MATHÉMATIQUES

Spécialité Terminale C

ANTOINE GILDAS MBA OBIANG

Exercices de Maths

Exercice 1. Soit $z \in \mathbb{C}$, résoudre l'équation $z^2 = 3 - 4i$.

Exercice 2. Calculer le module de $(1+2i)^6$

Exercice 3. Soit $x \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $e^{2x+1} = 2e^x$.

Exercice 4. Soit $x \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $2^x + 2^{x+2} = 1$.

Exercice 5. Déterminer la mesure principale de $\dfrac{77\pi}{3}$.

Exercice 6. Calculer $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ sachant que $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 7. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \cos x + \sin x$

Exercice 8. Résoudre l'équation $e^z = 2i$, puis $e^{2z} = 1 + i\sqrt{3}$

Exercice 9. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $y'' - 4y = e^t$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.
2. $y' + y = \cos t$ avec $y(0) = 0$.

Exercice 10.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in]0;\pi[$. Dans $\mathbb{C}$, résoudre l'équation suivante :

$$(E) \ : \ \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 2\cos\alpha$$

Exercice 11.

Etudier le comportement asymptotique des suites numériques suivantes :

$$u := (n^{2/n})_{n\in\mathbb{N}^*} \qquad\qquad u := \left(\frac{\lfloor n+1/2 \rfloor}{\lfloor n-1/2 \rfloor}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Exercice 12.

1. Etudier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de la fonction $\varphi_n : [\![0,n]\!] \ni k \longmapsto \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \in \mathbb{N}$.
2. En déduire l'encadrement : $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2\},\ 2 \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}} \leqslant 2 + \frac{2}{n} + \frac{n-3}{\frac{1}{\binom{n}{2}}}$.

3. Etudier le comportement asymptotique de la suite suivante : $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 13.

Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\forall (n,k,l)\in(\mathbb{N}^*)^3,\ \ -\frac{k}{n}-\frac{1}{k}\leqslant u_n\leqslant\frac{\ell}{n}+\frac{1}{\ell}$$

Démontrer que la suite u converge vers 0.

Exercice 14.

Soient deux suites dans $[0;1]^{\mathbb{N}}$ dont le produit converge vers 1. Prouver que chacune des deux suites converge.

Exercice 15.

On considère la suite (x_n) définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ x_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}$.

Montrer que $x_n^2\leqslant 1+x_n\sqrt{2}$. En déduire que (x_n) converge.

Exercice 16.

Etudier la continuité de la fonction f définition sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=E\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

E désignant la fonction partie entière.

Exercice 17.

Etudier la continuité de la fonction f définition sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=E\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

E désignant la fonction partie entière.

Exercice 18.

Etudier la continuité de la fonction f définition sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=xE(x)$$

E désignant la fonction partie entière.

Exercice 19.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \sqrt{x - E(x)} \quad \text{et} \quad g(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$$

E désignant la fonction partie entière. Etudier la continuité des fonctions f et g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20.

Pour tout $n \geqslant 2$, on note $E(n)$ l'ensemble de tous les entiers naturels inférieurs ou égaux à n tels que leur plus grand diviseur commun (PGCD) avec n soit le nombre 1.

Par exemple, $E(4) = \{1; 3\}$ et $E(8) = \{1; 3; 5; 7\}$.

Par suite, on considère le nombre $S(n)$ égal à la somme des valeurs de $\cos\left(k \times \frac{2\pi}{n}\right)$ lorsque k décrit l'ensemble $E(n)$. On peut noter $S(n) = \sum_{k \in E(n)} \cos\left(k \times \frac{2\pi}{n}\right)$.

1. Calculer $S(4)$ et $S(8)$.

2. Pour chacune des valeurs de n suivantes, décomposer n en produit de facteurs premiers puis déterminer $E(n)$.

   $n = 3$; $n = 9$; $n = 12$; $n = 14$; $n = 15$; $n = 30$; $n = 54$

3. Conjecturer les valeurs prises par $S(n)$ en fonction de n.

Exercice 21.

1. Montrer que l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $k(n) = n^2 + [tn]$ avec t dans $[0,2]$ est strictement croissante et que pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a que :

   $$[\sqrt{k(n)}] = n$$

   où $[\cdot]$ désigne la partie entière.

2. Déterminer à l'aide de la première question l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite de terme général :

   $$u_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$$

Exercice 22.

Soit proposition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x < 1 \Longrightarrow x^2 < 1)$$

1. Ecrire la négation de cette proposition.

2. Cette proposition est-elle vraie ?

Exercice 23. Soit E l'ensemble définie tel que $E \neq \varnothing$.

1. $\forall x \ (x \in E \ , \ P(x) \Longrightarrow \exists x \ (x \in E \ , \ P(x)))$ est-il vrai?

2. L'énoncé réciproque est-il vrai ?

Exercice 24.

Démontrer la relation suivante :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, (a^3 > b^2 \Longrightarrow a^2 + a > 2b)$$

Donner une interprétation graphique de ce résultat en terme de positions relatives.

Exercice 25.

On considère l'assertion suivante :

$\mathcal{P}$: $\forall\ a, b, x \in \mathbb{R}\ (((x^2 + ax + b = 0) \Longleftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = 2)) \Longrightarrow (a = -3 \text{ et } b = 2))$

Démontrer que $\mathcal{P}$ est vraie.

Exercice 26.

On considère les deux propositions suivantes :

$\mathcal{P}$: $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, $2x + 4y = 1$ et Q : $\forall\ x, y \in \mathbb{R},\ \ x^2 + y^2 \geqslant \dfrac{1}{20}$

1. Laquelle des deux propositions entraine l'autre ?
2. Montrer que $\mathcal{P}$ et Q ne sont pas équivalents.
3. Déterminer tous les réels x et y solutions du système : $\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ x^2 + y^2 = \dfrac{1}{20} \end{cases}$

Exercice 27. On note I l'intervalle $[0; +\infty[$.

Démontrer l'assertion suivante :

$\mathcal{P}$: « pour tout $y \in I$, il existe un unique $x \in I$, tel que $x + \sqrt{x} = y$ »

Exercice 28.

1. Montrer qu'il existe une fonction $x \longmapsto \varepsilon(x)$, définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, de limite nulle en 0, et telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}, \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$$
2. Montrer que l'on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(x \geqslant -\frac{1}{2} \Longrightarrow |\varepsilon(x)| \leqslant 2|x| \right)$$

Exercice 29.

Soit a nombre rationnel et (v_n) la suite définie pour tout entier non nul n par :

$$v_{n,a} = \sin^n(\pi a n!)$$

1. Soit q un entier naturel non tel que $q < n$.

   Calculer $v_{n,\frac{1}{q}}$
2. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_{n,a}$

Exercice 30.

