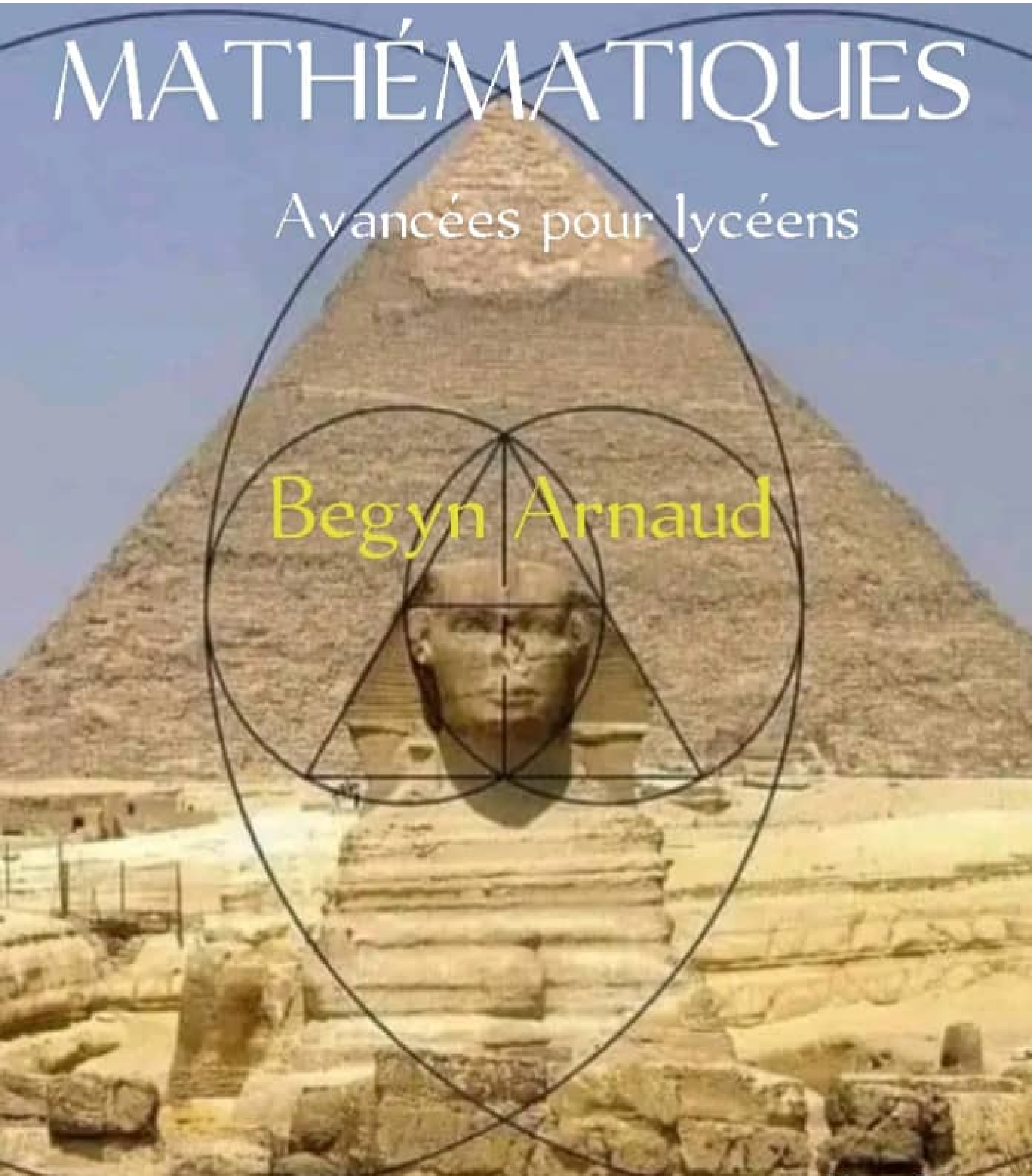

MATHÉMATIQUES
Avancées pour lycéens
Begyn Arnaud
edby0h

Chapitre 1

Notions élémentaires de logique et de théorie des ensembles

1 Notation

Traditionnellement, les objets mathématiques (nombres, fonctions...) sont notés avec une lettre de l'alphabet pouvant être minuscule, majuscule, capitale etc... Lorsqu'on se donne une liste de n objets on utilise un indice : $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$. On peut aussi utiliser un indice supérieur, placé entre parenthèses pour ne pas le confondre avec la puissance : $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(n)}$. Lorsque l'on considère un tableau de nombres, on a recourt au double-indiçage : x_{ij} désigne l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

Pour varier les notations, on utilise aussi l'aplhabet grec, dont nous rappelons ci-dessous les minuscules et majuscules. Il est vivement recommander de bien le connaitre (sous peine de faire sourire son examinateur à l'oral).

Minuscule	Majuscule	Nom
α	A	Alpha
β	B	Bêta
γ	Γ	Gamma
δ	Δ	Delta
ϵ	E	Epsilon
ζ	Z	Dzéta
η	H	Êta
θ	Θ	Thêta
ι	I	Iota
κ	K	Kappa
λ	Λ	Lambda
μ	M	Mu

Minuscule	Majuscule	Nom
ν	N	Nu
ξ	Ξ	Xi
o	O	Omicron
π	Π	Pi
ρ	P	Rhô
σ	Σ	Sigma
τ	T	Tau
υ	Υ	Upsilon
φ	Φ	Phi
χ	X	Chi
ψ	Ψ	Psi
ω	Ω	Omega

On utilisera aussi les abréviations suivantes :
- cqfd = ce qu'il fallait démontrer :
- ie = id est = c'est-à-dire ;
- p/r = par rapport à ;

- resp. = respectivement.

Ce cours de mathématiques est organisé selon une série de **définitions**, signalées par un cadre vert, par une série de **théorèmes** signalés par un cadre rouge, le tout illustré par des exemples et des exercices, ces derniers étant signalés par un cadre gris. Certains chapitres comportent des explications sur la manière de rédiger. Celles-ci sont signalés par un cadre jaune.

Le mot **théorème** est réservé à des résultats mathématiques jugés importants. Dans le cas d'un théorème "facile", on utilise le mot **proposition**. Parfois, on reformule certains théorèmes dans des cas simples, directement utilisables en pratiques : on parle alors de **corollaires**. Enfin certaines démonstrations plus ardues que les autres nécessiteront de démontrer des petites propositions intermédiares appelées **lemmes**.

2 Logique

Un **prédicat** est un énoncé mathématique qui est soit **juste**, soit **faux**. On dit qu'un prédicat ne peut prendre que **deux valeurs logiques** : V ou F (i.e. Vrai ou Faux).

Par convention, lorsqu'on énonce une prédicat, on sous-entend toujours qu'il est vrai.

***Exemple* :** « La fonction f est croissante sur l'intervalle I. »

Soient A et B deux prédicats. On définit les opérations suivantes.

• **Négation :** La négation de A est notée $non(A)$ ou $\overline{A}$. Elle est définie par la **table de vérité** suivante :

A	$non(A)$
V	F
F	V

On a bien évidemment $non(non(A)) = \overline{\overline{A}} = A$ (l'égalité signifie que les deux prédicats ont même table de vérité).

• **« Et » :** Le prédicat $A\,et\,B$ est défini par :

A	B	$A\,et\,B$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

On a bien évidemment $A\ et\ B = B\ et\ A$.

• **« Ou » :** Le prédicat $A\,ou\,B$ est défini par :

A	B	$A\,ou\,B$
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

On a bien évidemment $A\, ou\, B = B\, ou\, A$.

Remarquons qu'il s'agit d'un « ou » **inclusif**, c'est-à-dire que les deux prédicats peuvent être vrais en même temps (contrairement au « ou » exclusif).

Proposition 1 Lois de Morgan
Les prédicats suivants ont même table de vérité.
– « $non(A\, et\, B)$ » et « $non(A)\, ou\, non(B)$ »
– « $non(A\, ou\, B)$ » et « $non(A)\, et\, non(B)$ »

• **Implication :** Le prédicat $A \Longrightarrow B$ est défini par :

A	B	$A \Longrightarrow B$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

En pratique, on ne considère que les première et troisième lignes de cette table de vérité, c'est-à-dire que l'on traduit le prédicat $A \Longrightarrow B$ par : **si** A est vrai **alors** B est vrai, ou encore pour que A soit vrai **il faut que** B soit vrai, pour que B soit vrai **il suffit** que A soit vrai. On dit que A est une **condition suffisante** pour B et que B est une **condition nécessaire** pour A.

***Exemple* :** On pose A = « Le chien court sous la pluie » et B = « Le chien est mouillé ». Il est clair que $A \Longrightarrow B$. Par contre on a pas $B \Longrightarrow A$ (le chien est peut-être tombé dans la piscine !). Dans ce cas, on dit que la réciproque de l'implication $A \Longrightarrow B$ est fausse. On peut donc dire que « pour que le chien court sous la pluie, il faut qu'il soit mouillé », « pour que le chien soit mouillé, il suffit qu'il court sous la pluie ».

Rédaction : Pour montrer que $A \Longrightarrow B$, on procède de la façon suivante. On suppose que la prédicat A est vrai ; on doit alors montrer que B est vrai.

Pour montrer qu'une implication est vraie on utilise parfois le **raisonnement par contraposée**. Pour prouver que $A \Longrightarrow B$ est vrai, on montre que $non(B) \Longrightarrow non(A)$ est vrai, c'est-à-dire : **si** B est fausse **alors** A est fausse. En effet, on peut vérifier que ces deux prédicats ont la même table de vérité.

***Exemple* :** Montrer que les prédicats $A \Longrightarrow B$ et $non(A)\, ou\, B$ ont même table de vérité. En déduire que les prédicats $A \Longrightarrow B$ et $non(B) \Longrightarrow non(A)$ ont même table de vérité (raisonnement par contraposée).

• **Équivalence :** Le prédicat $A \Longleftrightarrow B$ est défini par :

A	B	$A \Longleftrightarrow B$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

En pratique, on ne considère que la première ligne de cette table de vérité, c'est-à-dire que l'on traduit la proposition $A \Longleftrightarrow B$ par : A est vrai **si et seulement si = (ssi)** B est vrai, ou encore pour que A soit vrai **il faut et il suffit que** B soit vrai. On dit que A (resp. B) est une **condition nécessaire et suffisante** pour B (resp. pour A).

Pour montrer qu'une équivalence est vraie on raisonne très souvent par **double-implication** : on montre que $A \Longrightarrow B$ est vrai puis que $B \Longrightarrow A$ l'est aussi. En effet, on peut vérifier que les prédicats $A \Longleftrightarrow B$ et « $A \Longrightarrow B$ et $B \Longrightarrow A$ » ont la même table de vérité.

***Exemple* :** Montrer que le prédicat $A \Longleftrightarrow B$, et le prédicat $\left(A \Longrightarrow B\right)$ et $\left(B \Longrightarrow A\right)$ ont même table de vérité.

Rédaction : Pour montrer que $A \Longleftrightarrow B$, on procède donc par double-implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que la prédicat A est vrai ; on doit alors montrer que B est vrai. On en déduit que $A \Longrightarrow B$ est vrai.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que la prédicat B est vrai ; on doit alors montrer que A est vrai. On en déduit que $B \Longrightarrow A$ est vrai.

On peut alors conclure que $A \Longleftrightarrow B$ est vrai.

• **Raisonnement par l'absurde** : Pour montrer qu'un prédicat A est vraie, on peut choisir de raisonner par l'absurde : on suppose que A est faux, et on essaye d'aboutir à une contradiction évidente du type $2 < 1$ ou $0 < x < 0$ etc...

***Exemple* :** Soit $x > 0$. Démontrer par l'absurde que $2x > x$.

• **Raisonnement par récurrence :** Soit $P(n)$ un prédicat qui dépend d'un entier $n \in \mathbb{N}$. On veut démontrer qu'il existe un entier n_0 fixé tel que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. On dispose pour cela de différents résultats.

Théorème 2 Récurrence simple

On suppose que :

(i) Initialisation : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ est vrai ;

(ii) Hérédité : pour $n \geq n_0$ fixé quelconque, $P(n)$ vrai $\Longrightarrow P(n+1)$ vrai.

Alors on sait que $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$.

***Exemple* :** Pour $n \geq 1$, $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Théorème 3 Récurrence à deux pas

On suppose que :

(i) Initialisation à deux pas : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vrais ;

(ii) Hérédité à deux pas : pour $n \geq n_0$ fixé quelconque, $P(n)$ et $P(n+1)$ vrais $\Longrightarrow P(n+2)$ vrai.

Alors on sait que $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$.

***Exemple* :** On pose $F_0 = F_1 = 1$ et pour $n \geq 0$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Montrer que pour $n \geq 0$, $F_n \geq 0$.

Théorème 4 Récurrence forte
On suppose que :
(i) Initialisation : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ est vrai ;
(ii) Hérédité forte : pour $n \geq n_0$ fixé quelconque, $P(n_0)$, $P(n_0+1)$, $P(n_0+2)$, ..., $P(n)$ vrais $\Longrightarrow P(n+1)$ vrai.
Alors on sait que $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$.

Exemple **:** On pose $u_1 = 3$ et pour $n \geq 1$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$. Montrer que pour $n \geq 1$, $u_n = 3n$.

3 Ensembles

3.1 Définitions

Définition 5 Ensembles
Un ensemble E est une collection d'objets appelés éléments. On note $x \in E$ lorsque x est élément de E, et $x \notin E$ dans le cas contraire.

Exemple **:** Un ensemble peut donc être défini en énumérant la liste de ses éléments (entre accolades) :
- $\{a\}$ = ensemble formé d'un unique élément a = **singleton**
- E = ensemble des couleurs d'un jeu de 32 cartes = {coeur, carreau, trèfle, pique} (4 éléments)
- $\mathbb{N}$ = ensemble des entiers naturels = $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (infinité d'éléments)

Soit $P(x)$ une prédicat dépendant de x élément de E.

Définition 6 Quantificateurs

1. Lorsque $P(x)$ est vrai **pour tous** les éléments x de E, on le note :
$$\forall x \in E, \quad P(x)$$
Le symbole $\forall$ est appelé quantificateur « quel que soit ».
2. Lorsque $P(x)$ est vrai pour **au moins un** élément x de E, on le note :
$$\exists x \in E / P(x) \qquad \text{ou} \qquad \exists x \in E ; P(x)$$
Le symbole $\exists$ est appelé quantificateur « il existe ».
3. Lorsque $P(x)$ est vrai pour **un unique** élément x de E, on le note :
$$\exists! x \in E / P(x) \qquad \text{ou} \qquad \exists! x \in E ; P(x)$$
Le symbole $\exists!$ est appelé quantificateur « il existe un unique ».

Rédaction :

1. Pour montrer que « $\forall x \in E,\ P(x)$ », on procède de la manière suivante : on se donne $x \in E$ fixé quelconque et le but est laors de montrer que $P(x)$ est vrai pour ce x.
2. Pour montrer que « $\exists x \in E / P(x)$ », on procède de la manière suivante : on doit trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vrai, par exemple en résolvant une équation d'inconnue x et en prouvant que cette équation a au moins une solution.
3. Pour montrer que « $\exists! x \in E / P(x)$ », on procède de la manière suivante : on doit trouver un unique $x \in E$ tel que $P(x)$ soit vrai, par exemple en résolvant une équation d'inconnue x et en prouvant que cette équation a une unique solution.

Il faut connaître la négation de ces quantificateurs.

Proposition 7 L'égalité signifiant que les prédicats ont même table de vérité :

1. $non\big(\forall x \in E, P(x)\big) = \exists x \in E; non\big(P(x)\big)$.
2. $non\big(\exists x \in E; P(x)\big) = \forall x \in E, non\big(P(x)\big)$.

Nous allons maintenant voir comment comparer deux ensembles.

Définition 8 Inclusion
Soient E et F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F et on le note $E \subset F$ ou $E \subseteq F$, lorsque tout élément de E est aussi élément de F, i.e. lorsque :

$$\forall x \in E, \quad x \in F$$

ou encore :

$$x \in E \Longrightarrow x \in F$$

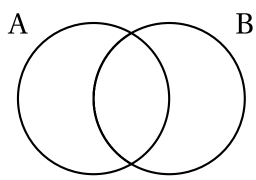
On dit aussi que E est un sous-ensemble de F, ou que E est une partie de F.

Dans le cas contraire, on note $E \not\subset F$ et on a : $\exists x \in E / \ x \notin F$.

⚠ ATTENTION : dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, on peut toujours comparer deux nombres x et y : on a $x \leq y$ et $x \geq y$. On dit que la relation d'ordre $\leq$ est **totale**. Mais ce n'est pas le cas pour les ensembles : si A et B sont deux ensemble quelconques, on peut avoir $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$.

***Exemple* :** Dans $\mathbb{R}$, si $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$, alors $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$.

***Exemple* :** Sur l'exemple suivant, on a : $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$.



Rédaction : Pour montrer que $E \subseteq F$ on se donne $x \in E$ fixé quelconque, et on démontre que $x \in F$.

Proposition 9 Si E, F, G sont trois ensembles :
(i) on a $E \subseteq E$;
(ii) si $E \subseteq F$ et $F \subseteq G$ alors $E \subseteq G$.

Définition 10 Egalité
Soient E et F deux ensembles.
On dit que $E = F$ lorsque $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$, i.e. lorsque : $x \in E \Longleftrightarrow x \in F$.

Si $E \subseteq F$ mais $F \not\subseteq E$ alors on dit que E est strictement inclus dans F, et on le note $E \subsetneq F$.

Rédaction : Pour montrer que $E = F$ on procède donc par double-inclusion.
$\boxed{\subseteq}$ On se donne $x \in E$ fixé quelconque ; on doit alors montrer que $x \in F$. On en déduit que $E \subseteq F$.
$\boxed{\supseteq}$ On se donne $x \in F$ fixé quelconque ; on doit alors montrer que $x \in E$. On en déduit que $F \subseteq E$.
On peut alors conclure que $E = F$.

On définit un ensemble particulier qui ne possède pas d'élément.

Définition 11 Ensemble vide
On appelle ensemble vide, noté $\emptyset$, l'ensemble qui ne posséde pas d'élément. Il est inclus dans tout autre ensemble ; il ne possède qu'un sous-ensemble : lui-même.

Très souvent on définit un sous-ensemble en imposant que ses éléments vérifient une certaine propriété.

Définition 12 Sous-ensemble défini par une propriété
Soient E un ensemble et $P(x)$ une propriété dépendant de x élément de E. L'ensemble des éléments de E vérifiant la propriété $P(x)$ est noté :

$$\{x \in E \,/\, P(x)\} \text{ ou encore } \{x \in E ;\ P(x)\}$$

C'est un sous-ensemble de E.

***Exemple* :** $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 3x + 2 \geq 1\}$ est une partie de $\mathbb{R}$.

Définition 13 Ensemble des parties
Si E est un ensemble, on note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble par les parties de E.
On a donc pour F un ensemble quelconque :

$$F \subseteq E \Longleftrightarrow F \in \mathscr{P}(E)$$

On a toujours $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$ et $E \in \mathscr{P}(E)$.

***Exemple* :** Si E est un singleton : $E = \{a\}$, alors $\mathscr{P}(E) = \left\{\emptyset, E\right\}$.

Terminons ce paragraphe par un paradoxe simple et célèbre, appelé paradoxe de Russel : il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles. Ce paradoxe est plus facile à comprendre sous la forme du paradoxe du barbier : il n'existe pas de barbier qui raserait tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes (et seulement ceux-là). En effet, qui raserait ce barbier ?

3.2 Opérations sur les ensembles

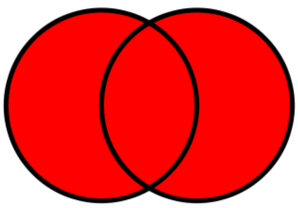
Définition 14 Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On définit :
(i) l'intersection de A et B, notée $A \cap B$, par :

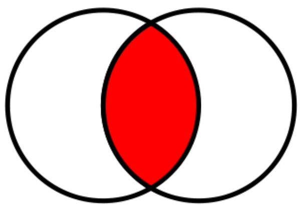
$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B$$

(ii) l'union de A et B, notée $A \cup B$, par :

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B$$

Les figures suivantes représentent l'union et l'intersection de deux ensembles A et B.



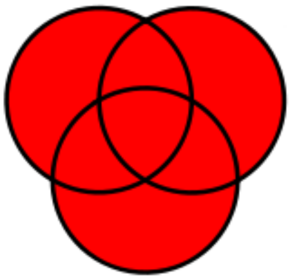


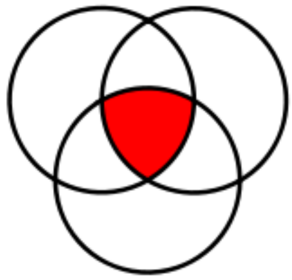
Proposition 15 Règles de calcul.
Si A, B et C sont trois parties d'un ensemble E :
1) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$;
2) Associativité : $\left(A \cap B\right) \cap C = A \cap \left(B \cap C\right)$ et $\left(A \cup B\right) \cup C = A \cup \left(B \cup C\right)$;
3) $A \cap A = A \cup A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cup \emptyset = A$;
4) Commutativité : $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$;
5) Distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$: $A \cap \left(B \cup C\right) = \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap C\right)$,
Distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$: $A \cup \left(B \cap C\right) = \left(A \cup B\right) \cap \left(A \cup B\right)$.

La propriété d'associativité de l'union permet de se dispenser des parenthèses et d'utiliser la notation $A \cup B \cup C$ pour l'union de trois ensembles : en effet, cette notation désigne indifféremment $(A \cup B) \cup C$ ou $A \cup (B \cup C)$, et ces deux quantités sont égales donc cela ne pose pas de problème de confusion.
La même remarque est valable pour l'intersection : on peut utiliser la notation $A \cap B \cap C$.

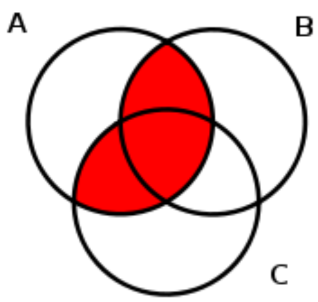
⚠ Par contre, dans une expression mélangeant union et intersection, on ne peut pas se dispenser des parenthèses.
Par exemple la notation $A \cup B \cap C$ n'a aucun sens ! En effet, elle peut désigner $(A \cup B) \cap C$ ou $A \cup (B \cap C)$, et comme ces deux quantités sont différentes, on ne sait plus de quo on parle !

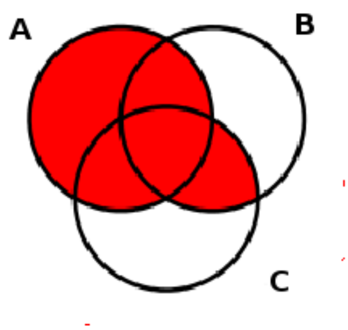
Les figures suivantes représentent l'union et l'intersection de trois ensembles A, B et C.





Les propriétés de distributivité sont aussi très importantes : elle sont à rapprocher de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition des nombres. Les figures suivantes permettent de visualiser les formules $A \cap \left(B \cup C\right) = \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap C\right)$ et $A \cup \left(B \cap C\right) = \left(A \cup B\right) \cap \left(A \cup B\right)$.

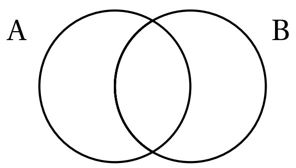


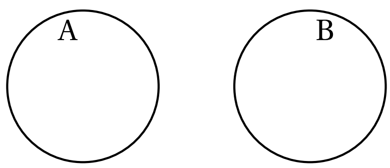


Définition 16 On dit que deux parties A et B d'un ensemble E sont disjointes ou incompatibles lorsque $A \cap B = \emptyset$.

⚠ ATTENTION ! Ne pas confondre A et B **disjoints** : $A \cap B = \emptyset$, et A et B **distincts** : $A \neq B$. Deux ensembles disjoints sont distincts (ou vides), mais deux ensembles distincts ne sont en général pas disjoints.

Les figures suivantes représentent deux ensembles distincts mais non disjoints, et deux ensembles disjoints (donc distincts).



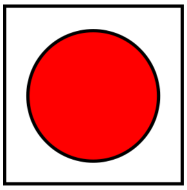


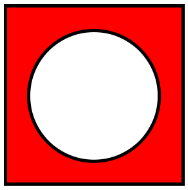
Définition 17 Complémentaire.
Soit A une partie d'un ensemble E. Le complémentaire de A dans E, noté $\complement_E A$, est défini par :

$$\complement_E A = \{x \in E /\ x \notin A\}$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur E, $\complement_E A$ est noté plus simplement $\overline{A}$.

Les figures suivantes représentent une partie A et son complémentaire (l'ensemble E est représenté par un carré).



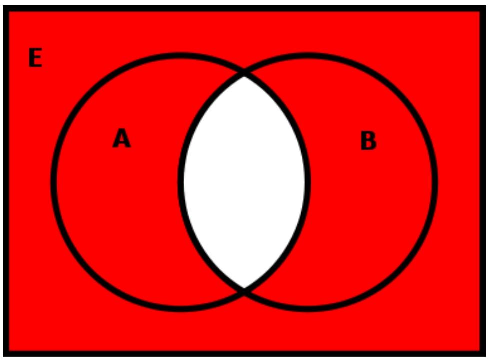


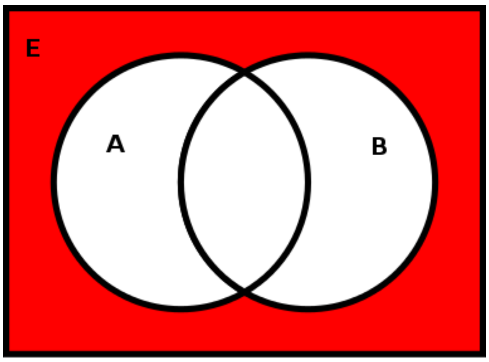
Proposition 18 Règles de calcul.
Si A est une partie de E :
1) $\overline{\overline{A}} = A$;
2) $\overline{\emptyset} = E$ et $\overline{E} = \emptyset$;
3) $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

***Exemple* :** Si A et B parties de E : $A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq \overline{B}$.

Théorème 19 Lois de Morgan
Si A, B parties de E :
1) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

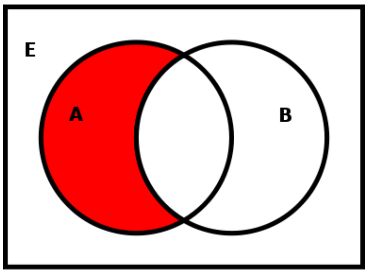
Les deux figures suivantes permettent de visualiser les lois de Morgan.





Définition 20 Différence
Si A, B parties de E : $A - B = A \cap \overline{B} = \left\{x \in A / \ x \notin B\right\}$. On le note aussi $A \backslash B$.

La figure suivante représente $A \backslash B$.



3.3 Produits cartésiens et familles d'éléments

Définition 21 Produit cartésien
Soient E et F deux ensembles. On note $E \times F$ l'ensemble des couples (x, y) tel que $x \in E$ et $y \in F$:

$$E \times F = \left\{(x, y) / \ x \in E \text{ et } y \in F\right\}$$

$E \times F$ est appelé produit cartésien de E et de F.
Plus généralement, si E_1, E_2, ..., E_n sont n ensembles, on note $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ l'ensemble des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, ..., $x_n \in E_n$.
Si $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$, alors $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est noté E^n.

Exemple **:** $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \left\{(x, y, z) / \ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \text{ et } z \in \mathbb{R}\right\}$.

Définition 22 Famille d'éléments de E
Soient I un ensemble (appelé ensemble d'indices), et E un autre ensemble. On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de E indexée par I lorsque, pour chaque $i \in I$, x_i est un élément de E.
Par exemple pour $I = [\![1, n]\!]$, $(x_i)_{i \in I} = (x_1, \ldots, x_n)$ est un n-uplet, et pour $I = \mathbb{N}$, $(x_i)_{i \in I} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite.

Exemple **:** $(\sqrt{x})_{x \geq 0}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{R}$, indexée par $\mathbb{R}^+$.

Définition 23 Famille de parties de E
On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de E, lorsque pour $i \in I$, A_i est une partie de E.

Dans ce cas $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{P}(E)$, au sens de la définition donnée précédemment.

Exemple : $\left(\left[1,1+\frac{1}{n}\right]\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de parties de $\mathbb{R}$, indexée par $\mathbb{N}^*$.

Définition 24 Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de E, on définit l'union des A_i pour $i \in I$, notée $\bigcup_{i\in I} A_i$, par :

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff \exists i \in I \,/\, x \in A_i$$

De même on définit leur intersection $\bigcap_{i\in I} A_i$:

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff \forall i \in I,\, x \in A_i$$

Exemple : $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[1,1+\frac{1}{n}\right[= [1,2[$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[1,1+\frac{1}{n}\right[= \{1\}$.

Proposition 25 Règles de calcul.
Si B est une partie de E et $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de E, alors :
1) Distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$: $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$,
et de $\cup$ par rapport à $\cap$: $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B)$.
2) Lois de Morgan : $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I}\overline{A_i}$ et $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I}\overline{A_i}$.

Définition 26 Si $(A_i)_{i\in I}$ famille de parties de E, on dit que les A_i sont deux à deux disjoints lorsque :

$$\forall i,j \in I, \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$$

⚠ ATTENTION : les accolades définissent des ensembles et les parenthèses des familles.
Pour les ensembles, les répétitions ne sont pas prises en compte, contrairement aux familles : $\{a,a,b\} = \{a,b\}$ mais $(a,a,b) \neq (a,b)$.
Pour les ensembles l'ordre n'est pas pris en compte, contrairement aux familles : $\{a,b\} = \{b,a\}$ mais $(a,b) \neq (b,a)$.

4 Applications

4.1 Définitions

Définition 27 Application.
Soient E et F deux ensembles. Une application définie sur E à valeur dans F :

$$f: \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est une "relation" qui à chaque $x \in E$ associe un unique élément $y \in F$, noté $f(x)$.
On le note $f : E \longrightarrow F$.
$f(x)$ est appelé image de x, et si $y = f(x)$ alors x est appelé antécédent de y.

Vocabulaire :
• $f : E \longrightarrow F$ se lit "f est une application de E vers F" ou encore "f est une application définie sur E à valeurs dans F".
• $x \longmapsto f(x)$ se lit "à x est associé son image $f(x)$".

Lorsque f n'est pas définie sur E tout entier, on dit que f est une **fonction**, mais les confusions de vocabulaire entre applications et fonctions sont tolérées cette année.

⚠ On suppose donc dans tout ce chapitre que les applications sont définies sur E tout entier. On ne donnera donc pas l'ensemble de définition de f, puisque ce sera à chaque fois E tout entier.

Si à chaque $x \in E$ la "relation" associe plusieurs éléments de F, on ne parle pas d'**application** mais de **correspondance** de E vers F (mais ce n'est pas du tout au programme).

Exemple **:** On associe à $x \in \mathbb{R}$ sa valeur absolue : c'est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Exemple **:** On associe à $n \in \mathbb{N}$ ses diviseurs positifs : c'est une correspondance de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

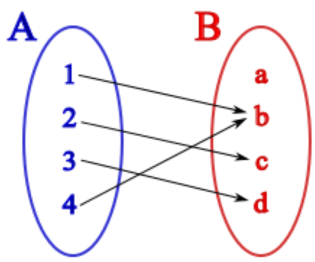
Exemple **:** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + xy$ est une application.

Définition 28 Graphe d'une application
Le graphe de f est le sous-ensemble de $E \times F$ donné par :

$$G = \left\{(x, f(x)) \in E \times F / \, x \in E\right\}$$

Notation : On note $\mathscr{F}(E,F)$ ou F^E l'ensemble de toutes les applications définies sur E à valeurs dans F.

Une application peut être représentée par un diagramme :



Sur le diagramme précédent on voit qu'un élément de l'ensemble d'arrivée peut n'avoir aucun antécédent, ou en avoir plusieurs.

⚠ Important : lorsque $f : E \longrightarrow F$, ie f va de E vers F, on suppose en particulier que :

$$\forall x \in E, \quad f(x) \in F$$

Définition 29 Égalité de deux applications.
Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E' \longrightarrow F'$ sont deux applications. On dit que f et g sont égales, et on le note $f \equiv g$, lorsque $E = E'$, $F = F'$ et :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = g(x)$$

En particulier, si $E = E'$ et $F = F'$ alors $f \not\equiv g$ si et seulement si : $\exists x \in E\,;\, f(x) \neq g(x)$.

⚠ Par exemple, on considère que les applications $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ sont différentes.

Définition 30 Applications constantes.
Soient E et F deux ensembles. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite constante lorsqu'il existe $a \in F$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = a$$

On dit alors que f est constante égale à a.

Définition 31 Application identité.
Si E est un ensemble on définit l'application :

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{id}_E : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \mathrm{id}_E(x) = x \end{array}$$

Nous verrons plus loin qu'elle joue le rôle d'élément neutre pour la loi de composition.

Définition 32 Restriction
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
1) Si $E_1 \subseteq E$ alors on appelle restriction de f à E_1, notée $f_{|E_1}$, l'application :

$$\begin{array}{rccl} f_{|E_1} : & E_1 & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f_{|E_1}(x) = f(x) \end{array}$$

On a donc : $\forall x \in E_1,\ f_{|E_1}(x) = f(x)$.
2) Soient $E_1 \subseteq E$ et $F_1 \subseteq F$ tel que : $\forall x \in E_1,\ f(x) \in F_1$.
On appelle restriction de f à E_1 au départ et à F_1 à l'arrivée, notée $f_{|E_1}^{|F_1}$, l'application :

$$\begin{array}{rccl} f_{|E_1}^{|F_1} : & E_1 & \longrightarrow & F_1 \\ & x & \longmapsto & f_{|E_1}^{|F_1}(x) = f(x) \end{array}$$

On a : $\forall x \in E_1,\ f_{|E_1}(x) = f(x)$.

***Exemple*:** $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ peut être restreinte à $[0,\pi[$ au départ et à $[0,1]$ à l'arrivée. La restriction est alors notée $\sin_{|[0,\pi[}^{|[0,1]}$.

Définition 33 Prolongement
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
1) Si $E \subseteq E_2$ alors on appelle prolongement de f à E_2 toute application $g : E_2 \longrightarrow F$ telle que $g_{|E} = f$ ie telle que : $\forall x \in E,\ g(x) = f(x)$.
2) Si $E \subseteq E_2$ et $F \subseteq F_2$, alors on appelle prolongement de f à E_2 au départ et F_2 à l'arrivée, toute application $g : E_2 \longrightarrow F_2$ telle que $g_{|E}^{|F} \equiv f$ ie telle que : $\forall x \in E,\ g(x) = f(x)$.

4.2 Loi de composition

Définition 34 Composée d'applications.
Soient deux applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F' \longrightarrow G$ telle que $F \subseteq F'$. On définit l'application composée $g \circ f : E \longrightarrow G$ par :

$$\forall x \in E, \quad (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

On a le diagramme :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "g"] & G \\ E \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g\circ f"'] & \end{tikzcd}$$

⚠ ATTENTION : ne pas écrire $g(x) \circ f(x)$ à la place de $g \circ f(x)$!
En effet la notation $g(x) \circ f(x)$ n'a pas de sens, et tout calcul qui l'emploi est donc irrémédiablement faux/

Proposition 35 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On a $f \circ \mathrm{id}_E \equiv f$ et $\mathrm{id}_F \circ f \equiv f$.

Proposition 36 On se donne trois applications $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$.
On a la propriété d'associativité : $h \circ (g \circ f) \equiv (h \circ g) \circ f$.

On peut donc sans ambiguité utiliser la notation $h \circ g \circ f$ (les parenthèses sont omises).
On a alors pour $x \in E$: $h \circ g \circ f(x) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big)$.

4.3 Injection, surjection, bijection

Définition 37 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
On dit que f est injective sur E (ou que f est une injection) lorsque :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

ou encore par contraposée :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Deux points distincts ont donc toujours des images distinctes.
De manière équivalente ont peut dire que les points de F ont au plus un antécédent par f.

Rédaction : Pour montrer que f est injective sur E on fixe x_1 et x_2 éléments de E tels que $f(x_1) = f(x_2)$. On doit alors montrer que $x_1 = x_2$.
Pour montrer que f n'est pas injective sur E on cherche deux éléments distincts x_1 et x_2 dans E tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

***Exemple* :** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$, et $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$ est injective sur $\mathbb{R}^+$.

Définition 38 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
On dit que f est surjective de E sur F (ou que f est une surjection) lorsque :

$$\forall y \in F, \exists x \in E / \ y = f(x)$$

De manière équivalente on peut dire que les points de F ont tous au moins un antécédent dans E.

Rédaction : Pour montrer que f est surjective de E sur F on fixe y élément de F. On doit alors trouver au moins un x élément de E tel que $f(x) = y$.
Pour montrer que f n'est pas surjective de E sur F on cherche y élément de F qui n'a pas antécédent par f dans E, ie tel que $f(x) \neq y$ pour tout $x \in E$.

Exemple : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $g(x) = x^2$ est surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$.

⚠ Attention à la subtilité suivante : si $x \in E$ on peut toujours poser $y = f(x)$ et on définit $y \in F$.
Par contre si $y \in F$, on ne peut pas en général définir $x \in E$ en posant $y = f(x)$. En effet ceci suppose que y a un antécédent par f. Si f est surjective, il est possible de définir x en posant $y = f(x)$, mais il est plus clair de dire « on note x un antécédent de y par l'application surjective f ».

Définition 39 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est bijective de E sur F (ou que f est une bijection) lorsque f est à la fois injective et surjective :

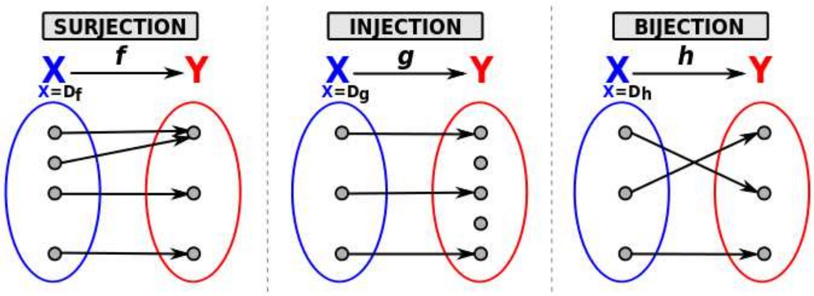
$$\forall y \in F, \exists! x \in E / \ y = f(x)$$

Un point de F a donc toujours un unique antécédent dans E.

<u>Rédaction</u> :

1. Pour monter que f est bijective de E sur F on fixe y élément de F. On doit alors trouver un unique x élément de E tel que $f(x) = y$.
2. On peut aussi procéder en deux temps en montrant que f est injective, puis surjective.

Le diagramme suivant illustre ces notions d'injection/surjection/bijection.

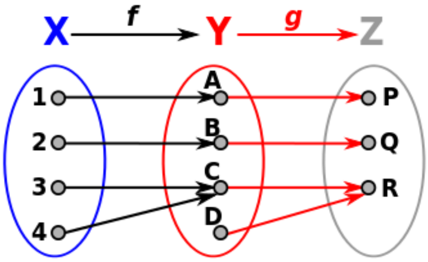


⚠ Attention, en général une application n'est ni injective, ni surjective. Considérer par exemple $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

Exemple : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$, $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$ n'est pas non plus bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}$, mais $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $h(x) = x^2$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.

Proposition 40 Soient deux applications $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$.
(i) Si f est injective sur E et g injective sur F, alors $g \circ f$ est injective sur E.
(ii) Si f est surjective de E sur F et g surjective de F sur G, alors $g \circ f$ est surjective de E sur G.
(iii) Si f est bijective de E sur F et g bijective de F sur G, alors $g \circ f$ est bijective de E sur G.

Le diagramme suivant donne un exemple montrant qu'on peut avoir $g \circ f$ et g surjectives, mais f non surjective.



Définition 41 Inversibilité pour la loi de composition.
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit qu'elle est inversible pour la loi de composition lorsqu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f \equiv \mathrm{id}_E$ et $f \circ g \equiv \mathrm{id}_F$.
Une telle fonction g est appelée application réciproque de f.

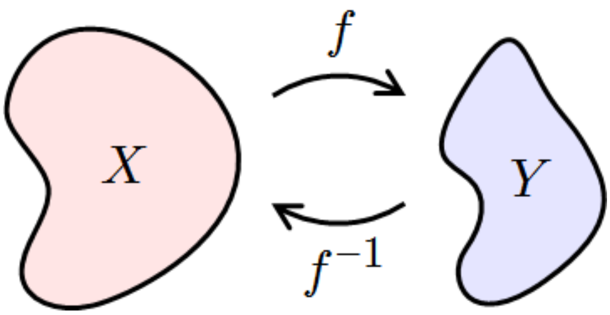
Proposition 42 Unicité de l'inverse pour la loi de composition.
Soit $f : E \longrightarrow F$ inversible pour la loi de composition.
Alors elle admet une unique application réciproque : on la note f^{-1}.

Si elle existe, l'application réciproque de $f : E \longrightarrow F$ a donc les propriétés suivantes :
- $f^{-1} : F \longrightarrow E$
- $f^{-1} \circ f \equiv \mathrm{id}_E$ et $f \circ f^{-1} \equiv \mathrm{id}_F$
- Pour $x \in E$ et $y \in F$: $f(x) = y \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$

⚠ Lorsque f est à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ (ou dans $\mathbb{C}^*$), ne pas confondre f^{-1} avec l'inverse de f pour la multiplication !
Pour cette raison, l'inverse de f pour la multiplication est souvent notée $\dfrac{1}{f}$.

Théorème 43 Théorème de la bijection réciproque.
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On a équivalence de :
(i) f est bijective de E sur F ;
(ii) f est inversible pour la loi de composition.
L'application f^{-1} est donc bijective de F sur E, on l'appelle aussi la bijection réciproque de f.
De plus, $\left(f^{-1}\right)^{-1} \equiv f$.

Sur un diagramme, l'inverse f correspond à inverser le sens des flèches.



On dispose donc de trois méthodes pour montrer qu'une application f est bijective :

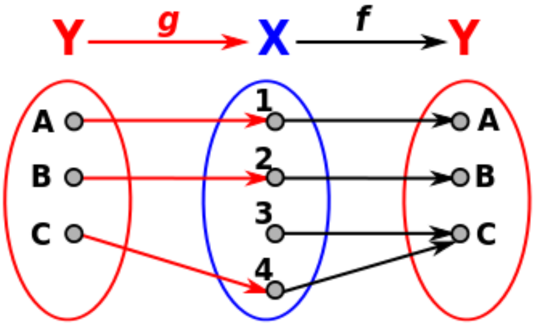
1. Montrer que f est injective et surjective.
2. Pour $y \in F$, résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$.
   Si on obtient une unique solution, on montre que f est bijective. De plus, l'expression obtenue donne la fonction $f^{-1} : x = f^{-1}(y)$.
3. On cherche une fonction $g : F \longrightarrow E$ telle que : $f \circ g \equiv \mathrm{id}_F$ et $g \circ f \equiv \mathrm{id}_E$.
   Si on trouve une telle fonction, on montre que f est bijective. De plus $f^{-1} = g$.

Remarquez que les deux dernières méthodes donne aussi la fonction réciproque de f, en plus de la bijectivité.

***Exemple* :** $f : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathrm{e}^{x^2} \in [1, +\infty[$ est bijective de réciproque
$f^{-1} : y \in [1, +\infty[\longmapsto \sqrt{\ln(y)} \in \mathbb{R}^+$ (utiliser 2.).

***Exemple* :** id_E est bijective et $\mathrm{id}_E^{-1} = \mathrm{id}_E$ (utiliser 3.).

⚠ On peut avoir $f \circ g \equiv \mathrm{id}_F$ et $g \circ f \not\equiv \mathrm{id}_E$. Dans ce cas f n'est pas une bijection. Considérer $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définies par $g(x) = \sqrt{x}$ et $f(x) = x^2$. On peut aussi visualiser cette propriété sur le diagramme suivant :



Dans le cas d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a aussi une quatrième méthode pour démontrer la bijectivité qui repose sur le théorème suivant.

Théorème 44 Théorème de la bijection monotone
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que :
(i) I est un intervalle de $\mathbb{R}$;
(ii) f est continue sur I ;
(iii) f est strictement monotone sur I.
Alors f induit une bijection de I sur un intervalle J, à déterminer avec le tableau de variations.

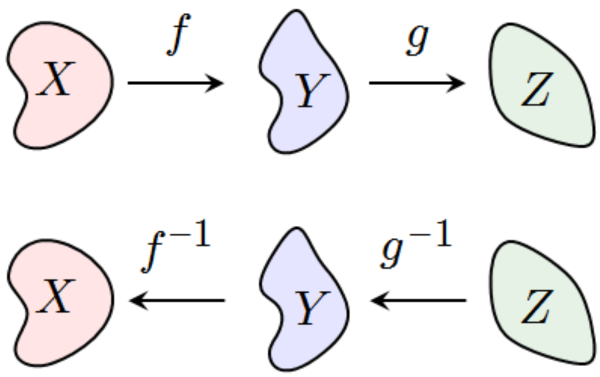
***Exemple* :** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^n \in \mathbb{R}$ induit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 45 Fonction racine n-ième
La bijection réciproque de la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^n \in \mathbb{R}_+^*$ est appelée fonction racine n-ième notée $\sqrt[n]{\cdot}$.
Pour x et y dans $\mathbb{R}_+^*$, on a : $x^n = y \Longleftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$.

⚠ $\sqrt[n]{}$ n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$. Par exemple $\sqrt[3]{-1}$ n'est pas défini, bien que $(-1)^3 = -1\dots$

Proposition 46 Bijection réciproque d'une composée.
Soient $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} \equiv f^{-1} \circ g^{-1}$.

L'ordre a été inversé, mais cela paraît logique intuitivement : pour inverser f composée par g, il faut inverser g puis ensuite f.



4.4 Fonctions caractéristiques

Définition 47 Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle fonction caractéristique de A l'application :

$$\begin{array}{rrcl} 1_A : & E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & x & \longmapsto & 1_A(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{array} \right. \end{array}$$

***Exemple* :** La fonction $1_\emptyset$ est constante égale à 0, et la fonction 1_E est constante égale à 1.

Proposition 48 Règles de calcul.
Soient A, B parties de E.

1. On a : $A \subseteq B \iff \forall x \in E,\ 1_A(x) \leq 1_B(x)$,
   et : $A = B \iff \forall x \in E,\ 1_A(x) = 1_B(x)$;
2. $\forall x \in E,\ 1_{\overline{A}}(x) = 1 - 1_A(x)$;
3. $\forall x \in E,\ 1_{A \cap B}(x) = 1_A(x) \times 1_B(x)$;
4. $\forall x \in E,\ 1_{A \cup B}(x) = 1_A(x) + 1_B(x) - 1_A(x) \times 1_B(x)$.

***Exemple* :** Redémontrer les lois de Morgan à l'aide des fonctions caractéristiques.

4.5 Images directe et réciproque

Définition 49 Soit $f: E \longrightarrow F$ une application.

1. Si $A \subseteq E$, on appelle image directe de A par f l'ensemble :
$$f(A) = \{f(x) / x \in A\} = \text{ ensemble des } y \in F \text{ qui ont un antécédent par } f \text{ dans } A$$
On a $f(A) \subseteq F$.
De plus, si $y \in F$: $y \in f(A) \Longleftrightarrow \exists x \in A / y = f(x)$
2. Si $B \subseteq F$, on appelle image réciproque de B par f l'ensemble :
$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\} = \text{ ensemble des } x \in E \text{ qui ont leur image dans } B$$
On a $f^{-1}(B) \subseteq E$.
De plus, si $x \in E$: $x \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(x) \in B$.

On a $f(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

***Exemple* :** Vérifier que $A \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big)$ et que $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B$.

Proposition 50 Si $f: E \longrightarrow F$ est une application, alors f induit une surjection de E sur $f(E)$.
De plus, f est surjective de E sur F si et seulement si $f(E) = F$.

f induit une surjection signifie que c'est une restriction de f qui est surjective : ici $f_{|E}^{|f(E)}$.

Définition 51 Partie stable
Soient $f: E \longrightarrow E$ une application et $A \subseteq E$. On dit que A est stable par f lorsque $f(A) \subseteq A$, ie $\forall x \in A$, $f(x) \in A$.

***Exemple* :** Pour l'application $x \longmapsto x^2$, les parties suivantes sont-elles stables : $A = \mathbb{R}^+$, $B = [0,2]$, $C = [2, +\infty[$?

5 Exercices

Exercice 1 Écrire avec les quantificateurs et les connecteurs appropriés les propositions mathématiques suivantes :

1. Il existe un rationnel compris entre $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$.
2. Il n'existe pas d'entier naturel supérieur ou égal à tous les autres.
3. Si la somme de deux entiers naturels est nulle, alors ces deux entiers naturels sont nuls.

Exercice 2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est pair, alors n est pair.

Exercice 3 Les propositions suivantes sont-elles vraies ? Sinon donner leur négation :

1. $\exists A \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{n} \leqslant A$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists n \in \mathbb{N}^* / \frac{1}{n} \leqslant x$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}^* / \frac{1}{n} \leqslant x$

Exercice 4 Soit E un ensemble. Pour toutes parties A et B de E, on pose :

$$A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

1. Montrer que : $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.
2. Soient A, B et C trois parties de E vérifiant : $A \Delta B = A \Delta C$. Montrer que : $B = C$.
   Si $A \cup B = A \cup C$ peut-on dire que $B = C$?

Exercice 5

1. Déterminer $\mathscr{P}(E)$ pour $E = \{a, b, c, d\}$; a, b, c, d étant distincts deux à deux.
2. Déterminer $\mathscr{P}(E)$ et $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$ pour un ensemble à deux éléments.

Exercice 6 Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E.

1. Montrer que : $\overline{A} \subset B \iff A \cup B = E$.
2. Démontrer que : $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \iff B = C.$
3. Démontrer que : $\begin{cases} A \cup B = A \cap C \\ A \cap B = A \cup C \end{cases} \iff A = B = C.$

Exercice 7

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $n! \geq 2^{n-1}$.
2. On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Établir que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$$

Exercice 8 On considère l'application f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) + 2x \end{array}$$

1. Est-ce que l'application f est injective ? surjective ? bijective ?
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution réelle, et que cette solution est strictement positive.

Exercice 9 On considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

1. Est-elle injective sur $\mathbb{R}$? surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$?
2. Montrer que $f_{|\mathbb{R}^+}$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer son application réciproque $f^{-1}_{|\mathbb{R}^+}$.
3. De même montrer que $f_{|\mathbb{R}^-}$ est bijective de $\mathbb{R}^-$ sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer son application réciproque $f^{-1}_{|\mathbb{R}^-}$.
4. f est-elle injective sur $\mathbb{N}$? bijective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$? de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$?

Exercice 10 Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f \equiv Id_E$, alors g est surjective et f est injective.
2. On suppose que $g \circ f \equiv Id_E$, et que l'une des deux applications f ou g est bijective. Montrer que l'autre est aussi bijective.
3. Monter que si $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bijectives, alors f et g sont bijectives.

Exercice 11 Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow G$ deux applications. On considère l'application suivante :

$$h : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \times G \\ x & \longmapsto & \big(f(x), g(x)\big) \end{array}$$

1. Montrer que si f ou g est injective alors h l'est aussi. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que si h est surjective, alors f et g le sont aussi. La réciproque est-elle vraie ?

Dans la recherche de contre-exemples, on pourra considérer les fonctions $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow x^2 \in \mathbb{R}^+$ *et* $g : x \in \mathbb{R} \longrightarrow (x-1)^2 \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 12 Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On considère A_1 et A_2 deux parties de E et B_1 et B_2 deux parties de F.

1. Montrer que :

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) \text{ et } f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

2. Montrer que :

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_1 \cup B_2) &= f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \text{ et} \\ f^{-1}(B_1 \cap B_2) &= f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

Exercice 13 Soient E un ensemble non vide et $f : \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

$$\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2, \quad A \cap B = \emptyset \implies f(A \cup B) = f(A) + f(B)$$

Démontrer les propriétés suivantes :

1. $f(\emptyset) = 0$
2. $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2, \quad f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$
3. $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2, \quad A \subset B \implies f(A) \leqslant f(B)$

Exercice 14 Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On considère A une partie de E et B une partie de F.
a) Montrer que $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$ et que $f^{-1}\left(f(A)\right) \supset A$.
b) On suppose f surjective. Montrer que $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.
c) On suppose f injective. Montrer que $f^{-1}\left(f(A)\right) = A$.
d) On suppose f bijective. Vérifier que l'image réciproque de B par f est égale à l'image de B par l'application réciproque f^{-1}. [*C'est heureux car les deux ensembles sont notés de la même manière !*]

Exercice 15 Soit E un ensemble non vide. Soit $\mathscr{F}$ une partie non vide de $\mathscr{P}(E)$.On dit que $\mathscr{F}$ est un filtre sur E si : $\begin{cases} (a) & \forall (X,Y) \in \mathscr{F}^2,\ X \cap Y \in \mathscr{F} \\ (b) & \forall X \in \mathscr{F}, \forall Y \in \mathscr{P}(E) :\ X \subset Y \Longrightarrow Y \in \mathscr{F} \\ (c) & \emptyset \notin \mathscr{F} \end{cases}$

1. Que peut-on dire d'une famille non vide $\mathscr{F}$ de $\mathscr{P}(E)$ ne vérifiant que les axiomes (a) et (b) ?
2. $\mathscr{P}(E)$ est-il un filtre sur E ? A quelle condition $\mathscr{P}(E) - \{\emptyset\}$ est-il un filtre sur E ?
3. Montrer que si $\mathscr{F}$ est un filtre sur E, alors $E \in \mathscr{F}$.
4. Soit A une partie non vide de E. Montrer que $\mathscr{F}_A = \{X \in \mathscr{P}(E);\ A \subset X\}$ est un filtre sur E.

Chapitre 2

Dénombrement et calculs de sommes

1 Ensemble de nombres usuels

• Ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. On définit des intervalles d'entiers : si $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \leq p$, on note $[\![n, p]\!] = \{k \in \mathbb{N} / \ n \leq k \leq p\}$.

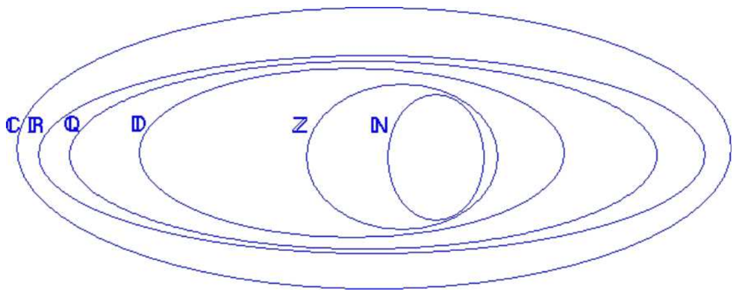
• Ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

• Ensemble des nombres rationnels : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle/ \ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$.

• Ensemble des nombres réels : $\mathbb{R}$ (contient strictement l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux). Les intervalles sont noté avec des crochets simples $[a, b[$ etc…

• Ensemble des nombres complexes : $\mathbb{C} = \{a + ib / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Ils vérifient la chaîne d'inclusions : $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$.



La propriété d'intégrité de la multiplication est fondamentale dans la résolution d'équation : si a et b sont deux nombres alors $ab = 0 \iff a = 0$ ou $b = 0$.
On en déduit que si $ac = bc$ alors $a = 0$ ou $b = c$.

