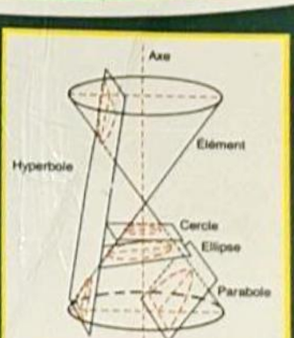
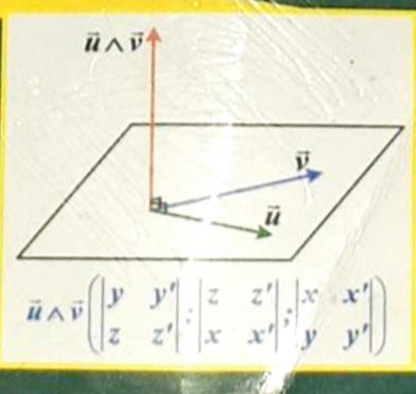
Le Chemin de la Réussite EN MATHEMATIQUES AU BACCALAUREAT C&E

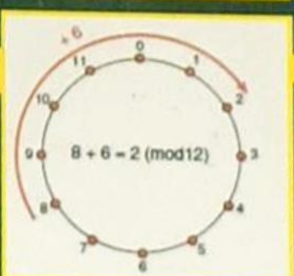
New look

TOME 1

- Des exercices et problèmes comme à l'examen avec corrigés
- 10 Problèmes type examen avec corrigés
- 10 sujets d'examens blancs des Ets. de renom avec corrigés
- Les 10 derniers sujets tous résolus







Par

M. KINGUE Louis Bernard
(PLEG de Mathématiques à Bafang)

M. PYAME Y. Richard Aimé
(Enseignant de Mathématiques)

M. TEDJOU Jean Claude
(PLEG de Mathématiques à Bafoussam)

Collection PYRA

Sous la coordination de l'IPR NJEUGEUT Justin

"L'apprentissage est la voie idéale conduisant en toute quiétude à la réussite"

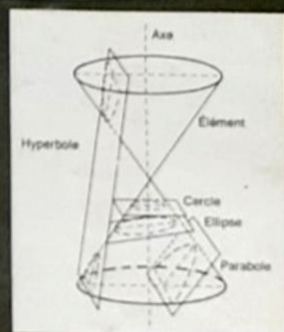
Le Chemin de la Réussite

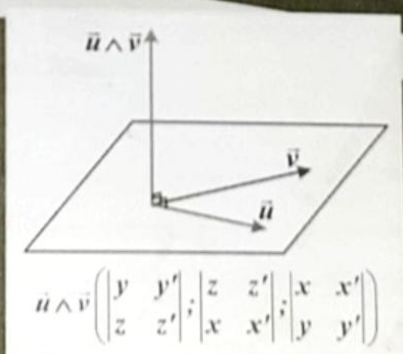
EN MATHEMATIQUES AU BACCALAUREAT C&E

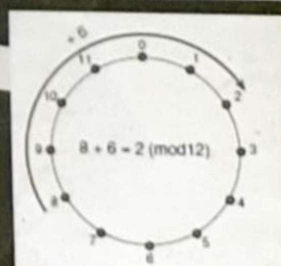
New look

TOME 1

- Des exercices et problèmes comme à l'examen avec corrigés
- 10 Problèmes type examen avec corrigés
- 10 sujets d'examens blancs des Ets. de renom avec corrigés
- Les 10 derniers sujets tous résolus







Par
M. KINGUE Louis Bernard
(PLEG de Mathématiques à Bafang)
M. PYAME Y. Richard Aimé
(Enseignant de Mathématiques)
M. TEDJOU Jean Claude
(PLEG de Mathématiques à Bafoussam)

Sous la coordination de l'IPR NJEUGEUT Justin

Collection PYRA

"L'apprentissage est la voie idéale conduisant en toute quiétude à la réussite"

SOMMAIRE

AVANT PROPOS

Dans le souci de créer un raccourci menant droit au succès, la collection « *Le Chemin de la Réussite* » met à la disposition des élèves candidats au **BACCALAUREAT « C » et « E »** les rubriques suivantes :

- ***Des exercices préparatoires*** pour faciliter l'entraînement des candidats et leur permettre en conséquence de bien assimiler les notions de cours.

- ***Des problèmes type examen*** permettant d'aller plus loin sur les notions afin d'acquérir les savoir-faire incontournables.

- ***Des sujets d'examens blancs*** qui vous permettront de faire la synthèse des méthodes abordées dans les différents chapitres et d'en voir les éventuels prolongements.

- ***Les 10 derniers sujets*** pour vérifier l'aptitude de l'élève à pouvoir affronter aisément les exercices le jour de l'examen.

La présentation lucide de cet ouvrage en fait un outil pratique et efficace pour progresser, se perfectionner et, bien entendu, se préparer en toute quiétude à l'examen de fin d'année.
Nous souhaitons que ce manuel vous permette d'acquérir les bons réflexes, ceux qui vous donneront l'aisance nécessaire pour aborder, avec confiance et sérénité l'épreuve de Mathématique au Baccalauréat.

La perfection n'étant pas humaine, toute remarque, toute critique et toute suggestion seraient les bienvenues.

N.B : - *Pour toutes difficultés éprouvées ou rencontrées face à un exercice, n'hésitez pas de nous écrire à l'adresse* ***cheminreussite@yahoo.fr*** *ou bien appeler au numéro (237) 675201831 pour que la réponse vous soit retournée le plus tôt possible.*

- Nous vous signalons que, pour des raisons de mise en page, les unités graphiques imposées dans les énoncés ne sont pas toujours respectées.

REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient **M. DAZOUE Guy Paulin, M. MOUDJI Sylvain, M. YOUDJEU Dieudonné, M. NANKO Elvis, M. MOUALEU TCHAMALEU Armand, M. NKOUAGNA Roméo, M. LIH Fred, M. TSEMO Florent et Mme PYAME Jeanine Laure** de leurs remarques et observations pertinentes apportées lors de la lecture du manuscrit de l'ouvrage, ainsi que **M. NGOUAMBE Nestor, M. DJUPKEP Billy, M. KOMBOU Stéphane et M. KOUGANG AWO Salvador** qui ont tous apporté leur expérience et leur savoir-faire pour la finalisation du manuel.

Par ailleurs, nous remercions sincèrement les Professeurs des Lycées en occurrence **M. YMMATA Aristide, M. NANA Gabriel, M. TCHOFFO Thomas, M. YEMELI Bernard, M. TSETAGHO Nicolas, M. TCHINDE Achille, M. NANA Tertullien, M. TALLA Albert et M. MODJO** de leur engagement de plus en plus croissant dans la stratégie de vulgarisation de cet ouvrage.

EXERCICES PREPARATOIRES AU BACCALAUREAT « C » ET « E »

FONCTIONS

ENONCE DES EXERCICES

Exercice 1 : **1**. On définit la fonction h telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

a) Etudier les variations de h.

b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α.

c) Montrer que $\alpha \in 1{,}6 \,;\, 1{,}7$ puis donner une valeur approchée de α.

d) En déduire le signe de $h(x)$.

2. On définit la fonction f par : $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x-1}$

a) Déterminer les réels a, b, c et d tels que : $f(x) = ax^2 + bx + c + \dfrac{d}{x-1}$.

On trouvera que $a = b = c = d = 1$.

b) Soit (Γ) la courbe de la fonction p tel que $p(x) = x^2 + x + 1$.
Calculer $\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(f(x) - p(x)\right)$ et conclure.

c) Etudier la position relative de Cf et Γ.

d) Montrer que $f'(x) = \dfrac{h(x)}{(x-1)^2}$ et en déduire les variations de f.

e) Construire Cf et Γ.

Exercice 2 : On Considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, I, J).

1-a) Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f.

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2- Représenter (C) (Prendre $OI = OJ = 2cm$).

3- En déduire la construction de la courbe (Γ) ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant $x^3 - 2x^2 + xy^2 + 2y^2 = 0$

Exercice 3 : Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{|x^2+x|+1}{|x|+1}$ et (C) sa courbe représentative.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en -1 et 0.

2) Etudier les variations de f et tracer (C).

Exercice 4 : f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=0$ et pour tout réel x, $f'(x)=\frac{1}{x^2+1}$. On admet que cette fonction existe et on ne cherchera pas à donner une expression de $f(x)$. (C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1) Justifier l'existence et l'unicité d'une primitive f de f' sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=0$.
(*on ne demande pas de la calculer*).

2) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=f(x)+f(-x)$

a) Calculer $g'(x)$ pour tout réel x.

b) Calculer $g(0)$ et en déduire que f est une fonction impaire.

3) Soit I la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $I(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$.

a) Calculer la dérivée I'(x) de I pour tout réel x de $\mathbb{R}^*$.

b) Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$, f possède une limite en $+\infty$ qui vaut $2f(1)$.

c) Que peut – on en déduire pour la courbe (C) ?

4) On considère la fonction T définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ *par* $T(x)=f(\tan x)-x$.

a) Montrer que T est dérivable et calculer T'.

b) En déduire une expression simple de T.

c) En déduire $f(1)$ et la limite de f en $+\infty$.

d) - Calculer $f(\sqrt{3})$; $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

- Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- Tracer la courbe (C), ses asymptotes et ses tangentes aux points d'abscisses -1 ; 0 et 1.

Exercice 5 : Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{|x^2-6x+5|}$ *et* (C) sa courbe représentative.

1- Exprimer f(x) sans le symbole « valeur absolue ».

2- Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition : (C) admet-elle des tangentes aux points d'abscisses 1 et 5 ?

3- Etudier les variations de f.

4- Démontrer que les droites d'équations $y=x-3$ *et* $y=-x+3$ sont asymptotes à (C)

5- Tracer (C) et démontrer qu'elle admet un axe de symétrie, dont on précisera l'équation.

6- Démontrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle [1,5], le point M(x, f(x)) est à une distance constante du point $\Omega(3,0)$. En déduire la nature de (C) sur l'intervalle [1 ; 5]

Exercice 6 : 1-a) Tracer la courbe représentative de la fonction $x \to \tan x$ sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$.

b) En déduire que l'équation $\tan x + x = 0$ admet dans cet intervalle deux solutions non nulles α *et* β
Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de ces solutions.

2- Soit f la fonction définie par : $f(x)=x\sin x$.

On désigne par (C) sa courbe représentative, par (Δ) *et* (Δ') les droites d'équations $y=x$ *et* $y=-x$.

a) Démontrer que f est une fonction paire.
Déterminer les abscisses des points d'intersection de (C) avec (OI).

b) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}+,\ -x \le f(x) \le x$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

c) Déterminer les points d'intersection de (C) avec (Δ) (*respectivement* (Δ')).

Démontrer qu'en chacun de ces points, (Δ) (*respectivement* (Δ')) est tangente à (C).

d) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Tracer (C) sur l'intervalle [-2π ; 2π].

CORRIGE DES EXERCICES

Exercice 1 : **1.a) Variations de h.**

$\mathbf{D_h} = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

h est **continue et dérivable** sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\mathbf{h'(x) = 6x^2 - 6x}$. $h'(x) = 0 \Rightarrow \mathbf{x = 0}$ ou $\mathbf{x = 1}$. $h(0) = 0$; $h(1) = -2$

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
h'(x)		+	0	−	0	+	
h(x)	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

b) Résolution de l'équation h(x) = 0.

Pour tout x de l'intervalle $]1,+\infty[$, h est **continue et strictement croissante**. De plus, $h(1) = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

Donc **l'équation h(x) = 0 admet une solution unique α.**

c) * Montrons que $\alpha \in 1{,}6\,;1{,}7$.

On a : $h(1{,}6) = -0{,}488 < 0$; $h(1{,}7) = 3{,}046 > 0$.

D'où $\mathbf{h(1{,}6) \times h(1{,}7) < 0}$. Alors d'après le **théorème des valeurs intermédiaires,** $\alpha \in 1{,}6\,;1{,}7$.

* Une **valeur approchée de** α est $\dfrac{1{,}6+1{,}7}{2} = \mathbf{1{,}65}$.

d) Signe de h(x)

Pour $x \in]-\infty, \alpha]$, $\mathbf{h(x)} \leq 0$ et pour $x \in [\alpha, +\infty[$, $\mathbf{h(x)} \geq 0$.

2. a) Déterminons les réels a, b, c, d tels que $\mathbf{f(x)} = ax^2 + bx + c + \dfrac{d}{x-1}$.

En faisant une division euclidienne, on trouve que $f(x) = x^2 + x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ et par identification,

a = b = c = d = 1.

b) Calcul de $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - p(x)\right)$

$f(x) - p(x) = \dfrac{1}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - p(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$.