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \quad (1-u_n)^2 \end{cases}$$

Étudier la convergence de cette suite.

Exercice 31.

Une entreprise possède six voitures. Déterminer le nombre de répartition :

1. si elles doivent être placées chacun dans un garage différent ?

2. si elles sont placées deux à deux dans trois garages différents ?

3. s'il y a quatre garages identiques, deux recevant deux voitures et les autres une seule voiture ?

Exercice 32. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$$

Exercice 33.

Soit j le nombre complexe $-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Montrer que tout nombre complexe z s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme $x + \mathrm{j}y$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $|z|$ en fonction de x et de y.

2. Soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ et $\Omega = \{z \in \mathbb{U}; \exists (x, y) \in \mathbb{Z}^2, z = x + \mathrm{j}y\}$.

   Montrer que $z = x + \mathrm{j}y \in \Omega$ implique $|x| \leqslant 1$ et $|y| \leqslant 1$. En déduire que Ω contient 6 éléments.

Exercice 34.

On considère l'intervalle $I = [0; 1]$ et une fonction numérique f définie et continue sur I, telle que

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = 1$$

1. Montrer qu'il existe au moins un réel $x \in I$ tel que $f(x) = 1 - x$.

2. Interpréter cette propriété en termes géométriques portant sur le graphe de f.

Exercice 35.

Donner une démonstration abrégée de l'égalité suivante :

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{+\cdots}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}$$

Exercice 36.

1. Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$.

2. Montrer qu'il existe une bijection continue de $\mathbb{R}$ vers $]-1; 1[$.

3. Montrer qu'il existe une bijection continue entre $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et $]-1;1[$.

Exercice 37. Dans cet exercice on se propose de calculer la limite $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}$.

1. Montrer que $\forall x\in]0;+\infty[,\ x-\ln(1+x)=\displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+t}dt$.

2. a) Montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{1}{1+\sqrt{u}}du$.

   b) En déduire $\forall x\in]0;+\infty[,\ \dfrac{1}{2(x+1)}\leqslant\dfrac{x-\ln(x+1)}{x^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$ puis conclure.

Exercice 38. *Dans cet exercice on se propose de montrer que toute application affine f non constante et autre que l'identité qui vérifie $f\circ f=f$ est une projection sur un droite du plan affine.*

Soit f une application affine non constante et autre que l'identité qui vérifie $f\circ f=f$.

1. Justifier que l'ensemble $\Delta=\{M\in\mathcal{P}\,/\,f(M)=M\}$ est non vide.

2. Montrer que Δ est une droite de direction celle des vecteurs invariants de l'application linéaire φ associée à f.

3. Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite Δ et M un point du plan.

   a) Justifier que $\overrightarrow{Mf(M)}$ garde une direction fixe celle du vercteur $\vec{u}$.

   b) Conclure.

Exercice 39.

On considère l'application $\|\cdot\|_1$ qui a chaque fonction f continue sur $I=[a;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ associe le nombre réel positif ou nul tel que :

$$f\longmapsto \|f\|_1=\int_a^b |f(x)|dx.$$

Définition.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction définie sur I.

1. *On dit que cette suite de fonction converge simplement vers une fonction f si pour tout $x\in I$ la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$.*

2. *On dit que cette suite de fonction converge vers une fonction f au sens de $\|\cdot\|_1$ si $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f_n-f\|_1=0$.*

Partie A : Un exemple de convergence simple

Dans cette partie on pose $I=[0;1]$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction définie sur I par $f_n(x)=x^n$

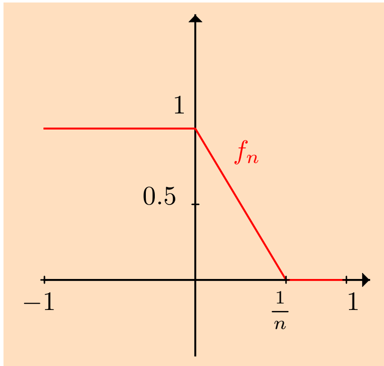
1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x=1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

2. La fonction f est-elle continue sur $I=[0;1]$?

Partie B : Un exemple de convergence au sens de $\|\cdot\|_1$

On considère la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le graphe est représenté ci-contre.



1. Déterminer l'expression du terme général de la $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $x\in[-1;1]$.
En déduire la fonction f_n est continue sur $I=[-1;1]$.

2. Démontrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction f définie pour tout $x\in[-1;1]$ par : $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\in[-1;0] \\ 0 & \text{si } x\in]0;1] \end{cases}$ au sens de $\|\cdot\|_1$.

3. La fonction f est-elle continue sur $I=[-1;1]$?

Exercice 40. Soit $n\geqslant 1$ et $z\in\mathbb{C}$.

Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(z+e^{\frac{i2\pi k}{n}}\right)^n = n(z^n+1)$$

Exercice 41.

1. a) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation :

$$x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x-1 = 0$$

a une unique solution strictement positive u_n.

b) Calculer u_1 et u_2.

2. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

4. a) Montrer que $\forall n\geqslant 2$, $u_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{u^{n+1}}{2}$.

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{n+1}=0$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 42. Image d'un cercle par une affinité.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. $(\mathcal{C})$ est le cercle d'équation :

$$x^2+y^2-4x-4y-1 = 0$$

$A_f(\mathcal{D};k)$ l'affinité orthogonale d'axe $\mathcal{D}$ d'équation $x=2$ et de rapport k.

1. Déterminer les expression analytiques de $A_f(\mathcal{D};k)$.

2. Déterminer l'image $(\mathcal{C}'_k)$ de $(\mathcal{C})$ par $A_f(\mathcal{D};k)$.

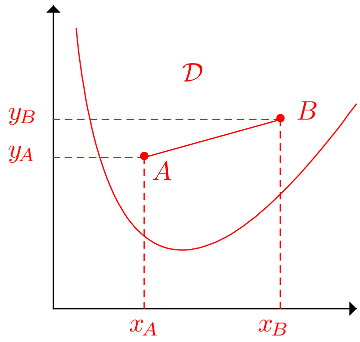
3. Donner les éléments caractéristiques de $(\mathcal{C}'_2)$ ainsi que sa représentation graphique(unité graphique : le centimètre).

Exercice 43. Problème.

