	0.9549547
9	1	1	1	1	1	1	58	1.549818
10	0	1	1	1	1	0	55	0.9549547
11	1	1	1	0	1	1	53	0.5583788
12	0	1	1	0	0	1	44	-1.226213
13	1	0	1	0	0	0	58	1.549818
14	1	1	0	1	0	0	55	0.9549547
15	1	0	0	0	0	0	50	-0.036484>
16	0	0	1	0	1	1	56	1.153243
17	1	0	0	0	1	1	52	0.3600909
18	0	1	1	0	0	1	43	-1.424500
19	1	0	1	0	1	0	51	0.1618029



f. On remarque que cet histogramme est raisonnablement proche de la densité de la loi normale centrée réduite, ce qui montre que $\frac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X_n)}$ semble suivre une loi normale centrée réduite. Il s'agit d'une illustration du théorème de Moivre-Laplace.

2. (i) et (ii) : Lorsque les variables E_i suivent une autre loi, on observe le même phénomène (sauf pour la loi de Cauchy). Dans ce cas X_n ne suit pas une loi binomiale, mais X_n centré et réduit suit tout de même approximativement la loi $\mathcal{N}(0; 1)$ lorsque n est grand, ce qui est justifié par le théorème limite central (hors programme).

Sur les pas du supérieur (p. 419)

I. Fonction de répartition

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x)$ est une probabilité donc appartient à $[0; 1]$.

2. Si $X \sim \mathcal{U}([0; 1])$, alors la densité de X vaut $f(t) = 1$ si $t \in [0; 1]$ et $f(t) = 0$ sinon. Ainsi, si $x \leq 0$, $P(X \leq x) = 0$, si $x \geq 1$, $P(X \leq x) = 1$, et si $0 < x < 1$, $P(X \leq x) = \int_0^x dt = x$. Cf le graphique de gauche ci-dessous pour la représentation graphique.

3. Si $X \sim \mathcal{B}(6; 0,5)$, les seules valeurs que peut prendre X sont les entiers de 0 à 6. Donc si $x < 0$, $P(X \leq x) = 0$, si $x \geq 6$, $P(X \leq x) = 1$ et si $0 \leq x \leq 6$, $P(X \leq x) = P(X \leq [x])$ en notant $[x]$ la partie entière de x . Lorsque $0 \leq x \leq 6$, $[x]$ et donc $P(X \leq [x])$ ne peuvent prendre que 6 valeurs résumées dans le tableau ci-dessous. F est donc une fonction constante par morceaux, continue à droite, cf la représentation graphique ci-dessous.

$[x]$	0	1	2	3	4	5	6
$P(X \leq [x])$	0,02	0,11	0,34	0,66	0,89	0,98	1

4. a. $F(X) = P(X \leq x) = P((X \leq 0) \cup (0 < X \leq 0))$. Puisque les

deux événements précédents sont disjoints, on obtient $F(X) = P(X \leq x) + P(0 < X \leq 0) = F(0) + \int_0^x f(t) dt$.

b. $F'(X) = f(x)$.

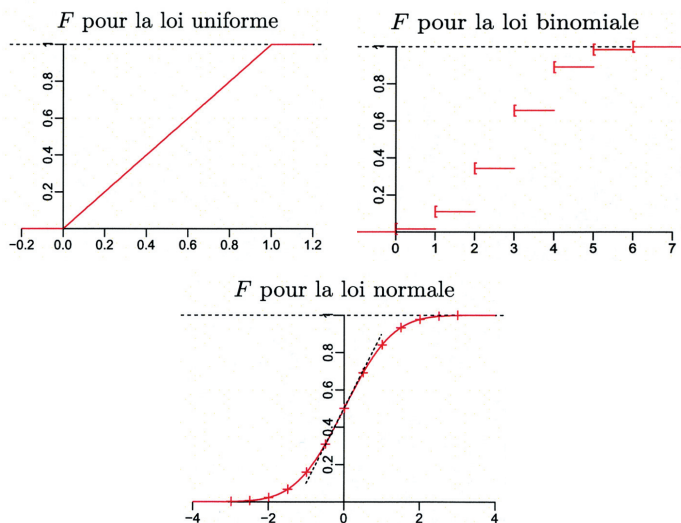
c. $F(0) = 0,5$ par symétrie de la densité de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$ par rapport à la droite d'équation $x = 0$.

d. Quelques valeurs de $F(x)$ sont résumées dans le tableau ci-dessous (à 10^{-2} près). Comme $F' = f$, on en déduit que la courbe représentative de F admet deux asymptotes horizontales : $y = 0$ en $-\infty$ et $y = 1$ en $+\infty$. De plus F admet comme tangente en 0 la droite d'équation $y = f(0)x + 0,5 = 0,4x + 0,5$.

Enfin, puisque $F' = f$ est croissante (resp. décroissante) sur $]-\infty; 0]$ (resp. $[0; +\infty[$), on en déduit que F est convexe (resp. concave) sur ces ensembles. Cf le dernier graphique ci-dessous pour la représentation graphique.

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0
$F(x)$	0	0,01	0,02	0,07	0,16	0,31	0,5

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$F(x)$	0,69	0,84	0,93	0,98	0,99	1



II. Le QQ-plot pour vérifier la normalité

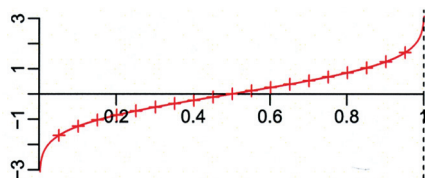
1.

α	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
$v(\alpha)$	-1,64	-1,28	-1,04	-0,84	-0,67	-0,52	-0,39	-0,25	-0,13	0

2. Géométriquement, cela est dû à la symétrie de la densité de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$ par rapport à la droite d'équation $x = 0$.

3. Comme Z suit une loi continue, $P(Z \leq v(\alpha)) = P(Z < v(\alpha))$ qui vaut α par définition de v . Par ailleurs, d'après 2., $P(Z < -v(\alpha)) = 1 - P(Z \leq v(\alpha)) = 1 - \alpha$. Or d'après l'énoncé l'unique réel u vérifiant $P(Z < u) = 1 - \alpha$ est $v(1 - \alpha)$. Donc $-v(\alpha) = v(1 - \alpha)$.

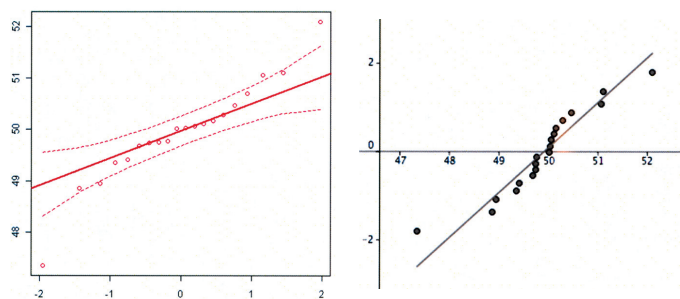
4. La relation précédente montre que la courbe représentative de v est symétrique par rapport au point de coordonnées $(0,5; v(0,5) = (0,5; 0))$. De plus, d'après la définition de v , on a $\lim_{\alpha \rightarrow 1} v(\alpha) = +\infty$ et $\lim_{\alpha \rightarrow 0} v(\alpha) = -\infty$, ce qui montre que la courbe représentative de v admet deux asymptotes verticales en $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$.



5. $P(X < q(\alpha)) = P\left(Z < \frac{q(\alpha) - \mu}{\sigma}\right)$ donc $\frac{q(\alpha) - \mu}{\sigma} = v(\alpha)$ et $q(\alpha) = \alpha v(\alpha) + \mu$.

6. La relation précédente le montre.

7. Avec **R Commander**, on obtient le QQ-plot de gauche ci-dessous : la droite passant par les deux quartiles est représentée ainsi qu'une région de confiance autour de cette dernière. Si les points sont tous inclus dans la région de confiance, on peut admettre qu'ils sont raisonnablement alignés. Avec **Géogebra**, on obtient le QQ-plot de droite : il s'agit non pas de la représentation des points $(v(\alpha), \hat{q}(\alpha))$ mais de celle des points $(\hat{q}(\alpha), v(\alpha))$ avec la droite des moindres carrés (i.e. la droite minimisant la somme des distances au carré entre les points et la droite) ; l'interprétation est la même.



8. Les points semblent raisonnablement alignés, même si certains sortent de la région de confiance tracée avec **R Commander**. On accepte néanmoins l'hypothèse selon laquelle les mesures sont des réalisations d'une loi normale.

9. D'après 6., en prenant la droite des moindres carrés de **Géogebra** comme référence : μ correspond à l'abscisse où la droite coupe l'axe des abscisses et $1/\sigma$ à la pente de la droite. On obtient à l'oeil nu les estimations : $\mu \approx 50$ et $\sigma \approx 1$.



Arithmétique

Enseignement de spécialité

Programme officiel

Exemples de problèmes	Contenus
Problèmes de codage (code-barres, code ISBN, clé du RIB, code INSEE).	• Divisibilité dans $\mathbb{Z}$.
Problèmes de chiffrement (chiffrement affine, chiffrement de Vigenère, chiffrement de Hill).	• Division euclidienne.
	• Congruences dans $\mathbb{Z}$.
	• PGCD de deux entiers.
	• Entiers premiers entre eux.
	• Théorème de Bézout.
	• Théorème de Gauss.
Questionnement sur les nombres premiers: infinitude, répartition, tests de primalité, nombres premiers particuliers (Fermat, Mersenne, Carmichael).	• Nombres premiers.
Sensibilisation au système cryptographique RSA.	• Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers.

Situations (p. 426-437)

1. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

1.1 Les nombres parfaits

- $20 = 1 \times 20 = 2 \times 10 = 4 \times 5$, donc $D(20) = \{1; 2; 4; 5; 10; 20\}$.
 $1 + 2 + 4 + 5 + 10 = 22 \neq 20$, donc 20 n'est pas parfait.
- $28 = 1 \times 28 = 2 \times 14 = 4 \times 7$, donc $D(28) = \{1; 2; 4; 7; 14; 28\}$.
 $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$, donc 28 n'est pas parfait.
- $104 = 1 \times 104 = 2 \times 52 = 4 \times 26 = 8 \times 13$,
donc $D(104) = \{1; 2; 4; 8; 13; 26; 52; 104\}$.
 $1 + 2 + 4 + 8 + 13 + 26 + 52 = 106$, donc 104 n'est pas parfait.

1.2 Les code-barres

1.

0	1	8	3	2	1	2
1	3	1	3	1	3	1
0	3	8	9	2	3	2

$0 + 3 + 8 + 9 + 2 + 3 + 2 = 27$ donc la clé est 3.

2.

8	4	1	6	2	1	3
3	1	3	1	3	1	3
24	4	3	6	6	1	9

$24 + 4 + 3 + 9 + 9 + 1 + 9 = 56$ donc la clé est 4.

3.

2	5	1	3	x	1	9
3	1	3	1	3	1	3
6	5	3	3	3x	1	27

$6 + 5 + 3 + 3 + 3x + 1 + 27 = 45 + 3x$. La clé est 3 donc le chiffre des unités est 7.

$0 \leq x < 9 \Leftrightarrow 0 \leq 3x < 27 \Leftrightarrow 45 \leq 45 + 3x < 72$.

Donc les valeurs possibles sont 47 ; 57 ; 67.

$45 + 3x = 47 \Leftrightarrow 3x = 2, x \in \mathbb{N}$;

$$45 + 3x = 57 \Leftrightarrow 3x = 12, x \in 4 ;$$

$$45 + 3x = 67 \Leftrightarrow 3x = 22, x \notin \mathbb{N} ;$$

donc $x = 4$.

2. Division euclidienne

2.1 Dans l'édition

1. $5070 = 64 \times 74 + 14$.

La dernière page comporte 14 lignes.

2. S'il y a le même nombre de lignes alors ce nombre divise 5 070. Pour avoir un minimum de pages il faut le diviseur le plus grand.

$$5070 = 1 \times 5070 = 2 \times 2535 = 5 \times 1014 = 3 \times 1690$$

$$= 6 \times 845 = 10 \times 507 = 13 \times 390 = 15 \times 338$$

$$= 26 \times 195 = 39 \times 130 = 65 \times 78 = 169 \times 30.$$

Les valeurs possibles sont 26 ; 30 ; 39.

Pour avoir un minimum de pages il faut mettre 39 lignes, mais cela ne serait pas très équilibré...

3. Si l'on peut mettre 68 lignes par page, alors on mettra 65 lignes par page et le document comportera 78 pages.

2.2 Dans l'édition

1. $100A = 20\,041\,101\,127\,834\,023\,843\,100$

$$= 20\,041\,101\,127 \times 10^{12} + 834\,023 \times 10^6 + 843\,100$$

100A comporte 23 chiffres.

2. $a = 20\,041\,010\,127 ;$

$b = 834\,023 ;$

$c = 843\,100.$

3. $\cdot 10^6 = (10^2)^3 = 100^3 ; 10^6 \equiv 3^3[97] ; 10^6 \equiv 27[97].$

$\cdot 10^{12} = (100)^6 ; 10^{12} \equiv 3^3[97] ; 10^{12} \equiv 50[97].$

4. $a \equiv 80[97] ;$

$b \equiv 17[97] ;$

$c \equiv 73[97] ;$

donc $100A \equiv 80 + 17 \times 27 + 73 \times 50[97]$

$$\equiv 18[97].$$

La clé est 79 ($97 - 18 = 79$).

3. Congruences

3.1 Numéros INSEE

1. $A = 2960622645001.$

$$10^2 \equiv 3[97] ; 10^3 \equiv 30[97] ; 10^4 \equiv 9[97] ; 10^5 \equiv 90[97] ;$$

$$10^6 \equiv 27[97] ; 10^7 \equiv 76[97] ; 10^8 \equiv 81[97] ; 10^9 \equiv 34[97] ;$$

$$10^{10} \equiv 49[97] ; 10^{11} \equiv 5[97] ; 10^{12} \equiv 50[97].$$

$$r \equiv 2 \times 50 + 9 \times 5 + 6 \times 49 + 0 \times 34 + 6 \times 81 + 2 \times 76$$

$$+ 2 \times 27 + 6 \times 90 + 4 \times 9 + 5 \times 30 + 0 \times 3 + 0 \times 10 + 1$$

$$r \equiv 1858[97]$$

$858 = 97 \times 8 + 15$ donc $r = 15$ et $K = 97 - 15 = 82.$

2. $A = 2960622 \times 10^6 + 645001.$

$10^6 \equiv 27[97]$ d'après la question précédente donc

$$r \equiv 27x + y[97].$$

4. PGCD de deux entiers

Optimisation

1. $65 = 1 \times 65 = 5 \times 13$ donc $D(65) = \{1 ; 5 ; 13 ; 65\}.$

$$80 = 1 \times 80 = 2 \times 40 = 5 \times 16 = 10 \times 8$$

donc $D(80) = \{1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 ; 16 ; 20 ; 40 ; 80\}.$

$$D(65 ; 80) = \{1 ; 5\}.$$

$$\text{pgcd}(65 ; 80) = 5.$$

2. $945 = 882 + 63 ; \text{pgcd}(945 ; 882) = 63.$

$$882 = 63 \times 14.$$

3. a. $V = \ell^2 L.$

b. $\text{pgcd}(\ell, L) = 12 ; \ell = 12\ell' ; L = 12L'$ avec ℓ' et L' nombres premiers entiers.

$$(12\ell')^2 \times 12L' = 77\,760$$

$$\ell'^2 \times L' = \frac{77\,760}{12^3}$$

$$\ell'^2 L' = 45 = 1^2 \times 45$$

$$= 3^2 \times 5$$

$$\begin{cases} \ell' = 1 \\ L' = 45 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \ell' = 3 \\ L' = 5 \end{cases}$$

Il y a deux boîtes de cartons :

$\ell = 12$ et $L = 540$ ou $\ell = 36$ et $L = 60.$

5. Les théorèmes fondamentaux de l'arithmétique

5.1 À la découverte de l'utilisation du théorème de Gauss

1. $10,5x + 11,375y = 10,8(x + y)$

$$0,575y = 0,3x$$

$$575y = 300x.$$

2. $575 = 300 + 275 ; \text{pgcd}(575 ; 300) = 25.$

$300 = 275 + 25 ; \text{d'où } 575y = 300x \Leftrightarrow 23y = 12x \quad 275 = 25 \times 11.$

23 divise $12x$ or $\text{pgcd}(23 ; 12) = 1$ donc d'après Gauss 23 divise x donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $x = 23k.$

Comme $23y = 12x \Leftrightarrow 23y = 12 \times 23k \Leftrightarrow y = 12k.$

$x + y = 23k + 12k = 35k$ or $0 < x + y \leq 38$ donc

$$0 < 35k \leq 38 \Leftrightarrow 0 < k \leq \frac{38}{35}.$$

Le seul entier dans l'inégalité est $k = 1$, donc $x = 23$ et $y = 12.$ Il y a 12 filles et 23 garçons.

5.2 À la découverte des équations diophantiennes

1. Le prix des CD est $17x$ est le prix des DVD $20y.$

Au total $17x + 20y = 162.$

2. $20 = 17 + 3 ;$

$17 = 3 \times 5 + 2 ;$

$3 = 2 + 1 ;$

$\text{pgcd}(17 ; 20) = 1 ;$

162 est un multiple de 1 donc d'après le théorème de Bézout (E) admet des solutions.

3. $17 \times (-1134) + 20 \times 972 = -19\,278 + 19\,440 = 162 ;$

donc $(-1134 ; 972)$ est solution de (E).

4.
$$\begin{cases} 17x + 20y = 162 & (1) \\ 17(-1134) + 20(972) = 162 & (2) \end{cases}$$

$(1)-(2) : 17(x + 1134) + 20(y - 972) = 0$

d'où $17(x + 1134) = -20(y - 972)$ (E').

5. 20 divise $17(x + 1134)$ or 17 et 20 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss 20 divise $x + 1134.$

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 1\,134 = 20k$.

Donc $(E') : 17 \times 20k = -20(y - 972)$

$$y - 972 = -17k$$

$$y = 972 - 17k.$$

6. $17(-1\,134 + 20k) + 20(972 - 17k)$
 $= -19\,278 + 340k + 19\,440 - 340k = 162$
 donc les solutions de (E') sont solutions de (E) .
 $S = \{(-1\,134 + 20k; 972 - 17k); k \in \mathbb{Z}\}.$

$$7. x \geq 0 \Leftrightarrow -1\,134 + 20k \geq 0 \Leftrightarrow k \geq \frac{1\,134}{20}$$

$$\text{et } y \geq 0 \Leftrightarrow 972 - 17k \geq 0 \Leftrightarrow k \leq \frac{972}{17}.$$

$$\text{Donc } \frac{1\,134}{20} \leq k \leq \frac{972}{17}.$$

Le seul entier dans l'inégalité est $k = 57$.

$$\text{Par suite } x = -1\,134 + 20 \times 57 = 6;$$

$$y = 972 - 17 \times 57 = 3.$$

Il y a donc 6 CD et 3 DVD.

6. Les nombres premiers

6.1 Le crible d'Ératosthène

1.	②	③	4	⑤	6	⑦	8	9	10
⑪	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2. Les nombres entourés sont premiers, car ils ne sont divisibles par aucun nombre qui leur est inférieur.

3. Si on a entouré k , alors les nombres $2k, 3k, \dots, (k-1)k$ ont déjà été rayés, car ils sont des multiples respectivement de 2, 3, ..., $k-1$.

$$4. 16^2 = 256; 15^2 = 225.$$

Donc le prochain nombre à rayer est $256 > 250$.

$$5. 31^2 = 961. \text{ On doit aller jusqu'à } p = 31. \\ 32^2 = 1024.$$

6.2 Les nombres de Carmichael

1. Un nombre premier p l'admet que p comme diviseur premier. Or $p-1$ divise $p-1$; donc les nombres premiers sont des nombres de Carmichael.

2. et 3.

1 729	7	$1\,729 = 7 \times 13 \times 19$	} donc 1 729 est un nombre de Carmichael.
247	13	6 divise 1 729	
19	19	12 divise 1 729	
1		18 divise 1 729	
2 695	5	$2\,695 = 5 \times 7^2 \times 11$	
539	7	4 ne divise pas 2 694	
77	7	donc 2 695 n'est pas un nombre de Carmichael.	
1	11		

Exercices (p. 454)

1. à 21. Corrigés dans le manuel.

1. Divisibilité et division euclidienne

22.

• $D(30) = \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$ dans $\mathbb{N}$.

• $D(30) = \{-30; -15; -10; -6; -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$ dans $\mathbb{Z}$.

23. 1.

• $D(70) = \{1; 2; 5; 7; 10; 14; 35; 70\}.$
 • $D(154) = \{1; 2; 7; 11; 14; 22; 77; 154\}.$

2. $70 = 2 \times 5 \times 7; 154 = 2 \times 5 \times 11;$
 $70 \times 11 = 5 \times 154.$

24. Corrigé dans le manuel.

25. 1.

$$D(70) = \{1; 2; 5; 7; 10; 14; 35; 70\};$$

1 bonbon rouge dans 70 sachets; 2 dans 35 sachets; 2 dans 35 sachets; 5 dans 14 sachets; 7 dans 10 sachets; 10 dans 7 sachets; 14 dans 5 sachets; 35 dans 2 sachets et 70 dans 1 sachet.

$$2. D(63) = \{1; 3; 7; 9; 21; 63\};$$

1 bonbon bleu dans 63 sachets; 3 dans 21 sachets; 7 dans 9 sachets; 9 dans 7 sachets; 21 dans 3 sachets et 63 dans 1 sachet.

3. 7 sachets dans lesquels on retrouvera 10 bonbons rouges et 9 bleus.

4. Le nombre de sachets est un diviseur de 590 et 200 et donc de n'importe quelle

combinaison linéaire entre 590 et 200, notamment $3 \times 200 - 1 \times 590 = \boxed{10}$.

Les diviseurs de 10 sont 1, 2, 5 ou 10 sachets en répartissant équitablement les bonbons dans chaque sachet.

26. Corrigé dans le manuel.

27.

$$\left. \begin{array}{l} n-2 \text{ divise } n-2 \\ n-2 \text{ divise } n+5 \end{array} \right\} (n+5) - (n-2) = 7; \\ D(7) = \{1; 7\}.$$

$n-2$	n	$n+5$	$n-2 \text{ divise } n+5$
1	0	8	oui
7	9	14	oui

28.

$$\left. \begin{array}{l} n+7 \text{ divise } n+7 \\ n+7 \text{ divise } 2n+15 \end{array} \right\} (2n+15) - 2(n+7) = 1;$$

$$D(1) = \{1\}.$$

$n+7$	n	$2n+15$	$n+7$ divise $2n+15$
1	-6	3	oui

$n \notin \mathbb{N}$ donc il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}$ tel que $n+7$ divise $2n+15$.

29. Corrigé dans le manuel.

30. 2^4 admet exactement 5 diviseurs.

31. à 33. Corrigés dans le manuel.

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 12 \times q + 8 \\ n = 10 \times (q+1) + 2 \end{array} \right.$$

$$2q - 10 + 6 = 0$$

$$2q = 4$$

$$[q=2]; n = 24 + 8 = 32.$$

35. • $a = 16 \times q + 5$

$$a + 10 = 16 \times q + 15$$

$0 \leq 15 < 16$ donc le reste de $a + 10$ par 16 est 15.

$$\bullet a + 13 = 16 \times q + 18$$

$$a + 13 = 16 \times (q+1) + 2$$

le reste de $a + 13$ par 16 est 2.

$$\bullet a + 13 = 8 \times (2q) + 18$$

$$= 8 \times (2q+2) + 2$$

le reste de $a + 13$ par 8 est 2.

36. 1. $n^3 - n^2 = n^2(n-1)$
 $\Leftrightarrow n^2 - 1 = (n-1)(n+1).$

$$\left. \begin{array}{l} (n-1) \text{ divise } n^3 - n^2 \\ (n-1) \text{ divise } n^2 - 1 \end{array} \right\} (n-1) \text{ divise}$$

$$(n^3 - n^2) + (n^2 - 1) = (n^3 - 1).$$

2. $n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1)$

(éventuellement avec XCAS et à vérifier ensuite).

37. $n^2 - m^2 = 15$

$$\Leftrightarrow (n-m)(n+m) = 15;$$

$$D(15) = \{1; 3; 5; 15\}.$$

Si n et m sont des entiers naturels alors $n \geq m$ car $n+m \geq 0$ donc $n-m$ doit être aussi positif. IMPOSSIBLE.

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} n-m=15 \\ n+m=1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n=15+m \\ 15+2m=1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n=15+m \\ m=-7 \end{array} \right.;$$

m entier naturel.

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} n-m=1 \\ n+m=15 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n=1+m \\ 1+2m=15 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n=8 \\ m=7 \end{array} \right.; (8; 7).$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} n-m=3 \\ n+m=5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n=3+m \\ 3+2m=5 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n=3+m \\ m=1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n=4 \\ m=1 \end{array} \right.; (4; 1).$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} n-m=5 \\ n+m=3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n=5+m \\ 5+2m=3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n=5+m \\ m=-1 \end{array} \right.;$$

m entier naturel. IMPOSSIBLE.

38. $x^2y + y = 102$

$$\Leftrightarrow y(\underbrace{x^2+1}_d) = 102;$$

$$D(102) = \{1; 2; 61; 102\}.$$

Parmi les diviseurs d , $d-1$ doit être un carré.

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} y=102 \\ x^2=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=102 \\ x=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow (0; 102).$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} y=61 \\ x^2+1=2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=61 \\ x^2=1 \end{array} \right. \Leftrightarrow (1; 61).$$

39. $ab = a + b$ donc a divise $a + b$ et comme a divise a , il divise la combinaison linéaire: $(a+b) - a = b$.

Ainsi a divise b .

De même b divise $a + b$ et comme b divise b , il divise $(a+b) - b = a$.

Finalement a divise b et b divise a donc $a = b$.

La relation devient $a^2 = 2a$

donc $a = 0$ et $b = 0$

ou $a = 2$ et $b = 2$.

40. 1. $d = 0; n = 13; b = 4; n > b.$

$$d = 1; n = 9; b = 4; n > b.$$

$$d = 2; n = 5; b = 4; n > b.$$

$$d = 3; n = 1; b = 4; n > b.$$

$$[d=3] \quad [n=1]$$

2. Pour $n = 203$ et $b = 5$, on obtient $d = 40$ et $n = 3$.

3. Cet algorithme permet de faire afficher le quotient (d) et le reste (n) de la division euclidienne de n par b .

41. Corrigé dans le manuel.

42. 1. $n^2 + 3n + 9$ divisible par 9

$$\Leftrightarrow n^2 + 3n \text{ divisible par } 9$$

$$\Leftrightarrow n(n+3) \text{ multiple de } 9.$$

Si $n = 3k + 1$, n et $n + 3$ ne sont pas des multiples de 3 donc $n(n+3)$ n'est pas un multiple de 9.

Idem si $n = 3k + 2$.

Conclusion: si n n'est pas multiple de 3, $n^2 + 3n + 9$ n'est pas multiple de 9.

Et par contraposée, la propriété est vraie.

2. $n = 3n^1;$

$$9n^{12} + 9n^1 + 9 = 9(n^{12} + n^1 + 1). \text{ Vrai.}$$

3. $n = 2; n^3 + 3 = 7$ non divisible par 4. Faux.

4. $n = 2p + 1; (2p + 1)^2 + 3$

$$4p^2 + 4p + 1 + 3 = 4(p^2 + p + 1). \text{ Vrai.}$$

5. $n = 3k; (3k)^2 + 3k$

$$9k^2 + 3k = 3(3k^2 + k). \text{ Vrai.}$$

6. $n^2 + n = 3k; CE: 11^2 + 11 = 132;$
132 divisible par 3 mais pas 11. Faux.

43. Si n est pair, on peut poser $n = 2p$:

$$n^3 + 4n = 240$$

$$8p^3 + 8p = 240$$

$$p(\underbrace{p^2 + 1}_d) = 30; d - 1 \text{ doit être un carré normal.}$$

$$D(30) = \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}.$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} p^2 + 1 = 2 \\ p = 1 \end{array} \right. \text{ faux;}$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} p^2 + 1 = 5 \\ p = 2 \end{array} \right. \text{ faux;}$$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} p^2 + 1 = 10 \\ p^2 = 9 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p = 3 \\ p^2 = 9 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p = 3 \\ p = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow [n=6]$$

Si n est impair, n^3 est impair et $n^3 + 4n$ est impair et ne peut pas être égal à 240.

