



**MEN-A**

=====

**IRE/N'ZÉRÉKORÉ**

=====

**DPE/LOLA**

**RÉPUBLIQUE DE GUINÉE**

=====

*Travail-Justice- Solidarité*

**RECUEIL DES SUJETS PROPOSES AU BAC  
EN MATHÉMATIQUES  
NIVEAU : TSM**

**LE SECRET DE REUSSITE AU BAC**

**Elaboré par Mr Antoine KONE**

**Ingénieur de Mines alias « INGE »**

**EDITION 2022**

**« La chance est au bout de l'effort »**

# AVANT PROPOS

Le succès rencontré dans mes précédentes éditions m'a permis de rédiger avec clarté et rigueur cet ouvrage « Annale Bac » comportant un rappel de cours, des exercices et les sujets de Mathématiques donner au Baccalauréat en Sciences Mathématiques en Guinée de 2000 à 2019 et les sujets proposés au Bac d'autres pays.

En rédigeant cet ouvrage, j'ai eu le souci de répondre aux objectifs suivants :

- Permettre aux élèves de s'entraîner individuellement ou en groupe tout en consultant leurs formateurs ;
- Aider les élèves à mieux rédiger

Je remercie très sincèrement mes professeurs du collège et Lycée, les docteurs russes de l'Institut Supérieur des Mines et Géologie de Boké qui ont beaucoup contribué à ma formation.

Je remercie particulièrement mes parents qui m'ont mis à l'école et m'ont soutenu jusqu'à la fin de mes études.

**L'Auteur**

**Koné Antoine**

**Ingénieur de Mines**

**Professeur de mathématique au Lycée de Lola**

# PREFACE

L'annale de Mathématiques proposée aux élèves et professeurs de la classe de Terminale Sciences Mathématiques est le fruit du travail du professeur Antoine KONE, Ingénieur de Mines « Alias Ingé »

Elle a pour objectif de faire acquérir par les élèves candidats, des bases solides leur permettant d'aborder l'épreuve de Mathématiques à l'examen.

La qualité rédactionnelle et le contenu de l'annale permettent la motivation des candidats et facilitent la compréhension des sujets corrigés par leurs formateurs.

Placés dans la première partie du recueil, des rappels des notions essentielles sur la fonction Logarithme Népérien, exponentielle et puissance mettent les utilisateurs dans les conditions optimales pour aborder les sujets corrigés par leurs formateurs.

Nous encourageons et félicitons l'auteur pour avoir abattu un tel travail pour la réussite de nos candidats à leur examen de fin d'année.

Nous encourageons l'auteur à fournir beaucoup d'effort pour améliorer à l'avenir le contenu de ce document qui est ouvert à toutes remarques, critiques et suggestions des différents utilisateurs.

En fin, nous espérons que cette annale répondra mieux à l'attente et aux besoins des utilisateurs (élèves et professeurs).

**Thierno Moussa DIALLO**  
**Inspecteur de Mathématiques**



# FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

## Rappel de Cours

### I- GENERALITE

#### 1- Définition :

On appelle fonction logarithme népérien, noté  $\ln$ , la primitive sur  $]0; +\infty[$  de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  qui prend la valeur 0 en 1.

Ainsi,  $\ln : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \ln(x)$

#### 2- Propriétés immédiates de la fonction $\ln$ .

La fonction  $\ln$  est caractérisée par les propriétés suivantes :

- $\ln(1) = 0$ .
- La fonction  $x \mapsto \ln(x)$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .
- Pour tout  $a$  et  $b$  éléments de  $]0; +\infty[$  :
  - $a < b$  équivaut à  $\ln(a) < \ln(b)$  ;
  - $a = b$  équivaut à  $\ln(a) = \ln(b)$  .

#### Cas particulier :

- Pour tout  $x \in ]0; 1[$ ,  $\ln(x) < 0$  ;
- Pour tout  $x \in ]1; +\infty[$ ,  $\ln(x) > 0$  .

### II. PROPRIETES ALGEBRIQUES

#### 1- Propriété fondamentale :

Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  strictement positifs :  $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$  .

#### 2- Conséquences

Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  strictement positifs, pour nombre rationnel  $r$  :

- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$  ;  $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln(a^r) = r\ln(a)$  ;  $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

### III. LIMITES-DERIVEE-PRIMITIVE

#### 1- Limites de référence

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

Représentation graphique

$x$	0	1	$+\infty$
$(\ln(x))$		+	
$\ln(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$



- $(T_1)$  :  $y = x - 1$  est la tangente à  $(C_{\ln})$  au point  $I(1; 0)$ .
- La fonction  $x \mapsto \ln(x)$  réalise une bijection de  $]1; +\infty[$  dans  $]0; +\infty[$ .
- De plus  $1 \in ]0; +\infty[$  ; il existe donc un unique réel  $e \in ]1; +\infty[$  tel que  $\ln e = 1$ .

$(T_e)$  :  $y = \frac{1}{e}x$  est la tangente à  $(C_{\ln})$  au point d'abscisse  $e$ .

#### 2- Dérivée de $\ln \circ u$

Soit  $u$ , une fonction dérivable et strictement positive sur  $I$ .

On a :  $(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$

#### 3- Primitive de $\frac{u'}{u}$

Soit  $u$  une fonction dérivable et ne s'annulant pas un intervalle  $I$ .

La fonction  $\frac{u'}{u}$  admet pour primitive sur  $I$  la fonction  $\ln|u| + c$ .

(où  $c$  est une constante).



# FONCTIONS EXPONENTIELLES ET PUISSANCES

## Rappel de Cours

### I- FONCTION EXPONENTIELLE

#### 1- Définition :

La fonction exponentielle népérienne, notée  $\exp$ , est la bijection réciproque de la fonction  $\ln$ .

**Notation :** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(x)$  se note  $e^x$ .

**Conséquences de la définition :**

- $D_{\exp} = \mathbb{R}$  ; □  $e^0 = 1$  ; □  $e^0 = 1$  ; □ Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x > 0$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\ln e^x = x$  ; □ Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $e^{\ln x} = x$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in ]0; +\infty[$  :  $e^x = y$  équivaut à  $x = \ln y$ .

#### 2- Sens de variation et représentation graphique de $\exp$ .

$f : x \mapsto \ln x$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  donc sa bijection réciproque :  $x \mapsto e^x$  est strictement croissante sur  $\ln(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$ .

**Conséquences :** Pour tous réels  $a$  et  $b$  :

- $e^a = e^b$  équivaut à  $a = b$
- $e^a \leq e^b$  équivaut à  $a \leq b$
- $e^a < e^b$  équivaut à  $a < b$



#### 3- Propriétés algébriques

a) **Propriété fondamentale :** Pour tous réels  $a$  et  $b$  :  $e^{a+b} = e^a \times e^b$ .

b) **Conséquences :** Pour tous réels  $a$  et  $b$ , et pour tout  $r \in \mathbb{Q}$  :

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} ; e^{-a} = \frac{1}{e^a} ; (e^a)^r = e^{ar}$$

#### 4- Dérivée : $(e^x)' = e^x$ .

En effet,  $x \mapsto \ln x$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  ; et  $(\ln x)' = \frac{1}{x} \neq 0$  donc sa

bijection réciproque,  $x \mapsto e^x$  est dérivable sur  $\ln(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$ , et pour

$$\text{tout } x \in \mathbb{R}, (e^x)' = (\ln^{-1})'(x) = \frac{1}{\ln'[\ln^{-1}(x)]} = \frac{1}{\ln'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$$

### 5- Limites de référence.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

## II. FONCTION DU TYPE $f(x) = e^{u(x)}$ .

- 1- Domaine de définition :  $D_f = D_u$ .
- 2- Dérivée et signe :  $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$  et  $f'(x)$  est du signe de  $u'(x)$ .
- 3- Primitive :  $u'e^u$  admet pour primitive  $e^u + c$  avec  $c \in \mathbb{R}$ .

## III. FONCTIONS EXPONENTIELLES ET PUISSANCES

### 1- Fonction exponentielle de base $a$ : ( $a > 0$ )

#### a- Définition :

- On appelle fonction exponentielle de base  $a$  ( $a > 0$ ), la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_a(x) = a^x$ .
- Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a^x = e^{x \ln a}$  ;  $a^0 = 1$  et  $a^1 = a$ .

#### b- Dérivée et sens de variation

- $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = (\ln a) \times e^{x \ln a} = (\ln a) \times a^x$ .
- La fonction exponentielle de base  $a$  est strictement décroissante si et  $0 < a < 1$  et strictement croissante si  $a > 1$ .

### 2- Fonction puissance d'exposant réel $\alpha$

#### Définition :

- On appelle fonction puissance d'exposant réel  $\alpha$ , la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f_\alpha(x) = x^\alpha$ .
- Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ .

### 3- Croissances comparées et limites ( $a \in \mathbb{R}$ )

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} x^a \ln x = 0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^a e^x = 0$$

#### Des réflexes à avoir :

- Pour lever une indétermination en  $+\infty$  :  
Savoir que  $e^x$  « l'emporte sur  $x$  » en  $+\infty$ .  
De façon générale,  $\ln x \ll x^n \ll e^x$  ; (On parle de la croissance comparée). On essaiera souvent de mettre  $e^x$  ou  $x$  en facteur dans l'expression de la fonction à étudier.
- Pour lever une indétermination en  $-\infty$  :  
Penser au changement de variable  $X = -x$ .

## PROBLÈME

## Problème 1

L'objet du problème est l'étude de la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = 2x \ln(x) - \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2} \text{ pour } x > 0, \text{ et } f(0) = \frac{3}{2}.$$

**Partie A** : Etude d'une fonction auxiliaire et de ses zéros.

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = 2\ln(x) - x + 1$ .