Partie A : Définition et exemples

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $\mathcal{F}_{\text{conv}+}$ l'ensemble des fonctions f de I dans $\mathbb{R}$ qui vérifient les conditions équivalentes suivantes :

i. Pour tous points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ de la partie $\mathcal{D} = \{(x;y) \in I \times \mathbb{R} / y \geqslant f(x)\}$ du plan, $[\text{AB}] \subset \mathcal{D}$;



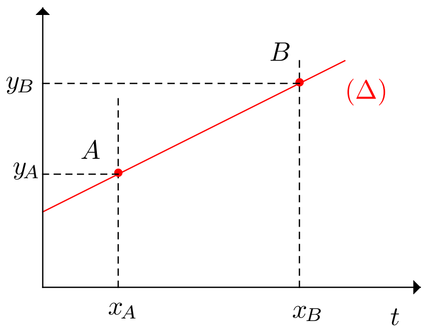
ii. Pour tout $a, b \in I$, pour tout $t \in [0;1]$ $f[(1-t)a + tb] \leqslant (1-t)f(a) + tf(b)$.

De même on note $\mathcal{F}_{\text{conv}-}$ l'ensemble des fonctions f de I dans $\mathbb{R}$ tels que $-f \in \mathcal{F}_{\text{conv}+}$.

Ensemble des barycentres

Ensemble des barycentres

Soit A et B deux points de la droite (Δ) ci-dessous :



a) Démonter que l'ensemble des barycentres des points A et B est la droite (Δ).

b) Montrer que le point M appartient au segment [AB] si et seulement si M peut s'écrire comme barycentre des points A et B affectés des coefficients de même signes. En déduire une paramétrisation du segment [AB] est $\{((1-t)x_A + tx_B, (1-t)y_A + ty_B), t \in [0;1]\}$.

Quelques exemples

1. Parmi les fonctions suivantes dire si elles appartiennent à $\mathcal{F}_{\text{conv}+}$ ou à $\mathcal{F}_{\text{conv}-}$. Justifier

$$f(x) = 3x + 5 \quad ; \quad g(x) = x^2 \quad ; \quad h(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad i(x) = |x| \quad ; \quad j(x) = \sin x \quad ; \quad k(x) = \ln x$$

2. En justifiant d'abord que la fonction $x \longmapsto e^x$ appartient à $\mathcal{F}_{\text{conv}+}$ puis montrer que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad , \quad e^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \frac{e^a + e^b}{2}$$

3. a) Démontrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $ab \leqslant \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$. En déduire que $\forall x, y > 0$,

$$\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln y \leqslant \ln\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)$$

   b) **Généralisation**

   Soit p et q deux nombres réels strictement supérieurs à 1 tels que : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

   i. Montrer que $\forall x, y > 0$, $\dfrac{1}{p}\ln x + \dfrac{1}{q}\ln y \leqslant \ln\left(\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q}\right)$.

   ii. En déduire que $\forall a, b > 0$, $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$

Partie B : Plus généralement !

Soit n un entier naturel non nul.

On souhaite montrer dans cette partie que si f est une fonction appartenant à $\mathcal{F}_{\text{conv}+}$, alors pour tous réels x_1, x_2, ..., x_n de I et pour tous réels positifs λ_1, λ_2, ..., λ_n vérifiants $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on a $f\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$. (1)

On se propose de montrer cette propriété par récurrence sur n. Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{F}_{\text{conv}+}$. On note $\mathcal{P}(n)$ la proposition :

« pour tout réels positifs λ_1, λ_2, ..., λ_n vérifiant $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on a $f\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$.»

1. Montrer que s'il existe $k \in \{1; ...; n\}$ tel que $\lambda_k = 1$, alors la proposition est vraie.

   On suppose donc dans la suite que, pour tout $k \in \{1; ...; n\}$, $\lambda_k \neq 1$.

2. En utilisant la définition des fonctions convexes donnée en préambule, montrer que la proposition est vraie au rang $n = 2$.

3. Supposons qu'il existe un entier n tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est alors également vraie.

   On considère donc $n+1$ nombres de I notés x_1, x_2, ..., x_{n+1} et λ_1, λ_2, ..., λ_{n+1}, $n+1$ nombres réels positifs et différents de 1.

   On pose $\lambda = 1 - \lambda_{n+1}$ et $x = \dfrac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n}{\lambda}$.

   a) Justifier que $f\left(\sum\limits_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f(\lambda x + \lambda_{n+1} x_{n+1})$.

   b) Vérifier que $\lambda + \lambda_{n+1} = 1$ et, en utilisant $\mathcal{P}(2)$, justifier que :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) \leqslant \lambda f(x) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

   c) Utiliser l'hypothèse de récurrence pour achever la démonstration.

Partie C : Application

Soient x_1, x_2, ..., x_n n réels strictement positifs. On suppose montrer l'inégalité :

$$\sqrt[n]{x_1 ... x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

1. Justifier que la fonction $-\ln$ appartient à $\mathcal{F}_{\text{conv}+}$ avec $I =]0; +\infty[$.

2. Utiliser l'inégalité (1) de la partie A avec $-\ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n}\right)$.

3. Conclure.

Exercice 44.

Pour chaque question proposée, une seule réponse est correcte. Vous indiquerez sur votre feuille, dans l'ordre, le numéro de la question et la lettre de la question correspondante. Aucune justification n'est exigée.

Questions	Choix	
1) Soit A et B deux points distincts du plan. L'ensemble des points M vérifiant : $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{MA}}; \overrightarrow{\mathrm{MB}}}\right) = \frac{5\pi}{6}[\pi]$ est :	A : la droite (AB) privé de A et B B : un arc de cercle d'extrémités A et B C : un cercle de corde d'extrémités A et B D: Aucun des réponses proposées ne convient.	
2)La distance du point A(1 ; -2 ; 1) au plan d'équation : $-x + 3y - z = -5$ est éagl à :	A : $\frac{3}{\sqrt{11}}$ B : $\frac{1}{2}$ C : $\frac{8}{\sqrt{11}}$ D: Aucun des réponses proposées ne convient.	
3)On lance deux fois de suite un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On fait la somme des numéros apparaissant sur la face supérieure. Sachant que cette somme est 6,la probabilité que les deux numéros soient égaux est égale à :	A : $\frac{1}{2}$ B : $\frac{1}{3}$ C : $\frac{1}{5}$ D: Aucun des réponses proposées ne convient.	
4) Soit A,B et C trois points disntincts du plan $\mathcal{P}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application f_a qui a tout point M de $\mathcal{P}$ associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = a\overrightarrow{MA} + a\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$. f_a est une homothétie si et seulement si :	A : $a \neq \frac{1}{2}$ B: $a \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$ C : $a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{1}{2} \neq 0$ D: Aucun des réponses proposées ne convient.	
5) Soit n un entier naturel. Le nombre complexe $(\sqrt{3} + \mathrm{i})^n + (\sqrt{3} - \mathrm{i})^n$ est : : du plan $\mathcal{P}$.	A : un nombre réel B : un nombre imaginaire pur C : le nombre nul D: Aucun des réponses proposées ne convient.	

Exercice 45.