2 Ensembles finis - Dénombrement

2.1 Ensembles finis

Définition 1 Soit E un ensemble non vide. On dit qu'il est fini lorsqu'il existe un entier naturel n et une bijection $\varphi : E \longrightarrow [\![1, n]\!]$. Le choix de n est alors unique : on l'appelle le cardinal de E, noté $\mathrm{Card}(E)$, $\#E$ ou encore $|E|$.

On adopte aussi la convention suivante : $\emptyset$ est un ensemble fini de cardinal égal à 0.

Si E est fini de cardinal $n \neq 0$ alors on peut numéroter ses éléments de 1 à n : $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Proposition 2 Un exemple important
Si $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \leq p$, alors $[\![n, p]\!]$ est un ensemble fini et $\#[\![n, p]\!] = p - n + 1$.
En particulier $\backslash lc0, n]\!] = n + 1$ et $\#[\![1, n]\!] = n$.

Théorème 3 Ensembles finis en bijection
Soient E et F deux ensembles. On suppose que :
(i) E est fini ;
(ii) il existe une bijection $\psi : E \longrightarrow F$.
Alors F est fini et $\#E = \#F$.

Théorème 4 Parties d'un ensemble fini
Soit E un ensemble fini.

1. Toute partie A de E est finie et vérifie $\#A \leq \#E$.
2. Si $A \subseteq E$: $A = E \Longleftrightarrow \#A = \#E$.

⚠ ATTENTION : en général si $\#A \leq \#E$, on ne peut pas dire que $A \subseteq E$. Et bien sur si $\#A = \#E$, on ne peut pas dire que $A = E$.

Théorème 5 Propriétés des applications entre ensembles finis / Principe des tiroirs
Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Si f est injective alors $\#E \leq \#F$.
2. Si f est surjective alors $\#E \geq \#F$.
3. Si $\#E = \#F$ alors :

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective}$$

Schubfachprinzip de Dirichlet : « Si n chaussettes occupent m tiroirs, et si $n > m$, alors au moins un tiroir doit contenir strictement plus d'une chaussette. Une autre formulation serait que m tiroirs ne peuvent contenir strictement plus de m chaussettes avec une seule chaussette par tiroir ; ajouter une autre chaussette obligera à réutiliser l'un des tiroirs ».

Définition 6 Ensembles infinis
Si E n'est pas fini, on dit qu'il est infini. Son cardinal est dit transfini.

⚠ Les cardinaux transfinis ne sont pas tous égaux !
Par exemple on peut montrer que $\#\mathbb{N} < \#\mathbb{R}$.

Définition 7 Ensembles dénombrables
On dit que E est dénombrable lorsqu'il est en bijection avec $\mathbb{N}$ (dans ce cas E est infini).
On dit que E est au plus dénombrable lorsque E est fini ou dénombrable.

Intuitivement le fait pour un ensemble d'être dénombrable signifie qu'on peut compter/énumérer ses éléments.

***Exemple* :** $\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ne le sont pas.

2.2 Dénombrement des ensembles finis

Théorème 8 Dénombrement des parties d'un ensemble fini
Si E est fini alors $\mathscr{P}(E)$ l'est aussi et $\#\mathscr{P}(E) = 2^{\#E}$.

Démonstration : On note $n = E$. On donne trois pistes de démonstrations.
• Pour toute partie A de E, chaque $x \in E$ vérifie $x \in A$ ou $x \notin A$. Donc au total 2^n choix.
• On peut raisonner par récurrence sur n.
• On peut mettre $\mathscr{P}(E)$ en bijection avec $\{0,1\}^E$ via les fonctions indicatrices.

CQFD □

Théorème 9 Principe des bergers

1. Si A et B sont deux ensembles finis et disjoints alors $A \cup B$ est fini et $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.
2. Si $A_1, \dots, A_n$ sont des ensembles finis et deux à deux disjoints : $\#(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \#A_1 + \#A_2 + \cdots + \#A_n$.

« Quand les bergers veulent compter leurs moutons, ils comptent leurs pattes et divisent par quatre ».

Démonstration : Supposons $\varphi : A \longrightarrow [\![1, n]\!]$ et $\psi : B \longrightarrow [\![1, p]\!]$ sont bijectives.
Alors $f : A \cup B \longrightarrow [\![1, n+p]\!]$ définie par $f(x) = \varphi(x)$ si $x \in A$ et $f(x) = n + \psi(x)$ si $x \in B$ est une bijection.

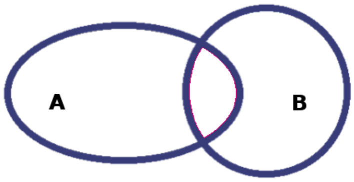
CQFD □

Corollaire 10 Cardinal d'une différence
Si A et B sont deux ensembles finis : $\#(B \setminus A) = \#B - \#(A \cap B)$.

Corollaire 11 Cardinal d'une union
Si A et B sont deux ensembles finis et disjoints alors $A \cap B$ et $A \cup B$ sont finis et :

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

Ces formules se retrouvent facilement à l'aide d'un diagramme :



Corollaire 12 Cardinal du complémentaire
Si E est fini et A est une partie de E alors : $\#\overline{A} = \#E - \#A$.

Théorème 13 Cardinal d'un produit cartésien
Si E et F sont finis alors $E \times F$ est fini et $\#(E \times F) = (\#E).(\#F)$ (le point désigne la multiplication des nombres).

Démonstration : Il suffit de trouver une bijection de $[\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ sur $[\![1, np]\!]$.
Par exemple l'application $(x, y) \longmapsto x + n(y-1)$.

CQFD □

2.3 Dénombrement des applications entre ensembles finis

Théorème 14 Si E et F sont deux ensembles finis alors F^E est fini et $\#F^E = (\#F)^{\#E}$.

***Exemple* :** Si $n = \#E$ alors $\#\left(\{0,1\}^E\right) = 2^n$.

Définition 15 On appelle p-liste d'éléments d'un ensemble F tout p-uplet d'éléments de F.

Théorème 16 Dénombrement des p-listes
Le nombre de p-listes d'éléments de F est égal à $(\#F)^p$.

On va maintenant dénombrer les applications injectives. Pour cela, commençons par définir la notion de factorielle d'un entier naturel.

Définition 17 Factorielle
Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.
On adopte aussi la convention $0! = 1$. Ainsi $n!$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par exemple $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$ ....

Définition 18 Arrangements
Si F est un ensemble fini tel $\#F = n$ et p un entier naturel non nul tel que $p \leq n$, on appelle arrangement de p éléments de F tout p-uplet d'éléments de F dont les composantes sont deux à deux distinctes.

Théorème 19 Dénombrement des arrangements
Le nombre d'arrangements de p éléments parmi n est égal à :

$$A_n^p = \begin{cases} n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} & \text{si } n \geq p \\ 0 & \text{si } n < p \end{cases}$$

avec $n = \#F$ et $p = \#E$.

Exemple : $A_3^7 = 0$ et $A_7^3 = 7 \times 6 \times 5$.

Théorème 20 Dénombrement des applications injectives
Soient E et F deux ensembles finis.

1. Si $\#E \leq \#F$, il y a au total $\dfrac{(\#F)!}{(\#F - \#E)!} = A_{\#F}^{\#E}$ applications injectives sur E à valeurs dans F.
2. Si $\#E > \#F$, il y n'a aucune application injective sur E à valeurs dans F.

Corollaire 21 Dénombrement des bijections
Si $\#E = \#F$ alors le nombre de bijections de E sur F est égal à $(\#E)!$.
Si $\#E \neq \#F$ alors il n'existe pas de bijection de $\#E$ sur $\#F$.

Définition 22 Permutations
On appelle permutation de E toute bijection de E sur E.

Théorème 23 Dénombrement des permutations
Si E est fini de cardinal n, le nombre de permutations de E est égal à $n!$.

Le dénombrement des surjections est plus compliqué et n'est pas au programme. Nous le ferons en TD.

2.4 Coefficients binômiaux

Définition 24 Coefficients binômiaux
Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \in [\![0,n]\!]$. On pose $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{A_n^p}{p!}$.
$\binom{n}{p}$ se lit « p parmi n ». La notation C_n^p n'est plus utilisée aujourd'hui.
Si $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$ et que l'une des deux conditions $n \geq 0$ ou $p \in [\![0,n]\!]$ n'est pas vérifiée on adopte la convention $\binom{n}{p} = 0$.

Nous allons voir que ces nombres interviennent dans de très nombreuses formules.

Théorème 25 Nombre de parties à p éléments
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, le nombre de parties de E à p éléments est égal à $\binom{n}{p}$.

Définition 26 Combinaisons
Si E est un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}$, on appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E dont le cardinal est égal à p.

Théorème 27 Dénombrement des combinaisons
Si E est fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$, le nombre de combinaisons à p éléments de E est égal à $\binom{n}{p}$ (la formule est vraie même si $n < p$).

Proposition 28 Règles de calcul
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0,n]\!]$.

1. Factorisation : si $p \neq 0$, $\binom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.
2. Addition ou formule de Pascal : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.
3. Symétrie : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
4. $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$, $\quad \binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1} \quad$ et $\quad \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{n-2}$.

En pratique on peut calculer les $\binom{n}{p}$ à l'aide de leur définition avec des factorielles :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$$

Exemple **:** $\binom{20}{3} = \dfrac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = 20 \times 19 \times 3 = 1140.$

Pour de petites valeurs de n la formule de factorisation permet de construite le **triangle de Pascal**. Dans un tableau dont les lignes et les colonnes sont numérotées à partir de 0, on place la valeur de $\binom{n}{p}$ à l'intersection de la ligne n et la colonne p. La formule de Pascal donne que la somme de deux coefficients consécutifs sur la même ligne (colonnes p et $p+1$), donne le coefficient situé sur la ligne suivante,colonne $p+1$. Au départ on part d'un tableau avec des 1 sur la colonne 0 et sur la diagonale.

Exemple **:**
$$\begin{array}{lllllll} 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \\ 1 & & 1 & & & & \\ 1 & & & 1 & & & \\ 1 & & & & 1 & & \\ 1 & & & & & 1 & \\ 1 & & & & & & 1 \end{array} \quad \text{donne} \quad \begin{array}{lllllll} 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{array}$$

et on en déduit $\binom{6}{3} = 20.$

Proposition 29 Les coefficients binômiaux sont des nombres entiers naturels

Pour tout $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$, $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$.

2.5 Techniques de dénombrement

Pour bien dénombrer les éléments d'un ensemble fini E il faut :
- ne compter que les éléments de E ;
- ne pas en oublier ;
- ne pas compter plusieurs fois le même élément, ou penser à rectifier le résultat final.

Si on dénombre des objets en les décrivant **par étapes successives** (pour une carte : on choisit sa couleur puis sa hauteur), il faut à la fin **multiplier** les résultats.

Si on dénombre par **disjonction des cas**, il faut à la fin **additionner** les résultats (c'est le lemme des bergers).

• **p-listes :** si on choisit p éléments dans un ensemble à n éléments, **avec répétition autorisée, l'ordre des tirages étant pris en compte**, alors on a n^p possibilités au total.

Exemple **:** Nombre de coloriages possibles d'une carte des 27 pays de l'UE, avec 4 couleurs = 4^{27}.

***Exemple*:** Nombre de tirages successifs **avec remise** de p boules dans une urne de n boules $= n^p$.

• $\boxed{\textbf{Arrangements :}}$ si on choisit p éléments dans un ensemble à n éléments, **sans répétition, l'ordre des tirages étant pris en compte**, alors on a A_n^p possibilités au total.

***Exemple*:** Nombre de coloriages possibles d'une carte des 27 pays de l'UE, avec 40 couleurs, de telle sorte que chaque pays ait une couleur différente de celle des autres $= A_{40}^{27}$.

***Exemple*:** Nombre de tirages successifs **sans remise** de p boules dans une urne de n boules $= A_n^p$.

• $\boxed{\textbf{Combinaisons :}}$ si on choisit p éléments dans un ensemble à n éléments, **sans répétition, l'ordre des tirages n'étant pas pris en compte**, alors on a $\binom{n}{p}$ possibilités au total.

***Exemple*:** Nombre d'équipes de football possibles dans une classe de 45 élèves $= \binom{45}{11}$.

***Exemple*:** Nombre de tirages **simultanées** de p boules dans une urne de n boules $= \binom{n}{p}$.

⚠ Le cas du choix de p éléments dans un ensemble à n éléments, **avec répétition, l'ordre des tirages n'étant pas pris en compte**, n'est pas au programme.

• $\boxed{\textbf{Permutations :}}$ si on permute n éléments, alors on a $n!$ possibilités au total.

***Exemple*:** Nombre de façons de ranger 10 manteaux dans une penderie = 10!.

⚠ Lorsqu'on permute les éléments, certains peuvent revenir à leur position intiale ! (on parle de points fixes).

• $\boxed{\textbf{Situations plus complexes :}}$

⋆ On dispose d'une urne de n boules dont n_1 sont noires et n_2 sont blanches. On tire p boules dans cette urne. Le nombre de tirages différents donnant p_1 blanches et p_2 noires ($p_1 + p_2 = p$) qu'on peut obtenir est :

$\longrightarrow$ $\underbrace{\binom{n_1}{p_1}\binom{n_2}{p_2}}_{\textit{Choix des boules}}$ si les boules sont tirées simultanément ;

$\longrightarrow$ $\underbrace{A_{n_1}^{p_1} A_{n_2}^{p_2}}_{\textit{Choix des boules}} \times \underbrace{\binom{p}{p_1}}_{\textit{Choix des tirages}}$ si les boules sont tirées successivement et sans remise ;

$\longrightarrow$ $\underbrace{n_1^{p_1} n_2^{p_2}}_{\textit{Choix des boules}} \times \underbrace{\binom{p}{p_1}}_{\textit{Choix des tirages}}$ si les boules sont tirées successivement et avec remise.

⋆ On dispose d'une urne de n boules dont n_1 sont noires, n_2 sont blanches et n_3 sont rouges. On tire p boules dans cette urne. Le nombre de tirages différents donnant p_1 noire, p_2 blanches et p_3 rouges ($p_1+p_2+p_3=p$) qu'on peut obtenir est :

$\longrightarrow$ $\underbrace{\binom{n_1}{p_1}\binom{n_2}{p_2}\binom{n_3}{p_3}}_{\textit{Choix des boules}}$ si les boules sont tirées simultanément ;

$\longrightarrow$ $\underbrace{A_{n_1}^{p_1}A_{n_2}^{p_2}A_{n_3}^{p_3}}_{\textit{Choix des boules}} \times \underbrace{\binom{p}{p_1}\binom{p-p_1}{p_2}}_{\textit{Choix des tirages}}$ si les boules sont tirées successivement et sans remise ;

$\longrightarrow$ $\underbrace{n_1^{p_1}n_2^{p_2}n_3^{p_3}}_{\textit{Choix des boules}} \times \underbrace{\binom{p}{p_1}\binom{p-p_1}{p_2}}_{\textit{Choix des tirages}}$ si les boules sont tirées successivement et avec remise.

⋆ Etc... Ces formules se généralisent facilement.

3 Calculs de sommes et de produits

3.1 Sommes

Définition 30 Symbole Σ

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres complexes. On pose : $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.

Si $p \in [\![0, n]\!]$, on pose aussi : $\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n$.

Plus généralement si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille finie de nombres complexes (ie I est fini), on pose : $\sum_{i\in I} a_i$ = somme de tous les nombres de la famille $(a_i)_{i\in I}$.

Dans le cas où $I = \emptyset$, on adopte la convention : $\sum_{i\in I} a_i = 0$.

Proposition 31 Règles de calcul

Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles finies de nombres complexes.

1. Factorisation. Si $\lambda \in \mathbb{C}$: $\sum_{i\in I}(\lambda \times a_i) = \lambda \times \sum_{i\in I} a_i$.
2. Linéarité. $\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$.
3. Sommation par paquet. Si $I = I_1 \cup I_2$ avec $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ alors $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i$.
4. Relation de Chasles. Si $I = [\![p, n]\!]$ et $q \in I$: $\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=q+1}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{q-1} a_k + \sum_{k=q}^{n} a_k$.

5. Changements d'indice. L'indice de la somme est une variable muette :
$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in I} a_i = \sum_{k\in I} a_k$ ou encore $\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{j=p}^{n} a_j = \sum_{i=p}^{n} a_i$.
De plus on peut **décaler les indices**. Si on fixe $q \in Z$, et si on pose $k' = k+q$:
$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k'=p+q}^{n+q} a_{k'-q}$$
D'autre part on peut aussi **inverser** l'ordre des termes de la somme, en posant $k' = n-k$:
$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k'=0}^{n-p} a_{n-k}$$

3.2 Sommes usuelles à connaître

• **Sommes télescopiques.** Pour toute famille $(a_k)_{p\le k\le n+1}$ de nombres complexes : $\sum_{k=p}^{n} (a_{k+1}-a_k) = a_{n+1}-a_p$.

• **Sommes à terme général constant.** Pour tout $a \in \mathbb{C}$: $\sum_{k=p}^{n} a = (n-p+1)a =$ (nb de termes) $\times a$.

• **Sommes arithmétiques.** On a : $\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

• **Somme d'Euler.** On a : $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

• **Sommes géométriques.** On a : $\sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+\cdots+q^n = \begin{cases} n+1 & \text{si } q=1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q\neq 1 \end{cases}$.

3.3 Formule du binôme de Newton

C'est la formule la plus importante ! Commençons par rappeler la convention suivante : si $z \in \mathbb{C}$ on pose $z^0 = 1$. En particulier $0^0 = 1$.

Théorème 32 Formule du binôme
Si a et b sont deux nombres complexes :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} a^n b^0$$

***Exemple* :** Grâce au triangle de Pascal on calcule les $\binom{n}{k}$.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

donne :
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$,
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$,
et $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

Corollaire 33 Cas particuliers à connaître
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = 0^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n=0 \\ 0 \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$

***Exemple* :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right]$ et en déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3.4 Sommes doubles

Si $(x_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ est un « tableau » de nombres à n lignes et p colonnes on note :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} x_{ij} = \text{ somme de tous les nombres du tableau}$$

Visualisons le tableau :

$$\begin{array}{ccc|c|cc} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{ip} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{np} \end{array}$$

Nous avons encadré la ligne i et la colonne j. Notons S_i la somme partielle des nombres de la ligne i : $S_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} x_{ij}$; et notons T_j la somme des nombres de la colonne T_j : $T_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$. Il est clair que la somme des sommes partielles obtenues pour chaque ligne (resp. chaque colonne) donne la somme de tous les nombres du tableau. On en déduit le théorème suivant sur les sommes doubles.

Théorème 34 Théorème de Fubini
On a :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}} x_{ij} &= \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{p} T_j = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)\end{aligned}$$

et plus généralement :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i\in I\\j\in J}} x_{ij} &= \sum_{i\in I} S_i = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} x_{ij}\right)\\ &= \sum_{j\in J} T_j = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} x_{ij}\right)\end{aligned}$$

Dans un calcul, on peut donc permuter deux signes Σ consécutifs.

Examinons maintenant le cas plus complexe d'un tableau triangulaire $(x_{ij})_{\substack{1\le j\le n\\ j\le i\le n}}$ à n lignes et n colonnes. On note :

$$\sum_{1\le \boxed{j\le i}\le n} x_{ij} = \text{ somme de tous les nombres de ce tableau}$$

Visualisons le :

$$\begin{array}{ccc|c|cccc}
x_{11} & & & & & & & \\
x_{21} & x_{22} & & & & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & & & \\
x_{j1} & x_{j2} & \cdots & x_{jj} & & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & & & \\
\hline
x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{ii} & & \\
\hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\
x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{ni} & \cdots & x_{nn}
\end{array}$$

Encore une fois, nous avons encadré la ligne i et la colonne j. Si S_i est la somme partielle des nombres de la ligne i : $S_i = \sum_{j=1}^{\boxed{i}} x_{ij}$; si T_j est la somme des nombres de la colonne j : $T_j = \sum_{i=\boxed{j}}^{n} x_{ij}$. Avec même raisonnement que ci-dessus on obtient le théorème suivant.

Théorème 35 Théorème de Fubini
On a :

$$\sum_{1\leq \boxed{j\leq i} \leq n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{\boxed{i}} x_{ij}\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{p} T_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=\boxed{j}}^{n} x_{ij}\right)$$

Nous allons maintenant voir une formule pour calculer le produit de deux sommes.
⚠ Malheureusement $\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\times\left(\sum_{i\in I} b_i\right) \neq \sum_{i\in I} a_i \times b_i$!
Le théorème suivant donne la bonne formule. Remarquons que le résultat est une somme double.

Théorème 36 Produit de deux sommes
Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ sont deux familles finies de nombres complexes, on a :

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\times\left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_i\times b_j\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_i\times b_j\right)$$

3.5 Généralisation des formules de dénombrement

Certaines formules de dénombrement se généralisent grâce aux symboles Σ.

Théorème 37 Principe des bergers
Si E est un ensemble fini et $(A_i)_{i\in I}$ est une famille finie de parties de E, deux à deux disjointes, alors :

$$\#\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \# A_i$$

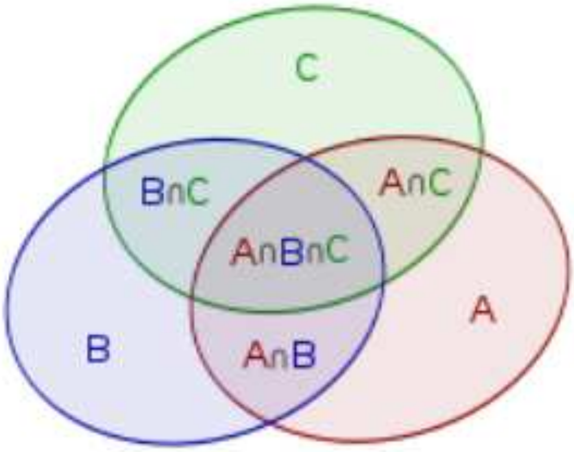
Dans le cas de parties qui ne sont pas deux à deux disjointes on a le résultat suivant.

Théorème 38 Formule du crible de Poincaré / Principe d'inclusion-exclusion
Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties d'un ensemble fini E :

$$\#\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} \#\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)\right)$$

***Exemple* :** Pour $n = 2$ on retrouve la formule : $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.
Pour $n = 3$ on a : $\#(A \cup B \cup B) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$.
Pour $n = 4$: $\#(A \cup B \cup C \cup D) = \#A + \#B + \#C + \#D - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(A \cap D) - \#(B \cap C) - \#(B \cap D) - \#(C \cap D) + \#(A \cap B \cap C) + \#(A \cap B \cap D) + \#(A \cap C \cap D) + \#(B \cap C \cap D) - \#(A \cap B \cap C \cap D)$.
Etc... Remarquez l'alternance de signe entre les groupements de termes.

Dans ces cas particuliers, on peut retrouver les formules avec un diagramme. Par exemple dans le cas $n = 3$:



Il y a un cas particulier « simple » où l'on sait calculer la somme de droite dans la formule du crible : si $\#\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right)$ est une constante α_k qui ne dépend que de k (et pas du choix des valeurs de $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$. En remarquant que la somme $\displaystyle\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n}$ comporte $\displaystyle\binom{n}{k}$ termes on obtient :

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \#\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) = \text{ nombre de termes } \times \alpha_k = \binom{n}{k} \alpha_k$$

et donc :

$$\#\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \alpha_k$$

***Exemple* :** On appelle **dérangement** de $[\![1, n]\!]$ toute permutation qui ne laisse fixe aucun élément, ie telle que aucun élément ne reprend sa position initiale. On note d_n le nombre de ces dérangements. Il est clair que $d_n \leq n!$. La formule du crible donne la formule exacte :

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

3.6 Produits

Définition 39 Symbole Π

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres complexes. On pose : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n$.
Plus généralement si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille finie de nombres complexes (ie I est fini), on pose : $\displaystyle\prod_{i \in I} a_i =$ produit de tous les nombres de la famille $(a_i)_{i \in I}$.
Dans le cas où $I = \emptyset$, on adopte la convention : $\displaystyle\prod_{i \in I} a_i = 1$.

Proposition 40 Règles de calcul
Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles finies de nombres complexes.

1. Factorisation. Si $\lambda \in \mathbb{C}$: $\prod_{i\in I}(\lambda \times a_i) = \lambda^{\#I} \times \prod_{i\in I} a_i$.
2. $\prod_{i\in I}(a_i \times b_i) = \left(\prod_{i\in I} a_i\right) \times \left(\prod_{i\in I} b_i\right)$.
3. Etc...

La seule formule à connaître est la suivante.

Proposition 41 Π et factorielle
Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\prod_{k=1}^{n} k = n!$.

Les symboles Σ et Π sont liés l'un à l'autre par les fonctions ln et exp. On a en effet les formule suivantes.

Théorème 42 Liens entre Σ et Π

1. Si $a, b > 0$, on a $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$, et si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$.
2. Plus généralement, si $(a_i)_{i\in I}$ famille finie de nombre réels : $\exp\left(\sum_{i\in I} a_i\right) = \prod_{i\in I} \mathrm{e}^{a_i}$,

   et si les $(a_i)_{i\in I}$ sont strictement positifs : $\ln\left(\prod_{i\in I} a_i\right) = \sum_{i\in I} \ln(a_i)$.

4 Exercices

Exercice 1 Combien de numéros de téléphone peut-on attribuer en France, sachant que :
• L'indicatif de région est 01, 02, 03, 04 ou 05.
• Les deux chiffres suivant doivent être distincts.
• De nouveaux numéros "internet" sont disponibles, commençant tous par 08.

Exercice 2 Un étudiant en ECS veut colorier ses notes de cours en attribuant la même couleur pour chaque matière : histoire, géographie, culture générale, mathématiques, informatique, LV1 et LV2. Il dispose de 10 couleurs différentes.

1. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?
2. Combien y a-t-il de coloriages, de sorte que chaque matière ait une couleur différente des autres ?
3. On choisit autant de couleurs différentes qu'il y a de matières. Combien y a t-il de coloriages possibles en utilisant seulement ces couleurs ? De sorte que chaque matière ait une couleur différente des autres ?
4. Combien y a-t-il de coloriages, de sorte qu'au moins deux matières aient la même couleur ?
5. Combien y a-t-il de coloriages, de sorte qu'exactement deux matières aient la même couleur ?

Exercice 3 Dans une urne, on place n boules blanches et une noire. On tire simultanément k boules.

1. Combien y-a-t-il de tirages sans boule noire.
2. Combien y-a-t-il de tirages avec au moins une boule noire ?
3. Combien y-a-t-il de tirages possibles en tout ? Quelle propriété du cours venez-vous de démontrer ?

Exercice 4 On dispose d'une urne avec 8 boules blanches, 7 boules noires et 5 boules vertes.

1. Quel est le nombre de tirages simultanés de 5 boules donnant 2 blanches, 1 noire et 2 vertes ?
2. Quel nombre de tirages successifs et sans remise de 5 boules donnant 2 blanches, 1 noire et 2 vertes ? 2 blanches, 1 noire et 2 vertes *dans cet ordre* ?
3. Mêmes questions avec des tirages successifs et avec remise de 5 boules dans l'urne.

Exercice 5 Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Combien y-a-t-il de parties de E formées de k éléments ?
2. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments de E ?
3. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E ?
4. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E, tel que le premier élément est le plus petit et le dernier élément est le plus grand ?
5. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments de E ordonnés dans l'ordre strictement croissant ?

Exercice 6

1. Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot ECS ? du mot FINANCE ? du mot ANAGRAMME ?
2. Combien y a-t-il de mots composés de 5 lettres ? de 5 lettres distinctes ? de 5 lettres distinctes dans l'ordre alphabétique ? de 5 lettres et de sorte qu'il soit un palindrome ?

Exercice 7 Soit $(n,p)\in\mathbb{N}$. On note S_n^p le nombre de surjections d'un ensemble à p éléments sur un ensemble à n éléments.

1. Calculer S_1^4, S_4^1 et S_4^4.
2. Plus généralement calculer S_1^p, S_n^1 et S_n^n.

Exercice 8 Dans une classe il y a autant de filles que de garçons. Tous les éléves étudient au moins une langue. Parmi eux : 10 étudient l'espagnol, 15 étudient l'allemand, 20 étudient l'anglais, 7 étudient l'espagnol et l'allemand, 8 étudient l'allemand et l'anglais, 9 étudient l'anglais et l'espagnol. Quel est l'effectif de la classe ?

Exercice 9 Un joueur de poker reçoit une "main" de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes (sans joker). Donner le nombre total de mains différentes que le joueur peut obtenir. Quel est le nombre de mains contenant :

1. une seule paire ?	2. deux paires ?	3. un brelan ?
4. un carré ?	5. un full ?	6. une couleur ?
7. une paire de roi ?	8. au moins un coeur ?	

Exercice 10 Calculer les sommes suivantes, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ (éventuellement non nul) :

$$\sum_{k=1}^{n}1,\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}1,\quad \left(\sum_{i=1}^{n}i\right)+\left(\sum_{j=1}^{n}j\right),\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j),\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}1,\quad \prod_{k=1}^{n}k,\quad \prod_{k=0}^{n}(2k+1),\quad \prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}.$$

Exercice 11 Calculer les sommes et produits suivant, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ (éventuellement non nul) :

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k},\quad \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3^k}\binom{n}{k},\quad \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k},\quad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k},\quad \sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k},\quad \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right),\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}.$$

Exercice 12 Soient n et p deux entiers naturels tels que $n\geq p$. Calculer la somme :

$$\sum_{i=0}^{p}\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}$$

Exercice 13 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer les sommes :

$$1.\quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{j}{i}\qquad 2.\quad \sum_{1\leq j<i\leq n} ij$$

Exercice 14 Soit $n\in\mathbb{N}$. On considère les sommes

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k},\quad B_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k},\quad S_n=\sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k},\quad T_n=\sum_{0\leq 2k+1\leq n}\binom{n}{2k+1}.$$

1. Calculer A_n et B_n en fonction de n.

2. En déduire S_n et T_n en fonction de n.
3. Déterminer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}$.

Exercice 15 Soit $(n,p)\in\mathbb{N}$. On note S_n^p le nombre de surjections d'un ensemble à p éléments sur un ensemble à n éléments.

1. On pose $E=[\![1,p]\!]$ et $F=[\![1,n]\!]$. On note $S(E,F)$ l'ensemble des surjections de E dans F. Donner une relation simple entre $S(E,F)$ et les ensembles $A_k=\{f:E\longrightarrow F\ /\ k$ n'a pas d'antécédent par $f\}$, où $k\in F$.
2. En déduire, en utilisant la formule du crible de Poincaré que :

$$S_n^p=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p$$

Exercice 16

1. On considère deux suites de nombres réels $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N},\quad f_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g_k$.
   Montrer la relation réciproque suivante :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad g_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f_k$$

2. On appelle dérangement de n éléments une permutation où les n éléments changent de place, et on note $d(n)$ le nombre de dérangements de n éléments.

   Vérifier que : $n!=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d(n-k)$. En déduire la valeur de d_n en fonction de n.

Exercice 17 Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Combien y-a-t-il de couples (A,B) de parties de E tels que $A\cap B=\emptyset$? tels que $A\cup B=E$?
2. Combien y-a-t-il de triplets (A,B,C) de parties de E tels que $A\cup B\cup C=E$?

Chapitre 3

Nombres complexes

1 Propriétés des nombres complexes

1.1 Construction rapide de $\mathbb{C}$

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution. On va donc construire un ensemble $\mathbb{C}$, contenant $\mathbb{R}$, et dans lequel cette équation a des solutions.

On se place dans $\mathbb{R}^2$ munit des opérations :

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_1 + b_2) \text{ et } (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

De plus on identifie $a \in \mathbb{R}$ avec $(a, 0) \in \mathbb{R}^2$: $a = (a, 0)$. Alors si $i = (0, 1)$, on a $i^2 = (-1, 0) = -1$. On a donc donné une solution à l'équation $x^2 = -1$ et on peut poser :

$$\mathbb{C} = \left\{ z = (a, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

De plus on remarque que si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a + ib = (a, 0) + (0, 1) \times (b, 0) = (a, 0) + (0, b) = (a, b)$, donc :

$$\mathbb{C} = \left\{ z = a + ib / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

On a $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ et on peut démontrer que les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$. Les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés nombres complexes, ceux de $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ sont appelés nombres complexes purs, et ceux de $i\mathbb{R} = \left\{ ib / b \in \mathbb{R} \right\}$ nombres complexes imaginaires purs.

On a les identités remarquables, pour z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$:
$(z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 + 2 z_1 z_2$ et $(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 - 2 z_1 z_2$;
$z_1^2 - z_2^2 = (z_1 + z_2) \times (z_1 - z_2)$ et $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + i z_2) \times (z_1 - i z_2)$;
$(z_1 + z_2)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}$;
$z_1^n - z_2^n = (z_1 - z_2)\left(z_1^{n-1} + z_1^{n-2} z_2 + z_1^{n-3} z_2^2 + \cdots + z_1 z_2^{n-2} + z_2^{n-1}\right) = (z_1 - z_2) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_1^k z_2^{n-1-k}$.

1.2 Notions de base

Définition 1 Parties réelles et imaginaires
Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors le choix des réels a et b est unique. a est appelé partie réelle de z, notée $\mathscr{R}e(z)$, et b est appelée partie imaginaire de z, notée $\mathscr{I}m(z)$.
On a donc $\mathscr{R}e(z) \in \mathbb{R}$, $\mathscr{I}m(z) \in \mathbb{R}$ et $z = \mathscr{R}e(z) + i\,\mathscr{I}m(z)$

Proposition 2 Règles de calcul
Soient $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

1. $\mathscr{Re}(z_1+z_2) = \mathscr{Re}(z_1)+\mathscr{Re}(z_2)$ et $\mathscr{Im}(z_1+z_2) = \mathscr{Im}(z_1)+\mathscr{Im}(z_2)$
   Plus généralement : $\mathscr{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\mathscr{Re}(z_k)$ et $\mathscr{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\mathscr{Im}(z_k)$.
2. $z_1 = z_2 \iff \begin{cases} \mathscr{Re}(z_1) = \mathscr{Re}(z_2) \\ \mathscr{Im}(z_1) = \mathscr{Im}(z_2) \end{cases}$
3. Si $\lambda \in \mathbb{R}$: $\mathscr{Re}(\lambda \times z_1) = \lambda \times \mathscr{Re}(z_1)$ et $\mathscr{Im}(\lambda \times z_1) = \lambda \times \mathscr{Im}(z_1)$.
4. $\mathscr{Re}(z_1 z_2) = \mathscr{Re}(z_1)\,\mathscr{Re}(z_2) - \mathscr{Im}(z_1)\,\mathscr{Im}(z_2)$
   et $\mathscr{Im}(z_1 z_2) = \mathscr{Re}(z_1)\,\mathscr{Im}(z_2) + \mathscr{Re}(z_2)\,\mathscr{Im}(z_1)$.
5. $z \in \mathbb{R} \iff \mathscr{Im}(z) = 0$ et $z \in i\mathbb{R} \iff \mathscr{Re}(z) = 0$.
6. Si $z \neq 0$: $\mathscr{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\mathscr{Re}(z)}{\mathscr{Re}(z)^2+\mathscr{Im}(z)^2}$ et $\mathscr{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{\mathscr{Im}(z)}{\mathscr{Re}(z)^2+\mathscr{Im}(z)^2}$.

⚠ Par contre $\mathscr{Re}(z_1 \times z_2) \neq \mathscr{Re}(z_1) \times \mathscr{Re}(z_2)$, $\mathscr{Im}(z_1 \times z_2) \neq \mathscr{Im}(z_1) \times \mathscr{Im}(z_2)$
et si $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $\mathscr{Re}(\lambda \times z) \neq \lambda \times \mathscr{Re}(z)$, $\mathscr{Im}(\lambda \times z) \neq \lambda \times \mathscr{Im}(z)$.

Définition 3 Conjugué
Si $z \in \mathbb{C}$, on définit le conjugué de z : $\overline{z} = \mathscr{Re}(z) - i\,\mathscr{Im}(z)$.
On a donc : $\mathscr{Re}(\overline{z}) = \mathscr{Re}(z)$ et $\mathscr{Im}(\overline{z}) = -\mathscr{Im}(z)$.

Proposition 4 Règles de calcul
Soient $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

1. $\overline{\overline{z_1}} = z_1$.
2. $\mathscr{Re}(z_1) = \frac{1}{2}(z_1+\overline{z_1})$ et $\mathscr{Im}(z_1) = \frac{1}{2i}(z_1-\overline{z_1})$.
3. $z_1 \in \mathbb{R} \iff z_1 = \overline{z_1}$ et $z_1 \in i\mathbb{R} \iff z_1 = -\overline{z_1}$.
4. $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$ et $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
   Plus généralement $\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$ et $\overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}$.
   De plus : si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\overline{\lambda z_1} = \lambda \overline{z_1}$ et si $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z_1^n} = \overline{z_1}^n$.
5. $z \times \overline{z_1} = \mathscr{Re}(z_1)^2 + \mathscr{Im}(z_1)^2 \in \mathbb{R}^+$.

Définition 5 Module
Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $|z| = \sqrt{\mathscr{Re}(z)^2+\mathscr{Im}(z)^2} = \sqrt{z\overline{z}}$.

Proposition 6 Règles de calcul
Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

1. Dans $\mathbb{R}$, valeur absolue et module coïncident.
2. $\left|\mathscr{I}m(z_1)\right| \leq |z_1)$ et $\left|\mathscr{R}e(z_1)\right| \leq |z_1|$.
3. $\left|\overline{z_1}\right| = |z_1| = |-z_1|$.
4. $|z_1| \geq 0$ et $|z_1| = 0 \iff z_1 = 0$.
   De plus : $z_1 = |z_1| \iff z_1 \in \mathbb{R}^+$.
5. $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$ donc si $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $|\lambda z_1| = \lambda |z_1|$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|z^n\right| = |z|^n$.
6. Si $z_2 \neq 0$: $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

⚠ Attention : en général $|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|$. Par contre il faut connaître le calcul suivant :

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \times \overline{(z_1 + z_2)} = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathscr{R}e\left(z_1\overline{z_2}\right)$$

On aussi l'encadrement suivant.

Théorème 7 Inégalité triangulaire
Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Plus généralement si $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$: $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

1.3 Rappels de trigonométrie

Proposition 8 Propriétés de symétrie

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$
   $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\cos(-x) = \cos(x)$

Proposition 9 Valeurs remarquables

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Pour retrouver ces valeurs ont peut se rappeler que :
$0=\sqrt{\frac{0}{4}}$, $\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{\frac{2}{4}}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{\frac{3}{4}}$ et $1=\sqrt{\frac{4}{4}}$.

Proposition 10 Formules de bases

1. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$
2. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x)$ et $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(x)$
3. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sin(x+\pi)=-\sin(x)$ et $\cos(x+\pi)=-\cos(x)$
   $\sin(\pi-x)=\sin(x)$ et $\cos(\pi-x)=-\cos(x)$
4. $\sin(x)=0 \iff x=0\ [\pi] \iff \exists k\in\mathbb{Z}/\ x=k\pi$
   $\cos(x)=0 \iff x=\frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff \exists k\in\mathbb{Z}/\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

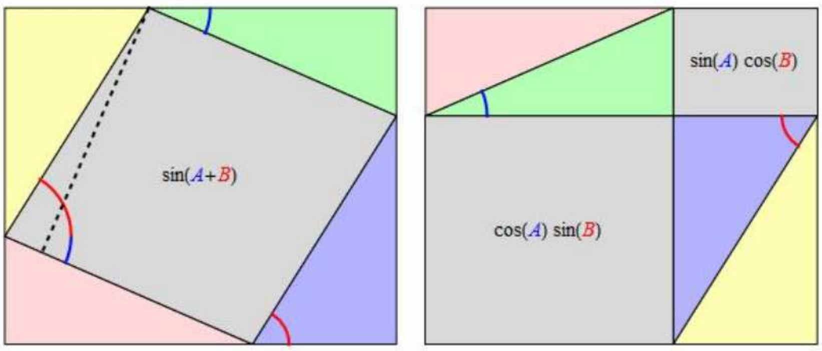
Toutes ces formules se retrouvent aisément à l'aide du cercle trigonométrique !

Proposition 11 Formules fondamentales

1. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\cos(a+b)=\cos(a)\times\cos(b)-\sin(a)\times\sin(b)$
   $\cos(a-b)=\cos(a)\times\cos(b)+\sin(a)\times\sin(b)$
   $\sin(a+b)=\sin(a)\times\cos(b)+\sin(b)\times\cos(a)$
   $\sin(a-b)=\sin(a)\times\cos(b)-\sin(b)\times\cos(a)$
2. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)=2\cos^2(x)-1=1-2\sin^2(x)$
   $\sin(2x)=2\sin(x)\times\cos(x)$
   donc $\cos^2(x)=\dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ et $\sin^2(x)=\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

Ces formules se retrouvent à l'aide de l'exponentielle complexe.

Elles se démontrent géométriquement. Par exemple la formule d'addition pour le sinus se démontre à l'aide des figures suivantes, où les triangles sont tous d'hypothénuse de longueur égale à 1.



Proposition 12 Formules de transformation

1. $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad \cos(a)\times\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\Big)$

$$\sin(a)\times\sin(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\Big)$$

$$\sin(a)\times\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\sin(a+b)+\sin(a-b)\Big)$$

2. $\forall (p,q)\in\mathbb{R}^2,\quad \cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$$\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p)-\sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

On passe de 1. à 2. à l'aide des formules $\begin{cases} p=a+b \\ q=a-b \end{cases} \iff \begin{cases} a=\frac{p+q}{2} \\ b=\frac{p-q}{2} \end{cases}$.

Proposition 13 Fonctions tangentes et cotangentes

1. $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \Big/ k\in\mathbb{Z}\right\} = \left\{x\in\mathbb{R}\Big/ x\neq\frac{\pi}{2}\ [\pi]\right\}$

   $\mathcal{D}_{\text{cotan}} = \mathbb{R}\setminus\left\{k\pi \Big/ k\in\mathbb{Z}\right\} = \left\{x\in\mathbb{R}\Big/ x\neq 0\ [\pi]\right\}$

2. $\forall x\in\mathcal{D}_{\tan},\quad \tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et $\forall x\in\mathcal{D}_{\text{cotan}},\quad \text{cotan}(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

   si $x\neq 0\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$, $\quad \text{cotan}(x)=\frac{1}{\tan(x)} = -\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

3.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\tan(x)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$

4. $\forall x\in\mathbb{R}, \forall k\in\mathbb{Z},\quad \tan(x+k\pi)=\tan(x)$ et $\tan(-x)=-\tan(x)$

5. Si $a,b,a+b\in\mathcal{D}_{\tan}$: $\quad \tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\times\tan(b)}$;

   si $a,b,a-b\in\mathcal{D}_{\tan}$: $\quad \tan(a-b)=\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\times\tan(b)}$;

   si $a,2a\in\mathcal{D}_{\tan}$: $\quad \tan(2a)=\frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$

6. Si $\theta\neq\pi\ [2\pi]$ et si $t=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on a les formules de l'angle moitié :

$$\sin(\theta)=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos(\theta)=\frac{1-t^2}{1+t^2}\quad \text{et}\quad \tan(\theta)=\frac{2t}{1-t^2}$$

1.4 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition 14 Argument
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(0; \vec{i}, \vec{j})$. On appelle argument de z tout mesure (définie modulo 2π) de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ où M est le point d'affixe z (ie de coordonnées $(\mathcal{Re}(z), \mathcal{Im}(z))$). On le note $\mathrm{Arg}(z)$.

Définition 15 Exponentielle complexe
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
On définit ainsi la fonction exponentielle sur $i\mathbb{R}$.

On a donc par définition $\mathcal{Re}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) = \cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) = \sin(\theta)$.

Définition 16 Forme trigonométrique
Si $z \in \mathbb{C}^*$, on a $z = |z| \times \Big(\cos(\mathrm{Arg}(z)) + i\sin(\mathrm{Arg}(z))\Big) = |z|\mathrm{e}^{i\mathrm{Arg}(z)}$.
On dit qu'on a mis le nombre complexe z sous forme trigonométrique.

On a donc : $\mathcal{Re}(z) = |z|\cos(\mathrm{Arg}(z))$ et $\mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\mathrm{Arg}(z))$.

Proposition 17 Règles de calcul pour l'argument
Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$.

1. Forme trigonométrique $\longrightarrow$ Forme algébrique.
   $z_1 = \underbrace{|z_1| \times \cos(\mathrm{Arg}(z_1))}_{=\mathcal{Re}(z_1)} + i \times \underbrace{|z_1| \times \sin(\mathrm{Arg}(z_1))}_{=\mathcal{Im}(z_1)}$
2. Forme trigonométrique $\longrightarrow$ Forme algébrique.
   $\cos(\mathrm{Arg}(z_1)) = \dfrac{\mathcal{Re}(z_1)}{|z_1|}$ et $\sin(\mathrm{Arg}(z_1)) = \frac{\mathcal{Im}(z_1)}{|z_1|}$
3. $z_1 = z_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \mathrm{Arg}(z_1) = \mathrm{Arg}(z_2)\ [2\pi] \end{cases}$
4. $\mathrm{Arg}\left(\overline{z_1}\right) = -\mathrm{Arg}(z_1)\ [2\pi]$
5. $\mathrm{Arg}(z_1 \times z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)\ [2\pi]$
6. $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}(z_1) - \mathrm{Arg}(z_2)\ [2\pi]$
7. $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \mathrm{Arg}(z^n) = n \times \mathrm{Arg}(z)\ [2\pi]$

Proposition 18 Règles de calcul pour l'exponentielle complexe
Si $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.

1. $e^{i\theta_1} \neq 0$ et $\dfrac{1}{e^{i\theta_1}} = e^{-i\theta_1} = \overline{e^{i\theta_1}} = \cos(\theta_1) - i \times \sin(\theta_1)$
2. $\left|e^{i\theta_1}\right| = 1$ et $\operatorname{Arg}\left(e^{i\theta_1}\right) = \theta_1\ [2\pi]$
3. $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}$ et $e^{i(\theta_1-\theta_2)} = \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}$
4. $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad e^{in\theta_1} = \left(e^{i\theta_1}\right)^n$
5. $x \longmapsto e^{ix}$ est 2π-périodique
   donc $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, e^{i(x+2k\pi)} = e^{ix}$
6. $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} \Longleftrightarrow \theta_1 = \theta_2\ [2\pi]$
   et en particulier : $e^{i\theta_1} = 1 \Longleftrightarrow \theta_1 = 0\ [2\pi]$
7. On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$. Alors l'application :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array}$$
   est non injective, mais est surjective.
8. Formules d'Euler.
   $\cos(\theta_1) = \dfrac{e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_1}}{2}$ et $\sin(\theta_1) = \dfrac{e^{i\theta_1} - e^{-i\theta_1}}{2i}$
9. Formule de De Moivre.
   $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \left(\cos(\theta) + i \times \sin(\theta)\right)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \times \sin(n\theta)$
10. Factorisation de l'angle moyen.
   $e^{ix} + e^{iy} = 2e^{i\frac{x+y}{2}} \times \cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$ et $e^{ix} - e^{iy} = 2ie^{i\frac{x+y}{2}} \times \sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

Exemple **:** Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, simplifier $\cos(x + n\pi)$ et $\sin(x + n\pi)$.

1.5 Applications des formules de De Moivre et d'Euler

Les formules de De Moivre et du binôme de Newton donnent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = \left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta)\, i^k \sin^k(\theta)$$

d'où en séparant parties réelles et imaginaires :

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= \sum_{0 \le 2p \le n} (-1)^p \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}(\theta) \sin^{2p}(\theta) \\ &= \cos^n(\theta) - \binom{n}{2} \cos^{n-2}(\theta) \sin^2(\theta) + \binom{n}{4} \cos^{n-4}(\theta) \sin^4(\theta) - \dots \\ \sin(n\theta) &= \sum_{0 \le 2p+1 \le n} (-1)^p \binom{n}{2p+1} \cos^{n-2p-1}(\theta) \sin^{2p+1}(\theta) \\ &= \binom{n}{1} \cos^{n-1}(\theta) \sin(\theta) - \binom{n}{3} \cos^{n-3}(\theta) \sin^3(\theta) + \dots \end{aligned}$$

Exemple **:** $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1, \quad \cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - \cos(\theta) \quad$ Etc...

Inversement on peut « linéariser » des expressions polynômiales en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. En effet partant de $\cos(\theta_1) = \dfrac{e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_1}}{2}$ et $\sin(\theta_1) = \dfrac{e^{i\theta_1} - e^{-i\theta_1}}{2i}$, on peut développer $\cos^n(\theta)$ et $\sin^n(\theta)$ grâce à la formule du binôme de Newton, et obtenir des expressions en $\cos(p\theta)$ et $\sin(p\theta)$.

Ces calculs sont à la base de la définition des polynômes de Tchebychev.

Exemple **:** Linéarisation de $\sin^3(x) \times \cos^2(x)$:

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) \times \cos^2(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 \times \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{2^5 i}\left(e^{i5x} - e^{i3x} - 2e^{ix} + 2e^{-ix} + e^{-i3x} - e^{-i5x}\right) \\
&= -\frac{1}{2^4}\left(\sin(5x) - \sin(3x) - 2\sin(x)\right)
\end{aligned}$$

Ce genre de calcul prendra toute son importance en calcul intégral.

2 Équations polynômiales complexes

2.1 Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe

Rappel. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. Elle admet donc une bijection réciproque de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ notée $x \longmapsto x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.
Ainsi si $x \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^+$: $x^n = a \Longleftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$.

Exemple **:** $\sqrt[3]{8} = 2$.

2.1.1 Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On va résoudre l'équation $z^n = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Dans $\mathbb{R}$, les solutions sont $z = 1$ si n impair, et $z = \pm 1$ si n pair.

Dans $\mathbb{C}$, on a le résultat suivant.

Théorème 19 Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité
L'équation $z^n = 1$ a exactement n solutions : $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. Ces nombres complexes sont appelés racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. On note U_n l'ensemble de ces nombres.
On pose $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Ce complexe est appelé racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité. Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont alors : $U_n = \left\{1, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}\right\}$.

<u>**Démonstration :**</u> Comme 0 n'est pas solution, on peut supposer $z \neq 0$ et utiliser la forme trigonométrique de z : $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$ (détermination principale de $\mathrm{Arg}(z)$).

Alors :

$$\begin{aligned}
z^n = 1 &\iff \left(r e^{i\theta}\right)^n = 1 \\
&\iff r^n e^{in\theta} = 1 = e^{i0} \\
&\overset{r>0}{\iff} \begin{cases} r^n = 1 & \text{même module} \\ n\theta = 0\ [2\pi] & \text{même argument} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta = 0\ \left[\frac{2\pi}{n}\right] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} / \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{cases}
\end{aligned}$$

Mais on cherche $\theta \in [0, 2\pi[$. Il faut donc prendre $k \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leq \dfrac{2k\pi}{n} < 2\pi$, ie $k \in [\![0, n-1]\!]$.

On a donc : $z^n = 1 \iff \exists k \in [\![0, n-1/, z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} / k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

À priori on a donc au plus n solutions. Mais si $(k, k') \in [\![0, n-1]\!]^2$:

$$\begin{aligned}
e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k'\pi}{n}} &\iff \frac{2k\pi}{n} = \frac{2k'\pi}{n}\ [2\pi] \\
&\iff \exists p \in \mathbb{Z} / k = k' + pn
\end{aligned}$$

or $-(n-1) \leq k - k' \leq n-1$ donne $p = 0$. Ainsi $k = k'$.

On vient de prouver que l'équation a exactement n solutions.

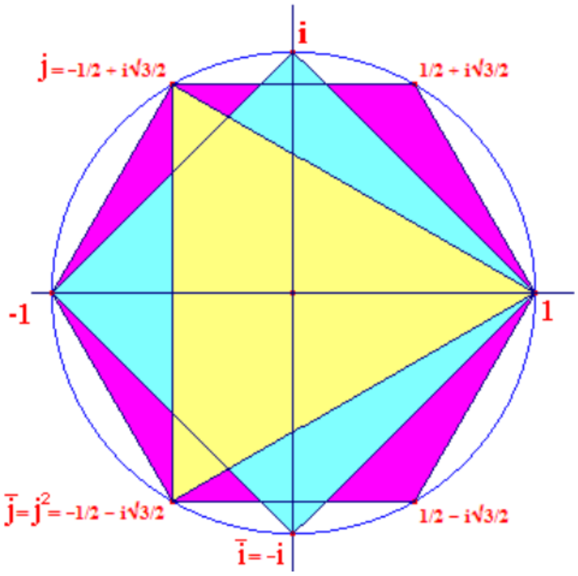
CQFD □

Exemple **:** Pour $n = 1$, $U_1 = \{1\}$ et $\omega_1 = 1$; pour $n = 2$, $U_2 = \{-1, 1\}$ et $\omega_2 = -1$.
Pour $n = 3$, $U_3 = \{1, j, \overline{j}\}$ avec $j = \omega_3 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Pour $n = 4$, $U_4 = \{1, -1, i, -i\}$ et $\omega_4 = i$.

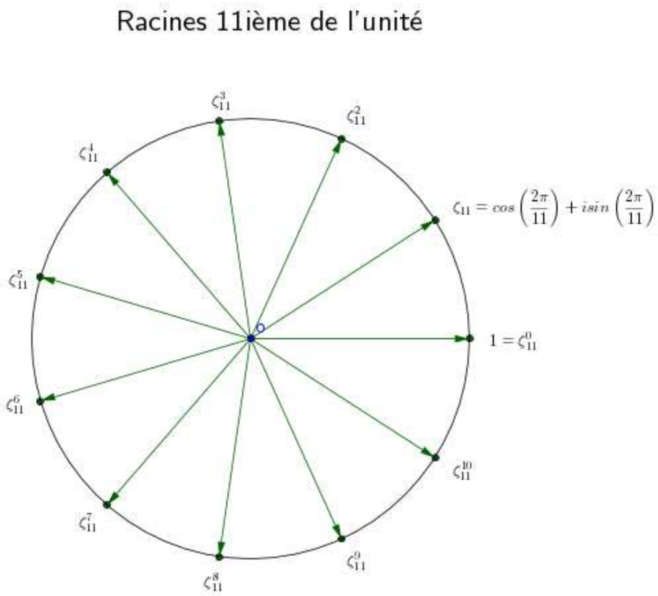
Exemple **:** Si $n \geq 2$, la somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité est égale à 0.

Proposition 20 Interprétation géométrique
Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité forment les sommets d'un polygone régulier à n côtés.

La figure suivante représente les racines cubiques, 4-ièmes et 6-ièmes de l'unité :



Et celle-ci les racines 11-ièmes de l'unité :



2.1.2 Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$. On va résoudre l'équation $z^n = a$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Si $a = 0$, on a une unique solution : $z = 0$.

Si $a \neq 0$, on a le résultat suivant.

Théorème 21 Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe
Pour tout nombre complexe $a = \rho e^{i\alpha}$ non nul, l'équation $z^n = a$ admet exactement n solutions appelées racines $n^{\text{ièmes}}$ de a. Elles sont de la forme $\sqrt[n]{\rho}e^{\frac{i}{n}(\alpha+2k\pi)} = z_0\omega_n^k$, $k \in [\![0, n-1]\!]$, où $z_0 = \sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\alpha}{n}}$ est la racine « évidente » de $z^n = a$.