- 1) a) Déterminer les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$ .
- b) Etudier les variations de  $g$  puis dresser son tableau de variation.
- 2) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet sur  $]0; +\infty[$  deux solutions 1 et  $\alpha$ .
- 3) En déduire le signe de  $g$  sur  $]0; +\infty[$ .
- 4) Vérifier que :  $3,5 \leq \alpha \leq 4$ .

**Partie B** : Etude de la fonction  $f$ .

- 1) a) Vérifier que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = g(x)$ .
- b) En déduire les variations de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
- 2) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- 3) Démontrer que  $f$  est continue en 0. Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0.
- 4) a) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet deux solutions : 1 et  $\beta$ .
- b) Justifier que :  $5 \leq \beta \leq 6$ .
- 5) La tangente  $(T)$  à la courbe représentative  $(C_f)$  de  $f$  au point d'abscisse 5 a pour équation  $y = h(x)$ .
  - a) Démontrer que  $h(x) = 2x \ln(5) - 4x + 4$ .
  - b) Etudier le signe de la fonction  $k$  définie sur  $[5; +\infty[$  par :  $k(x) = f(x) - h(x)$ . (on pourra étudier le signe de  $k''(x)$ ).
  - c) En déduire que pour  $x \geq 5$ , on a  $f(x) \leq h(x)$ .
  - d) Soit  $\lambda$  l'abscisse du point d'intersection de  $(T)$  et l'axe  $Ox$ . Calculer  $\lambda$  et démontrer que  $\beta \leq \lambda$ .
- 6) Dresser le tableau de variation de  $f$ . (on y mettra les résultats obtenus)  
Tracer  $(T)$  et  $(C_f)$  dans un repère orthonormé : Unité 2 cm.

## PROBLEMES

## Problème 1

## Partie A :

- 1) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = e^x - x - 1$ .
  - a) Justifier que pour tout  $x$  élément de  $[0; +\infty[$ ,  $g'(x) \geq 0$ .  
En déduire le sens de variation de  $g$  sur  $[0; +\infty[$ .
  - b) Calculer  $g(0)$  puis en déduire que, pour tout  $x \in [0; +\infty[$ ,  $g(x) \geq 0$ .
- 2) Soit  $h$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $h(x) = (2-x)e^x - 1$ .
  - a) Calculer la limite de  $h$  en  $+\infty$ .
  - b) Justifier que, pour tout  $x$  élément de  $[0; +\infty[$ ,  $h'(x) = (1-x)e^x$ .
  - c) En déduire le signe de  $h'(x)$ , puis dresser le tableau de variation de  $h$ .
  - d) Justifier que l'équation  $h(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  telle que  $1,84 < \alpha < 1,85$ .
  - e) Démontrer : Pour  $x \in [0; \alpha[$ ,  $h(x) > 0$  et pour  $x \in [\alpha; +\infty[$ ,  $h(x) \leq 0$ .

Partie B : Soit  $f$ , définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ . On désigne par  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . (Unité 5 cm).

- 1) Justifier que  $f$  est définie sur  $[0; +\infty[$ . (On pourra utiliser 1-b) Partie A).
- 2) a) Justifier que, pour tout  $x \in [0; +\infty[$ ,  $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}$ .  
b) En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . En donner une interprétation graphique.
- 3) a) Démontrer que : Pour tout  $x \in [0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x)^2}$ .  
b) En déduire le sens de variation de  $f$  et dresser son tableau de variation.
- 4) a) Ecrire une équation de la tangente  $(T_0)$  à  $(C_f)$  au point d'abscisse 0.  
b) Justifier que pour tout  $x \geq 0$ ,  $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$ .  
c) En déduire le signe de  $f(x) - x$  puis préciser les positions relatives de  $(C_f)$  par rapport à  $(T_0)$ .
- 5) Démontrer que  $f(\alpha) = \frac{-1}{1-\alpha}$ . En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$ .
- 6) Tracer  $(T_0)$ , la droite  $D$  d'équation  $y = 1$  puis construire  $(C_f)$ .
- 7) Soit  $\varphi$ , la fonction définie sur  $[0; 1]$  par  $\varphi(x) = f(x)$ .
  - a) Justifier que  $\varphi$  admet une bijection réciproque  $\varphi^{-1}$ .
  - b) Construire  $(C_{\varphi^{-1}})$ , courbe représentative de  $\varphi^{-1}$ .

**Problème 2**

Partie A : Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = (1-x)e^x - (1+x)e^{-x}$ .

- 1) Démontrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g'(x) = x(e^{-x} - e^x)$ .
- 2) Etudier le signe de  $g'(x)$  puis dresser le tableau de variation de  $g$ .
- 3) Démontrer que pour  $x \in ]-\infty; 0[$ ,  $g(x) > 0$  et pour  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $g(x) < 0$ .

Partie B : Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - e^{-x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$(C_f)$  est la courbe de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé, unité 4 cm.

- 1) Démontrer que  $f$  est continue en 0.
- 2) Démontrer que  $f$  est paire. En donner une interprétation graphique.
- 3) a) Démontrer que, pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - e^{-x})^2}$ .
- b) Etudier le signe de  $f'(x)$  et en déduire le sens de variation de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

4) Soit la fonction  $h$  définie sur  $]0; 1[$  par  $h(x) = f(x) - \frac{1+x^2}{2}$ .

- a) Exprimer  $h'(x)$  en fonction de  $f'(x)$ .
- b) En déduire que, pour tout  $x \in ]0; 1[$ ,  $h'(x) < 0$ .
- c) Calculer la limite de  $h$  à droite en 0.

d) En déduire que, pour tout  $x \in ]0; 1[$ ,  $f(x) < \frac{1+x^2}{2}$ .

e) On démontre de même que, pour tout  $x \in ]0; 1[$ ,  $\frac{1-x^2}{2} \leq f(x)$ .

En déduire un encadrement de  $f(x)$  sur  $]0; 1[$ .

f) Démontrer alors que  $f$  est dérivable à droite en 0.

5) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

6) Construire  $(C_f)$  sur  $\mathbb{R}$ .

Partie C : Soit  $k$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $k(x) = e^x - e^{-x}$ .

- 1) Démontrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) (f(x) = x \Leftrightarrow k(x) = 1)$ .
- 2) Déterminer la limite de  $k$  en  $+\infty$  puis en  $-\infty$ .
- 3) Démontrer que  $k$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et dresser son tableau de variation.
- 4) a) Justifier que l'équation  $k(x) = 1$  admet une unique solution  $\alpha$ .
- b) Vérifier que :  $0,4 < \alpha < 0,5$ .
- 5) En déduire l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $f(x) = x$ .

A-1.) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a)  $x^2 + y^2 - 2x^2y' = 0$

b)  $y'' + 2y' + 5y = 0$  et déterminer la solution  $f$  qui vérifie :  
 $f(0) = 1$  et  $f'(0) = -1$

2. Soit  $\alpha$  un nombre réel appartenant à l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Montrer que  $\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$

Vérifier que :  $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ . En déduire la valeur  $\tan \frac{3\pi}{8}$ .

3. Le plan euclidien  $P$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les points  $A(3; 1), B(0; 2)$ . Soit  $a$  un réel strictement positif.

Trouver les coordonnées du point  $M$  tel que :  $2\vec{MA} + \vec{MB} = 3\frac{\vec{i}}{\ln a} + 3a\ln \frac{1}{a}\vec{j}$

B) On considère la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par :

$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4})$

1. Quel est l'ensemble de définition de  $f$ ? Montrer que l'on a :

$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \ln 2$

2. Étudier et tracer la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé et montrer qu'elle admet un centre de symétrie.

3. Montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .

INGENIEUR DES

- I) Soit ABCD un losange de centre O avec  $OB = 2OA$  ✕
- a) Déterminer l'ensemble des points M tels que :  

$$(\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC})(2\vec{MB} - \vec{MC} + \vec{MD}) = 0$$
- b) Déterminer l'ensemble des points M tels que :  

$$MA^2 + MC^2 - 2MD^2 = -6OA^2$$
- II) On considère la fonction f définie par :  $f(x) = \ln|x^2 - 1|$
- a) Etudier le sens de variation de la fonction f.
- b) On désigne par (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Montrer que (C) admet un axe de symétrie.
- c) Démontrer que pour tout réel x de  $D_f$ ,  $f(x) = 2\ln|x| + \ln\left|1 - \frac{1}{x^2}\right|$  et
- calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .
- Donner une interprétation graphique de cette limite.
- d) Construire (C).
- III) On pose :  $U_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx, n \in \mathbb{N}$  ✕
- a) Calculer  $U_n$  à l'aide d'une intégration par parties.
- b) Montrer que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique. Indiquer le premier terme et la raison.
- c) On note  $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ . Calculer  $S_n$  et sa limite quand n tend vers  $+\infty$ .

INGENIEUR DES SYSTEMES

(A) Les faces d'un dé cubique sont numérotées respectivement : 6 ; 6 ; 6 ; 5 ; 4 ; 3  
On suppose que lors d'un lancer la probabilité d'apparition de chaque face est  $kx$  ;  $x$  étant le numéro de la face et  $k$  un nombre réel.

1. Montrer que  $k = \frac{1}{30}$

2. On lance 4 fois ce dé, quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois le numéro 6

B) 1. La fonction numérique  $g$  est définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = 2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6$$

En utilisant le sens de variation de  $g$ , déterminer suivant les valeurs de  $x$ , le signe de  $g(x)$ .