Soit n un entier naturel non nul, q un réel distinct de 0, de 1 et de -1.

On considère dans le plan complexe, n points A_0, A_1, .., A_{n-1} d'affixes respectives z_0 , z_1,.., z_{n-1}.

1. Démontrer que le système de point pondérés $\{(A_k, q^k), 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$ admet un barycentre G_n.

2. On donne :

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \forall k \in \{1, 2, ..., n-1\}\ z_k = z_1^k. \end{cases}$$

3. Déterminer l'affixe Z_n de G_n en fonction de q et z_1.

4. Calculer la partie réelle X_n et la partie imaginaire Y_n de Z_n.

   On pourra utiliser les relations $X_n = \frac{Z_n + \overline{Z_n}}{2}$ et $Y_n = \frac{Z_n - \overline{Z_n}}{2\mathrm{i}}$.

5. Comment faut-il choisir n pour que Z_n soit réel ?

6. Montrer que les suites (X_n) et (Y_n) sont convergentes et préciser leur limite respective.

Exercice 46. Géométrie dans l'espace-arithmétique.

L'espace est muni d'un repère orthormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soient F le point de coordonnées $\left(0; 0; \dfrac{1}{4}\right)$ et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $z = -\dfrac{1}{4}$.

   On note $d(M, \mathcal{P})$ la distance d'un point M du plan $\mathcal{P}$. Montrer que l'ensemble $(\mathcal{S})$ des points M de coordonnées $(x; y; z)$ qui vérifient $d(M, \mathcal{P}) = MF$ a pour équation $x^2 + y^2 = z$.

2. a) Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble $(\mathcal{S})$ avec le plan d'équation $z = 2$?

   b) Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble $(\mathcal{S})$ avec le plan d'équation $x = 0$?

3. Dans cette question, x et y désignent des nombres entiers naturels.

   a) Quels sont les restent possibles de la division euclidienne de x^2 par 7 ?

   b) Démontrer que 7 divise $x^2 + y^2$ si et seulement si 7 divise x et 7 divise y.

4. Existe-t-il des points qui appartiennent à l'intersection de l'ensemble $(\mathcal{S})$ et du plan d'équation $z = 98$ et dont toutes les coordonnées sont des entiers naturels ? Si oui les déterminer.

Exercice 47. Fonction ln – suites – primitives – intégrales.

Soit I l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, et a un réel tel que $a \in I$. On considère d'une part les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par les formules :

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = f(\sin x)$$

d'autre part les suites (I_n) et (F_n) définies, pour tout entier $n \geqslant 1$, par les formules :

$$I_n(a) = \int_0^a \frac{\sin^{2n} t}{\cos t}\mathrm{dt} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x + \cdots + \frac{1}{2n-1}\sin^{2n-1} x$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f. Montrer que f est impaire.

2. Montrer que la fonction g est une primitive de la fonction fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos x}$ sur l'intervalle I.

3. Démontrer la propriété suivante :

$$\forall a \in I, 0 \leqslant I_n(a) \leqslant a \times \frac{\sin^{2n} a}{\cos a}$$

4. En déduire que la suite $(I_n(a))$ converge pour tout $a \in I$, et déterminer sa limite.

5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ la fonction $x \longmapsto F_n(x)$ est une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1-\sin^{2n} x}{\cos x}$ sur lintervalle $[0; a]$.

6. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}, \forall a \in I, F_n(a) = g(a) - I_n(a)$$

7. En déduire que pour tout $a \in I$, la suite $(F_n(a))$ est convergente, et déterminer sa limite.

   En déduire que :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{1-2k}}{2k-1} = \frac{\ln 3}{2}$$

Exercice 48.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{x^2} dx$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$$

2. Préciser alors la limite de la suite (I_n).

3. a) Trouver une relation entre I_{n+2} et I_n.

   b) Calculer I_1 puis I_5

Exercice 49.

Soit n un entier naturel, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt{1-t^2}\right)^n dt$.

1. Calculer I_0 , I_1.
2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante et minorée. Conclure.
3. a) Montrer que pour tout entier naturel supérieur ou égale à 2 :

$$I_n = \frac{n}{n-1} I_{n-2}$$

   b) En déduire que pour tout n, $(n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+2)I_{n+1}I_n$.
   c) En déduire que $(n+2)I_{n+1}I_{n+2}$ est indépendant de n, quel que soit n puis déterminer sa valeur.

Exercice 50.

1. Montrer que : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln n} = 1$

2. Montrer que : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)}{\pi \ln n} = 1$

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par : $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$.

   a) Simplifier u_n

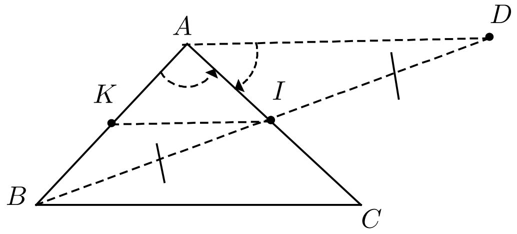
   b) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{\sqrt{\ln n}}$

Exercice 51. Isométrie du plan.

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que

$$\text{mes}\widehat{\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right)} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

On désigne par I le milieu de (AC) et K le milieu de [AB]. Voir figure ci-dessous :



1. Montrons qu'il existe un unique antidéplacement φ tel que :

$$\varphi(B) = A \quad \text{et} \quad \varphi(A) = C$$

2. Montrer que φ est une symétrie glissée.

3. Sachant que D le symétrie de B par rapport à I. Montrer que :

$$\varphi(C) \ = \ D$$

Exercice 52. Orthogonalité et distances dans l'espace.

Une fonction f est une **fonction scalaire de Leibniz** lorsqu'il existe un entier $n \geqslant 1$, n points A_1 ; ... ; A_n et n nombres réels a_1 ; ... ; a_n tels que, pour tout M de l'espace :

$$f(M) = a_1 \overrightarrow{A_1M}^2 + \cdots + a_n \overrightarrow{A_nM}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{A_iM}^2$$

1. Soient M et N deux points de l'espace.
   Montrer que $f(M) = f(N) + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right) \overrightarrow{NM}^2 + 2\overrightarrow{MN} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{NA_i}$.

2. On suppose dans la suite que $\sum_{i=1}^{n} a \neq 0$.
a) Justifier qu'il existe un point G de l'espace tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

b) un tel point G est-il unique ? Justifier votre réponse.
c) Exprimer, pour tout point M de l'espace, $f(M)$ en fonction de $f(G)$.
d) Soit k un nombre réel. Montrer que $f(M) = k$ si, et seulement si,

$$MG^2 = \frac{k - f(G)}{\sum_{i=1}^{n} a}$$

On notera dans la suite ce nombre ℓ.
e) En déduire l'ensemble des points M vérifiant $f(M) = k$ selon les valeurs de ℓ.