44. $n = 43q + 40;$

$$0 \leq 43q + 40 \leq 2012$$

$$\Leftrightarrow -40 \leq 43q \leq 1972$$

$$\Leftrightarrow -0,9 \leq q \leq 45,9.$$

$$\bullet q = 0 \Leftrightarrow n = 40$$

$$\bullet q = 1 \Leftrightarrow n = 83$$

⋮

$$\bullet q = 45 \Leftrightarrow n = 1975$$

Soit 46 entiers.

45. Si $b > 8$:

$a = b \times 7 + 8$ est la division euclidienne de a par b et le reste est 8.

Sinon:

$$\underline{b=0}; a=8; a=0 \times p + \underline{8}.$$

$$\underline{b=1}; a=15; a=1 \times 15 + \underline{0}.$$

$$\underline{b=2}; a=22; a=2 \times 11 + \underline{0}.$$

$$\underline{b=3}; a=29; a=3 \times 9 + \underline{2}.$$

$$\underline{b=4}; a=36; a=4 \times 9 + \underline{0}.$$

$$\begin{aligned} b=5; a=43; a &= 5 \times 8 + \boxed{3}. \\ b=6; a=50; a &= 6 \times 8 + \boxed{2}. \\ b=7; a=57; a &= 7 \times 8 + \boxed{1}. \end{aligned}$$

46. $a = b \times q + r$
 $\oplus$

$$\frac{a' = b \times q' + r'}{a + a' = b(p + p') + (r + r')}$$

$$r < b \text{ et } r' < b; r + r' < 2b.$$

$$\begin{aligned} \text{CE : } 10 &= 3 \times 3 + 1; \\ 11 &= 3 \times 3 + 2; \\ 21 &= 3 \times 7 + 0. \end{aligned}$$

47. $9m^2 - n^2 = 36$
 $\Leftrightarrow (3m)^2 - (n)^2 = 36$
 $\Leftrightarrow (3m - n)(3m + n) = a \times b$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 3m - n = a \\ 3m + n = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6m = a + b \\ 2n = b - a \end{cases}$

avec $b > a$.

$$D(36) = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}.$$

$$\begin{aligned} 36 &= a \times b \text{ avec } a \leq b \\ \text{donc } a &= 1 \text{ et } b = 36 \\ \text{ou } a &= 2 \text{ et } b = 18 \\ \text{ou } a &= 3 \text{ et } b = 12 \\ \text{ou } a &= 4 \text{ et } b = 9 \\ \text{ou } a &= 6 \text{ et } b = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 6m = 37 \\ 2n = 35 \end{cases} \text{ IMP ; } \begin{cases} 6m = 20 \\ 2n = 16 \end{cases} \text{ IMP ;}$$

$$\begin{cases} 6m = 15 \\ 2n = 9 \end{cases} \text{ IMP ; } \begin{cases} 6m = 13 \\ 2n = 5 \end{cases} \text{ IMP.}$$

$$\begin{cases} 6m = 12 \\ 2n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 0 \end{cases}.$$

48. Corrigé dans le manuel.

49. 1.

$$n + (n + 1) + n + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

2. Pour que la somme soit paire, il faut 2 impairs et 1 pair. n et $(n + 2)$ doivent être impairs et $(n + 1)$ pair. De plus, n est impair alors $n = 2k + 1$ et $n + (n + 1) + (n + 2) = 6k + 6$ divisible par 6.

50. $D(n) = \{1; d; n\}$ donc on doit avoir $d \times d = n$, n est donc un carré. Et d est forcément premier sinon on pourrait trouver d'autres diviseurs de n .

51. 2. Entre 0 et 100, il y a :

- 76 nombres déficients;
- 22 abondants;
- 2 nombres parfaits.

3. Les nombres premiers sont déficients car 1 est leur seul diviseur. La somme des diviseurs propres est donc minimum, soit 1.

52. 1. 0, 1, 2, 3, 4, 5.

2. Si p premier, alors :

$$p = 6n \Rightarrow \text{impossible car divisible par 6 ;}$$

$$p = 6n + 1 \text{ possible ;}$$

$$p = 6n + 2 = 2(3n + 1) \Rightarrow \text{impossible, divisible par 2, } p \neq 2$$

$$p = 6n + 3 = 3(2n + 1) \Rightarrow \text{impossible, divisible par 3, } p \neq 3$$

$$p = 6n + 4 = 2(3n + 2) \Rightarrow \text{impossible, divisible par 2, } p \neq 2$$

$$p = 6n + 5 \text{ possible ;}$$

$$p = 6(n + 1) - 1 = 6N - 1.$$

3. $\begin{cases} Y_1 = 6X + 1 \\ Y_2 = 6X - 1 \end{cases}$ X allant de 1 à 16 :
32 cas seulement à étudier.

53. 1. Disjonction des cas.

$$\boxed{n \text{ pair et } p \text{ pair} \Rightarrow n^2, p^2 \text{ et } np \text{ pairs} \Rightarrow n^2 + np + p^2 \text{ pair}}$$

$$\begin{aligned} n \text{ impair et } p \text{ pair} &\Rightarrow n^2 \text{ impair ;} \\ &\quad p^2 \text{ et } np \text{ pairs} \\ &\Rightarrow n^2 + np + p^2 \text{ impair.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n \text{ impair et } p \text{ impair} &\Rightarrow n^2 \text{ impair,} \\ &\quad np \text{ impair} \\ &\quad \text{et } p^2 \text{ impair} \\ &\Rightarrow n^2 + np + p^2 \text{ impair.} \end{aligned}$$

Donc $n^2 + np + p^2$ est pair si et seulement si n et p sont pairs.

2. $n = 2; p = 2; 4 + 4 + 4 = 12;$

Impossible.

$n = 2; p = 4; 4 + 8 + 16 = 28;$

Impossible.

$n = 4; p = 2; 16 + 8 + 4 = 28;$

Impossible.

Il n'existe aucun couple $(n; p)$ tel que $n^2 + np + p^2 = 20$.

54. 1. Raisonnement par l'absurde : On sait que $(a + b)$ et $(a - b)$ sont premiers entre eux. Supposons que a et b ne sont pas premiers entre eux alors il existe un diviseur $d (\neq 1)$ qui divise a et b .

Si d divise a et d divise b , alors d divise toutes les combinaisons linéaires entre a et b soit $(a + b)$ et $(a - b)$.

$(a + b)$ et $(a - b)$ ne sont donc pas premiers entre eux, ce qui est contraire à l'énoncé.

2. La réciproque est fausse. Par exemple avec $a = 5$ et $b = 3$; a et b sont premiers entre eux mais $a + b = 8$ et $a - b = 2$ ne sont pas premiers entre eux.

55. 1. p impair ; $p = 2k + 1 :$

$$\begin{aligned} p^2 &= (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1; \end{aligned}$$

p^2 impair.

2. p pair ; $p = 2k :$

$$p^2 = 4k^2 = 2(2k^2); p^2 \text{ pair.}$$

Remarque : prouver que pour tout entier p « p^2 est pair $\Rightarrow p$ pair » est équivalent à prouver sa contraposée, autrement dit à prouver

« (non (p est pair)) $\Rightarrow$ (non (p^2 pair)) », ce qui revient à prouver l'implication

« p est impair $\Rightarrow p^2$ impair »

ce qui a déjà été fait à la question 1..

56. L'égalité $p^2 = 2q^2$ prouve que p^2 est pair.

On a déjà prouvé qu'un entier a la même priorité que son carré donc p est également un entier pair.

Il existe donc un entier k tel que $p = 2k$ soit $(2k)^2 = 2p^2; 4k^2 = 2q^2; 2k^2 = q^2$ donc q^2 est pair et q est pair (même priorité que q^2)

p et q sont tous les deux pairs ce qui est absurde puisque la fonction $\frac{p}{q}$ avait été choisie irréductible, donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

57. $n \times (n + 1) = 4k; Y_1 = (X^2 + X)/4$. On remarque que $n(n + 1)$ est divisible par 4 si $n = 4k + 3$ ou $n = 4k$.

Disjonction des cas :

• $n = 4k :$

$$\begin{aligned} n^2 + n &= 16k^2 + 4k = 4(4k^2 + 1) \\ &\text{divisible par 4.} \end{aligned}$$

• $n = 4k + 1 :$

$$\begin{aligned} n^2 + n &= 16k^2 + 8k + 1 + 4k \\ &= 4(4k^2 + 3k) + 2 \end{aligned}$$

non divisible par 4.

• $n = 4k + 2 :$

$$\begin{aligned} n^2 + n &= 16k^2 + 16k + 4 + 4k + 2 \\ &= 4(4k^2 + 3k) + 6 \end{aligned}$$

• $n = 4k + 3 :$

$$\begin{aligned} n^2 + n &= 16k^2 + 24k + 9 + 4k + 3 \\ &= 4(4k^2 + 7k + 3) \end{aligned}$$

divisible par 4.

58. Exemple : 743 ; renversé : 347 ; différence : 396 ; différence + renversé : 743.

532 ; renversé : 235 ; différence : 297 ; différence + reversé : 532.

231 ; renversé : 132 ; différence : 99 ; différence + reversé : 231.

On retrouve le nombre de départ !

$$n = 100a + 10b + c$$

$$r = 100c + 10b + a$$

$$n - r = 100(a - c) + (c - a)$$

$$\begin{aligned} (n-r) + r &= 100a - 100c + c - a + 100c + 10b + a \\ &= 100a + 10b + c = n. \end{aligned}$$

59. 1. $a = q \times 50 + r$; $r < 50$

$$a = q' \times 50 + r' ; r' < 10$$

$$r = a - q \times 50$$

$$r' = a - q' \times 10$$

$$r' - r = 10(5q - q') ; r' - r \text{ est un multiple de } 10.$$

$$2. 0 < r' < 10$$

$$\text{or } r < r' \text{ donc } 0 < r < 10$$

$$-10 < -r' < 0$$

$$0 < r < 10$$

$$\text{donc } -10 < r - r' < 10, \text{ de plus } r' - r \text{ est multiple de } 10.$$

$$\text{donc } r' - r = 0 \Leftrightarrow r = r'.$$

$$60. b > 1 ; b \in \mathbb{N}$$

$$5q > b.$$

$$1. 5 \times b = 5b > b \text{ donc } b \in E.$$

$$2. q = p - 1$$

$$5p > b \text{ car } p \in E$$

$$b - 5p < 0$$

$$b - 5p + 5 < 5$$

$$b - 5(p + 1) < 5$$

$$b - 5q < 5$$

$$q = p - 1 \text{ donc } q \notin E$$

$$\text{donc } 5q \leq b \Leftrightarrow 0 \leq b - 5q.$$

61. Existence : Soit M l'ensemble des multiples de b supérieurs ou égaux à a .

M est non vide.

M est majorée par a .

L'ensemble M est donc une partie de $\mathbb{N}$ non vide.

Appelons p le plus petit élément.

$$\text{Cas } b \geq 1 : \text{ alors } \begin{cases} bp > a \text{ et} \\ b(p-1) < a \end{cases} (1)$$

$$\text{posons } q = p - 1 \text{ et } r = a - bq$$

$$\text{on a bien } a = bq + r$$

$$\text{de plus } r > 0$$

$$\begin{aligned} \text{et } r - b &= a - bq - b = a - b(q + 1) \\ &= a - bp < 0 \end{aligned}$$

$$\text{donc } r < b.$$

Unicité : Supposons qu'il existe deux couples

$$a = bq + r \text{ avec } 0 \leq r < b$$

$$a = bq' + r' \text{ avec } 0 \leq r' < b.$$

En effectuant la différence membre à membre de ces égalités

$$r - r' = b(q' - q) \quad r - r' \text{ est multiple de } b$$

$$\text{De plus } 0 < r < b$$

$$-b < -r' < 0$$

$$\text{donc } -b < r - r' < 0.$$

$$\text{Le seul multiple de } b \in]-b ; b[\text{ est } 0$$

$$\text{donc } r - r' = 0 \Leftrightarrow r = r' \text{ et } q' = q$$

$$\text{car } b \neq 0.$$

62. 2. L'algorithme permet de déterminer tous les nombres parfaits de 1 à 10 000.

2. Congruences

63. Corrigé dans le manuel.

$$64. -4 \equiv 38[7]$$

$$15 \equiv -13[7].$$

65. Corrigé dans le manuel.

$$66. a \equiv 7[10]$$

$$b \equiv 6[10]$$

$$a + b \equiv 13[10]$$

$$a + b \equiv 3[10] \quad n = 3$$

$$a \times b \equiv 42[10]$$

$$a \times b \equiv 2[10].$$

67. à 69. Corrigés dans le manuel.

70. 1.

$x[4]$	0	1	2	3
$x^2[4]$	0	1	0	1

2. D'après le tableau ci-dessus les restes de la division euclidienne de $x^2 + 1$ ne peuvent être que 1 ou 2, $x^2 + 1$ n'est donc jamais divisible par 4.

3. Si $x \equiv 0[4]$ alors $x^2 \equiv 0[4]$ VRAIE

Si $x^2 \equiv 0[4]$ alors $x \equiv 0[4]$ FAUX
par exemple en prenant $x \equiv 2[4]$.

71.

$x[5]$	0	1	2	3	4
$3x + 2[5]$	2	0	3	1	4

D'après le tableau ci-dessus les solutions dans $\mathbb{N}$ de l'équation $3x + 2 = 0[5]$ sont les entiers naturels tels que :
 $x = k \times 5 + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$.

72.

$x[5]$	0	1	2	3	4
$x^2[5]$	0	1	4	4	1

D'après le tableau ci-dessus les solutions de l'équation $x^2 \equiv 1[5]$ sont les entiers naturels tels que :

$$x = k \times 5 + 1 \text{ ou } x = k \times 5 + 4$$

$$\text{avec } k \in \mathbb{N}$$

$$S = \{1 ; 4 ; 6 ; 9 ; 11 ; 14 ; 19 ; 21 ; 24 ; 39 ; 31 ; 34\}$$

73. Corrigé dans le manuel.

$$74. 1. a = 7 \text{ or } 4 \times 7 = 28 \text{ et } 28 = 3 \times 9 + 1.$$

$$2. 4x \equiv 1[9] \Leftrightarrow 28x \equiv 7[9]$$

$$\Leftrightarrow x \equiv 7[9].$$

$$75. S = \{7 ; 16 ; 25 ; 34 ; 43\}.$$

$$1. 10 \equiv 1[9] ; 100 \equiv 1[9]$$

$$234 = 2 \times 100 + 3 \times 10 + 4$$

$$234 \equiv 2 + 3 + 4[9]$$

$$234 \equiv 0[9].$$

$$2. 10 \equiv 1[9] \text{ donc } 10^n \equiv 1^n[9], 10^n \equiv 1[9].$$

$\overline{a_n \dots a_1 a_0}$ est divisible par 9 si $a_n + \dots + a_1 + a_0$ est divisible par 9.

$$3. 10 \equiv -1[11]$$

$$100 \equiv 1[11]$$

$$10^n \equiv -1[11] \text{ si } n \text{ est impair.}$$

$$10^n \equiv 1[11] \text{ si } n \text{ est pair.}$$

$\overline{a_n \dots a_1 a_0}$ est divisible par 11 si $(-1)^n a_n + \dots + (-1)^1 a_1 + (-1)^0 a_0$ est divisible par 11.

76. 765 est divisible par 9 car $7 + 6 + 5 = 18$

donc $765 \times 47 = 9 \times k \times 47$ et 765×47 est divisible par 9.

$3 + 5 + 8 + 5 + 5 = 26$, or 26 n'est pas divisible par 9 donc 35 855 n'est pas divisible par 9 et $765 \times 47 \neq 35855$.

$$77. 1. 1 \times \cancel{0} \equiv 1[7].$$

$$2 \times 4 \equiv 1[7].$$

$$3 \times 5 \equiv 1[7].$$

$$4 \times 2 \equiv 1[7].$$

$$5 \times 3 \equiv 1[7].$$

$$6 \times 6 \equiv 1[7].$$

a	0	1	2	3	4	5	6
Inverse de a		$\cancel{0}1$	4	5	2	3	6

$$2. \bullet 3x \equiv 5[7] \Leftrightarrow 15x \equiv 25[7]$$

$$\Leftrightarrow x \equiv 4[7]$$

$$\bullet 4x - 2 \equiv 0[7] \Leftrightarrow 4x \equiv 2[7]$$

$$\Leftrightarrow 8x \equiv 4[7]$$

$$\Leftrightarrow x \equiv 4[7]$$

78. Corrigé dans le manuel.

79. 1. Faux un nombre divisible par 5

n'est pas forcément divisible par 10.

2. Voir un nombre divisible par 10 est divisible par 5.

3. Voir un nombre non divisible par 5 est divisible par 10.

4. Faux $n = 15$ est un contre exemple.

5. Faux, contre exemple donc $n = 8$. La congruence n'est pas compatible avec la division.

6. Vrai.

Si $2n = 6[10]$ alors $2n = k \times 10 + 6$

$$\Leftrightarrow n = k \times \frac{10}{2} + \frac{6}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = k \times 5 + 3$$

$$\Leftrightarrow n = 3[5].$$

7. Vrai

$$3n + 12 \neq 0[15]$$

$$3 + 12 \neq k \times 15$$

$3(n + 4) \neq k \times 15$ $n + 4$ n'est pas divisible par 5.

80. $10^1 = 10[111]$

$$10^2 = 100[111]$$

$$10^3 = 1[111]$$

$$\bullet 10^{60} = (10^3)^{20} \equiv 1^{20}[111]$$

$$10^{60} = 1[11] \text{ et } 10^{61} = 10[111]$$

$$\bullet 10^5 = 10^3 \times 10^2 = 100[111] \text{ et }$$

$$10^{61} + 4^5 + 3 \equiv 113[111]$$

$$\equiv 2[111]$$

Le reste de la division euclidienne de $10^{60} + 10^5 + 5$ par 111 est 2.

$$10^{61} + 10^5 + 3 \equiv 2[111].$$

81. Corrigé dans le manuel.

82. $A = n^7 + 2n^3$

$$\bullet \text{ si } n \equiv 0[3], \quad n^7 + 2n^3 = 0 \equiv [3]$$

$$\bullet \text{ si } n \equiv 1[3], \quad 3 = 0 \equiv [3]$$

$$\bullet \text{ si } n \equiv 2[3], \quad 144 = 0 \equiv [3]$$

Tout entier étant nécessairement comparable à 0, 1 ou 2 module 3, tous les cas ont été examinés. On peut donc conclure que A est divisible par 3.

83. 1. $3^2 \equiv 4[5]$

$$3^3 \equiv 2[5]$$

$$3^4 \equiv 1[5]$$

$$3^5 \equiv 3[5]$$

$$3^0 \equiv 1[5]$$

$$3 \equiv 3[5]$$

$$\bullet \text{ si } n = 4p, \quad 3^n = 1[5]$$

$$\bullet \text{ si } n = 4p + 1, \quad 3^n = 3[5]$$

$$\bullet \text{ si } n = 4p + 2, \quad 3^n = 4[5]$$

$$\bullet \text{ si } n = 4p + 3, \quad 3^n = 2[5]$$

$$3^{319} \equiv 2[5].$$

84. $2^0 \equiv 1[7]$

$$2^1 \equiv 2[7]$$

$$2^2 \equiv 4[7]$$

$$2^3 \equiv 1[7]$$

$$2^4 \equiv 2[7]$$

$$2^5 \equiv 4[7]$$

$\vdots$

$$\bullet \text{ si } n = 3p, \quad 2^n = 1[7]$$

$$\bullet \text{ si } n = 3p + 1, \quad 2^n = 2[7]$$

$$\bullet \text{ si } n = 3p + 2, \quad 2^n = 4[7]$$

85. $7^0 \equiv 1[5]$

$$7^1 \equiv 2[5]$$

$$7^2 \equiv 4[5]$$

$$7^3 \equiv 3[5]$$

$$7^4 \equiv 1[5]$$

$\vdots$

$$\bullet \text{ si } n = 4p, \quad 7^n = 1[5]$$

$$\bullet \text{ si } n = 4p + 1, \quad 7^n = 2[5]$$

$$\bullet \text{ si } n = 4p + 2, \quad 7^n = 4[5]$$

$$\bullet \text{ si } n = 4p + 3, \quad 7^n = 3[5]$$

$$203 = 50 \times 4 + 3 \text{ donc } 7^{203} \equiv 3[5]$$

86. $\bullet 11 \equiv 1[10] \text{ donc } 11^n \equiv 1^n[10]$

$$\bullet 9 \equiv -1[10] \text{ donc } 9^n \equiv 1[10] \text{ si } n \text{ pair;}$$

$$9^n \equiv -1[10] \text{ si } n \text{ impair;}$$

$$\bullet 5 \equiv 5[10]$$

$$5^2 \equiv 5[10]$$

$$5^2 \equiv 5[10] \dots$$

$$11^n + 9^n + 5^n \equiv 1 + 1 + 5[10] \equiv 7[10]$$

si n pair;

$$11^n + 9^n + 5^n \equiv 1 - 1 + 5[10] \equiv 5[10]$$

si n impair.

87. 1.

$n[3]$	0	1	1
$n^2[3]$	0	1	1

2. p^2 est un multiple de 3 ($p^2 = 3p^2$) donc $p^2 \equiv 0[3]$ et d'après le tableau de congruence $p \equiv 0[3]$.

3. $p^2 = 3q^2$

$$(3k)^2 = 3q^2$$

$$\frac{9k^2}{3} = q^2$$

$$q = 3k^2$$

$\frac{9}{3} = k^2$ $k^2 \in \mathbb{N}$ donc p est bien divisible par 3.

4. $p^2 = 3q^2$

$\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ si $\sqrt{3}$ rationnel alors p et q sont premiers entre eux or p et q sont tous les deux divisibles par 3 dont $\sqrt{3}$ est irrationnel.

88.

$n[4]$	0	1	2	3
$2n[4]$	0	2	0	2
$n^2 + [4]$	1	2	1	2

$$\bullet \text{ si } n \in [4], \quad 2n(n^2 + 1) \equiv 0 \times 1[4]$$

$$\bullet \text{ si } n \equiv 1[4], \quad 2n(n^2 + 1) \equiv 4[4]$$

$$2n(n^2 + 1) \equiv 0[4]$$

$$\bullet \text{ si } n \equiv 2[4], \quad 2n(n^2 + 1) \equiv 0[4]$$

$$\bullet \text{ si } n \equiv 3[4], \quad 2n(n^2 + 1) \equiv 4[4]$$

$$2n(n^2 + 1) \equiv 0[4]$$

$2n(n^2 + 1)$ est divisible par 4.

89.

$n[6]$	0	1	2	3	4	5
$3n$	0	3	0	3	0	3
$n^2 + 5$	5	0	3	2	3	0
$3n(n^2 + 5)$	0	0	0	0	0	0

D'après le tableau de congruence ci-dessus $(n^2 + 5) \times 3n$ est divisible par 6 pour tout n.

Faux : $\cos n = 2(n^2 + 5) \times 3n = 9 \times 6 = 54$ divisible par 6 mais m n'est pas divisible par 3.

90.

$x[8]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x^2[8]$	0	1	4	1	0	1	4	1
$4x - 4$	+4	0	4	0	4	0	4	0

D'après le tableau de congruence ci-dessus $x^2 + 4x - 4 \equiv 0[8]$ si $x \equiv 2[8]$ ou $x \equiv 6[8]$.

91.

$x[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$x^2[7]$	0	1	4	2	2	4	1
$y^2[7]$	1	4	2	2	4	4	1

$x^2 + y^2$ peut donc valoir 0 ; 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 3 ; 6 et $x^2 + y^2 \equiv 0[7]$ seulement quand $x \equiv 0[7]$ et $y \equiv 0[7]$.

D'après le tableau de congruence ci-dessus $x^2 + y^2 \equiv 0 [7]$.

92. Corrigé dans le manuel.

93. 1.

$x[9]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x^2[9]$	0	1	4	0	7	7	0	4	1
$x^3[9]$	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1

2. D'après le tableau ci-dessus.

• si $x^3[9] \equiv 0$ dx $x \equiv 0[9]$ $x \equiv 3[9]$ ou $x \equiv 6[9]$ donc x est multiple de 9 (donc multiple de 3) ou le reste de la division euclidienne de x par 9 est 3 ou 6 qui sont les multiples de 3 donc si $x^3[9] \equiv 0$ alors $x \equiv 0[3]$.

• si $x \equiv 0[3]$ alors $x \equiv 0[9]$ ou $x \equiv 3[9]$ ou $x \equiv 6[9]$ dans ses $x^2[9] \equiv 0$ d'où $x^3 \equiv 0[9] \Leftrightarrow x \equiv 0[3]$.

3. $p^3 = 2q^3$.

D'après le tableau, les valeurs possibles modulo 9 pour p^3 sont 0, 1 ou -1.

Les valeurs pour p^3 sont 0 ; 2 ; -2

donc $p^3 = 2q^3 \Leftrightarrow p^3 \equiv 0[9]$ et $2q^3 \equiv 0[9]$.

4. Comme $p^3 \equiv 0[9]$ alors $p \equiv 0[3]$ donc 3 divise p .

De plus toujours d'après le tableau $2q^3 \equiv 0[9] \Leftrightarrow q^3 \equiv 0[9] \Leftrightarrow q$ divisible par 9.

5. Si $p^3 = 2p^3$ alors p et q sont divisibles par 3. Il n'existe pas de fraction irréductible telle que $\left(\frac{p}{q}\right)^3 = 2$.

94. $123 \equiv 3[5]$

et $5 \equiv 0[5]$ donc $5y^2 \equiv 0[5]$.

Soit x^2 doit être égale à 3 modulus.

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1

D'après le tableau de congruence ci-dessus il n'existe pas d'entier x vérifiant $x^2 \equiv 3[5]$ donc $x^2 + 5y^2 = 123$ n'admet pas de solution entière.

96. 1. On cherche n tel que $2^n \equiv 1[7]$. Si $n = 3$ on a bien $2^3 \equiv 1[7]$ car $2^3 \equiv 8 = 1 \times 7 + 1$.

On cherche n tel que $3^n \equiv 1[7]$.

Si $n = 6$ on a bien $3^6 \equiv 1[7]$ car $3^6 = 729 = 7 \times 104 + 1$.

2.

$$A_{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} + 5^{2006} + 6^{2006}.$$

On a $2^6 \equiv 1[7]$ donc finalement $2^{2006} \equiv 4[7]$. De même $3^6 \equiv 1[7]$ que $3^{2006} \equiv 3^2[7]$.

Il en est de même pour les autres puissances.

$$\bullet 4^n \equiv (2^2)^n = (2^n)^2 \text{ donc } 4^6 \equiv 1[7]$$

$$\bullet 5^n \equiv (-2)^n[7]$$

$$\text{donc } 5^6 \equiv (-2)^6[7] \equiv 2^6[7] \equiv 1[7]$$

$$\bullet 6^n \equiv (-1)^n[7] \text{ donc } 6^6 \equiv 1[7] \text{ donc}$$

$$A_{2006} + 2^3 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2[7] \equiv 90[7].$$

Or $90 = 12 \times 7 + 6$ donc finalement $A_{2006} \equiv 6[7]$.

97. $8 \equiv 3[5]$

$$8^2 \equiv 9[5] \text{ soit } 8^2 \equiv -1[5];$$

$$(8^2)^{120} \equiv (-1)^{120}[5];$$

$$(8^2)^{120} \equiv 1[5].$$

98. Cet algorithme permet de calculer le reste de la division euclidienne de 4^n modulo 107.

$$1. 4^4 \equiv 42[107];$$

$$4^5 \equiv 61[107].$$

$$4. 4^4 \equiv 1[107]$$

5. Avec l'algorithme : $106 \equiv Rb + 5$ avec $R < b$.

$$4^{106+5} \equiv 1[107]$$

$$\text{or } 4^b \equiv 1[107]$$

$$\text{donc } (4^b)^R \times 4^5 \equiv 1[107]$$

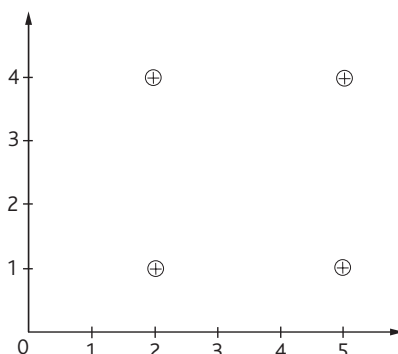
$$4r \equiv 1[107].$$

Mais $R < b$ et b est le plus petit entier strictement positif vérifiant cette relation donc $r = 0$ et $106 = k \times b$.

