Se préparer au BAC

Bac

Sujets et corrigés

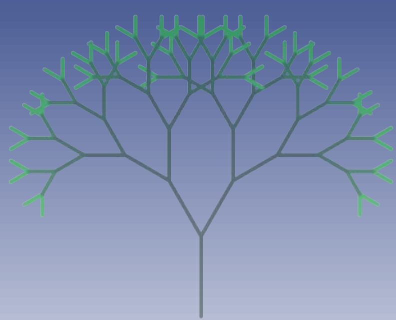
Maths

Section Maths

BAC Tunisie

- Sujets de 2008 à 2015
- Corrigés détaillés

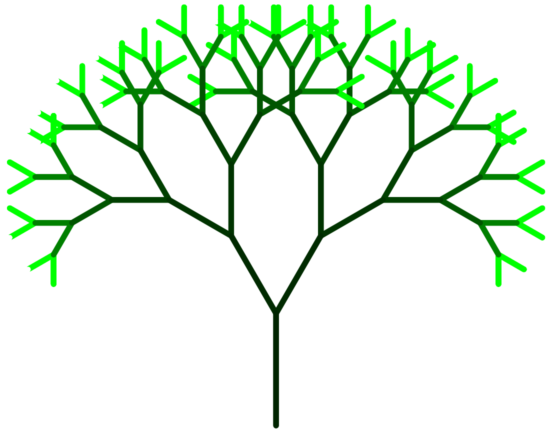
Volume 1



Prof. : Moez Boussetta

Édition 2023

Fractale & Python



Arbre fractal

```
from turtle import *
import turtle

speed('fastest')
right(-90)
angle = 30

def tree(size, level):
    if level > 0:
        pensize(4)
        colormode(255)
        pencolor(0, 255 // level, 0)
        forward(size)
        right(angle)
        tree(0.8 * size, level - 1)
        pencolor(0, 255 // level, 0)
        lt(2 * angle)
        tree(0.8 * size, level - 1)
        pencolor(0, 255 // level, 0)
        right(angle)
        forward(-size)

tree(80, 7)

turtle.shape('circle')
turtle.shapesize(0.01,0.01, 0.1)
ts = turtle.getscreen()
ts.getcanvas().postscript(file="FractalTree.eps")
turtle.done()
```

Dernière mise à jour : 7 septembre 2022

Table des matières

SESSION PRINCIPALE
REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION
ANCIEN REGIME

EXAMEN DU BACCALAUREAT - SESSION DE JUIN 2008

SECTION : MATHEMATIQUES
EPREUVE : MATHEMATIQUES DUREE : 4 h COEF. : 4

Exercice I : (5 points)

On considère dans le plan orienté un triangle isocèle ABC de sommet principal A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par I le milieu de $[BC]$ et par J le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) .
Soit f la similitude indirecte de centre C qui transforme A en B .

1) a – Montrer que le rapport de f est $\sqrt{3}$.
   b – Préciser l'axe Δ de f.

2) Soit B' = f(B)
   a – Préciser la nature et les éléments caractéristiques de fof.
   b – En déduire que $\overrightarrow{CB'} = 3\overrightarrow{CA}$. Construire le point B'.
   c – Montrer que BB' = BC .
   d – En déduire que f(I) = J.

3) Soit $S = f \circ S_{(BC)}$ où $S_{(BC)}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe (BC)
   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.

Exercice II : (5 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + (6 + 5i)z + 2 + 16i = 0$.

2) Soit $f(z) = z^3 + 2(3 + 2i)z^2 + (7 + 10i)z + 16 - 2i$.
   a – Déterminer le nombre complexe α tel que, pour tout nombre complexe z on a :
   $$f(z) = (z - \alpha)\left(z^2 + (6 + 5i)z + 2 + 16i\right).$$
   b – Résoudre alors l'équation f(z) = 0 .

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = i$; $z_B = -4-2i$ et $z_C = -2-3i$ et on désigne par z_I l'affixe du point I milieu de $[AC]$.
   a – Représenter les points A, B, C et I.
   b – Montrer que le triangle ABC est rectangle.

4) a – Construire les points D et E tels que BAD et BEC soient des triangles directs rectangles et isocèles en B.
   Soient z_D et z_E les affixes respectives de D et de E .
   b – Sans calculer z_D et z_E, trouver le module et un argument de $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B}$ et en déduire que :
   $$\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = \frac{z_B - z_E}{z_C - z_B} = i .$$
   c – Montrer que $\frac{z_D - z_E}{2(z_I - z_B)} = i$.
   d – En déduire que DE = 2BI et (DE) $\perp$ (BI).

PROBLEME : (10 points)

I - 1) Soit la fonction g définie par

$$g :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(x) = \frac{1}{x^2} + 1 - 4\,\text{Log}x$$

a – Etudier les variations de g.

b – Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une solution unique α et que $\alpha \in]1, 2[$.

c – Déduire le signe de $g(x)$.

2) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\text{Log}\,x}{\left(1+x^2\right)^2}$

a – Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{x\,g(x)}{\left(1+x^2\right)^3}$

b – Etudier les variations de f .

3) a – Donner une équation de la tangente T à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f au point d'abscisse 1.

b – Montrer que pour tout $x > 0$, $\text{Log}\,x \leqslant x - 1$.

En déduire que $f(x) - \frac{1}{4}(x-1) \leqslant (x-1)\left[\dfrac{4 - \left(1+x^2\right)^2}{4\left(1+x^2\right)^2}\right]$.

c – Déterminer la position relative de $(\mathscr{C})$ par rapport à T.

(on pourra étudier les cas $x \leqslant 1$ et $x > 1$).

d – Tracer T et $(\mathscr{C})$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ $\left(\|\vec{i}\| = 1 \ ; \ \|\vec{j}\| = 10\right)$

On prendra $\alpha \approx 1{,}45$ et $f(\alpha) \approx 0{,}04$

II – Pour $x > 0$, on pose : $F(x) = \int_{1/x}^{x} f(t)dt$.

1) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $F'(x) = \dfrac{(1-x^2)\,\text{Log}x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

2) Soit h la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x) = \text{tg}(x)$.

a – Montrer que h réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, +\infty[$.

b – Montrer que la fonction h^{-1} réciproque de h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $(h^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

c – Montrer que pour $x > 0 : F(x) = \dfrac{1}{2}\left[h^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) - h^{-1}(x)\right] + \dfrac{x\text{Log}x}{1+x^2}$.

3) a – Déduire de ce qui précède $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

b – Dresser le tableau de variation de F.

c – Soit G la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $G(x) = F(x)$ si $x > 0$ et $G(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

Donner l'allure de la courbe (Γ) représentative de G dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2008		NOUVEAU REGIME SESSION PRINCIPALE	
SECTION :	MATHEMATIQUES		
EPREUVE :	MATHEMATIQUES	DUREE : 4 h	COEFFICIENT : 4

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3. La page 3/3 est à rendre avec la copie.

Exercice n°1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) La limite de ($x+1+e^{-x}$) quand x tend vers $-\infty$ est égale à
   a) $-\infty$.   b) 0.   c) $+\infty$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{2x}-1$.
   Alors f est une solution de l'équation différentielle
   a) $2y' = y+2$.   b) $y' = 2y+2$.   c) $y' = -2y-2$.

3) La durée de vie X, exprimée en années, d'une machine automatique suit une loi exponentielle de paramètre 0,4.
   La probabilité que la machine ne tombe pas en panne avant 10 ans est égale à
   a) e^{-4}.   b) $1-0,4e^{-4}$.   c) $1-e^{-4}$.

Exercice n° 2 (5 points)

1) Dans l'annexe ci-jointe (Figure 1 page 3), on a représenté dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe ($\mathscr{C}$) de la fonction f définie sur $\left[\frac{1}{e},e\right]$ par $f(x) = \ln^3(x)-3\ln x$ et les demi- tangentes à la courbe ($\mathscr{C}$) aux points d'abscisses respectives $\frac{1}{e}$ et e.

   a) En utilisant le graphique :
   Montrer que f réalise une bijection de $\left[\frac{1}{e},e\right]$ sur $[-2,2]$. (On note f^{-1} la fonction réciproque de f et ($\mathscr{C}'$) la courbe représentative de f^{-1} dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$).

   b) Tracer la courbe ($\mathscr{C}'$) et les demi-tangentes à ($\mathscr{C}'$) aux points d'abscisses respectives -2 et 2.

2) Soit la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par $a_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.
   a) Calculer a_1.
   b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier $n\geq 1$; $a_{n+1} = e-(n+1)\,a_n$.
   c) En déduire que $a_3 = 6-2e$.

3) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathscr{C}'$) et les droites d'équations $x=-2$ et $x=0$.

   a) Calculer $\int_1^e f(x)dx$.

   b) En déduire $\mathscr{A}$.

Exercice n°3 (4 points)

1) Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3x - 8y = 5$.
Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x, y) tels que $x = 8k - 1$ et $y = 3k - 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$

2) a) Soit n, x et y trois entiers tels que

$$\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$$

Montrer que (x, y) est une solution de (E).

b) On considère le système (S) $\begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 7 \pmod{8} \end{cases}$ où n est un entier .

Montrer que n est solution du système (S) si et seulement si $n \equiv 23 \pmod{24}$.

3) a) Soit k un entier naturel.

Déterminer le reste de 2^{2k} modulo 3 et le reste de 7^{2k} modulo 8.

b) Vérifier que 1991 est une solution de (S) et montrer que l'entier $(1991)^{2008} - 1$ est divisible par 24.

Exercice n°4 (4 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.
Dans l'annexe ci-jointe (Figure 2 page 3), OAB est un triangle rectangle isocèle tel que
$OA = OB$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par I le milieu du segment [AB] et par C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et à B.

Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C.

1) Montrer que f est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2) a) Montrer que O est l'orthocentre du triangle ACD.
b) Soit J le projeté orthogonal du point O sur (AC).
Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par f et en déduire que J est le centre de la similitude f.

3) Soit g la similitude indirecte de centre I, qui envoie A sur D .
a) Vérifier que g est de rapport 2 et d'axe (IC). En déduire g(O).
b) Déterminer les images de C et D par $g\circ f^{-1}$. En déduire la nature de $g\circ f^{-1}$.

4) Soit $I' = f(I)$ et $J' = g(J)$
a) Déterminer les images des points J et I' par $g\circ f^{-1}$.
b) Montrer que les droites (I J), (I'J') et (CD) sont concourantes.

Exercice n°5 (4 points)

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère le tétraèdre ABCE tel que A(1, 0, 2) , B(0, 0, 1) , C(0, -1, 3) et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

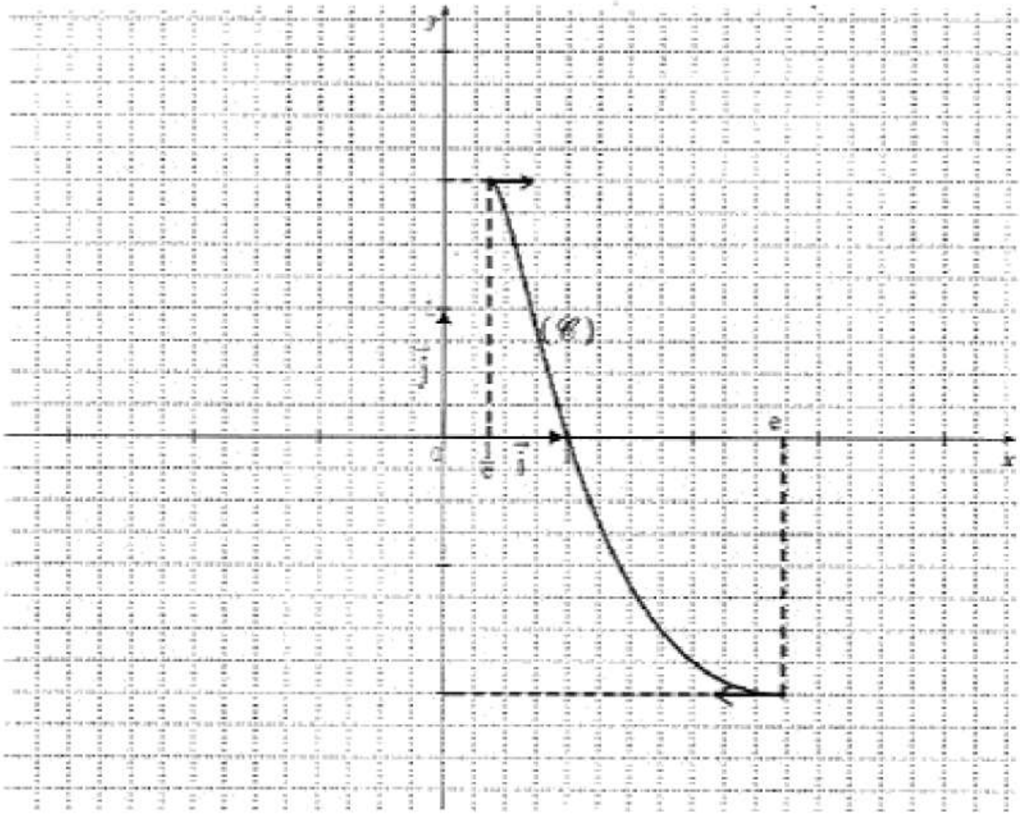
1) a) Vérifier que E a pour coordonnées (0, 2, 3).
b) Calculer le volume du tétraèdre ABCE .

2) a) Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation : $x - 2y - z + 5 = 0$. Montrer que $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (ABC) .
b) Soit K le point défini par $2\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$. Calculer les coordonnées du point K et vérifier que K appartient au plan $\mathscr{P}$.

3) Soit h l'homothétie de centre E qui transforme le point C en K .
a) Déterminer le rapport de h .
b) Le plan $\mathscr{P}$ coupe les arêtes [EA] et [EB] respectivement en I et J .
Calculer le volume du tétraèdre EIJK .

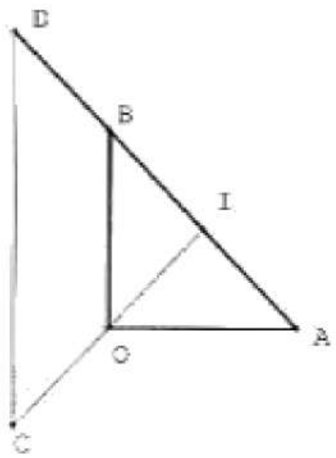
Exercice 2

Figure 1



Exercice 4

Figure 2



Session PRINCIPALE 2008

Section : Math

Epreuve : Mathématiques

Durée : 4 heures **Coefficient : 4**

Exercice n°1

A-CONTENU

Limites-Equations differentielles-Probabilité

B-REPONSES

1) Réponse - c - 2) Réponse - b - 3) Réponse - a -

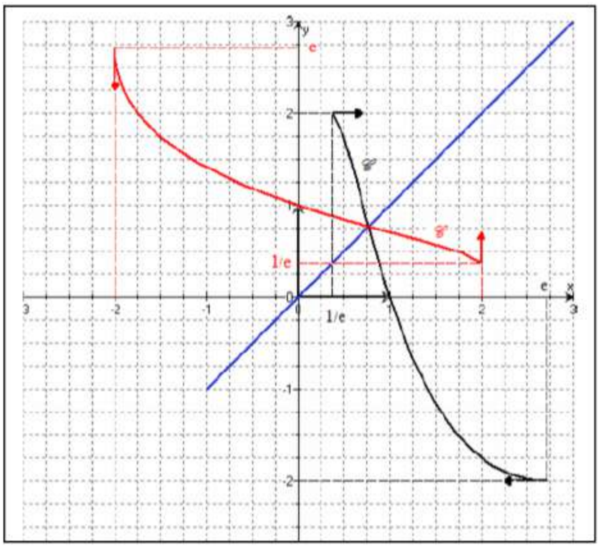
Exercice n°2

A-CONTENU

-fonction logarithme néperien-Fonction réçiproque d'une fonction continue et strictement monotone-

Exploitation d'un graphique-Traçage d'une courbe à partir d'une autre- Calcul intégral-Calcul d'aire

B-SOLUTION



1) a- D'après la courbe la fonction f est continue strictement décroissante sur $[e^{-1},e]$ donc réalise une bijection de $[e^{-1},e]$ sur $f([e^{-1},e])=[-2,2]$.

b- Voir courbe ci-jointe.

2) a- $a_1=\int_1^e \ln x.dx=[x\ln x-x]_1^e=1$.

b- $a_{n+1}=\int_1^e(\ln x)^{n+1}\,dx$. On intègre par parties, on pose : $\begin{cases} u(x) = (\ln x)^{n+1} & \to u'(x) = \frac{n+1}{x}(\ln x)^n \\ v'(x) = 1 & \to v(x) = x \end{cases}$

Donc : $a_{n+1} = \left[x(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - (n+1)\int_1^e (\ln x)^n\, dx$

Ainsi : $a_{n+1} = e - (n+1)a_n$.

c- Comme $a_2 = e - 2a_1 = e - 2$ donc $a_3 = e - 3a_2 = e - 3e + 6$ ainsi $a_3 = 6 - 2e$.

3) a- $\int_1^e f(x).dx = \int_1^e \left((\ln x)^3 - 3\ln x\right)dx = \int_1^e (\ln x)^3\, dx - 3\int_1^e \ln x.dx = a_3 - 3a_1$ donc

$\int_1^e f(x).dx = 6 - 2e - 3 = 3 - 2e$.

b- l'aire demandée est égale à la différence entre l'aire du rectangle de dimensions e et 2 et le réel ($\int_1^e -f(x)\,dx$)

Ainsi $\mathcal{A} = 2\times e + \int_1^e f(x)\,dx = 2e + (3-2e) = \mathbf{3}$ **ua**

<u>Exercice n°3</u>

<u>A-CONTENU</u>

Congruence –Divisibilité-Résolution ,dans ZxZ ,d'une équation du type ax+by=c

<u>B-SOLUTION</u>

1) $(-1,-1)$ est une solution particulière de (E): $3x - 8y = 5$.

Donc $3(x+1) = 8(y+1)$ or : $\begin{cases} 3 \wedge 8 = 1 \\ 8 / 3(x+1) \end{cases}$ donc d'après le lemme de Gauss $8/(x+1)$ par suite

Il existe un entier k tel que $x = 8k - 1$ $(k \in \mathbb{Z})$ .Remplaçons x par sa valeur on obtient $8(y+1) = 3\times 8k$ $(k \in \mathbb{Z})$ par suite $y = 3k - 1$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Pour la réciproque, il suffit de vérifier que tout entier k le couple $(8k-1, 3k-1)$ est solution de l'équation (E). D'où

$$S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(8k-1, 3k-1)\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

2) a- On a : $\begin{cases} 3x = n-2 \\ 8y = n-7 \end{cases}$ donc $3x - 8y = (n-2) - (n-7) = 5$ d'où (x,y) est solution de (E)

b- si n est solution (S) alors $\begin{cases} n = 3x+2 & (x \in \mathbb{Z}) \\ n = 8y+7 & (y \in \mathbb{Z}) \end{cases}$ donc (x,y) est solution de (E) d'où

$\begin{cases} x = 8k-1 \\ y = 3k-1 \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$ et par suite $n = 3(8k-1) + 2 = 24k - 1$ ainsi $n \equiv -1 \pmod{24}$ donc $n \equiv 23 \pmod{24}$.

Réciproquement ,soit n un entier vérifiant $n \equiv 23 \pmod{24}$ donc $n = 24K + 23$ $(K \in \mathbb{Z})$ d'où

$\begin{cases} n=3(8K+7)+2 \\ n=8(3K+2)+7 \end{cases}$ $(K\in\mathbb{Z})$ ainsi $\begin{cases} n=3k+2 & (k\in\mathbb{Z}) \\ n=8k'+7 & (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$ par suite n est solution de $(S)\begin{cases} n\equiv 2 \pmod 3 \\ n\equiv 7 \pmod 8 \end{cases}$

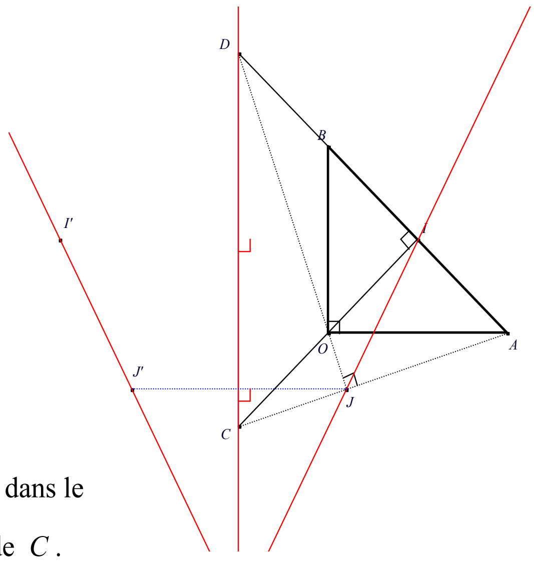
3) a- $\begin{cases} 2^2\equiv 1 \pmod 3 \\ 7^2\equiv 1 \pmod 8 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 2^{2k}\equiv 1 \pmod 3 \\ 7^{2k}\equiv 1 \pmod 8 \end{cases}$ $(k\in\mathbb{N})$

b- • $\begin{cases} 1991=3\times 663+2 \\ 1991=8\times 248+7 \end{cases}$ ainsi $\begin{cases} 1991\equiv 2 \pmod 3 \\ 1991\equiv 7 \pmod 8 \end{cases}$ par suite 1991 est solution de (S).

• Comme 1991 est solution de (S) donc $1991\equiv 23 \pmod{24}$ ou encore $1991\equiv -1 \pmod{24}$

Donc $(1991)^{2008}\equiv(-1)^{2008} \pmod{24}$ d'où $(1991)^{2008}\equiv 1 \pmod{24}$ on en déduit alors que

$(1991)^{2008}-1$ est divisible par 24.



Exercice n°4

A-CONTENU

Similitude directe-Similitude indirecte-

Composée de similitudes –Symétrie axiale

B-SOLUTION

1) • Le rapport de f est : $\dfrac{DC}{AO}=\dfrac{2OB}{OB}=2$

•L'angle de f est $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{DC})\equiv(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

2) a- $(IC)\perp(AD)$ car (IO) est la médiatrice de $[AB]$ donc dans le triangle ACD, la droite (IC) porte la hauteur issue de C.

$(AO)\perp(CD)$ donc dans le triangle ACD, la droite (AO) porte la hauteur issue de A.

donc $(IC)\cap(AO)=\{O\}$ est l'orthocentre du triangle ACD.

b- • $f((OJ))$ est la perpendiculaire à (OJ) passant par $f(O)=C$ qui n'est autre que la droite (AC).

• $f((AJ))$ est la perpendiculaire à (AJ) passant par $f(A)=D$ qui n'est autre que la droite (DJ).

• On a $f((OJ))\cap f((AJ))=(AC)\cap(DJ)=\{J\}$, comme $\{J\}=(OJ)\cap(AJ)$ alors

$\{f(J)\}=f((OJ))\cap f((AJ))=\{J\}$ donc J est invariant par f, qui est de rapport $\neq 1$ d'où J est l'unique point fixe par f et par suite J est le centre de f.

3) a- • $\dfrac{ID}{IA}=\dfrac{2IB}{IB}=2$ donc g est de rapport 2.

• L'axe de g porte la bissectrice intérieur de $(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{ID})$ qui n'est autre que (IC).

• Comme la forme réduite de g est $g=h_{(I,2)}\circ S_{(IC)}=S_{(IC)}\circ h_{(I,2)}$ donc

$g(O)=h_{(I,2)}\circ S_{(IC)}(O)=h_{(I,2)}(O)=C$ car $\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{IO}$.

b- • $g\circ f^{-1}(C)=g(O)=C$ par suite $g\circ f^{-1}(C)=C$.

• $g\circ f^{-1}(D)=g(A)=D$ par suite $g\circ f^{-1}(D)=D$.

• $g\circ f^{-1}$ est la composée d'une similitude indirecte g de rapport 2 et d'une similitude directe f^{-1} de rapport $\frac{1}{2}$ donc $g\circ f^{-1}$ est une similitude indirecte de rapport $2\times\frac{1}{2}=1$ donc c'est un antidéplacement .Comme $g\circ f^{-1}$ fixe les points C et D on a alors $g\circ f^{-1}=S_{(CD)}$.

4) a- • $g\circ f^{-1}(J)=g(J)=J'$ par suite $g\circ f^{-1}(J)=J'$.

• $g\circ f^{-1}(I')=g(I)=I$ par suite $g\circ f^{-1}(I')=I$.

b- Comme $g\circ f^{-1}(J)=J'$ et $g\circ f^{-1}(I')=I$ donc $S_{(CD)}(J)=J'$ et $S_{(CD)}(I)=I'$ d'où $S_{(CD)}((IJ))=(I'J')$

Montrons que les droites (IJ) et (CD) sont sécantes .

Supposons qu'elles sont parallèles.On a : $S_{(CD)}(J)=J'\ donc\ (CD)\perp(JJ')$ ce qui donne $(JI)\perp(JJ')$

D'autre part, $f(I)=I'\ donc\ (JI)\perp(JI')$ car f *est* de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$ *Ainsi* , $(JI')\perp(JJ')$

par suite les points J,J'et I' sont alignés ce qui est absurde **.**

les droites (IJ) et (CD) sont sécantes et $S_{(CD)}((IJ))=(I'J')$ Donc les droites $(IJ),(I'J')et(CD)$ sont concourantes

Exercice n°5

A-CONTENU

Produit vectoriel- - Homothétie –Image d'un plan par une homothétie– Plans parallèles –Image d'un tétraèdre par une homothétie-Calcul de volumes .

B-SOLUTION

1) a- Comme $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ ainsi $\begin{cases}x_E=-1+1=0\\y_E=2+0=2\\z_E=1+2=3\end{cases}$ d'où $E(0,2,3)$

b- $\mathcal{V}_{ABCE}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AE}\right|=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE}\right|=\frac{1}{6}AE^2=1$ uv.

2) a- $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$ donc il est normal au plan (ABC) et $\overrightarrow{N_{\mathscr{P}}}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$ et colinéaire à $\overrightarrow{AE}$ donc $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (ABC).

b- • à partir de la relation $2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ on obtient $K(0,1,3)$

• les coordonnées du point K vérifient : $0-2-3+5=0$ donc $K\in\mathscr{P}$.

3) a- On sait que $2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ donc $2\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$ d'où $\overrightarrow{EK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$ ainsi h est de rapport $\frac{1}{3}$.

b- On sait que $\mathcal{V}_{EIJK}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}).\overrightarrow{IE}\right|$ or on a :

$h((ABC))$ est un plan parallèle à (ABC) passant par $h(C)=K$ donc $h((ABC))=\mathscr{P}$.

Par suite comme A est un point de (ABC) donc $h(A)$ est un point de $\mathscr{P}$ vérifiant A , $h(A)$ et E alignés. Donc $h(A)=I$.

De même comme B est un point de (ABC) donc $h(B)$ est un point de $\mathscr{P}$ vérifiant B , $h(B)$ et E alignés. Donc $h(B)=J$ de plus, vu que $h(C)=K$ et $h(E)=E$ on aura

$$\mathcal{V}_{EIJK}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}).\overrightarrow{IE}\right|=\frac{1}{6}\left|\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\wedge\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right).\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right|=\frac{1}{27}\left(\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AE}\right|\right)=\frac{1}{27}\mathcal{V}_{ABCE}=\frac{1}{27}.$$

Donc le volume du tétraèdre EIJK est $\mathcal{V}_{EIJK}=\frac{1}{27}$.

FIN.

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION
EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2008

NOUVEAU REGIME

SESSION DE CONTROLE

SECTION :	MATHEMATIQUES		
EPREUVE :	MATHEMATIQUES	DUREE : 4 h	COEFFICIENT : 4

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice n°1 : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) Soit $I = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}\, dx$.

Alors I est égale à

a) 3 . b) $\frac{1}{4}$. c) $-\frac{1}{4}$.

2) Soit $\ell = \lim_{x \to 1^-} \left[\ln(1-x) + \frac{1}{1-x} \right]$, alors

a) $\ell = 1$. b) $\ell = 0$. c) $\ell = +\infty$.

3) Soit n un entier non nul tel que $(5n) \wedge (3^2 \times 5^3 \times 7) = 35$.

Alors

a) $n \equiv 0 \pmod 3$. b) $n \equiv 0 \pmod 5$. c) $n \equiv 0 \pmod 7$.

Exercice 2 : (4 points)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation

$$(E) : z^3 + (5+i)z^2 + (10+2i)z + 8 = 0.$$

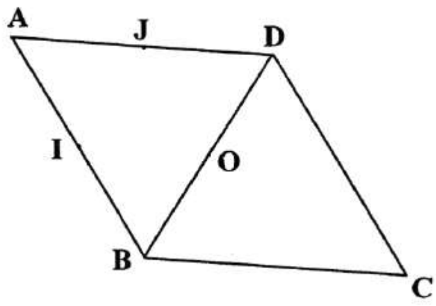
1) a) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.
   b) Résoudre l'équation (E).

2) Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1+i)z$.
   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
   b) Soit M un point du plan distinct de O et soit M' son image par f.
   Montrer que le triangle OMM' est rectangle isocèle et en déduire un procédé de construction du point M'.

3) On considère les points A_n définis par :
   A_0 le point d'affixe (-1+i) et pour tout entier naturel n , $A_{n+1} = f(A_n)$.
   a) Placer les points A_0, A_1 , A_2 , A_3 et A_4.
   b) Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

Exercice 3 : (4 points)

Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure ci-contre , ABCD est un losange de centre O , I est le milieu du segment [AB] , J est le milieu du segment [AD] et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.



1) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en B et B en D.

b) caractériser f .

c) Déterminer l'image du triangle ABD par f .

2) Soit s un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A,B,D\}$ en l'ensemble $\{B,C,D\}$ et tel que $s(A) = C$.

a) Déterminer l'image du segment [BD] par s .

b) En déduire que s est la symétrie orthogonale d'axe (BD) .

3) Soit g un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A,B,D\}$ en l'ensemble $\{B,C,D\}$ et tel que $g(A) = D$.

a) Montrer que $g(D) = B$.

b) Caractériser alors g .

Exercice 4 : (5 points)

1) Soit f la fonction définie sur [-2, 2] par $\begin{cases} f(x) = (x+2)\ln(x+2) & \text{si} \quad x \neq -2 \\ f(-2) = 0. \end{cases}$

et ($\mathscr{C}$) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que f est continue à droite en (-2).

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en (-2).

c) Donner le tableau de variation de f.

2) Soit g la fonction définie sur [-2, 2] par $g(x) = f(x) - x\sqrt{4-x^2}$

et ($\mathscr{C}'$) sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Déterminer la position relative des courbes ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$).

b) Dans l'annexe ci-jointe (page 4), on a tracé la courbe ($\mathscr{C}'$) de g. Tracer la courbe ($\mathscr{C}$) dans le même repère.

3) Soit α un réel non nul appartenant à [-2, 2].

On désigne par $\mathscr{A}_\alpha$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.

a) Montrer que $\mathscr{A}_\alpha = \int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2}\,dx$. (On distinguera les deux cas $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$).

b) Calculer $\mathscr{A}_\alpha$.

c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$).

Exercice 5 : (4 points)

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par $f_n(x)=e^{-x}-x^{2n+1}$

1) Etudier les variations de f_n.

2) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution u_n et que $u_n\in]0,1[$.

   On définit ainsi sur $\mathbb{N}^*$, une suite (u_n).

3) a) Soit n un entier naturel non nul et x un réel de l'intervalle $]0,1[$. Comparer les réels $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.

   b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(u_{n+1})<0$.

   c) Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.

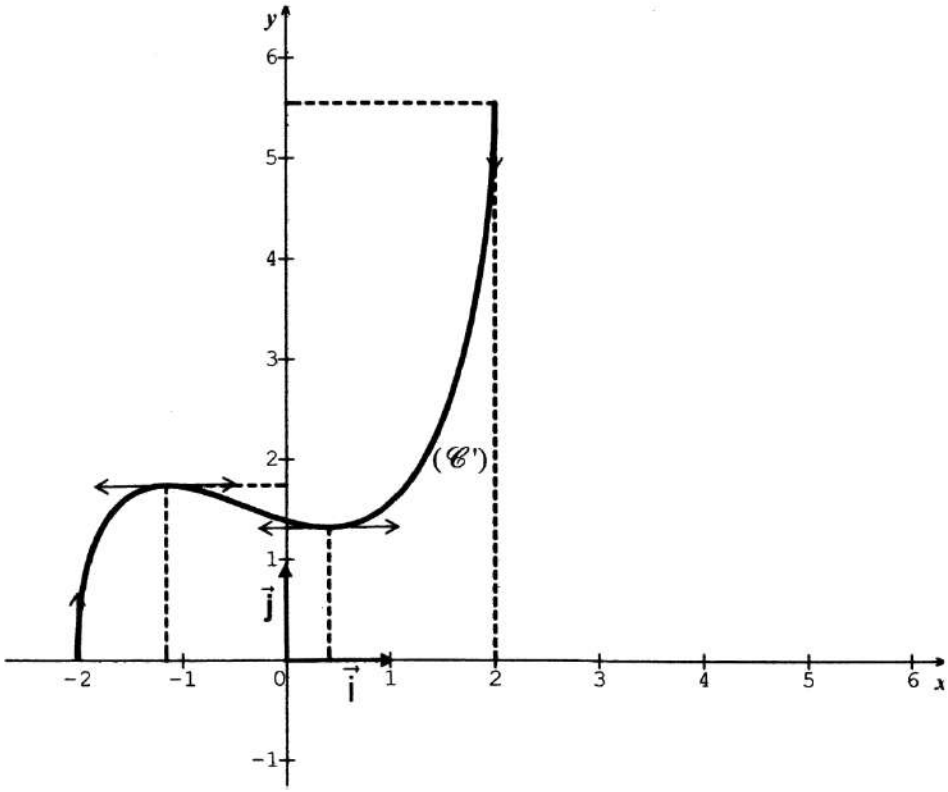
4) a) Montrer que pour $n\geqslant 1$, $\ln(u_n)=-\dfrac{u_n}{2n+1}$.

   b) Calculer la limite de la suite u_n.

Section : …….. N° d'inscription : ………………. Série : …………… Nom et prénom : ……………………………………………………… Date et lieu de naissance : ………………………………………………	Signature des Surveillants ………………. ……………….

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 4



4 / 4

Session de CONTROLE 2008

Section : Math

Epreuve : Mathématiques

Durée : 4 heures **Coefficient : 4**

Exercice n°1

A-CONTENU

Calcul intégral-limites –Congruences

B-REPONSES

1) Réponse - b - 2) Réponse - c - 3) Réponse - c -

Exercice n°2

A-Contenu

-Résolution dans C d'une équation du troisième degré admettant une racine réelle .

-Similitude directe.

B- SOLUTION

$$(E): z^3+(5+i)z^2+(10+2i)z+8=0$$

1) a- Soit $z_0 = x \quad (x \in \mathbb{R})$ une solution réelle de (E) . Alors :

$x^3+(5+i)x^2+(10+2i)x+8=0$ donc $\left(x^3+5x^2+10x+8\right)+i\left(x^2+2x\right)=0$ par suite

$\begin{cases} x^3+5x^2+10x+8=0 \\ x^2+2x=0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x^3+5x^2+10x+8=0 \\ x=0 \quad \text{ou} \quad x=-2 \end{cases}$ ainsi $\boxed{z_0=-2}$

(car z =0 n'est pas une solution de (E))

b- comme $z_0=-2$ est une solution de (E), donc il existe deux nombres complexes b et c tels que

$z^3+(5+i)z^2+(10+2i)z+8=(z+2)(z^2+bz+c)$

par identification ,on obtient :b=3+i et c=4.

Par suite $(E):(z+2)\left(z^2+(3+i)z+4\right)=0$ donc $\begin{cases} z=-2 \\ z^2+(3+i)z+4=0 \end{cases}$

Résolvons l'équation $z^2+(3+i)z+4=0$

$\Delta=(3+i)^2-16=-8+6i=(1+3i)^2$ ce qui donne $\begin{cases} z'=\frac{1}{2}(-3-i-1-3i)=-2-2i \\ z''=\frac{1}{2}(-3-i+1+3i)=-1+i \end{cases}$

Conclusion : les solutions de l'équation (E) sont donc -2 , -2-2i et $-1+i$

2) a- L'écriture complexe de f est de la forme $z'=az+b$ où $a=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ (complexe non nul) et $b=0$ donc

f est une similitude directe de rapport $k=\sqrt{2}$, de centre O et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{4}$.

b- On a $MM'=|(1+i)z-z|=|iz|=|z|=OM$

D'autre part , $M'=f(M)$ donc $OM'^2=2OM^2$

par suite $MM'^2+OM^2=2OM^2=OM'^2$

Ainsi OMM' est un triangle rectangle et isocèle en M.

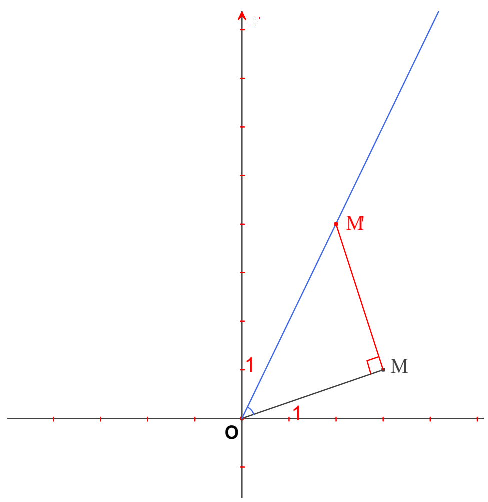
<u>Construction</u> :

On construit la demi-droite $[Ot)$

tel que $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{Ot})\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

La perpendiculaire à (OM) issue de M coupe $[Ot)$

en M' d'où la construction.

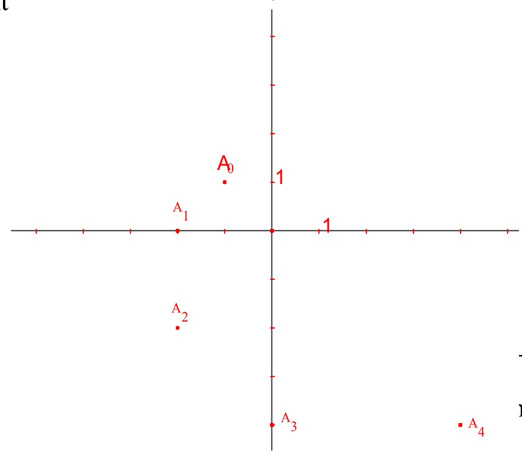


3) a- pour tout $n\in\mathbb{N}$, désignons par z_n l'affixe du point

A_n . comme $A_{n+1}=f(A_n)$ alors $z_{n+1}=(1+i)z_n$.

Par suite $A_0(-1+i)$; $A_1(-2)$; $A_2(-2-2i)$

$A_3(-4i)$ et $A_4(4-4i)$.



b- On a : $z_n = (1+i)z_{n-1}$

On établit par recurrence que pour tout entier naturel

non nul n on a $z_n = (1+i)^n z_0$

Les points O, A_0 et A_n sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{OA_0}$ et $\overrightarrow{OA_n}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{OA_0}$ et $\overrightarrow{OA_n}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{z_n}{z_0}$ est réel

$\frac{z_n}{z_0}$ est réel si et seulement si $\arg(1+i)^n = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ si et seulement si $\boxed{n \equiv 0 \pmod 4 \text{ et } n \text{ non nul.}}$

Exercice n°3

A-CONTENU

-Antidéplacement : symétrie , symétrie glissante.

B-SOLUTION

1) a- $AB \neq 0$ et $AB = BD$ car ABD est équilatéral

alors il existe un unique antidéplacement f qui envoie A sur B et B sur D.

b- On a $f \circ f(A) = D \neq A$

donc f est une symétrie glissante de vecteur

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AJ}$ $\left(\text{car } f \circ f = t_{\overrightarrow{2u}}\right)$ et d'axe la droite passant par le point $I = A * B$ et par le point $0 = B * D$

.donc l'axe de cette symétrie glissante est la droite (OI).

c- L'image du triangle direct ABD est un triangle indirect qui lui est isométrique dont $f(A) = B$ et $f(B) = D$ sont deux sommets par suite l'image par f du triangle ABD est le triangle BDC

2) a- $\left.\begin{array}{r} s(\{A,B,D\}) = \{B,C,D\} \\ s(A) = C \\ s \text{ est une bijection} \end{array}\right\}$ donc $s(\{B,D\}) = \{B,D\}$ ainsi $s([BD]) = [BD]$.

b- d'après ce qui précède on a

$s([BD]) = [BD]$ et comme $O = B * D$ donc $s(O) = O$ par suite s est un antidéplacement Qui fixe le point O d'où il s'agit d'une symétrie orthogonale d'axe (BD)

3) a- $\left.\begin{array}{r} g(\{A,B,D\}) = \{B,C,D\} \\ g(A) = D \\ g \text{ est une bijection} \end{array}\right\}$ donc $g(\{B,D\}) = \{B,C\}$ par suite on obtient : $g(D) = B$ ou $g(D) = C$

or si $g(D) = C$ on aura $g(B) = B$ par suite g est une symétrie orthogonale ce qui n'est pas le cas car $g \circ g(A) = C \neq A$ donc $g(D) = B$.

b- on a déjà $g(A) = D$, $g(D) = B$ et g n'est pas une symétrie orthogonale car $g \circ g(A) = B \neq A$ donc g est une symétrie glissante donc de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI}$

$\left(\text{car } g \circ g = t_{\overrightarrow{2u}}\right)$ et d'axe la droite passant par $J = A * D$ et par $0 = B * D$ donc l'axe de la symétrie glissante g est la droite (OJ).

Exercice n°4

A- CONTENU

-Fonction Logarithme.

-Continuité , dérivabilité, positions relatives de deux courbes.

-Calcul intégral, calcul d'aire .

B- SOLUTON

1) posons $t = x + 2$

a- $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-2)^+} (x+2)\ln(x+2) = \lim\limits_{t \to 0^+} t \ln t = 0 = f(-2)$

Donc f est continue à droite en (-2).

b- $\lim\limits_{x \to (-2)^+} \dfrac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \lim\limits_{x \to (-2)^+} \ln(x+2) = \lim\limits_{t \to 0^+} \ln t = -\infty$

c- f est dérivable sur $]-2,2]$ et on a :

$f'(x) = 1 + \ln(x+2)$. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-1} - 2$

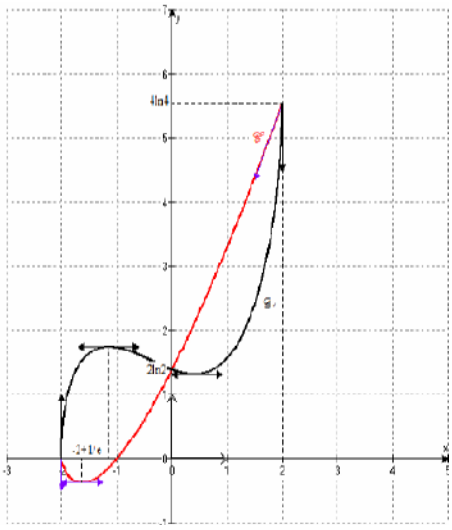
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x+2)\ln(x+2) = \lim\limits_{t \to +\infty} t \ln t = +\infty$

x	-2		$e^{-1}-2$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

2) a- $g(x) - f(x) = -x\sqrt{4 - x^2}$

x	-2		0		2
$g(x) - f(x)$		$+$	O	$-$	
position	C Au dessous De C'				

Pour x $\in [-2,0]$ la courbe C est au dessus de la courbe C' et pour x $\in [0,2]$ la courbe C est au dessous de la courbe C' b-



3) a-
- Si α< 0 on obtient $\mathcal{A}_\alpha = \int_\alpha^0 \left(g(x)-f(x)\right)dx = \int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2}dx$
- Si α> 0 on obtient $\mathcal{A}_\alpha = \int_0^\alpha \left(f(x)-g(x)\right)dx = \int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2}dx$

Ainsi pour tout $\alpha \in [-2,2]\setminus\{0\}$ $\mathcal{A}_\alpha = \int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2}dx$

b- $\mathcal{A}_\alpha = -\frac{1}{2}\int_0^\alpha -2x\sqrt{4-x^2}dx = -\frac{1}{3}\left[(4-x^2)\sqrt{4-x^2}\right]_0^\alpha = \frac{8}{3}-\frac{1}{3}(4-\alpha^2)\sqrt{4-\alpha^2}$.

c- $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{-2}+\mathcal{A}_2 = \frac{16}{3}$ u.a.

Exercice n°5

A-CONTENU

-Suite de fonctions ; suites numériques ;convergences de suites

B-SOLUTION

-1) $f_n'(x) = -e^{-x}-(2n+1)x^{2n} < 0$ sur $[0,1]$ donc

f_n est strictement décroissante sur $[0,1]$.

x	0	1
$f_n'(x)$	$-$	
$f_n(x)$	1 ↘	$e^{-1}-1$

2) f_n est continue, strictement décroissante sur $[0,1]$ donc elle réalise une bijection de $[0,1]$ sur $f([0,1])=[e^{-1}-1,1]$ et comme $0\in]e^{-1}-1,1[$ alors l'équation $f_n(x)=0$ admet une solution unique $u_n\in]0,1[$

3) a- Pour tout $x\in]0,1[$, on a : $f_{n+1}(x)-f_n(x)=x^{2n+1}(1-x^2)>0$
donc pour tout $(n,x)\in\mathbb{N}^*\times]0,1[$ on a : $f_{n+1}(x)>f_n(x)$.

b- Pour tout $(n,x)\in\mathbb{N}^*\times]0,1[$ on a : $f_{n+1}(x)>f_n(x)$ pour $x=u_{n+1}$ on aura $\boxed{f_n(u_{n+1})<0}$.

c- • $f_n(u_{n+1})<0$ donc $f_n(u_{n+1})<f_n(u_n)$ et comme f_n est strictement décroissante alors sa réciproque l'est aussi et par suite $u_{n+1}>u_n$ ainsi (u_n) est une suite croissante.

• (u_n) est une suite croissante et majoré par 1 donc elle est convergente .

4) a- $f_n(u_n)=0$ donc $e^{-u_n}=(u_n)^{2n+1}$ ainsi $\boxed{\ln u_n=-\dfrac{u_n}{2n+1}}$.

b- Soit $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ alors on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{u_n}{2n+1}\right)$ donc $\ln\ell=0$ par suite $\boxed{\ell=1}$.

FIN.

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION	SESSION PRINCIPALE	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION DE JUIN 2009
SECTION : MATHEMATIQUES		
EPREUVE : MATHEMATIQUES	DURÉE : 4 Heures	COEFFICIENT : 4

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $1+i\sqrt{3}$.

L'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est le point d'affixe

a) $-\sqrt{3}+i$ b) $\sqrt{3}-i$ c) $-\sqrt{3}-i$

2) Si z est un nombre complexe non nul d'argument $\frac{\pi}{6}$ alors un argument de $i\bar{z}$ est

a) $-\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{3}$

3) Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = 2^n + 3^n$.

alors $a_n \equiv 0 \pmod 5$ pour

a) tout entier naturel n pair b) tout entier naturel n c) tout entier naturel n impair

4) Un questionnaire à choix multiples (QCM) comporte quatre questions. Pour chaque question, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Un candidat répond au hasard à chacune des quatre questions de ce QCM.

La probabilité pour que ses quatre réponses soient toutes exactes est

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{3^4}$ c) $1-\left(\frac{2}{3}\right)^4$

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[\,0\,,\,1\,[$ par $f(x) = \ln(1 - \sqrt{x}\,)$.

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$.

b) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f.

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

Tracer $(\mathscr{C})$. (On précisera la demi-tangente à $(\mathscr{C})$ en O).

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[\,0\,,\,1\,[$ sur $]-\infty, 0]$.

(On notera f^{-1} la fonction réciproque de f et (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$).

b) Tracer (Γ). (On précisera la demi-tangente à (Γ) en O).

3) a) Montrer que, pour tout $x \in\,]-\infty, 0]$, $f^{-1}(x) = (e^x - 1)^2$.

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) et les droites d'équations

$x = -\ln 2$; $x = 0$ et $y = 0$.

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1 - \sqrt{x}\,)dx$.

Exercice 3 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB] , [BC] , [AC] et [JC] .

1) Faire une figure.

2) Soit f la similitude directe de centre J, qui envoie A sur K.

a) Déterminer l'angle et le rapport de f.

b) Justifier que f(K) = L .

c) Soit H le milieu du segment [A J]. Justifier que f(I) = H .

3) On munit le plan du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

Soit φ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -\left(\frac{1+i}{2}\right)\bar{z} + \frac{1+i}{2}$.

a) Montrer que φ est une similitude indirecte de centre C.

b) Donner les affixes des points I, K, J et H.

c) Déterminer $\varphi(I)$ et $\varphi(J)$.

d) Déduire alors que $\varphi = f \circ s_{(IK)}$, (où f est la similitude définie dans 2° et $s_{(IK)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (IK)).

4) Soit Δ l'axe de la similitude indirecte φ.

a) Tracer Δ.

b) La droite Δ coupe les droites (IK) et (HL) respectivement en P et Q.

Montrer que $\varphi(P) = f(P)$ et en déduire que $\varphi(P) = Q$.

Exercice 4 (4 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère l'ellipse $(\mathcal{E})$ d'équation $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ et on désigne par M le point de coordonnées $(\cos\theta, 2\sin\theta)$, où θ est un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1) a) Déterminer, par leurs coordonnées, les sommets et les foyers de $(\mathcal{E})$.

b) Tracer $(\mathcal{E})$ et placer ses foyers.

c) Vérifier que le point M appartient à $(\mathcal{E})$.

2) Soit (T) la tangente à $(\mathcal{E})$ en M.

Montrer qu'une équation de (T) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est $2x\cos\theta + y\sin\theta - 2 = 0$.

3) On désigne respectivement par P et Q les points d'intersection de (T) avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées et on désigne par $\mathcal{A}$ l'aire du triangle OPQ.

a) Montrer que $\mathcal{A} = \frac{2}{\sin(2\theta)}$.

b) En déduire que l'aire $\mathcal{A}$ est minimale si et seulement si M est le milieu du segment [PQ].

Exercice 5 (3 points)

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

2) Soit E l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos x$.
Vérifier que g est un élément de E.

b) Soit f un élément de E . Vérifier que, pour tout réel x , $f''(x) = f'(\frac{\pi}{2} - x)$.

c) En déduire que si f est un élément de E alors f est une solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

d) Déterminer alors l'ensemble E.

EPREUVE DE MATH ***SECTION MATH*** **SESSION PRINCIPALE 2009**

EXERCICE N°1

De quoi s'agit-il ?

Nombres complexes-Rotations-arithmétique-Probabilités

SOLUTION

1) Réponse - b - 2) Réponse - c - 3) Réponse - c - 4) Réponse - b -

EXERCICE N°2

De quoi s'agit-il ?

Fonction logarithme népérien-Fonction exponentielle-Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone-calcul intégral-Calcul d'aire

SOLUTION

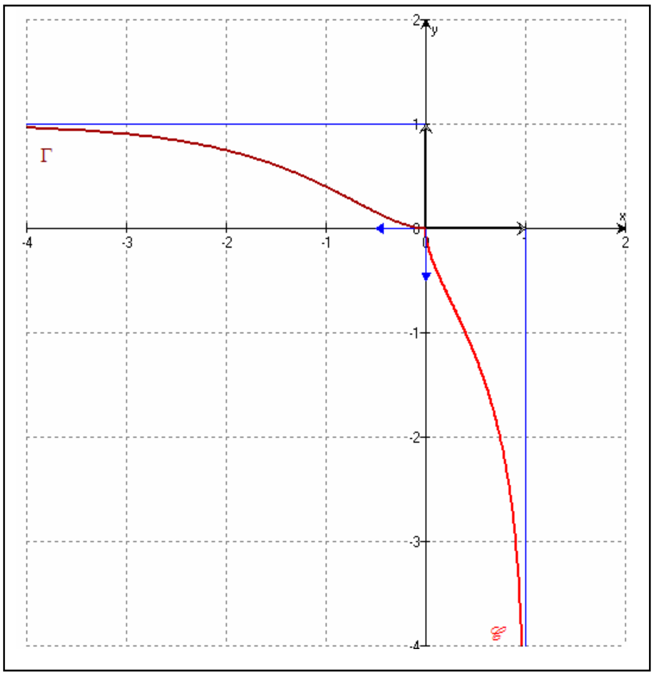
1) a- En posant $t=-\sqrt{x}$ on aura $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{t\to 0^-}\left(\frac{\ln(1+t)}{t^2}\right)=\lim_{t\to 0^-}\left(\frac{1}{t}\times\frac{\ln(1+t)}{t}\right)=-\infty$.

b- $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=-\infty$

donc f n'est pas dérivable à droite en 0

et $(\mathscr{C})$ admet au point O une

demi-tangente verticale dirigé vers le bas.



2) a- f est définie et strictement décroissante

sur $[0,1[$ donc réalise une bijection de

$[0,1[$ sur $f([0,1[)$ de plus f est continue sur

$[0,1[$ donc $f([0,1[)=]-\infty,0]$.

Conclusion : f réalise une bijection de $[0,1[$ sur $f([0,1[)=]-\infty,0]$.

b- $(\Gamma)=S_{D:y=x}(\mathscr{C})$

$(\mathscr{C})$ admet au point O une demi-tangente verticale donc (Γ) admet en ce point une demi-tangente horizontale.

3) a- On a : $\begin{cases} x \in]-\infty, 0] \\ f^{-1}(x) = y \end{cases}$, si et seulement si $\begin{cases} y \in [0,1[\\ f(y) = x \end{cases}$

$x = f(y) = \ln\left(1-\sqrt{y}\right) \Leftrightarrow e^x = 1-\sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt{y} = 1-e^x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \left(1-e^x\right)^2$.

b- $\mathcal{A} = \int_{-\ln 2}^{0} f^{-1}(x)\,dx = \int_{-\ln 2}^{0} \left(1-2e^x+e^{2x}\right)dx = \left[x - 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-\ln 2}^{0} = \left(-2+\frac{1}{2}\right) - \left(-\ln 2 - \frac{2}{e^{\ln 2}} + \frac{1}{2e^{\ln 4}}\right)$

donc $\mathcal{A} = \ln 2 - \frac{5}{8}$ u.a

c- En utilisant la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = x$ on aura :

$-\int_0^{\frac{1}{4}} \ln\left(1-\sqrt{x}\right)dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \left|f(x)\right|dx = \frac{1}{4} \times \ln 2 - \mathcal{A} = \frac{\ln 2}{4} - \ln 2 + \frac{5}{8}$ ($f^{-1}(0) = 0$ et $f^{-1}(-\ln 2) = \frac{1}{4}$)

D'où $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln\left(1-\sqrt{x}\right)dx = \frac{3}{4}\ln 2 - \frac{5}{8}$

Autrement : $\mathcal{A} = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(f(x) - (-\ln 2)\right)dx = \ln 2 - \frac{5}{8}$ donc $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln\left(1-\sqrt{x}\right)dx = \ln 2 - \frac{5}{8} - \frac{1}{4}\ln 2 = \frac{3}{4}\ln 2 - \frac{5}{8}$

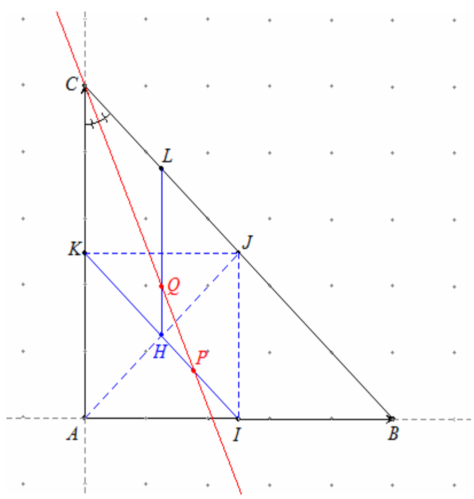
EXERCICE N°3

<u>De quoi s'agit-il ?</u>

Similitude directe –Similitude indirecte-symétrie orthogonale –Composée d'une similitude directe et d'une symétrie orthogonale.

SOLUTION

1) voir figure ci-contre.



2) a- $\left(\widehat{\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JK}}\right) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ est une mesure de l'angle de f

en effet :

$\begin{cases} \overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IA} \text{ car } J = B*C,\ K = A*C \text{ et } I = A*B \\ \left(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AK}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ AI = AK \text{ car } ABC \text{ est isocèle en } A,\ K = A*C \text{ et } I = A*B \end{cases}$

donc AIJK est un carré direct dont $[JA]$ est une diagonale

ainsi $\left(\widehat{\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JK}}\right) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

Autrement :

$(JK)//(AB)$ car dans le triangle ABC on a : $J = B*C$ et $K = A*C$

donc $(\widehat{\overrightarrow{JC},\overrightarrow{JK}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$ $[2\pi]$

or $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$ car ABC est un triangle rectangle et isocèle en A de sens direct

par suite $(\widehat{\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JK}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JC}}) + (\widehat{\overrightarrow{JC},\overrightarrow{JK}})$ $[2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$ d'où $(\widehat{\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JK}}) \equiv -\frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$

□ $\frac{JK}{JA} = \frac{\frac{1}{2}BA}{\frac{1}{2}BC} = \frac{BA}{BC} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est le rapport de f .

b- $\begin{cases} \frac{JL}{JK} = \frac{\frac{1}{4}BC}{\frac{1}{2}BA} = \frac{BC}{2BA} = \frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ (\widehat{\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JK}}) \equiv -\frac{\pi}{4} \ [2\pi] \end{cases}$ d'où $f(K) = L$.

c- $\begin{cases} (\widehat{\overrightarrow{JI},\overrightarrow{JH}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{JA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AJ}}) \equiv -\frac{\pi}{4} \ [2\pi] \\ \frac{JH}{JI} = \frac{\frac{1}{2}JA}{\frac{1}{2}AC} = \frac{\frac{1}{2}BC}{BA} = \frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ d'où $f(I) = H$.

3) a- $z' = -\frac{1}{2}(1+i)\overline{z} + \frac{1}{2}(1+i)$ est de la forme $z' = a\overline{z} + b$ où $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$

donc φ est une similitude indirecte de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Or $-\frac{1}{2}(1+i)\overline{z_C} + \frac{1}{2}(1+i) = \frac{i}{2}(1+i) + \frac{1}{2}(1+i) = \frac{1}{2}(i-1) + \frac{1}{2}(1+i) = i = z_C$ d'où $\varphi(C) = C$

et comme $|a| \neq 1$ donc C est l'unique point invariant par f qui n'est autre que le centre.

b- □ $z_I = \frac{1}{2}$ □ $z_K = \frac{1}{2}i$ □ $z_J = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ □ $z_H = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

c- □ $-\frac{1}{2}(1+i)\overline{z_I} + \frac{1}{2}(1+i) = -\frac{1}{4}(1+i) + \frac{1}{2}(1+i) = \frac{1}{4}(1+i) = z_H$ d'où $\varphi(I) = H$.