On peut **conclure que (Γ) est une asymptote à (C_f).**

c) Position relative de (C_f) et Γ

Il suffit d'étudier le signe de $f(x) - p(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		−	0	+	

Ainsi, pour $x \in]-\infty, 1[$, **(C_f) est en dessous de Γ** ; pour $x \in]1, +\infty[$, **(C_f) est au dessus de Γ**.

d) Calcul de f '(x) et déduction des variations de f

$$\mathbf{f'(x)} = \frac{3x^2(x-1) - x^3 - 1}{(x-1)^2} = \frac{3x^3 - 3x^2 - x^3 - 1}{(x-1)^2} = \frac{\mathbf{h(x)}}{\mathbf{(x-1)^2}}.$$

Le signe de f '(x) est celui de h(x).

$f'(x) = 0 \Rightarrow h(x) = 0 \Rightarrow x = \alpha$;

$f(\alpha) = f(1{,}65) = 8{,}45$

Signe de f' et tableau de variation :

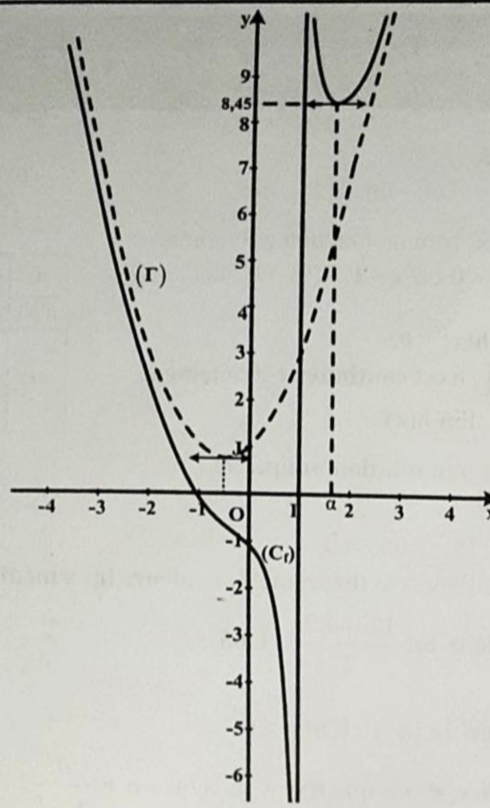
x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
f'(x)		−	‖	−	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	8,45	↗	$+\infty$

e) Construction de (C_f) et Γ :

voir figure page suivante

$p'(x) = 2x + 1$; $p'(x) = 0 \Rightarrow \mathbf{x = -\frac{1}{2}}$.

$p\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{4}$; $p(0) = 1$.



Exercice 2 :

1-a) $f(x)$ existe si et seulement si $\frac{2-x}{2+x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-2;2]$. $D_f =]-2;2]$. $\lim\limits_{x \to -2^{>}} f(x) = -\infty$; $f(2) = 0$.

b) f est continue sur D_f et dérivable sur $]-2;2[$. Pour tout x de]-2, 2[, $f'(x) = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} + x\frac{\frac{-4}{(x+2)^2}}{2\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}}$

c'est-à-dire $f'(x) = \frac{1}{2(x+2)^2\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}}\left(-2x^2-4x+8\right) = \frac{-x^2-2x+4}{(x+2)^2\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}}$.

f ' est du signe de $-x^2-2x+4 = -\left[(x+1)^2-1-4\right] = -\left(x+1-\sqrt{5}\right)\left(x+1+\sqrt{5}\right)$, or

$-1-\sqrt{5} \notin]-2;2[$ et $-1+\sqrt{5} \in]-2;2[$. $f\left(-1+\sqrt{5}\right) = \left(-1+\sqrt{5}\right)\sqrt{\sqrt{5}-2} \approx 0,6$.

f **est croissante** sur $\left]-2;-1+\sqrt{5}\right[$ **et décroissante** sur $\left]-1+\sqrt{5};2\right[$. $-1+\sqrt{5} \approx 1.23$; $f(-1) = -\sqrt{3}$.

La droite d'équation x = -2 est asymptote à (C) .

x	-2		$-1+\sqrt{5}$		2
f'(x)		+	0	–	
f(x)	$-\infty$	↗	0,6	↘	0

2- Représentation graphique :

voir graphique ci-dessous

3- Déduction graphique :

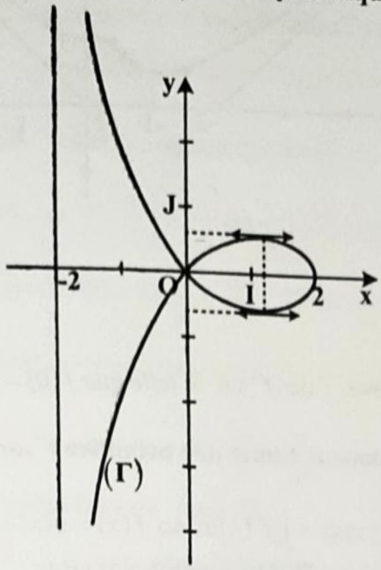
$M(x,y) \in \Gamma \Leftrightarrow x^3-2x^2+xy^2+2y^2=0 \Leftrightarrow$

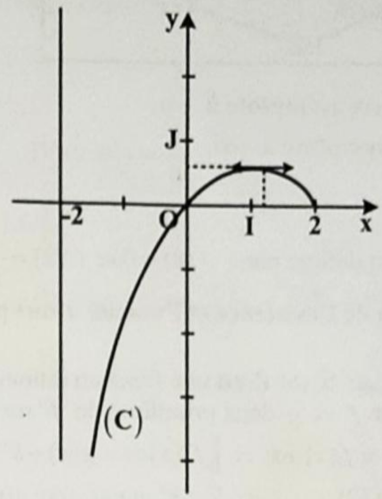
$y^2(x+2) = x^2(2-x)$.

Pour $x=-2$, on a $0=16$ (impossible), d'où $x \neq -2$

et $y^2 = x^2\left(\frac{2-x}{x+2}\right)$ **a un sens si et seulement si** $x \in]-2;2]$ et $y = x\sqrt{\frac{2-x}{x+2}}$ ou $y = -x\sqrt{\frac{2-x}{x+2}}$.

Ainsi (Γ) **est la réunion de** (C) **et du symétrique de** (C) **par rapport à l'axe des abscisses.**





Exercice 3 : 1) Etude de la continuité et de la dérivabilité de f en -1 et 0

* $f(-1) = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \to -1^<} f(x) = \lim_{x \to -1^<} \frac{x^2+x+1}{-x+1} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \to -1^>} f(x) = \lim_{x \to -1^>} \frac{-x^2+x+1}{-x+1} = \frac{1}{2}$. **Alors f est continue en -1.**

* $f(0) = 1$; $\lim_{x \to 0^<} f(x) = \lim_{x \to 0^<} \frac{-x^2-x+1}{-x+1} = 1$; $\lim_{x \to 0^>} f(x) = \lim_{x \to 0^>} \frac{x^2+x+1}{x+1} = 1$. **Alors f est continue en 0.**

* $$\lim_{x \to -1^<} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^<} \frac{\frac{x^2+x+1}{-x+1} - \frac{1}{2}}{x+1} = \lim_{x \to -1^<} \frac{2x^2+3x+1}{2(x+1)(-x+1)} = \lim_{x \to -1^<} \frac{(2x+1)(x+1)}{2(x+1)(-x+1)} = \lim_{x \to -1} \frac{2x+1}{2(-x+1)} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \to -1^>} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^>} \frac{\frac{-x^2-x+1}{-x+1} - \frac{1}{2}}{x+1} = \lim_{x \to -1^>} \frac{-2x^2-x+1}{2(x+1)(-x+1)} = \lim_{x \to -1^>} \frac{-2x+1}{2(-x+1)} = \frac{3}{4}.$$

Donc f n'est pas dérivable en -1.

* $$\lim_{x \to 0^<} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^<} \frac{\frac{-x^2-x+1}{-x+1}}{x} = \lim_{x \to 0^<} \frac{-x^2}{x(-x+1)} = \lim_{x \to 0^<} \frac{-x}{-x+1} = \mathbf{0} \text{ ;}$$

$$\lim_{x \to 0^>} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^>} \frac{\frac{x^2+x+1}{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \to 0^>} \frac{x^2}{x(x+1)^2} = \lim_{x \to 0^>} \frac{x}{x+1} = 0.$$ **Alors f est dérivable en 0.**

2) - Pour $x \in]-\infty;-1]$, $f'(x) = \frac{-x^2+2x+2}{(-x+1)^2} < 0$.

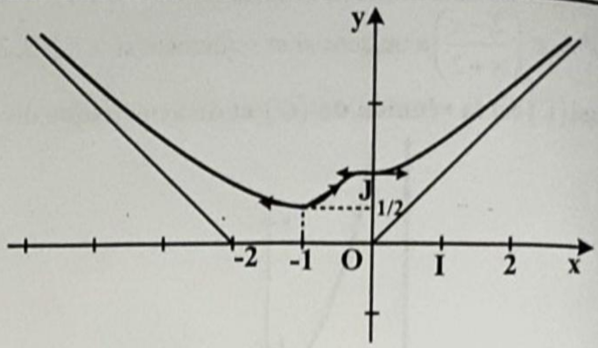
- Pour $x \in [-1;0]$, $f'(x) = \frac{x^2-2x}{(-x+1)^2} > 0$.

- Pour $x \in [0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} > 0$.

	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$\lvert x^2+x \rvert$		x^2+x	0	$-x^2-x$	0	x^2+x	
$\lvert x \rvert$		$-x$		$-x$	0	x	
$f(x)$		$\frac{x^2+x+1}{-x+1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\frac{-x^2-x+1}{-x+1}$	(1)	$\frac{x^2+x+1}{x+1}$	

*** Tableau de variation :**

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f'(x)		-	-1/4 || 3/4	+	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	1/2	↗	1	↗	$+\infty$



$D_1 : y=-x-2$ **est asymptote à** $-\infty$.

$D_2 : y=x$ **est asymptote à** $+\infty$.

Exercice 4 :

f est la fonction définie par : $f(0)=0$ *et* $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

1- Justification de l'existence et l'unicité d'une primitive f de f' sur $\mathbb{R}$ *telle que* $f(0)=0$.

Existence :

f ' est continue sur $\mathbb{R}$ car f' est une fonction rationnelle, donc **f' admet une primitive f sur** $\mathbb{R}$.

Unicité : Soient f et g deux primitives de f' *sur* $\mathbb{R}$;

alors $\int f'(x)dx=f(x)+k$ et $\int f'(x)dx=g(x)+k'$. $\int f'(x)dx=\int f'(x)dx \Leftrightarrow f(x)=g(x)+k'-k,$

or f (0) = 0 et g (0) = 0, donc k = k' et par suite g(x) = f(x) sur $\mathbb{R}$. **On conclut alors que** f **est unique.**

2- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=f(x)+f(-x)$.

a) Calculons g'(x) pour tout réel x.

$\forall x\in\mathbb{R}, g'(x)=f'(x)-f'(-x)=\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{1}{x^2+1}=0$. Donc $\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)=0$.

b) * Calcul de g (0) : g (0) = f(0) + f(0) = 0.

*** Déduisons – en que** f **est une fonction impaire.**

g' = 0 $\Rightarrow$ g est constante. Comme g(0) = 0, g est une fonction nulle.
Donc f(x) + f(-x) = 0 c'est-à-dire f(-x) = - f(x). **D'où f est impaire.**

3- Soit I la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $I(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a) Calcul de $I'(x)$: $\forall x\in\mathbb{R}^*, I'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{x^2}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{x^2}+1}=0$. Donc **I'(x) = 0** $\forall x\in\mathbb{R}^*$.

b) Démontrons que $\forall x\in\mathbb{R}^*, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2f(1)$.

On a $f(x)=I(x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[I(x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty} I(x)=f(1)$ car I est une fonction constante et $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(0)=0$. Ainsi, $I(1)=f(1)+f(1)=2f(1)$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2f(1)$.

c) On en déduit que la courbe (C) admet une asymptote horizontale qui est la droite d'équation y = 2f(1).

4) Soit T la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $T(x)=f(\tan x)-x$.

a) Montrons que T est dérivable et calculons sa dérivée T'.

La fonction $x\mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\tan\left(\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\right)=\mathbb{R}$, or f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

D'où T = $f\circ\tan$ **est dérivable sur** $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $T'(x)=(\tan x)'.f'(\tan x)-1=(1+\tan^2 x)\times\frac{1}{\tan^2 x+1}-1=1-1=0$. **Donc** $T'(x)=0$.

b) Déduisons – en une expression simple de T.