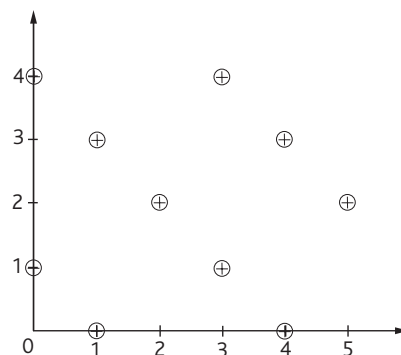
$106 = 2 \times 53$ (53 est un nombre premier)

or $4^2 \equiv 16[107]$ et $45^3 \equiv 1[107]$ (algorithme) donc le premier entier positif tel que $4^b \equiv 1[107]$ est 53.

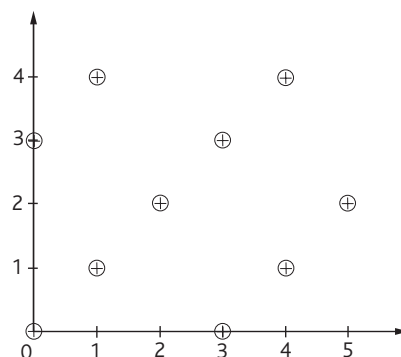
100. 1. $x \equiv 2[3]$ et $y \equiv 1[3]$.



2. $x + y \equiv 1[3]$.



3. $y \equiv 1[3]$.



101. 1.

• si $m = 1$ alors $7^n - 6 = 1 \Leftrightarrow 7^n = 7$ d'où $n = 1$.

Le couple $(1; 1)$ est solution de (F)

• si $m = 2$ alors $7^n - 12 = 1 \Leftrightarrow 7^n = 13$ pas de solution.

• si $m = 3$ alors $7^n - 24 = 1 \Leftrightarrow 7^n = 25$ pas de solution.

• si $m = 4$ alors $7^n - 48 = 1 \Leftrightarrow 7^n = 49$ d'où $n = 2$.

Le couple $(2; 4)$ est solution de (F)

2. a. Comme $m \geq 5$, il existe p tel que $m = 5 + p$

$(n; m)$ vérifie (F) donc $7^n - 3 \times 2^m = 1$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 7^n &= 1 + 3 \times 2^{5+p} \\ &= 1 + 3 \times 2^5 \times 2^p \\ &= 1 + 32 \times 2^p \end{aligned}$$

donc $7^n \equiv 1[32]$.

b. $7 \equiv 7[32]$

$$7^2 \equiv 17[32]$$

$$7^3 \equiv 23[32]$$

$$7^4 \equiv 1[32]$$

si $n = 4k$ alors $7^n \equiv 1[32]$

$$n = 4k + 1 \text{ alors } 7^n = (7^n)^k \times 7 \equiv 7[32]$$

$$n = 4k + 2 \text{ alors } 7^n = (7^n)^k \times 7^2 \equiv 17[32]$$

$$n = 4k + 3 \text{ alors } 7^n \equiv 73[32] \equiv 23[32]$$

Les puissances de 7 dont le reste dans la division par 32 est égal à 1 sont celles dont l'exposition est un multiple de 4.

c. $A = 4k$ d'après le b.

$$7^1 \equiv -2 [5]$$

$$7^2 \equiv 4 [5]$$

$$7^2 \equiv -1 [5]$$

$$7^4 \equiv 1 [5] \text{ et } (7^h)^k \equiv 1 [5].$$

$$d. \begin{cases} 7^n - 3 \times 2^m = 1 \\ 7^n \equiv 1 [5] \end{cases} \Rightarrow -3 \times 2^m \equiv 0 [5]$$

Ce qui n'est pas possible puisque 5 ne divise ni 2, ni 3.

Conclusion : il n'existe pas de couple solution avec un second terme (m) supérieur à 4.

5. D'après les questions précédentes, les seuls couples solutions de (F) sont (1;;1) et (2;4).

103. 1.

x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	3	4	1
$-x + 4$	4	3	2	1	0	-1
$x^2 - x + 4$	4	4	①	4	4	①

Les solutions vérifient $x \equiv 2 [6]$ ou $x \equiv 5 [6]$: réponse D

$$2. 1789^1 \equiv 4 [17]$$

$$1789^2 \equiv 16 [17]$$

$$1789^3 \equiv 13 [17]$$

$$1789^4 \equiv 1 [17]$$

$$2005 \equiv 4 \times 501 + 1$$

$$\text{donc } 1 + 89^{2005} \equiv 4 [17] : \text{réponse C}$$

104. **Partie A :**

1. Si $n = 2$ et $x = 1, y = 3$ et $z = 5$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 = 35$$

$$\text{or } 35 = 8 \times 4 + 3$$

$$\text{donc } 1^2 + 3^2 + 5^2 \equiv 3 [4].$$

2. a. $n = 3$

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R	0	1	4	1	0	1	4	1

b. Le reste (modulo 7) de la somme de 3 carrés ne peut être que 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 mais pas 7.

Conclusion : il n'existe pas d'entier x, y, z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7$ modulo 8.

Partie B :

$$1. \text{ Si } x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1 [2^n]$$

$$\text{donc } x^2 + y^2 + z^2 \equiv k + 2^n + 2^n - 1$$

$$\equiv 2^n(k + 1) - 1.$$

La somme est donc impaire ce qui signifie qu'aucun des trois nombres est pair ou alors que deux d'entre eux sont pairs.

$$2. \text{ Soit } x = 2q, y = 2r, z = 2s + 1.$$

$$a. x^2 + y^2 + z^2 = 4q^2 + 4r^2 + 4s^2 + 4s + 1$$

$$4(q^2 + r^2 + s^2 + s) + 1$$

$$\text{donc } x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1 [4].$$

$$b. x^2 + y^2 + z^2 = k \times 2^m + 2^n - 1 = 1 + 4k^-$$

d'où

$$2 + 4k^- = 2^n(1 + k) \underbrace{1 + 2k^-}_{\text{impair}} = \underbrace{2^{n-7}(1 + k)}_{\text{pair}}$$

ce qui est impossible.

3. On suppose que x, y et z sont impairs.

a. Pour tout naturel k non nul, $k^2 + k = k(k + 1)$ produit de deux entiers naturels consécutifs : l'un des deux facteurs est pair, donc le produit est pair.

$$b. \text{ Posons } x = 2q + 1, y = 2r + 1$$

$$\text{et } z = 2s + 1 \text{ alors}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = [4q^2 + 4q] + [4r^2 + 4r] + (4s^2 + 4s) + 3 = 4[(q^2 + q) + (r^2 + r) + (s^2 + s) + 3].$$

Or d'après la question précédente chaque parenthèse est un nombre pair donc $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \times (2\alpha + 2\beta + 2\gamma) + 3 = 8(\alpha + \beta + \gamma) + 3$

$$\text{soit : } x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3 [8]$$

$$c. 2^n - 1k \times 2^n = 3 + 8k^- + 8k^-$$

$$4 + 8k^- = 2^n(1 + k) \underbrace{1 + 2k^-}_{\text{impair}} = \underbrace{2^{n-2}(1 + k)}_{\text{pair}}$$

ce qui est impossible.

3. Pgcd

105. *Corrigé dans le manuel.*

$$106. 385 \{1; 5; \textcircled{7}; 11; 35; 55; 385\};$$

$$84 \{1; 2; 3; 4; 5; 6; \textcircled{7}; 12; 14; 21; 28; 42; 84\};$$

$$\text{PGCD}(385; 84) = 7$$

$$107. 3\,500 = 200 \times 17 + \textcircled{100};$$

$$200 = 100 \times 2 + 0;$$

$$\text{PGCD}(3\,500; 200) = 100.$$

108 et 109. *Corrigés dans le manuel.*

$$110. 437 = 391 \times 1 + 46;$$

$$391 = 46 \times 8 + \textcircled{23}$$

$$46 = 23 \times 2 + 0$$

$$\text{PGCD}(437; 391) = 23$$

$$\frac{391 : 23}{437 : 23} = \frac{17}{19}.$$

$$111. 595 = 204 \times 2 + 187;$$

$$204 = 187 \times 1 + \textcircled{17};$$

$$187 = 17 \times 11 + 0;$$

Il y aura 17 groupes composés chacun de 35 garçons et de 12 filles.

$$595 : 17 = 35.$$

112. *Corrigé dans le manuel.*

113. Par combinaison linéaire :

$$5n + 10 - 5n - 3 = 7.$$

Soit $d = \text{PGCD}(n + 2; 5n + 3)$ alors d divise 7 donc $d = 1$ ou $d = 7$.

Si $d = 7$ donc 7 divise $n + 2$ et $5n + 3$.

N	0	1	2	3	4	5	6
N + 2	2	3	4	5	6	0	1
5N + 2	3	1	3	4	2	0	5

Le seul cas possible est donc $n = 5 + 7k$.

Conclusion :

$$\text{si } n = 5 + 7k$$

$$\text{alors } \text{PGCD}(n + 2; 5n + 3) = 7$$

$$\text{sinon } \text{PGCD}(n + 2; 5n + 3) = 1.$$

$$114. \bullet \text{ pgcd}(n + 1; n).$$

$$n + 1 - n = 1 \text{ donc } \text{pgcd}(n + 1; n) = 1.$$

$$\bullet \text{ pgcd}(2p + 1; 2p + 3).$$

$$2p + 3 - 2p - 1 = 2$$

soit $d = \text{pgcd}(2p + 1; 2p + 3)$, d divise 2, donc $d = 1$ ou $d = 2$.

$d = 2$ impossible car les deux entiers sont impairs, donc deux nombres impairs consécutifs sont toujours premiers entre eux.

$$\bullet \text{ pgcd}(2p; 2p + 2).$$

$$2p + 2 - 2p = 2 \text{ } d \text{ divise } 2, \text{ donc } d = 1 \text{ ou } d = 2, \text{ or les 2 entiers sont pairs.}$$

Conclusion : le pgcd à deux nombres pairs consécutifs est 2.

115. *Corrigé dans le manuel.*

116. 1.

$$3(2n + 1) - 2(3n + 1) = 6n + 3 - 6n - 2 = 1.$$

$$\text{pgcd}(2n + 1; 3n + 1) = 1.$$

$$2. 2n^2 + 3n + 1 = (n + 1)(2n + 1)$$

$$\text{et } 3n^2 + 4n + 1 = (n + 1)(3n + 1)$$

$$= \text{pgcd}(2n^2 + 3n + 1; 3n^2 + 4n + 1)$$

$$= \text{pgcd}(n + 1)(2n + 1); (n + 1)(3n + 1)$$

$$= (n + 1) \text{ pgcd}(2n + 1; 3n + 1) = n + 1.$$

117. 1.

	a	b
début	15	6
étape 1	9	6
étape 2	3	6
étape 3	3	3
étape 4	3	0
sortie	$a = 3$	$b = 0$

2. Un diviseur de a et de b est aussi un diviseur de a et de $a - b$, en particulier le pgcd de a et de b est aussi le pgcd de a et de $a - b$.

Pour $a > b$, $\text{pgcd}(a; b) = \text{pgcd}(a - b; b)$. Cette propriété permet de tracer le pgcd par soustractions successives.
 $\text{pgcd}(18; 60) = 6$.

118. 1. Soit $a = A$ et $b + a = B$.
 $\text{pgcd}(\text{pgcd}(A; B) = \text{pgcd}(A; B - A)$
 $= \text{pgcd}(a; b)$. Vrai.

2. $\text{pgcd}(17 + 1; 11 + 1) = 6$;
 $\text{pgcd}(17; 11) + 1 = 2$; faux.

3. $\text{pgcd}(0; a) = a$; faux.

4. $\text{pgcd}(1; a) = 1$; vrai.

119. $\begin{cases} xy = 5292 \\ \text{pgcd}(x; y) = 6 \end{cases}$

$$x = 6x' \quad y = 6y' \\ x \times y = 36x'y'$$

$$\begin{cases} x'y' = \frac{5292}{36} \\ \text{pgcd}(x'y') = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x'y' = 147 \\ \text{pgcd}(x'y') = 1 \end{cases}$$

Les couples possibles tels que $x'y' = 147$ sont : $(1; 147)$, $(3; 49)$, $(7; 21)$ et leur symétriques, or $\text{pgcd}(7; 21) = 7$.

• $x = 6 \quad y = 882$.

• $x = 18 \quad y = 294$.

Les couples solutions sont donc :

$(6; 882)$, $(18; 294)$, $(882; 6)$ et $(294; 18)$.

120. 1.

x	y
1	6
3	6
7	6
9	3
11	0
13	7
17	3
19	1

x	y
9	171
27	153
63	117
81	99
99	81
117	63
153	27
171	9

$$x + y = 180, x = 9x^-, y = 9y^- \\ \text{donc } \text{pgcd}(x^-; y^-) = 1. \\ 9x^- + 9y^- = 180, x^- + y^- = 20.$$

121. 1. $\text{pgcd}(n; n + 1) = 1$; vrai, deux nombres consécutifs sont premiers entre eux.

2. $\text{pgcd}(n + 8; n + 2)$ est pair ; faux.
Contre exemple : si $n = 1$, $\text{pgcd}(9; 3) = 3$.

3. Pour $n = 10$, $\text{pgcd}(18; 12) = 6$; vrai.

123. Corrigé dans le manuel.

124. $a = n(3n + 1)$, $b = n + 1$.

$$1. (n + 1)(nx + y) + z = n^2x + ny + nx + y + z \\ = xn^2 + (x + y)n + y + z.$$

$$a = 3n^2 + n,$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x + y = 1 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\text{donc } a = (n + 1)(3n - 2) + 2.$$

2. $d = \text{pgcd}(a, b)$

$$= \text{pgcd}((n + 1)(3n - 2) + 2; n + 1). \\ d \text{ divise } n + 1 \text{ et } d \text{ divise } (n + 1)(3n - 2) + 2, \\ \text{donc } d \text{ divise } 2, \text{ soit } d = 1 \text{ ou } d = 2.$$

n	0	1
$(n + 1)(3n - 2) + 2$	0	0
$n + 1$	1	0

$\text{pgcd}((n + 1)(3n - 2) + 2; (n + 1)) = 2$, si n est impair ;
 $\text{pgcd}((n + 1)(3n - 2) + 2; (n + 1)) = 1$, si n est pair.

125. 1.

n	0	1	2	3	4
n^2	0	1	4	9	16

$$5 \text{ divise } n^2 \Leftrightarrow 5 \text{ divise } n.$$

2. $a = n^3 + 5$ et $b = n^2$.

$$d = \text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(n^3 + 5; n^2).$$

d divise la combinaison linéaire
 $n^3 + 5 - n(n^2) = 5$,
donc $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(n^2; 5)$.

3. D'après la question 2., d divise 5 donc $d = 1$ ou $d = 5$.

D'après la question 2., d divise 5 donc $d = 1$ ou $d = 5$.

D'après la question 1., 5 divise $n^2 \Leftrightarrow 5$ divise n .

Conclusion : si n est un multiple de 5, $\text{pgcd}(a; b) = 5$, sinon $\text{pgcd}(a; b) = 1$.

126. $a = 15n + 13 \quad b = 45n + 16$ et $d = \text{pgcd}(a, b)$.

1. d divise la combinaison linéaire $3a - b = 23$.

$$2. 45 \equiv -1[23] \text{ donc } 45n + 16 \equiv 0[23] \\ \Leftrightarrow -n + 16 \equiv 0[23] \\ \Leftrightarrow 1 \equiv 16[23].$$

3. $n \equiv 16[23]$

$$15n \equiv 240[23]$$

$$15n \equiv 10[23]$$

$$15n + 13 \equiv 23[23]$$

$$15n + 13 \equiv 0[23]$$

4. d divise 23 donc $d = 1$ ou $d = 23$.

Si $n = 16 + 23$ alors d divise a **(2)**

et divise b **(3)**

donc $\text{pgcd}(a; b) = 23$, sinon 23 ne divise pas a **(2)** donc $\text{pgcd}(a; b) = 1$.

127. 1. $n \in \mathbb{N}$, $a = 7n + 2$, $b = 2n - 1$, $d = \text{pgcd}(a, b)$.

d divise la combinaison linéaire $2a - 7b = 14n + 4 - 14n + 7 = 11$.

2. a. $k \in \mathbb{N}$ tel que $2n = 11k + 1$, $2n - 1 = 11k$, donc $11k$ est impair, de plus 11 est impair, donc k est impair (seul le produit de nombre impair est impair).

b. k est impair donc $k = 2k' + 1$.

$$2n = 11(2k' + 1) + 1.$$

$$2n = 11 \times 2k' + 12.$$

$$n = 11k' + 6.$$

b. $a = 7n + 2$

$$= 7x(11b' + 6) + 2$$

$$= 77b' + 44$$

$$= 11(b' + 4) \text{ donc } 11 \text{ divise } a.$$

3. Si $n = 11b' + 6$, $d = 11$; sinon $d = 1$.

129. 1. Si k divise a et b alors $a = ba'$ et $b = kb'$.

$$\text{pgcd}(a; b) = \text{pgcd}(ka'; kb') \\ = k \text{ pgcd}(a'; b')$$

donc k divise $\text{pgcd}(a; b)$. Vrai.

2. • Si d divise a , b et c alors d divise a et b donc d divise $\text{pgcd}(a; b)$ et c .

$$D(a, b, c) \mid \text{CD}(\text{pgcd}(a, b), c).$$

• Si d divise $\text{pgcd}(a, b)$ et c alors d divise a , b et c .

$$D(\text{pgcd}(a, b), c) \mid (a, b, c) \text{ CD}(a, b, c). \text{ Vrai.}$$

3. Faux ; $\text{pgcd}(3 ; 9 ; 1) = 1$. 3, 9 et 1 sont premiers entre eux mais $\text{pgcd}(3 ; 9) = 3$. 3 et 9 ne sont pas premiers entre eux.

130. 1. a. $\text{pgcd}(363 ; 484) = 121$.

b. $121 = 485 - 363$ donc le couple $(363 ; 484)$ appartient bien à S .

2. Deux entiers consécutifs sont premiers entre eux donc $\text{pgcd}(n ; n+1) = 1$ et $n+1-n=1$ donc le couple $(n ; n+1)$ appartient bien à S .

3. Si $\text{pgcd}(x, y) = y - x$ alors

$$x = k(y - x) \text{ et } y = k^-(y - x)$$

$$\text{d'où } y - x = (y - x) \times (k^- - k)$$

$$\text{donc } k^- - k = 1 \text{ et } k^- = k + 1.$$

Réciproquement : si $x = k(y - x)$ et $y = (k + 1)(y - x)$.

$$\begin{aligned} \text{pgcd}(k(y - x) ; (k + 1)(y - x)) \\ = (y - x) \text{pgcd}(k ; k + 1) \\ = (y - x). \end{aligned}$$

131. a. $a = n^3 - n^2 - 12n$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$.

1. $a = n(n-4)(n+3)$ } donc a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n-4)$.

2. On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$.

$$D = \text{pgcd}(\alpha, \beta).$$

$$\text{a. } 2\beta = 2n + 6.$$

$$2\beta - \alpha = 5.$$

b. $D = \text{pgcd}(\alpha, \beta)$, d divise la combinaison linéaire $2\beta - \alpha = 5$ donc D divise 5.

c. 1^{re} implication : $\alpha \equiv 0[5]$ et $\beta \equiv 0[5]$.
 $\alpha - \beta = n - 2 \equiv 0[5].$

2^e implication : $n - 2 \equiv 0[5] \Leftrightarrow n \equiv 2[5]$

$$\Rightarrow 2n \equiv 4[5]$$

$$\Rightarrow 2n + 1 \equiv 0[5]$$

$$\Rightarrow \alpha \equiv 0[5].$$

$$n - 2 \equiv 0[5] \Rightarrow n \equiv 2[5] \Rightarrow n + 3 \equiv 5[5]$$

$$\Rightarrow \beta \equiv 0[5].$$

3. Si $d' = \text{pgcd}(2n + 1 ; n)$, alors d' divise $2n + 1 - 2n = 1$ donc $d' = 1$ et les nombres $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.

4. **a.**

$$\begin{aligned} d = \text{pgcd}(a ; b) &= (n-4) \text{pgcd}((n+3) ; (2n+1)) \\ &= (n-4) \text{pgcd}(\beta ; \alpha). \end{aligned}$$

D est un diviseur de 5 et d'après les questions précédentes α et β sont multiples de 5 si $n - 2$ est multiple de 5.

n	0	1	2	3	4
$n - 2$	-2	-1	0	1	2

Si $n = 5 \times k + 2$

$$\text{donc } \text{pgcd}(a, b) = 5 \times (n - 4)$$

$$\text{sinon } \text{pgcd}(a, b) = 1 \times (n - 4).$$

b. pour $n = 11$ $\text{pgcd}(a ; b) = 7 = 1 \times (11 - 4)$,
pour $n = 12$ $\text{pgcd}(a ; b) = 40 = 5 \times (12 - 4)$.

132. 1. a. $2009 = 11 \times 182 + 7$

le reste est donc égal à 7

$$2^5 = 32 = 11 \times 2 + 10$$

$$2^5 \equiv 10[11] \text{ ou } 2^5 \equiv -1[11]$$

$$(2^5)^2 \equiv (-1)^2[11]$$

$$2^{10} \equiv 1[11].$$

Le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11 est égal à 1.

$$\text{b. On a } 2^{2009} = 2^{10 \times 200 + 9} = (2^{10})^{200} \times 2^9$$

$$\text{or } 2^{10} \equiv 1[11] \text{ d'où } (2^{10})^{200} \equiv 1^{200}[11].$$

$$\text{D'autre part } 2^9 = 2^5 \times 2^4 \text{ et } 2^5 \equiv -1[11],$$

$$2^4 \equiv 5[11],$$

$$\text{donc } 2^5 \times 2^4 = 2^9 \equiv -5[11].$$

$$\text{Finalement } 2^{2009} \equiv -5[11] \text{ et comme}$$

$$2009 = 7[11], 2^{2009} + 2009 \equiv 2[11].$$

2. **a.** $A_n = 2^n + p$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

$$A_{n+1} = 2^{n+1} + p = 2 \times 2^n + p,$$

$$d_n = \text{pgcd}(A_n ; A_{n+1})$$

$$d_n \text{ divise } A_{n+1} - A_n = 2^n.$$

b. n étant supérieur à zéro, 2^n est pair donc $A_n = 2^n + p$ a la même parité que p .

c. D'après la question précédente A_n et A_{n+1} ont la parité de p . Donc si p est pair A_n et A_{n+1} et par conséquent leur pgcd le sont aussi, si p est impair A_n et A_{n+1} et par conséquent leur pgcd le sont aussi. D'après le résultat précédent A_{2009} est impair car 2009 l'est et leur pgcd l'est aussi.

Or on a vu que ce pgcd , d_n divisait 2^n . Or tous les diviseurs de 2^n sont pairs sauf 1 seul devenu impair.

Conclusion : le pgcd de $200^9 + 2009$ et $2^{2010} + 2009$ est égal à 1. Il sont premiers entre eux.

134. 1. $n \leq m$ donc $m = n + \Delta$ avec $\Delta \geq 0$.

$$(a^m - 1) - a^\Delta \times (a^n - 1)$$

$$= a^m - 1 - a^\Delta + a^\Delta = a^\Delta - 1$$

$$\text{donc } \text{pgcd}(a^n - 1 ; a^m - 1)$$

$$= \text{pgcd}(a^n - 1 ; a^{m-n} - 1).$$

2. $\text{pgcd}(a^n - 1 ; a^m - 1)$

$$= \text{pgcd}(a^n - 1 ; a^{m-n} - 1)$$

$$= \text{pgcd}(a^{n-1} - 1 ; a^{m-2n} - 1)$$

$$= \text{pgcd}(a^{n-1} - 1 ; a^r - 1).$$

$$\text{pgcd}(a^{n-1} - 1 ; a^m - 1) = \text{pgcd}(a^{n-1} - 1 ; a^r - 1).$$

3. D'après l'algorithme d'Euclide :

$$m = q_1 \times n + r_1$$

$$n = q_2 \times r_1 + r_2$$

$$r_2 = q_3 \times r_1 + r_3$$

...

$$r_n = q \times r_{n-1} + 0 \text{ avec } r_{n-1} = d.$$

D'où

$$\text{pgcd}(a^n - 1 ; a^m - 1) =$$

$$\text{pgcd}(a^m - 1 ; a^n - 1) =$$

$$\text{pgcd}(a^m - 1 ; a_{r_1} - 1) =$$

$$\text{pgcd}(a_{r_1} - 1 ; a^m - 1) =$$

$$\text{pgcd}(a_{r_2} - 1 ; a_{r_1} - 1) = \dots$$

$$\text{pgcd}(a^d - 1 ; 0) = a^d - 1.$$

Application :

1. $\text{pgcd}(33 ; 150) = 3$ donc

$$\text{pgcd}(3^{33} ; 3^{150} - 1) = 3^3 - 1 = 26.$$

2. Oui, car 13 divise 26.

135. Cet algorithme permet de calculer le pgcd entre 2 grands nombres avec l'algorithme d'Euclide. Pour accélérer l'algorithme on enlève d'abord les puissances de 2.

4. Bézout et Gauss

136. 1. $66 = 15 \times 4 + 6$.

$$15 = 6 \times 2 + 3$$

$$6 = 3 \times 2 + 0$$

$$\text{pgcd}(66 ; 15) = 3.$$

$$2. 3 = 15 \times 1 - 2 \times 6$$

$$= 15 \times 1 + 6 \times (1 - 2)$$

$$a = 1 \text{ et } b = -2.$$

$$3. 6 = 66 \times 1 + 15 \times (-4)$$

$$a = 1 \text{ et } b' = -4.$$

$$4. 3 = 15 \times 1 + [(66 \times 1)] + 15 \times (-4) \times (-2)$$

$$3 = 15 \times 1 + 66 \times (-2) + 15 \times 8$$

$$3 = 15 \times 9 + 66 \times (-2)$$

$$3 = 15 \times (9) + 66 \times (-2)$$

137. Corrigé dans le manuel.

138. $\text{pgcd}(124 ; 7)$

$$124 = 7 \times 17 + 5$$

$$7 = 5 \times 1 + 2$$

$$5 = 2 \times 2 + 1$$

$$2 = 1 \times 2 + 0.$$

$$1 = 5 - 2 \times 2$$

$$1 = 5 - 2 \times (7 - 5)$$

$$1 = 5 - 2 \times 7 + 2 \times 5$$

$$= 3 \times 5 - 2 \times 7$$

$$= 3 \times (124 - 7 \times 17) - 2 \times 7$$

$$= 3 \times 124 - 51 \times 7 - 2 \times 7$$

$$= 3 \times 124 - 53 \times 7$$

$$= 124 \times 3 + 7 \times (-53), u = 3 \text{ et } v = -53.$$

139. Corrigé dans le manuel.

140. 1. $340u + 238u = 1$

$$340 = 238 \times 1 + 102$$

$$238 = 102 \times 2 + 34$$

$$102 = 39 \times 3 + 0$$

$$\text{pgcd}(340 ; 238) = 35. \text{ Impossible.}$$

2. Impossible.

$$3. 34 = 238 + 2 \times 102 \\ = 238 + 2 \times (340 - 238)$$

$$34 = -238 + 2 \times 340, u = 2 \text{ et } v = -1.$$

$$4. 68 = -2 \times 238 + 4 \times 340, u = 2 \text{ et } v = -1.$$

141. et 142. Corrigés dans le manuel.

$$143. (n+1)(2n+3) = 2n^2 + 5n + 3 \\ (2n^2 + 5n + 4) - (n+1)(2n+3) = 1. \\ \text{D'après la réciproque du théorème de Bézout } (2n+3) \text{ et } (2n^2 + 5n + 4) \text{ sont premiers entre eux et la fraction } \frac{2n+3}{2n^2 + 5n + 4} \text{ est irréductible.}$$

144. et 145. Corrigés dans le manuel.

$$146. 1. x \equiv 0[7]$$

$$x \equiv 0[3]$$

$$7 \text{ divise } x \Rightarrow x = \alpha \times 7$$

$$3 \text{ divise } x \Rightarrow x = \beta \times 3.$$

Où 7 et 3 sont premiers entre eux.