□ $-\frac{1}{2}(1+i)\overline{z_J} + \frac{1}{2}(1+i) = -\frac{1}{4}(1+i)(1-i) + \frac{1}{2}(1+i) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+i) = \frac{1}{2}i = z_K$ d'où $\varphi(J) = K$.

d- $\begin{cases} \bullet f \circ S_{(IK)}(I) = f(I) = H \text{ donc } f \circ S_{(IK)}(I) = H \\ \bullet f \circ S_{(IK)}(J) = f(A) = K \text{ donc } f \circ S_{(IK)}(J) = K \\ \bullet f \circ S_{(IK)} \text{ est une similitude indirecte comme composée} \\ \quad \text{d'une similitude directe et antidéplacement} \end{cases}$

Donc $f \circ S_{(IK)}$ et φ sont deux similitudes indirectes qui coïncident en deux points distincts

par suite $\varphi = f \circ S_{(IK)}$.

4) a- La droite Δ est porté par la bissectrice intérieur de $(\overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{CK})$ (ou $(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CH})$)

b- □ $P \in (IK)$ alors $S_{(IK)}(P) = P$ par suite $\varphi(P) = f \circ S_{(IK)}(P) = f(P)$ donc $\varphi(P) = f(P)$.

□ $P \in (IK)$ alors $f(P) \in f\langle (IK) \rangle = (LH)$ par suite $\varphi(P) \in (LH)$

$P \in \Delta$ et Δ étant l'axe de φ alors $\varphi(P) \in \varphi(\Delta) = \Delta$

Ainsi $\varphi(P) \in \Delta \cap (LH) = \{Q\}$ par conséquent $\varphi(P) = Q$.

EXERCICE N°4

De quoi s'agit-il ?

Ellipse-équation de la tangente à une ellipse en l'un de ses points-Aire d'un triangle

SOLUTION

1) a- L'ellipse $(\mathcal{E})$ a pour équation, dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

$a = 1$, $b = 2$ et comme $a < b$, l'axe focal est $(O, \vec{j})$.

Les sommets suivant l'axe focal de $(\mathcal{E})$ ont pour coordonnées $(0, -2)$ et $(0, 2)$

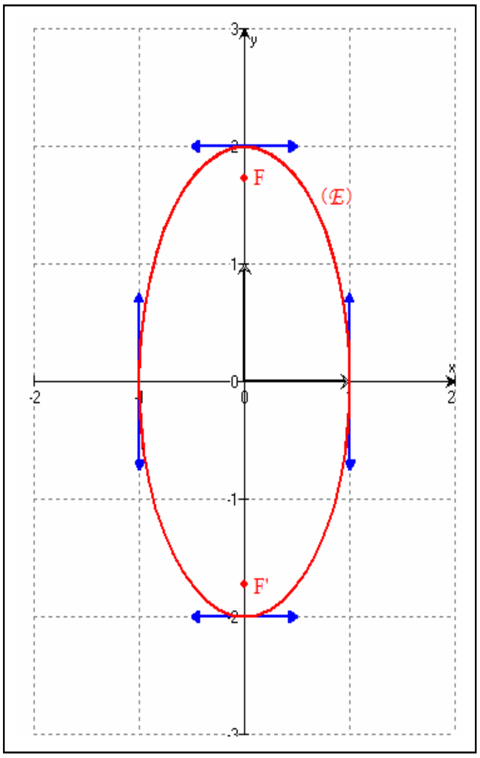
Les sommets suivant l'axe non focal de $(\mathcal{E})$ ont pour coordonnées $(-1, 0)$ et $(1, 0)$

Comme $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{3}$ donc les foyers de $(\mathcal{E})$ ont pour coordonnées $(0, -\sqrt{3})$ et $(0, \sqrt{3})$

b- voir figure ci-contre

c- $\frac{\cos^2 x}{1^2} + \frac{4\sin^2 x}{2^2} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Donc $M \in (\mathcal{E})$



2) Une équation de la tangente à $(\mathscr{E})$ en un point $M(x_0, y_0)$ est :

$T : \frac{xx_0}{1^2} + \frac{yy_0}{2^2} = 1$ par suite pour $M(\cos\theta, 2\sin\theta)$ on aura

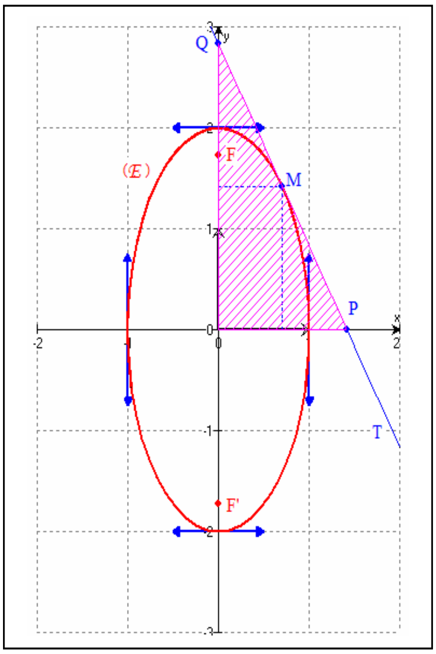
$T : x\cos\theta + \frac{2y\sin\theta}{4} = 1$ d'où $T : 2x\cos\theta + y\sin\theta - 2 = 0$.

3) a- Le triangle OPQ est rectangle en O

donc l'aire $\mathscr{A} = \frac{1}{2} \times OP \times OQ$

Or $\begin{cases} P \in (O, \vec{i}) \\ P \in T \end{cases}$ donc $\begin{cases} y_P = 0 \\ 2x_P \cos\theta = 2 \end{cases}$ d'où $P\left(\frac{1}{\cos\theta}, 0\right)$

de même $\begin{cases} Q \in (O, \vec{j}) \\ Q \in T \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_Q = 0 \\ y_Q \sin\theta = 2 \end{cases}$ d'où $Q\left(0, \frac{2}{\sin\theta}\right)$



De plus $\cos\theta > 0$ et $\sin\theta > 0$ pour tout $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Ainsi $\mathscr{A} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos\theta} \times \frac{2}{\sin\theta} = \frac{2}{2\cos\theta\sin\theta} = \frac{2}{\sin(2\theta)}$

donc $\mathscr{A} = \frac{2}{\sin(2\theta)}$.

b- L'aire $\mathscr{A} = \frac{2}{\sin(2\theta)}$ est minimale si et seulement si

$\sin 2\theta$ est maximum or $0 < 2\theta < \pi$ donc $0 < \sin 2\theta \leq 1$

d'où $\mathscr{A}$ est minimale si et seulement si $2\theta = \frac{\pi}{2}$

par suite $\theta = \frac{\pi}{4}$ d'ou : $P(\sqrt{2}, 0)$, $Q(0, 2\sqrt{2})$ et $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$

ce qui prouve que M est le milieu du segment $[PQ]$.

EXERCICE N°5

De quoi s'agit-il ?

Equations différentielles -Recherche d'un ensemble de fonctions.

SOLUTION

1) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''+y=0$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=A\sin x+B\cos x$ où $(A,B)\in\mathbb{R}^2$

2) a- $g(x)=\cos x$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=-\sin x$

donc $g'(x)+g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin x+\sin x=0$ ainsi $g'(x)+g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$

par suite g est un élément de E.

b- Comme f est un élément de E donc pour tout réel x on a : $f'(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$

et par suite $f''(x)-f'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$ d'où $f''(x)=f'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

c- Si f est un élément de E alors pour tout réel x on a : $f'(x)=-f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

ce qui donne : pour tout réel x , $f'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=-f(x)$.

Or d'après b- si f est un élément de E alors pour tout réel x, $f''(x)=f'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

Par suite : pour tout réel x, $f''(x)=-f(x)$ d'où $f''(x)+f(x)=0$

C'est-à-dire f est une solution de l'équation différentielle $y''+y=0$.

d- d'après c- si f est un élément de E alors f est une solution de l'équation différentielle $y''+y=0$ donc $f(x)=A\sin x+B\cos x$ où $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

D'autre part, comme f est un élément de E donc pour tout réel x on a : $f'(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$

Ce qui donne, pour tout réel x, $(A\cos x-B\sin x)+\left(A\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+B\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=0$

donc pour tout réel x, $A\cos x - B\sin x + A\cos x + B\sin x = 2A\cos x = 0$ ainsi $A = 0$

d'où $f(x) = B\cos x$ où $B \in \mathbb{R}$.

Conclusion : E est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = B\cos x$ où $B \in \mathbb{R}$.

FIN.

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION	SESSION DE CONTROLE	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION DE JUIN 2009
SECTION : MATHEMATIQUES		
EPREUVE : MATHEMATIQUES	DURÉE : 4 Heures	COEFFICIENT : 4

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) Soit z un nombre complexe de module 2.

Alors le conjugué $\overline{z}$ de z est égal à

a) $\frac{\sqrt{2}}{z}$

b) $\frac{2}{z}$

c) $\frac{4}{z}$

2) Dans Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et i. L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\frac{z-i}{z-1}$ est réel est

a) la droite (AB) privée de A

b) le segment [AB] privé de A

c) le cercle de diamètre [AB] privé de A

3) Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $(-\ln 2)$. Alors la suite (v_n) définie par $v_n = e^{u_n}$ est

a) une suite arithmétique de raison (– 2)

b) une suite géométrique de raison (– 2)

c) une suite géométrique de raison $(\frac{1}{2})$

4) La limite de $x\ln(1+\frac{2}{x})$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à

a) 0

b) 1

c) 2

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique 2 cm)

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

c) Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

2) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	3	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans $\mathbb{R}_+$, une seule solution α et vérifier que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

b) Tracer la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$.
(On précisera la demi tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 et on prendra $\alpha \simeq 0{,}4$)

3) On désigne par (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_\alpha^1 [f(x)]^n \, dx$.

a) Calculer u_1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 (4 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} \\ v_0 = 1 \quad ; \quad v_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_n \leq v_n$.

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et qu'elles admettent la même limite.

4) Soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = 9u_n + 5v_n$

a) Montrer que (w_n) est une suite constante.

b) En déduire la limite commune des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 4 (5 points)

Dans l'annexe ci-jointe (page 4/4), ABCD est un rectangle de centre O et tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

Le point E désigne le symétrique du point A par rapport à D.

Soit S la similitude directe de centre C, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1) a) Justifier que $S(A) = B$

b) Montrer que le triangle ACE est équilatéral et en déduire que $S(E) = O$.

2) Soit I un point du segment [EO], distinct des points O et E et soit (Γ) le cercle de centre I et passant par A.

Les droites (AD) et (AB) recoupent le cercle (Γ) respectivement en M et P.

a) Tracer (Γ) et placer les points M et P.

b) Justifier que le point C appartient à (Γ).

3) Soit N le projeté orthogonal du point C sur la droite (MP).

a) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

b) En déduire que $S(M) = N$.

4) Montrer que les points B, D et N sont alignés.

Exercice 5 (3 points)

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3x + 4y = -8$.

1) a) Vérifier que $(0, -2)$ est une solution de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite Δ dont une équation est : $3x + 4y + 8 = 0$ et on désigne par A le point de Δ d'abscisse 0.

a) Montrer que si M est un point de Δ à coordonnées entières alors AM est un multiple de 5.

b) Soit N un point de Δ de coordonnées (x, y).

Vérifier que $AN = \frac{5}{4}|x|$

c) En déduire que si AN est un multiple de 5 alors x et y sont des entiers.

Section : ……………… N° d'inscription : ……… …. Série : …………

Nom et prénom : …………………………………………

Date et lieu de naissance : ……………………………………

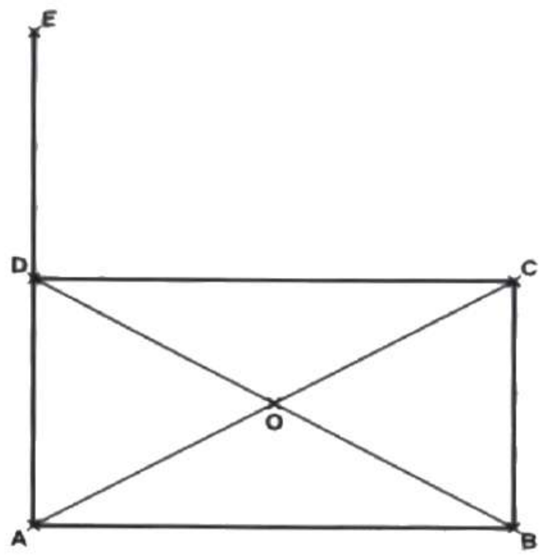
Signature des Surveillants

……………………

……………………

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 4



Epreuve de Math Section Math Session de contrôle 2009

Exercice n°1

De quoi s'agit-il ?

Nombres complexes-suites –fonction logarithme népérien-limites

CORRIGÉ

1) Réponse - c - 2) Réponse - a - 3) Réponse - c - 4) Réponse - c -

Exercice n°2

De quoi s'agit-il ?

Fonction exponentielle - suites – calcul intégral.

CORRIGÉ

1) a- En posant $t=-x$ on aura $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{t\to-\infty}\left(\underbrace{-t}_{+\infty}-\underbrace{te^t}_{0}-\underbrace{e^t}_{0}\right)=+\infty$.

b- En posant $t=-x$ on aura $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{t\to-\infty}\left(-\underbrace{te^t}_{0}-\underbrace{e^t}_{0}\right)=0$

Donc la droite Δ d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

c- Soit $x\in[0,+\infty[$; $f(x)-x=(x-1)e^{-x}$

- sur $[0,1]$ la courbe $(\mathscr{C})$ est située au dessous de Δ .
- sur $[1,+\infty[$ la courbe $(\mathscr{C})$ est située au dessus de Δ .

2) a- f est définie et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f([0,+\infty[)$

de plus f est continue sur $[0,+\infty[$ donc $f([0,+\infty[)=[-1,+\infty[$.

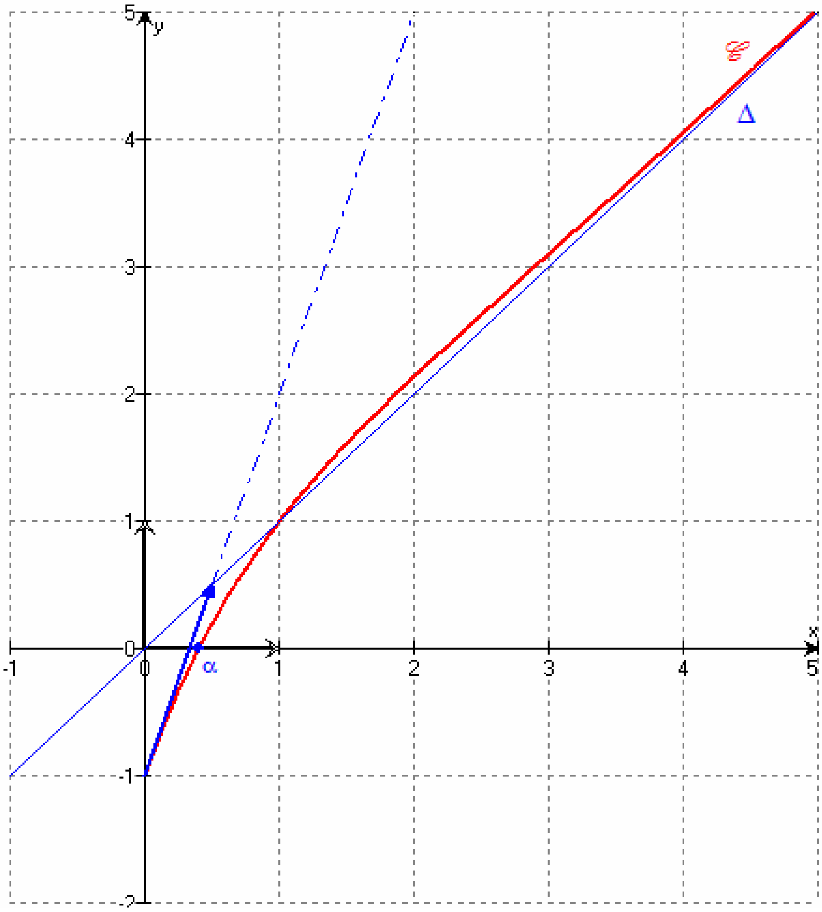
Comme $0\in[-1,+\infty[$ donc l'équation $f(x)=0$ admet dans $[0,+\infty[$ une solution unique α .

Puisque $f(0) = -1 < 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) > 0$ donc $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Conclusion : L'équation $f(x) = 0$ admet dans $[0, +\infty[$ une solution unique $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

b- D'après le tableau de variation de la fonction f on a : $f'(0) = 3$

donc la demi tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0 est de coefficient directeur 3.



3) a- $u_1 = \int_\alpha^1 f(x)\,dx = \int_\alpha^1 \left(x + (x-1)e^{-x}\right)dx = \int_\alpha^1 x\,dx + \int_\alpha^1 (x-1)e^{-x}dx$

Or $\int_\alpha^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^1 = \frac{1}{2}(1-\alpha^2)$

$\int_\alpha^1 (x-1)e^{-x}dx$ on intègre par parties on pose : $\begin{cases} u(x) = x-1 & \rightarrow & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-x} & \rightarrow & v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

Par suite $\int_\alpha^1 (x-1)e^{-x}dx = \left[-(x-1)e^{-x}\right]_\alpha^1 + \int_\alpha^1 e^{-x}dx = \left[-xe^{-x}\right]_\alpha^1 = -\frac{1}{e} + \alpha e^{-\alpha}$

donc $u_1 = \int_\alpha^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}(1-\alpha^2) - \frac{1}{e} + \alpha e^{-\alpha}$.

Interprétation : $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [\alpha, 1]$ donc u_1 représente l'aire, en unité d'aire, du domaine du plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations : $y = 0$, $x = 1$ et $x = \alpha$

b- sur $[0,1]$ la courbe $(\mathscr{C})$ est situé au dessous de Δ donc pour tout réel $x \in [0,1]$, $f(x) \leq x$

de plus pour tout $x \in [\alpha,+\infty[$, $f(x) \geq 0$ et $\alpha < 1$ ainsi pour tout $x \in [\alpha,1]$ on a : $0 \leq f(x) \leq x$

par suite $0 \leq \int_\alpha^1 [f(x)]^n dx \leq \int_\alpha^1 x^n dx$

d'où $0 \leq u_n \leq \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^1$ or $\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^1 = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{\alpha^{n+1}}{n+1} \leq \dfrac{1}{n+1}$ donc $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

c- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ et $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice n°3

De quoi s'agit-il ?

Suites adjacentes

CORRIGÉ

1) Montrons, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

- vérification : pour $n = 1$ l'inégalité $u_1 \leq v_1$ est vraie (car $u_1 = \dfrac{1}{3}$ et $v_1 = \dfrac{2}{5}$)

- soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $u_n \leq v_n$ et montrons que $u_{n+1} \leq v_{n+1}$

Comme $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} - \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} = \dfrac{u_n - v_n}{15} \leq 0$ car $u_n - v_n \leq 0$ donc $u_{n+1} \leq v_{n+1}$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n$.

2) - $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n + v_n}{3} - u_n = -\dfrac{u_n - v_n}{3} \geq 0$ car $u_n - v_n \leq 0$ donc (u_n) est une suite croissante.

- $v_{n+1} - v_n = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} - v_n = \dfrac{3(u_n - v_n)}{5} \leq 0$ car $u_n - v_n \leq 0$ donc (v_n) est une suite décroissante.

3)<u>Première méthode</u>

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et (v_n) est une suite décroissante donc (v_n) est majoré par $v_0 = 1$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$.

Ainsi (u_n) est une suite croissante et majoré par 1 donc converge.

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq u_n$ et (u_n) est une suite croissante donc (u_n) est minoré par $u_0 = 0$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 0$.

Ainsi (v_n) est une suite décroissante et minoré par 0 donc converge.

□ On pose $\lim_{n\to+\infty}(u_n)=l$ et $\lim_{n\to+\infty}(v_n)=l'$

$\lim_{n\to+\infty}(u_n)=l$ donc $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1})=l$

Comme $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+v_n}{3}$ donc les opérations sur les limites des suites donnent $l=\dfrac{2l+l'}{3}$

D'où $l=l'$

<u>Deuxième méthode</u>

D'après ce qui précède on a : $u_{n+1}-v_{n+1}=\dfrac{1}{15}(u_n-v_n)$

Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$,$u_n-v_n=-\left(\frac{1}{15}\right)^n$

vérification : l'égalité $u_0-v_0=-\left(\frac{1}{15}\right)^0$ est vraie (car $u_0=0$, $v_0=1$ et $-\left(\frac{1}{15}\right)^0=-1$)

supposons que $u_n-v_n=-\left(\frac{1}{15}\right)^n$

montrons que $u_{n+1}-v_{n+1}=-\left(\frac{1}{15}\right)^{n+1}$

on a : $u_{n+1}-v_{n+1}=\dfrac{1}{15}\left[-\left(\frac{1}{15}\right)^n\right]=-\left(\frac{1}{15}\right)^{n+1}$

donc pour tout $n\in\mathbb{N}$,$u_n-v_n=-\left(\frac{1}{15}\right)^n$

Vu que $\lim_{n\to+\infty}\left[-\left(\frac{1}{15}\right)^n\right]=0$ car $\left(\frac{1}{15}\right)\in]-1,1[$ donc $\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$

Compte tenu :

□ pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\le v_n$.

□ (u_n) est une suite croissante et (v_n) est une suite décroissante.

□ $\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et par suite elles convergent vers la même limite

4) a- pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_{n+1}=9u_{n+1}+5v_{n+1}=3(2u_n+v_n)+(3u_n+2v_n)=9u_n+5v_n=w_n$

Donc (w_n) est une suite constante.

b- (w_n) est une suite constante donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n=w_0=9u_0+5v_0=5$.

Par suite pour tout $n \in \mathbb{N}$, $9u_n + 5v_n = 5$.

Donc si L est la limite commune des suites (u_n) et (v_n) on aura $9L + 5L = 5$

Ce qui donne $L = \frac{5}{14}$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = \frac{5}{14}$.

Exercice n°4

De quoi s'agit-il ?

Similitudes-angles inscrits –symétrie orthogonale.

CORRIGÉ

1) a- $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right)\ [2\pi]$

$$\equiv \frac{\pi}{2} - \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\ [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \qquad \text{donc} \quad \left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

De plus, comme ABC est un triangle rectangle en B donc $\frac{CB}{CA} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

D'où $\begin{cases} \dfrac{CB}{CA} = \dfrac{1}{2} \\ \left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$ ce qui justifie que $S(A) = B$

b- □ D'une part $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right)\ [2\pi]$

$$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)\ [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

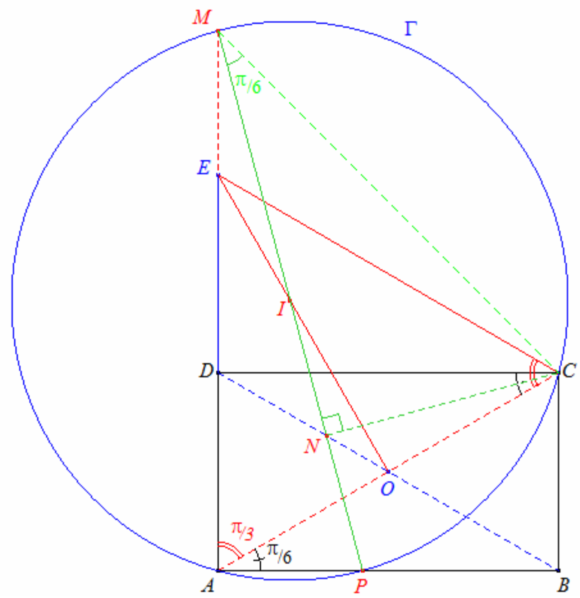
D'autre part $\left.\begin{array}{l} E = S_{(DC)}(A) \\ D = S_{(DC)}(D) \\ C = S_{(DC)}(C) \end{array}\right\}$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}}\right) \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right)\ [2\pi]$

Ainsi $\begin{cases} (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi] \\ (\widehat{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}})\ [2\pi] \\ \qquad\qquad \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$ ce qui prouve que le triangle ACE est équilatéral.

□ On a le triangle ACE est équilatéral et $O = A*C$ donc $\begin{cases} \dfrac{CO}{CE} = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} \\ (\widehat{\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CO}}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$

Conclusion : $S(E) = O$.

2) a-



b- ACE est un triangle équilatéral et $O = A*C$ donc la droite (OE) est la médiatrice du segment $[AC]$

et puisque $I \in [OE] \setminus \{O, E\}$ donc $IA = IC$ or (Γ) est le cercle de centre I et le rayon IA

donc $C \in (\Gamma)$.

3) a- $(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AC}})$ sont deux angles inscrits dans (Γ) interceptant le même arc orienté $\overset{\frown}{PC}$

Donc $(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AC}})\ [2\pi]$ or $(\widehat{\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AC}}) \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$ donc $(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC}}) \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

b- Comme $\begin{cases} (\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MC}}) \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi] \\ (\widehat{\overrightarrow{NC},\overrightarrow{NM}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$ donc $(\widehat{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ (I) de plus on a $\frac{CN}{CM} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ (II)

d'après (I) et (II) on en déduit $S(M) = N$

4) $M \in (AD)$ et $E \in (AD)$ donc A, E et M sont alignés de plus $\left.\begin{array}{r} S(A) = B \\ S(E) = O \\ S(M) = N \end{array}\right\}$

et comme toute similitude conserve l'alignement donc B, O et N sont alignés.

D'où $N \in (OB)$ et puisque $D \in (OB)$ on en déduit alors que B, D et N sont alignés.

Exercice n°5

De quoi s'agit-il ?

Résolution dans $\mathbb{Z}^2$ d'une équation du type ax +by = c – détermination des points d'une droite à coordonnées entières

CORRIGÉ

1) a- $3\times 0 + 4\times(-2) = -8$ donc $(0,-2)$ est solution de (E).

b- Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ solution de (E).

On a : $\left.\begin{array}{l} 3\times x + 4\times y = -8 \\ 3\times 0 + 4\times(-2) = -8 \end{array}\right\}$ donc $3\times x = -4\times(y+2)$

comme $\left.\begin{array}{l} 3 / -4\times(y+2) \\ 3\wedge(-4) = 1 \end{array}\right\}$ alors d'après Gauss $3/(y+2)$ ainsi $y = 3k-2$ où $k \in \mathbb{Z}$

par suite $3\times x = -4\times(3k)$ d'où $x = -4k$ ainsi $(x,y) = (-4k\,,\,3k-2)$ où $k \in \mathbb{Z}$

réciproquement : soit $(x,y) = (-4k\,,\,3k-2)$ où $k \in \mathbb{Z}$

on a : $3\times(-4k) + 4\times(3k-2) = -8$ donc (x,y) est solution de (E).

Conclusion : $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{\,(-4k\,,\,3k-2)\,,\,k\in\mathbb{Z}\,\}$

2) a- $\left\{\begin{array}{l} M(x,y)\in\Delta \\ (x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \end{array}\right.$ signifie $\left\{\begin{array}{l} 3x+4y=-8 \\ (x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \end{array}\right.$ signifie $(x,y) = \{\,(-4k\,,\,3k-2)\,,\,k\in\mathbb{Z}\,\}$

Donc $AM = \sqrt{(-4k)^2 + (3k)^2} = 5\times|k|$ où $k\in\mathbb{Z}$

Par suite AM est un multiple de 5.

b- $N(x,y) \in \Delta$ signifie $3x + 4y = -8$ signifie $y = -\dfrac{8+3x}{4}$

Donc $AN^2 = x^2 + \left(-\frac{3x}{4}\right)^2 = \dfrac{25}{16}x^2$ par suite $AN = \dfrac{5}{4}|x|$.

c- Si AN est un multiple de 5 alors il s'écrit sous la forme $AN = 5|k|$ où $k \in \mathbb{Z}$

Donc $\dfrac{5}{4}|x| = 5|k|$ où $k \in \mathbb{Z}$ ainsi $|x| = 4|k|$ où $k \in \mathbb{Z}$ d'où x est un entier

Comme $y = -\dfrac{8+3x}{4} = -2 - \dfrac{3x}{4}$ donc y = -2+3k où $k \in \mathbb{Z}$ d'où y est un entier

Conclusion : Si AN est un multiple de 5 alors x et y sont des entiers.

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT - SESSION DE JUIN 2010

SESSION PRINCIPALE

SECTION : MATHEMATIQUES
EPREUVE : MATHEMATIQUES **DUREE : 4h** **COEFFICIENT : 4**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4

Exercice 1 (3 points)

Répondre par « Vrai » ou « Faux ». Aucune justification n'est demandée.

1) Le quotient de (– 23) par (–5) est 4.

2) Si a et b sont deux entiers tels que $64a + 9b = 1$ alors les entiers b et 64 sont premiers entre eux.

3) $147^{146} \equiv 2 \pmod{12}$.

4) $x^2 \equiv 0 \pmod 8$ équivaut à $x \equiv 0 \pmod 8$.

5) Si $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 4 \\ x \equiv 4 \pmod 5 \end{cases}$ alors $x \equiv 19 \pmod{20}$.

6) Si p est un entier premier distinct de 2 alors $p^2 \equiv 1 \pmod 4$.

Exercice 2 (4 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure (1) de l'annexe ci-jointe, [AB] et [IJ] sont deux diamètres perpendiculaires du cercle ($\mathscr{C}$), M est un point variable du cercle ($\mathscr{C}$) tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et MBEN et MKFA sont des carrés de sens direct.

1) Montrer que les points E, F et M sont alignés.

2) On désigne par r_1 et r_2 les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs A et B.

   a) Montrer que $r_1 \circ r_2$ est la symétrie centrale de centre I.

   b) Déterminer $r_1 \circ r_2$ (E). En déduire que lorsque M varie, la droite (EF) passe par un point fixe que l' on déterminera.

3) Soit S la similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

   a) Déterminer S (M).

   b) Construire le point G image de F par S.

   c) Montrer que F est le milieu du segment $[KG]$.

   d) En déduire que lorsque M varie, la droite (KF) passe par un point fixe P. Construire P.

Exercice 3 (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On note A le point d'affixe -2.

On considère l'équation (E) : $3z^3 - 2z^2 + 4z + 16 = 0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et M, N et P les points d'affixes respectives α, $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

1) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors les points M, N et P sont alignés.

Dans la suite de l'exercice on suppose que α n'appartient pas à $\mathbb{R}$.

2) Montrer que si MNAP est un parallélogramme, alors α est une solution de l'équation (E).

3) Dans cette question on prend $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$.

a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes α, $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Placer dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points A, M, N et P.

b) Donner l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Montrer que le quadrilatère MNAP est un parallélogramme.

4) a) Montrer que si α est une solution de (E) alors $\bar{\alpha}$ est une solution de (E).

b) En déduire les affixes des points M pour lesquels MNAP est un parallélogramme.

Exercice 4 (5 points)

1) Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x - x\ln x + x$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

2) Dans la figure (2) de l'annexe ci-jointe, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ sont les courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ des fonctions g et h définies sur $]0, +\infty[$ par

$g(x) = \frac{1}{x}$ et $h(x) = \ln x$.

$\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ se coupent en un point d'abscisse β.

a) Par une lecture graphique donner le signe de $f'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de f.

c) Montrer que $f(\beta) = \beta + \frac{1}{\beta} - 1$.

2/4

3) On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

a) Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$.

b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives x_1 et x_2 telles que $0{,}4 < x_1 < 0{,}5$ et $3{,}8 < x_2 < 3{,}9$.

c) Placer dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ les points A $(\beta, 0)$ et B$(0, \dfrac{1}{\beta})$ et en déduire une construction du point de coordonnées $(\beta, f(\beta))$.

d) Tracer $\mathscr{C}_f$.

4) Pour tout réel t de $\left]0, +\infty\right[\setminus\{\beta\}$, on désigne par $\mathscr{A}(t)$ l'aire de la partie du plan S(t) limitée par les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ et la droite d'équation $x = t$.

a) Montrer que pour tout réel $t \in \left]0,+\infty\right[\setminus\{\beta\}$, $\mathscr{A}(t) = f(\beta) - f(t)$.

b) Soit $t_0 > \beta$. Hachurer $S(t_0)$.

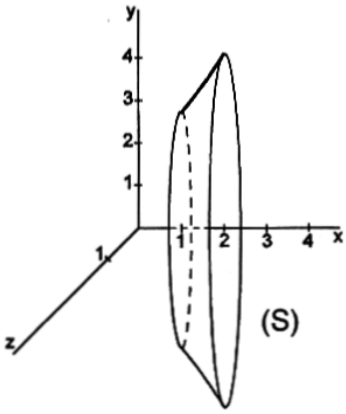
c) Montrer qu'il existe un réel unique t_1 dans $\left]0, \beta\right[$ tel que $\mathscr{A}(t_1) = \mathscr{A}(t_0)$.

Hachurer $S(t_1)$.

Exercice 5 (4 points)

Dans la figure ci-contre, le solide de révolution (S) est obtenu en faisant tourner la portion de la courbe d'équation $y = e^{\sqrt{x}}$, $x \in [1, 2]$ autour de l'axe (Ox).

Le but de cet exercice est de calculer le volume $\mathscr{V}$ de ce solide.



1) Soit F la fonction définie sur $\left[1, +\infty\right[$ par $F(x) = \int_1^x e^{\sqrt{4t}}\,dt$.

Vérifier que $\mathscr{V} = \pi F(2)$.

2) Soit G la fonction définie sur $\left[1, +\infty\right[$ par $G(x) = \int_1^{\sqrt{4x}} te^t\,dt$.

a) Montrer que G est dérivable sur $\left[1, +\infty\right[$ et que $G'(x) = 2\,F'(x)$.

b) En déduire que pour tout réel x de $\left[1, +\infty\right[$, $2\,F(x) = G(x) - G(1)$.

3) a) Montrer que pour tout réel x de $\left[1, +\infty\right[$, $G(x) = \left(\sqrt{4x} - 1\right)e^{\sqrt{4x}}$.

b) Calculer alors $\mathscr{V}$.

figure (1)

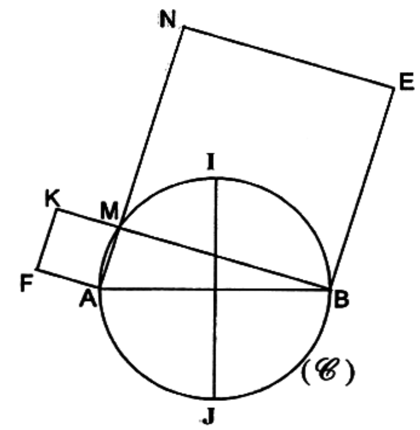
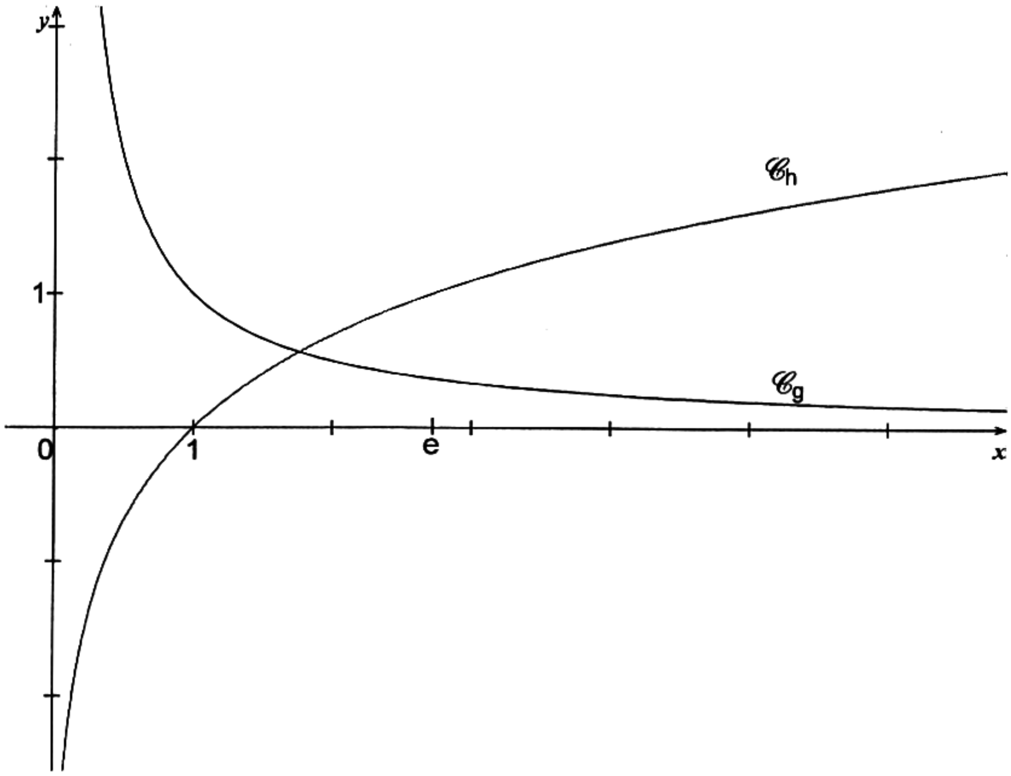


figure (2)



4/4

Correction de l'épreuve de mathématiques

Réalisé par : Hédi Souissi

Exercice 1 (QCM)

Question n°	V - F	Le pourquoi ?
1	**Faux**	-23 = (-5)x5 + 2 donc le couple (quotient , reste) = (5 , 2)
2	**Vrai**	Bezout ! on a (a⋀b) = (64⋀b) =(a⋀9) = (64⋀9) = 1……..
3	**Faux**	147 = 3x7x7 . donc si $147^{146} \equiv 2(mod\ 12)$,il existe un entier k tel que : $147^{146} = 12k + 2$ =2(6k+1) ce qui n'est pas possible car 2 ne divise ni 3 ni 7.
4	**Faux**	Il suffit de prendre x = 4 et on a : $x^2 \equiv 0(mod\ 8)$ mais $x \equiv 4(mod\ 8)$
5	**Vrai**	***Première façon :*** $\begin{cases} x \equiv 3(4) \\ x \equiv 4(5) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - 19 \equiv 0(4) \\ x - 19 \equiv 0(5) \end{cases}$ $et\ (4 \wedge 5) = 1$ Donc $x - 19 \equiv 0(4 \times 5)$ ***Deuxième façon :*** Si $\begin{cases} x \equiv 3(4) \\ x \equiv 4(5) \end{cases}$ alors il existent deux entiers k et p tels que $\begin{cases} x = 4k + 3 \\ x = 5p + 4 \end{cases}$ Donc $4k - 5p = 1 \Leftrightarrow 4k - 5p = 4(-1) - 5(-1) \Leftrightarrow 4(k + 1) = 5(p + 1)$ et on a (4⋀5) = 1, donc par le théorème de gauss, il existe un entier s tel que $p+1=4s$ et par suite $k+1=5s$ *c'est-à-dire* $(k, p) = (5s - 1, 4s - 1)$ ce qui donne $x = 4(5s - 1) + 3 = 20s - 1 = 20(s - 1) + 19 c'd'où: x \equiv 19(20)$
6	**Vrai**	p est un entier premier et $p \neq 2$ donc p est impair et par suite le reste de sa division euclidienne par 4 est 1 ou 3. • Si $p = 4k + 1\ alors\ p^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 4(4k^2 + 2k) + 1$ • Si $p = 4k + 3\ alors\ p^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 4(4k^2 + 6k + 2) + 1$ Et dans les deux cas on a $p^2 \equiv 1(mod\ 4)$

Exercice 2

1) Les deux triangles MBE et MAF sont isocèles et rectangles respectivement en B et A , donc on a : $\widehat{AMF} = \widehat{BME} = \frac{\pi}{2}$ donc $\widehat{EMF} = \widehat{BME} + \widehat{BMA} + \widehat{AMF} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \pi$

   D'où les points E , M et F sont alignés.

2) a) r_1 et r_2 sont deux déplacements de même angle $\frac{\pi}{2}$ donc r_1 o r_2 est un déplacement d'angle π , donc une rotation d'angle π et par la suite c'est une symétrie centrale.

   D'autre part AJBI est un carrée direct (quadrilatère qui a 4 angles droits et des diagonales perpendiculaires et isométriques) , donc on a $r_2(\mathrm{I}) = \mathrm{J}$ et $r_1(\mathrm{J}) = \mathrm{I}$, d'où $r_1\left(r_2(\mathrm{I})\right) = \mathrm{I}$

   Ainsi I est le centre de r_1 o r_2.

   b) on a BE = BM et $\left(\widehat{\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BM}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$; donc $r_2(E) = M$ et de même on a $r_1(M) = F$;

donc r_1 o $r_2(E) = r_1(M) = F$ et par la suite I est le milieu [EF] , ainsi la droite (EF) passe par un point fixe qui est le point I.

3) a) on AK = $\sqrt{2}$AM et $\left(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AK}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}(2\pi)$; donc $S(M) = K$

b) Construction de G : on a AG = $\sqrt{2}$AF et $\left(\widehat{\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AG}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}(2\pi)$ et le triangle AFG est rectangle en F.

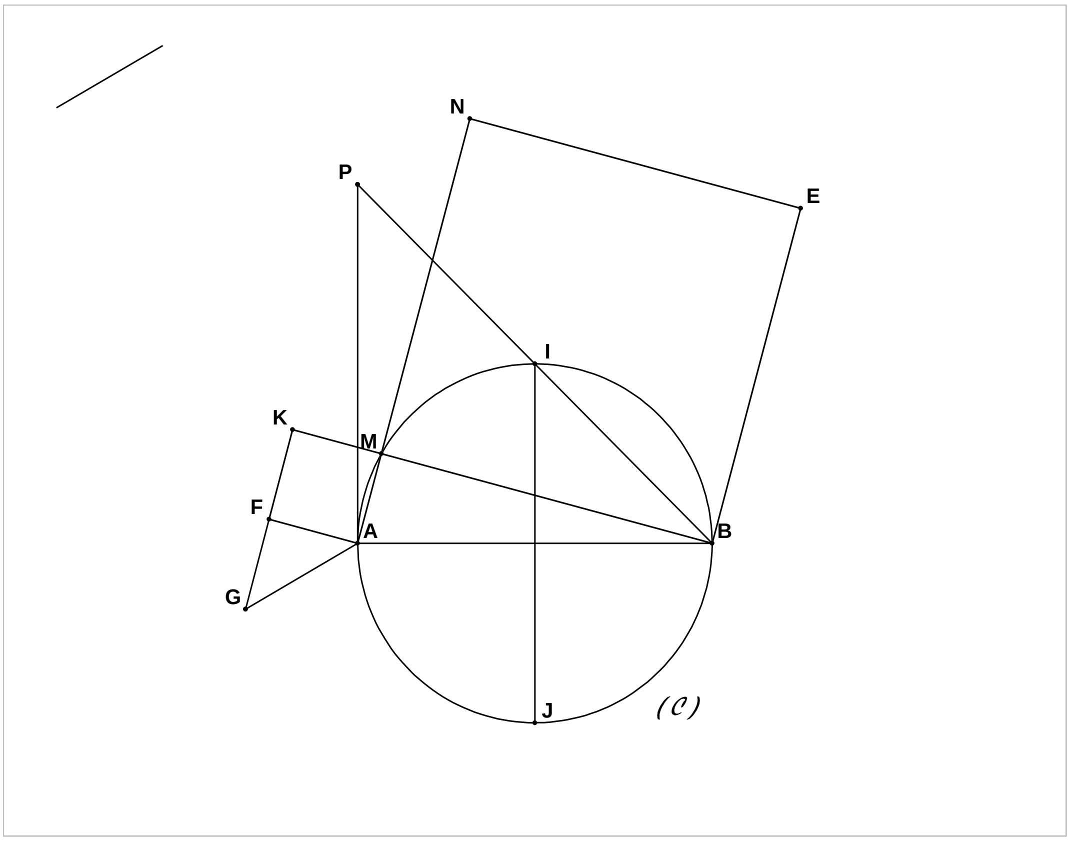
c) AK = $\sqrt{2}$MA ; AG = $\sqrt{2}$AF et AG = AF donc AK = AG .

D'autre part $\left(\widehat{\overrightarrow{AK};\overrightarrow{AG}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AK};\overrightarrow{AF}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AG}}\right) \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$ donc $r_1(K) = G$;

On a $\begin{cases} r_1(M) = F \\ r_1(K) = G \end{cases} \Longrightarrow$ KM = FG $\Longrightarrow$ KF = FG.

Ainsi on a KF = FG et $\widehat{KFG} = \widehat{KFA} + \widehat{AFG} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, donc F est le milieu de[KG] .

d) On a S(M) = K et S(F) = G donc S((MF)) = (KG) c'est à dire S((EF)) = (KF) ; et on sait que (EF) passe par le point I, donc son image par S passe par le point P = S(I).
I est fixe lorsque M varie donc P est aussi fixe lorsque M varie.



Exercice 3

1) Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, alors les affixes des points M , N et P sont réels et par la suite M, N et P sont sur l'axe des abscisses, donc sont alignés.

2) Si MNAP est un parallélogramme alors : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA}$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA} \Leftrightarrow Z_N - Z_M = Z_A - Z_P \Leftrightarrow \frac{3}{2}\alpha^2 - \alpha = -2 - \frac{8}{\alpha} \Leftrightarrow 3\alpha^3 - 2\alpha^2 = -4\alpha - 16 \Leftrightarrow$$

$3\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 16 = 0$ Donc α est solution de (E) .

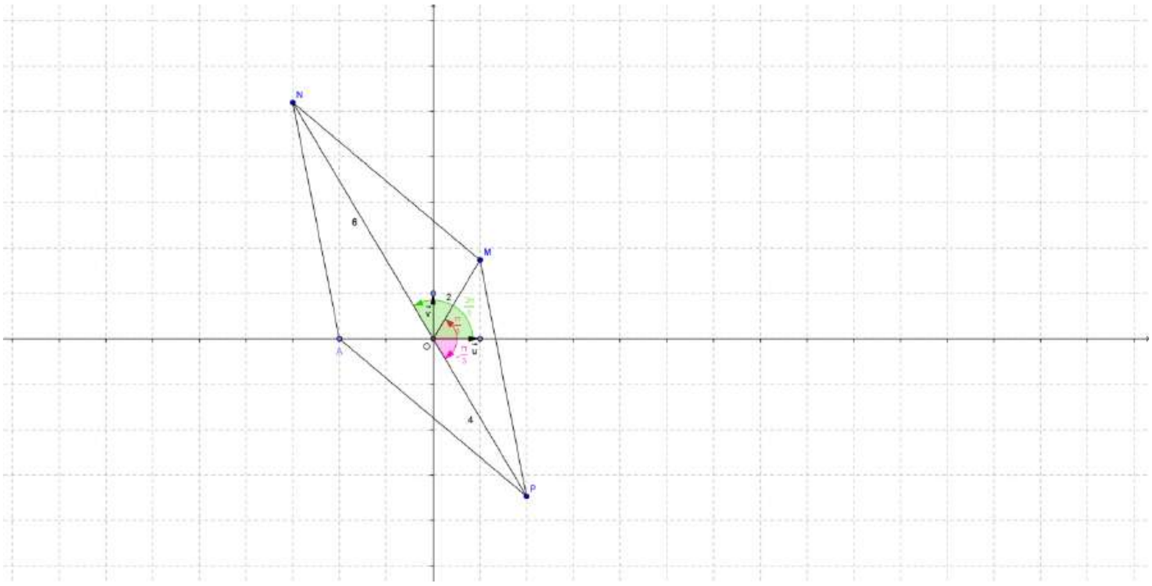
3)on prend $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$

a) $\alpha = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$; $\frac{8}{\alpha} = \frac{8}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$; $\frac{3}{2}\alpha^2 = \frac{3}{2}4e^{i\frac{2\pi}{3}} = 6e^{i\frac{2\pi}{3}}$

b) $\frac{3}{2}\alpha^2 = 6e^{i\frac{2\pi}{3}} = 6\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3 + 3i\sqrt{3}$ et $\frac{8}{\alpha} = 4e^{-i\frac{\pi}{3}} = 4\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 - i2\sqrt{3}$

et on a : $Z_N - Z_M = -3 + 3i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3} = -4 + 2i\sqrt{3}$ et $Z_A - Z_P = -4 + 2i\sqrt{3}$

donc $Z_N - Z_M = Z_A - Z_P$ et par la suite $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA}$ et MNAP est un parallélogramme.



4)a) Les coefficients de l'équation(E) sont tous réels donc si z est solution de (E) alors $\bar{z}$ l'est aussi.

Ainsi, si $3\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 16 = 0$ alors $\overline{3\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha + 16} = 0$

$3\overline{\alpha}^3 - 2\overline{\alpha}^2 + 4\overline{\alpha} + 16 = 0$ et par la suite $\overline{\alpha}$ est aussi solution de (E).

b) comme MNAP est un parallélogramme donc $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$ est solution de (E) et $\overline{\alpha} = 1 - i\sqrt{3}$ donc le premier membre de (E) s'écrit :

$$3(z - \alpha)(z - \overline{\alpha})(z - z_0) = 3z^3 - 3(2 + z_0)z^2 + 6(2 + z_0)z - 12z_0$$

Et par identification on obtient : $z_0 = -\frac{4}{3}$; qui est à rejeter car les 4point sont alignés et ne forment plus un parallélogramme.

Reste à vérifier que lorsque $\alpha = 1 - i\sqrt{3}$ est l'affixe de M alors MNAP est un parallélogramme.

En effet il suffit de vérifier que $Z_N - Z_M = Z_A - Z_P$ et par la suite $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA}$ et MNAP est un parallélogramme.

<u>Conclusion :</u>

Les points M pour lesquels MNAP est un parallélogramme, sont les points ayant pour affixes : $\alpha \in \{1 + i\sqrt{3}\,, 1 - i\sqrt{3}\}$.

Exercice 4

1)a)

$*\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, car $\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} lnx = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} x\,lnx = 0 \end{cases}$

$*\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (lnx - xlnx + x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{lnx}{x} - lnx + 1\right) = -\infty$, car $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} lnx = +\infty \end{cases}$

$*\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{lnx}{x} - lnx + 1\right) = -\infty$.

b) Pour tout $x \in]0, +\infty[\,, f'(x) = \frac{1}{x} - \left(1.\,lnx + x.\frac{1}{x}\right) + 1 = \frac{1}{x} - lnx.$

2) a) * sur $]0, \beta[$, la courbe de g est au dessus de celle de h , donc lnx $> \frac{1}{x}$

* sur $]\beta, +\infty[$, la courbe de g est au dessous de celle de h , donc lnx $< \frac{1}{x}$

x	0		β		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	

b)

x	0		β		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\beta)$	↘	$-\infty$

c)

$f(\beta) = ln\beta - \beta ln\beta + \beta = \frac{1}{\beta} - \beta \times \frac{1}{\beta} + \beta = \frac{1}{\beta} + \beta - 1 \quad ; \quad car\ \frac{1}{\beta} = ln\beta$ du fait que $f'(\beta) = 0$

3) a) Pour tout $x \in]0, +\infty[\,, f(x) - h(x) = x(1 - lnx)$ qui s'annule si $(lnx = 1 \Leftrightarrow x = e)$

Donc :

- sur $]0, e[$, la courbe de f est au dessus de celle de g.
- sur $]e, +\infty[$, la courbe de f est au dessous de celle de g.
- Le point (e , 1) est commun aux deux courbes .

b) Montrer que la courbe de f coupe l'axe des abscisses en deux points revient à montrer que l'équation f(x)=0 possède deux solutions.

- La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0, \beta]$ et $f(]0, \beta]) =]-\infty, f(\beta)]$;

$\beta > 1 \implies \frac{1}{\beta} + \beta - 1 > 0 \implies 0 \in]-\infty, f(\beta)]$, donc l'équation f(x) = 0 possède une solution $x_1 \in]0, \beta]$.

$$f(0{,}4) \approx -0{,}14\ et\ f(0{,}5) \approx 0{,}15 \implies 0{,}4 < x_1 < 0{,}5.$$

- La fonction f est continue et strictement croissante sur $[\beta, +\infty[$ et $f([\beta, +\infty[) =]-\infty, f(\beta)]$;

et $0 \in]-\infty, f(\beta)]$, donc l'équation f(x) = 0 possède une solution $x_2 \in [\beta, +\infty[$.

$$f(3{,}8) \approx 0{,}06\ \ et\ f(3{,}9) \approx -0{,}04 \implies 3{,}8 < x_2 < 3{,}9.$$

Donc la courbe de f coupe l'axe des abscisses aux points M$(x_1, 0)$ et N$(x_2, 0)$.

c) $A(\beta, 0)$et $B(0, \frac{1}{\beta})$ permettent de construire le point $(\beta, \frac{1}{\beta})$.

d) la courbe de f passe par les points M$(x_1, 0)$; N$(x_2, 0)etS\left(\beta, \frac{1}{\beta}\right)$; possède une tangente horizontale en S , une branche parabolique de direction celle de la droite des ordonnées et cette dernière comme asymptote.

4) a)

- si $0 < t < \beta$, on a $g(x) > h(x)$ pourtout $x \in [t, \beta]$ donc on a :

$$\mathcal{A}(t)=\int_t^{\beta}(g(x)-h(x))dx=\int_t^{\beta}\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)dx=[f(x)]_t^{\beta}=f(\beta)-f(t)$$

- si $t>\beta$, on a $g(x)<h(x)$ pourtout $x\in[\beta,t]$ donc on a :

$$\mathcal{A}(t)=\int_{\beta}^{t}(h(x)-g(x))dx=-\int_{\beta}^{t}\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)dx=[f(x)]_t^{\beta}=f(\beta)-f(t)$$

Conclusion : pourtout réel t ∈ $]0,+\infty[\setminus\{\beta\}$; on a : $\mathcal{A}(t)=f(\beta)-f(t)$.

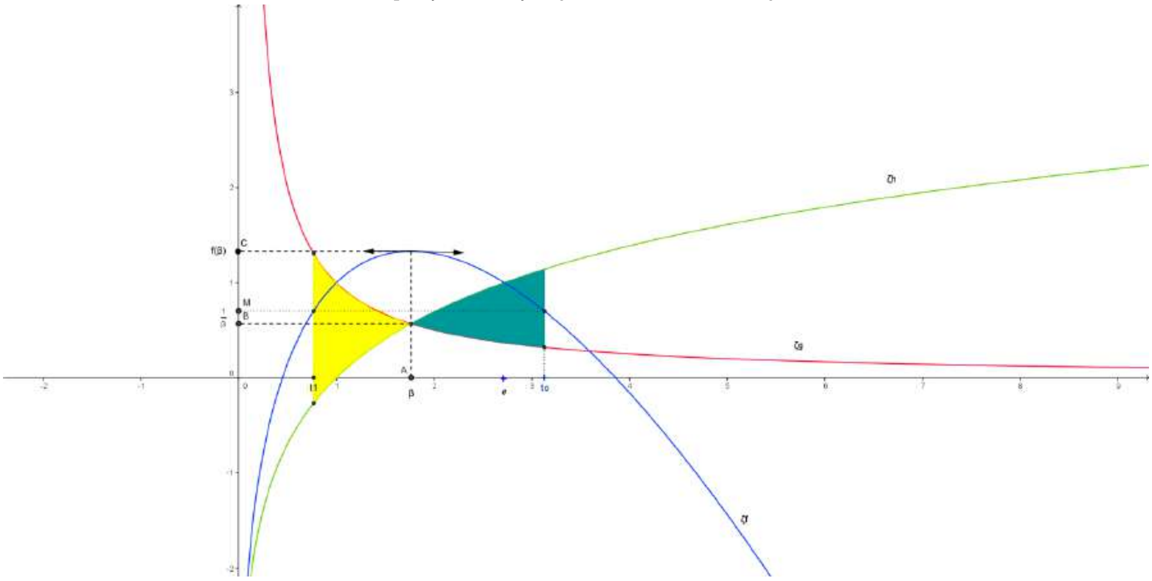
b) $t_0>\beta$.

c) $\mathcal{A}(t_1)=\mathcal{A}(t_0)\Leftrightarrow f(\beta)-f(t_1)=f(\beta)-f(t_0)\Leftrightarrow f(t_1)=f(t_0)$

$t_0>\beta\Longrightarrow f(t_0)\in\,]-\infty,f(\beta)[\,=f(]0,\beta[)$.

$\left.\begin{array}{r} f(t_0)\in f(]0,\beta[) \\ f \text{ est continue et srictement croissante sur }]0,\beta[\end{array}\right\}$ donc il existe un unique réel $t_1\in\,]0,\beta[$

tel que $f(t_1)=f(t_0)\Leftrightarrow\mathcal{A}(t_1)=\mathcal{A}(t_0)$.



Exercice 5

1) soit la fonction f définie par $f(x)=e^{\sqrt{x}}$. Par définition

$$\mathcal{V}=\pi\int_1^2 f^2(x)dx=\pi\int_1^2 e^{2\sqrt{x}}dx=\pi\int_1^2 e^{\sqrt{4x}}dx=\pi F(2).$$

2) a)on a : $\begin{cases} u: t\mapsto\sqrt{4t} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ donc sur}[1,+\infty[\\ \text{la fonction } v: t\longmapsto te^t \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ \text{et } u([1,+\infty[)\subset\mathbb{R} \end{cases}$

donc la fonction G définie par $G(x)=\int_1^{u(x)}v(t)dt$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et pour tout $x\in[1,+\infty[$

$G'(x)=u'(x)\times v(u(x))=\frac{4}{2\sqrt{4x}}\sqrt{4x}\times e^{\sqrt{4x}}=2e^{\sqrt{4x}}$.

D'autre part F est la primitive de la fonction $t\longmapsto e^{\sqrt{4t}}$ sur $[1,+\infty[$ qui s'annule en 1, donc elle est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $F'(x)=e^{\sqrt{4x}}$.

Ainsi on a : $G'(x)=2F'(x)$, pour tout $x\in[1,+\infty[$.

b) pour tout $x\in[1,+\infty[$, $\int_1^x G'(t)dt=2\int_1^x F'(t)dt\Longrightarrow G(x)-G(1)=2(F(x)-F(1))=2F(x)$.