Démonstration : On met a sous forme trigonométrique : $a = \rho e^{i\alpha}$ avec $\rho > 0$ et $\alpha \in [0, 2\pi[$.

On remarque que l'équation $z^n = a$ a une racine « évidente » : $z_0 = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\alpha}{n}}$. Alors :

$$\begin{aligned} z^n = 1 &\iff z^n = z_0^n \\ &\iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \\ &\iff \frac{z}{z_0} \text{ est une racine } n^{\text{ième}} \text{ de l'unité} \\ &\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \,/\, \frac{z}{z_0} = \omega_n^k \\ &\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \,/\, z = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{i}{n}(\alpha + 2k\pi)} \end{aligned}$$

On obtient donc au plus n solutions. Comme précédemment, on peut facilement vérifier qu'il y en a exactement n. On a donc exactement n solutions.

CQFD □

***Exemple* :** Les racines $4^{\text{ièmes}}$ de $1 - i$ sont : $2^{\frac{1}{8}} e^{-i\frac{\pi}{16}}$, $-2^{\frac{1}{8}} e^{-i\frac{\pi}{16}}$, $2^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{7\pi}{16}}$ et $2^{\frac{1}{8}} e^{-i\frac{9\pi}{16}}$.

2.2 Équations du second degré à coefficients réels

On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z : $az^2 + bz + c = 0$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \neq 0$.

⚠ Le cas a, b, c complexes n'est pas au programme.

Pour cela on introduit le **discriminant** de l'équation : $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$.

Théorème 22 Résolution des équations du second degré à coefficients réels

1. Si $\Delta = 0$, (E) a une unique solution réelle $z = -\dfrac{b}{2a}$.
2. Si $\Delta > 0$, (E) a deux solutions réelles distinctes : $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
3. Si $\Delta < 0$, (E) a deux solutions complexes pures conjuguées : $z = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Théorème 23 Théorème de Viet

On note z_1 et z_2 les solutions de (E) ($z_1 = z_2$ si $\Delta = 0$).

1. On a :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad az^2 + bz + c = a \times (z - z_1) \times (z - z_2)$$
et donc : $\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 \times z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$
2. Réciproquement si x et y sont solutions du système $\begin{cases} x + y = s \\ x \times y = p \end{cases}$ alors x et y sont les racines de l'équation : $z^2 - sz + p = 0$.

***Exemple* :** Résoudre $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=2 \end{cases}$

Corollaire 24 Signe d'un trinôme du second degré à coefficients réels
Si $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ avec $a\neq 0$.

1. Si $\Delta>0$ alors ax^2+bx+c est « du signe de a en dehors des racines ».
   Plus précisément, si x_1 et x_2 sont les deux racines réelles de l'équation $ax^2+bx+c=0$, avec $x_1<x_2$, alors pour $a>0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de ax^2+bx+c		$+$	0	$-$	0	$+$	

   et pour $a<0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de ax^2+bx+c		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. Si $\Delta\leq 0$ alors ax^2+bx+c est du signe de a sur $\mathbb{R}$ (donc de signe constant).
   Si $\Delta<0$ alors ax^2+bx+c est du signe de a sur $\mathbb{R}$, **au sens strict**.
   Si $\Delta=0$ alors ax^2+bx+c s'annule en un unique réel x_0, et est du signe de a sur $\mathbb{R}\backslash\{x_0\}$ **au sens strict**.

3 Exercices

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations trigonométriques suivantes :
$2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$; $\sin x \leq -\frac{1}{2}$; $\cos(2x)\geq 0$; $\tan x \leq 1$; $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>-1$;
$2\cos^2 x+3\cos x+1=0$; $\sin^2 x+3\cos x-1<0$; $\cos(2x)-\sqrt{3}\sin(2x)=1$;
$\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 2 Déterminer les nombres complexes z tels que

$$|z|=|z-6+5i|,\quad |\overline{z}+i|=2,\quad z(2\overline{z}+1)=1,\quad |z^2|=|z|,$$
$$\frac{z+4i}{5z-3}\in\mathbb{R},\quad \mathscr{R}e\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z+i}{z-i}\right)=-\frac{\pi}{4}\ [\pi].$$

Exercice 3 Soit $\theta\in[0,2\pi]$. Déterminer module et argument de $1+e^{i\theta}$, $1-e^{i\theta}$ et $\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$. Faire de même avec : $(1+i)^3$. Donner la forme algébrique de $\frac{1-4i}{1+5i}$.

Exercice 4 (Identité du parallélogramme) Montrer que :

$$\forall (z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2,\quad |z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right).$$

Interpréter géométriquement.

Exercice 5 Soient $(n,p)\in\mathbb{N}$ tel que $p\leq n$. Calculer $\sum\limits_{k=p}^{n} k$ puis $\sum\limits_{k=p}^{n} z^k$ pour tout $z\in\mathbb{C}$.

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos\theta_1=\cos\theta_2$, $\sin\theta_1=\sin\theta_2$, $\tan\theta_1=\tan\theta_2$.

Exercice 7 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Résoudre dans $]0,\pi[$ l'équation : $\cos(n\theta)=0$. Donner le nombre exact de solutions.

Exercice 8 Linéariser les expressions :
$\cos^6 x$; $\cos^2 x\sin^4 x$; $\sin^5 x$; $\cos^3(2x)\sin^3 x$; $\cos(2x)\cos^3 x$.

Exercice 9 Calculer les sommes : $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n}\sin(kx)$ pour $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 10 Calculer la somme pour tout entier $n\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}sin(kb+a),$$

où a et b sont deux réels donnés.

Exercice 11 Calculer $\cos(5\alpha)$ et $\sin(5\alpha)$ en fonction respectivement de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{10}$.

Exercice 12 Simplifier les expressions $(1+j)^5$, $\frac{1}{(1+j)^4}$, $(1+j)^n$ et $\left(1+j^2\right)^n$ ($n\in\mathbb{N}$).

Exercice 13 Résoudre les équations suivantes : $z^4-i=0$ et $z^3=-(2+i)^3$.

Exercice 14

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(S)\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 2\\ xy &=& -1\end{array}\right.$.

2. On pose : $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $u = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $v = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$. Calculer $u + v$, uv et en déduire la valeur de u et v.

Exercice 15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z+1)^n = i(1-z)^n$.

Exercice 16 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Calculer : $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n$.

Exercice 17 On note $E = \{z \in \mathbb{C} / \mathscr{I}m(z) > 0\}$ et $F = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$.

1. Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad z \in E \Rightarrow \frac{z-i}{z+i} \in F$.
2. On définit alors l'application :

$$f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ z & \longmapsto & \dfrac{z-i}{z+i} \end{array}$$

Établir que f est bijective de E sur F. Déterminer l'application f^{-1}.

3. On considère le plan muni d'un repère orthonormé direct.
   (a) On note $E_1 = \{z \in E ; \mathscr{R}e(z) = 0\}$. Déterminer l'ensemble $f(E_1)$ et le représenter graphiquement.
   (b) On note $E_2 = \{z \in E ; |z| = 1\}$. Déterminer l'ensemble $f(E_2)$ et le représenter graphiquement .

Exercice 18 Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. On identifie $z \in \mathbb{C}$ et le point M_z d'affixe z.
1. Quels sont les points z invariants par f ?
2. Quelle est l'image par f du cercle trigonométrique T ?
3. Quelle est l'image réciproque par f de la droite réelle ?

Exercice 19 Il s'agit de montrer que, pour $n \geqslant 2$, on a :

$$\forall (z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n, \quad \left(\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \iff \text{tous les } z_k \text{ ont le même argument} \right)$$

1. Montrer que :

$$\text{tous les } z_k \text{ ont le même argument} \implies \left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

2. Montrer que, pour $n \geqslant 2$, on a :

$$\forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

3. Vérifier que, pour z_1 et z_2 non nuls :

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_1| \implies z_1 \text{ et } z_2 \text{ ont le même argument}$$

4. En déduire par récurrence que, pour $n \geqslant 2$:

$$\forall (z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n, \quad \left(\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \implies \text{tous les } z_k \text{ ont le même argument} \right)$$

Chapitre 4

Suites réelles

1 Propriétés générales de suites réelles

1.1 Rappels sur les propriétés de $\mathbb{R}$

1.1.1 Relation d'ordre

Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note $x < y$ lorsque $x \leq y$ et $x \neq y$. On a donc : $x < y \Longrightarrow x \leq y$.

Exemple **:** $2 < 3$ donc $2 \leq 3$.

Proposition 1 Règles de calcul
Soient $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

1. Pour l'addition.
   - $x_1 \leq y_1 \Longrightarrow \forall z \in \mathbb{R},\ x_1 + z \leq y_1 + z$
   - $\left.\begin{array}{l} x_1 \leq y_1 \\ x_2 \leq y_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$
   - $x_1 \leq y_1 \Longleftrightarrow -y_1 \leq -x_1$
2. Pour la multiplication.
   - $x_1 \leq y_1 \Longrightarrow \forall z \geq 0,\ x \times z \leq y \times z$
   - $\left.\begin{array}{l} 0 \leq x_1 \leq y_1 \\ 0 \leq x_2 \leq y_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow 0 \leq x_1 \times x_2 \leq y_1 \times y_2$
   - $0 < x_1 \leq y_1 \Longleftrightarrow 0 < \dfrac{1}{y_1} \leq \dfrac{1}{x_1}$

⚠ Attention : on ne peut pas **soustraire** ou **diviser** deux inégalités !

1.1.2 Valeur absolue

Définition 2 Valeur absolue
Pour tout$x \in \mathbb{R}$, on pose $|x| = \max(x, -x) = \left\{\begin{array}{l} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{array}\right.$.

Proposition 3 Règles de calcul
Soient $x,\ y \in \mathbb{R}$.

1. $-|x| \leq x \leq |x|$.
2. Si $\alpha \geq 0$: $|x| \leq \alpha \Longleftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$.
3. $|-x| = |x|$.
4. $|x \times y| = |x| \times |y|$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|x^n\right| = |x|^n$.
5. Inégalité triangulaire.

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

avec égalité à droite si et seulement si x et y de même signe.
Plus généralement si $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in \mathbb{R}$, on a : $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.

1.1.3 Intervalles

Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$.

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}/\ a \leq x \leq b\}$ intervalle fermé borné = segment ;

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}/\ a \leq x < b\}$ intervalle borné ;

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}/\ a < x \leq b\}$ intervalle borné ;

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}/\ a < x < b\}$ intervalle ouvert borné ;

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}/\ a \leq x\}$ intervalle fermé ;

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}/\ a < x\}$ intervalle ouvert ;

$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}/\ x \leq b\}$ intervalle fermé ;

$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}/\ x < b\}$ intervalle ouvert ;

$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ intervalle ouvert <u>et</u> fermé ;

Théorème 4 Caractérisation des intervalles
Soit $I \subseteq \mathbb{R}$. Alors :

$$I \text{ est un intervalle } \Longleftrightarrow \forall (x, y) \in I^2, \quad x \leq y \Longrightarrow [x, y] \subseteq I$$

Définition 5 Intérieur et extérieur d'un intervalle
Soit I un intervalle. On pose :
– $\overset{\circ}{I} = I$ privé de ses bornes = intérieur de I. C'est un intervalle ouvert.
– $\overline{I} = I$ union ses bornes = adhérence de I. C'est un intervalle fermé.

On a bien évidemment $\mathring{I} \subseteq I \subseteq \overline{I}$. ⚠ Attention : ne pas confondre la notation de l'adhérence avec celle du complémentaire ...

1.1.4 Partie entière

Définition 6 Partie entière
Si $x \in \mathbb{R}$, on admet qu'il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.
On le note $n = \lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$, et on l'appelle la partie entière de x.
Elle est donc caractérisée par : $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
On a aussi : $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.

Exercice 1 Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.

1.2 Les suites réelles

Définition 7 Suite réelle
Une suite réelle est une application $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.
L'ensemble des suites réelles est donc $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, ou $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ou encore $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

<u>Notations</u> : pour $n \in \mathbb{N}$, le réel $u(n)$ est noté u_n.
La suite u est alors notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou (u_n), ou encore $(u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots)$ (comme une famille de réels indexée par $\mathbb{N}$).
⚠ Attention : il ne faut pas confondre le réel u_n et la suite (u_n).

On peut aussi définir les suites complexes $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ mais leur étude n'est pas au programme.

Définition 8 Opérations sur les suites
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

1. Addition. $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$.
2. Multiplication par un réel. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \times (u_n) = (\lambda \times u_n)$.
3. Multiplication. $(u_n) \times (v_n) = (u_n \times v_n)$.

Proposition 9 Règles de calcul
Les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

Définition 10 Suite définie à partir d'un certain rang
Soient $n_0 \in \mathbb{N}$. On appelle suite réelle définie à partir du rang n_0 toute application $u : [\![n_0, +\infty[\![\longrightarrow \mathbb{R}$. Cette suite est notée $(u_n)_{n \geq n_0}$.

***Exemple*:** $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$.

Définition 11 Propriété vraie à partir d'un certain rang
Soit $P(n)$ un prédicat qui dépend de $n \in \mathbb{N}$. On dit que $P(n)$ est vraie à partir d'un certain rang (a.p.c.r.) lorsqu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

1.3 Propriétés des suites réelles

Définition 12 Suites majorée, minorées, bornées

1. On dit que (u_n) est majorée lorsqu'il existe un réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$.
2. On dit que (u_n) est minorée lorsqu'il existe un réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$.
3. On dit que (u_n) est bornée lorsqu'il existe deux réels m et M tel que :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n \leq M$.

Ces notions peuvent être définies à partir d'un certain rang.

Théorème 13 On a :

$$(u_n) \text{ bornée} \iff (|u_n|) \text{ majorée}$$

Définition 14 Suites monotones

1. On dit que la suite (u_n) est croissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$.
2. On dit que la suite (u_n) est décroissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_{n+1}$.
3. On dit que la suite (u_n) est stationnaire lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_{n+1}$.
   Ceci équivaut à ce qu'elle soit à la fois croissante et décroissante.
4. On dit que la suite (u_n) est monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Ces notions peuvent être définies à partir d'un certain rang.
⚠ Attention : en général une suite n'est pas monotone, c'est-à-dire ni croissante et ni décroissante (on verra un exemple plus loin).

Définition 15 Suites strictement monotones

1. On dit que la suite (u_n) est strictement croissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}$.
2. On dit que la suite (u_n) est strictement décroissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > u_{n+1}$.
3. On dit que la suite (u_n) est strictement monotone lorsqu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Ces notions peuvent être définies à partir d'un certain rang. Pour les suites on ne s'intéresse généralement pas à la monotonie stricte, mais seulement à la monotonie au sens large.

Rédaction :

1. On fixe $n \in \mathbb{N}$, et on détermine le signe de $u_{n+1} - u_n$. S'il ne dépend pas de n à partir d'un rang n_0 alors (u_n) est monotone a.p.c.r..
   Plus précisément si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour $n \geq n_0$, alors (u_n) est croissante à partir du rang n_0 ; si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour $n \geq n_0$, alors (u_n) est décroissante à partir du rang n_0.
2. Si $u_n > 0$ a.p.c.r. alors on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 :
   - si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ à partir d'un rang n_0, alors (u_n) est croissante à partir du rang n_0 ;
   - si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ à partir d'un rang n_0, alors (u_n) est décroissante à partir du rang n_0.
3. Si $u_n < 0$ a.p.c.r. alors on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 :
   - si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ à partir d'un rang n_0, alors (u_n) est décroissante à partir du rang n_0 ;
   - si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ à partir d'un rang n_0, alors (u_n) est croissante à partir du rang n_0.

***Exemple* :** Étudier la monotonie de $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ et $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

2 Limite d'une suite

2.1 Suites convergentes - Suites divergentes

Définition 16 Suite convergente
On dit que la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} /\ \forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

On le note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $\lim u_n = \ell$, ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Dans cette définition on peut remplacer $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ par $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
De plus $|u_n - \ell| \leq \varepsilon \iff u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$: donc a.p.c.r. u_n est « aussi proche que l'on veut » de ℓ.
Remarquez que le n_0 qui apparaît dans la définition dépend de ε. Parfois on le note $n_0(\varepsilon)$ pour ne pas perdre de vue cette dépendance.

***Exemple* :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

⚠ Attention : la limite ne doit pas dépendre de n. Par exemple on ne peut pas dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{n}$, cela n'a aucun sens !

Théorème 17 Unicité de la limite
Si une suite converge, alors sa limite est unique.

Définition 18 Suite divergente
Lorsqu'une suite n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

Définition 19 Limite infinie

1. On dit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ lorsque :
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0,\ u_n \geq A$$
On le note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim u_n = +\infty$, ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. On dit que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$ lorsque :
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0,\ u_n \leq A$$
On le note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $\lim u_n = -\infty$, ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Dans cette définition on peut remplacer $u_n \geq A$ (resp. $u_n \leq A$) par $u_n > A$ (resp. $u_n < A$). Remarquez que le n_0 qui apparaît dans la définition dépend de A. Parfois on le note $n_0(A)$ pour ne pas perdre de vue cette dépendance.

Exemple **:** $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

Proposition 20 Lien entre convergence et divergence
Une suite qui diverge vers $\pm\infty$ ne converge pas.

Définition 21 Divergence de première ou seconde espèce
Une suite qui diverge vers $\pm\infty$ est dite divergente de première espèce.
Une suite qui n'a pas de limite est dite divergente de seconde espèce.

⚠ Attention : la plupart des suites sont divergentes de seconde espèce.

Exemple **:** La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente de seconde espèce (nous en verrons la preuve plus tard).

Théorème 22 Premiers termes et nature d'une suite
En modifiant un nombre fini de termes d'une suite (u_n), on ne change pas sa nature (ie le fait qu'elle soit convergente ou divergente de première ou seconde espèce). Dans le cas où la suite est convergente, on ne modifie pas non plus la valeur de sa limite.

2.2 Propriétés des suites convergentes

Lemme 23 Une suite bornée a.p.c.r. est bornée à partir du rang 0.

Théorème 24 Convergence et bornitude
Une suite convergente est bornée.

⚠ ATTENTION ! La réciproque est fausse : une suite bornée n'est en général pas convergente, comme le montre l'exemple de la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Par contre, on verra qu'une suite **monotone et bornée** converge.

Théorème 25 Limite et signe
Si une suite (u_n) converge vers un réel $\ell > 0$ (resp. $\ell < 0$), alors $u_n > 0$ a.p.c.r. (resp. $u_n < 0$ a.p.c.r.).

Proposition 26 Quelques résultats techniques

1. (u_n) converge vers $\ell \iff (u_n - \ell)$ converge vers 0 ;
2. (u_n) converge vers $0 \iff \left(|u_n|\right)$ converge vers 0
   donc (u_n) converge vers $\ell \iff \left(|u_n - \ell|\right)$ converge vers 0

Théorème 27 Passage à la limite dans une inégalité
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \leq v_n$ a.p.c.r.. On suppose que (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers L.
Alors $\ell \leq L$.

⚠ Attention : $\forall n \geq n_0,\ u_n < v_n$ ne donne pas $\lim u_n < \lim v_n$.
Contre-exemple : $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{2}{n}$.

Corollaire 28 Localisation de la limite
Si (u_n) est à valeurs dans un intervalle I d'extrémités a et b a.p.c.r., et si (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell \in \overline{I} = [a, b]$.

2.3 L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$

On pose $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$.

On dit que $\lim u_n$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ lorsque (u_n) a une limite (finie ou infinie), ie lorsque (u_n) est convergente ou divergente de première espèce.

Définition 29 Règles de calcul

1. $\forall x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$
   ⚠ $(-\infty) + (+\infty)$ n'est pas défini ;
   $\forall x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x}{+\infty} = \dfrac{x}{-\infty} = 0$ et donc $\dfrac{0}{\pm\infty} = 0$
   ⚠ $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ n'est pas défini.
3. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{\pm\infty}{x} = \pm\infty$
   ⚠ $\dfrac{\pm\infty}{0}$ n'est pas défini ;
   $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}^*$, $\dfrac{x}{0^+} = \begin{cases} +\infty \text{ si } x > 0 \\ -\infty \text{ si } x < 0 \end{cases}$
   $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}^*$, $\dfrac{x}{0^-} = \begin{cases} -\infty \text{ si } x > 0 \\ +\infty \text{ si } x < 0 \end{cases}$
   ⚠ $\dfrac{0}{0^\pm}$ et $\dfrac{0}{0}$ ne sont pas définis.
4. $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}^*$, $x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = \begin{cases} +\infty \text{ si } x > 0 \\ -\infty \text{ si } x < 0 \end{cases}$
   $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}^*$, $x \times (-\infty) = (-\infty) \times x = \begin{cases} -\infty \text{ si } x > 0 \\ +\infty \text{ si } x < 0 \end{cases}$
   ⚠ $0 \times \pm\infty$ n'est pas défini.

2.4 Théorèmes généraux sur les limites

Dans le théorème suivant, on utilise les propriétés de $\overline{R}$ définie précédemment.

Théorème 30 Limites et opérations algébriques
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $\lim u_n \overset{\text{existe}}{=} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lim v_n \overset{\text{existe}}{=} L \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Valeur absolue. $\lim |u_n| \overset{\text{existe}}{=} |\ell|$
2. Addition. $\lim(u_n + v_n) \overset{\text{existe}}{=} \ell + L$, ⚠ sauf la forme indéterminée $(+\infty) + (-\infty)$.
3. Multiplication par un réel. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\lim \alpha \times u_n = \alpha \times \lim u_n$,
   ⚠ sauf la forme indéterminée $0 \times \pm\infty$.
4. Multiplication. $\lim(u_n \times v_n) = \ell \times L$, ⚠ sauf la forme indéterminée $0 \times \pm\infty$.
5. Quotient. Si $L \neq 0$, alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est définie a.p.c.r. et $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{L}$
   ⚠ sauf les formes indéterminées $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0^\pm}$ et $\frac{\infty}{0}$.

⚠ ATTENTION : en général $\lim(u_n - v_n) = 0$ ne donne pas $\lim u_n = \lim v_n$ ... Il faut en effet que $\lim u_n$ et $\lim v_n$ existent !

⚠ ATTENTION : ce théorème ne dit pas que $\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = \left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right)^{\lim_{n\to+\infty} b_n}$. Par exemple, on verra que $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \mathrm{e} \neq 1$.

Théorème 31 Théorème d'existence de la limite par encadrement

1. Version limite finie.
   Si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites réelles telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ a.p.c.r., et (u_n) et (w_n) convergent vers la limite ℓ.
   Alors (v_n) converge vers ℓ.
2. Version limite infinie.
   Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles telles que $u_n \leq v_n$ a.p.c.r., et (u_n) et (u_n) diverge vers $+\infty$ (resp. (v_n) diverge vers $-\infty$).
   Alors (v_n) diverge vers $+\infty$ (resp. (u_n) diverge vers $-\infty$).

⚠ Attention : ne pas confondre avec le théorème de passage à la limite dans une inégalité. Dans le théorème d'existence de la limite par encadrement on montre l'existence de la limite de (v_n), alors que dans l'autre théorème c'est une des hypothèses de départ.

***Exemple* :** On peut montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ ou que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}} = 0$.

Corollaire 32 Preuve d'une convergence par encadrement
Si on a deux suites réelles (u_n) et (α_n) telles que $|u_n - \ell| \leq \alpha_n$ a.p.c.r., et $\lim \alpha_n = 0$ alors $\lim u_n \overset{\text{existe}}{=} = \ell$.

Théorème 33 Composition d'une suite par une fonction
Soit (u_n) une suite réelle de limite $\boxed{\ell} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to \boxed{\ell}} f(x) \overset{\text{existe}}{=} \boxed{a} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) \overset{\text{existe}}{=} \boxed{a}$.

Exemple **:** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin(x)$ n'existe pas.

2.5 Suites d'indices pairs et impairs

Définition 34 Suite extraite
Soit (u_n) une suite réelle. On appelle suite extraite de (u_n) toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ application strictement croissante.

Exemple **:** (u_{n-1}), (u_{n+1}), (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites extraites de (u_n). Mais $(u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$ et $(u_{\lfloor 1-\cos(n) \rfloor})$ n'en sont pas.

Théorème 35 Limite des suites extraites
Si $\lim u_n \overset{\text{existe}}{=} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, on a $\lim u_{\varphi(n)} \overset{\text{existe}}{=} \ell$.

On a une réciproque dans le cas de suites extraites recouvrantes, ie que l'union des suites extraites redonnent toute la suite de départ. Le seul cas au programme est celui des suites extraites d'indices pairs et impairs.

Théorème 36 Théorème des suites extraites recouvrantes
Si (u_n) est une suite réelle et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n \to +\infty} u_{2n} = \ell \ \boxed{et} \ \lim_{n \to +\infty} u_{2n+1} = \ell$$

On peut aussi montrer aisément (par simple décalage d'indice) que : $\lim u_n = \ell \iff \lim u_{n-1} = \ell \iff \lim u_{n+1} = \ell$.

Exemple **:** Montrer que la suite $\big((-1)^n\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente de seconde espèce (ie n'a pas de limite).

2.6 Bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$

Définition 37 Partie majorée, minorée, bornée
On se donne une partie A de $\mathbb{R}$, non vide.

1. Un réel M est un majorant de A lorsque : $\forall x \in A,\ x \leq M$.
   Si A admet au moins un majorant, on dit que A est une partie majorée.
2. Un réel m est un minorant de A lorsque : $\forall x \in A,\ m \leq x$.
   Si A admet au moins un minorant, on dit que A est une partie minorée.
3. On dit que A est bornée lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire qu'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in A,\ m \leq x \leq M$.

Il est clair qu'un partie majorée (resp. minorée) admet une infinité de majorants (resp. de minorants).

Proposition 38 Partie bornée et valeur absolue
Si A est une partie de $\mathbb{R}$, non vide : A est bornée $\iff \exists M \in \mathbb{R} /\ \forall x \in A,\ |x| \leq M$.

On peut reformuler ce résultat ainsi : A est bornée si et seulement si $|A|$ est majorée.

Définition 39 Maximum et minimum
Soit A est une partie de $\mathbb{R}$, non vide.

1. Un réel b est un maximum de A lorsque $b \in A$ $\boxed{\text{et}}$ b est un majorant de A : $\forall x \in A$, $x \leq b$. S'il existe, le maximum est unique et est noté : $b = \max A$. On l'appelle aussi le plus grand élément de A.
2. Un réel a est un minimum de A lorsque $a \in A$ $\boxed{\text{et}}$ b est un minorant de A : $\forall x \in A$, $a \leq x$. S'il existe, le minimum est unique et est noté : $a = \min A$.On l'appelle aussi le plus petit élément de A.

Définition 40 Bornes supérieure et inférieure
Soit A est une partie de $\mathbb{R}$, non vide.

1. Si l'ensemble des majorants de A, noté $\mathscr{E}_A = \{M \in \mathbb{R} /\ \forall x \in A,\ x \leq M\}$, est non vide et admet un plus petit élément b, alors b est appelé borne supérieure de A, notée $\sup A$. $\sup A$ est donc le plus petit majorant de A, et en particulier A est majorée par $\sup A$: $\forall x \in A,\ x \leq \sup A$.
2. Si l'ensemble des minorants de A, noté $\mathscr{F}_A = \{m \in \mathbb{R} /\ \forall x \in A,\ m \leq x\}$, est non vide et admet un plus grand élément a, alors a est appelé borne inférieure de A, notée $\inf A$. $\inf A$ est donc le plus grand minorant de A, et en particulier A est minorée par $\inf A$: $\forall x \in A,\ \inf A \leq x$.

Proposition 41 Lien entre maximum et borne supérieure

1. Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et si A admet un maximum, alors A admet une borne supérieure et $\sup A = \max A$.
2. Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et si A admet un minimum, alors A admet une borne inférieure et $\inf A = \min A$.

⚠ Attention : par contre une partie A peut avoir une borne supérieure sans avoir de maximum !

Théorème 42 Caractérisation de la borne supérieure
Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Soit $b \in \mathbb{R}$. Alors :
$$b = \sup A \iff \begin{cases} b \text{ est un majorant de } A; \\ \text{il existe une suite } (x_n) \text{ à valeurs dans } A \text{ et convergente vers } b. \end{cases}$$
2. Soit $a \in \mathbb{R}$.
Alors $a = \inf A \iff \begin{cases} b \text{ est un minorant de } A; \\ \text{il existe une suite } (x_n) \text{ à valeurs dans } A \text{ et convergente vers } a. \end{cases}$

***Exemple* :** Étudier $\max A$ et $\sup A$ pour $A = [0,1]$ et $A = [0,1[$.

Théorème 43 Théorème fondamental de la borne supérieure

1. Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, alors A admet une borne supérieure.
2. Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée, alors A admet une borne inférieure.

Proposition 44

1. Si A et B sont deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subseteq B$ et B est majorée, alors A est majorée et $\sup A \leq \sup B$.
2. Si A et B sont deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subseteq B$ et B est minorée, alors A est minorée et $\inf B \leq \inf A$.

2.7 Propriétés des suites monotones

Nous allons donner deux théorèmes sur les suites monotones qui permettent de prouver la convergence d'une suite sans savoir calculer sa limite

Théorème 45 Théorème de la limite monotone
Soit (u_n) une suite réelle.

1. On suppose (u_n) croissante :
   • si (u_n) est majorée, alors (u_n) est convergente et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \lim u_n$;
   • si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

2. On suppose (u_n) décroissante :
   • si (u_n) est minorée, alors (u_n) est convergente et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim u_n \leq u_n$;
   • si (u_n) n'est pas minorée, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

Retenons qu'**une suite monotone a toujours une limite** (finie ou infinie).

Définition 46 Suites adjacentes
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit qu'elles sont adjacentes lorsque :
(i) (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante a.p.c.r. ;
(ii) $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Sous les conditions (i) et (ii), on a $u_n \leq v_n$ a.p.c.r..

Théorème 47 Théorème des suites adjacentes
Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors elles convergent vers une même limite.

***Exemple* : Tout réel est limite de deux suites adjacentes de rationnels.**
Si $x \in \mathbb{R}$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $v_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$.
Ces deux suites sont à valeurs dans $\mathbb{Q}$, sont adjacentes, et convergent vers x.

3 Exemples de suites

3.1 Suites arithmétiques

Définition 48 Suite arithmétique
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Proposition 49 Formules autour des suites arithmétiques

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$; Plus généralement : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ u_n = u_p + (n-p)r$.
2. Si $r = 0$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationnaire égale à u_0.
   Si $r > 0$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (strictement), divergente vers $+\infty$.
   Si $r < 0$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (strictement), divergente vers $-\infty$.
3. Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq p$:

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\frac{u_p+u_n}{2} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme } + \text{ dernier terme}}{2}$$

Exemple **:** $u_0 = 0$ et $r = 1$ donnent $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n$. On retrouve les formules :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{n} k = \frac{(n-p+1)(n+p)}{2}$$

3.2 Suites géométriques

Définition 50 Suite géométrique
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n$.

Proposition 51 Formules autour des suites géométriques

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n$; Plus généralement : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ u_n = u_p q^{n-p}$ (si $n < p$ il faut supposer $q \neq 0$).
2. Si $r = 0$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationnaire égale à 0 à partir du rang 1.
   Si $q > 0$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
   Si $q < 0$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.
3. $$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \text{ ie } |q| < 1 \end{cases}$$
   et $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas si $q \leq -1$.
4. Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq p$, on a pour $q \neq 1$:

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_0 q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

   et pour $q = 1$:

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)u_0 = \text{nombre de termes} \times \text{premier terme}$$

⚠ ATTENTION ! Si (x_n) est une suite à valeurs dans $]-1,1[$, on ne peut pas dire que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)^n = 0$. Par exemple, nous verrons à la fin du chapitre que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

***Exemple* :** Pour la suite $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$, vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0^{(2^n)}$. En déduire la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 52 Suite arithmético-géométrique
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmético-géométrique de paramètres $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ lorsque :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$.

Remarquons que si $a = 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison b, et si $b = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a. Dans la suite, on supposera que $a \neq 1$.

On va calculer le terme général u_n en fonction de n, mais cette fois la formule est trop compliquée pour être apprise, il faut donc uniquement retenir la méthode utilisée.

Méthode : on commence par déterminer le point fixe $\ell \in \mathbb{R}$ associé à la relation de récurrence. Il vérifie $\ell = a\ell + b$, donc $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.

Ensuite on définit une suite auxiliaire $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = u_n - \ell$. Cette suite est alors géométrique de raison a, en effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = u_{n+1} - \ell = au_n + b - \ell = a(x_n + \ell) + b - \ell = ax_n + \underbrace{a\ell + b - \ell}_{=0} = ax_n$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = x_0 a^n = (u_0 - \ell)a^n$ puis $u_n = x_n + l = \left(u_0 - \dfrac{b}{1-a}\right)a^n + \dfrac{b}{1-a}$.

On peut alors très facilement en déduire la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 53 Suite récurrente linéaire d'ordre 2
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite récurrente linéaire d'ordre 2 de paramètres $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ lorsque :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Remarquons que si $b = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.

Définition 54 Équation caractéristique
On appelle équation caractéristique associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
$z^2 = az + b$.

Théorème 55 Calcul du terme général u_n en fonction de n
On note $\Delta = a^2 + 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique (E).

1. $\boxed{\text{Si } \Delta > 0}$ (E) a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Il existe alors un unique couple de réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
2. $\boxed{\text{Si } \Delta = 0}$ (E) a une seule racine réelle r_0. Il existe alors un unique couple de réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda n + \mu) r_0^n$.
3. $\boxed{\text{Si } \Delta < 0}$ (E) a deux racines complexes pures conjuguées $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-i\theta}$. Il existe alors un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \rho^n \big(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\big)$.

⚠ Dans le cas d'une suite à valeurs **complexes**, on obtient :
$\boxed{\text{Si } \Delta \neq 0}$ (E) a deux racines **complexes** distinctes r_1 et r_2. Il existe alors un unique couple de **complexes** $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
$\boxed{\text{Si } \Delta = 0}$ (E) a une seule racine réelle r_0. Il existe alors un unique couple de **complexes** $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda n + \mu) r_0^n$.

⚠ Le cas d'une suite **réelle** pour laquelle $\Delta < 0$ est un cas particulier du cas d'une suite **complexe** pour laquelle $\Delta \neq 0$. Dans ce cas les deux racines r_1 et r_2 sont conjuguées et on peut donc trouver $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha r_1^n + \beta \overline{r_1}^n$. Nous allons voir comment retrouver la formule du théorème.
On note $r_1 = \rho e^{i\theta}$ sous forme trigonométrique et puisque la suite réelle on a $u_n = \overline{u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or :

$$u_n = \overline{u_n} \iff \alpha\rho^n e^{in\theta} + \beta\rho^n e^{-in\theta} = \overline{\alpha}\rho^n e^{-in\theta} + \overline{\beta}\rho^n e^{in\theta} \overset{\rho\neq 0}{\iff} \alpha e^{in\theta} + \beta e^{-in\theta} = \overline{\alpha} e^{-in\theta} + \overline{\beta} e^{in\theta}$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut prendre $n = 0$ et $n = 1$:

$$\alpha + \beta = \overline{\alpha} + \overline{\beta}\ (1) \quad \text{et} \quad \alpha e^{i\theta} + \beta e^{-i\theta} = \overline{\alpha} e^{-i\theta} + \overline{\beta} e^{i\theta}\ (2)$$

Alors $e^{i\theta} \times (1) - (2)$ donne $2i\beta \sin(\theta) = 2i\overline{\alpha}\sin(\theta)$, puis $\beta = \overline{\alpha}$ car $\theta \neq 0\ [\pi]$ (en effet r_1 et r_2 sont des complexes purs). On a donc en notant $\alpha_1 = \mathcal{Re}(\alpha)$ et
$al_2 = \mathcal{Im}(\alpha)$:

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n &= \rho^n \times \left(\alpha e^{in\theta} + \overline{\alpha} e^{-in\theta}\right) \\
&= 2\rho^n \times \mathcal{Re}\left(\alpha e^{in\theta}\right) \\
&= 2\rho^n \times \mathcal{Re}\Big[(\alpha_1 + i\alpha_2)\big(\cos(n\theta) + \sin(n\theta)\big)\Big] \\
&= \rho^n \times \Big(\underbrace{2\alpha_1}_{=\lambda\in\mathbb{R}} \cos(n\theta) + \underbrace{(-2\alpha_2)}_{=\mu\in\mathbb{R}} \sin(n\theta)\Big)
\end{aligned}$$

ce qui est bien de la forme attendue.

4 Comparaison des suites

4.1 Notations de Landau

Définition 56 Suite négligeable devant une autre suite
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$;
(ii) $u_n = \varepsilon_n v_n$ à partir d'un certain rang.
On le notera $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, et on dira que u_n est un « petit o » de v_n.

On dit parfois aussi que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **prépondérante** devant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

⚠ ATTENTION : la notation $o(v_n)$ seule n'a pas de sens !
Elle ne désigne pas une suite fixée, mais n'importe quelle suite négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
En particulier : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ ne donnent pas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (comme on peut le vérifier avec le contre-exemple $u_n = n$, $v_n = n^2$ et $w_n = n^3$).

Lorsque la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, on a un critère plus simple donné dans le théorème suivant.

Théorème 57 Critère de négligeabilité
Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, on a :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

Ce résultat est utilisé en pratique pour prouver que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. Mais certaines suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'annule à partir de n'importe quel rang (prendre $v_n = 1 + (-1)^n$), donc il faut aussi apprendre à manipuler la définition générale de la négligeabilité.

Proposition 58 Règles de calcul pour « le petit o »
On se donne des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Transitivité. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ donnent $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.
2. Produit. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$ donnent $u_n \times a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n \times b_n)$.
3. Somme. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ donnent $u_n + a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.
4. Multiplication par une constante. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ donne $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \times u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
5. Multiplication par une suite. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ donne $u_n \times w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n \times w_n)$.

Définition 59 Suite dominée par une autre suite
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
(i) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ;
(ii) $u_n = b_n v_n$ à partir d'un certain rang.
On le notera $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$, et on dira que u_n est un « grand o » de v_n.

Les remarques sur la notation $o(v_n)$ sont encore valables pour la notation $\mathcal{O}(v_n)$.

Lorsque la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, on a encore une fois un critère plus simple.

Théorème 60 Critère de domination
Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang n_0, on a :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n) \Longleftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq n_0} \quad \text{est bornée}$$

Ce résultat est utilisé en pratique pour prouver que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$.

Proposition 61 Lien entre « le petit o » et « le grand o »
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$.

4.2 Suites équivalentes

Définition 62 Suite équivalente à une autre suite
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$;
(ii) $u_n = \alpha_n v_n$ à partir d'un certain rang.
On le notera $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Proposition 63 Propriétés de la relation $\sim$
On se donne trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Transitivité. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ donnent $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.
2. Symétrie. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
3. Réflexivité. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

La propriété de symétrie donne que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: on peut donc aussi dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes.

⚠ ATTENTION : ne jamais écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$. Cela n'a aucun sens, sauf dans le cas très particulier où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire égale à 0 à partir d'un certain rang.

Lorsque la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, on a encore une fois un critère plus simple.

Théorème 64 Critère d'équivalence
Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang n_0, on a :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

Ce résultat est utilisé en pratique pour prouver que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Théorème 65 Lien entre la relation ~ et « le petit o »
Pour deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$$

On en déduit une méthode simple pour trouver une suite équivalente à une somme.

Corollaire 66 Équivalent d'une somme
Pour deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

Théorème 67 Composition d'un « petit o » par une suite équivalente
Pour trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(a_n)$.

Une suite équivalente renseigne sur le signe.

Théorème 68 Équivalent et signe
Pour deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

1. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
2. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même signe au sens strcit à partir d'un certain rang.

Une suite équivalente permet de calculer une limite.

Théorème 69 Équivalent et limite
Pour deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

1. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \overset{\text{existe}}{=} \ell$.
2. On a une réciproque dans le cas particulier $\ell \in \mathbb{R}^*$: si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.

⚠ ATTENTION ! Par contre si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, on ne peut pas en déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Prendre par exemple $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n^2}$.

On peut effectuer les opérations suivantes sur les suites équivalentes.

Proposition 70 Règles de calcul pour la relation $\sim$
On se donne des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Valeur absolue. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ donne $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$.
2. Produit. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ donnent $u_n \times a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \times b_n$.
3. Puissance. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ donne $u_n^p \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^p$.
   Plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$ (à condition que ces suites soient définies).
4. Inverse. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{v_n}$.
5. Quotient. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{a_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{b_n}{v_n}$.

⚠ ATTENTION : par contre il n'est pas possible de faire les opérations suivantes.

• Somme

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ ne donnent pas $u_n + a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n + b_n$.
On peut considérer le contre-exemple suivant : $u_n = n^3 + n$ et $a_n = -n^3 + n^2$.

• Composition par une fonction

Si f est une fonction, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ne donne pas $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(v_n)$.
En particulier $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ne donne pas $\mathrm{e}^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{v_n}$, et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ne donne pas $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.
On peut considérer les contre-exemples suivantes : $u_n = n^2 + n$, $v_n = n^2$, $f(x) = \mathrm{e}^x$ puis $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, $v_n = 1$, $f(x) = \ln(x)$.
Noter aussi que $n \underset{n\to+\infty}{\sim} n+1$, mais en général on n'a pas $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n+1}$, bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$. Considérer par exemple $u_n = \mathrm{e}^{-n}$.

• Puissance dépendante de n

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ne donne pas $u_n^{\alpha_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^{\alpha_n}$.

On verra à la fin du paragraphe que $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$. On peut en déduire le contre-exemple $u_n = 1+\frac{1}{n}$ et $\alpha_n = n$.

4.3 Comparaison des suites usuelles

On rappelle les limites usuelles suivantes :

- $\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$.
- $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$
- $\lim_{n\to+\infty} (\ln n)^\beta = \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta > 0 \\ 1 & \text{si } \beta = 0 \\ 0 & \text{si } \beta < 0 \end{cases}$
- $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\gamma n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \gamma > 0 \\ 1 & \text{si } \gamma = 0 \\ 0 & \text{si } \gamma < 0 \end{cases}$
- $\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < a < 1 \end{cases}$

Théorème 71 Équivalent et polynômes
Si P est une fonction polynôme de la forme $P(x) = a_q x^q + a_{q+1}x^{q+1} + \cdots + a_p x^p$, où $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ avec $q \leq p$, $a_q \neq 0$ et $a_p \neq 0$.
Alors $P(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} a_p n^p$ (plus haut degré), et $P\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_q}{n^q}$ (plus bas degré).

Théorème 72 Comparaison de n^α, $n!$ et a^n
On se donne trois réels α, β et a.

1. Si $\alpha < \beta$ alors $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^\beta\right)$, ou encore $\frac{1}{n^\beta} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.
2. $a^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$ et $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$
   Et si $a > 1$: $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left(a^n\right)$.
3. $n! = \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^n\right)$

De manière mnémotechnique, on peut retenir que si $a > 1$: $n^\alpha \ll a^n \ll n! \ll n^n$

Théorème 73 Croissances comparées
On se donne trois réels α, β et γ.

1. $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$
   Et plus généralement, pour $\alpha > 0$: $(\ln n)^\beta \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^\alpha\right)$
2. $n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^n\right)$
   Et plus généralement, pour $\gamma > 0$: $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{\gamma n}\right)$
   De manière équivalente $\mathrm{e}^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$
   et plus généralement, pour $\gamma > 0$: $\mathrm{e}^{-\gamma n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$
3. Si $\gamma > 0$: $(\ln n)^\beta \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{\gamma n}\right)$.

Démonstration :
Pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ on utilise l'inégalité : $\forall x \geq 1$, $0 \leq \ln(x) \leq \sqrt{x}$.
Pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^n} = 0$ on utilise l'inégalité : $\forall x \geq 1$, $\mathrm{e}^x \geq x^2$.

CQFD □

De manière mnémotechnique, on peut retenir que si $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$: $(\ln n)^\beta \ll n^\alpha \ll \mathrm{e}^{\gamma n}$

Théorème 74 Équivalents usuels
Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers 0.

1. $\ln(1+x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$
2. $\tan(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$
3. $\sin(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$
4. $\cos(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et $1-\cos(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x_n^2}{2}$
5. $\mathrm{e}^{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et $\mathrm{e}^{x_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$
6. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$: $(1+x_n)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et $(1+x_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha x_n$

Ces résultats sont à connaître par coeur !

***Exemple* :** On est maintenant en mesure de démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.

Terminons par un résultat de non existence de limite.

Théorème 75 Limite de $\cos n$, $\sin n$ et $\tan n$
Les suites $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\tan n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'ont pas de limite lorsque $n \to +\infty$ (elles sont divergentes de seconde espèce).

5 Exercices

Exercice 2 Montrer que :

1. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$
2. $\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2,\ \sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}$

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $-2x^2+7x-5 \leqslant 0$
2. $(x^2+2x+1)^2 < 16$
3. $\frac{3x^2+x+1}{x^2-3x-10} > 0$
4. $(2x+1)(5-x) < (5-x)(x+4)$
5. $\frac{x}{x-2} \leqslant \frac{6}{x-1}$
6. $\frac{4x^2-15x-3}{2x^2-5x-3} \geqslant 1$
7. $8x-18\sqrt{x}-11 \geqslant 0$
8. $6 \leqslant 2x^2+3x-3 \leqslant 17$
9. $\sqrt{x+1} < 2x-3$
10. $\sqrt{x+1} \geqslant \sqrt{4x-1}$
11. $x-1-\sqrt{2x^2+1} \leqslant 0$
12. $|2x-3| = 1$
13. $|4x+5| = |-x+3|$
14. $|7x-3| \geqslant \frac{1}{2}$
15. $|x-3|+|x^2-3x+2| \geqslant 2$
16. $|x-4| \leqslant |2x+1|$
17. $|x^3+x^2-1|+|x-7|+1 \leqslant 0$
18. $2|x-1| \geqslant 3|1-x|$

Exercice 4 Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Peut-on relier $\lfloor x+y \rfloor$, $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor y \rfloor$?
2. Comparer $\lfloor -x \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor$. Calculer $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.

Exercice 5 Soient A et B deux parties non vides et bornées.

1. Vérifier que $\sup(A\cup B)$ et $\inf(A\cup B)$ existent et les exprimer en fonction de $\sup A$, $\sup B$, $\inf A$ et $\inf B$.
2. On suppose que $A\cap B \neq \emptyset$. Mêmes questions avec $\sup(A\cap B)$ et $\inf(A\cap B)$.

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n^2} E(\sqrt{k})$. Après avoir remarqué que :
$S_n = \sum_{k=1}^{3} E(\sqrt{k}) + \sum_{k=4}^{8} E(\sqrt{k}) + \cdots + \sum_{k=(n-1)^2}^{n^2-1} E(\sqrt{k}) + n$, donner une expression simple de S_n.

Exercice 7

1. Vérifier que : $\forall x > 0,\ x+\frac{1}{x} \geqslant 2$.
2. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs. Montrer que :

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\times\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) = n + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}\right)$$

et en déduire que :

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\times\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$$

Exercice 8 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

1. On suppose que $\lim u_n = +\infty$ et que (v_n) est bornée. Montrer que (u_n+v_n) diverge vers $+\infty$.
2. On suppose que $\lim u_n = 0$ et que (v_n) est bornée. Montrer que $(u_n v_n)$ converge vers 0.

3. On suppose que $\lim u_n = +\infty$. Montrer que (u_n) n'est pas bornée.
4. On suppose que (u_n) et (v_n) sont bornées. Montrer que $(u_n + v_n)$ et $(u_n v_n)$ sont bornées.
5. On suppose que (u_n) est bornée et ne s'annule pas. Peut-on dire que la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ est bornée ?

Exercice 9 (Principe de comparaison logarithmique) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose qu'il existe un réel $k \in [0,1[$ et un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiants : $\forall n \geqslant n_0$, $|u_{n+1}| \leqslant k|u_n|$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. On suppose que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \overset{\text{existe}}{=} \ell$, avec $0 \leqslant \ell < 1$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 10 (Convergence en moyenne de Césaro) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 11 Étudier la monotonie des suites définies par :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} - n$ 2. $u_n = \frac{n!}{2^{n+1}}$ 3. $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$ 4. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1}$

Exercice 12 Etudier la limite des suites définies par :

1. $u_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ 2. $v_n = \frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$ 3. $w_n = n^2 - n\cos n + 2$ 4. $s_n = \frac{2^n+n}{2^n}$
5. $t_n = n^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \sin(n!)$ 6. $x_n = \frac{n+(-1)^n}{n-\ln(n^3)}$ 7. $y_n = \frac{\alpha^n}{n}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 13 (Limite par encadrement)

1. Etudier la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^3 + k^2}$$

2. (a) Vérifier que : $\forall x > 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
   (b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.
3. Etudier la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par : $u_n = \dfrac{\left\lfloor \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \right\rfloor}{\left\lfloor \left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \right\rfloor}$.

Exercice 14 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2. En déduire la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 15 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair. En déduire la convergence de la suite $\left(\sin\left[(3+\sqrt{5})^n\pi\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 16

1. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que l'équation : $x^n + x - 1 = 0$, admet une unique solution $x > 0$, notée x_n.
2. Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée par 1.
3. Étudier la monotonie de $(x_n)_{n\geqslant 1}$.
4. Montrer qu'il est impossible que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite $l < 1$.
5. Conclure que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Exercice 17 (Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$)
Soit f la fonction définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.
2. Étudier complètement la fonction f et montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution réelle α.
3. Représenter sur le même dessin l'allure de son graphe ainsi que les premiers termes de la suite (u_n). Que peut-on conjecturer ?
4. Étudier la suite (u_n) dans les cas $u_0 > \alpha$, $u_0 < \alpha$ et $u_0 = \alpha$.

Exercice 18 (Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$)
On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$.

1. Faire l'étude complète de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$. On déterminera aussi ses éventuels points fixes.
2. Représenter sur le même dessin l'allure de son graphe ainsi que les premiers termes de la suite (u_n). Que peut-on conjecturer ?
3. On considère les suites extraites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Étudier leur monotonie.
4. Déterminer leur éventuelle limite.
5. Conclure sur la limite de (u_n).

Exercice 19 (Suites récurrentes d'ordre 1)
Étudier les suites $(u_n)_n$ définies par :

1. $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$
2. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1+u_n^2\right)$
3. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{\sin u_n}{n+1}$ (Attention, il y a un piège !)
4. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = e^{u_n}$
5. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$

Exercice 20 (Suites du type $u_{n+1} = f_n(u_n)$ où f_n dépend de n)
On pose : $u_1 = 0$ et $\forall n \geqslant 2$, $(n+1)^2 u_n = (n-1)u_{n-1} - n$.

1. Calculer les 4 premiers termes de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$: $-1 \leq u_n \leq 1$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 21 (Suites récurrentes couplées)

Soient $0 < b < a$. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases}$$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) sont bien définies et qu'elles sont strictement positives.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n < u_n$.
3. Établir que (v_n) est croissante et (u_n) est décroissante.
4. (a) Vérifiez que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} - v_{n+1} < \frac{1}{2}(u_n - v_n)$
   (b) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
5. Déterminer la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 22 (Changements de suite)

1. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n - 2}{u_n + 2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $u_n > 1$, pour $n \geq 3$. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$, est bien définie.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   (c) Donner u_n en fonction de n et calculer $\lim u_n$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1}$.
   (a) Montrer que cette suite est bien définie.
   (b) On définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $v_n = \frac{1}{u_n}$. Montrer qu'elle est bien définie et donner une relation de récurrence entre v_{n+1} et v_n.
   (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n, puis la nature de (u_n) et son éventuelle limite.

Exercice 23 (Calcul de u_n en fonction de n)

Déterminer en fonction de n le terme u_n des suites réelles suivantes :

1. $u_8 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - 3$
2. $u_5 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2}u_n$
3. $u_{11} = 30$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$
4. $u_4 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n + 2$
5. $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mathrm{e}\sqrt{u_n}$
6. $u_{10} = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n$
7. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (-1)^n u_n$
8. $u_0 = 1,\ u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 2u_n + 3u_{n-1}$
9. $u_0 = 1,\ u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$
10. $u_0 = 1,\ u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$
11. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 2u_{n+1} + 5u_n = 0$
12. $u_0 = 1,\ u_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2,\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$
13. $u_0 = 1,\ u_1 = \mathrm{e}^4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} \times (u_n)^4 = (u_{n+1})^4$
14. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = nu_{n-1} + n!$

Exercice 24 (Calculs d'équivalents)

Donner un équivalent simple et la limite éventuelle de chacune des suites (u_n) définies par :

1. $u_n = n^2 - 2n$
2. $u_n = \sqrt{n} + (\ln(n))^{12} + \sin(n)$
3. $u_n = 2^n + n^2$
4. $u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$
5. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
6. $u_n = \sin\left(\dfrac{n+1}{n^2}\right)$
7. $u_n = \dfrac{\sin \frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$
8. $u_n = \dfrac{\left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \cos \frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n^2}} - 1}$
9. $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$
10. $u_n = \ln(n+1) + \ln(n)$
11. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+1}{n(n+1)}\right)$

Exercice 25 (γ la constante d'Euler)

On pose pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\phi(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) - \ln(x+1) \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1).$$

1. Étudier le signe des fonctions ϕ et ψ sur $]0, +\infty[$.
2. En déduire la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ définies par : $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$.
3. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 26 (Obtention d'un équivalent par encadrement)

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$.
2. En déduire la limite et un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 27 (Équivalent d'une suite définie implicitement)

Pour $n \geqslant 1$, on note (E_n) l'équation : $x - \ln(x) - n = 0$.

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution supérieure ou égale à 1, notée x_n.
2. Déterminer la limite de $(x_n)_{n\geqslant 1}$.
3. Donner un équivalent de x_n quand $n \to +\infty$.

Chapitre 5

Calcul matriciel et systèmes linéaires

Dans tout le chapitre K désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 L'espace $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$

1.1 Définitions

On fixe n et p deux entiers naturels non nuls.

Définition 1 Matrice
On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute application :

$$A: \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i,j) & \longmapsto & A[i,j] \end{array}$$

Le scalaire $A[i,j]$ est appelé coefficient de A sur la ligne i et la colonne j.
Il est aussi noté a_{ij}, et dans ce cas la matrice A est notée $((a_{ij}))_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$.
A est représentée sous forme d'un tableau à n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & \text{colonne } j & & \\ & & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{ligne } i \\ \\ \\ \end{array}$$

On dit aussi que A est un matrice de taille $n \times p$ ou (n,p).

<u>**Notation**</u> **:** L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.
Remarquer que $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$.

<u>**Vocabulaire**</u> **:**
• Si $n = 1$, on dit que $A \in \mathscr{M}_{1p}(\mathbb{K})$ est une matrice ligne.

• Si $p=1$, on dit que $A \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ est une matrice colonne.
• Si $n=p$, $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée d'ordre n.
• La diagonale de A est la famille de ses éléments diagonaux $(a_{ii})_{1\leq i\leq \min(n,p)}$.

Définition 2 Égalité de deux matrices
Soient n, n', p, p' des entiers naturels non nuls, $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n'p'}(\mathbb{K})$.
On dit que $A=B$ lorsque $n=n'$, $p=p'$ et :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad A[i,j]=B[i,j]$$

Donc deux matrices sont égales si, et seulement si, elles ont même taille et mêmes coefficients.