Donc $7 \times u + 3 \times v = 1$ (théorème de Bézout).

$$7x \times u + 3x \times v = x$$

$$21 \times \beta \times u + 21\alpha \times v = x.$$

$$\text{Donc } x \equiv 0[21].$$

2. Contre exemple :

$$24 \equiv 0[3]$$

$$24 \equiv 0[12].$$

$$\text{Mais } 24 \not\equiv 0[36].$$

$x \equiv 0[m]$ et $x \equiv 0[n]$ alors $x \equiv 0[mn]$ si m et n sont premiers entre eux.

147. Corrigé dans le manuel.

$$148. 5x + 4y = 1$$

1. $(1; -1)$ est un couple de solution particulier de l'équation.

$$2. 5x + 4y = 5x_0 + 4y_0$$

$$5(x - x_0) = 4(y_0 - y).$$

3. 5 divise $4(y_0 - y)$, 5 et 4 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss 5 divise $y_0 - y$

$$5k = y_0 - y \Leftrightarrow y - y_0 = 5k.$$

En remplaçant $5(x - x_0) = 4 \times 5k \Rightarrow x - x_0 = 4k$ et $x = 4k + x_0$.

Vérification :

$$5(4k + x_0) + 4(y_0 - 5k) = 20k + 5x_0 + 4y_0 - 20k = 1$$

$$\boxed{y = -1 - 5k} \\ \boxed{x = 4k + 1}$$

$$149. 35a + 8b = 1$$

$$35 = 8 \times 4 + 3$$

$$8 = 3 \times 2 + 2$$

$$3 = 2 \times 1 + 1$$

$$2 = 1 \times 2 + 0$$

$$1 = 3 - 2$$

$$1 = 3 - (8 - 3 \times 2)$$

$$1 = 3 \times 3 - 8$$

$$1 = 3 \times (35 - 8 \times 4) - 8$$

$$1 = 3 \times 35 - 12 \times 8 - 8$$

$$1 = 3 \times 35 - 13 \times 8$$

$$1 = 35 \times 3 + 8 \times (-13)$$

$4 = 35 \times 12 + 8 \times (-52)$ $(12; -52)$ est un couple de solutions particuliers de l'équation diophantienne $35a + 8b = 4$.

$$2. 35a + 8b = 35a_0 + 8b_0$$

$$35(a - a_0) = 8(b_0 - b)$$

35 divise $8(b_0 - b)$, 35 et 8 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss 35 divise $b_0 - b$

$$35k = b_0 - b$$

$$b = b_0 - 35k$$

$$b = -52 - 35k$$

$$\text{d'où } 35[a - a_0] = 8 \times 35k$$

$$a - a_0 = 8k$$

$$a = 8k + a_0$$

Vérification :

$$35(8k + a_0) + 8(b_0 - 35k)$$

$$= 280k + 35a_0 + 8b_0 - 280k$$

$$= 3500 + 8b_0$$

$$= 4$$

$$a_0 = 12 \quad b_0 = -52$$

$$\begin{cases} b = -52 - 35k \\ a = 12 + 8k \end{cases}$$

$$150. 3x - 2y = 1; 7x + 4y = 6;$$

$$12x + 16y = 3.$$

$$1. x = 1 + 2k; y = 1 + 3k \quad (1; 1), (3; 4), (5; 7), (7; 10), (9; 13), (11; 16), (12; 19).$$

2. $x = 2 + 4k; y = -2 - 7k$, pas de solution entre 0 et 20.

3. $\text{pgcd}(12; 16) = 4$ et 3 ne divise pas 4 : l'équation n'a pas de solution.

$$151. 5n \equiv 1[7]$$

$$5n = 7 \times p + 1$$

$$5n + 7p' = 1$$

$$7 = 5 \times 1 + 2$$

$$5 = 2 \times 2 + 1$$

$$2 = 1 \times 2 + 0$$

$$1 = 5 - 2 \times 2$$

$$1 = 5 - 2 \times (7 - 5)$$

$$1 = 3 \times 5 - 2 \times 7$$

$$5n + 7p' = 5n_0 + 7p'_0$$

$$5(n - n_0) = 7(p'_0 - p'_0)$$

$(3; -2)$ est un couple solution de l'équation $5n + 7p' = 1$

Donc 7 divise $5(n - n_0)$ et comme 7 et 5 sont premiers entre eux 7 divise $(n - n_0)$.

$$7k = n - n_0; n = 7k + n_0; \boxed{n = 7k + 3}.$$

$$152. \begin{cases} a \equiv 1[5] \\ a \equiv 1[9] \end{cases}$$

D'après le théorème de Gauss (5 et 9 étant premiers entre eux)

$$5k = b' \text{ et } 9k = b$$

$$\text{donc } a = 5b + 1$$

$$a = 45k + 1$$

$$\text{si } k = 0 \quad a = 1$$

$$\text{si } k = 2 \quad a = 91.$$

153. D'après le théorème de Gauss (7 et 25 étant premiers entre eux)

$$7k = v \text{ et } 29k = u.$$

La nouvelle lune tombera à nouveau un lundi dans $29 \times 7 = 203$ jours.

$$154. 1. 7700 = 2^2 \times 5^2 \times 7 \times 11.$$

2. $x = 88q = 350q'$ d'où $44q = 175q'$ et d'après Gauss q divise 175. Finalement $x = 88 \times 175k = 15400k$ x est compris entre 1 et 500 000 000 donc k est compris entre 1 et 32 468.

Mais $x = 2^3 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times k$ pour être un carré on doit donc avoir $k = 2 \times 7 \times 11 \times a^2$ on doit donc chercher les carrés (a^2) compris entre 1 et 32 468/154, donc compris entre 1 et 211 :

VARIABLES

a EST_DU_TYPE NOMBRE

k EST_DU_TYPE NOMBRE

k EST_DU_TYPE NOMBRE

DÉBUT_ALGORITHME

POUR a ALLANT_DE 1 A 211

DÉBUT_POUR

SI (floor(sqrt(a))=sqrt(a)) ALORS

DÉBUT_SI

k PREND_LA_VALEUR 144*a

x PREND_LA_VALEUR 15 400*k

Afficher "15 400"

AFFICHER k

Afficher "="

AFFICHER* x

FIN_SI

FIN_POUR

FIN_ALGORITHME

155. $12n + n \times 16 = 4 + n^{-} \times 24$
 $\Leftrightarrow 24n^{-} - 16n = 8 \Leftrightarrow 3n^{-} - 2n = 1$
 $\Leftrightarrow n^{-} = 3 \Leftrightarrow n = 4.$

156. • Si $\text{PGCD}(a, n) = 1$, d'après Bézout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tel que $ua + vn = 1$.
 Donc $ua \equiv 1[n]$.
 • Réciproquement si $ab \equiv 1[n]$ alors $ab = 1 + kn$ donc $ab - k \times n = 1$ et d'après Bézout $\text{pgcd}(a, n) = 1$.
 Conclusion : a admet un inverse modulo n ssi $\text{pgcd}(a, n) = 1$.

1. a. $15 = 7 \times 2 + 1$
 $1 = -2 \times \boxed{7} + 15 \times 1$ donc $b = -2$.

b. $7x \equiv 3[15]$
 $-14x \equiv -6[15]$
 $x \equiv -6[15], x \equiv -6 + 15k$

2. $\text{PGCD}(40; 17) = 1$
 $27 \times = 1[40]$
 $40 = 27 \times 1 + 13$
 $27 = 13 \times 2 + 1$
 $1 = 27 - 13 \times 2$
 $1 = 27 - (40 - 27) \times 2$
 $1 = 3 \times 27 - 2 \times 40$
 $3 \times 27 = 12 - 2 \times 40 \equiv 1[40]$
 $27x \equiv 4[40]$
 $3 \times 27x \equiv 12[40]$
 $x \equiv 12[40]$
 $x = 12 + 40R.$

157.

$x[14]$	0	1	2	3	4	5	6
$10x[14]$	14	10	6	2	12	8	4

$x[14]$	7	8	9	10	11	12	13
$10x[14]$	0	10	6	2	12	8	4

$x \equiv 6[14]$ ou $x \equiv 13[14].$

158.

$x[9]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$21x[9]$	0	3	6	0	3	6	0	3	6

$x = 9k + 2$ ou $x = 5k + 5$ ou $x = 9k + 8$

159.

VARIABLES

a EST_DU_TYPE NOMBRE
 b EST_DU_TYPE NOMBRE
 r EST_DU_TYPE NOMBRE
 q EST_DU_TYPE NOMBRE
 u0 EST_DU_TYPE NOMBRE
 u1 EST_DU_TYPE NOMBRE

```
u2 EST_DU_TYPE NOMBRE
v0 EST_DU_TYPE NOMBRE
v1 EST_DU_TYPE NOMBRE
v2 EST_DU_TYPE NOMBRE
DÉBUT_ALGORITHME
LIRE a
LIRE b
u0 PREND_LA_VALEUR 1
v0 PREND_LA_VALEUR 0
u1 PREND_LA_VALEUR 0
v1 PREND_LA_VALEUR 1
TANT_QUE (a%b>0) FAIRE
DEBUT_TANT_QUE
r PREND_LA_VALEUR a%b
q PREND_LA_VALEUR floor(a/b)
u2 PREND_LA_VALEUR u0-q*u1
v2 PREND_LA_VALEUR v0-q*v1
a PREND_LA_VALEUR b
b PREND_LA_VALEUR r
u0 PREND_LA_VALEUR u1
v0 PREND_LA_VALEUR v1
u1 PREND_LA_VALEUR u2
v1 PREND_LA_VALEUR v2
FIN_TANT_QUE
AFFICHER* u1
AFFICHER* v1
FIN_ALGORITHME
```

$a = a \times 1 + b \times 0, u_0 = 1$ et $v_0 = 0$.
 $b = a \times 0 + b \times 1, u_1 = 0$ et $v_1 = 1$.
 $a = bx \times q_1 + r_1$,
 donc $r_1 = a - b \times q_1, u_2 = 1, v_2 = -q_1$.
 $b = r_1 \times q_2 + r_2$
 $r_2 = b - r_1 q_2$
 $= b - (0 - b \times q_1) q_2 = 113 = -q_2$
 $v_3 = q_1 q_2 + 1$

$= -aq_2 + b(q_1 q_2 + 1)$

$r_{n-2} = r_{n-1} \times q_n + r_n$
 $r_n = -r_{n-1} \times q_n + r_{n-2}$
 $u_{n+1} = u_{n-1} - q_n u_n$
 $v_{n+1} = v_{n-1} - q_n v_n$.

Application :

1. $1220 = 380 \times \boxed{3} + \boxed{80}$

$p_1 = 3$ et $r_1 = 80$
 $u_2 = 110 - q_1 \times u_1$
 $u_2 = 1 - 3 \times 0 = 1$

$v_2 = v_0 - v_1 \times q_1$
 $= 0 - 1 \times 3 = -3$

$1220 \times 1 = -3 \times 380 = 80.$

2. $380 = 80 \times \boxed{4} + \boxed{60}$
 $u_3 = u_1 - u_2 \times q_2$
 $= 0 - 1 \times 4 = \boxed{-4}$

$v_3 = v_1 - v_2 \times q_2$
 $= 1 - (-3) \times 4 = \boxed{13}$

$1220 \times (-4) + 380 \times 13 = 60.$

$60 = 60 \times \boxed{1} + \boxed{20}$

$u_4 = u_2 - u_3 \times q_3$
 $u_4 = 1 + 4 \times 1 = \boxed{5}$

$v_4 = v_2 - v_3 \times q_3$
 $= -3 - 13 \times 1 = -16$

$1220 \times \boxed{5} - \boxed{16} \times 380 = 20$

$60 = 20 \times \boxed{3} + \boxed{10}$

Conclusion :

$u = 5$ et $v = -16$.

160. **1.** r_{-2} prend la valeur b
 r_{-1} prend la valeur a
 u_{-2} prend la valeur 0
 u_{-1} prend la valeur 1
 v_{-2} prend la valeur 1
 v_{-1} prend la valeur $a \text{ div } b$
 k prend la valeur -1 .

Tant que $r_k > 0$ faire

Début

k prend la valeur $k + 1$

$r_{k-2} = q_k - r_{k-1} + r_k$

(avec $q_k = r_{k-2} \text{ div } r_{k-1} = r_{k-2}$)

u_k prend la valeur $u_{k-2} - q_k u_{k-1}$

v_k prend la valeur $v_{k-2} - q_k v_{k-1}$

Fin

Afficher

$u = u_{k-1} \times q_k$

$v = v_{k-1} \times q_k$

2. a. $53u + 12v = 1$ sol $(5; -22)$.

b. L'équation $10u + 55v = 2$ n'admet pas de solution car $c = 2$ n'est pas un multiple de $5 = \text{pgcd}(55; 10)$.

c. $10u + 14v = 6$ sol $(9; -22)$.

161. **1.** 142 n'est pas un multiple de 5 , ni un multiple de 3 , on ne peut donc pas paver le damier avec seulement les pièces de type A ou seulement les pièces de type B.

2. $5u + 3v = 142$

$(-142; 284)$ est une sol particulière.

$$5u + 3v = 5u_0 + 3v_0$$

$$5(u - u_0) = 3(v_0 - v).$$

D'après le théorème de Gauss

$$5k = (v_0 - v) \text{ et } 3k = u - u_0$$

$$v = v_0 - 5k \quad u = 3k + u_0$$

$$v = 284 - 5k \quad u = 3k - 142$$

Choisir k tel que u et $v > 0$

$$3k - 142 > 0 \Rightarrow k > \frac{142}{3} > 47$$

$$284 - 5k > 0 \Rightarrow k < \frac{284}{5} < 57.$$

Exemple :

si $k = 50$ $u = 8$ et $v = 34$ prendre k entre 48 et 56.

$$5 \times 8 + 3 \times 34 = 142.$$

163. 1. a. a et b sont deux entiers premiers entre eux.

$$au + bv = 1$$

$$abu + b^2v = b.$$

Par hypothèse d divise a et d divise b^2 donc d divise $abu + b^2v$ et donc d divise b .

b. • Si d divise a et b^2 alors d divise a et b donc $d = 1$.

a et b^2 sont donc premiers entre eux.

• De même avec $A = b^2$ et $B = a$.

A et B sont premiers entre eux donc A et B^2 aussi.

2. a. Faux, il suffit de prendre un contre exemple :

$$\text{pgcd}(16; 4) = 4 \neq \text{pgcd}(4; 2).$$

b. soit d le PGCD($a; b$) $a = da'$ et $b = db'$;

$$\text{pgcd}(a^2; b^2) = \text{pgcd}(d^2a'^2; d^2b') = d^2$$

$\text{pgcd}(a'^2; b'^2) = d^2$, premiers entre eux d'après le 1.

$$3. d = \text{PGCD}(n^2 + 10n + 25, 4n^2)$$

$$d = \text{PGCD}((n+5)^2; (2n)^2)$$

$$= \text{PGCD}(n+5; 2n)^2$$

$$\text{PGCD}(n+5; 2n)$$

$$2(n+5) - 2n = 10.$$

Le PGCD($n+5; 2n$) divise 10 donc PGCD($n+5; 2n$) = 1 ou 2 ou 5 ou 10.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$2n$	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
$n+5$	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4

Si $n = 5 + 10k$

$$\text{PGCD}(n^2 + 10n + 25; 4n^2) = 100$$

si $n = 10k$, PGCD = 25.

$$\text{si } \begin{cases} n = 1 + 10k \\ \text{ou } 3 + 10k \\ 7 + 10k \\ 9 + 10k \end{cases} \text{ pgcd} = 4.$$

sinon PGCD = 1.

164. Corrigé dans le manuel.

165. 1.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-7 - 9}{7 + 7} = \frac{-16}{14} = -\frac{8}{7}$$

$$y = -\frac{8}{7}x + p$$

$$9 = -\frac{8}{7} \times (\neq 7) + p$$

$$p = 1$$

$$y = -\frac{8}{7}x + 1$$

$$y + \frac{8}{7}x = 1$$

$$7y + 8x = 7$$

$$7v + 8u = 1, (1; -1) \text{ solution particulière.}$$

$$7v + 8u = 7v_0 + 8u_0$$

$$7(v - v_0) = 8(u_0 - u_0)$$

$$7k = v_0 - v \quad 8k = y - y_0$$

$$v = -7k + 1 \quad u = 8k - 1$$

$$x = -49k + 7 \quad y = 56k - 7$$

$M(7; 7)$ est le seul élément de $(AB) \cap F$.

$$166. 1. \alpha = -2 + 7k, \alpha + 2 = 7k,$$

$(\alpha + 2)$ divisible par 7.

7 plus grand diviseur de 7 donc

$$\text{PGCD}(\alpha + 2; 7) = 7.$$

Si $(\alpha + 2)$ divisible par 7 alors il existe

$$k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \alpha + 2 = 7k$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 7k - 2.$$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\alpha + 2}{4 + 3} = \frac{\alpha + 2}{7}$$

$$y = \frac{\alpha + 2}{7}x + b$$

$$-2 = \frac{\alpha + 2}{7}(-3) + b$$

$$\frac{3\alpha + 8}{7} = b$$

$$y = \frac{\alpha + 2}{7} = \frac{3\alpha - 8}{7}$$

$$7y = (\alpha + 2)x + (3\alpha - 8)$$

$$= (\alpha + 2)x + 3(\alpha + 2) + 14$$

$$(\alpha + 2)(x + 3) - 7y = 14.$$

3. PGCD($\alpha + 2; 7$) = 1 ou 7 donc

PGCD($\alpha + 2; 7$) = 1 divise 14.

Donc $E \cap (AB) \neq \emptyset$.

167. 1.

$$\alpha x \equiv b[n] \Leftrightarrow ax = kn + b,$$

$$(1) \Leftrightarrow b = ax - kn.$$

Si $d = \text{PGCD}(a; n)$ alors d divise a et d divise A et d'après la relation (1) d divise b .

2. • $a = da'$ et $n = dn'$ avec

PGCD($a'; n'$) = 1 donc il existe u et v tel que $a'u + v'n' = 1$.

• De plus il existe b' tel que $b = b'd$

$$\alpha x = b + kn, a'dx = b'd + kdn'$$

$$a'x = b' + kn' \text{ donc } \alpha'x \equiv b'[n']$$

$$u\alpha'x \equiv ub'[n']$$

$$\text{or } u\alpha'x = 1 - vn' \equiv 1[n']$$

$$\text{d'où } x \equiv ub'[n'] \text{ et finalement}$$

$$x \equiv \underbrace{ub'}_{x_0} + q \times n'.$$

3. Les solutions sont de la forme :

$$x = qn' + x_0$$

$$x_1 \equiv x_2[n]$$

$$\Leftrightarrow q_1n' + x_0 \equiv q_2n' + x_0[n]$$

$$\Leftrightarrow n'(q_1 - q_2) \equiv 0[n]$$

$$\Leftrightarrow n'(q_1 - q_2) = kn = kdn'$$

$$\Leftrightarrow q_1 - q_2 = kd$$

$\Leftrightarrow q_1 \equiv q_2[d]$ or q peut être égal à 0, 1, 2 ... d_1 modulo d donc il existe exactement d solutions modulo 11.

$$168. 1. x = nub + mua \text{ et } nv + mu = 1.$$

On a : $anv + amu = a$ donc $aum = a[m]$

et $bnv + bmu = b$ donc $bm v = b[m]$

Réciproque :

$$x \equiv a[m] \text{ et } x \equiv b[m].$$

De plus il existe u et v tels que $mu + nu = 1$ donc

$$mu \equiv 1[n] \text{ et } x \equiv am u[n]$$

$$nv \equiv 1[mu] \text{ et } x \equiv bnv[m].$$

D'où $x = am u + k_1n = bnv + k_2m$.

$m(au - k_2) = n(bv - k_1)$ et comme m et n sont premiers entre eux d'après Gauss n divise $au - k_2 = qn$ donc $k_2 = au - qn$.

$$m'a' k_2 = au - qn \text{ ce qui donne :}$$

$$x = bnv + (au - qn)m$$

$$x = bnv + aum - qnm$$

$$x \equiv bnv + aum[mn]$$

Finalement $x \equiv a[m]$ et $x \equiv b[n]$.

$$2. x = 5[7] \text{ et } x = 2[4].$$

$$7u + 4v = 1$$

$$7 = 4 \times 1 + 3$$

$$4 = 4 \times 3 + 1$$

$$1 = 2 \times 4 - 1 + 7$$

$$v = 2 \text{ et } u = -1$$

$$\text{donc } x = 5 \times 4 \times 2 + 2 \times 7 \times (-1) \\ = 40 - 14 = 26[28].$$

$$3. \quad x \equiv 1[10] \text{ et } x \equiv 5[9]$$

$$10 = 9 \times 1 + 13$$

$$v = -1 \text{ et } u = 1$$

$$\text{donc } x = 1 \times 9 \times (-1) + 5 \times 10 \times 1 \\ = -9 + 50 = 41[90].$$

$$169. \quad 1. \quad n \equiv 3[7], n \equiv 2[23]$$

$$27 = 23 \times 1 + 4$$

$$23 = 4 \times 5 + 3$$

$$4 = 3 \times 1 + 1$$

$$1 = 4 - 3 \times 1$$

$$= 4 - (23 - 4 \times 5)$$

$$= 6 \times 4 - 23$$

$$= 6 \times (27 - 23) - 23$$

$$= 6 \times 27 - 7 \times 23$$

$$v = -7 \text{ et } u = 6$$

$$\text{donc } x = 3 \times 23 \times (-7) + 2 \times 27 \times 6$$

$$= -483 + 324 = -159[621] = 462[621].$$

$$170. \quad 1. \quad n \equiv 90[97], n \equiv 2[23]$$

$$111 = 97 \times 1 + 14$$

$$97 = 14 \times 6 + 13$$

$$14 = 13 \times 1 + 1$$

$$1 = 14 - 13$$

$$= 14 - (97 - 6 \times 14)$$

$$= 7 \times 14 - 97$$

$$= 7 \times (111 - 97) - 97$$

$$= 7 \times 111 - 8 \times 97$$

$$v = -8 \text{ et } u = 7$$

$$x = 100 \times 97 \times (-8) + 90 \times 111 \times 7$$

$$= -77\,600 + 69\,930$$

$$= -7\,670[10\,767]$$

$$= 3\,097[10\,767].$$

Il n'existe pas d'entier naturel inférieur à 2 000 tel que :

$$\begin{cases} n \equiv 100[111] \\ n \equiv 90[97] \end{cases}$$

171.

$$\begin{cases} x \equiv 2[3] \\ x \equiv 3[5] \\ x \equiv 2[7] \end{cases} \quad \begin{cases} x \equiv a[n] & a=2 & n=3 \\ x \equiv 3[m] & b=3 & m=5 \end{cases}$$

$$mu + nv = 1$$

$$5 \times 2 + (3) \times (-3) = 1$$

$$u = 2 \text{ et } v = -3$$

$$\text{D'où } x \equiv 3 \times 3 \times (-3) + 2 \times 5 \times 2[15]$$

$$x \equiv 8[15]$$

$$x \equiv 8[15] \quad a=8 \quad n=15$$

$$x \equiv 2[7] \quad b=2 \quad m=7$$

$$mu + nu = 1$$

$$7 \times (-2) + 15 \times 1 = 1$$

$$u = -2, v = 1$$

$$x \equiv 2 \times 15 \times 1 + 8 \times 7 \times (-2)[105]$$

$$x \equiv 23[105]$$

172. On note x la fortune que peut espérer le cuisinier s'il décide d'empoisonner le reste des pirates.

Il s'agit donc de trouver x positif et minimal vérifiant :

$$\begin{cases} x \equiv 3[17] \\ x \equiv 4[11] \\ x \equiv 5[6] \end{cases}$$

$$x \equiv 3[17], a=3, n=17$$

$$x \equiv 4[11], b=4, m=11$$

$$mu + nv = 1$$

$$11 \times (-3) + 17 \times 2 = 1, u = -3 \text{ et } v = 2$$

$$x \equiv 4 \times 17 \times 2 + 3 \times 11 \times (-3)[187]$$

$$x \equiv 37[187]$$

$$\text{De plus } x \equiv 37[187], a=37, n=187$$

$$x \equiv 5[6], b=5, m=6.$$

$$mu + nv = 1$$

$$6 \times (-31) + 187 \times 1 = 1, u = -31 \text{ et } v = 1$$

$$x \equiv 5 \times 187 \times 1 + 37 \times 6 \times (-31)[1\,122]$$

$$x \equiv 785[1\,122]$$

$$x = 785.$$

173.

$x[10]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x^2[10]$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

$x[5]$	0	1	2	3	4
$x^2[5]$	0	1	4	4	1

$$2. \quad a. \quad x \equiv 0[5]$$

$x = 25$ est une solution possible.

b. $x \equiv 2[5]$ pas de solution possible d'après le tableau de congruence, pas de carré égal à 2 modulo 5.

$x = 25$ est une solution possible.

c. $x \equiv 4[10]$ 4 et 64 sont des solutions.

$$d. \quad x \equiv 9[10]$$

si $x \equiv 9[10]$ alors 9 et 49 sont des solutions.

x^2 se termine par 1 donc $x^2 \equiv 1[10]$ donc $x \equiv 1[10]$ ou $x \equiv 9[10]$.

$$3. \quad x \equiv 1[10], a=1, n=10 \text{ ou } x \equiv 9[10], a=9, n=10$$

$$x \equiv 1[3], b=1, m=3, x \equiv 1[3], b=1, m=3$$

$$10 = 3 \times 3 + 1$$

$$x \equiv 10 \times 1 \times 1 + 9 \times 3 \times 3[30]$$

$$1 = 1 \times 10 + 3 \times 3 \quad u=3 \quad v=1 \quad x \equiv 91[30],$$

$$x \equiv 1 \times 3 \times 3 + 1 \times 10 \times 1[30]$$

$$x \equiv 19[30].$$

174. 1. a. 1 est une racine évidente de $x^2 - 1, x^3 - 1, x^4 - 1$ et $x^n - 1$.

b. On pose $x = x^k$, d'après le a.

$x^n - 1$ se factorise par $x - 1$, soit $x^{kn} - 1$ se factorise par $x^k - 1$.

$$d = \text{PGCD}(m, n) \text{ et}$$

$$D = \text{PGCD}(a^n - 1, a^m - 1)$$

$$d \text{ divise } n \text{ donc } kd = n.$$

$$a^n - 1 = a^{dk} - 1 = (a^d)^k - 1.$$

D'après la question précédente $a^d - 1$ divise $a^n - 1$

de même $a^d - 1$ divise $a^m - 1$

donc $a^d - 1$ divise le PGCD de ces 2 nombres.

Donc $a^d - 1$ divise D .

3. d divise m donc $m \geq d$

$$u \in \mathbb{N}^* \text{ donc } mc \geq d$$

on doit donc avoir $nv \geq 0$.

$$4. \quad \boxed{mu - nv = d}$$

$$(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^{d+nv} - 1 - a^{nv+d} + a^d = a^d - 1.$$

5. Soit D un diviseur commun de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.

Donc

D un diviseur de $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d$ et d'après le calcul précédent D divise $a^d - 1$. Or $a^d - 1$ divise D donc $D = a^d - 1$.

$$6. \quad \text{PGCD}(3^{55} - 1; 3^{122} - 1) = 3^1 - 1 = 2. \\ \text{PGCD}(122; 55) = 1.$$

175. 1. Initialisation :

$$u_0 = 1 \text{ et } v_0 = 1, 2 \text{ et } 1 \in \mathbb{N}$$

La propriété est vraie au premier rang.

Hérédité : Je suppose la propriété vraie au rang n et je démontre qu'elle est vraie au rang $n + 1$.

u_n et v_n sont des entiers naturels donc $2u_n$ et $3v_n$ sont aussi des entiers naturels donc u_{n+1} est un entier naturel.

Conclusion : u_n est un entier naturel et il en va de même pour v_n .

2. a. Initialisation :

$$u_0^2 - 3v_0^2 = 2^2 - 3 \times 1^2 = 1 \text{ vraie au premier rang.}$$

b. Hérédité : je suppose $u_n^2 - 3v_n^2 = 1$ vraie

$$u_{n+1}^2 - 3v_{n+1}^2$$

$$(2u_n + 3v_n)^2 - 3(u_n + 2v_n)^2$$

$$4u_n^2 + 12u_nv_n + 9v_n^2 - 3(u_n^2 + 4u_nv_n + 4v_n^2)$$

$$4u_n^2 + 12u_nv_n + 9v_n^2 - 3u_n^2 - 12u_nv_n - 12v_n^2$$

$$u_n^2 - 3v_n^2 = 1.$$

c. **Conclusion** : la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. (2 ; 1) (7 ; 4) ... il suffit d'activer les relations de récurrences pour trouver les autres couples solution de l'équation $x^2 - 3y^2 = 1$.

