S'élever par l'effort

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

MON FASCICULE DE MATHS POUR LE BAC

Proposé par :

Chedel Maïck AKABI,

Professeur Certifié des Lycées, Chercheur à la Faculté des Sciences et Techniques en Mathématiques (Mastère)

Achille YANGA,

Professeur Certifié des Lycées, Chercheur à la Faculté des Sciences et Techniques en Mathématiques (Mastère)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Vol. 1

Terminale C

AVANT PROPOS

Ce fascicule, de la collection « MON FASCICULE DE MATHS POUR LE BAC », a été élaboré pour répondre aux exigences précises du nouveau programme des classes de Terminales C et E.

Il comporte trois grandes parties à savoir :
- Les notes du cours : volume $n°0$;
- Un recueil d'exercices d'application et type BAC, y compris les sujets de révision (volume $n°1$) ;
- Le corrigé d'exercices (solution du volume $n°1$.)

Cependant, la possession rien que du volume $n°1$ ne donne pas accès à la compréhension presque ou parfaite de la matière.
Pour en savoir plus sur MON FASCICULE DE MATHS POUR LE BAC,

contactez :

(+242) 06 880 41 80 / 06 808 07 81.

chedelakabi@gmail.com ou achilleyanga@gmail.com

Nous exprimons notre gratitude aux amis suivants :
Idriss BATOLA, Espoir MEMOUGAME, Assalda NKOUNKOU, Jean Claud MADZOU, Grace KIDZIMOU, Joachna MEYA, Barjos BOUKAKA professeurs certifiés des lycées. Harvey MOUTSASSI professeur certifié des lycées, ingénieur à EAMAC, Diallo MAMADOU dans la boutique « l'homme original », Vie Sainte MONAMPASSI et les autres qui, par leur compréhension, leurs engagements et leur soutien tant moral que matériel, de loin ou de proche, nous ont permis de réaliser ce fascicule dans les meilleures conditions.

Enfin, nous espérons, par ce fascicule, transmettre notre conception ouverte et vivante des mathématiques, et nous accueillons avec reconnaissance les critiques et suggestions permettant de l'améliorer.

Merci pour votre compréhension.

Table des matières

Chapitre 1

Première partie : ANALYSE

1.1 Fonctions Polynômes, Rationnelles, Irrationnelles et Circulaires à variable réelle

Exercice 1

Soit g une fonction numérique définie par $g(x) = x^3 - 3x$. On note $(\mathcal{C}_g)$ la courbe de g dans le repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Préciser son ensemble de définition.
2. Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. a) Préciser l'ensemble de dérivabilité de g.
   b) Calculer la dérivée de g.
   c) En déduire le sens de variation de g.
4. Dresser le tableau de variation.
5. Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_g)$.
6. Déterminer les points d'intersections de $(\mathcal{C}_g)$ avec les axes du repère.
7. Montrer que le point 0 est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_g)$.
8. Tracer $(\mathcal{C}_g)$.
9. On pose $h(x) = |g(x)|$.
10. a) Déterminer l'expression analytique de h sans le symbole de valeur absolue.
    b) Étudier la dérivabilité de h en $x_0 = -\sqrt{3}$ et $x_1 = \sqrt{3}$.
    c) En déduire le tableau de variation de h.
    d) Tracer dans un autre repère orthonormé la courbe de h.
11. On pose $q(x) = x^3 - 3|x|$.
    a) Déterminer l'expression analytique de q sans barre de valeur absolue.
    b) Étudier la dérivabilité de q en $x_0 = 0$.
    c) Dresser le tableau de variation de q.
    d) Tracer la courbe représentative de q dans un autre repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Exercice 2

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$.

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe de f dans le repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Préciser son ensemble de définition.
2. Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. Préciser l'ensemble de dérivabilité de f.
4. Calculer la dérivée de f puis en déduire le sens de variation de f.
5. Dresser le tableau de variation de f.
6. Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (Δ) que l'on précisera.
7. Étudier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la droite (Δ).
8. Préciser l'autre asymptote de $(\mathcal{C}_f)$.
9. Montrer que le point d'intersection des asymptotes est centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
10. Tracer $(\mathcal{C}_f)$.
11. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [1 + \sqrt{2}, +\infty[$.
    a) Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1}.
    b) Tracer le tableau de variation de g^{-1}.
    c) Tracer $(\mathcal{C}_g^{-1})$ courbe de g^{-1} dans le même repère que $(\mathcal{C}_f)$.
12. On pose $h(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{|x - 1|}$.
    Sans étudier les variations de h, expliquer comment la courbe représentative de $(\mathcal{C}_h)$ se déduit de $(\mathcal{C}_f)$.
    Tracer $(\mathcal{C}_h)$ dans le même repère que $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 3

On donne $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Déterminer les limites aux bornes de son domaine de définition.
3. Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe.

Exercice 4

On considère la fonction h, de la variable réelle x, définie par :

$$\begin{cases} h(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 1} & si \quad x < -1 \\ h(x) = 2\sin(\frac{\pi}{2}x) & si \quad -1 \leq x \leq 1 \\ h(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

1. Préciser son ensemble de définition.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de h aux points d'abscisses $x_0 = -1$ et $x_1 = 1$.
3. Étudier les variations de h.
4. Étudier les branches infinies et représenter $(\mathcal{C}_h)$, courbe représentative de h dans un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unité :2cm).
5. a) Soit k la restriction de h à l'intervalle $[-1, 1]$. Montrer que k admet une application réciproque k^{-1} dont on dressera le tableau de variation.
   b) $(\mathcal{C}')$ désignant la courbe représentative de k^{-1}, écrire l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}')$ au point d'abscisse $x = 0$. Construire $(\mathcal{C}')$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$ ainsi que la tangente (T) à $(\mathcal{C}')$.

Exercice 5

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x\sqrt{4 - x^2} \ , & si \ x \in] - 2; 2[\\ f(x) = (x^2 - 4)^{\frac{3}{2}} \ , & si \ x \in] - \infty; -2] \cup [2; +\infty[\end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ unité $2cm$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur chacun des intervalles de son ensemble de définition puis aux points $x_0 = -2$ et $x_1 = 2$.
3. Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C})$.
4. Étudier les variations de f.
5. Soit h la restriction de f à l'intervalle $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.
   a) Démontrer que h admet une application réciproque noté h^{-1} définie sur un intervalle à préciser.
   b) Établir le tableau de variation de h^{-1}.
6. Construire la courbe $(\mathcal{C})$ de f et celle de h^{-1} dans le même repère.
7. Calculer $h^{-1}(\sqrt{3})$ et $(h^{-1})'(\sqrt{3})$.
8. Déterminer h^{-1} et prouver les résultats de la question précédente.
9. Discuter graphiquement le nombre et le signe des racines de l'équation.
   $x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64 - m^2 = 0$ où $m \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 6

Soit h une fonction numérique de la variable réelle x définie par : $h(x) - \dfrac{3}{5}x = \dfrac{4}{5}\sqrt{|-x^2+4|}$.

1. Déterminer son ensemble définition de h.
2. Simplifier l'expression de $h(x)$.
3. Étudier la continuité de h sur son ensemble de définition et la dérivabilité de h en $x_0 = -2$ et $x_1 = 2$.
4. Étudier les variations de h puis tracer sa courbe $(\mathcal{C}_h)$ dans un plan muni d'un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ unité $1cm$.
5. Soit k la restriction de h à l'intervalle $I =]-\infty; -2]$.
   a) Démontrer que k admet une bijection réciproque k^{-1} dont on précisera les variations.
   b) k^{-1} est-elle dérivable en $x_0 = -2$?.
   c) Sans expliciter k^{-1} calculer $(k^{-1})'(0)$.
   d) Construire dans le même repère la courbe $(\mathcal{C}')$

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin(x) - \frac{2}{3}\sin^3(x)$.

1. Étudier la parité de f et montrer que f est périodique de période $T = 2\pi$.
2. Montrer que la courbe de f est symétrique par rapport à la droite (Δ) d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.
3. Montrer alors que l'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$.
4. a) Montrer que $f'(x) = \cos(x)\cos(2x)$.
   b) Donner, pour $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ les signes de $\cos(x)$ et $\cos(2x)$.
   c) En déduire le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
5. Tracer la courbe représentative de f lorsque $x \in [-\pi; \pi]$.

Exercice 8

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(4x) + \sin(2x)$.

1. Justifier le choix de l'intervalle $I = [0; \pi]$ comme intervalle d'étude.
2. Démontrer que pour tout réel x, on a $f'(x) = 4\cos(2x)(1 - 2\sin(2x))$.
3. Résoudre dans l'intervalle I ; l'équation $f'(x) = 0$ et en déduire le tableau de variation de f.
4. Démontrer que la courbe $(\mathcal{C})$ de f admet pour axe de symétrie la droite $(\Delta) : x = \frac{\pi}{4}$.
5. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans un plan muni d'un repère orthonormé.

Exercice 9

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{3x^3 - 4x^2 - 4x + 8}{4x - 8}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer les limités aux bornes de son ensemble de définition.
3. Démontrer $(\mathcal{C})$ admet une asymptote parallèle à $(0J)$.
4. a) Étudier le comportement de f lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
   b) Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que : $\forall x \in E_f$, $f(x) = ax^2+bx+\dfrac{c}{x-2}$.
   c) En déduire que $(\mathcal{C})$ est asymptote à une parabole $(\mathcal{P})$ dont on donnera une équation.
   d) Étudier les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{P})$.
5. a) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
   b) A l'aide de ce tableau, démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique et déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de cette solution.
6. On pose $g(x)$ cette parabole.
   a) Étudier la fonction g.
   b) Tracer la courbe de la fonction g puis celle de la fonction f dans le même plan muni d'un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ unité : $2cm$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sin(x) + \sin(2x)}{1 + \cos(x)}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définie de f ; justifier que l'ensemble d'étude de f peut être réduit à l'intervalle $[0, \pi]$.
2. Démontrer que : $\forall x \in E_f$, $f'(x) = \dfrac{2\cos(x)}{1 + \cos(x)}$.
3. Vérifier que sur $[0, \pi]$ $(\mathcal{C})$ présente une branche infinie, dont on précisera la nature.
4. Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.
5. Tracer sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$; préciser les coordonnées de ces points d'inflexion.

Exercice 11

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{x+2} \quad \forall x \in [-2\,; +\infty[$$

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Démontrer que $\forall x \in [2\,; 3]$; $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$.
3. Démontrer que l'équation : $f(x) = x$ admet une solution $x_0 \in [2\,; 3]$.

Exercice 12
On considère la famille des fonctions définies par : $f_m(x) = \dfrac{mx+1}{x^2-m}$, m désigne un paramètre réel.

1. Préciser l'ensemble de définition def_m ; on distinguera trois cas :
   a) $m < 0$; b) $m = 0$; c) $m > 0$.
2. Déterminer le point fixe $A(x_o\,;y_o)$ aux courbes $(\mathcal{C}_m)$
3. Calculer la dérivée f'_m de f_m.

Exercice 13
Soit f la fonction numérique de la variable réelle x, définie par : $f(x) = \sin^2 x$.
On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O\,;\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Montrer que si $x \in I = [\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{\pi}{3}]$ on a :

   a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant f'(x) \leqslant 1$

   b) $\left|\sin^2 a - \sin^2 b\right| \leqslant |a-b|$.
3. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $J =]\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{2\pi}{3}[$ puis donner une interprétation graphique de cette propriété.

Exercice 14
Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 2 + \sqrt{-x}, & si\ \ x \leqslant 0 \\ f(x) = \dfrac{x-a}{1-x}, & si\ \ x > 0 \end{cases}$$

où a est un réel.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer le réel a pour que f soit continuité en $x = 0$.
3. Étudier la dérivabilité de f en $x = 0$.
4. En déduire les équations des demi-tangentes à $(\mathcal{C}_f)$, courbe représentative de f, au point d'abscisse $x = 0$.
5. Étudier les variations de f.
6. Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.
7. Construire soigneusement la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère orthonormé $(O\,;\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Exercice 15
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$. m étant un paramètre réel, on considère la famille des fonctions f_m de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_m(x) = \frac{x^2 - (m+2)x + 2m + 2}{x - 1}.$$

On désigne par $(\mathcal{C}_m)$, courbe représentative de f_m.

1. Démontrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_m)$ passent par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées.
2. Étudier les variations de f_m suivant les valeurs de m.
3. Déterminer en fonction de m les nombres réels a, b et c tels que : $f_m(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$. En déduire l'équation de l'asymptote à $(\mathcal{C}_m)$ à l'infini.
4. Démontrer que le $B(1\,;-m)$ est un point de symétrie de la courbe $(\mathcal{C}_m)$.
5. Construire les courbes $(\mathcal{C}_4)$ et $(\mathcal{C}_{-4})$ sur le même graphique.

Exercice 16
Soit g la fonction numérique de la variable réelle x, définie sur $J = [-1\,;1]$ par : $g(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g
2. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x, définie sur $I = [0\,;\pi]$ par : $f(x) = \cos^3 x - 3\cos x + 1$.
   Déduire du sens de variation de la fonction g, le sens de variation de la fonction f.
3. Démontrer que pour tout réel k de $[-1\,;3]$ l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans $I = [0\,;\pi]$.

Exercice 17
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos 4x + 2\sin 2x$.

1. Démontrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ représentative de f admet pour axe de symétrie la droite (D) d'équation $x = \dfrac{\pi}{4}$.
2. Justifier le choix de l'intervalle $I = [\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{3\pi}{4}]$ comme intervalle d'étude de f.
3. Démontrer que pour tout x, $f'(x) = 4\cos 2x(1 - 2\sin 2x)$.
4. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ dans l'intervalle I.
   En déduire le tableau de variations de f.
5. On pose $f(x) = -g(x)$.
   Déduire la courbe $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère que $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 18

Soit f une fonction continue sur $[0\,;1]$ dans $[0\,;1]$.

1. Montrer qu'il existe au moins un nombre α tel que $f(\alpha) = \alpha$.
2. On suppose que f est dérivable sur $[0\,;1]$. et qu'il existe un nombre $k \in [0\,;1]$ tel que pour tout x de $[0\,;1]$. $|f'(x)| \leqslant k$. Montrer que α est unique.
3. Soit (U_n) la suite définie par $U_o \in [0\,;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$ où f est une fonction vérifiant les conditions précédentes.
   a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leqslant k|U_n - \alpha|$.
   b) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 19

Partie A :

Soit la fonction g à variable réelle x, définie par : $g(x) = \cos \dfrac{\pi}{3}x$, pour tout réel x.

1. Montrer que la fonction g a pour période $T = 6$.
2. Montrer que la fonction g est paire.
3. Montrer que l'étude de la fonction g peut être réduite à l'intervalle $I = [0\,;3]$.
4. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $I = [0\,;3]$, on dressera un tableau de variations de g.

Partie B :

On considère la fonction numérique f à variable réelle x, telle que :

$$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x^2+1}, & si\ x \in]-\infty\,;0] \\ f(x) = \cos \dfrac{\pi}{3}x, & si\ x \in]0\,;3] \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$ du plan. Unité graphique : $2\,cm$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f en $x = 0$.
3. Étudier les variations de la fonction f, on dressera un tableau de variations de f.
4. Étudier la branche infinie à la courbe $(\mathcal{C})$ de la fonction f.
5. Tracer $(\mathcal{C})$.

Exercice 20

On considère la fonction numérique g à variable réelle x, définie par :
$g(x) = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}\sqrt{x^2+1}$; et on note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\,)$.

1. Démontrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\;\; g'(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{x}{3\sqrt{x^2+1}}$.
2. a) Étudier les variations de g'.

   b) Démontrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\; 0 < g'(x) < \dfrac{2}{3}$.
3. Dresser le tableau de variations de g.
4. a) Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$ de g.

   b) Construire la courbe $(\mathcal{C})$ de g. dans le repère orthonormé $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\,)$.
5. On considère la suite (U_n) définie par : $U_o = \dfrac{2}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\; U_{n+1} = g(U_n)$.

   a) Démontrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique $x_o = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

   b) Démontrer en utilisant les inégalités des accroissements finis que :
   $\forall\, n \in \mathbb{N},\; \left|U_{n+1} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right| \leqslant \dfrac{2}{3}\left|U_n - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right|$.

   c) Démontrer que $\forall\, n\, \mathbb{N},\; \left|U_n - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$.

   d) En déduire que (U_n) tend vers $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 21
Partie A :
Soit la fonction g définie par $g(x) = \cos \pi x - \sin \pi x$.

1. Montrer que la fonction g est périodique et de période 2.
2. Expliquer pourquoi la fonction g peut être étudiée sur l'intervalle $I = [0\,;2]$
3. Déterminer les réels a, b et c tels que $g(x) = c\cos(ax + b)$.

Partie B :
On considère la fonction numérique f à variable réelle x, définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 3x + 1, & si\ x \in]-\infty\,;0[\\ f(x) = \sqrt{2}\cos(\pi x + \dfrac{\pi}{4}), & si\ x \in\ [0\,;2] \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $(O\,;\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan. Unité graphique : 2 *cm*.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f en $x = 0$.
3. Étudier les variations de la fonction f, on dressera un tableau de variations de f.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$, admet une solution unique $x_o \in]-2; -1[$.
5. a) Étudier la limite $\dfrac{f(x)}{x}$ en $-\infty$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
   b) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.
6. Soit h la restriction de f à l'intervalle $J = [-1\ 0]$.
   a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on dressera le tableau de variations puis calculer $h(-\frac{1}{2})$.
   b) Calculer $h^{-1}(\frac{19}{8})$ et $(h^{-1})'(\frac{19}{8})$.
   c) Construire la courbe $(\mathcal{C})'$ de h^{-1} dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

Exercice 22

1. Soit la fonction numérique f_1 à variable réelle x, définie par :
   $f_1(x) = -2x + \sqrt{3(x^2-1)}$; on désigne par $(\mathcal{C}_1)$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé direct $(O ; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Unité graphique : $2\,cm$.
   a) Étudier les variations de la fonction f_1, on dressera un tableau de variations.
   b) Déterminer les deux asymptotes (D_1) et (D_2) à la courbe $(\mathcal{C}_1)$ de f_1.
   c) Étudier la position de $(\mathcal{C}_1)$ par rapport à chacune de ses asymptotes.
   d) Préciser les tangentes (T_1) et (T_2) à $(\mathcal{C}_1)$ respectivement en $x = 1$ et $x = -1$.
   e) Construire $(\mathcal{C}_1)$, (D_1), (D_2), (T_1) et (T_2) dans le repère.
2. On considère la fonction numérique f_2 à variable réelle x, définie par :
   $f_2(x) = -2x - \sqrt{3(x^2-1)}$, et on désigne par $(\mathcal{C}_2)$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé direct $(O ; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
   a) Montrer que $(\mathcal{C}_2)$ est l'image de $(\mathcal{C}_1)$ par la symétrie de centre l'origine O.
   b) Montrer que $(\mathcal{C}) = (\mathcal{C}_1) \cup (\mathcal{C}_2)$ a pour équation cartésienne
   $(\mathcal{C}) : x^2 + 4xy + y^2 + 3 = 0$.
   c) Déduire une construction de $(\mathcal{C})$ dans le repère orthonormé $(O ; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
3. Soit S la transformation plane qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{\sqrt{6}}{2}(1+i)z$.
   a) Caractériser S.
   b) Construire l'image $(\mathcal{C})'$ de la courbe $(\mathcal{C})$ par la transformation S.

Exercice 23

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x + \cos^2 x$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. a) Démontrer que pour tout réel x on a : $x \leqslant h(x) \leqslant x + 1$.
   b) En déduire les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$.
   c) Interpréter graphiquement l'encadrement précédent.
2. On note (D_1) et (D_2) les droites d'équations respectives : $y = x$ et $y = x + 1$.
   Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec les droites (D_1) et (D_2).
3. a) Déterminer la fonction dérivée de h et montrer que pour tout x, on a :
   $h'(x) = 1 - \sin 2x$
   b) En déduire le sens de variation de h.
   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $h'(x) = 0$ et placer sur un cercle trigonométrique les points images des solutions de cette équation.
4. a) Dresser le tableau de variations la fonction sur $[0 ; \pi]$.
   b) Tracer les (D_1) et (D_2) et la courbe représentative h sur $[0 ; \pi]$.
5. a) Démontrer que pour tout réel x on a : $h(x + \pi) = h(x) + \pi$.
   b) Comment déduit-on la représentation de h sur $[0 ; \pi]$.

Exercice 24

On donne le tableau de variations de f^{-1}, fonction réciproque de f

x	0		1		2
$(f^{-1})'(x)$	-1		$-\frac{1}{2}$		$-\infty$
$f^{-1}(x)$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

Soit g la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x), & si\ x < 0 \\ g(x) = f^{-1}(x), & si\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Préciser E_g, l'ensemble de définition de g.
2. a) Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction g en $x = 0$.
   b) Écrire l'équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ de f au point d'abscisse $x = 0$.
3. a) Dresser le tableau de variations de g.
   b) La fonction g admet-elle une réciproque ? Justifier la réponse (on dressera le tableau de variation de g^{-1} dans le cas d'une réponse affirmative.)
4. Soit h la fonction définie par : $h(x) = g(x) - x$.
   a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0\,;1[$.
   b) On désigne respectivement par $(\mathcal{C}_g)$ et (D) la courbe de g et la droite d'équation $y = x$. En déduire le nombre de points d'intersection de $(\mathcal{C}_g)$ et (D).
5. Tracer $(\mathcal{C}_g)$ dans un repère orthonormé $(O\,;\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan.

Exercice 25

Soit f la fonction numérique définie pour tout x dans $D =]1\,;+\infty[$ par :
$f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \sqrt{x}$.

1. Montrer que la dérivée de f garde un signe constant sur D.
2. Étudier les variations de f (sens de variation, limites aux bornes de D).
3. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]1\,;2[$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a le même ensemble de solution que l'équation : $1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x$.
5. On appelle g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
   Soit α la solution de l'équation $f(x) = 0$ (on a donc $g(\alpha) = \alpha$ et $1 < \alpha < 2$).
   a) Calculer la dérivée g' de g et montrer que $|g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour x dans $[1\,;+\infty[$.
   b) En déduire que, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $|g'(x) - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|x - \alpha|$.
6. On considère la suite (U_n) en posant :

$$\begin{cases} U_o = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = g(U_n) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{U_n}} \end{cases}$$

   a) Calculer une valeur approchée à 10^{-4} près de chacun des huit premiers termes de la suite.
   b) Établir les inégalités suivantes : $|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|U_n - \alpha|$ et $|U_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   c) En déduire que la suite (U_n) converge vert α.

1.2 Intégrales et Suites numériques

Exercice 0

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_{ln2}^{ln4} e^{-2}dx \ ; \ B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2t \, dt \ ; \ C = \int_0^1 (x^2+2x)dx \ ; \ D = \int_{ln2}^{ln3} e^{2x+1}dx \ ; \ E = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tant \, dt$$

$$F = \int_{-1}^0 3e^{\frac{1}{2}x+3}dx \ ; \ G = \int_1^2 \left(\frac{3}{t^2} + \frac{4}{t}\right) dt \ ; \ H = \int_{-2}^3 |x-1| \, dx \ ; \ I = \int_0^{\pi} |cos2x| \, dx \ ; \ 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

$$J = \int_0^2 \left(\frac{2x^3 - x^2 + 1}{x}\right) dx \ ; \ K = \int_{-2}^2 (x^3+sinx) \, dx \ ; \ L = \int_0^2 \frac{dt}{\sqrt{t+2}} \ ; \ M = \int_1^e \frac{(lnx)^4}{x} \, dx$$

$$N = \int_0^1 \frac{e^x + 1}{(e^x + x - e)^3} \, dx \ ; \ O = \int_0^1 \frac{x}{x+1} \ ; \ P = \int_0^1 \frac{x-2}{2x+3} \, dx \ ; \ Q = \int_{-2}^1 \sqrt{x-3} \, dx$$

Exercice 1

On donne

$$A = \int_0^{\pi} cos^2x \, dx \ \ et \ \ B = \int_0^{\pi} sin^2x \, dx$$

1. Calculer $A + B$ et $A - B$.
2. Déduire A et B.

Exercice 2

On définie deux suites (X_n) et (Y_n) par :

$$\begin{cases} X_0 = Y_0 = 2 \\ X_n = \frac{1}{4}Y_{n-1} \\ Y_n = \frac{3}{4}X_{n-1} + \frac{1}{2}Y_{n-1} \ \ \forall \ \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall \, n \in \mathbb{N} \ V_n = X_n + Y_n$.
   a) Donner la nature de la suite (V_n).
   b) Démontrer que $X_n > 0$ et $Y_n > 0$.
2. On pose $U_n = \frac{X_n}{Y_n}$. Démontrer que $\forall \, n \in \mathbb{N}$, on a $U_{n+1} = \frac{1}{3U_n+2}$.
3. On considère la suite (W_n) telle que $W_n = \frac{U_n - \frac{1}{3}}{U_n+1}$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de la suite (W_n).
4. Écrire (X_n) et (Y_n) en fonction de n, puis déduire leurs limites quand $n \to +\infty$.

Exercice 3

1. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $cos(\frac{\pi}{2} + x) = -sinx$.
2. Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = e^x sinx$.
   Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$ (1), f' étant la dérivée de f.
3. (U_n) et (V_n) deux suites numériques définies par :
   $U_n = -\frac{\pi}{2} + n\pi$ et $V_n = f(U_n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$
   a) Montrer que U_n est solution de l'équation (1).
   b) Montrer que (U_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
   c) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
4. Calculer en fonction de n, $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + ... + V_n$.

Exercice 4

On considère pour tout n une suite $U_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{cos(nx)}{\frac{5}{4} - cos(x)} dx$.

1. Justifier l'existence de (U_n).
2. On admet que $U_0 = \frac{4\pi}{3}$. Démontrer que $U_1 = \frac{2\pi}{3}$.
3. a) Transformer $cos(n+2)x + cos(nx)$ en produit de cosinus.
   b) Utiliser le résultat précédent pour démontrer que $U_n + U_{n+2} = \frac{5}{2} U_{n+1}$.
   c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{4\pi}{3}(\frac{1}{2})^n$.
4. On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n$. Calculer S_n en fonction de n, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 5

Soit (U_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = cos(U_n)\ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On désigne par f une fonction définie par $f(x) = cosx$.

1. Donner une représentation graphique des quatre premiers termes de la suite (U_n). Que peut-on conjoncture ?
2. Démontrer que l'équation $cosx = x$ admet une solution unique dans l'intervalle $K = [\frac{1}{2}, 1]$.
3. On désigne par α cette solution. Démontrer que $f(K) \subset K$ et que pour tout $x \in K$, on a : $f'(x) \leq 0,9$.
4. Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_n \in K$ et $|U_{n+1} - \alpha| \leq 0,9|U_n - \alpha|$.
5. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(0,9)^n$.
6. Démontrer que la suite (U_n) est convergente.

Exercice 6

Soit $\alpha \in [0, +\infty[$. On note $I_0(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{dt}{1+t}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{(t-\alpha)^k}{(1+t)^{k+1}} dt$.

1. Calculer $I_0(\alpha)$ en fonction de α.
2. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_1(\alpha)$ en fonction de α.
3. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $I_{k+1}(\alpha) = \dfrac{(-1)^{k+1}\alpha^{k+1}}{k+1} + I_k(\alpha)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
4. Soit g le polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$. Démontrer en calculant $I_2(\alpha)$, $I_3(\alpha)$ et $I_4(\alpha)$ que $I_5(\alpha) = ln(1+\alpha) - g(\alpha)$.
5. Soit $J(\alpha) = \int_0^\alpha (t-\alpha)^5 dt$. Calculer $J(\alpha)$.
6. a) Démontrer que pour tout $t \in [0, \alpha]$, $\dfrac{(t-\alpha)^5}{(1+t)^6} \geq (t-\alpha)^5$.

   b) Démontrer que pour tout $\alpha \in [0, +\infty[$, $J(\alpha) \leq I_5(\alpha) \leq 0$.

Exercice 7

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^n(x)}{sin^2(x)} dx$.

1. Calculer I_0, I_1, I_2 et I_2. On pourra poser que $t = \frac{\pi}{2} - x$ pour I_0.
2. Démontrer que (I_n) est positive et décroissante. Est-elle convergente ?
3. Démontrer que pour tout $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq \frac{cos^n(x)}{sin^2(x)} \leq 2(\frac{\sqrt{2}}{2})^n$.
4. En déduire la limite de (I_n).

Exercice 8

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_0, I_1, I_2 et I_3.

Exercice 9

Soit une suite géométrique (V_n) telle que $V_0V_1V_2 = 27$ et $V_0V_2V_4 = -216$.

1. Trouver cette suite.
2. Calculer $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + V_9$.

Exercice 10

Soit l'équation différence $(E) : y'' + 2y' + 2y = 0$.

1. Intégrer cette équation.
2. Trouver la solution particulière g de l'équation (E) dont la courbe $(\mathcal{C}_g)$ passe par le point $A(\frac{\pi}{2}, 2e^{-\frac{\pi}{2}})$ et admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{5\pi}{2}$.
3. Soit (U_n) la suite dont le terme général est la solution de l'équation $g'(x) = 0$.
   a) Montrer que (U_n) est une suite arithmétique.
   b) Calculer $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_{n-1}$.
4. on pose $V_n = g(U_n)$.
   a) Montrer (V_n) est une suite géométrique.
   b) Calculer $T_n = V_0 + V_1 + V_2 + ... + V_{n-1}$.

Exercice 11

On considère une suite définie par : $\ln(10^n V_n) = \frac{n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que (V_n) est une suite géométrique.
2. Étudier sa convergence.
3. On définie une suite (P_n) par :

$$\begin{cases} P_0 = V_0 \\ P_n = V_n P_{n-1} \ \forall n \geq 1 \end{cases}$$

   Calculer P_1 et P_2 puis Montrer que $P_n = (\frac{\sqrt{e}}{10})^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Exercice 12

On considère la suite (U_n) définie par ses premiers termes U_0 et U_1 et par la relation de récurrence $U_{n+2} = \frac{2}{5}U_{n+1} + \frac{3}{5}U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (1).

1. Montrer que la suite (V_n) définie par : $V_n = U_{n+1} - U_n$ est une suite géométrique.
2. Déterminer V_n en fonction de n, U_0 et U_1.
3. En déduire U_n en fonction de n, U_0 et U_1.
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.
5. On considère la suite (W_n) définie par ses premiers termes W_0 et W_1 avec $(W_0, W_1) \in \mathbb{R}^2$ et par la relation de récurrence $W_{n+2} = \sqrt[5]{(W_{n+1})^2(W_n)^3} \ \forall n \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer que la suite (T_n) définie par : $T_n = \ln(W_n)$ vérifier la relation (1).
   b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$.

Exercice 13
On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = e \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n} \ \ \forall n \geq 0 \end{cases}$$

1. On pose pour tout entier naturel n $V_n = \ln(U_n)$. Démontrer que V_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. Donner l'expression de V_n en fonction de n puis celle de U_n en fonction de n.
3. Calculer le produit $P_n = U_0U_1U_2...U_n$ en fonction de n.
4. Étudier sa limite éventuelle lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 14
Soit $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ on considère la suite (U_n) définie par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = a(U_n)^2 \end{cases}$$

On pose $U_n = a^{V_n+b}$ avec $(b \in \mathbb{R})$.

1. Déterminer le réel b pour que V_n soit une suite géométrique.
2. Calculer U_n en fonction de n et de a.

Exercice 15
Soit $I_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)dx$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $f(x) = e^{-x}\sin(x)$.

1. Calculer I_0.
2. Montrer que la suite (I_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. Déterminer l'expression de I_n en fonction de n.
4. La suite (I_n) est-elle convergente ?
5. Calculer I_1, I_2 et I_3.
6. Calculer $S_n = I_1 + I_2 + I_2 + ... + I_n$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
7. Calculer $P_n = I_0.I_1.I_2....I_n$.

Exercice 16
On considère les suites (U_n) et (V_n) définie par :
$U_0 = \dfrac{1}{2}$ et $V_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et pour tout nombre entier naturel n.

$$\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}U_n - V_n \\ V_{n+1} = U_n + \dfrac{\sqrt{3}}{3}V_n \end{cases}$$

On pose $z_n = U_n + iV_n$

1. Calculer $|z_0|$ puis $|z_{n+1}|$ en fonction de $|z_n|$.
   En déduire en fonction de n une expression de $|z_n|$.
2. a) Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n
   b) Trouver $arg\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3} + i\right)$
   c) En déduire de ce qui précède un argument θ_{n+1} de z_{n+1} en fonction d'un argument θ_n de z_n.
   d) Trouver $arg(z_0)$ puis une expression de θ_n en fonction de n.
3. Exprimer U_n et V_n en fonction de n.

Exercice 17
On considère la suite (U_n) définie par

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 5 - \dfrac{4}{U_n} \ \ \forall \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On suppose que : $1 < U_n < 4 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé tel que $\| \overrightarrow{i} \| = \| \overrightarrow{j} \| = 2cm$. Soit f une fonction définie sur $I =]0, +\infty[$ par $f(x) = 5 - \frac{4}{x}$.
   a) Construire la courbe $(\mathcal{C})_f$ de la fonction f et la droite $(\Delta) : y = x$.
   b) Préciser les points communs à ces deux courbes.
2. Montrer par récurrence que la suite (U_n) est croissante.
3. En déduire le comportement de la suite (U_n) lorsque $n \to +\infty$, puis calculer sa limite.
4. Représenter les quatre premiers termes de la suite (U_n) dans ce repère sur l'axe $(O, \overrightarrow{i})$ à l'aide de $(\mathcal{C})_f$ et (Δ).

1.3 Fonctions Logarithmes, Exponentielles et Puissances à variable réelle

Exercice 1

Le plan est rapporté à repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction de la variable réelle x définie par :
$f_n(x) = 1 + n\ln(e^x - 1)$. On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f_n.
2) Calculer les limites en 0 et en $+\infty$.
3) Déterminer la fonction dérivée f'_n de f_n et déterminer le signe de f'_n.
4) Dresser le tableau de variation de f_n.
5) a. Montrer que pour tout x de l'ensemble de définition de f_n, $f_n(x) = nx + 1 + n\ln(1 - e^{-x})$.
   b. Montrer que la droite (Δ_n) d'équation $y = nx + 1$, est asymptote à $(\mathcal{C}_n)$ en $+\infty$.
   c. Préciser la branche infinie de $(\mathcal{C}_n)$ en 0.
6) Montrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_n)$ passent par un point A dont on donnera les coordonnées.
7) Étudier la position relative des courbes $(\mathcal{C}_n)$ et $(\mathcal{C}_{n+1})$.
8) Tracer dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, les droites (Δ_1), (Δ_2) et les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

Exercice 2
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.
Partie I
Soit la fonction numérique g de la variable réelle x définie par :
$g(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de g.
2) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3) Donner le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie II
On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. On note $(\mathcal{C})$ la courbe de f dans le repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Montrer que pour tout réel x, $f(-x) + f(x) = 0$ puis déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ admet l'origine du repère comme centre de symétrie.
3) Étudier les variations de f sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$.
4) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation graphique de ce résultat.
5) Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point 0.
6) Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et de (T) sur I.
7) Montrer que le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$.
8) Tracer dans le même repère la courbe $(\mathcal{C})$ et la tangente (T).