Définition 3 Matrices triangulaires
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On dit que A est triangulaire supérieure lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i>j \Longrightarrow A[i,j]=0$$

2. On dit que A est triangulaire inférieure lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i<j \Longrightarrow A[i,j]=0$$

3. On dit que A est diagonale lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i\neq j \Longrightarrow A[i,j]=0$$

Une matrice triangulaire supérieure est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Une matrice triangulaire inférieure est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Une matrice triangulaire diagonale est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Notations :
- On note $T_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées triangulaires supérieures d'ordre n ;
- On note $T_n^-(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées triangulaires inférieures d'ordre n ;
- On note $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées diagonales d'ordre n.

Proposition 4 Lien entre matrices diagonales et triangulaires
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$A \text{ est diagonale} \iff A \text{ est à la fois triangulaire supérieure et inférieure}$$

Autrement dit : $D_n(\mathbb{K}) = T_n^+(\mathbb{K}) \cap T_n^-(\mathbb{K})$.

1.2 Opérations dans $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$

On définit l'addition de deux matrices.

Définition 5 Addition dans $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$
Soient $A = ((a_{ij}))_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B = ((b_{ij}))_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.
On définit une matrice notée $A+B = ((c_{ij}))_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

On a donc :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad (A+B)[i,j] = A[i,j] + B[i,j]$$

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 3+1 \\ 0+4 & 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

On définit ensuite la multiplication d'une matrice par un scalaire.

Définition 6 Multiplication par un scalaire d'une élément de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$
Soient $A = ((a_{ij}))_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On définit une matrice notée $\lambda.A = ((d_{ij}))_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad d_{ij} = \lambda \times a_{ij}$$

On a donc :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad (\lambda.A)[i,j] = \lambda \times A[i,j]$$

Exemple **:** $2.\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 3 & 2\times 1 \\ 2\times 0 & 2\times 1 \\ 2\times 1 & 2\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Reste à définir l'élément neutre pour l'addition.

Définition 7 Matrice nulle
Dans $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$, on appelle matrice nulle la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 0. On la note 0_{np}.
Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice 0_{nn} est notée plus simplement 0_n.

Exemple **:** $0_{24} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème 8 Règles de calcul dans l'espace $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$
Les deux opérations précédentes ont les propriétés suivantes $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall(A,B,C) \in \left(\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})\right)^3$:

- *Commutativité de l'addition :*
$A+B=B+A$
- *Associativité de l'addition*
$\left(A+B\right)+C=A+\left(B+C\right)$
- *La matrice nulle est l'« élément neutre » pour l'addition*
$0_{np}+A=A+0_{np}=A$
- $(-1).A$ *est l'« opposée » de* A
$A+(-1).A=(-1).A+A=0_{np}$
- *Multiplication par un scalaire distributive p/r à l'addition des scalaires*
$(\lambda+\mu).A=\lambda.A+\mu.A$
- *Multiplication par un scalaire distributive p/r à l'addition des matrices*
$\lambda.\left(A+B\right)=\lambda.A+\lambda.B$
- *Associativité de la multiplication par un scalaire*
$\lambda.\left(\mu.A\right)=(\lambda\times\mu).A=\mu.\left(\lambda.A\right)$
- *Le scalaire* 1 *est l'« élément neutre » pour la multiplication par un scalaire*
$1.A=A$

Nous dirons plus tard dans l'année que ces propriétés font de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ un « $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont le vecteur nul est 0_{np} ». Intuitivement, on constate que ces règles de calcul sont les mêmes que celles apprises au lycée pour les vecteurs du plan (ou de l'espace).

Dorénavant la matrice $(-1).A$ sera notée plus simplement $-A$.

À partir des règles de calcul précédentes, on obtient les règles suivantes.

Corollaire 9 Règles de calcul dans l'espace $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$

Si $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(A,B) \in \left(\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})\right)^2$, on a :

1. $\lambda.\big(A-B\big) = \lambda.A - \lambda.B$;
2. $\lambda.0_{np} = 0_{np}$;
3. $(\lambda-\mu).A = \lambda.A - \mu.A$;
4. $0.A = 0_{np}$;
5. $(-\lambda).\big(-A\big) = \lambda.A$;
6. *Intégrité externe*
   $\lambda.A = 0_{np} \iff \lambda = 0$ ou $A = 0_{np}$;
   $\lambda.A = \mu.A \iff A = 0_{np}$ ou $\lambda = \mu$;
   $\lambda.A = \lambda.B \iff \lambda = 0$ ou $A = B$.

⚠ Ne pas négliger la propriété d'intégrité externe qui est fondamentale dans la simplification des calculs ou la résolution d'équation.

1.3 Matrices élémentaires

Définition 10 Matrices élémentaires

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.

On note E_{ij} la matrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j qui est égal à 1 :

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \text{colonne } j \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{ligne } i \\ \\ \\ \end{array}$$

On a donc $\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $E_{ij}[k,l] = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ et } j = \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Pour deux entiers naturels i et j, on introduit le symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On a donc $E_{ij}[k,\ell] = \delta_{ik} \times \delta_{j\ell}$.

***Exemple* :** Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, on a quatre matrices élémentaires :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous verrons plus tard que ces matrices jouent un rôle très particulier dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2 Produit matriciel

2.1 Produit d'une matrice par un vecteur colonne

Si $A = ((a_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}p1(\mathbb{K})$, on définit le produit $A \times X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ par :

$$A \times X = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k} \times x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \times x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{nk} \times x_k \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow \quad \text{ligne } i \\ \\ \\ \end{array}$$

ie que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$(AX)[i,1] = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \times x_k$$

2.2 Cas général : produit de deux matrices

Soient n, p et q des entiers naturels non nuls.

On définit le produit de $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ par $B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ ainsi :
• on note $C_1, \dots, C_q$ les matrices colonnes égales aux colonnes de B,
• la matrice $A \times B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ est la matrice dont les colonnes sont les matrices colonnes $A \times C_1$, $\dots$, $A \times C_q$.

⚠ Nous ne définissons donc le produit $A \times B$ que dans le cas où le nombre de **colonnes** de A est égal au nombre de **lignes** de B.
Dans les autres cas le produit $A \times B$ n'est pas possible.

Théorème 11 Formule du produit matriciel
Soient $A = ((a_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, $B = ((b_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$.
On note $A \times B = ((c_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$.
On a alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \times b_{kj}$$

Autrement dit :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad (A \times B)[i,j] = \sum_{k=1}^{p} A[i,k] \times B[k,j]$$

⚠ ATTENTION ! Le produit matriciel ne se fait pas coefficient par coefficient (contrairement à l'addition) : $(A \times B)[i,j] \neq A[i,j] \times B[i,j]$.

Démonstration : En effet la j-ième colonne de $A \times B$ est donnée par :

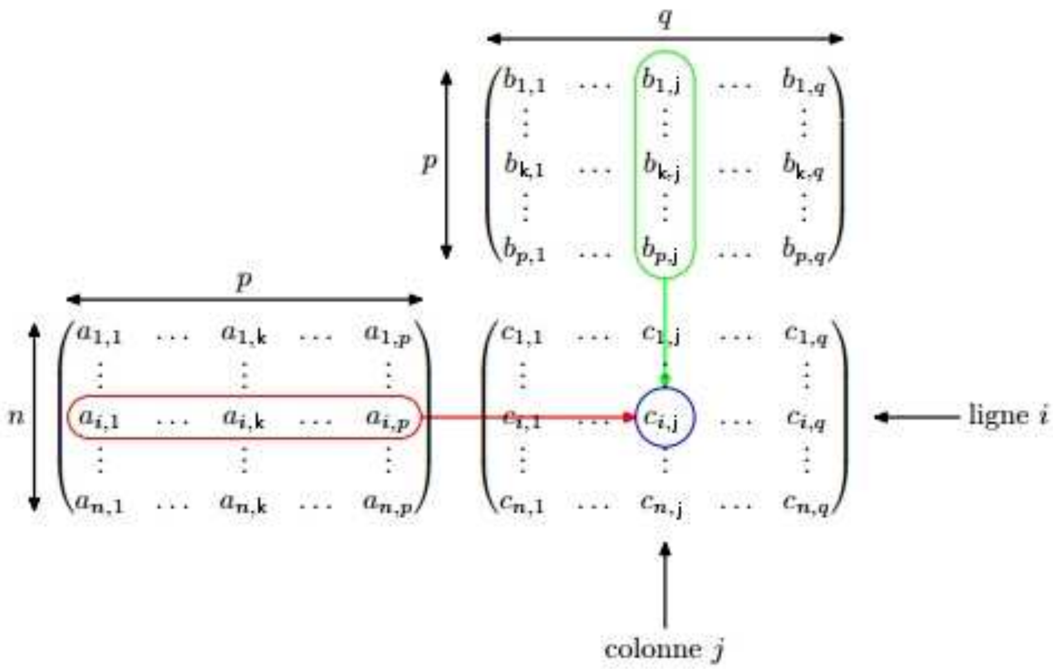
$$A \times C_q = A \times \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k} \times b_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \times b_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{nk} \times b_{kj} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \quad \text{ligne } i \\ \\ \\ \end{array}$$

CQFD $\square$

Proposition 12 Lignes de la matrice $A \times B$
On note $L_1, \ldots, L_n$ les matrices lignes égales aux lignes de A. Alors la i-ième ligne de la matrice $A \times B$ est égale à $L_i \times B$.

Comment poser le produit matriciel ?

Le coefficient c_{ij} situé ligne i colonne j se calcule en suivant la ligne i de la matrice A et la colonne j de la matrice B. Une disposition astucieuse des matrices permet de visualiser ce calcul.



Cette figure permet aussi de comprendre pourquoi il est nécessaire que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.

Exemple **:** Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a $AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

⚠ ATTENTION : même si les deux produits AB et BA existent (ce qui est rarement le cas), on voit que $AB \neq BA$ en général. Le produit matriciel **n'est donc pas commutatif**.

Exemple **:** Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_2$ on a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$.

⚠ ATTENTION : si $AB = 0_{nq}$, on ne peut pas dire que $A = 0_{np}$ ou $B = 0_{pq}$. Le produit matriciel **n'est pas intègre**.
Plus généralement l'égalité $AB = AC$ ne donne pas $B = C$, même si $A \neq 0_{np}$.
Par contre si $A = 0_{np}$ ou $B = 0_{pq}$, on a bien évidemment $AB = 0_{nq}$.

Définissons maintenant l'élément neutre pour le produit matriciel.

Définition 13 Matrice identité
On note I_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la diagonale qui sont égaux à 1 :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Autrement dit : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $I_n[i,j] = \delta_{ij}$.

Théorème 14 Règles de calcul pour le produit matriciel

1. **Associativité :** Si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{qr}(\mathbb{K})$:
$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$
2. **Distributivité à droite :** Si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $(B, C) \in \left(\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})\right)^2$:
$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$
3. **Distributivité à gauche :** Si $(A, B) \in \left(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})\right)^2$ et $C \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$:
$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$$
4. **Lien entre produit matriciel et produit par un scalaire :**
Si $(A, B) \in \left(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})\right)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:
$$\lambda.(A \times B) = (\lambda.A) \times B = A \times (\lambda.B)$$
5. **Élément neutre :** Si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$:
$$A \times I_p = I_n \times A = A$$
6. **Matrice nulle :** Si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$:
$$A \times 0_{p,q} = 0_{n,q} \quad \text{et} \quad 0_{m,n} \times A = 0_{m,p}$$

⚠ ATTENTION : rappelons une dernière dois que le produit matriciel est non commutatif et non intègre.

2.3 Produit matriciel et matrices carrées

Appliquons les résultats précédents dans le cas $n = p$: l'addition deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donne encore un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et la multiplication d'un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par un scalaire donne aussi un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. À ces deux opérations s'ajoute le produit matriciel, qui permet de multiplier deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et qui donne un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que ces trois opérations sont **internes**). L'élément neutre pour le produit matriciel est la matrice I_n :
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad A \times I_n = I_n \times A = A$$
Ce produit est non commutatif et non intègre.

On peut remarquer que la matrice I_n commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Plus généralement, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice $\lambda.I_n$ commute aussi avec toutes les matrices car $(\lambda.I_n)A = A(\lambda.I_n) = \lambda.A$ (on peut aussi démontrer que ce sont les seules matrices carrées qui commutent avec toutes les autres mais c'est une autre histoire).

Les matrices carrées de la forme $\lambda.I_n = \mathrm{Diag}(\lambda,\dots,\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$ sont appelées **matrices scalaires**.

Définition 15 Puissances d'une matrice carrée
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}$ on définit A^p par récurrence : $A^0 = I_n$ et $A^p = A \times A^{p-1}$.
Si $p \geq 1$, on a donc $A^p = \underbrace{A \times A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ fois}}$.

⚠ ATTENTION : bien évidemment, on ne peut pas dire que $\left(A^p\right)[i,j] = \left(A[i,j]\right)^p$! Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 \\ (-1)^2 & 0^2 \end{pmatrix}$$

Proposition 16 Règles de calculs des puissances
Soient $(A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$ et $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

1. $\left(A^p\right)^q = \left(A^q\right)^p = A^{pq}$
2. $A^p \times A^q = A^q \times A^p = A^{p+q}$
3. Si A et B commutent : $(AB)^p) = A^p B^p$;
   sinon $(AB)^p = \underbrace{AB \times AB \times \cdots \times AB}_{p \text{ fois}}$

Théorème 17 Cas de matrices triangulaires/diagonales
Soient $(A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$.Soient $(A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$

1. Si $(A,B) \in \left(T_n^+(\mathbb{K})\right)^2$ alors : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $(AB)[i,i] = A[i,i] \times B[i,i]$. Autrement dit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ 0 & \lambda_2 & \star & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ 0 & \mu_2 & \star & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & & \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \star & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

   et donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\left(A^p\right)[i,i] = \left(A[i,i]\right)^p$, ie :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ 0 & \lambda_2 & \star & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & & \\ 0 & \lambda_2^p & \star & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

2. On a les mêmes résultats avec des matrices triangulaires inférieures.
3. En particulier, si A et B sont deux matrices diagonales telles que $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $B = \mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, alors :

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = BA
\end{aligned}$$

et pour tout $p \in \mathbb{N}$: $A^p = \left(\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\right)^p = \mathrm{Diag}\left(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p\right)$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

Corollaire 18 Produit de matrices triangulaires/diagonales

1. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) donne une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieures), autrement dit le produit matriciel laisse stable $T_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $T_n^-(\mathbb{K})$).
2. Le produit de deux matrices diagonales donne une matrice diagonale, autrement dit le produit matriciel laisse stable $D_n(\mathbb{K})$.
   De plus, deux matrices diagonales commutent toujours entre elles.

⚠En général, une matrice diagonale ne commute pas avec une matrice quelconque.

De même que pour les nombres réels ou complexes, on peut établir une formule du binôme.

Théorème 19 Formule du binôme de Newton, version matrice
Soient $(A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$ tel que A et B commutent, ie $AB = BA$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.A^k \times B^{n-k} = (B+A)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.B^k \times A^{n-k}$$

Si A et B commutent, on a donc : $(A-B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}.A^k \times B^{n-k}$.

⚠ ATTENTION : ce résultat est faux si $AB \neq BA$.
Par exemple, on a : $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2.AB + B^2$.

***Exemple* :** On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer M^n pour tout entier naturel n.

2.4 Matrices carrées inversibles

Définition 20 Matrice inversible
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible (à gauche et à droite) lorsqu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = BA = I_n$$

Proposition 21 Unicité de l'inverse
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Alors il y a unicité de la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.

Définition 22 Inverse d'une matrice inversible
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle inverse de A l'unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
On la note A^{-1}.

⚠ ATTENTION : A^{-1} n'existe pas toujours. De plus, il ne faut pas la noter $\frac{1}{A}$.

***Exemple* :** I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.

***Exemple* :** 0_n est non inversible.

***Exemple* :** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

***Exemple*:** $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $N^2 = 0_2$ et n'est donc pas inversible.
Plus généralement on dit qu'une matrice $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **nilpotente** lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0_n$; une telle matrice n'est pas inversible.

***Exemple*:** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 + 2A - 3I_n = 0_n$. Montrer que A est inversible et donner A^{-1} en fonction de A.

Notation : On note $Gl_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées inversibles d'ordre n.
$Gl_n(\mathbb{K})$ est appelé **groupe linéaire d'ordre n sur $\mathbb{K}$**.

Théorème 23 Règles de calcul de l'inverse
Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
2. AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\lambda.A$ est inversible et $(\lambda.A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}.A^{-1}$.
4. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p est inversible et $\left(A^p\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^p$.

⚠ ATTENTION ! En général la matrice $A + B$ n'est plus inversible. Considérer par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = -A$.

Définition 24 Puissances négatives d'une matrice inversible
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. On pose :
• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$;
• pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $A^n = \underbrace{\left(A^{-1}\right) \times \left(A^{-1}\right) \times \cdots \times \left(A^{-1}\right)}_{-n \text{ fois}}$

Proposition 25 Règles de calcul des puissances négatives
Si $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$, on a : $\left(A^n\right)^p = A^{np} = \left(A^p\right)^n$ et $A^n \times A^p = A^{n+p} = A^p \times A^n$ et $\left(A^{-1}\right)^n = A^{-n}$.

Théorème 26 Inversibilité à gauche ou à droite d'une matrice
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors on a équivalence de :
(i) A est inversible ;
(ii) A est inversible à gauche ;
(iii) A est inversible à droite.

Autrement dit si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = I_n$, alors A et B sont inversibles, $A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$.

***Exemple*:** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2+2A-3I_n = 0_n$. Montrer que A est inversible et donner A^{-1} en fonction de A.

Proposition 27 Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A le scalaire :

$$\det(A) = ad - bc$$

On a alors :

$$A \text{ est inversible} \iff \det(A) \neq 0$$

et dans ce cas :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

<u>Démonstration</u>: Remarquer que $A^2 - (a+d).A + (ad-bc).I_2 = 0_2$.

CQFD □

***Exemple*:** $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ donne $A^{-1} = \frac{i}{3}\begin{pmatrix} -i & -i \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3 Transposition

3.1 Premières propriétés

Définition 28 Transposée d'une matrice
Soit $A = ((a_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A, la matrice $B = ((b_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \quad b_{ij} = a_{ji}$$

Cette matrice B est notée ${}^tA$.
Autrement dit :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \quad \left({}^tA\right)[i,j] = A[j,i]$$

***Exemple*:** ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Les colonnes deviennent les lignes, et réciproquement.

Théorème 29 Règles de calcul de la transposée
Soient $(A,B) \in \left(\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})\right)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ et ${}^t(\lambda.A) = \lambda.{}^tA$
2. ${}^t\left({}^tA\right) = A$
3. ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$ et donc $\forall q \in \mathbb{N}$, ${}^t\left(A^q\right) = \left({}^tA\right)^q$.
4. Si $n = p$: A est inversible si, et seulement si, ${}^tA$ l'est. Dans ce cas ${}^t\left(A^{-1}\right) = \left({}^tA\right)^{-1}$. Donc $\forall q \in \mathbb{Z}$, ${}^t\left(A^q\right) = \left({}^tA\right)^q$.

Proposition 30 Transposée de matrices triangulaires/diagonales

1. Si $A \in T_n^+(\mathbb{K})$ alors ${}^tA \in T_n^-(\mathbb{K})$. De même, si $A \in T_n^-(\mathbb{K})$ alors ${}^tA \in T_n^+(\mathbb{K})$.
2. Si D est diagonale alors ${}^tB$ aussi, puisque ${}^tB = B$.

3.2 Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 31 Matrices symétriques/antisymétriques
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On dit que M est symétrique lorsque ${}^tM = M$, ie lorsque :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad M[i,j] = M[j,i]$$
2. On dit que M est antisymétrique lorsque ${}^tM = -M$, ie lorsque :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad M[i,j] = -M[j,i]$$

Si M est antisymétrique, on a : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $M[i,i] = 0$. Donc une matrice antisymétrique a tous ses coefficients diagonaux égaux à 0.

Exemple **:** I_n est symétrique. 0_n est à la fois symétrique et antisymétrique.

Exemple **:** Une matrice symétrique d'ordre 3 est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ et une matrice antisymétrique d'ordre 3 est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$.

Notations : on note $S_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n, et $A_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées antisymétriques d'ordre n.

Exemple **:** Soient A et B symétriques. Alors A et B commutent si, et seulement si, AB est symétrique.

⚠ ATTENTION ! En général, le produit de deux matrices symétriques n'est plus symétrique.
Considérer par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ qui donnent $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

4 Systèmes linéaires

Pour commencer, nous allons voir sur deux exemples pourquoi il est indispensable de résoudre des équations (ou système d'équations) par équivalence.

- On considère l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
  Si on multiplie par x : $x^3 + x^2 + x = 0$. Et comme $x^2 = -x - 1$, on en déduit : $x^3 = 1$, ie $x = 1$ puisque $x \in \mathbb{R}$.
  C'est absurde puisque 1 n'est pas solution de l'équation de départ ! !
  Explications : on a en fait raisonné par implications et obtenu $x^2 + x + 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$. Mais $x = 1$ serait l'unique solution à condition d'avoir l'ééquivalence $x^2 + x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = 1$. Or ce n'est pas le cas ici, l'implication $x = 1 \Longrightarrow x^2 + x + 1 = 0$ est fausse.
  On a donc obtenu que l'équation n'a pas de solution !
- On considère le système d'équation : $\left\{ \begin{array}{rcrl} x - y & = & 1 & (1) \\ x + y & = & 3 & (2) \\ -x + 3y & = & -3 & (3) \end{array} \right.$
  (1) + (2) donne $2x = 4$ donc $x = 2$, et (2) + (3) donne $4y = 0$ donc $y = 0$. Le système aurait donc comme unique couple solution $(2, 0)$?
  Encore une fois la réponse est non : ce n'est pas une solution.
  On a donc : $\left\{ \begin{array}{rcrl} x - y & = & 1 & (1) \\ x + y & = & 3 & (2) \\ -x + 3y & = & -3 & (3) \end{array} \right. \Longrightarrow (x, y) = (2, 0)$ mais la réciproque est fausse. En conclusion le système n'a aucune solution.

Que retenir de cas exemples ? Qu'il faut résoudre des équations en raisonnant par équivalence ! Si ce n'est pas possible, alors il faut garder en tête qu'on ne trouve pas que des solutions mais aussi des « candidats solutions ». Il faut alors vérifier au cas par cas si chaque « candidat solution » est bien une solution.

4.1 Définitions

On se donne deux entiers naturels non nuls n et p, ainsi que np coefficients $(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ dans $\mathbb{K}$ que nous appellerons **coefficients du système**, et n autres coefficients $b_1, \ldots, b_n$ dans $\mathbb{K}$ qui formeront le **second membre du système**.

On considère alors le **système linéaire de n équations à p inconnues** :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1j}x_j & + & \ldots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2j}x_j & + & \ldots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \ldots & + & a_{ij}x_j & + & \ldots & + & a_{ip}x_p & = & b_i \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nj}x_j & + & \ldots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

$x_1, x_2, \dots, x_p$ sont appelées **inconnues du système**. **Résoudre le système** (S) consiste à trouver l'ensemble $\mathscr{S}$ de tous les p-uplets $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ qui sont solutions des équations de $\mathscr{S}$.

On appelle **système homogène associé**, noté (S_0), le système obtenu lorsque $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$. On note $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions du système homogène. Remarquez qu'on a toujours $(0, 0, \dots, 0) \in \mathscr{S}_0$, et donc $\mathscr{S}_0 \neq \emptyset$.

On dit que le système (S) est **compatible** lorsque $\mathscr{S} \neq \emptyset$, et incompatible dans le cas contraire. D'après la remarque précédente, un système homogène est toujours compatible.

Définition 32 Systèmes équivalents
Si (S) et (S') sont deux systèmes linéaires, on dit qu'ils sont équivalents lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions : $\mathscr{S} = \mathscr{S}'$.

Deux systèmes équivalents ont donc même nombre d'inconnues mais pas nécessairement le même nombre d'équations.

Exemple **:** $(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 2 \\ x + 2y & = & 3 \end{array} \right.$ et $(S') \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y & = & 3 \\ x - y & = & 0 \\ x + y & = & 2 \end{array} \right.$

Définition 33 Opérations élémentaires sur les lignes
On note $L_1, L_2, \dots, L_n$ les lignes (ie les équations) du système linéaire (S). On définit alors les opérations élémentaires sur les lignes :

- échange des lignes i et j : $L_i \longleftrightarrow L_j$
- multiplication de la ligne i par un scalaire $\beta \in \mathbb{K}^*$: $L_i \leftarrow \beta . L_i$
- POUR $i \neq j$, remplacement de la ligne i par elle-même additionnée du produit de la ligne j par un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$: $L_i \leftarrow L_i + \alpha . L_j$

Les deux dernières opérations regroupées donnent : $L_i \leftarrow \beta . L_i + \alpha . L_j$ avec $\beta \neq 0$ et $i \neq j$.

Théorème 34 Opérations élémentaires
Si (S') est un système linéaire obtenu par opérations élémentaires sur les lignes de (S), alors (S) et (S') sont équivalents. Autrement dit, les opérations élémentaires sur les lignes ne modifient pas l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Définition 35 Système de Cramer
Un système de Cramer est un système de n équations à n inconnues (donc $n = p$), qui admet une unique solution.

⚠ un système peut avoir une unique solution sans être un système de Cramer. Par exemple :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ x-y & = & 0 \\ 3x+y & = & 4 \end{array}\right.$$

Les matrices permettent de simplifier les notations. On considère la matrice des coefficients :

$$A = ((a_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$$

la matrice colonne du second membre :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$$

et la matrice colonne des inconnues :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{K})$$

Alors on a le résultat suivant.

Proposition 36 Écriture matricielle d'un système linéaire

$$(x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{K}^p \text{ est solution de } (S) \iff A\times X = B$$

4.2 Le pivot de Gauss

Le pivot de Gauss est un algorithme, basé sur les opérations élémentaires sur les lignes d'un système, qui permet de déterminer l'ensemble des solutions.

On considère donc le système :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1j}x_j & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2j}x_j & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{ij}x_j & + & \dots & + & a_{ip}x_p & = & b_i \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nj}x_j & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

$\boxed{\text{CAS 1}}$ Tous les coefficients du système sont nuls : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{ij} = 0$.

$\boxed{\text{CAS 1.1}}$ $b_1 = \cdots = b_n = 0$. Dans ce cas le système a une infinité de solutions : $\mathscr{S} = \mathbb{K}^p$. FIN

$\boxed{\text{CAS 1.2}}$ $\exists i \in [\![1,n]\!] /\ b_i \neq 0$. Dans ce cas le système est incompatible : $\mathscr{S} = \emptyset$. FIN

$\boxed{\text{CAS 2}}$ Au moins un des coefficients du système est nul : $\exists (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{ij} \neq 0$.

Dans ce cas on effectue l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_i$. On obtient un nouveau système linéaire qui, pour simplifier, sera noté comme celui de départ :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1j}x_j & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2j}x_j & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{ij}x_j & + & \dots & + & a_{ip}x_p & = & b_i \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nj}x_j & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n
\end{array}\right.$$

avec cette fois $a_{1j} \neq 0$.

Ensuite on renumérote les inconnues de manière à permuter x_1 et x_j. Dans le nouveau système, on a $a_{11} \neq 0$. Ce coefficient sera notre pivot ; on l'utilise pour faire disparaître l'inconnue x_1 de tous les autres équations grâce aux opérations :

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1, \qquad \text{avec} \quad i \in [\![2,n]\!]$$

On a alors le système équivalent à (S) :

$$\left\{\begin{array}{cc|ccccccccccc}
\boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1j}x_j & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
\hline
 & & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2j}x_j & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
 & & \vdots & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{ij}x_j & + & \dots & + & a_{ip}x_p & = & b_i \\
 & & \vdots & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nj}x_j & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n
\end{array}\right.$$

On recommence alors le processus avec le sous-sytème :

$$(S_1) \quad \left\{\begin{array}{ccccccccccc}
a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2j}x_j & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
a_{32}x_2 & + & \dots & + & a_{3j}x_j & + & \dots & + & a_{3p}x_p & = & b_3 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{ij}x_j & + & \dots & + & a_{ip}x_p & = & b_i \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nj}x_j & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n
\end{array}\right.$$

$\boxed{\text{CAS 2.1}}$ Tous les coefficients de $\mathscr{S}_1$ sont nuls. Dans ce cas, on arrête l'algorithme. FIN

$\boxed{\text{CAS 2.2}}$ On se ramène à un système équivalent à (S_1) où $a_{22} \neq 0$. Ensuite, en utilisant ce coefficient comme pivot, on fait disparaître x_2 des autres lignes de (S_1). On obtient alors que

(S) est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{ccccc|ccccccccccc}
\boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1j}x_j & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
& & \boxed{a_{22}x_2} & + & & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2j}x_j & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
\hline
& & & & & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3j}x_j & + & \dots & + & a_{3p}x_p & = & b_3 \\
& & & & & \vdots & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
& & & & & a_{i3}x_3 & + & \dots & + & a_{ij}x_j & + & \dots & + & a_{ip}x_p & = & b_i \\
& & & & & \vdots & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
& & & & & a_{n3}x_3 & + & \dots & + & a_{nj}x_j & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n
\end{array}\right.$$

Et on recommence avec le sous-système :

$$(S_2)\quad \left\{\begin{array}{ccccccccccc}
a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{2j}x_j & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_3 \\
a_{43}x_3 & + & \dots & + & a_{4j}x_j & + & \dots & + & a_{4p}x_p & = & b_4 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{i3}x_3 & + & \dots & + & a_{ij}x_j & + & \dots & + & a_{ip}x_p & = & b_i \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{n3}x_3 & + & \dots & + & a_{nj}x_j & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n
\end{array}\right.$$

Etc…

On arrête l'algorithme lorsqu'on obtient un sous-système dont tous les coefficients sont nuls :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccccc}
\boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1r}x_r & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
& & \boxed{a_{22}x_2} & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2r}x_r & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
& & & & \boxed{a_{33}x_3} & + & \dots & + & a_{3r}x_r & + & \dots & + & a_{3p}x_p & = & b_3 \\
& & & & & & \ddots & & & & & & \vdots & & \vdots \\
& & & & & & & & \boxed{a_{rr}x_r} & + & \dots & + & a_{rp}x_p & = & b_r \\
& & & & & & & & & & & & 0 & = & b_{r+1} \\
& & & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
& & & & & & & & & & & & 0 & = & b_n
\end{array}\right.$$

ou lorsqu'on a utilisé chaque inconnue comme pivot :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
\boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
& & \boxed{a_{22}x_2} & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
& & & & \boxed{a_{33}x_3} & + & \dots & + & a_{3p}x_p & = & b_3 \\
& & & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
& & & & & & & & \boxed{a_{pp}x_p} & = & b_p \\
& & & & & & & & 0 & = & b_{p+1} \\
& & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
& & & & & & & & 0 & = & b_n
\end{array}\right.$$

(ce qui rejoint le cas précédent avec $r = p$), ou encore lorsqu'il ne reste plus de lignes dans le dernier sous-sytème :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccccc}
\boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
 & & \boxed{a_{22}x_2} & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
 & & & & \boxed{a_{33}x_3} & + & \dots & + & a_{3n}x_n & + & \dots & + & a_{3p}x_p & = & b_3 \\
 & & & & & & \ddots & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & \boxed{a_{nn}x_n} & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n
\end{array}\right.$$

(ce qui rejoint encore le cas d'avant avec $r = n$).

On est certain que l'algorithme se termine en un nombre fini d'étapes puisque le système de départ n'a qu'un nombre fini d'équations (donc de lignes).

Dans tous les cas on a donc obtenu :

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccccccccccccc}
\boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1r}x_r & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
 & & \boxed{a_{22}x_2} & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2r}x_r & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
 & & & & \boxed{a_{33}x_3} & + & \dots & + & a_{3r}x_r & + & \dots & + & a_{3p}x_p & = & b_3 \\
 & & & & & & \ddots & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & \boxed{a_{rr}x_r} & + & \dots & + & a_{rp}x_p & = & b_r \\
 & & & & & & & & 0 & + & \dots & + & 0 & = & b_{r+1} \\
 & & & & & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & 0 & + & \dots & + & 0 & = & b_n
\end{array}\right.$$

où l'entier naturel r vérifie $1 \leq r \leq \min(n, p)$ ($r = 0$ si le système de départ avait tous ses coefficients nuls, mais ce cas n'a aucun intérêt). De plus, les coefficients diagonaux sont non nuls : $a_{ii} \neq 0$ si $i \in [\![1, r]\!]$.

On dit que (S) a été mis **sous forme réduite de Gauss**.

4.3 Rang et résolution d'un système linéaire

4.3.1 Résolution des systèmes linéaires

On va maintenant résoudre dans le cas général le système linéaire (S). Grâce à l'algorithme du pivot de Gauss, on a :

$$(S) \iff (S') \left\{\begin{array}{ccccccccccccccc}
\boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1r}x_r & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
 & & \boxed{a_{22}x_2} & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2r}x_r & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
 & & & & \boxed{a_{33}x_3} & + & \dots & + & a_{3r}x_r & + & \dots & + & a_{3p}x_p & = & b_3 \\
 & & & & & & \ddots & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & \boxed{a_{rr}x_r} & + & \dots & + & a_{rp}x_p & = & b_r \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & = & b_{r+1} \\
 & & & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & = & b_n
\end{array}\right.$$

et il est donc équivalent de résoudre le système linéaire (S').

On obtient premièrement que le système est compatible si et seulement si $b_{r+1} = \cdots = b_n = 0$. Ces lignes du système seront donc appelés **conditions de compatibilité**. Supposons désormais qu'elles sont vérifiées ; les dernières lignes du système sont donc de la forme $0 = 0$ et peuvent être omises :

$$(S) \iff (S') \left\{\begin{array}{ccccccccccccccc} \boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1r}x_r & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ & & \boxed{a_{22}x_2} & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2r}x_r & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ & & & & \boxed{a_{33}x_3} & + & \dots & + & a_{3r}x_r & + & \dots & + & a_{3p}x_p & = & b_3 \\ & & & & & & \ddots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & & \boxed{a_{rr}x_r} & + & \dots & + & a_{rp}x_p & = & b_r \end{array}\right.$$

On a alors deux cas à envisager.

$\boxed{\text{CAS 1}}$ $r = p$ (donc $p \leq n$).

$$(S) \iff (S') \left\{\begin{array}{ccccccccccccc} \boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1,p-1}x_{p-1} & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ & & \boxed{a_{22}x_2} & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2,p-1}x_{p-1} & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ & & & & \boxed{a_{33}x_3} & + & \dots & + & a_{3,p-1}x_{p-1} & + & a_{3p}x_p & = & b_3 \\ & & & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \\ & & & & & & & & \boxed{a_{p-1,p-1}x_{p-1}} & + & a_{pp}x_p & = & b_{p-1} \\ & & & & & & & & & & \boxed{a_{pp}x_p} & = & b_p \end{array}\right.$$

Dans ce cas la dernière ligne donne une unique valeur de x_p, l'avant dernière une unique valeur de x_{p-1}, ..., la première une unique valeur de x_1. (S) **a donc une unique solution**.

$\boxed{\text{CAS 2}}$ $r < p$.

$$(S) \iff (S') \left\{\begin{array}{ccccccccccccccc} \boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1r}x_r & + & a_{1,r+1}x_{1,r+1} & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ & & \boxed{a_{22}x_2} & + & \dots & + & a_{2r}x_r & + & a_{2,r+1}x_{2,r+1} & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \boxed{a_{rr}x_r} & + & a_{r,r+1}x_{r,r+1} & + & \dots & + & a_{rp}x_p & = & b_r \end{array}\right.$$

Dans cas les $p - r$ inconnues $x_{r+1}, \dots, x_p$ peuvent prendre n'importe quelle valeur. On les appelle les **inconnues libres ou arbitraires**. Une fois cette valeur fixée, les autres inconnues $x_1, \dots, x_p$ peuvent prendre une unique valeur. (S) **a donc une infinité de solutions**.

4.3.2 Rang d'un système linéaire

Définition 37 Rang d'un système linéaire
L'entier naturel r obtenu avec l'algorithme du pivot de Gauss est unique (on l'admet). Il est appelé rang du système, noté $\text{rg}(S)$.

Proposition 38 Rang d'un système linéaire
On a $0 \leq \text{rg}(S) \leq \min(n, p)$.
Et : $\text{rg}(S) = 0$ si et seulement si tous les coefficients de (S) sont nuls.

Théorème 39 Solutions d'un système linéaire
Un système linéaire (S) peut avoir : aucune solution, ou une unique solution, ou encore une infinité de solutions.
S'il est compatible, alors il a une unique solution si et seulement si $\mathrm{rg}(S) = p$ (et alors $p \leq n$).
Dans le cas contraire on a $\mathrm{rg}(S) < p$ et (S) a une infinité de solutions.

Retenir aussi que :
– pour avoir une unique solution, il faut donc au moins autant d'équations que d'inconnues ;
– dans le cas d'une infinité de solutions, le nombre d'inconnues libres est $p - \mathrm{rg}(S)$.

Corollaire 40 Rang et systèmes de Cramer
Si le système linéaire (S) a n équations à n inconnues (donc $n = p$), alors :
(S) est de Cramer si et seulement si $\mathrm{rg}(S) = n$.

4.3.3 Rang et systèmes linéaires échelonnés

Définition 41 Système linéaire échelonné
Soit (S) un système linéaire. On dit qu'il est échelonné lorsque :
(i) si une ligne est nulle, alors toutes les suivantes sont nulles ;
(ii) si le premier terme non nul de la ligne i est en position j, soit la $(i+1)^{\text{ième}}$ est nulle, soit le premier terme non nul de la $(i+1)^{\text{ième}}$ ligne est en position k avec $k > j$.
Autrement dit : d'une ligne à l'autre il y a <u>au moins une</u> inconnue en moins « sur la gauche ».

Exemple : $\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & 3y & & & + & t & = & 1 \\ & & & & 3z & + & 5t & = & 0 \\ & & & & & & 7t & = & 3 \end{array}\right.$ est échelonné,

mais $\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & 3y & & & + & t & = & 1 \\ & & & & 3z & + & 5t & = & 0 \\ & & & & z & - & 7t & = & 3 \end{array}\right.$ ne l'est pas.

Définition 42 Système linéaire triangulaire
Soit (S) un système linéaire. On dit qu'il est triangulaire lorsque :
(i) si une ligne est nulle, alors toutes les suivantes sont nulles ;
(ii) le premier terme non nul de la ligne i est en position i (ie sur la diagonale).
Autrement dit : d'une ligne à l'autre il y a <u>exactement une</u> inconnue en moins « sur la gauche ».

L'algorithme du pivot de Gauss donne un système linéaire triangulaire.

Proposition 43 Lien entre triangulaire et échelonné
Un système linéaire triangulaire est échelonné.
La réciproque est fausse.

Exemple : $\begin{cases} 3x + 8y + 5z + 4t = 0 \\ y + 2t = 7 \\ 2z + 6t = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$ est triangulaire donc échelonné,

et $\begin{cases} 2x + 3y + t = 1 \\ 3z + 5t = 0 \\ 7t = 3 \end{cases}$ est échelonné mais non triangulaire.

On peut remarquer que, quitte à permuter les inconnues, tout système échelonné se mettre sous forme triangulaire.

Théorème 44 Rang d'un système linéaire échelonné
Si (S) est un système linéaire échelonné, alors $\mathrm{rg}(S)$ est égale au nombre de lignes non nulles.

4.4 Matrices inversibles et systèmes linéaires

Théorème 45 Inversibilité et systèmes linéaires
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$A \text{ est inversible } \Longleftrightarrow \exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) / \ \forall (X,Y) \in \left(\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})\right)^2, \quad \left[AX = Y \Longleftrightarrow X = BY\right]$$

et dans ce cas $B = A^{-1}$ (donc si elle existe, B est unique).

Application : calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode du système linéaire

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On cherche à résoudre le système linéaire $AX = Y$ avec $(X,Y) \in \left(\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})\right)^2$.

On a deux alternatives possibles :
• Le système n'est pas de Cramer (ie il n'a pas une unique solution). Dans ce cas A **n'est pas inversible**.
• Le système est de Cramer. Dans ce cas A **est inversible** et l'unique solution est $X = A^{-1}Y$. On peut donc lire sur l'écriture des solutions les coefficients de A^{-1}.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & 4 \\ 10 & -6 & -2 \end{pmatrix}$.

On en déduit un critère très simple d'inversibilité d'une matrice triangulaire.

Corollaire 46 Inversibilité d'une matrice triangulaire
Soit T une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) d'oredre n. Alors :

$$T \text{ est inversible} \Longleftrightarrow \text{tous ses coefficients diagonaux sont non nuls} \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ T[i,i] \neq 0$$

L'inverse d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est elle-même triangulaire supérieure (resp. inférieure), mais ce résultat n'est pas au programme.

Dans le cas d'une matrice diagonale, on sait aussi facilement calculer son inverse.

Corollaire 47 Inversibilité et puissances d'une matrice diagonale
Soit $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale d'ordre n. Alors :

D est inversible $\iff$ tous ses coefficients diagonaux sont non nuls $\iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \neq 0$

Dans ce cas :

$$D^{-1} = \operatorname{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_1} \end{pmatrix}$$

On en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$: $A^p = \left(\operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\right)^p = \operatorname{Diag}\left(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p\right)$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

5 Exercices

Exercice 1 Calculer les produits de matrices suivants :

1. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$

Exercice 2 (Polynôme annulateur et inversibilité) Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Vérifer que $A^2 - A - 2I_2 = 0_2$, puis en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 3 (Calcul de puissances par conjecture) Déterminer A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 (Calcul de puissances par récurrence) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$. En déduire l'expression de A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 (Calcul de puissances avec un polynôme annulateur)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner une relation entre A^3, A^2 et A.
2. Méthode 1 : Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = a_n A + b_n A^2$. En déduire l'expression de A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Méthode 2 : Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 2X^2 + X$. En déduire l'expression de A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 (Calcul de puissances avec la formule du binôme matricielle)

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A + N$. Vérifier que $AN = NA$ et $N^3 = 0$, puis calculer B^n pour tout $n \geq 3$.
2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^n puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A+I_3)(A-2I_3)$. En déduire l'existence et le calcul de A^{-1}.
2. Soient $B = \frac{1}{3}(A+I_3)$ et $C = -\frac{1}{3}(A-2I_3)$. Déterminer B^n et C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire l'expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. Cette expression est-elle valable pour $n \in \mathbb{Z}$?

Exercice 8 Déterminer le rang puis résoudre les systèmes linéaires d'inconnues réelles suivants :

1) $\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 4x + y + z = 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x + 3y - z = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 4x - y - z = 3 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y + z - t = 1 \\ x - y - z + t = 2 \\ x - y - z - t = 3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ x + y - z = -2 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{cases}$

Exercice 9 Inverser les matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice 10 Soit $A = ((a_{ij}))_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A, notée $\mathrm{Tr}(A)$, la somme de ses coefficients diagonaux : $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

1. Montrer que : $\forall (A, B, \lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \times \mathbb{K}$, $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$ et $\mathrm{Tr}(\lambda.A) = \lambda \times \mathrm{Tr}(A)$.
2. Montrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$
   En déduire que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in Gl_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)$.
3. Peut-on trouver deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB - BA = I_n$?

Exercice 11

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Montrer que, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors : A et M commutent si et seulement si M est diagonale.
2. Montrer que les seules matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres sont les matrices scalaires, c'est-à-dire les matrices de la forme λI_n, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Chapitre 6

Espaces probabilisés finis

1 Vocabulaire et axiomatique des probabilités

1.1 L'univers

On considère une expérience aléatoire (= expérience dont le résultat ne peut pas être prédit ou calculé à l'avance).

On désigne par Ω l'ensemble des résultats possibles de cette expérience aléatoire.

Ω est appelé **univers** ou encore **espace des possibles**, **espace des réalisations** ou **espace des observations**. Les éléments $\omega \in \Omega$ sont appelés **observations** ou **réalisations** de l'expérience aléatoire.

Dans ce chapitre, on se limitera toujours au cas où Ω est un **ensemble fini**, c-est-à-dire qu'on ne considèrera que des expériences aléatoires ne donnant qu'un nombre fini de résultats différents.

Exemple **:** On lance un dé à 6 faces : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\} = [\![1,6]\!]$. Un élément $\omega \in \Omega$ est un chiffre entre 1 et 6 qui représente le chiffre obtenu en lançant le dé.

Exemple **:** On lance deux dés à 6 faces distinguables : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\} \times \{1;2;3;4;5;6\} = [\![1,6]\!]^2$. Un élément $\omega \in \Omega$ est un couple (ω_1, ω_2) où ω_1 représente le chiffre obtenue avec le premier dé, et ω_2 le chiffre obtenu avec le second.

Exemple **:** On lance 1 fois une pièce : $\Omega = \{P, F\}$ ou $\Omega = \{0, 1\}$ avec la convention que « 1 » représente « pile », et « 0 » représente « face ».

Exemple **:** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce : $\Omega = \{P, F\}^n$ ou $\Omega = \{0, 1\}^n$ avec la convention que « 1 » représente « pile », et « 0 » représente « face ». Un élément $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$ est un n-uplet qui représente la liste des résultats obtenus aux n lancers. Par exemple pour 6 lancers, on peut avoir $\omega = (P, P, F, P, F, P)$ qui se note aussi $\omega = (1, 1, 0, 1, 0, 1)$.

Exemple **:** Soit $(n, N) \in \mathbb{N}^2$.

• On effectue n tirages successifs **avec remise** d'une boule, dans une urne de N boules : $\Omega = [\![1, N]\!]^n$. Ceci sous-entend qu'on a numéroté les N boules de 1 à N ; un élément $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$ est un n-uplet qui représente la liste des numéros tirés.

Par exemple $\omega = (6, 2, 2, 6, 4, 3, 5)$ pour 7 tirages avec remise dans une urne de 6 boules.

• On effectue n tirages successifs **sans remise** d'une boule, dans une urne de N boules (dans ce cas $n \leq N$) : Ω = ensemble des arrangements de n éléments de $[\![1,N]\!]$ = ensemble des n-uplets $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n) \in [\![1,N]\!]^n$ dont les composantes sont deux à deux distinctes. Encore une fois ceci sous-entend qu'on a numéroté les N boules de 1 à N ; un élément $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n) \in \Omega$ est un n-uplet qui représente la liste des numéros tirés.

Par exemple $\omega = (6,2,3)$ pour 3 tirages sans remise dans une urne de 10 boules.

• On effectue 1 tirage de n boules prises **simultanément** dans une urne de N boules (dans ce cas $n \leq N$) : Ω = ensemble des combinaisons de n éléments de $[\![1,N]\!]$ = ensemble des parties $\omega = \{\omega_1,\dots,\omega_n\} \subseteq [\![1,N]\!]$. Encore une fois ceci sous-entend qu'on a numéroté les N boules de 1 à N ; un élément $\omega = \{\omega_1,\dots,\omega_n\} \in \Omega$ est une partie qui représente les numéros tirés.

Par exemple $\omega = \{6,2,3\}$ pour 1 tirage de 3 boules prises simultanément dans une urne de 10 boules.

***Exemple* :** On mélange une jeu de n cartes : $\Omega = \{\omega : [\![1,n \longrightarrow [\![1,n]\!] \,/\, \omega \text{ bijective}\}$. Ceci sous-entend qu'on a numéroté les cartes de 1 à n en fonction de leur position initiale. Pour la carte numéro i, l'entier $\omega(i)$ représente sa position après la permutation ω.

Par contre, on n'étudiera pas dans ce chapitre le cas d'une infinité de lancers d'une pièce (pourtant très instructif !)...

1.2 Évènements

Intuitivement, un évènement A est défini par une phrase qui peut être vraie ou fausse selon le résultat de l'expérience aléatoire.

***Exemple* :** On lance un dé à 6 faces : $\Omega = [\![1,6]\!]$.

A = « obtenir un 6 » donne la partie de Ω : $\quad A = \{6\}$

B = « obtenir un nombre pair » donne la partie de Ω : $\quad B = \{2;4;6\}$

***Exemple* :** On lance deux dés à 6 faces distinguables : $\Omega = [\![1,6]\!]^2$.

A = « obtenir un double 6 » donne la partie de Ω : $\quad A = \{(6,6)\}$

B = « obtenir un double » donne la partie de Ω :

$$\begin{aligned} B &= \{(i,i) \,/\, i \in [\![1,6]\!]\} \\ &= \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(5,5);(6,6)\} \end{aligned}$$

C = « obtenir au moins un 6 » donne la partie de Ω :

$$\begin{aligned} C &= \{(i,6) \,/\, i \in [\![1,6]\!]\} \cup \{(6,j) \,/\, j \in [\![1,6]\!]\} \\ &= \{(1,6);(2,6);(3,6);(4,6);(5,6);(6,6);(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5)\} \end{aligned}$$

***Exemple* :** On mélange un jeu de n cartes : $\Omega = \{\omega : [\![1,n \longrightarrow [\![1,n]\!] \,/\, \omega \text{ bijective}\}$.

A = « la première carte se retrouve dans la première moitié du paquet » donne la partie de Ω :

$$A = \left\{\omega : [\![1,n \longrightarrow [\![1,n]\!] \text{ bijective} \,\big/\, \omega(1) = \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \right\}$$

Pour $i \in [\![1,r]\!]$ fixé, B_i = « la carte numéro i n'a pas changé de place » donne la partie de Ω :

$$B = \left\{\omega : [\![1,n \longrightarrow [\![1,n]\!] \text{ bijective} \,\big/\, \omega(i) = i \right\}$$

On voit sur ces exemples qu'un évènement A est nécessairement **une partie de** Ω, ie que $A \in \mathscr{P}(\Omega)$.

Si on note $\mathscr{F}$ l'**ensemble de tous les évènements** qu'on peut associer à l'expérience aléatoire, alors $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$.

On admettra que sous l'hypothèse que Ω est fini, l'ensemble des évènements est $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$, ie que toutes les parties de Ω sont des évènements : on pourra donc calculer leur probabilité. Dans le cas d'un univers infini, certaines parties de Ω ne pourront pas être considérées comme des évènements ; nous ne développerons pas ce point dans ce chapitre.

Vocabulaire :

• On dit que l'**observation** $\omega \in \Omega$ **réalise l'évènement** A lorsque $\omega \in A$. Inversement, si $\omega \notin A$, on dit que l'observation ω **ne réalise pas** A.
• L'évènement $\emptyset$ est appelé **évènement impossible**.
• L'évènement Ω est appelé **évènement certain**.

Il est clair qu'aucune observation ne réalise l'évènement impossible $\emptyset$, et que toutes les observations réalisent l'évènement certain Ω.

Définition 1 Évènements élémentaires
On appelle évènements élémentaires les singletons de Ω, ie les évènements de la forme $\{\omega\}$ avec $\omega \in \Omega$.

Une remarque importante : tout évènement A est réunion d'évènements élémentaires. En effet, on a :

$$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$$

1.3 Opérations sur les évènements

Définition 2 Opérations sur les évènements
Soient A et B deux évènement, c'est-à-dire $(A,B) \in \mathscr{F}^2$.

1. Contraire. L'évènement $\complement_\Omega A = \overline{A}$ est appelé contraire de A.
   Pour tout $\omega \in \Omega : \omega \in \overline{A} \iff \omega \notin A$
   Autrement dit : $\overline{A}$ est réalisé $\iff$ A n'est pas réalisé
2. Union. Pour tout $\omega \in \Omega : \omega \in A \cup B \iff \omega \in A$ ou $\omega \in B$
   Autrement dit : $A \cup B$ est réalisé $\iff$ A est réalisé $\boxed{\text{ou}}$ B est réalisé
3. Intersection. Pour tout $\omega \in \Omega : \omega \in A \cap B \iff \omega \in A$ et $\omega \in B$
   Autrement dit : $A \cap B$ est réalisé $\iff$ A est réalisé $\boxed{\text{et}}$ B est réalisé
4. Différence. Pour tout $\omega \in \Omega : \omega \in A \backslash B \iff \omega \in A$ et $\omega \notin B$
   Autrement dit : $A \backslash B$ est réalisé $\iff$ A est réalisé et B n'est pas réalisé
5. Implication. $A \subseteq B$ signifie que, pour tout $\omega \in \Omega : \omega \in A \Longrightarrow \omega \in B$
   Autrement dit : A est réalisé $\Longrightarrow$ B est réalisé

On peut aussi remarquer que la différence symétrique $A \Delta B$ permet de définir un « ou » exclusif.

Rappels : Si A, B et C sont des évènements :

$$A \backslash B \subseteq A \qquad A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup \emptyset = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cap \Omega = A$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Généralisation pour $(A_i)_{i \in I}$ famille d'évènements :

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \qquad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$
$$B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i) \qquad B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$$

- L'évènement $\bigcup_{i \in I} A_i$ correspond à l'évènement « au moins un des A_i est réalisé ».
- L'évènement $\bigcap_{i \in I} A_i$ correspond à l'évènement « tous les A_i sont réalisés ».
- L'évènement $\bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$ correspond à l'évènement « aucun des A_i n'est réalisé ».

Définition 3 Évènements incompatibles
Deux évènements A et B sont dits incompatibles lorsqu'ils sont disjoints, ie lorsque $A \cap B = \emptyset$.

Intuitivement, A et B sont incompatibles lorsqu'ils ne peuvent pas se produire simultanément.
***Exemple* :** Lorsqu'on lance un dé à 6 faces : les évènements A = « obtenir un chiffre pair » et B = « obtenir un chiffre impair » sont incompatibles.

Définition 4 Espace probabilisable
Un espace probabilisable est un couple $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ où Ω est l'univers et $\mathscr{P}(\Omega)$ est la tribu des évènements.

1.4 Système complet d'évènements

Définition 5 Système complet d'évènements
Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'évènements de Ω. On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'évènements (= s.c.e.) lorsque :
(i) les $(A_i)_{i \in I}$ sont deux à deux incompatibles :

$$\forall (i,j) \in I^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

(ii) $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$
(iii) $\forall i \in I, \quad A_i \neq \emptyset$

Les propriétés (i) et (ii) définissent **une partition** de Ω. Un système complet d'évènements est donc un cas particulier de partition.

Intuitivement, un s.c.e. correspond à une disjonction des cas, suivant le résultat de l'expérience aléatoire.

***Exemple* :** On lance deux dés à 6 faces. On définit les évènements A = « obtenir deux chiffres pairs », B = « obtenir deux chiffres impairs » et C = « obtenir un chiffre pair et un chiffre impair ».
Alors (A, B, C) est un s.c.e..

***Exemple* :** Si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $A \neq \emptyset$ et $A \neq \Omega$, alors $\left(A, \overline{A}\right)$ s.c.e..

Proposition 6 Décomposition d'un évènement sur un s.c.e.
Tout évènement se décompose sur un s.c.e. $(A_i)_{i\in I}$ en une union d'évènements deux à deux incompatibles :

$$\forall B \in \mathscr{P}(\Omega), \quad B = \bigcup_{i\in I} (B \cap A_i)$$

et les $\left(B \cap A_i\right)_{i\in I}$ sont deux à deux incompatibles.

2 Probabilité sur un espace probabilisable

2.1 Probabilités

Définition 7 Probabilité
On appelle probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ toute application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$ telle que :
(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
(ii) $\mathbb{P}$ est additive ie $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$:

$$(A_1, \dots, A_n) \text{ 2 à 2 incompatibles} \Longrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

Si A est un évènement, alors le réel $\mathbb{P}(A)$ est appelé probabilité de l'évènement A.