La dérivée de T est constante et vaut 0, donc T est une fonction constante.

Pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $T(x)=T(0)=f(\tan 0)-0=0$. Donc $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, **T(x) = 0.**

c) * Déduisons – en f(1) : on sait que $\tan\frac{\pi}{4}=1$.

Donc $T\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$, or $T\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}=f(1)-\frac{\pi}{4}$. **D'où f(1) =** $\frac{\pi}{4}$.

* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2f(1)=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$. **Donc** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\pi}{2}$.

d) * $T(x)=f(\tan x)-x \Rightarrow f(\tan x)=T(x)+x$, or $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, d'où $f\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\sqrt{3}\right)=T\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$.

Donc $f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}$. De plus, on a $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$, or $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=T\left(\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ car $T(x)=0$. Donc $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}$.

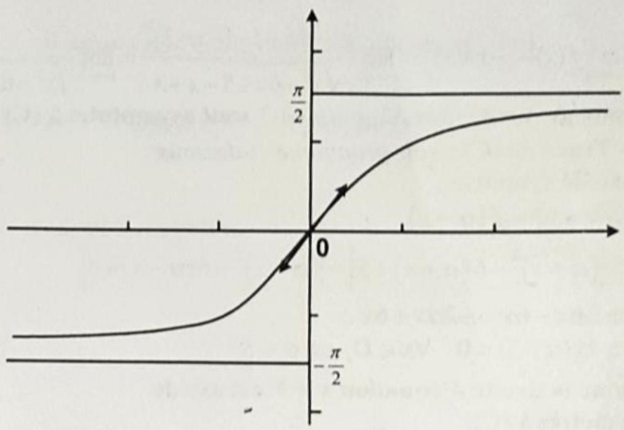
*** Tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.**

$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}>0$. **Donc f est strictement croissante.**

*** Tracé de la courbe (C) :**

voir figure ci-contre

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	+		+
f(x)	$-\frac{\pi}{2}$ ↗	0	↗ $\frac{\pi}{2}$



<u>Exercice 5</u> : $f(x)=\sqrt{|x^2-6x+5|}$

1) Expression de f(x) sans symbole « valeur absolue ».

- *Pour* $x\in]-\infty,1]\cup[5;+\infty[$, $f(x)=\sqrt{x^2-6x+5}$ - *Pour* $x\in[1,5]$, $f(x)=\sqrt{-x^2+6x-5}$

2) * Continuité de f sur $D_f=\mathbb{R}$.

f est continue sur $]-\infty,1[\cup]1,5[\cup]5+\infty[$ comme composée de fonctions continues sur cet intervalle .

Continuité de f en 1 et en 5.

$f(1)=0, \lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\sqrt{x^2-6x+5}=0; \lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\sqrt{-x^2+6x-5}=0$

$f(5)=0, \lim_{x\to5^-} f(x)=\lim_{x\to5^-}\sqrt{-x^2+6x-5}=0 ; \lim_{x\to5^+} f(x)=\lim_{x\to5^+}\sqrt{x^2-6x-5}=0$.

f est continue en 1 et 5, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

*** Dérivabilité de f sur D_f**

f est dérivable sur $I=]-\infty,1[\cup]1,5[\cup]5;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur I .

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{x^2-6x+5}}{x-1}=\lim_{x\to1^-}-\sqrt{\frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)^2}}=\lim_{x\to1^-}-\sqrt{\frac{x-5}{x-1}}=-\infty$$

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{-x+5}}{x-1}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to5^-}\dfrac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim\limits_{x\to5^-}-\sqrt{\dfrac{1-x}{x-5}}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to5^+}\dfrac{f(x)-f(5)}{x-5}=+\infty$

f n'est ni dérivable en 1 ni en 5.

Aux points d'abscisses 1 et 5, (C) admet des tangentes verticales.

3- Etude des variations de f.

Pour $x\in\left]-\infty,1\right[\cup\left]5,+\infty\right[$, $f'(x)=\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}$; Pour $x\in\left]1,5\right[$, $f'(x)=\dfrac{-x+3}{\sqrt{-x^2+6x-5}}$

Tableau de variations de f.

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
f'(x)		-	$-\infty$ ‖ $+\infty$	+	0	-	$-\infty$ ‖ $+\infty$	+	
f(x)	$+\infty$	↘	0	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

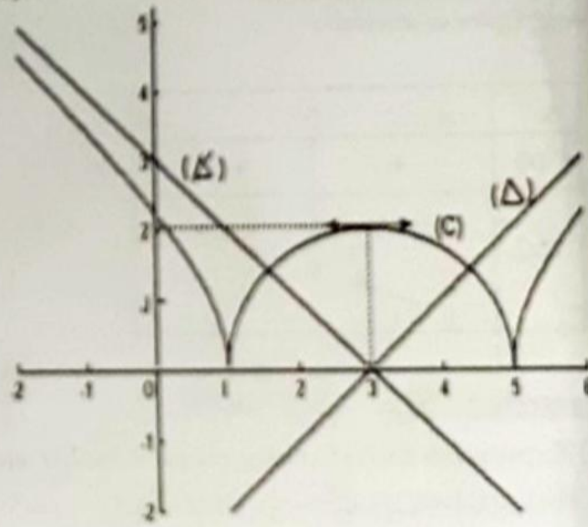
4- Montrons que $\Delta: y=x-3$ *et* $\Delta': y=-x+3$ sont asymptotes à (C).

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-3)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-6x+5-(x-3)^2}{\sqrt{x^2-6x+5}+x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2-6x+5}+(x-3)}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x+3)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-6x+5-(-x+3)^2}{\sqrt{x^2-6x+5}-x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2-6x+5}-x+3}=0.$$

Donc $\Delta: y=x-3$ *et* $\Delta': y=-x+3$ sont asymptotes à (C) .

5- Tracé de (C) : *voir graphique ci-dessous*



Axe de symétrie :

$f(a+x)=f(a-x)$

$\Leftrightarrow\left|(a+x)^2-6(a+x)+5\right|=\left|(a-x)^2-6(a-x)+5\right|$

$\Leftrightarrow 2ax-6x=-2ax+6x$

$\Leftrightarrow 4x(a-3)=0\quad\forall x\in D_f \Leftrightarrow a=3.$

Donc la droite d'équation x = 3 est axe de symétrie à (C).

6- Montrons que ΩM est constante .

$M(x,f(x)),\ x\in[1,5].\ M\left(x,\sqrt{-x^2+6x-5}\right)$ *et* $\Omega(3,0)$

$\Omega M^2=(x-3)^2+\left(\sqrt{-x^2+6x-5}\right)^2$

$=x^2-6x+9-x^2+6x-5=4.$ Donc $\mathbf{\Omega M=2}$.

Nature de (C) dans [1,5]

Dans [1,5], **(C) est un demi-cercle de centre** $\Omega(3,0)$ **et de rayon r = 2.**

Exercice 6 :

1-a) Tracé de $(C_g)/g(x)=\tan x\ sur[0;2\pi]$.

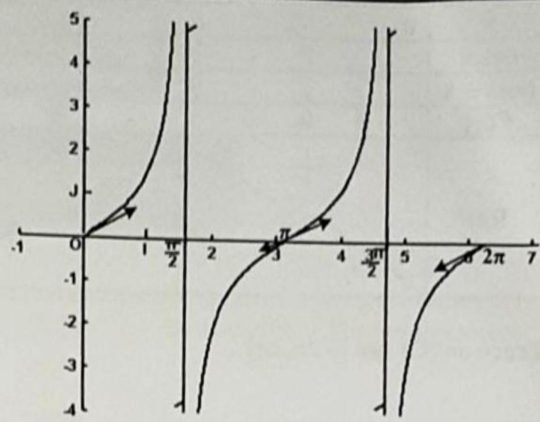
g est périodique de période π.

- $\mathbf{D_g}=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.
- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}g(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}g(x)=-\infty$;

* Pour tout $x \in D_g$, $g'(x) = 1 + \tan^2 x$.

* **Tableau de variation de g :**

x	0		$\pi/2$		π
g'(x)		+	||	+	
g(x)	0	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	0



b) Déduction des solutions de l'équation $\tan x + x = 0$.
Posons $h(x) = \tan x + x$.
h est continue et strictement croissante dans
$\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ *et dans* $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, *puis* $h\left(\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$,

$h\left(\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]\right) = \left]-\infty, 2\pi\right]$ $0 \in \mathbb{R}$ *et* $0 \in \left]-\infty, 2\pi\right]$.

Donc $\exists! \alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, $\exists! \beta \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ tel que

$h(\alpha) = 0$ *et* $h(\beta) = 0$. D'où, **l'équation** $\tan x + x = 0$ **admet deux solutions** α *et* β dans $[0, 2\pi]$.

Valeurs approchées de α *et* β *à* 10^{-1} **près.**

$h(2{,}02) = -0{,}054$ *et* $h(2{,}03) = 0{,}007$, *donc* $\alpha = 2{,}0$; $h(5) = 1{,}6$ *et* $h(4{,}9) = -0{,}36$, *donc* $\beta = 4{,}9$

2) $f(x) = x \sin x$, $\Delta : y = x$, $\Delta' : y = -x$

a) Montrons que f est paire.

$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -x \sin(-x) = x \sin x = f(x)$. D'où **f est paire**.

Intersection de (C) avec (OI) :

$x \sin x = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } \sin x = 0) \Leftrightarrow x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

b) Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}_+, -x \le f(x) \le x$..

$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \le \sin x \le 1$ (1).

(1) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+, x(-1) \le x \sin x \le x(1) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+, -x \le f(x) \le x$.

Interprétation graphique : Pour $x \in \mathbb{R}_+$, (C) se trouve entre les droites (Δ) *et* (Δ').

c) Points d'intersection de (C) avec (Δ) *et* (Δ').

Avec $\Delta : x \sin x = x \Leftrightarrow x(\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \, (k \in \mathbb{Z})$

Avec $\Delta' : x \sin x = -x \Leftrightarrow x(\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \, (k \in \mathbb{Z})$.

Puisque (C) est entre (Δ) *et* (Δ'), **en chacun de ces points** Δ (*respectivement* Δ') **est tangente à (C)**

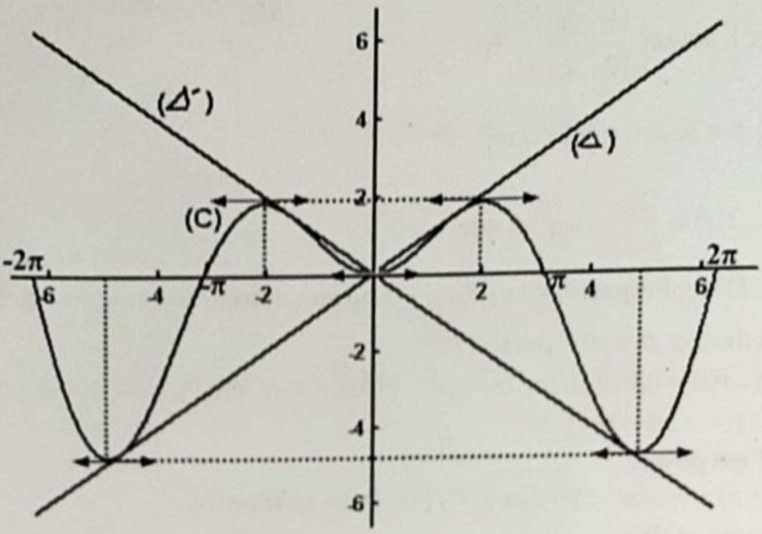
d) Etude des variations de f sur $[0, 2\pi]$.

$f'(x) = \sin x + x \cos x = \cos x(\tan x + x)$

$f(\alpha) = f(2) = 2 \sin 2 \simeq 1{,}9$, $f(\beta) = f(4{,}9) = 4{,}9 \sin 4{,}9 \approx -4{,}8$

x	0		π/2		α		3π/2		β		2π
cos x		+	0	-		-	0	+		+	
tanx + x		+		-	0	+		-	0	+	
f'(x)		+	0	+	0	-	0	-	0	+	
f(x)	0	↗	π/2	↗	1,9	↘	-3π/2	↘	-4,8	↗	0

Tracé de (C) sur $[-2\pi, 2\pi]$.



ARITHMETIQUE

ENONCE DES EXERCICES

Exercice 1 : On veut entourer avec un minimum d'arbres un champ rectangulaire ayant pour dimensions 525m et 285m. Les arbres seront régulièrement espacés ; de plus, il y aura un arbre à chaque sommet du rectangle. Calculer :

a) La distance comprise entre deux arbres.

b) Le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ.