Exercice 3
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.
Partie I
Soit f_m la fonction de variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f_m(x) = mx|lnx| \quad si \quad x \neq 0 \\ f_m(0) = 0 \end{cases}$$

Où m est un paramètre non nul.
On désigne par $(\mathcal{C}_m)$ la courbe représentative de f_m dans ce repère.

1) Donner l'ensemble de définition de f_m.
2) Écrire l'expression $f_m(x)$ sans barre de valeur absolue.
3) Étudier selon les valeurs de m le sens de variation de f_m ; puis dresser dans chaque cas le tableau de variation de f_m.
4) Démontrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_m)$ passent par un point fixe dont on précisera les coordonnées.
5) Écrire $f_{-m}(x)$ en fonction de $f_m(x)$. En déduire une transformation ponctuelle qui transforme $(\mathcal{C}_m)$ en $(\mathcal{C}_{-m})$.

Partie II
On considère la fonction numérique g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f_e(x), \quad si \quad x \geq 0 \\ g(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x), \quad si \quad -4 \leq x < 0 \end{cases}$$

1) a. Étudier la continuité de g aux points $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$.
   b. Étudier la dérivabilité de g aux points $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$.
2) Étudier les variations de g.
3) Tracer dans le repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.
   a. La courbe $(\mathcal{C}_g)$ de la fonction g.
   b. La courbe $(\mathcal{C}_{-e})$ de la fonction $f_{(-e)}$.
4) Pour tout $x \in [-4; 0[$, on pose $h(x) = -g(x)$. Tracer la courbe $(\mathcal{C}_h)$ dans le repère précèdent.
5) Soit K la restriction de g sur l'intervalle $I = [1; +\infty[$. Démontrer que K^{-1} existe.
6) Donner son tableau de variation.
7) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_{K^{-1}})$ dans le même repère que $(\mathcal{C}_g)$.

Exercice 4

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) = x^2 + 2$ et $g(x) = x^3 - 1$. On désigne par I un intervalle tel que $I = [1, 2]$.

1) a) Montrer que f et g satisfont le théorème de rapport des fonctions dérivables sur $I = [1, 2]$.
   b) En déduire la valeur intermédiaire.
2) Soit h une fonction définie par : $h(x) = 2\cos(\frac{\pi}{2}x)$.
   a) Montrer que pour tout $x \in J = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, h satisfait le théorème de Rolle.
   b) Déterminer la valeur intermédiaire.
   c) Montrer que pour tout $x \in [-2, -1]$, $0 \leq h'(x) \leq \pi$.
   d) En déduire que $x + 2 \geq \cos^2(\frac{\pi}{4}x)$.
3) On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \dfrac{1}{\ln|x|}$.
   a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
   b) f est-elle paire, impaire ? En déduire les conséquences géométriques.
   c) Montrer que f est continue en $x_0 = 0$.
   d) Étudier les variations de la fonction f.
4) On note r la restriction de f à l'intervalle $E = [0, 1[$.
   a) Justifier l'existence de r^{-1}.
   b) Donner son tableau de variations.
5) Sans expliciter la fonction r^{-1}.
   a) Calculer $r^{-1}(-2)$.
   b) Calculer $(r^{-1})'(-2)$.
6) Expliciter la fonction r^{-1} et retrouver les résultats de la question 5.
7) Construire dans le même repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ unité graphique $2cm$ les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{r^{-1}})$.
8) On désigne par k la fonction définie par $k(x) = -f(x)$ sur l'intervalle $E' =]-1, 1[$.
   a) Sans étudier la fonction k, dresser le tableau de variation de la fonction k.
   b) Construire $(\mathcal{C}_k)$ dans le même repère que $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{r^{-1}})$.

Exercice 5

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x\ln(1+\frac{3}{x})$ et on note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On se propose d'étudier cette fonction dans $[1,+\infty[$.

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2) Pour tout $x \in [1,+\infty[$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
3) Déterminer le sens de variation de f' puis calculer la limite de f' en $+\infty$.
4) En déduire le signe de f' sur $[1,+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f.
5) Tracer la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = 3$, indiquer le point A de la courbe de f d'abscisse 3.
6) On note g la fonction définie par : $g(x) = \dfrac{3x}{x+3}$ et $(\mathcal{C}')$ sa courbe représentative.
   a. Dresser le tableau de variation de g.
   b. Vérifier que pour tout $x \in [1,+\infty[$, on a : $f(x) - g(x) = xf'(x)$.
   c. Déterminer le signe de $f(x) - g(x)$.
   d. Déterminer la limite de $f - g$ en $+\infty$. Interpréter graphiquement les deux résultats.
7) Tracer dans le même repère, les courbes de f et g en indiquant le point B de la courbe de g d'abscisse 3.
8) Soit a un élément de $[1,+\infty[$.
   a. Donner l'équation cartésienne de la tangente (T_a) à la courbe de f au point d'abscisse $x = a$.
   b. Montrer que (T_a) rencontre l'axe des ordonnées au point C d'ordonnée $g(a)$.
   c. En déduire à l'aide de la courbe de g la construction de la tangente (T_a) à la courbe de f puis tracer cette tangente au point A.

Exercice 6
Partie I
Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g_n(x) = nx + n + e^x$.

1) Montrer que la fonction g_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha_n \in]-2, -1[$.
3) En déduire le signe de $g_n(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie II
Soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \dfrac{xe^x}{n + e^x}$. On désigne par $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1) Montrer que pour tout réel x de $\mathbb{R}$, on a : $f_n'(x) = \dfrac{e^x g_n(x)}{(n + e^x)^2}$.
2) Montrer que $f_n(\alpha_n) = 1 + \alpha_n$.
3) Dresser le tableau de variation de f_n.
4) Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_n)$.
5) Étudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C}_n)$ et la droite $(\Delta) : y = x$.
6) Étudier les positions relatives des courbes $(\mathcal{C}_n)$ et $(\mathcal{C}_{n+1})$.
7) Tracer les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

Exercice 7
Soit f une fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 - x + (x-1)\log_2(1-x), & si \;\; x < 1 \\ f(x) = (x-1)^2 \times 2^{1-x}, & si \;\; x \geq 1 \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la continuité de f en $x_0 = 1$.
3. Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$.
4. Étudier les variations de f.
5. Tracer $(\mathcal{C}_f)$ la courbe de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Unité graphique $2cm$.
6. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 3$ et $x = 4$.

Exercice 8

On considère la fonction numérique g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = e^{-x} + 3x - 1; & x \leq 0 \\ g(x) = -x + \ln|\frac{x+1}{1-x}|; & x > 0 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de g au point $x_0 = 0$.
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.
3. Calculer les limites de g sur son ensemble de définition.
4. Calculer $g'(x)$ et en déduire les variations de g.
5. Pour $x \geq 0$; calculer $g'(x)$ et montrer que ; pour $x \in I = [0; \frac{1}{2}]$; $1 \leq g'(x) \leq \frac{5}{3}$.
6. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions $\alpha \in]-2; -\ln 3[$ et $\beta \in]\frac{5}{4}; 2[$.
7. Construire la courbe $(\mathcal{C}_g)$. Unité graphique $2cm$
8. On désigne par $\mathcal{A}(D)$, l'aire du domaine (D) tel que :

$$D : \begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq g(x) \end{cases}$$

   Calculer $\mathcal{A}(D)$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{1-x}$. On désigne par $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'unité graphique $2cm$.

1. a) Déterminer les limites de f sur son ensemble de définition ; quelle conséquence graphique pour $\mathcal{C}_f$ peut-on tirer ?
   b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée f'.
   c) Dresser le tableau de variations de f et tracer sa courbe $\mathcal{C}_f$.
2. Soit n un entier non nul. On considère l'intégrale définie par $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.
   a) Établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n puis calculer I_1 et I_2.
   b) Donner une interprétation graphique de I_2. On la fera apparaître sur le graphique de la question $1.c)$.
3. a) Démontrer que pour tout réel $x \in [0, 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante : $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$.
   b) En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 10

Soit l'entier naturel non nul n, on considère la fonction numérique f_n à variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n lnx;\ si\ x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C}_n)$ la famille des courbes représentatives des fonctions f_n dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan. Unité graphique $2cm$.

1. Préciser l'ensemble de définition de la fonction f_n.
2. Déterminer le point fixe aux courbes $(\mathcal{C}_n)$.
3. Vérifier que la dérivée f_n' est $f_n'(x) = x^{n-1}(1 + nlnx)$.
4. Calculer la limite de f_n en $+\infty$.
5. Dresser le tableau de variations de la fonction f_n.
6. Dans la suite de l'exercice, on pose $n = 2$.
   a) En déduire le tableau de variations de la fonction f_2.
   b) Étudier la branche infinie à $(\mathcal{C}_2)$.
   c) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_2)$ de la fonction f_2.
7. Calculer en Cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par la courbe $(\mathcal{C}_2)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$, $x = 1$.

Exercice 11

Soit g une fonction définie sur $(\mathbb{R})$ par $g(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$. On appelle $(\mathcal{C}_g)$ la courbe représentative de g dans le repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.

1. a) Calculer les limites de g sur son ensemble de définition.
   b) Préciser les équations des asymptotes à la courbe $(\mathcal{C}_g)$.
   c) Calculer la dérivée g' de la fonction g puis dresser son tableau de variation de g. Préciser $g(0)$.
   d) Déterminer une équation de la tangente à $(\mathcal{C}_g)$ au point $x = 0$, on note T_0 cette tangente.
2. Soit x un réel quelconque.
   a) Calculer $g(x) + g(-x)$.
   b) Quelle propriété de symétrie peut-on déduire de la question suivante ?
   c) Tracer $(\mathcal{C}_g)$, ses asymptotes et la tangente T_0.
3. Soit $u(x) = 1 + e^{-x}$.
   a) Calculer $u'(x)$.
   b) En déduire la primitive G de g qui prend la valeur $-\ln 2$ en 0.
4. On pose $\alpha = \int_0^1 g(x)dx$.
   a) Calculer α.
   b) Déterminer le réel λ tel que $\alpha = \ln \lambda$.
5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $T_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} g(x)dx$.

a) Exprimer T_n en fonction n.

b) Calculer limite de T_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 12

Partie A

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et, f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$.

On suppose connus les résultats suivants : $\int_a^b [f(t) + g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.

Si, pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

Montrer que si, pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leq g(t)$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = \ln(1 + x^n)$ et on pose $I_n = \int_a^b f_n(x)dx$.

On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. a) Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.

   b) Étudier les variations de f_1 sur $[0, +\infty[$.

   c) Montrer qu'une primitive de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ sur $[0, 1]$ est la fonction $x \longmapsto (1 + x)\ln(1 + x) - x$ sur $[0, 1]$.

   d) Calculer I_1 et interpréter graphiquement le résultat.

2. a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $0 \leq I_n \leq \ln 2$.

   b) Étudier les variations de la suite (I_n).

   c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

3. Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \ln(1 + x) - x$.

   a) Étudier le variation de g sur $[0, +\infty[$.

   b) En déduire le signe de g sur $[0, +\infty[$.

   c) Montrer alors que, pour tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x positif : $\ln(1 + x^n) \leq x^n$.

   d) En déduire la limite de la suite (I_n) quand n tend vers $+\infty$.

1.4 Équations Différentielles

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $2y'' - y' - 6y = 0$.
2. $y'' + y' + y = 0$.
3. $y'' + 16 = 0$.
4. $4y'' - 25y = 0$.
5. $(x^2 + 1)y' = x$.
6. $y' - \pi y = 0$.
7. $y' + yln2 = 0$.

Exercice 2

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles (E) et déterminer la solution vérifiant les conditions initiales données.

1. $(E) : y'' - 2y' - y = 0$; $y(0) = -1$ et $y'(0) = 0$.
2. $(E) : y'' - (ln2)^2 y = 0$; $y(0) = 1$ et $y(2) = 1$.
3. $(E) : 4y'' + y = 0$; $y(\frac{\pi}{3}) = 1$ et $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.
4. $(E) : y'' + y' + y = 0$; $y(0) = -1$ et $y(0) = \sqrt{3}$.

Exercice 3

Déterminer la solution particulière de l'équation différentielle : $(P) : y'' + 2y' + 2y = 0$, dont la courbe représentative passe par le point $A(\frac{\pi}{2}, e^{\frac{-\pi}{2}})$ et admet au point d'abscisse $x_0 = \frac{5\pi}{4}$ une tangente horizontale.

Exercice 4

Le plan est muni du repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Déterminer la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $2f' + 5f = 0$ et dont la courbe représentative admet en point d'abscisse -1 une tangente parallèle à la droite d'équation : $y + x = 0$.

Exercice 5

Soit à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_1) : y' + 2y = cosx$.

1. Déterminer les nombres réels p et q tels que $g : x \longmapsto pcosx + qsinx$ soit la solution de (E_1)
2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que $f + g$ est solution de (E_1) si et seulement si f une solution de $(E_2) : y' + 2y = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation (E_2) et en déduire les solutions de (E_1).

Exercice 6

1. (E_0) désigne l'équation différentielle $y''+2y'+y=0$. Déterminer la solution générale de (E_0)
2. (E_1) est l'équation différentielle $y''+2y'+y=2e^{-x}$.
   a) Vérifier que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=x^2e^{-x}$ est une solution particulière de (E).
   b) Démontrer que φ est solution de (E) si et seulement si, $g=\varphi-h$ est solution de (E_0).
   c) Déterminer toutes les solutions de (E).
   d) Déterminer la solution particulière f_0 de (E) vérifient :

$$\begin{cases} f_0(0)=4 \\ f_0'(0)=0 \end{cases}$$

Exercice 7

Soit la fonction $f :\longmapsto xsinx + cosx$

1. Déterminer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. En déduire une relation entre x, $f'(x)$ et $f''(x)$.
3. Former une équation différentielle dont f est solution.

Exercice 8

Vérifier dans chacun des cas f est solution de (E)

a) $f(x)=xcosx$, $(E) : y-xy'=x^2sinx$ $\quad I=\mathbb{R}$.
b) $f(x)=(2x-1)e^x$, $(E) : y'-y=2e^2$ $\quad I=\mathbb{R}$.
c) $f(x)=ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ $(E) : y''+x(y')^2=0$ $\quad I=]-1,1[$.

Exercice 9

Soit la fonction f définie par $f(x)=(1+x)e^{-2x}$.

1. Déterminer les nombres réels a et b pour que f soit solution de l'équation différentielle $(E) : y''+ay'+by=0$.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la dérivée d'ordre n de f est solution de (E).
3. Déterminer, parmi les primitives de f, celle qui est solution de (E).

Exercice 10

1. Qu'appelle-t-on équation différentielle ? Donner un exemple.
2. Soit θ un nombre réel tel que : $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$.
   a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $(1+\cos 2\theta)y''-2y'\sin 2\theta+2y = 0$.
   b) Déterminer la solution particulière g telle que sa courbe représentative passe par le point $A(0,1)$ et admet une tangente de coefficient directeur $\tan\theta$ au point $x_0 = 0$.
   c) En déduire l'équation de cette tangente.

Exercice 11

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = 0$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).
2. Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie par $g(x) = ax + b$ soit solution de l'équation différentielle (E') : $y'' + 4y' + 4y = -4x$.
3. Démontrer qu'une fonction f est solution de (E') si et seulement si $f-g$ est solution de (E).
4. En déduire la solution f sur $\mathbb{R}$ de (E') telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = -2$.

Exercice 12

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + 5y = 0$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution f qui vérifie : $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$.
3. On pose : $F(x) = -\frac{1}{5}[f'(x) + 2f(x)]$.
   a) Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   b) Expliciter $F(x)$.
   c) En déduire le calcul de $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

Exercice 13

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit l'équation différentielle (E) : $y' - \alpha y = 0$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E). On note g_k la solution vérifiant $g(0) = k$ et $(\mathcal{C}_k)$ sa courbe représentative.
2. Soit x_0 un nombre réel.
   a) Déterminer une équation de la tangente à $(\mathcal{C}_k)$ au point x_0.
   b) Démontrer que, lorsque k décrit $\mathbb{R}$, cette tangente passe par un point fixe dont on déterminera les coordonnées en fonction de α et x_0.

Chapitre 2

Deuxième Partie : ALGÈBRE

2.1 La Trigonométrie

Exercice 1
Démontrer par trois méthodes différentes que $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, où θ est un réel
Exercice 2

1. Calculer en utilisant les formules d'addition les nombres suivants :
   $\sin\dfrac{7\pi}{12}$ et $\cos\dfrac{7\pi}{12}$
2. Calculer en utilisant les formules de linéarisation les nombres suivants :
   $\sin\dfrac{\pi}{12}$ et $\cos\dfrac{\pi}{12}$

Exercice 3
Pour tout réel x non multiple de $\dfrac{\pi}{2}$,

1. Démontrer que $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 2$
2. Exprimer en fonction de $\cos 2x$
   a) $A = \dfrac{\sin 3x}{\sin x} + \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$.
   b) $B = \dfrac{\sin 5x}{\sin x} - \dfrac{\cos 5x}{\cos x}$.

Exercice 4
x est un réel.

1. Démontrer que :
2. $\cos^4 x = \dfrac{1}{8}\cos 4x + \dfrac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$
3. $\sin^4 x = \dfrac{1}{8}\cos 4x - \dfrac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$
4. Calculer :
5. $S_1 = 2\cos^4 x + 2\sin^4 x + \cos^2 x \sin^2 x - \cos^6 x - \sin^6 x$.
6. $S_2 = \cos^6 x + \sin^6 x + \cos^4 x + 5\cos^2 x \sin^2 x$.

Exercice 5
Démontrer les égalités suivantes où x est un réel :

1. $cos^3 x + \sin^3 x + \sin x \cos x(\cos x + \sin x) = \cos x + \sin x$.
2. $\cos^4 x(3 - 2\cos^2 x) = 1 - \sin^4 x(3 - 2\sin x)$.

Exercice 6

1. Sachant que : $\sin x + \cos x = a$, calculer $y = \sin^3 x + \cos^3 x \ \ et \ \ z = \sin^4 x + \cos^4 x$
2. Soit trois nombres réels x_1, x_2, x_3. On pose
   $a_1 = \cos x_1, \quad a_2 = \sin x_1 \cos x_2, \quad a_3 = \sin x_1 \sin x_2 \cos x_3, \quad a_4 = \sin x_1 \sin x_2 \sin x_3$.
   Calculer la somme S $= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$.

Exercice 7

1. Calculer :
2. $S_1 = \cos\dfrac{\pi}{8} + \cos\dfrac{3\pi}{8} + \cos\dfrac{5\pi}{8} + \cos\dfrac{7\pi}{8}$.
3. $S_2 = \sin\dfrac{\pi}{8} + \sin\dfrac{3\pi}{8} + \sin\dfrac{5\pi}{8} + \sin\dfrac{7\pi}{8}$.
4. $S_3 = \tan\dfrac{\pi}{8} + \tan\dfrac{3\pi}{8} + \tan\dfrac{5\pi}{8} + \tan\dfrac{7\pi}{8}$.
5. Démontrer que l'on a
   $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7} = -\dfrac{1}{8}$.

Exercice 8

1. Calculer :
2. $S_1 = \cos^2\dfrac{\pi}{8} + \cos^2\dfrac{3\pi}{8} + \cos^2\dfrac{5\pi}{8} + \cos^2\dfrac{7\pi}{8}$
3. $S_2 = \sin^2\dfrac{\pi}{8} + \sin^2\dfrac{3\pi}{8} + \sin^2\dfrac{5\pi}{8} + \sin^2\dfrac{7\pi}{8}$.
4. Démontrer les implications suivantes :
5. si $a + b + c = \pi$ alors $\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \tan b \tan c$
6. si $a = b + c$ alors $\tan a - tanb - \tan c = \tan a \tan b \tan c$.

Exercice 9
Démontrer que si α, β et θ désignent les mesures des angles d'un triangle, on a :

1. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\theta = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$
2. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\theta = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$.

Exercice 10

1. Résoudre les équations suivantes :
   a) $\sin^2(2x + \frac{\pi}{6}) = \cos^2(x + \frac{\pi}{3})$
   b) $\sin 2x = \cos \frac{x}{2}$
   c) $\cos x + 3 \sin x = 1$
   d) $tan(3x + \frac{\pi}{3}) = cotan(\frac{\pi}{3} - x)$, puis représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions.
2. Résoudre et discuter l'équation suivante : $\cos x + m \sin x + m - 2 = 0$.

2.2 Les Nombres Complexes

Exercice 1

1. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que $|z-1+i|=2$.
2. Déterminer l'ensemble (D) des points M d'affixe z tels que $|z+2+3i|=|z+1-2i|$.
3. Déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tels que $z\overline{z}+i(z-\overline{z})-3=0$.
4. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\frac{2z-1}{z^2}$ soit réel.
5. Déterminer l'ensemble des points M d'affixes du plan d'affixe z tels que $\frac{z+i}{z-i}=3$.
6. Dans le plan complexe, On considère les points $A(1)$; $B(i)$; $M(z)$ et $M'(Z)$.
   On pose : $Z=\frac{z-1}{z-i}$.
   a) Déterminer l'ensemble (Γ) des points $M(z)$ tels que $z\in\mathbb{R}^*$.
   b) Déterminer l'ensemble (E_1) des points $M(z)$ tels que $z\in\mathbb{R}^*_-$.
   c) Déterminer l'ensemble (E_2) des points des $M(z)$ tels que Z soit un imaginaire pur.

Exercice 2
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $z^2-2\overline{z}+1=0$.
2. $iz^2-2\overline{z}+2-i=0$ où z est l'inconnue et $\overline{z}$ son conjugué.

Exercice 3
Déterminer le module des nombres complexes suivants :

1. $z=(1+i)(\sqrt{3}+i)$.
2. $z=(2+i)^3$.
3. $z=(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}})^8$.
4. $z=(1+\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$.
5. $z=\sin\theta+(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta)i$ avec $\theta\in[0;\frac{\pi}{2}[$.
6. Démontrer que $\sin\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}=\tan\theta$ avec $\theta\in[0;\frac{\pi}{2}[$.
7. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(2+i\sqrt{3})|Z|^2-z-3\overline{z}=0$.

Exercice 4

1. Écrire sous la forme trigonométrique les nombres complexes suivants : $z_1=3$; $z_2=-2$; $z_3=5i$; $z_4=-\frac{1}{2}i$; $z_5=\sin\theta+i\cos\theta$; $z_6=-2(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5})$.
2. Soit $z=1+\cos\theta+i\sin\theta$; avec $\theta\in[0;2\pi[$. Déterminer le module et un argument de z.

Exercice 5

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (1 - 2i)z - 2i = 0$.
2. Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $(O, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$, on désigne par A, B, M les points d'affixes respectifs $z_A = 2i$, $z_B = -1$ et z où z est un nombre complexe différent de z_A et z_B. On pose $Z = \frac{z+1}{z-2i}$.
   a) Interpréter géométriquement le module et l'argument de z.
   b) Déterminer géométriquement, puis construire les ensembles suivants : $E_1 = M(z) \in (\mathcal{P})/z$ soit réel, $E_2 = M(z) \in (\mathcal{P})/Z$ soit imaginaire pur, $E_3 = M(z) \in (\mathcal{P})/|Z| = 1$, $E_4 = M(z) \in (\mathcal{P})/|z| = 2$ et $E_5 = M(z) \in (\mathcal{P})/Arg(z) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Exercice 6

θ désigne un réel appartenant à $[0, \pi]$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l' équation suivante : $z^2 - (2^{\theta+1}\cos\theta)Z + 2^{2\theta} = 0$.
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère $(O, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2^\theta(\cos\theta - i\sin\theta)$ et $z_B = 2^\theta(\cos\theta + i\sin\theta)$. Déterminer θ pour que le triangle OAB soit équilatéral.

Exercice 7

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - (1 + i\sqrt{3}) = 0$.

1. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$. On notera z_1 et z_2 les solutions de (E) avec $Re(Z_1) < 0$.
2. Vérifier que z_1 et z_2 s'expriment simplement en fonction des nombres complexes $a = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ et $b = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
3. Donner le module et un argument de a et b.
4. Dans le plan complexe muni d'un repère $(O, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$, placer soigneusement les points A, B, M_1 et M_2 d'affixe respective a, b , z_1 et z_2.
5. Écrire la forme trigonométrique de z_1 et z_2.
6. En déduire la valeur de $\cos(\frac{5\pi}{12})$, $\sin(\frac{5\pi}{12})$, $\cos(\frac{11\pi}{12})$ et $\sin(\frac{11\pi}{12})$.

Exercice 8

Partie A

Deux nombres complexes non nuls z et z' ont pour arguments respectifs $\theta[2\pi]$ et $\theta'[2\pi]$. Établir les équivalences suivantes :

1. $\frac{z}{z'}$ est réel $\Longleftrightarrow \theta - \theta' = 0[\pi]$.
2. $\frac{z}{z'}$ est imaginaire pur $\Longleftrightarrow \theta - \theta' = \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Partie B

A tout nombre complexe non nul z on associe, lorsque cela est possible le nombre complexe z' tel que $\frac{z'-1}{z-1}$ soit réel et $\frac{z}{z'}$ imaginaire pur. Dans le plan complexe $(\mathcal{P})$ rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$, on désigne par M, M' et A les points d'affixes respectives z, z' et $z_A = 1$.

1. On suppose que M' existe. Démontrer que en utilisant les résultats de la **Partie A** les équivalences suivantes :
   a) $\frac{z'-1}{z-1}$ est réel $\Longleftrightarrow$ les points A, M et M' sont alignés.
   b) $\frac{z}{z'}$ est imaginaire pur $\Longleftrightarrow$ les droites (OM) et (OM') sont perpendiculaires.
2. M étant dans le plan $(\mathcal{P})$ privé de la droite (OA), construire le point M'.
3. a) Démontrer si les droites (AM) et (OM') sont parallèles alors M est sur le cercle de diamètre $[OA] - \{O, A\}$.
   b) On place M sur le cercle de diamètre $[OA] - \{O, A\}$ peut-on construire le point M.

Partie C

On se propose de retrouver analytiquement les résultats de la **Partie B**.

On pose $z = x + iy$, $y \neq 0$ et $z' = x' + iy'$.

1. a) Écrire une condition nécessaire et suffisante liant x', y', x et y pour que $\frac{z}{z'}$ soit réel.
   b) Retrouver le résultat de B) 1. a).
2. Écrire une condition nécessaire et suffisante liant x', y', x et y pour que $\frac{z}{z'}$ soit imaginaire pur.
3. Retrouver le résultat de B) 1. b).
4. a) Démontrer que les coordonnées x' et y' du point M' s'expriment en fonction des coordonnées x et y de M par :

$$\begin{cases} x' = \frac{y^2}{x^2-x+y^2} \\ y' = \frac{-xy}{x^2-x+y^2} \end{cases}$$

   b) Démontrer que M' n' existe pas si M est sur le cercle de diamètre $[OA] - \{O, A\}$.

Exercice 9
Déterminer et représenter les ensembles de points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition indiquée.

1. $|z - \overline{z} - 1| = 4$.
2. $|z - \overline{z} - 1 + i| = 2$.
3. $|z + 5 - 2i| = |\overline{z} - 2 + i|$.
4. $|z + 1 + i| = |3z - 9 - 3i|$.

Exercice 10
Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants.

1. $z = \dfrac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 + e^{i\frac{\pi}{3}}}$.
2. $z = \dfrac{1 - \cos\alpha + i\sin\alpha}{1 + \cos\alpha + i\sin\alpha}$, avec $\alpha \in [0; \pi[$.

Exercice 11
Soit α un nombre réel tel que $\alpha \in]-\pi; \pi[$ et z le nombre complexe défini par : $z = 1 + \cos\alpha - i\sin\alpha$.

1. Écrire z sous la forme exponentielle.
2. En déduire le module et l'argument de z en fonction de α.
3. Calculer l'argument de $\left(\frac{1}{z}\right)$ en fonction de α.

Exercice 12
Partie I
Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (11 + 2i)z^2 + 2(17 + 7i)z - 42$.

1. Démontrer qu'il existe un nombre réel α solution de l'équation $P(z) = 0$.
2. Déterminer le polynôme Q tel que : $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Partie II
Soit f le polynôme défini par : $f(z) = z^3 - 2(1 + 2i)z^2 + 17iz + 3(1 - 3i)$.

1. Démontrer qu'il existe un imaginaire pur $i\theta$ solution de l'équation $f(z) = 0$.
2. Déterminer le polynôme g tel que : $f(z) = (z - i\theta)g(z)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.
   N.B : les parties I et II sont indépendantes.

Exercice 13

On donne l'équation $z^2 - 4z + 8 = 0$.

1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ cette équation.
   b) Écrire les solutions sous la formes algébrique et sous la forme trigonométrique.
   c) Placer les images A et B des solutions, A étant l'image de la solution dont la partie imaginaire est négative.
   d) Quelle est la nature du triangle OAB?
2. Soit f l'application du plan dans lui-même qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$.
   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application f.
   b) Déterminer sous la forme trigonométrique, puis sous la forme algébrique l'affixe du point A', image de A par f.
   c) En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 14

On considère les nombres complexes : $\alpha = -\sqrt{3} + i$, $\beta = 3 + 2i$ et $\theta = 7 - 2i$.

1. a) Déterminer par deux méthodes les racines carrées de α.
   b) En déduire les valeurs de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.
   c) Déterminer les entiers relatifs n pour lesquels α^n est un nombre réel.
   d) Déterminer les entiers relatifs n pour lesquels α^n est un nombre imaginaire pur.
2. Déterminer et construire les ensembles de point M d'affixe z tels que :
   a) $|z - \beta| = |z - \theta|$
   b) $2|z - \beta| = |\alpha|$.
3. Soit g l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = (1 + i\sqrt{3})z - 5i\sqrt{3}$.
   a) Démontrer que g admet un seul point invariant Ω.
   b) Démontrer que g est la composée d'une rotation et d'une homothétie positive de même centre Ω. Préciser l'angle de la rotation et le rapport de l'homothétie.
   c) Déterminer et construire les images par g des ensembles déterminés à la question 2.

Exercice 15

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(0;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$.

f est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1+i)\overline{z} + 2i$.

On donne les points A d'affixe $-1-i$, B d'affixe $2+i$ et C d'affixe $-2+3i$.

1. Calculer les affixes des points A', B' et C' images respectives des points A, B et C par la transformation f.
2. Démontrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables. En déduire la nature de la transformation f.
3. On se propose de faire l'étude analytique de la transformation f.
    a) A partir de l'expression complexe donner la nature exacte de f.
    b) Donner les éléments caractéristiques de f.

Exercice 16

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(0;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$; unité graphique : $2cm$. Soient A_0 le point d'affixe 2, A'_0 le point d'affixe $2i$ et A_1 le milieu du segment $[A_0A'_0]$. Plus généralement, si A_n est un point d'affixe z_n, on désigne par A'_n le point d'affixe iz_n et par A_{n+1} le milieu du segment $[A_nA'_{n+1}]$. On note r_n et θ_n le module et l'argument de z_n.

1. a) Déterminer les affixes des points A_0, A'_0, A_1, A'_1, A_2, A'_2, A_3 et A'_3. Placer ces points sur la figure.
    b) Calculer r_0, r_1, r_2 et r_3 ainsi que θ_0, θ_1, θ_2 et θ_3.
2. a) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, exprimer z_{n+1} en fonction de z_n. En déduire z_n en fonction de n.
    b) Établir les expressions de r_n et θ_n en fonction de n.
    c) Déterminer la limite de r_n quand n tend vers $+\infty$. Interpréter géométriquement ce résultat.
    d) Comparer les modules et les arguments de z_n et z_{n+3}.
3. a) Établir que $A_nA_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}A_{n-1}A_n$.
    b) Après avoir exprimé A_nA_{n+1} en fonction de n, déterminer en fonction de n, la longueur L_n de la ligne brisée $A_0A_1A_2...A_n$.
    c) Déterminer la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 17

Dans le plan complexe $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère le polynôme P défini par : $P(z) = 2z^3 - (5 + 3i\sqrt{3})z^2 - (1 - 7i\sqrt{3})z + 6 - 2i\sqrt{3}$.

1. Calculer $P(2)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
   On notera z_1 la solution réelle, z_2 la solution imaginaire pure et z_3 la troisième racine de cette équation.
3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(0; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.
   On considère les points A, B et C d'affixes respectives
   $z_A = 2$, $z_B = i\sqrt{3}$ et $z_C = \dfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$.
   Déterminer l'affixe z_D du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 18

Soit (E) l'équation d'inconnue z : $z^2 - (2ie^{i\theta}\cos\theta)z - e^{2i\theta} = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On présentera les solutions sous la forme exponentielle.
2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(0; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $z_B = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\theta)}$, on note z_0 l'affixe de 0.
   a) Exprimer $Arg\left(\dfrac{z_B - z_0}{z_A - z_0}\right)$ en fonction de θ.
   b) En déduire l'ensemble des valeurs de θ pour lesquelles $(\overrightarrow{0A}, \overrightarrow{0B}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
3. On suppose que $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}[$.
   Écrire le conjugué de $z_A + z_B$ sous la forme exponentielle.

Exercice 19

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(0; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, on considère le point M_n d'affixe $z_n = (\frac{1}{2})^n e^{in\frac{\pi}{3}}$.

1. Pour quelle valeur de n, z_n est il réel.
2. Placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4. (on prendra comme unité graphique $8cm$).
3. Calculer en fonction de n les distances $0M_n$, $0M_{n+1}$ et M_nM_{n+1}.
4. Démontrer que le triangle $0M_nM_{n+1}$ est rectangle en M_{n+1}.
5. On pose $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + M_2M_3 + ... + M_{n-1}M_n$.
   a) Exprimer S_n en fonction de n.
   b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 20

Le plan complexe $\mathbb{C}$ est muni de repère orthonormal direct $(0; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$. On considère les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A = 1-i$, $z_B = 3-2i$, $z_C = -1+2i$ et $z_D = -3+6i$.

1. Citer les éléments caractéristiques d'une similitude plane indirecte.
2. Soit l'application f définie dans $\mathbb{C}$ telle que $f : z' = a\overline{z} + b$, où $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z.
   Déterminer les nombres a et b sachant que $f(A) = C$ et $f(B) = D$.
3. Donner la nature de l'application f.
4. Déterminer les éléments caractéristiques de l'application f.