183. $3a + 5b = 1 - 7c$, solution particulière $a_0 = (-3 + c)$ et $b_0 = 2 - 2c$.

$$3(-3 + c) + 5(2 - 2c) = -9 + 3c + 10 - 10c = 1 - 7c.$$

Cas général : $3a + 5b = 3a_0 + 5b_0$

$3(a - a_0) = 5(b - b_0)$; 3 et 5 sont premiers entre eux donc

$$5k = a - a_0 \text{ et } 3k = b - b_0 ;$$

$$a = 5k + a_0 \text{ et } b = 3k + b_0$$

$$a = 5k - 3 + c \text{ et } b = 3k + 2 - 2c.$$

Les solutions de l'équation dans $\mathbb{Z}^3$ sont les triplets :

$$(-3 + c + 5k ; + 2 - 2c + 3k ; c).$$

5. Nombres premiers et factorisation

184. et 185. Corrigés dans le manuel.

186. $12\,600 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 ;$

$$2\,940 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7^2.$$

$$\text{pgcd}(12\,600 ; 2\,940) = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420.$$

187. Corrigé dans le manuel.

188. 1. $105 = 3 \times 5 \times 7 ; 45 = 3^2 \times 5.$

2. $\text{pgcd}(105 ; 45) = 3 \times 5 = 15.$

3. $\text{ppcm}(105 ; 45) = 3^2 \times 5 \times 7 = 315.$

4. $\text{pgcd}(105 ; 45) \times \text{ppcm}(105 ; 45) = 4725 = 105 \times 45.$

6. $a = da'$ et $b = db'$ avec a' et b' premiers entre eux, donc $\text{ppcm}(a ; b) = da'b'$ et $\text{pgcd}(a ; b) \times \text{ppcm}(a ; b) = d \times da'b' = da' \times db' = ab.$

189. et 190. Corrigés dans le manuel.

191. $(p^2 - 1) = (p - 1)(p + 1)$

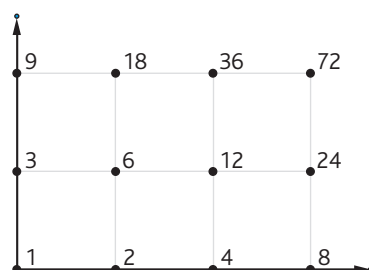
Puisque p est premier et > 2 , il est impair, donc $p - 1$ et $p + 1$ sont pairs, l'un est divisible par 2, l'autre par 4. Les nombres $p - 1$, p et $p + 1$ forment une suite consécutive de nombres entiers donc l'un de ses nombres est divisible par 3 et ce n'est pas p puisqu'il est premier.

Conclusion : $(p - 1)(p + 1)$ est divisible par $2 \times 3 \times 4 = 24$.

192. Corrigé dans le manuel.

193. 1. $4 \times 3 = 12$ diviseurs.

2.



3. $S = 1 + 3 + 3^2 + 2(1 + 3 + 3^2) + 2^2(1 + 3 + 3^2) + 2^3(1 + 3 + 3^2) = (1 + 3 + 3^2)[1 + 2 + 2^2 + 2^3] = 13 \times [15] = 195.$

4. $4000 = 2^5 \times 5^3$
 $S = (1 + 5^1 + 5^2 + 5^3) \times (1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) = 156 \times 63 = 9828.$

194. Corrigé dans le manuel.

195. 2. L'algorithme permet de déterminer les nombres premiers inférieurs ou égaux à n à l'aide du crible d'Ératostène, ces nombres sont rangés dans une liste dans laquelle on stocke le chiffre 1 s'il est premier, 2 sinon.

3. Pour j allant de 2 à n
Si $L[j] = 1$
Début_si
Afficher $L[j]$
Afficher « ; »
Fin_si
Fin_pour

197. 1. $(1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{p-1} x^{p-1})(1 + x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{p-1} x^{p-1} + x - x^2 + x^3 - x^4 + \dots + (-1)^{p-1} x^p = 1 + (-1)^{p-1} x^p.$

2. Si n est pair alors $n - 1$ est impair et $(-1)^{n-1} = -1$

donc

$$1 - x^n = (1 + x) \underbrace{(1 - x + x^2 - \dots + (-1)^{p-1} x^{p-1})}_{-N}$$

donc

$$x^n - 1 = (1 + x) \times N.$$

3. $F_{n+k} = 2^{2^{n+k}} + 1 = 2^{2^n \times 2^k} + 1 = (2^{2^n})^{2^k} + 1$

$F_{n+k} - 2 = (2^{2^n})^{2^k} - 1$ or 2^k est pair donc d'après le 2..

$$F_{n+k} - 2 = (1 + 2^{2^n}) \times N = F_n \times N.$$

4. Si m est un diviseur commun à F_n et à F_{n+k} alors d'après la question précédente, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$F_{n+k} = 2 + q \times F_n.$$

Donc m divise $F_{n+k} - qF_n = 2$ et comme F_n est impair, on a $m = 1$.

Conclusion : $\text{pgcd}(F_{n+k} ; F_n) = 1$.

199. 1. $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$

$$\times q_n \left(\frac{a_n p^n}{q^n} + \frac{a_{n-1} p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + \frac{a_1 p}{q} + a_0 \right) = 0$$

$$\downarrow \frac{a_n p^n}{q^n} + \frac{a_{n-1} p^{n-1}}{q^{n-1}} \times q + \dots + \frac{a_1 p}{q} \times q^{n-1} + a_0 \times q^n = 0$$

$$a_n p^n + q \times K = 0.$$

Donc q divise $a_n p^n$ mais comme p^n et q sont premiers entre eux alors par le lemme de Gauss q divise a_n .

$$p \times k' + a_0 \times p^n = 0$$

donc p divise $a_0 q^n$ or p et p_n sont premiers entre eux donc par le lemme de Gauss p divise a_0 .

2. a. $3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 = 0$

p divise 4 $p = 1 ; 2 ; 3$ ou 4

q divise 3 $q = 1 ; 2$ ou 3.

En testant les différentes valeurs on trouve $x = \frac{2}{3}$.

b. $2x^3 - 6x^2 + 11x - 33 = 0$

p divise -33 $S = \left\{ \frac{3}{1} \right\}$

q divise 2.

c. $3x^5 + x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 5x - 10 = 0$

p divise -10 $S = \{ \emptyset \}$

q divise 3.

200. A. 1. $a^{p-1} \equiv 1[p]$

$$a^{p-1} = qp + r \text{ avec } 0 \leq r < p$$

alors $a^{p-1} \equiv r[p]$ donc $r \equiv 1[p]$ et $r \in A_p$.

2. $a^2 \equiv 1[p] \Leftrightarrow a^2 - 1 = kp$

$$\Leftrightarrow (a - 1)(a + 1) = kp$$

et comme p est premier soit $(a - 1)$ soit $(a + 1)$ est un multiple de p .

Donc $a - 1 \equiv 0[p]$ et $a \equiv 1[p]$

ou $a + 1 \equiv 0[p]$ et $a \equiv -1[p]$.

3. $(p - 1)! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (p - 2) \times (p - 1)$. Tous les termes se regroupent 2 à 2 avec $ab \equiv 1[p]$, sauf $1 \equiv 1[p]$ et $(p - 1) \equiv -1[p]$.

D'où $(p - 1)! \equiv 1 \times (p - 1)[p]$

$$(p - 1)! \equiv -1[p].$$

B. $(p-1)! + 1 \equiv 0[p]$.

Il existe donc un entier k tel que $(p-1)! + kp = -1$. Soit alors x un entier (positif) inférieur à p : il figure parmi les facteurs de $(p-1)!$

Donc $(p-1)!$ peut s'écrire sous la forme $u \cdot x$ ou u est un entier.

On a donc $ux + kp = -1$ ce qui d'après Bézout signifie que p et x sont premiers entre eux.

p est donc premier avec tous les entiers (positifs) qui lui sont inférieurs : il est donc lui-même premier.

C. 1. $10! \equiv -1[11]$

$$7 \times q \equiv -1[11]$$

avec

$$q = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 8 \times 9 \times 10.$$

2. Soit q l'inverse de k modulo p .

$$q = \frac{(p-1)!}{k}.$$

D. Non $(p-1)!$ est trop long à calculer (nécessite une boucle allant de 1 à $p-1$).

E. 1. $(p-1)^2 = p^2 - 2p + 1$

$$= p(p-2) + 1$$

$$(p-1)^2 \equiv 1[p]$$

$p-1$ est son propre inverse modulo p .

2. a. 6 est son propre inverse voir 1.

$$36x \equiv -6[7] \text{ soit } x \equiv 1[7].$$

b. 61 premier $60^2 \equiv 1[p]$ voir 1.

$$x \equiv 3[61].$$

c. $4x + 3 \equiv 1[5]$ soit $4x \equiv -2[5]$.

$$16x \equiv -8[5] \text{ soit } x \equiv 2[5].$$

202. 1. $C_n = 2n + 1$.

$$2. U_n - U_n = 3(C_{n-1} - 1) + (C_n - 1)$$

$$U_n = U_{n-1} + 3(C_{n-1} - 1) + (C_n - 1)$$

$$= U_{n-1} + 3C_{n-1} - 3 + C_n - 1$$

$$= U_{n-1} + 3C_{n-1} + C_n - 4.$$

$$3. U_n = U_{n-1} + 3(2(n-1) + 1) + 2n + 1 - 4$$

$$= U_{n-1} + 6n - 3 + 2n + 1 - 4$$

$$= U_{n-1} + 8n - 6.$$

$$4. T_n = U_n - U_{n-1}$$

$$\sum_1^n T_k.$$

D'après 3. $T_n = 8n - 6$.

T_n est une suite arithmétique de premier terme -6 et de raison 8.

$$\sum_1^n T_k = n \times \frac{2 + (8n-6)}{2}$$

$$= n \times (-2 + 4n)$$

$$= 4n^2 - 2n$$

$$U_n = 4n^2 - 2n + U_0$$

$$U_n = 4n^2 - 2n + 1.$$

203. 1. $60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$.

2. $6173 = 6173$

$$\boxed{6174} = 2^1 \times 3^2 \times 7^3$$

$$: 2 \times 3 \times 4 = \boxed{24 \text{ diviseurs}}$$

$$6175 = 5^2 \times 13^1 \times 19^1$$

$$: 3 \times 2 \times 2 = 12 \text{ diviseurs}$$

$$6176 = 2^5 \times 193^1$$

$$: 6 \times 2 = 12 \text{ diviseurs}$$

3. $1568 = 2^5 \times 7^2$

$$S = (1 + 2 + \dots + 2^5) \times (1 + 7 + 7^2)$$

$$= \frac{1-2^6}{1-2} \times \frac{1-7^3}{1-7} = 120 \text{ diviseurs.}$$

4. $8128 = 2^6 \times 127^1$

$$S = (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^6) \times (1 + 127)$$

$$= \frac{1-2^7}{1-2} \times 128 = 16256$$

(Dans la somme il y a 8128.)

$$5 \text{ diviseurs propres} = 16256 - 8128 = 8128.$$

8128 est parfait.

$$5. 177408 = 2^8 \times 3^2 \times 7 \times 11$$

$$89376 = 2^5 \times 3 \times 7^2 \times 19$$

$$\text{ppcm} = 2^8 \times 3^2 \times 7^2 \times 11 \times 19.$$

204. 1. $a_1 = 39 \quad b_1 = 19 \quad c_1 = 21$

$$a_2 = 399 \quad b_2 = 199 \quad c_1 = 201$$

$$a_3 = 3999 \quad b_3 = 2999 \quad c_3 = 2001.$$

2. a_n : $n+1$ chiffres.

$$4 \equiv 1[3] \quad 10 \equiv 1[3]$$

$$\text{donc } 4 \times 10^1 - 1 \equiv 0[3]$$

$$2 \equiv -1[3] \quad 10 \equiv 1[3]$$

$$\text{donc } 2 \times 10^1 + 1 \equiv 1 - 1[3] \\ \equiv 0[3].$$

3. b_3 n'est pas divisible par 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; ... 47.

$$4. b_n \times c_n = a_{2n}$$

$$(2 \times 10^n - 1)(2 \times 10^n + 1) = 410^{2n} - 1 = a_{2n}$$

$$a_6 = a_3 \times b_3 = 3 \times 31 \times 43 \times 2999.$$

$$5. \text{pgcd}(cb_n; c_n) = \text{pgcd}(C_n; C_n - b_n) \\ = \text{pgcd}(C_n; 2) = d$$

d est donc un diviseur de 2 $d=1$ ou $d=2$. Mais b_n et c_n sont impairs donc $d=1$.

6. Cryptographie

206. 1. DWWDTXH.

$$2. g(x) \equiv x - 3[26] \text{ et } 0 \leq g(x) < 16.$$

3. FACILE.

207. L'analyse fréquentielle est une méthode efficace.

208. L'algorithme décale de 3 rangs le code ascii correspondant à chacune des lettres qui compose le mot à coder.

209. 1. A $n=0$

$$3 \times 0 + 2 = 2$$

$$2 \equiv 2[26]$$

A est donc codé par la lettre C.

$$J \quad n=9$$

$$3 \times 9 + 2 = 29$$

$$29 \equiv 3[26]$$

J est donc codé par la lettre D.

2. a. Si $a=0 \quad a_n + b = b$ donc toutes les lettres sont codées par la même lettre correspondant au reste de la division de b par 26.

b. Si $a=13$

A correspond à 0 donc $a_n + b = b$, A est codée par la lettre qui correspond au reste de la division de b par 26.

C correspond à 2 donc

$$e_n + b = 13 \times 2 + b = 26 + b \equiv 6[26].$$

Donc C est codé de la même façon que A.

3. Si $\begin{cases} 5n + 2 \equiv r[26] \\ 5p + 2 \equiv r[26] \end{cases}$ alors par différence $5(n-p) \equiv 0[26]$.

$n-p \equiv 0[26]$ (car 5 est premier avec 26) donc finalement $n \equiv p[26]$. Or m et p sont inférieurs à 26. Conclusion $n=p$.

4. $A \rightarrow 0 \rightarrow 2 \rightarrow C$

$$M \rightarrow 12 \rightarrow 10 \rightarrow K$$

$$I \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow Q$$

AMI est codé CKQ.

5. D'après le tableau E correspond à 4. Donc la lettre codée E correspond à un nombre n tel que $5n + 2 \equiv 4[26] \Leftrightarrow 5n - 2 \equiv 0[26]$

$$5n - 2 = 26y \text{ avec } y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 5n - 26y = 2.$$

6. On considère l'équation $5x - 26y = 2$ avec x et y entiers relatifs.

$$a. 2 \times 26 - 10 \times 5 = 2$$

$5 \times (-10) - 26 \times (-2) = 2$ le couple $(-10; -2)$ est solution particulière de l'équation.

$$b. 5(x+10) - 26(y+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5(x+10) = 26(y+2)$$

5 et 26 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x+10 = 26k$ et $y+2 = 5k$

$$\text{soit } \begin{cases} x = 26k - 10 \\ y = 5k - 2 \end{cases}.$$

$$c. 0 \leq x < 26 \Leftrightarrow 0 \leq 26k - 10 < 26$$

$$\Leftrightarrow 10 \leq 26k < 36 \Rightarrow k = 1.$$

Finalement $x = 16$ et $y = 3$.

d. La lettre codée E correspond à $x = n = 16$. D'après le tableau, c'est la lettre Q.

210. 1. EXHTIT.

2. a. $f(x) = f(x')$

soit $21x \equiv 21x'[26]$ ou encore il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $21(x-x') = 26k$.

b. Comme 26 est premier avec 21, Gauss nous dit que 26 divise $x-x'$ ou encore

$x \equiv x'[26]$ et comme x et x' sont compris entre 0 et 25 alors $x = x'$.

3. On remarque que $21 \times 5 \equiv 1[26]$.

Donc $5f(x) \equiv x + 55 \equiv x + 3[26]$

et $x \equiv 5f(x) - 3 \equiv 5f(x) + 23[26]$.

Soit $g(x) \equiv 5x + 23[26]$.

4. GLB donne BAC.

211. 1. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ quelconque.

Il existe $a', b' \in \{0; 1; \dots; 25\}$ tels que $a \equiv a'[26]$, $b \equiv b'[26]$.

a' et b' sont les restes de la division euclidienne de a et b par 26. Alors pour tout $x \in \{0; 1; \dots; 25\}$ on a : $ax + b \equiv ax' + b'[26]$. Donc on peut se limiter à choisir a et b alors $\{0; 1; \dots; 25\}$.

2. a. $f(x) = f(x')$

$ex + b \equiv ex' + b[26]$ soit $e(x - x') \equiv 0[26]$ donc 26 divise $a(x - x')$ et il existe un entier relatif k tel que $a(x - x') = 26k$.

b. Soit $d = \text{pgcd}(a; 26) > 1$ et $d < 26$. Donc k défini par $26 = kd$ vérifie $1 \leq k < 26$.

Donc k est le numéro d'une lettre différente de A. Or

$ak + b = da'k + b = kd \times a' + b = 26a' + b$ donc $ak + b \equiv b[26]$.

c. Si $\text{pgcd}(26; a) = 1$ donc 26 divise $x - x'$, d'après le théorème de Gauss $x \equiv x'[26]$ comme x et $x' < 26$ $x = x'$.

d. Il faut que $b \in \{0; 1; \dots; 25\}$ et a premier à 26. Soit $a : 1; 3; 5; 7; 9; 11; 15; 17; 19; 21; 23; 25$.

e. Donc cette lettre sera codée par la lettre dont le numéro est b , c'est-à-dire comme la lettre A. Dans ce cas le codage est impossible.

212. 1. La lettre E est codée par E donc $4a + b \equiv 4[26]$ et la lettre T est codée par Y.

$19a + b \equiv 24$.

Par soustraction $15a \equiv 20[26]$.

2. $15 \times 7 = 105$

$15 \times 7 \equiv 1[26]$

• $7 \times 15a \equiv 7 \times 20[26]$

$a \equiv 140[26]$

$a \equiv 10[26]$

• $4a + b = 40 + b \equiv 4[26]$

donc $b \equiv -36[26]$

$b \equiv 16[26]$

$g(x) \equiv 10x + 16[26]$.

3. $g(x) = 23x + 16$.

4. OQZROHOUT donne AU TRAVAIL!

213. 1. Cas particulier :

a. $\begin{cases} 4a & b \equiv 23[26] \\ & b \equiv 3[26] \end{cases}$

b. $40 + 3 \equiv 23[26]$

$40 \equiv 20[26]$.

c. $40 - 20 \equiv 0[26]$

$-4(5 - 0) \equiv 0[26]$

$4(5 - a) = 26 \times b \Leftrightarrow a = 5 - b \times \frac{13}{2}$

$b = 0 \Rightarrow a = 5$

ou $b = -2 \Rightarrow a = 18$.

d. a est premier avec 26, donc $a = 5$

$f(x) = 5x + 3$.

e. $5 \times 21 \equiv 1[26]$

$21f(x) \equiv x + 63[26] \equiv x + 11[26]$

$x = 21f(x) - 11[26]$

$g(x) = 21x + 15$.

f. IKDEV donne BRAVO.

2. **Application :** Utilisation d'un tableur.

214. 1. FD correspond à l'entier 81.

CG correspond à l'entier 158.

2. $440 = \underset{17^{\text{e}} \text{ ligne}}{\boxed{16}} \times 26 + \underset{25^{\text{e}} \text{ colonne}}{\boxed{24}}$

440 correspond à YQ.

$108 = \boxed{4} \times 26 + \boxed{4}$

108 correspond à EE.

3.	PA	TI	EN	CE
X	15	227	342	106
Y	475	161	596	166
	HS	FG	YW	KG

$f(x) = 31x + 10$.

4. $31 \times 101 = 3131 = 5 \times 626 + 1$

$31 \times 101 \equiv 1[626]$.

5. $31x + 10 \equiv f(x)[626]$

$101f(x) \equiv x + 1010[626]$

$101f(x) \equiv x + 384[626]$

$x = 101f(x) - 384[626]$

$x = 101f(x) + 242[626]$.

6. RU EOUK

	RU	EO	UK
X	537	368	280
Y	17	476	352
	RA	IS	ON

216. $x^5 = f(x)[26]$.

217. 1. a. $226 = 2 \times 108 + 8$

$109 = 13 \times 8 + 5$

$8 = 1 \times 5 + 3$

$5 = 1 \times 3 + 2$

$3 = 1 \times 2 + 1$

$2 = 2 \times 1 + 0$

$\text{pgcd}(226; 109) = 1$.

L'équation Diophantienne $ax + by = c$ admet des solutions si le $\text{pgcd}(a, b)$ divise c . C'est bien le cas ici, donc (E) admet des solutions entières.

b. On recherche une solution particulière (u, v) de (E) . On applique le théorème de Bézout :

$$1 = 41 \times 226 - 85 \times 109.$$

Le couple $(u, v) = (-85; -41)$ est une solution particulière de l'équation $109x - 226y = 1$.

Soit une solution quelconque de (E) on a :

$$\begin{cases} 109u - 226v = 1 \\ 109x - 226y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 109u - 226v = 1 \\ 109(x - u) = 226(y - v) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 109u - 226v = 1 \\ 109(x - u) = 226(y - v) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 109(x - u) = 226(y - v) \end{cases}$$

Donc 226 divise $109(x - u)$ et comme

$\text{pgcd}(109, 226) = 1$. On en déduit que

226 divise $(x - u)$ d'après le théorème de Gauss :

$$x - u = 226h$$

$$x = u + 226h = -85 + 226h$$

$$109 \times 226h = 226(y - v)$$

$$y = -41 + 109h.$$

$$\text{Posons } k = h - 1$$

$$\begin{cases} x = 141 + 226k \\ y = 68 + 109k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 141 + 226k \\ y = 68 + 109k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 141 + 226k \\ y = 68 + 109k \end{cases}$$

Montrons qu'il existe une unique valeur d

de $x = 141 + 226k$ qui sont élément de

$[0; 226]$.

$$0 \leq 141 + 226k \leq 226$$

$$-141 \leq 226k \leq 85$$

$$-\frac{141}{226} \leq k \leq \frac{85}{226}$$

$$-\frac{141}{226} \leq k \leq \frac{85}{226}$$

k entier donc $k = 0$ (seule possibilité).

D'où $d = 141$ et $e = 68$.

On a bien : $109d = 1 + 226e$ avec

$$d \in [0; 226].$$

2. 227 n'est pas divisible par 2, ni par 3,

ni par 5, 7, 11 et 13. C'est donc un nombre

premier.

3. $A = [0; 226]$

$$a^{109} \equiv f(a)[227]$$

$$a^{141} \equiv g(a)[227]$$

a. Le reste de la division euclidienne de

0^{109} par 227 est 0 donc $f(0) = 0$. De même

$g(0) = 0$ donc $g(f(0)) = 0$.

b. Comme 227 est premier, d'après le

petit théorème de Fermat on a pour tout

entier a non nul :

$$a^{226} \equiv 1[227].$$

$$c. g(f(0)) = (f(0))^{141} \equiv a^{109 \times 141}[227].$$

Mais d'après 1. b. $109 \times 141 = 1 + 226 \times 68$.

D'où :

$g(f(a)) \equiv a^{109 \times 141} \equiv aa^{226 \times 68} [227]$
et d'après 3. b. $a^{226} \equiv 1 [227]$ donc
 $g(f(a)) \equiv a [227]$ et $g(f(a)) < 226$ donc
 $g(f(a)) = a$.
Les fonctions f et g commutent :
 $f(g(a)) \equiv (g(a))^{109} \equiv a^{109 \times 141} \equiv g(f(a)) [227]$.
Donc pour tout a de A : $f(g(a)) = a$.

218. A. Introduction :

$$(kx)^2 + (ky)^2 = (kz)^2$$

$$k^2(x^2 + y^2) = k^2z^2$$

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

B. Approche géométrique

1. a. $y = \frac{2}{5}x + b$

$$0 = \frac{2}{5}x(-1) + b$$

$$b = \frac{2}{5}$$

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{5}x + \frac{2}{5} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + \left(\frac{2}{5}x + \frac{2}{5}\right)^2 = 1$$

$$x^2 + \frac{4}{25}x^2 + \frac{8}{25}x + \frac{4}{25} = 1$$

$$29x^2 + 8x - 21 = 0$$

$$\Delta = 64 - 4 \times 29 \times (-21) = 2500$$

$$x_1 = \frac{-8 + 50}{58} = \frac{42}{58} = \frac{21}{29}$$

$$y = \frac{2}{5} \times \frac{21}{29} + \frac{2}{5} = \frac{20}{29}.$$

b. $M \in \Gamma$ de centre O et de rayon 1

$$\left(\frac{21}{29}\right)^2 + \left(\frac{20}{29}\right)^2 = 1^2$$

$$21^2 + 20^2 = 29^2$$

$(21; 20; 29)$ est un triplet pythagoricien.

2. $\begin{cases} y = \frac{a}{b}x + \frac{a}{b} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}x^2 + 2\frac{a^2}{b^2}x + \frac{a^2}{b^2}$$

$$(b^2 + a^2)x^2 + 2a^2x + a^2 - b^2 = 0.$$

$$\Delta = 4a^4 - 4 \times (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$$

$$= 4b^4$$

$$x_1 = \frac{-2a^2 + 2b^2}{2(b^2 + a^2)} = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$$

$$y = \frac{a}{b} = \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}\right) + \frac{a}{b}$$

$$y = \frac{2ab^2}{b(b^2 + a^2)} = \frac{2ab}{b^2 + a^2}$$

$$(b^2 - a^2; 2ab; b^2 + a^2)$$

• $b = 3$ $a = 2$ $(5; 12; 13)$

• $b = 4$ $a = 3$ $(7; 24; 25)$

• $b = 7$ $a = 3$ $(40; 42; 58)$

• $b = 7$ $a = 5$ $(24; 70; 74)$

C. Cas général

1. Si a et b sont pairs, alors a^2 et b^2 aussi et $c^2 = a^2 + b^2$ aussi. Ce qui est impossible car a, b et c sont premiers entre eux.

$x[4]$	0	1	2	3
$x^2[4]$	0	1	0	1

Puisque x est impair $x \equiv 1[4]$ ou $x \equiv 3[4]$ de même pour y . Donc $x^2 \equiv y^2 \equiv 1[4]$, donc $z^2 \equiv 1 + 1 \equiv 2[4]$ ce qui est impossible d'après le tableau ci-dessus.

3. $a = 2k + 1$ et $b = 2m$ avec $(m; k) \in \mathbb{N}^2$
 $c^2 = x^2 + y^2 = (2k + 1)^2 + (2m)^2$
 $= 2(2m^2 + 2k^2 + 2k) + 1$

donc c^2 est impair et c est impair.

4. Si d est un diviseur commun à a et c alors d divise.

$c \times c - a \times a = b^2$, $b \times b = k \times d$ donc d'après Gauss d divise b . Ce qui impossible car a, b et c sont premiers entre eux.

5. $b^2 = c^2 - a^2$ $b = 2w$ $c - a = 2u$ et $c + a = 2v$
 $= (c - a)(c + a)$

$$4w^2 = 4uv$$

$$w^2 = uv$$

6. $c = u + v$ si d divise u et v alors il
 $a = v - u$ divise aussi a et c .

On note $d = \text{pgcd}(u; v)$ et $u = dv'$, $v = du'$ avec $(u'; v') \in \mathbb{N}^2$ et $\text{pgcd}(u'; v') = 1$.

Puisque $c = u + v = d(u' + v')$ et $a = v - u = d(v' - u')$ alors d divise $\text{pgcd}(a; c)$.

Comme $\text{pgcd}(a; c) = 1$, $d = 1$.