Exercice 2 : n désigne un entier relatif différent de 1 et $a=\dfrac{n+5}{n-1}$.

1-a) Démontrer que **a** est entier si et seulement si n – 1 divise 6.

b) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles a est un entier relatif.

2) On se propose de déterminer les valeurs de n pour lesquels $a=\left(\dfrac{p}{q}\right)^2$ où p et q sont premiers entre eux.

a) Démontrer que s'il en est ainsi, alors $n=1+\dfrac{6q^2}{p^2-q^2}$.

b) Démontrer que p^2-q^2 et q^2 sont premiers entre eux.

c) Déterminer les couples (p, q) d'entiers relatifs non nuls premiers entre eux tels que $p^2 - q^2$ divise 6.

d) Déterminer les valeurs de n telles que **a** soit le carré d'une fraction irréductible.

Exercice 3 : On désigne par **p** un nombre entier premier supérieur ou égal à 7.
Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier naturel $n=p^4-1$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

1- Montrer que p est congru à -1 ou à 1 modulo 3. En déduire que n est divisible par 3.

2- En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $P^2-1=4k(k+1)$, puis que n est divisible par 16.

3) En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de p par 5, démontrer que 5 divise n

4-a) Soient a, b et c trois entiers naturels. Démontrer que si a divise c et b divise c, avec a et b premiers entre eux, alors ab divise c.

b) Déduire de ce qui précède que 240 divise n.

Exercice 4 : **I-** 1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $45x-28y=1$ d'inconnue (x ; y).

2) En déduire la résolution dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation (E') : $45x-28y=6$.

II) A. Soit x un nombre réel

1) Montrer que : $x^4+4=(x^2+2)^2-4x^2$.

2) En déduire que x^4+4 est le produit de deux trinômes à coefficients entiers.

B. Soit un entier naturel n, $n\geq 2$. On considère les entiers $X=n^2-2n+2$ et $Y=n^2+2n+2$.
On pose d = PGCD(X ;Y).

1) Montrer que n^4+4 n'est pas premier.

2) Montrer que tout diviseur de X qui divise n , divise 2.

3) Montrer que tout diviseur commun de X et Y divise 4n.

4) Dans cette question, on suppose que n est impair.

a) Montrer que X et Y sont impairs. En déduire que d est impair.

b) Montrer que d divise n.

c) En déduire que d divise 2 ; puis que X et Y sont premiers entre eux.

5) On suppose maintenant que n est pair.

a) Montrer que 4 ne divise pas X.

b) Montrer que d = 2p où p est un entier impair.

c) Montrer que p divise n. En déduire que d = 2 (*On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question 4*).

Exercice 5 : a et b désignent des entiers non nuls.

1- Démontrer que les diviseurs communs de a et a^2+b sont les diviseurs communs de a et b. Qu'en déduit-on concernant PGCD(a, a^2+b) et PGCD(a, b) ?

2- Montrer que le plus grand diviseur commun de a + b et 2a + 3b est celui de a et b.

Exercice 6 : **a** est un entier naturel non nul. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^{n+1}-a(n+1)-1$ est divisible par a^2.

Exercice 7 : 1- On considère l'ensemble $A_7=\{1;2;3;4;5;6\}$.

a) Pour tout élément a de A_7, écrire dans le tableau ci-dessous l'unique élément de y de A_7 tel que $ay \equiv 1(\text{modulo } 7)$.

a	1	2	3	4	5	6
y						6

b) Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5$ (modulo 7) équivaut à $x \equiv 4$ (modulo 7)

c) Si a est un élément de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0$ (modulo 7) sont les multiples de 7.

2- Dans toute cette question, p est un nombre premier supérieur ou égal à 3. On considère l'ensemble $A_p=\{1;2;3;...;p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p. soit a un élément de A_p.

a) Vérifier que a^{p-2} est solution de l'équation $ax \equiv 1$ (modulo p).

b) On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution dans A_p de l'équation $ax \equiv 1$ (modulo p).

c) Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $xy \equiv 0$ (modulo p) si, et seulement si, x est un multiple de p ou y est un multiple de p.

Exercice 8 : 1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $x^2-4x+2 \equiv 0 \quad [7]$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} 3x-y \equiv 1 & [5] \quad (1) \\ x+2y \equiv 0 & [5] \quad (2) \end{cases}$

Exercice 9 : Soit $E(n)=n^4+n^2+1$ où n est un entier strictement positif.

1. Ecrire $E(n)$ comme produit de deux facteurs du second degré et démontrer que ces deux facteurs sont premiers entre eux.

2. Le nombre $E(n)$ peut-il être premier ?

Exercice 10 : Le nombre **n** est un entier naturel non nul.

On pose : a = 4n + 3, b = 5n + 2 et on note **d** le PGCD de a et b.

1- Donner la valeur de d dans les trois cas suivants : n = 1, n = 11 et n = 15

2- Calculer 5a – 4b et en déduire les valeurs possibles de d.

3-a) Déterminer les entiers naturels n et k tels que 4n + 3 = 7k.

b) Déterminer les entiers naturels n et k' tels que 5n + 2 = 7k'

4- Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7.

a) Déduire des questions précédentes la valeur de r pour laquelle d vaut 7.

b) Pour quelles valeurs de r, d est – il égal à 1 ?

Exercice 11 : 1) Déterminer tous les couples d'entiers naturels (a, b) tels que : $a \times b = 12950$ et $PPCM(a, b) = 2590$.

2- a) Montrer que l'entier 491 est premier.

b) Montrer que les entiers 491 et 624 sont premiers entre eux.

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation : $491x - 624y = 1$

3- On considère le nombre $E(n) = n^4 + n^2 + 1$, **n** étant un entier positif non nul.

a) Décomposer E(n) en produit de deux facteurs du second degré, puis démontrer que ces deux facteurs sont premiers entre eux.

b) Le nombre E(n) peut –il être premier ?

4- Quel est le nombre de diviseurs positifs du nombre 1638 ?

Exercice 12 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$,on appelle S(n) la somme de tous les diviseurs de n (y compris entre 1 et n)

1- Calculer : S(8) ; S(36) ; S(152).

On dit qu'un nombre est parfait si $S(n) = 2n$.

2- Montrer que 28 est un nombre parfait.

3- Montrer que, si a et b sont premiers entre eux, alors $S(ab) = S(a)S(b)$.

4- Montrer que P est premier si et seulement si $S(P) = P+1$.

5- Soit P un nombre premier et $k \in \mathbb{N}^*$. Quels sont les diviseurs de P^k ?

En déduire que $S(P^K) = \dfrac{P^{K+1} - 1}{P - 1}$.

6- Décomposer 496 en produit de facteurs premiers.

Déduire des questions 3-) et 5-) la valeur de S(496). Conclure.

Exercice 13 : 1- Démontrer que pour tout entier naturel n, $2^{3n}-1$ est un multiple de 7 (*on pourra utiliser un raisonnement par récurrence*).

En déduire que $2^{3n+1}-2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2} - 4$ est aussi un multiple de 7.

2- Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3- Le nombre P étant un entier naturel, on considère le nombre entier $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.

a) Si $P = 3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7 ?

b) Démontrer que si $P = 3n + 1$, alors A_p est divisible par 7.

c) Etudier le cas où $P = 3n + 2$.

4- On considère les nombres entiers **a** et **b** écrits dans le système binaire $a = \overline{1001001000}$ *et* $b = \overline{1000100010000}$.

Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p.

Sont-ils divisibles par 7 ?

Exercice 14 :

1- On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où (x, y) est un couple de nombres entiers relatifs.

a) Donner une solution particulière de l'équation (E)

b) Résoudre l'équation (E).

2- Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple (a, b) de nombres entiers vérifiant : $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$

a) Montrer que le couple (a, -b) est solution de (E).

b) Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?

3-a) Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où (x, y) est un couple de nombres entiers relatifs.

b) Au VIIIe siècle, un groupe composé d'hommes et femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

Exercice 15 : On considère l'équation (E) : $4x^3 + x^2 + x - 3 = 0$

1) Montrer en étudiant la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^3 + x^2 + x - 3$, que l'équation (E) n'a q'une solution réelle, qui de plus appartient à l'intervalle $]0,1[$.

2) Démontrer que, si l'équation (E) admet une solution rationnelle $\frac{p}{q}$, où p et q sont étrangers, alors p divise 3 et q divise 4.

Quels sont les nombres rationnels vérifiant cette dernière condition ?

3) Trouver une solution rationnelle de l'équation (E) et achever la résolution de (E) dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Exercice 16 : Soit x un entier naturel non nul, on considère les entiers suivants : $N = 9n+1$ *et* $M = 9n-1$

1. On suppose que n est un entier pair ; on pose $n = 2p$, avec p entier naturel non nul.
   a) Montrer que M et N sont des entiers impairs
   b) En remarquant que N = M + 2, déterminer le PGCD de M et N.
2. On suppose que n est un entier impair, on pose $n = 2p+1$, avec p entier naturel.
   a) Montrer que M et N sont des entiers pairs.
   b) Déterminer le PGCD de M et N.
3. Pour tout entier naturel non nul n, on considère l'entier $81n^2 - 1$
   a) Exprimer l'entier $81n^2 - 1$ en fonction de M et N.
   b) Démontrer que si n est pair, alors $81n^2 - 1$ est impair.
   c) Démontrer que $81n^2 - 1$ est divisible par 4 si et seulement si n est impair.

Exercice 17 : Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par $x_0 = 3$ et $X_{n+1} = 2X_{n-1}$.
$Y_0 = 1$ et $Y_{n+1} = 2Y_n + 3$.

1- Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = 2^{n+1} + 1$.

2-a) Calculer PGCD (x_8 ; x_9) et pgcd (x_{2002}, x_{2003}). Que peut-on en déduire pour x_8 et x_9 d'une part, pour x_{2002} et x_{2003} d'autre part.

b) X_{n+1} et X_n sont-ils premiers entre eux pour tout entier n ?

3-a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 2x_n - y_n = 5$.

b) Exprimer Y_n en fonction de n.

c) En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel P, le reste de la division euclidienne de 2^P par 5.

4- On note $d_n = \text{pgcd}(x_n, y_n)$

a) Démontrer que $d_n = 1$ ou $d_n = 5$.

b) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

CORRIGE DES EXERCICES

Exercice 1 : a) L'espacement entre deux arbres est un diviseur commun de 525 et de 285. Comme le nombre d'arbres doit être minimal, il faut que l'espacement soit maximal, ce qui conduit à prendre pour espacement le PGCD de 525 et de 285. $525 = 3\times5^2\times7$ *et* $285 = 3\times5\times19$,
donc le PGCD(525 ; 285) =15. **L'espacement entre deux arbres sera donc égal à 15m.**

b) $525 = 15\times35$. Si l'on ne tient pas compte des sommets, il y aura 34 arbres sur chaque grand côté.
$285 = 15\times19$. Si l'on ne tient pas compte des sommets, il y aura 18 arbres sur chaque petit côté.
En ajoutant les 4 arbres des sommets, il y aura au total : $2\times34 + 2\times18 + 4 = 108$ **arbres autour du terrain.**

Exercice 2 : n est un entier relatif différent de 1 et $a = \frac{n+5}{n-1}$.

1-a) Démontrons que a est entier si et seulement si n – 1 divise 6.

On a : a entier $\Leftrightarrow n-1$ divise n + 5 $\Leftrightarrow n-1$ divise (n+5) – (n – 1) $\Leftrightarrow n-1$ **divise 6.**

b) Déterminons les valeurs de n pour lesquelles a est un entier relatif.

On a : a entier relatif $\Leftrightarrow n-1$ divise $6 \Leftrightarrow n-1 \in \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\} \Leftrightarrow \mathbf{n \in \{-5, -2, -1, 0, 2, 3, 4,}$

2) On veut déterminer les valeurs de n pour lesquelles $a = \left(\frac{p}{q}\right)^2$, avec p et q premiers entre eux.

a) Démontrons que s'il en est ainsi, alors $\mathbf{n = 1 + \frac{6q^2}{p^2 - q^2}}$.

On a $a = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{n+5}{n-1} = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow q^2(n+5) = p^2(n-1) \Leftrightarrow n = \frac{p^2+5q^2}{p^2-q^2} = \frac{p^2-q^2+q^2+5q^2}{p^2-q^2} \Leftrightarrow \mathbf{n = 1 + \frac{6q^2}{p^2-q^2}}$.

b) Démontrons que $\mathbf{p^2 - q^2}$ et $\mathbf{q^2}$ sont premiers entre eux .