Exercice 21

Le plan complexe $\mathbb{C}$ est rapporté au repère orthonormé direct $(0; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$; unité graphique : $2cm$.

On note g l'application du plan P privé du point 0 dans P qui à tout point M d'affixe z non nul, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.

On a donc aussi $z' = \dfrac{z}{|z|^2}$ où $|z|$ désigne le module de z.

1. Montrer que $0, M$ etM' sont alignés.
2. Déterminer l'ensemble (Γ) des points invariants par g. Vérifier que (Γ) contient les A et B d'affixes respectives -1 et i.
3. Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[AB], E$ le milieu de $[AB]$ et $E' = g(E)$. Déterminer une équation de $(\mathcal{C})$. Montrer $E' \in (\mathcal{C})$.
4. Le point M d'affixe z étant quelconque de la droite (AB), on se propose de construire son image M' d'affixe z' par g.
   a) Déterminer une équation de la droite (AB).
   b) On pose $\lambda = 0M^2$, $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x' et y'des réels. Exprimer λ en fonction de x.
   c) Montrer que $M' \in (\mathcal{C})$ (on pourra exprimer x' et y'en fonction de x et λ).
   d) Déduire des questions précédentes, une construction géométrique du point M' connaissant le point M.

Exercice 22
Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(0;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$; on considère les points A, B, C, D, E d'affixes $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 1$, $z_C = 2 - i$, $z_D = 4 + i$, $z_E = 2 + i$.

1. a) Trouver l'écriture complexe de la similitude plane directe S qui transforme D en E et E en B.
   b) Donner les éléments caractéristiques de la similitude plane directe S.
   c) Écrire l'expression analytique de S.
2. Soit $(\mathcal{D}) : x - y + 1 = 0$ et $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 = 4$.
   Écrire l'équation cartésienne de $(\mathcal{D}') = S(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{C}') = S(\mathcal{C})$.
3. Soit $\overline{S}$ la similitude plane indirecte qui laisse invariant le point B et transforme C en E.
   a) Trouver l'écriture complexe de $\overline{S}$.
   b) Donner les éléments caractéristiques de $\overline{S}$

Exercice 23
Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(0;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$, unité graphique $4cm$. On considère les points A d'affixe $z_A = 1$ et B d'affixe $z_B = 2$. Soit un réel $\theta \in]0, \pi[$, on note M le point d'affixe $z = 1 + e^{i2\theta}$.

1. Montrer que le point M appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de centre A et de rayon 1.
2. Exprimer l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$ en fonction de θ. En déduire l'ensemble (Γ) des points M quand θ décrit l'intervalle $]0, \pi[$.
3. On appelle M' l'image de M par la rotation de centre O et d'angle -2θ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que $z' = \overline{z}$ puis que M' appartient à $(\mathcal{C})$.
4. Dans toute la suite on choisit $\theta = \frac{\pi}{3}$.
   On appelle r la rotation de centre O et d'angle $\frac{-2\pi}{3}$ et A' l'image de A par r.
   a) Définir l'image $(\mathcal{C}')$ du cercle $(\mathcal{C})$ par r.
   b) Placer sur la figure A, B, $(\mathcal{C})$,M, $(\mathcal{C}')$ puis le point M' image de M par r.
   c) Montrer que le triangle OAM est équilatéral et que $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ se coupent en O et en M'.
   d) Soit P symétrique de M par rapport à A, montrer que M' est le milieu du segment $[A'P]$.

Exercice 24
Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(0; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C telles que : $z_A = -3$, $z_B = 2 + 2i$ et $z_C = 7i$.

1. Construire le triangle ABC.
2. Vérifier que les nombres complexes : $z_A - z_B$ et $z_B - z_C$ ont le même module que l'on précisera.
3. Écrire le nombre complexe $u = \dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ sous la forme trigonométrique et exponentielle.
4. En déduire des questions 2. et 3. que ABC est un triangle rectangle isocèle en B.
5. Soit S la similitude directe de centre A qui applique B sur C.
   a) Déterminer les autres éléments caractéristiques de S.
   b) Construire, après justification, les points E et F images respectives de C et B par la similitude S.
6. On pose : $A_0 = S(A)$, $A_1 = B$, $A_2 = S(B)$, $A_3 = S(C)$, $A_4 = S(E)$, $A_5 = S(F)$, $A_6 = S(A_5)$,..., pour tout entier $n \geq 2$ $A_n = S(A_{n-1})$ et pour tout entier naturel non nul n, $P_n = |z_{A_{n+1}} - z_{A_n}|$.
   a) Calculer $|z_{A_2} - z_{A_0}|$ et P_2.
   b En déduire la nature précise du triangle AA_2A_3.
   c) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul $n \geq 1$, le triangle AA_nA_{n+1} est isocèle et rectangle en A_n.
   d) Démontrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$.
   e) Démontrer que : $P_n = 2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{29}$.

Exercice 25
Partie I
On considère le polynôme suivant : $f(z) = z^2 - 2z + \frac{1}{\cos^2 t}$, avec $t \in]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

1. Montrer que $f(z) = 0$ peut s'écrire sous la forme $f(z) = z^2 - 2z + \tan^2 + 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.
3. Soient z_1 et z_2, les deux solutions. Donner suivant les valeurs de t, le module et l'argument de z_1 et z_2.
   Partie II
   Soit n un entier naturel.
   On pose $\alpha = \displaystyle\sum_{k=o}^{n-1} \cos(kx)$ et $\beta = \displaystyle\sum_{k=o}^{n-1} \sin(kx)$.
4. Calculer et écrire sous la forme exponentielle $\alpha + i\beta$.
5. En déduire des expressions plus simples de α et β.
   N.B : les parties I et II sont indépendantes.

Exercice 26

On définit la suite des nombres complexes (z_n) suivante :

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}i \quad \forall \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Pour tout entier n, on considère la suite numérique (V_n) telle que : $V_n = z_n - i$.
   a) Démontrer que la suite (V_n) est géométrique.
   b) En déduire que l'on a : $V_n = (1-i)(\frac{1}{3})^n$.
   c) Exprimer en fonction de n la partie réelle X_n et de la partie imaginaire Y_n du nombre complexe V_n.
   d) Déterminer les limites des suites numériques (X_n) et (Y_n).
   e) En déduire la convergente de la suite (z_n).
2. On considère le nombre complexe $z_k = (V_0)^k$, k est un entier naturel.
   a) Déterminer le module et un argument de z_k.
   b) En déduire le module et un argument de z_4.

Exercice 27

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
(Unité graphique $4cm$), on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que : $a = 1 - i$, $b = 1 + i$, $c = -1 + i = -a$. On note (Γ) le cercle de diamètre $[AB]$.

1. a) Placer sur une figure les points A, B, C et le cercle (Γ).
   b) Mettre les nombres complexes a, b et c sous la forme trigonométrique.
   c) Soit r la rotation de centre O telle que $r(A) = B$. Déterminer l'angle de r et le point B', image de B par r.
   d) Déterminer l'image (Γ') du cercle (Γ) par r.
   e) Placer (Γ') sur la figure.
2. On considère un nombre $\theta \in]0; 2\pi[$ distinct de π ; on note M le point d'affixe $z = 1 + ie^{i\theta}$. On désigne par M' l'image de M par r, et on appelle z' l'affixe de M'.
   a) Montrer que M est un point de (Γ) distinct de A et B.
   b) Exprimer z' en fonction de z.
   c) Calculer en fonction de θ les affixes u et u' des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM'}$.
   d) Démontrer que $u = u' \tan \frac{\theta}{2}$.
   e) Prouver que les points B, M et M' sont alignés. Placer sur la figure un point M et son transformé M'.

Exercice 28

Soit $z = (-1)^{\frac{1}{n}}$ un nombre complexe où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Écrire z sous la forme trigonométrique.
2. Donner une expression de la somme $S_n = 1 + z + z^2 + ... + z^{n-1}$.
3. Déterminer $S'_n = \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + ... + \sin \frac{(n-1)\pi}{n}$.
4. Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\left(\frac{S_n}{n}\right)$.

Exercice 29

Soit r un nombre réel strictement positif et $\alpha \in]-\pi, \pi]$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - 2(r\cos\alpha)z + r^2 = 0$. On précisera le module et un argument de chacune de ses solutions z_1 et z_2.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, calculer z_1^n et z_2^n.
3. Déterminer $P_n = z_1^n + z_2^n$.
4. On pose $r = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.
   a) Exprimer P_{n+3} en fonction de P_n.
   b) Quelle est alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$?

Exercice 30

Soit $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. On désigne par f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8$.

1. Comparer $f(\overline{z})$ et $\overline{f(z)}$ où $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z et $\overline{f(z)}$ le nombre complexe conjugué de $f(z)$.
2. Calculer $f(i)$. En déduire une, puis une deuxième solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$.
3. Mettre $f(z)$ sous la forme d'un produit de deux polynôme du second degré à coefficients réels.
4. Achever la résolution de l'équation $f(z) = 0$.
5. Donner le module et un argument de chacune des solutions.
6. Calculer le produit et la somme de ces solutions.

Exercice 31

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z définie par :
$z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = 0$ (E).

1. Vérifier que 8 est solution de cette équation.
2. Déterminer les nombres α, β, γ tels que, pour tout nombre complexe z, $z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = (z-8)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma)$.
3. Résoudre l'équation (E).
4. $(0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère orthonormal direct du plan orienté, unité graphique est $1cm$. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $a = 2 - 2i\sqrt{3}$, $b = 2 + 2i\sqrt{3}$, $c = 8$.
   a) Calculer le module de a et son argument θ.
   b) Placer les trois points A, B, C.
   c) Calculer le nombre complexe $q = \dfrac{a-c}{b-c}$.
   d) Déterminer son module et son argument φ.
   e) En déduire la nature du triangle ABC.
   f) Déterminer le barycentre D des points pondérés $(A, |a|)$, $(B, |b|)$, $(C, |c|)$. Placer D.
   g) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$.
   h) Tracer (Γ).

2.3 Espace Vectoriel et Algèbre Linéaire

Exercice 1

Partie (A)

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, soit les vecteurs $\overrightarrow{V_1}(1,0,1)$ et $\overrightarrow{V_2}(1,1,0)$.

1. Démontrer que la famille $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})$ est une famille libre.
   Soit a un réel et $\overrightarrow{V_1}(a,2,-a^2)$
2. Déterminer a pour que la famille $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3})$ soit liée

Partie (B)

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$,soit les vecteurs $\overrightarrow{U_1}(1,1,0,0)$, $\overrightarrow{U_2}(0,1,1,0)$ et $\overrightarrow{U_3}(0,0,1,1)$

3. Démontrer que la famille $(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2}, \overrightarrow{U_3})$ est une famille libre
   Soit $\overrightarrow{V} = (x,y,z,t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$. On suppose que $\overrightarrow{V}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{U_1}$,$\overrightarrow{U_2}$,$\overrightarrow{U_3}$.
4. Trouver alors une relation entre x, y, z et t.
   Soit $\overrightarrow{W} = (1,-1,1,3)$.
   Déduire de la question précédente que $\overrightarrow{W}$ est une combinaison
   linéaire de $\overrightarrow{U_1}$, $\overrightarrow{U_2}$, $\overrightarrow{U_3}$
5. Déterminer les réels a, b et c tels que $\overrightarrow{W} = a\overrightarrow{U_1} + b\overrightarrow{U_2} + c\overrightarrow{U_3}$

Exercice 2

Soit dans $\mathbb{R}^3$ les sous ensembles

$E_1=\left\{\overrightarrow{U}(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus x - y + 2z = 0\right\}$

$E_2=\left\{\overrightarrow{U}(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus x = -y, z = 2x\right\}$

Montrer que E_1 et E_2 sont deux sous espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$

Exercice 3

Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$,on considère les ensembles

$E_1=\left\{\overrightarrow{U}(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus 3x - 2y = 0\right\}$

$E_2=\left\{\overrightarrow{U}(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus -x - y = 0\right\}$.

1. Montrer que E_1 et E_2 sont deux sous espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^2$
   Soit $\overrightarrow{e_1} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ les bases respectives de E_1 et E_2.
   On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ tel que
   $f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1}$ et $f(\overrightarrow{e_2}) = -\overrightarrow{e_2}$
2. Écrire la matrice de f dans la $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f.
4. Étudier la nature de f. On précisera ses éléments caractéristiques.

Exercice 4
Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la base du plan vectoriel E.
f désigne l'endomorphisme de E tel que

$$\begin{cases} f(\overrightarrow{i}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}) \\ f(\overrightarrow{j}) = \frac{3}{4}(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}) \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$
2. f est-elle bijective ?
3. Donner l'expression analytique de f
4. Déterminer le noyau de f et en donner une base $\overrightarrow{e_1}$
5. Déterminer l'image de f et en donner une base $\overrightarrow{e_2}$
6. Montrer que $B'=(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de E.
7. Quelle est la matrice de f dans la base B'.
8. Déterminer l'ensemble des vecteurs invariants par f et en donner une base $\overrightarrow{e_3}$.
9. Caractériser f.

Exercice 5
L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ étant rapporté à une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On considère l'application g de $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ qui, à tout vecteur $\overrightarrow{U}(x, y, z)$, associe le vecteur $\overrightarrow{U}' = f(\overrightarrow{U})$ dont les composantes (x', y', z') dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, sont définies par :

$$\begin{cases} x' = -x + ay + 2z \\ y' = x + 2y + z \qquad \text{avec}\, a \in \mathbb{R} \\ z' = x + y \end{cases}$$

1. Écrire la matrice de l'application g dans la base $(\overrightarrow{i}, overrightarrowj, \overrightarrow{k})$
2. Pour quelle valeur de a g est-elle bijective ?
3. Dans la suite, on pose $a = 1$.
   a) Déterminer l'ensemble E des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ invariants par g.
   b) Déterminer le noyau de g et l'image de g.
      En déduire une base pour chacun des sous ensemble.
4. Soit $\overrightarrow{U}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de composantes $(1,\alpha, \beta)$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$
   Calculer α et β pour que $\overrightarrow{U} \in kerg$.

Exercice 6

On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = z^3 + z^2 + 3z - 5$.

1. Montrer que $z_0 = 1$ est solution de l'équation $f(z) = 0$, puis déterminer les deux autres solutions z_1 et z_2
2. Déterminer l'équation différentielle du second ordre dont z_1 et z_2 sont solutions de son équation caractéristique, puis déterminer une solution de cette équation différentielle respectant les conditions suivantes : si $x = 0; y(0) = y^{'}(0) = 1$.
3. Dans le plan vectoriel $\overrightarrow{P}$ rapporté à la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$; $\overrightarrow{e}_1$ et $\overrightarrow{e}_2$ sont deux vecteurs d'affixes respectifs $z_0 = 1$ et $z_1 = -1 + 2i$.
   a) Montrer que $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ est une base de $\overrightarrow{P}$
   b) $g_{(a,b)}$ est l'application définie de $\overrightarrow{P}$ dans $\overrightarrow{P}$ par :

$$\begin{cases} g_{(a,b)}(\overrightarrow{e}_1) = (b + \frac{a}{2})\overrightarrow{e}_1 + \frac{a\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{e}_2 \\ g_{(a,b)}(\overrightarrow{e}_2) = \frac{a\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{e}_1 + (b - \frac{a}{2})\overrightarrow{e}_2 \end{cases} \quad \text{avec} \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

   Déterminer les couples (a, b) de $\mathbb{R}^2$ pour les quels $g_{(a,b)}$ n'est pas bijective.

Exercice 7

E est un espace vectoriel rapporté à une base orthonormé $\beta = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Soit g l'endomorphisme de E qui, à un vecteur $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ de E, associer son image $\overrightarrow{u'} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$ tel que : $\overrightarrow{u'} = (2x + y)\overrightarrow{i} + (-3x - 2y)\overrightarrow{j}$.

1. Exprimer les coordonnées (x', y') de $\overrightarrow{u'}$ en fonction des coordonnées (x, y) de $\overrightarrow{u}$.
2. Écrire la matrice de g dans la base$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
3. a) Déterminer les sous-ensembles E_1 et E_2 de E tels que :
   $E_1 = \{\overrightarrow{u} \in E \diagup g(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}\}$ et $E_2 = \{\overrightarrow{u} \in E \diagup g(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{u}\}$.
   b) Déterminer $g \circ g(\overrightarrow{i})$ et $g \circ g(\overrightarrow{j})$.
   c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g (on admet que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E).
4. On donner $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$.
   a) Montrer que $\beta' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de E.
   b) Écrire la matrice de g dans la base $\beta' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Exercice 8

E désigne un plan vectoriel de base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et f l'endomorphisme de E tel que :
$f(\overrightarrow{i}) = -2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ et $f(\overrightarrow{j}) = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

1. Écrire la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
2. Déterminer l'expression analytique de f.
3. Déterminer le noyau de f ainsi qu'une base $\overrightarrow{e}_1$.
4. Déterminer l'image de f ainsi qu'une base $\overrightarrow{e}_2$.
5. Montrer que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base.

6. Donner la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Exercice 9

E désigne un espace vectoriel de base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, a un paramètre réel et f_a l'endomorphisme de E tel que

$$\begin{cases} f_a(\overrightarrow{i}) = (a-1)\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} \\ f_a(\overrightarrow{j}) = a(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}) \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice de f_a dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
2. Pour quelles valeurs de a, f_a est-elle bijective ?
3. On pose $a = -1$.
   a) Déterminer le noyau de f_{-1} ainsi qu'une base $\overrightarrow{e_1}$.
   b) Déterminer l'image de f_{-1} ainsi qu'une base $\overrightarrow{e_2}$.
   c) Démontrer que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de E.
   d) Donner la matrice de f_{-1} dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$
   .

Exercice 10

Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique tel que :

$$\begin{cases} f(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{j}) = 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} \\ f(\overrightarrow{k}) = -2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k} \end{cases}$$

1. Écrire la matrice M_f de l'endomorphisme f dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$
2. Déterminer le plan vectoriel (P) des vecteurs invariants par f, puis en donner une base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$.
3. Déterminer la droite vectorielle (D) des vecteurs du noyau de l'endomorphisme f, puis en donner une base $(\overrightarrow{e}_3)$.
4. Montrer que f est une projection vectorielle dont en précisera les éléments caractéristiques.
5. Montrer que $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ puis donner la matrice de l'endomorphisme f dans la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$.

2.4 Arithmétique

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul. On pose : $S_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{15} + ... + \frac{1}{4n^2-1}$.

1. Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $S_n = \frac{n}{2n+1}$.

Exercice 2

Dans le système décimal, $2125 = 2000+100+20+5 = 2\times10^3+1\times10^2+2\times10^1+5\times10^0$. En s'inspirant de l'écriture ci-dessus, Écrire chacun des nombres suivants en fonction des puissances 10 : 145654 ; 3564895 ; 5428954765.

Exercice 3

1. Écrire le nombre 473 en base dix dans le système de numération de base 4.
2. Soit $N = \overline{5243101201}$ en base 7, écrire ce nombre dans le système décimal sachant que N est écrit avec 10 chiffres.
3. Le nombre $\overline{2131}$ est écrit en base 4. Écrire ce nombre en base trois sans passer par le système décimal.
4. 17315 est écrit dans le système décimal. Écrire ce nombre dans le système de base 12. Sachant que les chiffres utilisés en base 12 sont les éléments de l'ensemble $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; \alpha; \beta\}$.
5. Écrire le nombre $\overline{1101010011}^2$ en base 8 (on remarquera que $8 = 2^3$).
6. Déterminer tous les entiers naturels compris entre 0 et 100 dont le reste dans la division euclidienne par 12 est 3.
7. Déterminer l'entier naturel x tel que le reste dans la division euclidienne de 6425 par x soit 100.
8. Combien y a-t-il de multiples de 13 compris entre -500 et 500.
9. Déterminer les couples (x, y) d'entiers relatifs tels que :

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x^2 + y = 2 \end{cases}$$

Exercice 4

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^4 par 13.
2. Déduire que pour tous entiers naturels k et r, on a $5^{4k+1} \equiv 5^r[13]$.
3. Quels sont les restes possibles de la division de 5^n par 13 ?
4. Soit A_n l'entier défini par : $A_n = 5^{3n} + 5^{2n} + 5^n + 1$,$n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que A_n est divisible par 13 si, et seulement si, n n'est pas un multiple de 4.

Exercice 5

1. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{32} par 5.
2. Déterminer suivant les valeurs de n le reste dans la division euclidienne de 5^n par 3.

Exercice 6

1. Montrer que $C = \overline{xy}^{10} + \overline{yx}^{10}$ est divisible par 11.
2. Soient x, y, z trois entiers naturels, non nuls,$B = \overline{xyz}^{10} + \overline{yzx}^{10} + \overline{zxy}^{10}$ (ces nombres sont écrits en base 10). Montrer que B est divisible par 111.
3. Un entier naturel N s'écrit $\overline{1x1yxy}^{10}$. Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 9 et par 5.

Exercice 7

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Déterminer suivant les valeurs de n le reste de la division de 5^n par 7.
   b) En déduire le reste de la division de 5^{2008} par 7.
2. Déterminer le reste de la division de 2008^{2008} par 7.
3. Comment faut-il choisir n pour que $2^n - 1$ soit divisible par 9.
4. Calculer le reste de la division de $19^{52} \times 23^{41}$ par 7.
5. Démontrer que le nombre $B_n = 3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11 $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8

1. Définir en extension les ensembles :
   $\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}$.
   a) $\dot{4}x + \dot{5} = \dot{0}$.
   b) $x^2 + \dot{2}x - \dot{3} = \dot{0}$.
   c) $\begin{cases} \dot{3}x + \dot{2}y = \dot{1} \\ \dot{2}x + \dot{5}y = \dot{6} \end{cases}$

Exercice 9

1. Calculer le $PGCD(a, b)$ et le $PPCM(a, b)$ avec $a = 168$, $b = 20$.
2. Déterminer le $PGCD$ des nombres a et b par l'algorithme d'Euclide avec $a = 4312$, $b = 1755$ et $a = 3182$, $b = 2096$.

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations :

a) $25x - 37y = 0$.
b) $25x - 37y = 1$.
c) $25x - 37y = 2$.

Exercice 11

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $(a-b)(a+b)=85$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, le système suivant : $\begin{cases} x^2-y^2=5440 \\ pgcd(x,y)=8 \end{cases}$

   On pourra poser : $a=\dfrac{x}{8}$ et $b=\dfrac{y}{8}$.

Exercice 12

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation d'inconnues (x,y) suivante $7x-4y=4$.
2. Un entier naturel a s'écrit 75 dans le système de base x et 49 dans le système de base y. Un entier b s'écrit 310 dans le système de base x et 125 dans le système de base y .Déterminer x et y puis a et b.

Exercice 13

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les systèmes suivants :
   a) $\begin{cases} 3x \equiv 1[5] \\ 5x \equiv 2[7] \end{cases}$

   b) $\begin{cases} 3x \equiv 3[6] \\ 3x \equiv 7[5] \end{cases}$
2. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les systèmes suivants :
   a) $\begin{cases} x+y=153 \\ pgcd(x,y)=17 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} xy=1008 \\ ppcm(x,y)=168 \end{cases}$

Exercice 14

1. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $5x-2y=1$.
   a) Montrer que cette équation est équivalente à (E') : $5x=1[2]$.
   b) Résoudre l'équation (E').
   c) En déduire les solutions de l'équation (E).
2. Pour tout entier naturel non nul n, on considère les nombres $a=2n+3$ et $b=5n-2$.
   a) Montrer que $pgcd(a,b)$=$pgcd(n-8;10)$.
   b) En déduire que si a et b ne sont pas premier entre eux alors leurs plus grand commun diviseur est 19.
3. On rappelle que si $pgcd(a,b)=d$ alors il existe k et k' tels que $a=kd$ et $b=k'd$. Montrer que k et k' vérifient la relation $5k-2k'=1$.
4. En se servant de la question 1, déterminer k et k'.
5. En déduire que les entiers n tels que $pgcd(a,b)=19$ sont de la forme $n=8+19p$.

Exercice 15

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur les entiers a, b et c pour que l'ensemble des solutions de l'équation : $ax + b = c$
   (appelée équation diophantienne) ne soit pas vide.
2. a) Démontrer que le couple $(1, -1)$ est solution de l'équation $8x + 5y = 3$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $8x + 5y = 3$.
3. a) Énoncer le théorème de Gauss.
   b) Trouver les $PGCD(1152, 720)$ et $PPCM(1152, 720)$.
   c) En déduire la solution dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $1152x + 720y = 432$.

Exercice 16

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation (E) : $21x - 17y = 4$.

1. a) Montrer que cette équation admet au moins une solution.
   b) Montrer que l'équation (E) : est équivalente à l'équation (E') : $21x = 4[17]$.
2. On se propose de résoudre l'équation (E'), on rappelle que l'entier relatif a est l'inverse modulo n $(n \in \mathbb{N})$ de l'entier relatif b si $ab = 1[n]$.
   a) Déterminer l'inverse modulo 17 de 21.
   b) Montrer que les solutions de l'équation (E') sont les entiers relatifs x tels que : $x = 1 + 17k$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 17

Dans le système de numération de base n, on considère les nombres $A = 212$, $B = 312$ et $C = 133032$.

1. Sachant que $C = AB$, Montrer que n divise 8. En déduire la valeur de n .
2. Écrire A, B et C dans le système décimal.
3. Déterminer les solutions dans $\mathbb{Z}^2$, de l'équation (E) : $Ax + By = 1$.
4. Déterminer les couples d'entiers naturels tes que : $\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ pgcd(a, b) = 3 \end{cases}$
5. Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1. On pose $a = n-1$ et $b = n^2-3n+6$. Déterminer deux entiers α et β tels que $n^2 - 3n + 6 = (\alpha n + \beta)(n - 1) + 4$.
6. Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que : $\begin{cases} pgcd(a; b) = 10 \\ ppcm(a; b) = 280 \end{cases}$

Exercice 18

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système : $\begin{cases} a + b = 84 \\ ppcm(a; b) = [pgcd(a; b)]^2 \end{cases}$

Exercice 19

(S) est la famille des suites (v_n) telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} + v_{n+1} - 6v_n = 0$.

1. Déterminer les suites géométriques non nuls de premier terme un élément de (S).
   a) Pour tout élément $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \alpha(2)^n + \beta(-3)^n$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
   b) Montrer que (u_n) appartient à (S).
   c) Déterminer α et β pour que $u_0 = 3$ et $u_1 = 1$.
2. On pose $\alpha = 2$ et $\beta = 1$
   a) Montrer que $u_n = 3 \times 2^n[5]$.
   b) En déduire le reste de la division euclidienne de u_n par 5.
3. Soit $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
   a) Montrer que $T_n = [2 - 4(2)^n][5]$.
   b) En déduire le reste de la division euclidienne de T_{2014} par 5.

Exercice 20

Pour tout couple d'entiers naturels (x, y), on désigne respectivement par $pgcd(a, y)$ leur plus grand diviseur commun.

1. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que : $3x \equiv 23[7]$.
2. En déduire l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x, y) tels que : $3x - 7y = 23$.
3. Pour tout entier relatif k tel que $k \neq -7$, démontrer que :
   $pgcd(3 + 7k\ , -2 + 3k) = pgcd(k + 7\ , 23)$.
4. En déduire l'ensemble des couples d'entiers (x, y) tels que : $\begin{cases} pgcd(x, y) \neq 1 \\ 3x - 7y = 23. \end{cases}$
5. On rappelle que pour tout couple d'entier (a, b), $pgcd(a, b) \times ppcm(a, b) = |ab|$.
   Déterminer les couples (a, b) d'entiers naturels tels que :
   $2ppcm(a, b) + 3pgcd(a, b) = 23$.

Exercice 21

1. Montrer que 12 et 5 sont premier entre eux.
2. En déduire qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $12u + 5v = 1$.
3. Déterminer les entiers relatifs u et v.
4. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $5x - 12y = 3$.
   a) Trouve une solution particulière (x_0, y_0) de (E).
   b) Résoudre (E).
5. Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $\begin{cases} x \equiv 2[5] \\ x \equiv 1[7] \\ x \equiv 3[9] \end{cases}$

Exercice 22

Partie A

On cherche l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation (E) : $16x - 3y = 4$.

1. Vérifier que le couple $(1, 4)$ est une solution particulière de (E).
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On considère la transformation g du plan, qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{8}i}z$.
On définit une suite de points (M_n) de la manière suivante : le point M_0 a pour affixe $z_0 = i$ et pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = g(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

1. a) Déterminer les affixes des points M_1, M_2 et M_3.
   b) Placer les points M_0, M_1, M_2 et M_3.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.
3. Soit h la transformation définie par $h = g \circ g \circ g \circ g$.
   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation h.
   b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a
   $OM_{n+4} = 4OM_n$ et $(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+4}}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
   c) Compléter la figure en construisant les points M_4, M_5 et M_5.
4. Démontrer que pour tout entier naturel n, $z_n = (\sqrt{2})^n e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{3n\pi}{8})}$.
5. Soient deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$.
   a) Exprimer en fonction de n et p une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_p}, \overrightarrow{OM_n})$.
   b) Démontrer que les points O, M_p et M_n sont alignés si et seulement si $n - p$ est un multiple de 8.
   c) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que le point M_n appartienne à la demi-droite $[Ox)$. On pourra utiliser la **Partie A**.

Exercice 23
Partie A
Soit a, b, c, d des entiers relatifs et n un entier naturel non nul.
Montrer que si $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$ alors $ac \equiv bd[n]$.
Partie B
On considère l'équation (E) : $23x - 26y = 1$, où x et y désignent deux entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(-9, -8)$ est solution de l'équation (E).
2. Résoudre alors l'équation (E).
3. En déduire un entier a tel que $0 \leq a \leq 25$ et $23a \equiv 1[26]$.

Partie C
On veut coder un mot de deux lettres selon la procédure suivante :
Étape 1 Chaque lettre du mot est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient un couple d'entiers (x_1, x_2) où x_1 correspond à la première lettre du mot et x_2 correspond à la deuxième lettre du mot.
Étape 2 (x_1, x_2) est transformé en (y_1, y_2) tel que :

$$(S_1)\begin{cases} y_1 \equiv 11x_1 + 3x_2[26] \text{ avec } 0 \leq y_1 \leq 25 \text{ et } 0 \leq y_2 \leq 25 \\ y_2 \equiv 7x_1 + 4x_2[26] \end{cases}$$

Étape 3 (y_1, y_2) est transformé en un mot de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans **l'étape 1**.
Exemple :

$$\underbrace{\text{TE}}_{\text{mot en clair}} \underbrace{\Longrightarrow}_{\textbf{Étape 1}} (19,4) \underbrace{\Longrightarrow}_{\textbf{Étape 2}} (13,19) \underbrace{\Longrightarrow}_{\textbf{Étape 3}} \underbrace{\text{NT}}_{\text{mot codé}}$$

4. Coder le mot ST.
5. On veut maintenant déterminer la procédure de décodage :
   a) Montrer que pour tout couple (x_1, x_2) vérifiant les équations du système (S_1), vérifie les équations du système :

   $$(S_2)\begin{cases} 23x_1 \equiv 4y_1 + 23y_2[26] \\ 23x_2 \equiv 19y_1 + 11y_2[26] \end{cases}$$

   b) A l'aide de la **Partie B**, montrer que pour tout couple (x_1, x_2) vérifiant les équations du système (S_2), vérifie les équations du système :

   $$(S_3)\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + y_2[26] \\ x_2 \equiv 11y_1 + y_2[26] \end{cases}$$

   c) Montrer que pour tout couple (x_1, x_2) vérifiant les équations du système (S_3), vérifie les équations du système (S_1).

   d) Décoder le mot YJ.

2.5 Les Statistiques

Exercice 1
On considère la série statistique (x, y) définie par le tableau ci-après :

x	-3	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	0	1	2	-3	-2	3	1	2	-4

1. Représenter le nuage de points associé à cette série.
2. Déterminer le point moyen de ce nuage.
3. Calculer les variances en x, $V(X)$ et en y, $V(Y)$.
4. Calculer les écart-types en x, $\sigma(X)$ et en y, $\sigma(Y)$.
5. Calculer la covariance $Cov(X, Y)$.
6. Déterminer la droite de régression de x en y.
7. Déterminer la valeur de x lors que $y = 1.3$.
8. Calculer son coefficient de corrélation linéaire.

Exercice 2
L'étude du poids P de la larve de l'insecte TENEBRIO MOLITOR en fonction de l'âge x a conduit au tableau suivant :

x	]0,2]	]2,6]	]6,12]	]12,20]	]20,30]
p	7	13	25	47	88

1. Tracer le nuage de points représentant la série (x, p).
2. a) On pose $y = lnp$. Calculer les différentes valeurs prises par la variable y.
   b) Tracer le nuage des points représentant les couples (x, y).
   c) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x.
3. Si l'évolution se poursuivait de la même manière, quel serait le poids de la larve au bout de 6 mois.

Exercice 3
On considère la série statistique à double variable :

x_i	1.2	1.4	1.6	1.8	2
y_j	13	12	14	16	a

1. Déterminer a sachant que la droite de régression de y en x a pour équation $y = 9x + 0.6$.
2. Représenter dans ce cas le nuage de cette série.
3. Déterminer la droite de régression de x en y.
4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.
5. Calculer l'inertie du nuage par rapport au point $A(2; 4)$ et par rapport au point moyen G.

Exercice 4
On considère la série statistique à deux caractères définie par le tableau suivant :

x	0	2	0	2	2	0	2	0	2	2	2
y	-1	-1	0	-1	0	1	1	0	1	1	0

1. Transformer ce tableau à un tableau à double entrée.
2. Donner les deux séries marginales associées.
3. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage statistique.
4. Écrire l'équation cartésienne de la droite de régression de x en y.
5. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.
6. Calculer l'inertie du nuage par rapport au point $A(0;2)$.

Exercice 5
Soit le tableau statistique à double entrée suivant :

$X \setminus Y$	-1	2	3
1	2	1	1
2	2	3	1

1. Convertir ce tableau en un tableau linéaire.
2. Déterminer le coefficient de corrélation $\rho(x,y)$ des caractères X et Y, on donne $\overline{X} = 1,6$ et $\overline{Y} = 1$.
3. Donner une interprétation de cette corrélation.

Exercice 6
Soit a, b et c trois valeurs de moyenne $\overline{x}$.

1. Montrer que la variance : $V = \dfrac{(a-\overline{x})^2 + (b-\overline{x})^2 + (c-\overline{x})^2}{3}$
   s'écrit : $V = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} - (\overline{x})^2$.
2. Calculer la variance et l'écart type de la série suivante :

x_i	130	165	170	185	195	200	215
n_i	3	1	2	3	4	3	4

   On appliquera la formule : $V = (\overline{x^2}) - (\overline{x})^2$.
   Variance=(moyenne des carrés)-(carré de la moyenne).
   L'écart type noté σ étant la racine carré de la variance.