2. La fonction numérique  $f$  est définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1$$

a) Déterminer les limites de  $f$  en 0, en  $+\infty$

b) Utiliser le résultat de la question 1) pour déterminer le sens de variation de  $f$

c) Soit  $(D)$  la droite d'équation  $y = x - 1$  et  $(C)$  la représentation graphique de

$f$  dans un repère orthonormé du plan. Montrer que  $(D)$  est asymptote à  $(C)$  et

étudier la position relative de  $(C)$  et  $(D)$

d) Construire  $(C)$  et  $(D)$

\*\*\*\*\*  
**SUJET 5 : BAC 2004 TSM**

11

A) 1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers naturels  $x$  et  $y$  tels que :  $45x - 28y = 1$

2. Résoudre dans  $Z^2$ , l'équation (E) :  $45x - 28y = 1$

3. Résoudre dans  $Z^2$ , l'équation (E') :  $45x - 28y = 6$

B) On donne la fonction  $f$  définie sur  $R$  par :  $f(x) = (x - 1)e^{x+1}$

Soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

1. Etudier les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition. En déduire que la courbe admet comme asymptote l'un des axes de coordonnées en  $-\infty$ .

2. Etudier les variations de  $f$  et construire  $(C)$

3. Calculer l'aire du domaine limité par  $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = -1$  et  $x = 1$ .

INGENIEUR DES MINES

- (A) 1-a) Trouver l'ensemble des entiers naturels diviseurs du nombre 5929.  
 b) Trouver les couples  $(a; b)$  d'entiers naturels dont le PGCD, et le PPCM sont les solutions de l'équation :  $x^2 - 91x + 588 = 0$ .

2. Démontrer que  $A = 3^{3n+2} + 2^{n+4}$  est divisible par 5.

B) Soit la suite  $(U_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} U_1 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)} U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. Montrer en raisonnant par récurrence que la suite  $(U_n)$  est majorée par 3.
2. Etudier le sens de variation de  $(U_n)$ .
3. On considère la suite  $(V_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par :  $V_n = n(3 - U_n)$ . Montrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

4. Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .

C) Soit  $\theta$  un nombre réel tel que :  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $Z^2 \cos^2 \theta - 2Z \sin \theta \cos \theta + 1 = 0$ .
2. Déterminer le module et un argument de chaque solution de cette équation.
3. Résoudre l'équation différentielle :

$(1 + \cos 2\theta)y'' - (2 \sin 2\theta)y' + 2y = 0$ , où  $y$  représente une fonction de la variable réelle  $x$ .

D) Soit ABC un triangle.

1.a) Construire I, J, K tels que :  $I = \text{bar}\{(A; 2), (C; 1)\}$ ,

$J = \text{bar}\{(A; 1), (B; 2)\}$  et  $K = \text{bar}\{(C; 1), (B; -4)\}$

b) Démontrer que le point B est le barycentre de  $\{(C; 1), (K; 3)\}$ .

2. Démontrer que :

a) le point J est le barycentre de  $\{(A; 2), (C; 1), (K; 3)\}$

b) le milieu du segment  $[IK]$  est le point J

3. Soit I. et M les milieux respectifs de  $[CI]$  et  $[CK]$ . Démontrer que IIMT.

A) On compose un jury en tirant au sort trois personnes parmi sept volontaires: quatre hommes et trois femmes.  $X$  désigne la variable aléatoire qui associe à chaque jury le nombre de femmes qu'il présente.

1. Déterminer la loi de probabilité de  $X$  et calculer son espérance  $E(X)$ .
2. Calculer la probabilité qu'il ait au moins une femme dans le jury.

B) 1. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs  $x$  tels que :  $8x \equiv 7[5]$

2. Résoudre l'équation :  $(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 336x + 210y = 294$

C) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les points A, B et C de coordonnées respectives  $(1; 5)$ ,  $(2; 3)$  et  $(4; 4)$

1. Déterminer le barycentre  $G_\alpha$  des points A, B, C affectés respectivement des coefficients  $1; \alpha + 1; -\alpha + 3$  avec  $\alpha$  réel.

2. Déterminer l'ensemble  $G_\alpha$  quand  $\alpha$  décrit  $\mathbb{R}$ .

3. Choisir  $\alpha$  pour que  $G_\alpha$  soit le point  $D(1; 3)$ .

4. On prend  $\alpha = 5$ , déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant :  $MA^2 + 6MB^2 - 2MC^2 = 25$

D) Le repère  $(O, I, J)$  est orthonormé.

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = (1 - x)(1 + e^x)$

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$ .

1. Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
2. Démontrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = -x + 1$  est asymptote à  $(C)$  en  $-\infty$ . Préciser la position relative de  $(C)$  et  $(D)$

A) 1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=1}^n k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

2.a) Décomposer 469 en produit de facteurs premiers.

b) Résoudre dans  $N^2$  l'équation :  $x^3 - y^3 = 469$

B) Dans une ville, il y a trois médecins. Quatre habitants de cette ville, malades le même jour, appellent au hasard l'un de ces trois médecins.

1. Quelle est la probabilité pour qu'un seul médecin soit appelé ?

2. Quelle est la probabilité pour que les trois médecins soient appelés ?

C) Le repère  $(O, I, J)$  est orthonormé.

Soit la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}, & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = 1 - (\ln x)^2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1.a) Démontrer que f est continue et dérivable en 1.

b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les branches infinies de la courbe représentative (C) de f.

c) Etudier les variations de f.

Démontrer que le point d'abscisse e est un point d'inflexion de (C).

d) Tracer (C).

2. Soit h la restriction de f à l'intervalle  $]1; +\infty[$ .

a) Démontrer que h réalise une bijection de  $]1; +\infty[$  vers un intervalle que l'on précisera.

b) En déduire que h admet une fonction réciproque  $h^{-1}$  dont on précisera le sens de variation.

Tracer la courbe représentative de  $h^{-1}$ .

C) 1. Déterminer le module et un argument du nombre complexe

$$U = \frac{\sqrt{3} + i}{4}$$

2. Soit f l'application de C vers lui-même qui, à tout nombre complexe Z, associe :  $f(Z) = UZ + (1+i)(1-U)$

Montrer que f est bijective et déterminer le nombre complexe  $\omega$  tel que :

$$f(\omega) = \omega.$$

3. Soit I, M et M' les points du plan complexe ayant pour affixes  $\omega, Z$  et  $f(Z)$  respectivement.

On suppose M différent de I. Donner une mesure de l'angle  $(\overline{IM}, \overline{IM'})$  et calculer la distance  $IM'$  en fonction de la distance  $IM$ .

On note F l'application qui à point M associe le point M'.

Préciser la nature de F et ses éléments caractéristiques.

4. Soit  $A_0$  le point d'affixe  $Z_0 = -1 + 2i$ . On définit, pour tout entier naturel n,  $Z_{n+1} = f(Z_n)$ .

On note  $A_n$  le point d'affixe  $Z_n$  dans le plan complexe.

Calculer en fonction de n, la distance  $IA_n$ . Quelle est la limite de cette distance quand n tend vers  $+\infty$ .

A) 1. Trouver toutes les paires d'entiers naturels  $a$  et  $b$  tels que l'on ait :

$$\begin{cases} \text{PGCD}(a; b) = 42 \\ \text{PPCM}(a; b) = 1680 \end{cases}$$

2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs  $x$  tels que :  $8x \equiv 7[5]$

3. Résoudre l'équation :  $(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 336x + 210y = 294$

(la deuxième question fournira une solution particulière de l'équation simplifiée)

B) Une caisse contient pêle-mêle 10 cubes rouges, 20 cubes jaunes et 5 cubes verts, tous de la même taille.

1. Quelle est la probabilité de pouvoir faire le drapeau de la République de Guinée :

a) en prenant simultanément 3 cubes ?

b) en prenant simultanément 4 cubes ?

2. Quelle est la probabilité, en prenant successivement 3 cubes l'un après l'autre, sans remise, d'obtenir dans l'ordre le drapeau de la République de Guinée.

C) On donne la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = x + \frac{e^x}{2(e^x - 2)}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$  et calculer les limites de  $f$  aux bornes de cet ensemble.

2. Etudier les variations de  $f$

3.a) Montrons que la droite  $(D_1)$  d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe représentative  $(C)$  de  $f$  en  $-\infty$ . Préciser la position de  $(C)$  par rapport à  $(D_1)$ .

b) Montrons que la droite  $(D_2)$  d'équation  $y = x + \frac{1}{2}$  est asymptote à la courbe représentative  $(C)$  de  $f$  en  $-\infty$ . Préciser la position de  $(C)$  par rapport à  $(D_2)$ .

4. Montrer que le point  $I$  de coordonnées  $(\ln 2; \ln 2 + \frac{1}{4})$  est un centre de symétrie de  $(C)$ .

5. Construire  $(C)$  dans un repère orthonormal  $(O, I, J)$   
(unité de longueur :  $2\text{cm}$  ;  $\ln 2 \approx 0,69$ )

D) On donne un rectangle  $ABCD$  du plan dont les côtés  $[AB]$  et  $[BC]$  ont pour longueurs  $a$  et  $b$ .

Pour tout réel non nul  $m$ , on note  $G_m$  le barycentre du système de points pondérés  $\{(A; m), (B; -1), (C; 1)\}$ .

Pour chacune des questions ci-dessous, on donnera une solution géométrique puis une solution analytique.

1. Déterminer l'ensemble  $(E_1)$  des points  $G_m$  lorsque  $m$  décrit  $\mathbb{R}^*$ .

2. Déterminer l'ensemble  $(E_2)$  des points  $M$  du plan tels que :

$$\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

3. Déterminer l'ensemble  $(E_3)$  des points  $M$  du plan tels que :

$$(\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC})(2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}) = 0$$

- A) 1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD des nombres 231 et 3311.  
 2. Soit  $n$  un entier naturel supérieur à 2. On pose :  
 $A(n) = 1 + 2 + \dots + n$  et  $B(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$   
 On rappelle que, quelque soit  $n$ ,  $A(n) = \frac{n(n+1)}{2}$
- a) Démontrer par récurrence, que quelque soit  $n$ ,  $B(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$   
 b) On suppose que  $n$  est un multiple de 3. Déterminer dans ce cas, le PGCD de  $A(n)$  et  $B(n)$ .  
 c) Vérifier le résultat obtenu dans le cas particulier où  $n = 21$ .
- B) Cinq personnes se donnent rendez-vous dans un des cafés d'un village qui en compte cinq. Chaque personne choisit au hasard l'un des cinq cafés.
1. Calculer la probabilité pour que chacune des personnes ait choisi un café différent.  
 2. Calculer la probabilité pour que les cinq personnes se retrouvent dans le même café.  
 3. Calculer la probabilité pour qu'au moins deux personnes se retrouvent dans le même café.

C) Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $R_+$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln \left( x + \frac{1}{x} \right), & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- a) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en 1.  
 b) On considère la fonction  $g$  définie pour  $x$  appartenant à  $[1; +\infty[$ , par :  $g(x) = x \ln x$  et on appelle  $(\Gamma)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .  
 Etudier  $g$  et tracer  $(\Gamma)$ .  
 c) Etudier la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .  
 Montrer que la courbe  $(C)$  de  $f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et  $(\Gamma)$  sont asymptotes et préciser leurs positions relatives.  
 d) Déterminer  $f'$  et  $f''$ , puis étudier le sens de variation de  $f'$  et montrer que  $f'$  est positive.

Achever l'étude de la fonction  $f$ .

Tracer  $(C)$  sur la même figure que  $(\Gamma)$ .

D) ABC est un triangle, on pose :  $BC = a, AC = b, AB = c$ ,  $A'$  est le milieu du segment  $[BC]$ ;  $B'$  celui de  $[AC]$ ;  $C'$  celui de  $[AB]$

Soit  $G$  l'isobarycentre des sommets du triangle ABC.

1. Montrer que, pour tout point  $M$  du plan :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

2. En calculant de deux façons différentes  $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2$ , établissez que :

$$2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}$$

3. On considère les points communs aux cercles de diamètre  $[AA']$  et  $[BC]$ .

Montrer que, lorsqu'ils existent, ils appartiennent à un cercle de centre  $G$  dont on donnera le rayon en fonction de  $a, b, c$ .

EXERCICE 1

I-1 Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$\sum_{k=1}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$$

2.a) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$ , l'équation :  $661x - 991y = 1$

b) Soit  $(U_n)$  et  $(V_n)$  les suites arithmétiques définies par :

$$\begin{cases} U_0 = 3, V_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + 991 \\ \forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = V_n + 661 \end{cases}$$

Déterminer tous les couples  $(p, q)$  d'entiers naturels inférieurs à 2000 tels que  $U_p = V_q$ .

II- Soit ABCD un parallélogramme.

P est le point tel que :  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$  ; Q est le symétrique du milieu de  $[AD]$  par rapport à A.

Démontrer que les points P, Q, C sont alignés.

EXERCICE 2

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

1. Déterminer une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$

2. Soit la suite  $(U_n)$  définie pour  $n > 0$  par :

$$U_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} f(x) dx$$

a) Calculer  $U_1$  et  $U_2$ . Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .

b) Que représente graphiquement le nombre  $U_n$  ?

3. Montrer que  $(U_n)$  est une suite décroissante positive.

Que peut-on en déduire. Calculer la limite de cette suite.

4. On pose  $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$   
 a) Calculer  $S_1, S_2, S_3$  et exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ .  
 b) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

## PROBLEME

I-) Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(0) = 0 \text{ et pour tout réel strictement positif } x, f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$$

1. Etudier la continuité de  $f$  et la dérivabilité de  $f$  en 0.
2. Soit  $\varphi$  la fonction dérivable sur  $]0; +\infty[$  et définie par :

$$\varphi(x) = \ln x + x + 1$$

- a) Etudier le sens de variation de  $\varphi$ .
  - b) Démontrer que l'équation  $\varphi(x) = 0$  admet une solution unique  $\beta$  telle que :  $0,27 \leq \beta \leq 0,28$ ; avec  $\varphi(0,27) = -0,04$  et  $\varphi(0,28) = 0,007$ .
  3. a) Exprimer  $f'(x)$  en fonction de  $\varphi(x)$ . En déduire les variations de  $f$ .
  - b) Vérifier que :  $f(\beta) = -\beta$
  - c) Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ . Dresser le tableau de variation de  $f$ .
4. Tracer la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On placera en particulier les points d'abscisses : 1; 3; 4;  $e^2$ ; 12. On prendra :

$$\ln(0,27) \approx -1,31; \ln(0,28) \approx -1,27; \ln 2 \approx 0,7; \ln 3 \approx 1,1; \ln 5 \approx 1,6.$$

II-) 1. a) Démontrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $[3; 4]$ .

$$\text{On prendra : } f(3) \approx 0,82 \text{ et } f(4) \approx 1,1$$

b) Démontrer que les équations :  $f(x) = 1$  et

$$e^{1+\frac{1}{x}} = x \text{ sont équivalentes.}$$

2. Soit  $g$  la fonction dérivable sur  $]0; +\infty[$  et définie pour tout réel strictement positif  $x$  par :  $g(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$

Soit  $(U_n)$  la suite définie par :  $U_0 = 3$  et la relation de récurrence :

$$U_{n+1} = g(U_n).$$

Démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [3; 4]$ ; sachant que

$$x \in [3; 4], g(x) \in [3; 4]$$

1) Dans un système de numération de base  $a$ , on considère les nombres :

$$A = \overline{211}, B = \overline{312}, C = \overline{133032}$$

1. Expliquer pourquoi  $a$  doit être supérieur à 3.

2) Sachant que  $C = A \times B$ , montrer que  $a^3 - 3a^2 - 2a - 8 = 0$ . En déduire que  $a$  divise 8.

3) Déterminer alors  $a$ .

4. L'écriture d'un nombre dans le système décimal est 214, écrire ce nombre dans la base 4.

5. Dans cette question, on suppose que  $a = 4$ .

a) Ecrire  $A$ ,  $B$  et  $C$  dans le système décimal.

b) Montrer alors que  $C = A \times B = \text{PPCM}(A; B)$ . En déduire que l'équation  $Ax + By = 1$  a des solutions dans  $\mathbb{Z}^2$ .

6. On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation :  $37x + 54y = 1$ .

Vérifier que  $(19; -13)$  est une solution de cette équation.

Résoudre cette équation.

B) Deux chasseurs Moussa et Mamadou, aperçoivent ensemble un lièvre et tirent simultanément.

1. Sachant que Moussa atteint et tue d'habitude 5 lièvres sur 6 et Mamadou 4 sur 5, quelle est la probabilité pour que le lièvre soit tué ?

2. En fait, Mamadou a tiré le premier.

3) Quelle est la probabilité pour que Moussa tue le lièvre sachant que, si Mamadou tire et manque, les chances normales pour Moussa d'atteindre le lièvre se trouvent diminuées de moitié ?

4) Dans ces conditions, Mamadou a tiré le premier, puis Moussa, quelle est la probabilité pour le lièvre d'en échapper sain et sauf ?

D) Soit  $g$  la fonction définie par :  $g(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ .

1) Déterminer l'ensemble de définition  $D_g$  de  $g$  et démontrer que

b) En déduire le signe de  $g$  sur  $D_g$

2. Etudier  $g$  et tracer sa courbe représentative.

3. Soit  $\varphi$  la fonction définie par :  $\varphi(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

a) Résoudre l'équation :  $\varphi(x) = -\ln(3 - 2\sqrt{2})$  et démontrer que  $\varphi$  est impaire.

b) Etudier  $\varphi$  et tracer sa courbe représentative.

c) Démontrer que  $\varphi$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  et que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \varphi\left(\frac{e^n - e^{-n}}{2}\right) = n$$

4. Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on considère l'intégrale  $I_n$  définie par :

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx$$

a) Calculer  $I_2$  et démontrer, à l'aide d'une intégration par parties que pour tout entier naturel  $n \geq 2$ ,  $I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$

b) Etablir que pour tout nombre réel  $x \in [1; 2]$ ,  $0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$

c) En déduire un encadrement de  $I_n$ , puis étudier la limite éventuelle de la suite  $(I_n)$

D) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

Soit  $s$  la similitude directe de centre  $I$ , transformant les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $3 + i, 3 - i$ , en  $A'$  et  $B'$  d'affixes respectives  $2 + 5i, 4 + 3i$

1. Déterminer les éléments caractéristiques de  $s$

2. Déterminer le barycentre des points  $I, A, B$  affectés respectivement des coefficients  $6, 1, 1$ . En déduire le barycentre des points  $I, A', B'$  affectés des mêmes coefficients respectifs.

## EXERCICE 1

1. Calculer le PGDC de  $4^5 - 1$  et  $4^6 - 1$

Soit  $(U_n)$  la suite numérique définie par  $U_0 = 1, U_1 = 5$  et pour tout entier naturel  $n, U_{n+2} = 5U_{n+1} - 4U_n$ .

2. Calculer les termes  $U_2, U_3$  et  $U_4$  de la suite  $(U_n)$

3.a) Montrer que la suite  $(U_n)$  vérifie, pour tout entier naturel  $n,$

$$U_{n+1} = 4U_n + 1$$

b) Montrer que, pour tout entier naturel  $n, U_n$  est un entier naturel.

c) En déduire, pour tout entier naturel  $n,$  le PGCD de  $U_n$  et  $U_{n+1}$

4. Soit  $(V_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $V_n = U_n + \frac{1}{3}$

a) Montrer que  $(V_n)$  est une suite géométrie dont on déterminera la raison et le premier terme  $V_0$ .

b) Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$

c) Déterminer, pour tout entier naturel  $n,$  le PGCD de  $4^{n+1} - 1$  et  $4^n - 1$

## EXERCICE 2

A tout point  $M$  du plan de coordonnées  $(x; y)$  on associe son affixe

$$Z = x + iy$$

Soit  $s$  l'application du plan dans lui-même qui à tout point  $M$  d'affixe  $Z$  associe le point  $M_1$  d'affixe  $Z_1$  telle que :  $Z_1 = (-1 + i)Z + 1 + 4i$

1. Donner la nature de  $s$  et déterminer ses éléments caractéristiques.

2. Calculer les coordonnées  $x$  et  $y$  du point  $M$  en fonction de  $x_1$  et  $y_1$  de  $M_1$ .

3. Déterminer les équations des transformées par  $s$  de la droite  $x = 0$  et de la droite  $(D')$  d'équation  $y = x - 1$ .