3. **Application** : On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ et on considère les $A(2; 3; 1)$, $B(4; -2; -4)$ et $C(4; -2; -4)$.
Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $\mathrm{AM}^2 - \mathrm{BM}^2 + \mathrm{CM}^2 = -21$

Exercice 53. Limite d'un suite.

(u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$.

(S_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ c'est-à-dire $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

1. **Une condition nécessaire**
On suppose que la suite (S_n) converge et on note ℓ sa limite.
a) Que vaut alors $\lim_{n \to +\infty} S_{n+1}$?
b) Pour tout entier naturel n, déterminer $S_{n+1} - S_n$.
c) En déduire la limite de la suite (u_n).
On vient de démontrer ainsi **la proposition *P***: « Si la suite (S_n) converge, alors la suite (u_n) a pour limite 0 ».
Ecrire la contraposée de cette proposition P.

2. **Un exemple**
(S_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{k+1}$.
Etudier la convergence de la suite (S_n).

3. **Et la réciproque ?**
On se propose de savoir si la proposition Q suivante est vraie ou fausse :
« Si la suite (u_n) converge vers 0, alors la suite (S_n) converge».
Pour cela, on considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

On suppose que la suite (S_n) converge vers un nombre réel ℓ.
a) Quelle est alors la limite de la suite (S_{2n}) ?
En déduire que $\lim_{n \to +\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$.
b) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ et en déduire que $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$.
c) Pourquoi cela est-il en contradiction avec le fait que la suite (S_n) converge ? Conclure.

Exercice 54. Nombres complexes : point de vue algébrique.

Partie A : Racine carrée d'un nombre complexe

Soit $\alpha = a + ib$ un nombre complexe, où a et b sont réels. On cherche à déterminer s'il existe un nombre complexe z tel que $z^2 = \alpha$.

On pose $z = x + iy$, où x et y sont deux réels.

1. Montrer que si z est une solution de l'équation $z^2 = \alpha$, alors il en est de même de $-z$.
2. Montrer que z est solution de $z^2 = \alpha$ si, et seulement si, x et y vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

3. a) Montrer que si $b > 0$, alors une solution de l'équation $z^2 = \alpha$ est donnée par

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

   Déterminer une deuxième solution de l'équation étudiée.
   b) Montrer que si $b < 0$, alors une solution de l'équation $z^2 = \alpha$ est donnée par

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

   Déterminer une deuxième solution de l'équation dans ce cas.
4. *Application*. Déterminer tous les nombres complexes z tels que :
   a. $z^2 = \sqrt{3}i$ b. $z^2 = \sqrt{2} - 2i$

Partie B : Résolution d'une équation du second degré à coefficient complexes
Soient a , b et c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. On souhaite résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$az^2 + bz + c = 0$$

1. Montrer que résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$ équivaut à résoudre l'équation

$$a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$$

   en posant $\Delta = b^2 - 4ac$.
2. Soit $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$.
   Montrer que les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont données par

$$\frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b+\delta}{2a}$$

3. **Application** : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations
   a. $z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0$
   b. $z^2 - (1 + i\sin 2\theta)z + \frac{i}{2}\sin 2\theta = 0 \qquad \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$
   Préciser les cas de racines doubles.

Exercice 55. Etude d'une suite recurrente.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On considère la fonction $f : [a;b] \longrightarrow [a;b]$ supposé continue et une suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [a;b] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. On suppose ici que f est croissante. Montrer que (u_n) est monotone et déduire sa convergence vers une solution de l'équation $f(x) = x$.

2. **Application**: Calculer la limite de la suite définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 5}{u_n + 3}$.

3. On suppose maintenant que f est décroissante.

   Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et convergentes.

4. **Application**: Calculer la limite de la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (1 - u_n)^2$.

Exercice 56.

On considère un triangle ABC et B', C' les milieux respectifs des segments [AC] et [AB], k est un nombre réel strictement positif différent de $\dfrac{1}{2}$ et de 1; D et E sont les points du plan tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{CE}} = k\overrightarrow{\mathrm{CA}}$$

I est le milieu du segment $[DE]$.

1. Démontrer que les points B', C' et I sont alignés.

2. a) Montrer que $C' = \mathrm{bar}\{(D,1),(A,2k-1)\}$ et $A = \mathrm{bar}\{(E,1),(C,k-1)\}$

   b) Ecrire le point C' comme barycentre des points D, E et C.

3. Pour la suite, on prend $k = 2$.

   a) Faire une figure.

   b) On admet que $C' = \mathrm{bar}\{(D,2),(E,3),(C,3)\}$ et on désigne par J le point tel que :

$$2\overrightarrow{CD} + 5\overrightarrow{JC} = \vec{0}$$

   Démontrer que les droites (AD), (JE) et $(B'I)$ sont concourantes.

Exercice 57.

m est un nombre réel. On considère la droite (Δ_m) d'équation $x - my + \sqrt{1 + m^2} = 0$.

Démontrer que (Δ_m) est tangente à un cercle de centre O dont on précisera le rayon.

Exercice 58. Problème - applications surjective - injectives

Préliminaires

1. Soit f l'application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ qui, à tout nombre entier naturel, associe la somme de ces chiffres. L'application f est-elle injective ? surjective ?
2. Donner la représentation graphique d'une fonction :
   a) surjective et non injective ;
   b) injective et non surjective.

Partie B

Dans la suite, on considère E et F deux ensembles de cardinal fini.

Soient n et p deux nombres entiers positifs. On pose $n = \mathrm{card}(E)$ et $p = \mathrm{card}(F)$.

1. Montrer que s'il existe une application f surjective de E dans F alors $n \geqslant p$.

2. Notons $\mathcal{S}_{n,p}$ le nombre de surjections de E dans F.

a) On suppose que $p > n$, déterminer $S_{n,p}$.

b) Déterminer $S_{n,2}$.

3. Montrer que $S_{n+1,n} = \mathrm{C}_n^2 \times n!$

4. a) Déterminer le nombre le nombre d'application de E dans F.

b) Donner une interprétation du nombre $\mathrm{C}_p^k \times S_{n,k}$.

c) Montrer $p^n = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{C}_p^k \times S_{n,k}$. En déduire $S_{n,3}$

Partie C

Monsieur Nziengui est un vieil agriculteur qui possède 5 champs. Il désire les léguer à ses trois enfants en respectant la règle suivante : chaque enfant doit recevoir au moins un champ. Déterminer le nombre de répartions possibles.