Définition 8 Espace probabilisé
Un espace probabilisé est un triplet $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ où Ω est l'univers, $\mathscr{P}(\Omega)$ est la tribu des évènements et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

Théorème 9 Propriétés d'une probabilité
Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Alors :
(iii) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
On se donne deux évènements A et B :
(iv) $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
(v) $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$ et donc si $B \subseteq A$, alors $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$;
(vi) si $A \subseteq B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;
(vii) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Dans le cas d'une union finie d'évènements, avec un nombre quelconque de termes, et sans hypothèse d'incompatibilité, on a les deux résultats suivants.

Théorème 10 Inégalité de Boole
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout famille finie $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

Mais la plupart du temps le membre de droite est supérieur à 1, ce n'est pas très intéressant en pratique. On peut aussi utiliser la formule exacte suivante, mais les calculs sont lourds.

Théorème 11 Formule du crible
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout famille finie $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{F}^n$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) \right)$$

***Exemple* :** On mélange n cartes et on note A = « aucune carte ne retrouve sa position initiale ». Alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

C'est aussi la probabilité qu'une permutation aléatoire de n éléments soit un dérangement.

***Exemple* :** p personnes entre dans l'ascenseur d'un immeuble de n étages (sans compter le RDC) et descendent chacune à un des n étages. On note A = « À chaque étage au moins une des personnes est descendue ». Alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^p$$

C'est aussi la probabilité qu'une application aléatoire de $[\![1, p]\!]$ vers $[\![1, n]\!]$ soit une surjection.

2.2 Construction de probabilités

Pour définir une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathscr{P}(\Omega)$, il faut se donner $\mathbb{P}(A)$ pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, ce qui n'est pas toujours possible. On va démontrer qu'il suffit de définir $\mathbb{P}$ sur les évènements élémentaires.

On note $n = \#\Omega$ et $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.

Théorème 12 Probabilité sur un univers fini

1. Soit $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ avec Ω fini. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $p_i = \mathbb{P}\big(\{\omega_i\}\big)$. Alors les réels $p_1, \dots, p_n$ sont dans $[0, 1]$ et vérifient $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
2. Réciproque. On se donne des réels $p_1, \dots, p_n$ vérifiant :
   • ils sont positifs ;
   • $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
   Alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $p_i = \mathbb{P}\big(\{\omega_i\}\big)$.
   Et donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $p_i \in [0, 1]$.

C'est le deuxième point que nous utiliserons pour définir une probabilité dans le cas d'un univers fini. Cette probabilité $\mathbb{P}$ vérifie :

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \omega_i \in A}} p_i$$

Par exemple, si $A = \{\omega_2, \omega_5, \omega_6\}$, alors : $\mathbb{P}(A) = p_2 + p_5 + p_6$.

En pratique, il suffit donc de connaître la probabilité des évènements élémentaires, pour être capable de calculer la probabilité de n'importe quel évènement.

Exemple : On lance un dé à 6 faces : $\Omega = [\![1, 6]\!]$ et $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$. On définit une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{F})$ par :

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{12}; \quad p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{4}$$

ce qui modélise un dé **truqué**.
On a alors $\mathbb{P}($ « Chiffre pair » $) = \dfrac{7}{12}$.

Exemple : On reprend le même espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{F})$ et on définit une autre probabilité $\mathbb{Q}$ par :

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = \frac{1}{6}$$

ce qui modélise un dé **équilibré**.
On a alors $\mathbb{Q}($ « Chiffre pair » $) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

On voit sur ces deux exemples qu'on effectue la même expérience aléatoire : lancer un dé à 6 faces. Le choix de la probabilité permet de traduire le fait que le dé est **équilibré** ou **truqué**, c'est-à-dire de choisir la probabilité des évènements élémentaires.

Définition 13 Équiprobabilité
Lorsque Ω est fini on note $n = \#\Omega$. L'unique probabilité définie par :

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$$

est appelée probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.
Pour tout évènement A, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$$

3 Probabilités conditionnelles

Dans tout ce paragraphe, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

3.1 Définition

Intuitivement : si on lance un dé cubique, équilibré, on devine que sachant que le chiffre obtenu est pair, la probabilité d'obtenir un nombre inférieur ou égal à 5 *est égale à* $\frac{2}{3}$.
D'autre part, si on introduit les évènements A = « *obtenir un chiffre inférieur ou égal à* 5 », B = « *obtenir un chiffre pair* ».
Comme on est en situation d'équiprobabilité, on trouve $\mathbb{P}(A) = \frac{5}{6}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ *et* $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{6}$.
On remarque alors que $\frac{2}{3} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Cet exemple motive la définition suivante.

Définition 14 Probabilité conditionnelle
Soient A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B, le réel $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. $\mathbb{P}(A|B)$ est aussi notée $\mathbb{P}_B(A)$.

$\mathbb{P}_B(A)$ représente donc la probabilité de A calculée du point de vue d'un observateur qui arriverait en cours d'expérience, au moment où B vient de se réaliser. Il dispose donc de plus d'informations qu'un observateur qui assiste à l'expérience depuis qu'elle a commencée.

⚠ ATTENTION : en général on ne peut pas comparer les valeurs de $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(A|B)$, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple **:** On lance deux dés distinguables à 6 faces, équilibrés. On considère les évènements A = « la somme des deux chiffres obtenus est 5 », B = « le premier dé donne 3 », et C = « le premier dé donne au moins 3 ».
Alors $\mathbb{P}(A|C) < \mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(A|B)$.

⚠ ATTENTION : il n'existe pas d'évènement (ie de partie de Ω) $A|B$ = « A sachant B ». Pour cette raison il est préférable d'utiliser la notation $\mathbb{P}_B(A)$ au lieu de la notation $\mathbb{P}(A|B)$.

Théorème 15 Propriétés de $\mathbb{P}_B$
Soit B un évènement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

1. Pour tout $A \in \mathscr{F}$, on a : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$.
2. $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$.
   En particulier si A_1 et A_2 sont deux évènements :

$$\mathbb{P}_B(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}_B(A_1) + \mathbb{P}_B(A_2) - \mathbb{P}_B(A_1 \cap A_2) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_B\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}_B(A)$$

On a donc à disposition deux méthodes pour calculer la probabilité d'un évènement non élémentaire :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$$

Ces deux formules s'appuient sur des techniques totalement différentes : la première est basée sur l'incompatibilité, la seconde sur la dépendance entre deux évènements. En pratique, il faut choisir la solution la plus simple (le fait que l'évènement soit composé de $\cup$ ou de $\cap$ n'est pas décisif puisque les lois de Morgan permettent d'inverser ces symboles).

***Exemple* :** On lance deux dés à 6 faces : calculer la probabilité d'obtenir deux nombres de la même parité.

***Exemple* :** On tire deux fois une boule, sans remise, dans un une urne composée de 6 boules blanches et 2 noires : calculer la probabilité d'obtenir deux boules blanches.

3.2 Formule des probabilités composées

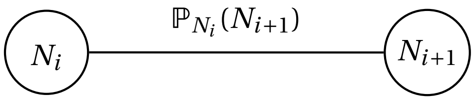
Théorème 16 Formule des probabilités composées / Formule du conditionnement multiple
Soit $(A_1, \dots, A_n)$ des évènements tels que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) &= \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k}(A_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i \middle| \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k\right)\end{aligned}$$

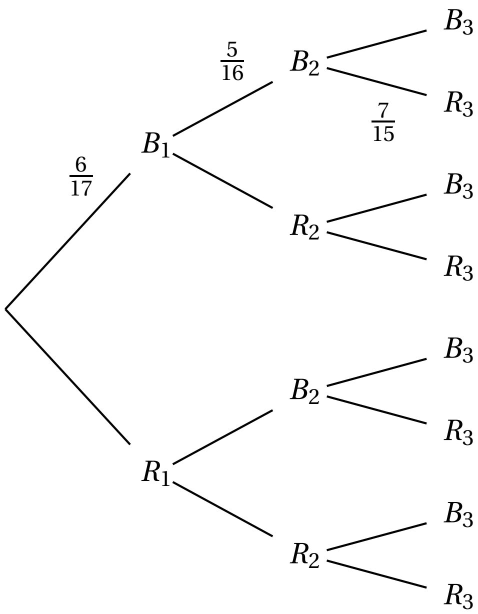
avec la convention que, pour $i = 1$: $\mathbb{P}\left(A_i \middle| \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k\right) = \mathbb{P}(A_1)$.

Interprétation sur un arbre :

D'un noeud N_i à un noeud N_{i+1}, on trace une arête étiquetée par la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(N_{i+1}|N_i)$. La probabilité de la branche complète est alors obtenue en multipliant entre elles les probabilités conditionnelles placées sur les arêtes.



***Exemple* :** On considère une urne composée de 6 boules blanches et 7 boules rouges. On effectue 3 tirages successifs d'une boule sans remise. Pour $i = 1$, 2 et 3, on pose B_i = « le i-ième tirage donne une boule blanche », et on définit de même l'évènement R_i.



Alors : $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap R_3) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(R_3) = \dfrac{6}{13} \times \dfrac{5}{12} \times \dfrac{7}{11}$.

⚠ ATTENTION : il faut respecter l'ordre chronologique dans le conditionnement ! Sur l'exemple précédent on pouvait aussi écrire que : $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap R_3) = \mathbb{P}(R_3) \times \mathbb{P}_{R_3}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_2 \cap R_3}(B_1)$, mais cela ne permet pas de faire le calcul !

3.3 Formule des probabilités totales

Théorème 17 Formule des probabilités totales
On se donne un système complet d'évènements $(A_1, \ldots, A_n)$. Pour tout évènement B, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)$$

La formule des probabilités totales est très utile lorsqu'on effectue une expérience aléatoire en plusieurs étapes. Elle permet de raisonner par disjonction des cas, suivant le résultat de la première étape.

Complément : On dit que qu'une famille d'évènements $(A_i)_{i\in I}$ est un **système quasi-complet d'évènements** (ou une partition de Ω) lorsque :
(i) $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$
(ii) les $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux incompatibles.
La différence avec un s.c.e. est qu'on peut avoir $\mathbb{P}(A_i) = 0$ pour certaines valeurs de l'indice i. Pour ces valeurs $\mathbb{P}_{A_i}(B)$ n'existe pas ...mais on a tout de même la formule suivante :

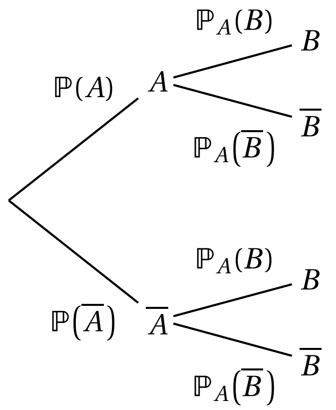
$$\forall B \in \mathscr{F}, \quad \mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

En pratique, l'intérêt de cette généralisation réside dans le fait qu'on ne peut pas toujours vérifier que $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$, et dans ce cas on se contente d'un système quasi-complet d'évènements.

Interprétation sur un arbre :

Sur un arbre à deux générations, on multiplie les probabilités le long d'une branche et on additionne les branches qui réalisent l'évènement considéré.

Par exemple avec un s.c.e. à deux évènements $\left(A, \overline{A}\right)$:

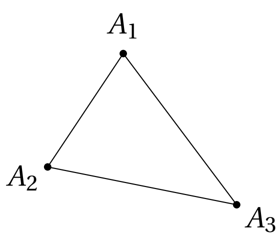


On lit sur l'arbre la formule :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$$

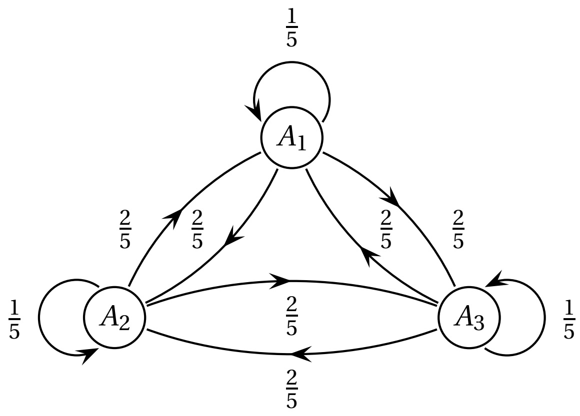
***Exemple* :** On dispose de deux pièces : l'une honnête, l'autre truquée avec deux faces pile. On choisit une pièce au hasard et on la lance. Alors $\mathbb{P}($ « obtenir pile » $) = \dfrac{3}{4}$.

***Exemple* : Chaîne de Markov**. On considère un point qui se déplace sur les sommets d'un triangle $A_1A_2A_3$:



On suppose qu'initialement le point se trouve en A_1. Ensuite les déplacements s'effectuent de la manière suivante :
• si le point est en A_i alors il passe en A_j $(j \neq i)$ avec probabilité $\dfrac{2}{5}$ dans les deux cas ;
• le point reste en A_i avec probabilité $\dfrac{1}{5}$.

On peut résumer ceci grâce à un diagramme de transition :



Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit les évènements :
• U_n = « Après n déplacements le point se trouve en A_1 » ;
• V_n = « Après n déplacements le point se trouve en A_2 » ;
• W_n = « Après n déplacements le point se trouve en A_3 ».

On pose alors, pour tout $n \geq 1$: $u_n = \mathbb{P}(U_n)$, $v_n = \mathbb{P}(V_n)$ et $w_n = \mathbb{P}(W_n)$.

Les conditions initiales sont $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, $w_0 = 0$, et grâce à la formule des probabilités totales, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n + \frac{2}{5}w_n \\ \\ v_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5}v_n + \frac{2}{5}w_n \\ \\ w_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n + \frac{1}{5}w_n \end{cases}$$

On peut alors déterminer les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n, grâce au calcul matriciel. En effet, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

où A est la matrice donnée par $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

Le problème est donc ramené au calcul des puissances de la matrice A.

3.4 Formule de Bayes

On va essayer de relier les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_A(B)$, ce qui permettra en pratique d'inverser causes et conséquences.

Théorème 18 Formule de Bayes
On se donne un système complet d'évènements $(A_1,\dots,A_n)$. Pour tout évènement B non négligeable, on a :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B)\times\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B)\times\mathbb{P}(A_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{P}_{A_k}(B)\times\mathbb{P}(A_k)}$$

En particulier avec un s.c.e. de la forme $\left(A,\overline{A}\right)$:

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\times\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_A(B)\times\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}_A(B)\times\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)\times\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)}$$

***Exemple* : Test d'une maladie rare.** Un laboratoire propose un test de dépistage d'une maladie. La notice précise la qualité du test :
• lorsque le test est appliqué à une personne malade, le test est positif dans 99,8% des cas ;
• lorsqu'il est appliqué à une personne saine, il est négatif dans 99,6% des cas.ı
D'autre part, on sait qu'une personne sur 100 000 est malade.

Peut-on avoir confiance en ce test ? À priori oui, mais on est bien étonné de trouver que sachant que le test est positif, il n'y a que 0,25% de chances que la personne soit malade !

4 Indépendance

Dans tout ce paragraphe, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$.

4.1 Indépendance de deux évènements

Définition 19 Indépendance de deux évènements
Soient A et B deux évènements.
On dit que A et B sont indépendants lorsque $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)$.
On le note $A \perp\!\!\!\perp B$.

Le résultat suivant donne un sens intuitif à cette définition.

Proposition 20 Lien entre indépendance et probabilité conditionnelle
Si A et B sont deux évènements avec B non négligeable : $A \perp\!\!\!\perp B$ si, et seulement si, $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

En pratique, nous verrons que l'indépendance ne se démontre pas, mais fait des hypothèses de modélisation. Elle permet de simplifier les calculs.

***Exemple* :** Lorsqu'on lance plusieurs fois une pièce de monnaie, ou lorsqu'on effectue plusieurs tirages avec remise dans une urne, on pourra supposer que les répétitions sont effectuées de manière indépendante.

⚠ ATTENTION : ce n'est pas si simple ! Si on lance deux fois une pièce, les évènements $A =$ « obtenir pile au premier lancer » et $B =$ « obtenir face au second lancer » sont indépendants, mais les évènements $C =$ « obtenir pile » et $B =$ « obtenir face » ne le sont pas.

⚠ ATTENTION : cette notion dépend du choix de la probabilité $\mathbb{P}$. En particulier si on a trois évènements A, B et C : on peut avoir A et B indépendants pour $\mathbb{P}$, mais A et B non indépendants pour $\mathbb{P}$ sachant C (ie pour $\mathbb{P}_C$) :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \quad \text{mais} \quad \mathbb{P}_C(A \cap B) \neq \mathbb{P}_C(A) \times \mathbb{P}_C(B)$$

ou l'inverse : A et B indépendants pour $\mathbb{P}_C$, mais A et B non indépendants pour $\mathbb{P}$, comme le montre l'exemple suivant.

***Exemple* :** On dispose de deux pièces : un équilibrée et une truquée (deux piles). On lance un dé (non truqué) à 6 faces :
• si on obtient le chiffre 1, on lance deux fois la pièce équilibrée ;
• si on obtient un chiffre différent de 1, on lance deux fois la pièce truquée.
On note $A =$ « obtenir pile au premier lancer de la pièce », $B =$ « obtenir pile au second lancer de la pièce », et $C =$ « le lancer du dé donne le chiffre 1 ».
Alors $A \perp\!\!\!\perp B$ pour $\mathbb{P}_C$ (et pour $\mathbb{P}_{\overline{C}}$), mais $A \not\perp\!\!\!\perp B$ pour $\mathbb{P}$.

Proposition 21 Indépendance et contraire
Si $A \perp\!\!\!\perp B$, alors $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$, $\overline{A} \perp\!\!\!\perp B$ et $\overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$.

4.2 Indépendance mutuelle

On se donne n évènements $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Définition 22 Indépendance deux à deux
On dit que $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont deux à deux indépendants lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \perp\!\!\!\perp A_j$$

On a donc : $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2)$. Mais par contre, on ne peut rien dire sur $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Pour cela on a besoin d'une notion plus forte.

Définition 23 Indépendance mutuelle
On dit que A_1, A_2, ..., A_n sont mutuellement indépendants lorsque :

$$\forall J \subseteq [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in J} A_k\right) = \prod_{k\in J} \mathbb{P}(A_k)$$

Dans ce cas on peut dire que : $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$.

En pratique, l'hypothèse d'indépendance mutuelle fera partie des hypothèses de modélisation. Elle ne sera pas démontrée.

4.2.1 Propriétés de l'indépendance

On se donne une famille finie d'évènements $(A_1,\ldots,A_n)$.

Théorème 24 Lien entre indépendance mutuelle et indépendance deux à deux
Si les évènements $(A_1,\ldots,A_n)$ sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants.

⚠ ATTENTION : la réciproque est fausse. Nous verrons un contre-exemple en TD.

Théorème 25 Lemme des coalitions
On suppose que les évènements $(A_1,\ldots,A_n)$ sont mutuellement indépendants.

1. Si pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $B_k = A_k$ ou $\overline{A_k}$, alors les évènements $(B_1,\ldots,B_n)$ sont encore mutuellement indépendants.
2. Pour toute partie $J \subseteq [\![1,n]\!]$, les $(A_k)_{k\in J}$ sont aussi mutuellement indépendants.
3. Pour toute partie $J \subseteq [\![1,n]\!]$, tout évènement construit à partir de $(A_k)_{k\in J}$ est indépendant de tout évènement construit à partir de $(A_k)_{k\notin J}$.

***Exemple* :** On lance 5 fois une pièce de monnaie, et on note A = « obtenir pile aux deux premiers lancers », B = « obtenir pile aux lancers numéros 3 à 5 » et C = « obtenir pile aux lancers numéros 2 à 5 ».
Alors A et B sont indépendants, mais A et C (et de même B et C) pourrait ne pas l'être.

4.3 Compléments sur la formule des probabilités totales : propriété de Markov

Elle n'est pas au programme mais la « propriété de Markov » doit être souvent utilisée, et la rédaction est assez acrobatique vu qu'on fleurte allègrement avec les limites du programme d'ECS...

Nous allons donc donner une liste d'exemples classiques qui devraient permettre de traiter la plupart de situations. Dans chaque, on est dans le cadre de répétitions mutuellement indépendantes d'une même expérience aléatoire, mais le nombre de répétitions est lui-même aléatoire (ce qui complique vraiment les choses).

• **Ruine du joueur.** Un joueur joue à un jeu d'argent : à chaque tour il gagne 1 euro avec probabilité p, ou perd 1 euro avec probabilité $1-p$ ($p \in]0,1[$). On voudrait calculer la probabilité qu'il termine ruiné (ou bout d'un nombre quelconque de tours), partant d'une fortune initiale de n euros ($n \in \mathbb{N}$). On note cette probabilité u_n ; notons que $u_0 = 1$ puisqu'il commence ruiné.

La formule des probabilité totales (et la propriété de Markov qu'il ne faut pas citer puisque hors-programme) donnent que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = p.u_{n+1} + q.u_{n-1}$$

On est ramené à l'étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 qui s'étudie simplement...

• **Le lion et les gazelles.** À chaque repas, un lion mange soit un zèbre avec probabilité $\frac{1}{3}$, soit une gazelle avec probabilité $\frac{2}{3}$. On suppose que les compositions des repas du lion sont indépendantes entre elles. On veut calculer la probabilité u_n que le lion mange pour la première fois deux gazelles consécutives à son $n^{\text{ième}}$ repas ($n \geq 2$).
La formule des probabilité totales (et la propriété de Markov qu'il ne faut pas citer puisque hors-programme) donnent que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+2} = \frac{1}{3}.u_{n+1} + \frac{2}{9}.u_n$$

On est ramené à l'étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 qui s'étudie simplement...

• **Modèle de Galton-Watson.** On considère une cellule qui peut se diviser en 2 (par mitose) avec probabilité p, ou mourir avec probabilité $1-p$ ($p \in]0,1[$). On veut calculer la probabilité que sa lignée soit éteinte à la $(n+1)^{\text{ième}}$ génération. On note cette probabilité u_n ; notons que $u_0 = 1-p$.

La formule des probabilité totales (et la propriété de Markov qu'il ne faut pas citer puisque hors-programme) donnent que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = p.u_n^2 + 1 - p$$

On est ramené à l'étude d'une suite récurrente d'ordre 1 du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Sur ces exemples l'espace probabilisé n'est pas fini (en toute rigueur), mais ils sont tout de même compréhensible dans ce chapitre puisque les évènements considérés sont inclus dans des univers finis.

5 Exercices

Calcul des probabilités :

Exercice 1 Soient A et B des événements aléatoires avec $\mathbb{P}(A) = 1/2$ et $\mathbb{P}(B) = 1/3$.

1. Donnez un encadrement de $\mathbb{P}(A \cup B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.
2. Déterminez $\mathbb{P}(A \cup B)$ lorsque A et B sont incompatibles puis lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$.

Exercice 2 Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace de probabilité avec $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathscr{P}(\Omega)$ la tribu de ses parties et la probabilité $\mathbb{P}$ définie (partiellement, x et y étant à déterminer) par $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\{\omega_3\}) = x$ et $\mathbb{P}(\{\omega_4\}) = y$. Soit les événements $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ et $B = \{\omega_2, \omega_3\}$. Pour un événement quelconque C, on désigne son complémentaire par $\overline{C}$.
1. Combien d'événements pouvons nous considérer dans cet exemple ?
2. On donne $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{8}$. Déterminer complètement la probabilité $\mathbb{P}$.
3. Ici, les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont-ils indépendants ?
4. On rappelle que la différence symétrique $A \Delta B$ peut être définie par $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.
Calculer $\mathbb{P}(A \Delta B | \overline{B})$, c'est-à-dire la probabilité conditionnelle de $A \Delta B$ sachant $\overline{B}$ réalisé.

Exercice 3 On considère une classe de n élèves. Pour chaque élève, on suppose que chaque jour de l'année a la même probabilité d'être le jour de son anniversaire et on ne prend pas en compte les années bissextiles.

1. Calculez la probabilité que deux élèves au moins de cette classe aient leur anniversaire le même jour. À partir de combien d'élèves cette probabilité devient supérieure à 0.5 ? A 0.8 ? Comment interpréter ce résultat ?
2. Calculez la probabilité qu'au moins un élève soit né le même jour que le professeur. Comparez le résultat obtenu avec le précédent.

Exercice 4 Un bibliothécaire fou permute au hasard les n livres de sa bibliothèque.

1. (a) Quelle est la probabilité que les volumes 1 et 2 de "Guerre et Paix" de Tolstoï se retrouvent côte à côte dans le bon ordre ?
   (b) Dans n'importe quel ordre ?
2. (a) Quelle est la probabilité qu'aucun livre n'ait changé de place ?
   (b) Qu'exactement un livre ait changé de place ?
   (c) Qu'exactement deux livres aient changé de place ?

Probabilités conditionnelles :

Exercice 5 On considère trois cartes : une avec les deux faces rouges, une avec les deux faces blanches, et une avec une face rouge et une face blanche. On tire une carte au hasard, on expose une face au hasard : elle est rouge.
Quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ? (Construisez d'abord un arbre adéquat).

Exercice 6 Mon voisin a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?
Ma voisine a deux enfants. Le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité pour que le plus âgé soit un garçon ?

Exercice 7 On cherche un parapluie qui avec la probabilité $p/7$ se trouve dans l'un quelconque des sept étages d'un immeuble ($0 \leq p \leq 1$).

1. Quelle est la probabilité que la parapluie se trouve dans l'immeuble ?
2. On a exploré en vain les six premiers étages. Quelle est la probabilité que le parapluie se trouve au septième étage ?

Exercice 8 Considérons une urne contenant six boules blanches et quatre boules rouges.

1. Quelle est la probabilité de la suite "blanc, blanc, rouge" si on tire 3 boules sans remise ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au total deux blanches et une rouge si on tire 3 boules sans remise ?

Exercice 9 On considère n urnes ($n \geq 1$), numérotées de 1 à n. L'urne numérotée k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

Exercice 10 Sur Orion, les Rigolus et les Tristus cherchent à faire la paix. Heureusement, il y a trois fois plus de Rigolus que de Tristus. Pour la paix, les Rigolus sont à 60% favorables, 16% y sont opposés et 24% sont sans opinion. Par contre, pour la guerre, les Tristus sont à 68% favorables, 12% opposés et 20% sans opinion. Vous rencontrez par hasard un habitant d'Orion (on ne vous demande pas la probabilité de le rencontrer..) et vous lui demandez son opinion.
1. Calculer la probabilité qu'il soit sans opinion.
2. S'il vous répond qu'il est favorable à la paix, quelle est la probabilité qu'il soit un Rigolus ?
3. Finalement, s'il vous répond qu'il est favorable à la guerre, quelle est la probabilité qu'il soit un Tristus ?

Indépendance :

Exercice 11 On jette trois dés. Calculez :

1. la probabilité d'avoir exactement un 6.
2. la probabilité d'obtenir au moins un 6.
3. la probabilité d'obtenir au moins deux faces identiques.

Exercice 12 On jette deux dès non-pipés, un noir et un blanc. Montrez que les évènements suivants sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants :
- «le chiffre du dè noir est pair»,
- «le chiffre du dè blanc est impair»,
- «les chiffres des deux dès ont même parité».

Exercice 13
1. On dispose d'une urne contenant 3 boules blanches numérotées de 1 à 3 et deux boules noires numérotées de 4 à 5.
   (a) On tire une à une successivement trois boules de l'urne, sans remise. Calculer la probabilité d'obtenir, dans cet ordre, deux boules blanches, puis une noire ? Dans n'importe quel ordre ?
   (b) Mêmes question pour des tirages avec remise.
   (c) Calculer la probabilité d'obtenir, deux boules blanches et une noire lors d'un tirage simultané de trois boules.

1. Dans une urne, on place 7 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement avec remise quatre boules de l'urne. On note N l'événement "obtenir une boule noire" et B l'événement "obtenir une boule blanche".
   (a) Quelle est la probabilité pour que l'on obtienne le résultat (N, N, B, B) dans cet ordre ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches exactement ?
   (c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche ?

Exercice 14 On dispose de 2 dès A et B. Le dé A a 4 faces rouges et 2 faces blanches. Le dé B a 2 faces rouges et 4 faces blanches. On lance une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir "pile" soit 1/3.
- Si on obtient "pile" on décide de jouer uniquement avec le dè A ;
- Si on obtient "face" on décide de jouer uniquement avec le dè B.

1. Calculer la probabilité d'obtenir "rouge" au premier coup, puis au deux premiers coups. Ces deux évènements sont-ils indépendants ?
2. On a obtenu "rouge" aux deux premiers coups. Calculer la probabilité d'obtenir "rouge" au troisième coup.
3. On a obtenu "rouge" aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^*$). Déterminer la probabilité p_n d'avoir utilisé le dè A.

Exercice 15 Un joueur joue à un jeu d'argent contre le casino. On suppose qu'initialement la fortune du joueur est de $a \in \mathbb{N}$ et celle du casino de $N - a$, avec $0 \leqslant a \leqslant N$ et $N \in \mathbb{N}$.
Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$ et $p \neq 1/2$.
A chaque répétition du jeu on suppose que le joueur gagne 1 euros avec probabilité p ou perd 1 euros avec probabilité $q = 1 - p$. Si on note x_n la fortune du joueur à l'issue du n^e jeu, alors :

$$x_0 = a \qquad \text{et} \qquad x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 1 \text{ avec la probabilité } p \\ x_n - 1 \text{ avec la probabilité } q \end{cases}.$$

Le jeu s'arrête dès que x_n prend la valeur 0 (le joueur est ruiné) ou la valeur N (le casino est ruiné).

1. Soit u_a la probabilité que le joueur soit ruiné, étant initialement parti d'une fortune de a. On a en particulier $u_0 = 1$ et $u_N = 0$.
   (a) Montrer que pour tout entier a tel que $1 \leq a \leq N - 1$, on a :
   $$u_a = p u_{a+1} + q u_{a-1}.$$
   (b) Vérifier que :
   $$u_a = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$$
   Déterminer la limite de u_a lorsque $N \to +\infty$ et interpréter le résultat.
2. De même, calculer la probabilité v_a que le casino soit ruiné, le joueur étant initialement parti d'une fortune de a.
3. Calculer la somme $u_a + v_a$. En déduire la probabilité que le joueur et le casino s'affrontent indéfiniment.
4. Reprendre les calculs dans le cas $p = q = \dfrac{1}{2}$.

Chapitre 7

Généralités sur les fonctions numériques

1 Étude d'une fonction réelle d'une variable réelle

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.1 Fonction réelle d'une variable réelle

Définition 1 Fonction réelle d'une variable réelle
On appelle fonction réelle d'une variable réelle toute application $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, où A est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Pour simplifier on dira que f est une fonction réelle.

⚠ ATTENTION : il faut veiller à ne pas confondre les notations f et $f(x)$. f désigne l'application et $f(x)$ désigne l'image de x. L'application f peut être aussi notée $x \longmapsto f(x)$.

1.2 Ensemble de définition

Définition 2 Ensemble de définition
L'ensemble définition d'une fonction réelle f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$, noté $\mathscr{D}_f$, formé des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'expression $f(x)$ est définie.

Exemple **:** $f(x) = \sqrt{x}$ donne $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$.

Exemple **:** $f(x) = \ln(x)$ donne $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

Exemple **:** $f(x) = \mathrm{e}^x$ donne $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.

Exemple **:** $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ donne $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.

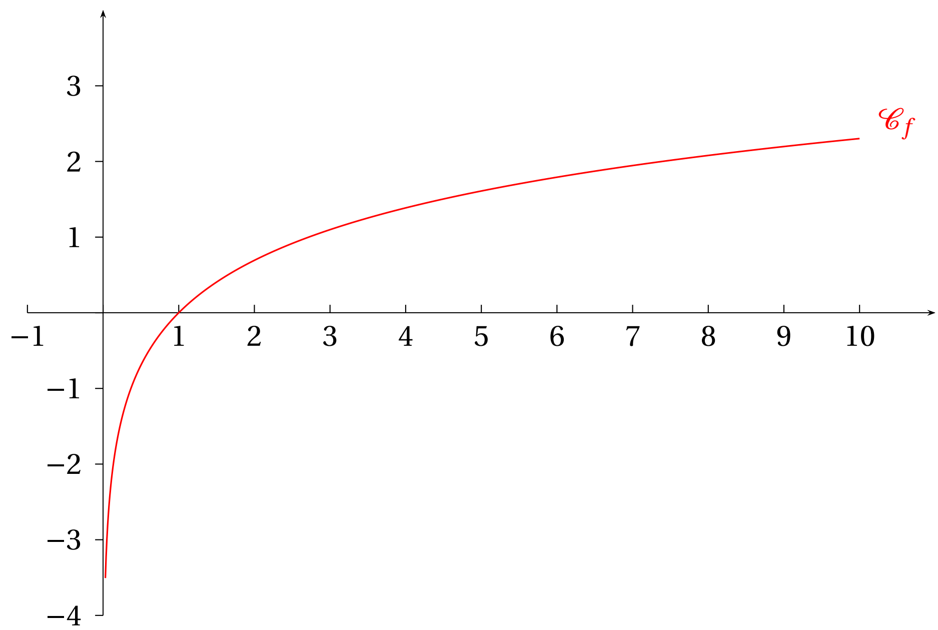
1.3 Représentation graphique de f

Définition 3 Graphe de f
Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$. Le graphe de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, noté G_f, défini par :

$$G_f = \big\{\big(x, f(x)\big) / \; x \in \mathscr{D}_f\big\}$$

Représenter f c'est représenter G_f dans le repère $\big(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\big)$. On obtient une courbe du plan, appelée représentation graphique de f, notée $\mathscr{C}_f$.

***Exemple* :** $f : x \longmapsto \ln(x)$ donne $G_f = \big\{(x, \ln x) / \; x > 0\big\}$.



Définition 4 Périodicité
Soient $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $T > 0$.
La fonction f est dite périodique de période T, ou encore T-périodique, lorsque :
(i) $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ x + T \in \mathscr{D}_f$
(ii) $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(x+T) = f(x)$.

On peut remarquer que si $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, la condition (i) est automatiquement vérifiée. On montre facilement que la condition (ii) entraîne que :

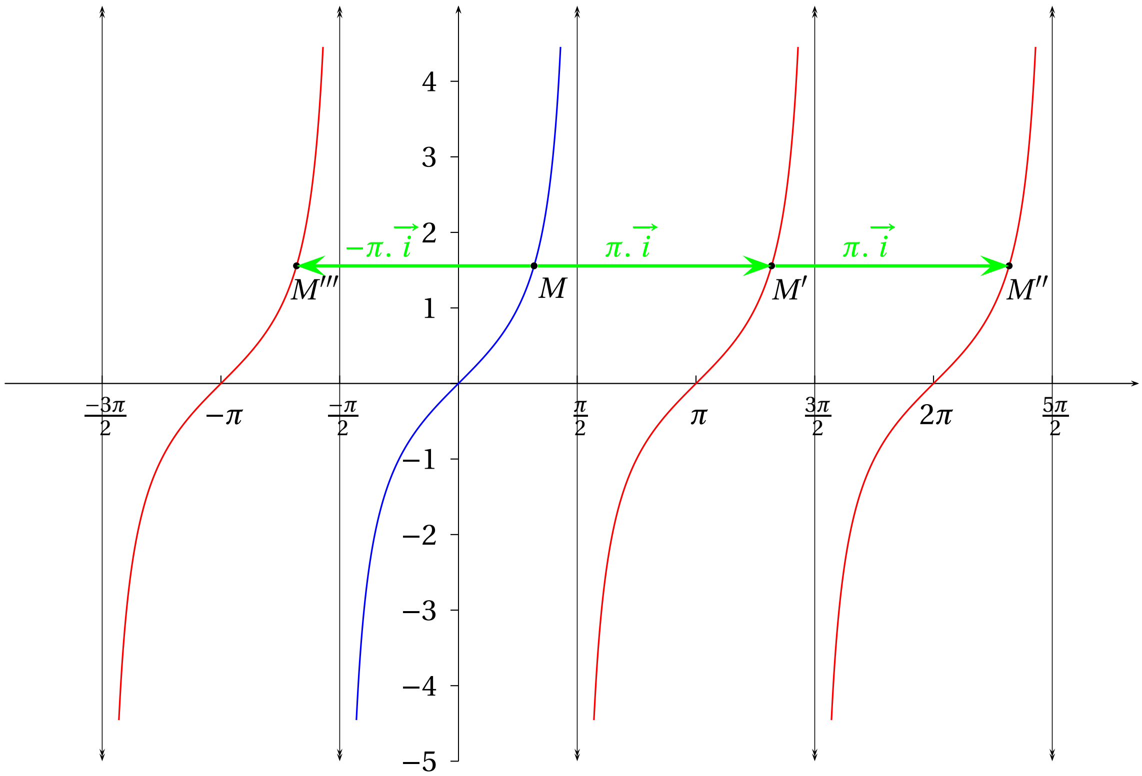
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(x+kT) = f(x)$$

***Exemple* :** La fonction tan est π-périodique.

$\boxed{\text{Interprétation graphique}}$ Si f est T-périodique alors son graphe est invariant par toute translation de vecteur $kT.\overrightarrow{i}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Il suffit donc d'étudier f sur un intervalle de longueur T, ie du type $[a, a+T]$ avec $a \in \mathbb{R}$ (on choisit souvent $[0, T]$ ou $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$). Le reste du graphe de f se déduit ensuite par translations de vecteurs $kT.\overrightarrow{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple **:** Pour la fonction tan.



Définition 5 Parité

Soient $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subseteq \mathcal{D}_f$.

1. La fonction f est dite paire sur A lorsque :
   (i) $\forall x \in A, -x \in A$
   (ii) $\forall x \in A, f(-x) = f(x)$.
2. La fonction f est dite impaire sur A lorsque :
   (i) $\forall x \in A, -x \in A$
   (ii) $\forall x \in A, f(-x) = -f(x)$.

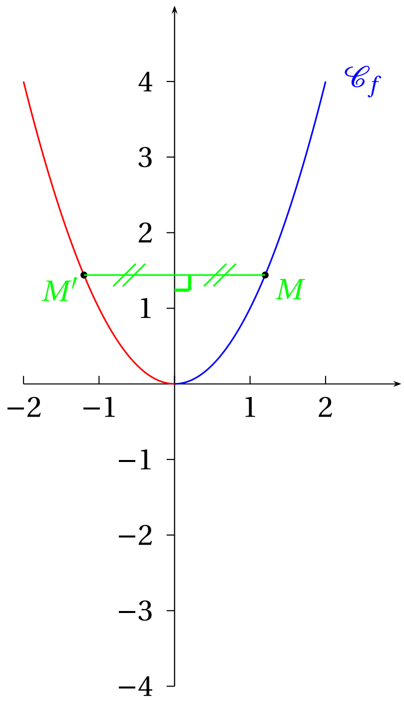
Évidemment si $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, la condition (i) est automatiquement vérifiée.

Exemple **:** La fonction $x \longmapsto x^2$ est paire sur $\mathbb{R}$, et $x \longmapsto x^3$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

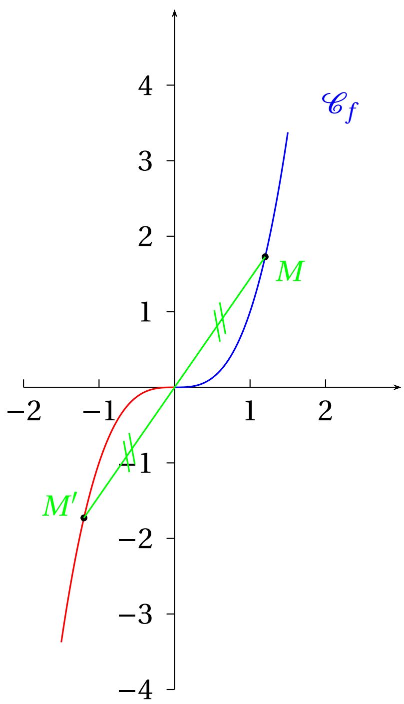
Interprétation graphique

1. Si f est paire alors son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $(0y)$.
   On peut donc restreindre l'étude à $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}^+$ ou $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}^-$.
2. Si f est impaire alors son graphe est symétrique par rapport au point O.
   On peut donc restreindre l'étude à $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}^+$ ou $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}^-$.

Exemple **:** Pour la fonction $x \longmapsto x^2$.



Exemple **:** Pour la fonction $x \longmapsto x^3$.



1.4 Monotonie

Définition 6 Fonction monotone
Soit f fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. f est croissante sur I lorsque :
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$
Dans ce cas :
$$x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$
et
$$f(x) < f(y) \Longrightarrow x < y \Longrightarrow x \leq y$$
⚠ Par contre si on a seulement l'inégalité large $f(x) \leq f(y)$, alors on ne peut pas comparer x et y.
2. f est strictement croissante sur I lorsque :
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$
Dans ce cas :
$$x < y \Longleftrightarrow f(x) < f(y)$$
et
$$x \leq y \Longleftrightarrow f(x) \leq f(y)$$
3. f est décroissante sur I lorsque :
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$$
Dans ce cas :
$$x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$$
et
$$f(x) < f(y) \Longrightarrow x > y \Longrightarrow x \geq y$$
⚠ Par contre si on a seulement l'inégalité large $f(x) \leq f(y)$, alors on ne peut pas comparer x et y.
4. f est strictement décroissante sur I lorsque :
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$$
Dans ce cas :
$$x < y \Longleftrightarrow f(x) > f(y)$$
et
$$x \leq y \Longleftrightarrow f(x) \geq f(y)$$
5. f est dite monotone sur I lorsqu'elle est croissante ou décroissante sur I.
6. f est dite strictement monotone sur I lorsqu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

Exemple **:** $x \longmapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple **:** $x \longmapsto x^2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$.

Exemple **:** $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

On rappelle deux théorèmes bien connus qui seront démontrés dans le chapitre sur les fonctions numériques dérivables.

Théorème 7 Monotonie et signe de la dérivée
On suppose que f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. f est croissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$
2. f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \leq 0$
3. f est constante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) = 0$

Théorème 8 Stricte monotonie et signe de la dérivée
On suppose que f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ sauf éventuellement en des points « isolés » $\Longrightarrow f$ strictement croissante sur I
2. $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ sauf éventuellement en des points « isolés » $\Longrightarrow f$ strictement décroissante sur I

⚠ ATTENTION : si f est strictement croissante sur un intervalle I, on ne peut pas dire que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, comme le montre l'exemple de la fonction $x \longmapsto x^3$.

Exemple **:** $f : x \longmapsto x + \cos(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1.5 Extremums d'une fonction

Définition 9 Fonction majorée/minorée/bornée
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1. On dit que f est majorée sur I lorsque :
$$\exists M \in \mathbb{R} / \ \forall x \in I, \quad f(x) \leq M$$
M est alors appelé majorant de f.
2. On dit que f est minorée sur I lorsque :
$$\exists m \in \mathbb{R} / \ \forall x \in I, \quad f(x) \geq m$$
m est alors appelé minorant de f.
3. On dit que f est bornée sur I lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée sur I, ie lorsque :
$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 / \ \forall x \in I, \quad m \leq f(x) \leq M$$

Proposition 10 Caractérisation des fonctions bornées
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Alors :

$$f \text{ est bornée sur } I \Longleftrightarrow |f| \text{ est majorée sur } I$$

Définition 11 Extremum global
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1. On dit que f admet un maximum global en $x_0 \in I$, lorsque f est majorée par $f(x_0)$:
$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq f(x_0)$$
2. On dit que f admet un minimum global en $x_0 \in I$, lorsque f est minorée par $f(x_0)$:
$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq f(x_0)$$
3. On dit que f admet un extremum global en $x_0 \in I$, lorsque f admet en x_0 un maximum global ou un minimum global.

Définition 12 Extremum global
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1. On dit que f admet un maximum local en $x_0 \in I$, lorsqu'il existe $\delta > 0$ tel que f est majorée par $f(x_0)$ sur $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I$:
$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I, \quad f(x) \leq f(x_0)$$
2. On dit que f admet un minimum local en $x_0 \in I$, lorsqu'il existe $\delta > 0$ tel que f est minorée par $f(x_0)$ sur $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I$:
$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I, \quad f(x) \geq f(x_0)$$
3. On dit que f admet un extremum local en $x_0 \in I$, lorsque f admet en x_0 un maximum local ou un minimum local.

Proposition 13 Un extremum global est local
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Alors :

$$f \text{ admet un extremum global en } x_0 \Longrightarrow f \text{ admet un extremum local en } x_0$$

Théorème 14 Condition nécessaire d'extremum local
Soit f fonction dérivable sur un intervalle I et telle que :
(i) f admet un extremum local en $x_0 \in I$
(ii) $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, ie x_0 n'est pas une borne de I.
Alors $f'(x_0) = 0$. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est donc horizontale.

⚠ ATTENTION : la réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la fonction $x \longmapsto x^3$ en 0.

⚠ ATTENTION : l'hypothèse $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ est essentielle, comme le montre l'exemple de la fonction $x \longmapsto x$ sur $[0,1]$.

Ce résultat donne donc des points x_0 candidats à être des extremums locaux (on les appelle **points critiques** de f : $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ et $f'(x_0) = 0$). Mais il faut ensuite vérifier point par point si on trouve bien un extremum local en ces points, puis faire une étude séparée des bornes de l'intervalle. Pour l'étude des points critiques, on peut utiliser le théorème suivant.

Théorème 15 Condition suffisante d'extremum local en un point critique
Soit f fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un point critique de f.
Si f' change de signe en x_0 alors f admet un extremum local en x_0.

En pratique il suffit de dresser le tableau de variations de f.

***Exemple* :** Déterminer les extremums de la fonction $x \longmapsto -8x^3 + 2x^4 + 8x^2 - 1$.

2 Fonctions usuelles

2.1 Fonction racine n-ième

Pour $n \geq 1$, la fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

On a les valeurs particulières : $\sqrt[n]{0} = 0$ et $\sqrt[n]{1} = 1$.

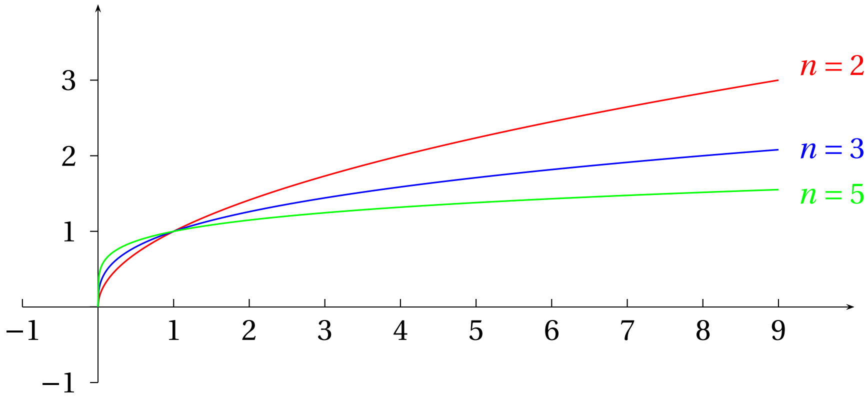
Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable seulement sur $\mathbb{R}_+^*$: elle est continue mais non dérivable en 0. Sa dérivée est donnée par :

$$\forall x > 0, \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$$

et en particulier pour $n = 2$:

$$\forall x > 0, \quad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Représentation graphique :

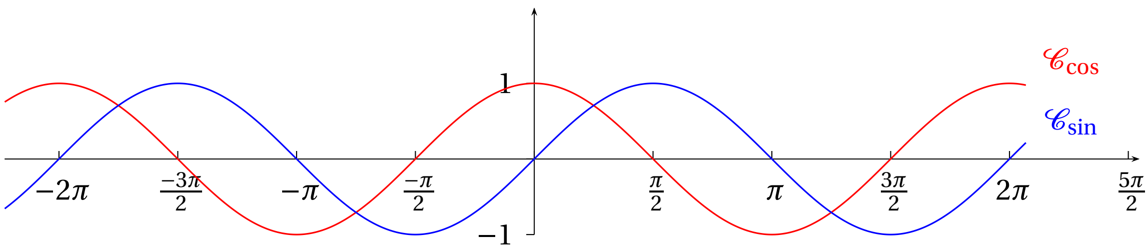


2.2 Fonctions trigonométriques

Les fonctions cos et sin sont dérivables (donc continues) sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin'(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \cos'(x) = -\sin(x)$$

Représentation graphique :

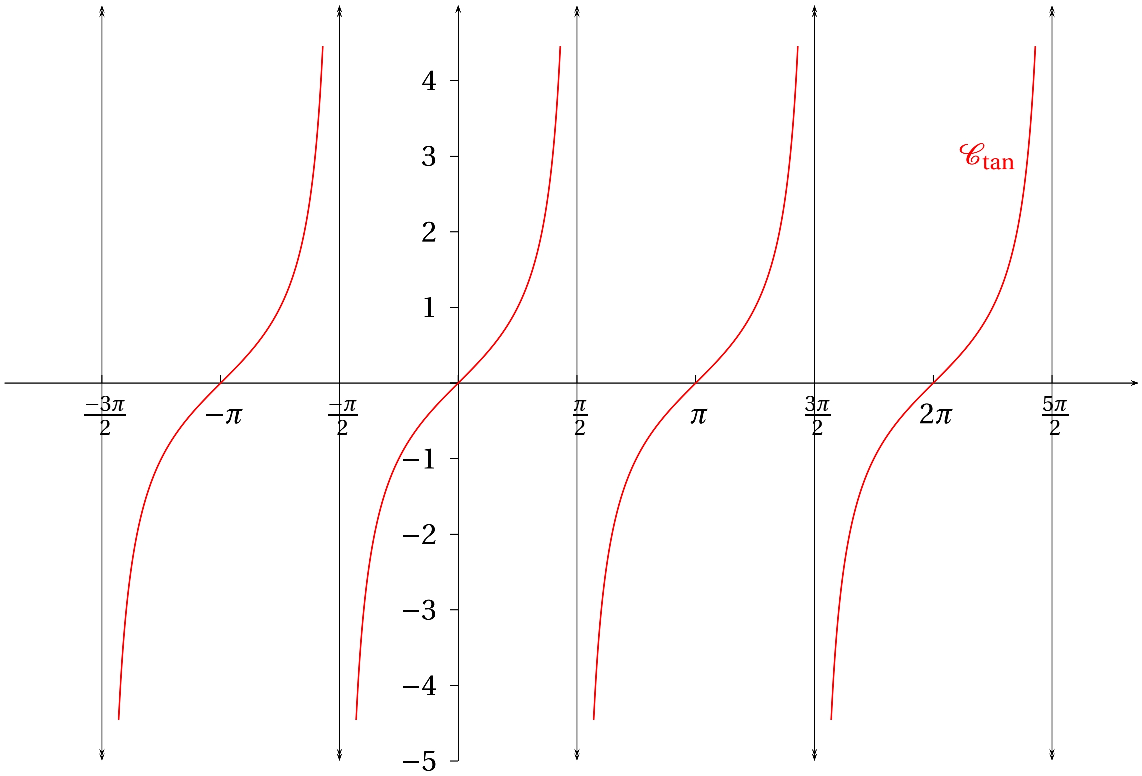


Il faut connaître par coeur les limites suivantes :
$\lim_{x\to 0} \sin(x) = \sin(0) = 0$, $\lim_{x\to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

La fonction tan est dérivable (donc continue) sur $\mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \big/ \ k \in \mathbb{Z} \right\}$ et :

$$\forall x \in \mathscr{D}_{\tan}, \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

Représentation graphique :



Il faut connaître par coeur les limites suivantes :
$\lim_{x\to 0} \tan(x) = \tan(0) = 0$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$.

2.3 Fonctions logarithmes et exponentielles

La fonction exponentielle est définie comme étant l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée, et prenant la valeur 1 en 0. On la note exp ou $x \longmapsto e^x$.

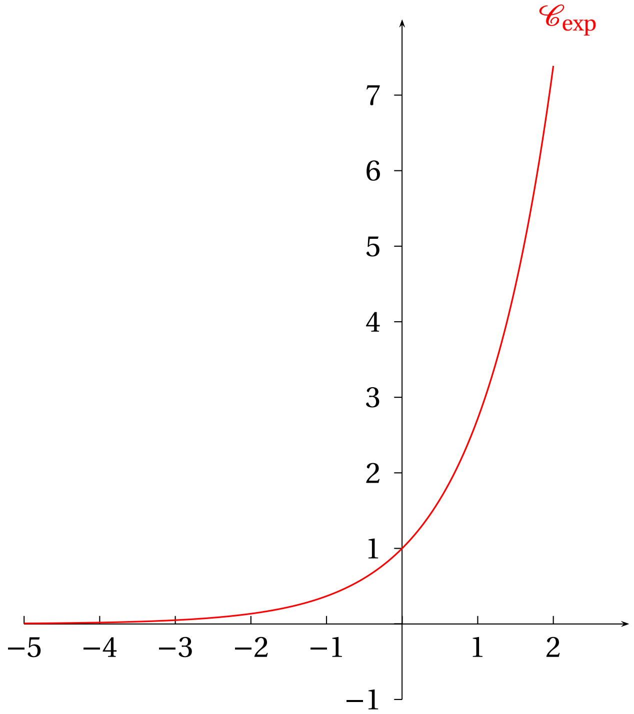
On a les propriétés suivantes.

Proposition 16 Propriétés de la fonction exponentielle

1. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ et donc $e^x \neq 0$
2. $e^0 = 1$
3. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $e^{a+b} = e^a \times e^b$, $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ et $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
4. Plus généralement : $\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\exp\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) = \prod_{i=1}^n e^{a_i}$
5. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\left(e^a\right)^n = e^{na}$
6. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(e^x\right)' = e^x$

Ainsi on a $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$, $e^{-1} = \frac{1}{e}$ ...

Représentation graphique :



Il faut connaître par coeur les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} x e^x = 0$.

La fonction exp est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
exp	0 $\nearrow$	$+\infty$

D'après le théorème de la bijection monotone, elle induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$. On note $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ sa bijection réciproque. Cette fonction est appelée logarithme népérien. On démontrera dans le chapitre sur les fonctions numériques dérivables qu'elle est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}_+^*$.