## PROBLEME

A-) On considère la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(0) = 1$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = 1 + x - x \ln x$$

2. Etudier les variations de  $g$  et donner son tableau de variation.

3.a) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\beta \in ]0; +\infty[$ .

b) Justifier que  $3,5 < \beta < 3,6$ .

4. Tracer  $(C_g)$ .

B-) On considère la fonction  $f$  définie par :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, f(x) = \frac{\ln x}{1+x} + 2$$

1.a) Démontrer que  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection  $A$  de la courbe  $(C_f)$  avec la droite  $(D)$  d'équation  $y = 2$ .

3. Construire la courbe  $(C_f)$  dans le même repère  $(O, I, J)$ .

C-a) Justifier que  $\ln \beta = \frac{\beta+1}{\beta}$

b) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$\int_1^{\beta} x \ln x dx = \frac{(\beta+1)^2}{4}$$

EXERCICE 1

1. On considère l'équation (E):  $8x + 5y = 1$  où  $(x; y)$  est un couple de nombre entiers relatifs.  
Donner une solution particulière de l'équation (E) et résoudre l'équation (E).
2. Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple  $(a; b)$  de nombres entiers vérifiant :
- $$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$$
- a) Montrer que le couple  $(a; -b)$  est solution de l'équation (E).  
b) Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?
3. Résoudre l'équation :  $8x + 5y = 100, (x; y) \in \mathbb{Z}^2$

EXERCICE 2

On considère dans le plan, un triangle ABC rectangle en A tel que  $AB = 2a$  et  $AC = a$  où a est un nombre réel strictement positif donné.

- 1.a) Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés  $(A; 1), (B; -1)$  et  $(C; 1)$ .  
b) Déterminer et construire l'ensemble (C) des points du plan tels que :
- $$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$$
2. Soit H le point du plan défini par :  $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

Démontrer que le point H est le barycentre des points pondérés  $(A; 3), (B; 1)$  et  $(C; -2)$

PROBLEME

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + x - 2x \ln x \text{ si } x \in ]0; +\infty[ \text{ et } f(0) = 0$$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

A-) On considère la fonction numérique g définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = x - 1 - 2 \ln x$$

1. Calculer les limites respectives de g à droite en 0 et en  $+\infty$ .  
2. On admet que la fonction g est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et on note  $g'$  sa dérivée.

Déterminer  $g'$  et étudier son signe.

En déduire le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

Vérifier que  $g(1) = 0$

3. Démontrer qu'il existe un unique réel  $\alpha$  tel que  $\alpha \in ]3; 4[$  et  $g(\alpha) = 0$ .

4. Dédire des questions précédentes le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

B) On considère la fonction numérique  $h$  définie et dérivable sur  $]0; +\infty[$  par :

$$h(x) = 2\ln x + 1$$

1. Démontrer que  $\forall x \in ]3; 4[, h(x) \in ]3; 4[$

2. On considère la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 3,5 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$$

a) Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in ]3; 4[$

b) Calculer l'arrondi d'ordre 3 de  $U_1$ .

Démontrer que par récurrence que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

c) En déduire que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.

(on admettra que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers la valeur  $\alpha$  précédente et on prendra  $\alpha = 3,5$ )

C-1.) Démontrer que la fonction  $f$  est continue à droite en 0 ?

2. La fonction  $f$  est-elle dérivable à droite en 0 ?

Justifier votre réponse. En donner une interprétation graphique.

3. Calculer la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

4. Calculer la limite de  $\frac{f(x)}{x}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , puis interpréter graphiquement ce résultat.

5. La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et on note  $f'$  sa dérivée.

Démontrer que  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$

6. En utilisant les résultats de A, déterminer le signe de  $f'$  et dresser le tableau de variation de  $f$ .

Tracer la courbe  $(C)$ .

7. Soit  $t$  un nombre réel tel que :  $0 < t < 1$ .

En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire  $A(t)$  de la partie du plan comprise entre la courbe  $(C)$ , la droite  $(OI)$  et les droites d'équations

$$x = t \text{ et } x = 1.$$

Calculer la limite de  $A(t)$  quand  $t$  tend vers 0

EXERCICES

A) On considère les trois entiers naturels a, b, c qui s'écrivent dans la base n :  $a = 111, b = 114, c = 13054$

- 1. Sachant que  $c = ab$ , déterminer n, puis l'écriture de chacun des nombres a, b, c dans le système décimal.
- 2. Vérifier, en utilisant l'algorithme d'Euclide, que a et b sont premiers entre eux. En déduire les solutions dans  $Z^2$  de l'équation  $ax + by = 1$ .

B) Une variable aléatoire X prend les valeurs 1; -1 et 2 avec les probabilités respectives  $e^a, e^b, e^c$  où a, b, c sont en progression arithmétique.

On suppose que l'espérance mathématique  $E(X)$  de X est égal à 1.

- 1. Calculer a, b, c et la variance  $V(X)$  de X.
- 2. Soit A, B, C trois points d'abscisses respectives 1; -1 et 2 d'une droite graduée ( $\Delta$ ).
  - a) Calculer l'abscisses du point G barycentre de  $\{(A; 1), (B; 2), (C; 4)\}$ .
  - b) On pose:  $\varphi(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$  où M est un point de ( $\Delta$ ).

Montrer que  $\varphi(M) = V(X)$ .

- c) Déterminer l'ensemble ( $\Gamma$ ) des points M de ( $\Delta$ ) tels que  $\varphi(M) = 3$ .

PROBLEME

Partie A

On considère la fonction g dérivable sur  $R$  et définie par :

$$g(x) = (1-x)e^{1-x} - 1$$

- 1.a) Justifier que la limite de g en  $+\infty$  est -1
- b) Déterminer la limite de g en  $-\infty$ .
- 2.a) Démontrer que pour tout x élément de  $R, g'(x) = (x-2)e^{1-x}$ .
- b) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
- 3.a) Démontrer que l'équation  $x \in R, g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$ .

b) En déduire que :

$$\{\forall x \in ]-\infty; \alpha[, g(x) > 0$$

$$\{\forall x \in ]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$$

Partie B

On considère la fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et définie par :

$$f(x) = xe^{1-x} - x + 2$$

On note  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . L'unité graphique est 2 cm.

1. Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- 2.a) Démontrer que  $f$  est une primitive de  $g$ .
- b) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.
- 3.a) Démontrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = -x + 2$  est une asymptote oblique à  $(C)$  en  $+\infty$ .
- b) Etudier la position relative de  $(D)$  et  $(C)$ .
4. Démontrer que  $(C)$  admet en  $-\infty$  une branche parabolique de direction  $(OJ)$ .
5. Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'abscisse 1.
6. Démontrer que  $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$ .
7. Justifier que, pour tout nombre réel  $x$ ,  $f(-x + 2) = e^{x-1}f(x)$ .
8. On admet que l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement 2 solutions. On appelle  $\beta$  l'une de ces solutions.

Démontrer que  $-\beta + 2$  est l'autre solution.

9. Tracer  $(D)$ ,  $(T)$  et  $(C)$ .

(on prendra  $\alpha = 0,4$  et  $\beta = 2,5$ ).

Partie C

Soit  $\lambda$  un nombre réel strictement positif et  $A(\lambda)$  l'aire en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan délimitée par  $(C)$ , la droite  $(D)$  d'équation  $y = -x + 2$  et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = \lambda$ .

1. Calculer  $A(\lambda)$  à l'aide d'une intégration par parties.
2. Déterminer la limite de  $A(\lambda)$  lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ .

Exercice 1

1) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$\sum_{k=1}^n k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

2) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  :  $10^{9n+2} + 10^{6n+1} + 1$  est divisible par 111.

3-a) Décomposer 469 en produit de facteurs premiers.

b) Résoudre dans  $N^2$  l'équation :  $x^3 - y^3 = 469$ .

Exercice 2

Le plan complexe est muni du repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  direct.

Soit  $z \in \mathbb{C}$  où  $\mathbb{C}$  désigne l'ensemble des nombres complexes. Posons

$$z = x + iy, \text{ } x \text{ et } y \text{ réels.}$$

1) Soit  $M(z)$  un point du plan complexe et  $M'(z')$  l'image de  $M$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$ . Exprimer  $z'$  en fonction de  $z$  et  $\theta$ .

2) On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) d'inconnue  $z$  qui suit,

$$(E): \frac{1}{2}z^2 + 4z\sqrt{3} + 32 = 0$$

Résoudre l'équation (E)

3) On considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives

$$a = -4\sqrt{3} - 4i \text{ et } b = -4\sqrt{3} + 4i$$

Calculer  $OA$ ,  $OB$  et  $AB$ . En déduire la nature du triangle  $OAB$ .

4) On désigne par  $C$  le point d'affixe  $c = \sqrt{3} + i$  et par  $D$  son image par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ . Déterminer l'affixe du point  $D$ .

5) On appelle  $G$  le barycentre des points pondérés  $(O, 1)$ ;  $(D, -1)$  et  $(B, -1)$ .

a) Montrer que le point  $G$  a pour affixe  $g = -4\sqrt{3} + 6i$

b) Placer les points A, B, C et G sur une figure (unité graphique : 1 cm)

6) Déterminer une mesure en radians de l'angle  $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GC})$ .