7. $b^2 = c^2 - a^2 = (c - a)(c + a) = 2v \times 2u = 4uv$
c'est-à-dire $4w^2 = 4uv$ ou encore $w^2 = u \times v$.
On décompose u et v en produit de facteurs premiers.

$$u = q_1^{\alpha_1} \times q_2^{\alpha_2} \times \dots \times q_r^{\alpha_r}$$

$$v = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_s^{\beta_s} \text{ donc}$$

$$w^2 = q_1^{\alpha_1} \times q_2^{\alpha_2} \times \dots \times q_r^{\alpha_r} \times p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_s^{\beta_s}.$$

Or dans la décomposition en facteurs premiers d'un carré les puissances des facteurs premiers sont paires donc :

$$\alpha_1 = 2\gamma_1, \quad \alpha_2 = 2\gamma_2, \quad \dots, \quad \alpha_r = 2\gamma_r,$$

$$\beta_1 = 2\delta_1, \quad \dots, \quad \beta_s = 2\delta_s.$$

Finalement u et v sont des carrés.

Il existe donc deux nombres q et $p \in \mathbb{N}$ tel que : $u = q^2$ et $v = p^2$.

8. $c = u + v = q^2 + p^2$
 $a = v - u = p^2 - q^2$
 $b = 2p \times q.$

219. A. 1. 1 et $n - 1$ sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur possible pour $\varphi(n)$.

2. $\varphi(2) = 1$ (1)
 $\varphi(3) = 2$ (1; 2)
 $\varphi(4) = 2$ (1; 3)
 $\varphi(5) = 4$ (1; 2; 3; 4)
 $\varphi(6) = 2 \dots$
 $\varphi(7) = 6$
 $\varphi(8) = 4$
 $\varphi(9) = 6$
 $\varphi(10) = 4$
 $\varphi(11) = 10$

3. p est premier donc ses seuls diviseurs positifs sont 1 et p .

Donc pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $r < p$

$$\text{pgcd}(p; r) = 1.$$

$$\varphi(p) = p - 1.$$

4. a. $\text{pgcd}(a, n) = 1$

$$au + vn = 1$$

$$amu + vmn = m$$

$$\text{pgcd}(a, m) = 1$$

$$au' + v'm = 1$$

$$au' + v'(amu + vmn) = 1$$

$$\boxed{a}(u' + v'mu) + v'\boxed{mn} = 1$$

$$\text{pgcd}(a, nm) = 1.$$

b. $\text{pgcd}(u, n) = 1 \Rightarrow \text{pgcd}(u, v_j, nm) = 1$

$$\text{pgcd}(v_j, m) = 1 \Rightarrow u, v_j \text{ est premier avec } nm$$

$$\text{pgcd}(u; n) = d \Rightarrow v_j du; n = nd$$

$$\text{pgcd}(v_j; m) = d' \Rightarrow v_j = d'v_j; m = qd'$$

avec $dd' \pm 1$

$$u, v_j = \frac{dd'}{\pm 1} u_i^- v_i^-$$

n'est pas premier avec $mn = kqdd'$

c. Les entiers premiers avec mn sont les produits $u_i v_j$ avec $1 \leq i \leq \varphi(n)$, $1 \leq j \leq \varphi(m)$ donc $\varphi(mn) = \varphi(m) \times \varphi(n)$.

d. $\varphi(15) = \varphi(3) \times \varphi(5)$ 3 et 5 premiers entre eux

$$= 8$$

$$\varphi(77) = \varphi(7) \times \varphi(11)$$

$$= 6 \times 10 = 60$$

5. a. $p, 2p, 3p, \dots, (p-2)p$ et $(p-1)p$ ne sont pas premiers avec p^2 et u sont les seuls.

Il y en a exactement $p - 1$.

On a donc $p^2 - 1$ entiers compris entre 1 et $p^2 - 1$ premiers avec p^2 .

$$\varphi(p^2) = p^2 - 1 - (p - 1) = p(p - 1).$$

b. Les multiples de p inférieurs ou égaux à p_n sont $p, 2p, 3p, \dots, (p-1) \times p, p \times p, (p+1) \times p, \dots, (2p) \times p, \dots, p^2 \times p, \dots, p^{n-1} \times p$, il y en a donc $p^{n-1} - 1$.

Donc $\varphi(p^n) = p^n - (p^{n-1} - 1) = p^{n-1}(p - 1)$.

$$\begin{aligned} \text{c. } \varphi(75) &= \varphi(25 \times 3) = \varphi(5^2 \times 3) = \varphi(5^2) \times \varphi(3) \\ &= (5 \times 4) \times 2 \\ &= 40. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(88) &= \varphi(2^3 \times 11) = \varphi(2^3) \times \varphi(11) \\ &= 2^2(2-1) \times 10 \\ &= 40. \end{aligned}$$

B. 1. Soit $i \in \{1; 2; \dots; \varphi(n)\}$. v_i est le reste de la division euclidienne de au_i par n , donc il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $au_i = nq_i + v_i$.

Si $d \in \mathbb{N}$ et d un diviseur commun positif à n et v_i , d divise $nq_i + v_i = Qu_i$. Or a et v_i sont premiers avec n donc au_i l'est aussi (voir **B. 4. a.**) et $d = 1$.

2. Supposons qu'il existe :

$i, j \in \{1; 2; \dots; \varphi(n)\}$ tels que $i \neq j$ et $v_i = v_j$.

Tout entier relatif u étant congru modulo n en reste de la division euclidienne de u par n , on en déduit que $au_i \equiv au_j [n]$. Donc $(u_i - u_j) \times a \equiv 0 [n]$: n divise $(u_i - u_j) \times a$. Or n est premier à a , donc d'après le théorème de Gauss, n divise $(u_i - u_j)$.

On en conclut que pour tout $i, j \in \{1; 2; \dots; \varphi(n)\}$ avec $i \neq j$ et $v_i \neq v_j$.

$u_i - u_j \equiv 0 [n]$, $u_i \equiv u_j [n]$ et comme $u_i < n$ et $u_j < n$, on a $u_i = u_j$. Impossible.

3. Par hypothèse, pour tout $i \in \{1; 2; \dots; \varphi(n)\}$ on a $0 \leq v_i \leq n-1$ avec v_i reste de la division euclidienne de au_i par n .

De plus $v_i \neq 0$ donc $1 \leq v_i \leq n-1$.

Or d'après les questions précédentes $v_1, v_2, \dots, v_{\varphi(n)}$ sont $\varphi(n)$ entiers distincts premiers à n .

On en déduit que :

$$\{v_1; v_2; \dots; v_{\varphi(n)}\} = \{u_1; u_2; \dots; u_{\varphi(n)}\}.$$

Ainsi,

$$v_1 \times v_2 \times \dots \times v_{\varphi(n)} = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{\varphi(n)}.$$

4. Pour tout $i \in \{1; 2; \dots; \varphi(n)\}$, $a \times u_i \equiv v_i [n]$ donc :

$$\begin{aligned} (a \times u_1) \times (a \times u_2) \times \dots \times (a \times u_{\varphi(n)}) \\ \equiv u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{\varphi(n)} [n]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } a^{\varphi(n)} \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{\varphi(n)} \\ \equiv u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{\varphi(n)} [n]. \end{aligned}$$

5. D'après la question **4.** et moyennant une petite factorisation :

$$u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{\varphi(n)} (a^{\varphi(n)} - 1) \equiv 0 [n]$$

$$\text{d'où } n \text{ divise :}$$

$$u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{\varphi(n)} (a^{\varphi(n)} - 1).$$

Or $u_1; u_2; \dots; u_{\varphi(n)}$ sont premiers à n , donc $u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{\varphi(n)}$ n'ont aucun facteur premier commun à n , donc $u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{\varphi(n)}$ et n n'ont aucun facteur premier en commun : ils sont donc premiers entre eux.

Donc n divise $(a^{\varphi(n)} - 1)$ d'après le théorème de Gauss. On en déduit que $a^{\varphi(n)} - 1 \equiv 0 [n]$.

Conclusion : $a^{\varphi(n)} \equiv 1 [n]$.

Application :

$$\varphi(55) = \varphi(5) \times \varphi(11) = 4 \times 10 = 40$$

$$\text{pgcd}(27; 65) = 1 \text{ donc } 27^{40} \equiv 1 [55].$$

$$\varphi(27) = \varphi(3^3) = 3^2(3-1) = 18$$

$$\text{pgcd}(27; 100) = 1 \text{ donc } 100^{18} \equiv 1 [27].$$

220. 1. a. $N_2 = 11$ premier.

$N_3 = 111$ pas premier car divisible par 3.

$N_4 = 111$ n'est pas premier car $1111 = 11 \times 101$.

b. On sait que pour tout réel $x \neq 1$

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + \dots + x^{p-2} + x^{p-1} \\ = \frac{1 - x^{(p-1)+1}}{1-x} = \frac{x^p - 1}{x - 1} \end{aligned}$$

En particulier en prenant $x = 10$ on obtient :

$$N_p = \frac{10^p - 1}{10 - 1} = \frac{10^p - 1}{9}.$$

D'où $10^p - 1 = 9 \times N_p$ avec $N_p \in \mathbb{N}^*$.

Donc $10^p - 1$ est divisible par 9.

c. i)

$$x^n - 1 = (x-1)(1 + x + \dots + x^{n-2} + x^{n-1}) \quad (1).$$

$$N_p = N_{2q} = \frac{10^{2q} - 1}{9} = \frac{100^q - 1}{9} \text{ or d'après}$$

$$\begin{aligned} 1. \text{ avec } x = 100 \text{ et } n = q \text{ on a} \\ 100^q - 1 = (100 - 1)(1 + 100 + \dots + 100^{q-2} + 100^{q-1}) \\ = 99 \times (1 + 100 + \dots + 100^{q-2} + 100^{q-1}). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$N_p = 11 \times (1 + 100 + \dots + 100^{q-2} + 100^{q-1})$$

$$\text{est divisible par 11.}$$

$$\text{ii) } N_p = N_{3q} = \frac{10^{3q} - 1}{9} = \frac{1000^q - 1}{9}.$$

$$\begin{aligned} \text{Or d'après 1. avec } x = 1000 \text{ et } n = q \text{ on a} \\ 1000^q - 1 = (1000 - 1)(1 + x + \dots + x^{q-2} + x^{q-1}) \\ = 9 \times 111 \times (1 + x + \dots + x^{q-2} + x^{q-1}). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$N_p = 111 \times (1 + x + \dots + x^{q-2} + x^{q-1}) \text{ est divisible par 111.}$$

$$\text{d. } N_p = N_{kq} = \frac{10^{kq} - 1}{9} = \frac{(10k)^q - 1}{9} \text{ avec}$$

$x = 10k$ et $n = q$ on a :

$$(10k)^q - 1 = (10k - 1)(1 + x + \dots + xq - 2 + xq - 1).$$

$$\text{Ainsi } N_p = \frac{(10k - 1)(1 + x + \dots + x^{q-2} + x^{q-1})}{9}$$

$$\frac{10k - 1}{9} (1 + x + \dots + x^{q-2} + x^{q-1})$$

$$= N_k \times (1 + x + \dots + x^{q-2} + x^{q-1})$$

or $(1 + x + \dots + x^{q-2} + x^{q-1})$ est un entier naturel non nul. Finalement N_p est divisible par N_k .

4. Si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier (car N_p est divisible par N_k avec $1 < N_k < N_p$).

La contraposée de cette implication est : si N_p est premier alors p est premier.

Autrement dit, pour que N_p soit premier, il faut que p soit premier. Cette condition n'est pas suffisante, car 3 est premier mais N_3 ne l'est pas.

2. Diviseurs des rep-units

a. 2 et 5 car un rep-unit est impair car se finissant par 1.

b. Le nombre 3 apparaît dans la décomposition du rep-unit N_k si k est un multiple de 3 (car la somme des chiffres doit être 3 divisible par 3).

c.

$$N_k = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{k-1} = \frac{10^k - 1}{10 - 1} = \frac{10^k - 1}{9}$$

$$9N_k = 10^k - 1.$$

$$\text{d. } 10^1 \equiv 3 [7] \quad 10^5 \equiv 5 [7]$$

$$10^2 \equiv 2 [7] \quad 10^6 \equiv 1 [7]$$

$$10^3 \equiv 6 [7] \quad 10^7 \equiv 3 [7]$$

$$10^4 \equiv 4 [7] \quad 10^8 \equiv 2 [7]$$

e. $k = 6q + r$ avec $0 \leq r < 6$.

$$10^k = (10^6)^q \times 10^r \equiv 10^r [7] \text{ et d'après le}$$

d. d'après $10^r \equiv 1 [7] \Leftrightarrow r = 0$ donc $10^k \equiv 1 [7] \Leftrightarrow k = 6q$. Si 7 divise N_k alors

7 divise $10^k - 1$ (car $9N_k = 10^k - 1$) donc

$$10^k - 1 = 7xq \text{ donc } 10^k = 7xq + 1 \text{ donc}$$

$$10^k \equiv 1 [7] \text{ donc } k \text{ est un multiple de 6.}$$

Si k est multiple de 6 alors $10^k \equiv 1 [7]$

donc il existe q entier naturel $10^k - 1 = 7q$

$$\text{or } 9N_k = 10^k - 1 \text{ donc } 9N_k = 7q. 7 \text{ divise}$$

$$9N_k \text{ or } 7 \text{ et } 9 \text{ sont premiers entre eux}$$

$$\text{donc } 7 \text{ divise } N_k.$$

3. Les rep-units ne sont pas des carrés

1. Le reste de la division euclidienne de n^2 par 10 est 1. Donc $n^2 = 10q + 1$ ou q est un entier. Or $n = 10s + t$ avec $0 \leq t < 10$.

$n^2 = (10s + t)^2 = 10 \times (10s^2 + 2st) + t^2$
 et le reste de la division euclidienne de t^2
 par 10 est 1 (car celui de n^2 est 1) t est
 compris entre 0 et 9.

$t = 0 \quad t^2 = 0 \quad$ non

$t = 1 \quad t^2 = 1 \quad$ oui

$t = 2 \quad t^2 = 4 \quad$ non

$t = 3 \quad t^2 = 9 \quad$ non

$t = 4 \quad t^2 = 16 \quad$ non donc n se termine
 par un 1 ou un 9.

$t = 5 \quad t^2 = 25 \quad$ non

$t = 6 \quad t^2 = 36 \quad$ non

$t = 7 \quad t^2 = 49 \quad$ non

$t = 8 \quad t^2 = 64 \quad$ non

$t = 9 \quad t^2 = 81 \quad$ oui

2. n se termine par un 1 : $n = 10 \times q + 1$
 on pose $q = m \quad n = 10 \times m + 1$.

n se termine par un 9 : $n = 10 \times q + 9$
 $n = 10 \times (q + 1) - 1$ on pose $m = q + 1$
 $n = 10m - 1$.

3. Si $n = 10m + 1$

$n^2 = 100m^2 + 20m + 1 = 20 \times (5m^2 + m) + 1$
 donc $n = 10m - 1$.

Si $n = 10m - 1$

$n^2 = 100m^2 - 20m + 1 = 20(5m^2 - m) + 1$
 donc $n \equiv 1[20]$.

4. $N_k = 1 + 10 + 100 + 1000 + \dots$

or 100 est congru à 0 modulo 20, de
 même pour 1 000, 10 000, ...

Donc $N_k \equiv 10 + 1[20]$

$N_k \equiv 11[20]$ pour $k \geq 2$.

5. Raisonement par l'absurde : on sup-
 pose qu'un rep-unit N_k distinct de 1 est un
 carré donc $k \geq 2$.

D'après les questions précédentes
 $N_k \equiv 1[20]$. Or pour $k \geq 2 \quad N_k \equiv 11[20]$
 d'où la contradiction et la conclusion : un
 rep-unit divisible de 1 n'est pas un carré !

Calcul matriciel et applications

Enseignement de spécialité

Programme officiel

Exemples de problèmes	Contenus
Marche aléatoire simple sur un graphe à deux ou trois sommets. Marche aléatoire sur un tétraèdre ou sur un graphe à N sommets avec saut direct possible d'un sommet à un autre : à chaque instant, le mobile peut suivre les arêtes du graphe probabiliste ou aller directement sur n'importe quel sommet avec une probabilité constante p. Étude du principe du calcul de la pertinence d'une page Web. Modèle de diffusion d'Ehrenfest : N particules sont réparties dans deux récipients ; à chaque instant, une particule choisie au hasard change de récipient. Modèle proie prédateur discrétisé : – évolution couplée de deux suites récurrentes ; – étude du problème linéarisé au voisinage du point d'équilibre.	• Matrices carrées, matrices colonnes : opérations. • Matrice inverse d'une matrice carrée. • Exemples de calcul de la puissance n-ième d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3. • Écriture matricielle d'un système linéaire. • Suite de matrices colonnes (U_n) vérifiant une relation de récurrence du type $U_{n+1} = AU_n + C$: – recherche d'une suite constante vérifiant la relation de récurrence ; – étude de la convergence. • Étude asymptotique d'une marche aléatoire.

Situations (p. 492-501)

1. Notion de matrice ; somme, produit par un réel

Synthèse de l'aspirine

1. 3 300 L d'anhydride acétique ont été utilisés sur le site de production S_1 lors du second semestre de l'année 2012.

2. On additionne deux à deux les coefficients des deux matrices occupant la même position. On obtient

$$A = A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 4800 & 6300 & 170 \\ 3300 & 4600 & 110 \end{pmatrix}.$$

$$3. B_1 = 1,05 \times A_1 = \begin{pmatrix} 1,05 \times 2300 & 1,05 \times 3000 & 1,05 \times 50 \\ 1,05 \times 1500 & 1,05 \times 2100 & 1,05 \times 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2415 & 3150 & 84 \\ 1575 & 2205 & 52,5 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 2625 & 3465 & 94,5 \\ 1890 & 2625 & 63 \end{pmatrix} \text{ et on a}$$

$$B = B_1 + B_2 = \begin{pmatrix} 5040 & 6615 & 178,5 \\ 3465 & 4830 & 115,5 \end{pmatrix} \text{ d'une part,}$$

$$B = 1,05 \times A = \begin{pmatrix} 5040 & 6615 & 178,5 \\ 3465 & 4830 & 115,5 \end{pmatrix} \text{ d'autre part.}$$

2. Produit de matrices

Quel menu à la cantine ?

$$1. A = \begin{pmatrix} 0,25 & 1,4 & 3,5 & 1 \\ 0,007 & 0,21 & 0,07 & 0 \\ 0,05 & 0 & 0,78 & 0,2 \\ 0,002 & 0,07 & 0,008 & 0,05 \end{pmatrix}$$

$$2. L_1 \times C = (0,25 \ 1,4 \ 3,5 \ 1) \times \begin{pmatrix} m \\ p \\ r \\ y \end{pmatrix} = (0,25m + 1,4p + 3,5r + y$$

$$L_2 \times C = (0,007 \ 0,21 \ 0,07 \ 0) \times \begin{pmatrix} m \\ p \\ r \\ y \end{pmatrix} = 0,007m + 0,21p + 0,07r$$

$$L_3 \times C = (0,05 \ 0 \ 0,78 \ 0,2) \times \begin{pmatrix} m \\ p \\ r \\ y \end{pmatrix} = 0,05m + 0,78r + 0,2y$$

$$L_4 \times C = (0,002 \ 0,07 \ 0,008 \ 0,05) \times \begin{pmatrix} m \\ p \\ r \\ y \end{pmatrix} = 0,002m + 0,07p + 0,008r + 0,05y$$

$$3. \ A \times C = \begin{pmatrix} 0,25 & 1,4 & 3,5 & 1 \\ 0,007 & 0,21 & 0,07 & 0 \\ 0,05 & 0 & 0,78 & 0,2 \\ 0,002 & 0,07 & 0,008 & 0,05 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m \\ p \\ r \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25m + 1,4p + 3,5p + y \\ 0,007m + 0,21p + 0,07y \\ 0,05m + 0,78r + 0,2y \\ 0,002m + 0,07p + 0,008r + 0,05y \end{pmatrix}$$

$$4. \ A \times B = \begin{pmatrix} 0,25 & 1,4 & 3,5 & 1 \\ 0,007 & 0,21 & 0,07 & 0 \\ 0,05 & 0 & 0,78 & 0,2 \\ 0,002 & 0,07 & 0,008 & 0,05 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 50 & 60 & 40 \\ 75 & 70 & 80 \\ 125 & 125 & 100 \\ 125 & 125 & 125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 680 & 675,5 & 597 \\ 24,85 & 23,87 & 24,08 \\ 125 & 125,5 & 105 \\ 12,6 & 12,27 & 12,73 \end{pmatrix}$$

3. Systèmes linéaires ; inverse d'une matrice carrée

En voie d'extinction ?

1. a. « Le nombre de nouveaux bébés à l'année 1 est égal au tiers du nombre d'adultes vivants l'année 0 » se traduit par $x_1 = \frac{1}{3}z_0$.

« Seuls 20 % des bébés nés l'année 0 parviennent au stade jeune à l'année 1 » se traduit par $y_1 = \frac{1}{5}x_0$.

« 75 % des jeunes et 90 % des adultes de l'année 0 survivent pour être comptabilisés comme adultes à l'année 1 » se traduit par $z_1 = \frac{3}{4}y_0 + \frac{9}{10}z_0$.

$$b. \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

2. a. De l'équation $x_1 = \frac{1}{3}z_0$ on déduit $z_0 = 3x_1$.

De l'équation $y_1 = \frac{1}{5}x_0$ on déduit $x_0 = 5y_1$.

Enfin de l'équation $z_1 = \frac{3}{4}y_0 + \frac{9}{10}z_0$ on déduit $y_0 = -\frac{6}{5}z_0 + \frac{4}{3}z_1$;

l'équation $z_0 = 3x_1$ nous permet d'écrire que $y_0 = -\frac{18}{5}x_1 + \frac{4}{3}z_1$.

$$b. \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -\frac{18}{5} & 0 & \frac{4}{3} \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$3. \ A \times A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -\frac{18}{5} & 0 & \frac{4}{3} \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Et } A' \times A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -\frac{18}{5} & 0 & \frac{4}{3} \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -\frac{18}{5} & 0 & \frac{4}{3} \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -\frac{18}{5} & 0 & \frac{4}{3} \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1040 \\ 204 \\ 3093 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1020 \\ 380 \\ 3120 \end{pmatrix}$$

4. Puissances d'une matrice carrée

En voie d'extinction ? (suite)

1. On a, d'après l'énoncé, pour tout entier naturel n , $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$

$$2. \ U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1040 \\ 204 \\ 3093 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1031 \\ 208 \\ 2937 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1031 \\ 208 \\ 2937 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 979 \\ 206 \\ 2799 \end{pmatrix}$$

3. Au rang $n = 1$: on a bien $U_1 = AU_0$ (voir situation 3 question 1).

Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n > 0$. On a donc $U_n = A^n U_0$.

$$U_{n+1} = A \times U_n = A \times (A^n U_0) = (A \times A^n) U_0 = A^{n+1} U_0.$$

On a démontré par récurrence sur n que, pour tout $n > 0$, on a $U_n = A^n U_0$.

$$4. \text{ À la calculatrice on trouve } U_5 = \begin{pmatrix} 891 \\ 197 \\ 2553 \end{pmatrix}.$$

Après 5 années, la population de chouettes tachetées se décompose en 891 bébés, 187 jeunes et 2 553 adultes.

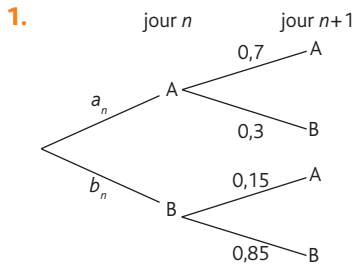
$$5. \ U_{10} = A^{10} U_0 = \begin{pmatrix} 707 \\ 148 \\ 2026 \end{pmatrix}, \ U_{15} = \begin{pmatrix} 561 \\ 118 \\ 1608 \end{pmatrix}, \ U_{20} = \begin{pmatrix} 445 \\ 93 \\ 1277 \end{pmatrix},$$

$$U_{25} = \begin{pmatrix} 353 \\ 74 \\ 1013 \end{pmatrix}, \ U_{30} = \begin{pmatrix} 280 \\ 59 \\ 804 \end{pmatrix}.$$

Il semble que la population de ces chouettes décroisse lentement, l'extinction est possible.

5. Processus aléatoire, matrice de transition

Location de voitures



2. $(a_{n+1} \ b_{n+1}) = (a_n \ b_n) \times T$ avec $T = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$.

3. Si $U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ alors $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ et

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

On aura donc $U_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Si $U_0 = (0,75 \ 0,25)$ alors

$$U_1 = (0,75 \ 0,25) \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = (0,563 \ 0,438) \text{ et}$$

$$U_2 = (0,563 \ 0,438) \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = (0,459 \ 0,541).$$

On démontre par récurrence sur n que $U_n = U_0 \times T^n$ pour tout entier naturel n .

5. A la calculatrice : $U_7 = U_0 \times T^7 = (0,340 \ 0,660)$,

$$U_{14} = U_0 \times T^{14} = (0,333 \ 0,667) \text{ et}$$

$U_{28} = U_0 \times T^{28} = (0,333 \ 0,667)$. Après 7 jours (resp. 14 et 28 jours) la proportion de voitures situées dans l'agence A est égale à 0,340 (resp. 0,333 et 0,333). On peut conjecturer que les suites (a_n) et (b_n) tendent vers $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ respectivement lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Si $U_0 = (0,1 \ 0,9)$ alors $U_1 = (0,205 \ 0,795)$,

$$U_2 = (0,263 \ 0,737), \quad U_7 = (0,330 \ 0,670), \quad U_{14} = (0,333 \ 0,667)$$

et $U_{28} = (0,333 \ 0,667)$.

Exercices résolus (p. 506 à 511)

Page 506

1. Le système $\begin{cases} x + 2y - z = 7 \\ 2x + 3z = -3 \\ x - y + z = -4 \end{cases}$ admet pour écriture matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Or $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$; donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Le système $\begin{cases} 2x - 3z = 0 \\ x - 2y + z = 5 \\ x - y + 2z = 7 \end{cases}$ admet pour écriture matricielle

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Or $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -7 & 5 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -7 & 5 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Page 508

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + C.$$

Or $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc

$$C^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ pour tout } n \geq 3.$$

On utilise la formule du binôme (car les matrices I_3 et C commutent) : tous les termes de la somme sont nuls, à part trois d'entre eux :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \quad B^n = (I_3 + C)^n = I_3^n + nI_3^{n-1}C + \frac{n(n-1)}{2}I_3^{n-2}C^2$$

$$= I_3 + nC + \frac{n(n-1)}{2}C^2.$$

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3n & -3n^2 + 7n \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Page 509

$$U_3 = U_0 T^3 = (1/4 \ 3/8 \ 3/8) \text{ et } U_{15} = U_0 T^{15} \approx (1/3 \ 1/3 \ 1/3).$$

Exercices (p. 512)

1. à 25. Corrigé dans le manuel.

1. Notion de matrice, premières opérations

26. Corrigé dans le manuel.

27. 1. Faux, la matrice est de dimensions 4×3 .

2. Vrai.

3. Faux, ce terme n'existe pas.

4. Faux, la matrice est de dimensions 4×3 .

28. Corrigé dans le manuel.

29. 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$;

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$; 3. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

30. 1. $D = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -15 \end{pmatrix}$; 2. $E = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;

3. $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$; 4. $G = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$;

5. $H = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$; 6. $J = \begin{pmatrix} 5 \\ -17 \\ -9 \end{pmatrix}$.

31. 1. $C = \begin{pmatrix} 3 & -15 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$; 2. $D = \begin{pmatrix} 12 & -28 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$;

3. $E = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; 4. $F = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

32. 1. $C = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

2. $D = \begin{pmatrix} -6 & 2/3 & 2 \\ 0 & -4 & 10/3 \end{pmatrix}$;

3. $E = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -8 \\ 8 & 16 & -6 \end{pmatrix}$;

4. $E = \begin{pmatrix} -62 & 3 & 4 \\ -20 & -9 & 25 \end{pmatrix}$.

33. $M = -3A + 2I$ et $N = -4I + A$.

34. $M = 3A + I$ et $N = I - A$.

35. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

36. 1. $C = A - 2B = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -4 \\ -2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et

$D = 3A + B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2. $M = 3C - D = 7B$; $N = C + 2D = 7A$.

2. Produit de matrices

37. et 38. Corrigé dans le manuel.

39. 1. $AB = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix}$; 2. $AB = \begin{pmatrix} -18 \\ -21 \\ 6 \end{pmatrix}$;

3. $AB = \begin{pmatrix} 19 \\ -4 \end{pmatrix}$; 4. $AB = \begin{pmatrix} -16 \\ -60 \\ 51 \end{pmatrix}$.