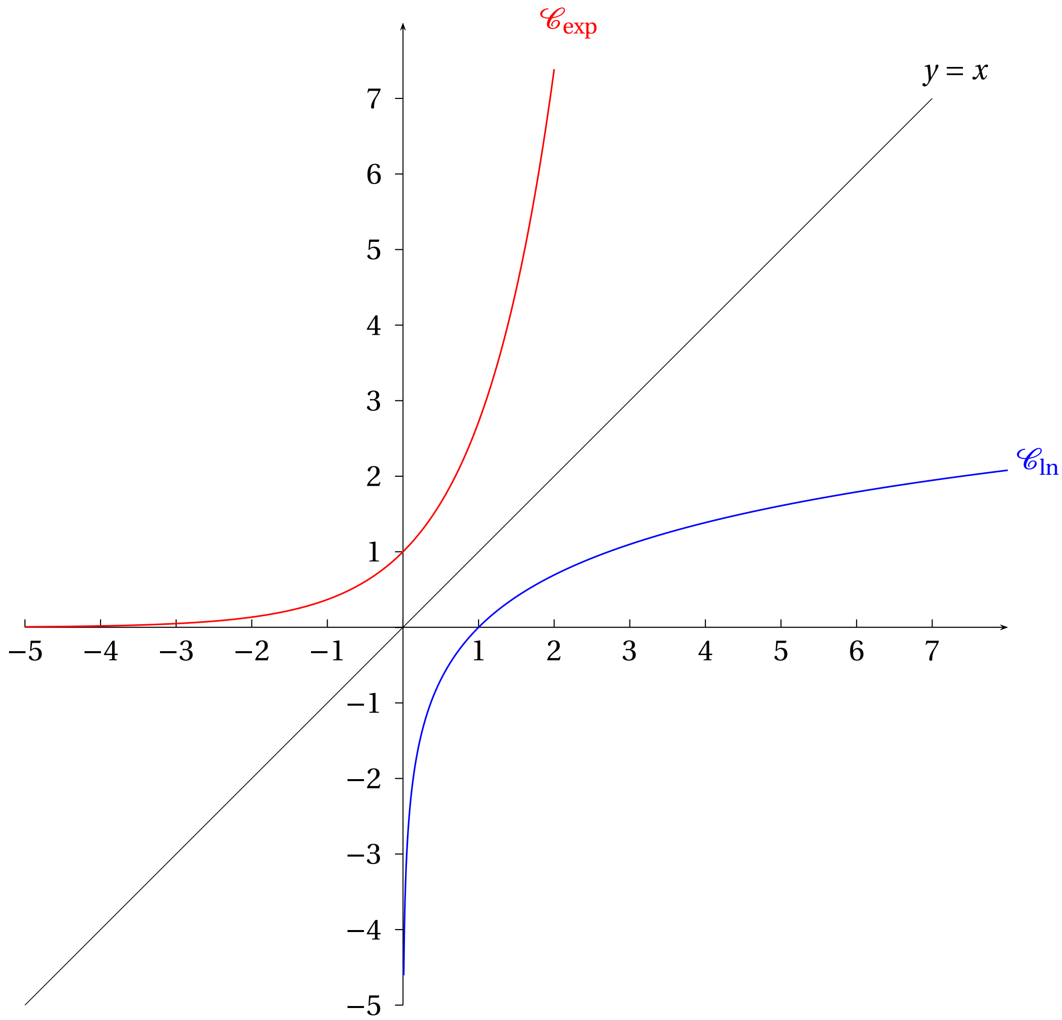
Par définition de la bijection réciproque, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln\left(e^x\right) = x$ et $\forall x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, \quad e^x = y \iff x = \ln y$$

Proposition 17 Propriétés de la fonction logarithme népérien

1. $\ln(x) = 0 \iff x = 1$ et $\ln(x) = 1 \iff x = \mathrm{e}$
2. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ et $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
3. Plus généralement : $\forall (a_1, \ldots, a_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$, $\ln\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln(a_i)$
4. $\forall a > 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$
5. $\forall x > 0$, $\left(\ln(x)\right)' = \dfrac{1}{x}$

On démontrera dans le chapitre sur les fonctions numériques dérivables que les courbes représentatives de exp et ln sont symétriques par rapport à $y = x$:



Il faut connaître par coeur les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1} \ln(x) = \ln(1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$.

2.4 Fonctions puissances réelles

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction puissance α est définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$ par :

$$\forall x > 0 \quad x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$$

On peut vérifier que pour $x > 0$:
- si $n \geq 1$, $\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ termes}} = \mathrm{e}^{n\ln(x)}$;
- si $n = 0$, $\mathrm{e}^{n\ln(x)} = 1$;
- si $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, $\underbrace{\frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \times \cdots \times \frac{1}{x}}_{-n \text{ termes}} = \mathrm{e}^{n\ln(x)}$;
- si $n \geq 1$, $\sqrt[n]{x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(x)}$.

Donc on généralise sur $\mathbb{R}_+^*$ les fonctions puissances entières, et racines n-ièmes définies au lycée.

⚠ ATTENTION : la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est définie **au moins** sur $]0,+\infty[$. Par exemple la fonction $x \longmapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier !! De plus la formule $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\ln(x)}$ n'est intéressante que si $\alpha \notin \mathbb{Z}$: par exemple écrire $x^2 = \mathrm{e}^{2\ln(x)}$ n'est pas plus simple que $x^2 = x \times x$.

On a les propriétés suivantes.

Proposition 18 Propriétés des fonctions puissances
On se donne $x > 0$, $y > 0$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
1. $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$, $\frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$ et $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$;
2. $\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta} = \left(x^\beta\right)^\alpha$;
3. $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = y^\alpha x^\alpha = (yx)^\alpha$.

On démontrera que la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est dérivable (donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$), de dérivée :

$$\forall x > 0, \quad \left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

On en déduit qu'elle est strictement croissante si $\alpha > 0$, strictement décroissante si $\alpha < 0$ (et constante égale à 1 si $\alpha = 0$).

Il faut connaître par coeur les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha > 0 \\ 1 \text{ si } \alpha = 0 \\ +\infty \text{ si } \alpha < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty \text{ si } \alpha > 0 \\ 1 \text{ si } \alpha = 0 \\ 0 \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$$

On a les tableaux de variations :

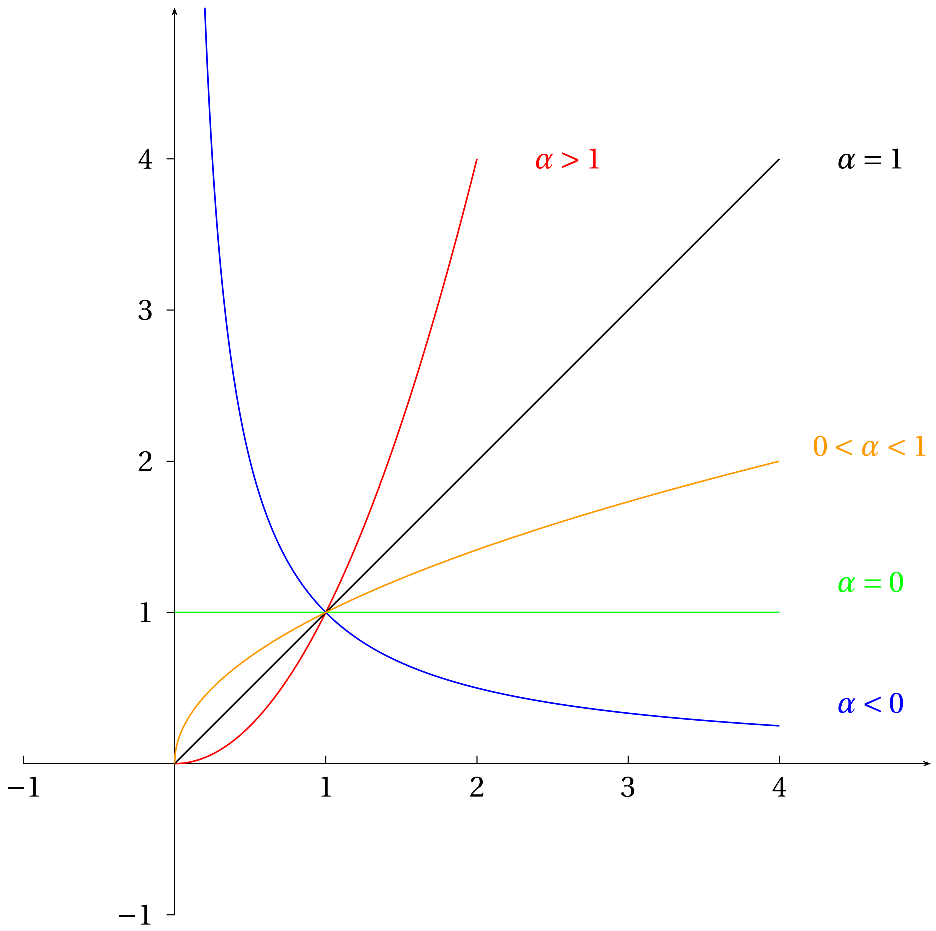
$\boxed{\text{Cas } \alpha > 0}$

x	$0 \qquad\qquad +\infty$
$x \longmapsto x^\alpha$	$0 \nearrow +\infty$

$\boxed{\text{Cas } \alpha < 0}$

x	$0 \qquad\qquad +\infty$
$x \longmapsto x^\alpha$	$+\infty \searrow 0$

et les représentations graphiques (les cas $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$ seront étudiés dans le chapitre sur la dérivabilité) :



2.5 Fonctions logarithmes et exponentielles en base a

Soit $a > 0$ tel que $a \neq 1$, ie $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. On définit les fonctions logarithmes et exponentielles en base a par :

$$\forall x > 0, \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$$

Pour $a = \mathrm{e}$, on retrouve les fonctions logarithme népérien et exponentielle.

On peut montrer qu'elles sont bijections réciproques l'une de l'autre :

$$\forall x > 0, \quad a^{\log_a(x)} = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \log_a\left(a^x\right) = x$$

***Exemple*:** $\log_2(256) = \log_2(2^8) = 8$

On utilisera principalement que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\log_{10}(10^n) = n$.

La fonction $\log_a$ est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée :

$$\forall x > 0, \quad \log_a'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$$

La fonction $x \longmapsto a^x$ est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(a^x\right)' = \ln(a)a^x$$

2.6 Croissances comparées

Théorème 19 Croissances comparées
On se donne trois réels α, β et γ.

1. Pour $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0^+$.
2. Pour $\gamma > 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-\gamma x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{\mathrm{e}^{\gamma x}} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha \mathrm{e}^{\gamma x} = 0^+$.
3. Pour $\gamma > 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^\beta \mathrm{e}^{-\gamma x} = 0$.

De manière mnémotechnique, on peut retenir que : $\ln \ll$ puissance $\ll \exp$

3 Exercices

Exercice 1 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application croissante telle que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f\circ f(x)=x$. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=x$.

Exercice 2 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que :

1. Si f et g sont croissantes sur I alors $f+g$ est croissante sur I.
2. Si f est croissante sur I et g croissante sur J, tel que $f(I)\subset J$, alors $g\circ f$ croissante sur I.
3. Si f et g sont croissantes positives sur I alors $f\times g$ est croissante sur I.

Exercice 3 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T>0$. On suppose que f est monotone, montrer que f est constante.

Exercice 4 Soit $f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ une fonction croissante. Montrer que f a au moins un point fixe. Est-ce vrai si f est décroissante ?
Indications : on pourra poser $\alpha=\sup\left\{x\in[0,1]/\ f(x)>x\right\}$.

Exercice 5 **[Fonctions cosinus, sinus et tangente hyperboliques]**

Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

1. Montrer les formules suivantes, valables pour tous $x,y\in\mathbb{R}$:
$$\cosh x+\sinh x=e^x;\quad \cosh x-\sinh x=e^{-x};\quad \cosh^2 x-\sinh^2 x=1$$
2. Calculer, pour tout $x,y\in\mathbb{R}$, $\cosh(x+y)$, $\cosh(x-y)$, $\sinh(x+y)$ et $\sinh(x-y)$ en fonction de $\cosh x$, $\sinh(x)$, $\cosh y$ et $\sinh y$. En déduire des formules de transformation de sommes en produits de fonctions hyperboliques.

Exercice 6

1. Montrer que : $\forall x>-1,\quad \ln(1+x)\le x$.
2. En déduire que pour tout $n\geqslant 2$: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le e\le\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$.

Exercice 7 Soit $0<a\le b$. On pose $f:x\in\mathbb{R}_*^+\longmapsto\frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$. Etudier la monotonie de f et en déduire que
$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)\le(\ln 2)^2.$$

Exercice 8 Pour $x>0$ simplifier $\left(\exp\left(x^2\right)\right)^{\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}{x}}$.

Exercice 9 Parmi les relations suivantes lesquelles sont exactes :
1) $\left(a^b\right)^c=a^{bc}$ 2) $a^ba^c=a^{bc}$ 3) $a^{2b}=\left(a^b\right)^2$
4) $(ab)^c=a^{\frac{c}{2}}b^{\frac{c}{2}}$ 5) $\left(a^b\right)^c=a^{\left(b^c\right)}$ 6) $\left(a^b\right)^c=(a^c)^b$?

Exercice 10 Résoudre les équations suivantes :
1) $e^x+e^{1-x}=e+1$ 2) $x^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x}\right)^x$ 3) $2^{2x}-3^{x-1/2}=3^{x+1/2}-2^{2x-1}$.

Exercice 11 Résoudre les systèmes suivants :
a) $\begin{cases}8^x=10y\\2^x=5y\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}e^xe^{2y}=1\\2xy=1\end{cases}$

Exercice 12 On veut déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{array}{ll} (i) & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ (ii) & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x)f(y) \end{array}$$

1. Soit f une fonction solution qui n'est pas la fonction nulle.
   (a) Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.
   (b) Déterminer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{Z}$, puis pour $x \in \mathbb{Q}$.
   (c) Montrer que $\forall x \geq 0,\ f(x) \geq 0$. En déduire que f est croissante.
   (d) En déduire que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.
2. Conclure.

Chapitre 8

Limites et comparaison des fonctions numériques

On rappelle que $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$.

1 Limite en un point de $\overline{R}$

1.1 Voisinages d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 1 Voisinages d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$

1. Si $x_0 \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de x_0 tout intervalle V ouvert et centré en x_0, ie du type $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ où $\delta > 0$.
   On définit aussi les voisinages à droite de x_0 par $V_d =]x_0, x_0 + \delta[$, et les voisinages à gauche par $V_g =]x_0 - \delta, x_0[$.
   Remarquons que $x_0 \in V$ mais $x_0 \notin V_d$ et $x_0 \notin V_g$.
2. On appelle voisinage de $+\infty$, tout intervalle V ouvert du type $V =]A, +\infty[$, avec $A \in \mathbb{R}$.
3. On appelle voisinage de $-\infty$, tout intervalle V ouvert du type $V =]-\infty, A[$, avec $A \in \mathbb{R}$.

Proposition 2 Intersection de voisinages
Si $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et si V_1 et V_2 sont deux voisinages de x_0, alors $V_1 \cap V_2$ est encore un voisinage de x_0.
En particulier $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.

1.2 Limite finie en un point $x_0 \in \mathbb{R}$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 3 Limite finie à gauche en x_0
Soit x_0 un point de I, ou la borne droite de I.
On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite à gauche en x_0 lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 / \ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[, \ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On le note $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x_0^-} f = \ell$ ou encore $f(x) \underset{x \overset{<}{\to} x_0}{\longrightarrow} \ell$.
Dans ce cas, on pose $f(x_0^-) = \ell$.

Remarquons qu'on peut avoir $x_0 \notin \mathscr{D}_f$.

On peut remplacer $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ par $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Mais cette dernière inégalité est équivalente à l'encadrement $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$. On obtient donc une nouvelle écriture de la définition :

$$\forall W \text{ voisinage de } \ell, \quad \exists V_g \text{ voisinage à gauche de } x_0 \big/ \ \forall x \in V_g, \ f(x) \in W$$

Exemple **:** $\lim\limits_{x \to 1^-} \lfloor x \rfloor = 0$.

Définition 4 Limite finie à droite en x_0
Soit x_0 un point de I, ou la borne gauche de I.
On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite à droite en x_0 lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 / \ \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[, \ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On le note $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x_0^+} f = \ell$ ou encore $f(x) \underset{x \overset{>}{\to} x_0}{\longrightarrow} \ell$.
Dans ce cas, on pose $f(x_0^+) = \ell$.

Remarquons qu'on peut avoir $x_0 \notin \mathscr{D}_f$.

On peut remplacer $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ par $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, ce qui donne comme précédemment une nouvelle écriture de la définition :

$$\forall W \text{ voisinage de } \ell, \quad \exists V_d \text{ voisinage à droite de } x_0 \big/ \ \forall x \in V_d, \ f(x) \in W$$

Exemple **:** $\lim\limits_{x \to 1^+} \lfloor x \rfloor = 1$.

Définition 5 Limite finie en x_0
Soit x_0 un point de I qui n'est pas une borne de I (ie $x_0 \in \overset{\circ}{I}$).
On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en x_0 lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 / \ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On le note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x_0} f = \ell$ ou encore $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$.

Remarquons cette fois qu'il est nécessaire que $x_0 \in \mathscr{D}_f$.

⚠ ATTENTION ! On ne devrait donc pas écrire que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ puisque la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas définie en 0. On devrait écrire à la place que $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, ou sous-entendre qu'on a posé $\dfrac{\sin(0)}{0} = 1$ pour avoir une fonction définie en 0.

Encore une fois, on peut remplacer $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ par $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, ce qui donne comme précédemment une nouvelle écriture de la définition :

$$\forall W \text{ voisinage de } \ell, \quad \exists V \text{ voisinage de } x_0 \big/ \forall x \in V,\ f(x) \in W$$

Théorème 6 Lien entre $f(x_0)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\ell = f(x_0)$.

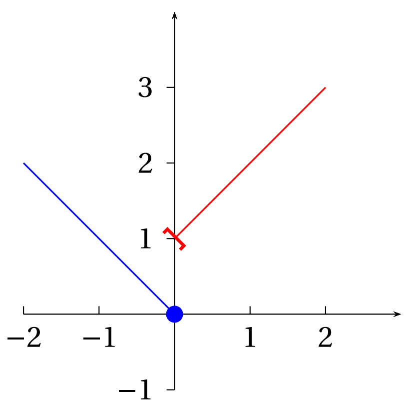
⚠ ATTENTION : ceci est faux avec une limite à gauche ou à droite, comme le montre l'exemple de la fonction partie entière.

Théorème 7 Lien entre $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $f(x_0^+)$ et $f(x_0^-)$

Si $x_0 \in \mathscr{D}_f$:

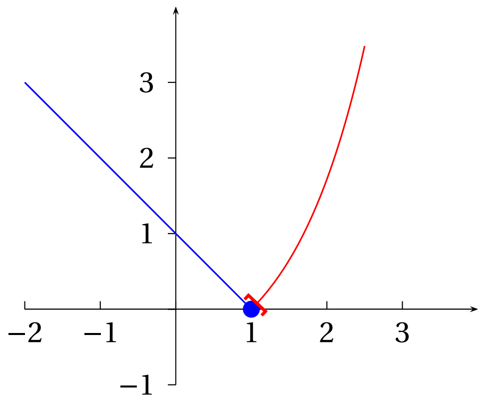
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \begin{cases} f(x_0^-) = \ell \\ f(x_0^+) = \ell \\ \ell = f(x_0) \end{cases}$$

Exemple **:** $f(x) = \begin{cases} -x \text{ si } x \leq 0 \\ x+1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ $\qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$



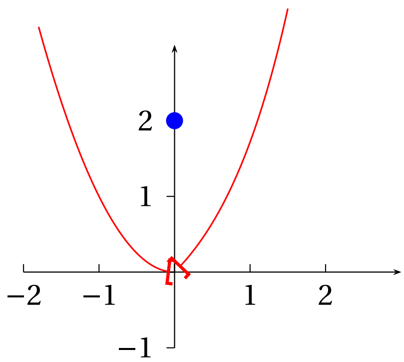
Sur cette exemple $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas puisque $f(0^-) = 0 \neq 1 = f(0^+)$.

Exemple **:** $f(x) = \begin{cases} 1 - x \text{ si } x \leq 1 \\ e^{x-1} - 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$ $\qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$



Sur cette exemple $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$, car $\begin{cases} f(1^-) = 0 \\ f(1^+) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases}$.

***Exemple*:** $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 0 \\ 2 \text{ si } x = 0 \\ e^x - 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ $\qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$



Sur cette exemple $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas, bien que $f(0^-) = f(0^+) = 0$. En effet $f(0) = 2 \neq 0$.

1.3 Limite infinie en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 8 Limite infinie à gauche en x_0
Soit x_0 un point de I, ou la borne droite de I.

1. On dit que f admet $+\infty$ pour limite à gauche en x_0 lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0 / \ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[, \ f(x) \geq A$$

   On le note $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = +\infty$, $\lim_{x_0^-} f = +\infty$ ou encore $f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ <}}{\longrightarrow} +\infty$.
   De manière équivalente :

$$\forall W \text{ voisinage de } +\infty, \quad \exists V_g \text{ voisinage à gauche de } x_0 \,\big/\, \forall x \in V_g,\ f(x) \in W$$

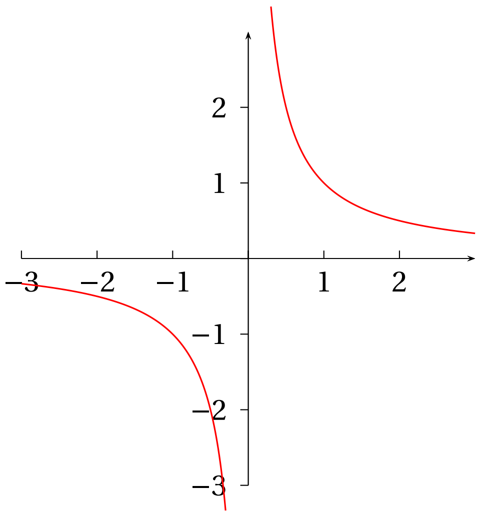
2. On dit que f admet $-\infty$ pour limite à gauche en x_0 lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0 / \ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[, \ f(x) \leq A$$

On le note $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x_0^-} f = -\infty$ ou encore $f(x) \underset{x \overset{<}{\to} x_0}{\longrightarrow} -\infty$.
De manière équivalente :

$$\forall W \text{ voisinage de } -\infty, \quad \exists V_g \text{ voisinage à gauche de } x_0 \Big/ \ \forall x \in V_g, \ f(x) \in W$$

***Exemple* :** $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.



Définition 9 Limite infinie à droite en x_0
Soit x_0 un point de I, ou la borne gauche de I.

1. On dit que f admet $+\infty$ pour limite à droite en x_0 lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0 / \ \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[, \ f(x) \geq A$$

On le note $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x_0^+} f = +\infty$ ou encore $f(x) \underset{x \overset{>}{\to} x_0}{\longrightarrow} +\infty$.
De manière équivalente :

$$\forall W \text{ voisinage de } +\infty, \quad \exists V_d \text{ voisinage à droite de } x_0 \Big/ \ \forall x \in V_d, \ f(x) \in W$$

2. On dit que f admet $-\infty$ pour limite à droite en x_0 lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0 / \ \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[, \ f(x) \leq A$$

On le note $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x_0^+} f = -\infty$ ou encore $f(x) \underset{x \overset{>}{\to} x_0}{\longrightarrow} -\infty$.
De manière équivalente :

$$\forall W \text{ voisinage de } -\infty, \quad \exists V_d \text{ voisinage à droite de } x_0 \Big/ \ \forall x \in V_d, \ f(x) \in W$$

Exemple **:** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

1.4 Limite finie/infinie en $\pm\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 10 Limite finie/infinie en $+\infty$

1. On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en $+\infty$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B \in \mathbb{R} / \ \forall x \geq B, \ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

   On le note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$ ou encore $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
   De manière équivalente :

$$\forall W \text{ voisinage de } \ell, \quad \exists V \text{ voisinage de } +\infty \Big/ \ \forall x \in V, \ f(x) \in W$$

2. On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists B \in \mathbb{R} / \ \forall x \geq B, \ f(x) \geq A$$

   On le note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ ou encore $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   De manière équivalente :

$$\forall W \text{ voisinage de } +\infty, \quad \exists V \text{ voisinage de } +\infty \Big/ \ \forall x \in V, \ f(x) \in W$$

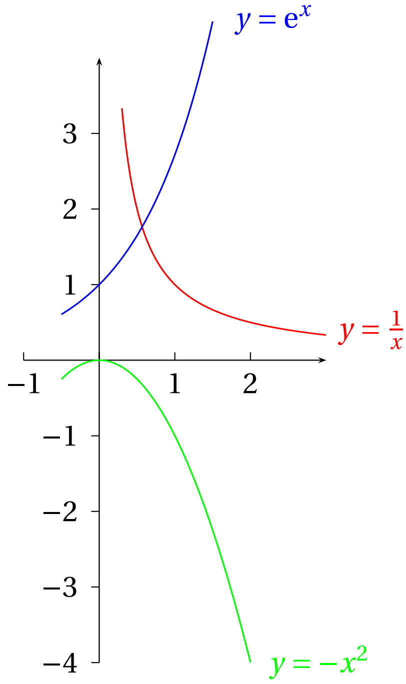
3. On dit que f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists B \in \mathbb{R} / \ \forall x \geq B, \ f(x) \leq A$$

   On le note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ ou encore $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
   De manière équivalente :

$$\forall W \text{ voisinage de } -\infty, \quad \exists V \text{ voisinage de } +\infty \Big/ \ \forall x \in V, \ f(x) \in W$$

Exemple **:** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-x^2\right) = -\infty$.



Définition 11 Limite finie/infinie en $-\infty$

1. On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en $-\infty$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B \in \mathbb{R} / \ \forall x \leq B, \ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On le note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$ ou encore $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \ell$.
De manière équivalente :

$$\forall W \text{ voisinage de } \ell, \quad \exists V \text{ voisinage de } -\infty \Big/ \ \forall x \in V, \ f(x) \in W$$

2. On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists B \in \mathbb{R} / \ \forall x \leq B, \ f(x) \geq A$$

On le note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ ou encore $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
De manière équivalente :

$$\forall W \text{ voisinage de } +\infty, \quad \exists V \text{ voisinage de } -\infty \Big/ \ \forall x \in V, \ f(x) \in W$$

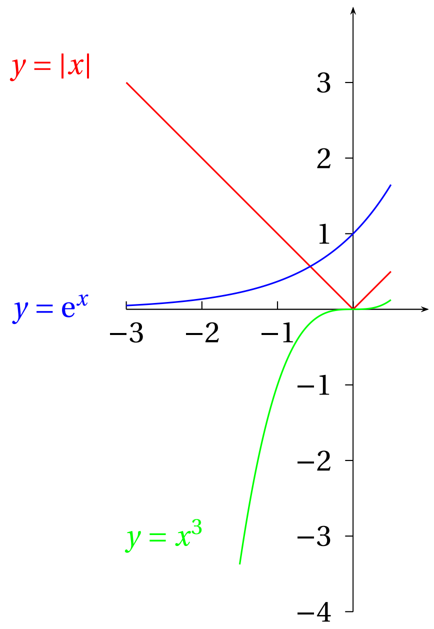
3. On dit que f admet $-\infty$ pour limite en $-\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists B \in \mathbb{R} / \ \forall x \leq B, \ f(x) \leq A$$

On le note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ ou encore $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
De manière équivalente :

$$\forall W \text{ voisinage de } -\infty, \quad \exists V \text{ voisinage de } -\infty \Big/ \ \forall x \in V, \ f(x) \in W$$

Exemple **:** $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} |x| = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.



1.5 Extensions dans le cas d'une limite finie

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Si on a $\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $f(x) \geq l$ au voisinage à droite de x_0, on le note $\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \ell^+$.
- Si on a $\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $f(x) \leq l$ au voisinage à droite de x_0, on le note $\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \ell^-$.
- Si on a $\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $f(x) \geq l$ au voisinage à gauche de x_0, on le note $\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \ell^+$.
- Si on a $\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $f(x) \leq l$ au voisinage à gauche de x_0, on le note $\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \ell^-$.
- Si on a $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $f(x) \geq l$ au voisinage de x_0, on le note $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^+$.
- Si on a $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $f(x) \leq l$ au voisinage de x_0, on le note $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^-$.

Exemple **:** $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0^+$, ce qui permet de conclure que $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

1.6 Unicité de la limite

Théorème 12 Unicité de la limite
Si la limite existe, elle est unique ie :
si on a $(x_0, \ell, L) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^3$ tel que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ alors $\ell = L$.

On a les mêmes résultats quand $x \overset{>}{\to} x_0$ ou $x \overset{<}{\to} x_0$.

2 Théorèmes généraux sur les limites

2.1 Opérations algébriques sur les limites

On se donne f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I (ie que $x_0 \in I$ ou x_0 est une des deux bornes de I).

Dans le théorème suivant, on utilise les règles de calculs dans $\overline{\mathbb{R}}$ définies au chapitre sur les suites réelles (chapitre 4).

Théorème 13 Opérations sur les limites

1. Somme. Si f et g ont une limite en x_0 alors :

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x)+g(x)\big) \overset{\text{existe}}{=} \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

⚠ sauf en cas de FI : $(+\infty)+(-\infty)$.

2. Multiplication par un réel. Si f a une limite en x_0 et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :

$$\lim_{x\to x_0} \lambda.f(x) \overset{\text{existe}}{=} \lambda \times \lim_{x\to x_0} f(x)$$

⚠ sauf en cas de FI : $0\times(\pm\infty)$.

3. Produit. Si f et g ont une limite en x_0 alors :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\times g(x) \overset{\text{existe}}{=} \lim_{x\to x_0} f(x) \times \lim_{x\to x_0} g(x)$$

⚠ sauf en cas de FI : $(+\infty)\times 0$.

4. Inverse. Si f a ont une limite en x_0 alors :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} \overset{\text{existe}}{=} \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$$

⚠ sauf en cas de FI : $\dfrac{1}{0}$ $\left(\text{il faut préciser } \dfrac{1}{0^+} = +\infty \text{ ou } \dfrac{1}{0^-} = -\infty\right)$.

5. Quotient. Si f et g ont une limite en x_0 alors :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{existe}}{=} \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

⚠ sauf en cas de FI : $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ et $\dfrac{0}{0}$.

On a les mêmes résultats avec des limites à droite/gauche.

2.2 Composition de limites

2.2.1 Fonction composée de deux fonctions

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et g une fonction définie sur un intervalle J tel que $f(I) \subseteq J$:

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\ I \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g\circ f"'] & \end{tikzcd}$$

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I (ie $a \in I$ ou a est une borne de I), $b \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à J, et $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

Théorème 14 Théorème de la limite de la fonction composée
On suppose que $\lim\limits_{x \to \boxed{a}} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = \boxed{L}$.

Alors $\lim\limits_{x \to \boxed{a}} g\big(f(x)\big) \overset{\text{existe}}{=} \boxed{L}$.

On a le même résultat avec des limites à droite/gauche.

⚠ ATTENTION ! Ce résultat ne dit pas que $\lim\limits_{x \to a} u(x)^{v(x)} = \left(\lim\limits_{x \to a} u(x)\right)^{\left(\lim\limits_{x \to a} v(x)\right)}$. Par exemple, on verra à la fin du chapitre que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \neq 1$.

2.2.2 Suite composée d'une suite et d'une fonction

On rappelle un théorème vu dans le chapitre sur les suites réelles (chapitre 4, théorème 4.33).

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I à partir d'un rang n_0, ie telle que : $\forall n \geq n_0,\ u_n \in I$. On peut donc considérer la suite $\big(f(u_n)\big)_{n \geq n_0}$.

Soient $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I (ie $\ell \in I$ ou a est une borne de I), et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Théorème 15 Théorème de la limite de la fonction composée
On suppose que (u_n) converge vers $\boxed{\ell}$ et que $\lim\limits_{x \to \boxed{\ell}} f(x) = \boxed{a}$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) \overset{\text{existe}}{=} \boxed{a}$.

On a le même résultat avec des limites à droite/gauche.

Exemple **:** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin(x)$ n'existe pas.

2.3 Limites et inégalités

2.3.1 Limite et inégalités locales

On se donne f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I (ie que $x_0 \in I$ ou x_0 est une des deux bornes de I).

Théorème 16 Limite finie et bornitude
Si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe et est finie, alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel f est bornée.

On a le même résultat avec une limite à droite/gauche et un voisinage à droite/gauche.

Théorème 17 Limite et signe local

1. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$ ou $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, alors il existe un voisinage V de x_0 tel que :
$$\forall x \in V, \quad f(x) > 0$$
2. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) < 0$ ou $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, alors il existe un voisinage V de x_0 tel que :
$$\forall x \in V, \quad f(x) < 0$$

On a le même résultat avec une limite à droite/gauche et un voisinage à droite/gauche.

Corollaire 18 Limite finie et majorant/minorant

1. Si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $f(x) \geq m$ et si f a une limite finie au point x_0 alors :
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \geq m$$
2. Si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $f(x) \leq M$ et si f a une limite finie au point x_0 alors :
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq M$$

On a les mêmes résultats avec une limite à droite/gauche.

⚠ ATTENTION ! Ces résultats sont faux avec des inégalités strictes. Par exemple $\frac{1}{x} > 0$, pour tout $x \in]0, +\infty[$, mais $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Corollaire 19 Passage à la limite dans une inégalité Si on a $\forall x \in I$, $f(x) \leq g(x)$, et si f et g ont une limite finie au point x_0, alors :
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

⚠ ATTENTION ! Encore une fois ce résultat est faux avec une inégalité stricte : $f(x) < g(x)$ ne donne pas $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ mais seulement $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

2.3.2 Calculs de limites par inégalité

On se donne f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I (ie que $x_0 \in I$ ou x_0 est une des deux bornes de I).

Proposition 20 Limite et valeur absolue

1. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|$.
2. Si $\ell \in \mathbb{R}$:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} |f(x) - \ell| = 0$$

Théorème 21 Théorème d'existence de la limite par encadrement

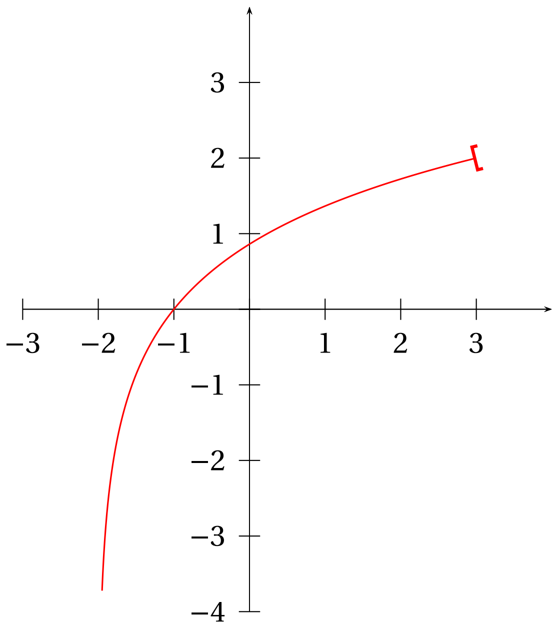
1. Version limite finie.
On suppose que f, g et h sont trois fonctions définies sur I telles que : $\forall x \in I,\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
On suppose de plus que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Alors :
$$\lim_{x\to x_0} g(x) \overset{\text{existe}}{=} \ell$$
2. Version limite infinie.
On suppose que f, g sont deux fonctions définies sur I telles que : $\forall x \in I,\ f(x) \leq g(x)$.
On a :
• Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \overset{\text{existe}}{=} +\infty$.
• Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \overset{\text{existe}}{=} -\infty$.

2.4 Limites des fonctions monotones

Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et f une fonction définie sur $]a, b[$.

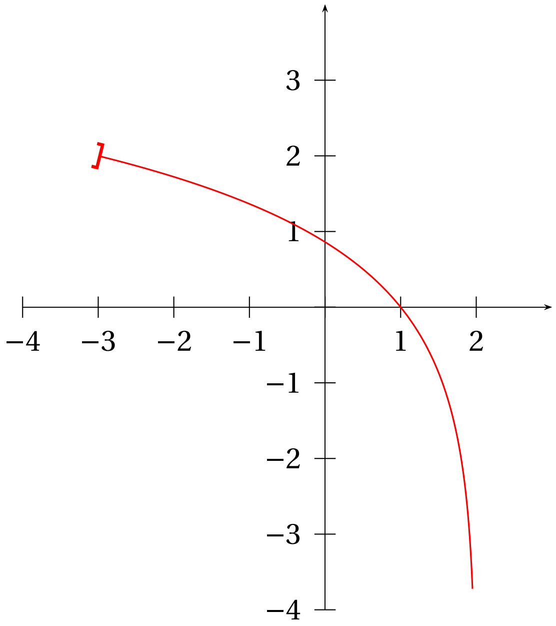
Théorème 22 Théorème de la limite monotone pour une fonction croissante
On suppose que f est croissante sur $]a,b[$. Alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ existent. Plus précisément :
• si f est majorée sur I alors $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ est finie et $\forall x\in]a,b[,\ f(x)\leq \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$;
si f n'est pas majorée sur I, alors $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=+\infty$
• si f est minorée sur I alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ est finie et $\forall x\in]a,b[,\ f(x)\geq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$;
si f n'est pas minorée sur I, alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

***Exemple* :** Une fonction croissante sur $]-2,3[$ majorée mais non minorée.
On a $\lim\limits_{-2^+} f=-\infty$ et $\lim\limits_{3^-} f=2$.



Théorème 23 Théorème de la limite monotone pour une fonction décroissante
On suppose que f est décroissante sur $]a,b[$. Alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ existent. Plus précisément :
• si f est minorée sur I alors $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ est finie et $\forall x\in]a,b[,\ f(x)\geq \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$;
si f n'est pas minorée sur I, alors $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=-\infty$
• si f est majorée sur I alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ est finie et $\forall x\in]a,b[,\ f(x)\leq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$;
si f n'est pas majorée sur I, alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-+\infty$

***Exemple* :** Une fonction décroissante sur $]-3,2[$ majorée mais non minorée.
On a $\lim\limits_{-3^+} f=2$ et $\lim\limits_{2^-} f=-\infty$.



Corollaire 24 Existence de la limite à droite/gauche pour une fonction monotone
Si f est monotone sur un intervalle I alors en tout $x_0 \in I$, $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ existent (en une borne de I une seule de ces deux limites est possible).
De plus, on a :
• si f croissante : $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$;
• si f décroissante : $f(x_0^+) \leq f(x_0) \leq f(x_0^-)$;

3 Comparaison de fonctions

On se donne f et g deux foncions définies sur un intervalle I et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I (ie que $x_0 \in I$ ou x_0 est une des deux bornes de I).

On va définir plusieurs notions permettant de **comparer** les fonctions f et g au voisinage de x_0.

3.1 Fonctions équivalentes

Définition 25 Fonctions équivalentes
On dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0, lorsqu'il existe V voisinage de x_0 et une fonction $u : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in V, \quad f(x) = u(x) \times g(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to x_0} u(x) = 1$$

On le note $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$.

On peut aussi définir $f(x) \underset{x \to x_0^-}{\sim} g(x)$ et $f(x) \underset{x \to x_0^+}{\sim} g(x)$.

Proposition 26 Propriétés de la relation $\sim$
On se donne trois fonctions f, g et h définies sur I.

1. Transitivité. $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h(x)$ donnent $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h(x)$.
2. Symétrie. $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \iff g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x)$.
3. Réflexivité. $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x)$.

La propriété de symétrie donne que si f est équivalente à g au voisinage de x_0, alors g est équivalente à f au voisinage de x_0 : on peut donc aussi dire que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0.

⚠ ATTENTION : ne jamais écrire que $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} 0$. Cela na aucun sens, sauf dans le cas très particulier où f est la fonction constante égale à 0 sur un voisinage de x_0.

Lorsque la fonction g ne s'annule pas sur un voisinage V de x_0 , sauf éventuellement en x_0 (ie $\forall x \in V\setminus\{x_0\}$, $g(x) \neq 0$), on a un critère plus simple.

Théorème 27 Critère d'équivalence
Si g ne s'annule pas sur un voisinage V de x_0, sauf éventuellement en x_0, on a :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Ce résultat est utilisé en pratique pour prouver que $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$.

⚠ ATTENTION : ce n'est pas toujours possible. En effet $f(x) = \frac{x+1}{x}\sin(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \sin(x)$, mais $g(x) = \sin(x)$ s'annule sur tout voisinage de $+\infty$.
Sur cet exemple, la fonction $\frac{f}{g}$ n'existe pas au voisinage de $+\infty$.

Une fonction équivalente renseigne sur le signe.

Théorème 28 Équivalent et signe

1. Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ et si g ne s'annule pas sur un voisinage de x_0, alors f ne s'annule pas sur un voisinage de x_0.
2. Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$, alors f et g sont de même signe au sens strict sur un voisinage de x_0.

Une fonction équivalente permet de calculer une limite.

Théorème 29 Équivalent et limite

1. Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \overset{\text{existe}}{=} \ell$.
2. On a une réciproque dans le cas particulier $\ell \in \mathbb{R}^*$: si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ alors $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \ell$.

On peut effectuer les opérations suivantes sur les fonctions équivalentes.

Proposition 30 Règles de calcul pour la relation ∼

On se donne des fonctions f_1, g_1, f_2 et g_2 définies sur I.

1. Valeur absolue. $f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$ donne $|f_1(x)| \underset{x\to x_0}{\sim} |g_1(x)|$.
2. Produit. $f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_2(x)$ donnent $f_1(x)\times f_2(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)\times g_2(x)$.
3. Puissance. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$ donne $f_1(x)^p \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)^p$.
   Plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $f_1(x)^\alpha \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)^\alpha$ (à condition que ces fonctions soient définies au voisinage de x_0).
4. Inverse. Si $f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$ et si g_1 ne s'annule pas au voisinage de x_0 (sauf éventuellement en x_0), alors $\dfrac{1}{f_1(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} \dfrac{1}{g_1(x)}$.
5. Quotient. Si $f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$, $f_2(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_2(x)$ et si g_1 ne s'annule pas au voisinage de x_0 (sauf éventuellement en x_0), alors $\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} \dfrac{g_2(x)}{g_1(x)}$.

⚠ ATTENTION : par contre il n'est pas possible de faire les opérations suivantes.

• Somme

$f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_2(x)$ ne donnent pas $f_1(x)+f_2(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)+g_2(x)$.

On peut considérer le contre-exemple suivant : $f_1(x) = x^3 + x$ et $g_1(x) = -x^3 + x^2$ lorsque $x \to +\infty$.

• Composition par une fonction

Si h est une fonction, $f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$ ne donne pas $h\circ f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h\circ g_1(x)$.

En particulier $f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$ ne donne pas $\mathrm{e}^{f_1(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} \mathrm{e}^{g_1(x)}$, et $f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$ ne donne pas $\ln\big(f_1(x)\big) \underset{x\to x_0}{\sim} \ln\big(g_1(x)\big)$.

On peut considérer les contre-exemples suivantes : $f_1(x) = x^2 + x$, $g_1(x) = x^2$, $h(x) = \mathrm{e}^x$ puis $f_1(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$, $g_1(x) = 1$, $h(x) = \ln(x)$, dans les deux cas lorsque $x \to +\infty$.

Par contre on peut composer la fonction $x \longmapsto x^\alpha$, c'est le seul cas possible !

• Puissance dépendante de x

$f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$ ne donne pas $f_1(x)^{\alpha(x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} g_1(x)^{\alpha(x)}$.

A partir de $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$, on peut déduire le contre-exemple $f_1(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ et $\alpha(x) = x$.

Le résultat suivant permet de passer de deux fonctions équivalentes à deux suites équivalentes.

Théorème 31 Substitution dans un équivalent
On suppose que $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$.

1. <u>Par une fonction</u>. On suppose qu'on a une fonction $x : t \longmapsto x(t)$ telle que $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x_0$. Alors :
$$f(x(t)) \underset{t\to t_0}{\sim} g(x(t))$$
2. <u>Par une suite</u>. On suppose qu'on dispose d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite x_0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$. Alors :
$$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} g(u_n)$$

⚠ ATTENTION ! Il ne faut pas confondre **substitution** et **composition** (qui n'est pas autorisée avec les équivalents).

On donne des exemples dans le paragraphe suivant.

3.2 Équivalents usuels

Pour les polynômes on a le résultat intuitif vu au lycée.

Théorème 32 Équivalent et polynômes
Si P est une fonction polynôme de la forme $P(x) = a_q x^q + a_{q+1} x^{q+1} + \cdots + a_p x^p$, où $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \geq q$, $a_q \neq 0$ et $a_p \neq 0$. Alors :
• **en** $+\infty$ **:** $P(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_p x^p$ (plus haut degré)
• **en** 0 **:** $P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_q x^q$ (plus bas degré).

Les limites apprises pour les fonctions usuelles donnent les équivalents suivants.

Théorème 33 Équivalents usuels en 0

1. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
2. $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
3. $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
4. $\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$ et $1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$
5. $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$ et $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$
6. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$: $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{\sim} 1$ et $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$

Ces résultats sont à connaître par coeur !

Exemple **:** On a : $\sin(x) + \sin(x)^3 \underset{x \to 0}{\sim} x$ et $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

Exemple **:** On est maintenant en mesure de démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$.

3.3 Notations de Landau

Définition 34 Fonction négligeable
On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0, lorsqu'il existe un voisinage V de x_0 et une fonction $\varepsilon : V \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in V, \quad f(x) = \varepsilon(x) \times g(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

On le note $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o\big(g(x)\big)$, et on le lit « $f(x)$ est un petit o de $g(x)$ lorsque $x \to x_0$ ».

On peut aussi définir $f(x) \underset{x \to x_0^-}{=} o\big(g(x)\big)$ et $f(x) \underset{x \to x_0^+}{=} o\big(g(x)\big)$.

Définition 35 Fonction dominée
On dit que f est dominée par g au voisinage de x_0, lorsqu'il existe un voisinage V de x_0 et une fonction $b : V \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in V, \quad f(x) = b(x) \times g(x) \qquad \text{et la fonction } b \text{ est bornée sur } V$$

On le note $f(x) \underset{x \to x_0}{=} \mathcal{O}\big(g(x)\big)$, et on le lit « $f(x)$ est un grand O de $g(x)$ lorsque $x \to x_0$ ».

On peut aussi définir $f(x) \underset{x \to x_0^-}{=} \mathcal{O}\big(g(x)\big)$ et $f(x) \underset{x \to x_0^+}{=} \mathcal{O}\big(g(x)\big)$.

Lorsque la fonction g ne s'annule pas sur un voisinage V de x_0 , sauf éventuellement en x_0 (ie $\forall x \in V \setminus \{x_0\}$, $g(x) \neq 0$), on a un critère plus simple.

Théorème 36 Critère de négligeabilité et critère de domination

1. Si g ne s'annule pas sur un voisinage V de x_0, sauf éventuellement en x_0, on a :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} o\big(g(x)\big) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

2. Si g ne s'annule pas sur un voisinage V de x_0, sauf éventuellement en x_0, on a :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} \mathcal{O}\big(g(x)\big) \iff \text{la fonction } \frac{f}{g} \text{ est bornée sur un voisinage de } x_0$$

Ce résultat est utilisé en pratique pour prouver que $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big)$ ou que $f(x) \underset{x\to x_0}{=} \mathcal{O}\big(g(x)\big)$.

En particulier, on peut retenir que :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(1) \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

et que :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} \mathcal{O}(1) \iff \text{la fonction } f \text{ est bornée sur un voisinage de } x_0$$

Théorème 37 Lien entre la relation ∼ et « le petit o »

On a :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \iff f(x) - g(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big) \iff g(x) - f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(f(x)\big)$$

On en déduit une méthode simple pour trouver une fonction équivalente à une somme.

Corollaire 38 Équivalent d'une somme

On a :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big) \iff f(x) + g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$$

Le résultat suivant relie le « petit o » et le « grand O ».

Proposition 39 Lien entre « le petit o » et « le grand o »

Si $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big)$ alors $f(x) \underset{x\to x_0}{=} \mathcal{O}\big(g(x)\big)$.

Proposition 40 Règles de calcul pour « le petit o »

On se donne des fonctions f_1, g_1, h_1, f_2 et g_2.

1. Transitivité. $f_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g_1(x)\big)$ et $g_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h_1(x))$ donnent $f_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h_1(x))$.
2. Produit. $f_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g_1(x)\big)$ et $f_2(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g_2(x)\big)$ donnent $f_1(x) \times f_2(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g_1(x) \times g_2(x)\big)$.
3. Somme. $f_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h_1(x))$ et $g_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h_1(x))$ donnent $f_1(x) + g_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h_1(x))$.
4. Multiplication par une constante. $f_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g_1(x)\big)$ donne $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \times f_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g_1(x)\big)$.
5. Multiplication par une fonction. $f_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g_1(x)\big)$ donne $f_1(x) \times h_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g_1(x) \times h_1(x)\big)$.
6. Composition par une fonction équivalente. $f_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g_1(x)\big)$ et $g_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h_1(x)$ donnent $f_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h_1(x))$.

On a des règles de calcul similaires pour le « grand O ».

***Exemple* :** Trouver un équivalent en 0 de $\sin(x) + 1 - \cos(x)$.

3.4 Croissances comparées

Théorème 41 Croissances comparées
On se donne trois réels α, β et γ.

1. Pour $\alpha > 0$: $(\ln x)^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\alpha\right)$ et $|\ln x|^\beta \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$.
2. Pour $\gamma > 0$: $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{\gamma x}\right)$ et $|x|^\alpha \underset{x\to-\infty}{=} o\left(e^{-\gamma x}\right)$.
3. Pour $\gamma > 0$: $(\ln x)^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{\gamma x}\right)$.

De manière mnémotechnique, on peut retenir que : ln $\ll$ puissance $\ll$ exp

4 Développements limités

On notera $f(x) \underset{x\to x_0}{=} g(x) + o\big(h(x)\big)$ lorsque $f(x) - g(x) \underset{x\to x_0}{=} o(h(x))$.

4.1 Développement limité d'ordre n en un point $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

Définition 42 Développement limité d'ordre n en un point $x_0 \in \mathbb{R}$
Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage de x_0, sauf éventuellement en x_0.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n en x_0 (en abrégé $DL_n(x_0)$), lorsqu'il existe des réels a_0 ,a_1, ..., a_n tels que :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o\big((x-x_0)^n\big) \\ &\underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o\big((x-x_0)^n\big) \end{aligned}$$

On peut définir de la même manière un $DL_n(x_0^+)$ de f ou un $DL_n(x_0^-)$ de f.

On utilisera principalement des $DL_n(0)$:

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o\big(x^n\big) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\big(x^n\big)$$

Définition 43 Développement limité d'ordre n en $+\infty$
Soient $n \in \mathbb{N}$, f une fonction définie sur un voisinage de $+\infty$.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n en $+\infty$ (en abrégé $DL_n(+\infty)$), lorsqu'il existe des réels a_0 ,a_1, ..., a_n tels que :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

On peut définir de la même manière un $DL_n(-\infty)$ de f.

Grâce au théorème suivant, on pourra toujours se ramener à des $DL_n(0)$.

Théorème 44 On peut toujours se ramener à un $DL_n(0)$

1. Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage de x_0, sauf éventuellement en x_0.
   On pose $g(h) = f(x_0 + h)$, ie $f(x) = g(x - x_0)$.
   Alors f admet un $DL_n(x_0)$ si et seulement si g admet un $DL_n(0)$, et les coefficients sont les mêmes dans les deux développements. Autrement dit :

$$\begin{aligned} & f(x) \underset{x\to x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o\big((x-x_0)^n\big) \\ \iff & g(h) \underset{h\to 0}{=} a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + o\big(h^n\big) \end{aligned}$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}$, f une fonction définie sur un voisinage de $+\infty$ (resp. de $-\infty$).
   On pose $g(h) = f\left(\frac{1}{h}\right)$, ie $f(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$.
   Alors f admet un $DL_n(+\infty)$ (resp. un $DL_n(-\infty)$) si et seulement si g admet un $DL_n(0^+)$ (resp. un $DL_n(0^-)$), et les coefficients sont les mêmes dans les deux développements. Autrement dit :

$$\begin{aligned} & f(x) \underset{x\to+\infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \\ \iff & g(h) \underset{h\to 0^+}{=} a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + o\big(h^n\big) \end{aligned}$$

4.2 Développements limités usuels en 0

Il faut connaître les formules suivantes **au voisinage de** 0.

• **Exponentielle.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a le $DL_n(0)$ de e^x :

$$\begin{aligned} e^x & \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\big(x^n\big) \\ & \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\big(x^n\big) \end{aligned}$$

***Exemple*:** $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\big(x^2\big)$ et $e^x \underset{x\to 1}{=} e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e}{6}(x-1)^3 + o\big((x-1)^3\big)$.

• **Logarithme.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a le $DL_n(0)$ de $\ln(1+x)$:

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o\big(x^n\big)\\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o\big(x^n\big)\end{aligned}$$

et à l'ordre 0 : $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} 0 + o(1) = \underset{x\to 0}{=} o(1)$.

***Exemple* :** $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\big(x^3\big)$ et $\ln(x) \underset{x\to 1}{=} (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o\big((x-1)^2\big)$.

• **Puissance.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a le $DL_n(0)$ de $(1+x)^\alpha$:

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &\underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots\\ &\qquad \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\times\cdots\times(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o\big(x^n\big)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\times\cdots\times(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o\big(x^n\big)\end{aligned}$$

et à l'ordre 0 : $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + o(1)$.

***Exemple* :** $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o\big(x^2\big)$ et $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o\big(x^2\big)$.

Il faut connaître le cas particulier suivant, pour $\alpha = -1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o\big(x^n\big)\\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o\big(x^n\big)\end{aligned}$$

***Exemple* :** $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + o\big(x^3\big)$.

• **Sinus.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a le $DL_{2n+2}(0)$ de $\sin(x)$:

$$\begin{aligned}\sin(x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\big(x^{2n+2}\big)\\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\big(x^{2n+2}\big)\end{aligned}$$

***Exemple* :** $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\big(x^4\big)$.

• **Cosinus.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a le $DL_{2n+1}(0)$ de $\cos(x)$:

$$\begin{aligned}\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right)\end{aligned}$$

***Exemple* :** $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$ et $\sin(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{=} 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3\right)$.

4.3 Opérations sur les développements limités

Á partir des développements limités précédents, et des règles de calcul suivantes, on peut trouver des développements limités de la plupart des fonctions.

Définition 45 Troncature d'une fonction polynômiale

Soit $f : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ une fonction polynômiale de degré n.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on appelle troncature de f à l'ordre p la fonction notée $T_p(f)$:

$$T_p(f) : x \longmapsto \begin{cases} \sum_{k=0}^{p} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p \text{ si } p \leq n \\ f(x) \text{ si } p \geq n+1 \end{cases}$$

Théorème 46 Règles de calcul sur les développements limités

On suppose que f et g toutes deux un $DL_n(0)$:

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o\left(x^n\right)$$

1. Troncature. Pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, f admet un $DL_p(0)$ obtenu en tronquant son $DL_n(0)$ à l'ordre p :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} a_k x^k + o\left(x^p\right)$$

2. Combinaison linéaire. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda.f + \mu.g$ admet un $DL_n(0)$:

$$\alpha.f(x) + \beta.g(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (\alpha.a_k + \beta.b_k) x^k + o\left(x^n\right)$$

3. Produit. $f \times g$ admet un $DL_n(0)$:

$$f(x) \times g(x) \underset{x\to 0}{=} T_n \underbrace{\left[\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right)\right]}_{\text{à développer}} + o\left(x^n\right)$$

4. Multiplication/division par une puissance de x. Si $p \in \mathbb{Z}$:

$$x^p f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^{k+p} + o\left(x^{n+p}\right)$$

ce qui peut donner un $DL_{n+p}(0)$ (⚠ l'ordre a changé !).

5. Substitution. Si $x : t \longmapsto x(t)$ est une fonction telle que $\lim_{t\to t_0} x(t) = 0$, on a le développement asymptotique :

$$f\left(x(t)\right) \underset{t\to t_0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x(t)^k + o\left(x(t)^n\right)$$

et donc pour $x(t) = t^p$ avec $p \in \mathbb{Z}$:

$$f\left(t^p\right) \underset{t\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k t^{pk} + o\left(t^{np}\right)$$

ce qui peut donner un $DL_{np}(0)$ (⚠ l'ordre a changé !).

⚠Les opérations de composition et de division sont possibles mais ne sont pas au programme.

Exemple **:** Combinaison linéaire.

$$1 - \cos(x) - \sin(x) \underset{x\to 0}{=} -x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$$

Exemple **:** Produit.

$$\frac{e^x}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$

Exemple **:** Multiplication/division par une puissance de x.

$$e^x \frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$

Exemple **:** Substitution.

$$\frac{1}{1+x^3} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^3 + x^6 + o\left(x^6\right) \qquad 2^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x.\ln(2) + x^2\frac{\ln^2(2)}{2} + o\left(x^2\right)$$

On voit déjà se dégager un premier intérêt des développements limités par rapport aux équivalents : la somme de deux développements limités sont autorisés !