En déduire la nature du triangle GAC.

### PROBLEME

#### Partie A

Soit la fonction numérique dérivable sur  $]0; +\infty[$  et définie par :

$$g(x) = -\frac{2x+1}{x^2} + \ln x$$

1 - a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$       b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

2 - a) Démontrer que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, g'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$

b) En déduire le sens de variation de g.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

3-a) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0, \forall x \in ]0; +\infty[$  admet une solution unique.

b) Justifier que  $2,55 < \alpha < 2,56$

c) Démontrer que :  $\begin{cases} \forall x \in ]0; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in ]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

#### Partie B

On considère la fonction f dérivable sur  $]0; +\infty[$  et définie par :

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) e^{-x}$$

On note (C) la courbe représentation de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

(unités graphiques :  $OI = 2\text{cm}$  et  $OJ = 10\text{cm}$ ).

1 - a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ,

puis donner une interprétation graphique du résultat.

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  puis donner une interprétation

graphique du resultat.

2) Démontrer que:  $f(\alpha) = -\frac{1+\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha}$

3-a) Démontrer que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = e^{-x} \times g(x)$

b) En utilisant la partie A, déterminer les variations de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

4) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1 est

$$y = -\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$$

5) Construire la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère  $(O, I, J)$ . On prendra  $\alpha = 2,6$ .

Partie C

1) Soit h la fonction dérivable sur  $]0; +\infty[$  et définie par :  $h(x) = e^{-x} \ln x$

Démontrer que h est une primitive de f sur  $]0; +\infty[$ .

2) Soit  $\lambda$  un nombre réel tel que  $\lambda > 3$ .

a) Calculer, en  $cm^2$  et en fonction de  $\lambda$ , l'aire  $A(\lambda)$  de la partie du plan comprise entre (C), (OI) et les droites d'équation  $x = 3$  et  $x = \lambda$ .

b) Calculer  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

Exercice 1

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul, on a :

$$\sum_{k=1}^n k \times 2^{k-1} = (n-1) \times 2^n + 1$$

2.a) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$ , l'équation :  $661x - 991y = 1$

b) Soit  $(U_n)$  et  $(V_n)$  les suites arithmétiques définies par :

$$\begin{cases} U_0 = 3, V_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + 991 \\ \forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = V_n + 661 \end{cases}$$

Déterminer tous les couples  $(p, q)$  d'entiers naturels inférieurs à 2000, tels que :  $U_p = V_q$ .

Exercice 2

On considère les suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  définies par  $U_0 = 4$  et  $V_0 = 9$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$U_{n+1} = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} \text{ et } V_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + V_n)$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n > 0$  et  $V_n > 0$

2. a) Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{(V_n - U_n)^2}{2(U_n + V_n)}$

b) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n$  et que  $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$

c) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, V_n - U_n \leq \frac{5}{2^n}$

3. a) Démontrer que la suite  $(U_n)$  est croissante et que la suite  $(V_n)$  est décroissante.

b) En déduire que les suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  convergent.

c) Démontrer que les suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  ont la même limite  $l$

4. a) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1} \times V_{n+1} = U_n \times V_n$ .

b) En déduire la valeur exacte de  $l$ .

# PROBLEME

## Partie A

Soit la fonction  $g$  dérivable et définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = x^2 - \ln x - 1$$

- 1) Calculer les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$ .
- 2) Démontrer que, pour tout nombre réel strictement positif  $x$ ,  $g'(x) = \frac{2x^2-1}{x}$
- 3) Etudier les variations de  $g$  et dresser son tableau de variation.
- 4-a) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet deux solutions sur  $]0; +\infty[$ .
- b) On désigne par  $\alpha$  la plus petite des solutions. Démontrer que

$$0,4 < \alpha < 0,5$$

- c) Calculer  $g(1)$ .
- d) En déduire que, pour tout nombre réel strictement positif  $x$  :  
$$\begin{cases} \text{si } x \in ]0; \alpha[ \cup ]1; +\infty[, \text{ alors } g(x) > 0 \\ \text{si } x \in ]\alpha; 1[, \text{ alors } g(x) < 0 \end{cases}$$

## Partie B

Soit  $f$  la fonction dérivable et définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$

On note  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O, I, J)$ .

L'unité est 4cm sur  $(OI)$  et 2cm sur  $(OJ)$ .

- 1-a) Déterminer la limite de  $f$  en 0. Donner une interprétation graphique du résultat.
- b) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- 2) Démontrer que, pour tout nombre réel strictement positif  $x$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
- 3-a) Démontrer que :  $f(\alpha) = 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$
- b) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.
- 4) Démontrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$  est asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$ .
- 5) Etudier la position de  $(D)$  par rapport à  $(C)$ .
- 6) Tracer  $(D)$  et  $(C)$ . (On prendra :  $\alpha = 0,45$  et  $f(\alpha) = 3,1$ ).
- 7) Soit  $\mathcal{A}$  l'aire en  $cm^2$  de la partie du plan délimitée par  $(C)$ ,  $(D)$  et les droites d'équations respectives  $x = e^{-2}$  et  $x = 1$ . Calculer  $\mathcal{A}$ .

**EXERCICE 1**

Dans une urne, il y a  $n$  boules rouges et  $2n$  boules blanches. On tire simultanément  $p$  boules de l'urne avec  $p < n$ .

- 1) Si  $n = 5$  et  $p = 4$ , calculer les probabilités des événements suivants :  
 A « Obtenir deux boules rouges et deux boules blanches »  
 B « Obtenir au moins une boule blanche ». (On donnera les résultats sous de fractions irréductibles).

2) On suppose que  $p = 2$  et  $n$  un entier quelconque tel que  $n \geq 2$ .

- a) Calculer la probabilité  $p_n$  d'obtenir deux boules de même couleur.  
 b) Démontrer que la suite  $(p_n)_{n \geq 2}$  est majorée par 1. Quel est le sens de variation de  $(p_n)_{n \geq 2}$  ?  
 c) Dédire de la question précédente que  $(p_n)_{n \geq 2}$  est convergente et calculer sa limite.

**EXERCICE 2**

Partie A

I-1) On désigne par  $n$  un entier relatif quelconque, on pose :

$$A = n - 1 \text{ et } B = n^2 - 3n + 6$$

- a) Montrer que le PGCD égal au PGCD de  $A$  et  $4$ .  
 b) Déterminer suivant les valeurs de  $n$  le PGCD de  $A$  et  $B$ .

2) Pour quelles valeurs de l'entier relatif  $n$ , le nombre  $\frac{n^2 - 3n + 6}{n - 1}$  est-il entier relatif ?

II) Pour tout couple  $(a; b)$  d'entiers naturels, on désigne par  $\mu$  leur PPCM et par  $\delta$  leur PGCD.

- 1) Déterminer les couples  $(a; b)$  d'entiers naturels tels que :  $2\mu + 3\delta = 11$ .  
 2) Dresser la liste des diviseurs de 108.

Déterminer les couples  $(a; b)$  d'entiers naturels tels que :

$$\mu - 3\delta = 108 \text{ et } 10 < \delta < 15.$$

Partie B

On considère trois points non alignés  $A$ ,  $B$  et  $C$  de l'espace.

On désigne par  $G_1$  le barycentre des points pondérés  $(A, 3)$ ;  $(B, 2)$  et  $(C, -1)$  et par  $G_2$  le barycentre des points pondérés  $(A, 2)$ ;  $(B, 1)$  et  $(C, 1)$ .

1.a) Calculer  $\overrightarrow{G_1 G_2}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .

b) En déduire que  $G_1 \neq G_2$

2) A tout point  $M$  de l'espace on fait correspondre le point  $M_1$  tel que :

$$\overrightarrow{MM_1} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$$

- a) Démontrer que si M décrit une droite (D) de l'espace, M<sub>1</sub> décrit la droite (Δ) image de (D) par une homothétie que l'on précisera.
- b) Démontrer que le vecteur  $\overrightarrow{M_1M_2}$  reste constant quand M décrit l'espace.
- 3) Déterminer l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{MM_1} \times \overrightarrow{MM_2} = 0.$$

PROBLÈME

Partie A

Dans tout le problème; les fonctions étudiées sont dérivables sur ]0; +∞[

On considère la fonction h définie sur ]0; +∞[ par  $h(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - 2\ln x$

- 1) Calculer les limites de h en +∞ et à droite en 0.
- 2) On note h' la dérivée de h ; démontrer que :  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,

$$h'(x) = \frac{-2(1+x^2)}{x^3}$$

- 3) Démontrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une solution unique x<sub>0</sub> dans ]1; +∞[. En déduire le signe de h.

Partie B

On considère la fonction g définie sur ]0; +∞[ par :

$$g(x) = x^2(1 - \ln x) + 1 + \ln x$$

- 1) Calculer les limites de g en +∞ et à droite en 0.
- 2) On note g' la dérivée de g ; démontrer que :  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $g'(x) = xh(x)$ .  
Démontrer que  $g(x_0) > 0$ .

- 3) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique x<sub>1</sub> ∈ ]0; 1[.
- 4) On admet que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique x<sub>2</sub> ∈ ]x<sub>0</sub>; +∞[.

- a) Déterminer le signe de g.
- b) Démontrer que x<sub>1</sub> ∈ ]0,3; 0,4[ et x<sub>2</sub> ∈ ]3,3; 3,4[.