3) a) pour tout $x\in[1,+\infty[$, on a $G(x)=\int_1^{\sqrt{4x}}te^t dt$

Si on pose $\begin{cases} u(t)=t \\ v'(t)=e^t \end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} u'(t)=1 \\ v(t)=e^t \end{cases}$, la formule d'intégration par parties donne :

$G(x) = \int_1^{\sqrt{4x}} te^t dt = [te^t]_1^{\sqrt{4x}} - \int_1^{\sqrt{4x}} 1.e^t dt = \sqrt{4x}e^{\sqrt{4x}} - e - e^{\sqrt{4x}} + e = e^{\sqrt{4x}}(\sqrt{4x} - 1).$

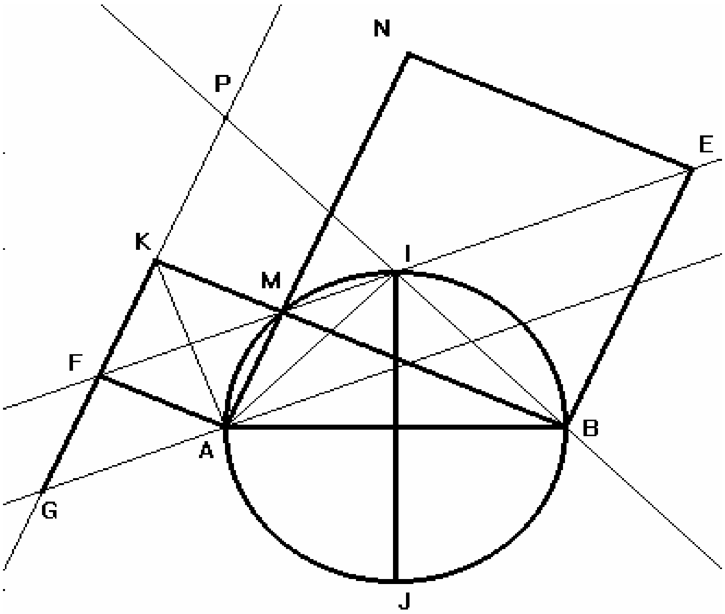
b) on a $G(x) - G(1) = 2F(x)$donc $\mathcal{V} = \pi F(2) = \frac{\pi}{2}\big(G(2) - G(1)\big) = \frac{\pi}{2}\Big(2\sqrt{2}e^{2\sqrt{2}} - e^2\Big)(uv).$

REPUBLIQUE TUNISIENNE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION	SESSION PRINCIPALE *JUIN 2010*	EXAMEN DU BACCALAUREAT MATHEMATIQUES **CORRIGE**

EXERCICE N° : 1

1) faux 2) vrai 3) faux 4) faux 5) vrai 6) vrai

EXERCICE N° : 2



1°) 1ère méthode :

$\left(\overrightarrow{MF},\overrightarrow{ME}\right)\equiv\left(\overrightarrow{MF},\overrightarrow{MA}\right)+\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{ME}\right)[2\pi]$

$\equiv\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}[2\pi]\equiv\pi[2\pi]$

Alors les points E, M et F sont alignés.

2ème méthode :

Soit f la similitude directe de centre M , d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

$\left.\begin{array}{l} f(K)=F \\ f(B)=E \\ M,K \text{ et } B \text{ sont alignés}\end{array}\right\}$ alors E, F et M sont alignés

2°)a) r_1or_2 est un déplacent d'angle $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$ alors r_1or_2 est une symétrie centrale.

r_1or_2(I) = r_1(J) = I, car AJBI est un carré direct.

Conclusion : r_1or_2 est une symétrie centrale de centre I.

b) r_1or_2(E) = r_1(M) = F.

r_1or_2(E) = F et r_1or_2 = S_I alors I est le milieu de [EF] donc, lorsque M varie , la droite (EF) passe par un point fixe qui est I.

3°) S la similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

a) $\left.\begin{array}{l} \frac{AK}{AM}=\sqrt{2} \\ \left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AK}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]\end{array}\right\}\Rightarrow S(M)=K$

b) $S(F)=G \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{AG}{AF}=\sqrt{2} \\ \left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AG}\right)\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow$ AFG est un triangle direct rectange et isocèle en F .

c) <u>1ère méthode :</u>

Soit O le centre du carré AMKF. On a : O = M*F, S(M) = K, S(O) = F et S(F) = G alors F = K*G.

<u>2ème méthode</u> : $\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AG}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AF}\right)+\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AG}\right)\equiv\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}[2\pi]\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ alors AKG est un triangle rectangle en A **(1)**

$FG^2=AF^2+AG^2-2AF.AG.\cos\dfrac{\pi}{4}$ = AF² + 2.AF² - 2.AF² = AF² d'où FG = FA = FK **(2)**

(1) et **(2)** impliquent que F est le milieu de [KG].

<u>3ème méthode</u> **:**

MKFA est un carré direct alors $r_{(F,\,\pi/2)}(A)=K$ et on a d'après b) $r_{(F,\,\pi/2)}(G)=A$

ainsi $K=r_{(F,\,\pi/2)}(A)=r_{(F,\,\pi/2)}[r_{(F,\,\pi/2)}(G)]=r_{(F,\,\pi)}(G)=S_F(G)$ donc F = G * K.

d) S(M) = K et S(F) = G alors S<(MF)> = (GK) or (MF) passe par le point fixe I alors (GK) passe par le point fixe P = S(I) et comme F est un point de (KG) alors (KF) passe par le point fixe P.

$S(I)=P \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{AP}{AI}=\sqrt{2} \\ \left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AP}\right)\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow$ AIP est un triangle direct rectange et isocèle en I

EXERCICE N° : 3

1°) On suppose que α est un réel non nul, montrons que M, N et P sont alignés.

Les affixes des points M, N et P sont des réels alors ces trois points sont sur l'axes des réels alors ils sont alignés.

2°) Si MNAP est un parallélogramme alors $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{PA}$.

• $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{PA}$ sign $z_N-z_M=z_N-z_M$ sign $\dfrac{3}{2}\alpha^2-\alpha=-2-\dfrac{8}{\alpha}\Rightarrow 3\alpha^3-2\alpha^2=-4\alpha-16\Leftrightarrow 3\alpha^3-2\alpha^2+4\alpha+16=0$

Conclusion : Si MNAP est un parallélogramme alors α est une solution de l'équation (E).

3°)a) $\alpha=2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $\dfrac{3}{2}\alpha^2=6e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\dfrac{8}{\alpha}=\dfrac{8}{2e^{i\frac{\pi}{3}}}=4e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

b) $\dfrac{3}{2}\alpha^2=\dfrac{3}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)^2=-3+3i\sqrt{3}$, $\dfrac{8}{\alpha}=\dfrac{8}{1+i\sqrt{3}}=\dfrac{8\left(1-i\sqrt{3}\right)}{4}=2-2i\sqrt{3}$.

$\left.\begin{array}{l} z_{\overrightarrow{MN}}=-3+3i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}=-4+2i\sqrt{3} \\ z_{\overrightarrow{PA}}=-2-2+2i\sqrt{3}=-4+2i\sqrt{3} \end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{PA}$

$\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right)\neq 0$ alors les points A, M et N ne sont pas alignés

donc MNAP est un parallélogramme.

4°)a) Si α est une solution de (E) alors 3α³ - 2α² + 4α + 16 = 0 alors $\overline{3\alpha^3-2\alpha^2+4\alpha+16}=0$

alors $3\left(\overline{\alpha}\right)^3-2\left(\overline{\alpha}\right)^2+4\overline{\alpha}+16=0$ alors $\overline{\alpha}$ est une solution de (E).

b)

- Si MNAP est un parallélogramme alors α et $\overline{\alpha}$ sont des solutions de (E).
- Pour $\alpha = 1+i\sqrt{3}$, MNAP est un parallélogramme alors $\alpha = 1+i\sqrt{3}$ et $\overline{\alpha} = 1-i\sqrt{3}$ sont des solutions de (E).

Donc pour tout nombre complexe z, $3z^3 - 2z^2 + 4z + 16 = 3(z-\alpha)(z-\overline{\alpha})(z-\beta), \alpha = 1+i\sqrt{3}$.

Par identification, - 12β = 16 alors $\beta = \frac{-4}{3}$.

Les solutions de (E) sont : $1+i\sqrt{3}$, $1-i\sqrt{3}$ et $\frac{-4}{3}$.

Pour $\alpha = 1-i\sqrt{3}$, $\left.\begin{array}{l} z_{\overrightarrow{MN}} = -3-3i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3} = -4-2i\sqrt{3} \\ z_{\overrightarrow{PA}} = -2-2-2i\sqrt{3} = -4-2i\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA}$ alors MNAP est un parallélogramme.

Le cas de $\frac{-4}{3}$ est à rejeter car α est non réel.

Conclusion : Les affixes des points M pour lesquelles MNAP est un parallélogramme sont $1+i\sqrt{3}$ et $1-i\sqrt{3}$.

EXERCICE N° : 4

1°) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x - x\ln x + x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - \ln x + 1\right) = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x} - \ln x + 1\right) = -\infty$

b) f est dérivable sur]0, +∞[et $f'(x) = \frac{1}{x} - \ln x - 1 + 1 = \frac{1}{x} - \ln x$

2°)a) On a : ∀x>0, f'(x) = g(x) – h(x).

x	0	β	+∞
position	C_h au dessous de Cg		C_h au dessus de Cg
Signe de f'(x) = g(x)-h(x)	+	0	-

b) f est croissante sur]0 , β] et décroissante sur [β, +∞[

c) On a : Ch et Cg se coupent en un point d'abscisse β alors β>0 et h(β) = g(β) d'où $\ln\beta = \frac{1}{\beta}$.

$$f(\beta)=\ln\beta-\beta\ln\beta+\beta=\frac{1}{\beta}-1+\beta=\frac{1}{\beta}+\beta-1$$

3°)a) x >0, f(x) – h(x) = x(1 – lnx). Le signe de f(x) – h(x) est celui de 1 – lnx.
Sur l'intervalle]0 , e[, Cf est au dessus de Ch.

Sur l'intervalle]e, +∞[Cf est au dessous de Ch.

Les deux courbes se coupent au point d'abscisse e.

b)

x	0		β		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	$-\infty$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est continue et strc croissante sur }]0,\beta] \\ f(]0,\beta])=]-\infty,f(\beta)] \\ 0\in]-\infty,f(\beta)],\ (f(\beta)>0) \end{array}\right\} \text{ alors Cf coupe (xx') en un seul point d'abscisse } x_1\in]0,\beta]$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est continue et strc décroissante sur }]\beta,+\infty[\\ f(]\beta,+\infty[)=]-\infty,f(\beta)[\\ 0\in]-\infty,f(\beta)[,\ (f(\beta)>0) \end{array}\right\} \text{ alors } \left\{\begin{array}{l} \text{Cf coupe (xx') en un seul point d'abscisse} \\ x_2\in]\beta,+\infty[\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est continue sur }]0,\beta] \\ f(0.4)xf(0.5)=((0.6)\ln(0.4)+0.4)((0.5)\ln(0.5)+0.5)\approx-0.023<0 \end{array}\right\} \text{ alors } x_1\in]0.4,0.5[$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ est continue sur }]\beta,+\infty[\\ f(3.8)xf(3.9)=((-2.8)\ln(3.8)+3.8)((-2.9)\ln(3.9)+3.9)\approx-0.003<0 \end{array}\right\} \text{ alors } x_2\in]3.8,3.9[$$

Conclusion : La courbe Cf coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives x_1 et x_2 telles que $0.4 < x_1 < 0.5$ et $3.8 < x_2 < 3.9$.

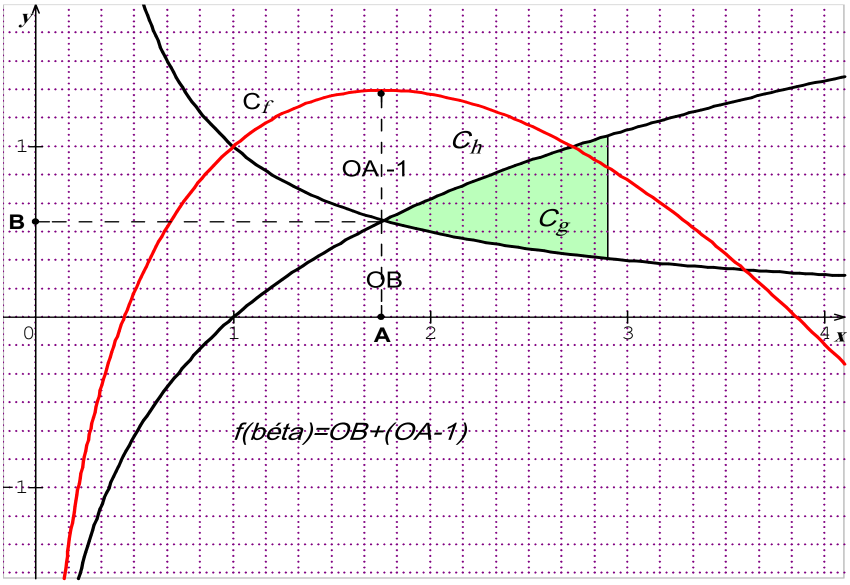
c) Voir figure
Soit les points I(1,0), C(0, f(β)) et D(β, f(β)) .

On a $f(\beta)=\frac{1}{\beta}+\beta-1$ alors f(β) -1/β = β – 1 donc OC – OB = OA – OI > 0 donc BC = AI
alors C est le point de [OB)\ [OB] et tel que BC = AI
donc le point D est le point du plan admettant les points A et C comme projetés orthogonaux sur les axes.

d) Cf admet une tangente horizontale au point d'abscisse β.
Cf admet une branche infinie parabolique de direction (yy') au V(+∞).
x = 0 est une asymptote.

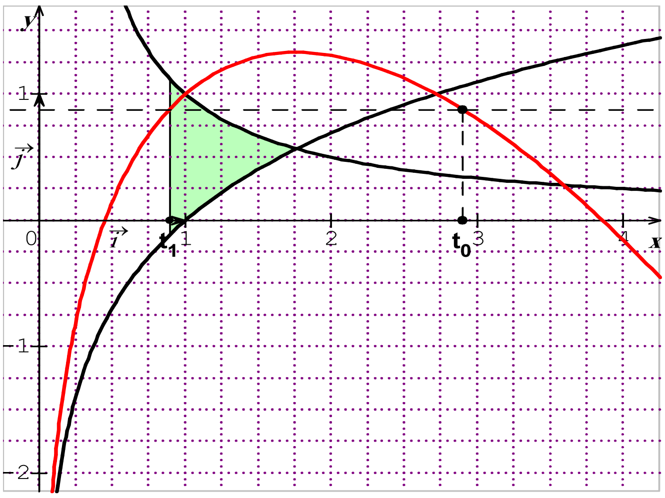
4°)a) $$A(t)=\left\{\begin{array}{l} \int_t^{\beta} g(x)-h(x)dx \quad \text{si } 0<t<\beta \\ \int_{\beta}^{t} h(x)-g(x)dx \quad \text{si } t>\beta \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} \int_t^{\beta} f'(x)dx \quad \text{si } 0<t<\beta \\ \int_{\beta}^{t} -f'(x)dx \quad \text{si } t>\beta \end{array}\right. = f(\beta)-f(t)$$

b)



c) $t_1 \in]0, \beta[$, $t_0 \in]\beta, +\infty[$, $A(t_1) = A(t_0)$ sign $f(t_1) = f(t_0)$.

$\left.\begin{array}{l} f(t_0) \in]-\infty, f(\beta)[\\ f \text{ bijection de }]0,\beta[\text{ dans }]-\infty, f(\beta)[\end{array}\right\}$ alors il existe un unique réel $t_1 \in]0,\beta[$ tel que $A(t_1) = A(t_0)$



EXERCICE N° : 5

1°) La fonction $t \to e^{\sqrt{t}}$ est continue et positive sur [1 , 2] alors $V = \int_1^2 \pi\left(e^{\sqrt{t}}\right)^2 dt.uv = \pi\int_1^2 e^{\sqrt{4t}}dt = \pi F(2)$

2°)a) La fonction : $t \mapsto e^{\sqrt{4t}}$ est continue sur $[0 , +\infty[$ et $1 \in [0 , +\infty[$ alors F est dérivable sur $[1, +\infty[$

et $F'(x) = e^{\sqrt{4x}}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{la fonction: } x \mapsto \sqrt{4x} \text{ est dérivable sur } [1,+\infty[\\ \text{la fonction: } t \mapsto te^t \text{ est dérivable sur IR} \\ \forall x \in [1,+\infty[,\ \sqrt{4x} \in \text{IR et } 1 \in \text{IR}\end{array}\right\} \text{alors } \left\{\begin{array}{l}\text{G est dérivable sur } [1,+\infty[\text{ et} \\ \forall x \geq 1,\ G'(x) = \left(\sqrt{4x}\right)'\left(\sqrt{4x}\right)e^{\sqrt{4x}} \\ \qquad = 2e^{\sqrt{4x}} = 2F'(x)\end{array}\right.$$

b) $\forall x \geq 1,\ 2F(x) = 2F(x) - 2F(1) = \int_1^x 2F'(t)dt = \int_1^x G'(t)dt = G(x) - G(1)$.

3°)a) $\forall x \geq 1,\ G(x) = \int_1^{\sqrt{4x}} te^t dt$. Intégration par partie : $\left.\begin{array}{l} u(t) = t \\ v'(t) = e^t \end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u'(t) = 1 \\ v(t) = e^t \end{array}\right.$

$\forall x \geq 1,\ G(x) = \int_1^{\sqrt{4x}} te^t dt = \left[te^t\right]_1^{\sqrt{4x}} - \int_1^{\sqrt{4x}} e^t dt = \sqrt{4x}e^{\sqrt{4x}} - e - e^{\sqrt{4x}} + e = \left(\sqrt{4x} - 1\right)e^{\sqrt{4x}}$.

b) $V = \pi F(2) = \pi \dfrac{G(2) - G(1)}{2} = \pi \dfrac{\left(\sqrt{8} - 1\right)e^{\sqrt{8}} - e^2}{2}$

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT - SESSION DE JUIN 2010

SESSION DE CONTRÔLE

SECTION : MATHEMATIQUES

EPREUVE : MATHEMATIQUES **DUREE : 4h** **COEFFICIENT : 4**

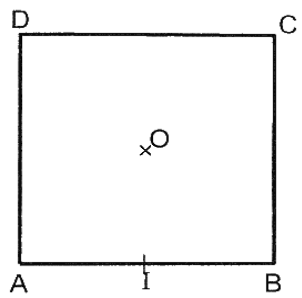
Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4

Exercice 1(4 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

ABCD est un carré de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et I le milieu de [AB].

Soit $S_{(BC)}$, $S_{(BD)}$ et $S_{(OI)}$ les symétries d'axes respectifs (BC), (BD) et (OI) et $t_{\overrightarrow{BD}}$; $t_{\overrightarrow{CD}}$ et $t_{\overrightarrow{BC}}$ les translations de vecteurs respectifs $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BC}$.



1) L'isométrie $S_{(BC)} \circ S_{(BD)} \circ t_{\overrightarrow{BD}}$ est

a) une rotation
b) une translation
c) une symétrie glissante.

2) $t_{\overrightarrow{BD}} \circ S_{(BC)}$ est égale à

a) $t_{\overrightarrow{CD}} \circ S_{(OI)}$
b) $t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(OI)}$
c) $S_{(BC)}$.

3) Soit r_1 la rotation de centre O d'angle $(-\frac{\pi}{2})$ et r_2 la rotation de centre C d'angle $(\frac{\pi}{2})$.

$r_1 \circ r_2$ est

a) la symétrie centrale de centre A
b) la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$
c) la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

4) Soit S la similitude directe de centre B qui transforme D en A. Alors
a) S(A) = O
b) S(I) = O
c) S(C) = O.

Exercice 2 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0\,,\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{e^x(x^2 - 4x + 6)}{x^4}$.

   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

   c) Dresser le tableau de variation de f.

2) Montrer que la tangente Δ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 a pour équation $y = \dfrac{e^2}{8}(x-2)$.

3) On se propose d'étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de sa tangente Δ.

   Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{e^x}{x^3}$. On donne ci-dessous le tableau de variation de g.

x	0		2		3		$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{e^2}{8}$	$\searrow$	$\frac{e^3}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

   a) Montrer que l'équation $g(x) = \dfrac{e^2}{8}$ admet dans $]3\,,\,+\infty[$ une solution unique α telle que $4{,}2 < \alpha < 4{,}3$.

   b) Déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et Δ.

4) Justifier l'existence sur $]0,+\infty[$ d'une primitive F de f telle que $F(1) = e$.

5) Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_F$ de la fonction F, la droite Δ et le rectangle ABCD tel que $A(1, e)$; $B(0, e)$; $C(0, F(2))$ et $D(1, F(2))$.

   a) Etudier les branches infinies de $\mathscr{C}_f$.

   b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans l'annexe ci-jointe.

6) Soit $t \in [1\,,\,2[$. On désigne par $S(t)$ la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe $(O, \vec{i})$ et les droites d'équations $x = t$ et $x = 2$. On désigne par $\mathscr{A}(t)$ l'aire de $S(t)$.

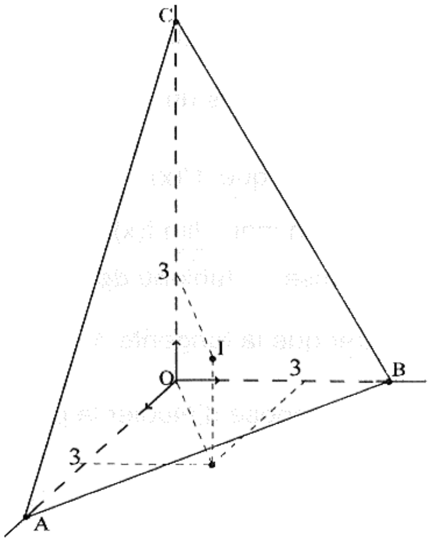
   a) Exprimer $\mathscr{A}(t)$ en fonction de $F(t)$.

   b) Hachurer $S(1)$ et justifier qu'elle a la même aire que le rectangle ABCD.

   c) Montrer qu'il existe un unique $t_0 \in [1\,,\,2[$ tel que $\mathscr{A}(t_0) = \dfrac{1}{2}\mathscr{A}(1)$.

   d) Construire le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse t_0.

Exercice 3 (5 points)



Soit $(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ un repère orthonormé direct de l'espace.

Dans la figure ci-contre OABC est un tétraèdre tel que $\overrightarrow{OA} = 5\vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = 5\vec{v}$, $\overrightarrow{OC} = 10\vec{w}$ et I est le point de coordonnées (3,3,3).

1) Vérifier que le plan (ABC) a pour équation $2x + 2y + z - 10 = 0$.

2) Soit S la sphère de centre I et de rayon 3.

   a) Quelle est la position relative de S et du plan (ABC) ?

   b) Montrer que S est tangente aux plans (OAB) , (OAC) et (OBC).

3) Soit k un réel non nul et h l'homothétie de centre O et de rapport k.

   On désigne par S' , la sphère image de S par h.

   a) Montrer que S' est tangente aux plans (OAB) , (OAC) et (OBC).

   b) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles S' est tangente au plan (ABC).

4) Déterminer le centre et le rayon de la sphère tangente intérieurement aux quatre faces du tétraèdre OABC.

Exercice 4 (5 points)

On pose $a = 7^{2009} + 7^{2010} + 7^{2011}$.

1) Soit n un entier naturel. Discuter suivant les valeurs de n, le reste de 7^n modulo 100.

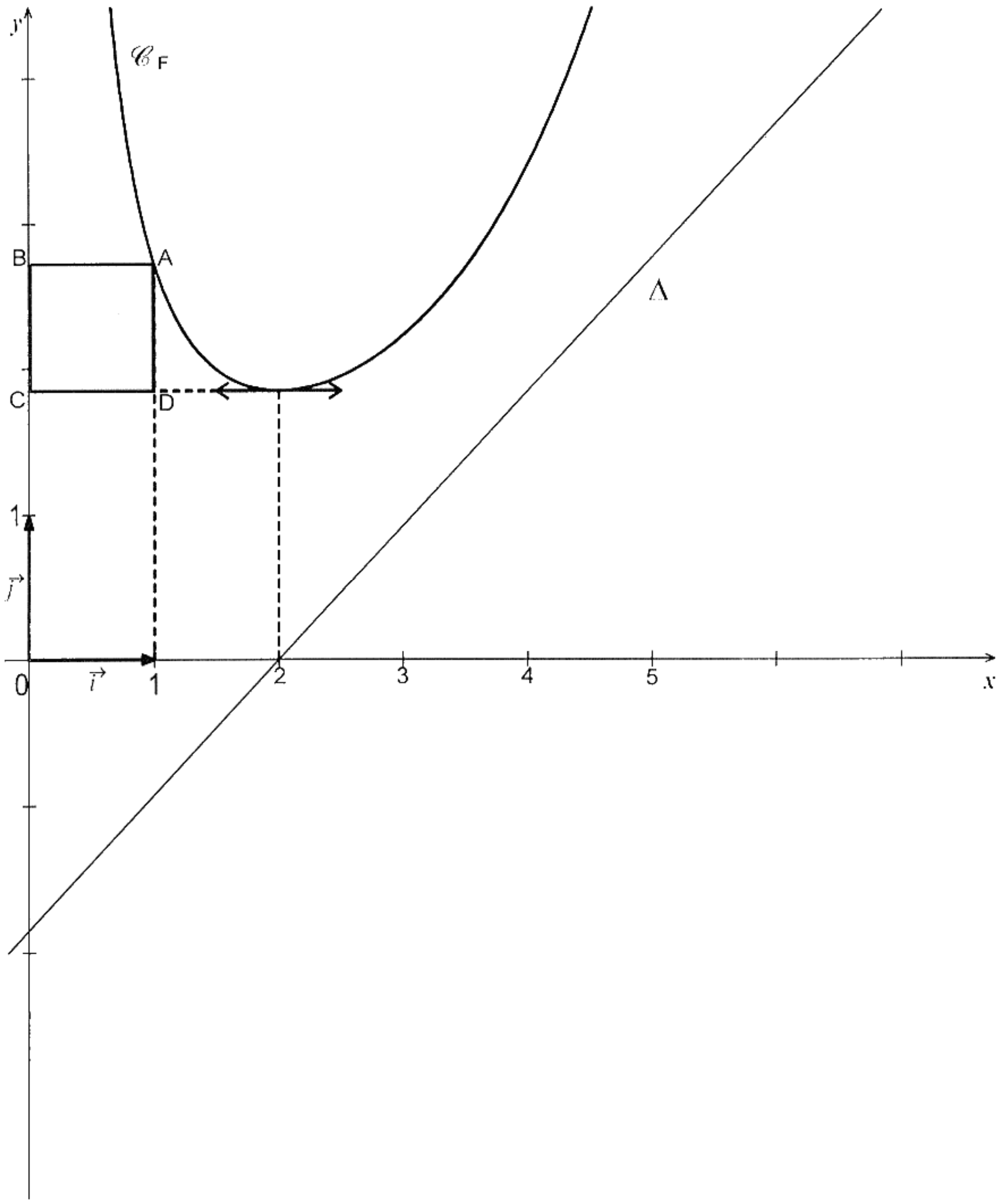
2) En déduire qu'il existe un entier naturel k tel que $a = 100k - 1$.

3) a) En utilisant la formule du binôme, montrer que $a^{100} \equiv 1 \pmod{100^2}$.

   b) Déterminer les quatre derniers chiffres de a^{100}.

3/4

ANNEXE A RENDRE AVEC LA FEUILLE DE COPIE



4/4

Corrigé de l'épreuve de mathématiques - section maths – session de contrôle | **Bac-2010**

Exercice 1 :

1. a ; 2.b ; 3. b; 4. c ;

Exercice 2 :

Soit f(x) = $\dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$, où $x > 0$.

1. a) Pour tout $x > 0$,

$$f'(x)=\frac{\left[e^x+(x-2)e^x\right].x^3-3x^2(x-2)e^x}{x^6}=\frac{e^x(x-1)x-(3x-6)e^x}{x^4}=\frac{e^x\left(x^2-4x+6\right)}{x^4}.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)\dfrac{e^x}{x^3}=+\infty$.

c) Pour tout $x > 0$, $x^2-4x+6=(x-2)^2+2>0$ donc $f'(x)>0$.

D'où le tableau de variation de f :

x	0	$+\infty$
f '(x)	‖ +	
f(x)	‖ $-\infty$ ↗	$+\infty$

2. On a : f(2) = 0 et $f'(2)=\dfrac{2e^2}{16}=\dfrac{e^2}{8}$ la tangente (Δ) à ($\mathscr{C}_f$) la courbe représentative de f a pour équation $y=\dfrac{e^2}{8}(x-2)$.

3. a) On a : g est continue et strictement croissante sur $[3,+\infty[$, $g([3,+\infty[)=\left[\dfrac{e^3}{27},+\infty\right[$ et $\dfrac{e^2}{8}\in\left[\dfrac{e^3}{27},+\infty\right[$ donc l'équation f(x) $=\dfrac{e^2}{8}$ admet une unique solution α dans $]3,+\infty[$.

$f(4,2)\approx 0,9$, $f(4,3)\approx 0,9269$ et $\dfrac{e^2}{8}\approx 0,923$

D'où $f(4,2)-\frac{e^2}{8}\approx -0,023$ et $f(4,3)-\frac{e^2}{8}\approx 0,0039$ donc $4,2<\alpha<4,3$.

b) Pour tout x > 0, $f(x)-\frac{e^2}{8}(x-2)=(x-2)\left(\frac{e^x}{x^3}-\frac{e^2}{8}\right)=(x-2)\left[g(x)-g(2)\right]$.

Or $g(x)=\frac{e^2}{8}\Leftrightarrow x=2$ ou $x=\alpha$.

Comme g est strictement décroissante sur $]0,3]$ alors :

- $0<x<2 \Rightarrow g(x)>g(2)\Rightarrow g(x)-g(2)>0$
- $2<x\le 3 \Rightarrow g(2)>g(x)\Rightarrow g(x)-g(2)<0$

D'autre part , g est strictement croissante sur $[3,+\infty[$, donc

- $3\le x<\alpha \Rightarrow g(x)<g(\alpha)\Rightarrow g(x)-g(2)<0$
- $2<x\ x>\alpha \Rightarrow g(x)>g(\alpha)\Rightarrow g(x)-g(2)>0$

D'où le tableau de signe de g(x) :

x	0		2		α		$+\infty$
g(x)- g(2)	||	+	0	-	0	+	

IL en résulte :

x	0		2		α		$+\infty$
g(x)- g(2)	||	+	0	-	0	+	
x - 2	||	-	0	+		+	
Position de ($\mathscr{C}_f$) par rapport à (Δ)	||	au dessous	0	au dessous	0	au dessus	

($\mathscr{C}_f$) coupe (Δ) aux points d'abscisse 2 et α .

4. La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ et 1 > 0 donc f admet sur $]0,+\infty[$ une unique primitive F telle que F(1) = e.

5. a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ donc l'axe des ordonnées est asymptote à ($\mathscr{C}_f$).

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-2)\dfrac{e^x}{x^4} = +\infty$ donc ($\mathscr{C}_f$) admet une branche parabolique de direction $\left(O, \vec{j}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

b) Voir figure.

6. a)La fonction f est continue et négative sur l'intervalle [t , 2] pour tout t $\in [1, 2[$ donc l'aire de S(t) est

$\mathscr{A}$(t) = $-\int_t^2 f(x)dx = -[F(x)]_t^2 = F(t) - F(2).$

b) L'aire de S(1) est $\mathscr{A}$(1) = $e - F(2)$.

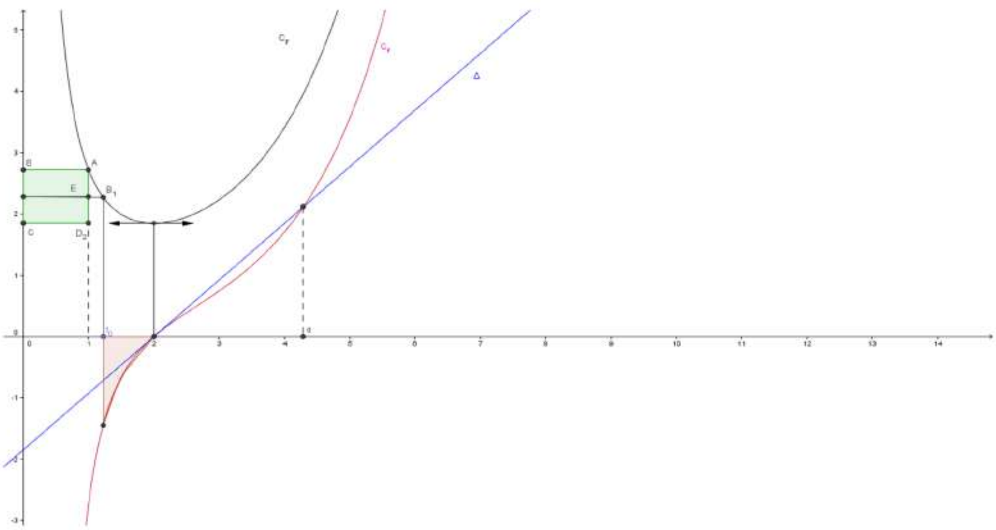
Or l'aire du rectangle ABCD est : AB. BC = 1.$[e - F(2)] = e - F(2)$ donc $\mathscr{A}$(1) = aire(ABCD).

c) $\mathscr{A}$(t) = $\dfrac{1}{2}$ $\mathscr{A}$(1) $\Leftrightarrow F(2) - F(t) = \dfrac{1}{2}[F(2) - e] \Leftrightarrow F(t) = \dfrac{1}{2}[F(2) + e]$.

F est continue et strictement décroissante sur l'intervalle [1, 2[, F([1, 2[) =]F(2) , e]

et $\dfrac{1}{2}[F(2)+e] \in]F(2), e]$ donc l'équation $\mathscr{A}$(t) = $\dfrac{1}{2}$ $\mathscr{A}$(1) admet une unique solution t_0 dans [1,2[.

d) Soit I le milieu du segment [BC] , l'ordonnée de I est $F(t_0)$. Soit J le point d'abscisse 2 de la courbe ($\mathscr{C}_F$) , la droite (IJ) coupe l'arc $[AJ]$ de ($\mathscr{C}_F$) en un seul point K d'abscisse t_0 .



Exercice 3:

1. On a : A(5, 0, 0) , B(0, 5, 0) , C(0, 0, 10) . Soit le plan (P) : 2x + 2y + z -10 = 0.

   10 + 0 + 0 - 10 = 0 donc $A \in (P)$; 0 + 10 + 0 - 10 = 0 donc $B \in (P)$;

   0 + 0 + 10 - 10 = 0 donc $C \in (P)$.

   Ainsi P= (ABC) et par suite (ABC) : 2x + 2y + z -10 = 0.

2. Soit (S) la sphère de centre I(3, 3, 3) et de rayon 3.

   a) La distance du point I au plan (ABC) est $d(I,(ABC)) = \frac{|6+6+3-10|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{5}{3} < 3$ donc (S) et (ABC) sont sécant suivant un cercle.

   b) Une équation du plan (OAB) est z = 0 donc $d(I,(OAB)) = \frac{|3|}{\sqrt{1}} = 3$.

   Une équation du plan (OAC) est y = 0 donc $d(I,(OAC)) = \frac{|3|}{\sqrt{1}} = 3$.

   Une équation du plan (OBC) est x = 0 donc $d(I,(OAB)) = \frac{|3|}{\sqrt{1}} = 3$.

   Donc (S) et tangente aux plans (OAB) , (OAC) et (OBC).

3. a) (S) et tangente aux plans (OAB) , (OAC) et (OBC) donc S' = h(S) est tangente aux plans h((OAB)) = (OAB) , h((OAC)) = (OAC) et h((OBC))= (OBC).

   b) Le centre de (S') est I' = h(I) donc I'(3k, 3k, 3k).

   $$d(I',(ABC)) = \frac{|6k+6k+3k-10|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|15k-10|}{3} .$$

Pour que (S') soit tangente au plan (ABC) , il faut et il suffit que

$$d(I',(ABC)) = 3|k| \Leftrightarrow \frac{|15k-10|}{3} = 3|k| \Leftrightarrow |15k-10| = 9|k| \Leftrightarrow 15k-10 = 9k \text{ ou } 15k-10 = -9k$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{5}{3} \text{ ou } k = \frac{5}{12}.$$

Corrigé de l'épreuve de mathématiques - section maths – session de contrôle | **Bac-2010**

4. Lorsque $k=\frac{5}{3}$, l'image du point I par h est $I''(5,5,5)$; I'' est à l'extérieur du tétraèdre OABC.

 Pour que la sphère (S') soit tangente intérieurement aux quatre faces du tétraèdre OABC , il faut que $k=\frac{1}{15}$. Donc le centre de (S') est $I'\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$ et son rayon est $3\times\left|\frac{1}{15}\right|=\frac{1}{5}$.

Exercice 4

1. Soit n un entier .

 On a : $7\equiv 7\,(\mathrm{mod}\,100)$, $7^2\equiv 49\,(\mathrm{mod}\,100)$, $7^3\equiv 43\,(\mathrm{mod}\,100)$ et $7^4\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,100)$

 Il en résulte : Si n = 4p , $p\in\mathbb{N}$, alors $7^n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,100)$

 Si n = 4p + 1 , $p\in\mathbb{N}$, alors $7^n\equiv 7\,(\mathrm{mod}\,100)$

 Si n = 4p + 2 , $p\in\mathbb{N}$, alors $7^n\equiv 49\,(\mathrm{mod}\,100)$

 Si n = 4p + 3 , $p\in\mathbb{N}$, alors $7^n\equiv 43\,(\mathrm{mod}\,100)$

2. On a d'une part: $a=7^{2009}+7^{2010}+7^{2011}$.

 D'autre part : 2009 = 4 x 502 + 1 donc $7^{2009}\equiv 7^{4\times502+1}\,(\mathrm{mod}\,100)\Leftrightarrow 7^{2009}\equiv 7\,(\mathrm{mod}\,100)$

 2010 = 4 x 502 + 2 donc $7^{2010}\equiv 7^{4\times502+2}\,(\mathrm{mod}\,100)\Leftrightarrow 7^{2010}\equiv 49\,(\mathrm{mod}\,100)$

 2011 = 4 x 502 + 3 donc $7^{2011}\equiv 7^{4\times502+3}\,(\mathrm{mod}\,100)\Leftrightarrow 7^{2011}\equiv 43\,(\mathrm{mod}\,100)$

 D'où $7^{2009}+7^{2010}+7^{2011}\equiv 99\,(\mathrm{mod}\,100)\Leftrightarrow a\equiv -1\,(\mathrm{mod}\,100)$.

 Ainsi , il existe un entier naturel k tel que a = 100k – 1.

3. a) $a^{100}=(100k-1)^{100}=\sum_{i=0}^{100}C_{100}^{i}(100k)^{100-i}(-1)^{i}$

 $=(100k)^{100}-100\times(100k)^{99}+C_{100}^{2}(100k)^{98}-C_{100}^{3}(100k)^{97}+.....+C_{100}^{98}(100k)^{2}-100\times100k+1$

 $=100^2\left[k^2(100k)^{98}-k(100k)^{98}+k^2C_{100}^{2}(100k)^{97}-...+k^2-k\right]+1$

 Par suite $a^{100}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,100^2)$

 b) On sait que $a^{100}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,100^2)$ donc $a^{100}\equiv 100^2+1\,(\mathrm{mod}\,100^2)$ d'où les quatre derniers chiffres de a^{100} sont 0001.

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2011

SESSION PRINCIPALE

SECTION : MATHEMATIQUES
EPREUVE : MATHEMATIQUES **DUREE : 4 heures** **COEFFICIENT : 4**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.
La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3 points)

Dans ce qui suit, x et y désignent des entiers.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

a) $x^3 \equiv x \pmod 2$.

b) Si $x \equiv 2 \pmod{14}$ alors $x \equiv 1 \pmod 7$.

c) Si $4x \equiv 10y \pmod 5$ alors $x \equiv 0 \pmod 5$.

d) Si $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod 5 \\ y \equiv 5 \pmod 8 \end{cases}$ alors $8x - 5y = 7$.

Exercice 2 (6 points)

I - Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x}$ et (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer une équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse 0 .

2) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $1 - x \leq e^{-x} \leq 1$.

b) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x} \leq x$.

II - On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer la limite de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que le point $I\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{e^2}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe ($\mathscr{C}$).

b) Donner une équation de la tangente T à la courbe ($\mathscr{C}$) au point I.

3) Dans la **figure** 1 de l'annexe ci-jointe, on a représenté la courbe (Γ) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Construire I.

b) Construire la tangente T.

c) Tracer la courbe ($\mathscr{C}$).

4) Soit A_k l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite d'équation $y = 1$ et les droites d'équations $x = k$ et $x = k + 1$ où k est un entier naturel non nul.

a) En utilisant I 2) b) montrer que $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] \leq A_k \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

b) Calculer $\lim_{k \to +\infty} A_k$.

5) Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$.

a) Interpréter graphiquement S_n.

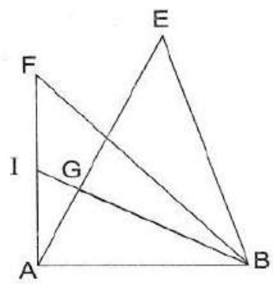
b) Montrer que $\ln(n+1) - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] \leq S_n \leq \ln(n+1)$.

c) En déduire les limites de S_n et de $\frac{S_n}{\ln(n)}$, quand n tend vers l'infini.

Exercice 3 (5 points)

Dans la figure ci-contre, ABF est un triangle rectangle isocèle tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$,

I est le milieu de [AF]. Les droites (IB) et (AE) se coupent en G et EGB est un triangle rectangle isocèle en G.



1) Soit f la similitude directe de centre B, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Déterminer les images des points E et F par f.

2) Soit g la similitude directe qui envoie A en F et F en B.

a) Montrer que g est de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

b) Déterminer la nature de gog et préciser son rapport et son angle.

c) Montrer que $\tan\left(\widehat{ABI}\right) = \frac{1}{2}$. En déduire que GB = 2 GA.

d) En déduire que G est le centre de g.

3) Soit r = gof.

a) Montrer que r est la rotation de centre F et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

b) Déterminer r(E). En déduire que EFGH est un carré, où H est le milieu de [EB].

EXERCICE 4 (6 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectives z , z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et de 1 .

1) a) Montrer que :

(le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si ($\frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur).

b) On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels. Montrer que $\frac{1+z}{z} = \frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$.

c) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre [OA] , privé des points O et A.

2) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, on a tracé le cercle (Γ) et on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal H sur l'axe ($O,\vec{u}$).

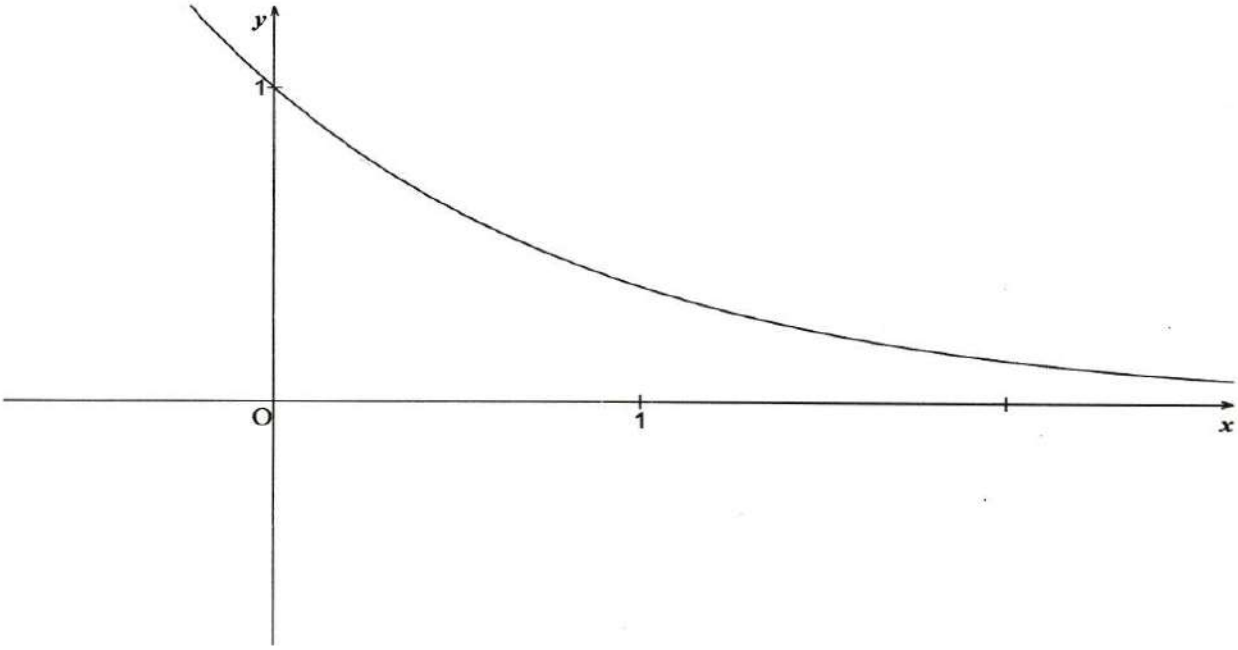
On se propose de construire les points N et P d'affixes respectives z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$ puis que $\left(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$.

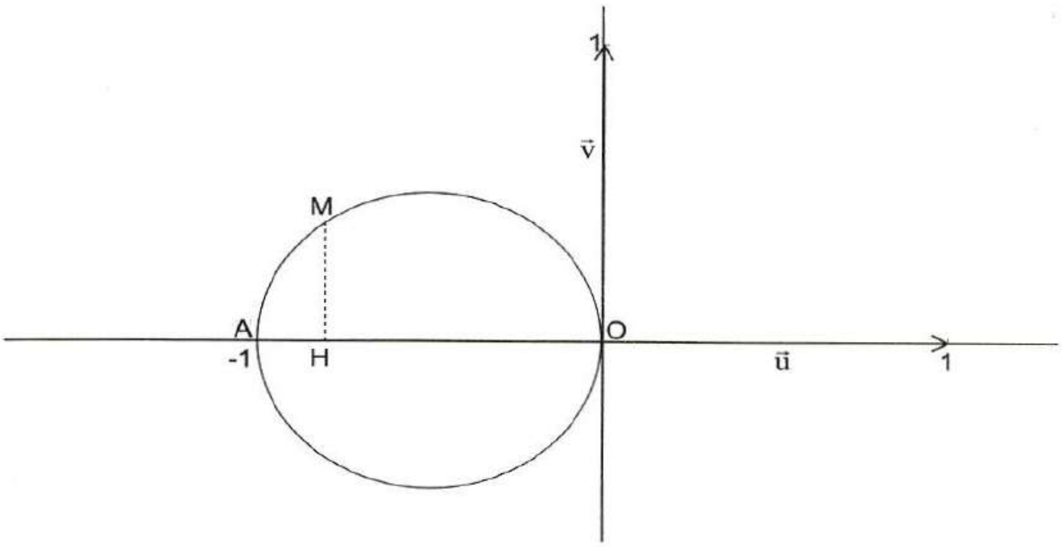
b) Montrer que $OH = OM^2$.

c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire .

EXERCICE 2 figure1



EXERCICE 4 : figure 2



Correction de l'épreuve de mathématiques
Réalisé par : Hédi Souissi

EXERCICE 1 :

	Question	Réponse	Une justification possible
a	$x^3 \equiv x[2]$	vraie	Un entier et son cube sont de même parité :pour tout entier p Si $n = 2p$ alors $n^3 = 8p = 2(4p) = 2p'$ Et si $n = 2p+1$ alors $n^3 = 8p^3 + 12p^2 + 6p + 1 = 2p'' + 1$
b	Si $x \equiv 2[14]$alors $x \equiv 1[7]$	Faux	Contre exemple : $16 \equiv 2[14]$ *et* $16 \not\equiv 1[7]$
c	Si $4x \equiv 10y[5]$alors $x \equiv 0[5]$	vraie	si $4x \equiv 10y[5]$alors $4x = 10y + 5k = 5(2y+k)$, où $k \in \mathbb{Z}$ *et* $4 \wedge 5 = 1$ donc par le théorème de Gauss , 5 divise x .
d	si $\begin{cases} x \equiv 4[5] \\ y \equiv 5[8] \end{cases}$ alors $8x - 5y = 7$	Faux	Contre exemple : pour $x = 14 = 4 + 2x5$ *et* $y = 13 = 5 + 8$ On a$8x - 5y = 4112 - 65 = 47$

EXERCICE 2 :

I –

1) $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -e^{-x}$; donc $g'(0) = -1$, et une équation de la tangente au point d'abscisse 0 est :

$$y = g'(0)(x-0) + g(0) \Leftrightarrow y = -x + 1$$

2) a – Montrons que pour tout $x \geq 0$; $1 - x \leq e^{-x} \leq 1$.

Pour cela , on considère la fonction $\mathrm{d}(x) = 1 - x - e^{-x}$ qui est continue sur $]0,+\infty[$.

et on a : $\mathrm{d}'(x) = -1 + e^{-x} = \frac{1}{e^x} - 1 = \frac{1-e^x}{e^x} < 0$; pour tout $x > 0$

x	0		$+\infty$
$d'(x)$	0	-	
d(x)	0	$\searrow$	$-\infty$

d est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et $d(0) = 0$, donc pour tout $x \in]0,+\infty[$, $d(x) \leq 0$

d'où ($1 - x \leq e^{-x}$, pour tout $x \in]0,+\infty[$ et $e^{-x} \leq 1$)

Conclusion : pour tout $x \geq 0$; $1 - x \leq e^{-x} \leq 1$.

b – Soit $x \in]0,+\infty[$

$$\forall t \in [0,x] \quad , \quad 1 - t \leq e^{-t} \leq 1 \Rightarrow \int_0^x (1-t)dt \leq \int_0^x e^{-t}\,dt \leq \int_0^x 1dt \Longrightarrow x - \frac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x} \leq x$$

Et pour x=0 , on l'égalité.

II –

1) a)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{X\to 0^+} e^{-X} = 1 \Longrightarrow \text{la droite d'équation } y = 1 \text{ asymptote à } (\,C\,) \text{en} + \infty.$$

b) Continuité à droite en 0:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{X\to-\infty} e^{X} = 0 = f(0) \Longrightarrow f\text{est continue à droite en } 0$$

Dérivabilité à droite en 0:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} -xe^{x} = 0$$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=0$.

c) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} > 0$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	
f(x)	0	$\nearrow$	1

2) a) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$

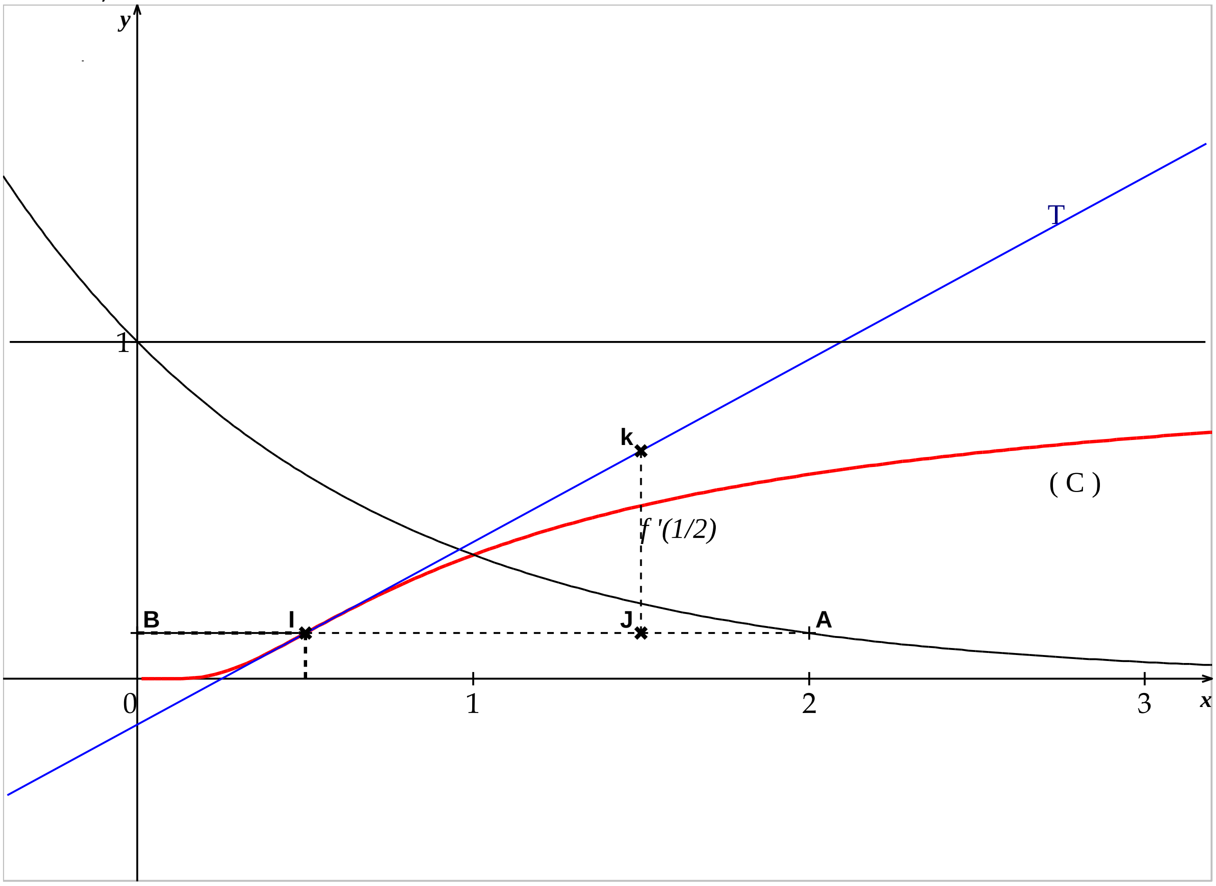
Donc $f''(x) = (1-2x)\frac{1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$

x	0		1/2		$+\infty$
$f''(x)$	||	+	0	-	

f'' s'annule en changeant de signe en 1/2 donc le point I $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2}\right)$ est un point d'inflexion de (C).

b) T la tangente à (C) en I , à pour équation $y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{e^2}x - \frac{1}{e^2}$

3) a-b-c



4) soit k un entier naturel non nul .

a)

Pour tout réel $x > 0$, $\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} \leq 1 - e^{-\frac{1}{x}} \leq \frac{1}{x}$; d'après $(I-2)b)$ et en remplacant x par $\frac{1}{x}$)

Donc

$$\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\right) dx \leq \int_k^{k+1} \left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right) dx \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{x}\right) dx \text{ et } A_k = \int_k^{k+1} \left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right) dx$$

$$\Rightarrow \left[\ln x + \frac{1}{2}\frac{1}{x}\right]_k^{k+1} \leq A_k \leq [\ln x]_k^{k+1} \Rightarrow \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) \leq A_k \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

b) on a : $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) \leq A_k \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$; d'autre part on sait que :

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right) = 1 \text{ donc } \lim_{k\to+\infty} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln 1 = 0 \text{ et } \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{1}{k}\right) = 0 \text{ et } \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{1}{k+1}\right) = 0$$

donc $\lim_{k\to+\infty} A_k = 0$ (par le théorème des gendarmes)

5) soit n un entier naturel non nul.

a)

$$S_n = \int_1^2 \left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right) dx + \int_2^3 \left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right) dx + \cdots + \int_{n-1}^n \left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right) dx = \int_1^n \left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right) dx$$

donc S_n est l'aire de la partie du plan limitée par la droite d'équation y=1 , la courbe de f et les droites d'équations x=1 et x=n.

b) pour tout entier , $1 \leq k \leq n$, on a :

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) \leq A_k \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)\leq\sum_{k=1}^{n}A_k\leq\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

or

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=\ln(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\dots\frac{n}{n-1}\times\frac{n+1}{n})=\ln(n+1)$$

(on suppose n suffisemment grand pour que $n-1\neq 0$)

et $$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}-1$$

d'où

$$\ln(n+1)+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1}-1\right]\leq S_n\leq\ln(n+1)$$

c –

on a: $\ln(n+1)+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1}-1\right]\leq S_n$ et $\lim\limits_{k\to+\infty}\ln(n+1)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-1\right)=+\infty$ *donc* $\lim\limits_{k\to+\infty}S_n=+\infty$

et pour n ≥ 2 ; $\frac{\ln(n+1)}{\ln n}+\frac{1}{2\ln n}\left[\frac{1}{n+1}-1\right]\leq\frac{S_n}{\ln n}\leq\frac{\ln(n+1)}{\ln n}$

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2\ln n}\left[\frac{1}{n+1}-1\right]=0\\ \text{et}\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)+\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}=\lim\limits_{n\to+\infty}1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}=1\end{cases}\Longrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{\ln n}=1$$

EXERCICE 3 :

1) $f=S_{\left(B,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)}$

$$\begin{cases}\frac{GB}{GE}=cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ et\\ \left(\widehat{\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BG}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]\end{cases}$$ donc $f(E)=G$ De meme $f(F)=A$

2) a) $\begin{cases}g(A)=F\\ g(F)=B\end{cases}$ donc

g est de rapport $k=\frac{BF}{AF}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$ *et* d'angle $\theta\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{FB}}\right)[2\pi]\equiv\pi+\frac{\pi}{4}[2\pi]\equiv-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

b) g est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ donc gog est une similitude directe de rapport $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$ et d'angle $2\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\equiv-\frac{3\pi}{2}[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

c)

$$\tan(\widehat{ABI})=\frac{AI}{AB}=\frac{AI}{2AI}=\frac{1}{2}$$ car $AB=AF$ et I le milieu de $[AF]$

D'autre part :

$$\frac{1}{2}=\tan(\widehat{ABI})=\tan(\widehat{ABG})=\frac{AG}{BG}$$ donc $BG=2AG$

d) on a : gog(A)=B . Si on note G'=gog(G) on a alors BG'=2AG=BG .

D'autre part

$\left(\widehat{\overrightarrow{GA},\overrightarrow{G'B}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ *et* $\left(\widehat{\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$, donc $\overrightarrow{G'B}$ *et* $\overrightarrow{GB}$ sont colinéaires , de meme sens et de meme norme et par la suite $\overrightarrow{G'B}=\overrightarrow{GB}$ *et* $G=G'$ *et* $gog(G)=G$

Le rapport de gog est différent de 1 donc G est le centre de gog .

Si on note g(G)=G_1 alors g (G_1)=gog(G)=G et par la suite $GG_1=\sqrt{2}GG_1\Longrightarrow(1-\sqrt{2})GG_1=0\Longrightarrow G=G_1$

Conclusion : g(G)=G et le rapport de g est différent de 1 donc G est le centre de g.

3) a)

$$\begin{cases} f \text{ similitude directe de rapport } \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et d'angle } \frac{\pi}{4} \\ g \text{ similitude directe de rapport } \sqrt{2} \text{ et d'angle } \frac{-3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow r \text{ similitude directe de rapport 1 et d'angle } \frac{-\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow r \text{ rotation d'angle } \frac{-\pi}{2}.$$

D'autre part r(F)=gof(F)=g(A)=F et $r \neq \mathrm{id}_P \Longrightarrow r$ rotation de centre F

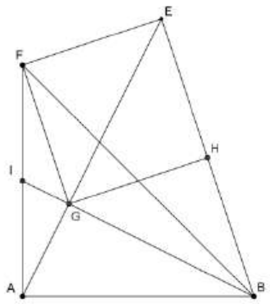
Conclusion : $r = R_{\left(F,-\frac{\pi}{2}\right)}$

b) r (E) = gof(E)= g (G) =G $\Longrightarrow$ le triangle EFG est rectangle en F et isocele

H le projeté orthogonal de G sur (EB) et EGB est rectangle et isocèle en G donc (GH)=méd$[EB]$

D'autre part $(\widehat{\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EH}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EG}}) + (\widehat{\overrightarrow{EG},\overrightarrow{EH}})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc $\begin{cases} (GH)//(FE) \\ (GF)//(HE) \end{cases}$ et par la suite FGHE est un parallélogramme de plus le triangle EFG est rectangle en F et isocele en F , donc le parallélogramme FGHE a deux cotés consécutifs égaux et un angle droit en F ,donc FGHE est un carré.