On a $PGCD(p^2-q^2, q^2) = PGCD(p^2, q^2) = PGCD(p, q) = 1$. Donc $\mathbf{p^2 - q^2}$ **et** $\mathbf{q^2}$ **sont premiers entre eux**

c) Déterminons les couples $\mathbf{(p, q) \in \mathbb{Z}^*}$ premiers entre eux tels que $\mathbf{p^2 - q^2}$ divise 6 .

On a p et q premiers entre eux $\Leftrightarrow p \wedge q = 1$ c'est-à-dire $p^2 - q^2 \in D(6)$.

On sait que p – q et p + q ont la même parité.

D'où $(p-q)(p+q) \in D(6) \Rightarrow \begin{cases} -6 \le p+q \le 6 \\ -6 \le p-q \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le p \le 6 \\ -6 \le q \le 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \in \{-3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6\} \\ q \in \{-6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3\} \end{cases}$.

Donc $\mathbf{(p, q) \in \{(-2, -1); (-2, 1); (-1, -2); (-1, 2); (1, -2); (1, 2); (2, 1); (2, -1)\}}$.

d) Déterminons les valeurs de n telles que a soit le carré d'une fraction irréductible.

On a $n = 1 + \frac{6q^2}{p^2-q^2}$; d'après c), $p^2 - q^2 = 3$ *ou* $p^2 - q^2 = -3$ *et* $q^2 = 1$ *ou* $q^2 = 4$.

* Pour $p^2 - q^2 = -3$, on a $q^2 = 1 \Rightarrow n = 1 - \frac{6}{3} = -1$ et $q^2 = 4 \Rightarrow n = 1 - \frac{4 \times 6}{3} = -7$.

* Pour $p^2 - q^2 = 3$, on a $q^2 = 1 \Rightarrow n = 1 + \frac{6}{3} = 3$ et $q^2 = 4 \Rightarrow n = 1 + \frac{6 \times 4}{3} = 9$. Donc $\mathbf{n \in \{-7; 9\}}$.

Exercice 3 : **1)** Soit P un nombre premier supérieur ou égale à 7 ;

Nécessairement, $P \equiv 0[3]$ ou $P \equiv 1[3]$ ou $P \equiv 2[3]$, or P est un nombre premier supérieur ou égal à 7 ; il ne peut pas être un multiple de 3, d'où $P \equiv 1[3]$ ou $P \equiv 2[3]$. Donc $P \equiv 1[3]$ ou $P \equiv -1[3]$.

Déduisons-en que n est divisible par 3

On a : $n = p^4 - 1 = (p^2-1)(p^2+1) = (p-1)(p+1)(p^2+1)$

* Si $P \equiv 1[3]$, alors $P - 1 \equiv 0[3]$, d'où $(P-1)(P+1)(P^2+1) \equiv 0[3]$, soit $n \equiv 0[3]$.
* Si $P \equiv -1[3]$, alors $P + 1 \equiv 0[3]$, d'où $(p-1)(p+1)(p^2+1) \equiv 0[3]$, soit $n \equiv 0[3]$.

Donc n est divisible par 3.

2- En remarquant que p est impair, **prouvons qu'il existe un entier naturel k tel que** $p^2 - 1 = 4k(k+1)$

On sait que p est un nombre premier supérieur à 7 ; nous avons p impair, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k+1$. On en déduit que :

$p^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$. Donc $\mathbf{p^2 - 1 = 4k(k+1)}$.

- Montrons que n est divisible par 16

On a : $p^2 - 1 = 4k(k+1)$, or les entiers k et k + 1 sont de parités différentes, donc le produit k(k + 1) est divisible par 2. Par suite, p^2 - 1 est divisible par 8. D'autre part,

$p^2 + 1 = (2k+1)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 1 + 1 = 4k^2 + 4k + 2 = 2(2k^2 + 2k + 1)$, avec $2k^2 + 2k + 1 \in \mathbb{N}$.

Donc p^2+1 est divisible par 2 . Puisque $n=(p^2-1)(p^2+1)$, **on en déduit que n est divisible par 16.**

3- Considérons tous les restes possibles de la division euclidienne de p par 5, **démontrons que 5 divise n**

p est un nombre premier supérieur ou égal à 7, d'où $p\equiv 1[5]$ ou $p\equiv 2[5]$ ou $p\equiv 3[5]$ ou $p\equiv 4[5]$.

* Si $p\equiv 1[5]$, il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que : $p=5k+1$ et on a : $p-1=5k$, d'où 5 divise p – 1.

Puisque $n=(p-1)(p+1)(p^2+1)$ avec $p+1$ *et* p^2+1 entiers , on peut affirmer **que 5 divise n.**

* Si $p\equiv 2[5]$, il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que : $p=5k+2$ et on a : $p^2+1=(5k+2)^2+1=25k^2+20k+4+1$, d'où $p^2+1=25k^2+20k+5=5(5k^2+4k+1)$, avec $5k^2+4k+1\in\mathbb{N}$, d'où 5 divise p^2+1 et **donc 5 divise n.**

* Si $p\equiv 4[5]$, il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $p=5k+4$ et $p+1=5k+5=5(k+1)$ avec $k+1\in\mathbb{N}$, d'où 5 divise p + 1 et donc 5 divise n.

* Si $p\equiv 3[5]$, il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $p=5k+3$.

On a : $p^2+1=(5k+3)^2+1=25k^2+30k+10=5(5k^2+6k+2)$ avec $5k^2+6k+2\in\mathbb{N}$.

D'où 5 divise p^2+1 et **donc 5 divise n. <u>Conclusion</u> : 5 divise n** .

4-a) Démontrons que si a divise c et b divise c, avec a et b premiers entre eux, alors ab divise c.

a divise c signifie qu'il existe $m_1\in\mathbb{N}$ tel que $c=m_1a$.

b divise c signifie qu'il existe $m_2\in\mathbb{N}$ tel que : $c=m_2b$.

On en déduit que $m_1a=m_2b$, d'où a divise m_2b. Or a et b sont premiers entre eux, il s'en suit que a divise m_2. On en déduit qu'il existe $m_3\in\mathbb{N}$ tel que $m_2=m_3a$.

Ainsi, nous avons $c=m_2b=m_3ab$, **donc ab divise de c.**

b) Déduisons de ce qui précède que 240 divise n

Nous avons montré que 3 divise n ; 16 divise n et 5 divise n, or 3 , 5 et 16 sont 2 à 2 premiers entre eux, par conséquent $3\times5\times16$ divise n, donc **240 divise n.**

<u>Exercice 4</u> : I-1) Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 45x-28y=1$.

$45=28+17$	$1=6-(11-6)$
$28=17+11$	$=2(17-11)-11$
$17=11+6$	$=2\times17-3(28-17)$
$11=6+5$	$=5(45-28)-3\times28$
$6=5+1$	$=5\times45-8\times28$

Une solution particulière de (E) est $(5, 8)$.

Comme $45\wedge28=1 \Rightarrow y=45k$ *et* $x=28k$, $k\in\mathbb{Z}$. Donc $\mathbf{S}=\{(\mathbf{28k+5}\ ;\ \mathbf{45k+8});\ k\in\mathbb{Z}\}$.

2) Déduisons-en dans $\mathbb{Z}^2$ la résolution de l'équation (E') : $45x-28y=6$.

On a 45x – 28y = 6 $\Rightarrow 6=30\times45-48\times28$. Une solution particulière de (E') est $(30, 48)$.

Donc $\mathbf{S}=\{(\mathbf{28k+30}\ ;\ \mathbf{45k+48}),\ k\in\mathbb{Z}\}$.

II- A) Soit $x\in\mathbb{R}$.

1) Montrons que $x^4+4=(x^2+2)^2-4x^2$.

On a $x^4+4=x^4+4x^2-4x^2+4=x^4+2\times2x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-4x^2$.

2) Déduisons-en que x^4+4 est le produit de deux trinômes à coefficients entiers.

On a $x^4+4=(x^2+2)^2-4x^2=(x^2+2-2x)(x^2+2+2x)=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$.

B) Soit $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. On donne $X = n^2 - 2n + 2$ *et* $Y = n^2 + 2n + 2$ et on pose d = PGCD(X ; Y).

1) Montrons que $n^4 + 4$ n'est pas premier

On a $n^4 + 4 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$ = XY et $X \geq 2$ *et* $Y \geq 2$. Donc **$n^4 + 4$ n'est pas premier.**

2) Montrons que tout diviseur de X qui divise n, divise 2

Soit α un diviseur de X qui divise n.

α divise $n \Rightarrow \alpha$ divise n^2 et α divise 2n, donc α divise $n^2 - 2n$.

On en déduit que α *divise* $X - (n^2 - 2n) = 2$. Donc **α divise 2**.

3) Montrons que tout diviseur commun de X et Y divise 4n .

Soit β un diviseur commun de X et Y, alors β divise Y – X = 4n. Donc β **divise 4n.**

4) On suppose que n est impair.

a) * Montrons que X et Y sont impairs

On a : n^2 est impair, 2n est pair et 2 est pair. D'où -2n + 2 et 2n + 2 sont pairs.

On en déduit que **X = n^2 - 2n + 2 et Y = n^2 + 2n +2 sont impairs.**

*** Déduisons-en que d est impair.**

X et Y étant impairs, on en déduit **que d est impair**, si non X et Y seraient pairs

b) Montrons que d divise n.

On a d divise X et Y, donc d divise 4n. On en déduit que **d divise n** car d impair.

c) Déduisons-en que d divise 2 et que X et Y sont premiers entre eux.

* d est un diviseur de X qui divise n, donc **d divise 2.**

* d impair et divise 2, donc **d = 1** et on en déduit que **X et Y sont premiers entre eux.**

5) On suppose maintenant que n est pair

a) Montrons que 4 ne divise pas X

Posons n = 2k, $k \in \mathbb{Z}$ et on a $X = n^2 - 2n + 2 = (2k)^2 - 2(2k) + 2 = 4k^2 - 4k + 2$.

On en déduit que $X \equiv 2[4]$, donc **4 ne divise pas X.**

b) Montrons que d = 2p où p est un entier impair

Comme X et Y sont pairs(car n pair), alors d = 2k, $k \in \mathbb{N}$.

Si k est pair, alors d = 4q, $q \in \mathbb{N}$, ce qui est impossible car 4 ne divise pas X, donc k est impair.

On en déduit que **d = 2p,** p entier impair.

c) Montrons que p divise n, puis en déduisons que d = 2.

* p est un diviseur de X et Y, donc p divise 4n et PGCD(4, p) = 1, donc **p divise n.**

* Comme p divise n et 2 divise n, alors 2p divise n c'est-à-dire d divise n.

Ainsi, d divise n^2 et d divise 2n. Donc d divise n^2 - 2n et d divise X – (n^2 - 2n) = 2.

D'où d divise 2 et d est pair, donc **d = 2.**

Exercice 5 :

1) Démontrons que les diviseurs communs de a et $a^2 + b$ sont les diviseurs communs de a et b.

Tout diviseur commun à a et b divise a^2 (en tant que diviseur de a), donc divise $a^2 + b$ (en tant que diviseur de a^2 et b) ; les diviseurs de a et b sont donc des diviseurs de a et $a^2 + b$.

Réciproquement, tout diviseur commun à a et $a^2 + b$ divise a^2 et $a^2 + b$, donc leur différence $(a^2 + b) - a^2$, c'est-à-dire b ; les diviseurs de a et $a^2 + b$ sont donc des diviseurs de a et b.

* On en déduit que les diviseurs de a et b sont les diviseurs de a et $a^2 + b$, ce qui prouve en particulier que le plus grand diviseur commun de a et b est égal au plus grand diviseur commun de a et $a^2 + b$, c'est-à-dire PGCD (a, $a^2 + b$) = PGCD (a, b).

2) Montrons que le plus grand diviseur commun de a + b et 2a + 3b est celui de a et b.

*** Tout diviseur de a et b est un diviseur :**

- de leur somme a + b ;
- de 2a et de 3b, donc également de 2a + 3b.

Les diviseurs de a et b sont donc des diviseurs de a + b et 2a + 3b.

* Réciproquement, **tout diviseur commun à a + b et 2a + 3b divise :**
- 3(a + b) et 2a + 3b, donc la différence 3(a + b) - (2a + 3b) c'est-à-dire a ;
- 2(a + b) et 2a + 3b, donc la différence (2a + 3b) -2(a + b) c'est-à-dire b.

Les diviseurs de a + b et 2a + 3b sont donc des diviseurs de a et b.
On en déduit que les diviseurs de a + b et 2a + 3b sont les diviseurs de a et b,
ce qui prouve : PGCD (a + b, 2a + 3b) = PGCD (a, b).