Exercice 59. Suite de fonction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la fonction numérique f_n définie sur $[0;1]$ et l'intégrale I définies par

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^n \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$$

1. Etudier pour tout n les variations de la fonction $x \longmapsto f_n(x)$ sur $[0;1]$.
2. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = +\infty \quad (1)$$

3. Montrer que

$$\forall x \in [0;1] \quad , \quad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0 \quad (2)$$

4. Calculer explicitement I_n en intégrant par parties.
5. En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = 1 \qquad (3)$$

6. Expliquer la contradiction apparente que présentent entre elles les relations (1), (2) et (3).

Exercice 60. Arithmétiques - congruences

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = 27 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} & = 3u_n - 4 \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
   Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n[8]$.
   En déduire que pour tout entier naturel, $u_{2n} \equiv 3[8]$ et $u_{2n+1} \equiv 5[8]$.
3. Pour tout entier naturel n on pose : $v_n = u_n - 2$.
   Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $2u_n = 50 \times 3^n + 4$.
4. Montrer que pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 54[100]$.
   Déterminer le deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

5. Montrer que deux termers consécutifs de la suite (u_n) sont premiers entre eux.

Exercice 61. Barycentres

Soit A et B deux points d'une droite (Δ), a et b deux nombres réels tels que : $0 < a < b$.

1. Démontrer qu'il existe deux points C et D tels que C est le barycentre des points (A, a) et (B, b), D est le barycentre des points (A, a) et $(B, -b)$.

   Préciser la position de ces points par rapport aux points A et B.

2. La droite (Δ) est muni du repère (A, B).

   Calculer, en fonction de a et b, les abscisses des points C et D et vérifier que :

$$\frac{\overline{\mathrm{CA}}}{\overline{\mathrm{CB}}} = -\frac{\overline{\mathrm{DA}}}{\overline{\mathrm{DB}}}$$

3. Démontrer que :

   a) A est le barycentre des points $(C, a+b)$ et $(D, a-b)$;

   b) B est le barycentre des points $(C, a+b)$ et $(D, b-a)$.

Exercice 62. Suites numériques

Soient q un réel différent de 1 et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On pose $G_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^2$.

   a) Dévélopper l'expression $M = (1-q)G_n$. En déduire une expression simple de M en fonction de q et n.

   b) En déduire une expression de G_n en fonction de q et n.

2. Obame décide d'acheter une nouvelle console de jeux, pour cela, il a besoin de 299000 fcfa. Ses parents lui donne 5000 fcfa le premier mois et augmente ensuite son argent de poche de 10% tous les mois.

   Déterminer le nombre de mois nécessaires pour qu'Obame puisse acheter la console.

Exercice 63. Une nouvelle fonction !

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant jamais sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tous réels x et y,

$$\frac{f(x+y)}{f(y)} = f(x)$$

1. Justifier que $f(0) = 1$.
2. Démontrer que, pour tout réel x, $f(2x) = [f(x)]^2$.
3. Démontrer que, pour tout réel x, on a $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
4. Démontrer que, pour tous réels x et y, $\dfrac{f(x-y)}{f(x)} = \dfrac{1}{f(y)}$.
5. Démontrer que f est dérivable en tout point a de $\mathbb{R}$ et calculer $f'(a)$.

Exercice 64. Les polynômes

On appelle *fonction polynôme* d'une variable réelle toute application de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad , \quad a_n \neq 0$$

Les a_i sont appelés les *coefficients du polynôme* et a_0 est le terme constant ; n, exposant du terme de plus haut degré, est appelé *degré du polynôme*. On appelle *polynôme nul* la fonction constante égale à 0. Un polynôme est dit *constant* si $n=0$.

1. Soit P une fonction polynôme de degré n et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Le polynôme P est divisible par $x-\alpha$ s'il existe un unique polynôme Q tel que, pour tout réel x, on ait $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$, le degré de Q étant $n-1$.

   Montrer P est divisible par $x-1$, si et seulement si la somme de ses coefficients est nulle.

2. ***Application*** : Parmi les polynômes suivants, quels sont ceux divisibles par $(x-1)$?

   (a) $P_1(x)=8x^5-3x^4+6x^2-4x-7$ (b) $P_2(x)=-x^6+x^5+x^3+2x^2-7$
   (c) $P_3(x)=7x^3-5x^2+3x-4$

Exercice 65.

Soit f la fonction définie par $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représenative le repère (O,I,J).

On désigne par $\mathcal{P}$ la courbe d'équation $y=x^2$. Pour tout réel x, soit H et M les points respectifs de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ d'abscisse x.

Déterminer HM en fonction de x.

Calculer une valeur x_0 telle que si $x>x_0$, alors :

$$HM<10^{-2}; \text{ même question pour } HM<10^{-4}$$

Que se passe-t-il pour $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{P}$ quand x prend des valeurs de plus en plus « grande».?

Exercice 66. Transformations du plan

ABCD est un losange de sens direct tel que mes$\hat{A}=\dfrac{\pi}{3}$.

1. Déterminer la nature et les élements caractéristiques des transformations suivantes :

$$f=S_{(\mathrm{BC})}\circ S_{(\mathrm{AD})} \quad ; \quad g=S_{(\mathrm{CD})}\circ S_{(\mathrm{AB})}$$

2. Démontrer que : $f\circ g=g\circ f=t_{\overrightarrow{AC}}$.

Exercice 67. Les polynômes

1. Soit a,b et c trois réels distincts. On considère le polynôme :

$$P(x) \;=\; \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}$$

   Montrer que pout tout réel x, $P(x)-1=0$

2. Démontrer que pout tout entier $n\geqslant 2$, le polynôme

$$f(x) \;=\; (x+1)^n-x^{2n}-2x-1$$

   est divisible par $x(x+1)(2x+1)$

Exercice 68. Logique

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraie ? Justifier.

a) « On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) qui n'admet pas de limite en l'infini. Alors, la suite $(u_n v_n)$ n'admet pas non plus de limite en l'infini»
b) « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre n^2+n+41 est premier »

2. Soit n un entier naturel non nul.
   Montrer que si n n'est pas premier, alors n admet un diviseur inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.
3. Soit n un entier naturel.
   Montrer que si l'on range $n+1$ paires de chaussettes dans n tiroirs, alors il y aura forcément au moins un tiroir comportant au moins deux paires de chaussettes.
4. Montrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Exercice 69. arithmétique

1. Soient n et k deux entiers naturels tels $k \leqslant n$. Démontrer les égalités suivants à l'aide de **deux méthodes** :

   a) $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$

   On suppose que $0 < k < n$

   b) Montrer que $\mathrm{C}_{n-1}^{k-1} + \mathrm{C}_{n-1}^{k} = \mathrm{C}_n^k$.