4.4 Développements limités et recherche de fonction équivalente

Théorème 47 Fonction équivalente et développements limités
Si f admet un $DL_n(0)$:

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=p}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n + o\left(x^n\right)$$

avec $a_p \neq 0$, alors :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p$$

ie que f est équivalente au premier terme non nul du développement limité.

Un développement limité sera donc utilisé pour trouver l'équivalent d'une somme de fonctions.

Pour un quotient de fonctions, on cherche un développement limité du numérateur et du dénominateur, et on en déduit pour chacun un équivalent, ce qui donne ensuite un équivalent du quotient.

***Exemple* :** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x^2}} = 1.$

5 Exercices

Exercice 1

1. **Opérations sur les limites.** Déterminer les limites suivantes. Si la limite n'existe pas, envisager la limite à droite ou la limite à gauche.
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\ln x + x}$
   (b) $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln x \ln(\ln x)$
   (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln(\sin x) - \ln x)$
   (d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}}$
   (e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$
   (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x(x+1)}$
   (g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$
2. **Quantité conjuguée.** Déterminer les limites suivantes :
   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$
   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{x\sqrt{1+x}-x}$
3. **Limites par encadrement.** Déterminer les limites suivantes :
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\cos e^x}{x^2+1}$
   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\sin x}$
   (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} E\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 2 **Utilisation des équivalents.** Déterminer les limites suivantes.

1. **Logarithme et exponentielle.**
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(1+x) - \ln x)$
   (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^x-1}{x}$
   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x+x^2)}{x^2}$
   (d) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x}$
   (e) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$
2. **Puissances réelles.**
   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4+x}}$

(b) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$

(c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}}$

3. **Fonctions trigonométriques.**

(a) $\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{\pi}{x}$

(b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x)}{1-2\cos(x)}$

(c) $\lim_{x\to1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{e^{-\frac{\pi}{2}x^2}-e^{-\frac{\pi}{2}}}$

Exercice 3 Passer au logarithme dans un équivalent (???)

1. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $x_0 \in \overline{R}$ et à valeurs strictement positives.
On suppose que $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ et que $\lim_{x\to x_0} g(x) = l \in \overline{\mathbb{R}^+}\setminus\{1\}$.
Établir que $\ln f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \ln g(x)$.
2. En déduire un équivalent en $+\infty$ de $f(x)=\ln\left(x^2+2^x\right)$.

Exercice 4 Le théorème des gendarmes permet de trouver des équivalents.
Soit f une fonction telle qu'au voisinage de $+\infty$, on ait :

$$x^2+\frac{1}{x} \leq f(x) \leq x^2+x.$$

Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 5 Calculer les développements limités suivants :

1. $DL_2(0)$ de $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$
2. $DL_3(0)$ de $\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{1+x}$
3. $DL_2(2)$ de $\frac{1}{x}$
4. $DL_3(\pi/4)$ de $\frac{\cos(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\pi-4x}$

Exercice 6 Plus difficile. À l'aide de développements limités, calculer les limites suivants :

1. $\lim_{t\to0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\sin(t)}\right)$ et $\lim_{t\to0}\left(-\frac{1}{t^2}+\frac{\cos(t)}{\sin^2(t)}\right)$
2. $\lim_{x\to0}\left(e^x-\sin(x)\right)^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$
3. $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-\ln(1+x)+\ln(2)-1}{e^x-ex}$

Exercice 7 Utiliser des développements limités pour calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to0} \frac{x\left(2+\cos(x)\right)-3\sin(x)}{x^5}$
2. $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}\right)$
3. $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$
4. $\lim_{x\to0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

Chapitre 9

Polynômes

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1 Polynôme
Une fonction $P : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ est une fonction polynôme (ou plus simplement un polynôme) à coefficients dans $\mathbb{K}$ lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Notations :

• L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$. Il est clair que $\mathbb{R}[X] \subseteq \mathbb{C}[X]$, conséquence immédiate du fait que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
• Si $k \in \mathbb{N}^*$, on note X^k la fonction polynôme $x \longmapsto x^k$.
• Le polynôme $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ se note donc plus simplement $P = P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec la convention $a_0 X^0 = a_0$.

Quelques polynômes particuliers :

• Le polynôme nul : $P(X) = 0_{\mathbb{K}[X]}$, défini par $\forall x \in \mathbb{K}$, $P(x) = 0_{\mathbb{K}}$.
• Les polynômes constants : $P(X) = a \in \mathbb{K}$, définie par $\forall x \in \mathbb{K}$, $P(x) = a$.
• Un polynôme n'ayant qu'un seul (resp. deux, resp. trois) coefficient(s) non nul(s) est appelé monôme (resp. binôme, resp. trinôme).

***Exemple* :** $P(X) = \sqrt{2}$ est constant ; $Q(X) = 2X^2 + X^5$ est un binôme ; $R(X) = -X^3$ est un monôme.

Théorème 2 Unicité des coefficients
Les coefficients d'un polynôme sont uniques, ie que si on a $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$$

alors :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad a_k = b_k$$

Démonstration : On se ramène à : $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = 0_{\mathbb{K}[X]}$. On procède par récurrence sur n et, pour l'hérédité, on calcule $P(2x) - 2P(x)$, pour tout $x \in \mathbb{K}$.

CQFD $\square$

Corollaire 3 Unicité de l'écriture d'un polynôme non nul
Tout $P \in \mathbb{K}[X]$, tel que $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, s'écrit de manière unique $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $\boxed{a_n \neq 0}$.

Définition 4 Degré d'un polynôme
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. On dit que P est de degré n lorsqu'il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $\boxed{a_n \neq 0_{\mathbb{K}}}$.
n est alors unique, on le note $\deg(P)$ ou $d^\circ P$.

On adopte parfois la convention $\deg(0_{\mathbb{K}[X]}) = -\infty$. Cela permet de simplifier certains résultats sur le degré.
Par exemple : P est un polynôme constant $\Longleftrightarrow P = 0_{\mathbb{K}[X]}$ ou $\left(P \neq 0_{\mathbb{K}[X]} \text{ et } \deg(P) = 0\right)$
devient : P est un polynôme constant $\Longleftrightarrow \deg(P) \leq 0$

Notations :

• L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{K}_n[X]$:

$$\mathbb{K}_n[X] = \left\{P \in \mathbb{K}[X] \big/ \deg(P) \leq n\right\}$$

• Il est clair que $\mathbb{K}_n[X] \subseteq \mathbb{K}[X]$, que $\mathbb{K}_n[X] \subseteq \mathbb{K}_{n+1}[X]$ et plus généralement que, si $n \leq m$, $\mathbb{K}_n[X] \subseteq \mathbb{K}_m[X]$.
• De plus on peut remarquer que $\mathbb{K}_0[X]$ désigne l'ensemble des polynômes constants.

Vocabulaire : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.

• Terme dominant de P : c'est le monôme de plus haut degré, de la forme $a_n X^n$ avec $n = \deg(P)$ et $a_n \neq 0_{\mathbb{K}}$.
• Coefficient dominant de P : c'est le coefficient du terme dominant, de la forme a_n avec $n = \deg(P)$ et $a_n \neq 0_{\mathbb{K}}$.

• Terme constant de P : c'est le coefficient de degré 0, noté a_0. Remarquer que c'est la valeur de P en 0 : $P(0) = a_0$.

Définition 5 Polynôme unitaire
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. On dit que P est unitaire lorsque son coefficient dominant est égal à 1.

***Exemple* :** $P(X) = X^5 - 2X + 3$ est unitaire, de degré 5, de terme dominant X^5, de coefficient dominant 1 et de terme constant 3.

Définition 6 Égalité de deux polynômes
Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. Alors :

$$P(X) = Q(X) \iff \forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = Q(x)$$

Théorème 7 Égalité de deux polynômes
Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. Alors :

$$P(X) = Q(X) \iff P \text{ et } Q \text{ ont même degré et même coefficients}$$

1.2 Opérations sur les polynômes

Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit les fonctions suivantes $P+Q$, $\lambda.P$, $P \times Q$ et $Q \circ P$ par :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{K}, \quad (P+Q)(x) &= P(x) + Q(x) \\ (\lambda.P)(x) &= \lambda \times P(x) \\ (Q \circ P)(x) &= Q\big(P(x)\big) \\ (P \times Q)(x) &= P(x) \times Q(x) \end{aligned}$$

On a donc au total quatre opérations : addition, multiplication par un scalaire, composition et produit. Nous admettrons qu'elles donnent toutes un élément de $\mathbb{K}[X]$ et que les règles de calculs sont les mêmes que pour les fonction numériques.

En particulier, on a la propriété d'intégrité :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad (P \times Q)(X) = 0_{\mathbb{K}[X]} \iff P(X) = 0_{\mathbb{K}[X]} \text{ ou } Q(X) = 0_{\mathbb{K}[X]}$$

et la formule du binôme :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \big(P(X) + Q(X)\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times P(X)^k \times Q(X)^{n-k}$$

Un premier théorème donne une formule de calcul des coefficients d'un produit.

Théorème 8 Coefficients d'un produit de polynômes
Si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ alors :

$$(PQ)(X) = \sum_{k=0}^{n+p} c_k X^k \quad \text{avec} \quad c_k = \sum_{\substack{0\leq i\leq n \\ 0\leq j\leq p \\ i+j=k}} a_i b_j$$

Un second théorème donne les règles de calcul du degré.

Théorème 9 Règles de calcul du degré
Soient $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $P(X) \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ et $Q(X) \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.

1. Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$: $\deg(\lambda.P) = \deg(P)$.
2. En général : $\deg(P+Q) \leq \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$
   et si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors $\deg(P+Q) = \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$.
3. $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
4. si $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ et $Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$: $\deg(Q \circ P) = \deg(Q) \times \deg(P)$.

Si $\deg(P) = \deg(Q)$, on peut avoir $\deg(P+Q) < \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$ lorsque les termes dominants s'annulent.

1.3 Parité

Définition 10 Polynôme pair/impair
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. On dit que P est pair lorsque $P(-X) = P(X)$, ie $\forall x \in \mathbb{K}$, $P(-x) = P(x)$.
2. On dit que P est impair lorsque $P(-X) = -P(X)$, ie $\forall x \in \mathbb{K}$, $P(-x) = -P(x)$.

Théorème 11 Caractérisation de polynômes pairs/impairs
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. P est pair si, et seulement si, tous ses coefficients d'indice impair sont nuls.
2. P est impair si, et seulement si, tous ses coefficients d'indice pair sont nuls.

Exemple **:** $X^5 + X$ est impair et $X^8 + 4X^4 + 3X^2$ est pair. Par contre, $X^3 + X^2$ n'est ni pair, ni impair.

2 Racines d'un polynôme

2.1 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 12 Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$
Soient $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $B(X) \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. On dit que B divise A lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A(X) = B(X) \times Q(X)$. Dans ce cas on le note $B \mid A$; on dit que B est un diviseur de A, que A est divisible par B ou encore que A est un multiple de B.

Proposition 13 Propriétés de la relation de divisibilité
Soient $(A,B,C) \in \mathbb{K}[X]^3$ tels que $B(X) \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ et $C(X) \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.

1. Transitivité. Si $C \mid B$ et $B \mid A$ alors $C \mid A$.
2. Réflexivité. On a $B \mid B$.
3. Antisymétrie. Si $B \mid C$ et $C \mid B$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $B = \lambda.C$.
4. Si $B \mid C$, alors $\deg(B) \leq \deg(C)$

Théorème 14 Division euclidienne des polynômes
Soient $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $B(X) \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.
Alors il existe un unique couple $(Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A(X) = B(X) \times Q(X) + R(X)$ et $\deg(R) < \deg(B)$.
Q est appelé quotient et R est appelé reste de la division euclidienne de A par B.

***Exemple* :** Effectuer la division euclidienne de $2X^3 + X^2 - 2X - 1$ par $X^2 + X - 1$.

Proposition 15 Division par $X - a$
Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$ alors le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est $P(a)$.

Définition 16 Polynômes irréductibles
Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit irréductible lorsqu'il est non constant et lorsque ses seuls diviseurs sont les λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$, ainsi que les polynômes constants non nuls.

Proposition 17 Caractérisation des polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$
Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible lorsqu'il est non constant et ses diviseurs sont de degré O ou de dégré égal à $\deg(P)$.

2.2 Racines d'un polynôme

Définition 18 Racine d'un polynôme
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est racine de P lorsque $P(\alpha) = 0_{\mathbb{K}}$.

Le théorème suivant est primordial dans la suite.

Théorème 19 Racine et divisibilité
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\alpha \text{ est racine de } P \iff X - \alpha \mid P$$

Autrement dit : $P(\alpha) = 0_{\mathbb{K}} \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X - \alpha) \times Q(X)$.

On peut noter que $\deg(Q) = \deg(P) - 1$.

Corollaire 20 Cas de racines deux à deux distinctes
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ deux à deux distincts. Alors :

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ sont racines de } P \iff \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k) \mid P$$

Corollaire 21 Relation entre degré et nombre de racines
Tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ non nul a un nombre de racines au plus égal à son degré.
Par contraposée, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\deg(P) \leq n$ et P a au moins $n+1$ racines, alors P est le polynôme nul.

***Exemple* :** La fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{ix}$ n'est pas polynomiale.

Définition 22 Racines multiples
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
L'ordre de multiplicité de α pour P est le plus grand entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $(X-\alpha)^r \mid P$, ie l'unique entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $(X - \alpha)^r \mid P$ et $(X - \alpha)^{r+1} \nmid P$.
On dit alors que α est racine d'ordre r de P.

Remarquez que α racine d'ordre 0 signifie en fait que α n'est pas racine de P.

Vocabulaire :

- Si $r = 1$, on dit que α est **racine simple** de P.
- Si $r = 2$, on dit que α est **racine douple** de P.
- Si $r \geq 3$, on dit que α est **racine multiple** de P.

Proposition 23 Autre définition de l'ordre de multiplicité
Pour $\alpha \in \mathbb{K}$, $r \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$: α est racine d'ordre $r \in \mathbb{N}$ de P si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X-\alpha)^r \times Q(X)$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

2.3 Théorème de d'Alembert-Gauss

Nous admettrons le théorème suivant.

Théorème 24 Théorème de d'Alembert-Gauss
Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant a au moins une racine complexe.
Par conséquent : tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ non constant a au moins une racine complexe.

Corollaire 25 Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de la forme $\lambda(X-\alpha)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

Corollaire 26 Décomposition d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ en facteurs irréductibles
Tout $P \in \mathbb{C}[X]$ s'écrit :

$$P(X) = \lambda \times \prod_{i=1}^{\ell} (X-\alpha_i)^{r_i}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$, $\ell \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell) \in \mathbb{C}^\ell$ sont deux à deux distincts, et $(r_1, \dots, r_\ell) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^\ell$ sont tels que $\sum_{i=1}^{\ell} r_i = \deg(P)$.
De plus, cette écriture est unique à l'ordre des facteurs près dans le produit.

***Exemple* :** $X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

On va maintenant étudier le cas d'un polynôme à coefficients réels.

Proposition 27 Condition suffisante d'existence d'une racine réelle
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair. Alors P a au moins une racine réelle.

Proposition 28 Racines complexes et polynômes de $\mathbb{R}[X]$
Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\alpha \text{ est racine de } P \iff \overline{\alpha} \text{ est racine de } P$$

Le calcul suivant sera fondamental dans la suite. Si $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$(X-\alpha)\times(X-\overline{\alpha}) = X^2 - 2\mathscr{R}e(\alpha)X + |\alpha|^2 \in \mathbb{R}[X]$$

Corollaire 29 Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :
• les polynômes de la forme $\lambda(X-\alpha)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$;
• les polynômes de la forme $\lambda(X^2+\beta X+\gamma)$ avec $(\lambda,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ et $\Delta = \beta^2 - 4\gamma < 0$.

Corollaire 30 Décomposition d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ en facteurs irréductibles
Tout $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit :

$$P(X) = \lambda \times \prod_{i=1}^{\ell}(X-\alpha_i)^{r_i} \times \prod_{j=1}^{h}(X^2+\beta_j X+\gamma_j)^{\nu_j}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\ell,h) \in \mathbb{N}$, $(\alpha_1,\dots,\alpha_\ell,\beta_1,\dots,\beta_h,\gamma_1,\dots,\gamma_h) \in \mathbb{R}^{\ell+2h}$ et $(r_1,\dots,r_\ell,\nu_1,\dots,\nu_h) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^{\ell+h}$,
avec $\forall j \in [\![1,h]\!]$, $\Delta_j = \beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$.
De plus, cette écriture est unique à l'ordre des facteurs près dans le produit.

Exemple **:** $X^3-1 = (X-1)(X^2+X+1)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

3 Formule de Taylor

3.1 Dérivée d'un polynôme

Définition 31 Dérivée d'un polynôme
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit le polynôme dérivé de P, noté P' par :
• Si P est constant alors on pose $P' = 0$.
• Si $\deg(P) \geq 1$ alors on a $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n = \deg(P)$ et $a_n \neq 0$.
On pose alors $P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}X^k$.

Exemple **:** $P(X) = 4X^5 + 9X + \frac{3}{2}$ donne $P'(X) = 20X^4 + 9$.

Proposition 32 Degré du polynôme dérivé
Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme non constant, ie si $\deg(P) \geq 1$, alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$.
Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme constant, ie si $\deg(P) \leq 0$, alors $P' = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Théorème 33 Propriétés de la dérivation
Si $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, on a :

$$(P \times Q)'(X) = P'(X) \times Q(X) + P(X) \times Q'(X)$$

et :

$$(Q \circ P)'(X) = P'(X) \times Q' \circ P(X)$$

Exemple **:** $\left(X^2 \times P(X)\right)' = 2X \times P(X) + X^2 \times P'(X)$ et $\left(P(2X)\right)' = 2 \times P'(2X)$.

Définition 34 Dérivée d'ordres supérieurs
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit par récurrence le polynôme dérivé d'ordre k de P, note $P^{(k)}$, par :

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall k \in \mathbb{N},\ P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)' \end{cases}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, le polynôme $P^{(k)}$ désigne le polynôme P dérivé k fois.

Exemple **:** $P(X) = 4X^5 + 9X + \dfrac{3}{2}$, $P'(X) = 20X^4 + 9$, $P''(X) = 80X^3$, $P^{(3)}(X) = 240X^2$, $P^{(4)}(X) = 480X$, $P^{(5)}(X) = 480$ et pour $k \geq 6$, $P^{(k)}(X) = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Proposition 35 Propriétés de polynôme $P^{(k)}$
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $k \in \mathbb{N}$.

1. Si $k > \deg(P)$, alors $P^{(k)} = 0$.
2. Si $k \leq \deg(P)$ et si $P(X) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\deg(P)} a_j X^j$, alors :

$$\begin{aligned} P^{(k)}(X) &= \sum_{j=k}^{\deg(P)} j(j-1) \times \cdots \times (j-k+1) \times X^{j-k} = \sum_{j=k}^{\deg(P)} \frac{j!}{(j-k)!} a_j X^{j-k} \\ &= \sum_{j=0}^{\deg(P)-k} \frac{(j+k)!}{j!} a_{j+k} X^j \end{aligned}$$

On a donc $\deg\left(P^{(k)}\right) = \deg(P) - k$ et on remarque que $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

3.2 Formule de Leibnitz

Théorème 36 Formule de Leibnitz
Si $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$(P \times Q)^{(n)}(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times P^{(k)}(X) \times Q^{(n-k)}(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times Q^{(k)}(X) \times P^{(n-k)}(X)$$

Exemple **:** $(P \times Q)^{(3)}(X) = P(X) \times Q^{(3)}(X) + 3 \times P'(X) \times Q''(X) + 3 \times P''(X) \times Q'(X) + P^{(3)}(X) \times Q(X)$.

Exemple **:** Calculer la dérivée n-ième de $X^2 Q(X)$.

Exemple **:** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = (X+1)^n(X-1)^n$ et $L_n = P_n^{(n)}$ (Polynômes de Legendre). Vérifier que $P_n(X) = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X+1)^k (X-1)^{n-k}$.

3.3 Formule de Taylor et application

Théorème 37 Formule de Taylor pour les polynômes
Si $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$$

On arrive au résultat principal de ce paragraphe, qui permet de déterminer simplement l'ordre de multiplicité d'une racine.

Lemme 38 Dérivé et ordre de multiplicité
Soient $\alpha \in \mathbb{K}$, $P \imath \mathbb{K}[X]$ et $r \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\alpha \text{ est racine d'ordre } r \text{ de } P \Longrightarrow \alpha \text{ est racine d'ordre } r-1 \text{ de } P'$$

Théorème 39 Calcul de l'ordre de multiplicité
Soient $\alpha \in \mathbb{K}$, $P \imath \mathbb{K}[X]$ et $r \in \mathbb{N}^*$. Alors on a équivalence de :
(i) α est racine d'ordre r de P ;
(ii) $P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Exemple **:** Factoriser le polynôme $P(X) = X^5 - 3X^4 + 2X^3 + 2X^2 - 3X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ (réponse : $P(X) = (X+1)(X-1)^4$).

Exemple **:** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = (X+1)^n(X-1)^n$. Alors $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $P_n^{(k)}(1) = P_n^{(k)}(-1) = 0$ et de plus $P_n^{(n)}(1) \neq 0$ et $P_n^{(n)}(-1) \neq 0$.

4 Exercices

Exercice 1 Déterminer les degrés et coefficients dominants des polynômes suivants :

1. $X^3 - X(X-2+i)$ 2. $(X-2)^n - (X+5)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ 3. $\prod_{k=0}^{n} (2X-k)$
4. $\prod_{k=0}^{n} (X-6)^k$ 5. $\prod_{k=0}^{n} (kX-2)^{k^2}$

Exercice 2 Montrer qu'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ bornée sur $\mathbb{R}$ est nécessairement le polynôme constant.

Exercice 3 Factoriser les polynômes suivants :

1. $X^4 - X^2 + 1$, $X^8 + X^4 + 1$ et $X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$
2. $X^4 + 3X^3 - 14X^2 + 22X - 12$ dans $\mathbb{R}[X]$ sachant que $i+1$ est racine dans $\mathbb{C}$

Exercice 4 On désire prouver le résultat suivant :
« Si a, b et c sont trois complexes de module 1 vérifiant $a+b+c=1$, alors un des ces trois complexes vaut 1 ».
Supposons que a, b et c soient trois nombres complexes de module 1 tels que $a+b+c=1$.

1. Justifier l'égalité : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.
2. On considère le polynôme P défini par : $P = (X-a)(X-b)(X-c)$.
   Justifier l'existence d'une constante complexe α non nulle telle que : $P = X^3 - X^2 + \alpha X - \alpha$.
3. Conclure.

Exercice 5

1. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que : $P(X+1) = P(X)$.
2. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que : $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $P_n - P_n' = X^n$.

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B lorsque :

1. $A = X^{2n} + 2X^n + 1$ et $B = X^2 + 1$ 2. $A = X^{2n} + 2X^n + 1$ et $B = (X-i)^2$
3. $A = X^n + 2X - 2$ et $B = (X-2)^2$ 4. $A = X^n + 2X - 2$ et $B = (X-3)^2$

Exercice 7 (Calcul de puissances d'une matrice avec un polynôme annulateur)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner une relation entre A^3, A^2 et A.
2. <u>Méthode 1</u> : Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = a_n A + b_n A^2$. En déduire l'expression de A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. <u>Méthode 2</u> : Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 2X^2 + X$. En déduire l'expression de A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 (Formule de Vandermonde)

Soient N_1 et N_2 deux éléments de $\mathbb{N}^*$ et $n \in [\![0, N_1 + N_2]\!]$.

En considérant le coefficient de X^n dans le polynôme $(1+X)^{N_1} \times (1+X)^{N_2}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}$.

Proposer une autre démonstration de cette formule en dénombrant des tirages simultanés dans une urne.

Exercice 9 (Polynômes d'interpolation de Lagrange)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ deux à deux distincts, et $n+1$ réels $y_0, y_1, \dots, y_n$.

1. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer l'unique polynôme $L_k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :
$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad \begin{cases} L_k(x_j) = 0 & \text{si } j \neq k \\ L_k(x_k) = 1 \end{cases}$$
2. En déduire que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} y_k L_k$ est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $P(x_j) = y_j$.

Exercice 10 Soit $n \geq 2$. On pose $P = (X+1)^n - 1$.

1. Déterminer toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$ et en déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.
2. On note Q le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P = XQ$. En calculant $Q(0)$ de deux manières différentes, déterminer la valeur de :
$$A = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Exercice 11 (Polynômes de Tchebychev)

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} P_0 = 1 \text{ et } P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n \end{cases}$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de P_n.
2. Déterminer le terme constant de P_n et étudier la parité de P_n.
3. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P_n(\cos x) = \cos(nx)$.
4. En déduire les racines de P_n.
5. Donner alors une expression factorisée de $P_n(X)$.
6. À l'aide des formule d'Euler et de De Moivre donner une autre expression de $P_n(X)$.

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $z_0, z_1, \dots, z_n$ les racines $(n+1)^{\text{èmes}}$ de l'unité : $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}$.

On définit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, avec $a_n \neq 0$, et on pose $M = \displaystyle\max_{k \in [\![0,n]\!]} \left|P(z_k)\right|$.

1. Vérifier que : $M > 0$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (z_k)^p$ en fonction de p.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(z_k)\right| \leqslant (n+1)M$.

   (b) En déduire que : $|a_0| \leqslant M$.
4. Montrer que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $|a_k| \leqslant M$.

Chapitre 15

Continuité des fonctions numériques

1 Continuité d'une fonction numérique

1.1 Continuité en un point

Dans tout ce paragraphe, f est une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 1 Continuité en un point
Soit x_0 un point intérieur à I (ie x_0 n'est pas une borne de I).
On dit que f est continue en x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \overset{\text{existe}}{=} f(x_0)$, ie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \left|f(x) - f(x_0)\right| \leq \varepsilon$$

Dans le cas contraire, on dit que f est discontinue en x_0.

Petit rappel : on a vu au chapitre sur les limites de fonctions, que si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et est finie, alors elle ne peut être égale qu'à $f(x_0)$. On pourrait donc dire que f est continue en x_0 si, et seulement si, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et est finie.

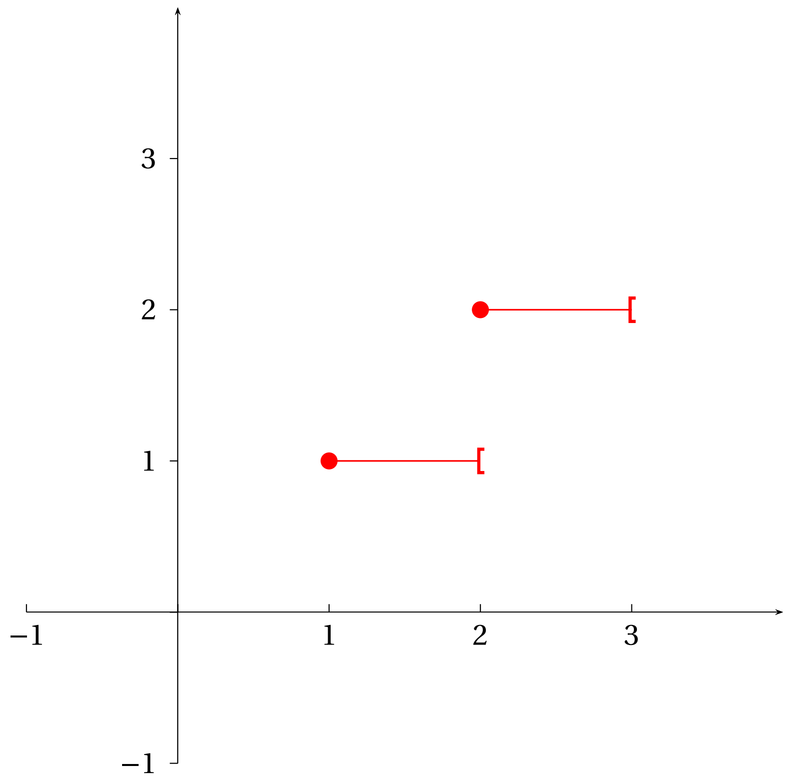
Le changement de variable $x = x_0 + h$ permet de remplacer $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \overset{\text{existe}}{=} f(x_0)$, par $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) \overset{\text{existe}}{=} f(x_0)$. f continue en x_0 signifie donc que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall h \in]-\delta, \delta[, \left|f(x_0 + h) - f(x_0)\right| \leq \varepsilon$$

1.2 Continuité à droite ou à gauche en un point

Définition 2 Continuité à droite un point
Soit x_0 un point intérieur à I, ou la borne de gauche de I.
On dit que f est continue à droite en x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \overset{\text{existe}}{=} f(x_0)$, ce qui se note aussi $f(x_0^+) = f(x_0)$.
Dans le cas contraire, on dit que f est discontinue à droite en x_0.

Exemple **:** $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est continue à droite en 2.



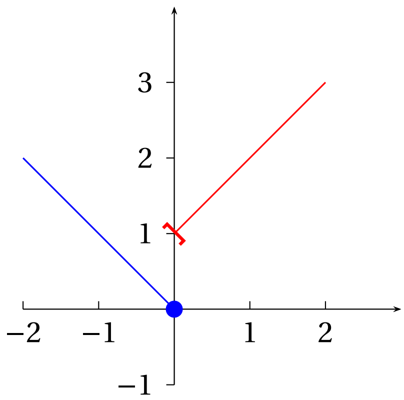
Définition 3 Continuité à gauche un point
Soit x_0 un point intérieur à I, ou la borne de droite de I.
On dit que f est continue à gauche en x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \overset{\text{existe}}{=} f(x_0)$, ce qui se note aussi $f(x_0^-) = f(x_0)$.
Dans le cas contraire, on dit que f est discontinue à gauche en x_0.

Exemple **:** $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est discontinue à gauche en 2.

Théorème 4 Lien entre continuité, continuité à gauche et à droite
Soit x_0 un point intérieur à I. Alors :

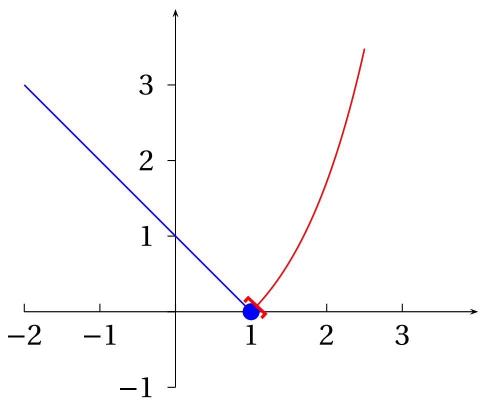
$$f \text{ est continue en } x_0 \iff f \text{ est continue à gauche et à droite en } x_0$$

Exemple **:** $f(x) = \begin{cases} -x \text{ si } x \leq 0 \\ x+1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ $\qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$



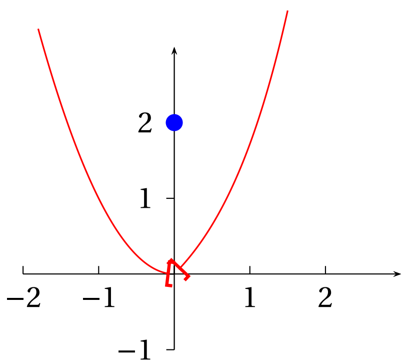
Sur cette exemple : $f(0^-) = 0$, $f(0^+) = 1$ et $f(0) = 0$. Donc f est continue à gauche en 0, mais discontinue à droite en 0. À fortiori, elle n'est pas continue en 0.

***Exemple*:** $f(x) = \begin{cases} 1 - x \text{ si } x < 1 \\ e^{x-1} - 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$ $\qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$



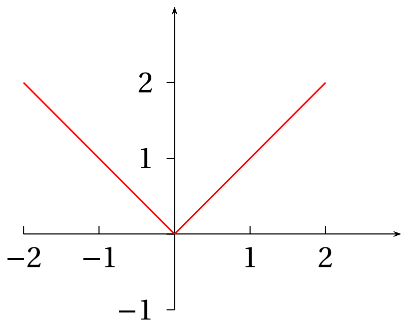
Sur cette exemple : $f(1^-) = f(1^+) = f(1) = 0$. f est donc continue en 1, puisqu'elle est continue à gauche $\boxed{\text{et}}$ à droite en ce point.

***Exemple*:** $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 0 \\ 2 \text{ si } x = 0 \\ e^x - 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ $\qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

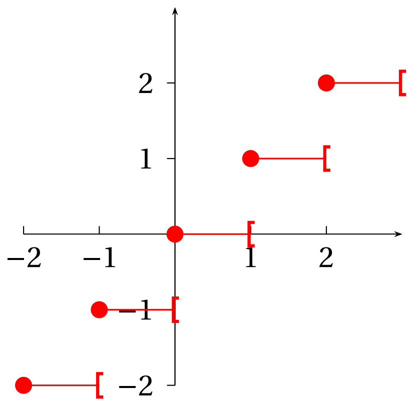


Sur cette exemple : $f(0^-) = f(0^+) = 0$ et $f(0) = 2$. Donc f n'est ni continue à gauche, ni continue à droite en 0. À fortiori, elle n'est pas continue en 0.

***Exemple*:** $x \longmapsto |x|$ est continue en 0.



Exemple **:** Si $x_0 \notin \mathbb{Z}$, $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est continue en x_0.
Si $x_0 \in \mathbb{Z}$, $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$, est continue à droite en x_0 mais est discontinue à gauche en x_0.



1.3 Continuité sur un intervalle - Prolongement par continuité

Définition 5 Continuité sur un intervalle
On note a et b les bornes de I, avec $a < b$.
On dit que f est continue sur I lorsque :
- f est continue en tout point intérieur de I ;
- si $a \in I$, f est continue à droite en a ;
- si $b \in I$, f est continue à gauche en b.

Exemple **:** f continue sur $[0,+\infty[$ signifie que f est continue en tout $x_0 > 0$, et que f est continue à droite en 0.
f continue sur $]0,+\infty[$ signifie que f est continue en tout $x_0 > 0$.
f continue sur $]1,2]$ signifie que f est continue en tout $x_0 \in]1,2[$, et que f est continue à gauche en 2.

Définition 6 Continuité sur une union d'intervalles
On se donne une famille d'intervalles $(I_j)_{j\in J}$ (indexée par un ensemble J fini ou infini).
On dit que f est continue sur $A = \bigcup\limits_{j\in J} I_j$ lorsque, pour tout $j \in J$, f est continue sur I_j.

Exemple **:** f continue sur $\mathbb{R}^*$ signifie que f est continue sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$, donc que f est continue en tout $x_0 < 0$ et en tout $x_0 > 0$.

Proposition 7 Stabilité de la continuité pour l'union
Si f est continue sur deux parties A_1 et A_2 de $\mathbb{R}$, alors elle est continue sur $A_1 \cup A_2$.
Plus généralement, si f est continue sur une famille $(A_j)_{j\in J}$ de parties de $\mathbb{R}$, alors elle est continue sur $\bigcup_{j\in J} A_j$.

Le résultat suivant permet de prolonger une fonction en un point, de telle sorte que la fonction soit continue en ce point.

Théorème 8 Prolongement par continuité
Soit x_0 un point d'un intervalle I, et f une fonction définie et continue sur $I\backslash\{x_0\}$.
On suppose aussi que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \overset{\text{existe}}{=} \ell \in \mathbb{R}$.
On définit alors une fonction $\widetilde{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in I, \quad \widetilde{f}(x) = \begin{cases} \ell & \text{si } x = x_0 \\ f(x) & \text{si } x \neq x_0 \end{cases}$$

La fonction $\widetilde{f}$ est alors un prolongement à I de f, et ce prolongement est continue sur I.

En pratique la fonction $\widetilde{f}$ est encore notée f, pour ne pas alourdir les notations.

Si la fonction f est continue sur $I\backslash\{x_0\}$, alors sont prolongement par continuité en x_0 est continue sur I tout entier.

Exemple **:** La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant : $f(0) = 1$.
La fonction f devient alors continue sur $\mathbb{R}$. Elle est définie par morceaux :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f() = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1.4 Continuité des fonctions usuelles

• Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.

• Les fractions rationnelles (= quotient de polynômes) sont continues sur leur ensemble de définition.

• Les fonctions cos et sin sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction tan est continue sur $\mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle/ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

• La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$ (vrai en base quelconque).

• La fonction $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

• Les fonctions $x \longmapsto x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, sont C^∞ (au moins) sur $\mathbb{R}_+^*$. En 0, on a le résultat suivant.

Théorème 9 Prolongement de la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ en 0
Pour $\alpha \geq 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est prolongeable en 0 en une fonction continue, en posant $0^\alpha = 0$ si $\alpha > 0$ et $0^0 = 1$.
Pour $\alpha < 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ n'est prolongeable par continuité en 0.

***Exemple* :** $x \longmapsto \sqrt{x}$ continue sur $\mathbb{R}^+$, et $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

⚠ ATTENTION ! Pour des puissances entières, l'ensemble de continuité peut être beaucoup plus grand que $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}_+^*$.
Par exemple $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme), et $x \longmapsto \dfrac{1}{x^3}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (fraction rationnelle).

1.5 Opérations arithmétiques sur les fonctions continues

Théorème 10 Opérations arithmétiques sur les fonctions continues
Soient f une fonction continue sur A et g continue sur B.

1. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, les fonctions $\lambda.f + \mu.g$ et $f \times g$ sont continues sur $A \cap B$.
2. Si g ne s'annule pas sur B, alors $\dfrac{1}{g}$ est continue sur B et $\dfrac{f}{g}$ est continue sur $A \cap B$.
3. Si $f(A) \subseteq B$ alors $g \circ f$ est définie et continue sur A.

En pratique, pour démontrer simplement qu'une fonction est continue, on utilise la continuité des fonctions usuelles et le théorème précédent.

***Exemple* :** La fonction $x \longmapsto \sqrt{\ln(1+x^2)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2 Continuité sur un intervalle

Dans tout ce paragraphe, f est une fonction continue sur un intervalle I.

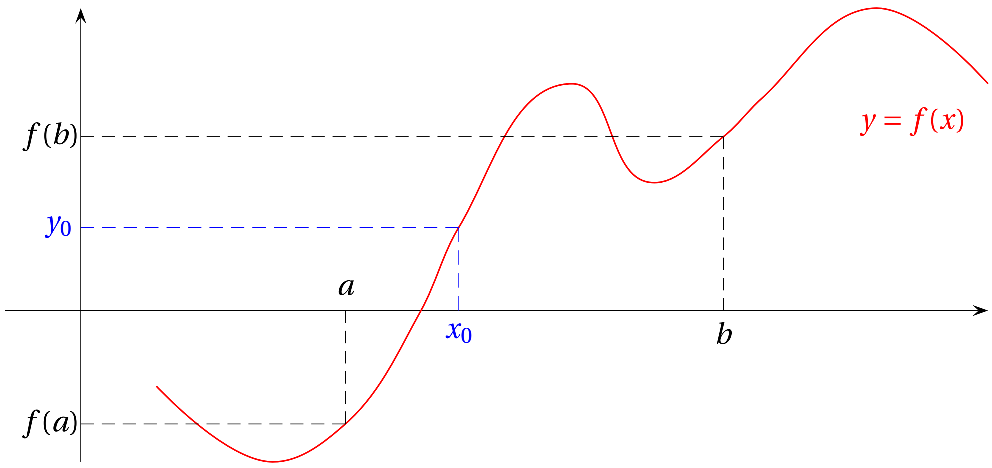
2.1 Théorème des valeurs intermédiaire

Théorème 11 Théorème des valeurs intermédiaires
Si f est continue sue l'intervalle $[a,b]$, alors f prend toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$:

$$\forall y_0 \in [f(a), f(b)], \quad \exists x_0 \in [a,b] / \; f(x_0) = y_0$$

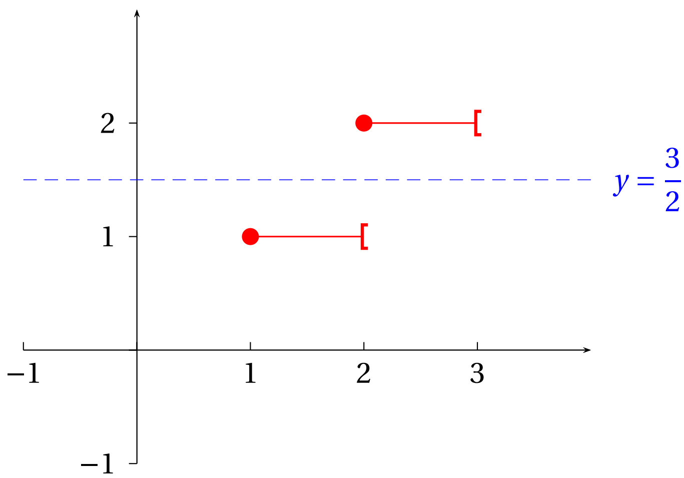
ce qui peut aussi s'écrire plus simplement :

$$[f(a), f(b)] \subseteq f\big([a,b]\big)$$



⚠ ATTENTION : dans la notation $[f(a), f(b)]$, on ne sous-entend pas que $f(a) \leq f(b)$, on peut très bien avoir $f(a) > f(b)$.

⚠ ATTENTION ! Ce résultat est faux si f n'est pas continue.
Par exemple pour $f : x \longmapsto \lfloor x \rfloor$, on a $\dfrac{3}{2} \in \big[f(1), f(2)\big] = [1,2]$, mais $\forall x \in [1,2]$, $f(x) \neq \dfrac{3}{2}$.



<u>**Démonstration**</u> **:** On fixe $y_0 \in [f(a), f(b)]$. On cherche $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.

• **Simplification du problème.** En posant $g(x) = f(x) - y_0$, on est ramené à chercher $x_0 \in [a,b]$ tel que $g(x_0) = 0$.

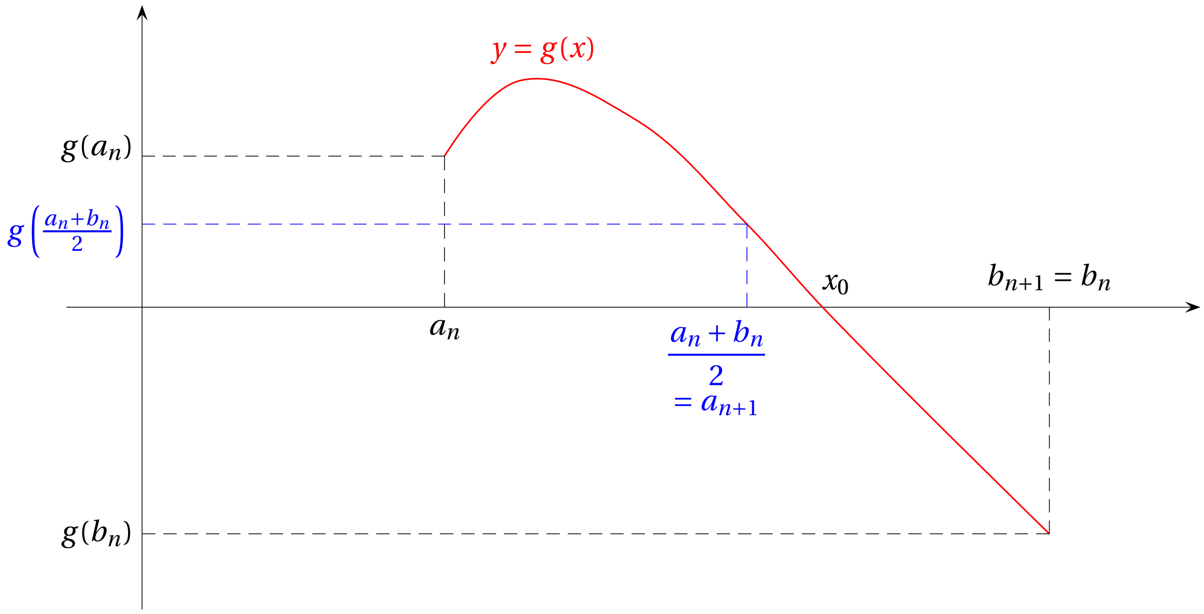
On a $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$ ou $f(b) \leq y_0 \leq f(a)$, donc $g(a) \leq 0 \leq g(b)$ ou $g(b) \leq 0 \leq g(a)$.

Quitte à remplacer g par $-g$ on peut supposer que $g(b) \leq 0 \leq g(a)$, et le problème est toujours de trouver $x_0 \in [a,b]$ tel que $g(x_0) = 0$.

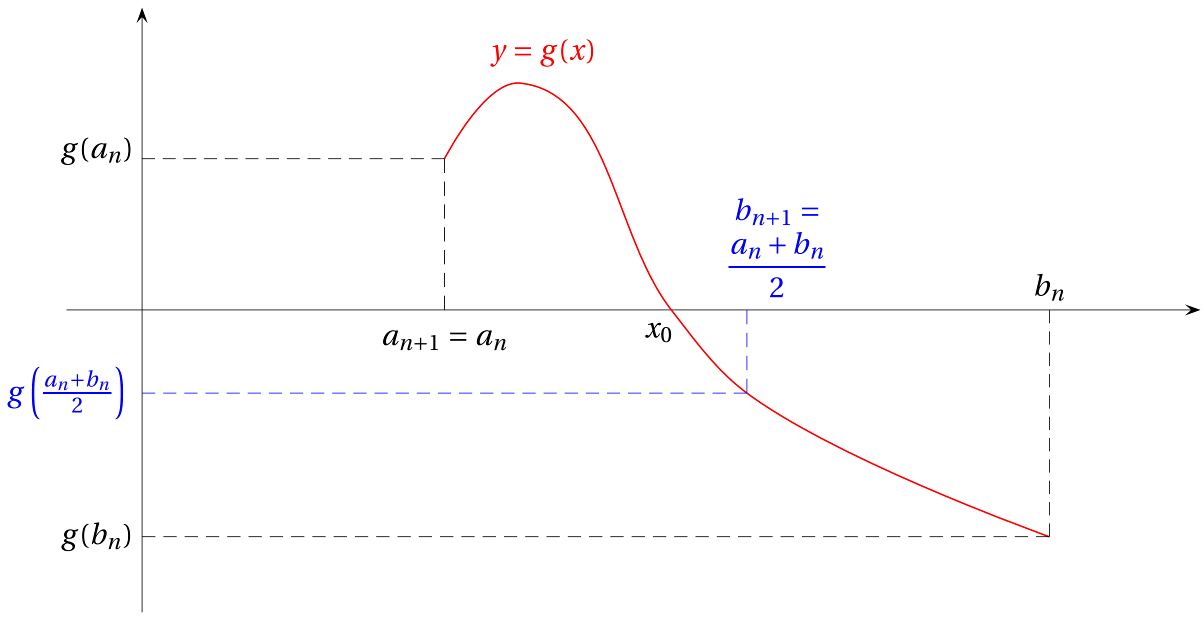
• **Définition de deux suites adjacentes par dichotomie.** On définit deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et :

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } g\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geq 0 \\ a_n & \text{si } g\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \begin{cases} b_n & \text{si } g\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geq 0 \\ \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } g\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

On peut visualiser cette construction dans le cas où $g\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geq 0$:



Et dans le cas où $g\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$:



On vérifie alors par récurrence qu'elles ont les propriétés suivantes :
(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \leq a_n \leq b_n \leq b$ et $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$;
(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(b_n) \leq 0 \leq g(a_n)$.

Ceci montre en particulier que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Notons x_0 leur limite commune.

• **Conclusion.** Il reste à vérifier que $x_0 \in [a,b]$ et que $g(x_0) = 0$.

CQFD □

Corollaire 12 Image d'un intervalle par une fonction continue
Si I est un intervalle et si f est continue sur I alors $J = f(I)$ est aussi un intervalle.

⚠ ATTENTION ! Ceci est faux si f n'est pas continue. Par exemple si $f : x \longmapsto \lfloor x \rfloor$, alors $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle.

⚠ ATTENTION ! La **nature** de l'intervalle (ie le caractère ouvert/fermé/borné...) n'est pas conservée. Par exemple cos est continue sur $\mathbb{R}$ (intervalle ouvert non borné) et $\cos(\mathbb{R}) = [-1,1]$ (intervalle fermé borné).

Corollaire 13 Signe d'une fonction continue sur un intervalle
Soit f continue sur un intervalle I.
• Si f ne s'annule pas sur I, alors f est de signe constant au sens strict sur I :

$$\forall x \in I,\ f(x) > 0 \qquad \text{ou} \qquad \forall x \in I,\ f(x) < 0$$

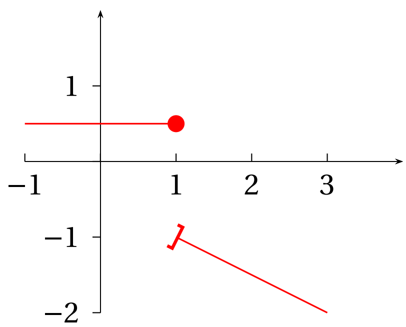
• par contraposée si la fonction change de signe sur I

$$\exists (x_1, x_2) \in I^2 \text{ tel que } x_1 \neq x_2 \text{ et } f(x_1) f(x_2) < 0$$

alors elle s'annule sur I.

⚠ ATTENTION : si la fonction s'annule sur I, elle peut ne pas changer de signe.
Prendre par exemple $x \longmapsto x^2$ sur $[-1,1]$.

⚠ ATTENTION ! Ceci est faux si la fonction est discontinue en un point : la fonction peut changer de signe sans s'annuler, comme le montre la fonction $x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{-x-1}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$



2.2 Théorème de continuité sur un segment

On rappelle qu'on appelle segment tout intervalle $[a,b]$ fermé et borné (avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$).

Théorème 14 Théorème de continuité sur un segment
Soit f continue sur un segment $[a,b]$.
Alors $f\big([a,b]\big)$ est aussi un segment. Précisons : cela signifie que $f\big([a,b]\big)=[m,M]$ où on a posé

$$m=\min_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{et} \qquad M=\max_{x\in[a,b]} f(x)$$

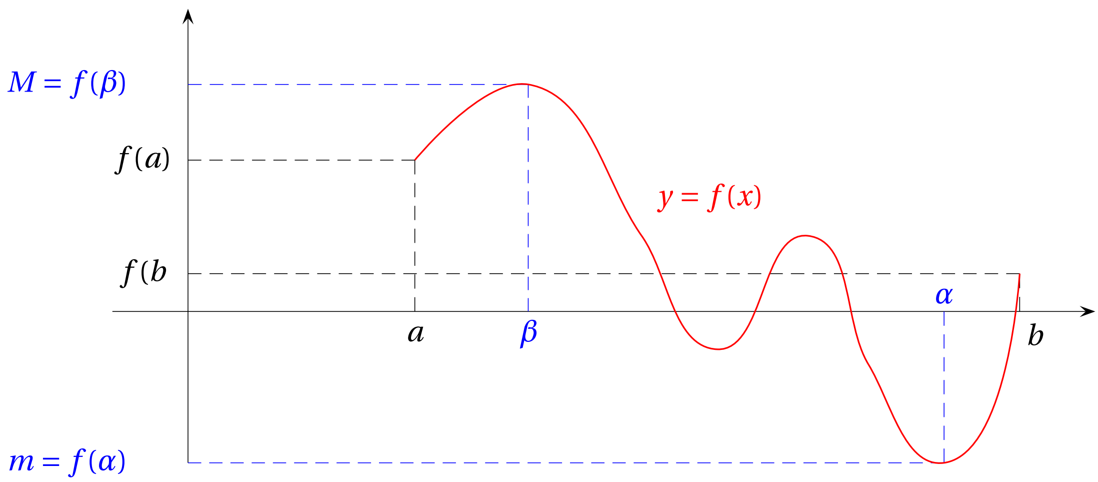
Rappelons que, par définition d'un minimum et d'un maximum, ces bornes sont atteintes, donc :

$$\exists\alpha\in[a,b]\,/\ m=f(\alpha) \qquad \text{et} \qquad \exists\beta\in[a,b]\,/\ M=f(\beta)$$

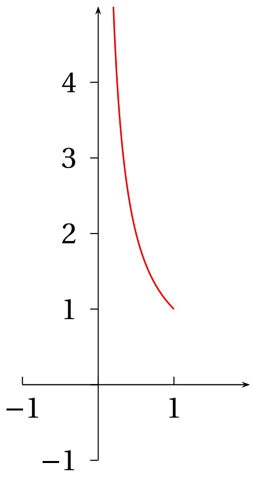
et ainsi :

$$\forall x\in[a,b],\quad f(\alpha)\leq f(x)\leq f(\beta)$$

Autrement dit : f est **bornée et atteint ses bornes**.

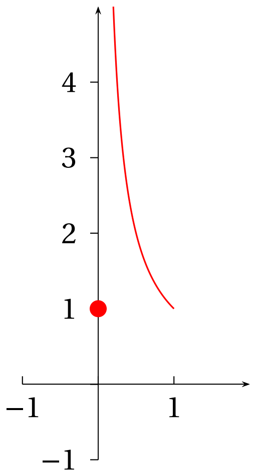


⚠ ATTENTION ! Ceci est faux si on ne prend pas un segment.
Par exemple $x\longmapsto\dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0,1]$ mais n'est pas majorée puisque $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$.



⚠ ATTENTION ! Le résultat est faux si la fonction n'est pas continue.

Par exemple la fonction $x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est définie sur $[0,1]$ mais n'est pas majorée puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.



3 Fonctions continues et bijectives

On rappelle que si $f : I \longrightarrow J$ est bijective alors elle admet une fonction réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$, définie par :

$$\forall x \in I, \forall y \in J, \quad y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

et caractérisée par les relations :

$$\forall x \in I,\ f^{-1}\big(f(x)\big) = x \qquad \text{et} \qquad \forall y \in J,\ f\big(f^{-1}(y)\big) = y$$

3.1 Théorème de la bijection monotone

On commence par les propriétés générales de la réciproque d'une fonction numérique bijective.

Proposition 15 Propriétés de l'application réciproque
On se donne deux intervalles I et J et une fonction f bijective de I sur J.

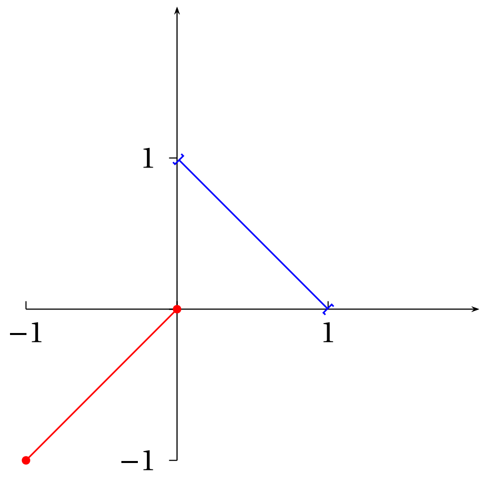
1. Si f est impaire sur I, alors f^{-1} est impaire sur J.
2. Si f est strictement monotone sur I, alors f^{-1} est strictement monotone sur J. Plus précisément :
   • Si f est strictement croissante sur I, alors f^{-1} est strictement croissante sur J.
   • Si f est strictement décroissante sur I, alors f^{-1} est strictement décroissante sur J.
3. Si f est strictement monotone sur I :
   • si f est strictement croissante sur I alors pour tout a point adhérent à I (ie $a \in I$ ou a est une borne de I) :
   $$\lim_{x\to a^+} f(x) = b^+ \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lim_{y\to b^+} f^{-1}(y) = a^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = b^- \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lim_{y\to b^-} f^{-1}(y) = a^-$$
   • si f est strictement décroissante sur I alors pour tout $a \in I$:
   $$\lim_{x\to a^+} f(x) = b^- \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lim_{y\to b^-} f^{-1}(y) = a^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = b^+ \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lim_{y\to b^+} f^{-1}(y) = a^-$$
4. $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$

⚠ ATTENTION ! Si f est paire, on ne peut pas dire que f^{-1} est paire. La raison est très simple : si f est paire, elle ne peut pas être injective, et donc f^{-1} n'existe pas ! !