EXERCICE 4 :

1) Soit M un point d'affixe z non nul et différent de 1 et de -1

a) $aff(\overrightarrow{NP}) = z^3 - z^2 = z^2(z-1)$ $et\ aff(\overrightarrow{MP}) = z^3 - z = z(z-1)(z+1)$

Le triangle MNP est rectangle en P $\Leftrightarrow \overrightarrow{NP} \perp \overrightarrow{MP} \Leftrightarrow \left(\frac{z(z-1)(z+1)}{z^2(z-1)} \text{ est imaginaire pur}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{(z+1)}{z} \text{ est imaginaire pur}$$

b) En posant $z = x + iy$ où x et y réels vérifiant $(x,y) \neq (1,0); (x,y) \neq (-1,0)$ et $(x,y) \neq (0,0)$.

$$\frac{1+z}{z} = \frac{(1+x+iy)(1-iy)}{(1+iy)(1-iy)} = \frac{x+x^2+ixy-iy-ixy+y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$$

c)

$\frac{(z+1)}{z}$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2} = 0$ et $(x,y) \neq (1,0)$; $(x,y) \neq (-1,0)$et $(x,y) \neq (0,0)$

$\Leftrightarrow (x+\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}\ et\ (x,y) \neq (-1,0)$et $(x,y) \neq (0,0)$

Donc l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit rectangle en P est le cercle de centre$I\left(\frac{-1}{2},0\right)$ et de rayon $r = \frac{1}{2}$donc de diamètre $[\mathrm{OA}]$, privé des points $\mathrm{A}(-1,0)$et$\mathrm{O}(0,0)$.

2) a)$\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right) \equiv arg\left(\frac{z^2}{z}\right)[2\pi] \equiv \arg(z)[2\pi] \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$

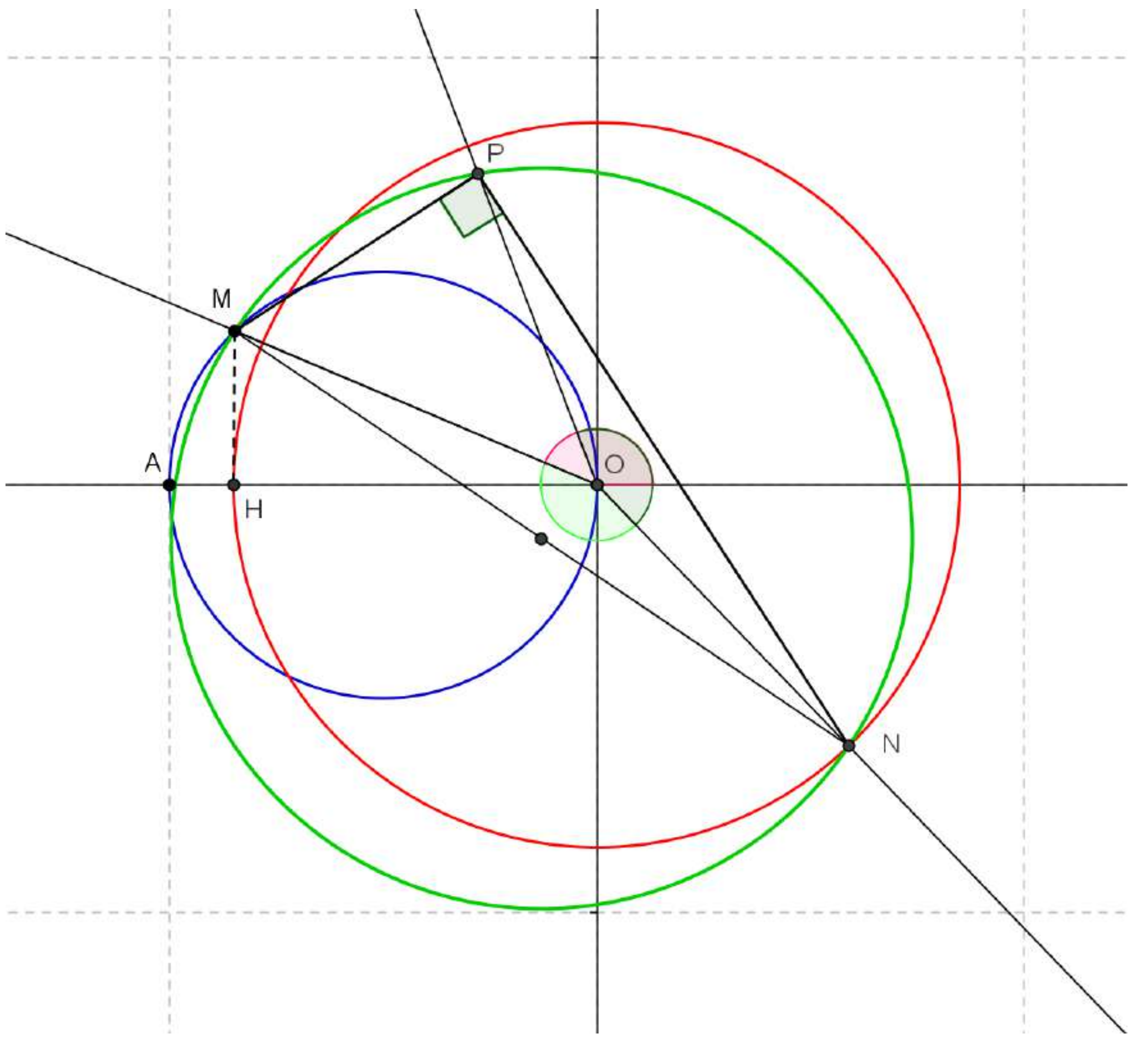
$\left(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}}\right) \equiv arg\left(\frac{z^3}{z^2}\right)[2\pi] \equiv \arg(z)[2\pi] \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$

b) $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow x^2+y^2+x = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = -x\ et\ x \in [-1,0]$; et $\mathrm{H}(x,0)\ donc\ OH = \sqrt{x^2} = -x$
Donc $OM^2 = x^2+y^2 = -x = OH$

c) $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi] \Longrightarrow \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{ON}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]\quad et\ \ OM^2 = ON = OH\ \ \Longrightarrow N \in C_{(O,OH)}$

$\left(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi] \Longrightarrow \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OP}}\right) \equiv 3\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$ et P sur le cercle de diamètre [MN].

D'où la construction .



MATHS

Section : Maths

$1^{\text{ère}}$ Session

EXERCICE 1

Dans ce qui suit, x et y désignent des entiers.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

a) $x^3 \equiv x$ (mod 2).

b) Si $x \equiv 2$ (mod 14) alors $x \equiv 1$ (mod 7).

c) Si $4x \equiv 10y$ (mod 5) alors $x \equiv 0$ (mod 5).

Si $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod 5 \\ y \equiv 5 \pmod 8 \end{cases}$ alors $8x - 5y = 7$

Contenu

- *Congruence .*
- *Reste modulo n.*

Solutions et commentaires

a) **Vrai.** En effet : on sait que si x est un entier, alors son reste modulo 2 est soit 0 soit 1:

Reste de x (mod2)	0	1
Reste de x^3 (mod2)	0	1

Il en résulte du tableau ci-dessus que $x^3 \equiv x \pmod 2$.

✓ *On pourrait envisager la justification suivante :* $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ *est toujours pair, par conséquent* $x^3 \equiv x \pmod 2$

b) **Faux**. Car pour $x = 2$, $2 \equiv 2 \pmod{14}$ et 2 non congru à 1 modulo 7.

c) **Vrai**. En effet : si $4x \equiv 10y \pmod 5$ alors $4x \equiv 0 \pmod 5$ et donc $x \equiv 0$ (mod5) ; car $4 \wedge 5 = 1$.

✓ *Il s'agit d'utiliser le lemme de Gauss*: $\begin{cases} ax \equiv 0 \pmod b \\ \text{b ne divise pas a} \end{cases}$ alors $x \equiv 0 \pmod b$

d) **Faux**. Car : pour $x = 9$ et $y = 5$, $8 \times 9 - 7 \times 5 = 47$.

EXERCICE 2

I - Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x}$ et (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer une équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse 0 .

2) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\quad 1 - x \leq e^{-x} \leq 1$.

b) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $\quad x - \dfrac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x} \leq x$.

II - On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 & \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer la limite de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que le point $I\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{e^2}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$.

b) Donner une équation de la tangente T à la courbe $(\mathcal{C})$ au point I.

3) Dans la **figure 1** de l'annexe ci-jointe, on a représenté la courbe (Γ) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Construire I.

b) Construire la tangente T.

c) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

4) Soit A_k l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite d'équation y = 1 et les droites d'équations x = k et x = k + 1 où k est un entier naturel non nul.

a) En utilisant I 2) b) montrer que $\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) - \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right] \leq A_k \leq \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)$.

b) Calculer $\lim\limits_{k \to +\infty} A_k$.

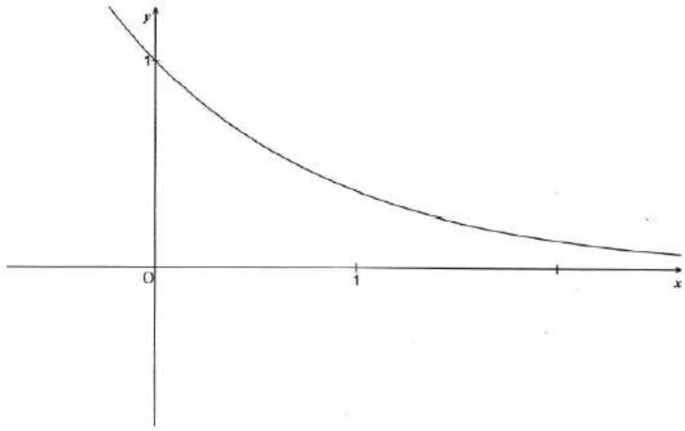
5) Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k$.

a) Interpréter graphiquement S_n .

b) Montrer que $\ln(n+1) - \dfrac{1}{2}\left[1 - \dfrac{1}{n+1}\right] \leq S_n \leq \ln(n+1)$.

c) En déduire les limites de S_n et de $\dfrac{S_n}{\ln(n)}$, quand n tend vers l'infini.

EXERCICE 2 figure1



Contenu

- *Continuité- Dérivabilité –calculs de limites.*
- *Calcul d'intégrales*
- *Suites d'intégrales, limite d'une suite réelle.*

Aptitudes visées :

- *Etudier la continuité et la dérivabilité d'une fonction en un point.*
- *Encadrer une expression algébrique.*
- *Etudier les variations d'une fonction.*
- *Reconnaître un point d'inflexion.*
- *Exploiter un graphique pour construire un point ou une droite dans le plan .*
- *Tracer la courbe représentative d'une fonction.*
- *Reconnaître et encadrer une aire.*

Solutions et commentaires

I.

1) $g(0)=1$. Pour tout réel x, $g'(x)=-e^{-x}$ ce qui donne $g'(0)=-1$.

Une équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse 0 est $y=g'(0)x+g(0)=-x+1$.

2) a) Pour tout $x\geq 0$, $-x\leq 0$ donc $e^{-x}\leq 1$.

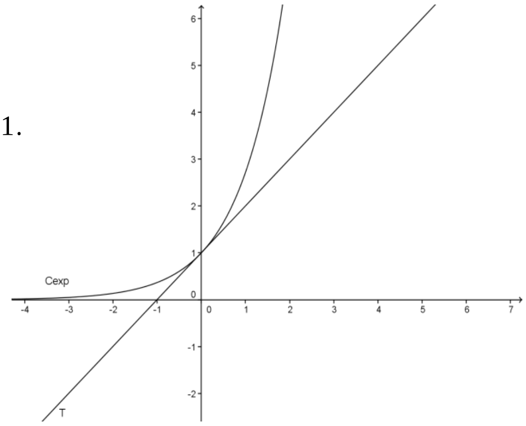
Pour tout $x\geq 0$, posons la fonction h définie par $h(x)=e^{-x}+x-1$.

La fonction h est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $h'(x)=1-e^{-x}\geq 0$ donc h est strictement croissante sur

$[0,+\infty[$. Il en résulte que si $x\geq 0$ alors $h(x)\geq h(0)=0$. On en déduit que $e^{-x}\geq 1-x$ pour tout $x\geq 0$.

Ainsi pour tout $x\geq 0$, $1-x\leq e^{-x}\leq 1$.

✓ *La courbe représentative de la fonction* *exponentielle est au dessus de la la tangente T_1 au point d'abscisse 0 ($T_1 : y = x+1$) (voir graphique ci-contre).*



Ainsi pour tout réel x ; $e^x \geq x+1$ *et par conséquent* $e^{-x} \geq -x+1$.

b) D'après a) $1-t \leq e^{-t} \leq 1$ pour tout $t \in [0,x]$, $x \geq 0$.

Les fonctions $t \mapsto 1-t$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont continues sur $[0,x]$, $x \geq 0$

donc $\int_0^x (1-t)dt \leq \int_0^x e^{-t}dt \leq \int_0^x 1dt$

Donc $\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x \leq \left[-e^{-t}\right]_0^x \leq x$ d'où $x-\frac{x^2}{2} \leq 1-e^{-x} \leq x$ pour tout $x \geq 0$.

II.

1) a) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} e^x = 1 \end{cases}$ on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$.

b) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{cases}$ on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} -\left(-\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\right) = 0 = f_d'(0)$.donc f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0) = 0$.

c) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} > 0$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0 +	
f	0 ↗	1

2) a) La fonction f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f''(x) = -\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4}e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1-2x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$.

$f''(x)$ s'annule en $\frac{1}{2}$ en changeant de signe. Donc le point $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe ($\mathscr{C}$).

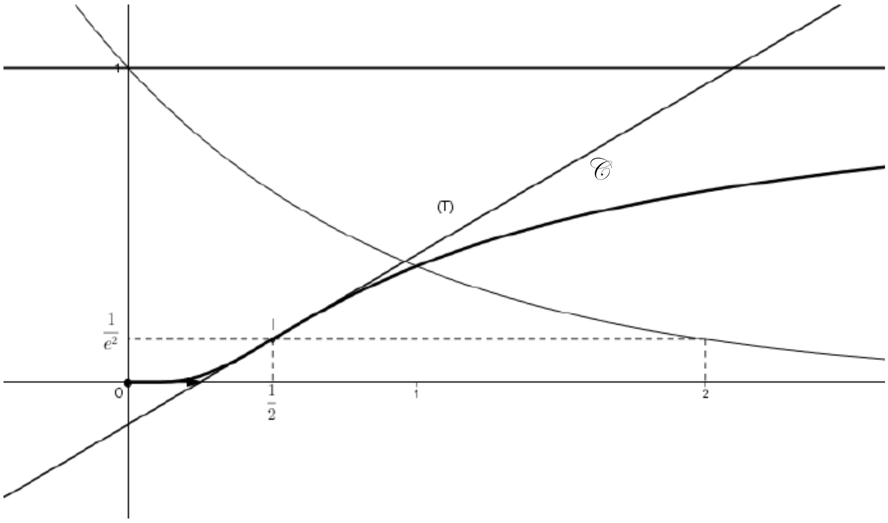
b) $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{e^2}$; $T : y = \frac{4}{e^2}x - \frac{3}{e^2}$.

3) a) Le point I est le point de (Γ) d'abscisse $\frac{1}{2}$

✓ *Il s'agit d'exploiter une donnée graphique pour construire un point du plan.*

b) La tangente T passe par le point I et de coefficient directeur $\frac{4}{e^2}$; ce coefficient est constructible vu que $\frac{1}{e^2}$.

c) Représentation graphique de f.



4)a) $A_k = \int_k^{k+1}(1-f(x))dx = \int_k^{k+1}\left(1-e^{-\frac{1}{x}}\right)dx$. or d'après I 2) on a $x-\frac{x^2}{2} \le 1-e^{-x} \le x$ pour tout $x \ge 0$,

on en déduit que $\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2} \le 1-e^{-\frac{1}{x}} \le \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}$, $x \mapsto 1-e^{-\frac{1}{x}}$ et $t \mapsto \frac{1}{x}$ sont continues sur $[k,k+1]$, $k \ge 1$

donc $\int_k^{k+1}\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}dx \le \int_k^{k+1}\left(1-e^{-\frac{1}{x}}\right)dx \le \int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx$ d'où $\left[\ln x+\frac{1}{2x}\right]_k^{k+1} \le A_k \le [\ln x]_k^{k+1}$

on en déduit que $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right] \le A_k \le \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

b) $\lim_{k\to+\infty} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right] = \lim_{k\to+\infty} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = 0$ donc $\lim_{k\to+\infty} A_k = 0$.

5)a) pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\left(1-e^{-\frac{1}{x}}\right)dx = \int_1^{n+1}\left(1-e^{-\frac{1}{x}}\right)dx$. Ainsi S_n est l'aire de la partie du plan limitée par ($\mathscr{C}$), la droite y = 1 et les droites d'équations x = 1 et x = n+1.

b) On a $S_n = \int_1^{n+1}\left(1-e^{-\frac{1}{x}}\right)dx$ donc $\int_1^{n+1}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)dx \le S_n \le \int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx$.

On en déduit que $\ln(n+1)-\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{n+1}\right] \le S_n \le \ln(n+1)$.

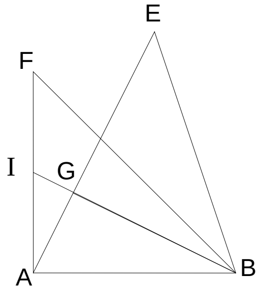
c) On sait $\ln(n+1)-\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{n+1}\right] \le S_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1)-\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{n+1}\right] = +\infty$ *donc* $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

De plus pour tout $n>1,\ \ln(n)>0$ donc

$$\frac{\ln(n+1)-\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]}{\ln(n)}\leq\frac{S_n}{\ln(n)}\leq\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$$ et puisque

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)-\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]}{\ln(n)}=1$$ on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{\ln(n)}=1.$$



EXERCICE 3

Dans la figure ci-contre, ABF est un triangle rectangle isocèle tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$,

I est le milieu de [AF] . Les droites (IB) et (AE) se coupent en G

et EGB est un triangle rectangle isocèle en G.

1) Soit f la similitude directe de centre B, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Déterminer les images des points E et F par f.

2) Soit g la similitude directe qui envoie A en F et F en B.

a) Montrer que g est de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

b) Déterminer la nature de g o g et préciser son rapport et son angle.

c) Montrer que $\tan\left(\widehat{ABI}\right)=\frac{1}{2}$. En déduire que GB = 2 GA.

d) En déduire que G est le centre de g.

3) Soit r = g o f.

a) Montrer que r est la rotation de centre F et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

b) Déterminer r(E). En déduire que EFGH est un carré, où H est le milieu de [EB].

Contenu

- *Similitude directe.*
- *Composée de deux similitudes directes.*
- *Rotation .*

Aptitudes visées :

- *Reconnaître l'image d'un point par une similitude directe.*
- *Identifier une similitude directe connaissant deux points et leurs images.*
- *Reconnaître la composée de deux similitudes directes non inverses et de rapports inverses.*
- *Exploiter une isométrie pour identifier une configuration usuelle du plan (carré).*

Solutions et commentaires

1) Le triangle BEG est rectangle, isocèle en G et de sens direct donc $\begin{cases} \dfrac{BG}{BE} = \dfrac{BG}{\sqrt{2}BG} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BG}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$

Il en résulte que $f(E) = G$.

Le triangle BFA est rectangle, isocèle en A et de sens direct donc $\begin{cases} \dfrac{BA}{BF} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \left(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BA}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$

Il en résulte que $f(F) = A$.

✓ *Il s'agit d'utiliser une configuration de bases usuelle (triangle rectangle et isocèle) pour identifier l'image d'un point par une similitude directe.*

2) a) $\dfrac{FB}{AF} = \sqrt{2}$ et $\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{FB}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{FA};\overrightarrow{FB}\right)\ [2\pi]$. Soit $\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{FB}\right) \equiv -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

b) $g \circ g$ est une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

c) $\tan\left(\widehat{ABI}\right) = \dfrac{AI}{AB} = \dfrac{\frac{1}{2}AF}{AB} = \dfrac{1}{2}$ or $\tan\left(\widehat{ABI}\right) = \tan\left(\widehat{ABG}\right) = \dfrac{GA}{GB}$ donc $GB = 2GA$.

d) $g \circ g(A) = B$ et $\left(\overrightarrow{GA};\overrightarrow{GB}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $GB = 2GA$ donc G est le centre de $g \circ g$ donc G est le

centre de g.

✓ *Il s'agit d'exploiter un résultat de cours : g et g o g sont deux similitudes directes de même centre.*

3) a) r est la composée de deux similitudes directes de rapports respectifs $\sqrt{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angles respectifs

$-\dfrac{3\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4}$, il en résulte que r est une rotation et d'angle $-\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ comme $(g \circ f)(F) = g(A) = F$

donc r est la rotation de centre F et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

b) $r(E)=g(f(E))=g(G)=G$ donc $FE=FG$ et $\widehat{GFE}=\frac{\pi}{2}$ par suite le triangle EFG est rectangle et isocèle en F donc $\widehat{GEF}=\frac{\pi}{4}$. D'autre part H est le milieu de [BE] et le triangle EGB est rectangle et isocèle en G donc le triangle EGH est rectangle et isocèle en H donc $\widehat{GEH}=\frac{\pi}{4}$, on en déduit que $\widehat{HEF}=\frac{\pi}{2}$.

D'où $\widehat{GHE}=\widehat{EFG}=\widehat{HEF}=\frac{\pi}{2}$ ce qui prouve que le quadrilatère EFGH est un rectangle et puisque FE = FG donc EFGH est un carré.

✓ *Il s'agit d'utiliser un déplacement pour identifier une configuration usuelle (un carré).*

EXERCICE 4

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectives z, z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et de 1 .

1) a) Montrer que :

(le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si $\left(\frac{1+z}{z}\right.$ est imaginaire pur).

b) On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels. Montrer que $\frac{1+z}{z}=\frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$.

c) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre [OA] , privé des points O et A.

2) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, on a tracé le cercle (Γ) et on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal H sur l'axe ($O,\vec{u}$).

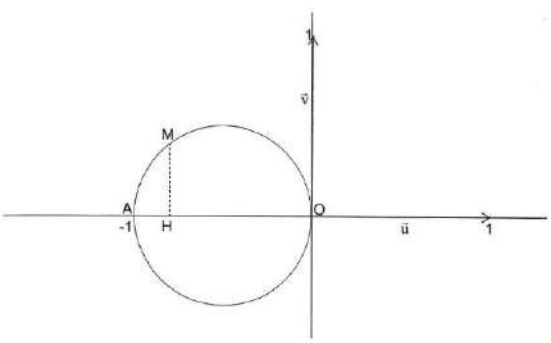
On se propose de construire les points N et P d'affixes respectives z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a) Montrer que $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)\equiv\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$ puis que $\left(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}\right)\equiv\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$.

b) Montrer que $OH = OM^2$.

c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire .

EXERCICE 4 : figure 2



Contenu

- *Ecriture algébrique d'un nombre complexe.*
- *Argument d'un nombre complexe non nul.*
- *Affixe et image .*

Aptitudes visées :

- *Déterminer l'écriture algébrique d'un nombre complexe.*
- *Repérer un point dans le plan et déterminer son affixe.*
- *Utiliser les nombres complexes pour déterminer un ensemble des points du plan.*
- *Utiliser les nombres complexes pour des constructions géométriques.*

Solutions et commentaires

1) a) Le triangle MNP est rectangle en P si et seulement si $\frac{z-z^3}{z^2-z^3}$ est imaginaire pur si et seulement si $\frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur.

b) $\frac{1+z}{z}=\frac{1+x+iy}{x+iy}=\frac{(1+x+iy)(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$.

c) Soit M un point du plan d'affixe z non nulle et différente de 1 et -1.

(Le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si $\frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur si et seulement si

$\begin{cases} x^2+y^2+x=0 \\ M\neq O \\ M\neq A \end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4} \\ M\neq O \\ M\neq A \end{cases}$ si et seulement si M appartient au cercle Γ de centre

$I\left(-\frac{1}{2},0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé des points O et A. Or le point I est le milieu de [OA] donc le cercle Γ est le cercle de diamètre [OA]. On en déduit que l'ensemble cherché est le cercle Γ de diamètre [OA] privé de O et A.

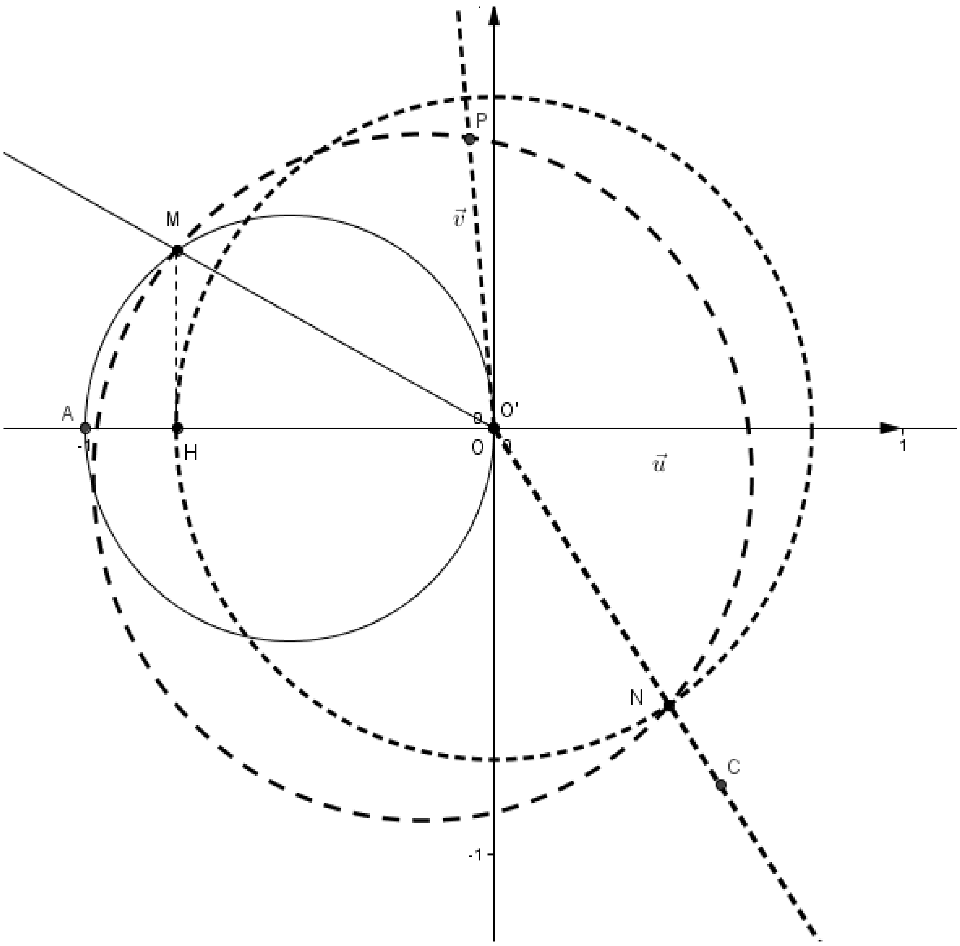
2) a) $\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}\right)\equiv\arg\left(\frac{z^2}{z}\right)\ [2\pi]$ donc $\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}\right)\equiv\arg(z)\ [2\pi]$ d'où $\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}\right)\equiv\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi]$.

$\left(\overrightarrow{ON};\overrightarrow{OP}\right)\equiv\arg\left(\frac{z^3}{z^2}\right)\ [2\pi]$ donc $\left(\overrightarrow{ON};\overrightarrow{OP}\right)\equiv\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi]$.

b) $OH=-x$ or $x^2+y^2+x=0$ donc $-x=x^2+y^2$ il en résulte que $OH=OM^2$.

c) $ON=|z|^2=OM^2=OH$ donc N est le point d'intersection de la demi-droite $[OC)$ telle que $\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OC}\right)\equiv\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi]$ avec le cercle de centre O et de rayon OH.

P est le point d'intersection du cercle de diamètre $[MN]$ avec la demi-droite image de $[OM)$ par la symétrie orthogonale d'axe (ON).



REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2011

SESSION DE CONTRÔLE

SECTION : MATHEMATIQUES

EPREUVE : MATHEMATIQUES **DUREE : 4 heures** **COEFFICIENT : 4**

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5
Les pages 4/5 et 5/5 sont à rendre avec la copie.

EXERCICE 1 (3 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\int_1^x \frac{\cos^2 t}{t}\,dt$.

Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes, en justifiant la réponse.

1) Pour tout $x>0$, $f'(x)\geq 0$.
2) Pour tout $x>0$, $f(x)\geq 0$.
3) $f(2)\leq \ln 2$.

EXERCICE 2 (6 points)

Pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 3, on désigne par f_p la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$f_p(x)=p(\ln x)-x$, où ln désigne la fonction logarithme népérien. On note (C_p) la courbe représentative de f_p dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A-1) Etudier les variations de la fonction $f_3 : x\mapsto 3\ln x - x$.

2) Montrer que l'équation $f_3(x)=0$ admet exactement deux solutions, notées u_3 et v_3 , appartenant respectivement aux intervalles $]1,3[$ et $]3,+\infty[$.

3) On donne ci-dessous, le tableau de variation de f_p pour $p>3$.

x	0		p		$+\infty$
$f'_p(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f_p	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$p(\ln p)-p$	$\searrow$	$-\infty$

a) Montrer que , pour tout entier naturel $p>3$, il existe un unique réel u_p appartenant à l'intervalle $]1,p[$ tel que $f_p(u_p)=0$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel $p>3$, il existe un unique réel $v_p>p$ tel que $f_p(v_p)=0$.

On définit ainsi, pour tout entier naturel $p\geq 3$, deux suites (u_p) et (v_p).

B- Dans cette partie on se propose d'étudier les deux suites (u_p) et (v_p) définies précédemment.

1) Déterminer la limite de la suite (v_p).

2) On a représenté dans la **figure 1** de l'annexe ci jointe les courbes C_3 , C_4, C_5 et C_6 représentatives des fonctions f_3 , f_4 , f_5 et f_6.

a) Placer sur l'axe des abscisses les termes u_3, u_4, u_5 et u_6 de la suite (u_p).

b) Représenter sur l'axe des ordonnées les réels $f_3(u_4)$, $f_4(u_5)$ et $f_5(u_6)$.

3) a) Montrer que pour tout entier naturel $p \geq 3$, $f_p(u_{p+1}) < 0$.

b) En déduire que la suite (u_p) est décroissante et qu'elle est convergente.

c) Montrer que $\dfrac{\ln u_p}{u_p} = \dfrac{1}{p}$. En déduire la limite de la suite (u_p).

EXERCICE 3 (5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points A(1,3,2), B(1,-1,-2) et C(2,4,1) .

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z - 1 = 0$.

2) Soit S la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 4 = 0$.

a) Déterminer le centre I et le rayon r de la sphère S.

b) Montrer que la sphère S coupe le plan (ABC) suivant le cercle (Γ) de diamètre$[AB]$.

c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle (Γ).

3) Soit h l'homothétie de centre C et de rapport 3 et S' l'image de la sphère S par h.

a) Déterminer le rayon de la sphère S' et les coordonnées de son centre J.

b) Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère S' suivant un cercle (Γ').

c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle (Γ') en un point E que l'on précisera.

EXERCICE 4 (6 points)

Le plan est orienté.

Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, le triangle OAB est rectangle isocèle en O et de sens direct.

H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AB), A' est le point du segment [OH] tel que $OA' = \dfrac{1}{2}OA$ et H' est le projeté orthogonal du point A' sur la droite (OB).

Soit f la similitude directe de centre O qui envoie A en A'.

1) Déterminer le rapport et l'angle de f.

2) On note B' l'image du point B par la similitude directe f.

   a) Déterminer la nature du triangle OA'B'.

   b) Construire le point B'.

   c) Montrer que f(H) = H'.

3) Soit I le milieu du segment [A'B] et J le milieu du segment [AA'].

   a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui envoie J en O et I en H.

   b) Montrer que R est une rotation dont on déterminera l'angle.

   c) Soit K le milieu du segment [AB']. Montrer que JK = OH' et que $(\widehat{\overrightarrow{JK},\overrightarrow{OH'}}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

   d) Déterminer alors R(K).

   e) En déduire que IK = HH' et que (IK) et (HH') sont perpendiculaires.

4) Montrer que le quadrilatère IHKH' est un carré.

Section : .... N° d'inscription : .... Série : ....

Nom et prénom : ....

Date et lieu de naissance : ....

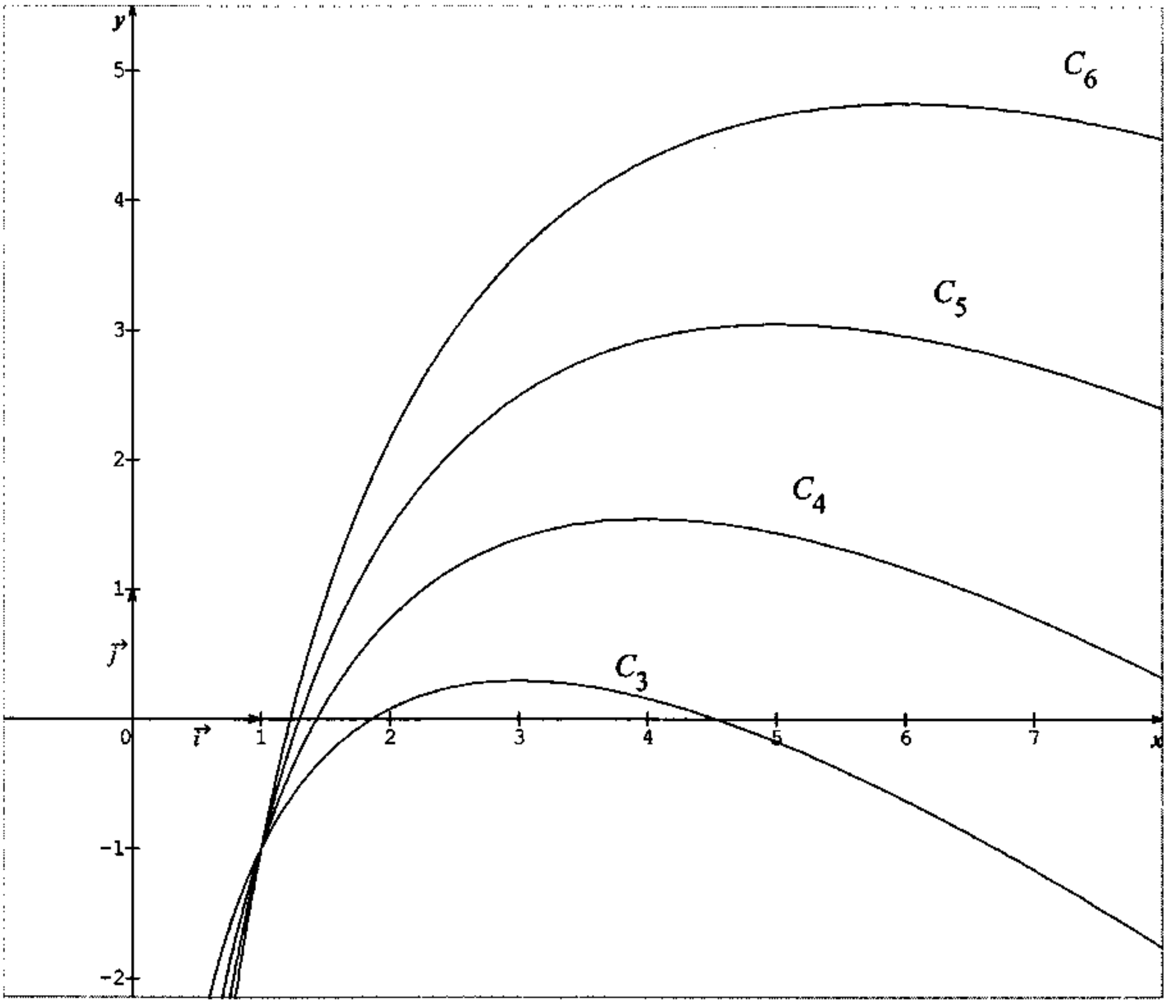
Signatures des surveillants

....

....

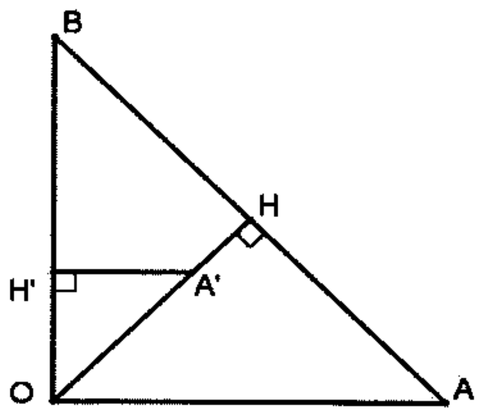
ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE

EXERCICE 2 figure1



NE RIEN ECRIRE ICI

EXERCICE 4 figure 2



5 | 5

MATHS

Section : Maths

$2^{ème}$ Session

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\int_1^x \frac{\cos^2 t}{t}\,dt$.

Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes, en justifiant la réponse.

1) Pour tout $x > 0$, $f'(x) \geq 0$.
2) Pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 0$.
3) $f(2) \leq \ln 2$.

Contenu

- *Fonction définie par intégrale.*
- *Signe d'une intégrale.*
- *Comparaison de deux intégrales.*

Solutions

1. **Vrai.** En effet : $g : x \mapsto \frac{\cos^2 x}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $1 \in]0,+\infty[$ donc f est la primitive de g sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1. Donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$; $f'(x)=\frac{\cos^2 x}{x} \geq 0$.
2. **Faux**. Car pour $0 < x < 1$; $\int_1^x \frac{\cos^2 t}{t}\,dt \leq 0$.
3. **Vrai**. En effet $\frac{\cos^2 t}{t} \leq \frac{1}{t}$ pour tout $t \in [1,2]$ donc $f(2)=\int_1^2 \frac{\cos^2 t}{t}\,dt \leq \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt=[\ln t]_1^2=\ln 2$.

EXERCICE 2

Pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 3, on désigne par f_p la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$f_p(x) = p(\ln x) - x$, où ln désigne la fonction logarithme népérien. On note (C_p) la courbe représentative de f_p dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A-1) Etudier les variations de la fonction f_3: $x \mapsto 3\ln x - x$.

2) Montrer que l'équation $f_3(x) = 0$ admet exactement deux solutions, notées u_3 et v_3 , appartenant respectivement aux intervalles $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$.

3) On donne ci-dessous, le tableau de variation de f_p pour $p \geq 3$.

x	0		p		$+\infty$
$f'_p(x)$		$+$	0	$-$	
f_p	$-\infty$	$\nearrow$	$p(\ln p)-p$	$\searrow$	$-\infty$

a) Montrer que , pour tout entier naturel $p \geq 3$, il existe un unique réel u_p appartenant à l'intervalle $]1, p[$ tel que $f_p(u_p) = 0$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 3$, il existe un unique réel $v_p > p$ tel que $f_p(v_p) = 0$.

On définit ainsi, pour tout entier naturel $p \geq 3$, deux suites (u_p) et (v_p).

B- Dans cette partie on se propose d'étudier les deux suites (u_p) et (v_p) définies précédemment.

1) Déterminer la limite de la suite (v_p).

2) On a représenté dans la **figure 1** de l'annexe ci jointe les courbes C_3 , C_4, C_5 et C_6 représentatives des fonctions f_3 , f_4 , f_5 et f_6.

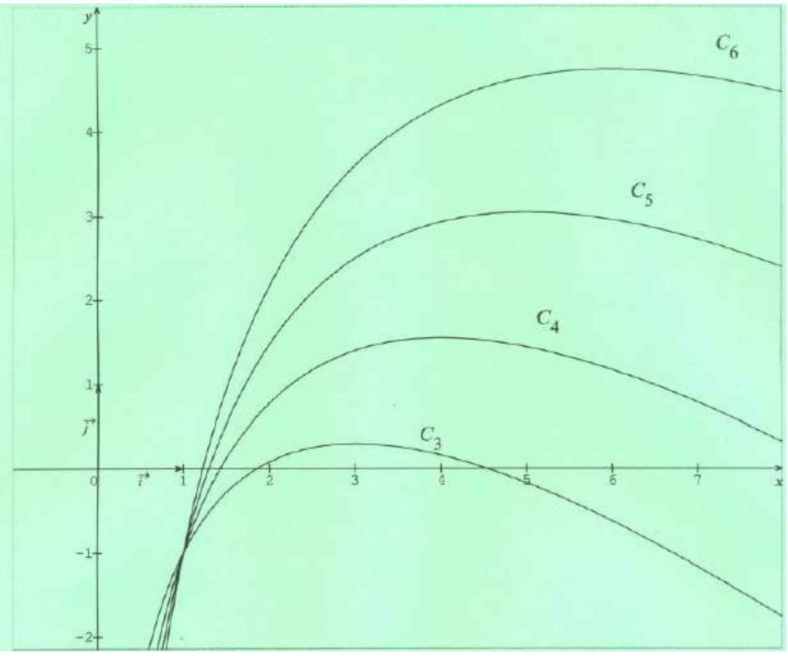
a) Placer sur l'axe des abscisses les termes u_3, u_4, u_5 et u_6 de la suite (u_p).

b) Représenter sur l'axe des ordonnées les réels $f_3(u_4)$, $f_4(u_5)$ et $f_5(u_6)$.

3) a) Montrer que pour tout entier naturel $p \geq 3$, $f_p(u_{p+1}) < 0$.

b) En déduire que la suite (u_p) est décroissante et qu'elle est convergente.

c) Montrer que $\dfrac{\ln u_p}{u_p} = \dfrac{1}{p}$. En déduire la limite de la suite (u_p).



Contenu

- *Fonction ln*
- *Notion de bijection.*
- *Suites réelles, calcul de limites.*

Aptitudes visées

- *Etudier les variations d'une fonction.*
- *Utiliser les théorèmes des valeurs intermédiaires ou de bijection pour montrer l'existence, l'unicité et encadrer des solutions des équations de type f(x) = 0.*
- *Représenter graphiquement les termes d'une suite récurrente.*
- *Prouver la convergence d'une suite réelle et déterminer sa limite.*

Solutions et commentaires

A.

1) f_3 est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f_3'(x)=\dfrac{3}{x}-1=\dfrac{3-x}{x}$.

x	0	3	$+\infty$
$f_3'(x)$	$+$	0	$-$
f_3	$-\infty \nearrow$	$3\ln 3-3$	$\searrow -\infty$

2) La fonction f_3 est continue et strictement croissante sur $]1,3[$ donc elle réalise une bijection de $]1,3[$ sur $f_3(]1,3[)=]-1,3\ln 3-3[$. $0\in]-1,3\ln 3-3[$ donc il existe un unique $u_3\in]1,3[$ tel que $f_3(u_3)=0$.

La fonction f_3 est continue et strictement décroissante sur $]3,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]3,+\infty[$ sur $f_3(]3,+\infty[)=]-\infty,3\ln 3-3[$. $0\in]-\infty,3\ln 3-3[$ donc il existe un unique $v_3\in]3,+\infty[$ tel que $f_3(v_3)=0$.

✓ *Se rappeler le théorème de bijection*

3) Remarquons que pour tout $p>3$, $p\ln p-p=p(\ln p-1)>0$.

a) La fonction f_p est continue et strictement croissante sur $]1,p[$ donc elle réalise une bijection de $]1,p[$ sur $f_p(]1,p[) =]-1, p\ln p - p[$. $0 \in]-1, p\ln p - p[$ donc il existe un unique $u_p \in]1,p[$ tel que $f_p(u_p) = 0$

b) La fonction f_p est continue et strictement décroissante sur $]p,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]p,+\infty[$ sur $f_p(]p,+\infty[) =]-\infty, p\ln p - p[$. $0 \in]-\infty, p\ln p - p[$ donc il existe un unique $v_p \in]p,+\infty[$ tel que $f_p(v_p) = 0$.

B.

1) On sait que pour tout $p > 3$, $v_p > p$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} p = +\infty$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty} v_p = +\infty$.

2) a) et b) voir la figure.

3) a) Pour tout $p \geq 3$, $f_p(u_{p+1}) = p\ln(u_{p+1}) - u_{p+1} = (p+1)\ln(u_{p+1}) - u_{p+1} - \ln(u_{p+1})$

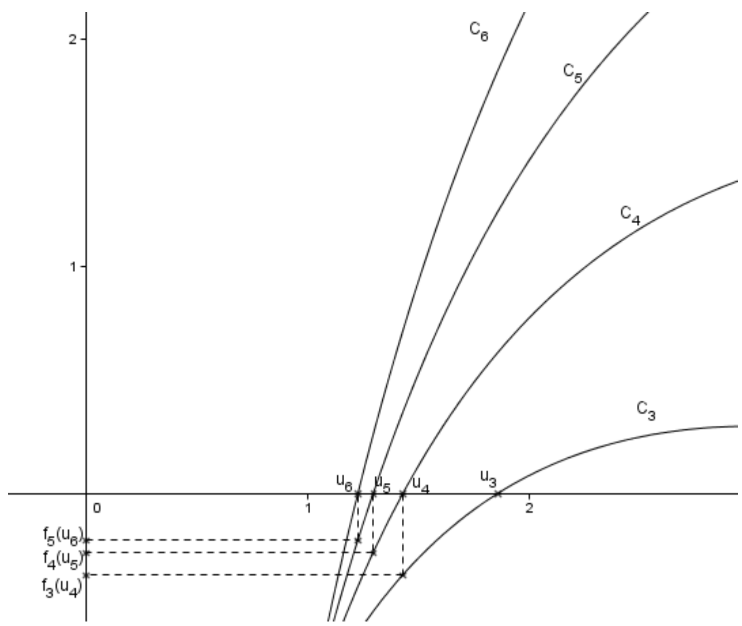
$$= f_{p+1}(u_{p+1}) - \ln(u_{p+1}) = -\ln(u_{p+1}) < 0 \text{ car } u_{p+1} > 1.$$

b) on a pour tout $p \geq 3$, $f_p(u_{p+1}) < 0 = f_p(u_p)$ et la fonction f_p est strictement croissante sur $]1,p[$ donc $u_{p+1} < u_p$ par suite la suite (u_p) est décroissante et minorée par 1 donc elle est convergente.

c) $f_p(u_p) = 0 \Rightarrow p\ln(u_p) - u_p = 0 \Rightarrow \dfrac{\ln(u_p)}{u_p} = \dfrac{1}{p}$

Posons $\lim\limits_{p\to+\infty} u_p = L$; $L \geq 1$.

$\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{\ln(u_p)}{u_p} = \lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{1}{p} = 0$, Si $L > 1$ alors $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{\ln(u_p)}{u_p} = \dfrac{\ln L}{L} \neq 0$ d'où $L = 1$.



EXERCICE 3

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points A(1,3,2), B(1,-1,-2) et C(2,4,1) .

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z - 1 = 0$.

2) Soit S la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 4 = 0$.

a) Déterminer le centre I et le rayon r de la sphère S.

b) Montrer que la sphère S coupe le plan (ABC) suivant le cercle (Γ) de diamètre $[AB]$.

c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle (Γ).

3) Soit h l'homothétie de centre C et de rapport 3 et S' l'image de la sphère S par h.

a) Déterminer le rayon de la sphère S' et les coordonnées de son centre J.

b) Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère S' suivant un cercle (Γ').

c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle (Γ') en un point E que l'on précisera.

Contenu

- *Plan passant par trois points non alignés de l'espace.*
- *Sphère : équation d'une sphère , détermination du centre et du rayon d'une sphère, position d'une sphère et d'un plan*
- *Homothétie de l'espace, image d'une sphère , image d'un plan par une homothétie.*

Aptitudes visées

- *Déterminer une équation cartésienne d'un plan.*
- *Déterminer le centre et le rayon d'une sphère connaissant son équation cartésienne.*
- *Déterminer la position d'une sphère et d'un plan.*
- *Reconnaître l'image d'une sphère par une homothétie.*
- *Reconnaître un plan globalement invariant par une homothétie .*

Solutions et commentaires

1) a) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite les points A, B et C ne sont pas alignés.

Le vecteur $\vec{n}$ de composantes $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$, don $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) et par suite une équation du plan (ABC) est $2x-y+z+d=0$

le point $A\in(ABC)$ donc d = -1. On en déduit que (ABC) : $2x-y+z-1=0$.

- ✓ *On peut traiter autrement cette question : il suffit de vérifier que les points A, B et C appartiennent au plan P : 2x-y+z-1 = 0 .*

2) a) $S: x^2+y^2+z^2-6x-2z-4=0 \Leftrightarrow (x-3)^2+y^2+(z-1)^2=14$. On en déduit que S est la sphère de centre $I(3,0,1)$ et de rayon $r=\sqrt{14}$.

b) $d(I,(ABC))=\sqrt{6}<r$ donc S coupe(ABC) suivant un cercle (Γ) de rayon $r'=\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{2}$.
Or $A\in S,\ B\in S$ et $AB=4\sqrt{2}=2r'$ ce qui prouve que [AB] est un diamètre de (Γ).

c) $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=0$ donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ par suite la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (AB) en A. D'où (AC) est tangente à (Γ) en A.

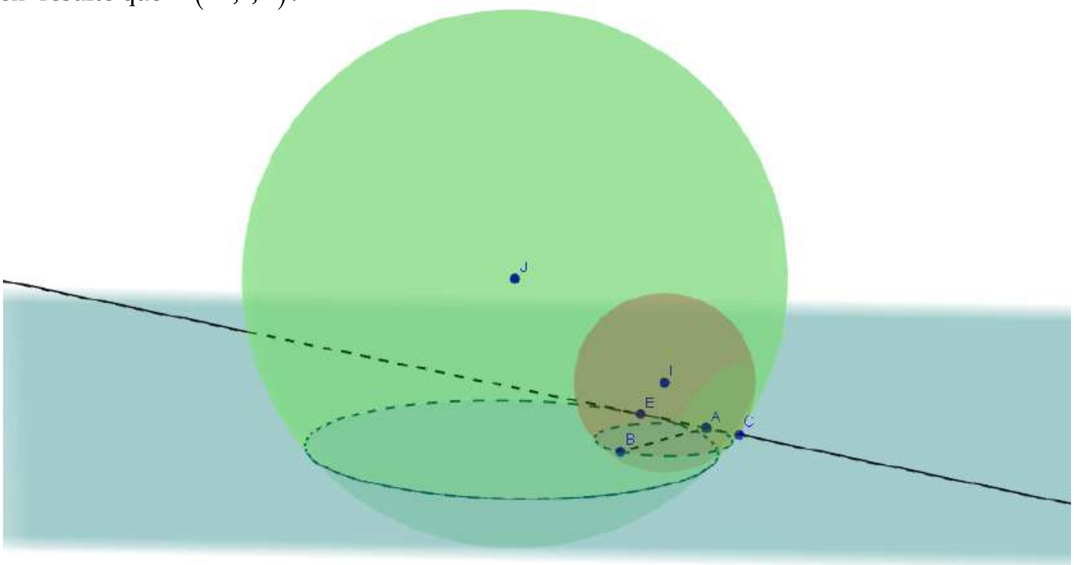
3) a) on pose R' le rayon de S' donc R' = 3 r $=3\sqrt{14}$ et $J=h(I)\Leftrightarrow\overrightarrow{CJ}=3\overrightarrow{CI}$. En posant $J(x,y,z)$, l'égalité vectorielle précédente donne $\begin{cases}x-2=3\\y-4=-12\\z-1=0\end{cases}$ il résulte que $J(5,-8,1)$.

b) On sait que h(S) = S'. Or $C\in(ABC)$ donc h((ABC)) = (ABC) et puisque S coupe (ABC) suivant le cercle (Γ) donc S' = h(S) coupe (ABC) = h((ABC)) suivant le cercle $\Gamma'=h(\Gamma)$.

c) $C\in(AC)$ donc h((AC)) = (AC) et puisque (AC) est tangente à S en A donc (AC) = h((AC)) est tangente à S' en h(A) = E

h(A) = E $\Leftrightarrow\overrightarrow{CE}=3\overrightarrow{CA}$. En posant $E(x,y,z)$, l'égalité vectorielle précédente donne $\begin{cases}x-2=-1\\y-4=-1\\z-1=1\end{cases}$

Il en résulte que $E(-1,1,4)$.



EXERCICE 4

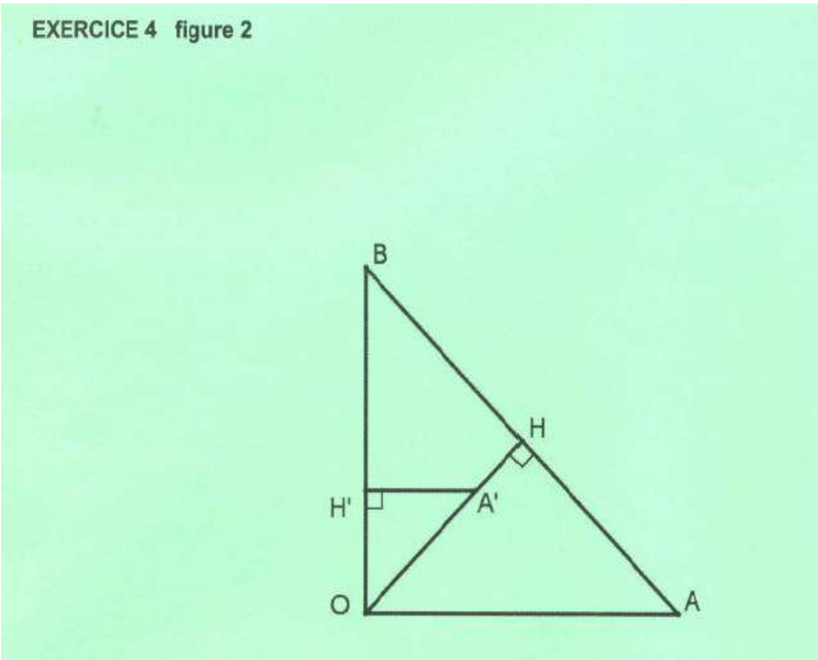
Le plan est orienté.

Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, le triangle OAB est rectangle isocèle en O et de sens direct.

H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AB), A' est le point du segment [OH] tel que $OA' = \frac{1}{2}OA$ et H' est le projeté orthogonal du point A' sur la droite (OB).

Soit f la similitude directe de centre O qui envoie A en A'.

1) Déterminer le rapport et l'angle de f.
2) On note B' l'image du point B par la similitude directe f .
   a) Déterminer la nature du triangle $OA'B'$.
   b) Construire le point B'.
   c) Montrer que $f(H) = H'$.
3) Soit I le milieu du segment $[A'B]$ et J le milieu du segment $[AA']$.
   a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui envoie J en O et I en H.
   b) Montrer que R est une rotation dont on déterminera l'angle.
   c) Soit K le milieu du segment $[AB']$. Montrer que $JK = OH'$ et que $(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{OH'}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
   d) Déterminer alors R(K).
   e) En déduire que $IK = HH'$ et que (IK) et (HH') sont perpendiculaires.
4) Montrer que le quadrilatère $IHKH'$ est un carré



Contenu

- *Similitude directe : détermination du centre , du rapport et de l'angle d'une similitude directe, image d'un triangle par une similitude directe.*
- *Déplacement : éléments caractéristique d'une rotation.*
- *Identification d'une configuration de base (carré).*

Aptitudes visées

- *Déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude directe.*
- *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques d'un déplacement.*
- *Utiliser une similitude ou une isométrie pour déterminer la nature d'une configuration usuelle (triangle rectangle , carré).*

Solutions et commentaires

1) $k=\frac{OA'}{OA}=\frac{\frac{1}{2}OA}{OA}=\frac{1}{2}$ et $\theta\equiv\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

2) a) Le triangle OAB est rectangle isocèle en O et de sens direct or f(O) = O, f(A) = A' et f(B) = B' donc le triangle OA'B' est rectangle isocèle en O et de sens direct (f est une similitude directe).

b) Le triangle OA'B' est rectangle isocèle en O et de sens direct donc B' est l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

c) Montrons que H' est le milieu de [A'B']. on sait que

$\left(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $\left(\overrightarrow{OH'},\overrightarrow{OB'}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ donc [OB) est la bissectrice de [OA',OB'] et puisque le triangle OA'B' est rectangle isocèle en O donc (OB) est la médiatrice de [A'B'] par suite (OB) $\perp$ (A'B') et (OB) $\perp$ (A'H') donc les points A', H' et B' sont alignes et H' $\in(OB)$ d'où le point H' est le milieu de [A'B'].

Puisque H est le milieu de [AB] et $f(A)=A'$ et $f(B)=B'$ donc f(H) = H'.

3) a) I est le milieu de [A'B] et J est le milieu de [AA'] donc $IJ=\frac{1}{2}AB=AH=OH\neq 0$ donc il existe un unique déplacement R qui envoie J en O et I en H.

b) $\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{HO}\right)\equiv\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HO}\right)[2\pi]=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc R est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c) K est le milieu de [AB'] et J est le milieu de [A'A] donc $KJ=\frac{1}{2}A'B'=A'H'=OH'$ de plus

$\overrightarrow{JK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}$ donc $\left(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{OH'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{OH'}\right)[2\pi]\equiv\left(\overrightarrow{A'H'},\overrightarrow{OH'}\right)[2\pi]=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

d) On pose R(K) = K' on obtient alors JK = OK' et $\left(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{OK'}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ or JK = OH' et

$\left(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{OH'}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ on en déduit que OK' = OH' et $\left(\overrightarrow{OH'},\overrightarrow{OK'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OH'},\overrightarrow{JK}\right) + \left(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{OK'}\right)[2\pi] = 0[2\pi]$

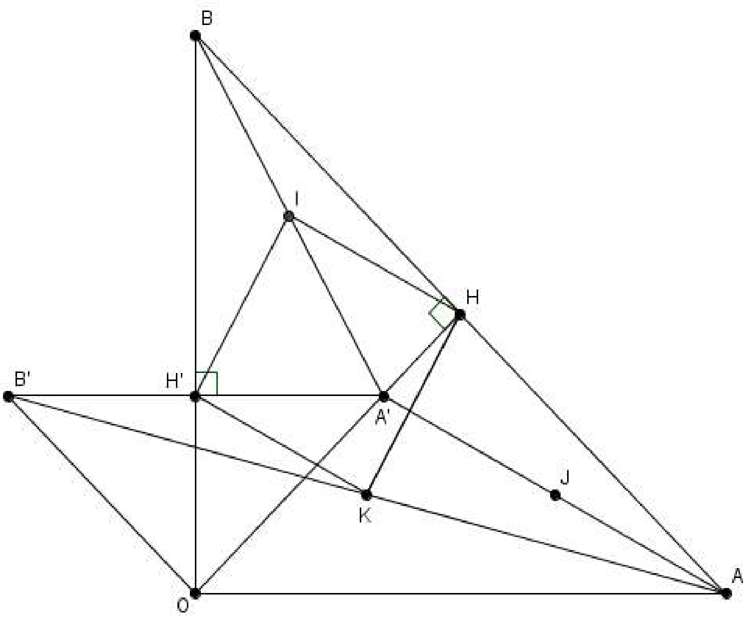
donc K' = H'. ainsi R(K) = H'.

e) R(K) = H' et R(I) = H donc IK= HH' et (IK) ⊥ (HH')

4) I est le milieu de [A'B] et H est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{IH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}$

H' est le milieu de [A'B'] et K est le milieu de [AB'] donc $\overrightarrow{H'K} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}$

Donc $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{H'K}$ par suite IHKH' est un parallélogramme (les points I, H et K ne sont pas alignés) et puisque IK= HH' et (IK) ⊥ (HH') donc c'est un carré.