2. Soient p et q deux entiers naturels non nuls premiers tels que :

$$p \leqslant q \quad \text{et} \quad 10^{p+q-1} \equiv 1[pq]$$

   a) Montrer que : $\mathrm{PGCD}(p;10) = 1$.

   b) En déduire que : $10^{p-1} \equiv 1[p]$ et $10^q \equiv 1[p]$.

   c) Montrer que : $\mathrm{PGCD}(p-1;q) = 1$.

   d) Prouver que : $p = 3$, puis en déduire que $10^{q+2} \equiv 1[q]$.

   e) Décomposer $10^3 - 1$ en facteurs premiers, puis prouver que : $q \in \{3, 37\}$.

Exercice 70. Isométries du plan

On considère un plan $\mathcal{P}$.

Soit f une isométrie du plan $\mathcal{P}$ telle que $f \circ f \circ f \circ f = f^4 = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$.

Soit A_0 un point quelconque de $\mathcal{P}$. On pose

$$A_1 = f(A_0) \quad ; \quad A_2 = f(A_1) \quad ; \quad A_3 = f(A_2)$$

1. Que peut-on dire de l'isobarycentre O des quatre points A_0 , A_1 , A_2 , A_3 ?

2. Déterminer toutes les isométries f de $\mathcal{P}$ telles que $f^4 = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   Généraliser, en cherchant toutes les isométries f de $\mathcal{P}$ telles que $f^n = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$.

Exercice 71. Barycentres - ensemble de points

ABC est triangle équilatéral, de sens direct tel que $\mathrm{AB} = a$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$). On donne les informations suivantes :

- I et J sont des points tels que : $2\overrightarrow{\mathrm{BI}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $3\overrightarrow{\mathrm{AJ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

- Les droites (AI) et (BJ) se coupent en un point G.

- K, L et D sont des points tels que : $\overrightarrow{\mathrm{CL}} = 3\overrightarrow{\mathrm{CG}}$; $\overrightarrow{\mathrm{AK}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $2\overrightarrow{\mathrm{KD}} = \overrightarrow{\mathrm{KL}}$.

Partie A

1. Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure.

2. a) Ecrire G comme barycentre des points A, B et C.

   b) Démontrer que $D = \mathrm{bar}\{(A,1),(B,-8),(C,2)\}$.

3. Démontrer que les points D, B et J sont alignés.

Partie B

On considère $(\Gamma_1) = \{M \in \mathcal{P} \,/\, MA^2 - 8MB^2 + 2MC^2 = 3a^2\}$.

1. a) Démontrer que le point B appartient à (Γ_1).

   b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ_1).

2. a) Réduire la somme $MA^2 - 8MB^2 + 2MC^2$.

   b) Retrouver l'ensemble (Γ_1).

Partie C

On considère $(\Gamma_2) = \{M \in \mathcal{P} \,/\, MA^2 - 8MB^2 + 7MC^2 = -7a^2\}$. Soit le vecteur $\vec{u}$ défini par :

$$\vec{u} = \overrightarrow{MA} - 8\overrightarrow{MB} + 7\overrightarrow{MB}$$

1. a) Démontrer que $\vec{u} = 5\overrightarrow{DC}$.

   b) Démontrer que le point C appartient à (Γ_2).

   c) Déterminer et construire l'ensemble (Γ_2).

2. a) Réduire la somme $MA^2 - 8MB^2 + 7MC^2$.

   b) Retrouver l'ensemble (Γ_1).

Exercice 72. Etude de fonctions

On considère la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)e^x \,\mathrm{si}\, x < 1 \\ \\ x - 1 + \ln\frac{2x}{x+1} \,\mathrm{si}\, x \geq 1 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité 1 cm.

Partie A

1. Prouver que f est continue en x_0=1.

2. a) Vérifier que f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = \dfrac{3}{2}$.

   b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en $x_0 = 1$.

3. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

4. a) Etduier le sens de variation de f sur son domaine de définition.

   b) Dresser le tableau de variation de f.

5. On pose $\varphi(x) = f(x) + 1 - x - \ln 2$.

   Calculer $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$. Que signifie ce résultat pour la courbe $(\mathcal{C})$?

6. Tracer les démi-tangentes au point d'abscisse $x_0 = 1$, asymptote et la courbe $(\mathcal{C})$.

Partie B

On considère l'équation différentielle (E): $y' - y = (-2x + 1)e^x$.

1. Soit g une solution de (E) , démontrer que toute fonction $\phi(x) = e^{-x} g(x)$ vérifie :

$$\phi'(x) = -2x + 1$$

2. Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation $\sqrt{3}\cos x + \sin x - \sqrt{2} = 0$.

3. Soit la suite numérique $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x dx$$

   a) Calculer I_1 et interpréter géométriquement ce résultat.

   b) Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

   En déduir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = e - 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$.

4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{(n+1)!} \leq I_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$.

   En déduire $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right)$.

   On donne : $e^3 \simeq 0.05$; $e^{-2} \simeq 0.14$; $e^{-1} \simeq 0.37$; $\ln 2 \simeq 0.7$ *et* $\ln 3 \simeq 1.1$.

Exercice 73. Applications du plan

Soient A, B et C trois points distincts et non alignés du plan $(\mathcal{P})$.

Soit a un nombre réel. On considère l'application f_a qui à tout point M de $(\mathcal{P})$ associe le point M' de $(\mathcal{P})$ tel que : $\overrightarrow{MM'} = a\overrightarrow{MA} + a\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

1. Déterminer a pour que f_a soit une translation, dont on précisera le vecteur.

   On note a_a la valeur obtenue.

2. a est différent de a_0 dans toute la suite de l'exercice.

   a) Montrer que f_a admet un seul point invariant, noté Ω_a.

   b) Déterminer et représenter l'ensemble des points Ω_a , lorsque a décrit $\mathbb{R} - \{a\}$.

3. Montrer que, si plus a est distinct de 1, f_a est une homothétie dont on déterminera les éléments caractéristiques. Que peut-on dire de f_1 ?

Exercice 74. QCM

Pour chaque question proposée, une seule réponse est correcte. Vous indiquerez sur votre feuille, dans l'ordre, le numéro de la question et la lettre de la question correspondante. Aucune justification n'est exigée.