Exercice 7
considère la série statistique à deux caractères $(X;Y)$ définie par le tableau à double entrée ci-après où a désigne un entier naturel non nul :

$X \setminus Y$	-1	0	2
1	2	5	3
2	2	a	3

1. Donner les deux séries marginales associées.
2. Déterminer son point moyen G.
3. Déterminer a pour que le point moyen soit $G(\frac{29}{17}, \frac{4}{17})$.
4. On prend $a = 4$.
   a) Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ de X et Y.
   b) Calculer les écart-types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$.
   c) Calculer la covariance $Cov(X, Y)$.
   d) Déterminer la droite de régression de x en y.
   e) Déterminer les valeurs de y lorsque $x = 2, 3$.
   f) Calculer son coefficient de corrélation linéaire.

Exercice 8
Le directeur des ressources humaines de l'entreprise $\ll EMERGENCE\,2025 \gg$ doit embaucher des ouvriers. Lors de la précédente campagne de recrutement pour les postes analogues, il fait une étude statistique sur le nombre des candidatures y en fonction des salaires proposés x. Il a eu les résultats suivants :
▷ Salaire moyen : $\overline{X} = 660.000fcfa$.
▷ Variance de X : $V(X) = 20.000$.
▷ Équation de la droite de régression de y en x : $y = 0,001125x - 56$.
▷ Coefficient de corrélation linéaire : $r = 0,922$.

1. Déterminer le nombre moyen de candidatures $\overline{Y}$.
2. Déterminer la covariance de (X, Y) de la série.
3. Déterminer l'équation de la droite de régression de x en y.
4. En déduire une estimation de salaire que doit proposer le Directeur s'il veut embaucher 30 ouvriers.

Exercice 9

Dans le tableau suivant :

$X \setminus Y$	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0	2
x_2	2	3	0
x_3	0	2	2

1. Déterminer x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 et y_3 tels que x_1, x_2, x_3 sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $r = 2$ et vérifient la relation suivante $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ et y_1, y_2, y_3 sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = 3$ et vérifient la relation suivante $y_1.y_2.y_3 = 27$.
2. Compléter le tableau et déterminer les séries marginales de X et Y.
3. Déterminer l'inertie du nuage par rapport à $O(0, 0)$. En déduire l'inertie par rapport à G point moyen de cette série.
4. Déterminer les droites de régression de y en x et de x en y.
5. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y).

Exercice 10

On considère la série statistique à double variable :

x_i	1	0	2	0	1	2	1	2	3	1
y_i	0	1	0	2	1	2	2	1	1	3

On désigne par x_1=notes de maths et y_1=notes de biologie de 10 élèves au BAC 2016.

1. Représenter le nuage de points de cette série double.
2. Trouver les coordonnées du point moyen G.
3. Calculer les variances de x et y.
4. Déterminer les droites de régression de :
   a) de y en x.
   b) de x en y.
5. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.
6. Calculer l'inertie du nuage par rapport :
   a) Au point $A(1; 1)$.
   b) Au point moyen G.

2.6 Les Probabilités

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul.

1. Démontrer que : $\dfrac{1}{(n-1)!} - \dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{n^2}{(n+1)!}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :
3. $C_n^2 = 190$
4. $2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n$
5. $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = \dfrac{7}{2}n$
6. $C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 387n$

Exercice 2

Un sac contient 10 jetons, 6 jetons portent le $n^0 1$ et 4 jetons le $n^0 3$. On tire 3 jetons simultanément. On considère X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des numéros inscrits sur les jetons tirés. On suppose que les tirages sont équiprobables.

1. Donner les valeurs de X.
2. Donner la loi de probabilité.
3. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
4. Calculer la probabilité p pour que la somme des numéros soit strictement inférieure à 7.
5. On répète 4 fois successivement, quelle est la probabilité que le nombre 7 sorte 2 fois exactement.

Exercice 3

Achille débute un jeu dans la quel il a autant de chance de gagne que de perdre la première partie. On admet que, s'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est de 0.6 et s'il perd une partie, la probabilité de perdre la partie suivante est 0.7.
On note, pour tout entier naturel n non nul :
G_n :L'évènement "Achille gagne la n^{ieme} partie"
p_n :L'évènement "Achille perdre la n^{ieme} partie"

Partie A

1. Déterminer les probabilités $P(G_1)$, $P(G_2/G_1)$ et $P(G_2/P_1)$.
2. Calculer $P(G_2)$.

Partie B

On pose, pour tout n entier naturel non nul X_n=$P(G_n)$ et Y_n=$P(P_n)$

1. Déterminer pour tout entier naturel non nul, les probabilités $P(P_{n+1}/G_n)$ et $P(G_{n+1}/P_n)$
2. Montrer que pour tout n entier naturel non nul : $\begin{cases} X_{n+1} = 0.6X_n + 0.3Y_n \\ Y_{n+1} = 0.4X_n + 0.7Y_n \end{cases}$

   Pour tout entier naturel, on pose $V_n = X_n + Y_n$ et $W_n = 4X_n - 3Y_n$

3. Donner la nature de la suite (V_n)
4. Montrer que la suite (W_n) est géométrique et exprimer son terme général en fonction de n
5. Calculer la limite de cette suite
6. Déduire les termes généraux des suites (X_n) et (Y_n) puis leur limite.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire dont l'univers image est X(Ω)=$\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et telle que, pour tout k élément de $X(\Omega)$, $P(X = k)$ est proportionnelle à k.

1. Déterminer la loi de probabilité de X
2. Définir la fonction de répartition X et tracer sa courbe représentative.
3. Calculer l'espérance mathématique de X et l'écart-type de X.

Exercice 5

Partie A

une urne contient 6 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher.
On tire simultanément et au hasard deux boules de cette urne. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe le nombre de boules rouges tirées.

1. Déterminer les différentes valeurs prises par X.
2. Donner la loi de probabilité de X.
3. Déterminer et représenter la fonction de répartition de X.
4. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X. En déduire son écart type.
5. Calculer la probabilité pour que les deux boules tirées soient de même couleur.

Partie B

Soit un entier naturel n tel que : $2 \leq n \leq 8$.
Une urne contient 10 boules indiscernable au toucher dont n boules blanches et $(10 - n)$ boules rouges. On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1. Démontrer que la probabilité $P(n)$ de tirer deux boules de la même couleurs est $P(n) = \dfrac{2n^2 - 20n + 90}{90}$.
2. Quel doit être le nombre n de boules blanches pour que $P(n)$ soit minimale ?
   Calculer ce minimum.

Exercice 6

Un sac contient cinq boules numérotées de 1 à 5.On extrait simultanément deux boules, qui portent respectivement les numéros x et y. A chaque tirage on associe la variable aléatoire X définie de la manière suivante :

1. Si x et y sont paires, X prend la valeur : $\dfrac{x+y}{2}$
2. Si x et y sont impaires, X prend la valeur : $\dfrac{|x-y|}{2}$
3. Si x et y sont de parités différentes, on attribue à X la valeur 0. Établir la loi de probabilité de X. Représenter la fonction de répartition F de X définie pour tout x réel par :
   $F(x) = Prob(X \leq x)$. Calculer l'espérance mathématique de X. On extrait dix fois de suite deux boules simultanément avec remise des deux boules après chaque tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir sept fois x et y de même parité.

Exercice 7
Un joueur utilise un dé à six faces qui a été truqué. La probabilité P_1 de voir apparaitre la face numéroté i est donnée par le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	6
P_i	0.4	0.15	0.15	0.05	a	b

1. a) Calculer a et b sachant que $P_5 = 4P_6$
   b) Quelle est la probabilité de voir apparaître un numéro pair ? un numéro impair ?
   c) Quelle est la probabilité que ce soit le numéro 1 sachant que c'est numéro impair.
2. On considère les évènements suivants :
   A : "voir apparaître un numéro pair"
   B : "voir apparaître un numéro multiple de 3"
   C : "voir apparaître un numéro ≤ 3"
   a) A est il indépendant de B ?
   b) A est il indépendant de C ?
3. On lance ce dé quatre fois de suite . Quelle est la probabilité de voir apparaître le numéro 1 au moins une fois au cours de ces quatre lances.

Exercice 8
On jette trois fois un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note a, b, c les numéros obtenus. Soit $g(x) = ax^2 + bx + c$.
Déterminer la probabilité pour que le polynôme g :

1. ait une racine réelle double.
2. ait racine réelle distinctes.
3. n'est pas de racine réelle.

Exercice 9
Une variable aléatoire X prend les valeurs $1, -1$ et 2 avec les probabilités respectives e^a, e^b, e^c, où a, b, c sont en progression arithmétique.
On suppose que l'espérance mathématique $E(X)$ de X est égale à 1.

1. Calculer a, b, c et la variance $V(X)$ de X.
2. Soient A, B, C trois points d'abscisses respectives $1, -1$ et 2 d'une droite graduée (Δ).

a) Calculer l'abscisse du point G barycentre de $\{(A, 1); (B, 2); (C, 4)\}$.
b) On pose $f(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$, où M est un point de (Δ).
   Montrer que $f(G) = V(x)$.
c) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de (Δ) tels que $f(M) = 3$.

Exercice 10

Un dé cubique dont les faces sont numérotes de 1 à 6, est truqué de manière que la face numéroté 6 est une probabilité d'apparition égale à 0.8. les autres faces numérotés 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ont la même probabilité d'apparition. On désigne par P_i, la probabilité d'apparition de la face numéroté i avec $i \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

1. On lance ce dé une fois, calculer P_i.
2. On lance ce dé dix fois. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   A : " Obtenir 6 fois un chiffre pair ".
   B : " Obtenir au moins un chiffre pair ".

Exercice 11

On dispose de deux dés parfaits :

1. le dé A a six faces numérotées : 2, 2, 1, 1, 1, 1
2. le dé B a six faces numérotées : 2, 2, 2, 0, 0, -1

On lance simultanément les deux dés. On note a et b les points marqués respectivement par des dés A et B.
On construit ainsi un vecteur $\overrightarrow{U}$ de composantes (a, b), dans la base $(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer tous les vecteurs $\overrightarrow{U}$ obtenus
2. Quelle est la probabilité d'obtenir :
   a) Un vecteur $\overrightarrow{U_1}$ colinéaire à $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$
   b) Un vecteur $\overrightarrow{U_2}$ colinéaire à $\overrightarrow{W} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$
3. Soit X la variable aléatoire $\|\overrightarrow{U}\|^2$
   a) Dresser le tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire X
   b) Calcule son espérance mathématique et sa variance.
4. On suppose que $\overrightarrow{U_1} = 2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{U_2} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$.
   Soit P l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que : $\mathrm{P}(\overrightarrow{U_1}) = \overrightarrow{U_1}$ et $\mathrm{P}(\overrightarrow{U_2}) = \overrightarrow{0}$.
   a) Montrer que le système $(\overrightarrow{U_1}; \overrightarrow{U_2})$ constitue une base de $\mathbb{R}^2$.
   b) Déterminer la matrice de P dans la base $(\overrightarrow{U_1}; \overrightarrow{U_2})$.
   c) Montrer que P est un projecteur.

Exercice 12
On lance un dé à quatre faces numérotées 1 ; 2 ;3 et 4. On note P_i, la probabilité d'obtenir le nombre i visible ; avec $i \in \{1; 2; 3; 4\}$. Le dé est pipé de tel sorte que P_1, P_2, P_3 et P_4 dans cet ordre forme une progression arithmétique de raison r=0.1.

1. Calculer $P_1; P_2; P_3$ et P_4.
2. On lance ce dé trois fois, calculer la probabilité des évènements
   A, B et C sachant que :
   A : " Obtenir 1 ; 2 ; 4 "
   B : " Obtenir 1 ; 2 ; 4 dans l'ordre "
   C : " Obtenir trois nombres distincts, rangés dans l'ordre croissant "

Exercice 13
Une maladie atteint 0.03 d'une population. Un text de dépistage donne les résultats suivants : Chez les individus malades, 0.95 de text sont positifs et 0.05 négatifs. Chez les individus non malades, 0.01 de text sont positifs et 0.99 négatifs. On note : M l'évènement : " être malade " et T l'évènement " le text est positif ".

1. Construire un arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.
2. Donner la probabilité de l'évènement " $M \cap T$ ", puis celle de " $\overline{M} \cap \overline{T}$ "
3. Déterminer $P(T)$ et $P(\overline{T})$
4. Calculer la probabilité de ne pas être malade, sachant que le text est positif.
5. Calculer la probabilité d'être malade, sachant que le text est négatif.

Exercice 14
L'ensemble des participants à une compétition de tir à l'arc, est composé pour la moitié de tireurs entrainé, pour un quart de tireurs amateurs et pour le reste de tireurs débutants. Un tireur entrainé atteint la cible pour 0.95 de ses tirs, un tireur amateur pour les trois quart de ses tirs et un tireur débutant une fois sur deux. Une flèche vient d'être tirée par un participant choisi au hasard.

1. Déterminer la probabilité pour que la flèche atteigne la cible.
2. Sachant que la flèche a atteint sa cible, quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée par un débutant ?

Exercice 15
Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules noires. On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne. On gagne $100F$ par boule rouge tirée. Soit X la variable aléatoire associée à la somme gagnée en francs.

1. Déterminer les différentes valeurs prises par X.
2. Déterminer les probabilités associées à chaque valeurs prises par X.
3. Donner la loi de probabilité de la variable X, puis calculer l'espérance mathématique et l'écart type de la variable X.
4. Déterminer et représenter la fonction de répartition de la variable X.

Exercice 16

Une boite contient 8 :

• 1 gros rouge et 3 petits rouges ;

• 2 gros verts et 1 petit vert ;

• 1 petit jaune.

Un enfant choisit au hasard et simultanément 3 cubes de la boite. On admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et sa couleur.

Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1. On note A l'événement : " obtenir des cubes de couleurs différentes " et B l'événement : " obtenir au plus un petit cube ".
   a) Calculer la probabilité de A.
   b) Vérifier que la probabilité de B est égale à $\frac{2}{7}$.
2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer l'espérance mathématique de X et son écart type.
3. L'enfant répète 5 fois l'épreuve " tirer simultanément 3 cubes de la boite ", en remettant dans la boite les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant. Les tirages sont indépendants. On note p la probabilité que l'événement B soit réalisé.
   a) Déterminer la probabilité que B soit réalisé au moins une fois à l'issue des 5 épreuves.
   b) Déterminer la probabilité que l'événement B soit réalisé exactement 3 fois.

Exercice 17

Une urne contient 1 boule blanche et deux boules noires, toutes sont indiscernables au toucher. On tire successivement avec remise trois boules de l'urne.

1. Qu'appelle-t-on tirage successif avec remise ?
2. Calculer la probabilité p_1 de tirer trois boules blanches.
3. Calculer la probabilité p_2 de tirer trois boules noires.
4. Quelle est alors la probabilité p_3 de tirer trois boules ayant une même couleur.
5. Déduire la probabilité p_4 de tirer trois boules n'ayant pas une même couleur.

Exercice 18

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 de même apparence extérieure. L'urne U_1 contient 4 boules blanches et une boule noire. L'urne U_2 contient 2 boules blanches et 3 boules noires.

On choisit une urne au hasard, puis une boule dans l'urne choisie.

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire ;
   a) sachant que l'urne choisie est U_1 ?
   b) sachant que l'urne choisie est U_2 ?
3. En déduire la probabilité de tirer une boule noire.

Exercice 19
D'une urne contenant quatre jetons numéroté 1, 2, 3, 4, indiscernable au toucher. On extrait successivement sans remise deux jetons. La variable aléatoire X est celle qui détermine
" la valeur absolue de la différence des deux numéros sortis "

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

Exercice 20
Une urne contient 20 boules blanches et 12 boules rouges indiscernables au toucher. On tire simultanément 6 boules de cette urne.

1. Quelle est la probabilité pour que les six boules soient blanches ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une boule rouge ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir quatre boules rouges et deux blanches ?
4. Quelle est la probabilité pour que les six boules soient de même couleur ?
5. Quelle est la probabilité d'avoir des boules des deux couleurs ?

Exercice 21
Un sac contient 4 boules blanches, une boule bleue et 7 boules rouges indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules du sac. Déterminer la probabilité d'obtenir :

1. 3 boules de même couleur.
2. 2 boules blanches et une boule bleue.
3. 1 boule rouge exactement
4. 1 boule de chaque couleur.

Exercice 22
Une urne contient 5 jetons verts, 3 jetons rouges et 2 jetons jaunes indiscernables au toucher. On tire successivement avec remise 3 jetons de l'urne et on appelle X la variable aléatoire réelle qui à chaque tirage associe le nombre de jeton verts obtenus

1. Déterminer la loi de probabilité de X
2. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

Exercice 23
Un sac contient 4 boules vertes, 3 boules rouges et 8 boules jaunes indiscernables au toucher. On tire successivement sans remise 4 boules du sac. Déterminer la probabilité d'obtenir :

1. 4 boules jaunes.
2. 4 boules de même couleur.
3. 2 boules rouges exactement.
4. 2 boules rouges et une boule verte.
5. au plus une boule verte.

Exercice 24
Une urne contient 5 jetons blancs, 3 jetons verts et 2 jetons rouges indiscernables au toucher. On tire successivement avec remise 3 jetons de l'urne. Déterminer la probabilité d'obtenir :

1. trois jetons blancs.
2. trois jetons de même couleur.
3. trois jetons de couleur différente
4. deux jetons verts.
5. au moins deux jetons verts.

Exercice 25
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$; on considère une droite $(\mathcal{D})$, un point $F \notin (\mathcal{D})$ et l'ensemble $(\mathcal{C})$ définie par : $(\mathcal{C}) : \{M \in \mathcal{P} / d(M, F) = ed(M, (\mathcal{D})), e > 0\}$

1. Définir $\mathcal{C}$ en précisant ses trois éléments caractéristiques remarquables.
   a) Pour quelle valeurs de e, $(\mathcal{C})$ est-il une ellipse ?
   b) Pour quelle valeur de e, $(\mathcal{C})$ est-il une parabole ?
   c) pour quelle valeurs de e, $(\mathcal{C})$ est-il une hyperbole ?
2. On considère un ensemble E des valeurs que peut prendre le réel e défini par : $E = \left\{\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; 1; 2; \sqrt{2}; \frac{3}{4}\right\}$. Un sac contient six (6)jetons indiscernables au toucher. Sur chaque jetons est écrit un nombre de l'ensemble E.
   a) Un joueur tire simultanément deux (2) jetons du sac. Calculer la probabilité des événements suivants :
   A : " Tirer deux ellipses ".
   B : " Tirer deux paraboles ".
   C : " Tirer deux hyperboles ".
   D : " Tirer une ellipse et une hyperbole équilatère ".
   b) Le joueur tire successivement avec remise deux jetons. Le tirage de la parabole fait gagner 1000 frs CFA et, celui de l'ellipse fait perde 500 frs CFA ; celui de l'hyperbole ne fait gagner rien.
   On désigne par X, le gain algébrique du joueur. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   c) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
   d) En déduire l'écart type de X.

Exercice 26

On jette un dé pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ l'univers des possibles et p_i la probabilité de l'évènement.
$\{i\} :\in \omega$ tel que $p_i = ki^2$.

1. Déterminer k.
2. Soit X la variable aléatoire réelle qui à chaque lancer associe $\cos(i\frac{\pi}{3})$
   a) Montrer que l'univers image $X(\Omega) = \{-1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$
   b) Déterminer la loi de probabilité de X ; son espérance, sa variance et son écart-type.

Exercice 27

Soit $ABCD$ un losange (non carré) de centre O. On choisit trois points au hasard parmi les points O, A, B, C et D.

1. Quelle est la probabilité des événements suivants :
   E : obtenir les points A, B et C .
   F : obtenir trois points alignés.
   G : obtenir trois points formant un triangle rectangle.
   H : obtenir trois points formant un triangle isocèle.
2. Calculer la somme des probabilités des événements F, G et H.
   Expliquer ce résultat.

Chapitre 3

Troisième Partie : GÉOMÉTRIE

3.1 Les Angles Orientés

Exercice 1
Déterminer la mesure principale α de l'angle orienté de mesure :

a) $\frac{37\pi}{3}$.
b) $\frac{71\pi}{6}$.
c) $\frac{119\pi}{4}$.

Exercice 2
Soit ABC un triangle. On pose $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \alpha[2\pi]$. Déterminer en fonction de α une mesure des angles suivants :

a) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$.
b) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$.
c) $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.
d) $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA})$.

Exercice 3
Soient A, B, C, D et E cinq points définis par $AB = AC = 1$; $AD = 2$; $AE = 3$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{23\pi}{12}$; $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{119\pi}{4}$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \frac{77\pi}{6}$.

1. Déterminer la mesure principale de l'angle : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$.
2. Faire une figure.
3. Montrer que les points A, D et E sont alignés puis calculer la longueur de DE.

Exercice 4
$(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont deux cercles sécants en A et B, M est un point de $(\mathcal{C})$ distinct de A et B. la droite (AM) recoupe le $(\mathcal{C}')$ en N. les tangentes respectivement aux cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ en M et N se coupent en T. Montrer que les points M, T, N et B sont cocycliques.

Exercice 5
$(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont deux cercles sécants en A et B. M et N sont deux points de $(\mathcal{C})$. les droites (AM) et (BN) coupent respectivement $(\mathcal{C}')$ en M' et N'. Montrer que les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles.

Exercice 6

(Γ) est un cercle de rayon $R = 5cm$. Soient A, B, C et D quatre points distincts de (Γ). les points B et D se projettent orthogonalement sur la droite (AC) en B' et D'. les points A et C se projettent orthogonalement sur la droite (BD) en A' et C'.

1. Montre que les points A', B', C' et D' sont cocycliques, Tracer le cercle (Γ_1) passant par ces quatre points .
2. Les droites (DD') et (CC') se coupent en M. E étant le point d'intersection des droites (AC) et (BD). Démontrer que la droite (ME) est perpendiculaire à la droite (DC).

Exercice 7

Soient quatre points A, B, C et D cocycliques. Les points B et D se projettent orthogonalement sur (AC) en B' et D'.
Les points A et C se projettent orthogonalement sur (BD) et en A' et C'.
Démontrer que les points A', B', C' et D' sont cocycliques.

Exercice 8

Le triangle ABC est rectangle en A. Le point H est le pied de la hauteur issue de A. I et J sont les projets orthogonaux de H respectivement sur (AB) et (AC). F est le milieu du bipoint (B, C)

1. Montrer que $(\overline{IJ, AI}) = (\overline{CA, CB})[\pi]$. (a)
2. Montrer que $(\overline{AI, AF}) = (\overline{BC, BA})[\pi]$. (b)
3. Déduire de (a) et (b) que les droites (AF) et (IJ) sont perpendiculaires.

Exercice 9

Soient *(C)* et *(C')* deux cercles sécants en A et B, M un point de *(C)* distinct de A et B. La droite (AM) recoupe le cercle *(C')* en N. Les tangentes respectives aux cercles *(C)* et *(C')* se coupe en P.

1. Faire la figure.
2. Montrer que les quatre points M, P, N, B sont cocycliques.

Exercice 10

On considéré un triangle ABC non rectangle en A, (Γ) son cercle circonscrit de centre O, et P et Q les pieds des hauteurs issues de B et C.

1. Montrer que l'on a : $(\overline{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = (\overline{\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{AC}})[\pi]$.
2. En déduire que : $2(\overline{\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{AC}}) = (\overline{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}})[\pi]$.
3. Soit T un point de la tangente en A à (Γ), $(T \neq A)$, montrer que $\overrightarrow{PQ}$ *et* $\overrightarrow{AT}$ sont colinéaires.
4. Établir que la droite (OA) est perpendiculaire à (PQ).

Exercice 11

On considère deux cercles *(C)* et *(C')* de centres respectifs O et O' sécants en A et B. On note T et T' deux points tels que es droites (AT) et (AT') sont les tangentes à *(C)* et *(C')* en A. Une droite contenant B autre que (AB) recoupe *(C)* en M et *(C')* en M'

1. Faire le dessin.
2. Démontrer que $(\overline{AO, AO'}) = (\overline{AT, AT'})[\pi]$.
3. Démontrer que $(\overline{AM, AM'}) = (\overline{AO, AO'})[\pi]$.

Exercice 12
(Γ) est un cercle de rayon $R = 5cm$.
Soient A, B, C et D quatre points distincts de (Γ).
Les points B et D se projettent orthogonalement sur la droite (AC) en B' et D'.
Les points Aet C se projettent orthogonalement sur la droite (BD)en A' et C'.

1. Démontrer que les points A', B', C' et D' sont cocycliques, tracer le cercle (Γ_1) passant par ces quatre points.
2. Les droites (DD') et (CC') se coupent en M. Soit E le point d'intersection des droites (AC) et (ED).
   Démontrer que la droite (ME) est perpendiculaire à la droite (DC).

Exercice 13
Dans le plan orienté, on considère deux cercles (Γ) et(Γ') qui se recoupent en A et B, une droite (Δ) passant par A recoupe (Γ) en C et (Γ_2) D, une autre droite (Δ') passant par B recoupe (Γ) en E et recoupe (Γ') en F.

1. Démontrer que les droites (CE) et (DF) sont parallèles.
2. Soit M un point cercle (Γ) distinct de A, B, C, E.
   Les droites (MA) et (MB) recoupent le cercle (Γ') respectivement en M' et N'.
   Démontrer que $(M'N')$ est parallèle à la tangente en M à (Γ).

Exercice 14
ABC est un triangle quelconque et M un point du plan qui se projette orthogonalement sur $(BC), (AC)$ et (AB) respectivement en P, Q et R.

1. Montrer que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{QR})$ $[2\pi]$, où M est distinct de P, Q et R.
2. Démontrer que les points P, Q, et R sont alignés si et seulement si le point M est sur le cercle inscrit au triangle ABC.
3. Dans le cas où les points P, Q et R sont alignés, comment appelle-t-on la droite contenant les points P, Q et R ?

Exercice 15
Dans le plan (P) on considère un triangle ABC isocèle en A, de sens direct. A' et B' sont des milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AC]$. Les droites (BB') et (AA') se coupent en D.
Les cercles circonscrits aux triangles ADB' et $BA'D$ se recoupent en E.

1. Faire la figure.
2. Démontrer que les points A', C, A et E sont cocycliques.
3. On note *(C)* le cercle circonscrit au triangle $BA'D$. La droite (AE) recoupe le cercle *(C)* en F. Démontrer que les droite (EF) et (AC) sont parallèles.

Exercice 16
On considère un point M du plan qui se projette de façon orthogonale sur les droites $(BC), (CA)$ et (AB) support des des côtés d'un triangle ABC respectivement
en A', B' et C'.

1. Évaluer $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ en fonction de $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB})$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $A'B'C'$ est un triangle rectangle en A' et ABC un triangle équilatéral direct.

3. Quel est l'ensemble décrit par le point M lorsque les points A', B' et C' sont alignés.

Exercice 17

(C) est un cercle de diamètre $[BC]$, A étant un point extérieur du cercle *(C)*. la droite (AB) coupe *(C)* en P et la droite (AC) coupe *(C)* en Q. les droites (PC) et (BQ) se coupent en M.

1. Faire une figure.
2. Montrer que les points A, P, M et Q sont cocycliques, puis tracer le cercle passant par ces quatre points.
3. Démontrer que les droites (AM) et (BC) sont perpendiculaires
4. La tangente à *(C)* en B et la tangente à *(C)* en P se coupent en H.
   a) Démontrer que le triangle BHP est isocèle.
   b) En déduire que $(\overline{AP, AM}) = (\overline{PH, PB})[\pi]$.

Exercice 18

soit ABC un triangle non rectangle. On désigne par O le centre du cercle circonscrit à ce triangle, H son orthocentre. Les droites (AH) et (BC) se coupent en I,(BH) et (CA) se coupent en J, (CH) et (AB) se coupent en K.

1. Montrer que les droites (IJ) et (OC) sont perpendiculaires (on pourra faire intervenir la tangente en C au cercle circonscrit). En déduire l'orthogonalité des droites (JK) et (AO), puis (IK) et (OB).
2. Montrer que (AH) est l'une des bissectrices du triangle IJK.

Exercice 19

Soit *(C)* un cercle de centre O. A, B, C, D quatre points situés dans cet ordre sur *(C)* tels que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. E et F, les milieux respectifs de $[A, B]$ et $[A, C]$.

1. Montrer que les points A, E, F et O appartiennent à un cercle *(C')* de centre O' que l'on déterminera. Construis *(C')*.
2. La médiane (Δ) du segment $[O, D]$ coupe les droites (AE) et (AF) respectivement en G et H.
   Démontrer que les points E, F, G et H sont cocycliques ainsi que les points B, C, G et H.
3. a) Démontrer que les droites (BD) et (EF) se coupent en un point J et que les droites $(O'E)$ et (OB) sont parallèles.
   b) En déduire que les points J, D et A sont cocycliques.

Exercice 20
Dans le plan orienté, on considère le triangle quelque ABC inscrit dans un cercle *(C)* de centre O, on note F la symétrie de A par rapport à O. Soit M un point du plan. la droite passant par M et perpendiculaire à (MF) coupe les droites (AB) et (AC) en P et Q respectivement.

1. Faire la figure où M n'est ni sur la droite (BC) ni sur le cercle *(C)*.
2. Démontrer que les points B, P, M et F sont situés sont un cercle (C_1) que l'on tracera.
3. Démontrer que les points F, M, Q et C sont situés sur un cercle (C_2) que l'on tracera.
4. Démontrer que $(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FQ}) + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[\pi]$.
5. Déterminer l'ensemble (Γ_1) des points M du plan tels que les points F, P, et Q soit alignés.
   Construire (Γ_1) en illustrant l'alignement des points F, P et Q
   (on fera une autre figure).
6. Déterminer l'ensemble (Γ_2) tels que $(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FQ}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[\pi]$.
7. La droite (AF) recoupe le cercle (C_1) et (C_2) en E et D respectivement. Démontrer que les droites (PE) et (DQ) sont parallèles.

Exercice 21
Deux cercles *(C)* et *(C')* se coupent en A et B. Soit C un point de *(C)* et D un point de *(C')* non situé sur la droite (AC). P est un point du cercle circonscrit au triangle ACD. Les droites (PC) et (PD) recoupe *(C)* et *(C')* en M et M'.

1. Faire la figure.
2. Montrer que les points M, B et M' sont alignés.
3. Les tangentes (T) à *(C)* en M et (T') à *(C')* en M' se recoupent en R. Montrer que les points R, M, M' et A sont cocycliques.

Exercice 22
Dans le plan orienté $(\mathbb{P})$. On Considère un triangle ABC (non aplati).

1. Tracer $(\mathbb{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC.
2. Soit M un point du $(\mathbb{C})$ distinct des points A, B et C. On désigne par A', B' et C' les projeté orthogonaux de M respectivement sur les droites $(BC), (AC)$ et (AB). Montrer que les points A', B' et C' sont alignés.
3. Placer les points A'', B'' et C'' les symétriques orthogonaux de M par rapport aux droites $(BC), (AC)$ et (AB).
4. Soit h l'homothétie de centre M et de rapport 2.
   a) Trouver les images des points A', B' et C' par l'homothétie h.
   b) En utilisant une propriété caractéristique de l'homothétie, montrer que les points A'', B'' et C'' sont alignés.
   c) Comment appelle-t-on la droite qui passe par A', B' et C' ?
   d) Comment appelle-t-on la droite qui passe par A'', B'' et C'' ?

Exercice 23

On considère un triangle ABC et M un point du plan. On note P le projeté orthogonal de M sur $[BC], Q$ le projeté orthogonal de M sur $[AC], R$ le projeté orthogonal de M sur $[AB]$.

1. Démontrer que $(\overline{MB, MC}) - (\overline{AB, AC}) = (\overline{PQ, PR})[\pi]$.
2. En déduire que M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si les points P, Q et R sont alignés.

Exercice 24

Soit A et B deux points donnés du plan.

1. Déterminer et construire l'ensemble (Γ_1) des points M du plan tels que : $\frac{MB}{MA} = 2$.
2. Déterminer et construire l'ensemble (Γ_2) des points M du plan tels que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
3. En déduire la construction de Ω l'ensemble des points vérifiant : $\Omega B = 2\Omega A$ et $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

3.2 Les Isométries Planes

Exercice 0

On considère les applications du plan $(\mathcal{P})$ dans $(\mathcal{P})$ qui à tout point $M(x,y)$ du plan associe le point $M'(x',y')$ telles que :

$$f : \begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y-3 \end{cases} \quad g : \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases} \quad h : \begin{cases} x' = -x+2 \\ y' = -y \end{cases} \quad j : \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

1. Reconnaitre les applications f, g, h et j.
2. Caractériser ces applications.

Exercice 1

Soit f l'application du plan $(\mathcal{P})$ dans $(\mathcal{P})$ qui à tout point $M(x,y)$ du plan associe le point $M'(x',y')$ définie par :

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{4}{5} \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{2}{5} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Quel est l'ensemble des points invariants par f ?
3. En déduire la nature de f.

Exercice 2

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considère la transformation ponctuelle f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ définie par :

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{13}{5} \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{6}{5} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Trouver $Invf$. En déduire la nature de f.
3. Déterminer les éléments caractéristiques de f.
4. On identifie $\mathcal{P}$ au plan complexe.
   a) Déterminer l'écriture complexe de f.
   b) Retrouver les résultats de la question 3.

Exercice 3
Soit r_1 la rotation de centre A d'affixe -1 et d'angle $\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et r_2 la rotation de centre B d'affixe $a = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.
Montrer $f = r_2 \circ r_1$ est une symétrie centrale dont on précisera l'affixe de son centre.
Exercice 4
Soit un triangle équilatéral direct ABC de centre de gravité O.

1. On pose $r_1 = r(A, \frac{\pi}{3})$ et $r_2 = r(B, \frac{\pi}{3})$.
   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f = r_1 \circ r_2$.
   b) Placer les points D et I tels que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ et I milieu du segment $[DC]$.
   c) Reconnaître et caractériser l'application g définie par $g = f \circ r'(A, \frac{-2\pi}{3})$, de deux manières différentes.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O', \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ avec $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{O'C}$ et O' milieu du segment $[BC]$.
   a) On pose $h = r(O, \frac{2\pi}{3})$. Donner l'expression analytique de h.
   b) Montrer que h est une application bijective.