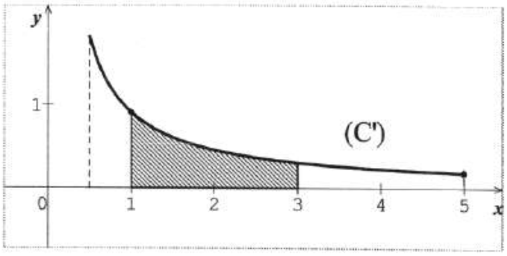
REPUBLIQUE TUNISIENNE ◈◈◈ MINISTERE DE L'EDUCATION	EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2012		
	Epreuve : MATHEMATIQUES	Durée : 4 h	Coefficient : 4
SECTION : Mathématiques		SESSION PRINCIPALE	

Le sujet comporte 4 pages. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[\frac{1}{2}, 5]$ telle que sa courbe représentative (C) passe par les points A(1,0) et B(3, 1). Dans la figure ci-contre, on a représenté la courbe (C') de la dérivée f ' de la fonction f.



Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) (C) admet une tangente de coefficient directeur -1.

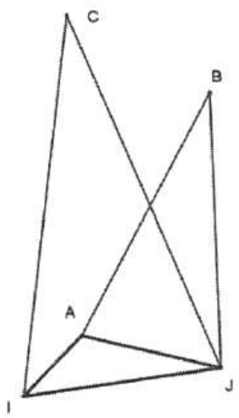
2) L'aire de la partie hachurée est égale à 1.

3) (C) admet une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

4) Pour tous a et b de [1,3], $|f(b)-f(a)| \leq |b-a|$.

Exercice 2 (5 points)

Dans le plan orienté, AIJ est un triangle quelconque, BAJ et CIJ sont deux triangles isocèles respectivement en B et C tels que $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BJ}}) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CJ}}) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$.



On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$ et par r_B et r_C les rotations de même angle $\frac{\pi}{6}$ et de centres respectifs B et C.

1) a) Déterminer $r_C(I)$.
b) Montrer que $r_B \circ t(I) = J$.
c) En déduire que $r_B \circ t = r_C$.

2) Soit K = t (C).

Montrer que BC = BK et $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BK}}) \equiv -\frac{\pi}{6}\,[2\pi]$.

3) Soit D le point du plan tel que le triangle DIA est isocèle en D et $(\widehat{\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DA}}) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$.

a) Soit O le milieu de [AC].
Montrer que l'image du triangle DIA par la symétrie centrale de centre O est le triangle BKC.

b) Montrer que ABCD est un parallélogramme.

Exercice 3 (3 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A le point de coordonnées (3 , 2).

Soit N un point de l'axe $(O, \vec{u})$ et P le point de l'axe $(O, \vec{v})$ tel que ANP est un triangle rectangle en A.

1) a) Soit les points E(3 ,0) et F(0,2).

Montrer qu'il existe une unique similitude directe S de centre A qui transforme E en F. Donner son rapport et son angle.

b) Déterminer l'image de l'axe $(O, \vec{u})$ par S.

c) En déduire que S(N) = P.

d) Soit M un point d'affixe z et M' le point d'affixe z' tel que M' = S(M).

Montrer que $z' = -\frac{3}{2} i z + \frac{13}{2} i$.

2) a) On note x l'abscisse du point N et y l'ordonnée du point P.

Montrer que $3x + 2y = 13$.

b) Déterminer les points N et P dont les coordonnées sont des entiers.

Exercice 4 (3 points)

Un laboratoire de sciences physiques dispose d'un ensemble d'oscilloscopes de même modèle. La durée de vie, en nombre d'années, d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,125.

Dans tout l'exercice on donnera les résultats à 10^{-3} près par défaut.

1) a) Montrer que $p(X > 10) = 0{,}286$.

b) Calculer la probabilité qu'un oscilloscope ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

2) Le responsable du laboratoire veut commander n oscilloscopes ($n \geq 2$).

On suppose que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres.

On note p_1 la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

a) Exprimer p_1 en fonction de n.

b) Combien d'oscilloscopes, au minimum, devrait commander le responsable pour que p_1 soit supérieure à 0.999 ?

Exercice 5 (6 points)

I] On considère la fonction f_2 définie sur $]0,+\infty[$ par $f_2(x)=x^2-\ln x$ et on désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f_2(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f_2(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

c) Dresser le tableau de variation de f_2.

2) Dans l'annexe ci-jointe on a tracé, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (L) de la fonction ln et la courbe (C) d'équation $y = x^2$.

a) Soit $x > 0$. On considère les points M et M_2 de même abscisse x et appartenant respectivement à (L) et (C). Vérifier que $MM_2 = f_2(x)$.

b) Construire alors dans l'annexe les points de la courbe (Γ) d'abscisses respectives 2, $\dfrac{1}{e}$ et $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

c) Tracer la courbe (Γ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de l'annexe.

II] 1) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_k définie sur $]0,+\infty[$ par $f_k(x)=x^k-\ln x$.

a) Déterminer f_k' la fonction dérivée de f_k.

b) Montrer que f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}$ égal à $\dfrac{1+\ln k}{k}$.

c) Pour tout réel $x > 0$, on considère les points $M_k(x,x^k)$ et $M(x,\ln x)$.

Déterminer la valeur minimale de la distance MM_k.

2) Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $u_k=\sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}$.

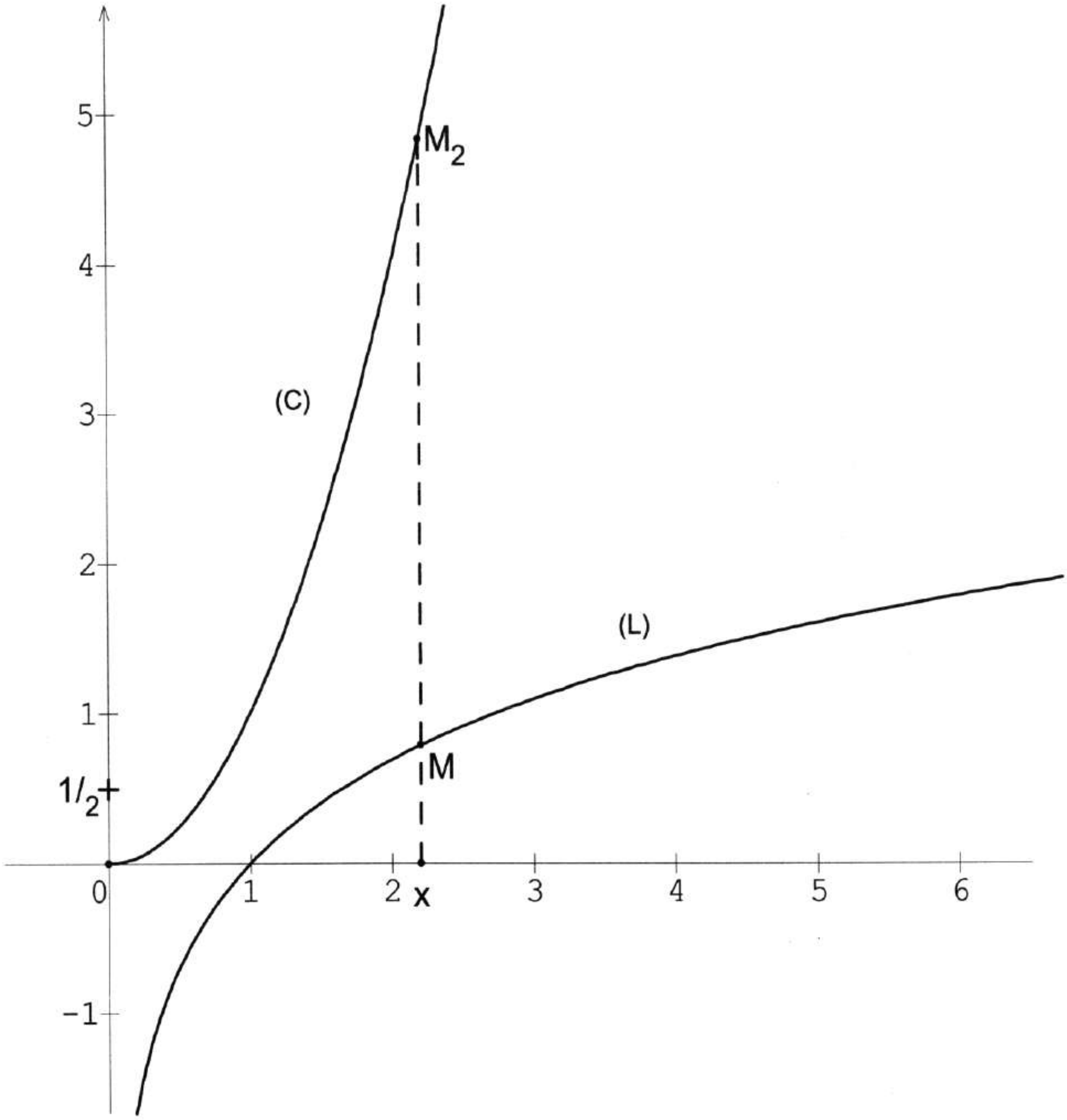
a) Vérifier que $\ln u_k = -\dfrac{\ln k}{k}$ et en déduire la limite de (u_k).

b) Soit $A(1, 0)$ et A_k le point de coordonnées $(u_k, f_k(u_k))$.

Calculer la limite de la distance AA_k lorsque k tend vers $+\infty$.

Epreuve : MATHEMATIQUES - Section : Mathématiques

Annexe (à rendre avec la copie)



MATHS

Section : Mathématiques

1ère Session

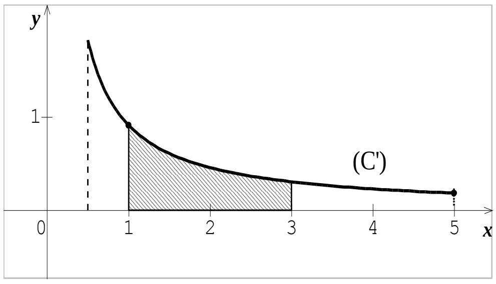
Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[\frac{1}{2}, 5]$ telle que sa courbe représentative (C) passe par les points A(1,0) et B(3, 1). Dans la figure ci-contre, on a représenté la courbe (C') de la dérivée f ' de la fonction f.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) (C) admet une tangente de coefficient directeur -1.
2) L'aire de la partie hachurée est égale à 1.
3) (C) admet une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.
4) Pour tous a et b de [1,3], $|f(b)-f(a)| \leq |b-a|$.



Contenu

- *Tangente à une courbe*
- *Notion d'aires*
- *Inégalités des accroissements finis*

Solutions

1. Faux., car Pour $x \in \left[\frac{1}{2}, 5\right]$, $f'(x) > 0$. Par suite $f'(x) \neq -1$ pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 5\right]$.

2. Vrai. En effet : La fonction f' est continue et positive sur $[1,3]$ donc l'aire de la partie hachurée est égale à :

$$\int_1^3 f'(x)\,dx = f(3) - f(1) = 1 - 0 = 1.$$

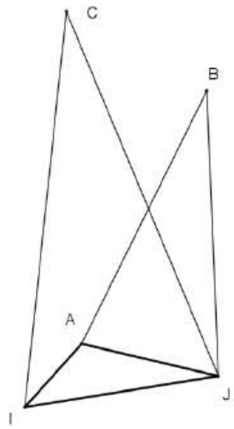
3. Vrai. En effet : La fonction f' est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 5\right]$ et $\frac{1}{2} \in f'\left(\left[\frac{1}{2}, 5\right]\right)$ donc il existe $c \in \left[\frac{1}{2}, 5\right]$ tel que $f'(c) = \frac{1}{2}$.

4. Vrai. En effet : La fonction f est dérivable sur $[1,3]$ et pour $x \in [1,3]$, $|f'(x)| \leq 1$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous a et b de $[1,3]$, $|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$.

Exercice 2

Dans le plan orienté, AIJ est un triangle quelconque, BAJ et CIJ sont deux triangles isocèles respectivement en B et C tels que $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BJ}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CJ}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.



On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$ et par r_B et r_C les rotations de même angle $\frac{\pi}{6}$ et de centres respectifs B et C.

1) a) Déterminer r_C (I).
   b) Montrer que $r_B \circ t(I) = J$.
   c) En déduire que $r_B \circ t = r_C$.
2) Soit K = t (C).
   Montrer que BC = BK et $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BK}) \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.
3) Soit D le point du plan tel que le triangle DIA est isocèle en D et $(\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DA}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.
   a) Soit O le milieu de [AC].
      Montrer que l'image du triangle DIA par la symétrie centrale de centre O est le triangle BKC.
   b) Montrer que ABCD est un parallélogramme.

Contenu

- *Composée rotation et translation*
- *Configuration de base (triangle isocèle, parallélogramme)*

Aptitudes visées :

- *Reconnaître la composée d'une rotation et d'une translation*
- *Exploiter une isométrie pour déterminer la nature d'un quadrilatère.*

Solutions

1. a) Le triangle CIJ est isocèle en C et $\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CJ} \equiv \frac{\pi}{6}\ 2\pi$, par suite $CI = CJ$ et $\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CJ} \equiv \frac{\pi}{6}\ 2\pi$.

On en déduit que $r_C\ I = J$.

b) Le triangle BAJ est isocèle en B et $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BJ}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$, par suite $BA = BJ$ et $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BJ}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

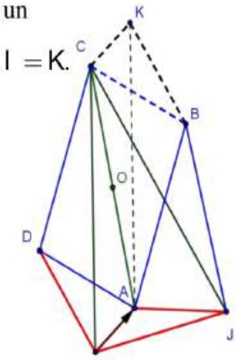
On en déduit que $r_B\ A = J$. $\begin{cases} t\ I = A \\ r_B\ A = J \end{cases}$ donc $r_B \circ t\ I = J$.

c) $r_B \circ t$ est la composée d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ et d'une translation donc c'est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Or $r_B \circ t\ I = J$, $CI = CJ$ et $\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CJ} \equiv \frac{\pi}{6}\ 2\pi$. Il en résulte que C est le centre de $r_B \circ t$.

On en déduit que $r_B \circ t = r_C$.

2. Puisque $K = t\ C$ donc $r_B \circ t\ C = r_B\ K$, or $r_B \circ t\ C = r_C\ C = C$. Il en résulte que $r_B\ K = C$ ou encore $BC = BK$ et $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BK} \equiv -\frac{\pi}{6}\ 2\pi$.



3. **a)** On sait que $K = t\ C$ donc $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{IA}$ et les points I, A et C ne sont pas alignés donc IAKC est un parallélogramme. Comme O est le milieu de $[IC]$ donc O est le milieu de $[IK]$. Il en résulte que $S_O\ I = K$. d'autre part Le point O est le milieu de $[AC]$ donc $S_O\ A = C$.

Le triangle DIA est isocèle de base $[IA]$ tel que $\left(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DA}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

$S_O\ I = K, S_O\ A = C$, $\left(\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BC}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ et le triangle BKC est isocèle de base $[KC]$.

On en déduit que l'image du triangle IAD par S_O est le triangle BKC.

b) L'image du triangle IAD par S_O est le triangle BKC, $S_O\ I = K$ et $S_O\ A = C$ donc $S_O\ D = B$ ou encore O est le milieu de $[BD]$ de plus O est le milieu de $[AC]$ et les points A, B et C ne sont pas alignés. On en déduit que ABCD est un parallélogramme.

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par A le point de coordonnées (3 , 2).
Soit N un point de l'axe $(O, \vec{u})$ et P le point de l'axe $(O, \vec{v})$ tel que ANP est un triangle rectangle en A.

1) a) Soit les points E(3 ,0) et F(0,2).
Montrer qu'il existe une unique similitude directe S de centre A qui transforme E en F.
Donner son rapport et son angle.
b) Déterminer l'image de l'axe $(O, \vec{u})$ par S.
c) En déduire que S(N) = P.
d) Soit M un point d'affixe z et M' le point d'affixe z' tel que M' = S(M).
Montrer que $z' = -\frac{3}{2} i z + \frac{13}{2} i$.

2) a) On note x l'abscisse du point N et y l'ordonnée du point P.
Montrer que 3 x + 2 y = 13.
b) Déterminer les points N et P dont les coordonnées sont des entiers.

Contenu

- *Similitude directe (image d'une configuration de base par une similitude directe, expression complexe d'une similitude directe)*
- *Arithmétique*

Aptitudes visées :

- *Reconnaître une similitude directe.*
- *Reconnaître l'image d'une droite par une similitude directe.*
- *Identifier l'image d'un point par une similitude directe.*
- *Résoudre un problème d'arithmétique.*

Solutions

1. a) $A \neq E$ et $A \neq F$ donc il existe une unique similitude directe S de centre A qui envoie E en F, son rapport est $k = \dfrac{AF}{AE} = \dfrac{3}{2}$ et son angle a pour mesure $\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

b) $S(E) = F$ et $E \in (O,\vec{u})$ donc $S((O,\vec{u}))$ est la droite passant par F et perpendiculaire à $(O,\vec{u})$.

Il en résulte que $S((O,\vec{u})) = (O,\vec{v})$.

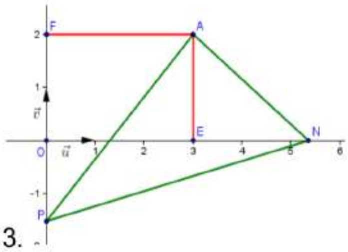
c) $S((AN))$ est la droite passant par A et perpendiculaire à (AN), il en résulte que $S((AN)) = (AP)$.

$N \in (AN) \cap (O,\vec{u})$ donc $S(N) \in S((AN)) \cap S((O,\vec{u})) = (AP) \cap (O,\vec{v}) = \{P\}$. D'où $S(N) = P$.

d) S est la similitude directe de centre A d'affixe $z_A = 3 + 2i$, de rapport $\dfrac{3}{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Soit M un point d'affixe z et M' le point d'affixe z', image de M par S. L'expression complexe de S est de la forme $z' = az + b$, $a \in ℂ^*$ et $b \in ℂ$ avec $a = \dfrac{3}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -\dfrac{3}{2}i$ et $\dfrac{b}{1+\frac{3}{2}i} = 3 + 2i$ donc $b = \dfrac{13}{2}i$.

On en déduit que $z' = -\dfrac{3}{2}iz + \dfrac{13}{2}i$.



2. **a)** L'affixe de N est $z_N = x$ et l'affixe de P est $z_P = iy$.

$S(N) = P \Leftrightarrow iy = \dfrac{-3}{2}ix + \dfrac{13}{2}i = \left(\dfrac{-3}{2}x + \dfrac{13}{2}\right)i \Leftrightarrow y = \dfrac{-3}{2}x + \dfrac{13}{2} \Leftrightarrow 3x + 2y = 13.$

b) $N(x,0)$ et $P(0,y)$. x et y sont des entiers si et seulement si (x,y) est solution de l'équation $3x + 2y = 13$ dans $ℤ \times ℤ$.

Résolvons alors dans $ℤ \times ℤ$ l'équation $(E) : 3x + 2y = 13$.

$(1,5)$ est solution de (E) donc $3x + 2y = 13 \Leftrightarrow 3x + 2y = 3\times1 + 2\times5 \Leftrightarrow 3(x-1) = 2(-y+5)$ $(*)$.

3 divise $2(-y+5)$ et $3 \wedge 2 = 1$ donc d'après Gauss 3 divise $(-y+5)$ par suite $-y+5 = 3k$ avec $k \in ℤ$

ou encore $y = -3k + 5$. En remplaçant y par sa valeur dans $(*)$, on obtient $x = 2k + 1$ avec $k \in ℤ$.

Réciproquement $3(2k+1) + 2(-3k+5) = 3 + 10 = 13$.

On en déduit que $N(2k+1, 0)$, $P(0, -3k+5)$ avec $k \in ℤ$.

Exercice 4

Un laboratoire de sciences physiques dispose d'un ensemble d'oscilloscopes de même modèle. La durée de vie, en nombre d'années, d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,125.

Dans tout l'exercice on donnera les résultats à 10^{-3} près par défaut.

1) a) Montrer que $p(X > 10) = 0,286$.

b) Calculer la probabilité qu'un oscilloscope ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

2) Le responsable du laboratoire veut commander n oscilloscopes ($n \geq 2$).

On suppose que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres.

On note p_1 la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

a) Exprimer p_1 en fonction de n.

b) Combien d'oscilloscopes, au minimum, devrait commander le responsable pour que p_1 soit supérieure à 0.999 ?

Contenu

- *Loi de probabilité continue (loi exponentielle)*
- *Loi binomiale*

Aptitudes visées :

- *Calculer la probabilité d'un évènement pour une loi exponentielle.*
- *Reconnaître une loi binomiale*
- *Calculer la probabilité d'un évènement pour une loi binomiale.*

Solutions

1. **a)** $p(X > 10) = e^{-0,125\times 10} = e^{-1,25} = 0,286.$

b) L'évènement « l'oscilloscope a une durée de vie inférieur à 6 mois » se traduit par $0 \leq X \leq 0,5$.

$p(0 \leq X \leq 0,5) = 1 - e^{-\frac{0,125}{2}} = 1 - e^{-0,0625} = 0,06.$

2. On considère la variable aléatoire Y qui prend pour valeurs, le nombre d'oscilloscopes qui ont une durée de vie supérieure à 10 ans. Y suit une loi binomiale de paramètres $(n, p(X > 10) = 0.286)$.

La loi de Y est donnée par $p(Y = k) = C_n^k (0.286)^k (0.714)^{n-k}$, $k \in \{0, 1, ..., n\}$.

a) $p_1 = p(\overline{Y = 0}) = 1 - p(Y = 0) = 1 - (0,714)^n$.

b) $p_1 \geq 0{,}999 \Leftrightarrow 1-\left(0{,}714\right)^n \geq 0{,}999 \Leftrightarrow \left(0{,}714\right)^n \leq 0{,}001 \Leftrightarrow n\ln\left(0{,}714\right) \leq \ln\left(0{,}001\right)$

$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln\left(0{,}001\right)}{\ln\left(0{,}714\right)} = 20.505$. Soit $n = 21$.

Exercice 5

I] On considère la fonction f_2 définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par $f_2(x) = x^2 - \ln x$ et on désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f_2(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f_2(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

c) Dresser le tableau de variation de f_2.

2) On a tracé ci-dessous , dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (L) de la fonction ln et la courbe (C) d'équation y = x².

a) Soit x > 0. On considère les points M et M_2 de même abscisse x et appartenant respectivement à (L) et (C). Vérifier que $MM_2 = f_2(x)$.

b) Construire alors les points de la courbe (Γ) d'abscisses respectives 2, $\dfrac{1}{e}$ et $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

c) Tracer la courbe (Γ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

II] 1) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_k définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par $f_k(x) = x^k - \ln x$.

a) Déterminer f_k' la fonction dérivée de f_k.

b) Montrer que f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}$ égal à $\dfrac{1+\ln k}{k}$.

c) Pour tout réel x > 0, on considère les points $M_k\,(x,x^k)$ et M (x,ln x).

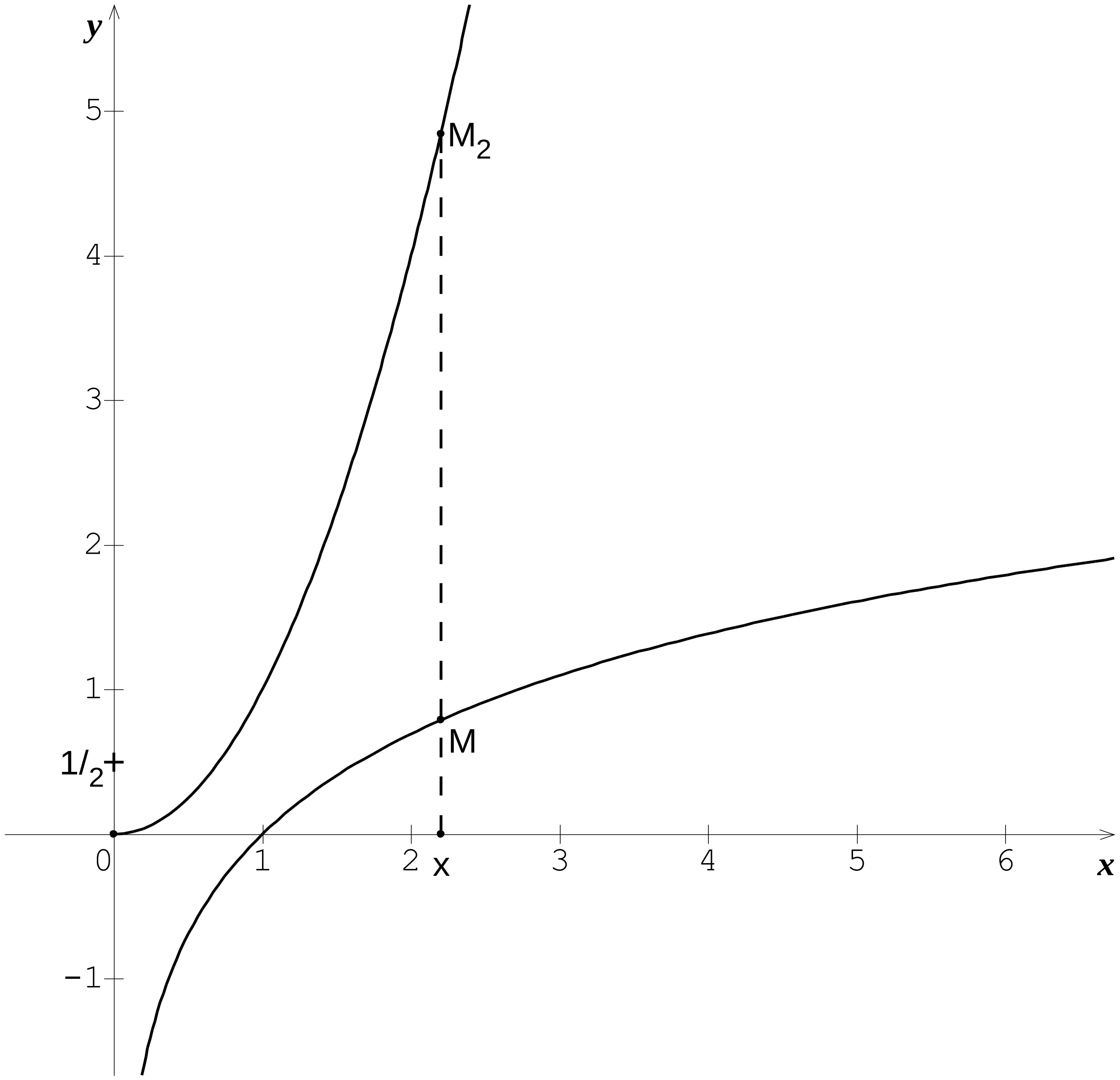
Déterminer la valeur minimale de la distance MM_k.

2) Pour tout entier k ≥ 2, on pose $u_k = \sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}$.

a) Vérifier que $\ln u_k = -\dfrac{\ln k}{k}$ et en déduire la limite de (u_k).

b) Soit A(1, 0) et A_k le point de coordonnées $(u_k, f_k(u_k))$.

Calculer la limite de la distance AA_k lorsque k tend vers +∞.



- *Fonction ln : continuité, dérivabilité, branches infinies .*
- *Notion d'extremum*
- *Suite réelle.*

Aptitudes visées :

- *Calculer la limite d'une fonction.*
- *Interpréter graphiquement un résultat.*
- *Etudier les variations d'une fonction.*
- *Reconnaître un minimum d'une fonction.*
- *Calculer la limite d'une suite réelle.*

Solutions

I.

1. **a)** $\lim\limits_{x\to 0^+} f_2(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\dfrac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x - \dfrac{\ln x}{x} = +\infty$ donc Γ admet une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$.

c) La fonction f_2 est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f_2'(x) = 2x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2-1}{x}$.

Le signe de $f_2'(x)$ est celui de $2x^2-1$. $\begin{cases} 2x^2-1 \\ x \in]0,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

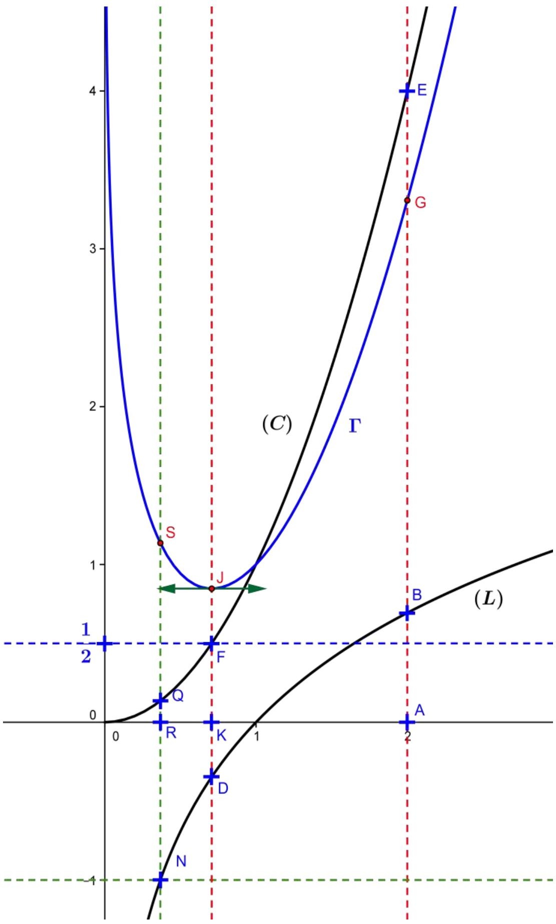
x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	
f_2	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

2. **a)** Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $MM_2 = |x^2 - \ln x| = |f_2(x)| = f_2(x)$ car f_2 admet un minimum global strictement positif sur $]0,+\infty[$ donc $f_2(x) > 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

b) *) La droite passant par le point A de l'axe des abscisses d'abscisse 2 et parallèle à l'axe des ordonnées coupe (L) en B et (C) en E. Ainsi le point de Γ d'abscisse 2 est le point G de $[AE)$ tel que $EG = AB$.

**) Du point de l'axe des ordonnées d'ordonnée -1, on mène la parallèle à l'axe des abscisses. Elle coupe (L) en N. Du point N on mène la parallèle à l'axes des ordonnées. Elle coupe (C) en Q et l'axes des abscisses en R, le point de Γ d'abscisse $\dfrac{1}{e}$ est alors le point S du segment $[RQ]$ tel que $RS = NQ$.

***) Du point de l'axe des ordonnées d'ordonnée $\dfrac{1}{2}$ on mène la parallèle à l'axe des abscisses. Elle coupe (C) en F et de F on mène la parallèle à l'axe des ordonnées elle coupe (L) en H et l'axe des abscisses en K, le point de Γ d'abscisse $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ est alors le point J de la demi-droite $[KF)$ tel que $KJ = HF$.



II.

1. **a)** La fonction f_k est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x \in]0,+\infty[$, $f_k'(x) = kx^{k-1} - \frac{1}{x} = \frac{kx^k - 1}{x}$.

b) $f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ de plus $f_k'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ et $f_k'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$. il en résulte que f_k' s'annule en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ en changeant de signe, d'où f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ égal à

$$f_k\left(\sqrt[k]{\frac{1}{k}}\right) = \left(\sqrt[k]{\frac{1}{k}}\right)^k - \ln\sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\ln k = \frac{1+\ln k}{k}.$$

c) $MM_k = \left|x^k - \ln x\right| = \left|f_k(x)\right| = f_k(x)$ car le minimum de f_k est $\frac{1+\ln k}{k} > 0$ pour $k \geq 2$. Donc la valeur minimale de MM_k est la valeur minimale de f_k sur $]0,+\infty[$ qui est égale à $f_k\left(\sqrt[k]{\frac{1}{k}}\right) = \frac{1+\ln k}{k}$..

2. **a)** Pour tout $k \geq 2$, $\ln u_k = \ln\sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k}\ln\frac{1}{k} = \frac{-\ln k}{k}$. $\lim\limits_{k\to+\infty} \ln u_k = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{-\ln k}{k} = 0$ d'où $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 1$.

b) $AA_k = \sqrt{(1-u_k)^2 + (f_k(u_k))^2}$. Or $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 1$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k(u_k) = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1+\ln k}{k} = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{k} + \frac{\ln k}{k} = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} AA_k = \lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt{(1-u_k)^2 + (f_k(u_k))^2} = 0$.

Correction examen du baccalauréat section mathématiques session principale 2012

Une correction possible proposée par Kooli Mohamed Hechmi

Exercice 1

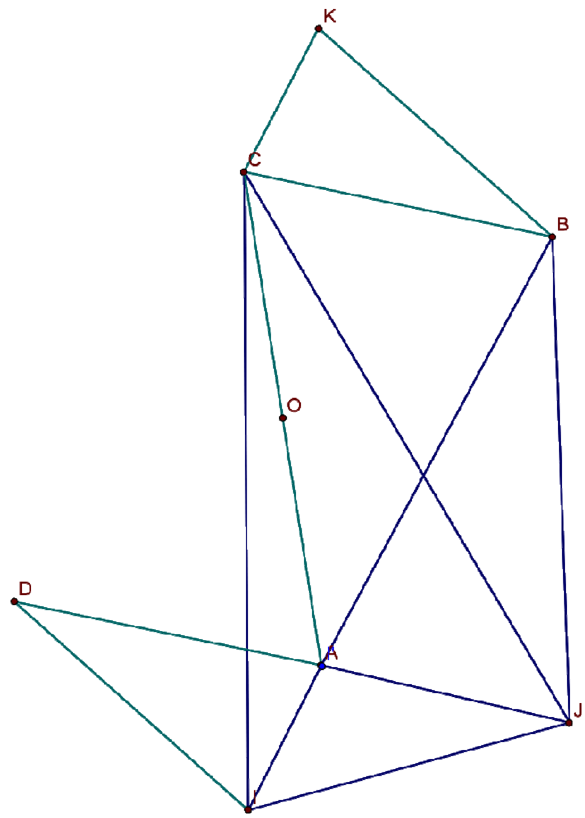
1) On a : $\forall x \in \left[\frac{1}{2}\ ,\ 5\right]$; $f'(x) > 0$ **alors Faux**

2) $\int_1^2 f'(x)\,dx = \ [f(x)]_1^3 = f(3) - f(1) = 1 - 0 = 1$ **alors Vrai**

3) Il existe un réel $x_0 \in [1\ ,\ 2]$ tel que $f'(x_0) = \frac{1}{2}$; alors (C) admet une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$ **alors Vrai**

4) On a f est dérivable sur $[1\ ,\ 3]$ et $\forall x \in [1\ ,\ 3]$; $f'(x) \leq 1$
alors d'après le corollaire des inégalités des accroissements finis on a pour tout a et b de $[1\ ,\ 3]$; $|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$ **alors Vrai**

Exercice 2



1) a) On a : $\begin{cases} CI = CJ \\ (\overrightarrow{CI}\ ,\overrightarrow{CJ}\ ) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \quad r_C(I) = J$

b) On a : $r_B o\ t(I) = r_B\big(t(I)\big) = r_B(A) = J$ (car $t(I) = A$)

c) On a : r_C est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ et $r_B o\ t$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$. Or $r_C(I) = r_B o\ t(I)$ par suite $r_C = r_B o\ t$ (deux rotations de même angle qui coïncident en un point sont égales).

2) On a : $K = t(C)$

On a : $r_C(C) = C$ alors $r_B o\ t(C) = C \Leftrightarrow r_B(K) = C \Leftrightarrow \begin{cases} BC = BK \\ (\overrightarrow{BK}\ ,\overrightarrow{BC}\ ) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \end{cases}$

Alors $BC = BK$ et $(\overrightarrow{BC}\ ,\overrightarrow{BK}\ ) \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

3) a) On a $O = A * C \Leftrightarrow \boldsymbol{S_O(A) = C}$ et on a $K = t(C) \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{CK} \Leftrightarrow IAKC$ est un parallélogramme et comme les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux alors $O = I * K \Leftrightarrow \boldsymbol{S_O(I) = K}$

D'autre part on a $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{CK} \Rightarrow \boldsymbol{IA = CK}$

On a DIA est un triangle direct isocèle en D et $(\overrightarrow{DI}\ ,\overrightarrow{DA}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ et on sait que toute symétrie centrale est un déplacement donc S_O transforme DIA en un triangle direct isocèle or BKC est un triangle direct isocèle et $(\overrightarrow{BK}\ ,\overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

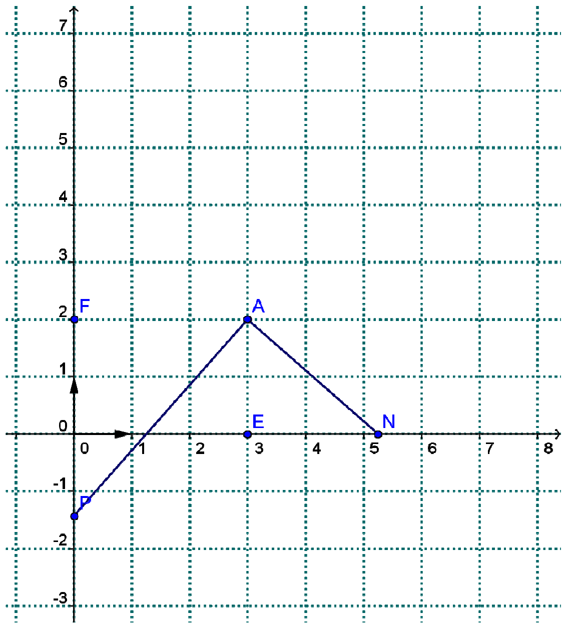
donc d'après ce qui précède : $S_O(A) = C$; $S_O(I) = K$; $IA = CK$

et $(\overrightarrow{DI}\ ,\overrightarrow{DA}) \equiv (\overrightarrow{BK}\ ,\overrightarrow{BC})\ [2\pi]$ alors l'image du triangle DIA par la symétrie centrale de centre O est le triangle BKC.

b) L'image du triangle DIA par la symétrie centrale de centre O est le triangle BKCet $S_O(A) = C$ et $S_O(I) = K$ alors $S_O(D) = B$

De ce qui précède on a $O = A * C$ et $O = D * B$ donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 3



1) a) On a $A \neq E$ et $A \neq F$ alors il existe une unique similitude directe S de centre A qui transforme E en F.

Soit k le rapport de S donc $k = \frac{AF}{AE} = \frac{\sqrt{(-3)^2+0^2}}{\sqrt{0^2(-2)^2}} = \frac{3}{2}$ et soit α une mesure de son angle alors $\alpha \equiv \left(\overrightarrow{AE}\,,\overrightarrow{AF}\right)[2\pi]$ donc $\alpha \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

b) On a $E \in (O\,,\vec{u})$ et S d'angle $-\frac{\pi}{2}$ alors l'image de l'axe $(O\,,\vec{u})$ est la droite perpendiculaire à (OE) et passant par $S(E) = F$ donc l'image de l'axe $(O\,,\vec{u})$ est la droite $(O,\vec{v})$

c) On a $(AN) \perp (AP)$ donc $S\big((AN)\big) = (AP)$ or $N \in (AN) \cap (O\,,\vec{u})$ donc $S(N) \in S\big((AN)\big) \cap S((O\,,\vec{u}))$ donc $S(N) \in (AP) \cap (O\,,\vec{u}) = \{P\}$ donc $S(N) = P$

d) On S est une similitude directe de centre A de rapport $\frac{3}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et $S(M) = M'$ donc l'écriture complexe de S et $z' = az + b$ avec $a = \frac{3}{2}e^{-\frac{i\pi}{2}} = -\frac{3}{2}i$ et $z_A = \frac{b}{1-a}$ donc $b = (3+2i)\left(1+\frac{3}{2}i\right) = 3 + \frac{9}{2}i + 2i - 3 = \frac{13}{2}i$

par suite $z' = -\frac{3}{2}iz + \frac{13}{2}i$

2) a) On a N d'abscisse x et $N \in (O\,,\vec{u})$ donc $N(x\,,0)$ donc $z_N = x$ et P d'ordonnée y et $P \in (O\,,\vec{v})$ donc $P(0\,,y)$ donc $z_p = yi$

On a $S(N) = P \Leftrightarrow z_p = -\frac{3}{2}iz_N + \frac{13}{2}i \Leftrightarrow yi = -\frac{3}{2}ix + \frac{13}{2}i \Leftrightarrow 2yi = -3ix + 13i$

$\Leftrightarrow (3x + 2y - 13)i = 0$ donc $3x + 2y = 13$

b) Soit l'équation $(E) : 3x + 2y = 13$ on remarque bien que le couple $(3\,,2)$ est une solution de (E) en effet $3 \times 3 + 2 \times 2 = 9 + 4 = 13$

on a donc $3x + 2y = 3 \times 3 + 2 \times 2$ donc $3(x - 3) = 2(-y + 2)$ donc 2 divise $3(x - 3)$

or 3 et 2 sont premier entre eux donc 2 divise $(x - 3)$ il existe donc un entier relatif k tel que $x - 3 = 2k$ donc $x = 2k + 3$ en remplaçant dans $3(x - 3) = 2(-y + 2)$ on a alors $3 \times 2k = 2(-y + 2)$ donc $-y + 2 = 3k$ donc $y = -3k + 2$

D'où $x = 2k + 3$ et $y = -3k + 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

<u>vérification</u> si $x = 2k + 3$ et $y = -3k + 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$

alors $3(2k + 3) + 2(-3k + 2) = 3 \times 2k + 9 - 2 \times 3k + 4 = 13$

Les solutions de (E) sont $x = 2k + 3$ et $y = -3k + 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$

On a $S(N) = P \Leftrightarrow 3x + 2y = 13$ donc les points N et P dont les coordonnées sont entières sont les points $N(2k + 3\,,0)$ et $P(0\,,-3k + 2)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 4

1) a) $p(X > 10) = e^{-10\times 0{,}125} \approx 0{,}286$

b) 6 mois = 0,5 ans donc $p(X < 0{,}5) = 1 - e^{-0{,}6\times 0{,}125} \approx 0{,}060$

2) a) Soit l'événement A : « au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans »

donc $\overline{A}$: « aucun oscilloscope n' ait une durée de vie supérieure à 10 ans »

donc $\overline{A}$: « tous les oscilloscopes ont une durée de vie inférieure à 10 ans »

$p_1 = p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - (1 - 0{,}286)^n = 1 - (0{,}714)^n$

b) $p_1 > 0{,}999 \Rightarrow 1 - (0{,}714)^n > 0{,}999 \Rightarrow (0{,}714)^n < 0{,}001 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln(0{,}714)^n < \ln 0{,}001 \Rightarrow n\ln 0{,}714 < \ln 0{,}001 \Rightarrow n > \frac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}714}$ (car $\ln 0{,}714 < 0$)

donc $n > 20{,}526$ donc $n = 21$

donc le nombre minimal d'oscilloscopes est 21

Exercice 5

1) a) $f_2(x) = x^2 - \ln x$

$$\lim_{x\to 0^+} f_2(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 - \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f_2(x) = \lim_{x\to +\infty} x^2 - \ln x = \lim_{x\to +\infty} x^2\left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

b)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - \ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} x - \frac{\ln x}{x} = +\infty$$

La courbe (Γ) admet une branche parabolique de direction $(O\,,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$

c) f_2 est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et pour tout $x \in\,]0\,,+\infty[$ $\ (f_2)'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$

donc $(f_2)'(x)$ est du signe de $2x^2 - 1$ sur $]0\,,+\infty[$

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$(f_2)'(x)$	‖	$-$		$+$	
$f_2(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}(1+\ln 2)$	↗	$+\infty$

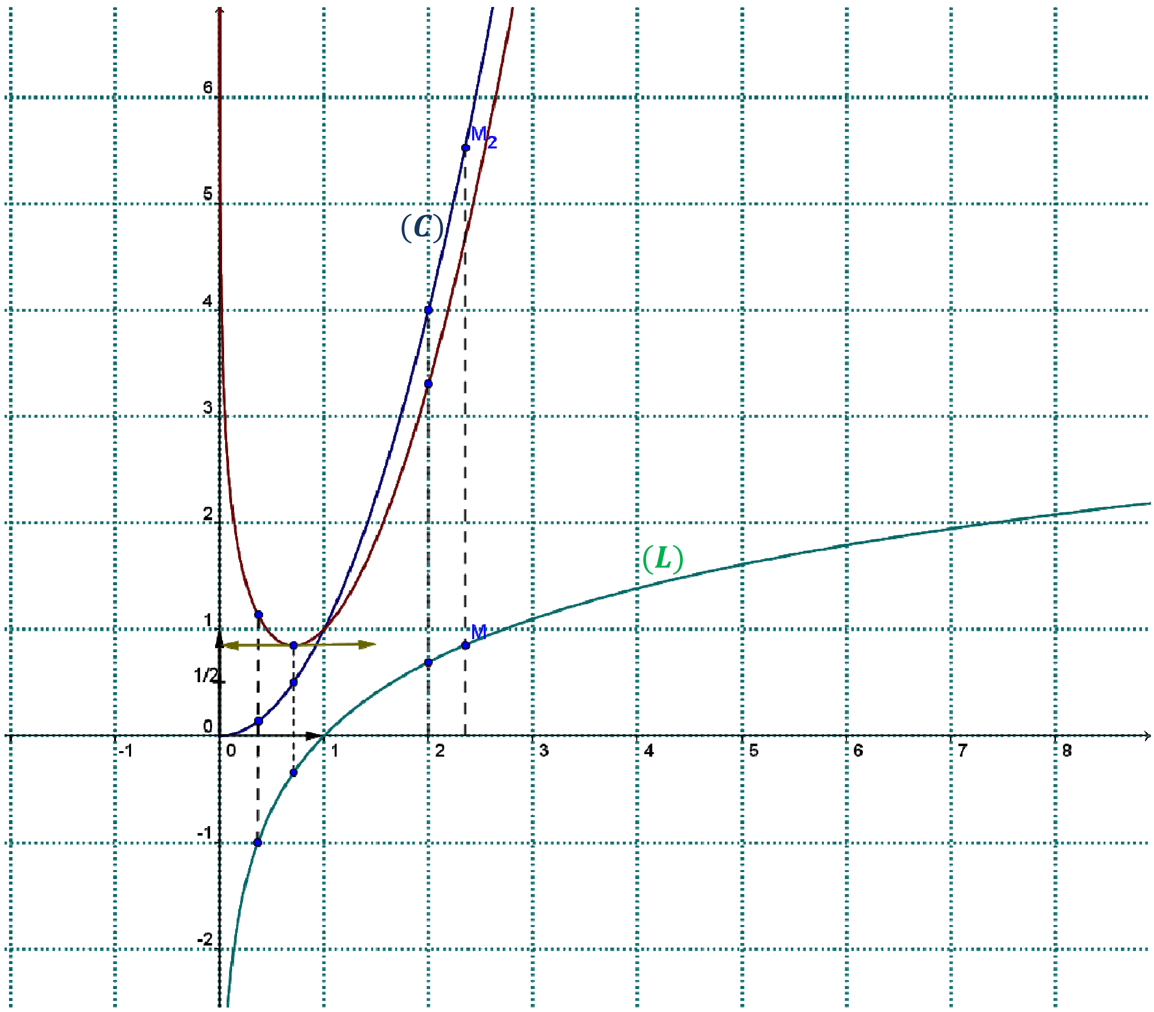
2) a) Soit $x > 0$ $\ M(x\,,\ln x) \in (L)$ $\ M_2(x\,,x^2) \in (C)$

On a $MM_2 = \sqrt{(x-x)^2 + (x^2 - \ln x)^2} = \sqrt{(x^2 - \ln x)^2} = |x^2 - \ln x| = |f_2(x)|$

or d'après **1) c)** $f_2(x) > 0$ donc $MM_2 = f_2(x)$

b) On trace la droite d'équation $x = 2$ elle coupe (L) en M et (C) en M_2, avec le compas on prend la distance MM_2 , puis on met la pointe sèche du compas sur le point de l'axe $(O\,,\vec{i})$ d'abscisse 2 et avec la mine on fait une trace sur la droite d'équation $x = 2$ de cette manière on a construit le point d'abscisse 2 et appartenant à (Γ), on répète la même chose pour les autres points.

c)

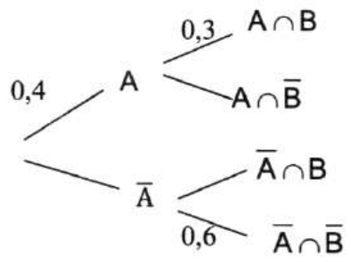


REPUBLIQUE TUNISIENNE ◊◊◊ MINISTERE DE L'EDUCATION	EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2012		
	Epreuve : MATHEMATIQUES	Durée : 4 h	Coefficient : 4
SECTION : mathématiques		Session de contrôle	

Le sujet comporte 3 pages.

Exercice 1 (3 points)

Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre de probabilité suivant :



Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes en justifiant la réponse :

1) $p(\overline{A}) = 0,6$.
2) La probabilité de $\overline{B}$ sachant A est égale à 0,7.
3) $p(B)=0,7$.
4) $p(A\cup B) = 0,64$.

Exercice 2 (4 points)

Soit a un réel strictement positif.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1+ i)\, a\, z + i\, a^2 = 0$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

   On désigne par A et B les points d'affixes respectives a et ia.

   a) Quelle est la nature du triangle OAB ?

   b) Déterminer l'affixe du point C tel que OACB soit un carré.

3) Soient P et Q les points du plan tels que les triangles OAP et AQC sont équilatéraux de sens direct.

   a) Montrer que l'affixe de P est égale à $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) a$.

   b) Calculer l'affixe du point Q.

   c) Montrer que les points B, P et Q sont alignés.

Exercice 3 (3 points)

1) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $7x + 18y = 9$.

a) Montrer que le couple $(9,-3)$ est une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).

2) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$, le système $\begin{cases} n \equiv 6 \pmod 7 \\ n \equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$

Exercice 4 (5 points)

On considère dans le plan orienté un carré ABCD de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On note I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [AD].

Soit S la similitude directe qui transforme A en O et B en J.

1) Montrer que S est de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2) a) Déterminer les images des droites (BC) et (AC) par S.

b) En déduire S(C).

3) a) Déterminer l'image du carré ABCD par S.

b) En déduire que S(D) = K.

c) Soit Ω le centre de S. Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés (C ,1) et (K , 4).

d) Soit E le milieu du segment [OD]. Montrer que $S\circ S(A) = E$.

e) Construire Ω.

4) Montrer que les droites (AE), (CK) et (DI) sont concourantes.

Exercice 5 (5 points)

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = 1 + x - x\ln x$.

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $]0,+\infty[$.

Vérifier que $3,5 < x_0 < 3,6$.

c) En déduire le signe de g.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2 / 3

a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x^2)}{x\,(1+x^2)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Vérifier que $f(\sqrt{x_0}) = \dfrac{1}{2\,x_0}$.

d) Tracer la courbe (C). (On prendra $x_0 \approx 3,6$)

3) Soit (a_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_n = \int_1^{\frac{1}{n}} f(t)\,dt$.

a) Montrer que la suite (a_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0,1[$, $\ln x \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \ln x$.

c) En déduire que $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1+\ln n}{n}\right) \leq a_n \leq 1-\dfrac{1+\ln n}{n}$.

d) Montrer alors que la suite (a_n) est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $[\frac{1}{2},1]$.

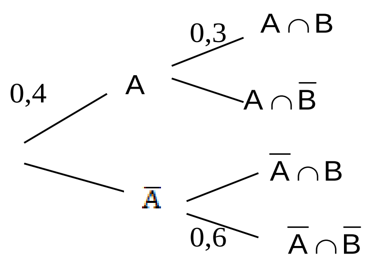
MATHS

Section : Mathématiques

Session de contrôle

Exercice 1

Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre de probabilité suivant :



Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes en justifiant la réponse :

1) $p(\overline{A}) = 0,6$.
2) La probabilité de $\overline{B}$ sachant A est égale à 0,7.
3) $p(B)=0,7$.
4) $p(A\cup B) = 0,64$.

Contenu

- *Probabilité d'un évènement*
- *Probabilité conditionnelle*

Solutions

1. Vrai. En effet : $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0,4 = 0,6$.

2. Vrai. En effet : $p(\overline{B}|A) = 1 - p(B|A) = 1 - 0,3 = 0,7$.

3. Faux. Car $p(B) = p(B\cap A) + p(B\cap \overline{A}) = p(A)\times p(B|A) + p(\overline{A})\times p(B|\overline{A})$

$$= p(A)\times p(B|A) + p(\overline{A})\left(1 - p(\overline{B}|\overline{A})\right) = 0,4\times 0,3 + 0,6\times 0,4 = 0,36.$$

4. Vrai. En effet : $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) = 0,4 + 0,36 - 0,12 = 0,64$.

Exercice 2

Soit a un réel strictement positif.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1+i)\,a\,z + i\,a^2 = 0$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A et B les points d'affixes respectives a et ia.

a) Quelle est la nature du triangle OAB ?

b) Déterminer l'affixe du point C tel que OACB soit un carré.

3) Soient P et Q les points du plan tels que les triangles OAP et AQC sont équilatéraux de sens direct.

a) Montrer que l'affixe de P est égale à $(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})\,a$.

b) Calculer l'affixe du point Q.

c) Montrer que les points B, P et Q sont alignés.

Contenu

- *Equation du second degré dans*
- *Affixe d'un point, point image*
- *Configuration du plan*

Aptitudes visées :

- *Résoudre une équation du second degré dans*
- *Déterminer l'affixe d'un point*
- *Exploiter des écritures complexes pour montrer l'alignement de trois points.*

Solutions

1. $\Delta = 2ia^2 - 4ia^2 = -2ia^2 = [(1-i)a]^2$. On en déduit que $z_1 = a$ et $z_2 = ia$. $S_{\mathbb{C}} = \{a, ia\}$.

2. **a)** Puisque $z_{\overrightarrow{OA}} = a$ et $z_{\overrightarrow{OB}} = ia$ donc $\begin{cases} OA = OB = |a| = a \\ \dfrac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}} = i \end{cases}$ d'où $OA = OB$ et $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$.

On en déduit que le triangle OAB est rectangle isocèle en O.

b) On sait que le triangle OAB est rectangle isocèle en O, par suite OACB est un carré si et seulement si $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ équivaut à $(z_{\overrightarrow{OA}} = z_{\overrightarrow{BC}})$ équivaut à $(a = z_C - ia)$ équivaut à $(z_C = a + ia)$.

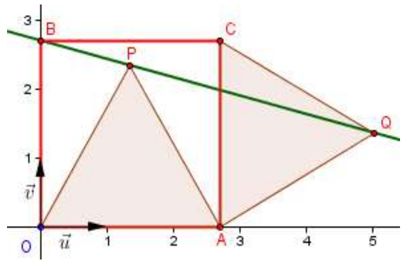
Ainsi OACB est un carré si et seulement si $z_C = a + ia$.

3. **a)** Le triangle OAP est équilatéral de sens direct donc P est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ par suite $z_P = e^{i\frac{\pi}{3}}a$, on en déduit que $z_P = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$.

b) Le triangle AQC est équilatéral de sens direct donc Q est l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ par suite $z_Q = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_C - z_A) + z_A$, on en déduit que $z_Q = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(ia) + a = a\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$.

c) $\dfrac{z_P - z_B}{z_Q - z_B} = \dfrac{\frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \dfrac{1 + i\left(\sqrt{3} - 2\right)}{2 + \sqrt{3} - i} = \dfrac{\left(1 + i\left(\sqrt{3} - 2\right)\right)\left(2 + \sqrt{3} + i\right)}{\left(2 + \sqrt{3}\right)^2 + 1} = \dfrac{2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 2}{\left(2 + \sqrt{3}\right)^2 + 1} = \dfrac{2}{3 + \sqrt{3}}$.

Il en résulte que $\dfrac{z_{\overrightarrow{BP}}}{z_{\overrightarrow{BQ}}}$ est réel, donc les vecteurs $\overrightarrow{BP}$ et $\overrightarrow{BQ}$ sont colinéaires par suite les points B, P et Q sont alignés.



Exercice 3

1) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : 7 x + 18 y = 9.

a) Montrer que le couple (9,–3) est une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

2) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$, le système $\begin{cases} n \equiv 6 \pmod 7 \\ n \equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$

Contenu

- *Equation de type a x + b y = c où a, b et c sont des entiers*

Aptitudes visées :

- *Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ une équation de type a x + b y = c où a, b et c sont des entiers*
- *Résoudre un problème d'arithmétique*

Solutions

1. a) $7 \times 9 + 18 \times (-3) = 9 \times (7 - 6) = 9$ donc $(9,-3)$ est solution de (E).

b) On sait que $(9,-3)$ est solution de (E), donc $7x + 18y = 7 \times 9 + 18 \times (-3) \Leftrightarrow 7(x - 9) = 18(-y - 3)$. $(*)$

7 divise $18(-y-3)$ et $7 \wedge 18 = 1$ donc d'après Gauss que 7 divise $-y-3$ donc $-y-3 = 7k,\ k \in \mathbb{Z}$

Par suite $y = -7k - 3,\ k \in \mathbb{Z}$. En remplaçant y par sa valeur dans $(*)$, on obtient $x = 18k + 9,\ k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement : Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $7(18k + 9) + 18(-7k - 3) = 7 \times 9 + 18 \times (-3) = 9$.

On en déduit que $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(18k + 9, -7k - 3), k \in \mathbb{Z}\}$.

2. $\begin{cases} n \equiv 6 \pmod 7 \\ n \equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$ si et seulement s'il existe $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $\begin{cases} n = 6 + 7x \\ n = 15 + 18y \end{cases}$ donc $6 + 7x = 15 + 18y$ d'où $7x + 18(-y) = 9$. D'après 1) b) il en résulte que $x = 18k + 9,\ k \in \mathbb{Z}$, par suite $n = 69 + 126k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement : Si $n = 69 + 126k,\ k \in \mathbb{Z}$, comme $\begin{cases} 126 = 18 \times 7 \\ 69 \equiv 6 \pmod 7 \\ 69 \equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$ alors $\begin{cases} n \equiv 6 \pmod 7 \\ n \equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$.