Questions	Choix	
1) Soit A et B deux points distincts du plan. L'ensemble des points M vérifiant : $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{MA}};\overrightarrow{\mathrm{MB}}}\right)=\frac{\pi}{6}[2\pi]$ est :	A : la droite (AB) privé de A et B B : un arc de cercle d'extrémités A et B C : un cercle de corde d'extrémités A et B D: Aucun des réponses proposées ne convient.	
2)La distance du point A$(1\,;\,-2\,;\,1)$ au plan d'équation : $-x+3y-z=-5$ est éagl à :	A : $\frac{3}{\sqrt{11}}$ B : $\frac{1}{2}$ C : $\frac{8}{\sqrt{11}}$ D: Aucun des réponses proposées ne convient.	
3)On lance deux fois de suite un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On fait la somme des numéros apparaissant sur la face supérieure. Sachant que cette somme est 6,la probabilité que les deux numéros soient égaux est égale à :	A : $\frac{1}{2}$ B : $\frac{1}{3}$ C : $\frac{1}{5}$ D: Aucun des réponses proposées ne convient.	
4) On muni le plan d'un repère $(O,\vec{u},\vec{v})$. On note z le nombre complexe de partie réelle x, de partie imaginaire y. L'ensemble des M d'affixe z vérifiant : $\lvert z+2\bar{z}+1\rvert=\sqrt{3}\lvert z+\bar{z}\rvert$ est une :	A : ellipse de centre $(1,0)$ B: hyperbole de centre $(1,0)$ C : parabole de sommet $(1,0)$ D: Aucun des réponses proposées ne convient.	
5) Soit n un entier naturel. Le nombre complexe $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^n$ est un nombre imaginaire pur si et seulement si :	A : $n=3$ B : $n=6k+2$, avec $k\in\mathbb{Z}$ C : $n=6k$, avec $k\in\mathbb{Z}$ D: Aucun des réponses proposées ne convient.	

Exercice 75. Problème

Partie A : Préliminaires

1. Démontrer que la fonction $g : x \longmapsto \tan x$ est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$.

   On note Arctan sa bijection réciproque.

2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Arctan puis donner son tableau de variation complet.

Partie B : Etude des variations d'une fonction définie par marceaux.

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t=0 \\ \dfrac{\operatorname{Arctan}(t)}{t} & \text{si } t\neq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et est paire.
2. On suppose pour tout t assez proche de 0, il existe une fonction polynôme ε telle que :

$$\operatorname{Arctan}(t) = t - \frac{t^3}{3} + \varepsilon(t)$$

   avec $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\varepsilon(t)}{t^3} = 0$.

   En déduire que f est dérivable en 0, et calculer $f'(0)$.
3. Justifer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f'(t)$, pour $t \in \mathbb{R}^*$.
4. A l'aide díune intégration par parties, montrer que pour pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\int_0^t \frac{w^2}{1+w^2} dw = -\frac{1}{2} t^2 f'(t)$$

5. En déduire le sens de variation de f.

Exercice 76. Algorithme de la dichotomie

Soit h la fonction définie sur $[-1;1]$ par $h(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α dans $[-1;1]$.
2. Proposer un encadrement de α à 10^{-3} près.
3. En déduire le signe de h sur $[-1;1]$.
4. Montrer que $\alpha = \dfrac{\alpha^3+1}{3}$.

Exercice 77. But calcul de l'intégral de Gauss

Si en partant d'une fonction algébriquement déterminée à partir des opérations de base (somme et différence, produit et division, composition) et des fonctions continues, il est tout à fait possible de déterminer l'expression de sa dérivée, ce n'est pas le cas pour le calcul de la primitive.

Ainsi le logarithme népérien, (primitive de la simple fonction inverse), n'est pas calculable à partir des 4 opérations. Pour étudier, on peut le faire à partir de sa définition comme l'unique primitive de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ sui s'annule en 1. Il en est une autre façon que nous allons bientôt rencontrer : celle de la fonction définie

sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ ; \ f(x) = e^{-x^2}$$

La courbe représentative de f est dite « Gaussienne » ou « courbe en cloche ».

Il n'existe pas d'expression algrébrique pour les primitives de f. Elles sont dites transcendantes.

Partie A : Etude de la fonction f

1. Montrer que f est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f.

2. Etudier la parité de f et celle de sa dérivée.

3. Etudier ses limites aux bornes de son ensemble de définie.

4. Tracer son tableau de variation.

5. Faire une représentation graphique de $\mathscr{C}_f$(repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et unité de 2cm)

Partie B : Etude d'une primitive de f

1. Montrer que f admet sur $\mathbb{R}$ des primitives.

2. Soit F la fonction de la variable réelle x définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$.

   a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.

   b) Montrer que c'est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. La caractériser.

3. Montrer que F est impaire.

4. Etudier les variations de la fonction F et déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_{\boldsymbol{F}}$ représentative de la fonction F au point d'abscisse nulle.

5. a) Montrer que $F(1) \leqslant 1$

   b) Exprimer $F(x) - F(1)$ au moyen d'une intégrale.

   c) Montrer que si $x \geqslant 1$, $F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^x e^{-t}dt + 1$.

   d) En déduire que la courbe $\mathscr{C}_{\boldsymbol{F}}$ admet une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = m$ et donner un encadrement de m.

   e) Que peut-on dire au voisinage de $-\infty$?

6. En remarquant que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = \displaystyle\int_0^x 1dt$, déterminer pour $x \geqslant 0$ le signe de la fonction :

$$h(x) = F(x) - x$$

   En déduire la position relative de $\mathcal{T}$ et $\mathscr{C}_{\boldsymbol{F}}$ pour $x \geqslant 0$. Que se passe-t-il pour $x \leqslant 0$?

Partie C : Intégrale généralisée

On donne la définition suivante :

Définition.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et admettant sur $\mathbb{R}$ des primitives.

Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt$ existe et vaut ℓ_1 et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 f(t)dt$ existe et vaut ℓ_2 alors on posera

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \ell_1 + \ell_2$$

1. Etudiez et calculer en fonction de m, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

2. Les fonction $x \longmapsto e^{-\alpha x^2}$ où $\alpha > 0$ s'appellent les fonctions gaussiennes.

Le mathématicien Pierre - simon de Laplace a fourni le premier calcul d'une « d'une intégrale de Gauss ». Il a montré que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} dt \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

En déduire la valeur de m et tracer la courbe représentative de F ainsi que sa tangente $\mathcal{T}$.

Exercice 78.

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+t^2}} dt$.

En utilisant le théorème de la moyenne, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ et } \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

Exercice 79.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive qui tend vers 0.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang.

Exercice 80. Rotations

ABC est un triangle équilatéral de sens direct.

On désigne par r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, par r_2 la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Pour tout point M du plan, on pose :

$$N = r_1(M) \quad \text{et} \quad M' = r_2(N)$$

Soit r la transformation telle que : $r = r_2 \circ r_1$.

1. Soit D le symétrique de C par rapport à la droite (AB) et Ω le milieu du segment $[BD]$.

   Déterminer $r(B)$. En déduire la nature de r.

2. a) Démontrer que les points M, N et M' sont alignés si et seulement si :

   $$\text{Mes}\widehat{\left(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MA}\right)} \;\equiv\; \frac{\pi}{3}[\pi]$$

   b) En déduire que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que M, N et M' soit alignés est un cercle passant par ls points A et Ω. Construire (Γ).