Exercice 5
Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$, parmi les isométries ci-dessous ; donner la définition géométrique, la traduction complexe ainsi que l'expression analytique :

1. L'identité du plan notée : $f = IdP$.
2. La translation de vecteur non nul notée : $g = t_{\overrightarrow{U}}$.
3. La symétrie centrale de centre Ω notée : $h = \ S_{\Omega}$.
4. La symétrie axiale d'axe (Δ) notée : $f' = S_{\Delta}$.
5. La symétrie glissée d'axe (Δ) et de vecteur $\overrightarrow{U}$ non nul , notée :
   $g' = t_{\overrightarrow{u}} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ t_{\overrightarrow{U}}$.
6. La rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\theta \neq 0[2\pi]$ notée : $k = r(\Omega, \theta)$.

Exercice 6
Soit $ABCD$ un carré. Déterminer les isométries suivantes :

1. $S_D \circ S_C \circ S_B \circ S_A$.
2. $S_D \circ S_B \circ S_C \circ S_A$.

Exercice 7
R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

1. Déterminer $f = R \circ R$.
2. On pose $R^2 = R \circ R$. Déterminer $g = R^2 \circ R$.

Exercice 8
(D) et (D') sont deux droites sécantes en O tels que $\overline{(D, D')} = \frac{\pi}{8}[\pi]$. Déterminer :

1. $f = S_D \circ S_{D'}$
2. $g = S_{D'} \circ S_D$
3. $h = fog$

Exercice 9
Soit $ABCD$ un carré direct de centre O, I et J sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[DC]$. Déterminer :

1. $f = S_{BD} \circ S_{BC}$
2. $h = S_{AC} \circ S_{IJ}$
3. $g = S_{AD} \circ S_{BC}$
4. $j = S_{IJ} \circ S_{AD}$
5. $i = S_{IJ} \circ S_{BD}$

Exercice 10
$ABCD$ est un rectangle. Dans chacun des cas suivants, déterminer la droite $(\mathcal{D})$ telle que :

1. $t_{\overrightarrow{AB}} = S_{\mathcal{D}} \circ S_{AD}$
2. $t_{\overrightarrow{AB}} = S_{AD} \circ S_{\mathcal{D}}$
3. $t_{\overrightarrow{AB}} = S_{\mathcal{D}} \circ S_{BC}$
4. $t_{\overrightarrow{AB}} = S_{BC} \circ S_{\mathcal{D}}$

Exercice 11
ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O. Dans chacun des cas suivants déterminer la droite $(\mathcal{D})$ telle que :

1. $R(A, \frac{\pi}{3}) = S_{\mathcal{D}} \circ S_{AB}$.
2. $R(A, \frac{\pi}{3}) = S_{OA} \circ S_{\mathcal{D}}$.
3. $R(O, \frac{2\pi}{3}) = S_{OA} \circ S_{\mathcal{D}}$.
4. $R(O, \frac{2\pi}{3}) = S_{\mathcal{D}} \circ S_{OA}$.

Exercice 12
Dans le plan le plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$, soit les points $I(1,0)$ et $J(0,1)$. On note $R_1 = r(I, \frac{\pi}{2})$; $R_2 = r(O, \frac{\pi}{2})$ et $T = t_{\overrightarrow{IJ}}$.

1. Reconnaitre et caractériser la transformation ponctuelle $S = R_2 \circ T \circ R_1$.
2. Répondre à la même question en utilisant les expressions analytiques de R_1, R_2 et T.

Exercice 13
Soit ABC un triangle équilatéral de centre O.

1. Trouver toutes les isométries qui laissent globalement invariants le triangle ABC.
2. a) Tracer (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC.
   b) La droite (BO) recoupe (Γ) en D et la droite (AO) recoupe (Γ) en E. Caractériser les applications suivantes : $f_1 = S_{AC} \circ S_{AB} \circ S_{AE} \circ S_{AC}$, $f_2 = S_{DE} \circ S_{BA}$, $f_3 = S_{BA} \circ S_{BE} \circ S_{DA} \circ S_{DE}$, $f_4 = S_{BD} \circ S_{BA} \circ S_{AC} \circ S_{AE}$.

Exercice 14
Dans le plan orienté, on considère le carré $ABCD$ direct de centre O. Ω et I sont les milieux respectifs des segments AD et DC. On considère les applications suivantes : $f_1 = R(O, \frac{\pi}{2}) \circ T_{\overrightarrow{BC}}$, $f_2 = T_{\overrightarrow{BC}} \circ R(O, \frac{\pi}{2})$, $f_3 = R(A, \frac{\pi}{2}) \circ R(O, \frac{\pi}{2})$, $f_4 = R(D, \frac{\pi}{2}) \circ R(O, -\frac{\pi}{2})$, $f_5 = S_{AD} \circ R(A, \frac{\pi}{2}) \circ T_{\overrightarrow{OB}}$. Donner la nature et les éléments caractéristiques.

Exercice 15

ABC est un triangle équilatéral de sens direct, on désigne par (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre.
La médiatrice du segment $[BC]$ coupe (Γ) en A et en D, on note A' le point d'intersection des droites (BD) et (AC).

1. Faire une figure on prendra $AB = 6cm$.
2. Démontrer que A' est le symétrique de A par rapport à C.
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :
   a) $f_1 = S_{BD} \circ S_{DC}$.
   b) $f_2 = S_{CA} \circ S_{AB}$.
   c) $f_3 = S_{DC} \circ S_{CA}$.
4. On pose $g = S_{BD} \circ S_C \circ S_{AB}$.
   a) Déterminer $g(A)$.
   b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de g.
   c) En déduire la nature de la transformation $h = S_{BD} \circ S_C$.

Exercice 16

Dans le plan le plan orienté on considère un triangle équilatéral ABC direct inscrit dans un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O. les droites (AO) et (CO) recoupe le cercle $(\mathcal{C})$ en D et E respectivement.

1. Démontrer que l'application T définie par : $T = S_C \circ S_D \circ S_B \circ S_A$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{U} = 2\overrightarrow{OD}$.
2. Démontrer que les droites (AE) et (CD) sont parallèles.
3. Caractériser les applications f, g, h et k définies par :
   a) $f = S_{AC} \circ S_{CE}$.
   b) $g = S_{BD} \circ S_{DC} \circ S_{CA} \circ S_{AB}$.
   c) $h = S_{BD} \circ S_{DC} \circ S_{CA} \circ S_{AB}$.
   d) $k = r(B, \frac{\pi}{3}) \circ r(C, \frac{\pi}{3})$.
4. On note F l'image du point D par l'homothétie H de centre B et de rapport $\lambda = -\frac{1}{2}$, construire le point F.
5. On note I le milieu de $[BC]$ et J celui de $[AC]$.
   a) Par quelle isométrie les triangles OBI et OCJ se correspondent ?
   b) Par quelle isométrie les triangles OBI et OAJ se correspondent ?

Exercice 17

Dans le plan orienté, on considère un segment $[AD]$. Soit r la rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}[2\pi]$ qui transforme A en D.

1. Construire Ω le centre de la rotation r.
2. Soit B et C deux points du plan tels que $ABCD$ soit un carré direct de centre O. On désigne par I, J, K, L, E les milieux respectifs des segments $[DC]$, $[DA]$, $[AB]$, $[BC]$, $[\Omega D]$.
   a) Trouver toutes les isométries qui laissent globalement invariant le carré $ABCD$.
   b) Donner la nature puis caractériser les applications suivantes :
   $g_1 = r(A, \frac{\pi}{2}) \circ r(O, \frac{\pi}{2})$; $g_2 = r(D, \frac{\pi}{2}) \circ r(O, -\frac{\pi}{2})$.
   $g_3 = r(O, \frac{\pi}{2}) \circ t_{\overrightarrow{BC}}$; $g_4 = t_{\overrightarrow{BC}} \circ r(O, \frac{\pi}{2})$.
   $g_5 = S_{AD} \circ r(A, \frac{\pi}{2}) \circ t_{\overrightarrow{OB}}$; $g_6 = S_{BD} \circ t_{\overrightarrow{BA}}$.
   $g_7 = S_{AD} \circ r(O, \frac{\pi}{2})$; $g_8 = t_{\overrightarrow{OA}} \circ S_{BD}$.
   $g_9 = t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{OI}$; $g_{10} = r(O, \dfrac{\pi}{2}) \circ S_{AC}$.
3. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
   a) Soit f une fonction impaire continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$. Tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ sachant qu'elle admet comme asymptote la droite (AE) quand x tend vert $+\infty$.
   b) On note $h = r(O, \frac{\pi}{2})$. Tracer $(\mathcal{C'}_f)$ image de $(\mathcal{C}_f)$ par h.
   c) Écrire l'expression analytique de g_3 et g_7.

Exercice 18

Le plan $(\mathcal{P})$ est orienté. Soit A, B et C les points du plan $(\mathcal{P})$ tels que $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$, par D le symétrique de A par rapport à J, par E le symétrie de C par rapport à la droite (AB), par F le symétrie de O par rapport O' avec O le centre du cercle (Γ) circonscrit au triangle AEB et O' milieu du segment $[AE]$ et par G symétrique de A par rapport à O.

1. Faire une figure. On prendra $AB = 4cm$ et de préférence dans la direction horizontale.
2. Quelle est la nature du triangle AEB?
3. Montrer que les points A, B, D et C appartiennent à un même cercle (Γ') dont on tracera.
4. Montrer que les points F appartient à la droite (AD).
5. Montrer que les points A, E, G et B sont cocycliques.
6. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, R la rotation de centre A qui transforme I en K et S la symétrie orthogonale d'axe (BD).
   a) Déterminer les droites (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) du plan $(\mathcal{P})$ telles que : $T = S_{(\Delta_1)} \circ S_{(\Delta_2)}$ et $R = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_3)}$.
   b) Déterminer et caractériser l'application $f = T \circ R$.
7. On désigne par g l'application définie par : $g = T \circ R \circ S$.
   a) Montrer que g peut s'écrire : $g = S_{(JB)} \circ t_{\overrightarrow{BA}}$.
   b) En déduire que $g = S_{(\Delta)} \circ t_{\overrightarrow{BJ}}$, avec (Δ) une droite qui est perpendiculaire à la droite (AD) à déterminer.
   c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.
8. On rapporte le plan $(\mathcal{P})$ au repère orthonormé $(I, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IJ})$.
   a) Donner l'expression analytique de $t_{\overrightarrow{BJ}}$ et de $S_{(\Delta)}$.
   b) Donner l'expression analytique de g.

Exercice 19
$ABCD$ est un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. R_B et R_C sont les quarts de tour direct de centres respectifs B et C. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. On désigne par P, E, G et H les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AB]$, $[CD]$ et $[AD]$.

1. Faire une figure.
2. Compléter les égalités suivantes :
   a) $t_{\overrightarrow{BC}} = ... \circ S_{(BA)}$.
   b) $R_B = S_{(BA)} \circ ...$
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f = t \circ R_B$.
4. Compléter les égalités suivantes :
   a) $t \circ R_B = S_{(AC)} \circ ...$
   b) $R_C = ... \circ S_{(AC)}$.
5. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $g = R_C \circ t \circ R_B$.
6. On rapporte le plan au repère orthonormé $(P, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PO})$. soit h l'application telle que : $h = S_{(PG)} \circ T$ avec T la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.
   a) Déterminer les coordonnée des points A, B, C, D, P, E, G et H.
   b) Comment est le vecteur de T par rapport à l'axe (PG) ?
   c) Montrer que h est une symétrie axiale dont on précisera l'axe.
   d) Donner l'expression analytique et complexe de h.

Exercice 20
Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct inscrit sur un cercle $(\mathcal{C})$. On désigne par O le milieu du segment $[BC]$.
Soit I et J les projetés orthogonaux de O respectivement sur les segments $[AB]$ et $[AC]$. La droite (OI) coupe le cercle $(\mathcal{C})$ en deux points D et E de telle sorte que le triangle ADI soit direct. On désigne par K le milieu du segment $[AE]$.

1. Faire une figure. On placera de préférence le segment $[BC]$ dans la direction horizontale.
2. a) Montrer que $(\overline{OC}, \overline{OJ}) = (\overline{OI}, \overline{OB})[\pi]$.
   b) Quelle est la mesure de l'angle $(\overline{OJ}, \overline{OI})[\pi]$?
   c) En déduire que le quadrilatère $OJAI$ est inscriptible.
3. Montrer que $BI = CJ$.
4. En déduire qu'il existe une rotation r qui transforme I en J et B en C.
   Préciser son centre et la mesure de son angle.
5. Montrer que le triangle AIK est isocèle en K. En déduire que $(\overline{IK}, \overline{IA}) = (\overline{AB}, \overline{AE})[\pi]$.
6. Soit f l'application définie par $f = r_1 \circ S_{OA}$, où r_1 est la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ et S_{OA} est la symétrie orthogonale d'axe (OA).
   Reconnaître et caractériser f.
7. Reconnaître et caractériser l'application g définie par $g = f \circ t_{\overrightarrow{AC}}$, où $t_{\overrightarrow{AC}}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

8. On rapport le plan à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ avec $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OC}$.
   Donner l'expression analytique de g.

Exercice 21

Dans le plan orienté, on considère un triangle isocèle ABC tels que :
$AB = 5\,cm$ et l'angle $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Soit I le milieu du segment $[BC]$. On note $R_B = rot\left(B; \frac{\pi}{2}\right)$, $R_C = rot\left(C; \frac{\pi}{2}\right)$ et $T = t_{\overrightarrow{BC}}$.
On se propose de trouver par deux méthodes différentes la nature et les éléments caractéristiques de $S = R_C \circ T \circ R_B$.

1. ***Première méthode : utilisation des nombres complexes.***
   On rapporte le plan au repère orthonormé direct $(A\,; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
   a) Donner l'écriture complexe de R_C, R_B, T puis celle de S.
   b) Caractériser alors S.
2. ***Deuxième méthode : utilisation des propriétés de transformation.***
   a) Déterminer sans calcul la nature de S.
   b) Caractériser S.

Exercice 23

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B. On note R_A et R_B les rotations de centres respectifs A et B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$. On désigne par (Γ_1) le cercle de diamètre $[AB]$, de centre Ω_1. Pour tout point M de (Γ_1) distinct de A et B on note $R_A(M) = M_1$ et $R_B(M) = M_2$.

1. Placer les points M_1 et M_2. Déterminer et construire l'ensemble (Γ_2) décrit par M_2 quand M décrit (Γ_1).
2. On considère la transformation $T = R_B \circ R_A^{-1}$.
   a) Déterminer $T(M_1)$ puis construire le point $C = T(A)$.
   b) Caractériser alors T. En déduire la nature du quadrilatère M_1M_2CA.
3. Soient Ω_2 et I les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[M_1M_2]$.
   a) Exprimer $\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$. En déduire que les droites (M_1M_2) et $(\Omega_1\Omega_2)$ sont parallèles.
   b) Montrer que $t_{\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}}(M_2) = I$. En déduire l'ensemble Γ_3 décrit par I quand M décrit (Γ_1).

Exercice 24
Dans le plan orienté, on considère le triangle ABC rectangle en A tel que :
$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
Les points I, J et H sont respectivement milieux des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[JA]$.
Le point G est le centre de gravité du triangle ABJ.

1. Faire la figure que l'on complètera.
2. Préciser la nature de chacun des triangle ABJ et AJC, justifiez vos réponses.
3. Démontrer qu'il existe une rotation r qui transforme J en J et C en A.
4. Préciser la mesure de l'angle de r.
5. Démontrer qu'il existe une rotation r' qui transforme B en B et J en A.
6. Préciser la mesure de l'angle de r'.
7. La bissectrice intérieur de l'angle $(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{JA})$ rencontre la droite (AC) en K, soit E le symétrique du point J par rapport au point K, donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JK})$.
8. On considère l'application f définie par : $f = r \circ r'$.
   a) Calculer $f(B)$.
   b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'application f.
9. On muni le plan de repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AK})$.
   a) Déterminer les coordonnées des points J et C dans ce repère.
   b) Déterminer l'expression complexe de la rotation r.
   c) Déterminer l'expression analytique de la rotation r puis vérifier que $r(C) = A$.

Exercice 25
ABC est un triangle équilatéral de sens direct, on désigne par (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre.
La médiatrice du segment $[BC]$ coupe (Γ) en A et en D, on note A' le point d'intersection des droites (BD) et (AC).

1. Faire une figure on prendra $AB = 6cm$.
2. Démontrer que A' est le symétrique de A par rapport à C.
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :
   a) $f_1 = S_{BD} \circ S_{DC}$.
   b) $f_2 = S_{CA} \circ S_{AB}$.
   c) $f_3 = S_{DC} \circ S_{CA}$.
4. On pose $g = S_{BD} \circ S_C \circ S_{AB}$.
   a) Déterminer $g(A)$.
   b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de g.
   c) En déduire la nature de la transformation $h = S_{BD} \circ S_C$.

Exercice 26

$ABCD$ est un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. R_B et R_C sont les quarts de tour direct de centres respectifs B et C. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. On désigne par P, E, G et H les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AB]$, $[CD]$ et $[AD]$.

1. Faire une figure.
2. Compléter les égalités suivantes :
   a) $t_{\overrightarrow{BC}} = ... \circ S_{(BA)}$.
   b) $R_B = S_{(BA)} \circ ...$
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f = t \circ R_B$.
4. Compléter les égalités suivantes :
   a) $t \circ R_B = S_{(AC)} \circ ...$
   b) $R_C = ... \circ S_{(AC)}$.
5. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $g = R_C \circ t \circ R_B$.
6. On rapporte le plan au repère orthonormé $(P, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PO})$. soit h l'application telle que : $h = S_{(PG)} \circ T$ avec T la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.
   a) Déterminer les coordonnée des points A, B, C, D, P, E, G et H.
   b) Comment est le vecteur de T par rapport à l'axe (PG) ?
   c) Montrer que h est une symétrie axiale dont on précisera l'axe.
   d) Donner l'expression analytique et complexe de h.

Exercice 27

Le plan $(\mathcal{P})$ est orienté. Soit A, B et C les points du plan $(\mathcal{P})$ tels que $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$, par D le symétrique de A par rapport à J, par E le symétrie de C par rapport à la droite (AB), par F le symétrie de O par rapport O' avec O le centre du cercle (Γ) circonscrit au triangle AEB et O' milieu du segment $[AE]$ et par G symétrique de A par rapport à O.

1. Faire une figure. On prendra $AB = 4cm$ et de préférence dans la direction horizontale.
2. Quelle est la nature du triangle AEB?
3. Montrer que les points A, B, D et C appartiennent à un même cercle (Γ') dont on tracera.
4. Montrer que les points F appartient à la droite (AD).
5. Montrer que les points A, E, G et B sont cocycliques.
6. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, R la rotation de centre A qui transforme I en K et S la symétrie orthogonale d'axe (BD).
   a) Déterminer les droites (Δ_1), (Δ_2) et (Δ_3) du plan $(\mathcal{P})$ telles que : $T = S_{(\Delta_1)} \circ S_{(\Delta_2)}$ et $R = S_{(\Delta_2)} \circ S_{(\Delta_3)}$.
   b) Déterminer et caractériser l'application $f = T \circ R$.
7. On désigne par g l'application définie par : $g = T \circ R \circ S$.
   a) Montrer que g peut s'écrire : $g = S_{(JB)} \circ t_{\overrightarrow{BA}}$.
   b) En déduire que $g = S_{(\Delta)} \circ t_{\overrightarrow{BJ}}$, avec (Δ) une droite qui est perpendiculaire à la droite (AD) à déterminer.
   c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.
8. On rapporte le plan $(\mathcal{P})$ au repère orthonormé $(I, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IJ})$.
   a) Donner l'expression analytique de $t_{\overrightarrow{BJ}}$ et de $S_{(\Delta)}$.
   b) Donner l'expression analytique de g.

Exercice 28

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, parmi les isométries ci-dessous ; Donner la définition géométrique, la traduction complexe ainsi que l'expression analytique :

1. L'identité du plan notée : $f = IdP$.
2. La translation de vecteur non nul notée : $g = t_{\overrightarrow{U}}$.
3. La symétrie centrale de centre Ω notée : $h = S_\Omega$.
4. La symétrie axiale d'axe (Δ) notée : $f' = S_\Delta$.
5. La symétrie glissée d'axe (Δ) et de vecteur $\overrightarrow{U}$ non nul , notée : $g' = t_{\overrightarrow{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\overrightarrow{U}}$.
6. La rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\theta \neq 0[2\pi]$ notée : $k = r(\Omega, \theta)$.

Exercice 29
Soit $ABCD$ un carré. Déterminer les isométries suivantes :

1. $S_D \circ S_C \circ S_B \circ S_A$.
2. $S_D \circ S_B \circ S_C \circ S_A$.

Exercice 30
R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

1. Déterminer $f = R \circ R$.
2. On pose $R^2 = R \circ R$. Déterminer $g = R^2 \circ R$.

Exercice 31
(D) et (D') sont deux droites sécantes en O tels que $\overline{(D, D')} = \frac{\pi}{8}[\pi]$. Déterminer :

1. $f = S_D \circ S_{D'}$.
2. $g = S_{D'} \circ S_D$.
3. $h = fog$.

Exercice 32
Soit $ABCD$ un carré direct de centre O, I et J sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[DC]$. Déterminer :

1. $f = S_{BD} \circ S_{BC}$.
2. $g = S_{AD} \circ S_{BC}$.
3. $h = S_{AC} \circ S_{IJ}$.
4. $i = S_{IJ} \circ S_{BD}$.
5. $j = S_{IJ} \circ S_{AD}$.

Exercice 33
$ABCD$ est un rectangle. Dans chacun des cas suivants, Déterminer la droite $(\mathcal{D})$ telle que :

1. $t_{\overrightarrow{AB}} = S_{\mathcal{D}} \circ S_{AD}$.
2. $t_{\overrightarrow{AB}} = S_{AD} \circ S_{\mathcal{D}}$.
3. $t_{\overrightarrow{AB}} = S_{\mathcal{D}} \circ S_{BC}$.
4. $t_{\overrightarrow{AB}} = S_{BC} \circ S_{\mathcal{D}}$.

Exercice 34
ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O. Dans chacun des cas suivants déterminer la droite $(\mathcal{D})$ telle que :

1. $R(A, \frac{\pi}{3}) = S_{\mathcal{D}} \circ S_{AB}$.
2. $R(O, \frac{2\pi}{3}) = S_{OA} \circ S_{\mathcal{D}}$.
3. $R(A, \frac{\pi}{3}) = S_{OA} \circ S_{\mathcal{D}}$.
4. $R(O, \frac{2\pi}{3}) = S_{\mathcal{D}} \circ S_{OA}$.

Exercice 35
Dans le plan le plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$, soit les points $I(1,0)$ et $J(0,1)$. On note $R_1 = r(I, \frac{\pi}{2})$; $R_2 = r(O, \frac{\pi}{2})$ et $T = t_{\overrightarrow{IJ}}$.

1. Reconnaitre et caractériser la transformation ponctuelle $S = R_2 \circ T \circ R_1$.
2. Répondre à la même question en utilisant les expressions analytiques de R_1, R_2 et T.

Exercice 36
Dans le plan le plan orienté on considère un triangle équilatéral ABC direct inscrit dans un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O. les droites (AO) et (CO) recoupe le cercle $(\mathcal{C})$ en D et E respectivement.

1. Démontrer que l'application T définie par : $T = S_C \circ S_D \circ S_B \circ S_A$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{U} = 2\overrightarrow{OD}$.
2. Démontrer que les droites (AE) et (CD) sont parallèles.
3. Caractériser les applications f, g, h et k définies par :
   a) $f = S_{AC} \circ S_{CE}$.
   b) $g = S_{BD} \circ S_{DC} \circ S_{CA} \circ S_{AB}$.
   c) $h = S_{BD} \circ S_{DC} \circ S_{CA} \circ S_{AB}$.
   d) $k = r(B, \frac{\pi}{3}) \circ r(C, \frac{\pi}{3})$.
4. On note F l'image du point D par l'homothétie H de centre B et de rapport $\lambda = -\frac{1}{2}$, construire le point F.
5. On note I le milieu de $[BC]$ et J celui de $[AC]$.
   a) Par quelle isométrie les triangles OBI et OCJ se correspondent ?
   b) Par quelle isométrie les triangles OBI et OAJ se correspondent ?

Exercice 37
Soit ABC un triangle équilatéral de centre O.

1. Trouver toutes les isométries qui laissent globalement invariants le triangle ABC.
2. a) Tracer (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC.
   b) La droite (BO) recoupe (Γ) en D et la droite (AO) recoupe (Γ) en E.
   Caractériser les applications suivantes : $f_1 = S_{AC} \circ S_{AB} \circ S_{AE} \circ S_{AC}$,
   $f_2 = S_{DE} \circ S_{BA}$, $f_3 = S_{BA} \circ S_{BE} \circ S_{DA} \circ S_{DE}$, $f_4 = S_{BD} \circ S_{BA} \circ S_{AC} \circ S_{AE}$.

Exercice 38
Dans le plan orienté, on considère le carré $ABCD$ direct de centre O. Ω et I sont les milieux respectifs des segments AD et DC. On considère les applications suivantes : $f_1 = R(O, \frac{\pi}{2}) \circ T_{\overrightarrow{BC}}$, $f_2 = T_{\overrightarrow{BC}} \circ R(O, \frac{\pi}{2})$, $f_3 = R(A, \frac{\pi}{2}) \circ R(O, \frac{\pi}{2})$, $f_4 = R(D, \frac{\pi}{2}) \circ R(O, -\frac{\pi}{2})$, $f_5 = S_{AD} \circ R(A, \frac{\pi}{2}) \circ T_{\overrightarrow{OB}}$. Donner la nature et les éléments caractéristiques.

Exercice 39

Dans le plan orienté on considère un segment $[AD] = 4cm$. Soit R la rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{6}[2\pi]$ qui transforme A en D.

1. Construire Ω le centre de la rotation R.
2. Soit B et C deux points du plan tel que $ABCD$ soit un carré direct de centre O. On désigne par I, J, K, L les milieux respectifs $[DC]$, $[AD]$, $[AB]$, $[BC]$. Caractériser les applications suivantes : $f_1 = R(\Omega, \frac{\pi}{6}) \circ R(O, \frac{\pi}{2})$, $f_2 = R(O, \frac{\pi}{2}) \circ T_{\overrightarrow{DA}}$, $f_3 = T_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{OI}$, $f_4 = T_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{BD}$.
3. Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, soit (Γ_1) la courbe de la fonction g définie par : $g(x) = e^x$.
   a) Tracer (Γ_1).
   b) Tracer (Γ_2) image de (Γ_1) par la $R(O, \frac{\pi}{2})$.
   c) Trouver l'équation cartésienne de (Γ_2).
   d) Tracer (Γ_3), le symétrique de (Γ_2) par rapport à l'axe des ordonnées puis trouver son équation cartésienne.
4. Soit $h = S_{OJ} \circ R(O, \frac{\pi}{2})$.
   a) Trouver $h(\Gamma_1)$ en déduire sans calcul la caractéristique de g. Confirme les résultats par le calcul.
   b) Écrire l'expression analytique de (h).
   c) Calculer l'aire du domaine plan limité par (Γ_1) les droites d'équations $y = 2$, $x = 0$ et $x = 1$.

3.3 Application non Isométriques

3.4 Application affines et affinités

Exercice 1
le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(2; 0); B(1; 1); C(-2; -1); A'(3; 10); B'(4; 6); C'(-3; -1)$. soit f l'application affine du plan telle que : $f(A) = A'$; $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

1. Démontrer que f est bijective.
2. Déterminer l'expression analytique de f.

Exercice 2
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
f est l'application de $(\mathcal{P})$ dans $(\mathcal{P})$ qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tels que :

$$\begin{cases} x' = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y - 2 \\ y' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - 4 \end{cases}$$

Montrer que f est une application affine.

Exercice 3
Soit f l'application du plan $(\mathcal{P})$ dans $(\mathcal{P})$ qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tels que :

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y - 5 \\ y' = 3x - 7y + 11 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une application affine.
2. Montrer que l'application f est bijective.
3. Déterminer l'expression analytique de f^{-1}.

Exercice 4
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. soit f l'application du plan $(\mathcal{P})$ dans $(\mathcal{P})$ qui à tout point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ tel que : $(5+4i)z+3\overline{z}+2+4i$.
Montrer que f est une application affine.

Exercice 5
Le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. f est l'application de $(\mathcal{P})$ dans $(\mathcal{P})$ qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tels que :

$$\begin{cases} x' = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y - 2 \\ y' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - 4 \end{cases}$$

1. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe que l'on déterminera.
2. Déterminer fof.
3. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
4. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 6
Le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. f est l'application de $(\mathcal{P})$ dans $(\mathcal{P})$ qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tels que :

$$\begin{cases} x' = \frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + \frac{24}{13} \\ y' = -\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y + \frac{36}{13} \end{cases}$$

1. Déterminer fof.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
3. Soit M un point du plan et M' son image par f.
4. Démontrer que le point I milieu de $[MM']$ appartient à $invf$.
5. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe orthogonale à celle de $invf$.
6. En déduire la nature de f.

Exercice 7
le plan $(\mathcal{P})$ est muni repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit $A(0; 3)$ un point du plan $(\mathcal{P})$.

1. Donner l'expression analytique d'une affinité f d'axe $(D) : x - y + 3 = 0$, de direction $(L) : 2y - x = 0$ et de rapport $\frac{2}{3}$.
2. Quelle est l'expression analytique de f dans le repère $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont respectivement les vecteurs directeurs respectifs de l'axe et de la direction.

Exercice 8
Déterminer l'expression analytique de l'affinité f, de la base $(\Delta) : x + y - 1 = 0$ de direction $(D) : 2x - 3y + 1 = 0$ et de rapport $k = 2$.

Exercice 9

1. Déterminer l'expression analytique de l'affinité d'axe $(O, \overrightarrow{i})$ de direction $(O, \overrightarrow{j})$ et de rapport $k = -2$.
2. Déterminer l'expression analytique de l'affinité d'axe $(O, \overrightarrow{j})$ de direction $(O, \overrightarrow{i})$ et de rapport $k = -2$.

Exercice 11
Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. f est l'application de $(\mathcal{P})$ dans $(\mathcal{P})$ qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tels que : $\begin{cases} x' = -x - 2y + 2 \\ y' = -x + 1 \end{cases}$

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe que l'on précisera.
2. Déterminer l'ensemble (Δ) des points invariants par f.
3. soit H le projeté de $M(x, y)$ sur l'ensemble des points invariants suivant la droite (MM') Déterminer le réel $k = \frac{\overline{HM'}}{\overline{HM}}$.
4. En déduire la nature de f.

Exercice 12

Donner les expressions analytiques de :

1. L'affinité orthogonale d'axe la droite de repère $(O, \overrightarrow{i})$ et de rapport k.
2. L'affinité orthogonale d'axe la droite de repère $(O, \overrightarrow{j})$ et de rapport k.
3. L'affinité orthogonale d'axe (D) : $y = 2$ et de rapport -2.

Exercice 13

le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
$(\mathcal{C})$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$. $\mathcal{A}(D; k)$ l'affinité orthogonale d'axe (D) la droite d'équation $x = 2$ et de rapport k.

3.5 Similitudes Planes

Exercice 1

Le plan est orienté. On considère le triangle direct ABC isocèle en A tels que : $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$. Soit I le point tel que le triangle CAI soit rectangle et isocèle en C tels que $(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CI}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$. On prendra $AB = 5cm$. Les points H et J sont les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AI]$.

1. Faire avec soin une figure que l'on complétera.
2. On appelle R_A la rotation de centre A et qui transforme B en C, R_C est la rotation de centre C d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$; on pose $f = R_C \circ R_A$.
   a) Calculer $f(A)$ et $f(B)$ puis démontrer que f est une rotation dont déterminera une mesure de l'angle.
   b) Construire le centre Ω de la rotation f.
3. On considère la similitude plane directe S de centre Ω et qui transforme A en B.
   a) Déterminer une mesure de l'angle de la similitude S.
   b Soit $S(C) = C'$ Démontrer que les points A, Ω et C' sont alignés.

Exercice 2

Le plan est orienté. On considère un triangle équilatéral ABC de sens direct, de centre E tel que : $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Soit S_1 la similitude directe telle que : $S_1(A) = A$ et $S_1(B) = E$ et S_2 la similitude directe fixant E et qui transforme B en D, où D est le symétrique de A par rapport à E.

1. Caractériser S_1 et S_2.
2. Soit I le milieu de $[AB]$ et F un point du plan tel que $AF = AB$ et $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AF}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
   On considère le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AF})$
   a) Déterminer les coordonnées de chacun des points A, B, C, D, E et F dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AF})$.
   b) Donner l'écriture complexe de S_1 et S_2.
3. Soit l'application $f = S_2 \circ S_1$.
   Déterminer la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 3

Le plan est orienté. On considère un triangle ABC rectangle en A tel que :
$AC = 2AB$ et mes$(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
$\mathcal{C}_{(B)}$ et $\mathcal{C}_{(C)}$ les cercles de centres respectifs B et C et de rayons respectifs BA et CA. On appelle E le second point d'intersection de ces deux cercles.

1. Soit S une similitude directe transformant $\mathcal{C}_{(B)}$ en $\mathcal{C}_{(C)}$.
   a) Déterminer la valeur du rapport de S.
   b) On désigne par I le centre de S. Donner la valeur du rapport $\frac{IC}{IB}$
2. Soit S_A la similitude directe de centre A transformant B en C.
   F est le point de $\mathcal{C}_{(C)}$ diamétralement opposé à E.
   Démontrer que F est l'image de E par S_A.

Exercice 4

Soit $(O\,;\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{v})$ un repère orthonormal. Soit S la similitude plane directe de centre O, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$. On considère $n \in \mathbb{N}$ et l'ensemble des points M_n définis par : $M_{n+1} = S(M_n)$ et M_0 est le point d'affixe 1. On note Z_n l'affixe de M_n.

1. a) Donner l'expression complexe de S.
   b) Démontrer que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique.
   c) En déduire Z_n en fonction de n.
   d) Calculer Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4.
2. Calculer OM_n en fonction de n.
3. a) Démontrer que : $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}} = \frac{i}{\sqrt{3}}$.
   b) En déduire que (M_nM_{n+1}) est perpendiculaire à (OM_{n+1}) et que $M_nM_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.
4. Soit $L_n = M_oM_1 + M_1M_2 + ... + M_nM_{n+1}$. Exprimer L_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n$.

Exercice 5

Soit ABC un triangle équilatérale direct H le milieu du segment $[BC]$.