On en déduit que $S_{\mathbb{Z}} = \{69 + 126k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 4

On considère dans le plan orienté un carré ABCD de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On note I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [AD].

Soit S la similitude directe qui transforme A en O et B en J.

1) Montrer que S est de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2) a) Déterminer les images des droites (BC) et (AC) par S.
   b) En déduire S(C).
3) a) Déterminer l'image du carré ABCD par S.
   b) En déduire que S(D) = K.
   c) Soit Ω le centre de S. Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés (C ,1) et (K , 4).
   d) Soit E le milieu du segment [OD]. Montrer que SoS(A) = E.
   e) Construire Ω.
4) Montrer que les droites (AE), (CK) et (DI) sont concourantes.

Contenu

- *Similitude directe*
- *Image d'une configuration de base par une similitude directe*

Aptitudes visées :

- *Reconnaître une similitude directe.*
- *Construction du centre d'une similitude directe*
- *Montrer que trois droites sont concourantes*

Solutions

1. Le rapport de S est $k = \frac{OJ}{AB} = \frac{\frac{1}{2}AD}{AD} = \frac{1}{2}$.

Une mesure de l'angle de S est $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OJ}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)\ [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

2. **a)** $S\ B = J$ donc $S\ BC$ est la droite passant par J et perpendiculaire à BC d'où $S\ BC = CD$.

$S\ A = O$ donc $S\ AC$ est la droite passant par O et perpendiculaire à AC d'où $S\ AC = BD$.

b) $C \in AC \cap BC$ donc $S\ C \in S\ AC \cap S\ BC = BD \cap CD = D$ d'où $S\ C = D$.

3. **a)** Le carré ABCD est un carré direct donc son image par S est un carré direct.

Or $S\ A = O$, $S\ B = J$, $S\ C = D$ et le carré OJDK est un carré direct, on en déduit que l'image du carré ABCD par S est le carré OJDK.

b) Puisque l'image du carré ABCD par S est le carré OJDK or $S\ A = O$, $S\ B = J$ et $S\ C = D$,

on en déduit que $S\ D = K$.

c) On a $S\ C = D$ et $S\ D = K$ donc $S \circ S\ C = K$, or $S \circ S$ est la similitude directe de centre Ω, de rapport $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ et d'angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \equiv \pi \quad 2\pi$ donc $S \circ S$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{4}$. Il en résulte que $\overrightarrow{\Omega K} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{\Omega C}$ donc $\overrightarrow{\Omega C} + 4\overrightarrow{\Omega K} = \vec{0}$ par suite Ω est le barycentre des points pondérés $C,1$ et $K,4$.

d) $S \circ S\ A = S\ O$, or O est le milieu de AC donc $S\ O$ est le milieu de $[S\ A\ S\ C] = OD$, il en résulte que $S\ O = E$ par suite $S \circ S\ A = E$.

e) On sait que $S \circ S$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{4}$ et $S \circ S\ A = E$ donc Ω appartient à la droite AE d'où Ω est le point d'intersection des droites AE et KC. D'où la construction de Ω.

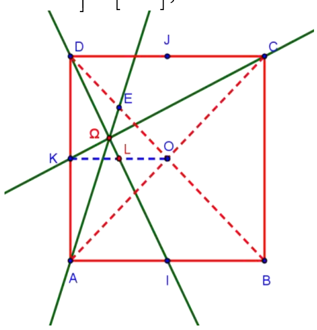
4. Les droites AE et CK sont sécantes en Ω.

Soit L le milieu de $[OK]$, puisque K est le milieu de $[AD]$ donc $S\ K$ est le milieu de $[S\ A\ S\ D] = [OK]$, il en résulte que $S\ K = L$ par suite $S \circ S\ D = L$. On en déduit que $\Omega \in DL$.

Montrons que $I \in DL$. soit h l'homothétie de centre D et de rapport 2.

$h\ K = A$ et $h\ O = B$ donc $h\ L = I$. Il en résulte que $I \in DL$ et par suite $\Omega \in DI$.

On en déduit que les droites AE, CK et DI sont concourantes en Ω.



Exercice 5

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par g(x) = 1 + x – x lnx.

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution x_0 dans $]0,+\infty[$.

Vérifier que $3,5 < x_0 < 3,6$.

c) En déduire le signe de g.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x^2)}{x\,(1+x^2)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Vérifier que $f(\sqrt{x_0}) = \dfrac{1}{2\,x_0}$.

d) Tracer la courbe (C). (On prendra $x_0 \approx 3,6$)

3) Soit (a_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_n = \int_1^{\frac{1}{n}} f(t)\,dt$.

a) Montrer que la suite (a_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0,1[$, $\ln x \leq f(x) \leq \frac{1}{2}\ln x$.

c) En déduire que $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1+\ln n}{n}\right) \leq a_n \leq 1-\frac{1+\ln n}{n}$.

d) Montrer alors que la suite (a_n) est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $[\frac{1}{2},1]$.

Contenu

- *Fonction ln : continuité, dérivabilité, branches infinies , variation, courbe représentative .*
- *Théorème de la bijection*
- *Calcul intégral, suite réelle.*

Aptitudes visées :

- *Déterminer le signe d'une expression*
- *Etudier les variations d'une fonction. Déterminer un extremum d'une fonction*
- *Etudier une suite définie par une intégrale*
- *Encadrer la limite d'une suite réelle.*

Solutions

1. **a)** La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x \in]0,+\infty[$,

$$g'(x) = 1-\left(\ln x + x\frac{1}{x}\right) = -\ln x.\quad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} 1+x-x\ln x = 1 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (1+x)(1-\ln x) = -\infty.$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

b) La fonction g est continue et strictement croissante sur $]0,1]$ donc $g(]0,1]) =]1,2]$, par suite $g(x) > 0$ sur $]0,1]$.

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ donc g réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $g(]1,+\infty[) =]-\infty,2[$, $0 \in]-\infty,2[$ donc il existe un unique réel x_0 de $]1,+\infty[$ tel que $g(x_0) = 0$.

On en déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique solution x_0 dans $]0,+\infty[$.

La fonction g est continue sur $[3.5,3.6]$ et $g(3,5) \approx 0,11 > 0$ et $g(3,6) \approx -0,01 < 0$ d'où $3,5 < x_0 < 3,6$.

c) Pour tout $x \in]0,1]$, on a $g(x) > 0$.

g est strictement décroissante sur $[1,x_0]$ et $g(x_0) = 0$ donc $g(x) > g(x_0) = 0$, pour tout $x \in [1,x_0[$.

g est strictement décroissante sur $[x_0,+\infty[$ et $g(x_0)=0$ donc $g(x)<g(x_0)=0$, pour tout $x\in\,]x_0,+\infty[$.

x	0		x_0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

2. a) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x\in\,]0,+\infty[$,

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(1+x^2)-2x\ln x}{(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2-x^2\ln(x^2)}{x(1+x^2)^2}=\frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$$

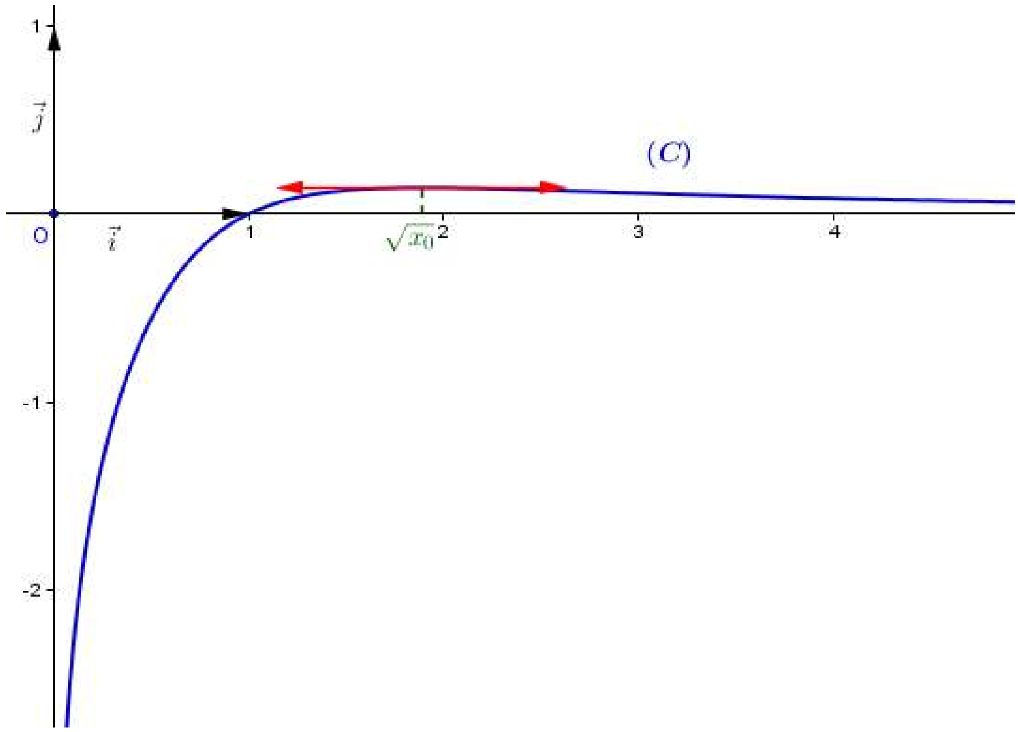
b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x^2)$. $\begin{cases} g(x^2)=0 \\ x\in\,]0,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=x_0 \\ x\in\,]0,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{x_0}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x}+x}=0.$$

x	0		$\sqrt{x_0}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\sqrt{x_0})$	$\searrow$	0

c) $f(\sqrt{x_0})=\dfrac{\ln\sqrt{x_0}}{1+x_0}=\dfrac{\ln x_0}{2(1+x_0)}$ or $g(x_0)=0$ donc $\ln x_0=\dfrac{1+x_0}{x_0}$ d'où $f(\sqrt{x_0})=\dfrac{\frac{1+x_0}{x_0}}{2(1+x_0)}=\dfrac{1}{2x_0}$.

d)



3. a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit F la primitive de f sur $]0,1]$ qui s'annule en 1, il en résulte que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$a_n=F\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Pour tout $x\in[0,1]$, on a $f(x)\le 0$ donc F est décroissante sur $[0,1]$, or pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0<\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{n}\le 1$

donc $F\left(\frac{1}{n+1}\right)\ge F\left(\frac{1}{n}\right)$ d'où $a_n\le a_{n+1}$ par suite (a_n) est croissante.

b) Pour tout $x\in[0,1]$, $1\le 1+x^2\le 2$ donc $\frac{1}{2}\le\frac{1}{1+x^2}\le 1$, comme $\ln x<0$, $x\in]0,1[$ donc

$\ln x\le\frac{\ln x}{1+x^2}\le\frac{1}{2}\ln x$ d'où $\ln x\le f(x)\le\frac{1}{2}\ln x$.

c) Pour tout $x\in[0,1]$, $\ln x\le f(x)\le\frac{1}{2}\ln x$, les fonctions f, $x\mapsto\ln x$ et $x\mapsto\frac{1}{2}\ln x$ sont continues sur $\left[\frac{1}{n},1\right]$

donc $\int_{\frac{1}{n}}^{1}\ln x\,dx\le\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(x)\,dx\le\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\ln x\,dx$ d'où $\left[x\ln x-x\right]_{\frac{1}{n}}^{1}\le -a_n\le\frac{1}{2}\left[x\ln x-x\right]_{\frac{1}{n}}^{1}$ par suite

$-1-\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\le -a_n\le\frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)$ donc $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1+\ln n}{n}\right)\le a_n\le 1-\frac{1+\ln n}{n}$.

d) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\ln n\ge 0$ donc $1-\frac{1+\ln n}{n}\le 1$, ainsi (a_n) est croissante et majorée par 1 donc elle est convergente.

De plus $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1+\ln n}{n}\right)\le a_n\le 1-\frac{1+\ln n}{n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1+\ln n}{n}\right)=\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1+\ln n}{n}\right)=1$. On en déduit que $\frac{1}{2}\le\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\le 1$.

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◆◆◆ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** **SESSION DE JUIN 2013**	Epreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : 4 H Coefficient : 4
Section : **MATHEMATIQUES**	**SESSION PRINCIPALE**

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Les pages 4/5 et 5/5 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (3 points)

Pour chacune des affirmations (A$_1$), (A$_2$), (A$_3$) et (A$_4$) ci-dessous, répondre par " Vrai " ou " Faux " en justifiant la réponse.

1) (A$_1$) : Soit n un entier. " Si $33n \equiv 0 \pmod{2013}$ alors $n \equiv 0 \pmod{61}$ ".

(A$_2$) : " L'équation $33x + 11y = 2013$ admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ".

2) Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_1^{\ln x} \frac{e^t}{1+t^2}\,dt$.

(A$_3$) : " F est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ ".

(A$_4$) : " Pour tout x de l'ensemble de dérivabilité de F, $F'(x) = \frac{x}{1+(\ln x)^2}$ ".

Exercice 2 : (4 points)

Le plan est orienté.

Dans l'annexe ci-jointe **(Figure 1)**, OAB est un triangle rectangle en B de sens direct tel que

$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

A) Soit f la similitude directe de centre O qui envoie B en A.

1) Donner une mesure de l'angle de f et montrer que le rapport de f est égal à 2.

2) Soit C l'image de A par f.

a) Montrer que le triangle OCA est rectangle en A de sens direct et que AC = 2AB.

b) Placer le point C.

B) Soit g la similitude indirecte qui envoie B en A et A en C. On note Ω le centre de g.

1) a) Montrer que Ω vérifie la relation $\overrightarrow{\Omega C} = 4\overrightarrow{\Omega B}$.

b) Placer le point Ω.

2) Soit G le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, 2) et H son image par g.

a) Vérifier que $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et en déduire que $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{\Omega B}$; puis montrer que G est le milieu du segment $[\Omega H]$.

c) Montrer que la droite (GH) est l'axe de g.

Exercice 3 : (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

On considère les points $I(1,1,0)$, $J(0,1,1)$ et $K(1,0,-1)$.

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}$.

b) En déduire que les points I, J et K déterminent un plan P dont une équation est $x - y + z = 0$.

2) Soit le point $S(1,-1,1)$. Montrer que le volume du tétraèdre SIJK est égal à $\frac{1}{2}$.

3) Soit la droite Δ passant par I et parallèle à la droite (JK) et soit M un point quelconque de Δ.

a) Montrer que $\overrightarrow{MJ} \wedge \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}$.

b) Déterminer alors le volume du tétraèdre SMJK.

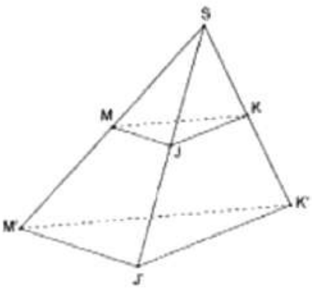
4) Soit h l'homothétie de centre S et de rapport 2.

a) Déterminer une équation du plan P' image du plan P par h.

b) Le plan P' coupe les demi-droites [SM), [S J) et [S K)

respectivement en M', J' et K'.

Montrer que le volume du solide MJKM'J'K' est égal à $\frac{7}{2}$.



Exercice 4 : (3 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points E et F d'affixes respectives 1 et i.

On désigne par C_1 et C_2 les cercles de centres respectifs E et F et de même rayon 1.

Soit θ un réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$, M le point d'affixe $1 + e^{i\theta}$ et N le point d'affixe $i(1 + e^{i\theta})$.

1) a) Calculer $\text{Aff}(\overrightarrow{EM})$ et $\text{Aff}(\overrightarrow{FN})$.

b) Montrer que, lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$, M varie sur C_1 et N varie sur C_2.

c) Montrer que les droites (EM) et (FN) sont perpendiculaires.

2) Soit P le point d'affixe z_P telle que $z_P = (1 - i)\sin\theta . e^{i\theta}$.

a) Montrer que $\frac{\text{Aff}(\overrightarrow{EP})}{\text{Aff}(\overrightarrow{EM})} = \sin\theta - \cos\theta$ et calculer $\frac{\text{Aff}(\overrightarrow{FP})}{\text{Aff}(\overrightarrow{FN})}$.

b) Montrer que P est le point d'intersection des droites (EM) et (FN).

Exercice 5 : (6 points)

I. Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$ et soit C_φ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$. Interpréter graphiquement les résultats trouvés.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}\varphi(x)$. Interpréter graphiquement les résultats trouvés.

c) Montrer que φ est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.

2) Montrer que l'équation $\varphi(x)=x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-\infty,0[$ et une solution unique β dans l'intervalle $]0,+\infty[$.

II. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x - x$ et la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=1-x+\ln x$.

On se propose dans cette partie de déterminer les tangentes communes aux deux courbes C_f et C_g.

Dans l'annexe ci- jointe **(Figure 2)**, on a tracé dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ les courbes C_φ, C_f et C_g des fonctions φ, f et g et la droite d'équation y = x.

1) Soit a un réel et b un réel strictement positif.

On désigne par Δ_a la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a et par D_b la tangente à la courbe C_g au point B d'abscisse b.

a) Donner une équation de Δ_a et une équation de D_b.

b) Montrer que : (Δ_a et D_b sont parallèles) si et seulement si $(b=e^{-a})$.

Dans la suite on suppose que Δ_a et D_b sont parallèles, c'est-à-dire $b=e^{-a}$.

2) a) Montrer que : (Δ_a et D_b sont confondues) si et seulement si ($a\neq 0$ et $a=\dfrac{e^a}{e^a-1}$).

b) En déduire que Δ_α est tangente à la courbe C_f et à la courbe C_g respectivement aux points $A(\alpha,f(\alpha))$ et $B(e^{-\alpha},g(e^{-\alpha}))$. ($\alpha$ étant la valeur définie dans la question **I.** 2))

c) Montrer que C_f et C_g admettent une deuxième tangente commune que l'on précisera.

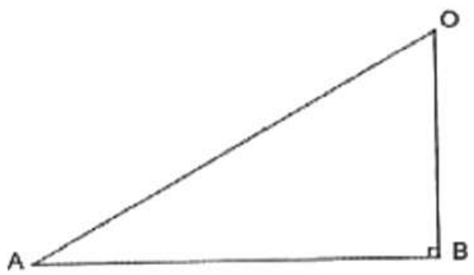
3) a) Construire dans l'annexe ci- jointe **(Figure 2)**, le point $A(\alpha,f(\alpha))$.

b) Vérifier que $e^{-\alpha}=f(-\alpha)-\alpha$ puis construire $B(e^{-\alpha},g(e^{-\alpha}))$.

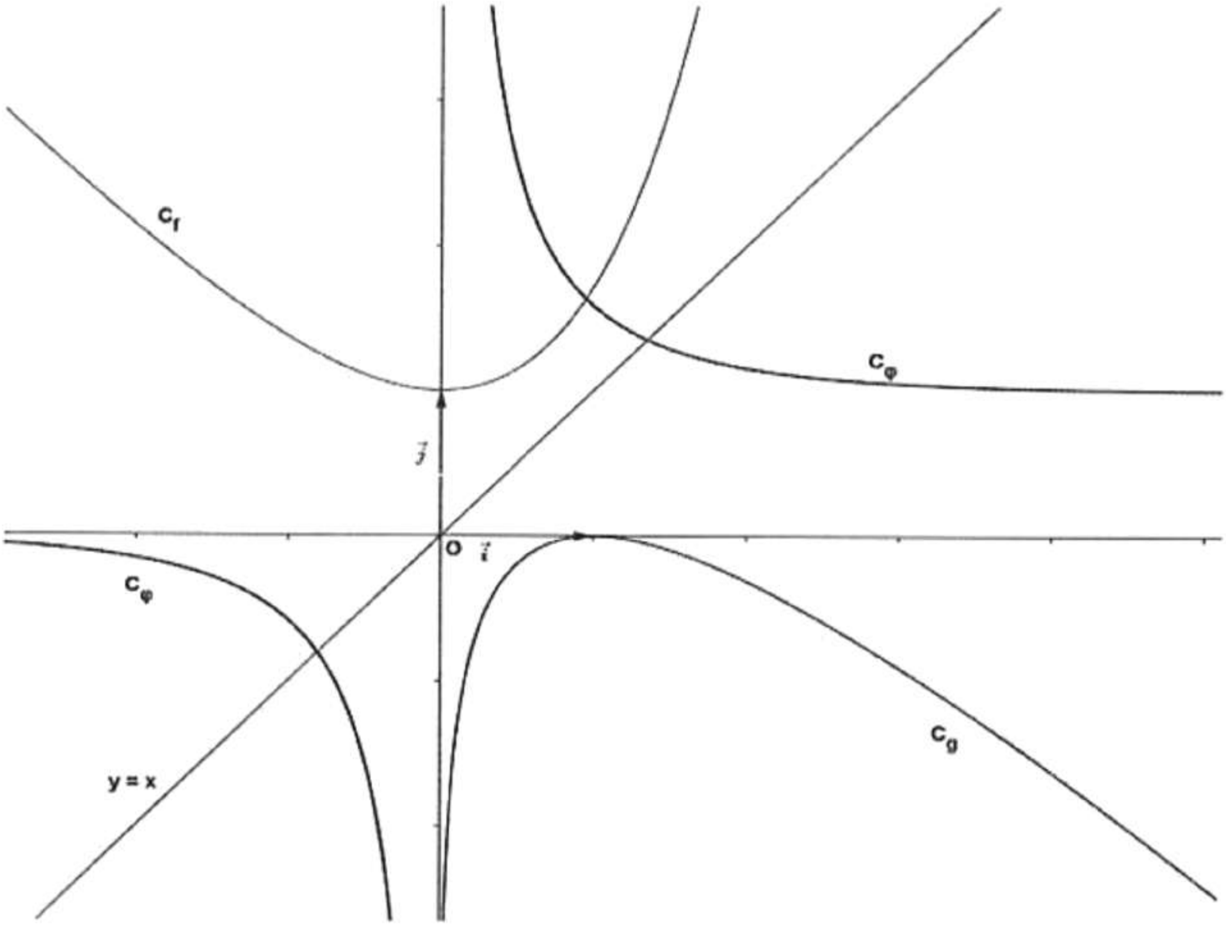
c) Tracer Δ_α.

Epreuve : Mathématiques Section : Mathématiques

ANNEXE



(Figure 1)



(Figure 2)

Section: **MATHEMATIQUES**	**SESSION PRINCIPALE**

Corrigé

Exercice 1

1. (A_1) **Vrai**: en effet si $33n \equiv 0(\bmod 2013)$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $33n = 2013k = 61 \times 33k$ alors $n = 61k$ ou encore $n \equiv 0(\bmod 61)$.

   (A_2) **Vrai**: en effet $33 \wedge 11 = 11$ et 11 divise 2013. Ainsi l'équation admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2. (A_3) **Vrai :** en effet : $\begin{cases} u : x \mapsto \ln x \text{ est définie et dérivable sur }]0,+\infty[\\ x \mapsto \dfrac{e^x}{1+x^2} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ donc elle est continue sur } u(]0,+\infty[) \\ 1 \in \mathbb{R} \end{cases}$ donc la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$.

   (A_3) **Faux** : car pour tout $x \in]0,+\infty[$, $F'(x) = \dfrac{e^{\ln x}}{1+(\ln x)^2} \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{1+(\ln x)^2} \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{1+(\ln x)^2}$.

Exercice 2

A. 1) Une mesure de l'angle de f est $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$. Le rapport de f est $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)} = 2.$

2) a) Le triangle OAB est rectangle en B et de sens direct donc son image par f est un triangle rectangle en f (B) et de sens direct. Or $f(O) = O$, $f(B) = A$ et $f(A) = C$, il en résulte que le triangle OCA est rectangle en A de sens direct et $\dfrac{AC}{AB} = 2$ donc $AC = 2AB$.

b) Voir figure.

B. 1) a) On sait que g (A) = C et g (B) = A donc le rapport de g est $\dfrac{AC}{AB} = 2$ donc $g \circ g = h_{(\Omega,4)}$ or $g \circ g(B) = C$, il en résulte que $h_{(\Omega,4)}(B) = C \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega C} = 4\overrightarrow{\Omega B}$.

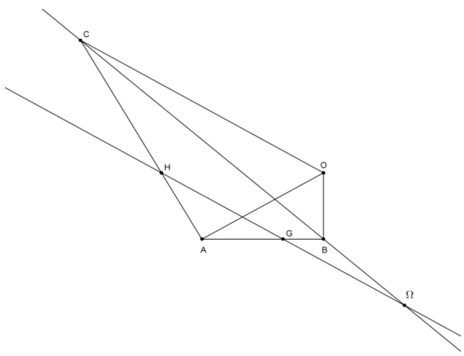
b) Puisque $\overrightarrow{\Omega C} = 4\overrightarrow{\Omega B}$ donc Ω est le barycentre des points pondérés $(C,1)$ et $(B,-4)$ d'où $\overrightarrow{C\Omega} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{CB}$.

2) a) G est le barycentre des points pondérés $(A,1)$ et $(B,2)$ d'où $\overrightarrow{BG} = \dfrac{1}{1+2}\overrightarrow{BA} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et puisque g (G) = H, g (A) = C et g (B) = A, on en déduit que $\overrightarrow{AH} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) D'après a) $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AH} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{B\Omega} + \overrightarrow{\Omega C}) = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{B\Omega} + 4\overrightarrow{\Omega B}) = \overrightarrow{\Omega B}.$

On a $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{\Omega B}$ donc $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{\Omega B}$ donc $-\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{\Omega B}$ donc $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{\Omega G}$, il en résulte que G est le milieu de $[\Omega H]$.

c) G est le milieu de $[\Omega H]$ donc $\overrightarrow{\Omega H} = 2\overrightarrow{\Omega G}$ et g est une similitude indirecte de centre Ω, de rapport 2 et g (G) = H d'où l'axe de g est (GH).



Exercice 3

1. a) $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

   b) Le vecteur $\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ donc les points I, J et K ne sont pas alignés donc ils déterminent un plan

   P. $\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est normal à P donc $P: x-y+z+d=0$ et $I\in P$ donc $d=0$, on en déduit que

   $P: x-y+z=0$.

2. $v=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\overrightarrow{IS}\right|$, $\overrightarrow{IS}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ donc $\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\overrightarrow{IS}=3$ Il en résulte que $v=\frac{1}{2}$.

3. a) $\overrightarrow{MJ}\wedge\overrightarrow{MK}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IJ}\right)\wedge\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IK}\right)=\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{MI}\wedge\left(\overrightarrow{IK}-\overrightarrow{IJ}\right)=\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}$.

   b) $\left(\overrightarrow{MJ}\wedge\overrightarrow{MK}\right).\overrightarrow{MS}=\left(\overrightarrow{MJ}\wedge\overrightarrow{MK}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IS}\right)=\left(\overrightarrow{MJ}\wedge\overrightarrow{MK}\right).\overrightarrow{MI}+\left(\overrightarrow{MJ}\wedge\overrightarrow{MK}\right).\overrightarrow{IS}=\left(\overrightarrow{MJ}\wedge\overrightarrow{MK}\right).\overrightarrow{IS}$

   $=\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\overrightarrow{IS}$. On en déduit que SMJK et SIJK ont le même volume d'où le volume de SMJK est $\frac{1}{2}$.

4. a) h(P) = P' donc P et P' sont parallèles donc $P': x-y+z+d=0$. Soit I'(x,y,z) = h(I) donc

   $\overrightarrow{SI'}=2\overrightarrow{SI}$ donc $\begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ on en déduit que $I'(1,3,-1)$, or $I'\in P'$ donc $d=3$. Ainsi $P': x-y+z+3=0$.

   b) On sait que $M\in(SM)\cap P$ donc $h(M)\in h((SM))\cap h(P)$ donc $h(M)\in(SM)\cap P'=\{M'\}$, d'où

   $h(M)=M'$ on montre de même que $h(J)=J'$ et $h(K)=K'$ et puisque $h(S)=S$, il en résulte que

   h(SMJK)=SM'J'K' donc le volume de SM'J'K' est $2^3\times\frac{1}{2}=4$.

   Le volume du solide MJKM'J'K' = $V_{SM'J'K'}$ - V_{SMJK} = $4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$.

Exercice 4

1. a) $\text{Aff}\left(\overrightarrow{EM}\right)=1+e^{i\theta}-1=e^{i\theta}$ et $\text{Aff}\left(\overrightarrow{FN}\right)=i+ie^{i\theta}-i=ie^{i\theta}$.

   b) $EM=\left|e^{i\theta}\right|=1$ donc M varie sur C_1 et $FN=\left|ie^{i\theta}\right|=1$ donc N varie sur C_2.

   c) $\dfrac{\text{Aff}\left(\overrightarrow{FN}\right)}{\text{Aff}\left(\overrightarrow{EM}\right)}=\dfrac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}=i$ imaginaire donc $\overrightarrow{FN}\perp\overrightarrow{EM}$ d'où les droites (FN) et (EM) sont perpendiculaires.

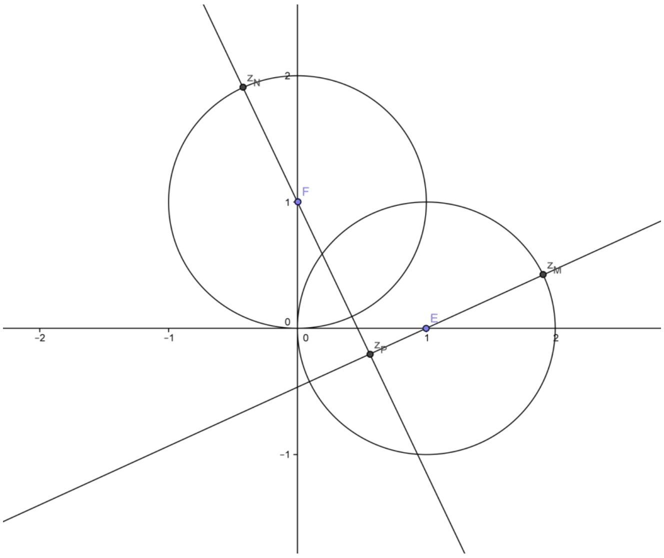
2. a) $\dfrac{\text{Aff}\left(\overrightarrow{EP}\right)}{\text{Aff}\left(\overrightarrow{EM}\right)}=\dfrac{(1-i)\sin\theta e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}}=(1-i)\sin\theta-e^{-i\theta}=\sin\theta-i\sin\theta-\cos\theta+i\sin\theta=\sin\theta-\cos\theta$.

$$\frac{\operatorname{Aff}\left(\overrightarrow{FP}\right)}{\operatorname{Aff}\left(\overrightarrow{FN}\right)}=\frac{(1-i)\sin\theta e^{i\theta}-i}{i+ie^{i\theta}-i}=(-1-i)\sin\theta-e^{-i\theta}=-\sin\theta-i\sin\theta-\cos\theta+i\sin\theta=-\sin\theta-\cos\theta\,.$$

b) $\dfrac{\operatorname{Aff}\left(\overrightarrow{EP}\right)}{\operatorname{Aff}\left(\overrightarrow{EM}\right)}=\sin\theta-\cos\theta$ est réel donc (EP) et (EM) sont parallèles donc E, P et M sont alignés

$\dfrac{\operatorname{Aff}\left(\overrightarrow{FP}\right)}{\operatorname{Aff}\left(\overrightarrow{FN}\right)}=-\sin\theta-\cos\theta$ est réel donc (FP) et (FN) sont parallèles donc F, P et N sont alignés

Ainsi P est le point d'intersection de (FN) et (EM).



Exercice 5

I. 1.a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x-1}=\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)}=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x-1}=0$. Les droites y = 0 et y = 1 sont des asymptotes de C_φ respectivement en $-\infty$ et $+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x}{e^x-1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x}{e^x-1}=-\infty$. La droite x = 0 est une asymptote de C_φ

c) Pour tout réel x non nul, $\varphi'(x)=\dfrac{e^x\left(e^x-1\right)-e^{2x}}{\left(e^x-1\right)^2}=\dfrac{-e^x}{\left(e^x-1\right)^2}<0$

2. Pour tout réel x non nul, $\varphi(x)=x\Leftrightarrow\varphi(x)-x=0$, on pose $h(x)=\varphi(x)-x$

La fonction h est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ et $h'(x)=\varphi'(x)-1<0$ pour tout réel x non nul.

La fonction h est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,0[$ (resp $]0,+\infty[$) donc elle réalise une bijection de

$]-\infty,0[$ (resp $]0,+\infty[$) sur $h(]-\infty,0[)=\mathbb{R}$ (resp $h(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$), $0\in\mathbb{R}$ donc il existe un unique réel $\alpha\in]-\infty,0[$

(resp $\beta\in]0,+\infty[$) tel que $h(\alpha)=0\Leftrightarrow\varphi(\alpha)=\alpha$ (resp $h(\beta)=0\Leftrightarrow\varphi(\beta)=\beta$). On en déduit que l'équation

$\varphi(x)=x$ admet exactement deux solutions $\alpha\in]-\infty,0[$ et $\beta\in]0,+\infty[$

II. 1)a) $\Delta_a : y=f'(a)(x-a)+f(a)$ donc $\Delta_a : y=\left(e^a-1\right)(x-a)+e^a-a$ d'où $\Delta_a : y=\left(e^a-1\right)x+(1-a)e^a$.

$D_b : y=g'(b)(x-b)+g(b)$ donc $D_b : y=\left(-1+\dfrac{1}{b}\right)(x-b)+1-b+\ln b$ d'où $D_b : y=\left(-1+\dfrac{1}{b}\right)x+\ln b$.

b) (Δ_a et D_b sont parallèles) si et seulement si $\left(f'(a)=g'(b)\right)$ si et seulement si ($-1+\dfrac{1}{b}=e^a-1$)

si et seulement si ($\dfrac{1}{b}=e^a$) si et seulement si ($b=e^{-a}$).

2) a) Δ_a et D_b étant parallèles donc

(Δ_a et D_b sont confondues) si et seulement si $\begin{cases}(1-a)e^a=\ln b\\ b=e^{-a}\end{cases}$ si et seulement si ($(1-a)e^a=-a$) si et seulement si

($a\left(e^a-1\right)=e^a$) si et seulement si ($a\neq 0$ et $a=\dfrac{e^a}{e^a-1}$).

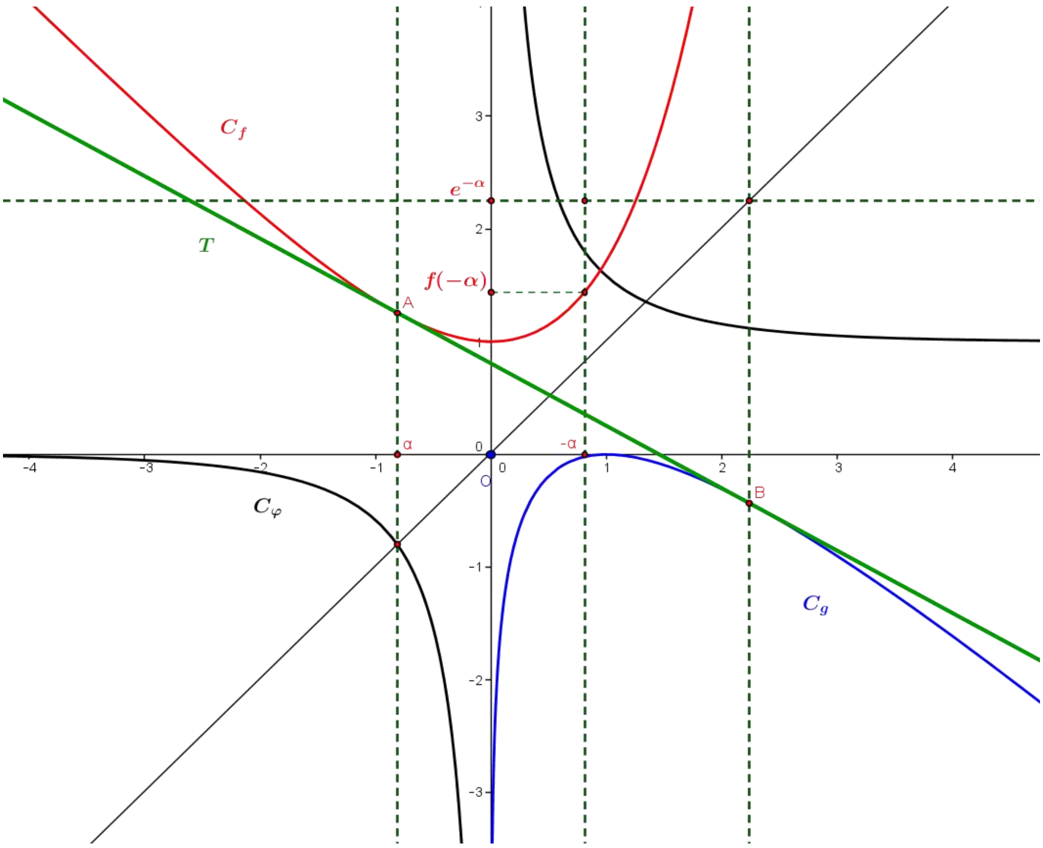
b) d'après 2) a) Δ_a et D_b sont confondues alors $\varphi(a)=a$ or $\varphi(\alpha)=\alpha$ ($\alpha\neq 0$) donc Δ_α est une tangente commune à C_f et C_g en A (α , f (α)) et en B (b , g (b)) or b = $e^{-\alpha}$ d'après (II ; 1) a)) donc B($e^{-\alpha}$, $g(e^{-\alpha})$) .

c) On a aussi $\varphi(\beta)=\beta$ signifie $\beta=\dfrac{e^\beta}{e^\beta-1}$, Δ_β est une tangente commune à C_f et à C_g respectivement en A'(β, f (β)) et B'($e^{-\beta}$; $g(e^{-\beta})$).

3) a) Voir figure.

b) $f(-\alpha)-\alpha=e^{-\alpha}-(-\alpha)-\alpha=e^{-\alpha}$

c) Voir figure.



REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◆◆◆ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** **SESSION DE JUIN 2013**	Epreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : **4 h** Coefficient : **4**
Section : **MATHEMATIQUES**	**SESSION DE CONTRÔLE**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (3 points)

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation (E) : $2x + 5y = 6$.

1) a) Vérifier que (3, 0) est une solution de (E).

b) Résoudre l'équation (E).

2) Soit (x , y) une solution de (E).

a) Quelles sont les valeurs possibles de $x \wedge y$?

b) Déterminer les couples (x , y), solutions de (E), tels que $x \wedge y = 3$.

Exercice 2 : (5 points)

Dans l'annexe ci-jointe **(Figure 1)**, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé et (C) est le cercle de centre O passant par les points A(2, 0) et A'(- 2, 0).

1) Soit P(x, y) un point du plan n'appartenant pas à $(O, \vec{i})$, H son projeté orthogonal sur l'axe $(O, \vec{i})$ et M (X,Y) le milieu du segment [PH].

a) Exprimer X et Y à l'aide de x et y.

b) Montrer que lorsque P varie sur le cercle (C), M varie sur l'ellipse (E) d'équation $\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1$.

c) Tracer l'ellipse (E) dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Soit $P_0(1, \sqrt{3})$ et $M_0(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

La tangente (T) au cercle (C) en P_0 coupe l'axe des abscisses au point I.

a) Montrer que I a pour coordonnées (4, 0).

b) Montrer que la tangente à l'ellipse (E) en M_0 passe par I.

Exercice 3 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=x-\ln(1+x^2)$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I. 1) Montrer que pour tout x appartenant à $[0,+\infty[$ $\quad f'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}$.

2) a) Montrer que pour $x>0$, $f(x)=x-2\ln x-\ln(1+\dfrac{1}{x^2})$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$, puis interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) a) Donner une équation de la tangente Δ à la courbe (C) au point O.

b) Donner la position relative de la droite Δ et la courbe (C).

c) Tracer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite Δ et la courbe (C).

II. Soit G la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $G(x)=\displaystyle\int_0^{\tan x}\dfrac{dt}{1+t^2}$ dt.

1) a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer sa fonction dérivée.

b) En déduire que pour tout x appartenant à $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ $G(x)=x$.

c) Calculer alors $\displaystyle\int_0^1\dfrac{1}{1+t^2}dt$.

2) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite Δ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)dx=\ln 2-2+2\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}.$$

b) En déduire la valeur de $\mathcal{A}$.

Exercice 4 : (6 points)

Le plan est orienté.

Dans l'annexe ci-jointe **(Figure 2)**, ABCD est un rectangle tel que $AB = 1$ et $AD = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et FCDE et BFGH sont deux carrés.

1) On pose $q = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

a) Montrer que $q^2 = 1 - q$.

b) Vérifier que $FG = q$ et que $EG = q^2$.

2) Soit S_1 la similitude directe de centre F, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport q.

a) Montrer que $S_1(C) = G$.

b) Déterminer l'image du carré FCDE par S_1.

3) Soit S_2 la similitude directe de centre G qui transforme H en E.

Montrer que S_2 est de rapport q et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

4) On pose $h = S_2 \circ S_1$.

a) Montrer que $h(D) = E$.

b) Montrer que h est une homothétie de rapport q^2.

c) Montrer que $\overrightarrow{AE} = q^2\,\overrightarrow{AD}$ et en déduire le centre de h.

d) Montrer que les points A, G et C sont alignés.

e) Soit $I = h(E)$ et $J = h(F)$.

Construire les points J et I et déterminer alors l'image du carré BFGH par S_2.

5) On considère la suite (a_n) définie sur IN par $a_n = q^{2n}$.

a) Vérifier que a_0, a_1 et a_2 sont les aires respectives des carrés FCDE, BFGH et GEIJ.

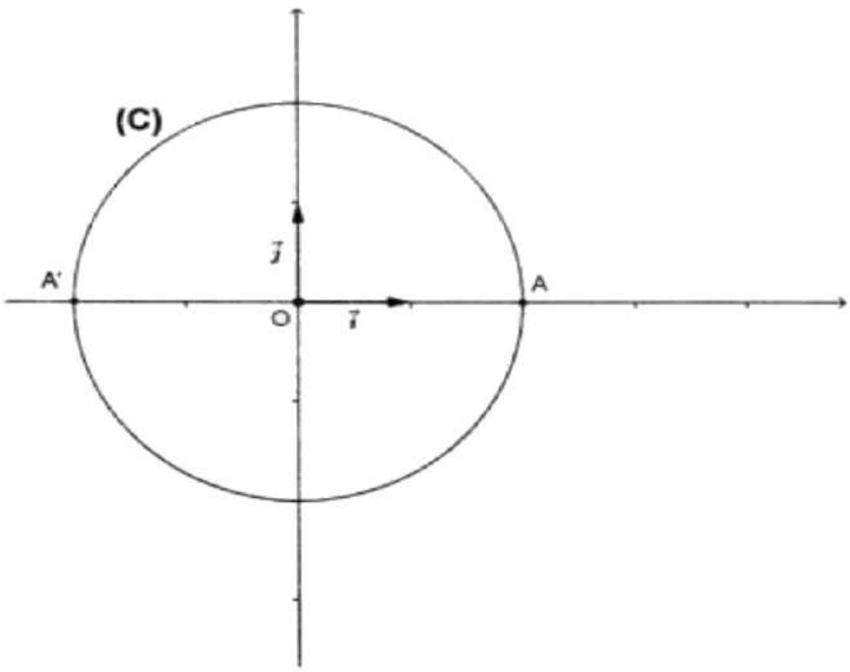
b) On pose pour tout entier naturel n, $\mathcal{A}_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

Exprimer $\mathcal{A}_n$ en fonction de n et vérifier que la limite de $\mathcal{A}_n$ est égale à l'aire du rectangle ABCD.

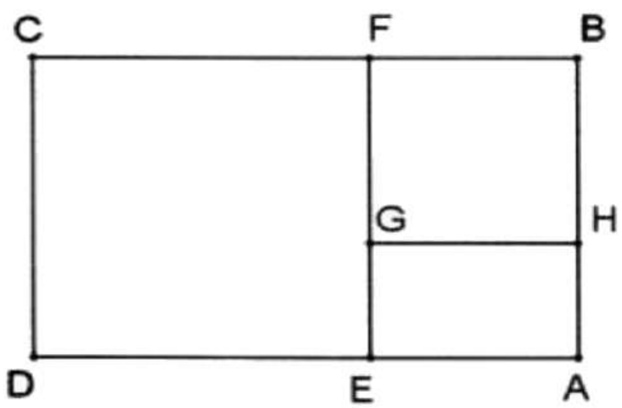
Epreuve : Mathématiques Section : Mathématiques

ANNEXE

(Figure1)



(Figure 2)



4/4

Section : **MATHEMATIQUES**	**SESSION DE CONTRÔLE**

Corrigé

Exercice 1

1. a) $2\times3+5\times0=6$ donc le couple $(3,0)$ est une solution de (E).

   b) Le couple $(3,0)$ est une solution de (E) donc $2x+5y=2\times3+5\times0 \Leftrightarrow 2(x-3)=-5y \quad (*)$

   donc $\begin{cases} 2|5y \\ 2\wedge5=1 \end{cases}$ d'où d'après Gausse $2|y$ par suite il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $y=2k$.

   En remplaçant y par sa valeur trouvée dans $(*)$ on obtient $x=-5k+3,\ k\in\mathbb{Z}$.

   Réciproquement : Pour tout $k\in\mathbb{Z},\ 2(-5k+3)+5(2k)=6$.

   Ainsi $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(-5k+3,2k),\ k\in\mathbb{Z}\}$

2. a) Soit (x,y) une solution de (E), $\begin{cases} x\wedge y|x \\ x\wedge y|y \end{cases}$ donc $x\wedge y\,|\,2x+5y=6$, il en résulte que

   $x\wedge y\in D_6^+=\{1,2,3,6\}$.

   b) Soit (x,y) une solution de (E), $x\wedge y\equiv3 \Leftrightarrow \begin{cases} -5k+3\equiv0(\mathrm{mod}\,3) \\ 2k\equiv0(\mathrm{mod}\,3) \\ k\equiv0(\mathrm{mod}\,2) \end{cases}$ donc

   $\begin{cases} -5k+3\equiv0(\mathrm{mod}\,3) \\ 4k\equiv0(\mathrm{mod}\,3) \\ k\equiv0(\mathrm{mod}\,2) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} k\equiv0(\mathrm{mod}\,3) \\ k\equiv0(\mathrm{mod}\,2) \\ 2\wedge3=1 \end{cases}$ donc $k=6n,\ n\in\mathbb{Z}$, il en résulte que

   $\begin{cases} x=-30n+3 \\ y=12n \end{cases},\ n\in\mathbb{Z}.$

   Réciproquement : Si $\begin{cases} x=-30n+3 \\ y=12n \end{cases},\ n\in\mathbb{Z},\ 2x+5y=2(-30n+3)+5(12n)=6$ donc (x,y) est

   une solution de (E) de plus $\begin{cases} x=-30n+3\equiv0(\mathrm{mod}\,3) \\ y=12n\equiv0(\mathrm{mod}\,3) \end{cases}$ et x est impair donc elle n'est pas divisible

   par 6, d'où $x\wedge y\equiv3$. Ainsi $x\wedge y\equiv3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-30n+3 \\ y=12n \end{cases},\ n\in\mathbb{Z}.$

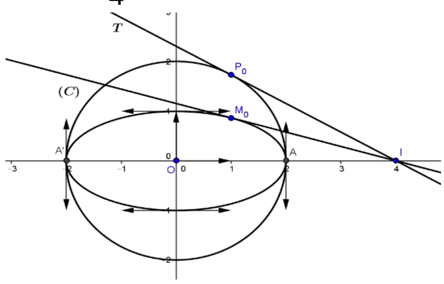
Exercice 2

1. a) $\begin{cases} X=x \\ Y=\dfrac{y}{2} \end{cases}$.

   b) $P(x,y)\in C$ donc $x^2+y^2=4$ donc $X^2+4Y^2=4$ donc $\dfrac{X^2}{4}+Y^2=1$. Ainsi $M(X,Y)$

   varie sur l'ellipse d'équation $\dfrac{X^2}{4}+Y^2=1$.

   c)



2. a) $\overrightarrow{IP_0}\begin{pmatrix}-3\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OP_0}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OP_0}.\overrightarrow{IP_0}=3-3=0$ donc la droite (IP_0) est tangente à C en P_0.

On en déduit que (T) coupe l'axe des abscisses en I.

b) Soit (T') la tangente à (E) en M_0, alors $(T'): \frac{X}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}Y=1$.

pour $Y=0$ on obtient $X=4$ ce qui prouve que $I\in(T')$.

Exercice 3

I. 1) La fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x\in[0,+\infty[$,

$$f'(x)=1-\frac{2x}{1+x^2}=\frac{1+x^2-2x}{1+x^2}=\frac{(x-1)^2}{1+x^2}.$$

2) a) Pour tout $x>0$,

$$f(x)=x-\ln(1+x^2)=x-\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)=x-\ln(x^2)-\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=x-2\ln x-\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-2\frac{\ln x}{x}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty.$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-2\frac{\ln x}{x}\right)-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}=1.$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}-2\ln x-\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=-\infty.$. C admet une branche parabolique

de direction celle de la droite $y=x$ au voisinage de $+\infty$.

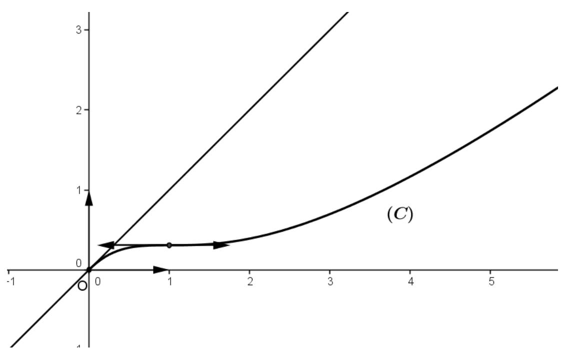
3)

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

4) a) $\Delta: y=f_d'(0)x+f(0)=x$.

b) Pour tout $x\in[0,+\infty[$, $f(x)-x=-\ln(1+x^2)\le 0$ car $1+x^2\ge 1$ donc la courbe C est au-dessous de Δ.

c)



II. 1) a) La fonction $u : x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

donc $u\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) \subset \mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$. On en déduit que G est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, G'(x) = \frac{1}{1+\tan^2 x}\left(1+\tan^2 x\right) = 1.$

b) On sait que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, G'(x) = 1$ donc $G(x) = x + c,\ c \in \mathbb{R}$. Or $G(0) = 0$, il en résulte que $c = 0$ Ainsi pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, G(x) = x.$

c) $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = G\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$

2) a) $\begin{cases} u(x) = \ln\left(1+x^2\right) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \\ v(x) = x \end{cases}$

$$\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx = \left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \ln 2 - 2\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx$$

$$= \ln 2 - 2\left[\int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}dx\right] = \ln 2 - 2\left[1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx\right] = \ln 2 - 2 + 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

b) $\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x) - x|dx = \int_0^1 [x - f(x)]dx = \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx = \ln 2 - 2 + 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

$= \ln 2 - 2 + 2 \times \frac{\pi}{4} = \left(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}\right) u.a$

Exercice 4

1) a) $q^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = 1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 1 - q.$

b) $FG = FB = AE = AD - DE = AD - DC = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = q.$

$EG = EF - FG = 1 - q = q^2.$

2) a) $\begin{cases} \left(\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FG}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \frac{FG}{FC} = \frac{q}{1} = q \end{cases}$ donc $S_1(C) = G$.

b) FCDE est un carré direct donc son image par S_1 est un carré direct, or $S_1(F) = F$, $S_1(C) = G$ et

BFGH est un carré direct donc l'image du carré FCDE par S_1 est le carré BFGH.

3) $\begin{cases} \theta \equiv \left(\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GE}\right)[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \\ k = \frac{GE}{GH} = \frac{q^2}{q} = q \end{cases}$

4) a) $\begin{cases} \left(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FB}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \\ \dfrac{FB}{FE} = \dfrac{q}{1} = q \end{cases}$ donc $S_1(E) = B$ et puisque $S_1(C) = G$, $S_1(F) = F$ et l'image du carré

FCDE par S_1 est le carré BFGH, il en résulte que $S_1(D) = H$.

$h(D) = S_2(S_1(D)) = S_2(H) = E$.

b) h est la composée de deux similitudes directes de même rapport q et d'angles respectives $\dfrac{\pi}{2}$ et $-\dfrac{\pi}{2}$ donc h est une similitude directe de rapport $q^2 \neq 1$ et d'angle nul, il en résulte que h est une homothétie de rapport q^2.

c) Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires et de même sens donc $\overrightarrow{AE} = \alpha \overrightarrow{AD}$, $\alpha > 0$

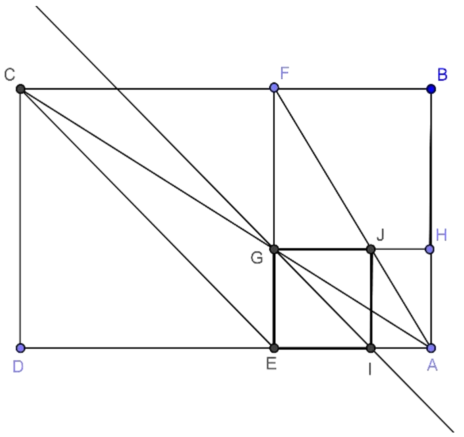
Donc $\alpha = \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{q}{\frac{1}{q}} = q^2$. On en déduit que $\overrightarrow{AE} = q^2 \overrightarrow{AD}$ et h est l'homothétie de rapport q^2

qui envoie E en D donc A est le centre de h.

d) $h(C) = S_2(S_1(C)) = S_2(G) = G$, il en résulte que A, G et C sont alignés.

e) $h(E) = S_2(S_1(E)) = S_2(B) = I$ donc $S_2(B) = I$

$h(F) = S_2(S_1(F)) = S_2(F) = J$ donc $S_2(F) = J$ et puisque $S_2(G) = G$ et $S_2(H) = E$ il en résulte que l'image du carré BFGH par S_2 est le carré IJGE.



5) a) $a_0 = q^0 = 1 = FC^2 = A_{FCDE}$, $a_1 = q^2 = FG^2 = A_{BFGH}$ et $a_2 = q^4 = EG^2 = A_{GEIJ}$

b) $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \left(q^2\right)^n = \dfrac{1-\left(q^2\right)^{n+1}}{1-q^2} = \dfrac{1-q^{2n+2}}{1-q^2}$.

$$\lim_{n \to +\infty} A_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1-q^{2n+2}}{1-q^2} = \frac{1}{1-q^2} = \frac{1}{q} \quad (0 < q < 1).$$

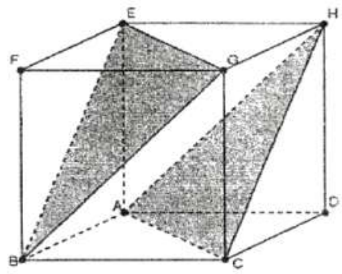
$$A_{ABCD} = CD \times AD = AD = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{q}.$$

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◈◈◈ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION DE JUIN **2014**	Epreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : 4 H Coefficient : 4
Section : Mathématiques	**Session principale**

Le sujet comporte 4 pages. La page annexe 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 **(4 points)**

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.



Soit ABCDEFGH le cube tel que

$\overrightarrow{AB}=6\vec{i}$, $\overrightarrow{AD}=6\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE}=6\vec{k}$.

On désigne par P le plan (ACH) et par Q le plan (EGB).

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AH}$.

b) En déduire une équation du plan P.

c) Montrer que les plans P et Q sont parallèles et donner une équation du plan Q.

2) Soit S la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z=0$

a) Déterminer le rayon de S et les coordonnées de son centre I.

b) Soit J le projeté orthogonal de A sur le plan Q. Montrer que [AJ] est un diamètre de S.

c) Montrer que la sphère S est tangente à chacun des deux plans P et Q.

3) Soit t la translation de vecteur $\vec{U}=2\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$.

a) Soit A' et J' les images respectives de A et J par t. Déterminer les coordonnées de A' et J'.

b) Déterminer S' l'image de la sphère S par t.

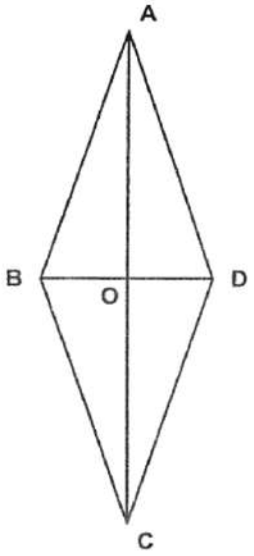
c) Montrer que S' est tangente aux deux plans P et Q et déterminer leurs points de contact.

Exercice 2 **(5 points)**

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure ci-contre, ABCD est un losange

de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et AC = 3 BD.



1) Soit f la similitude directe qui envoie A en B et C en D.

a) Déterminer le rapport et l'angle de f.

b) Montrer que O est le centre de f.

2) a) Soit D' l'image de D par f. Montrer que D' est l'orthocentre du triangle ABD et que OA = 9OD'.

b) Soit B' l'image de B par f. Montrer que BB'DD' est un losange.

3) Soit g = f o $S_{(AC)}$.

a) Déterminer la nature de g.

b) Déterminer les images des points O, A, B, C et D par g.

c) Déterminer l'axe Δ de g.

d) La droite Δ coupe les droites (AB), (BD'), (DB') et (CD) respectivement en M, N, P et Q.

Montrer que MQ = 3 NP.

Exercice 3 **(4 points)**

1) Soit a un entier tel que $a \equiv 1\,(\bmod 10)$.

a) Montrer que $a^9 + a^8 + .. + a + 1 \equiv 0\,(\bmod 10)$.

b) En déduire que $a^{10} \equiv 1\,(\bmod 10^2)$.

(On pourra utiliser l'égalité $a^{10} - 1 = (a-1)(a^9 + a^8 + .. + a + 1)$).

2) Soit b un entier.

a) Déterminer les restes possibles de b^4 dans la division euclidienne par 10.

b) En déduire que $b^4 \equiv 1\,(\bmod 10)$ si et seulement si b est premier avec 10.

3) Soit b un entier premier avec 10.

a) Montrer que $b^{40} \equiv 1\,(\bmod 10^2)$.

b) Déterminer les deux derniers chiffres de 67^{42} .

2/4

Exercice 4 **(7points)**

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\ln(1+\tan x)$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)=+\infty$.

b) Calculer $f'(x)$ pour x appartenant à $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Vérifier que les points O, $A\left(\frac{\pi}{4},\ln 2\right)$ et $I\left(\frac{\pi}{8},\frac{\ln 2}{2}\right)$ sont des points de (C).

(On donne $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$).

b) Montrer que $f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln 2-f(x)$ pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$.

(On rappelle que $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$)

c) Justifier alors que le point I est un centre de symétrie de la courbe (C).