Exercice 6 : Pour $n=0, (a+1)^{0+1}-a(0+1)-1=a+1-a-1=0=0.a^2$.
D'où **l'affirmation est vraie pour n = 0**
Hypothèse de récurrence : Supposons que $(a+1)^{n+1}-a(n+1)$ - 1 est divisible par a^2 et montrons que $(a+1)^{n+2}-a(n+2)-1$ l'est aussi.
$(a+1)^{n+2}-a(n+2)-1=(a+1)^{n+1}\cdot(a+1)-a(n+2)-1$, or $(a+1)^{n+1}=a(n+1)+1+ka^2$ où $k\in\mathbb{Z}$ d'après l'hypothèse de récurrence. Ainsi $(a+1)^{n+2}-a(n+2)-1=(a+1)(an+a+1+ka^2)-an-2a-1=$
$na^2+a^2+a+ka^3+an+a+1+ka^2-an-2a-1=na^2+a^2+ka^3+ka^2=(n+1+ka+k)a^2$.
Donc $(a+1)^{n+2}-a(n+2)-1$ **est divisible par a^2.**
Conclusion : pour tout $n\in\mathbb{N}$: $(a+1)^{n+1}-a(n+1)-1$ **est divisible par a^2.**

Exercice 7 :
1-a)

a	1	2	3	4	5	6
y	1	4	5	2	3	6

b) Observons les valeurs prises par 3x (modulo 7)

x (modulo 7)	0	1	2	3	4	5	6
3x(modulo 7)	0	3	6	2	5	1	4

On a ainsi : $3x\equiv 5$ (modulo 7) équivaut à x ≡ 4 (modulo 7).
c) $ax\equiv 1$ (modulo 7) équivaut à ax est un multiple de 7.
ax est un multiple de 7, $a\in A_7$ donc a n'est pas un multiple de 7. Ainsi x est un multiple de 7 d'après le théorème de Gauss. **Finalement :** $x\equiv 0$ **(modulo 7).**
2-a) p est un nombre premier, $a\in A_p$, *donc* a et p sont premiers entre eux, a entier naturel. Donc $a^{p-1}-1$ est divisible par p, d'après le petit théorème de Fermat.
Ainsi, $a^{p-1}-1\equiv 0$ (module p) ; puis $a^{p-1}\equiv 1$ (modulo p) ; et $a\times a^{p-2}\equiv 1(\text{mod}\,ulo\ p)$;
finalement, a^{p-2} **est solution de l'équation** $ax\equiv 1$ **(modulo p).**
b) a^{p-2} est solution de l'équation $ax\equiv 1$(modulo p). Donc $a\times a^{p-2}\equiv 1$(modulo p). Or, **r** est le reste de la division euclidienne de a^{p-2} par p ; il existe par conséquent un entier q tel que $a^{p-2}=q\times p+r$, *avec* $0\le r<p$ *: ainsi* $r\in A_p$ et r est unique.
On remplace dans l'équation et on obtient : a×(q × p + r)≡1 (modulo p), aqp + ar ≡ 1 (modulo p), $ar\equiv 1$ (modulo p), car aqp est un multiple de p et donc $aqp\equiv 0$(modulo p).
En conclusion, **r est l'unique solution dans A_p de l'équation $ax\equiv 1$ (modulo p).**
c) $xy\equiv 0$(modulo p) équivaut à $x\equiv 0$(modulo p) ou $y\equiv 0$(modulo p), car p est premier équivaut à x ou y sont des multiples de p.

Exercice 8 : 1) Utilisation d'un tableau de congruence modulo 7.

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2- 4x + 2	2	6	5	6	2	0	0

$x^2-4x+2\equiv 0\ [7] \Leftrightarrow x\equiv 5\ [7]\ ou\ x\equiv 6\ [7]$
$\Leftrightarrow x=7k+5\ ou\ x=7k+6$. Donc $\mathbf{S}=\{7k+5,\ 7k+6\quad k\in\mathbb{Z}\}$

* Réciproquement, **tout diviseur commun à a + b et 2a + 3b divise :**
- 3(a + b) et 2a + 3b, donc la différence 3(a + b) - (2a + 3b) c'est-à-dire a ;
- 2(a + b) et 2a + 3b, donc la différence (2a + 3b) -2(a + b) c'est-à-dire b.

Les diviseurs de a + b et 2a + 3b sont donc des diviseurs de a et b.
On en déduit que les diviseurs de a + b et 2a + 3b sont les diviseurs de a et b,
ce qui prouve : PGCD (a + b, 2a + 3b) = PGCD (a, b).

Exercice 6 : Pour $n=0$, $(a+1)^{0+1}-a(0+1)-1=a+1-a-1=0=0.a^2$.
D'où **l'affirmation est vraie pour n = 0**

Hypothèse de récurrence : Supposons que $(a+1)^{n+1}-a(n+1)$ - 1 est divisible par a² et montrons que $(a+1)^{n+2}-a(n+2)-1$ l'est aussi.

$(a+1)^{n+2}-a(n+2)-1=(a+1)^{n+1}\cdot(a+1)-a(n+2)-1$, or $(a+1)^{n+1}=a(n+1)+1+ka^2$ où $k\in\mathbb{Z}$ d'après l'hypothèse de récurrence. Ainsi $(a+1)^{n+2}-a(n+2)-1=(a+1)(an+a+1+ka^2)-an-2a-1=$
$na^2+a^2+a+ka^3+an+a+1+ka^2-an-2a-1=na^2+a^2+ka^3+ka^2=(n+1+ka+k)a^2$.

Donc $(a+1)^{n+2}-a(n+2)-1$ **est divisible par a².**

Conclusion : pour tout $n\in\mathbb{N}$: $(a+1)^{n+1}-a(n+1)-1$ **est divisible par a².**

Exercice 7 :

1-a)

a	1	2	3	4	5	6
y	1	4	5	2	3	6

b) Observons les valeurs prises par 3x (modulo 7)

x (modulo 7)	0	1	2	3	4	5	6
3x(modulo 7)	0	3	6	2	5	1	4

On a ainsi : $3x\equiv 5$ (modulo 7) équivaut à x ≡ 4 (modulo 7).

c) $ax\equiv 1$ (modulo 7) équivaut à ax est un multiple de 7.
ax est un multiple de 7, $a\in A_7$ donc a n'est pas un multiple de 7. Ainsi x est un multiple de 7 d'après le théorème de Gauss. **Finalement :** $x\equiv 0$ **(modulo 7).**

2-a) p est un nombre premier, $a\in A_p$, *donc* a et p sont premiers entre eux, a entier naturel. Donc $a^{p-1}-1$ est divisible par p, d'après le petit théorème de Fermat.
Ainsi, $a^{p-1}-1\equiv 0$ (module p) ; puis $a^{p-1}\equiv 1$ (modulo p) ; et $a\times a^{p-2}\equiv 1(\text{mod}\,ulo\,p)$;
finalement, a^{p-2} **est solution de l'équation** $ax\equiv 1$ **(modulo p).**

b) a^{p-2} est solution de l'équation $ax\equiv 1$ (modulo p). Donc $a\times a^{p-2}\equiv 1$ (modulo p). Or, **r** est le reste de la division euclidienne de a^{p-2} par p ; il existe par conséquent un entier q tel que $a^{p-2}=q\times p+r$, *avec* $0\le r<p$: *ainsi* $r\in A_p$ et r est unique.
On remplace dans l'équation et on obtient : a×(q × p + r) ≡ 1 (modulo p), aqp + ar ≡ 1 (modulo p), $ar\equiv 1$ (modulo p), car aqp est un multiple de p et donc $aqp\equiv 0$ (modulo p).
En conclusion, **r est l'unique solution dans** A_p **de l'équation** $ax\equiv 1$ **(modulo p).**

c) $xy\equiv 0$ (modulo p) équivaut à $x\equiv 0$ (modulo p) ou $y\equiv 0$ (modulo p), car p est premier équivaut à x ou y sont des multiples de p.

Exercice 8 : **1) Utilisation d'un tableau de congruence modulo 7.**

x	0	1	2	3	4	5	6
x²- 4x + 2	2	6	5	6	2	0	0

$x^2-4x+2\equiv 0\ [7]\iff x\equiv 5\ [7]$ *ou* $x\equiv 6\ [7]$

$\iff x=7k+5$ *ou* $x=7k+6$. Donc **S** = $\{$**7k + 5, 7k + 6** $k\in\mathbb{Z}\}$

2) Résolution du système donné : $2\times(1)+(2) \Leftrightarrow 7x \equiv 2\ [5] \Leftrightarrow 2x \equiv 2\ [5]$, or pgcd $(2, 5) = 1$ d'où $x \equiv 1\ [5]$. Dans (2) on a : $1 + 2y \equiv 0\ [5] \Leftrightarrow 2y \equiv -1\ [5] \Leftrightarrow 2y \equiv 4\ [5]$. or pgcd $(2, 5) = 1$ d'où $y \equiv 2\ [5]$. Donc $\mathbf{S} = \{(\mathbf{5k+1;\ 5k'+2})$ où $(k, k') \in \mathbb{Z}^2\}$.

<u>Exercice 9</u> :

1. **Factorisation :** $n^4 + 1 = (n^2+1)^2 - 2n^2$. Ainsi, $E(n) = (n^2+1)^2 - n^2 = (\mathbf{n^2 - n + 1})(\mathbf{n^2 + n + 1})$

Montrons que $n^2 - n + 1$ et $n^2 + n + 1$ **sont premiers entre eux.**

$n^2 - n + 1 = n(n-1) + 1$ et $n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$ or $n(n-1)$ et $n(n+1)$ sont des nombres entiers pairs car consécutifs, d'où $n^2 - n + 1$ et $n^2 + n + 1$ sont des entiers impairs. Ainsi, tout diviseur commun à $n^2 - n + 1$ et $n^2 + n + 1$ est impair. Soit **d** un diviseur positif de $n^2 - n + 1$ et $n^2 + n + 1$.

d divise $(n+1)(n^2 - n + 1) - (n-1)(n^2 + n + 1)$, d'où **d** divise 2. De ce fait, $d = 1$ ou $d = 2$, on en déduit que $d = 1$. Donc $\mathbf{n^2 - n + 1}$ **et** $\mathbf{n^2 + n + 1}$ **sont premiers entre eux.**

2) $E(n)$ est premier si et seulement si $n^2 - n + 1 = 1$ ou $n^2 + n + 1 = 1$, ce qui donne $n = 0$ ou $n = 1$.

Pour $\mathbf{n = 0}$, $E(0) = 1$ **n'est pas premier.**

Pour $\mathbf{n = 1}$, $E(1) = 3$ **est un nombre premier.**

<u>Exercice 10</u> : **1- Calculons PGCD (a, b) dans chacun des cas donnés.**

* **n = 1**, donc a = 7 et b = 7. Le plus grand commun diviseur de a et b est 7 d'où **d = 7.**
* **n = 11**, alors **a** = 47 et b = 57. 47 et 57 sont deux nombres premiers entre eux, leur PGCD est 1. D'où **d = 1.**
* **n = 15,** alors a = 63 et b = 77. Or $63 = 7\times 9$, $77 = 7\times 11$. Les nombres 9 et 11 sont premiers entre eux, donc PGCD (63, 77) = 7. D'où **d = 7.**

2- Calculons 5a – 4b.

5a – 4b = 5(4n + 3) – 4(5n + 2) = 7. Donc **5a – 4b = 7.**

Précisons les valeurs possibles de d = PGCD (a, b).

Si **d** est le PGCD de a et de b, d divise **a** donc 5a, et d divise **b** donc 4b, il divise alors leur différence 5a – 4b = 7, donc **d divise 7**. 7 étant un nombre premier, ses seuls diviseurs positifs sont 1 et 7, donc **d = 1** ou **d = 7**. D'où **les valeurs possibles de d sont 1 ou 7.**

3- a) Déterminons les entiers naturels n et k tels que 4n + 3 = 7k.

Nous voulons que 7k – 4n = 3. Pour résoudre cette équation, cherchons- en une solution particulière :

$7\times 1 - 4\times 1 = 3$ donc le couple (1, 1) est solution de l'équation. Nous avons $\begin{cases} 7k - 4n = 3 \\ 7\times 1 - 4\times 1 = 3 \end{cases}$, en soustrayant il vient que 7(k-1) – 4(n -1) = 0, d'où 7(k – 1) = 4(n – 1).

Or 4 est premier avec 7 et 4 divise 7(k – 1), d'après le théorème de Gauss, 4 divise k – 1, alors $(k-1) = 4\lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{N}$. Reportons dans la relation 7(k–1) = 4(n-1) il vient que $n - 1 = 7\lambda$, d'ou $k = 4\lambda + 1$ et $n = 7\lambda + 1$.