1. R_B et R_C sont les rotations de même angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$ et de centres respectifs B et C. Déterminer l'application $g = R_B \circ R_C$.
2. On pose $h = hom(A, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $R_A = rot(A, -\frac{\pi}{6})$. Déterminer $f = h \circ R_A \circ g$.
3. On considère la suite des points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} M_0 = B \\ \forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = f(M_n) \end{cases}$$

   a) Représenter $M_o, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$ et M_6.
   b) Exprimer AM_n en fonction de n et AM_o puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} AM_n$
   c) On pose : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} M_kM_{k+1}^2$.
   Exprimer S_n en fonction de AM_o^2 et AM_n^2 puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$
4. (Δ) est la bissectrice intérieure du secteur angulaire seyant $[\widehat{CAH}]$.
   a) Déterminer $i = S_\Delta \circ f$.
   b) Déterminer $j^2 = i \circ i$ puis j^{2n} $(n \in \mathbb{N})$.

Exercice 6

Le plan $(\mathcal{P})$ est orienté dans le sens direct.

OAB est un triangle rectangle et isocèle tel que : $OA = OB$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par I le milieu du segment $[AB]$ et par C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et B, H et K sont les symétriques des points C et D par rapport à I.

1. Faire une figure.
2. Soit f la similitude plane directe qui transforme A en D et O en C.
   a) Déterminer le rapport et la mesure de l'angle de f.
   Soit J le projeté orthogonal de O sur la droite (AC).
   b) Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par f.
   c) En déduire que J est le centre de f.
3. Soit g la similitude plane indirecte de I qui transforme A en D et O en C.
   a) Déterminer le rapport et l'axe de g.
   b) Soit l'application $h = g \circ f^{-1}$, calculer $h(C)$ et $h(D)$.
   c) Caractériser l'application h.

Exercice 7

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B. On prendra la longueur du segment $[AB]$ égale à $6\,cm$.

1. Étudier et construire l'ensemble E_1 des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB} = 3$.
2. Étudier et construire l'ensemble E_2 des points M du plan tel que :
   $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
3. Soit C l'image de B par la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$ et D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. On note S la similitude directe transformant A en B et C en D.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de S.
   b) On note I le centre de la similitude S. Exprimer IB en fonction de IA et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$. En déduire la position de I puis le placer sur la figure.
   c) Démontrer que I appartient au cercle circonscrit au triangle ACD.

Exercice 8

Le plan P est orienté et rapporté à un repère orthonormé $(O\,; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On considère l'application $f : P \longmapsto P$ qui à tout point M associe M'
tel que : $z' = i\overline{z} + 1 + i$.

1. Montrer que f est un antidéplacement.
2. Montrer que $f \circ f$ est une translation (on notera $\overrightarrow{u}$ le vecteur de cette translation).
3. Soit $T = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}$, on pose $S = T^{-1} \circ f$.
   Montrer que S est une symétrie orthogonale que l'on précisera.

Exercice 9

On considère le triangle équilatéral ABC. A', B' et C' sont des points des hauteurs issus respectivement des sommets A, B et C.

1. Faire une figure.
2. Caractériser la similitude plane directe S de centre A et qui transforme B en B'.
3. Caractériser la similitude plane directe S' de centre A et qui transforme C en C'.
4. Reconnaître et caractériser l'application $f = S \circ S'$.
5. Soit G le centre de gravité du triangle ABC, caractériser la similitude plane directe g de centre B et qui transforme A en G.

Exercice 10

Dans le plan $(\mathcal{P})$ orienté, on considère le carré $ABCD$ de sens direct de centre O tels que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. I, J et L désignent les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[CD]$ et $[AD]$. Soit K le symétrique de I par rapport à A.

Partie I

1. Faire une figure.
2. a) Démontrer qu'il existe une homothétie qui transforme A en I et L en J.
   b) Déterminer son centre et son rapport.
3. On considère la similitude plane S qui transforme B en J et O en K. Les droites (KL) et (BD) se coupent au point P.
   a) Démontrer que les points P, O, I et K d'une part P, J, B et I d'autre part sont cocycliques.
   b) Déterminer les éléments caractéristiques de S.
4. On considère la transformation ponctuelle g définie par : $g = h^{-1} \circ S_{AB}$ où h^{-1} désigne l'homothétie de centre K de rapport $\frac{1}{2}$; S_{AB} désigne la réflexion d'axe la droite (AB).
   a) Déterminer la nature de g.
   b) Déterminer ses éléments caractéristiques.
5. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application $T = g \circ S$.

Partie II

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé de sens direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OJ}$. On considère la fonction numérique u de la variable réelle x définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $u(x) = x^2 + 2 - 2lnx$.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction u.
2. Démontrer que $\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$, $u(x) > 0$.
3. Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = x + \dfrac{2lnx}{x}$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
   a) Démontrer que $\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$, la dérivée $f'(x)$ est telle que : $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$.
   b) Étudier les variations de f.

c) Démontrer que les droites (BD) et (OL) sont les asymptotes de la courbe $(\mathcal{C})$.

d) Démontrer que la courbe $(\mathcal{C})$ coupe la droite (IJ) en un point de l'intervalle $]O, Q[$ où Q est le milieu du segment $[OJ]$.

4. a) Construire l'arc $(\mathcal{C}_1)$ de la courbe $(\mathcal{C})$ logé dans le triangle BCD.

   b) Construire l'image $(\mathcal{C'}_1)$ de l'arc $(\mathcal{C}_1)$ par la symétrie d'axe (IJ).

Exercice 11

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$. On désigne par (E) l'équation : $(E) : z^4 = -7 - 24i$. On rappelle que les images des racines n^{iemes} d'un nombre complexe sont les sommets d'un polygone régulier.

1. Démontrer que $z_0 = 2 - i$ est solution de (E).
2. On désigne par A, B, C, D les images des solutions de (E) où A a pour affixe z_0, B a ses coordonnées positives, D a ses coordonnées négatives. On ne demande pas de détermines les coordonnées B, C, D.
   a) Démontrer que $ABCD$ est un carré.
   b) Placer les points A, B, C, D dans le plan $(\mathcal{P})$.
3. Soit f la similitude plane directe qui laisse invariant le point B et qui transforme D en A. Déterminer le rapport et la mesure θ de l'angle de f.
4. Montrer que pour tout point M de $(\mathcal{P})$ d'image M' par f, le triangle BMM' est rectangle isocèle en M'.
5. On désigne par I, J, K, L les milieux respectifs des segments $[CD]$, $[DA]$, $[AB]$ et $[BC]$. Déterminer le rapport et la mesure de l'angle de la similitude plane directe g qui laisse invariant le point C et qui transforme L en D.
6. Soit $h = f \circ g$.
   a) Donner la nature de h.
   b) Déterminer le rapport et la mesure de l'angle de h.
7. Soit Ω le centre de h.
   a) Démontrer que $h(C) = O$ et $h(L) = A$.
   b) En déduire une construction géométrique de Ω.

Exercice 12

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ unité graphique $1cm$.

1. Construire le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $A(0; -8)$ tangent en O à l'axe $(O; \overrightarrow{i})$.
2. Construire le point M image de O par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}[2\pi]$.
3. Construire la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ en M.
4. Construire le projeté orthogonal H de M sur l'axe $(O; \overrightarrow{i})$.
5. On désigne par N' l'intersection des droites (T) et l'axe $(O; \overrightarrow{i})$. Démontrer les points O, N, M, A appartiennent à un cercle $(\mathcal{C}_1)$ à construire.
6. Soit S_1 la similitude plane directe de centre O qui transforme $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}_1)$. Déterminer son rapport k_1 et son angle θ_1.
7. Soit S_2 la similitude plane directe de centre N qui transforme M en H.

a) Déterminer son rapport k_2 et son angle θ_2.

b) Construire les images des points A et O par $S_2 \circ S_1$.

c) En déduire la construction du centre Ω de $S_2 \circ S_1$.

Exercice 13

Le plan est orienté. Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A. On nomme O le milieu de $[BC]$, O' le milieu de $[AC]$ et $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC.

1. Soit $f = t_{\overrightarrow{AC}} \circ r(A, \frac{\pi}{2})$. Construire le centre D de f après l'avoir déterminer.
2. Démontrer que les points O, C, D et A sont cocycliques. On note (Γ) leur cercle.
3. Construire les cercles $(\mathcal{C})$ et (Γ) après avoir préciser leurs centres respectifs.
4. Soit S la similitude plane directe de centre A qui associe le cercle $(\mathcal{C})$ en (Γ).
   a) Trouver les autres caractéristiques de S.
   b) Soit M' un point de (Γ) et M un point de $(\mathcal{C})$ tel que $S(M) = M'$.
   Prouver que C, M' et M sont alignés.
   c) En déduire l'antécédent E de D par S et le placer.
5. Soit la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des points du plan telle que :

$$\begin{cases} M_0 = D \\ M_{n+1} = S(M_n) \end{cases}$$

   a) Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5.
   b) On note (S_n) la somme telle que : $S_n = M_0M_1^2 + M_1M_2^2 + M_2M_3^2 + ... + M_nM_{n+1}^2$.
   b') Calculer S_n en fonction de AD^2 et AM_n^2.
   b") La suite (S_n) est-elle convergente ?

Exercice 14

Dans le plan orienté $(\mathcal{P})$, on donne un segment $[OB]$. C est l'image de B par le quart de tour direct de centre O. D est le symétrique de O par rapport à C.

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude plane directe S qui transforme D en C et C en B.
2. Soit A le centre de S.
   a) Démontrer que le triangle ACB est rectangle isocèle de sens direct.
   b) Construire A.
3. Soit $S^4 = S \circ S \circ S \circ S$.
   a) Placer $E = S^4(D)$.
   b) Caractériser S^4.
4. On rapporte le plan au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$.
   a) Écrire l'expression analytique de S.
   b) Écrire l'expression complexe de S.
   c) On note (Γ) la courbe représentative de $f(x) = \sqrt{x+1}$ avec $x \in [-1, 1]$.
   Tracer (Γ), puis (Γ') son image par S.

d) Calculer l'aire du domaine plan limité par les droites $(O'B')$, $(O'B)$, (AB'), (Γ') avec $O' = S(O)$, $B' = S(B)$.

Exercice 15

On considère un carré $ABCD$ tel que la mesure de l'angle formé par $(O, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On note par S la similitude plane de centre B et qui transforme D en A.

1. Caractériser S.
2. Démontrer que le triangle BMM' est rectangle isocèle en M' si $M' = S(M)$.
3. On définit les ponts (M_n) de la manière suivante :

$$\begin{cases} M_0 = D \\ M_n = S(M_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

   a) Placer les points M_0, M_1, M_2, M_3,..., M_9 dans la figure.
   b) Calculer BM_n en fonction de BD et de n en utilisant deux méthodes.
   c) On pose : $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + M_2M_3 + ... + M_{n-1}M_n$. Démontrer que $S_n = (\sqrt{2}+1)[1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^n]BD$.
   d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
4. On pose $T_n = M_0M_1^2 + M_1M_2^2 + M_2M_3^2 + ... + M_{n-1}M_n^2$.
   a) Démontrer que $T_n = BD^2 - BM_n^2$.
   b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

Exercice 16

On considère les applications

$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$

$M(z) \longmapsto M'(z')$ / $z' = e^{i\theta}\overline{z}$ avec $\theta \neq 0[2\pi]$

$g : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$

$M(z) \longmapsto M'(z')$ / $z' = kz$ $k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

$S : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$

$M(z) \longmapsto M'(z')$ / $S = f \circ g$.

1. Déterminer l'expression analytique de f.
2. Trouver l'ensemble des points invariants par f.
3. Caractériser f.
4. Sachant que $M' = S(M)$, trouver l'expression complexe de S.
5. En déduire l'expression analytique de S.

Exercice 17

Soit $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ qui à tout points $M(x, y)$ associe $M'(x', y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = x - y + 2 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une similitude plane.
2. Montrer que f est une similitude plane indirecte dont on précisera les éléments caractéristiques.
3. Trouver sa deuxième droite globalement invariante.
4. On considère le cercle (Γ) d'équation $x^2 + y^2 = 1$.
   a) Trouver l'équation de (Γ') image de (Γ) par f.
   b) Caractériser (Γ').
   (a) Tracer (Γ) et (Γ') dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$.

Exercice 18

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC d'orthocentre H.

1. Soit $S = sim(O, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{3})$.
   a) Construire $B' = S(B)$ et $C' = S(C)$.
   b) Montrer que la droite (AB) est parallèle à la droite $(C'B')$.
2. Trouver le rapport K et l'axe (Δ) de la similitude plane indirecte S de centre A tel que $S(B) = B'$.
3. Placer $D = S(C)$.
4. Donner la nature et les caractéristiques de $f = S \circ S$.
5. On pose $g = sim(A, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\pi}{6})$.
   a) Montrer que pour tout point M distinct de A, le triangle AMM' est rectangle en M avec $M' = g(M)$.
   b) Montrer que les points A, B, C et $O = g(B)$ sont cocycliques. On notera $(\mathcal{C})$ le cercle passant par ces points.
   c) Tracer $(\mathcal{C}')$ image de $(\mathcal{C})$ par S.
6. On note A' le milieu de $[BC]$. Le plan est rapporté au repère orthonormé $(A', \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ avec $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{A'C}$. Écrire l'expression analytique de S.

Exercice 19

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; unité graphique : $2cm$. On considère l'application f du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = -(\sqrt{3} + i)z - 1 + i(1 + \sqrt{3})$.

1. Montrer que f, est une similitude direct de centre Ω d'affixe i ; puis déterminer son rapport et son angle.
2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$, calculer ΩM_0 et donner une mesure en radians de l' angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\Omega M_0})$.
3. On considère la suite de point (M_n) $n \geq 0$ par $M_{n+1} = f(M_n)$. On notera z_n l'affixe du point M_n.
   a) Placer les points Ω, M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 sur une figure.
   b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, l'égalité :
   $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$.

3.6 Les Courbes Paramétrées

Exercice 1

Soit la fonction paramétrée F définie par :

$$\begin{cases} f(t) = 3t^2 - 2 \\ g(t) = 3t - t^3 \end{cases} \quad t \in [-2; 2]$$

1. Étudier les variations de la fonction F.
2. Construire la courbe (C) de la fonction F.

Exercice 2

Dans le plan rapporté a un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'unité graphique 3cm, on considère la courbe (C) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{t^2+1} \\ y(t) = \ln|t| \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^*$$

1. a) Par quelle isométrie le point $M(-t)$ se déduit-il du point $M(t)$?
   b) Par quelle isométrie le point $M(\frac{1}{t})$ se déduit-il du point $M(t)$?
   c) En déduire que l'intervalle d'étude peut être réduit à]0,1].
2. Tracer (C).

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Unité graphique 2cm. On considère la fonction vectorielle f des fonctions coordonnées f_1 et f_2 définies par :

$$\begin{cases} f_1(t) = \cos t \\ f_2(t) = \sin 2t + 2\sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Étudier les variations de f_1 et f_2
2. Montrer que la fonction f peut être étudié sur un intervalle $I = [0; \pi]$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur I.
4. Construire la courbe (C) représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Exercice 4 (Courbe de LISSAJOUS)
On considère la courbe paramétrée (C) de la fonction paramétrique F :

$$\begin{cases} x(t) = \cos 3t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Donner l'ensemble de définition de cette fonction.
2. Vérifier que 2π est période de x et y.
3. a) Étudier la parité de x et y puis conclure.
   b) Comparer $M(\pi - t)$ et $M(t)$ d'une part puis, $M(\pi + t)$ et $M(t)$ de l'autre puis conclure.
4. Étudier les variations de x et y sur un intervalle d'étude précis.
5. Tracer la courbe de cette fonction.

Exercice 5
Dans le plan rapporté a un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (Γ) est l'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées $(x(t); y(t))$ telle que :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2}{cost} \\ y(t) = 3\tan t \end{cases} \quad t \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$$

1. Comment $M(-t)$ se déduit de $M(t)$?
   En déduire que M admet un axe de symétrie.
2. Étudier les variations des fonctions x et y sur l'intervalle
3. Démontrer que (M) est contenu dans l'hyperbole (H) d'équation $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
   Préciser les asymptotes à (H), on les notera (Δ) et (Δ'), les placer sur la figure.
4. Construire (Γ).

Exercice 6

Soit la fonction F définie par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t - \cos t + 1 \\ y(t) = (1 - \cos t)\sin t \end{cases}$$

1. Étudier les variations de F.
2. Tracer la courbe (C) de F.

Exercice 7
Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$, On considère les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} f_1(t) = 4\cos(t) \\ f_2(t) = 2\sin(t) \quad \forall \quad t \in [0, \pi] \end{cases}$$

1. Préciser l'ensemble de définition.
2. Étudier les variations.
3. Préciser toutes les tangentes en chaque point critique.
4. Tracer les courbes.

Exercice 8
Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère la courbe $(\mathcal{C})$ dont la fonction vectorielle associée f est définie par :
$f(t) = (t\ln t)\overrightarrow{i} + (\frac{\ln t}{t})\overrightarrow{j}$, $t \in [0, +\infty[$.

1. Par quelle transformation ponctuelle le point $M(\frac{1}{t})$ se déduit-il du point $M(t)$?
2. Expliquer pourquoi l'étude de f se fait sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
3. Tracer $(\mathcal{C})$.

Exercice 9
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ unité graphique : $2cm$, on considère la fonction vectorielle f de la fonctions coordonnées f_1 et f_2 définies par :

$$\begin{cases} f_1(t) = \cos(t) \\ f_2(t) = \sin(2t) + 2\sin(t) \end{cases}$$

où t est un nombre réel.

1. Étudier les variations de f_1 et f_2.
2. Démontrer que la fonction f peut être étudier sur l'intervalle $I = [0, \pi]$.
3. Dresser le tableau récapitulatif des variations de f sur I.
4. Construire la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Exercice 10
Soit (Γ) la courbe dont un système d'équation paramétriques, dans le repère orthonormal direct est :

$$\begin{cases} x(t) = 3(sint + cost) \\ y(t) = 4sint \end{cases}$$

1. Montrer que l'ensemble d'étude de la courbe (Γ) peut se réduire à l'intervalle $I = [0, \pi]$. On examinera la périodicité des fonctions x et y et on donnera la transformation T qui transforme le point $M(t)$ en $M(t + \pi)$ pour tout réel t.
2. Étudier les variations des fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$.
   On pourrait écrire $x(t)$ sous la forme : $x(t) = a\sin(\alpha + t)$.
3. Construire l'arc de (Γ) pour $t \in I = [0, \pi]$.
4. Compléter le tracé de (Γ) grâce à la transformation T.

3.7 Les Coniques

Exercice 1

Déterminer les éléments caractéristiques et construire les coniques dont une équation dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est la suivante :

1. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$
2. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1.$
3. $25x^2 + 9y^2 = 225.$
4. $4x^2 + y^2 = 1.$
5. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$
6. $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$
7. $x^2 - 9y^2 - 2x + 36y - 44 = 0.$
8. $2x^2 + 3y^2 - 12x + 9y + 24 = 0.$

Exercice 2

On considère un triangle quelconque ABC.
Tracer la parabole de foyer A et de directrice (BC).

Exercice 3

Dans le plan orienté et muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{e_2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j}$.

1. Démontrer que $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est un repère orthonormé du plan. Une conique (Γ) dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ a pour équation cartésienne $13x^2 + 7y^2 + 6\sqrt{3}xy = 16$.
2. Écrire une équation cartésienne réduite de cette conique dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
3. En déduire sa nature et son excentricité.

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ on donne les points $F(-2; 2)$ et $F'(4; 2)$.

1. Déterminer une équation de l'ensemble (E) des points M tels que : $MF + MF' = 10$.
2. Déterminer une équation de l'ensemble (H) des points M tels que : $|MF - MF'| = 4$.

3.8 Coniques et Similitudes

Exercice 5

Dans le plan orienté, on considère le carré direct $ABCD$ centré en O. les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des cotés $[AB]$, $[BC]$ $[CD]$, $[AD]$.

1. Faire une figure que l'on complétera.
2. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant la relation : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MD}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$.
3. Soit R la rotation de centre Ω, d'angle $\frac{\pi}{4}[2\pi]$ qui transforme le point A en D.
   a) Prouver que le point Ω appartient à l'ensemble (E).
   b) Construire le point Ω.
4. On considère les rotations R et R' de centres respectifs Ω et$A$, de mesures d'angles respectives $\frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\frac{3\pi}{4}[2\pi]$.
   a) Déterminer les droites (D_1) et (D_2) telles que l'on ait : $R = S_{D_1} \circ S_{\Omega A}$ et $R' = S_{\Omega A} \circ S_{D_2}$.
   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application f définie par : $f = R \circ R'$.
5. On rappelle que les projetés orthogonaux du foyer d'une parabole sur les tangentes à cette parabole appartiennent à la perpendiculaire à l'axe focal de la parabole en son sommet O. Soit (P) la parabole de sommet J, d'axe focal la droite (JB) dont une tangente est la droite (OB).
   a) Montrer que le point C est le foyer de la parabole (P).
   b) Montrer que la droite (AB) est la directrice de la parabole (P).
   c) Montrer que le point D appartient à la parabole (P).
   d) Construire le point N de la parabole (P), situé sur la droite (DC) puis préciser la tangente à la parabole (P) en N.
   e) Construire la parabole (P).
6. Construire l'image (P') de la parabole (P) par la similitude plane indirecte S de centre B, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'axe la droite (BD).

Exercice 6
Soit ABC un triangle tel que $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On note I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$. On désigne par R la rotation de centre A qui transforme B en C et par T la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$.

1. Déterminer les droites (D_1), (D_2) et (D_3) telles que
   $R = S_{(D_1)} \circ S_{(D_2)}$ et $T = S_{(D_2)} \circ S_{(D_3)}$.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f = R \circ T \circ S_{(D_2)}$. On notera E le milieu de $[BJ]$.
3. Soit D le symétrique de A par rapport à J. On désigne par (P) la parabole de foyer A et directrice (BD).
   a) Déterminer l'axe focal et le sommet de (P).
   b) Montrer que le point C appartient à (P) et que la droite (BC) est tangente à (P)
   c) Construire la parabole (P).
   d) On munit le plan d'un repère orthonormal $(I, \vec{i}, \vec{j})$ direct tel que $\vec{i} = \overrightarrow{IA}$. Déterminer l'équation cartésienne de (P) dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 7
Dans le plan orienté, on considère un carré $ABCD$ de sens direct de centre O. I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[CD]$, $[AD]$, $[AB]$ et $[BC]$.

1. On considère f la transformation ponctuelle définie par : $f = R(O, \frac{\pi}{2}) \circ S_{BC}$.
   a) Déterminer deux droites (D_1) , (D_2) telles que $R(O, \frac{\pi}{2}) = S_{D_1} \circ S_{D_2}$, où D_2 est parallèle à la droite (BC).
   b) En déduire que $f = S_{OB} \circ T_{\overrightarrow{BA}}$.
   c) Caractériser f.
   d) Placer B', O' et I' les images par f de B, O et I.
2. Soit (P) la parabole de foyer C, passant par B et admettant comme tangente en B la droite (BO).
   a) Tracer sa directrice (D) (on exploitera le fait que $B \in (P)$).
   b) Construire son sommet S.
   c) Achever la construction de la parabole (P).
   d) Tracer (P') l'image de (P) par f.
3. Le plan est rapporté au repère orthonormé $(L, \overrightarrow{LC}, \overrightarrow{LC})$.
   a) Montrer que l'équation cartésienne de (P) est : $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$.
   b) Écrire l'expression analytique de f. En déduire que l'équation cartésienne de (P') est $y^2 - 4y + 4x - 4 = 0$.

Exercice 8

Dans le plan $(\mathcal{P})$, on donne un point F et une droite $(\mathcal{D})$ ne contenant pas F. Soit $(\Gamma) : M \in (\mathcal{P}) / \frac{MF}{MH} = 1$, H est le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$.

1. Tracer (Δ) la droite passant par F et perpendiculaire à $(\mathcal{D})$ en K.
2. Montrer que le milieu S de $[KF]$ appartient à (Γ).
3. Soit M_0 un point de (Γ).
   a) Montrer que M_0 appartient à la médiatrice de $[FH_0]$, H_0 est le projeté orthogonal de M_0 sur $(\mathcal{D})$.
   b) Placer le point M_0.
   c) En déduire la construction point par point de de (Γ).
4. On pose $[KF] = P$. Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté au repère orthonormé $(S, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ avec $\overrightarrow{I}$ vecteur directeur de (Δ), soit $M(x, y)$ un point de (Γ).
   a) Placer M dans le plan puis donner les coordonnées des points F, K, H dans ce repère.
   b) Déterminer l'équation cartésienne de $(\mathcal{D})$.
   c) Déterminer l'équation cartésienne de (Γ).
5. Construire la parabole (Γ) de foyer F, de directrice $(\mathcal{D})$.
6. Donner une équation cartésienne de (Γ).
   a) $F(1; 1)$ et $(\mathcal{D}) : x = 4$.
   b) $F(2; 5)$ et $(\mathcal{D}) : y = 1$.
   c) $F(-2; 4)$ et$(\mathcal{D}) : y = x$.

Exercice 9

On considère un triangle ABC isocèle rectangle en A de sens direct tel que $AC = 6cm$. On désigne par D, E, F les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AB]$, $[BD]$.

1. Faire une figure.
2. Soit (P) la parabole de foyer B et de directrice la droite (AC).
   a) Qu'appelle-t-on pas ou paramètre d'une parabole ?
   b) Déterminer le pas α de la parabole (P).
3. Soit G le symétrique de A par rapport à la droite (BC).
   a) Démontrer que la droite (AG) est une tangente à (P) en un point à déterminer.
   b) Construire le point H de (P) situé sur la médiatrice du segment $[EB]$.
   c) Construire l'arc (P_0) de (P) de corde focale le segment $[GI]$ où I est le symétrique de G par rapport à la droite (AB).
4. Soit (p') la parabole de foyer B et de directrice (AG).
   a) Déterminer le centre Ω, le rapport k et une mesure de l'angle θ de la similitude plane directe g qui transforme (P') en (P).
   b) Construire l'antécédent J de G par g.
   c) Construire l'arc (P'_0) qui a pour image (P_0) par g.
5. On désigne par $\mathcal{A}'_0$ l'aire de la portion (E') du plan limitée par les droites (JB), (EF) et (P'_0), et par $\mathcal{A}_0$ celle de la portion du plan (E_0) image de (E'_0) par g.

a) Démontrer que : $\mathcal{A}_0 = 2\mathcal{A}'_0$.

b) Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ de $g \circ g \circ g \circ g(E'_0)$ en fonction de $\mathcal{A}_0$.

Exercice 10

Le plan $(\mathcal{P})$ est orienté dans le sens direct.

OAB est un triangle rectangle et isocèle tel que : $OA = OB$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par I le milieu du segment $[AB]$ et par C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et B, H et K sont les symétriques des points C et D par rapport à I.

1. Faire une figure.
2. Soit f la similitude plane directe qui transforme A en D et O en C.
   a) Déterminer le rapport et la mesure de l'angle de f.
   Soit J le projeté orthogonal de O sur la droite (AC).
   b) Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par f.
   c) En déduire que J est le centre de f.
3. Soit g la similitude plane indirecte de centre I qui transforme A en D et O en C.
   a) Déterminer le rapport et l'axe de g.
   b) Soit l'application $h = g \circ f^{-1}$, calculer $h(C)$ et $h(D)$.
   c) Caractériser l'application h.
4. Soit $(\mathcal{P}_0)$ la parabole de foyer C, de sommet S passant par D et tangente en D à la droite (BA).
   a) Déterminer la directrice $(\mathcal{D})$ de $(\mathcal{P}_0)$.
   b) Construire l'arc (E_0) de la parabole $(\mathcal{P}_0)$ de corde focale $[DL]$ où L est le symétrique de D par rapport à la droite (CK).
   c) Construire l'image (E_1) de l'arc (E_0) de la parabole $(\mathcal{P}_0)$ par h.
5. On munit le plan $(\mathcal{P})$ d'un repère orthonormé $(S, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ direct tel que : $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{SC}$. Déterminer une équation cartésienne de la parabole $(\mathcal{P}_0)$ dans ce repère.

Exercice 11

On considère le triangle direct ABC rectangle en C tel que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. I est le milieu du segment $[AB]$. Soit la parabole (P) de foyer I. La droite (BC) est normale à (P) en C.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Préciser la tangente (T) à (P) en C.
3. Construire la directrice (D) de la parabole (P).
4. Montrer que (D) est perpendiculaire à (AB).
5. On désigne par N le point d'intersection des droites (D) et (AB) et par K le projeté orthogonal de I sur (T).
   a) Préciser la position du sommet S de (P).
   b) Montrer que (KS) est perpendiculaire à (AB).
   c) Déterminer l'ensemble des projetés orthogonaux de I sur les tangentes à (P).
   d) Construire la parabole (P).
6. On considère la similitude plane directe f de centre I qui transforme A en K.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de f.
   b) Montrer que pour tout point M' image du point M par f le triangle IMM' est rectangle en M'.
   c) Construire (P') image de (P) par f.

Exercice 12

Soit $(\mathcal{P})$ un plan rapporté orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. A tout nombre complexe $z = x + iy$, on associe le point $M(x, y)$, $\overline{z}$ le conjugué de z.

1. Soit (E) l'ensemble des points dont l'affixe vérifie : $z = 2|z|^2 - \frac{1}{2}i(z^2 - \overline{z^2}) = 1$, déterminer une équation cartésienne de (E).
2. Soit R la rotation de centre 0 dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{4}[2\pi]$.
   a) Déterminer une équation cartésienne de (E') image de (E) par R.
   b) Reconnaître la nature de (E').
   c) Caractériser (E').
   d) Tracer (E').
   e) En déduire le tracer de (E).

Exercice 13

ABC est un triangle équilatéral direct de centre de gravité G.
K est le projeté orthogonal de G sur la droite (AB), H est le projeté orthogonal de G sur la droite (AC).
Soit g la similitude plane directe de centre A et qui transforme G en H.

1. Caractériser g.
2. Soit (E) l'ellipse de centre A' milieu du segment $[BC]$, de sommet G et de foyer C.
   a) le point S est le sommet de (E) situé sur la droite (BC). Exprimer $A'S$ en fonction de GC.
   b) Représenter les sommets de (E).
   c) Construire un point M_0 de (E) situé sur la droite (AC).
   d) Calculer l'excentricité e de (E).
   e) Construire (E') l'image de (E) par l'application g.
   f) Calculer l'excentricité e' de (E'). Comparer e et e'.
3. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(A', \overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'G})$.
   a) Déterminer les coordonnées des points C, G, S et A.
   b) Donner une équation de (E) dans ce repère.
   c) Calculer l'aire de (E) en unité d'aire.
   e) En déduire en unité d'aire l'aire de(E').

Exercice 14

ABC est un triangle isocèle rectangle en A de sens direct. Soit D et I les symétriques respectifs de A par rapport à C et B.

1. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude plane directe S qui transforme D en C et C en B.
2. On désigne par Ω le centre de S. Montrer que le triangle ΩCB est rectangle isocèle. En déduire une construction de Ω.
3. Déterminer l'image du point B par S.
4. Construire les images par S des droites (AB) et (AC). En déduire, l'image du point A par S.
5. Soit (E) l'ellipse de foyer B, de directrice (AC) et d'excentricité $\frac{2}{3}$
   a) Construire deux points de (E) situés sur la droite (ΩB)
   b) Déterminer les points de (E) situés sur la droite (AB)
   c) Achever la construction de l'ellipse (E) et placer la deuxième directrice et le deuxième foyer de (E).
   d) On désigne par (E') image de (E) par S. Construire (E'), ses directrices et ses foyers. Préciser son excentricité.

Exercice 15

Soit un carré $ABCD$ de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB], [BC], [CD]$ et $[AD]$.
Soit O' le symétrique de O par rapport à A et E un point tel que I soit le centre du carré $AEBO$. Soit r la rotation de centre A qui transforme D en B, et s la symétrie orthogonale d'axe (AB). On pose $f = r \circ s$ et $g = h \circ f$ où h est une homothétie de centre A qui transforme C en O.

1. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.
2. a) Déterminer $f(O)$ et $f(A)$.
   b) Montrer que f est une symétrie orthogonale dont on précisera son axe.
   c) Déterminer le rapport de h.
3. Donner la nature et les éléments caractéristiques de g.
4. Soit (E) l'ellipse de foyers B et D et passant par A.
   a) Montrer que la longueur du grand axe est $a = AB$.
   b) Construire E_1 et E_2 les autres sommets de (E).
   c) Construire les points de (E) situés sur les demi-droites (DI) et (BK).
   d) Achever la construction de (E).
5. Soit (E') l'image de (E) par g.
   a) Déterminer les foyers de (E').
   b) Construire (E').

Exercice 16

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que : $10z\overline{z} + 3(z^2 + \overline{z}^2) = 4$, $\overline{z}$ est le conjugué de z.

1. a) Donner la nature de (E).
   b) Préciser son centre I, ses sommets A, A', B, B', ses foyers F et F'.
   c) Écrire l'équation cartésienne de ses directrices.
   d) Calculer son excentricité e.
   e) Tracer (E) et ses directrices.
2. Soit f la similitude plane directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
   a) Tracer (E') image de (E) par f.
   b) Écrire l'expression analytique de f.
   c) Écrire l'équation cartésienne de (E').
   d) Calculer l'excentricité e' de (E') et expliquer le résultat.

Exercice 17
Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de diamètre $[AB]$ et de centre O. Soit (Δ) la médiatrice de $[OB]$ qui coupe $(\mathcal{C})$ en I et J.

1. Faire une figure, on prendra $AB = 8cm$.
2. Quelle est la nature du quadrilatère $OIBJ$.
3. Soit K le projeté orthogonal de O sur $[AI]$.
   Démontrer que les points K, O, J sont alignés.
4. Soit S la similitude plane directe de centre K qui transforme I en O.
   Déterminer le rapport et l'angle de S.
5. Déterminer les images des segment $[IJ]$ et $[OI]$ par S.
6. En déduire l'image du point J.
7. Soit (E) l'ellipse de foyers A et O passant par K.
   a) Construire le point de (E) situé sur $[OI]$.
   b) Construire (E).
   c) Construire ses directrices.

Exercice 18
$ABCD$ est un carré de sens direct et de centre I. Soit P un point de la droite (BC) distinct de C, les droites (AP) et (CD) se coupent en Q. La perpendiculaire à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en T.
On désigne par N et M les milieux respectifs des segments $[PT]$ et $[QR]$ et f la similitude de centre A, de rapport $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

1. Faire une figure on prendra $AB = 8cm$.
2. Quel est l'ensemble des points N lorsque P décrit la droite (BC) privé de B ?
3. Déterminer les images par f des points B, C, R et P.
4. En déduire que les points M, N, B et D sont alignés.
5. Soit $(\mathcal{C})$ la conique de foyer B de directrice (AD) et d'excentricité $e = \frac{1}{2}$.
   a) Préciser la nature de la conique $(\mathcal{C})$.
   b) Déterminer les sommets de la conique $(\mathcal{C})$.
   c) Construire les points de $(\mathcal{C})$ situés sur les droites (PB) et (BI).
   d) Achever la construire de la conique $(\mathcal{C})$.
   e) Construire $(\mathcal{C}')$ image de $(\mathcal{C})$ par f.
   f) Donner les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}')$.
6. On rapporte le plan du repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
   Donner l'expression analytique de f et les équations cartésiennes de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

Exercice 19
Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. la bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ coupe le segment $[AC]$ en O. On désigne par I le projeté orthogonal de O sur la droite (AB) et par J le milieu de $[OA]$.