Dans l'annexe ci-jointe, on a placé les points I et A dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3) Tracer la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ en précisant sa tangente au point O.

4) On désigne par S_1 la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OA) et les droites d'équations $x=0$ et $x=\frac{\pi}{8}$ et on désigne par S_2 la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OA) et les droites d'équations $x=\frac{\pi}{8}$ et $x=\frac{\pi}{4}$.

a) Justifier que les surfaces S_1 et S_2 ont la même aire.

b) Calculer alors $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$.

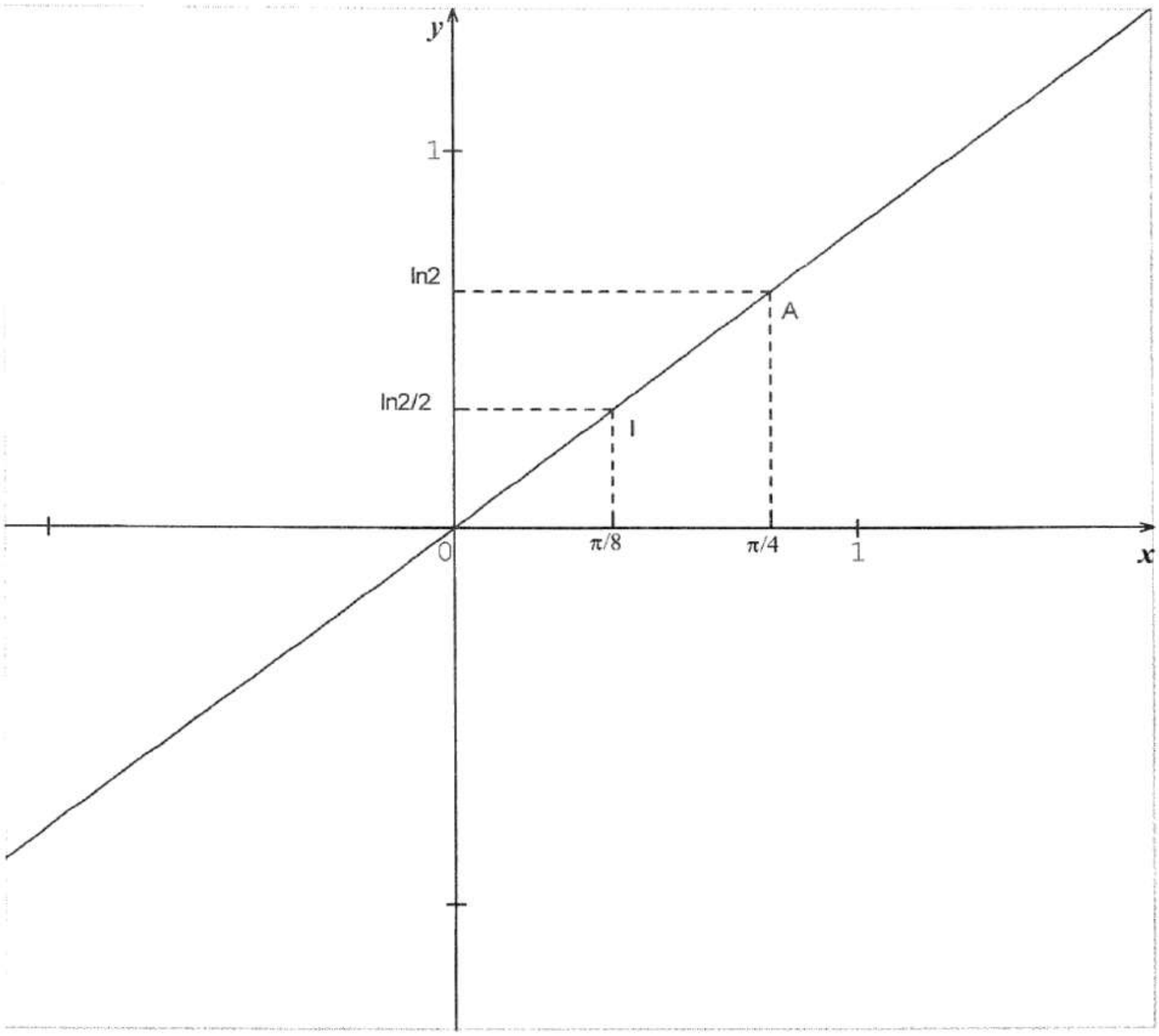
5) a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la réciproque de f.

b) Justifier que f^{-1} est dérivable sur J et donner l'expression de $(f^{-1})'(x)$ pour x appartenant à J.

c) Donner la valeur de $\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+(e^x-1)^2}dx$.

Epreuve : Mathématiques (Section mathématiques)

Annexe (à rendre avec la copie)



Correction examen du baccalauréat section mathématiques session principale 2014

Une correction possible proposée par Kooli Mohamed Hechmi

Exercice 1

1) a) $A(0\,,0\,,0)$, $B(6\,,0\,,0)$, $C(6\,,6\,,0)$, $D(0\,,6\,,0)$, $E(0\,,0\,,6)$, $F(6\,,0.,6)$, $G(6\,,6\,,6)$ et $H(0\,,6\,,6)$.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}6&6\\0&6\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&6\\6&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}6&0\\6&6\end{vmatrix}\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}36\\-36\\36\end{pmatrix}$

b) On a $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}36\\-36\\36\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P alors $P: 36x-36y+36z+d=0$ or $A\in P$

alors $36\times 0-36\times 0+36\times 0+d=0$ alors $d=0$ alors $P: 36x-36y+36z=0$

d'où $P: x-y+z=0$

c) On a : $(AC)\subset P$ et $(EG)\subset Q$ et $(AC)//(EG)$ alors $(AC)//Q$ (1)

$(AH)\subset P$ et $(BG)\subset Q$ et $(AH)//(BG)$ alors $(AH)//Q$ (2)

de (1) et (2) on a : $P//Q$

On a : $P//Q$ et $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}36\\-36\\36\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P alors $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}36\\-36\\36\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan Q alors $Q: 36x-36y+36z+d=0$ or $E\in Q$ alors $36\times 6+d=0$

alors $d=-36\times 6$ alors $Q: 36x-36y+36z-36\times 6=0$ alors $Q: x-y+z-6=0$

2) a) On a : $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=3=\sqrt{3}^2$

alors S est la sphère de centre $I(1\,,-1\,,1)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$

b) On a : $0^2+0^2+0^2-2\times 0+2\times 0-2\times 0=0$ alors $A\in S$

on a : $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AH}=36\overrightarrow{AI}$ alors $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires alors $(AI)\perp Q$ et on a

$(AJ)\perp Q$ alors A, I et J sont alignés or $AJ=d(A\,,Q)=\frac{|-6|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}=2R$ alors $[AJ]$ est un diamètre de S.

c) On a : $d(I\,,P)=\frac{|1+1+1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}=R$ $\quad(1)$

On a : $d(I\,,Q)=\frac{|1+1+1-6|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}=R$ $\quad(2)$

de (1) et (2) la sphère S est tangente à chacun des plans P et Q.

3) a) On pose $A'(x\,,y\,,z)$ avec $t_{\vec{U}}(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{U} \Leftrightarrow x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ d'où $A'(2\,,4\,,2)$

On a : $[AJ]$ est un diamètre de S et I le centre de S alors $I = A * J$

alors $x_J = 2x_I - x_A = 2\,,\ y_J = 2y_I - y = -2$ et $z_J = 2z_I - z_A = 2$ alors $J(2\,,-2\,,2)$

On pose $J'(x\,,y\,,z)$ avec $t_{\vec{U}}(J) = J' \Leftrightarrow \overrightarrow{JJ'} = \vec{U} \Leftrightarrow (x-2)\vec{\imath} + (y+2)\vec{\jmath} + (z-2)\vec{k} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 2\vec{k} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x-2=2 \\ y+2=4 \\ z-2=2 \end{cases}$ alors $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \\ z=4 \end{cases}$ d'où $J'(4\,,2\,,4)$

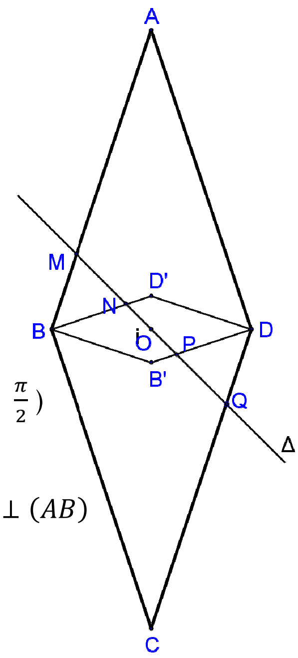
b) On a : S de diamètre $[AJ]$ de centre $I(1\,,-1\,,1)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$ alors S' de diamètre $[A'J']$ de centre $I' = A' * J'$ alors $I'(3\,,3\,,3)$ et de rayon $R' = R = \sqrt{3}$

c) On a : $(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AH}).\vec{U} = 2 \times 36 - 4 \times 36 + 2 \times 36 = 0$ alors $\vec{U}$ est un vecteur de P et comme $P//Q$ $\vec{U}$ est aussi un vecteur de Q alors $t_{\vec{U}}(P) = P$ et $t_{\vec{U}}(Q) = Q$

La sphère S est tangente à chacun des plans P et Q et toute translation conserve le contact alors la sphère S' est tangente à chacun des plans P et Q.

Exercice 2

1) a) On a : $f(A) = B$ et $f(C) = D$



soit k le rapport de f, $k = \frac{BD}{AC} = \frac{BD}{3BD} = \frac{1}{3}$

soit α l'angle de f,

$\alpha \equiv (\widehat{\overrightarrow{AC}\,,\overrightarrow{BD}})\,[2\pi] \equiv (\widehat{\overrightarrow{AO}\,,\overrightarrow{BO}})\,[2\pi] \equiv (\widehat{\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OB}})\,[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

b) On a : $O = A * C$ alors $f(O) = f(A) * f(C) = B * D$

or $O = B * D$ alors $f(O) = O$ et comme $k \neq 1$ alors O est le centre de f.

2) a) On a : $f(A) = B$ et $f(D) = D' \Rightarrow (BD') \perp (AD)$ (car l'angle de f est $\frac{\pi}{2}$)

alors dans le triangle ABD, (BD') est la hauteur bissue de B.

On a : $f(C) = D$ et $f(D) = D' \Rightarrow (CD) \perp (DD')$ or $(AB)//(CD)$ alors $(DD') \perp (AB)$

alors dans le triangle ABD, (DD') est la hauteur issue de D

et $(BD') \cap (DD') = \{D'\}$ alors D' est l'orthocentre du triangle ABD.

On a : $AC = 3BD$ et $O = A * C = B * D$ alors $OA = 3\,OD$

$f(D) = D' \Rightarrow OD' = \frac{1}{3}OD$ alors $OD = 3\,OD'$ alors $OA = 3 \times 3\,OD' = 9\,OD'$

b) On a : $ABCD$ est un losange alors $f(A)f(B)f(C)f(D)$ est un losange alors $BB'DD'$ est un losange.

3) a) On a : $g = f \circ S_{(AC)}$ alors g est la composée d'une similitude directe et d'un antidéplacement alors g est une similitude indirecte.

b) On a : $g(O) = \left(f \text{ o } S_{(AC)}\right)(O) = f\left(S_{(AC)}(O)\right) = f(O) = O$ **alors** $\boldsymbol{g(O) = O}$

$g(A) = \left(f \text{ o } S_{(AC)}\right)(A) = f\left(S_{(AC)}(A)\right) = f(A) = B$ **alors** $\boldsymbol{g(A) = B}$

$g(B) = \left(f \text{ o } S_{(AC)}\right)(B) = f\left(S_{(AC)}(B)\right) = f(D) = D'$ **alors** $\boldsymbol{g(B) = D'}$

on pose $g(C) = C'$, on a : $O = A * C$ alors $g(O) = g(A) * g(C)$ alors $O = B * C'$ or $O = B * D$ alors $C' = D$ **alors** $\boldsymbol{g(C) = D}$

$g(D) = \left(f \text{ o } S_{(AC)}\right)(D) = f\left(S_{(AC)}(D)\right) = f(B) = B'$ **alors** $\boldsymbol{g(D) = B'}$

c) On a Δ est l'axe de g et O son centre et $g(A) = B$ alors Δ porte la bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

d) Soit k' le rapport de g, on a $g(O) = O$ et $g(A) = B$ alors $k' = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{3}$

g est une similitude indirecte de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$ et d'axe Δ

alors $g = h \text{ o } S_\Delta = S_\Delta \text{ o } h$ (forme réduite de g) avec h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$

$M \in \Delta \cap (AB)$ alors $g(M) \in g(\Delta) \cap g\left((AB)\right)$ alors $g(M) \in \Delta \cap (BD')$ or $\Delta \cap (BD') = \{N\}$

alors $\boldsymbol{g(M) = N}$

$Q \in \Delta \cap (CD)$ alors $g(Q) \in g(\Delta) \cap g\left((CD)\right)$ alors $g(Q) \in \Delta \cap (DB')$ or $\Delta \cap (DB') = P$

alors $\boldsymbol{g(Q) = P}$

alors $NP = \frac{1}{3} MQ \Leftrightarrow \boldsymbol{MQ = 3\, NP}$

Exercice 3

1) a) On a $a \equiv 1(mod\ 10)$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a^n \equiv 1(mod\ 10)$ par suite

$a^9 + a^8 + \cdots + a + 1 \equiv 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1(mod\ 10)$

alors $a^9 + a^8 + \cdots + a + 1 \equiv 10(mod\ 10) \equiv 0(mod\ 10)$

b) On a $a \equiv 1(mod\ 10) \Rightarrow a - 1 \equiv 0(mod\ 10)$ alors il existe un entier k_1 tel que $a - 1 = 10k_1$

d'autre part $a^9 + a^8 + \cdots + a + 1 \equiv (mod\ 10)$ alors il existe un entier k_2 tel que

$a^9 + a^8 + \cdots + a + 1 = 10k_2$

On a $a^{10} - 1 = (a - 1)(a^9 + a^8 + \cdots + a + 1)$ alors $a^{10} - 1 = 10k_1 \times 10k_2 = 100k_1k_2$

alors $a^{10} - 1 \equiv 0(100)$ alors $a^{10} - 1 \equiv 0(mod 10^2)$

2) a) Le tableau suivant résume les restes possibles de b^4 dans la division euclidienne par 10

Reste modulo 10 de b	0	1	2	3	4	5	-4	-3	-2	-1
Reste modulo 10 de b^4	0	1	16	81	256	625	256	81	16	1
Reste modulo 10 de b^4	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

alors les restes possibles de b^4 dans la division euclidienne par 10 sont 0, 1, 5 et 6

b)

* $b^4 \equiv 1(mod\ 10) \Rightarrow b \equiv 1(mod\ 10)$ alors b et 10 sont premiers entre eux.

* ou $b^4 \equiv 1(mod\ 10) \Rightarrow b \equiv 3(mod\ 10) \Rightarrow$ il existe un entier k_1 tel que $b = 10k_1 + 3$ or $10 \wedge 3 = 1$ alors $b \wedge 10 = 10 \wedge 3 = 1$ alors b et 10 sont premiers entre eux.

* ou $b^4 \equiv 1(mod\ 10) \Rightarrow b \equiv -3(mod\ 10) \Rightarrow b \equiv 7(mod\ 10) \Rightarrow$ il existe un entier k_2 tel que $b = 10k_2 + 7$ or $10 \wedge 7 = 1$ alors $b \wedge 10 = 10 \wedge 7 = 1$ alors b et 10 sont premiers entre eux.

* ou $b^4 \equiv 1(mod\ 10) \Rightarrow b \equiv -1(mod\ 10) \Rightarrow b \equiv 9(mod\ 10) \Rightarrow$ il existe un entier k_3 tel que $b = 10k_3 + 9$ or $10 \wedge 9 = 1$ alors $b \wedge 10 = 10 \wedge 9 = 1$ alors b et 10 sont premiers entre eux.

réciproquement b et 10 sont premiers entre eux $\Rightarrow b \equiv 1(mod\ 10) \Rightarrow b^4 \equiv 1(mod\ 10)$

conclusion $b^4 \equiv 1(mod\ 10)$ si et seulement si b et 10 sont premiers entre eux.

3) a) On a : b un entier premier avec $10 \Leftrightarrow b^4 \equiv 1(mod\ 10)$ <u>d'après 2) b)</u>

on a $b^4 \equiv 1(mod\ 10) \Rightarrow (b^4)^{10} \equiv 1(mod\ 10^2)$ <u>d'après 1) b)</u> $\Rightarrow b^{40} \equiv 1(mod\ 10^2)$

b) On a : $67^{42} = 67^{40+2} = 67^{40} \times 67^2 = 67^{40} \times 4489$

or <u>d'après 3) a)</u> on a : $67 \wedge 10 = 1$ alors <u>d'après 2) b)</u> on a $67^4 \equiv 1(mod\ 10^2) \Rightarrow 67^{40} \equiv 1(mod\ 10^2)$

et on a $4489 = 44 \times 100 + 89$ alors $4489 \equiv 89(mod\ 10^2)$

$67^{40} \equiv 1(mod\ 10^2)$ et $67^2 \equiv 89(mod\ 10^2)$ alors $67^{40} \times 67^2 \equiv 89(mod\ 10^2)$

alors $67^{42} \equiv 89(mod\ 10^2)$ donc les deux derniers chiffres de 67^{42} sont 89.

<u>Exercice 4</u>

1) a) $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} \ln(1 + \tan x)$ or $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} \tan x = -1^+$ alors $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} 1 + \tan x = 0^+$

par suite $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} \ln(1 + \tan x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \ln(1 + \tan x)$ or $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} 1 + \tan x = +\infty$

par suite $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \ln(1 + \tan x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = +\infty$

b) On a pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$; $f'(x) = (\ln(1 + \tan x))' = \frac{1+tan^2 x}{1+\tan x}$

c) On a pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$; $f'(x) = \frac{1+tan^2 x}{1+\tan x}$ alors $f'(x)$ est du signe de $1 + \tan x$ sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ or pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $-1 < \tan x < 0 \Rightarrow 0 < 1 + \tan x < 1 \Rightarrow 1 + \tan x > 0$ alors pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$; $f'(x) > 0$

x	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2) a) On a $f(0) = \ln(1 + \tan 0) = \ln 1 = 0$ alors $O \in (C)$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \ln(1+1) = \ln 2$ alors $A\left(\frac{\pi}{4}, \ln 2\right) \in (C)$

$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = \ln(1 + \sqrt{2} - 1) = \ln\sqrt{2} = \ln 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\ln 2}{2}$ alors $I\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\ln 2}{2}\right) \in (C)$

b) On a pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$;

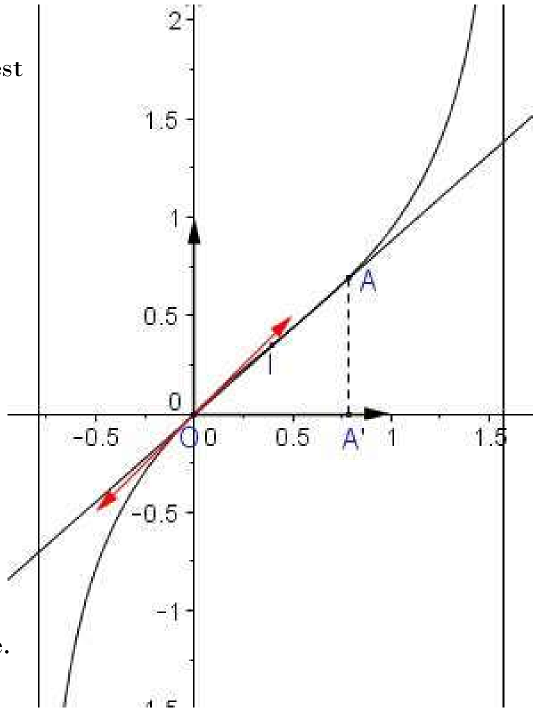
$$f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) = \ln\left(1 + \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\right) = \ln\left(\frac{2}{1 + \tan x}\right) = \ln 2 - \ln(1 + \tan x)$$
$$= \ln 2 - f(x)$$

c) On a pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$; $f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln 2 - f(x) \Leftrightarrow f\left(2 \times \frac{\pi}{8} - x\right) = 2 \times \frac{\ln 2}{2} - f(x)$

de la forme $f(2a - x) = 2b - f(x)$ alors $I\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\ln 2}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe (C).

3) Soit T la tangente à (C) en O alors $T : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ or $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$

alors $T : y = x$



on a $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x = -\frac{\pi}{4}$ est asymptote verticale à (C)

on a $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{4}\right)^-} f(x) = +\infty$ alors la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est asymptote verticale à (C)

4) a) On a

$$\frac{x_A + x_O}{2} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{8} = x_I \quad \text{et} \quad \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{\ln 2}{2} = y_I$$

alors $I = O * A$ alors $S_I(O) = A$

et on a I est un centre de symétrie de la courbe (C)

alors $S_I(S_1) = S_2$ alors les surfaces S_1 et S_2 ont la même aire.

b) On pose

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)dx$$

alors A est la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C)

l'axe des abscisses les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{4}$ qui est égale à l'aire du tringle OAA' avec A' le projeté orthogonal de A sur l'axe des abscisses car les surfaces S_1 et S_2 ont la même aire alors

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)dx = \frac{OA' \times I'A}{2} + mes(S_1) - mes(S_2) = \frac{OA' \times I'A}{2} = \frac{\frac{\pi}{4} \times \ln 2}{2} = \frac{\pi \ln 2}{8}$$

5) **a)** On a f est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ alors f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $f\left(\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left]\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x),\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)\right[=\left]-\infty,+\infty\right[=\mathbb{R}$ alors $J=\mathbb{R}$

b) La fonction f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ $f'(x)\neq 0$ alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $f\left(\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\mathbb{R}$

On pose pour tout $x\in\mathbb{R}$ et pour tout $y\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ $f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$

$$\forall x\in\mathbb{R}\,;\ (f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{\frac{1+tan^2y}{1+\tan y}}=\frac{1+\tan y}{1+tan^2y}$$

or $f(y)=x \Leftrightarrow \ln(1+\tan y)=x \Leftrightarrow 1+\tan y=e^x \Leftrightarrow \tan y=e^x-1$ alors $tan^2y=(e^x-1)^2$

d'où $(f^{-1})'(x)=\frac{e^x}{1+(e^x-1)^2}$

c)

$$\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+(e^x-1)^2}\,dx=\int_0^{\ln 2}(f^{-1})'(x)\,dx=[f^{-1}(x)]_0^{\ln 2}=f^{-1}(\ln 2)-f^{-1}(0)$$

or $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\ln 2 \Leftrightarrow f^{-1}(\ln 2)=\frac{\pi}{4}$ et $f(0)=0 \Leftrightarrow f^{-1}(0)=0$ alors

$$\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+(e^x-1)^2}\,dx=\frac{\pi}{4}$$

Examen du baccalauréat - Session principale - juin 2014

Section Mathématiques

Épreuve de Mathématiques

Corrigé

Exercice 1

1) a) $A(0,0,0)$, $C(6,6,0)$ et $H(0,6,6)$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}36\\-36\\36\end{pmatrix}$.

b) Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est normal à (P) donc $(P): x-y+z+d=0$ et puisque A est un point de (P), il en résulte que $(P): x-y+z=0$.

c) $\begin{cases}(EG)\,||\,(AC)\\(EB)\,||\,(CH)\end{cases}$ donc les plans (P) et (Q) sont parallèles donc $(Q): x-y+z+d=0$,

or $B(6,0,0)\in(Q)$, il en résulte que $d=-6$. D'où $(Q): x-y+z-6=0$.

2) a) $M(x,y,z)\in S \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=3$. On en déduit que la sphère S a pour rayon $R=\sqrt{3}$ et pour centre $I(1,-1,1)$.

b) Soit (Δ) la perpendiculaire à (Q) et passant par A, $(\Delta): \begin{cases}x=\alpha\\y=-\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}.\\z=\alpha\end{cases}$

$J(x,y,z)\in\Delta\cap Q \Leftrightarrow \begin{cases}x=\alpha\\y=-\alpha\\z=\alpha\\x-y+z-6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=2\\x=2\\y=-2\\z=2\end{cases}$, il en résulte que $J(2,-2,2)$.

$\begin{cases}A\in S\\J\in S\\I=A*J\end{cases}$, on en déduit que [AJ] est un diamètre de S.

c) $d(I,Q)=IJ=\sqrt{3}=R$ et $d(I,P)=IA=\sqrt{3}=R$ donc la sphère S est tangente à chacun des deux plans P et Q respectivement en A et J.

3) a) $A'=t(A)\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}=\vec{u}$ donc $A'(2,4,2)$.

On pose $J'(x,y,z)$. $J'=t(J)\Leftrightarrow \overrightarrow{JJ'}=\vec{u}\Leftrightarrow \begin{cases}x-2=2\\y+2=4\\z-2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=2\\z=4\end{cases}$ donc $J'(4,2,4)$.

b) Soit I' l'image de I par t.

On pose $I'(x,y,z)$. $I'=t(I)\Leftrightarrow \overrightarrow{II'}=\vec{u}\Leftrightarrow \begin{cases}x-1=2\\y+1=4\\z-1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=3\\z=3\end{cases}$ donc $I'(3,3,3)$.

Ainsi l'image de S par t est la sphère S' de centre $I'(3,3,3)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$.

c) $\vec{u}.\vec{n}=0$ donc $\vec{u}$ est un vecteur de P et de Q, il en résulte que $t(P)=P$ et $t(Q)=Q$.

La sphère S est tangente à chacun des deux plans P et Q respectivement en A et J donc $S'=t(S)$ est tangente à chacun des deux plans $t(P)=P$ et $t(Q)=Q$ respectivement en A' et J'.

Exercice 2

1) a) Une mesure de l'angle de f est $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Le rapport de f est $\frac{BD}{AC}=\frac{1}{3}$.

b) $\begin{cases}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\\ \frac{OB}{OA}=\frac{\frac{1}{2}BD}{\frac{1}{2}AC}=\frac{1}{3}\end{cases}$ donc O est le centre de f.

2) a) On sait que [OA] est la hauteur issue de A dans le triangle ABD.

$f(C)=D$ et $f(D)=D'$ donc $(DD')\perp(CD)$ et $(CD)\parallel(AB)$ par suite $(DD')\perp(AB)$, il en résulte que (DD') est la droite qui porte la hauteur issue de D dans le triangle ABD.

D'autre part $f(D)=D'$ donc $\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OD'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ d'où $D'\in(OA)$. On en déduit que D' est l'orthocentre du triangle ABD.

On sait que $f(D)=D'$ donc $OD=3OD'$ et puisque $OA=3OD$ donc $OA=9OD'$.

b) On sait que $f(A)=B$, $f(B)=B'$, $f(C)=D$ et $f(D)=D'$, puisque ABCD est un losange donc BB'DD' est un losange.

3) a) g est la composée d'une similitude directe de rapport $\frac{1}{3}$ et d'un antidéplacement (similitude indirecte de rapport 1) donc g est une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{3}$.

b) $g(O)=f\circ S_{(AC)}(O)=f(O)=O$.

$g(A)=f\circ S_{(AC)}(A)=f(A)=B$.

$g(B)=f\circ S_{(AC)}(B)=f(D)=D'$.

$g(C)=f\circ S_{(AC)}(C)=f(C)=D$.

$g(D) = f \circ S_{(AC)}(D) = f(B) = B'$.

c) Puisque le rapport de g est $\frac{1}{3}$ et $g(O) = O$ donc O est le centre de g et comme $g(A) = B$ donc Δ est la droite qui porte la bissectrice intérieur de AOB.

d) $M \in \Delta \cap (AB)$ donc $g(M) \in g(\Delta) \cap g((AB))$ donc $g(M) \in \Delta \cap (BD') = \{N\}$ d'où $g(M) = N$.

De même, on montre que $g(Q) = P$ par suite $MQ = 3NP$.

Exercice 3

1) a) Puisque $a \equiv 1 (\text{mod}\, 10)$ donc $a^n \equiv 1 (\text{mod}\, 10), n \in \mathbb{N}^*$.

Il en résulte que $1 + a + \ldots\ldots + a^9 \equiv 10 (\text{mod}\, 10) \equiv 0 (\text{mod}\, 10)$.

b) On sait que $a \equiv 1 (\text{mod}\, 10)$ donc $a - 1 \equiv 0 (\text{mod}\, 10)$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a - 1 = 10k$ et $1 + a + \ldots\ldots + a^9 \equiv 0 (\text{mod}\, 10)$ donc il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $1 + a + \ldots\ldots + a^9 = 10k'$, il en résulte que $a^{10} - 1 = 10^2 kk'$ ou encore $a^{10} - 1 \equiv 0 (\text{mod}\, 10^2)$ d'où $a^{10} \equiv 1 (\text{mod}\, 10^2)$.

2) a)

Reste de b (mod10)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Reste de b^4 (mod10)	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

b) Soit r le reste de b (mod 10).

Si $r \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, alors 2 divise b et 10 donc $b \wedge 10 \neq 1$.

Si $r = 5$, alors 5 divise b et 10 donc $b \wedge 10 \neq 1$.

Si $r \in \{1, 3, 7, 9\}$ alors b n'est divisible ni par 2 ni par 5 donc $b \wedge 10 = 1$.

Ainsi $b \wedge 10 = 1 \Leftrightarrow r \in \{1, 3, 7, 9\}$ et d'après a) $r \in \{1, 3, 7, 9\} \Leftrightarrow b^4 \equiv 1 (\text{mod}\, 10)$, on en déduit que $b^4 \equiv 1 (\text{mod}\, 10) \Leftrightarrow b \wedge 10 = 1$.

3) a) Si b est premier avec 10 alors d'après 2)b) $b^4 \equiv 1 (\text{mod}\, 10)$ et d'après 1) $(b^4)^{10} \equiv 1 (\text{mod}\, 10^2)$ d'où $b^{40} \equiv 1 (\text{mod}\, 10^2)$.

b) $67 \wedge 10 = 1$ donc $67^{40} \equiv 1 (\text{mod}\, 10^2)$ et $67^2 \equiv 89 (\text{mod}\, 10^2)$ donc $67^{42} \equiv 89 (\text{mod}\, 10^2)$.

Exercice 4

1) a) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to \left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} 1 + \tan x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x) = -\infty$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} 1 + \tan x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = +\infty$.

b) La fonction f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x)=\frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x}$.

c) Pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x)=\frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x}>0$

x	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	‖	$+$	‖
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

2) a) $f(0)=\ln 1=0$ donc $O\in(C)$.

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\ln 2$ donc $A\in(C)$.

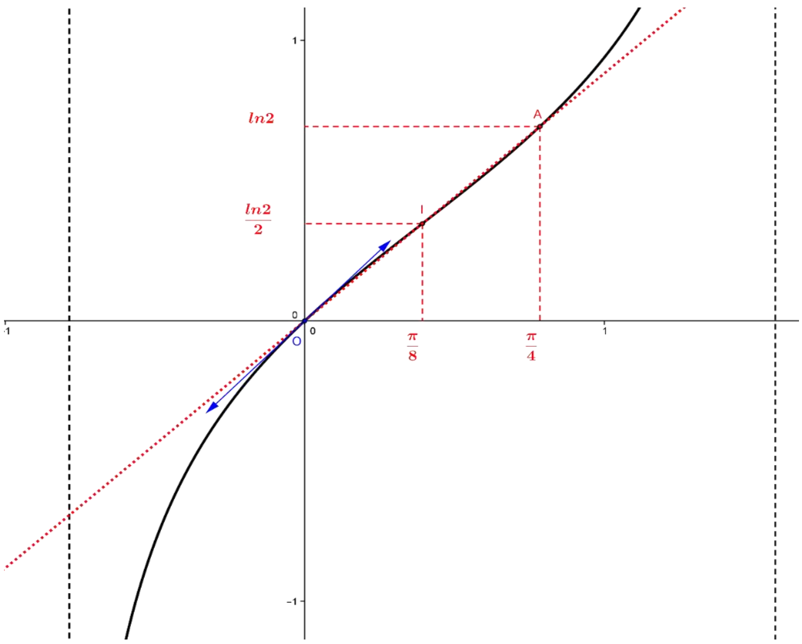
$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\ln\sqrt{2}=\frac{\ln 2}{2}$ donc $I\in(C)$.

b)

$$f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)=\ln\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)=\ln\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)=\ln 2-\ln(1+\tan x)=\ln 2-f(x).$$

c) Pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{\pi}{4}-x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ et $f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln 2-f(x)$ donc I est un centre de symétrie de (C).

3) $T_O : y=x$.



4) a) Les surfaces S_1 et S_2 sont symétriques par rapport à I donc elles ont la même aire.

b) On désigne par $B\left(\frac{\pi}{8},0\right)$ et $C\left(\frac{\pi}{4},0\right)$.

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx$ est l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=\frac{\pi}{4}$ donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx = A_{\text{triangleOBI}} - S_1 + A_{\text{trapèzeBCAI}} + S_2 = A_{\text{triangleOBI}} + A_{\text{trapèzeBCAI}} = A_{\text{triangleOAC}} = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

5) a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ donc elle réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $f\left(\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\mathbb{R}$.

b) La fonction f est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

La fonction f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ et $f'(x)=\frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x}\neq 0$ pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ donc

f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1+\tan y}{1+\tan^2 y}$ avec

$f^{-1}(x)=y,\ y\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ et $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow \ln(1+\tan y)=x \Leftrightarrow \tan y = e^x-1.$ on en déduit

que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{e^x}{1+\left(e^x-1\right)^2}$.

c) $\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+\left(e^x-1\right)^2}dx=\int_0^{\ln 2}\left(f^{-1}\right)'(x)\,dx=\left[f^{-1}(x)\right]_0^{\ln 2}=f^{-1}(\ln 2)-f^{-1}(0)=\frac{\pi}{4}.$

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◈◈◈ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION DE JUIN **2014**	Epreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : 4 H Coefficient : 4
Section : Mathématiques	**Session de contrôle**

Le sujet comporte 4 pages. La page annexe 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans l'annexe ci-jointe (**Figure 1**) , IAB est un triangle isocèle en A , O est le milieu de [BI] , $OA = 2OI$ et $\widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soit h l'homothétie de centre I et de rapport 2 et s la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Déterminer h(O) et s(I).

2) Pour tout point M du plan, on note P son image par h et Q son image par s.

Soit f l'application qui à un point M du plan associe le point M' barycentre des points pondérés (P, 3) et (Q, 1).

a) Soit $O' = f(O)$. Montrer que $\overrightarrow{OO'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$ et construire le point O'.

b) Soit $I' = f(I)$. Montrer que $\overrightarrow{II'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IA}$ et construire le point I'.

3) Dans cette question, on munit le plan du repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$, où J est le milieu de [OA] et on note z l'affixe d'un point M du plan.

a) Exprimer en fonction de z l'affixe z_P du point P.

b) Exprimer en fonction de z l'affixe z_Q du point Q.

c) Soit z' l'affixe du point $M' = f(M)$. Montrer que $z' = \frac{3+i}{2}z - \frac{3}{4}$.

d) Déterminer l'image par f du cercle de diamètre [OI].

1/4

Exercice 2 (5points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Soit (E) l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Déterminer les cordonnées des foyers de l'ellipse (E) et donner son excentricité.

b) Soit (P) la parabole d'équation $y^2 = 2x + 4$.

Déterminer les coordonnées du foyer F de la parabole (P) et donner une équation de sa directrice.

2) Dans l'annexe ci-jointe **(Figure 2)**, on a tracé dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'ellipse (E) et la parabole (P) .

Soit (Γ) la courbe d'équation $y^2 = -2|x| + 4$.

a) Vérifier que $(O, \vec{j})$ est un axe de symétrie de (Γ).

b) Tracer (Γ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) a) Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 4$.

Vérifier que pour tout réel t de [0,2], le point $M\left(t, \sqrt{4-t^2}\right)$ appartient à $\mathcal{C}$.

b) On pose $I_1 = \int_0^2 \sqrt{4-t^2}\,dt$. Montrer que $I_1 = \pi$.

4) Calculer $I_2 = \int_0^2 \sqrt{-2t+4}\,dt$.

5) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la surface limitée par la courbe (Γ) et l'ellipse (E).

Exprimer $\mathscr{A}$ en fonction de I_1 et I_2 puis calculer $\mathscr{A}$.

Exercice 3 (4points)

1) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $1111\,x - 10^4\,y = 1$.

a) Vérifier que (- 9, -1) est une solution de (E) .

b) Résoudre l'équation (E) .

2) Soit n un entier .

a) Montrer que s'il existe deux entiers p et q tels que $n=1111p$ et $n=1+q10^4$ alors (p, q) est une solution de (E).

b) Déterminer alors l'ensemble des entiers n tels que $\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{1111} \\ n \equiv 1 \pmod{10^4} \end{cases}$

c) En déduire le plus petit entier naturel multiple de 1111 et dont le reste dans la division euclidienne par 10^4 est égal à 1.

Exercice 4 (6points)

1) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

Déterminer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

2) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} g(x)=e^{f(x)} \text{ si } x>0 \\ g(0)=0 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue à droite en 0.

b) Montrer que g est dérivable à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de g.

3) Dans l'annexe ci-jointe (**Figure 3**), on a représenté dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe de la fonction f et la courbe de la fonction exponentielle.

a) Construire le point A de coordonnées $(e,g(e))$.

b) Déterminer et tracer la tangente à la courbe C_g de g au point d'abscisse 1.

c) Tracer la courbe C_g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} u_1=1 \\ u_n=g(n) \text{ si } n\geq 2 \end{cases}$

a) Donner la limite de (u_n).

b) Déterminer l'entier naturel n pour lequel $\sqrt[n]{n}$ est maximal.

3/4

Section : .... N° d'inscription : .... Série : ....

Nom et prénom : ....

Date et lieu de naissance : ....

Signatures des surveillants

....

....

Epreuve : Mathématiques (Section mathématiques)

Annexe (à rendre avec la copie)

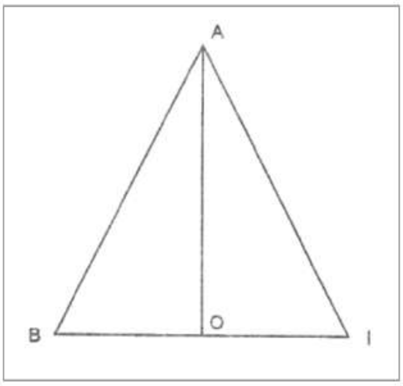


Figure 1

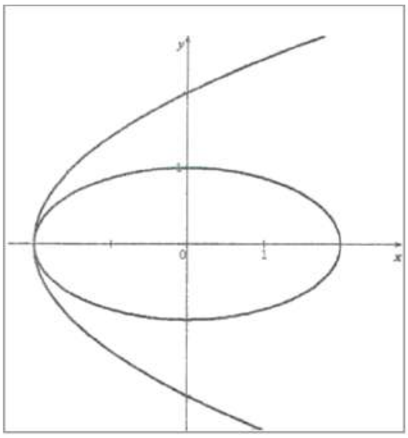


Figure 2

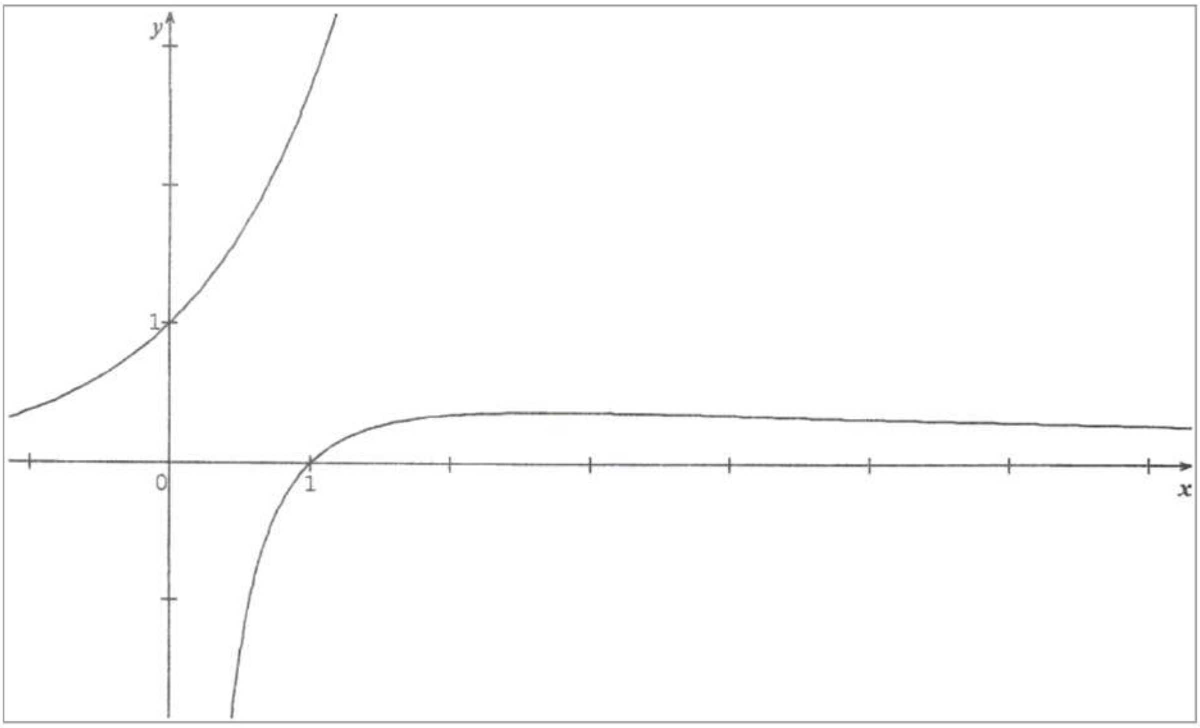


Figure 3

Examen du baccalauréat - Session de contrôle juin 2014
Section Mathématiques
Épreuve de Mathématiques
Corrigé

Exercice 1

1) Le point O est le milieu de [BI] donc $\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{IO}$, il en résulte que $h(O)=B$.

$\begin{cases}\dfrac{OA}{OI}=2\\ \left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$, il en résulte que $S(I)=A$.

2) a) On sait que $h(O)=B$ et $S(O)=O$ par suite le point O' est le barycentre des points pondérés $(B,3)$ et $(O,1)$, on en déduit que $\overrightarrow{OO'}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OB}$.

b) On sait que $h(I)=I$ et $S(I)=A$ par suite le point I' est le barycentre des points pondérés $(I,3)$ et $(A,1)$, on en déduit que $\overrightarrow{II'}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{IA}$.

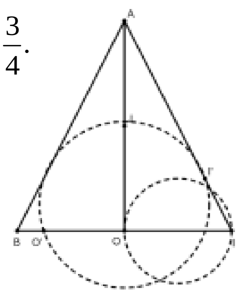
3) a) $h(M)=P\Leftrightarrow\overrightarrow{IP}=2\overrightarrow{IM}\Leftrightarrow z_P-1=2(z-1)\Leftrightarrow z_P=2z-1.$

b) S est la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ qui envoie M en Q donc

$z_Q=2e^{i\frac{\pi}{2}}z=2iz.$

c) $f(M)=M'$ donc le point M' est le barycentre des points pondérés $(P,3)$ et $(Q,1)$ on en déduit que

$\overrightarrow{PM'}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{PQ}\Leftrightarrow z'-z_P=\dfrac{1}{4}(z_Q-z_P)\Leftrightarrow z'=\dfrac{1}{4}(2iz-2z+1)+2z-1=\dfrac{3+i}{2}z-\dfrac{3}{4}.$



d) L'expression complexe de f est de la forme $z'=az+b$ avec $a=\dfrac{3+i}{4}\neq 0$

donc f est une similitude directe, comme $f(O)=O'$ et $f(I)=I'$,
on en déduit que l'image du cercle de diamètre [OI] par f est
le cercle de diamètre [O'I'].

Exercice 2

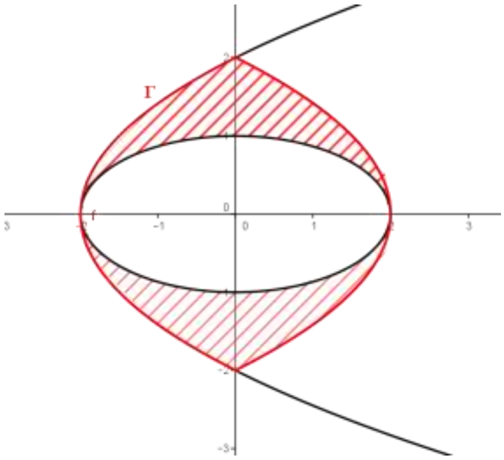
1) a) Une équation de (E) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ donc $a^2=4$ et $b^2=1$, on en déduit que $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$ par suite les coordonnées des foyers de (E) sont $(\sqrt{3},0)$ et $(-\sqrt{3},0)$ et son excentricité est $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $M(x,y)\in(P)\Leftrightarrow y^2=2x+4\Leftrightarrow y^2=2(x+2)$. Soit $\Omega(-2,0)$ et on pose $\begin{cases}X=x+2\\Y=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=X-2\\y=Y\end{cases}$.

Dans le repère $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$, $M(X,Y)\in(P) \Leftrightarrow Y^2 = 2X$, il en résulte que dans le repère $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$, F a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2},0\right)$ et la directrice de (P) a pour équation $X = -\frac{1}{2}$. On en déduit que dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, $F\left(-\frac{3}{2},0\right)$ et la directrice a pour équation $x = -\frac{5}{2}$.

2) a) $M(x,y)\in(\Gamma) \Leftrightarrow y^2 = -2|x|+4 \Leftrightarrow y^2 = -2|-x|+4 \Leftrightarrow M(-x,y)\in(\Gamma)$. Il en résulte que $\left(O,\vec{j}\right)$ est un axe de symétrie de (Γ).

b) $\begin{cases} M(x,y)\in\Gamma \\ x\in[-2,0] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2x+4 \\ x\in[-2,0] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M\in(P) \\ x\in[-2,0] \end{cases} \Leftrightarrow M\in(P_1)$ où (P_1) est la partie de (P) située dans le demi-plan de frontière $\left(O,\vec{j}\right)$ contenant le point de coordonnées $(-2,0)$, il en résulte que $\Gamma = (P_1)\cup(P_2)$ où (P_2) est le symétrique de (P_1) par rapport à $\left(O,\vec{j}\right)$.



3) a) Pour tout $t\in[0,2]$, $t^2 + \left(\sqrt{4-t^2}\right)^2 = t^2 + 4 - t^2 = 4$. Il en résulte que $M\left(t,\sqrt{4-t^2}\right)\in C$.

b) $I_1 = \int_0^2 \sqrt{4-t^2}\,dt$ est l'aire de la partie du plan limitée par (C), les axes du repère et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 2$, on en déduit que $I_1 = \frac{\text{Aire du disque de frontière (C)}}{4} = \frac{\pi\times 2^2}{4} = \pi.$

4) $I_2 = \int_0^2 \sqrt{-2t+4}\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^2 -2\sqrt{-2t+4}\,dt = -\frac{1}{3}\left[(-2t+4)\sqrt{-2t+4}\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$

5) Par raison de symétrie, $\frac{1}{4}\mathcal{A} = I_2 - \frac{1}{2}I_1$ donc $\mathcal{A} = 4I_2 - 2I_1 - = \left(\frac{32}{3} - 2\pi\right)$ua

<u>Exercice 3</u>

1) a) $-9\times 1111 - 10^4\times(-1) = -9999 + 10000 = 1$ donc $(-9,-1)$ est solution de (E).

b) Le couple $(-9,-1)$ est solution de (E) donc

$1111x - 10^4 y = 1111\times(-9) - 10^4\times(-1)$ donc $1111(x+9) = 10^4(y+1) \quad (*)$

donc 1111 divise $10^4(y+1)$ et $1111\wedge 10^4 = 1$ d'où 1111 divise $(y+1)$ par suite il existe un entier k tel que $y+1 = 1111k$ ou encore $y = 1111k-1$, $k\in\mathbb{Z}$.

en remplaçant y par $1111k-1$ dans $(*)$, on obtient $x = 10^4k - 9$.

Ainsi si le couple (x,y) est solution de (E) alors $x = 10^4k-9$ et $y = 1111k-1$, $k\in\mathbb{Z}$.

Réciproquement : Si $x = 10^4k-9$ et $y = 1111k-1$, $k\in\mathbb{Z}$, alors $1111\left(10^4k-9\right) - 10^4(1111k-1) = 1$

On en déduit que $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\left\{\left(10^4k-9\ ,1111k-1\right),k\in\mathbb{Z}\right\}$.

2) a) S'il existe deux entiers p et q tels que $n=1111p$ et $n=10^4q+1$, alors
$1111p=10^4q+1\Leftrightarrow 1111p-10^4q=1$, il en résulte que (p,q) est solution de (E).

b) $\begin{cases} n\equiv 0\,(\text{mod}1111) \\ n\equiv 1\,(\text{mod}10^4) \end{cases}\Leftrightarrow$ il existe deux entiers p et q tels que $n=1111p$ et $n=10^4q+1$, alors d'après a)
(p,q) est solution de (E), il en résulte que $n=1111\left(10^4k-9\right)=1111\times10^4k-9999,k\in\mathbb{Z}$.

Réciproquement : Si $n=1111\times10^4k-9999,k\in\mathbb{Z}$, alors $\begin{cases} n\equiv 0\,(\text{mod}1111) \\ n\equiv 1\,(\text{mod}10^4) \end{cases}$.

Ainsi $S_{\mathbb{Z}}=\left\{1111\times10^4k-9999,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

c) $\begin{cases} 1111\times10^4k-9999\geq 0 \\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} k\geq\dfrac{9999}{1111\times10^4}=0.0009 \\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$, soit $k=1$ donc $n=11100001$.

Exercice 4

1) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $1-\ln x$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$.

2) a) $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^{f(x)}=0=g(0)$ car $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$, il en résulte que g est continue à droite en 0.

b) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{f(x)}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)e^{f(x)}\dfrac{1}{\ln x}=0=g_d'(0)$

c) La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g'(x)=f'(x)e^{f(x)}$. Le signe de $g'(x)$ est celui de $f'(x)$.

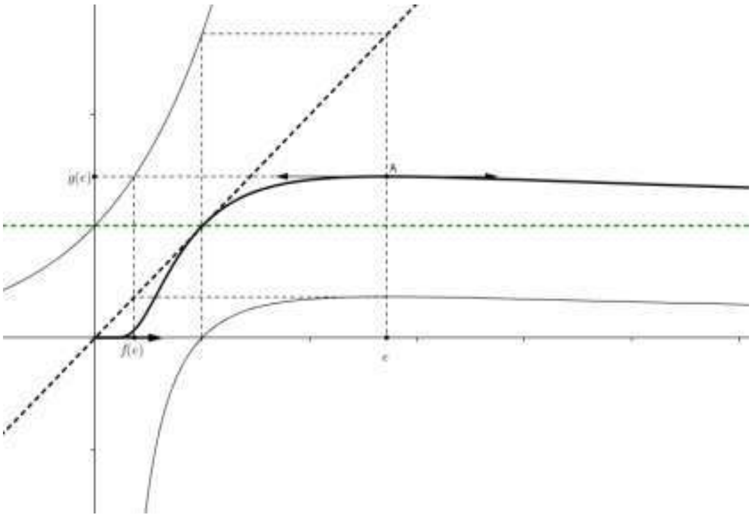
x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	1

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{f(x)}=1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

3) a) Voir figure.

b) $T:y=g'(1)(x-1)+g(1)=x$

c)



4) a) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} g(n) = 1$.

b) $u_1 = 1, u_2 = 1.41, u_3 = 1.44$ et pour tout $n \geq 3, u_n \geq u_{n+1}$ car g est décroissante sur $[e,+\infty[$, il en résulte que $u_n = g(n) = \sqrt[n]{n}$ est maximal si et seulement si $n = 3$.

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◇◇◇◇ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2015**	Epreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : 4 H Coefficient : 4
Section : **Mathématiques**	**Session principale**

Exercice 1 (5 points)

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 - 2z + 4 = 0$.

b) Déterminer une écriture exponentielle de chacune des solutions de (E).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère le cercle (Γ) de centre O et de rayon 2 et le point A d'affixe 2 .

Placer les points B et C d'affixes respectives $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

3) Soit $\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$ et M le point du cercle (Γ) d'affixe $2e^{i\theta}$.

On désigne par N le point de (Γ) tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Justifier que N a pour affixe $2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$.

4) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Vérifier que la rotation r a pour expression complexe : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) Soit F et K les milieux respectifs des segments [BM] et [CN]. Montrer que r(F) =K.

c) En déduire la nature du triangle AFK.

5) a) Montrer que $AF^2 = 4 - 2\sqrt{3}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$.

b) En déduire l'affixe du point M pour laquelle AF est maximale et construire le triangle AFK correspondant.

Exercice 2 (4 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

1) Soit f la similitude directe de centre A qui envoie B sur C. Déterminer l'angle et le rapport de f.

2) Soit g la similitude indirecte de centre A qui envoie C sur B.

a) Déterminer le rapport de g.

b) Déterminer l'axe Δ de g.

c) Soit D le point défini par $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Montrer que g(B) = D et en déduire que $[BD)$ est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ABC}$

3) a) Montrer que fog est une symétrie axiale et préciser son axe .

b) On pose $D'=f(D)$. Montrer que D' est le symétrique de B par rapport à A.

4) La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{CAD'}$ coupe la droite (CD') en un point J .

Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. Déterminer $f(I)$.

Exercice 3 (4points)

1) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $47x+53y=1$.

a) Vérifier que $(-9,8)$ est une solution de (E) .

b) Résoudre l'équation (E) .

c) Déterminer l'ensemble des inverses de 47 modulo 53.

d) En déduire que 44 est le plus petit inverse positif de 47 modulo 53.

2) a) Justifier que $45^{52}\equiv 1\ (\text{mod}\,53)$.

b)Déterminer alors le reste de 45^{106} modulo 53.

3) Soit $N=1+45+45^2+\dots+45^{105}=\sum_{k=0}^{k=105}45^k$.

a) Montrer que $44\,N\equiv 10\ (\text{mod}\,53)$.

b) En déduire le reste de N modulo 53.

Exercice 4 (7 points)

I- Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $f(x)=e^{\sin x}$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Déterminer la dérivée f' et dresser le tableau de variation de f sur $[0,\pi]$.

b) Montrer que la droite $\Delta : x=\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f) .

c) Soit (T) la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0.

Justifier que (T) a pour équation $y=x+1$.

2) Soit la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x)=e^x\sqrt{1-x^2}-1$.
On donne ci-contre le tableau de variation de g .

x	0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\searrow$	-1

a) Justifier que l'équation $g(x)=0$ admet dans l'intervalle $]0,1[$ une solution unique α.

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0,1]$.

3) On se propose de déterminer la position relative de (C_f) et de sa tangente (T) au point d'abscisse 0 sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Soit la fonction h définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $h(x)=e^{\sin x}-(x+1)$.

a) Vérifier que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $h'(x)=g(\sin x)$.

b) Montrer qu'il existe un unique réel β dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\beta=\alpha$.

c) Déterminer alors l'image par la fonction sinus de chacun des intervalles $[0,\beta]$ et $\left[\beta,\frac{\pi}{2}\right]$.

d) Dresser le tableau de variation de h.

e) En déduire que pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)\geq x+1$. Conclure.

II

1) a) Montrer que pour tout réel $x\geq 0$, $\sin x\leq x$.

b) Déduire alors que pour tout réel $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)\leq e^x$.

c) Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé la courbe de la fonction $x\mapsto e^x$.

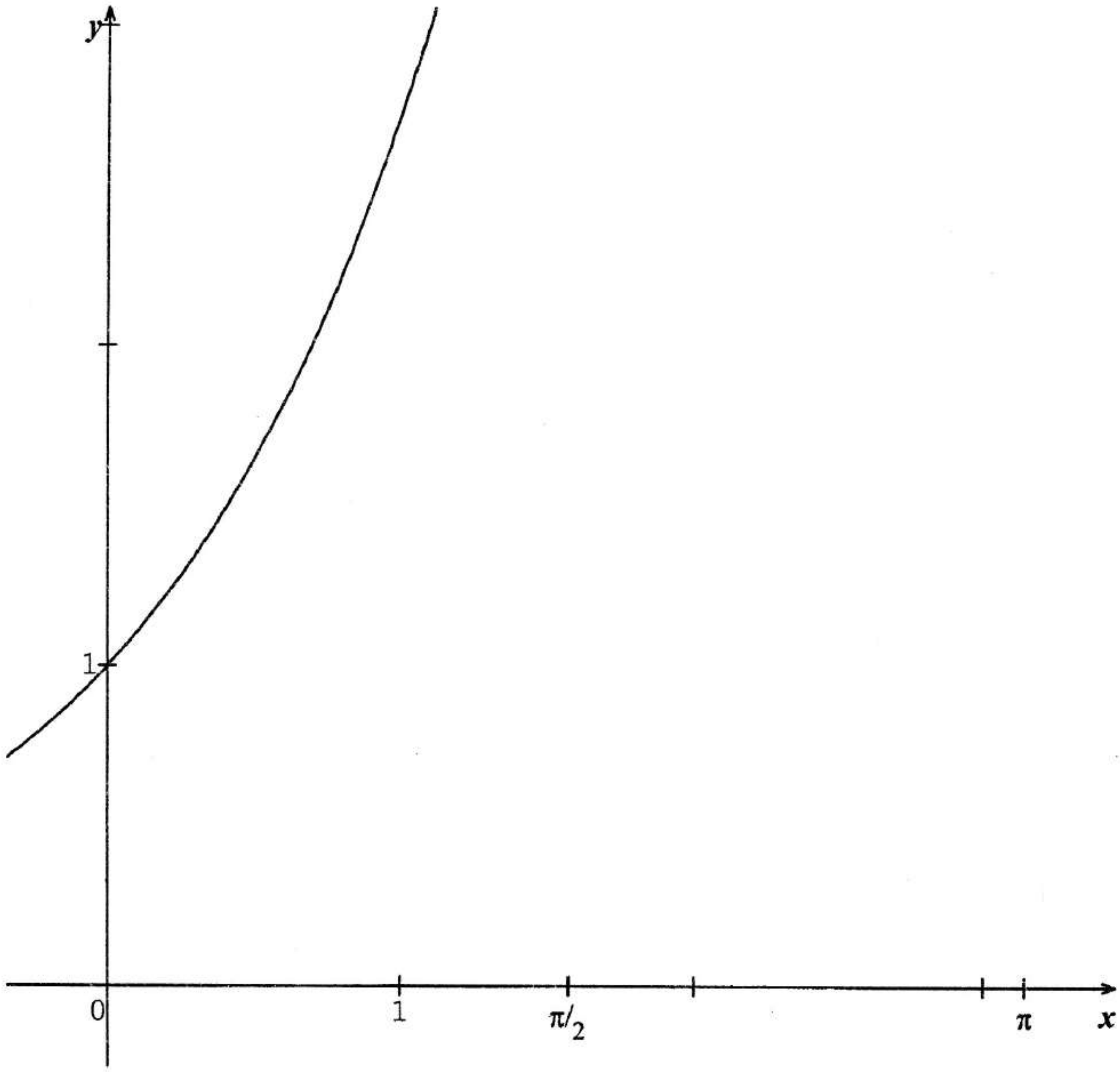
Tracer la droite (T) et la courbe (C_f).