Vérifions que ces couples sont bien solutions de l'équation donnée.

$4(7\lambda + 1) + 3 = 7(4\lambda + 1) = 7k$

Les couples (n, k) avec $n = 7\lambda + 1$ et $k = 4\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{N}$ **sont solutions de l'équation 4n + 3 = 7k.**

b) Déterminons les entiers naturels n et k' tels que 5n + 2 = 7k'.

Nous cherchons n et k' tels que 5n + 2 = 7k', soit 7k' – 5n = 2, or 7 – 5 = 2. En soustrayant il vient que 7(k' – 1) – 5(n – 1) = 0, soit 7(k' – 1) = 5(n-1).

7 est premier avec 5 et divise 5(n-1) donc, d'après le théorème de Gauss, 7 divise (n-1), d'où $n - 1 = 7\mu$ avec $\mu \in \mathbb{N}$. Nous en déduisons que $k' - 1 = 5\mu$ soit $n = 7\mu + 1$ et $k' = 5\mu + 1$.

Montrons que les couples $n = 7\mu + 1$ et $k' = 5\mu + 1$ **vérifient bien l'équation 5n + 2 = 7k'.**

$5(7\mu + 1) + 2 = 7(5\mu + 1) = 7k'$, **donc les couples (n, k) avec** $n = 7\mu + 1$ et $k' = 5\mu + 1$ avec $\mu \in \mathbb{N}$ **sont**

solutions de 5n +2 = 7k'

4- Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7, donc $r \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

a) cherchons la valeur de r pour laquelle d = 7.

Nous cherchons donc pour quelles valeurs de n, 7 divise a = 4n +3 et 7 divise b = 5n + 2. Nous devons donc avoir $\begin{cases} 4n+3=7k \text{ et} \\ 5n+2=7k' \end{cases}$. Or dans la question précédente, nous avons vu que 4n + 3 = 7k si $n=7\lambda+1$ *avec* $\lambda \in \mathbb{N}$ et que 5n + 2 = 7k' si $n=7\mu+1$ *avec* $\mu \in \mathbb{N}$, alors **r = 1**.

Nous en déduisons que 7 divise a et b si le reste de la division par 7 de n est 1.

<u>Conclusion</u> : d = 7 si et seulement si le reste de la division de n par 7 est 1.

b) Valeurs de r pour lesquelles d = 1.

Nous avons vu que d = 7 ou d = 1, or d = 7 si et seulement si r = 1, nous avons alors d = 1 si r est différent de 1, donc si $r \in \{0,2,3,4,5,6\}$.

D'où **d = 1 si le reste de la division de n par 7 est 0 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6**

<u>Exercice 11</u> : 1- Déterminons tous les couples d'entiers naturels (a, b) tels que ab = 12950 et PPCM (a, b) = 2590.

On sait que PPCM (a, b) × PGCD (a, b) = ab $\Leftrightarrow PGCD(a,b)=\frac{12950}{2590}=5$ d'où il existe a' et b' premiers entre eux tels que a = 5a' et b = 5b'.

Ainsi, $ab=12950 \Leftrightarrow a'b'=\frac{12950}{25}=518=2\times7\times37$.

D'où a' = 2 et b' = 259 ou a' = 259 et b' = 7, a' = 1 et b' = 518 ;
a' = 14 et b' = 37 ou a' = 37 et b' = 14 , a' = 518 et b' = 1 ;
a' = 74 et b' = 7 ou a' = 7 et b' = 74 .

Donc, $S=\{(10;1295);(1295;10);(70;185);(185;70);(370;35);(35;370);(5;2590);(2590;5)\}$

2- a) Montrons que l'entier 491 est premier.

Tableau de résolution

d	q	r	d^2
2	245	1	4
3	163	2	9
5	98	1	25
7	70	1	49
11	44	7	121
13	37	8	169
17	28	15	289
19	25	16	361
23	21	8	529

(**d** = diviseur, **q** = quotient, **r** = reste

Le reste n'est pas nul et $23^2 > 491$
D'où **491 est un entier premier.**

b) Montrons que 491 et 624 sont premiers entre eux par la méthode des divisions successives.

624 = 1× 491 + 133
491 = 3× 133 + 92
133 = 1× 92 + 41
92 = 2× 41 + 10
41 = 4× 10 + 1

On obtient **1** comme reste, donc **491 et 624 sont premiers entre eux.**

c) Résolvons dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation : 491x – 624y = 1.

Cette équation a des solutions car 491 et 624 sont premiers entre eux. PGCD (491,624) = 1.

Recherchons une solution particulière à l'aide de ce qui précède.

1 = 41 – 4 × 10 et 10 = 92 – 2 × 41 ; 1 = 41 – 4 (92 – 2 × 41)

$1 = 9 \times 41 - 4 \times 92$ et $41 = 133 - 1 \times 92$
$1 = 9 \times (133 - 1 \times 92) - 4 \times 92 = 9 \times 133 - 13 \times 92$ et $92 = 491 - 3 \times 133$
$1 = 9 \times 133 - 13(491 - 3 \times 133) = 48 \times 133 - 13 \times 491$ et $133 = 624 - 1 \times 491$
$1 = 48(624 - 1 \times 491) - 13 \times 491 \Leftrightarrow (-61)(491) - (-48)(624) = 1$
Après vérification, on a : (-61 ; - 48) solution particulière.
Ainsi, $491x - 624y = -61 \times 491 - (-48)\,624$, soit $491(x + 61) = 624(y + 48)$.
491 divise $624(y + 48)$, or 491 et 624 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss,
491 divise $y + 48$, d'où il existe **k** de $\mathbb{Z}$ tel que $y + 48 = 491k$, $y = -48 + 491k$ et $x + 61 = 624k$;
$x = -61 + 624k$. Donc $S = \{(-61 + 624k; -48 + 491k)\ où\ k \in \mathbb{Z}\}$

3- $n \in \mathbb{N}^*$, $E(n) = n^4 + n^2 + 1$

a) Décomposition de E(n). $E(n) = (n^2+1)^2 - 2n^2 + n^2 = (n^2+n+1)(n^2-n+1)$.

Montrons que $n^2 + n + 1$ et $n^2 - n + 1$ sont premiers entre eux.
Soit **α** un diviseur commun à $n^2 + n + 1$ et $n^2 - n + 1$.
d divise $n^2+n+1 - (n^2 - n + 1) = 2n$;
d divise $n^2+n+1 + (n^2 + n + 1) = 2n^2 + 2$;
d divise $2n^2 + 2 - n(2n) = 2$. Or, il est évident que $n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$ et $n^2 - n + 1 = n(n-1) + 1$ sont des nombres impairs car n et n+1 d'une part puis n et n-1 d'autre part sont de parité différentes en sorte que n(n-1) et n(n+1) soient pairs.
Par conséquent 2 ne les divise pas, d'où **d = 1.**
<u>Conclusion</u> : **PGCD(n^2+n+1, n^2-n+1) =1 c'est-à-dire ces deux facteurs de E(n) sont premiers entre eux.**

b) Pour que E(n) soit premier, il est nécessaire que l'un de ses facteurs soit égal à 1, c'est-à-dire $n^2 + n + 1 = 1$ ou $n^2 - n + 1 = 1$, soit **n = 0** ou **n = 1**. Or $n \neq 0$,
donc **E(n) est premier si et seulement si n = 1 et E(1) = 3.**

4- Déterminons le nombre de diviseurs positifs de 1638.
Par décomposition, $1638 = 2^1 \times 3^2 \times 91^1$. Ainsi, **le nombre de diviseurs positifs de 1638 est (1+1)(2+1)(1+1) = 12.**

<u>**Exercice 12**</u> : **1-** Les diviseurs de 8 sont : 1, 2, 4, 8. Alors **S(8) = 1+2+4+8 = 15.**
Les diviseurs de 36 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 36. Alors, **S(36) = 1+ 2+3+4+ 6+ 9+12+ 36 = 73.**
Pour trouver les diviseurs de 152, **il est commode de le décomposer en facteurs premiers :**
$152 = 2^3 \times 19$. Les diviseurs de 152 sont : 1, 2, 4, 8, 19, 38, 76, 152,
donc **S(152) = 1+2+4+8+19+38+76+152 = 300.**
2- Les diviseurs de 28 sont : 1, 2, 4, 7, 14, 28. Alors S(28) = 1+2+4+7+14+28 = 56 = 2 × 28.
Le nombre 28 est bien un nombre parfait.
3- Si **a** et **b** sont premiers entre eux, alors tout diviseur de **ab** est le produit d'un diviseur de a par un diviseur de b. **S(ab)** est donc la somme de tous les termes de la forme $d_a \times d_b$, où d_a est un diviseur de a et d_b un diviseur de b. C'est exactement **S(a) × S(b).**
4- Si **p** est premier, ses diviseurs sont 1 et p. donc **S(p) = p +1.**
Réciproquement, tout entier **p** admet au moins comme diviseurs 1 et p, donc $S(p) \geq p+1$.
Si $S(p) = p+1$, alors p n'admet comme diviseur que 1 et lui-même . **p est donc premier.**

5- Les diviseurs de p^k sont: $1; p; p^2; p^3; ....; p^k$ $\quad S(p) = 1 + p + p^2 + p^3 + ... + p^k = \dfrac{p^{k+1}-1}{p-1}$

(somme des k+1 premiers termes d'une suite géométrique)

6- $496 = 2^4 \times 31$. 2^4 et 31 sont premiers entre eux, donc $S(496) = S(2^4) \times S(31)$

$S(2^4) = \dfrac{2^5-1}{2-1} = 31$; $S(31) = 31 + 1 = 32$, car 31 est premier. Alors S(496) = 31 × 32 = 992.
992 = 2 × 496, **ce qui prouve que 496 est un nombre parfait.**

<u>**Exercice 13**</u> : **1-Montrons par récurrence sur n, que pour tout n de $\mathbb{N}$, 2^{3n} -1 est un multiple de 7**
On remarque que $2^{3n} - 1 = 8^n - 1$.

* Pour **n = 0**, $8^n - 1 = 0$ qui est divisible par 7.
* Supposons que $8^n - 1$ est un multiple de 7 ; il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $8^n - 1 = 7k$.

Alors on obtient : $8^{n+1} - 1 = 8 \times 8^n - 1 = 8(8^n - 1) + 8 - 1 = 8 \times 7k + 7 = 7(8k+1)$.

$8^{n+1} - 1$ **est un multiple de 7 et la propriété est démontrée par récurrence.**

2- D'après 1-), $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7, pour tout entier n.

On en déduit qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^{3n} = 7k + 1$. Le reste de la division par 7 de 2^{3n} est **1**.

En multipliant par **2**, on obtient : $2^{3n+1} = 14k + 2 = 7(2k) + 2$.

Le reste de la division de 2^{3n+1} par 7 est **2**.

En multipliant de nouveau par 2, on obtient : $2^{3n+2} = 28k + 4 = 7(4k) + 4$.

Le reste de la division de 2^{3n+2} par 7 est **4.**

<u>Conclusion</u> : Le reste de la division de 2^p par 7 dépend du reste de la division de p par 3.
* Si **p = 3n**, avec $n \in \mathbb{N}$ alors le reste de la division par 7 de 2^p est **1**.
* Si **p = 3n+1**, alors le reste de la division par 7 de 2^p est **2.**
* Si **p = 3n+2**, alors le reste de la division par 7 de 2^p est **4.**

3- $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$, $p \in \mathbb{N}$.

a) *Si* $p = 3n$, *alors* $A_p = 2^{3n} + 2^{6n} + 2^{9n}$.

D'après la question 2-) le reste de la division par 7 de chaque terme de cette somme est 1.

Il existe des entiers k, k', k'' tels que : $A_p = 1 + 7k + 1 + 7k' + 1 + 7k'' = 3 + 7(k + k' + k'')$.

Le reste de la division de A_p par 7 est 3.

b) Si **p = 3n + 1,** $A_p = 2^{3n+1} + 2^{6n+2} + 2^{9n+3}$.

D'après la question 2) les restes des 3 termes de cette somme dans la division par 7 sont 2, 4 et 1. Il existe donc les entiers k, k', k'' tels que : $A_p = 2 + 7k + 4 + 7k' + 1 + 7k''$,

soit $A_p = 7 + 7k + 7k' + 7k'' = 7(1 + k + k' + k'')$. **$A_p$ est donc divisible par 7.**

c) Si **p = 3n + 2,** $A_p = 2^{3n+2} + 2^{6n+4} + 2^{3(3n+2)}$. Cela peut s'écrire $A_p = 2^{3n+2} + 2^{3(2n+1)+1} + 2^{3(3n+2)}$.