Partie C

On considère la fonction f définie sur ]0; +∞[ par :

$$f(0) = 0 \text{ et } \forall x \in ]0; +\infty[, f(x) = \frac{x \ln x}{1+x^2}$$

- 1) Démontrer que f est continue à droite en 0 mais non dérivable à droite en 0.
- 2) Calculer la limite de f en +∞ puis interpréter graphiquement ce résultat.
- 3) On note f' la dérivée de f ; démontrer que :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^2)^2}$$

4) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

5) Démontrer que si  $\alpha$  est une solution de l'équation  $g(x) = 0$ , alors

$$\ln \alpha = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1} \text{ et en déduire } f(\alpha).$$

6) En déduire que  $f(x_1) < 0$  et  $f(x_2) > 0$ . Vérifier que  $f(1) = 0$ , puis en déduire le signe de  $f$ .

7) Tracer la courbe représentative  $(C_f)$  de  $f$  dans le plan muni du repère orthogonal  $(O, I, J)$ .

INGENIEUR DES MINES ALIAS "INCE"

## SUJET 19: BAC 2017 TSM

## EXERCICE 1

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

- Déterminer une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Soit la suite  $(U_n)$  définie pour  $n > 0$  par:  $U_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} f(x) dx$   
Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- Montrer que  $(U_n)$  est une suite décroissante positive.  
Que peut-on en déduire. Calculer la limite de cette suite.
- On pose  $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ 
  - Calculer  $S_1, S_2, S_3$  et exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ .
  - Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

## EXERCICE 2

Une variable aléatoire  $X$  prend les valeurs  $1; -1$  et  $2$  avec les probabilités respectives  $e^a, e^b, e^c$  où  $a, b, c$  sont en progression arithmétique.

On suppose que l'espérance mathématique  $E(X)$  de  $X$  est égale à  $1$ .

- Calculer  $a, b, c$  et la variance  $V(X)$  de  $X$ .
- Soit  $A, B, C$  trois points d'abscisses respectives  $1; -1$  et  $2$  d'une droite graduée  $(\Delta)$ .

- Calculer l'abscisses du point  $G$  barycentre de  $\{(A; 1), (B; 2), (C; 4)\}$ .
- On pose:  $\varphi(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$  où  $M$  est un point de  $(\Delta)$ .  
Montrer que  $\varphi(M) = V(X)$ .
- Déterminer l'ensemble  $(\Gamma)$  des points  $M$  de  $(\Delta)$  tels que  $\varphi(M) = 3$ .

## PROBLÈME

## Partie A

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par:  $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$

On note  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

L'unité est  $1 \text{ cm}$  sur l'axe des abscisses et  $10 \text{ cm}$  sur l'axe des ordonnées.

- On rappelle que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ . Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
  - Vérifier que pour tout réel  $x$ :  $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1 + e^x)$

Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

- En déduire que la courbe  $(C)$  admet deux asymptotes que l'on précisera.

- On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]-1; +\infty[$ , par

$$g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$$

- a) Démontrer que la fonction  $g$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
- b) En déduire le signe de  $g(t)$  lorsque  $t > 0$ .
3. a) Calculer  $f'(x)$  et l'exprimer en fonction  $g(e^x)$ ,  $f'$  désignant la fonction dérivée de  $f$ .
- b) En déduire le sens de variation de la fonction  $f$  puis dresser son tableau de variation.
4. Tracer les asymptotes à la courbe (C) et la courbe (C).

Partie B

Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

1. Étudier le sens de variation de la fonction  $F$ .
2. a) Vérifier que, pour tout nombre réel  $t$ ,

$$\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} \text{ et calculer } \int_0^x \frac{dt}{1+e^t}$$

- b) En déduire, à l'aide d'une intégration par partie, le calcul de  $F(x)$ .
- c) Vérifier que  $F(x)$  peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$F(x) = x - \ln(1+e^x) - f(x) + 2\ln 2 \quad (1)$$

$$F(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - f(x) + 2\ln 2 \quad (2)$$

3. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$
4. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (F(x) - x)$ .

Donner une interprétation graphique du résultat. On donne  $\ln 2 \approx 0,69$ .

### RESOLUTION

#### EXERCICE 1

1. Déterminons une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+$ ; donc elle admet une primitive sur  $\mathbb{R}_+$ .

$(e^x + 1)' = e^x$ ; donc  $f(x)$  est de la forme  $\frac{u'(x)}{u(x)}$  avec  $U(x) = e^x + 1$ .

Alors une primitive  $F$  sur  $\mathbb{R}_+$  de  $f$  peut être définie par :

$$F(x) = \ln(1+e^x)$$

Sujet :

## Exercice 1 : (05 points)

- 1) a) Calculer  $(1 + \sqrt{6})^2$  ;  $(1 + \sqrt{6})^4$  ;  $(1 + \sqrt{6})^6$   
 b) Appliquer l'algorithme d'Euclide à 847 et 342. Que peut-on en déduire ?  
 2) Soit  $n$  un entier naturel non nul. On note  $a_n$  et  $b_n$  les entiers naturels tels que

$$(1 + \sqrt{6})^n = a_n + b_n \sqrt{6}$$

Que valent  $a_1$  et  $b_1$  ?

D'après les calculs de la question 1)a), donner d'autres valeurs de  $a_n$  et  $b_n$ .

- a) Calculer  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  et  $b_n$ .  
 b) Démontrer que, si 5 ne divise pas  $a_n + b_n$ , alors 5 ne divise pas non plus  $a_{n+1} + b_{n+1}$ .  
 En déduire que, quelque soit  $n$  entier naturel non nul, 5 ne divise pas  $a_n + b_n$ .  
 c) Démontrer que, si  $a_n$  et  $b_n$  sont premiers entre eux, alors  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  sont premiers entre eux.  
 En déduire que, quelque soit  $n$  entier naturel non nul,  $a_n$  et  $b_n$  sont premiers entre eux.

## Exercice 2 : (04 points)

Le plan est muni du repère orthonormé  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

A tout point  $M$  d'affixe  $z$ , on fait correspondre le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que  $z' = z^2 - 4z$

- 1) Calculer les coordonnées  $(x'; y')$  du point  $M'$  en fonction des coordonnées  $(x, y)$  du point  $M$ .  
 2) a) Démontrer que l'ensemble  $(H)$  des points  $M$  du plan tels que  $z'$  soit un nombre imaginaire pur est une hyperbole.  
 b) Préciser dans le repère  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , les coordonnées du centre  $\Omega$ , celles des sommets et les équations des asymptotes de  $(H)$ .

- 3) Soit  $P$  le point d'affixe  $-\frac{5}{2} - 2i$

Déterminer les points  $M$  du plan tels que le quadrilatère  $OMM'P$  soit un parallélogramme.

## Problème : (11 points)

## Etude préliminaire :

On considère la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = \ln(1+x) - x$ .

- 1) Etudier le sens de variation de  $g$ .  
 2) En déduire que pour tout réel  $a$  positif ou nul,  $\ln(1+a) \leq a$ .

## Partie A :

On considère la fonction  $f_1$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$

- 1) Calculer  $f_1'(x)$  pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; +\infty[$  et en déduire le sens de variation de la fonction  $f_1$ .
- 2) Montrer que, pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; +\infty[$ ,  $f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$ .  
En déduire la limite de  $f_1$  en  $+\infty$ .
- 3) Dresser le tableau de variation de  $f_1$ .

## Partie B :

On considère la fonction  $f_k$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$

Soit  $(C_k)$  la courbe représentative de la fonction  $f_k$  dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , (unités graphiques : 5cm sur l'axe des abscisses et 10cm sur l'axe des ordonnées).

- 1) Calculer  $f_k'(x)$  pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; +\infty[$  et en déduire le sens de variation de la fonction  $f_k$ .
- 2) Montrer que pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; +\infty[$ ,  $f_k(x) = \ln\left(1 + k\frac{x}{e^x}\right)$ .  
En déduire la limite de  $f_k$  en  $+\infty$ .
- 3) a) Dresser le tableau de variation de  $f_k$ .  
b) Montrer que pour tout réel  $x$  de  $[0; +\infty[$ , on a  $f_k(x) \leq \frac{k}{e}$ .
- 4) Déterminer l'équation de la tangente  $(T_k)$  à  $(C_k)$  au point  $O$ .
- 5) Soit  $p$  et  $m$  deux réels strictement positifs tels que  $p < m$ . Etudier la position relative de  $(C_p)$  et  $(C_m)$ .
- 6) Tracer les courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  ainsi que leurs tangentes respectives  $(T_1)$  et  $(T_2)$  en  $O$ .

## Partie C :

Soit  $\lambda$  un réel strictement positif, on note  $A(\lambda)$  l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe  $(C_k)$  et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=\lambda$ .

1) Sans calculer  $A(\lambda)$ , montrer que  $A(\lambda) \leq k \int_0^\lambda x e^{-x} dx$  (on pourra utiliser le résultat de la question préliminaire).

2) Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale  $\int_0^\lambda x e^{-x} dx$ .

3) On admet que  $A(\lambda)$  admet une limite en  $+\infty$ . Montrer que  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) \leq k$ .

Interpréter graphiquement ce résultat.

## Sujet :

## Exercice 1 :

Les suites d'entiers naturels  $(x_n)$  et  $(y_n)$  sont définies sur  $N$  par :

$$x_0 = 3 \text{ et } x_{n+1} = 2x_n - 1$$

$$y_0 = 1 \text{ et } y_{n+1} = 2y_n + 3$$

- 1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $x_n = 2^{n+1} + 1$
- 2) a) Calculer le PGCD de  $x_8$  et  $x_9$ , puis celui de  $x_{2002}$  et  $x_{2003}$   
 Que peut-on déduire pour  $x_8$  et  $x_9$ , d'une part, pour  $x_{2002}$  et  $x_{2003}$  d'autre part ?  
 b)  $x_n$  et  $x_{n+1}$  sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel  $n$  ?
- 3) a) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $2x_n - y_n = 5$   
 b) Exprimer  $y_n$  en fonction de  $n$   
 c) En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel  $p$  le reste de la division euclidienne de  $2^p$  par 5.  
 d) On note  $d_n$  le PGCD de  $x_n$  et  $y_n$  pour tout entier naturel  $n$ .