On peut maintenant énoncer le théorème de la bijection monotone sous sa forme complète.

Théorème 16 Théorème de la bijection monotone
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue et strictement monotone sur I. Alors :
• $J = f(I)$ est un intervalle ;
• f est bijective de I sur J ;
• f^{-1} est strictement monotone sur J, de même sens de variations que f ;
• si f est impaire sur I, alors f^{-1} est impaire sur J ;
• f^{-1} est continue sur J ;
• $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$

⚠ ATTENTION ! Il n'y pas de réciproque, une fonction bijective peut être ni continue, ni strictement monotone.
Prendre par exemple la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$



Proposition 17 Calcul de l'intervalle image $J = f(I)$

1. Si f est strictement croissante :

$$\bullet f\big([a,b]\big) = \big[f(a), f(b)\big] \qquad \bullet f\big([a,b[\big) = \big[f(a), f(b^-)\big[$$
$$\bullet f\big(]a,b]\big) = \big]f(a^+), f(b)\big] \qquad \bullet f\big(]a,b[\big) = \big]f(a^+), f(b^-)\big[$$

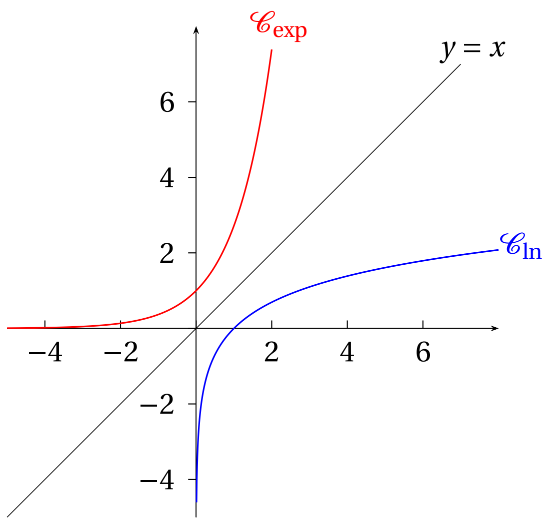
2. Si f est strictement décroissante :

$$\bullet f\big([a,b]\big) = \big[f(b), f(a)\big] \qquad \bullet f\big([a,b[\big) = \big]f(b^-), f(a)\big]$$
$$\bullet f\big(]a,b]\big) = \big[f(b), f(a^+)\big[\qquad \bullet f\big(]a,b[\big) = \big]f(b^-), f(a^+)\big[$$

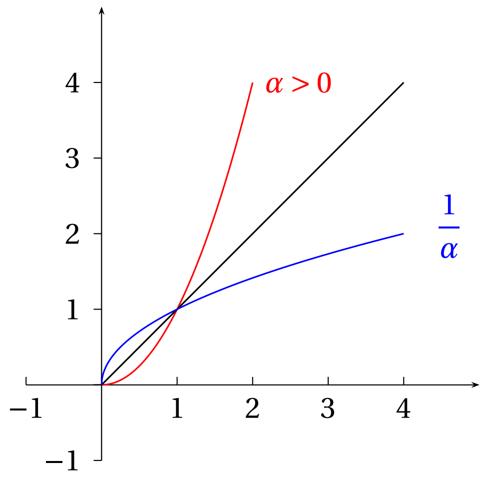
***Exemple* :** La fonction ln est continue et strictement croissante de l'intervalle $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Sa bijection réciproque est la fonction ln $:]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. On retrouve donc que ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante et :

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

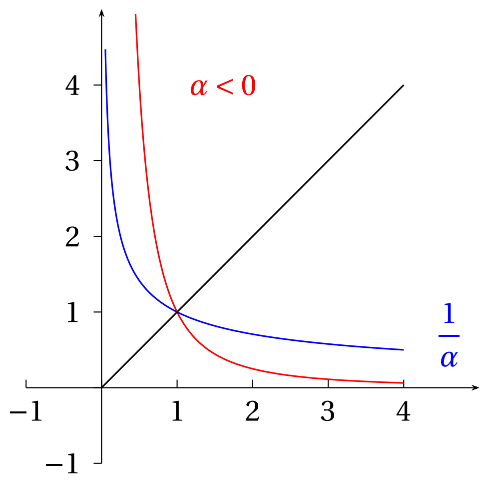
La courbe de $\mathscr{C}_{\ln}$ se déduit de la courbe de $\mathscr{C}_{\exp}$ par symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = x$.



Exemple **:** Si $\alpha > 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. Sa bijection réciproque est la fonction $x \longmapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$.



Exemple **:** Si $\alpha < 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa bijection réciproque est la fonction $x \longmapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$.



3.2 La fonction arctangente

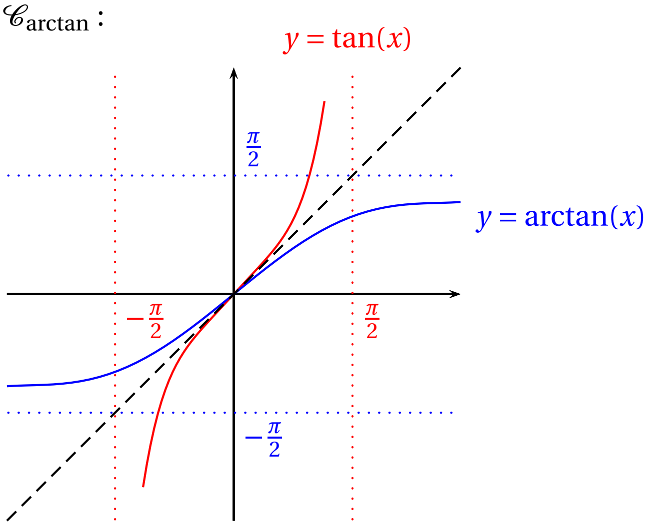
La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
tan	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Elle induit donc une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est appelée **fonction arctangente**, notée $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

x	$-\infty$	$+\infty$
arctan	$-\frac{\pi}{2}$ $\nearrow$	$+\frac{\pi}{2}$

On déduit de $\mathscr{C}_{\tan}$ la courbe $\mathscr{C}_{\arctan}$:



Proposition 18 Propriétés de la fonction arctangente

1. arctan est impaire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan(-x) = -\arctan(x)$
2. arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. $\lim_{x \to +\infty} \arctan = \frac{\pi}{2}^-$ et $\lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+$
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$ et $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan(x)) = x$
5. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(\arctan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
6. On a les valeurs remarquables :

x	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\arctan(x)$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$

7. Si $x \neq 0$: $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

⚠ ATTENTION ! La fonction $x \longmapsto \arctan(\tan(x))$ est définie sur $\mathscr{D}_{\tan}$, mais elle ne vaut x que sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

4 Exercices

Continuité d'une fonction numérique

Exercice 1 Étudier la continuité (et les éventuels prolongements par continuité) des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$
2. $f(x) = \frac{x}{2x+|x|}$
3. $f(x) = x^x$
4. $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} \text{ si } x < 0 \\ x^2 + x \text{ si } 0 \leqslant x < 1 \\ \ln(x) + e^x \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$

Exercice 2 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} - \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et étudier la continuité de f.
2. Montrer que f est impaire puis étudier la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 3 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 et vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$.

Théorèmes des valeurs intermédaires et de continuité sur un segment

Exercice 4

1. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f a au moins un point fixe.
2. Montrer que l'équation $x^{17} = x^{12} + 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^+$.
3. Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I = [a,b]$, telles que : $\forall x \in [a,b]$, $f(x) < g(x)$.
   Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que : $\forall x \in [a,b]$, $\epsilon + f(x) \leqslant g(x)$.
   Ce résultat est-il encore valable si l'intervalle I n'est pas un segment ?

Exercice 5 Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que la limite de f en $+\infty$ existe et est finie. Montrer que f est bornée sur $[0,+\infty[$.
2. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f est minorée sur $[0,+\infty[$ et que sa borne inférieure est atteinte.
3. On suppose que $f(0) < 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et est strictement positive. Montrer que f s'annule au moins une fois sur $]0,+\infty[$.

Théorème de la bijection strictement monotone

Exercice 6

1. Soit f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$. Montrer que $f_{|[-\frac{1}{2},+\infty[}$ admet une application réciproque continue que l'on explicitera.
2. Montrer que la restriction de sin à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est bijective et étudier sa bijection réciproque arcsin. Faire de même avec la restriction de cos à $[0,\pi]$ ($\cos^{-1}_{|[0,\pi]}$ sera notée arccos).

Exercice 7

1. Étudier la fonction $x \mapsto \arctan(\tan x)$, puis tracer sa courbe représentative.
2. Montrer que $\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.
3. Discuter en fonction de $t \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x : $\arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = t$.

Compléments

Exercice 8 (Fonctions k-lipschitziennes et leur point fixe)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. On suppose qu'il existe $k > 0$ telle que f soit k-lipschitzienne ie :

$$\forall x, y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

1. Montrer que f est continue sur I.
2. On suppose que $0 < k < 1$, que $I = [a, b]$ est stable par f, et que f a un unique point fixe $\ell \in I$.
   On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$.

   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - \ell| \leq k^n |x_0 - \ell|$.

   (b) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

   (c) Déterminer une valeur de l'entier n (en fonction de a, b et k) pour laquelle x_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

Chapitre 16

Dérivabilité des fonctions numériques

1 Dérivabilité d'une fonction numérique

Dans tout ce paragraphe, f est une fonction définie sur un intervalle I.

1.1 Dérivabilité en un point

Définition 1 Dérivabilité en un point

Soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ (ie x_0 intérieur à I).

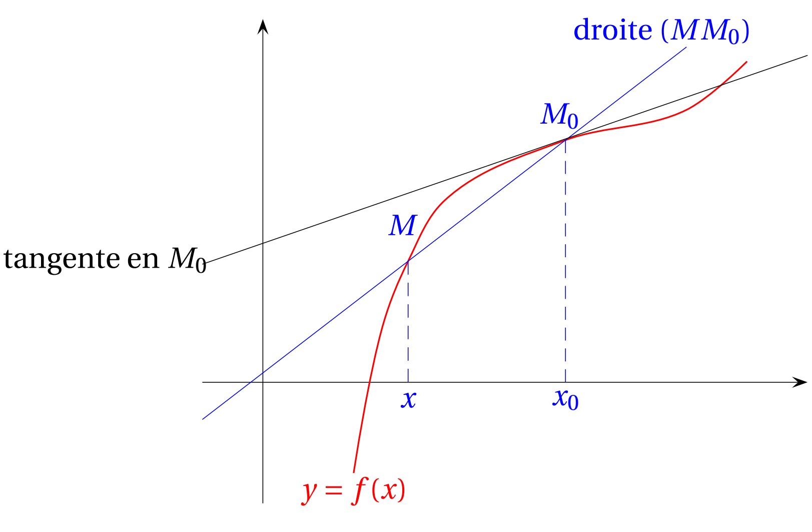
On dit que f est dérivable en x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.

Dans ce cas, on pose : $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$.

Le réel $f'(x_0)$ est appelé nombre dérivé de f en x_0. On le note aussi $\dfrac{df}{dx}(x_0)$.

On peut toujours se ramener au voisinage de 0, en posant $x = x_0 + h$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Interprétation graphique : $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ représente la pente de la droite passant par les points $M\big(x,f(x)\big)$ et $M_0\big(x_0,f(x_0)\big)$. $f'(x_0)$ représente donc la « pente limite » en $M_0\big(x_0,f(x_0)\big)$, c'est-à-dire la pente de la tangente à la courbe de f au point $M_0\big(x_0,f(x_0)\big)$.

Proposition 2 Dérivabilité et DL_1

Si f est dérivable en $x_0\in\overset{\circ}{I}$ alors f admet un $DL_1(x_0)$ donné par :

$$f(x)\underset{x\to x_0}{=}f(x_0)+f'(x_0)\times(x-x_0)+o(x-x_0)$$

Une fonction dérivable en un point peut donc être localement approximée par une fonction affine.

***Exemple* :** $f:x\longmapsto ax+b$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Alors f est dérivable en tout $x_0\in\mathbb{R}$ et $f'(x_0)=a$.

***Exemple* :** $f:x\longmapsto x^n$ avec $n\in\mathbb{N}$. Alors f est dérivable en tout $x_0\in\mathbb{R}$ et $f'(x_0)=nx_0^{n-1}$.

***Exemple* :** $f:x\longmapsto \cos(x)$. Alors f est dérivable en tout $x_0\in\mathbb{R}$ et $f'(x_0)=-\sin(x_0)$.

***Exemple* :** $f:x\longmapsto \sin(x)$. Alors f est dérivable en tout $x_0\in\mathbb{R}$ et $f'(x_0)=\cos(x_0)$.

***Exemple* :** $f:x\longmapsto \dfrac{1}{x}$. Alors f est dérivable en tout $x_0\in\mathbb{R}$ et $f'(x_0)=-\dfrac{1}{x_0^2}$.

***Exemple* :** $f:x\longmapsto \sqrt{x}$. Alors f est dérivable en tout $x_0>0$ et $f'(x_0)=-\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

1.2 Dérivabilité à droite ou à gauche en un point

Définition 3 Dérivabilité à gauche en un point

Soit $x_0\in\overset{\circ}{I}$ ou la borne droite de x_0.

On dit que f est dérivable à gauche en x_0 lorsque $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie.

Dans ce cas, on pose : $f'_g(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Le réel $f'_g(x_0)$ est appelé nombre dérivé à gauche de f en x_0.

On peut toujours se ramener au voisinage à gauche de 0, en posant $x=x_0+h$:

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Définition 4 Dérivabilité à droite en un point
Soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ ou la borne gauche de x_0.
On dit que f est dérivable à droite en x_0 lorsque $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.
Dans ce cas, on pose : $f'_d(x_0) = \displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Le réel $f'_d(x_0)$ est appelé nombre dérivé à droite de f en x_0.

On peut toujours se ramener au voisinage à droite de 0, en posant $x = x_0 + h$:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Théorème 5 Lien entre dérivabilité en un point et dérivabilité à droite/gauche
Soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ (ie x_0 intérieur à I). Alors :

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \iff f \text{ est dérivable à droite et à gauche en } x_0 \text{ et } f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$$

Dans ce cas : $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Exemple **:** $f :\longmapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

Exemple **:** $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x\sin(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est dérivable en 0.

Exemple **:** $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable à droite en 0.

1.3 Interprétations graphiques

• **Cas f dérivable en x_0 :** $\mathscr{C}_f$ admet une tangente au point $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ d'équation $y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$.

• **Cas f non dérivable en x_0 :** Il y a plusieurs cas possibles.

Si f est dérivable à droite en x_0, alors elle admet une demi-tangente à droite en x_0 d'équation $y = f'_d(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$.

Si f est dérivable à gauche en x_0, alors elle admet une demi-tangente à gauche en x_0 d'équation $y = f'_g(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$.

Si elle est dérivable à droite et à gauche en x_0, avec $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$, alors les deux demi-tangente ne sont pas parallèles. On dit que $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ est un **point anguleux**.

Exemple **:** En 0 la représentation graphique de $x \longmapsto |x|$ admet un point anguleux.

Si $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable à droite en x_0, mais $\mathscr{C}_f$ admet quand même une demi-tangente verticale en $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$. On a le même résultat à gauche en x_0.

Exemple : $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable à droite en 0, et sa courbe admet une tangente verticale en $O(0,0)$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (ou $x \to x_0^-$) n'existe pas, il n'y a d'interprétation graphique...

1.4 Dérivabilité sur une partie de $\mathbb{R}$

Définition 6 Dérivabilité sur une partie de $\mathbb{R}$

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ de bornes a et b, et f définie au moins sur I.
   On dit que f est dérivable sur I lorsque :
   • f est dérivable en point x_0 intérieur à I,
   • si $a \in I$, f est dérivable à droite en a,
   • si $b \in I$, f est dérivable à gauche en b.

2. Soient A une partie de $\mathbb{R}$ qui est une union d'intervalles et f définie au moins sur A.
   On dit que f est dérivable sur A lorsque f est dérivable sur tout les intervalles dont est constituée la partie A.

Exemple : $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, mais non dérivable à droite en 0.

⚠ ATTENTION ! Le raisonnement naïf consistant à calculer $f'(x)$ et à regarder pour quelles valeurs de x cette fonction est définie est faux. Il ne donne pas la dérivabilité de la fonction. Par exemple le raisonnement « pour $f(x) = \sqrt{x}$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, et donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et n'est pas dérivable à droite en 0 » n'est pas correct.
Mais nous verrons qu'on peut le corriger grâce au théorème de prolongement de la dérivabilité.

Définition 7 Fonction dérivée
Si f est dérivable sur une partie A de $\mathbb{R}$, on appelle fonction dérivée de f l'application :

$$f' : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

Théorème 8 Une fonction dérivable est continue
Si f est dérivable en un point x_0 alors f est continue en x_0, et donc $x_0 \in \mathcal{D}_f$, (ce résultat est valable à droite ou à gauche en x_0).
Par conséquent, si f est dérivable sur une partie A de $\mathbb{R}$, alors f est continue sur A.

⚠ ATTENTION : la réciproque est fausse. Une fonction peut être continue en un point sans y être dérivable. Considérer par exemple $x \longmapsto |x|$ en 0.

Il existe même des fonctions continues en tout point de $\mathbb{R}$ mais dérivables en aucun point de $\mathbb{R}$: par exemple la fonction de Weierstrass $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$ (avec $b \in]0,1[$, a entier impair et $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$).

2 Opérations sur les dérivées

2.1 Opérations arithmétiques

Théorème 9 Opérations arithmétiques sur les fonctions dérivables en un point x_0
Soient f et g deux fonctions dérivables en un même point x_0.

1. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda.f + \mu.g$ est dérivable en x_0 et on a :
$$(\lambda.f + \mu.g)'(x_0) = \lambda.f'(x_0) + \mu.g'(x_0)$$
2. La fonction $f \times g$ est dérivable en x_0 et on a :
$$(f \times g)'(x_0) = f'(x_0) \times g(x_0) + f(x_0) \times g'(x_0)$$

Ces résultats restent évidemment vrais à droite ou à gauche en x_0.

Corollaire 10 Opérations arithmétiques sur les fonctions dérivables sur une partie A
Soient f et g deux fonctions dérivables sur une même partie A.

1. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda.f + \mu.g$ est dérivable sur A et on a :
$$\forall x \in A, \quad (\lambda.f + \mu.g)'(x) = \lambda.f'(x) + \mu.g'(x)$$
2. La fonction $f \times g$ est dérivable sur A et on a :
$$\forall x \in A, \quad (f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$$

Corollaire 11 Linéarité de la dérivation
Si on note $D(A,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur A, alors $D(A,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-ev.
L'application :
$$\begin{array}{ccc} D(A) & \longrightarrow & \mathbb{R}^A \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$
est linéaire.

2.2 Dérivée d'une composée, d'un quotient

Théorème 12 Dérivabilité d'une composée en un point
Soient f une fonction dérivable en x_0 et g une fonction dérivable en $y_0 = f(x_0)$.
Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et :

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'\big(f(x_0)\big)$$

Ce résultat reste évidemment vrai à droite ou à gauche en x_0.

Corollaire 13 Dérivabilité d'une composée sur une partie A de $\mathbb{R}$
Soient f une fonction dérivable sur $A \subseteq \mathbb{R}$ et g une fonction dérivable sur $B \subseteq \mathbb{R}$, tel que $f(A) \subseteq B$.
Alors $g \circ f$ est dérivable sur A et :

$$\forall x \in A, \quad (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'\big(f(x)\big)$$

Exemple **:** $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est définie et continue sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
Elle est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.
Elle n'est ni dérivable à gauche en -1, ni dérivable à droite en 1.

Corollaire 14 Dérivabilité d'un quotient

1. Soient f et g deux fonctions dérivables x_0 tel que $g(x_0) \neq 0$.
   Alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables en x_0 et :
   $$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \times g(x_0) - f(x_0) \times g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$
2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $A \subseteq \mathbb{R}$, telle que g ne s'annule pas sur A.
   Alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables sur A et :
   $$\forall x \in A, \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{g(x)^2}$$

2.3 Dérivée d'une bijection réciproque

On rappelle le théorème suivant.

Théorème 15 Théorème de la bijection monotone Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue et strictement monotone sur I. Alors :
• $J = f(I)$ est un intervalle ;
• f est bijective de I sur J ;
• f^{-1} est strictement monotone sur J, de même sens de variations que f ;
• si f est impaire sur I, alors f^{-1} est impaire sur J ;
• f^{-1} est continue sur J ;
• $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$

Pour la dérivabilité de f^{-1}, on dispose du résultat suivant.

Théorème 16 Dérivabilité d'une bijection réciproque en un point
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue et strictement monotone sur I. Soit $x_0 \in I$ tel que f est dérivable en x_0. Alors :
• Si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et :

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

• Si $f'(x_0) = 0$ (cas d'une tangente horizontale pour $\mathscr{C}_f$ en x_0), alors f^{-1} n'est pas dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et sa courbe admet une tangente verticale en ce point.

Il existe un moyen mnémotechnique simple pour retrouver la dérivée de f^{-1} : dériver la formule $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$.

⚠ Attention : si f n'est pas dérivable en x_0, on ne peut rien dire sur la dérivabilité de f^{-1} en $y_0 = f(x_0)$. Par exemple $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0, mais $x \longmapsto x^2$ l'est.

Corollaire 17 Dérivabilité d'une bijection réciproque sur un intervalle
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable et strictement monotone sur I, et telle que f' ne s'annule pas sur I.
Alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et :

$$\forall y \in J, \quad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$$

Application à la fonction arctan**.**

La fonction tan est dérivable et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$$

On en déduit que la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R} = \tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2\left(\arctan(x)\right)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

3 Tableaux récapitulatifs des dérivées des fonctions usuelles

On rappelle les formules de dérivation des fonctions usuelles.

$f(x)$	$f'(x)$	Valeurs de x
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x>0$ (au minimum...)
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$x>0$
e^x	e^x	$x\in\mathbb{R}$
a^x	$\ln(a).a^x$	$x\in\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$x\in\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$x\in\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)$	$x\in\mathscr{D}_{\tan}$
$\arctan(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$x\in\mathbb{R}$

En utilisant la formule de dérivation d'une composée $\Big[f\big(u(x)\big)\Big]'=u'(x).f'\big(u(x)\big)$, on obtient les formules suivantes.

$f(x)$	$f'(x)$	Condition sur $u(x)$ en plus de sa dérivabilité
$u(x)^\alpha$	$\alpha.u'(x).u(x)^{\alpha-1}$	$u(x)>0$ (au minimum...)
$\ln(\lvert u(x)\rvert)$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$u(x)\neq 0$
$e^{u(x)}$	$u'(x).e^{u(x)}$	aucune
$\sin\big(u(x)\big)$	$u'(x).\cos\big(u(x)\big)$	aucune
$\cos\big(u(x)\big)$	$-u'(x).\sin\big(u(x)\big)$	aucune
$\tan\big(u(x)\big)$	$u'(x).\Big[1+\tan^2\big(u(x)\big)\Big]$	$u(x)\in\mathscr{D}_{\tan}$
$\arctan\big(u(x)\big)$	$\dfrac{u'(x)}{1+u(x)^2}$	aucune

⚠ ATTENTION ! La fonction $x\longmapsto \lvert x\rvert$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais dérivable seulement sur $\mathbb{R}^*$.

• **Cas des fonctions puissances réelles :**

Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, la fonction $x\longmapsto x^\alpha=e^{\alpha\ln(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables.

On a déjà vu que si $\alpha \geq 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ peut être prolongé par continuité en 0. Intéressons nous désormais à la dérivabilité de cette fonction prolongée.

Pour $\alpha = 0$, on a $x^\alpha = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dans ce cas la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour $\alpha > 0$ et $x > 0$:

$$\frac{x^\alpha - 0^\alpha}{x - 0} = x^{\alpha-1} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ 1 & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

La fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est donc dérivable (à droite) en 0 si, et seulement si, $\alpha = 0$ ou $\alpha \geq 1$.

Donc pour $0 < \alpha < 1$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est continue mais non dérivable (à droite) en 0.

4 Dérivabilité sur un intervalle d'une fonction à valeurs réelles

Dans tout ce paragraphe, on considère une fonction f définie sur un intervalle I.

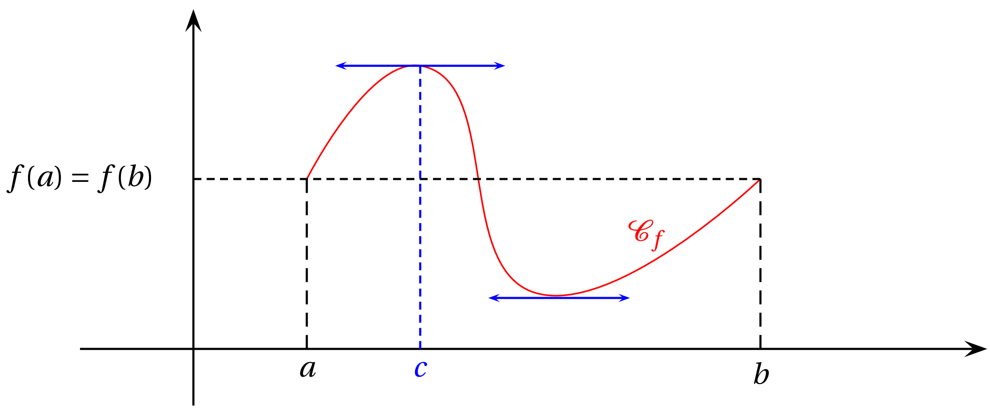
4.1 Lien entre extremum et dérivée

On est maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant dont l'énoncé a été rappelé au chapitre 7.

Théorème 18 Condition nécessaire d'extremum local
Soit f fonction dérivable sur un intervalle I et telle que :
(i) f admet un extremum local en $x_0 \in I$
(ii) $x_0 \in \mathring{I}$, ie x_0 n'est pas une borne de I.
Alors $f'(x_0) = 0$. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est donc horizontale.

4.2 Théorème de Rolle

Intuitivement, pour une fonction f vérifiant $f(a) = f(b)$, on voit sur la figure ci-dessous que sa courbe admet au moins une tangente horizontale.



Énonçons alors le résultat rigoureux.

Théorème 19 Théorème de Rolle
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
(i) f est continue sur $[a,b]$;
(ii) f est dérivable sur $]a,b[$;
(iii) $f(a) = f(b)$.
Alors :

$$\exists c \in]a,b[/ \ f'(c) = 0$$

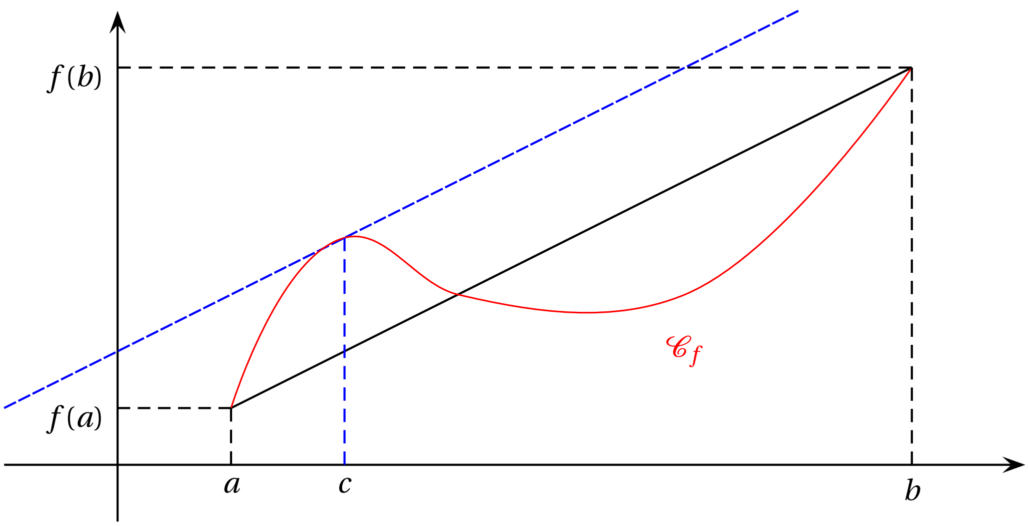
Démonstration : Puisque f est continue sur $[a,b]$, le théorème de continuité sur un segment donne que f est bornée et atteint ses bornes.

Si note $f(c_1) = \max_{t\in[a,b]} f(t)$ et $f(c_2) = \min_{t\in[a,b]} f(t)$, il reste à vérifier que $c_1 \in]a,b[$ ou $c_2 \in]a,b[$.

CQFD □

4.3 Théorème des accroissements finis

Intuitivement, pour une fonction f, on voit sur la figure ci-dessous que sa courbe admet au moins une tangente parallèle à la droite passant par les points $\big(a, f(a)\big)$ et $\big(a, f(a)\big)$.



Énonçons alors le résultat rigoureux.

Théorème 20 Théorème des accroissements finis
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
(i) f est continue sur $[a,b]$;
(ii) f est dérivable sur $]a,b[$.
Alors :

$$\exists c \in]a,b[/ \ f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Démonstration : On applique le théorème de Rolle à la fonction

$$\varphi : t \longmapsto f(t) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)$$

CQFD □

Corollaire 21 Inégalité des accroissements finis

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que :
   (i) f est dérivable sur I ;
   (ii) $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in I$, $m \leq f'(x) \leq M$.
   Alors :
   $$\forall (x, y) \in I^2, \quad x \leq y \Longrightarrow m \times (y-x) \leq f(y) - f(x) \leq M \times (y-x)$$
2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que :
   (i) f est dérivable sur I ;
   (ii) $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leq M$.
   Alors :
   $$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(y) - f(x)| \leq M \times |y-x|$$

Si $I = [a, b]$, le théorème de continuité sur un segment permet de poser dans le premier cas : $m = \min\limits_{t\in[a,b]} f'(t)$ et $M = \max\limits_{t\in[a,b]} f'(t)$, et dans le second cas : $M = \max_{t\in[a,b]} |f'(t)|$.

***Exemple* :** Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\quad \dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.

***Exemple* :** Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\sin(t)| \leq |t|$.

4.4 Lien entre dérivée et monotonie

Théorème 22 Lien entre dérivée et monotonie au sens large

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
(i) f est continue sur $[a, b]$;
(ii) f est dérivable sur $]a, b[$.
Alors :

1. f est croissante sur $[a, b] \Longleftrightarrow \forall x \in]a, b[$, $f'(x) \geq 0$.
2. f est décroissante sur $[a, b] \Longleftrightarrow \forall x \in]a, b[$, $f'(x) \leq 0$.
3. f est constante sur $[a, b] \Longleftrightarrow \forall x \in]a, b[$, $f'(x) = 0$.

***Exemple* :** Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

***Exemple* :** On suppose que f affine sur tout segment $[a, b]$. Montrer que f est affine sur $\mathbb{R}$.

Théorème 23 Lien entre dérivée et stricte monotonie
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
(i) f est continue sur $[a,b]$;
(ii) f est dérivable sur $]a,b[$.
Alors :

1. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ est strictement croissante sur $[a,b]$.
2. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ est strictement décroissante sur $[a,b]$.

⚠ ATTENTION : les réciproques sont fausses. Considérer par exemple $f : x \longmapsto x^3$ sur $[-1,1]$.

Corollaire 24 Lien entre dérivée et stricte monotonie sur un intervalle
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
(i) f est continue sur I ;
(ii) f est dérivable sur I sauf éventuellement en des points isolés $\{x_1,\dots,x_p\}$.
Alors :

1. $\forall x \in I\backslash\{x_1,\dots,x_p\},\ f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ est strictement croissante sur I.
2. $\forall x \in I\backslash\{x_1,\dots,x_p\},\ f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ est strictement décroissante sur I.

5 Dérivées d'ordre supérieur

5.1 Dérivées successives

Définition 25 Dérivées successives
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f est une fonction n fois dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$.
On définit la dérivée n-ième de f en x_0 par récurrence :

$$f^{(0)}(x_0) = f(x_0) \quad \text{et} \quad f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0)$$

On note aussi $\dfrac{d^n f}{dx^n}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$.

On a donc $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$ et $f^{(2)} = f''$.

Proposition 26 Associativité de la dérivation
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f est une fonction n fois dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$.
On a alors, pour tout $p \in [\![0,n]\!]$:

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^p}{dx^p}\left(\frac{d^{n-p} f}{dx^{n-p}}\right)(x_0) = \frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}}\left(\frac{d^p f}{dx^p}\right)(x_0)$$

et donc :

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right)(x_0) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{df}{dx}\right)(x_0)$$

Exemple **:** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto \cos(x)$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5.2 Fonctions de classe C^n, de classe C^∞

Définition 27 Fonctions de classe C^n
Soient $n \in \mathbb{N}$ et A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que f est de classe C^n sur A lorsque :
(i) f est n fois dérivable en tout $x_0 \in A$;
(ii) $f^{(n)}$ est continue sur A.

Donc : f est de classe C^0 sur $A \iff f$ est continue sur A ;
et : f est de classe C^1 sur $A \iff f$ est dérivable sur A et f' est continue sur A.
Dans ce dernier cas, on dit aussi que f est continûment dérivable sur A.

Exemple **:** La fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Notations : On note $D^n(A,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur A, et $C^n(A,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^n sur A. Alors :

$$C^0(A,\mathbb{R}) \subsetneq D^1(A,\mathbb{R}) \subsetneq C^1(A,\mathbb{R}) \subsetneq \cdots \subsetneq D^n(A,\mathbb{R}) \subsetneq C^n(A,\mathbb{R}) \subsetneq \ldots$$

Proposition 28 Régularité de la dérivée d'une fonction de classe C^n
Soit $f \in C^n(A,\mathbb{R})$. Alors pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, $f^{(p)} \in C^{(n-p)}(A,\mathbb{R})$.

Définition 29 Fonctions de classe C^∞
On dit que f est de classe C^∞ sur A lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est C^n sur A.
On dit aussi que f est indéfiniment dérivable sur A.

Notation : On note $C^\infty(A,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur A.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $C^\infty(A,\mathbb{R}) \subsetneq C^n(A,\mathbb{R})$.

Proposition 30 Régularité de la dérivée d'une fonction de classe C^∞
Soit $f \in C^\infty(A,\mathbb{R})$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \in C^\infty(A,\mathbb{R})$.

Proposition 31 Caractérisation des fonctions de classe C^n
Soient $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors :
f est classe C^n sur $I \iff f$ est n dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I.

5.3 Classe de régularité des fonction usuelles

• Les fonctions polynômes sont C^∞ sur $\mathbb{R}$.

• Les fractions rationnelles (= quotient de polynômes) sont C^∞ sur leur ensemble de définition.

• Les fonctions cos et sin sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$$

La fonction tan est C^∞ sur $\mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \Big/ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

• arctan est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

• La fonction ln est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x > -1, \quad \left(\ln(1+x)\right)^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

• La fonction exp est C^∞ sur $\mathbb{R}$ (vrai en base quelconque) et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(\mathrm{e}^x\right)^{(k)} = \mathrm{e}^x$$

• La fonction $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais C^∞ seulement sur $\mathbb{R}^*$.

• Les fonctions $x \longmapsto x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, sont C^∞ (au moins) sur $\mathbb{R}_+^*$. En 0, on a le résultat suivant.

Théorème 32 Classe de régularité de la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ en 0
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :
la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est C^n (à droite) en 0 $\Longleftrightarrow \alpha \geq n$

Exemple **:** $x \longmapsto x\sqrt{x}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^+$, C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

⚠ ATTENTION ! Pour des puissances entières, l'ensemble de dérivabilité peut être beaucoup plus grand que $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}_+^*$. Par exemple $x \longmapsto x^2$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ (polynôme), et $x \longmapsto \frac{1}{x^3}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ (fraction rationnelle).

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ est C^∞ sur $]-1, +\infty[$ (au moins), et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > -1, \quad \left((1+x)^\alpha\right)^{(k)} = \alpha \times (\alpha-1) \times (\alpha-2) \times \cdots \times (\alpha-k+2) \times (\alpha-k+1) \times (1+x)^{\alpha-k}$$

Exemple **:** Simplifier la formule dans le cas $\alpha = \frac{1}{2}$.

⚠ Attention : on ne peut pas dire ne général que $\alpha \times (\alpha-1) \times (\alpha-2) \times \cdots \times (\alpha-k+2) \times (\alpha-k+1) = \frac{\binom{\alpha}{k}}{k!}$.

5.4 Opérations arithmétiques sur les fonctions de classe C^n/C^∞

Théorème 33 Opérations arithmétiques sur les fonctions de classe C^n

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et f et g deux fonctions de classe C^n sur une même partie A.
   Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda.f + \mu.g$ est de classe C^n sur A et on a :
   $$(\lambda.f + \mu.g)^{(n)} = \lambda.f^{(n)} + \mu.g^{(n)}$$
2. Soient f et g deux fonctions de classe C^∞ sur une même partie A.
   Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda.f + \mu.g$ est de classe C^∞ sur A.

Corollaire 34 Structures de $\mathbb{R}$-ev

1. $C^0(A, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D^n(A, \mathbb{R})$ et $C^n(A, \mathbb{R})$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
3. $C^\infty(A, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Ils sont bien évidemment de dimension infinie.

Théorème 35 Formule de Leibnitz
Soient $n \in \mathbb{N}$ et f et g deux fonctions de classe C^n sur une même partie A.
Alors $f \times g$ est C^n sur A et :
$$\forall x \in A, \quad (f \times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . f^{(k)}(x) \times g^{(n-k)}(x)$$

Exemple : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $L_n(x) = \mathrm{e}^x \times \dfrac{d^n}{dx^n}\left(\mathrm{e}^{-x} x^n\right)$ (polynômes de Laguerre).
Montrer que $L_n \in \mathbb{R}[X]$ et que son terme dominant est $(-1)^n X^n$.

5.5 Composition de fonctions de classe C^n/C^∞

Théorème 36 Composition de fonctions de classe C^n
Soient $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe C^n sur une partie A, et g une fonction de classe C^n sur une partie B telle que $f(A) \subseteq B$.
Alors $g \circ f$ est C^n sur A.

⚠ ATTENTION : il existe une formule pour $(g \circ f)^{(n)}$, dite formule de Faà di Bruno mais...

$$(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_n)\in[\![0,n]\!]^n \\ \text{tq } 1.m_1+2.m_2+3.m_3+\cdots+n.m_n=n}} \frac{n!}{m_1!m_2!\cdots n!} f^{(m_1+m_2+\cdots+m_n}(g(x)) \times \prod_{k=1}^{n} \left[g^{(k)}(x)\right]^{m_k}$$

rassurez-vous, **elle n'est pas au programme !**

Corollaire 37 Composition de fonctions de classe C^∞
Soient f une fonctions de classe C^∞ sur une partie A, et g une fonction de classe C^∞ sur une partie B telle que $f(A) \subseteq B$.
Alors $g \circ f$ est C^∞ sur A.

Corollaire 38 Quotient de fonctions de classe C^n/C^∞

1. Soient $n \in \mathbb{N}$, f et g deux fonctions de classe C^n sur une même partie A, telle que g ne s'annule pas sur A.
   Alors $\dfrac{f}{g}$ est C^n sur A.
2. Soient f et g deux fonctions de classe C^∞ sur une même partie A, telle que g ne s'annule pas sur A.
   Alors $\dfrac{f}{g}$ est C^∞ sur A.

⚠ ATTENTION : il n'y pas de formule pour $\left(\dfrac{f}{g}\right)^{(n)}$ (ou plutôt pas de formule utilisable en pratique !).

6 Formules de Taylor

6.1 Formule de Taylor-Lagrange

La formule suivante permet d'approximer localement une fonction par une intégrale. On a une expression exacte du reste.

Théorème 39 Formule de Taylor-Lagrange
Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I. Alors :

$$\forall (a,x) \in I^2, \exists \zeta \in]a,b[/ \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Démonstration : On applique le théorème de Rolle à la fonction :

$$\varphi : t \longmapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - A\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

où $A \in \mathbb{R}$ est choisi telle que $\varphi(a) = 0$.

CQFD $\square$

En posant $x = a + h$, on obtient :

$$\exists \zeta \in]0, h[/ \quad f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\zeta)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

Corollaire 40 Développement en série de la fonction exponentielle
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$$

6.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

la formule précédente permet d'encadrer sur un intervalle (fermée) une fonction entre deux polynômes de même degré.

Théorème 41 Inégalité de Taylor-Lagrange
Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I. Alors :

$$\forall (a,x) \in I^2, \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où $M = \sup_{t \in [a,x]} |f^{(n+1)}(t)|$.

Exemple **:** Encadrer la fonction $x \ln(1+x)$ sur $]-1, +\infty$, entre deux polynômes de degré 4.

En posant $x = a + h$, on obtient :

$$\left| f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k \right| \leq M \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où $M = \sup_{t \in [a, a+h]} |f^{(n+1)}(t)|$.

6.3 Formule de Taylor-Young

Dans cette version de la formule, le reste n'est pas exact, on connaît simplement son ordre de grandeur (ce qui suffit dans la plupart des applications). On obtient donc un développement limité.

Théorème 42 Formule de Taylor-Young
Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et et f une fonction de classe C^n sur un voisinage de a. Alors :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\big((x-a)^{n+1}\big)$$

En posant $x = a + h$, on obtient :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o\big(h^{n+1}\big)$$

***Exemple* :** Si f est C^2 au voisinage de a, alors : $f''(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$.

Corollaire 43 Existence de développement limité à tout ordre
Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^∞ sur un voisinage de a.
Alors f admet en a un développement limité à tout ordre.

On en déduit tous les développements usuels en 0 !

6.4 Recherche d'extremums

On rappelle qu'on appelle segment tout intervalle $[a,b]$ fermé et borné (avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$). Nous avons vu au chapitre 15 le théorème suivant.

Théorème 44 Théorème de continuité sur un segment
Soit f continue sur un segment $[a,b]$.
Alors $f\big([a,b]\big)$ est aussi un segment. Précisons : cela signifie que $f\big([a,b]\big) = [m,M]$ où on a posé

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{et} \qquad M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

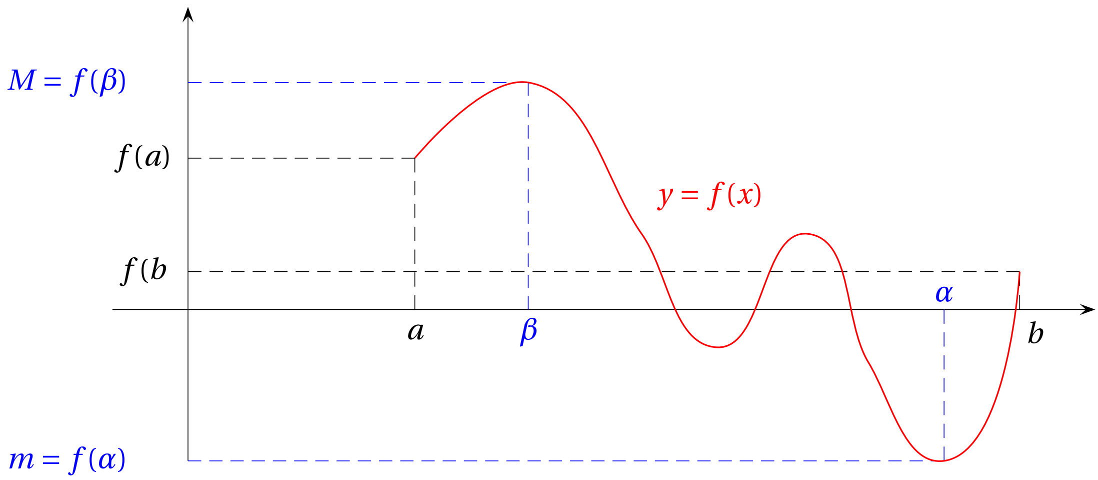
Rappelons que, par définition d'un minimum et d'un maximum, ces bornes sont atteintes, donc :

$$\exists \alpha \in [a,b] \,/\, m = f(\alpha) \qquad \text{et} \qquad \exists \beta \in [a,b] \,/\, M = f(\beta)$$

et ainsi :

$$\forall x \in [a,b], \quad f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta)$$

Autrement dit : f est **bornée et atteint ses bornes**.



⚠ ATTENTION ! Ceci est faux si on ne prend pas un segment.
Par exemple $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0,1]$ mais n'est pas majorée puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Théorème 45 Condition nécessaire d'extremum local
Soit f fonction C^1 sur un intervalle I et telle que :
(i) f admet un extremum local en $x_0 \in I$
(ii) I est un intervalle ouvert.
Alors $f'(x_0) = 0$. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est donc horizontale.

⚠ ATTENTION : la réciproque est fausse.

⚠ ATTENTION : l'hypothèse I ouvert est essentielle.

Ce résultat donne donc des points x_0 candidats à être des extremums locaux (on les appelle **points critiques** de f : $x_0 \in I$ et $f'(x_0) = 0$). Mais il faut ensuite vérifier point par point si on trouve bien un extremum local en ces points, puis faire une étude séparée des bornes de l'intervalle. Pour l'étude des points critiques, on peut utiliser le théorème suivant.

Théorème 46 Condition suffisante d'extremum local en un point critique
Soit f une fonction C^2 sur un intervalle ouvert I, et x_0 un point critique de f.
Si $f''(x_0) \neq 0$, alors f admet un extremum local en x_0 (maximum local si $f''(x_0) \geq 0$ et minimum local si $f''(x_0) \leq 0$).

En pratique, pour savoir si un extremum local est global, il suffit de dresser le tableau de variations de f.

***Exemple* :** Extremums de $x \longmapsto x^3$ sur $[-1,2]$.

7 Fonctions convexes

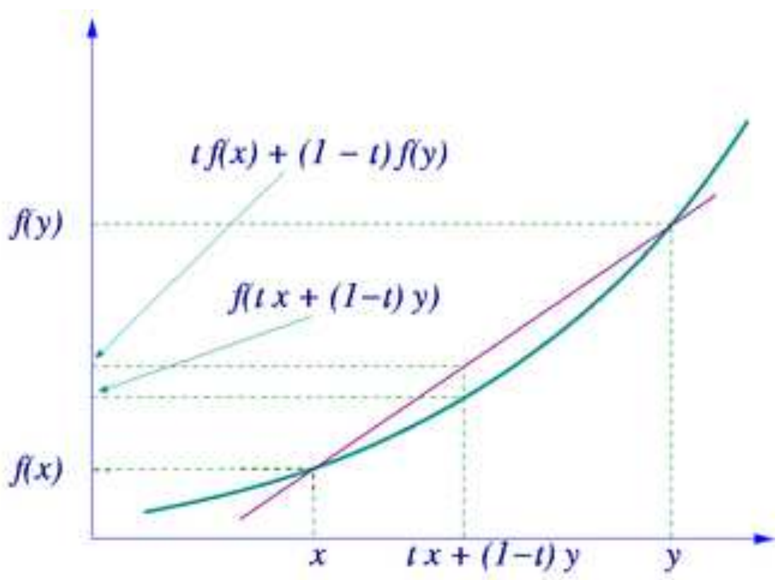
Définition 47 Fonction convexe/concave
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1. On dit que f est convexe sur I lorsque :
$$\forall (x,y) \in I^2, \forall t \in [0,1], \quad f\big(tx+(1-t)y\big) \leq t.f(x)+(1-t).f(y)$$
2. On dit que f est concave sur I lorsque :
$$\forall (x,y) \in I^2, \forall t \in [0,1], \quad f\big(tx+(1-t)y\big) \geq t.f(x)+(1-t).f(y)$$

Proposition 48 Lien entre convexe et concave
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Alors :
$$f \text{ est concave sur } I \iff -f \text{ est convexe sur } I$$

Pour cette raison nous n'étudierons que le cas des fonctions convexes.

Interprétation graphique de la convexité/concavité :
• Si f est convexe, tout arc de sa courbe est situé en-dessous de sa corde ;
• Si f est concave, tout arc de sa courbe est situé au-dessus de sa corde.



Théorème 49 Inégalité de Jensen
Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. On a alors, pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in I^n$ et tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in [0,1]^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

Théorème 50 Fonctions convexes de classe C^1
Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle I. On a équivalence de :
(i) f est convexe sur I ;
(ii) f' est croissante sur I ;
(iii) $\mathscr{C}_f$ est au-dessus ses tangentes sur I.

Théorème 51 Fonctions convexes de classe C^2
Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle I. Alors :

$$f \text{ est convexe sur } I \iff \forall x \in I, \quad f''(x) \geq 0$$

***Exemple* :** Les fonctions exp et $x \longmapsto x^2$ sont convexes sur $\mathbb{R}$, et la fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

***Exemple* :** Si $t \in [0,\pi]$, alors $\sin(t) \leq t$. En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\sin(t)| \leq |t|$ (cf l'inégalité des accroissements finis).

Définition 52 Point d'inflexion
Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et x_0 un point intérieur à I. Lorsque f est convexe sur l'un des deux intervalles $I \cap]-\infty, x_0]$ et $I \cap [x_0, +\infty[$, et concave sur l'autre, on dit que f admet un point d'inflexion en x_0.

Théorème 53 Condition nécessaire de point d'inflexion pour une fonction de classe C^2
Soient f une fonction de classe C^2 sur un intervalle I, et x_0 un point intérieur à I.
Si f'' s'annule en changeant de signe en x_0, alors f admet un point d'inflexion en x_0.

***Exemple* :** $x \longmapsto x^3$ admet un point d'inflexion en 0.

8 Exercices

Dérivée et étude de fonctions

Exercice 1 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. Établir que f et f' sont de parités contraires.
2. Montrer que f' est de même périodicité que f.

Exercice 2

1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $2+\ln x = x^2$.
2. On note h l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(0)=0$ et pour tout $x>0$, $h(x) = x\ln(x)$. Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}^+$ et tracer l'allure de son graphe en précisant les tangentes au point d'abscisse 0 et 1.
3. On pose $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Montrer que f est bijective sur $\mathbb{R}$ et déterminer f^{-1}.

Exercice 3 Pour chacune des fonctions suivantes déterminer son ensemble de continuité (la prolonger éventuellement par continuité aux bornes de son ensemble de définition), son ensemble de dérivabilité, puis calculer sa dérivée. Sont-elles de classe C^1 là où elles sont dérivables ?

1. $x \longmapsto \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
2. $x \longmapsto \begin{cases} 1-\mathrm{e}^x & \text{si } x<0 \\ -\ln(1+x) & \text{si } x>0 \end{cases}$
3. $x \longmapsto \sqrt{|1-x^2|}$

Exercice 4

1. Montrer que la restriction de cos à $[0,\pi]$ est bijective et étudier la continuité et la dérivabilité de son application réciproque, notée arccos.
2. Montrer que la restriction de sin à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ est bijective et étudier la continuité et la dérivabilité de son application réciproque, notée arcsin.

Exercice 5 On pose : $\forall t>0,\ g(t) = \dfrac{1}{t}\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}$.

1. Montrer que g peut-être prolongée en 0 en une fonction dérivable à droite en 0.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour n assez grand, l'équation $(E_n) : g(t) = \frac{1}{n}$ admet deux solutions x_n et y_n sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant : $0<x_n<1<y_n$.
3. Donner la monotonie et la limite des suites (x_n) et (y_n).

Exercice 6 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} \times \frac{\ln(x)}{2} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est C^1 sur son ensemble de définition.
2. Construire le tableau de variations de f.

Exercice 7 On définit les deux fonctions $\varphi : [0,2\pi] \longrightarrow [0,2\pi],\ t \longmapsto \varphi(t) = t - \sin(t)$ et $\psi : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \psi(t) = 1-\cos(t)$.

1. Montrer que φ est C^1 sur $[0,2\pi]$ et qu'elle admet une fonction réciproque φ^{-1} qui est continue sur $[0,2\pi]$ t dérivable sur $]0,2\pi[$.

   On pose $f : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$.

2. Vérifier que f est continue sur $[0, 2\pi]$ et dérivable sur $]0, 2\pi[$.
3. Étudier les variations de f sur $[0, 2\pi]$. Montrer que la droite d'équation $x = \pi$ est axe de symétrie pour la courbe représentative de$f$. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$. Que peut-on en déduire ?
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 8 Soit a un réel positif ou nul. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_a(x) = x^3 + ax - 1$.

1. Montrer que ce polynôme admet une unique racine réelle $u(a)$.

   On note u l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ qui a tout a associe le réel $u(a)$.
2. Montrer que : $u(\mathbb{R}_+) \subseteq \mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
4. Calculer $u(0)$, puis $\lim\limits_{a\to+\infty} u(a)$.
5. Déterminer l'application réciproque de u.
6. Montrer que u est continue sur $\mathbb{R}_+$.
7. Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $u'(a)$, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$.
8. Esquisser l'allure de la courbe représentative de u.

Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Exercice 9 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que $f(0) = 0$ et f' croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Établir que :

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x)}{x} \leq f'(x).$$

En déduire que la fonction $g : x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 10 Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1. Montrer que :

$$\forall x \in [a, b], \quad \exists c \in]a, b[/ \ f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c)$$

   Indication : on considèrera la fonction $\varphi(t) = f(t) - \frac{A}{2}(t-a)(t-b)$ où A est une constante bien choisie.
2. En déduire une constante M telle que :

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x)| \leq M \frac{(x-a)(b-x)}{2}$$

Exercice 11
Soit $\alpha \in]0, 1[$.

1. Établir que :

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1-\alpha}{(n+1)^\alpha} \leq (n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha} \leq \frac{1-\alpha}{n^\alpha}.$$

2. En déduire un équivalent de la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Dérivées d'ordres supérieurs

Exercice 12

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction n fois dérivable sur $[a,b]$, s'annulant en $n+1$ points distincts de $[a,b]$. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $]a,b[$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a,b deux réels tels que $a<b$. On considère f une fonction de classe C^n sur $[a,b]$ telle que :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0.$$

   Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins n fois sur $]a,b[$.
   Application : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = (X+1)^n(X-1)^n$ et $L_n = P_n^{(n)}$ (polynômes de Legendre). Montrer que L_n admet n racines réelles disctinctes et qu'elles appartiennent à l'intervalle $]-1,1[$.

Exercice 13 Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^∞ sur leur ensemble de définition et déterminer leurs dérivées successives : $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$.

Exercice 14 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0. \end{cases}$

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}.$$

2. En déduire que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Fonctions convexes

Exercice 15

1. Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que :

$$\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2, \quad \sqrt[p]{a}\,\sqrt[q]{b} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

2. Soit $p \geq 1$. En étudiant la convexité de $f :\longmapsto (1+t^p)^{\frac{1}{p}}$, établir que : $\forall t \geq 0$, $(1+t^p)^{\frac{1}{p}} \geq 2^{\frac{1}{p}-1}(1+t)$.
   En déduire que :

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2, \quad (x+y)^p \leq 2^{p-1}\left(x^p + y^p\right)$$

   Retrouver directement cette inégalité en utilisant la fonction $x \longmapsto x^p$.

Exercice 16

1. Soient f une fonction convexe sur un intervalle I et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n points de I. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des réelspositifs tels que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.
   Établir que : $f\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$.

2. En déduire que si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des réels strictement positifs alors :

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$