Toujours d'après 2) il existe des entiers k, k', k'' tels que :

$A_p = 4 + 7k + 2 + 7k' + 1 + 7k''$ et donc $A_p = 7(1 + k + k' + k'')$. **$A_p$ est encore divisible par 7.**

4- Par définition, on a :

$\boxed{a} = 2^3 + 2^6 + 2^9 = 2^3 + 2^{2\times3} + 2^{3\times3} = \boxed{A_3}$; $\boxed{b} = 2^4 + 2^8 + 2^{12} = 2^4 + 2^{2\times4} + 2^{3\times4} = \boxed{A_4}$.

$a = A_3 = A_{3\times1}$, donc le reste dans la division de A_3 par 7 est 3 : **a n'est pas divisible par 7.**

$b = A_4 = A_{3\times1+1}$: **b est divisible par 7.**

<u>Exercice 14</u> : 1-a) Solution particulière de (E) : 8x + 5y = 1.

On voit immédiatement, en considérant la suite des multiples de 8 et de 5 que l'on a :

$8 \times 2 + 5(-3) = 16 - 15 = 1$, donc **une solution particulière de (E) dans $\mathbb{Z}$ est : $(x_0 ; y_0) = (2 ; -3)$.**

Remarque : Les entiers 8 et 5 étant premiers entre eux, le théorème de BEZOUT nous permet d'affirmer, a priori, que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}$.

b) Résolution de l'équation (E) dans $\mathbb{Z}$.

On a, compte tenu de a), $8x + 5y = 1 \Leftrightarrow 8x + 5y = 8 \times 2 + 5(-3) \Leftrightarrow 8(x-2) = -5(y+3)$ (1)

8 divise 8(x -2), donc aussi 5(y + 3).

Comme 8 est premier avec 5, il divise y +3 (théorème de GAUSS), donc on a nécessairement $y + 3 = 8k\ (k \in \mathbb{Z})$; en reportant dans (1), on obtient alors : $8(x - 2) = -5 \times 8k$, soit $x - 2 = -5k$.

Finalement, les solutions de (E) sont les entiers relatifs : x = 2 -5k, y = -3 + 8k, $(k \in \mathbb{Z})$.

2-a) Montrons que le couple (a, -b) est solution de (E).

On a : 8a + 5(-b) = (N-1) – (N-2) = 1, donc **le couple (a, -b) est solution de (E).**

b) Détermination du reste dans la division de N par 40.

Le couple (a, -b) étant solution de (E), on a nécessairement : a = 2 -5k, -b = -3 + 8k $(k \in \mathbb{Z})$; donc on obtient : N = 8a +1 = 8(2 -5k) +1 = - 40k + 17 ; de plus on sait que N est un entier naturel, on a donc $k \leq 0$. De la relation N = 40(-k) + 17 (avec $-k \geq 0$), **on déduit que le reste de la division euclidienne de N par 40 est 17.**

3-a) Résolution de l'équation 8x + 5y = 100 dans $\mathbb{Z}$.

Une solution particulière de l'équation proposée est : $(100x_0 ; 100y_0) = (200 ; -300)$

$8x+5y=100 \Leftrightarrow 8x+5y=8\times 200+5\times(-300) \Leftrightarrow 8(x-200)=-5(y+300)$;

un raisonnement analogue à celui fait en 1-b) montre que les solutions de l'équation proposée sont : **x = 200 -5k, y = -300 + 8k$(k \in \mathbb{Z})$.**

b) Nombre d'hommes et de femmes dans le groupe.

Notons **x** le nombre d'hommes et **y** le nombre de femmes dans le groupe ; donc x et y sont des entiers naturels non nuls vérifiant la seule condition : 8x + 5y = 100.

On a alors, compte tenu de 3-a), $\begin{cases} x = 200-5k \\ y = -300+8k \\ x > 0,\ y > 0,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Or on a : 200 -5k > 0 $\Leftrightarrow$ k< 40 et 300 + 8k > 0 $\Leftrightarrow$ **k > 37, 5.**

Donc les valeurs de k possibles sont k = 38 et k = 39.

A **k = 38,** correspondent **x =10 hommes et y = 4 femmes.**

A **k = 39,** correspondent **x = 5 hommes et y = 12 femmes.**

__Exercice 15__ **: 1) Démontrons que l'équation (E) : $4x^3 + x^2 + x - 3 = 0$ n'a qu'une solution réelle, qui appartient à $]0,1[$.**

La fonction $f : x \mapsto 4x^3+x^2+x-3$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, car f est une fonction polynôme. De plus $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 4x^3 = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 4x^3 = +\infty$.

Signe de la dérivée : on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 12x^2+2x+1$

$\Delta' = 1-12 = -11$. $\Delta' < 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ *sur* $\mathbb{R}$. La fonction f est donc **continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.**

Par ailleurs $f(0) = -3$ et $f(1) = 3$. $f(0)$ et $f(1)$ étant de signes contraires, **l'équation f(x) = 0 admet une seule solution réelle appartenant à $]0,1[$.**

2) * Démontrons que si l'équation (E) admet une solution rationnelle $\frac{p}{q}$ où p et q sont étrangers, alors p divise 3 et q divise 4.

Si $\frac{p}{q}$ est solution de (E), on a $4\left(\frac{p}{q}\right)^3+\left(\frac{p}{q}\right)^2+\frac{p}{q}-3=0$, ce qui donne $4p^3+p^2q+pq^2-3q^3=0$ **(1)**

Cette égalité **(1)** peut s'écrire $p\left(4p^2+pq+q^2\right)=3q^3$.

On en déduit **que** p **divise** $3q^3$. Comme p est premier avec q, p est aussi premier avec q^3. Par suite **p divise 3.** De même l'égalité (1) peut s'écrire $4p^3 = q\left(3q^2-p^2-pq\right)$. Il s'en suit que **q divise** $4p^3$, **et donc q divise 4 car q premier avec** p^3.

*** Déterminons les nombres rationnels $\frac{p}{q}$ vérifiant p et q étrangers et p divise 3 et q divise 4 ; et $\frac{p}{q} \in]0,1[$.**

p divise $3 \Rightarrow p \in \{-3, -1, 1, 3\}$; q divise $4 \Rightarrow q \in \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$

Les nombres rationnels remplissant cette condition sont : $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ *et* $\frac{1}{4}$.

3) Résolution de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

On vérifie que $\frac{3}{4}$ est la solution réelle. Par division euclidienne ou par toute autre méthode on écrit

$$4x^3+x^2+x-3=\left(x-\frac{3}{4}\right)(4x^2+4x+4)=(4x-3)(x^2+x+1).$$

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.

On a $\Delta=1-4=-3$. Les racines carrées de Δ sont $-i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$. Les solutions de cette équation sont alors $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ *et* $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. **L'ensemble des solutions de (E) est** $S=\left\{\frac{3}{4}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

<u>**Exercice 16**</u> **:** $n\in\mathbb{N}^*$, $M = 9n -1$ et $N = 9n +1$.

1) On suppose que $n = 2p$, $p\in\mathbb{N}^*$

a) Montrons que N et M sont impairs.

$n = 2p \Rightarrow N = 9(2p) +1 = 2(9p) +1 = 2p'+ 1$, $p'\in\mathbb{N}^*$ donc **N est impair.**

De même $n = 2p \Rightarrow M = 9(2p) -1 = 2(9p) -1 = 2p'-1$, $p' = 2p\in\mathbb{N}^*$, donc **M est aussi impair.**

b) Sachant que $N = M +2$, **déterminons PGCD (M, N)**

On a PGCD (N, M) = PGCD (M+2, M) = PGCD (2, M) = **1** car M est impair.

2) On suppose que $n = 2p +1$ avec $p \in\mathbb{N}$

a) Montrons que N et M sont pairs.

On a $n = 2p +1\Rightarrow N = 9(2p+1) +1 = 18p + 10 = 2(9p+5) = 2p'$ ($p' = 9p +5$), donc **N est pair.**

De même $n = 2p +1\Rightarrow M = 9(2p +1) -1 = 18p + 8 = 2(9p + 4) = 2p'$, donc **M est pair.**

b) Déterminons le PGCD (N, M)

PGCD (N, M) = PGCD(M+2, M) = PGCD(2, M) = 2 car **M est pair.**

3-a) Exprimons $81n^2 -1$ en fonction de N et M $n\in\mathbb{N}^*$

$81n^2 -1 = (9n -1)(9n +1) = $ **$N\times M$.**

b) Démontrons que si n est pair alors $81n^2 -1$ est impair.

$n = 2p\Rightarrow 81n^2 -1= 324p^2 -1 = 2p' -1$, donc **$81n^2 - 1$ est impair.**

c) Démontrons que si $n\equiv 1[2] \Leftrightarrow 81n^2 -1 \equiv 0[4]$.

n impair $\Leftrightarrow N = 2p_1$ et $M = 2p_2$ avec p_1 et $p_2 \in\mathbb{N}$

$\Leftrightarrow N\times M = 4p_1\times p_2 \Leftrightarrow 81n^2 -1 = 4k$ $(k = p_1\times p_2) \Leftrightarrow 81n^2 -1\equiv 0[4]$.

<u>**Exercice 17**</u> **:** $\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = 2x_n -1\end{cases}$; $\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = 2y_n +3\end{cases}$.

1) Démontrons que $\forall n\in\mathbb{N},\ x_n = 2^{n+1}+1 : (P_n)$

- Si $n = 0, x_0 = 3$ donc P_0 **est vraie.**

- Soit $n\geq 0$, **supposons que** $x_n = 2^{n+1}+1$ **et montrons que** $x_{n+1} = 2^{n+2}+1$.

$x_n = 2^{n+1}+1$ et $x_{n+1} = 2x_n-1 = 2\left(2^{n+1}+1\right)-1 = 2^{n+2}+2-1 = 2^{n+2}+1$. Donc $\forall n\in\mathbb{N},\ x_n = 2^{n+1}+1$.

2-a) $PGCD(x_8;x_9) = PGCD\left(2^9+1;2^{10}+1\right) = PGCD\left(2^9+1;2^{10}+1-2^9-1\right) = \mathbf{PGCD}\left(\mathbf{2^9+1;2^9}\right) = \mathbf{1}$ car ces deux nombres sont consécutifs. Donc $\mathbf{pgcd}\left(\mathbf{x_{2002};x_{2003}}\right) = \mathbf{1}$.

On peut **dire que** $x_8;x_9$ **et** $x_{2002};x_{2003}$ **sont premiers entre eux.**

b) $p\gcd\left(x_n;x_{n+1}\right) = p\gcd\left(2^{n+1}+1;\ 2^{n+2}+1\right) = \mathbf{pgcd}\left(\mathbf{2^{n+1}+1;\ 2^{n+1}}\right) = \mathbf{1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$ x_n **et** x_{n+1} **sont premiers entre eux.**

3-a) Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N},\ 2x_n - y_n = 5 : (P_n)$.

- Si n = 0, on a $2x_0 - y_0 = 6 - 1 = 5$. Donc P_0 est vraie.

- Soit $n \geq 0$, **supposons que $2x_n - y_n = 5$ et montrons que $2x_{n+1} - y_{n+1} = 5$.**

$2x_{n+1} - y_{n+1} = 2(2x_n - 1) - 2y_n - 3 = 4x_n - 2y_n - 5 = 2(2x_n - y_n) - 5 = 10 - 5 = 5$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{2x_n - y_n = 5}$.

b) Exprimons y_n en fonction de n.

$2x_n - y_n = 5 \Rightarrow y_n = 2x_n - 5 \Rightarrow y_n = 2(2^{n+1} + 1) - 5 = 2^{n+2} - 3$.

c) $2 \equiv 2[5]; 2^2 \equiv 4[5]; 2^3 \equiv 3[5]; 2^4 \equiv 1[5]$. Donc si p = 4k, alors $2^p \equiv 1[5]$;

si p = 4k+1 alors $2^p \equiv 2[5]$; si p = 4k+2 alors $2^p \equiv 4[5]$; si p = 4k+3 alors $2^p \equiv 3[5]$.

4) $d_n = p\gcd(x_n; y_n)$.

a) Montrons que $d_n = 1$ ou $d_n = 5$.

$$p\gcd(x_n; y_n) = p\gcd(2^{n+1} + 1; 2^{n+2} - 3) = p\gcd(2^{n+1} + 1; 5) = \begin{cases} \mathbf{5 \text{ si } n = 4k + 1} \\ \mathbf{1 \text{ si } n \neq 4k + 1} \end{cases}.$$

b) x_n et y_n sont premiers entre eux si et seulement si $n \neq 4k + 1$ et $k \in \mathbb{N}$.