1. Montrer que le triangle OAB est isocèle et que I est milieu de $[AB]$.
2. Soit f la similitude directe telle que $f(B) = O$ et $f(I) = J$. Déterminer les éléments caractéristiques de f.
3. les cercles (Γ_1) et (Γ_2) de diamètre respectifs $[AB]$ et $[AO]$ se recoupent en D. Soit $g = S_{DI} \circ f$.
   a) Déterminer $g(A)$ et $g(C)$.
   b) Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.
   c) Soit K le centre de g. Montrer que $\overrightarrow{KD} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{KA}$.
   d) Construire alors le centre K et l'axe (Δ) de g.
4. Soit (E) l'ellipse de foyers A et B passant par O.
   a) Montrer que la longueur du grand axe de (E) est $a = 2OJ$.
   b) Construire les points de (E) situés sur les droites (BC) et (AD).
   c) Achever la construction de (E).

Exercice 20
On considère les points O, F et A tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF}) = 0[2\pi]$. (E) est l'ellipse de centre O dont un foyer est F et un sommet A.

1. Placer les autres sommets de (E).
2. Construire l'ellipse (E).
3. Construire les directrices de (E).
4. On considère la similitude plane directe g de centre F, d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et de rapport $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   a) Montrer que pour tout point M' image de M par g le triangle FMM' est rectangle isocèle en M'.
   b) Construire (E') image de (E) par g.
   c) Comparer les excentricités e et e' respectivement de (E) et (E').

Exercice 21

Dans le plan orienté, on considère le triangle direct ABC tel que
$AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Les points I, J, K et R sont les milieux respectifs des segments $[AC], [AB], [BC]$et $[JB]$. P est le projeté orthogonal de I sur la droite (BC).

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Déterminer le rapport et une mesure d'angle de la similitude plane directe f qui transforme J en K et K en P.
3. Soit Ω le centre de la similitude f.
   a) Montrer que pour tout point M' image du point M par la similitude directe f, le triangle $\Omega MM'$ direct est rectangle et isocèle en M'.
   b) En déduire que Ω est le point I.
4. Construire le point F tel que $f(F) = A$.
5. On considère la suite des points (M_n), $n \in \mathbb{N}$; définie par

$$\begin{cases} M_0 = F \\ M_{n+1} = f(M_n) \quad \forall \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $(\overrightarrow{IM_n}, \overrightarrow{IM_{n+4}}) = \pi[2\pi]$.
   On pourra utiliser la relation de Chasles sur les angles de vecteurs.
   b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $IM_{n+4} = \frac{1}{4}IM_n$.
   c) Placer le point M_5.
6. On considère l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $MA + MJ = AB$.
   a) Montrer que (E) est une ellipse d'axe focal la droite (AB).
   b) Montrer que le point R appartient à l'ellipse (E) et préciser ses sommets.
   c) Construire l'ellipse (E).
   d) Construire (E') image de (E) par la similitude plane directe f.

Exercice 22

Dans le plan orienté, on considère un carre $ABCD$ de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Soit I et J les milieux respectifs des segments $[DC]$ et $[AD]$. On prendra $AB = 4cm$.

1. Faire une figure.
2. On considère l'ellipse (E) de centre Ω, d'excentricité $e = \frac{1}{2}$ dont un foyer est B et une directrice la droite (AD). Quel est l'axe focal de (E) ?
3. Soit S_1 et S_2 les points de (E) situés sur la droite (AB).
   a) Montrer que $\overrightarrow{BS_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BS_2} = -\overrightarrow{BA}$.
   b) Placer S_1 et S_2.
4. Tracer le cercle principal $(\mathcal{C}_p)$ de (E).
5. Tracer le cercle secondaire $(\mathcal{C}_s)$ de (E).
6. Tracer le cercle directeur $(\mathcal{C}_d)$ de (E) ayant pour centre le foyer B.
7. Construire le point de (E) situé sur la demi droite $[BC)$.
8. Tracer l'arc de (E) balayé par l'angle $(\overrightarrow{\Omega S_3}, \overrightarrow{\Omega B})$ où S_3 est un sommet de (E) situé sur l'axe non focal et du même côté que C.

9. Soit f la transformation plane définie par : $f = S_{AB} \circ t_{\overrightarrow{DC}}$.
   a) Qu'appelle-t-on symétrie glissée ?
   b) Montrer que f est une symétrie glissée.
   c) Déterminer son vecteur et son axe.
   d) Tracer (E') image de (E) par f.

Exercice 23

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O de rayon R. O' un point intérieur à $(\mathcal{C})$, distinct de O.
A tout point P de $(\mathcal{C})$, on associe le point M, intersection de (OP) et de la médiatrice du segment $[O'P]$.

1. a) Justifier que : $MP = O'M$.
   b) Montrer que : $OM + O'M = R$.
   c) En déduire que le lieu géométrique des points M est une ellipse (E) dont on précisera les foyers.
2. On se propose de démontrer que la médiatrice (T) du segment $[O'P]$ est la tangente au point M de l'ellipse (E).
   a) Soit N un point de (T). Montrer, en utilisant les propriétés de la norme d'un vecteur, que : $OP < ON + NP$.
   b) Montrer que : $ON + O'N > R$.
   c) En déduire que le point N est extérieur à l'ellipse (E).
   d) En déduire que (T) et (E) n'ont qu'un point commun M.
   e) Conclusion.
3. soit O et O' les foyers d'une ellipse (E), A et A' ses sommets situés sur l'axe focal. On donne $R = 6cm$ et $OO' = 2\sqrt{7}$, on rapporte le plan au repère orthonormé $(I, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où I est le milieu du segment $[OO']$.
   a) Construire l'ellipse (E) dans le repère $(I, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ puis donner son équation cartésienne.
   b) Déterminer les équations des directrices (D) et (D') ; son excentricité et les coordonnées des foyers O et O'.
4. Soit g une similitude plane indirecte de centre I, d'axe (Δ) d'équation $y = x$ et de rapport $k = \frac{1}{2}$.
   a) Donner l'expression analytique de g.
   b) Déterminer l'équation cartésienne de (E'), image de (E) par g.
   c) Déterminer l'aire de (E). En déduire l'aire de (E').
   d) Construire l'ellipse (E') dans le même repère que (E).

Exercice 24

On considère dans le plan orienté $(\mathcal{P})$ un carré direct de centre O.
E, F, G, H désignent les milieux respectivement des segments $[AD], [AB], [BC]$et $[CD]$.

1. On définit les transformations ponctuelles suivantes $f = R(O, \frac{\pi}{2})ot_{\overrightarrow{BC}}$; $g = S_{AD}oR(O, \frac{\pi}{2})$.
   a) Trouver $f(B)$.
   b) Caractériser f et g.
2. Soit la similitude plane directe de centre D qui transforme E en C.
   a) caractériser S.
   b) placer $O' = S(O)$.
3. On désigne par (Γ) l'ellipse de centre O dont un foyer est F et un sommet E.
   a) préciser l'autre foyer.
   b) placer les autres sommets s_1, s_2, s_3 de (Γ), puis tracer (Γ)
   c) Calculer l'excentricité e de (Γ)
   d) Construire (Γ') l'image de (Γ) par S
   e) T est le point du plan tel que le triangle EFT soit rectangle isocèle en F, de sens indirect. On note (Δ) la droite passant par T et perpendiculaire à la droite (OH). Que représente (Δ) pour (Γ) ? justifier la réponse.
4. Soit (P) la parabole de directrice (Δ) de foyer F.
   a) Construire le point M_o de (P)situe sur la droite (AD), puis M_1 de (P) situé sur la droite (BC)
   b) Tracer (P) après avoir précisé son sommet.
5. Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OE})$
   a) Déterminer une équation cartésienne de (Γ) dans ce repère.
   b) Trouver l'expression analytique de S.
   c) Déterminer l'équation cartésienne de (Γ').
   d) Calculer l'excentricité e' de (Γ'). Comparer e et e' justifier ce résultat.
   e) Déterminer l'équation cartésienne de (P).
   f) Calculer l'aire du domaine (D) limité par l'ellipse (Γ), les droites $(OE), (OH)$ et (DC). (on pourra effectuer le changement de variable $X = \sqrt{2}cost$).
6. a) Tracer (H) l'hyperbole de sommets E et G d'asymptotes les droites (OH)et (OD). Placer ses foyer F_1 et F_2 puis tracer ses directrices (D_1) et (D_2).
   b) Écrire une équation cartésienne de (H) dans le repère $(O, \overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OE})$.

Exercice 25

Dans le plan orienté on considère un carré $ABCD$ de centre O tel que $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
On désigne par K, L, M et N les milieux respectifs des segments $[CD], [DA], [AB]$ et $[BC]$.
On considère alors le carré $DKFG$ de centre O' tel que $(\overrightarrow{DK}, \overrightarrow{DG}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1. Faire une figure soignée avec $AB = 6cm$.
2. Soit f la similitude directe de centre D qui transforme A en B.
   a) Déterminer les éléments caractéristiques de f.
   b) Préciser l'image de K par f.
   c) En déduire l'angle $\theta = (\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{BF})$.
3. On note (Γ) le cercle circonscrit au carré $ABCD$ et I le point d'intersection des droites (AK) et (BF).
   a) Placer (Γ) et I sur la figure.
   b) Montrer que $I \in \Gamma$.
   c) Montrer que les droites (ID) et (BF) sont orthogonales.
   d) Établir que les points C, G et I sont alignés.
4. Soit g l'application telle que $z' = (1+i)\overline{z} + i$.
   a) Donner la nature de l'application g.
   b) Déterminer les éléments caractéristiques de l'application g.
5. Soit $(\mathcal{C})$ la conique d'équation $x^2 - y^2 = -1$.
   a) Donner la nature de $(\mathcal{C})$.
   b) Déterminer les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C})$.
   c) Tracer $(\mathcal{C})$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ avec $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OK}$.
   d) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, K, L, M, N.
6. Trouver une équation cartésienne de la conique $(\mathcal{C}')$ image de la conique $(\mathcal{C})$ par g.
7. Déterminer les coordonnées des points $A', B', C', D', K', L', M'$ et N' images des points A, B, C, D, K, L, M et N par g.
8. Tracer $(\mathcal{C}')$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$.
9. Soit $(\mathcal{E})$ la conique d'équation $4x^2 + 2y^2 = 4$.
   a) Donner la nature de $(\mathcal{E})$.
   b) Donner ses éléments caractéristiques.
   c) Déterminer l'équation cartésienne de $(\mathcal{E}')$ image de $(\mathcal{E})$ par g.
   d) Calculer en unité d'aire l'aire a_0 de $(\mathcal{E})$.
   e) Construire $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{E}')$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$.
   f) Construire (Γ') image de (Γ) par g.

Exercice 26
Le plan est rapporté au repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, unité graphique $2cm$.

1. Représenter l'hyperbole (H) d'équation cartésienne $-x^2 + y^2 = 4$.
2. Préciser ses éléments caractéristiques (foyers, asymptote et excentricité).
3. Soient F et F' deux points de coordonnées respectifs $(0, \sqrt{3})$ et $(0, -\sqrt{3})$.
   a) Déterminer une équation cartésienne de l'ellipse (E) de foyers F et F' et d'excentricité $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
   b) Représenter (E).
4. Soit g la fonction numériques de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} g(x) = -2\sqrt{1 - x|x|}, & si \ \ x \leq 1 \\ g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), & si \ \ x > 1 \end{cases}$$

   a) Déterminer l'ensemble de définition de g.
   b) Étudier la continuité de g aux points d'abscisses $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$.
   c) Étudier la dérivabilité de g aux points d'abscisses $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$.
5. Démontrer que la courbe représentative de la restriction de g à l'intervalle $]-\infty, 1]$ est un sous ensemble de $(E) \cup (H)$ où (E) et (H) sont les coniques considères aux questions 1. et 2.
6. Établir le tableau de variation de g.
7. Construire la courbe $(\mathcal{C})$ de g dans le même repère que (H) et (E).
8. Démontrer g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.
9. Tracer la courbe $(\mathcal{C}')$ représentative de g^{-1}, fonction réciproque de g.
10. Expliciter $g^{-1}(x)$ pour $x > 1$
11. Si $t > 1$, calculer en cm^2 l'aire $A(t)$ de la partie du plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = t$.

Exercice 27

On considère la fonction f de la variable réelle x définie sur $]-\infty, 0]$ par : $f(x) = 2ln(1-x) + \dfrac{x}{x-1}$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. En déduire le signe de f sur l'intervalle $]-\infty, 0]$.
3. Soit la fonction numérique g_a de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} g_a(x) = a + x^2 ln(1-x), & si \ x < 0 \\ g_a(x) = (ax+a)e^{-x}, & si \ x \geq 0 \end{cases}$$

   où a est un réel strictement positif. On désigne par $(\mathcal{C}_a)$ la courbe représentative de g_a dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Unité d'axe : $2cm$.
   a) Étudier la continuité de g_a en $x_0 = 0$.
   b) Étudier la dérivabilité de g_a en $x_0 = 0$.
   c) En déduire la nature du point $A(0, g_a(0))$.
4. Dresser le tableau de variation de g_a.
5. Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_a)$.
6. On prendra $a = 1$
   a) Construire la courbe $(\mathcal{C}_1)$. On calculera $g_1(1)$ et $g_1(-1)$.
   b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan limité par $(\mathcal{C}_1)$, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
7. Construire l'ellipse (E) de foyer $F(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $F'(0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ dont l'un des sommets est le point $J(0, 1)$.
8. Soit S la similitude plane directe qui laisse invariant le point J et qui transforme le point O en milieu O' du segment $[IJ]$, I étant le point de coordonnées $(1, 0)$.
   a) Caractériser S.
   b) Construire $(\mathcal{C}')$ image de la partie de $(\mathcal{C}_1)$ par S relative à l'intervalle $[0, +\infty[$.
9. On définit la suite (A_n) par :

$$\begin{cases} A_0 = A \\ A_{n+1} = S(A_n) \end{cases}$$

   où A est l'aire calculée à la question 6.b).
   a) Exprimer A_1 en fonction de A_0.
   b) Exprimer A_n en fonction de A_0 et de n.
   c) On note $S_n = A_0 + A_1 + A_2 + ... + A_n$. Calculer la somme S_n.
   d) En déduire la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 28

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Soit la courbe (H) d'équation : $x^2 - y^2 - 4x - 2y + 8 = 0$.

1. Déterminer la nature de (H).
2. Donner ses éléments caractéristiques (centre, demi-axe, sommets, asymptotes et l' excentricité).
3. a) Tracer (H).
   b) Tracer les foyers F et F' de (H) à l'aide d'un compas uniquement. F étant le foyer dont les coordonnées sont positives.
4. Soient $(\mathcal{C})$ le cercle de centre $A(2,0)$ et de rayon $r = 2\sqrt{2}$ et (Δ) la droite d'équation $x = 2$, f est l'affinité orthogonale d'axe (Δ), de direction la droite (OA) et de rapport $k = \frac{1}{2}$.
   a) Tracer (E) image de $(\mathcal{C})$ par l'affinité f.
   b) Déterminer une équation cartésienne de (E).
5. Pour tout $x \geq 2$, on pose $g(x) = 2 - \sqrt{x^2 - 4}$.
   a) Étudier la continuité et la dérivabilité de g en $x_0 = 2$.
   b) Étudier les variations de g sur son ensemble de définition.
   c) Tracer $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère que (H) et (E).
6. Soit (Γ) est la courbe symétrique de $(\mathcal{C}_g)$ par rapport à la première bissectrice. Déterminer une équation cartésienne de (Γ).
7. Calculer l'intégrale $I = \int_2^4 [h(x) - 2]dx$, (on pourra pose que $X = 2\tan t$ et $\frac{1}{\cos t} = \frac{1}{2}(\frac{\cos t}{1-\sin t} + \frac{\cos t}{1+\sin t})$), où h étant la fonction dont la courbe est (Γ) dans le même repère que (H).
8. Que représente ce réel ?

Exercice 29

On considère la fonction numérique définie par $f(x) = \sqrt{\frac{2-x^2}{2}}$.

1. a) Étudier les variations de f.
   b) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ représentative de f dans un plan $(\mathcal{P})$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Unité $2cm$.
   c) En déduire la construction de l'ensemble (E) des points de $(\mathcal{P})$ de coordonnées (x, y) telles que : $x^2 + y^2 - 2 = 0$.
2. Soit A le point de coordonnées $(0, 2)$, M un point quelconque de $(\mathcal{P})$ et m son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses.
   a) Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble (Γ) des points de $(\mathcal{P})$ tels que : $MA^2 + Mm^2 = 4$.
   b) Démontrer qu'il existe une transformation ponctuelle simple qui permet de passer de (E) à (Γ).
   c) Quels sont les points communs à (E) et (Γ).
3. Soit g la transformation ponctuelle qui à tout point $M(x, y)$ fait correspondre le point $M'(x', y')$ tel que :

$$g : \begin{cases} x' = \dfrac{x}{x-1} \\ y' = \dfrac{y}{x-1} \quad avec \ x \neq 0 \end{cases}$$

   a) Montrer g est involutive.
   b) Démontrer que les points O, M et M' sont alignés.
   c) Déterminer une équation cartésienne de (E') image de (E) par g.
   d) Construire (E') dans le même repère que (E).
4. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 - 4(1-i)z^2 + 12iz + 8 - 8i$.
   a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire z_0 et une solution réelle z_1 à déterminer.
   b) En déduire l'autre solution z_2.
5. Dans le plan $(\mathcal{P})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2i$, $z_B = 2$ et $z_C = 2 + 2i$.
   a) Déterminer le module et l'argument de $Z = \dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$.
   b) En déduire la nature du triangle ABC.
   c) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC et N un point de $(\mathcal{C})$ distinct de A, B et C. On désigne par A', B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de N sur $(BC), (AC)$ et (AB). Donner le nom de la droite passant par ces points.
6. Soit S l'application de $(\mathcal{P})$ dans $(\mathcal{P})$ telle que $S(A) = A$ et $S(B) = C$.
   a) Donner la nature de de S.
   b) Déterminer ses éléments caractéristiques.
7. Soit K un point de $(\mathcal{P})$ tel que $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ et K' le point de concours de la parallèle à (OC) passant par K avec (AC).

a) Placer K et K'.

b) Démontrer qu'il existe une homothétie qui transforme O en K et C en K'.

c) Préciser son centre et son rapport.

8. Soit w la symétrie orthogonale qui transforme O en C. On pose $\varphi = woh$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de φ.

3.9 Géométrie dans l'espace

Exercice 1

Déterminer une équation cartésienne d'un plan $(\mathcal{P})$, passant par le point $A(1;-1;2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(-2;3;1)$.

Exercice 2

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère le point $I(1;1;1)$.
Déterminer une équation cartésienne de la sphère de centre I et de rayon $r = 2^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 3

Déterminer le centre et le rayon de la sphère dont une équation cartésienne est :
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8z - 3 = 0$.

Exercice 4

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère les points $A(1;-5;8)$ et $B(3;1;2)$. Déterminer une équation cartésienne de la sphère de diamètre $[AB]$.

Exercice 5

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, (P) et (Q) sont deux plans d'équations cartésiennes respectives : $x - 4y + 7 = 0$ et $x + 2y - z = 0$.

1. Montrer que les plans (P) et (Q) sont sécants.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ). intersection des deux plans (P) et (Q).

Exercice 6

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère les points $A(1;-1;1)$, $B(3;-2;4)$ et $C(-3;1;1)$.
Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}$.

Exercice 7

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère les points $A(3;-1;2)$, $B(4;-2;2)$ et $C(5;-1;1)$.

1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan de l'espace.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Déterminer l'aire du triangle ABC.

Exercice 8
L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère les points $A(-1; 2; 1)$, $B(1; 6; -1)$, $C(2; 2; 2)$ et $D(0; 1; -1)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Soit (Q) le plan d'équation $x + y - 3z + 2 = 0$ et $(Q)'$ le plan de repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$. Les plans (Q) et (Q') sont-ils sécants ?
4. Donner un point E et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de la droite d'intersection des plans (Q) et (Q').
5. Étudier une équation de la sphère (S) de centre $I(1; 0; -1)$ et de rayon 2. On considère les points $J(-2; 0; 0)$ et $K(1; 0; 1)$. Déterminer l'intersection sphère (S) et de la droite (JK).
6. On donne $A(-2; 3; 4)$ et $(P) : 2x - 3y + 5z + 3 = 0$, déterminer $d(A, (P))$.

Exercice 9
L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On considère l'application f définie par :

$$f : \begin{cases} 3x' = x + 2y - 2z - 5 \\ 3y' = 2x + y + 2z + 5 \\ 3z' = -2x + 2y + z - 5 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f, puis en déduire la nature de f.
3. Préciser les éléments caractéristiques de f.

Exercice 10
On définie analytiquement une application f par :

$$f : \begin{cases} 3x' = x + 2y - 2z - 1 \\ 3y' = 2x + y + 2z + 4 \\ 3z' = -2x + 2y + z - 10 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Reconnaître puis caractériser f.

Exercice 11
L'expression analytique d'une application est telle que $f : \begin{cases} x' = z + 4 \\ y' = x - 5 \\ z' = y + 6 \end{cases}$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
3. En déduire la nature de f.
4. Préciser les éléments caractéristiques de f.

Exercice 12
L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donnent les points $A(-1;0;2)$, $B(3;-2;-4)$, $C(1;-4;2)$ et $D(5;-2;4)$. On considère les points I, J et K définis par I milieu du segment $[AB]$, K milieu du segment $[CD]$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
2. Montrer que les points I, J et K ne sont pas alignés.
3. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est : $8x + 9y + 5z - 12 = 0$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD) et montrer que le plan (IJK) et la droite (AD) sont sécantes en un point L dont-on déterminera les coordonnées.
5. Démontrer que $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

Exercice 13
L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$ et $C(6;-2;-1)$.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle.
2. Soit (P) le plan d'équation cartésienne $x+y+z-3=0$. Montrer (P) est orthogonal à la droite (AB) passant par le point A (A étant un point).
3. Soit (P') le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par le point A. Déterminer une équation cartésienne (P').
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D), droite d'intersection des plans (P) et (p').
5. soit D le point de coordonnées $(0;4;-1)$. Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
6. Calculer le volume V du tétraèdre $ABCD$ (on pourra considérer ABC comme la base de ce tétraèdre et D son sommet).
7. Montrer que l'angle géométrique $B\widehat{D}C$ a pour mesure $\frac{\pi}{4}$ radian.

Exercice 14
L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'application f définie par :

$$f : \begin{cases} x' = 2x + y + z + 1 \\ y' = x + 2y + z + 1 \\ z' = x + y + 2z + 1 \end{cases}$$

1. Déterminer les images A' et O' des points $A(1;0;0)$ et $O(0;0;0)$ par f. En déduire que f n'est pas une isométrie.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
3. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe que l'on précisera.
4. Déterminer en fonction de x, y et z les coordonnées de I, le point d'intersection de la droite (MM') avec l'ensemble des points invariant f.
5. Montrer qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$ puis en déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

Chapitre 4

Quatrième Partie : Sujets de révision

EN ROUTE POUR LE BAC

Sujet 1

Exercice 1
Soit (Γ) la courbe dont un système d'équation paramétriques, dans le repère orthonormal direct est :

$$\begin{cases} x(t) = 3(sint + cost) \\ y(t) = 4sint \end{cases}$$

1. Montrer que l'ensemble d'étude de la courbe (Γ) peut se réduire à l'intervalle $I = [0, \pi]$. On examinera la périodicité des fonctions x et y et on donnera la transformation T qui transforme le point $M(t)$ en $M(t + \pi)$ pour tout réel t.
2. Étudier les variations des fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$.
   On pourrait écrire $x(t)$ sous la forme : $x(t) = a\sin(\alpha + t)$.
3. Construire l'arc de (Γ) pour $t \in I = [0, \pi]$.
4. Compléter le tracé de (Γ) grâce à la transformation T.

Exercice 2
On considère le triangle ABC rectangle en C tel que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Soit F le milieu du segment $[AB]$, R est le symétrique de C par rapport à la droite (AB), H est le milieu du segment $[CR]$ et K est le projeté orthogonal de F sur la droite (AC).

1. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.
2. Montrer que les points C, K, F et H sont cocycliques.
3. Soit g la similitude plane directe qui transforme C en H et A en K.
   a) Montrer que son angle est $\theta = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et que son centre est F.
   b) Déterminer son rapport α.
4. Montrer que pour tout point M' image de M par g le triangle FMM' est rectangle indirect en M'.
5. On rappelle que la normale de la parabole est la perpendiculaire à la tangente de la parabole au point de contact. On considère la parabole $(\mathcal{P})$ de foyer F dont la droite (BC) est normale à $(\mathcal{P})$ en C.
   a) Préciser la tangente (T) à $(\mathcal{P})$.
   b) Construire la directrice (D) de $(\mathcal{P})$.

c) Montrer que la droite (D) est perpendiculaire à (AB).

d) N est le point d'intersection des droites (D) et (AB).
Placer le sommet S de $(\mathcal{P})$.

e) Montrer que R est un point de $(\mathcal{P})$ puis préciser la tangente (T') à $(\mathcal{P})$ en R.

f) Construire la parabole $(\mathcal{P})$ puis $(\mathcal{P}')$ son image par g.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^{1-x}$. On désigne par $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique $2cm$.

1. a) Déterminer les limites de f sur son ensemble de définition ; quelle conséquence graphique pour $\mathcal{C}_f$ peut-on tirer ?
   b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée f'.
   c) Dresser le tableau de variations de f et tracer sa courbe $\mathcal{C}_f$.
2. Soit n un entier non nul. On considère l'intégrale définie par $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}dx$.
   a) Établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n puis calculer I_1 et I_2.
   b) Donner une interprétation graphique de I_2. On la fera apparaître sur le graphique de la question 1.c).
3. a) Démontrer que pour tout réel $x \in [0, 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante : $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$.
   b) En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4

Une boite contient 8 cubes :
- 1 gros rouge et 3 petits rouges ;
- 2 gros verts et 1 petit vert ;
- 1 petit jaune.

Un enfant choisit au hasard et simultanément 3 cubes de la boite. On admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et sa couleur.
Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1. On note A l'événement : " obtenir des cubes de couleurs différentes "
   et B l'événement : " obtenir au plus un petit cube ".
   a) Calculer la probabilité de A.
   b) Vérifier que la probabilité de B est égale à $\frac{2}{7}$.
2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer l'espérance mathématique de X et son écart type.
3. L'enfant répète 5 fois l'épreuve " tirer simultanément 3 cubes de la boite ", en remettant dans la boite les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant. Les tirages sont indépendants. On note p la probabilité que l'événement B soit réalisé.
   a) Déterminer la probabilité que B soit réalisé au moins une fois à l'issue des 5 épreuves.

b) Déterminer la probabilité que l'événement B soit réalisé exactement 3 fois.

Sujet 2

Exercice 1

On considère la suite définie par $V_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} - 2V_n - 5 = 0$.

1. Calculer V_1 ; V_2 ; V_3 et V_4.
2. On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = V_n + 5$.
   a) Démontrer la suite (U_n) est une suite géométrie.
   b) Exprimer U_n puis V_n en fonction de n.
   c) Exprimer $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$ puis $S'_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$ en fonction de n.
3. a) Déterminer les restes dans la division euclidienne de 2^n par 5 suivant les valeurs de n.
   b) Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $V_n \equiv 2^n[4]$.
   c) En déduire le reste dans la division euclidienne du terme V_{1956} par 5.
   d) Démontrer que $S_n \equiv S'_n[5]$.
   e) En déduire le reste dans la division euclidienne du terme $_{1956}$ par 5.

Exercice 2

On considère un carré $ABCD$ de sens direct de centre O, I et S les milieux respectifs des segments $[DC]$ et $[OD]$

1. Faire la figure.
2. Construire le point E symétrique de A par rapport à la droite (BC) et le point H tel que $AODH$ soit un carré direct.
3. Démontrer que les droites (BD) et (EC) sont parallèles.
4. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la composée $g = S_{DB} \circ S_{EC}$.
5. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$.
   a) Démontrer que la composée $f = T \circ S_{CB}$ est une symétrie glissée.
   b) Déterminer son vecteur et son axe.
6. a) Donner les définitions des première et deuxième droites globalement invariantes par une similitude plane indirecte.
   b) Soit S la similitude plane indirecte d'axe la droite (BE) et dont la deuxième droite globalement invariante est la droite (AD), qui transforme B en E. Déterminer son centre et son rapport.
7. Soit (P) la parabole dont une tangente est la droite (AD), une normale associée à cette tangente est la droite (BE), d'axe focal la droite (OB).
   a) Déterminer le point de la parabole appartenant à la droite (OB).
   b) Déterminer le foyer et la directrice de (P).
   c) Démontrer que le segment $[AC]$ est une corde focale de (P).
   d) Construire l'arc de (P) dont $[AC]$ est la corde focale $[AC]$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

1. a) Calculer $f'(x)$ puis étudier son signe suivant les valeurs de x.
   b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α telle que $\frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$.
2. Dans cette partie on se propose de donner une valeur approchée de α.
   a) Montrer que pour tout $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $f(x) \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.
   b) Montrer que pour tout $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
3. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = f(u_n),\ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   a) Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.
   b) Démontrer en utilisant le théorème de l'inégalité des accroissement finis que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
   c) n déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$.
   d) Montrer que la suite (u_n) converge vers α.
   e) Trouver le plus petit entier n_0 tel que $|u_{n_0} - \alpha| \leq 10^{-2}$, puis en déduire une valeur approchée de α.

Exercice 4

considère la série statistique à deux caractères $(X; Y)$ définie par le tableau à double entrée ci-après où a désigne un entier naturel non nul :

$X \setminus Y$	-1	0	2
1	2	5	3
2	2	a	3

1. Donner les deux séries marginales associées.
2. Déterminer son point moyen G.
3. Déterminer a pour que le point moyen soit $G(\frac{29}{17}, \frac{4}{17})$.
4. On prend $a = 4$.
   a) Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ de X et Y.
   b) Calculer les écart-types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$.
   c) Calculer la covariance $Cov(X, Y)$.
   d) Déterminer la droite de régression de x en y.
   e) Déterminer les valeurs de y lorsque $x = 2, 3$.
   f) Calculer son coefficient de corrélation linéaire.

Sujet 3

Exercice 1
A tout réel θ de l' intervalle $]-\pi,\pi[$, on associe le nombre complexe
$z(\theta)=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+1)^2$.

1. a) Donner une expression simplifiée du nombre complexe $u=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+1)e^{-i\frac{\theta}{2}}$.
   b) En déduire un argument du nombre complexe $v=e^{i\theta}+1$, puis calculer le module et un argument de $z(\theta)$.
   c) Donner la forme exponentielle de $z(\frac{\pi}{6})$.
2. Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, A le point du plan d'affixe 1 et M le point d'affixe $z(\theta)$. On note H le projeté orthogonal de A sur la droite (OM).
   a) Exprimer les coordonnées du point H en fonction de θ.
   b) Déterminer l'ensemble (E) décrit par le point H quand θ décrit l'intervalle $]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
   c) Quel est l'ensemble (F) décrit par le point H quand θ décrit l'intervalle $[\frac{\pi}{2},\pi[$?

Exercice 2
Dans le plan orienté, on considère un carré $ABCD$ de centre O tel que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit E et R milieu de segments $[AB]$ et $[BC]$, P un point du segment $[BC]$ distinct de B. On note Q le point d'intersection des droites (AP) et (CD). La perpendiculaire à (AP) passant par A coupe (BC) en I et (CD) en J et la perpendiculaire à (AC) passant par A coupe (BC) en H. La parallèle à (AH) passant par C coupe (AD) en F.

1. Faire la figure. On prendra $BC=3cm$, $PB=1cm$ et on placera de préférence AB horizontalement.
2. Construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
3. Soit r la rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ qui transforme B en D.
   a) Montrer que son centre Ω est le point de concours de (E) et de la droite (OC).
   b) En déduire que Ω n'est autre que le point A.
   c) Quelle est l'image de la droite (BC) par r ?
   d) Montrer que $r(I)=Q$ et $r(P)=J$.
4. On pose $f=r\circ t_{\overrightarrow{CB}}$ et $g=f\circ s_{AB}$.
   a) Montrer que f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Préciser son centre.
   b) Donner la nature puis caractéristiques de l'application g.
5. Soit h la similitude plane directe de centre A qui transforme B en C.
   a) Caractériser h.
   b) Déterminer l'image de I, C et O par h.
6. Soit (P_o) la parabole de foyer B dont la tangente en C est la droite (AC).
   a) Déterminer la directrice de (P_o) puis montrer que C appartient à la corde focale.
   b) Déterminer le sommet de (P_o) puis construire (P_o).

c) Construire la parabole $(P_1) = h[(P_o)]$. Montrer que $F \in (P_1)$.

Exercice 3

Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ et $(\mathcal{C}_F)$ sa courbe représentative.

1. Démontrer que la fonction F est impaire.
2. Démontrer que $\forall\, x \in]0, +\infty[$, $\frac{x}{\sqrt{1+16x^4}} \leq F(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.
3. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
4. Dresser son tableau de variation.
5. On donne $F(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}$. Tracer la courbe $(\mathcal{C}_F)$.

Exercice 4

Soit a, b et c trois valeurs de moyenne $\overline{x}$.

1. Montrer que la variance : $V = \dfrac{(a-\overline{x})^2 + (b-\overline{x})^2 + (c-\overline{x})^2}{3}$
   s'écrit : $V = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - (\overline{x})^2$.
2. Calculer la variance et l'écart type de la série suivante :

x_i	130	165	170	185	195	200	215
n_i	3	1	2	3	4	3	4

   On appliquera la formule : $V = (\overline{x^2}) - (\overline{x})^2$.
   Variance=(moyenne des carrés)-(carré de la moyenne).
   L'écart type noté σ étant la racine carré de la variance.

Sujet 4

Exercice 1

Soit l'équation $(E) : ax + by = c$ (appelée équation diophantienne).

1. Déterminer la condition nécessaire et suffisante d'existence des solutions de l'équation $(E) : ax + by = c$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
2. a) Vérifier que l'équation $(E') : 616x + 585y = 12$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
   b) Vérifier que le couple $(1812, -1908)$ est une solution particulière de l'équation (E').
   c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E').
3. a) Définir l'inverse n modulo de l'entier a.
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $3x \equiv 5[7]$.