40. Corrigé dans le manuel.

41. 1. $AB = \begin{pmatrix} 14 & -24 \\ 8 & 22 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 14 & -24 \\ 8 & 22 \end{pmatrix}$.

2. $AB = BA$.

42. On sait que $a^2 + b^2 = 1$.

$AB = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab - ba \\ ab - ba & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$BA = \begin{pmatrix} b^2 + a^2 & ab - ba \\ ab - ba & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

43. 1. AB de dimensions 3×3 , BA de dimensions 2×2 .

2. $AB = \emptyset$; BA de dimensions 2×3 .

44. 1. La matrice B a pour dimensions 2×5 .

2. La matrice B a pour dimensions 3×4 .

45. Dans le cas du produit AB on a une matrice $p \times p$, dans le cas du produit BA on a une matrice $q \times q$. Donc $AB \neq BA$.

46. 1. $AB = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$;

2. $AB = \begin{pmatrix} 44 & -18 & -5 \\ 63 & -21 & 0 \\ 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$;

3. $AB = \begin{pmatrix} -14 & -21 & -35 & 28 \\ 0 & -6 & -18 & 12 \end{pmatrix}$;

4. $AB = \begin{pmatrix} 4 & 39 & 42 \\ 12 & -13 & -4 \end{pmatrix}$.

47. 1. $AB = \begin{pmatrix} -12 & 40 \\ -26 & -6 \\ 4 & -23 \end{pmatrix}$;

2. $AB = \begin{pmatrix} 83 & 57 & -9 \\ -24 & -6 & 0 \\ -7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$;

3. $(-2 \ -4 \ -15)$.

48. 1. AB, BC n'ont pas de sens. BA et CB oui.

2. $BA = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$; $CB = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -1 \\ -5 & -32 & 13 \end{pmatrix}$;

$AD = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -8 \\ 4 & -6 & 16 \\ 6 & -9 & 24 \end{pmatrix}$; $DA = (16)$;

$FD = \begin{pmatrix} 8 & -12 & 32 \\ 6 & -9 & 24 \end{pmatrix}$; $BE = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 15 \\ 826 & 3 & -17 \end{pmatrix}$;

$EA = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$; $CF = \begin{pmatrix} 17 \\ 1 \end{pmatrix}$.

49. $AD = (-4 \ 26)$;

$DE = \begin{pmatrix} 0 & 15 & -15 \\ -6 & 3 & 45 \\ -2 & 10 & 6 \end{pmatrix}$;

$ED = \begin{pmatrix} -15 & 12 \\ 1 & 24 \end{pmatrix}$; $FE = (-7 \ 2 \ 54)$;

$FC = (2 \ 3)$ $CF = \begin{pmatrix} 16 & -28 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$;

$DB = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -6 \\ 12 & -2 \end{pmatrix}$.

51.

Le chat a mangé le poisson	Le rat a dévoré le fromage	Le lion a dégusté le touriste
Un chat a mangé un poisson	Un rat a dévoré un fromage	Un lion a dégusté un touriste
Le chat avait mangé un poisson	Le rat avait dévoré un fromage	Le lion avait dégusté un touriste

52. 1.

$AB = \begin{pmatrix} 12 \times 1 - 1 \times 4 & -6 \times 2 - 4 \times (-3) \\ -3 \times 2 - 1 \times 6 & -3 \times (-6) - 3 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $BA = \begin{pmatrix} -14 & -244 \\ 11 & -22 \end{pmatrix}$.

3. $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

53. 1.

$AB = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 0 \times (-7) - 1 \times 1 & 1 \times 1 + 0 \times (-4) - 1 \times 1 \\ 2 \times 2 + 1 \times (-7) + 3 \times 1 & 2 \times 1 + 1 \times (-4) + 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $BA = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -15 & -4 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

55. Corrigé dans le manuel.

56. 1. $AB = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -4 & 16 \end{pmatrix}$; $(AB)C = \begin{pmatrix} -21 & 12 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$.

2. $CB = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; $(CB)A = \begin{pmatrix} 12 & 24 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

57. $AB = (11 \ -2)$; $(AB)C = (-54)$.

$BC = \begin{pmatrix} -16 \\ 12 \end{pmatrix}$; $(BC)A = \begin{pmatrix} -32 & 16 \\ 24 & -12 \end{pmatrix}$.

$CA = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}$; $(CA)B = \begin{pmatrix} -44 & 8 \\ 65 & -10 \end{pmatrix}$.

58. 1. $B + C = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$;

$A(B + C) = \begin{pmatrix} 11 & 28 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

2. $AB = \begin{pmatrix} 2 & 32.5 \\ 2 & 7.5 \end{pmatrix}$; $AC = \begin{pmatrix} 9 & -4.5 \\ 3 & -3.5 \end{pmatrix}$;

$AB + AC = \begin{pmatrix} 11 & 28 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

3. La distributivité.

59. 1. a. $A+B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$; $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 49 & 0 \\ 3 & 36 \end{pmatrix}$.

b. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}$; $AB = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 15 & 11 \end{pmatrix}$;

$B^2 = \begin{pmatrix} 25 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 46 & 13 \\ 24 & 39 \end{pmatrix}$.
 $A^2 + 2AB + B^2 \neq (A+B)^2$.

2. a. $A+B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

b. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}$; $AB = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$;

$B^2 = \begin{pmatrix} 22 & -4 \\ 12 & -2 \end{pmatrix}$; $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.
 $A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2$.

60. 1. $(2A - I_n)(A + 3I_n) = 2A^2 + 5A - 3I_n$.

2. $(A - 4I_n)(2A + 3I_n) = 2A^2 - A - 12I_n$.

3. $(I_n - A)(I_n + A + A^2) = I_n - A^3$.

4. $(A + 2I_n)^2 = A^2 + 4A + 4I_n$.

61. On sait que $AB = BA$.

a. $(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$
 $= A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

b. $(AB)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$
 $= A^2 - B^2$.

62. a. $(2A - B)(A + B)$
 $= 2A^2 + 2AB - BA - B^2$.

Si $AB = BA$, on obtient : $2A^2 + AB - B^2$.

b. $(-A + 3B)(3A - B)$
 $= -3A^2 + AB + 9BA - 3B^2$.

Si $AB = BA$, on obtient : $-3A^2 + 10AB - 3B^2$.

c. $(B - 4A)(B + 4A)$
 $= B^2 + 4BA - 4AB - 16A^2$.

Si $AB = BA$, on obtient : $B^2 - 16A^2$.

d. $(3A - B)^2 = 9A^2 - 3AB - 3BA + B^2$.
 Si $AB = BA$, on obtient : $9A^2 - 6AB + B^2$.

63.

$$M_a M_b = \begin{pmatrix} \cos a \cos b - \sin a \sin b & -\cos a \sin b - \sin a \cos b \\ \sin a \cos b + \cos a \sin b & \sin a \sin b - \cos a \cos b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix} = M_{a+b}$$

64. 1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 80 & 0.8 \\ 0.0125 & 1 & 0.01 \\ 1.25 & 100 & 1 \end{pmatrix}$.

2. (318.75 48000 255) correspond à la somme totale dans chacune des devises.

65. 1. $PV = \begin{pmatrix} 7.1 & 6.5 & 5.6 \\ 10.6 & 11 & 11.6 \\ 33.5 & 32.5 & 31 \end{pmatrix}$, la matrice donne les quantités nutritives (lipides, protides et glucides) pour trois types de recettes différentes.

2. $VP = \begin{pmatrix} 31.5 & 35.4 \\ 33.5 & 17.6 \end{pmatrix}$ pas d'interprétation concrète.

3. Il faut résoudre le système :

$$\begin{cases} 5x + 8y = 6.8 \\ 12x + 10y = 10.8 \\ 30x + 35y = 33 \end{cases}$$

on obtient alors
 $x = 0.4$ et $y = 0.6$.

66. 1. La couleur rouge dans l'espace (YUV) est $\begin{pmatrix} 0.299 \\ -0.14713 \\ 0.615 \end{pmatrix}$.

2. La couleur amande est représentée par $\begin{pmatrix} 0.8829 \\ -0.34555282 \\ 0.0500594 \end{pmatrix}$.

3. Systèmes - Inverse d'une matrice carrée

69. 1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix}$.

70. 1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}$.

71. Corrigé dans le manuel.

72. 1. $\det = 18$; $A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -9 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Non inversible, le déterminant est nul.

3. Non inversible, le déterminant est nul.

4. $\det = -12$; $A^{-1} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

73. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et $\det A = ad - cb = 1$.

$$\begin{cases} ad - cb = 1 \\ a = d \\ c = -c \\ b = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 0 = 1 \\ a = d \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases}, \text{ on obtient}$$

2 solutions $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

74. 1. $\det A = 4$, A est inversible. D et B = 1, B est inversible. D et $(A+B) = 4$, $(A+B)$ est inversible.

2. $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$,

$(A+B)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. et 4. Faux si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont inversibles, $(A+B)$ n'est pas inversible.

75. 1. Pour tout réel k, $\det A_k = 1 \times 1 - 0 \times k = 1$, la matrice est inversible.

2. $A_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

76. 1. Pour qu'une matrice soit inversible il faut que son déterminant soit différent de 0. D et $M = a^2 + b^2$. Si $a = b = 0$, la matrice M n'est pas inversible.

2. $M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

77. 1. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Les matrices A et B sont inversibles et $A = B^{-1}$.

78. 1. $AB = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

2. $AB = BA = \frac{1}{5}I_3$; $A^{-1} = \frac{1}{5}B$.

79. 1. Une matrice carrée A d'ordre n est dite inversible, s'il existe une matrice carrée B d'ordre n, telle que $AB = BA = I_n$.

2. $AB = \begin{pmatrix} 1 \times 6 - 2 \times 1 + 1 \times (-3) & 1 \times (-1) - 2 \times 0 + 1 \times 1 \\ 0 \times 6 + 3 \times 1 + 1 \times (-3) & 0 \times (-1) + 3 \times 0 + 1 \times 1 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Non la matrice A n'est pas inversible car elle n'est pas carrée.

82. A est inversible.

$AB = AC \Leftrightarrow A^{-1}AB = A^{-1}AC \Leftrightarrow B = C$.

83. 1. La variable D correspond au déterminant de la matrice. L'algorithme permet de calculer l'inverse d'une matrice.

3. a. M est inversible et son inverse est : $N[1] = 2$; $N[2] = -1$; $N[3] = -5$; $N[4] = 3$;

b. M est inversible et son inverse est : $N[1] = \frac{4}{5}$; $N[2] = \frac{-1}{5}$; $N[3] = \frac{3}{5}$; $N[4] = \frac{-2}{5}$;

c. M n'est pas inversible.

84. 1. $\det(A) = 2$;

$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\det(A) = 0$, la matrice A n'est pas inversible.

85. 1. $\det(A) = 9$;

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. $\det(A) = -72$;

$$A^{-1} = -\frac{1}{72} \begin{pmatrix} -10 & -6 & 4 \\ -14 & 6 & -16 \\ -6 & -18 & -12 \end{pmatrix}.$$

86. 1. $M^2 = \begin{pmatrix} 16 & 15 & -15 \\ 15 & 16 & -15 \\ 15 & 15 & -14 \end{pmatrix}.$

2. $M^2 - 5M + 4I_3 = \begin{pmatrix} 16 & 15 & -15 \\ 15 & 16 & -15 \\ 15 & 15 & -14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 & 15 & -15 \\ 15 & 20 & -15 \\ 15 & 15 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

3. $M^{-1}(M^2 - 5M + 4I_3) = M - 5I_3 + 4M^{-1} = 0 \Leftrightarrow M^{-1} = \frac{1}{4}(5I_3 - M).$

88. Corrigé dans le manuel.

89. 1. $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix};$

$\det(A) = -5$; A est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$-\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/5 \\ -29/5 \end{pmatrix},$$

on trouve alors $x = \frac{11}{5}$ et $y = -\frac{29}{5}$.

2. $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix}; \det(A) = -3$;

A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}.$

$$-\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/3 \\ 28/3 \end{pmatrix}, \text{ on trouve}$$

alors $x = \frac{29}{3}$ et $y = \frac{28}{3}$.

3. $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}; \det(A) = 10$;

A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$

$$\frac{1}{10} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -37/10 \\ -26/10 \end{pmatrix}, \text{ on trouve}$$

alors $x = -\frac{37}{10}$ et $y = -\frac{26}{10}$.

4. $\begin{pmatrix} 7 & 16 \\ 5 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 25 \end{pmatrix}; \det(A) = 4$; A est

inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 12 & -16 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}.$

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 12 & -16 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 31 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ on trouve}$$

alors $x = -7$ et $y = 5$.

90. 1. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

2. $\det(A) = 6$; $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 12 \\ 4 & -2 & -14 \\ -7 & 5 & 20 \end{pmatrix}.$

3. $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 12 \\ 4 & -2 & -14 \\ -7 & 5 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 13 \end{pmatrix}.$

91. 1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}.$

$\det(A) = -13$;

$$A^{-1} = -\frac{1}{13} \begin{pmatrix} -12 & -5 & -3 \\ -8 & 1 & -2 \\ -7 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$-\frac{1}{13} \begin{pmatrix} -12 & -5 & -3 \\ -8 & 1 & -2 \\ -7 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/13 \\ 21/13 \\ -6/13 \end{pmatrix}.$$

2. $\begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}.$

$\det(A) = 15$; $A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -4 & -20 & 9 \\ -2 & -5 & 3 \\ 3 & 15 & -3 \end{pmatrix}.$

$$\frac{1}{15} \begin{pmatrix} -4 & -20 & 9 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & 15 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -76/15 \\ 8/15 \\ 132/15 \end{pmatrix}.$$

92. 1. $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$\det(A) = 1$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -23 & -6 & 16 \\ -7 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -23 & -6 & 16 \\ -7 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -713 \\ -78 \\ -25 \end{pmatrix}.$$

2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$

$\det(A) = -4$; $A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$

$$-\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

93. 1. $\frac{1}{-9} \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -6 & 9 & -3 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 \\ -1/3 \\ -5/9 \end{pmatrix}.$

2. $\frac{1}{-9} \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -6 & 9 & -3 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25/9 \\ 14/3 \\ -19/9 \end{pmatrix}.$

3. $\frac{1}{-9} \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -6 & 9 & -3 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$

94. 1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$

5. $AA' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$A'A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

95. 1. $\det(A) = -1$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

2. $\det(A) = abc$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} bc & 0 & 1-b \\ 0 & ac & 0 \\ -k & 0 & ab \end{pmatrix}.$

96. 1. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix};$

2. $A^{-1} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$

97. 1. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

2. $S_k^{-1} = \frac{1}{3k-3} \begin{pmatrix} 3k+2 & 4+k & -5 \\ -1 & k-2 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$

3. Pour que la matrice soit inversible, il faut que son déterminant soit différent de 0. Il faut donc que k soit différent de 1.

4. $S_2^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & 6 & -5 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix};$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & 6 & -5 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$S_{-1}^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ -1 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix};$$

$$-\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ -1 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

98. 1. $P: \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2. Calcul du déterminant :

$$\det = k^3 - 3k + 2 = (k-1)^2(k+2).$$

Matrice non inversible pour k égal à 1 ou -2 .

3. $P^{-1}: \frac{1}{(k-1)^2(k+2)} \begin{pmatrix} k^2-1 & 1-k & 1-k \\ 1-k & k^2-1 & 1-k \\ 1-k & 1-k & k^2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} k^2-2k+3 \\ k^2-2k+3 \\ k^2-2k+3 \end{pmatrix}.$

99. 1. La matrice formée par P1, P2 et P3 a un déterminant de 9, cette matrice est inversible.

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11/9 \\ -1/9 \\ 13/9 \end{pmatrix}.$$

2. la matrice équivalente au système est :

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ -1 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est $\det = k^3 + 1$. La matrice n'est pas inversible pour $k = -1$.

$$P_k^{-1} = \frac{1}{k^3+1} \begin{pmatrix} k^2-1 & 1 & -k \\ -1-k & k^2+1 & 1-k \\ 1+k & -k & k^2 \end{pmatrix};$$

$$\frac{1}{k^3+1} \begin{pmatrix} k^2-1 & 1 & -k \\ -1-k & k^2+1 & 1-k \\ 1+k & -k & k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{k^3+1} \begin{pmatrix} -k^2-4k+1 \\ 5-3k \\ 4k^2-k-1 \end{pmatrix}.$$

100. 1. Les trois équations correspondent respectivement aux équilibres pour le carbone, l'hydrogène et l'oxygène dans la réaction chimique.

2. $\begin{cases} 4x - z \\ 10x = 2t \\ 2y = 2z + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - z = 0 \\ 10x = 2t \\ 2y - 2z = t \end{cases}.$

3. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \\ t \end{pmatrix}.$

5. valable pour $t = 10$, on obtient alors, $x = 2$; $y = 13$ et $z = 8$.

6. $\begin{cases} 3x = z \\ 8x = 2t \\ 2y = 2z + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - z = 0 \\ 8x = 2t \\ 2y - 2z = t \end{cases};$ valable

pour $t = 4$, on obtient alors, $x = 1$; $y = 5$ et $z = 3$.

4. Puissances d'une matrice

101. 1. $A^{-2} = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} 13 & -30 \\ -10 & 23 \end{pmatrix}.$

2. $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}.$

3. $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} -27 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$

4. $A^2 = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.25 & 0 \end{pmatrix}.$

102. 1. $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -4 \\ 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$

2. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

3. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}.$

4. $A^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & -1 \\ 0 & 1/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/125 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

103. 1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

2. Hypothèse de récurrence vérifiée au rang 2.

$$A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & nk \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times k & 1 \times k + nk \times 1 \\ 0 \times 1 + 1 \times 0 & 0 \times k + 1 \times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (n+1)k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

104. 1. $M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

2. $M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

3. Si $n = 4k$, alors $M^n = I_2$.

Si $n = 4k + 1$, alors $M^n = M$.

Si $n = 4k + 2$, alors $M^n = M^2$.

Si $n = 4k + 3$, alors $M^n = M^3$.

105. 1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

2. Si $n = 2k$ alors $A^n = I_2$.

Si $n = 2k + 1$ alors $A^n = A$.

106. 1. $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} 18 & -9 & -9 \\ -9 & 18 & -9 \\ -9 & -9 & 18 \end{pmatrix}.$

2. $A^2 = 3A$, hypothèse de récurrence vérifiée au rang 2.

On suppose l'hypothèse vraie au rang n , on cherche à vérifier si l'hypothèse est vraie au rang $n + 1$.

$$A^{n+1} = A^n A = 3^{n-1} A A = 3^{n-1}.$$

$$3A = 3^n A.$$

L'hypothèse de récurrence est vraie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

108. 1. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. a. B et I sont deux matrices 3*3 qui commutent, la formule du binôme de Newton peut s'appliquer.

b. $A^n = (B + I_3)^n$
 $= \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2 + B^3 \sum_{i=3}^n \binom{n}{i} B^{i-3}.$

On sait que B^3 est une matrice nulle. Il n'y a alors que les 3 premiers termes dans le binôme qui soit différents de 0.

Donc

$$A^n = I_3 + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n & n \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} + 2n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c. pour $n = 0$; $n = 1$ et $n = 2$ l'expression n'est pas valable.

109. 1. $DN = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; ND = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

2. $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

3. D et N sont deux matrices 3*3 qui commutent, la formule du binôme de Newton peut s'appliquer. On sait que N^2 est une matrice nulle. Il n'y a alors que 2 termes dans le binôme qui soit différents de 0.

$$A^n = (D + N)^n = \binom{n}{0} D^n + \binom{n}{1} N D^{n-1}.$$

4. $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix};$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & n 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

5. pour $n = 0$ l'expression est fautive, elle est vraie pour $n = 1$.

110. Corrigé dans le manuel.

111. 1. $A^5 = \begin{pmatrix} -15/16 & -31/32 \\ 31/16 & 63/32 \end{pmatrix};$
 $A^8 = \begin{pmatrix} -127/128 & -255/256 \\ 255/128 & 511/256 \end{pmatrix};$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} -511/512 & -1023/1024 \\ 1023/512 & 2047/1024 \end{pmatrix}.$$

$$2. AP = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 2 & -1/2 \end{pmatrix}; PD = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

$$3. \det(P) = -1, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4. AP = PD \Leftrightarrow APP^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow A = PDP^{-1}.$$

Par récurrence on montre que $A^n = PD^n P^{-1}$ est vraie au rang 1.

On suppose l'hypothèse vraie au rang n , on cherche à vérifier l'hypothèse de récurrence au rang $n+1$.

$$A^n = PD^n P^{-1} \Leftrightarrow A^n A = PD^n P^{-1} A \Leftrightarrow A^{n+1} = PD^n P^{-1} \Leftrightarrow A^{n+1} = PD^{n+1} P^{-1},$$

donc vraie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

$$5. A^n = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0.5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1^n + 2 \times 0.5^n & -1^n + 0.5^n \\ 2 \times 1^n - 2 \times 0.5^n & 2 \times 1^n - 0.5^n \end{pmatrix}.$$

6. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Matrices et suites

113. 1.

$a_0 = 1$	$b_0 = 0$
$a_1 = 1$	$b_1 = 2$
$a_2 = 3$	$b_2 = 2$
$a_3 = 5$	$b_3 = 6$
$a_4 = 11$	$b_4 = 10$

$$2. M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3. U_1 = MU_0 \text{ est vérifiée.}$$

On suppose l'hypothèse vraie au rang n , on cherche à vérifier l'hypothèse de récurrence au rang $n+1$.

$$U_n = M^n U_0, U_{n+1} = MU_n \Leftrightarrow U_{n+1} = MM^n U_0 \Leftrightarrow U_{n+1} = M^{n+1} U_0,$$

donc vraie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

$$4. \det(P) = 3, P \text{ est inversible.}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$5. D = P^{-1}MP; D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$6. D = P^{-1}MP \Leftrightarrow PD = PP^{-1}MP \Leftrightarrow PDP^{-1} = PP^{-1}MPP^{-1} \Leftrightarrow PDP^{-1} = M.$$

Par récurrence on montre que $M^n = PD^n P^{-1}$ est vraie au rang 1.

On suppose l'hypothèse vraie au rang n , on cherche à vérifier l'hypothèse de récurrence au rang $n+1$.

$$M^n = PD^n P^{-1} \Leftrightarrow M^n M = PD^n P^{-1} M \Leftrightarrow M^{n+1} = PD^n P^{-1} \Leftrightarrow PDP^{-1} M^{n+1} = PD^n P^{-1} \Leftrightarrow PDP^{-1} M^{n+1} = PD^{n+1} P^{-1},$$

donc vraie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \times 2^n + (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2 \times 2^n - 2 \times (-1)^n & 2^n + 2 \times (-1)^n \end{pmatrix}.$$

$$7. U_n = U_0;$$

$$U_n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \times 2^n + (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2 \times 2^n - 2 \times (-1)^n & 2^n + 2 \times (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \times 2^n + (-1)^n \\ 2 \times 2^n - 2 \times (-1)^n \end{pmatrix}$$

114. Partie I

1. $a_n + b_n = 1$ est vérifiée au rang 0 et 1. On suppose l'hypothèse de récurrence vraie au rang n , on cherche à la vérifier au rang $n+1$.

$$a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n = 1.$$

On a donc $b_n = 1 - a_n$.

2.

$$a_{n+1} \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n = \frac{1}{3}a_n + (1 - a_n) = \frac{-1}{6}a_n + \frac{1}{2}.$$

$$3. a. u_n = a_n - \frac{3}{7};$$

$$u_{n+1} = a_{n+1} - \frac{3}{7} = \frac{-1}{6}a_n + \frac{1}{2} - \frac{3}{7} \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{-1}{6} \left(a_n - \frac{3}{7} \right) = \frac{-1}{6} u_n.$$

La suite U_n est une suite de raison $\frac{-1}{6}$ et de premier terme : $\frac{4}{7}$.

$$4. b. u_n = \frac{4}{7} \left(\frac{-1}{6} \right)^n; a_n = \frac{4}{7} \left(\frac{-1}{6} \right)^n + \frac{3}{7}$$

$$\text{et } b_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7} \left(\frac{-1}{6} \right)^n.$$

Partie II

$$1. M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 2/3 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$2. U_1 = MU_0 \text{ est vérifiée.}$$

On suppose l'hypothèse vraie au rang n , on cherche à vérifier l'hypothèse de récurrence au rang $n+1$.

$$U_n = M^n U_0,$$

$$U_{n+1} = MU_n \Leftrightarrow U_{n+1} = MM^n U_0$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} = M^{n+1} U_0,$$

donc vraie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

$$3. \det(P) = 7, P \text{ est inversible.}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{7} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$4. D = P^{-1}MP; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/6 \end{pmatrix}.$$

$$5. D = P^{-1}MP \Leftrightarrow PD = PP^{-1}MP;$$

$$\Leftrightarrow PDP^{-1} = PP^{-1}MPP^{-1} \Leftrightarrow PDP^{-1} = M.$$

Par récurrence on montre que :

$$M^n = PD^n P^{-1} \text{ est vraie au rang 1.}$$

On suppose l'hypothèse vraie au rang n , on cherche à vérifier l'hypothèse de récurrence au rang $n+1$.

$$M^n = PD^n P^{-1} \Leftrightarrow M^n M = PD^n P^{-1} M$$

$$\Leftrightarrow M^{n+1} PD^n P^{-1} PDP^{-1}$$

$$\Leftrightarrow M^{n+1} = PD^{n+1} P^{-1},$$

donc vraie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

$$M^n = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-1/6)^n \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 + 4 \times (-1/6)^n & 3 - 3 \times (-1/6)^n \\ 4 - 4 \times (-1/6)^n & 4 + 3 \times (-1/6)^n \end{pmatrix}.$$

$$U_n = M^n(U_0) \text{ on obtient :}$$

$$\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 + 4 \times (-1/6)^n \\ 4 - 4 \times (-1/6)^n \end{pmatrix}.$$

$$115. 1. U_n = a_n + b_n;$$

$$U_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1}$$

$$= \frac{1}{2}(a_n + b_n) - \frac{1}{4}(a_n + 3b_n)$$

$$= \frac{1}{4}(a_n - b_n).$$

$$U_n = 1 \times \left(\frac{1}{4} \right)^n.$$

$$V_n = a_n + 2b_n;$$

$$V_{n+1} = a_{n+1} + 2b_{n+1}$$

$$= \frac{1}{2}(a_n + b_n) + \frac{1}{2}(a_n + 3b_n) = a_n + 2b_n.$$

$$V_n = 1.$$

$$2. \begin{cases} U_n = a_n + b_n \\ V_n = a_n + 2b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n \\ b_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n \end{cases}.$$

$$3. \text{ Les deux suites ont pour limite } \frac{1}{3}.$$

Voir correction exercice 114.

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

$$U_1 = MU_0 \text{ est vérifiée.}$$

On suppose l'hypothèse vraie au rang n , on cherche à vérifier l'hypothèse de récurrence au rang $n+1$.

$$U_n = M^n U_0,$$

$$U_{n+1} = MU_n \Leftrightarrow U_{n+1} = MM^n U_0$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} = M^{n+1} U_0,$$

donc vraie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

$\det(P) = 3, P$ est inversible.

$$P^{-1} = \frac{1}{7} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet D = P^{-1}MP; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

$$\bullet D = P^{-1}MP \Leftrightarrow PD = PP^{-1}MP;$$

$$\Leftrightarrow PDP^{-1} = PP^{-1}MPP^{-1} \Leftrightarrow PDP^{-1} = M.$$

Par récurrence on montre que :

$M^n = PD^nP^{-1}$ est vraie au rang 1.

On suppose l'hypothèse vraie au rang n , on cherche à vérifier l'hypothèse de récurrence au rang $n+1$.

$$M^n = PD^nP^{-1} \Leftrightarrow M^nM = PD^nP^{-1}M$$

$$\Leftrightarrow M^{n+1}PD^nP^{-1}PDP^{-1}$$

$$\Leftrightarrow M^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1},$$

donc vraie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1^n + 2 \times (\frac{1}{4})^n & 2 \times 1^n - 2 \times (\frac{1}{4})^n \\ 1^n - (\frac{1}{4})^n & 2 \times 1^n + (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix}.$$

$U_n = M^n(U_0)$ on obtient :

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1^n + 2 \times (\frac{1}{4})^n \\ 1^n - (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix}.$$

116. 1.