2) a) Montrer que $\int_0^1 f(x)dx\leq e-1$ et que $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\leq e\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$.

b) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe $(O,\vec{i})$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=\pi$. Montrer que $\frac{\pi^2}{4}+\pi\leq$ A $\leq e\pi-2$.

Epreuve : Mathématiques (Section mathématiques)

Annexe (à rendre avec la copie)



MATHÉMATIQUES

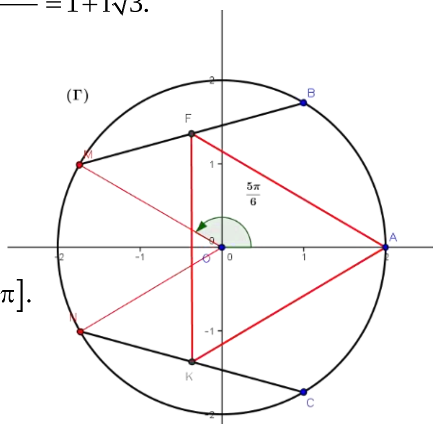
Section : Mathématiques
Session principale : juin 2015

Exercice 1 **(Thème : nombres complexes)**

1) a) $\Delta = 4-16=-12=\left(2\sqrt{3}i\right)^2$; $z_1=\dfrac{2-2\sqrt{3}i}{2}=1-i\sqrt{3}$ et $z_2=\dfrac{2+2\sqrt{3}i}{2}=1+i\sqrt{3}$.

$S_C=\left\{1-i\sqrt{3},1+i\sqrt{3}\right\}$.

b) $1-i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.



2) voir figure.

3) On sait que $N\in\Gamma$ donc $|z_N|=2$.

De plus $\arg(z_N)\equiv\left(\vec{u},\widehat{\overrightarrow{ON}}\right)[2\pi]\equiv\left(\overrightarrow{OM},\widehat{\overrightarrow{ON}}\right)+\left(\vec{u},\widehat{\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]\equiv\theta+\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

Il en résulte que $z_N=2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$.

4) a) L'expression complexe de r est $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-z_A)+z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}(z-2)+2=e^{i\frac{\pi}{3}}z-2e^{i\frac{\pi}{3}}+2$.

b) $z_F=\dfrac{z_B+z_M}{2}=e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_K=\dfrac{z_C+z_N}{2}=e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}+e^{-i\frac{\pi}{3}}$. En remplaçant z par z_F dans l'expression complexe de r, on obtient

$$z'=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)-2e^{i\frac{\pi}{3}}+2=e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}+e^{i\frac{2\pi}{3}}-2e^{i\frac{\pi}{3}}+2$$

$$=e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2=e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}+e^{-i\frac{\pi}{3}}=z_K \text{ donc } r(F)=K.$$

c) Puisque $r(F)=K$ donc $\begin{cases}AF=AK\\ \left(\overrightarrow{AF},\widehat{\overrightarrow{AK}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$, il en résulte que le triangle AFK est équilatéral.

5) a) $AF^2=\left|e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{3}}-2\right|^2=\left(e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{3}}-2\right)\left(e^{-i\theta}+e^{-i\frac{\pi}{3}}-2\right)=$

$$6+2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)-4\cos\frac{\pi}{3}-4\cos\theta=4-\left(3\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta\right)$$

$$=4-2\sqrt{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right).$$

> $a\cos x+b\sin x=r\cos(x-\varphi)$;
>
> $r=\sqrt{a^2+b^2}$ et $\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a}{r}\\ \sin\varphi=\dfrac{b}{r}\end{cases}$

b) AF^2 est maximale si et seulement si $\begin{cases}\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=-1\\ \theta\in\left]-\pi,\pi\right]\end{cases}$ d'où $\theta=\dfrac{5\pi}{6}$.

<u>Exercice 2 (</u> Thèmes : similitude indirecte ; similitude indirecte ; antidéplacement)

1) Une mesure de l'angle de f est $\left(\overrightarrow{AB}, \widehat{\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et le rapport de f est $\frac{AC}{AB} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$

2) a) Le rapport de g est $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) L'axe Δ de g est la droite qui porte la bissectrice intérieure de $\widehat{CAB}$

c) On pose $g(B) = B'$. On sait que $g \circ g = h_{\left(A,\frac{1}{3}\right)}$ et $g \circ g(C) = B'$ donc $h_{\left(A,\frac{1}{3}\right)}(C) = B' \Leftrightarrow \overrightarrow{AB'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, or $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, on en déduit que $D = B'$. Ainsi $g(B) = D$.

si g est une similitude indirecte de centre Ω et de rapport k ; alors : gog est l'homothétie de centre Ω et de rapport k^2

Puisque $g(B) = D$ donc $\frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(\widehat{ABD}\right)$ d'où $\widehat{ABD} = \frac{\pi}{6}$, il en résulte que $[BD)$ est la bissectrice intérieure de $\widehat{ABC}$.

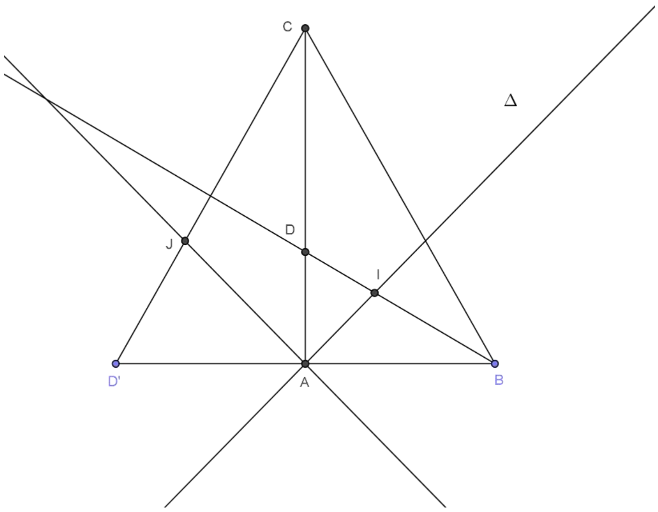
3) a) $f \circ g$ est la composée d'une similitude directe de rapport $\sqrt{3}$ et d'une similitude indirecte de rapport $\frac{\sqrt{3}}{3}$ donc $f \circ g$ et un antidéplacement

la composée d'une similitude directe de rapport k et d'une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{k}$ est soit une symétrie orthogonale, soit une symétrie glissante.

or $f \circ g(A) = A$ et $f \circ g(C) = C$ donc $f \circ g$ est une symétrie orthogonale d'axe (AC).

b) On a $f \circ g(B) = D'$ donc $S_{(AC)}(B) = D'$ d'où $(AC) \perp (BD')$ et $(AC) \perp (BA)$ donc B, A et D' sont alignés or AB = AD' donc A est le milieu de [BD] et par suite $S_A(B) = D'$.

4) $\{I\} = (BD) \cap \Delta$ donc $f(I) \in f((BD)) \cap f(\Delta)$, or $f(\Delta) = S_{(AC)} \circ g^{-1}(\Delta) = S_{(AC)}(\Delta) = (AJ)$. d'où $f(I) \in (CD') \cap (AJ) = \{J\}$.



<u>Exercice 3</u> (Thème : arithmétique)

1) a) $47\times(-9)+53\times 8=1$ donc $(-9,8)$ est solution de (E).

b) $47x+53y=47\times(-9)+53\times 8 \Leftrightarrow 47(x+9)=53(8-y)$ donc 47 divise $53(8-y)$ et $47\wedge 53=1$ donc 47 divise $(8-y)$ d'où $y=8-47k, k\in\mathbb{Z}$ par suite $x=53k-9, k\in\mathbb{Z}$.

Ainsi $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(53k-9,8-47k), k\in\mathbb{Z}\}$.

c) soit x un inverse de 47 modulo 53, alors $47x\equiv 1(\mathrm{mod}\,53) \Leftrightarrow$ il existe un entier y tel que $47x=1+53y \Leftrightarrow 47x-53y=1 \Leftrightarrow (x,-y)$ solution de (E) donc $x=53k-9, k\in\mathbb{Z}$

d) $0<x=53k-9<53 \Leftrightarrow \frac{9}{53}<k<\frac{62}{53}, k\in\mathbb{Z}$ donc $k=1$ d'où $x=44$.

2) a) D'après Fermat $45^{52}\equiv 1(\mathrm{mod}\,53)$

b) $45^{106}=\left(45^{52}\right)^2\times 45^2\equiv 45^2(\mathrm{mod}\,53)\equiv 11(\mathrm{mod}\,53)$.

3) a) N est la somme de 106 termes d'une suite géométrique de raison 45

donc $N=\frac{1-45^{106}}{1-45} \Leftrightarrow 44N=45^{106}-1\equiv 10(\mathrm{mod}\,53)$

b) $44N\equiv 10(\mathrm{mod}\,53)$ donc $N\equiv 470(\mathrm{mod}\,53)\equiv 46(\mathrm{mod}\,53)$.

<u>Exercice 4</u> (Thèmes : variation d'une fonction , bijection , calcul intégral , notion d'aire)

I.

1) a) La fonction f est dérivable sur $[0,\pi]$ et $f'(x)=(\cos x)e^{\sin x}$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	1	$\nearrow$	e	$\searrow$	1

b) Pour tout $x\in[0,\pi]$, $\pi-x\in[0,\pi]$ et $f(\pi-x)=e^{\sin(\pi-x)}=e^{\sin x}=f(x)$.

c) $(T): y=f'(0)x+f(0)=x+1$.

2) a) La fonction g est continue et strictement croissante sur $\left]0,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$ donc

$g\left(\left]0,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]\right)=\left]0,g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]$ par suite $g(x)>0$ sur $\left]0,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $\left]\frac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right[$ donc elle réalise une bijection de $\left]\frac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right[$ sur $g\left(\left]\frac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right[\right)=\left]-1,g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right[$, $0\in\left]-1,g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right[$ donc il existe un unique $\alpha\in\left]\frac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right[$ tel que $g(\alpha)=0$. Ainsi l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in]0,1[$.

b)

x	0	α	1
$g(x)$	$+$	0	$-$

3) a) La fonction h est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $h'(x)=(\cos x)e^{\sin x}-1=g(\sin x)$.

b) La fonction $x\mapsto\sin x$ est une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0,1]$,

or $\alpha\in[0,1]$ donc il existe un unique $\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\beta=\alpha$.

la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ est une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0,1]$

c) La fonction $x\mapsto\sin x$ est continue et strictement croissante sur chacun des intervalles $[0,\beta]$ et $[0,\alpha]$ donc

$\sin([0,\beta])=[\sin 0,\sin\beta]=[0,\alpha]$ et $\sin\left(\left[\beta,\frac{\pi}{2}\right]\right)=[\alpha,1]$.

d)

x	0		β		$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h	0	$\nearrow$	$h(\beta)$	$\searrow$	$h\left(\frac{\pi}{2}\right)$

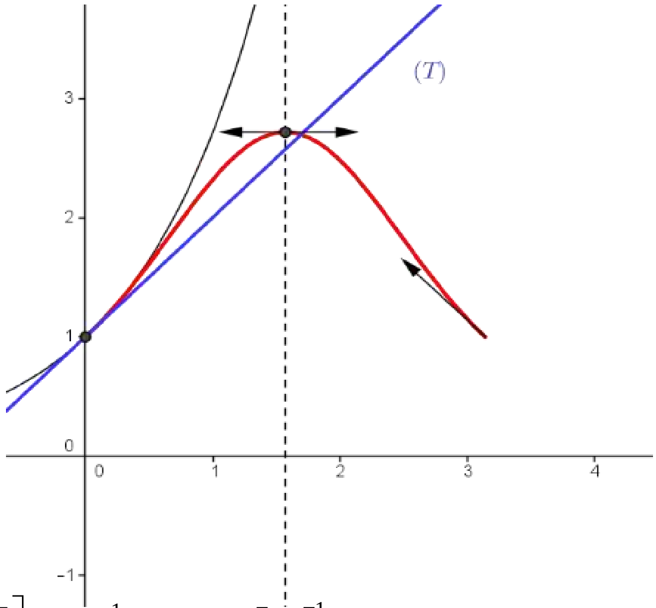
e) $h([0,\beta])=[0,h(\beta)]$ et $h\left(\left[\beta,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[h\left(\frac{\pi}{2}\right),h(\beta)\right]$ et $h\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$ donc $h(x)\geq 0$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par suite $f(x)\geq x+1$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc (C_f) est en dessus de (T).

II.

1) a) pour tout $x\geq 0$, $\cos t\leq 1, t\in[0.x]$ et $t\mapsto\cos t$ est continue sur $[0.x]$ donc $\int_0^x \cos t\,dt\leq x$ donc $\sin x\leq x$.

b) La fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur IR et $\sin x \leq x$ pour tout $x \geq 0$ donc $e^{\sin x} \leq e^x \Leftrightarrow f(x) \leq e^x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

c)



2) a) on sait que $f(x) \leq e^x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\int_0^1 f(x)dx \leq \left[e^x\right]_0^1 = e - 1$

on sait que $\sin x \leq 1$ donc $f(x) \leq e$ donc $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \leq e\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$.

b) $A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

$\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \leq e - 1 + e\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ donc $\frac{\pi^2}{4} + \pi \leq A \leq e\pi - 2$

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2015

SECTION : MATHEMATIQUES
EPREUVE : MATHEMATIQUES

SESSION PRINCIPALE
Corrigé

EXERCICE 1

1) a) $\Delta' = -3 = \left(\sqrt{3}i\right)^2 \Rightarrow S_{\mathbb{C}} = \left\{1-\sqrt{3}i\,;1+\sqrt{3}i\right\}$.

b) $1+\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1-\sqrt{3}i = \overline{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

2) Voir figure à la fin de l'exercice.

3) $\begin{cases} OM = ON = 2 \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{ON}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ $\Rightarrow$ le point N est donc l'image du point M par la rotation de centre O

et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et dont la forme complexe est $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}.z$ d'où $z_N = e^{i\frac{\pi}{3}}.z_M = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.e^{i\theta} = 2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$.

4) a) $M'(z')$ est l'image d'un point $M(z)$ par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ si et seulement

si $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z-z_A)+z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z-2)+2 = e^{i\frac{\pi}{3}}z+2-2e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) On a $z_K = \frac{z_N+z_C}{2} = e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}+e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_F = \frac{z_B+z_M}{2} = e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{3}}$

$e^{i\frac{\pi}{3}}.z_F+2-2e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)+2-2e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}+2+e^{i\frac{2\pi}{3}}-2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$$= e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}+2+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(1+\sqrt{3}i\right)$$

$$= e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}+\left(2-\frac{1}{2}-1\right)-i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}+\overbrace{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\overline{e^{i\frac{\pi}{3}}}} = z_K \text{ d'où } r(F)=K.$$

c) $r(F)=K \Leftrightarrow \begin{cases} AF = AK \\ \left(\widehat{\overrightarrow{AF}\,;\overrightarrow{AK}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ donc le triangle AFK est équilatéral direct.

5) a) $AF^2 = |z_F-2|^2 = \left|e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{3}}-2\right|^2$

$$= \left|\cos\theta+i\sin\theta+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-2\right|^2 = \left|\left(\cos\theta-\frac{3}{2}\right)+i\left(\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|^2$$

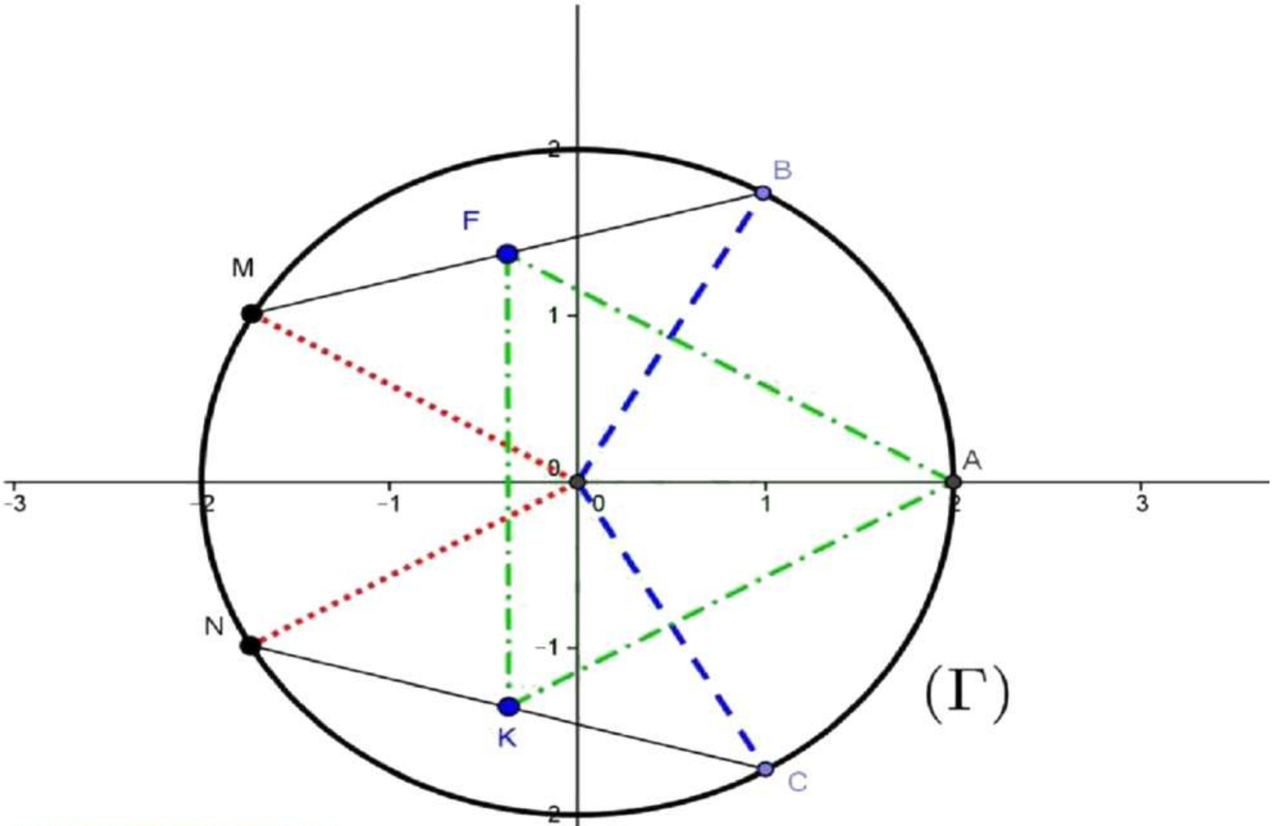
$$=\left(\cos\theta-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{1}-3\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta+\overbrace{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}^{3}$$

$$=4-\boxed{\left(3\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta\right)}=4-\boxed{2\sqrt{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}\ *$$

$*$ On pourra sortir du second membre et utiliser $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\theta.\cos\frac{\pi}{6}-\sin\theta.\sin\frac{\pi}{6}=\ldots$

b) AF est maximale lorsque AF^2 est maximale.

Ceci est réalisé lorsque $\begin{cases}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-1\\ \theta\in\left]-\pi,\pi\right]\end{cases}\Leftrightarrow\ \theta+\frac{\pi}{6}=\pi\ \Leftrightarrow\theta=\frac{5\pi}{6}$.



EXERCICE 2

1) Le rapport k de f est $k=\frac{AC}{AB}=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ et son angle est $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

2) a) Le rapport k' de g est $k'=\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) L'axe Δ de g porte la bissectrice intérieure de $\widehat{CAB}$.

c) Posons $g(B)=B'$.On a $gog(C)=B'\ \overset{gog=h_{\left(A,\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)}}{\Leftrightarrow}\ h_{\left(A,\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)}(C)=B'$ ainsi

$h_{\left(A,\frac{1}{3}\right)}(C)=B' \Leftrightarrow \overrightarrow{AB'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ soit $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AD}$ et le résultat en découle.

Conclusion : $B'=D$.

L'image du triangle ABC est le triangle ADB qui est lui est indirectement semblable donc $\left(\widehat{\overrightarrow{BD}\,;\,\overrightarrow{BA}}\right)\equiv-\left(\widehat{\overrightarrow{CB}\,;\,\overrightarrow{CA}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$ et comme $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BA}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$, on conclut que $[BD)$ est la bissectrice intérieure de $\widehat{ABC}$.

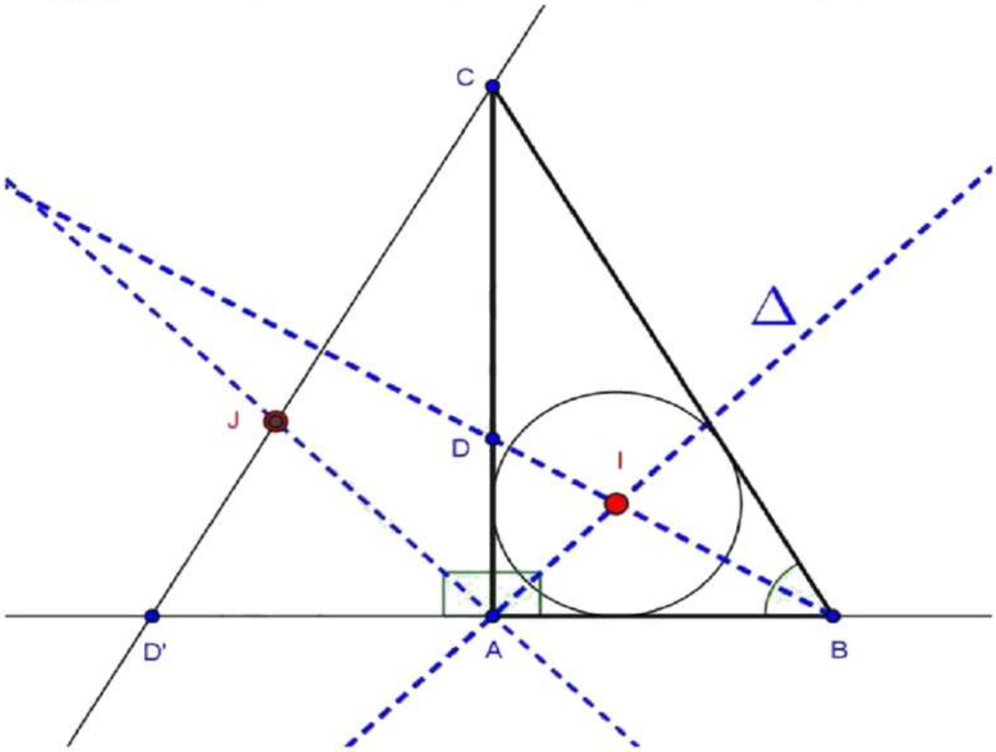
3) a) $f\circ g$ est la composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte de rapports inverses : $\sqrt{3}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$ donc $f\circ g$ est un antidéplacement.

Or $f\circ g(A)=A$ et $f\circ g(C)=f(B)=C$: $f\circ g$ fixe les deux points distincts A et C.

Conclusion : $f\circ g=S_{(AC)}$.

b) $f(D)=D' \Leftrightarrow f\left(g(B)\right)=D' \Leftrightarrow S_{(AC)}(B)=D' \Leftrightarrow S_{(AC)}\left(S_{(AB)}(B)\right)=D$

$\Leftrightarrow S_A(B)=D'$ (composée de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires)



4) I est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC donc $\{I\}=(BD)\cap\Delta$

(on rappelle que le centre du cercle inscrit est le point de concours des bissectrices intérieures du triangle) $\Rightarrow\{f(I)\}=f\left((BD)\right)\cap f(\Delta)=(CD')\cap \text{biss}\left(\widehat{CAD'}\right)=\{J\}$

En effet

$A\overset{f}{\mapsto}A$

$B\mapsto C$ donc $f\left((BD)\right)=(CD')$ de plus Δ est la bissectrice intérieure de

$D\mapsto D'$

$\widehat{CAB}=\widehat{DAB}$ donc $f(\Delta)$ est la bissectrice de $\widehat{f(D)f(A)f(B)}=\widehat{CAD'}$

Conclusion : $f(I)=J$.

EXERCICE 3

1) a) $47\times(-9)+53\times 8=-423+424=1$.

b) $47x+53y=47\times(-9)+53\times 8 \Leftrightarrow 47(x+9)=53(8-y)$

$\Rightarrow 47$ divise $53(8-y) \underset{\text{lemme de Gauss}}{\overset{47\wedge 53=1}{\Rightarrow}} 47$ divise $(8-y)$

$\Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z} / 8-y=47k \Rightarrow y=8-47k$.

$\Rightarrow \cancel{47}(x+9)=53\times\cancel{47}k \Rightarrow x=-9+53k$

Réciproquement $47\times(-9+53k)+53\times(8-47k)=1$

Conclusion : Les solutions de cette équation sont les couples (x,y) tels que

$x=-9+53k$ et $y=8-47k$ où $k\in\mathbb{Z}$

c) Si « u est un inverse de 47 modulo 53 » alors

$47u\equiv 1\ [53] \Rightarrow \exists v\in\mathbb{Z} /\ 47u+53v=1 \Rightarrow (u,v)$ solution de (E) ((E) équation de 1))

$\Rightarrow u=-9+53k=44+53k'$, $k\in\mathbb{Z}$ et $k'=k-1$ et en termes de **classe** $u\equiv 44[53]$

Réciproquement si $u\equiv 44[53]$ alors $47u\equiv 47\times 44\equiv(-6)\times(-9)\equiv 54\equiv 1[53]$

Conclusion : L'ensemble des inverses de 47 modulo 53 qu'on pourra noter $\text{inv}_{47}^{\text{mod}53}$ est l'ensemble des entiers u congrus à 44 modulo 53, c'est-à-dire $\text{inv}_{47}^{\text{mod}53}=\{44+53k, k\in\mathbb{Z}\}$

d) Il suffit de remplacer k par une valeur convenable dans $-9+53k$ pour répondre (ici $k=1$)

2) a) 53 est un nombre premier ne divisant pas 45 ($47\wedge 53=1$) donc d'après le petit théorème de Fermat $45^{53-1}\equiv 1[53]$ soit $45^{52}\equiv 1[53]$.

b) $45^{106}\equiv(45^{52})^2\times 45^2\equiv 11\ [53]$ car $(45^{52})^2\equiv 1[53]$ et $45^2\equiv(-8)^2\equiv 64\equiv 11[53]$ d'où le reste de 45^{106} modulo 53 est égal à 11.

3) a) $N=\sum_{k=0}^{105}45^k=1\dfrac{45^{106}-1}{45-1}=\dfrac{45^{106}-1}{44}$ (somme de termes d'une suite géométrique de raison 45)

Ainsi $44N=45^{106}-1$ et comme $45^{106}\equiv 11\ [53]$ alors $44N\equiv 11-1\equiv 10[53]$.

b) $44N\equiv 10[53] \overset{\text{47 est l'inverse de 44 mod53}}{\Rightarrow} N\equiv 10\times 47\equiv 46[53]$.

EXERCICE 4

1) a) $f'(x)=\cos x\, e^{\sin x}$ pour tout réel x de $[0,\pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f'(x)		+	0	-	
f(x)	1	↗	e	↘	1

b) **La condition n°1 :**

$$x\in[0,\pi]\Leftrightarrow 0\le x\le\pi\Leftrightarrow -\pi\le -x\le 0\Leftrightarrow \pi-\pi\le 2\left(\frac{\pi}{2}\right)-x\le 0+\pi\Leftrightarrow 2\left(\frac{\pi}{2}\right)-x\in[0,\pi]$$

La condition n°2 : $f(\pi-x)=e^{\sin(\pi-x)}=e^{\sin x}=f(x)$.

Conclusion : La droite $x=\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour (C_f)

c) **T :** $y=f'(0)x+f(0)=\cos 0\, e^{\sin 0}x+e^{\sin 0}=x+1$

2) a) g ne s'annule pas sur $\left]0,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]=E$ (sa restriction sur cet intervalle est continue et strictement croissante et $g(E)=\left]0,g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]$.

On a également sa restriction sur $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right]=F$ est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de F sur $\left[-1,g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]$. Ce dernier contient le réel 0 ,vu que $g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\times g(1)<0$ donc il existe un seul réel $\alpha\in F$ tel que $g(\alpha)=0$. (théorème des valeurs intermédiaires)

Conclusion : g s'annule une seule fois sur $]0,1[$.

b)

x	0		α		1
g(x)		+	0	-	

3) a)

$$h'(x)=\cos x.e^{\sin x}-1=\sqrt{1-\sin^2 x}.e^{\sin x}-1=g(\sin x)$$

b) La fonction sin est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et prend ses valeurs dans $[0,1]$ et comme $\alpha\in[0,1]$, il admet par la fonction sin un seul antécédent $\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

c) $\sin([0,\beta]) = [\sin 0, \sin\beta] = [0,\alpha]$ et $\sin\left(\left[\beta,\frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\sin\beta, \sin\frac{\pi}{2}\right] = [\alpha,1]$.

d)

x	0		β		$\frac{\pi}{2}$
h'(x)		+	0	-	
h(x)	0	↗	h (β)	↘	$e-\frac{\pi}{2}-1$

e) Comme $e-\frac{\pi}{2}-1 = 0,14 > 0$,on conclut que $h(x) \geq 0$ pour tout réel x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Donc $f(x) \geq x+1$

Conclusion : (C_f) est au-dessus de (T) pour tout réel x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

I)

1) a) On pose $k(x) = \sin x - x$ pour tout réel x de $[0,\pi]$.

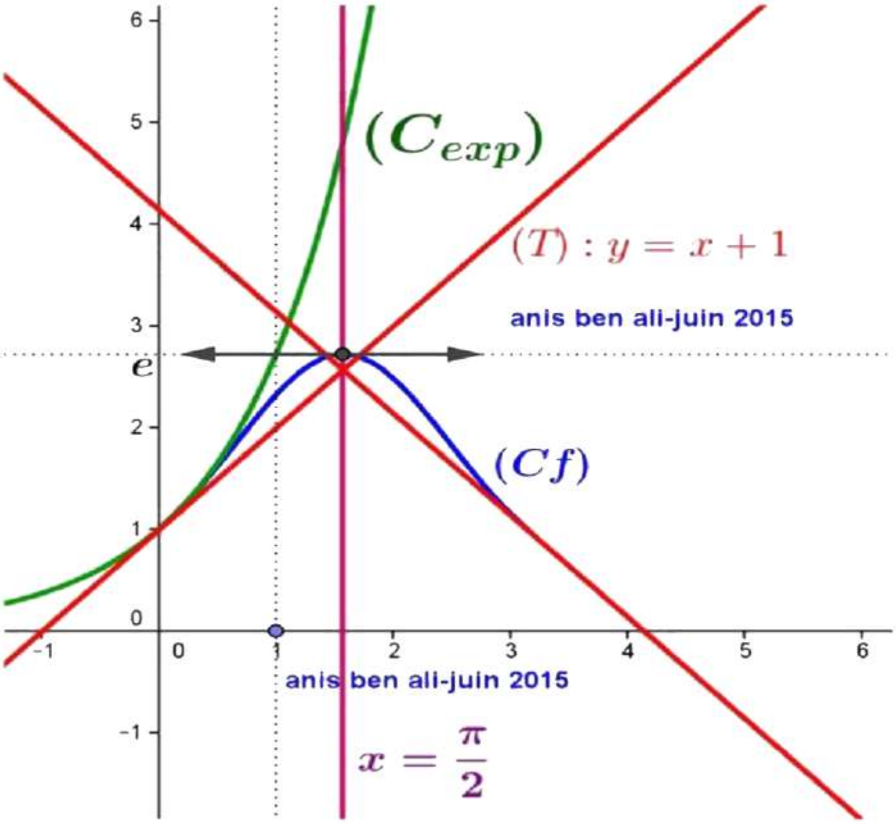
$k'(x) = \cos x - 1 \leq 0$ pour tout réel x positif donc

k est strictement décroissante sur $\mathbb{R}+$: $x \geq 0 \Rightarrow k(x) \leq k(0) = 0$

d'où $\sin x \leq x$ pour tout réel x positif.

b) Pour tout réel x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \leq x \Rightarrow e^{\sin x} \leq e^x$ (La fonction exponentielle est strictement croissante)

c)



2) a) On a $\forall x \in [0,1],\ f(x) \le e^x$.

En intégrant des fonctions continues sur $[0,1]$, on obtient :

$\int_0^1 f(x)dx \le \int_0^1 e^x dx$ d'où $\int_0^1 f(x)dx \le [e^x]_0^1 = e-1$.

On a $\forall x \in \left[1,\frac{\pi}{2}\right]$, $\underbrace{\sin x \le \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{\text{sin est croissante sur } \left[1,\frac{\pi}{2}\right]} = 1 \Rightarrow f(x) \le e$.

En intégrant des fonctions continues sur $\left[1,\frac{\pi}{2}\right]$, on obtient

$\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \le e\int_1^{\frac{\pi}{2}} dx = e[x]_1^{\frac{\pi}{2}} = e\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$.

b) f étant continue et positive sur $[0,\pi]$ et la droite $x=\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour (C_f)

donc il suffit de calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ et on aura $A = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx}_{\text{relation de CHASLES}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

Majoration de A :

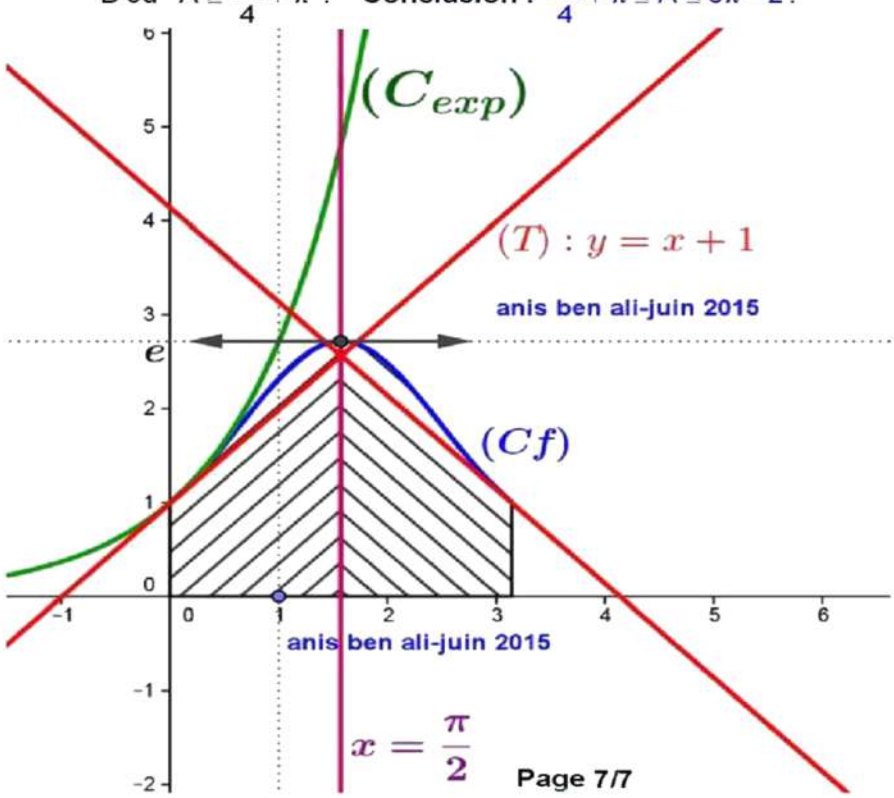
$A = 2\left(\underbrace{\int_0^1 f(x)dx + \int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx}_{\text{relation de CHASLES}}\right)$ ainsi d'après la question 2) a)- $A \le 2\left((e-1)+e\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right)$

donc $A \le e\pi - 1$

Minoration de A :

Pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) \ge x+1$ donc $A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \ge 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)dx = 2\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

D'où $A \ge \frac{\pi^2}{4}+\pi$. **Conclusion :** $\frac{\pi^2}{4}+\pi \le A \le e\pi - 2$.



Page 7/7

Corrigé du Sujet de Baccalauréat - Session Principale 2015 – 4ème Math par ANIS BEN ALI

Exercice 3 :

$(E): 47x+53y=1.$

1.a. $47\text{x}(-9)+53\text{x}8=-423+424=1$ *alors (-9,8) est solution de (E).*

b. $47x+53y=1$ *et* $47\text{x}(-9)+53\text{x}8=1$ *donnent,en soustrayant membre à membre* $47(x+9)+53(y-8)=0$

alors $47(x+9)=-53(y-8)$ *(*) ,par suite 47 divise* $-53(y-8)$ *et comme PGCD(47,-53)=PGCD(47,53)=1*

il s'ensuit d'après le lemme de Gauss que 47 divise $y-8$ *; soit* $y=8+47k$; $k\in Z.$

(*) donne 47(x+9)= -53x47k c-à-d $x=-9-53k.$

Vérification : $47\text{x}(-9-53k)+53\text{x}(8+47k)=-423+424=1$.

D'où l'ensemble des solutions de (E) sont $(x,y)=(-9-53k,8+47k);k\in Z.$

c.Soit a un entier.

a est un inverse de 47 modulo 53 si et seulement si $47a\equiv 1(\text{mod}\,53)$ *ce qui signifie qu'il existe un entier n tel que* $47a-53n=1$ *équivaut* $47a+53\text{x}(-n)=1$ *équivaut (a,-n) est solution de (E)*

ce qui donne $a=-9-53k$; $k\in Z.$

Réciproquement si $a=-9-53k;k\in Z.$ *alors* $47a=47(-9-53k)$ = $-423-53\text{x}47\text{k}$ *,par suite*

$$\begin{aligned}47a&\equiv -423(\text{mod}\,53)\\&\equiv -423+8\text{x}53(\text{mod}53)\\&\equiv 1(\text{mod}53)\end{aligned}$$

D'où l'ensemble des inverses de 47 modulo 53 sont les entiers $-9-53k;k\in Z.$

d.Un inverse positif de 47 modulo 53 vérifie $-9-53k\geq 0\Leftrightarrow 53k\leq -9\Leftrightarrow k\in\{-1,-2,...\}$.

Le plus petit de ces inverse est obtenu pour $k=-1$ *qui est* $-9+53=44$.

2.a. 53 est un nombre premier qui ne divise pas 45 alors d'après le théorème de Fermat on a :

$45^{53-1}\equiv 1(\text{mod}\,53)$ *d'où* $45^{52}\equiv 1(\text{mod}\,53)$.

b. $45^{106}=\left(45^{52}\right)^2\text{x}45^2$ *.Or* $45^{52}\equiv 1(\text{mod}\,53)$ *alors* $\left(45^{52}\right)^2\equiv 1(\text{mod}\,53)$ *et par suite*

$\left(45^{52}\right)^2\text{x}45^2\equiv 45^2(\text{mod}\,53)$ *ce qui donne* $45^{106}\equiv 45^2(\text{mod}\,53)$ *c-à-d*

$45^{106}\equiv 2025(\text{mod}\,53)\Leftrightarrow 45^{106}\equiv 11+53\text{x}38(\text{mod}\,53)\Leftrightarrow 45^{106}\equiv 11(\text{mod}\,53)$

et comme $0\leq 11<53$ *alors le reste de* 45^{106} *modulo 53 est 11.*

3. $N=\sum_{k=0}^{k=105}45^k$

a.N est la somme des 106 premiers termes de la suite géométrique u de terme général $u_k = 45^k$ *et comme 45 est la raison de u alors* $N = \frac{45^{106}-1}{45-1} \text{x}1 = \frac{45^{106}-1}{44}$ *.On aura donc* $44N = 45^{106} - 1$.

Or $45^{106} \equiv 11(\text{mod}\,53)$ *alors* $45^{106} - 1 \equiv 10(\text{mod}\,53)$ *soit* $44N \equiv 10(\text{mod}\,53)$.

b.D'après 1.d. on a 47 est un inverse de 44 modulo 53 alors $47\text{x}44 \equiv 1(\text{mod}53)$,

et en multipliant chacun des deux membres par N, obtient $47\text{x}44\text{N} \equiv \text{N}(\text{mod}53)$ *(*)* .

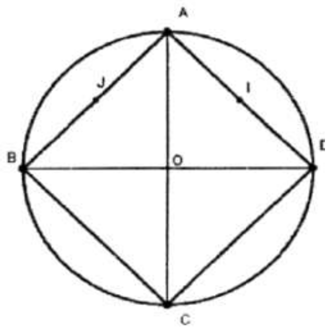
Or on a $44N \equiv 10(\text{mod}\,53)$ *ce qui donne* $47\text{x}44\text{N} \equiv 470(\text{mod}53)$ *(**)*

(*) et (**) donnent $N \equiv 470(\text{mod}\,53) \Leftrightarrow N \equiv 46(\text{mod}\,53)$ *.Puisque* $0 \leq 46 < 53$ *alors le reste de N modulo 53 est 46.*

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◇◇◇◇ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2015**	Epreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : 4 H Coefficient : 4
Section : **Mathématiques**	**Session de contrôle**

Exercice 1 (4 points)

Le plan est orienté. Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré inscrit dans le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O, $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et I et J sont les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[AB]$.



1) Soit f la similitude directe qui envoie A sur B et I sur O.

   a) Justifier que f est d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

   b) Déterminer le centre de f.

2) La droite (CJ) recoupe le cercle $(\mathscr{C})$ en E et soit H le projeté orthogonal du point B sur (AE).

   a) Justifier que E est le milieu du segment $[AH]$ et en déduire que $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}=-EA^2$.

   b) Montrer d'autre part que $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}=-\frac{\sqrt{2}}{2}EA.EB$.

3) On considère la similitude indirecte g de centre E qui envoie B sur A.

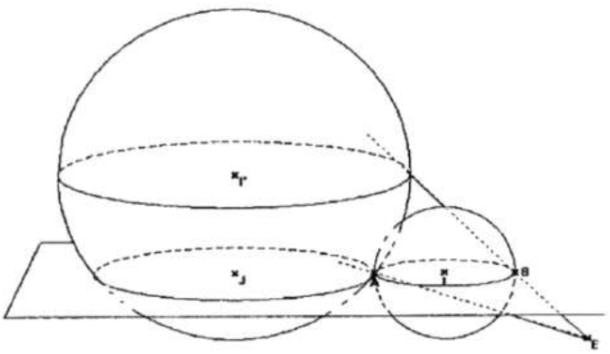
   a) Déterminer le rapport de g.

   b) Soit $O'=g(O)$. Justifier que le triangle O'EA est isocèle.

   c) Montrer que $O'A = AI$.

4) Soit $S=g\circ f$. Montrer que S est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe.

Exercice 2 (5 points)



Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.
On considère les points $A(-2,3,2)$ et $B(2,3,2)$ et l'ensemble S des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-6y-4z+9=0$.

1) a) Montrer que S est une sphère et préciser son rayon et les coordonnées de son centre I.

   b) Montrer que $[AB]$ est un diamètre de S.

2) Soit P le plan d'équation $z = 2$ et soit $J(-6,3,2)$.

a) Vérifier que I appartient au plan P et en déduire que la sphère S coupe P suivant le cercle Γ de diamètre $[AB]$.

b) Dans le plan P, on considère le cercle Γ' de centre J et de rayon 4.

Montrer que les cercles Γ et Γ' sont tangents extérieurement en A.

3) Soit E le point de coordonnées $(4,3,0)$. On considère l'homothétie h de centre E, de rapport $\frac{5}{2}$ et on désigne par S' la sphère image de S par h.

a) Déterminer le rayon de S' et les coordonnées de son centre I'.

b) Justifier que le plan P coupe la sphère S' suivant le cercle Γ'.

c) La droite (EA) recoupe S' en A'. Soit B' le point diamétralement opposé à A' sur la sphère S'.

Montrer que les points E, B et B' sont alignés.

Exercice 3 (4 points)

On a recensé, dans un pays, les dépenses en dinars des ménages en produits informatiques et téléphoniques de l'année 2004 jusqu'à l'année 2013.

Le tableau ci- dessous donne ces dépenses Y (en 10^6 dinars) suivant le rang de l'année X.

Rang de l'année X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dépenses Y (10^6D)	0.38	0.46	0.52	0.78	0.86	0.92	0.96	1.02	1.08	1.20

Dans l'annexe ci-jointe (Figure1), on a représenté dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ le nuage de points de la série (X, Y).

1) On se propose d'ajuster la série double (X, Y) par la droite de Mayer. (Les valeurs seront arrondies au centième près).

a) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage.

b) Soit G_1 le point moyen des cinq premiers points du nuage. Calculer les coordonnées de G_1.

c) Tracer la droite (GG_1) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

d) Déterminer une équation de la droite (GG_1) sous la forme $y = a x + b$.

e) En utilisant l'ajustement de cette série par la droite de Mayer, donner une prévision des dépenses des ménages pour l'année 2019.

2) On pose $Z = e^{Y}$ et on obtient le tableau suivant :

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Z	1.46	1.58	1.68	2.18	2.36	2.51	2.61	2.77	2.95	3.32

a) Déterminer le coefficient de corrélation r de la série (X, Z).

b) Ecrire une équation de la droite affine de Z en X par la méthode des moindres carrés. (les coefficients de la droite seront arrondis au centième).

c) En utilisant cet ajustement, donner une prévision des dépenses de l'année 2019.

Exercice 4 (7 points)

I- 1) Soit la fonction u définie sur $]0,+\infty[$ par $u(t)=3\ln(1+t)-\frac{t}{1+t}$.

a) Dresser le tableau de variation de la fonction u.

b) En déduire le signe de u.

2) Soit la fonction f définie sur $[0,1]$ par : $\begin{cases} f(x)=x^3[\ln(1+x)-\ln x] \text{ si } x\in]0,1] \\ f(0)=0 \end{cases}$

a) Montrer que f est continue et dérivable à droite en 0 et calculer $f'_d(0)$.

b) Vérifier que pour tout $x\in]0,1]$, $f'(x)=x^2u\left(\frac{1}{x}\right)$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

II- On considère les fonctions g et h définies sur $[0,1]$ par

$$g(x)=x^3\ln(x+1) \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} h(x)=x^3\ln x \text{ si } x\in]0,1] \\ h(0)=0 \end{cases}$$

On désigne respectivement par (C_f), (C_g) et (C_h) les courbes des fonctions f, g et h dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que la courbe (C_h) admet une tangente horizontale au point d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$.

2) a) Vérifier que pour tout réel x de $[0,1]$; $f(x)=g(x)-h(x)$.

b) Donner la position relative des courbes (C_f) et (C_g).

c) Soit T et T' les tangentes respectives à (C_f) et (C_g) aux points d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$.

Montrer que T et T' sont parallèles.

3) Dans l'annexe ci-jointe (Figure2), on a tracé dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ les courbes (C_g) et (C_h) et leurs tangentes aux points d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$.

a) Construire le point de (C_f) d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$ et la tangente (T).

b) Tracer la courbe (C_f).

4) a) Justifier que h admet une unique primitive H sur l'intervalle $[0,1]$ qui s'annule en 1.

b) Soit $\alpha\in]0,1]$ et $A_\alpha=\int_\alpha^1 x^3\ln x\,dx$. Exprimer A_α en fonction de H.

c) Calculer A_α à l'aide d'une intégration par parties.

d) En déduire H(0).

e) Déterminer alors l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes (C_f) et (C_g) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

MATHÉMATIQUES

Section : Mathématiques

Session de contrôle : juin 2015

<u>Exercice 1</u> (Thèmes : similitude directe ; similitude indirecte ; antidéplacement)

1) a) Une mesure de l'angle de f est $\left(\overrightarrow{AI},\widehat{\ \overrightarrow{BO}}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AD},\widehat{\ \overrightarrow{BD}}\right)[2\pi]\equiv\left(\overrightarrow{DA},\widehat{\ \overrightarrow{DB}}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Le rapport de f est $\frac{OB}{AI}=\frac{\frac{1}{2}DB}{\frac{1}{2}AD}=\frac{DB}{AD}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$.

b) $\frac{DB}{AD}=\sqrt{2}$ et $\left(\overrightarrow{DA},\widehat{\ \overrightarrow{DB}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$, il en résulte que D est le centre de f.

2) a) [AC] est un diamètre de (ζ) et $E\in(\zeta)\setminus\{A,C\}$ donc $(CE)\perp(AE)$ et $(BH)\perp(AE)$ donc $(BH)//(CE)$, or (CE) passe par J le milieu de [AB] et coupe [AH] en E, il en résulte que E est le milieu de [AH].

$\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EH}=-EA\times EH=-EA^2$.

b) $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}=EA.EB.\cos\left(\widehat{AEB}\right)=EA.EB.\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}EA.EB$.

car $\left(\overrightarrow{EB},\widehat{\ \overrightarrow{EA}}\right)\equiv\pi+\left(\overrightarrow{CB},\widehat{\ \overrightarrow{CA}}\right)\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

3) a) Le rapport de g est $\frac{EA}{EB}=\frac{EH}{\sqrt{2}EH}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

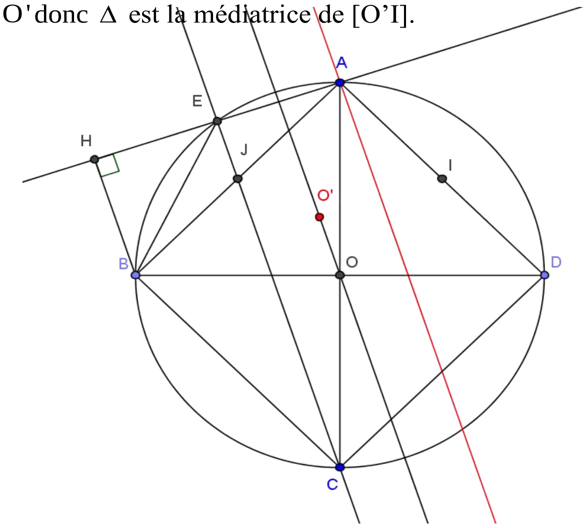
b) Le triangle OEB est isocèle donc son image par g est un triangle isocèle, on en déduit que le triangle O'EA est isocèle.

c) On sait que $f(A)=B$ et $f(I)=O$ donc $AI=\frac{1}{\sqrt{2}}OB$ de plus

$g(B)=A$ et $g(O)=O'$ donc $AO'=\frac{1}{\sqrt{2}}OB$, il en résulte que $O'A=AI$.

4) S est la composée d'une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ est d'une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ donc S est une similitude indirecte de rapport 1 donc S est un antidéplacement.

$S(A)=g(f(A))=g(B)=A$, il en résulte que S est une symétrie orthogonale d'axe Δ qui passe par O de plus $S(I)=g(f(I))=g(O)=O'$ donc Δ est la médiatrice de [O'I].



<u>Exercice 2</u> (Thèmes : sphère ; homothétie dans l'espace)

1) a) $M(x,y,z)\in S \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2+(z-2)^2=4$, on en déduit que S est la sphère de centre $I(0,3,2)$ et de rayon 2.
b) Il suffit de vérifier que $A\in S$, $B\in S$ et I est le milieu de [AB]. .
2) a) La cote du point I est 2 donc $I\in P$ par suite S coupe P suivant le cercle Γ de centre I et de rayon 2, or A et B appartiennent à P et I est le milieu de [AB]. donc [AB] est un diamètre de Γ.
b) $IA=2$, $JA=4$ et $IJ=6$ donc $IA+JA=IJ$ par suite Γ et Γ' sont tangents extérieurement en A.

3) a) Le rayon de S' est égal à $\frac{5}{2}\times 2=5$. On pose $I'(x,y,z)$,

$$h(I)=I' \Leftrightarrow \overrightarrow{EI'}=\frac{5}{2}\overrightarrow{EI} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=-10 \\ y-3=0 \\ z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-6 \\ y=3 \\ z=5 \end{cases}$$

, il en résulte que $I'(-6,3,5)$.

b) $d(I',P)=3<5$ donc S' coupe P suivant un cercle de rayon $\sqrt{25-9}=4$ et de centre le projeté orthogonal de I' sur P, or J est un point de P et $\overrightarrow{I'J}\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$ est normal à P donc J est le projeté orthogonal de I' sur P, il en résulte que P coupe S' suivant le cercle Γ'.

c) $A\in S\cap(EA)$ donc $h(A)\in S'\cap(EA)=\{A,A'\}$ or $h(A)\neq A$ donc $h(A)=A'$.

B est le point diamétralement opposé à A sur S donc $h(B)$ est le point diamétralement opposé à A' sur S',

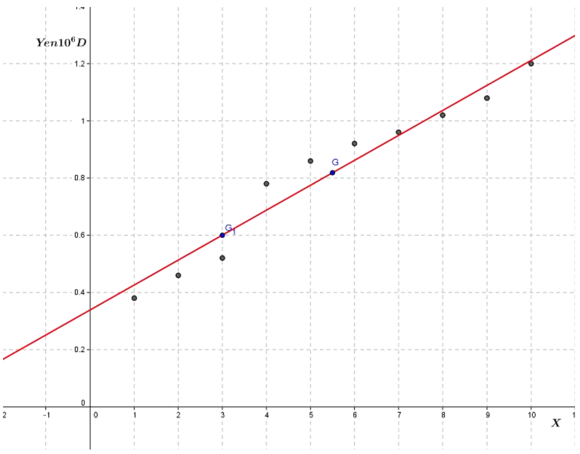
on en déduit que $h(B)=B'$ par suite E, B et B' sont alignés.

<u>Exercice 3</u> (Thème : statistique à deux variables)

1) a) $G(\overline{X},\overline{Y})$ donc $G(5.5,0.818)$.

b) $G_1(3,0.6)$.

c)



d) $a=\dfrac{0.6-0.818}{3-5.5}=0.09$ donc $(GG_1): y=0.0872x+b$ or $G_1\in(GG_1)$

donc $0.6=0.09\times3+b \Leftrightarrow b=0.33$, il en résulte que $(GG_1): y=0.09x+0.33$.

e) Pour $x=16$, on obtient $y=1.77$.

2) a) $r=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Z)}{\sigma_X\sigma_Z}=0.987$.

b) $Z=bX+a$ avec $b=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Z)}{\sigma_X^2}=0.2$ et $a=\overline{Z}-b\overline{X}=1.23$. Ainsi $Z=0.2X+1.23$

c) $Z=0.2X+1.23 \Leftrightarrow e^Y=0.2X+1.23 \Leftrightarrow Y=\ln(0.2X+1.23)$. Pour $x=16$, on obtient $y=1.488399584$.

Exercice 4 (Thèmes : variation d'une fonction ; notion de primitive ; notion d'aire)

I. 1) a) Pour tout $t>0$, $u'(t)=\dfrac{3}{1+t}-\dfrac{1}{(1+t)^2}=\dfrac{2+3t}{(1+t)^2}>0$.

x	0	$+\infty$
$u'(t)$		$+$
u	0 ↗	$+\infty$

$\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)=\lim\limits_{t\to+\infty} 3\ln(1+t)-\dfrac{1}{\frac{1}{t}+1}=+\infty$.

b) $u(]0,+\infty[)=]0,+\infty[$ donc $u(t)>0$ pour tout $t>0$.

2) a) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=x^3\ln(1+x)-x^3\ln x=0=f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=x^2\ln(1+x)-x^2\ln x=0=f'_d(0)$ donc f est dérivable à droite en 0.

b) Pour tout $x\in]0,1]$, $f'(x)=3x^2\left[\ln(1+x)-\ln x\right]+x^3\left[\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{x}\right]$

$$=x^2\left[3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right]=x^2u\left(\frac{1}{x}\right).$$

c) On a $u(x)>0$ pour tout $x>0$ donc $u\left(\dfrac{1}{x}\right)>0$ pour tout $x\in]0,1]$ d'où $f'(x)>0$ pour tout $x\in]0,1]$

x	0	1
$f'(x)$	0	$+$
f	0 ↗	$\ln 2$

II. 1) Pour tout $x\in]0,1]$, $h'(x)=3x^2\ln x+x^2=x^2(3\ln x+1)$.

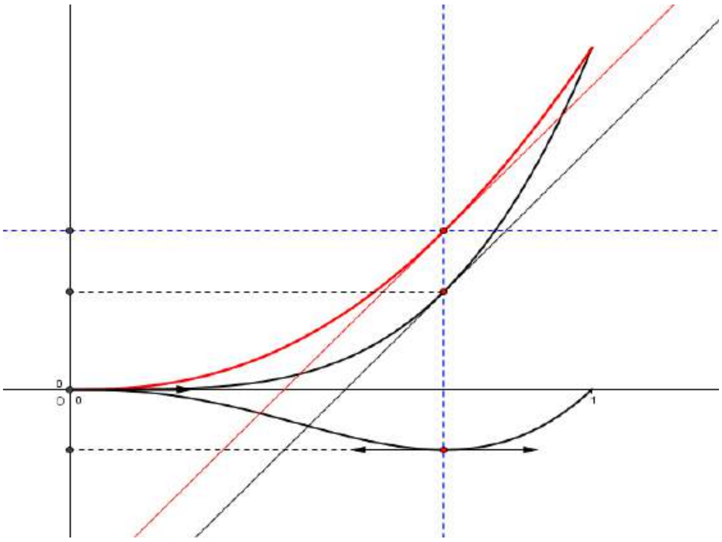
Pour tout $x\in]0,1]$, $h'(x)=0\Leftrightarrow \ln x=-\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{3}}$. On en déduit que (C_h) admet une tangente horizontale au point d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$.

2) a) Pour tout $x \in]0,1]$, $f(x) = x^3 \ln(1+x) - x^3 \ln x = g(x) - h(x)$ et $f(0) = g(0) - h(0)$ donc pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = g(x) - h(x)$.

b) Pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) - g(x) = -h(x) \geq 0$ donc (C_f) est au-dessus de (C_g) et les points $(0,0)$ et $(1, \ln 2)$ sont des points d'intersection.

c) $f'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) - g'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = -h'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = 0 \Leftrightarrow f'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = g'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)$ donc $T \parallel T'$.

3)



4) a) La fonction h est continue sur $[0,1]$ donc elle admet une unique primitive H qui s'annule en 1.

b) $A(\alpha) = H(1) - H(\alpha) = -H(\alpha)$.

c) On pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{x^4}{4} \end{cases}$

$$A(\alpha) = \left[\frac{x^4}{4}\ln x\right]_\alpha^1 - \frac{1}{4}\int_\alpha^1 x^3 dx = -\frac{\alpha^4}{4}\ln\alpha - \frac{1}{16}\left[x^4\right]_\alpha^1 = -\frac{\alpha^4}{4}\ln\alpha - \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\alpha^4.$$

d) $H(0) = \lim\limits_{\alpha \to 0^+} -A(\alpha) = \dfrac{1}{16}$.

e) $A = \int_0^1 (f(x) - g(x))dx = -\int_0^1 h(x)dx = H(0) = \dfrac{1}{16}$.