Exercice 2

Dans le plan orienté, on considère un segment $[DC]$ tel que $DC = 5cm$.

1. Construire le point Ω centre de la rotation r d'angle $\frac{\pi}{4}$ qui transforme D en C.
2. Soit A et B deux points du plan tels que $DABC$ soit un carré direct de centre O. On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Reconnaître et caractériser les applications suivantes :
   $f_1 = r(\Omega; \frac{\pi}{4}) \circ r(O; \frac{\pi}{2})$ et $f_2 = t_{\overrightarrow{BC}} \circ s_{(BD)}$.
3. On considère l'application composée g définie par : $g = r(A; \frac{\pi}{2}) \circ t_{\overrightarrow{CA}} \circ r(C; \frac{\pi}{2})$.
   a) Calculer $g(C)$.
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.
4. Le point G est milieu du segment $[OC]$. On considère l'ellipse (E) de centre O dont deux de ses sommets sont B sur le grand axe (axe focal) et G sur le petit axe (axe non focal). On rappelle que le cercle de centre O et de rayon $[OB]$ est principal, tandis que celui de centre O et de rayon $[OG]$ est secondaire. La parallèle à (BD) en G coupe le cercle principal en H sur l'arc de cercle contenant B. Soit F le projeté orthogonal de H sur (BD).
   a) Que représenter le point F pour l'ellipse (E)?
   b) Tracer l'ellipse (E) et ses directrices (Δ_1) et (Δ_2)
5. Le plan est maintenant rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$.
   a) Déterminer les coordonnées du point F.
   b) Déterminer une équation cartésienne réduite de l'ellipse (E) dans ce repère.
6. Soit (H) une hyperbole de sommets L et J d'asymptotes les droites (OC) et (OD).
   a) Comment appelle-t-on cette hyperbole ?
   b) Tracer l'hyperbole (H).
   c) Placer les foyers F_1 et F_2 de (H), puis tracer les directrices (Δ) et (Δ') de (H).

Exercice 3

On considère la suite (I_n) définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = x^n e^{x^2}$.

1. a) Démontrer que la fonction F_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $F_1(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_1.
   b) En déduire le calcul de I_1.
   c) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on pose $g_n(x) = x^n$.
   Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $(g_{n+1} \times F_1)'(x) = f_{n+2}(x) + \frac{n+1}{2} f_n(x)$.
   d) En déduire que $\forall\, n \geq 1$, on a : $I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2} I_n$.
   e) Calculer I_3 et I_5.
2. a) Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$.
   b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
   c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

Exercice 4

On considère un échantillon de 500 personnes composé de 200 hommes et de 300 femmes. Parmi les hommes, 150 ont plus de 30 ans et parmi les femmes 200 ont plus de 30 ans. On choisit dans cet échantillon une personne au hasard. On désigne par H, F et T les événements suivants :

H " La personne choisit est un homme".

F " La personne choisit est une femme".

T " La personne choisit a plus de 30 ans".

On rappelle que l'arbre pondéré est un outil mathématique permettant de calculer une probabilité dans le cas d'expériences aléatoires.

1. Représenter cette situation par un arbre pondéré.
2. Calculer les probabilités suivantes :
   a) $P(H)$.
   b) $P(T/H)$.
   c) $P(T)$.
   d) $P(H/T)$.

Sujet 5

Exercice 1

On donne deux entiers $A = 2n^2 - 3n + 5$ et $B = n - 1$, $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 6$

1. Déterminer le $PGCD(5472, 2160)$.
2. Déterminer deux entiers q et r tels que $A = Bq + r$.
3. Montrer que $PGCD(A, B) = PGCD(n - 1, 4)$.
4. Déterminer les couples d'entiers naturels tels que :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 405 \\ PGCD(a; b) = 3 \end{cases}$$

Exercice 2

Le plan est orienté, on considère un segment $[BC]$. A est le point du plan tel que :

$$\begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

1. Soit (E) l'ellipse qui passe par le point A et dont les foyers sont B et C.
   a) Préciser le centre O de (E).
   b) Préciser l'axe non focal de (E).
   c) Que représente le point A pour l'ellipse (E) ?
   d) Construire les sommets de (E).
2. On note I le centre de gravité du triangle ABC. Le cercle de centre C et de rayon $r = 2AC$ coupe la demi-droite $(IC]$ en un point K_0.
   a) Montrer le point d'intersection M_0 de la médiatrice du segment $[BK_0]$ avec la demi-droite $(IC]$ est un point de l'ellipse (E).
   b) Par un procédé analogue, construire le point M_1 de (E) situé sur la demi-droite $(BI]$.
   c) Tracer la directrice (D) de (E) associée au foyer B et la directrice (D') de (E) associée au foyer C.
3. Achever la construction de (E).
4. Calculer l'excentricité de (E).
5. On rapporte le plan au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})$.
   Écrire l'équation cartésienne de (E) dans ce repère puis vérifier le résultat de la question 4.
6. Soit f la similitude plane directe de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
   a) Construire (E') image de (E) par f.
   b) Écrire l'équation cartésienne de (E').

Exercice 3

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $I = [0, 1]$ par $g(x) = \sin(\pi x)$.

1. Tracer la courbe représentative $(\mathcal{C}_g)$ de la fonction g. (unité graphique : $8cm$).
2. Calculer $I = \int_0^1 g(x)dx$.
3. Interpréter graphiquement cette intégrale.
4. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose : $S_n = \frac{1}{n}[g(0) + g(\frac{1}{n}) + g(\frac{2}{n}) + ... + g(\frac{n-1}{n})]$.
   a) Prouver que : $1 + e^{\frac{i\pi}{n}} + e^{\frac{2i\pi}{n}} + ... + e^{\frac{i(n-1)\pi}{n}} = \frac{2}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}}$.
   b) En déduire que : $\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + ... + \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{\cos\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{2\pi}{n}}$.
   c) Prouver finalement que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{2}{\pi}$

Exercice 4

L'ensemble des participants à une compétition de tir à l'arc, est composé pour la moitié de tireurs entrainé, pour un quart de tireurs amateurs et pour le reste de tireurs débutants. Un tireur entrainé atteint la cible pour 0.95 de ses tirs, un tireur amateur pour les trois quart de ses tirs et un tireur débutant une fois sur deux. Une flèche vient d'être tirée par un participant choisi au hasard.

1. Construire l'arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la probabilité pour que la flèche atteigne la cible.
3. Sachant que la flèche a atteint sa cible, quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée par un débutant ?

Sujet 6

Exercice 1

Le directeur des ressources humaines de l'entreprise $\ll EMERGENCE\,2025 \gg$ doit embaucher des ouvriers. Lors de la précédente campagne de recrutement pour les postes analogues, il fait une étude statistique sur le nombre des candidatures y en fonction des salaires proposés x. Il a eu les résultats suivants :

▷ Salaire moyen : $\overline{X} = 660.000 fcfa$.
▷ Variance de X : $V(X) = 20.000$.
▷ Équation de la droite de régression de y en x : $y = 0,001125x - 56$.
▷ Coefficient de corrélation linéaire : $r = 0,922$.

1. Déterminer le nombre moyen de candidatures $\overline{Y}$.
2. Déterminer la covariance de (X, Y) de la série.
3. Déterminer l'équation de la droite de régression de x en y.
4. En déduire une estimation de salaire que doit proposer le Directeur s'il veut embaucher 30 ouvriers.

Exercice 2

Dans le plan orienté, on considère le carré direct $ABCD$ de centre O. I, J, K et L désignent les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$. Les droites (OB) et (IJ) se coupent en T.

1. Faire la figure.
2. Soit S la similitude plane directe qui transforme L en O et O en T.
   a) Construire l'image de A par S.
   b) Déterminer l'angle et le rapport de S.
   c) Préciser le centre de S.
3. Définir le cercle principal d'une ellipse.
4. Soit f l'application du plan qui associe a tout point M du plan son image M' tel que $\overrightarrow{HM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HM}$ où H désigne le projeté orthogonal de M sur la droite (IK).
   a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.
   b) Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre (IK). Construire l'image (E) de $(\mathcal{C})$ par f.
   c) Préciser la nature de (E).
   d) Placer le foyer F de (E) situé sur le segment $[OK]$ puis calculer l'excentricité e de (E).
5. La perpendiculaire (Δ) à (IK) en F rencontre le cercle $(\mathcal{C})$ en P et P' tel que OFP est un triangle direct. La tangente à $(\mathcal{C})$ en P coupe la droite (IK) en G
   a) Montrer que $OG = \frac{OK^2}{OF}$.
   b) Soit (D) la perpendiculaire à la droite (IK) en G. Que représente la droite (D) pour (E).
6. Construire l'image de (E) par la similitude S.

Exercice 3

Soit n un entier naturel et a un réel strictement positif. g_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} g_n(x) = x(a^n + nlnx),\ si\ x > 0 \\ g_n(0) = 0 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de g_n en $x = 0$.
2. Calculer la limite de g_n en $+\infty$.
3. Calculer la dérivée g'_n de g_n, puis étudier son signe.
4. Dresser le tableau des variations de g_n.
5. On donne $T_n(\alpha) = \int_\alpha^e g_n(x)dx$ où $\alpha > 0$ et $v_n = \lim\limits_{\alpha \to 0} T_n(\alpha)$.
   a) Calculer $T_n(\alpha)$.
   b) Montrer que $v_n = \dfrac{ne^2}{4} + \dfrac{a^n e^2}{2}$.
   c) Vérifier que (v_n) est la somme d'une suite arithmétique (u_n) et d'une suite géométrique (w_n). Préciser pour chacune la raison et le premier terme.
   d) Calculer $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$.

Exercice 4

Une variable aléatoire X a pour univers image : $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X sachant que :
   $P(X > 5) = \frac{1}{12}$; $P(X < 2) = 2P(X = 6) = 2P(X = 2)$; $P(X = 1) = P(X = 5)$; $P(X \leq 3) = P(X \geq 4)$.
2. Définir la fonction de répartition de X et tracer sa courbe représentative.
3. Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X.
4. Soit A et B deux événement indépendants de l'univers, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ leurs contraires. Montrer que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont aussi indépendants. On rappelle que $(\overline{A} \cap \overline{B}) = (\overline{A \cup B})$.

Sujet 7

Exercice 1

On se propose de résoudre l'équation (E) : $34x - 15y = 2$.

1. a) Montrer que 34 et 15 sont premiers entre eux.
   b) En déduire que l'équation (E) admet au moins une solution.
   c) Déterminer l'inverse modulo 15 de 34.
2. a) Déterminer la solution particulière de (E).
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).
3. a) Définir l'ensemble $\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$.
   b) Donner la table de multiplication dans $\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$.
   c) Résoudre dans $\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$ le système

$$\begin{cases} \dot{3}x + \dot{3}y = \dot{1} \\ \dot{2}x + \dot{4}y = \dot{4} \end{cases}$$

Exercice 2

Dans le plan orienté, on considère le triangle équilatéral ABC de sens direct et (Γ) son cercle circonscrit. Soit I le milieu de $[AC]$. La médiatrice de $[BC]$ coupe (Γ) en A et D. La droite (BD) coupe (AC) en A'. La parallèle à (AC) en B et la perpendiculaire à (BC) en C se coupent en un point P.

1. Faire soigneusement la figure. On prendra $AB = 3cm$ et on disposera BC horizontalement.
2. Montrer que BCA' est un triangle isocèle.
3. On note $f = S_{BD} \circ S_{DC}$, $g = S_{AC} \circ S_{AB}$ et $h = S_{CD} \circ S_{BI}$, où S_{MN} désigne la réflexion d'axe (MN).
   a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f, g et h.
   b) On pose $\varphi = f \circ h$ et $\psi = f \circ g$. Montrer que $\psi(A) = A'$.
   c) Donner la nature et les éléments caractéristiques de φ et de ψ.
4. Soit S la similitude directe de centre B qui transforme A en A'.
   Déterminer les autres éléments caractéristiques de S.
5. Soit (E) l'ellipse de foyers A et C passant par B.
   a) Déterminer son excentricité.
   b) Construire les points de (E) situés sur les demi-droites $[CD)$ et $[AD)$.
   c) Construire sa directrice (Δ) relative au foyer C. On expliquera la construction.
   d) On suppose que (E) est l'image par S d'une courbe $(\mathcal{C})$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C})$. On justifiera chaque résultat.

Exercice 3

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -x + \sqrt{x^2 + 1}$.

1. a) Étudier les variations de g.
   b) Établir le signe de g sur $\mathbb{R}$.
2. On donne la fonction f définie par : $f(x) = \int_0^x \frac{-1}{\sqrt{1+t^2}} dt$.
   a) Déterminer la fonction dérivée f' de f.
   b) Donner le sens des variations de f.
   c) Montrer que $f(x) = \ln[g(x)]$.
   d) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   e) Dresser le tableau des variations de f.
3. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f dans un repère orthonormé du plan.

Exercice 4

Dans le tableau suivant :

$X \setminus Y$	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0	2
x_2	2	3	0
x_3	0	2	2

1. Déterminer x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 et y_3 tels que x_1, x_2, x_3 sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $r = 2$ et vérifient la relation suivante $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ et y_1, y_2, y_3 sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = 3$ et vérifient la relation suivante $y_1.y_2.y_3 = 27$.
2. Compléter le tableau et déterminer les séries marginales de X et Y.
3. Déterminer l'inertie du nuage par rapport à $O(0, 0)$. En déduire l'inertie par rapport à G point moyen de cette série.
4. Déterminer les droites de régression de y en x et de x en y.
5. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y).

Sujet 8

Exercice 1

Pour tout couple d'entiers naturels (x, y), on désigne respectivement par $pgcd(a, y)$ leur plus grand diviseur commun.

1. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que : $3x \equiv 23[7]$.
2. En déduire l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x, y) tels que : $3x - 7y = 23$.
3. Pour tout entier relatif k tel que $k \neq -7$, démontrer que :
   $pgcd(3 + 7k\ , -2 + 3k) = pgcd(k + 7\ , 23)$.
4. En déduire l'ensemble des couples d'entiers (x, y) tels que :
$$\begin{cases} pgcd(x, y) \neq 1 \\ 3x - 7y = 23. \end{cases}$$
5. On rappelle que pour tout couple d'entier (a, b), $pgcd(a, b) \times ppcm(a, b) = |ab|$.
   Déterminer les couples (a, b) d'entiers naturels tels que :
   $2ppcm(a, b) + 3pgcd(a, b) = 23$.

Exercice 2

Dans le plan orienté, on considère le triangle direct ABC tel que
$AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Les points I, J, K et R sont les milieux respectifs des segments $[AC], [AB], [BC]$et $[JB]$. P est le projeté orthogonal de I sur la droite (BC).

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Déterminer le rapport et une mesure d'angle de la similitude plane directe f qui transforme J en K et K en P.
3. Soit Ω le centre de la similitude f.
   a) Montrer que pour tout point M' image du point M par la similitude directe f, le triangle $\Omega MM'$ direct est rectangle et isocèle en M'.
   b) En déduire que Ω est le point I.
4. Construire le point F tel que $f(F) = A$.
5. On considère la suite des points (M_n), $n \in \mathbb{N}$; définie par
$$\begin{cases} M_0 = F \\ M_{n+1} = f(M_n) \quad \forall \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
   a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $(\overrightarrow{IM_n}, \overrightarrow{IM_{n+4}}) = \pi[2\pi]$.
   On pourra utiliser la relation de Chasles sur les angles de vecteurs.
   b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $IM_{n+4} = \frac{1}{4}IM_n$.
   c) Placer le point M_5.
6. On considère l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $MA + MJ = AB$.
   a) Montrer que (E) est une ellipse d'axe focal la droite (AB).
   b) Montrer que le point R appartient à l'ellipse (E) et préciser ses sommets.
   c) Construire l'ellipse (E) et (E') image de (E) par f.

Exercice 3

Soit g une fonction définie sur $(\mathbb{R})$ par $g(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$. On appelle $(\mathcal{C}_g)$ la courbe représentative de g dans le repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$.

1. a) Calculer les limites de g sur son ensemble de définition.
   b) Préciser les équations des asymptotes à la courbe $(\mathcal{C}_g)$.
   c) Calculer la dérivée g' de la fonction g puis dresser son tableau de variation de g. Préciser $g(0)$.
   d) Déterminer une équation de la tangente à $(\mathcal{C}_g)$ au point $x = 0$, on note T_0 cette tangente.
2. Soit x un réel quelconque.
   a) Calculer $g(x) + g(-x)$.
   b) Quelle propriété de symétrie peut-on déduire de la question suivante ?
   c) Tracer $(\mathcal{C}_g)$, ses asymptotes et la tangente T_0.
3. Soit $u(x) = 1 + e^{-x}$.
   a) Calculer $u'(x)$.
   b) En déduire la primitive G de g qui prend la valeur $-\ln 2$ en 0.
4. On pose $\alpha = \int_0^1 g(x)dx$.
   a) Calculer α.
   b) Déterminer le réel λ tel que $\alpha = \ln \lambda$.
5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $T_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} g(x)dx$.
   a) Exprimer T_n en fonction n.
   b) Calculer limite de T_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4

On donne l'équation (E) définie par : $(\frac{z+1}{z-1})^2 = 2i$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation (E).
2. Soit $z_A = 1 - 2i$ et $z_B = \frac{1}{5}(1 + 2i)$.
   a) Donner le module et un argument de z_A.
   b) Déterminer une équation du second degré dont les solutions sont z_B et z_A.
3. Linéariser $cosx.sin^3x$.

Sujet 9

Exercice 1

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E) : 148x - 97y = 1$.

1. Énoncer le théorème de Bézout.
2. Résoudre $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E). (On prendra (-19,-29) comme couple particulière).
3. a) Déterminer l'inverse modulo 148 de l'entier naturel 97.
   b) Prouver que 149 est un nombre premier.
   c) Soit p un entier naturel non nul tel que : $p \leq 148$.
   Montrer, en utilisant le petit théorème de Fermat que : $p^{148} \equiv 1[149]$.
4. Soit $a \in \{2, 3, 4, ..., 148\}$. On pose $S(a) = 1 + a + a^2 + ... + a^{147}$.
   a) Montrer que a^{148} et $a - 1$ sont premier entre eux.
   b) Montrer que 149 divise $S(a)$.

Exercice 2

ABC est un triangle équilatéral direct de centre de gravité G.
K est le projeté orthogonal de G sur la droite (AB), H est le projeté orthogonal de G sur la droite (AC).
Soit g la similitude plane directe de centre A et qui transforme G en H.

1. Caractériser g.
2. Soit (E) l'ellipse de centre A' milieu du segment $[BC]$, de sommet G et de foyer C.
   a) le point S est le sommet de (E) situé sur la droite (BC).
   Exprimer $A'S$ en fonction de GC.
   b) Représenter les sommets de (E).
   c) Construire un point M_0 de (E) situé sur la droite (AC).
   d) Calculer l'excentricité e de (E).
   e) Construire (E') l'image de (E) par l'application g.
   f) Calculer l'excentricité e' de (E'). Comparer e et e'.
3. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(A', \overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'G})$.
   a) Déterminer les coordonnées des points C, G, S et A.
   b) Donner une équation de (E) dans ce repère.
   c) Calculer l'aire de (E) en unité d'aire.
   e) En déduire en unité d'aire l'aire de(E').

Exercice 3

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie par : $g(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ et $(\mathcal{C}_g)$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan unité graphique $2cm$.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de g.
   b) Calculer la dérivée g' de g et dresser le tableau de variation de g.
   c) Étudier le signe de la dérivée seconde de g et en déduire la position relative de $(\mathcal{C}_g)$ par apport à sa tangente (T_0) en 0.
   d) Démontrer que l'origine O du repère est un point d'inflexion pour la courbe $(\mathcal{C}_g)$.
2. a) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.
   b) Soit h la bijection réciproque de g et $(\mathcal{C}_h)$ sa courbe représentative.
   Montrer que pour tout x de I, $h(x) = \ln(\frac{1+x}{1-x})$.
3. Construire dans le même graphique les courbes $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$.
4. Pour tout entier naturel n strictement positif, on définit la suite numérique (I_n) par $I_n = \int_0^{1-\frac{1}{n}} [ln(1+x) - ln(1-x)]dx$.
   a) En utilisant l'intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n non nul, $I_n = (\frac{2n-1}{n})ln(\frac{2n-1}{n}) - \frac{lnn}{n}$.
   b) Calculer la limite de la suite I_n quand n tend vers $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 4

Soit $P(z) = z^2 - 2e^{\frac{3}{2}i\theta}cos\frac{\theta}{2}z + e^{3i\theta}$ où z est un nombre complexe.

1. Montrer que $P(e^{i\theta}) = 0$, puis résoudre l'équation $P(z) = 0$.
2. Pour tout valeur donnée θ, on désigne par M_1 et M_2 les images respectives dans le plan complexes $e^{i\theta}$ et $e^{2i\theta}$, M un point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2$.
   a) Déterminer θ pour que M appartienne au cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 1.
   b) Quelle est alors la position correspondante de M ?
   c) Déterminer θ pour que l'isobarycentre des points M, M_1 et M_2 appartienne à $(\mathcal{C})$ (on supposera $\theta \in]0, \pi[$ et on donnera θ à l'aide de la calculatrice).
3. Soit N le point du plan tel que $\overrightarrow{ON} = f(\theta) \times \overrightarrow{OM}_1$ avec $f(\theta) = Re(e^{iz\theta}) + Im(e^{iz\theta})$.
   Déterminer θ pour que N appartienne à $(\mathcal{C})$.

Sujet 10

Exercice 1

Le plan complexe $\mathbb{C}$ est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, unité graphique $1cm$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = 3 + 5i$; $Z_B = -4 + 2i$ et $Z_C = 1 + 4i$, soit S une transformation du plan complexe qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' définie par : $Z' = 2(1 - i)Z + 1$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application S.
2. a) Déterminer l'affixe du point B' image du point B par S.
   b) Montrer que les droites (CB') et (CA) sont orthogonales.
3. Soit $M(x, y)$ le point d'affixe $Z = x + iy$, où x et y sont deux nombres entiers relatifs et $M'(x', y')$ image du point $M(x, y)$ par l'application S. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3y = 2$.
4. On considère l'équation (E) définie par : $x + 3y = 2$.
   a) Vérifier l'équation $x + 3y = 2$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
   b) Vérifier que le couple $(-4; 2)$ est solution de l'équation (E).
   c) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
   d) En déduire l'ensemble des points $M(x, y)$ dont les coordonnées x et y appartiennent à l'intervalle $[-5; 5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux.

Exercice 2

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O de rayon R. O' un point intérieur à $(\mathcal{C})$, distinct de O.

A tout point P de $(\mathcal{C})$, on associe le point M, intersection de (OP) et de la médiatrice du segment $[O'P]$.

1. a) Justifier que : $MP = O'M$.
   b) Montrer que : $OM + O'M = R$.
   c) En déduire que le lieu géométrique des points M est une ellipse (E) dont on précisera les foyers.
2. On se propose de démontrer que la médiatrice (T) du segment $[O'P]$ est la tangente au point M de l'ellipse (E).
   a) Soit N un point de (T). Montrer, en utilisant les propriétés de la norme d'un vecteur, que : $OP < ON + NP$.
   b) Montrer que : $ON + O'N > R$.
   c) En déduire que le point N est extérieur à l'ellipse (E).
   d) En déduire que (T) et (E) n'ont qu'un point commun M.
   e) Conclusion.
3. soit O et O' les foyers d'une ellipse (E), A et A' ses sommets situés sur l'axe focal. On donne $R = 6cm$ et $OO' = 2\sqrt{7}$, on rapporte le plan au repère orthonormé $(I, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où I est le milieu du segment $[OO']$.
   a) Construire l'ellipse (E) dans le repère $(I, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ puis donner son équation cartésienne.

b) Déterminer les équations des directrices (D) et (D') ; son excentricité et les coordonnées des foyers O et O'.

4. Soit g une similitude plane indirecte de centre I, d'axe (Δ) d'équation $y = x$ et de rapport $k = \frac{1}{2}$.
   a) Donner l'expression analytique de g.
   b) Déterminer l'équation cartésienne de (E'), image de (E) par g.
   c) Déterminer l'aire de (E). En déduire l'aire de (E').
   d) Construire l'ellipse (E') dans le même repère que (E).

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^{1-x}$. On désigne par $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'unité graphique $2cm$.

1. a) Déterminer les limites de f sur son ensemble de définition ; quelle conséquence graphique pour $\mathcal{C}_f$ peut-on tirer ?
   b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée f'.
   c) Dresser le tableau de variations de f et tracer sa courbe $\mathcal{C}_f$.
2. Soit n un entier naturel. On considère l'intégrale définie par $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.
   a) Établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
   b) calculer I_0, I_1 et I_2.
   c) Donner une interprétation graphique de I_2.
   On la fera apparaître sur le graphique de la question 1.c).
3. a) Démontrer que pour tout réel $x \in [0, 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante : $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$.
   b) En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4

1. Énoncer le théorème de Rolle.
2. On donne la fonction f dérivable sur un intervalle $[a, b]$ et la fonction h définie sur $[a, b]$ par $h(x) = f(x) - kx$ où $k \in \mathbb{R}$ et $h(a) = h(b)$.
   a) Montrer que $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
   b) Montrer que h est dérivable sur $[a, b]$.
   c) Montrer que si $h(a) = h(b)$, alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Sujet 11

Exercice 1
La division euclidienne d'un entier naturel non nul a par un entier naturel non nul b, donne un reste r.

1. Quel est l'intervalle des valeurs possibles de r.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 3^n, $n \in \mathbb{N}$ par 11.
3. Déterminer les entiers naturels n tels que : $3^{2n} + 3^n = 3^2[11]$.
4. En déduire le reste de la division euclidienne par 11 du nombre entier naturel $p = 14501^{2015} + 132^{2016}$.
5. Soit la suite numérique (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{n-1}$.
   a) Montrer que pour tout entier naturel non nul, on a : $2U_n = 3^n - 1$.
   b) En déduire que U_{2015} est divisible par 11.

Exercice 2
Dans le plan orienté $(\mathcal{P})$, on considère le triangle équilatéral OBA de sens direct et de centre de gravité G. On construire à l'extérieur de ce triangle un autre triangle équilatéral OAC tel que les points A', C' et B' désignent respectivement les milieux des segments $[OC]$, $[BA]$ et $[OA]$. Les droites (BA') et (OA) se coupent en I.

1. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. a) Déterminer le rapport et une mesure d'angle de la similitude plane directe S_1 transformant B en B' et A en A'.
   b) Déterminer l'image $S_1(O)$ du point O par la similitude directe S_1.
3. Montrer qu'il existe une homothétie h qui transforme O en B' et B en A', on déterminera son centre et son rapport.
4. Soit S_2 la similitude plane indirecte de centre O transformant B en B', déterminer son axe et son rapport.
5. Déterminer la composée $S = S_1 \circ S_2$.
6. Soit (H) l'hyperbole de rectangle fondamental $OC'AA'$, de foyers F et F' où F est un point du segment $[AC]$.
   a) Construire l'hyperbole (H).
   b) Soit (H_o), l'arc de l'hyperbole (H) situé à droite du segment $[AA']$. Construire l'image (H'_o) de (H_o) par l'application S_2.

Exercice 3

Soit la fonction numérique f à variable réelle x, définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 100(\frac{lnx}{x})^4$. On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Unité graphique $2cm$.

1. a) Calculer la dérivée f' de la fonction f, puis étudier le signe de cette dérivée.
   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
2. Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$, on admettra que les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$ sont des asymptotes à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f.
3. On se propose de calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, et les droites d'équations $x = 1$, $x = e$ et $y = 0$. Pour cela on se propose de calculer l'intégrale $I_n = \int_1^e \frac{(lnx)^n}{x^4} dx$, $n \in \mathbb{N}$.
   a) Calculer I_1.
   b) Par une intégration par parties, montrer que l'on a : $I_n = -\frac{1}{3e^3} + \frac{n}{3} I_{n-1}$.
   c) En déduire I_2 et I_3.
   d) Calculer alors l'aire $\mathcal{A}$.

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'unité graphique : $\| \overrightarrow{i} \| = \| \overrightarrow{j} \| = 1cm$. On place une puce à l'origine O de ce repère, elle effectue cinq sauts consécutifs d'un centimètre chacun de l'avant sans recul, soit parallèlement à l'axe (OX) des abscisses de probabilité $\frac{2}{3}$, soit parallèlement à l'axe (OY) des ordonnées de probabilité $\frac{1}{3}$.

1. Calculer la probabilité pour que cette puce partant de l'origine O du repère se retrouve au point A de coordonnées $A(3, 2)$ au cinquième saut.
2. On considère la variable aléatoire réelle X égale au nombre de sauts effectués parallèlement à l'axe (OX) des abscisses pendant cette épreuve.
   a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Sujet 12

Exercice 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on donne le point $A(12, 18)$. On désigne par B un point de l'axe $(O, \overrightarrow{i})$ et par C un point de l'axe $(O, \overrightarrow{j})$ tels que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

1. Démontrer que le couple (x, y) est solution de l'équation $(E) : 2x + 3y = 78$.
2. On se propose de trouver tous les couples (B, C) de points ayant pour coordonnées des entiers relatifs.
   a) Montrer que l'on est ramené à l'équation (E), avec x et y appartenant à $\mathbb{Z}$.
   b) A partir de la définition de B et de C, trouver une solution particulière (x_0, y_0) de (E) avec $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$.
   c) Démontrer qu'un couple (x, y) est solution de (E) si et seulement si il est de la forme $(12 + 3k; 18 - 2k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.
   d) Combien y-a-t-il de couples de points (B, C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs tels que : $-6 \leq x \leq 21$ et $-5 \leq x \leq 15$?

Exercice 2

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de diamètre $[AB]$ et de centre O. Soit (Δ) la médiatrice de $[OB]$ qui coupe $(\mathcal{C})$ en I et J.

1. Faire une figure, on prendra $AB = 8cm$.
2. Quelle est la nature du quadrilatère $OIBJ$.
3. Soit K le projeté orthogonal de O sur $[AI]$.
   Démontrer que les points K, O, J sont alignés.
4. Soit S la similitude plane directe de centre K qui transforme I en O.
   Déterminer le rapport et l'angle de S.
5. Déterminer les images des segment $[IJ]$ et $[OI]$ par S.
6. En déduire l'image du point J.
7. Soit (E) l'ellipse de foyers A et O passant par K.
   a) Construire le point de (E) situé sur $[OI]$.
   b) Construire (E).
   c) Construire ses directrices.

Exercice 3

Soit (C) la courbe dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = \sin 2t \\ y(t) = \cos t \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Déterminer l'intervalle d'étude utile des fonctions x et y.
2. Étudier les variations des fonctions x et y.
3. Montrer que la courbe (C) est inscrite dans un carré de coté 2.
4. Déterminer les points contacte avec ce carré puis Tracer (C).
5. Tracer (C).

Exercice 4

P_0, P_1, P_2 sont trois plans de l'espace tels que : P_1 et P_2 sont parallèles,
P_0 est perpendiculaire à P_1 et P_2.
D'une urne contenant trois boules numérotées 0,1,2 et indiscernables au toucher,
on extrait successivement sans remise deux boules.
Si le premier numéro amené est i et le second j, on forme la composée $f = S_{P_i} \circ S_{P_j}$,
où S_{P_i} et S_{P_j} sont les symétries orthogonales par rapport aux plans P_i et P_j
respectivement.
Calculer la probabilité pour que :

1. f soit une translation.
2. f soit une rotation.
3. $f \circ f$ soit une identité.

Sujet 13

Exercice 1

On donne dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 2688x + 3024y = -3360$.

1. Déterminer le $PGCD(2688, 3024)$, puis en déduire que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
2. Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $(E_1) : 8x + 9y = -10$.
3. a) Montrer que l'équation (E_1) peut s'écrire $(E_2) : 8x \equiv -10[9]$.
   b) Résoudre l'équation (E_2).
   c) En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 2

Le plan est orienté. $ABCD$ est un rectangle tel que $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$, on considère le losange $BDEG$ tel que $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE})[2\pi]$. Dans cet exercice S_Δ et $t_{\overrightarrow{u}}$ désignent respectivement la symétrie orthogonale d'axe la droite (Δ) et la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. On considère la transformation $f = S_{AD} \circ S_{AB} \circ S_{BD}$.

1. Faire la figure. On prendra $AB = 4cm$ et on disposera (AB) horizontalement.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $g = S_{AB} \circ S_{BD}$.
3. R désigne la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$. Déterminer la nature de la transformation $h = S_{AD} \circ R$.
4. On désigne par F le milieu du segment $[BG]$.
   a) Démontrer que $f = t_{\overrightarrow{BF}} \circ S_{AC}$.
   b) En déduire les éléments caractéristiques de f.
5. Soit $(\mathcal{P})$ la parabole dont une tangente est la droite (EF), la normale associée est la droite (GB) et l'axe focal est la droite (EB).
   Démontrer que A est le foyer de la parabole $(\mathcal{P})$.
6. Soit H le milieu du segment $[EG]$ et L celui du segment $[ED]$.
   Déterminer la directrice (D) de la parabole $(\mathcal{P})$.
7. Construire le point I de $(\mathcal{P})$ tel que $[IF]$ soit une corde focale.
8. Construire la corde focale $[JK]$ de $(\mathcal{P})$ où J appartient au segment $[AD]$.
9. Construire l'arc d'extrémités J et F de $(\mathcal{P})$.
10. Soit $(\mathcal{P}')$ l'image de $(\mathcal{P})$ par la transformation f.
    a) Déterminer le foyer de la parabole $(\mathcal{P}')$.
    b) Déterminer l'axe focal de $(\mathcal{P}')$.

Exercice 3

Soit l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + 2y = 0$.

1. Déterminer la solution particulière f de (E) vérifiant les conditions initiales suivantes $f(\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}}$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$.
2. On pose $f(x) = e^{-x}sinx$.
   a) Déterminer les réels A et B pour que $F(x) = e^{-x}(Acosx + Bsinx)$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   b) Calculer l'intégrale $U_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)dx$.
3. Soit (V_n) la suite numérique définie pour tout entier naturel n par : $V_n = \frac{e^{-\pi}+1}{2}(-e^{-\pi})^n$; $n \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Calculer la somme des termes $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + ... + V_n$ en fonction de n, puis en déduire la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4

Soit le tableau statistique à double entrée suivant :

$X \setminus Y$	-1	2	3
1	2	1	1
2	2	3	1

1. Convertir ce tableau en un tableau linéaire.
2. Déterminer le coefficient de corrélation $\rho(x, y)$ des caractères X et Y, on donne $\overline{X} = 1,6$ et $\overline{Y} = 1$.
3. Donner une interprétation de cette corrélation.