$u_0 = 0$	$u_5 = \frac{31}{16}$
$u_1 = 1$	$u_6 = \frac{63}{32}$
$u_2 = \frac{3}{2}$	$u_7 = \frac{127}{64}$
$u_3 = \frac{7}{4}$	$u_8 = \frac{255}{128}$
$u_4 = \frac{15}{8}$	$u_9 = \frac{511}{256}$

La suite U_n tend vers 2.

2. a.

$$AU_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}u_{n+1} & -u_n \\ u_{n+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}.$$

b. $U_1 = AU_0$ est vérifiée.

On suppose l'hypothèse vraie au rang n , on cherche à vérifier l'hypothèse de récurrence au rang $n+1$.

$$U_n = A^n U_0,$$

$$U_{n+1} = AU_n \Leftrightarrow U_{n+1} = AA^n U_0$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} = A^{n+1} U_0,$$

donc vraie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

3. a. $\det(P) = 1$, P est inversible.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. $D = P^{-1}AP$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}.$$

c. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 - (\frac{1}{2})^n & -1 - (\frac{1}{2})^n \\ 2 - 2 \times (\frac{1}{2})^n & -1 + 2 \times (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}.$$

$$U_n = A^n U_0 = \begin{pmatrix} 2 - (\frac{1}{2})^n \\ 2 - 2 \times (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}.$$

La limite de U_n est bien de 2.

117. 1.

$u_0 = 0$	$u_5 = 221$
$u_1 = 1$	$u_6 = 665$
$u_2 = 5$	$u_7 = 2059$
$u_3 = 19$	$u_8 = 6305$
$u_4 = 65$	$u_9 = 19171$

U_n tend vers $+\infty$.

2. a. $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b. $U_1 = U_0$ est vérifiée.

On suppose l'hypothèse vraie au rang n , on cherche à vérifier l'hypothèse de récurrence au rang $n+1$.

$$U_n = A^n U_0,$$

$$U_{n+1} = AU_n \Leftrightarrow U_{n+1} = AA^n U_0$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} = A^{n+1} U_0,$$

donc vraie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

3. a. $\det(P) = -1$, P est inversible.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

b. $D = P^{-1}AP$; $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

c. $A^n = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -2 \times 2^n + 3 \times 3^n & 6 \times 2^n - 6 \times 3^n \\ -2^n + 3^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix}.$$

$$U_n = A^n U_0 = \begin{pmatrix} -2 \times 2^n + 3 \times 3^n \\ -2^n + 3^n \end{pmatrix}.$$

U_n tend vers $+\infty$.

118. 1. a.

$u_0 = 1$	$u_5 = 8$
$u_1 = 1$	$u_6 = 13$
$u_2 = 2$	$u_7 = 21$
$u_3 = 3$	$u_8 = 34$
$u_4 = 5$	$u_9 = 55$

b. $U_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$$AU_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_{n+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

c. $U_1 = AU_0$ est vérifiée.

On suppose l'hypothèse vraie au rang n , on cherche à vérifier l'hypothèse de récurrence au rang $n+1$.

$$U_n = A^n U_0,$$

$$U_{n+1} = AU_n \Leftrightarrow U_{n+1} = AA^n U_0$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} = A^{n+1} U_0,$$

donc vraie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

2. a. $\det(P) = 4\sqrt{5}$; P est inversible.

$$P^{-1} = \frac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 + \sqrt{5} \\ -2 & 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

b. $D = P^{-1}AP$;

$$D = \frac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 10 + 2\sqrt{5} & -1 + \sqrt{5} \\ -2 & 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix};$$

$$D^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

c. Par récurrence on montre que :

$A^n = PD^nP^{-1}$ est vraie au rang 1.

On suppose l'hypothèse vraie au rang n , on cherche à vérifier l'hypothèse de récurrence au rang $n+1$.

$$A^n = PD^nP^{-1} \Leftrightarrow A^n A = PD^nP^{-1}A$$

$$\Leftrightarrow A^{n+1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1}$$

$$\Leftrightarrow A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1},$$

donc vraie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n & \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n & \frac{5+\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

3. a. $U_n = A^n U_0$, on obtient alors :

$$F_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

119. Partie I

1. Si $c = 0$, la suite est une suite arithmétique. Si $ad = bc$ alors la suite est une suite constante.

2. $u_1 = f(u_0) = \frac{au_0 + b}{cu_0 + d};$

$$u_2 = f(u_1) = \frac{\frac{au_0 + b}{cu_0 + d} + b}{\frac{a}{cu_0 + d} + d} = \frac{a(au_0 + b) + b(cu_0 + d)}{a + d(cu_0 + d)}.$$

3. $X_1 = AX_0; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_0 + b \\ cu_0 + d \end{pmatrix}.$
 $X_2 = AX_1;$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} au_0 + b \\ cu_0 + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(au_0 + b) + b(cu_0 + d) \\ c(au_0 + b) + d(cu_0 + d) \end{pmatrix}.$$

4. $X_1 = AX_0$ est vérifiée.

On suppose l'hypothèse vraie au rang n , on cherche à vérifier l'hypothèse de récurrence au rang $n + 1$.

$$X_n = A^n X_0,$$

$$X_{n+1} = AX_n \Leftrightarrow X_{n+1} = AA^n X_0 \\ \Leftrightarrow X_{n+1} = A^{n+1} X_0,$$

donc vraie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

Partie II

2. a. $\det(P) = 1$, P est inversible.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b. $D = P^{-1}AP$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix};$

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

c. Par récurrence on montre que :

$$A^n = PD^n P^{-1} \text{ est vraie au rang } 1.$$

On suppose l'hypothèse vraie au rang n , on cherche à vérifier l'hypothèse de récurrence au rang $n + 1$.

$$D^n = PD^n P^{-1} \Leftrightarrow A^n A = PD^n P^{-1} A$$

$$\Leftrightarrow A^{n+1} = PD^n P^{-1} P D P^{-1}$$

$$\Leftrightarrow A^{n+1} = PD^{n+1} P^{-1},$$

donc vraie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -2 - (-2)^n & -2 + 2 \times (-2)^n \\ 1 - (-2)^n & -1 + 2 \times (-2)^n \end{pmatrix}.$$

3. $X_n = A^n X_0,$

$$X^n = \begin{pmatrix} -2 - (-2)^n & -2 + 2 \times (-2)^n \\ 1 - (-2)^n & -1 + 2 \times (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \times (-2)^n + 8 \\ -3 \times (-2)^n + 4 \end{pmatrix}.$$

4. $u_n = \frac{-3 \times (-2)^n + 8}{-3 \times (-2)^n + 4}.$

6. Processus évolutifs

120. 1. a. La population de chouettes en absence de souris diminuerait.

b. La population de souris augmentera en absence de chouettes.

2. a. $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ -0,1 & -1,1 \end{pmatrix}.$

b. $X_1 = AX_0$ est vérifiée.

On suppose l'hypothèse vraie au rang n , on cherche à vérifier l'hypothèse de récurrence au rang $n + 1$.

$$X_1 = AX_0,$$

$$X_{n+1} = AX_n \Leftrightarrow X_{n+1} = AA^n X_0 \\ \Leftrightarrow X_{n+1} = A^{n+1} X_0,$$

donc vraie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

3. a. $X_1 = \begin{pmatrix} 90 \\ 102 \end{pmatrix}; X_2 = \begin{pmatrix} 96 \\ 103 \end{pmatrix}.$

b. $X_6 = \begin{pmatrix} 104 \\ 105 \end{pmatrix}; X_{12} = \begin{pmatrix} 105 \\ 105 \end{pmatrix}.$

4. Les populations des deux espèces tendent vers 105 individus.

121. 1. Ces deux coefficients correspondent au taux d'évolution de l'espèce seule. La population de renard diminuerait alors, tandis que la population de campagnols augmenterait.

2. a. « $-0.025 \cdot A_2 + 1.05 \cdot B_2$ ».

b. On constate que les deux suites tendent respectivement vers 50 et 25, soit 50 renards et 25.000 campagnols.

3. a. $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ -0,025 & 1,05 \end{pmatrix}.$

b. $U_1 = AU_0$ est vérifiée.

On suppose l'hypothèse vraie au rang n ,

on cherche à vérifier l'hypothèse de récurrence au rang $n + 1$.

$$U_n = A^n U_0,$$

$$U_{n+1} = AU_n \Leftrightarrow U_{n+1} = AA^n U_0$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} = A^{n+1} U_0,$$

donc vraie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

c. $\det(P) = 6$, P est inversible.

$$P^{-1} = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

d. $D = P^{-1}AP$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,85 \end{pmatrix};$

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (0,85)^n \end{pmatrix}.$$

$$D = P^{-1}AP \Leftrightarrow PD = PP^{-1}AP$$

$$\Leftrightarrow PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} \Leftrightarrow PDP^{-1} = A.$$

On suppose l'hypothèse vraie au rang n , on cherche à vérifier l'hypothèse de récurrence au rang $n + 1$.

$$A^n = PD^n P^{-1} \Leftrightarrow A^n A = PD^n P^{-1} A$$

$$\Leftrightarrow A^{n+1} = PD^n P^{-1} P D P^{-1}$$

$$\Leftrightarrow A^{n+1} = PD^{n+1} P^{-1},$$

donc vraie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0,85)^n \end{pmatrix} \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \frac{-1 + 4 \times (0,85)^n}{6} & \frac{8 - 8 \times (0,85)^n}{6} \\ \frac{-1 + (0,85)^n}{6} & \frac{-1 + (0,85)^n}{6} \end{pmatrix}.$$

$$U_n = \begin{pmatrix} \frac{-1 + 4 \times (0,85)^n}{6} & \frac{8 - 8 \times (0,85)^n}{6} \\ \frac{-1 + (0,85)^n}{6} & \frac{4 - 2 \times (0,85)^n}{6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 + 40 \times (0,85)^n \\ 25 - 5 \times (0,85)^n \end{pmatrix}.$$

Les résultats obtenus sont semblables avec les résultats du 2b.

4. a. en prenant $\begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix}$, on obtient 150 renards et 65.000 campagnols.

122. Partie II

1. $U_1 = AU_0$ est vérifiée.

On suppose l'hypothèse vraie au rang n , on cherche à vérifier l'hypothèse de récurrence au rang $n + 1$.

$$U_n = A^n U_0,$$

$$U_{n+1} = AU_n \Leftrightarrow U_{n+1} = AA^n U_0$$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} = A^{n+1} U_0,$$

donc vraie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

2. a. $\det(P) = -2\,295\,000$.

b. $P^{-1} = \frac{-1}{2\,295\,000} \begin{pmatrix} -51\,000 & -204\,000 & -255\,000 \\ 500 & 2\,000 & 20\,000 \\ 765 & -1\,530 & -7\,650 \end{pmatrix}.$

$$T = P^{-1}AP = \frac{-1}{2295000} \begin{pmatrix} -2340900 & 0 & 0 \\ 0 & 1170450 & -2295000 \\ 0 & 0 & 1170450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.02 & 0 & 0 \\ 0 & -0.51 & 1 \\ 0 & 0 & -0.51 \end{pmatrix}.$$

$$T = D + N = \begin{pmatrix} 1.02 & 0 & 0 \\ 0 & -0.51 & 1 \\ 0 & 0 & -0.51 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c. T^n = (D + N)^n = \binom{n}{0} D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} N.$$

$$T^n = \begin{pmatrix} 1.02^n & 0 & 0 \\ 0 & (-0.51)^n & n(-0.51)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-0.51)^n \end{pmatrix}.$$

123. 1. La concentration de glucose après 30 h est de -0.57 g/L et celle de l'insuline de -0.28 g/L.

$$2. A = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.4 \\ -0.1 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

$X_1 = AX_0$ est vérifiée.

On suppose l'hypothèse vraie au rang n , on cherche à vérifier l'hypothèse de récurrence au rang $n + 1$.

$$X_n = A^n U_0,$$

$$X_{n+1} = AX_n \Leftrightarrow X_{n+1} = AA^n X_0 \\ \Leftrightarrow X_{n+1} = A^{n+1} X_0,$$

donc vraie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

$$3. a. PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; QP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$b. A = PDQ.$$

124. Corrigé dans le manuel.

$$125. 1. T = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

$$2. T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

$$3. T = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

$$4. T = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 & 3/8 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 5/8 & 0 & 3/8 \end{pmatrix}.$$

$$126. 1. T = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

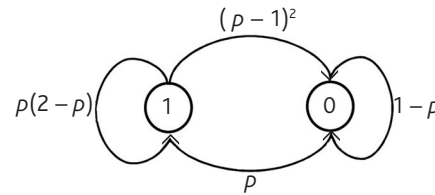
$$2. T = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

$$3. T = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

$$4. T = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

128. 1. D'après l'énoncé le nombre de machine en panne est 0 ou 1.

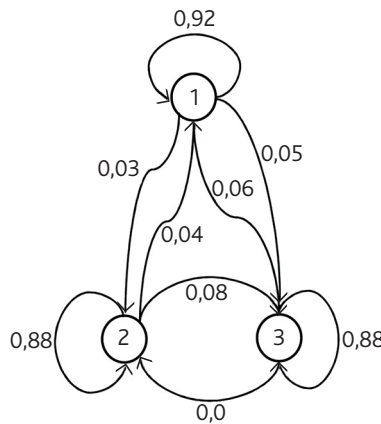
2.



La matrice associée est donc :

$$T = \begin{pmatrix} p(2-p) & (p-1)^2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

129. 1.



$$2. T = \begin{pmatrix} 0.92 & 0.03 & 0.05 \\ 0.04 & 0.88 & 0.08 \\ 0.06 & 0.06 & 0.88 \end{pmatrix}.$$

$$3. T^{12} = \begin{pmatrix} \frac{119}{236} & \frac{15}{73} & \frac{170}{293} \\ \frac{49}{165} & \frac{38}{105} & \frac{229}{671} \\ \frac{1}{3} & \frac{127}{483} & \frac{225}{557} \end{pmatrix}.$$

La probabilité qu'un client de Big passe chez Clémentine au bout de un an est $\frac{229}{671} = 0.34$.

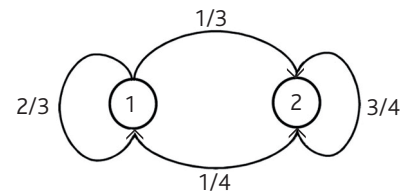
$$4. a. U_0 = (0.30 \ 0.20 \ 0.50).$$

$$b. U^{12} = (0.30 \ 0.20 \ 0.50) \begin{pmatrix} \frac{119}{236} & \frac{15}{73} & \frac{170}{293} \\ \frac{49}{165} & \frac{38}{105} & \frac{229}{671} \\ \frac{1}{3} & \frac{127}{483} & \frac{225}{557} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{263}{697} & \frac{30}{113} & \frac{140}{393} \end{pmatrix}$$

$$130. 1. p(1 \rightarrow 2) = \frac{1}{2}; p(1 \rightarrow 3) = \frac{1}{6}; p(5 \rightarrow 6) = \frac{1}{4}.$$

$$2. T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

132. 1.



$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

2. $T^{10} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, au bout de 10 jours la probabilité qu'une femme le reste est $\frac{4}{7}$.

$$3. a. U = UT; (x \ y) = (x \ y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y = x \\ \frac{1}{3}x + \frac{3}{4}y = y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 0 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 4x - 3y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$b. \text{ On trouve alors } \begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = \frac{4}{7} \end{cases}.$$

c. Avec les 3 cas proposés on obtient les mêmes valeurs $\begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = \frac{4}{7} \end{cases}.$

$$4. a. \det(P) = 7, P \text{ est inversible. } P^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = P^{-1}TP;$$

$$D = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{12} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{b. } D &= P^{-1}TP \Leftrightarrow PD = PP^{-1}TP \\ &\Leftrightarrow PDP^{-1} = PP^{-1}TPP^{-1} \Leftrightarrow PDP^{-1} = T. \end{aligned}$$

On suppose l'hypothèse vraie au rang n , on cherche à vérifier l'hypothèse de récurrence au rang $n + 1$.

$$\begin{aligned} T^n &= PD^nP^{-1} \Leftrightarrow T^nT = PD^nP^{-1}T \\ &\Leftrightarrow T^{n+1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1} \\ &\Leftrightarrow T^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}, \end{aligned}$$

donc vraie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} T^n &= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{5}{12}\right)^n \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 + 4 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n & 4 - 4 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n \\ 3 - 3 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n & 4 + 3 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } U_n &= U_0T_n = \left(\frac{p_0}{7} \times \left(3 + 4 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n\right)\right) \\ &+ \frac{q_0}{7} \times \left(3 - 3 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n\right) \frac{p_0}{7} \times \left(4 - 4 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n\right) \\ &+ \frac{q_0}{7} \times \left(4 + 3 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n\right). \end{aligned}$$

On sait que $p_0 + q_0 = 1$, on obtient alors :

$$U_n = \left(\frac{3}{7} + \frac{p_0}{7} - \frac{3}{7}\right) \times \left(\frac{5}{12}\right)^n \frac{4}{7} + \left(\frac{3}{7} + p_0\right) \left(\frac{5}{12}\right)^n.$$

La limite de U_n est $\left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)$ et ne dépend pas des conditions initiales.

5. On obtient sur la planète Herma une proportion d'hermiens de genre masculin de $\frac{3}{7}$.

133. 1. Après une voyelle, on trouve une seconde voyelle avec une probabilité de 0.127 et une consonne avec une probabilité 0.873.

En présence d'une consonne, on obtient une voyelle avec une probabilité de 0.663 et une consonne avec une probabilité de 0.337.

2. a. $U_n = (1 \ 0)$.

$$\text{b. } U_1 = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0.127 & 0.873 \\ 0.663 & 0.337 \end{pmatrix} = (0.127 \ 0.873),$$

la probabilité que la seconde lettre soit une voyelle sachant que la première est une voyelle est de 0.127.

$$U_2 = U_0T^2 = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0.595 & 0.405 \\ 0.308 & 0.692 \end{pmatrix} = (0.595 \ 0.405),$$

la probabilité que la troisième lettre soit une voyelle sachant que la première est une voyelle est de 0.595.

$$\text{3. } \begin{cases} 0.595x + 0.308y = x \\ 0.405x + 0.692y = y \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0.405x + 0.308y = 0 \\ 0.405x - 0.308y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

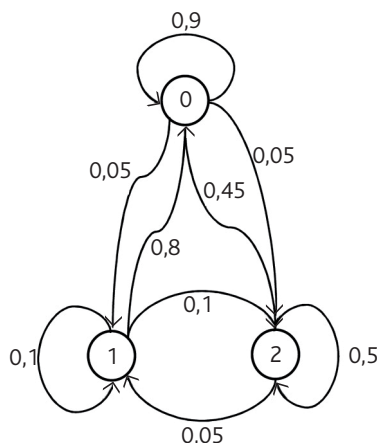
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0.405x - 0.308y = 0 \\ 0.405x - 0.308y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\text{b. On trouve alors } \begin{cases} x = \frac{308}{713} \\ y = \frac{405}{713} \end{cases}.$$

5. La proportion de voyelles dans un texte russe est de $\frac{308}{713}$, la proportion de consonne est alors de $\frac{405}{713}$.

En route vers le bac (p. 536-537)

138. 1. a.



$$\text{b. } T = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.05 & 0.05 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.45 & 0.05 & 0.5 \end{pmatrix}$$

2. a. Si le feu est vert alors $P_1 = (1 \ 0 \ 0)$;
 $P_2 = P_1M = (0.9 \ 0.05 \ 0.05)$.

$$\begin{aligned} \text{b. } P_4 &= P_3M = (0.87 \ 0.05 \ 0.08) \begin{pmatrix} 0.9 & 0.05 & 0.05 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.45 & 0.05 & 0.5 \end{pmatrix} \\ &= (0.859 \ 0.0525 \ 0.0885) \end{aligned}$$

la probabilité que le 4^e feu soit vert est 0,859.

3. Si le premier feu est rouge alors :

$$P_1 = (0 \ 0 \ 1); P_2 = P_1M = (0.45 \ 0.05 \ 0.5).$$

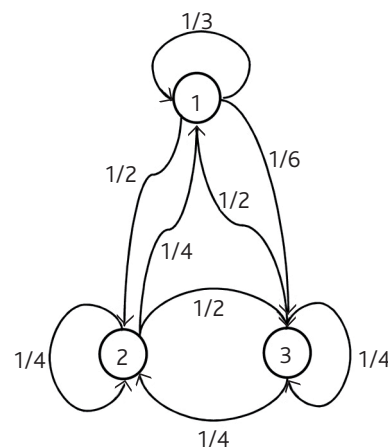
4. Résolution du système :

$$\begin{cases} 0.9a + 0.8b + 0.45c = a \\ 0.05a + 0.1b + 0.05c = b \\ 0.05a + 0.1b + 0.5c = c \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

$$\text{on trouve alors } \left(\frac{178}{209} \ \frac{1}{19} \ \frac{20}{209}\right).$$

139. Partie I

1. a.



$$\text{b. } T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

2. a. $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

b. $T^7 = \begin{pmatrix} 21 & 20 & 18 \\ 59 & 59 & 59 \\ 21 & 20 & 18 \\ 59 & 59 & 59 \\ 21 & 20 & 18 \\ 59 & 59 & 59 \end{pmatrix}$, la probabilité qu'il

fasse beau une semaine plus tard est : 0,356.

Partie II

1. $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

2. $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$;

$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 18 & 18 \end{pmatrix}$.

3. a. $Q_{n+1} = Q_n \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

b. $Q_1 = Q_0 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ est vérifié.

On suppose que $Q_n = Q_0 T^n$, on cherche à vérifier si l'hypothèse de récurrence est vraie au rang $n + 1$.

$Q_{n+1} = Q_n \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = Q_0 T^n \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = Q_0 T^{n+1}$,

donc vraie au rang $n + 1$.

4. a. $\det(P) = 17$, P est inversible.

$P^{-1} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b. $D = P^{-1}TP$. $D = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

$D^n = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \\ 12 \end{pmatrix}$.

c. $D = P^{-1}TP \Leftrightarrow PD = PP^{-1}TP \Leftrightarrow PDP^{-1} = PP^{-1}TPP^{-1} \Leftrightarrow PDP^{-1} = T$.

On suppose l'hypothèse vraie au rang n , on cherche à vérifier l'hypothèse de récurrence au rang $n + 1$.

$T^n = PD^n P^{-1} \Leftrightarrow T^n T = PD^n P^{-1} T \Leftrightarrow T^{n+1} = PD^n P^{-1} PDP^{-1} \Leftrightarrow T^{n+1} = PD^{n+1} P^{-1}$, donc vraie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$.

d. $T^n = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 9 - \frac{10}{3} \left(\frac{-5}{12}\right)^n & 8 + \frac{10}{3} \left(\frac{-5}{12}\right)^n \\ 9 + \frac{45}{12} \left(\frac{-5}{12}\right)^n & 8 - \frac{45}{12} \left(\frac{-5}{12}\right)^n \end{pmatrix}$.

5. $u_7 = 0,529$; $u_{14} = 0,529$.

6. a. $Q = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 17 & 17 \end{pmatrix}$.

b. On obtient finalement $Q' = Q$.

TP Info (p. 538-540)

1. Chiffre de Hill

Partie 1 : Chiffrement

3	1
4	3

M	12	40	14	O
E	4	60	8	I
S	18	72	20	U
S	18	126	22	W
A	0	6	6	G
G	6	18	18	S
E	4	16	16	Q
E	4	28	2	C
N	13	41	15	P
C	2	58	6	G
L	11	33	7	H
A	0	44	18	S
I	8	41	15	P
R	17	83	5	F

Partie 2 : Déchiffrement

11	5
20	11

U	20	340	2	O
Y	24	664	14	I
S	18	273	13	U
P	15	525	5	W
B	1	86	8	G
P	15	185	3	S
Z	25	290	4	Q
D	3	533	13	C
N	13	253	19	P
W	22	502	8	G
X	23	368	4	H
X	23	713	11	S

À vous de jouer

1.

3	1
4	3

M	12	36	10	K
A	0	48	22	W
T	19	64	12	M
H	7	97	19	T
E	4	24	24	Y
M	12	52	0	A
A	0	19	19	T
T	9	57	5	F
I	8	40	14	O
Q	16	80	2	C
U	20	64	12	M
E	4	92	14	M
S	18	54	2	C
A	0	72	20	U

2.

1	3	4
2	5	2
3	1	1

M	12	96	18	S
E	4	80	2	C
S	18	58	6	G
S	18	42	16	Q
A	0	48	22	W
G	6	60	8	I
E	4	68	16	Q
E	4	54	2	C
N	13	29	3	D
C	2	35	9	J
L	11	59	7	H
A	0	17	17	R
I	8	59	7	H
R	17	101	23	X
A	0	41	15	P

Sur les pas du supérieur (p. 227)

I. 1. $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $M^3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$$M^4 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. On sait que : $M^n = a_n M^3$; $a_3 = 1$ et $a_4 = 2$

$$M^{n+1} = M^n M = a_n M^3 M = a_n M^4 = 2a_n M^3$$

On a donc $a_{n+1} = 2a_n$. La suite a_n est une suite géométrique de raison 2.

3. $a_n = 2^{n-3}$.

4. On a alors $M^n = 2^{n-3} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

II. 1. a. si αI_2 est involutive alors $(\alpha I_2)^2 = I_2$, on a alors $(\alpha I_2)^2 = \alpha^2 I_2 = I_2$ soit $\alpha^2 = 1$. On a donc $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$.

Si $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$, $(\alpha I_2)^2 = \alpha^2 I_2 = I_2$ alors la matrice αI_2 est involutive.

b. $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + cd & cb + d^2 \end{pmatrix} = I_2$;

$$\begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ ab + bd = 0 \\ ca + cd = 0 \\ cb + d^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ b(a + d) = 0 \\ c(a + d) = 0 \\ cb + d^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -ad + bc = 1 \\ (a + d) = 0 \\ (a + d) = 0 \\ cb - ad = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + d = 0 \\ ad - cb = -1 \end{cases}$$

2. a. En prenant $\alpha = 2$, on obtient $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

c. $\det(A) = 3$, $a^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

III. 1. $\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$ vérifiée au rang 1.

On suppose l'hypothèse de récurrence $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$ vraie au rang n , on la vérifie au rang $n + 1$.

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = M M^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = M^{n+1} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}.$$

2. $B = 4M - 2I$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2I + B.$

b. $M = \frac{1}{4}B + \frac{1}{2}I$, vérifié au rang 1.

On suppose l'hypothèse de récurrence : $M^n = \alpha_n I + \beta_n B$ est vraie au rang n , on cherche à la vérifier au rang $n + 1$.

$$MM^n = M(\alpha_n I + \beta_n B) = \left(\frac{1}{4}B + \frac{1}{2}I\right)(\alpha_n I + \beta_n B)$$

$$\Leftrightarrow M^{n+1} = \frac{\alpha_n}{4}B + \frac{\beta_n}{4}B^2 + \frac{\alpha_n}{2}I + \frac{\beta_n}{2}B$$

$$\Leftrightarrow M^{n+1} = \frac{\alpha_n}{4}B + \frac{\beta_n}{4}(2I + B) + \frac{\alpha_n}{2}I + \frac{\beta_n}{2}B$$

$$\Leftrightarrow M^{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha_n + \beta_n)I + \frac{1}{4}(\alpha_n + 3\beta_n)B \Leftrightarrow M^{n+1} = \alpha_{n+1}I + \beta_{n+1}B$$

On obtient :
$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha_n + \beta_n) \\ \beta_{n+1} = \frac{1}{4}(\alpha_n + 3\beta_n) \end{cases}$$

c. $u_n = \alpha_n - \beta_n ; u_{n+1} = \alpha_{n+1} - \beta_{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha_n + \beta_n) - \frac{1}{4}(\alpha_n + 3\beta_n).$

$u_{n+1} = \frac{1}{4}(\alpha_n - \beta_n) = \frac{1}{4}u_n$. La suite u_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

$$v_n = \alpha_n - 2\beta_n ;$$

$$v_{n+1} = \alpha_{n+1} - 2\beta_{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha_n + \beta_n) - \frac{1}{2}(\alpha_n + 3\beta_n) = \alpha_n - 2\beta_n.$$

La suite v_n est une suite constante.

On a $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ et $\beta_1 = \frac{1}{4}$, la suite $v_n = 0$; $u_n = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$. On

obtient alors $\beta_n = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ et $\alpha_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

On trouve $M_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} I$.