Démontrer que l'on a  $d_n = 1$  ou  $d_n = 5$  ; en déduire l'ensemble des entiers naturels  $n$  tels que  $x_n$  et  $y_n$  soient premiers entre eux.

## Exercice 2 :

A) Une urne contient  $n$  boules blanches ( $n \in N$  et  $n \geq 2$ ), 5 boules rouges et 3 boules vertes.

On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

- 1) Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?
- 2) On note  $p(n)$  la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

Montrer que 
$$p(n) = \frac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$$

B) Pour les questions suivantes,  $n = 4$ .

1) Calculer  $p(4)$

2) Un tirage consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

Un joueur effectue deux tirages indépendants, en remettant dans l'urne avant le second tirage les deux boules tirées la première fois.

Il mise au départ la somme de 30 francs ;

Pour chaque tirage :

- Si les deux boules sont de même couleur il reçoit alors 40 francs ;

- Si elles sont de couleurs différentes, il reçoit alors 5 francs ;

On appelle gain du joueur la différence, à l'issue des deux tirages, entre la somme perçue par le joueur et sa mise initiale (ce gain peut être positif ou négatif).

On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au gain du joueur.

- a) Quelles sont les valeurs prises par  $X$  ?
- b) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
- c) Calculer l'espérance de  $X$ .

## Problème :

## Partie A :

La fonction  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 2e^x + 2x - 7$

- 1) Etudier les limites de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
- 2) Etudier le sens de variation de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$  et dresser son tableau de variation.
- 3) Justifier que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une solution unique  $\alpha$  tel que  $0,940 < \alpha < 0,941$
- 4) Etudier le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$

## Partie B :

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$ .

On note  $(C)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Etudier le signe de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) Etudier les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
- 3) Calculer  $f'(x)$ , où  $f'$  désigne la fonction dérivée de  $f$ , et vérifier que  $f'(x)$  et  $g(x)$  ont le même signe. Dresser le tableau de variation de  $f$ :

4) a) Démontrer l'égalité :  $f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$

b) Etudier le sens de variation de la fonction  $h: x \rightarrow \frac{(2x - 5)^2}{2x - 7}$  sur l'intervalle  $]-\infty; \frac{5}{2}[$ .

En déduire, à partir de l'encadrement de  $\alpha$  obtenu dans la partie A, un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de  $f(\alpha)$ .

- 5) Démontrer que la droite  $(D)$ , d'équation  $y = 2x - 5$ , est asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$ . Préciser la position de  $(C)$  par rapport à  $(D)$ .

- 6) Tracer la droite  $(D)$  et la courbe  $(C)$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique  $2cm$ ).

## Partie C :

A l'aide d'une intégration par parties, calculer en  $cm^2$  l'aire  $\mathcal{A}$  de la portion du plan délimitée par la courbe  $(C)$ , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = \frac{5}{2}$ .

## Partie D :

Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3, on considère les points  $A_n, B_n$  et  $C_n$ , d'abscisse  $n$  appartenant respectivement à l'axe des abscisses, à la droite  $(D)$  et à la courbe

$(C)$ ; soit  $u_n$  le réel défini par  $u_n = \frac{C_n B_n}{A_n B_n}$

- 1) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3, on a :  $u_n = \frac{2n - 5 - f(n)}{2n - 5}$
- 2) a) Quelle est la nature de la suite  $(u_n)$  ?  
b) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ . Pouvaient-on prévoir ce résultat ?

**Exercice 1 : (05 points)**

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on considère les nombres :

$$a_n = 4 \times 10^n - 1 ; b_n = 2 \times 10^n - 1 ; c_n = 2 \times 10^n + 1$$

- 1) a) Calculer  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3$  et  $c_3$
- b) Montrer que  $a_n$  et  $c_n$  sont divisibles par 3.
- c) Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que  $b_3$  est premier.
- d) Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $b_n \times c_n = a_{2n}$

En déduire la décomposition en facteurs premiers de  $a_6$

e) Montrer que  $\text{PGCD}(b_n; c_n) = \text{PGCD}(b_n; 2)$

En déduire que  $b_n$  et  $c_n$  sont premiers entre-deux.

- 2) On considère l'équation (E) :  $b_3x + c_3y = 1$  d'inconnues les entiers relatifs  $x$  et  $y$ 
  - a) Justifier le fait que l'équation (E) possède au moins une solution.
  - b) En appliquant l'algorithme d'Euclide aux nombres  $c_3$  et  $b_3$ , déterminer une solution particulière de (E).
  - c) Résoudre l'équation (E).

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

$$2 - 3 - 5 - 7 - 11 - 13 - 17 - 19 - 23 - 29 - 31 - 37 - 41 -$$

$$43 - 47 - 53 - 59 - 61 - 67 - 71 - 73 - 79 - 83 - 89 - 97$$

**Exercice 2 : (05 points)****Partie 1 :**

On considère la fonction  $p$  définie sur  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $p(z) = z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 5i)z + 2 - 2i$

- 1) a) Calculer  $p(i)$
- b) Déterminer deux nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que :  $p(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation :  $z^2 - (3 + i)z + 2 + 2i = 0$
- 3) En déduire dans  $\mathbb{C}$  les solutions de l'équation (E) :  $p(z) = 0$

**Partie 2 :**

Le plan est muni d'un repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité  $5\text{cm}$

On pose  $z_0 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$

On note  $A_n$  le point du plan d'affixe  $z_n$

- 1) a) Calculer  $z_1$  et  $z_2$
- b) Placer les points  $A_0, A_1$  et  $A_2$  dans le plan complexe.
- 2) On considère la suite  $U$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = |z_{n+1} - z_n|$

a) Justifier que :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n|$

b) Démontrer que la suite  $U$  est une suite géométrique de raison  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  et de premier terme  $\sqrt{2}$

c) Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$

**Problème : (10 points)**

**Partie A :**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \ln x$

1) Déterminer les limites de  $g$  aux bornes de son ensemble de définition.

2) Démontrer que pour tout réel  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ ,  $g'(x) = \frac{(x^2+1)^2 - 2x(1-x^2)}{x(x^2+1)^2}$

3) a) Démontrer que pour tout réel  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ ,  $2x(1-x^2) < (x^2+1)^2$

b) En déduire le signe de  $g'(x)$ .

c) Dresser le tableau de variation de  $g$ .

4) a) Démontrer que 1 est l'unique solution de l'équation  $g(x) = 0$

b) Démontrer que :  $g(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$  et  $g(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

**Partie B :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $\begin{cases} f(x) = x \ln x - \ln(x^2+1) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$  et  $(C)$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O, I, J)$ . (Unité graphique : 1cm en abscisse et 2cm en ordonnée).

1) Étudier la continuité de  $f$  en 0.

2) Démontrer que la courbe  $(C)$  admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.

3) Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . En déduire une interprétation graphique.

4) a) Démontrer que pour tout réel  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ ,  $f''(x) = g(x)$

b) Déterminer le sens de variation de  $f$

c) Dresser le tableau de variation de  $f$

5) a) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]0; +\infty[$

b) Vérifier que :  $2,22 < \alpha < 2,23$

6) Démontrer que pour tout réel  $x$  appartenant à  $]0; 1]$ ,  $-\ln 2 \leq f(x) < 0$

7) Construire  $(C)$  dans le repère  $(O, I, J)$ . On prendra  $\alpha = 2,22$ .

**Exercice 1 : (05 points)**

Une variable aléatoire  $X$  prend les valeurs 1; -2; 3 avec les probabilités respectives  $\ln\alpha$ ;  $\ln\beta$ ,  $\ln\gamma$  où  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont, dans cet ordre, les termes consécutifs d'une suite géométrique. On suppose que l'espérance mathématique  $E(X)$  de  $X$  est égale à 1.

1. Calculer  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ainsi que la variance  $V(X)$  et l'écart type  $\sigma(X)$ .
2. Dans le plan  $(P)$ , on considère une droite  $(D)$  munie d'un repère normé  $(O, \vec{u})$  et les points  $A, B, C$  de  $(D)$  d'abscisses respectives 1; -2; 3.
  - a) Calculer l'abscisse du barycentre  $G$  des points  $A, B, C$  affectés des coefficients respectifs  $\frac{1}{6}$ ;  $\frac{1}{3}$ ;  $\frac{1}{2}$
  - b) Soit  $\varphi$  l'application de  $(P)$  dans  $\mathbb{R}$  définie par, pour tout  $M \in (P)$ ,  

$$\varphi(M) = \frac{1}{6}MA^2 + \frac{1}{3}MB^2 + \frac{1}{2}MC^2.$$
 Calculer  $\varphi(G)$  et montrer que  $\varphi(G) = V(X)$ .
  - c) Déterminer et construire l'ensemble  $(C)$  des points  $M$  de  $(P)$  tels que  $\varphi(M) = 9$ .

**Exercice 2 : (04 points)**

Soit  $ABC$  un triangle équilatéral de côté  $a$ ,  $I$  et  $O$  les points tels que :  $\vec{IC} = 2\vec{BI}$  et  $\vec{AO} = 3\vec{IO}$

- 1) Faire une figure.
- 2) Ecrire  $O$  comme barycentre des points  $A, B$  et  $C$ .
- 3) En déduire que :  $2\vec{BO} = \vec{AC}$ .
- 4) Retrouver les égalités suivantes :  $OB^2 = \frac{a^2}{4}$ ,  $OA^2 = \frac{7a^2}{4}$  et  $OC^2 = \frac{3a^2}{4}$
- 5) Justifier que le triangle  $AOC$  est rectangle en  $C$
- 6) On note  $(\Gamma)$  l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :  $-MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = a^2$ 
  - a) Vérifier que le point  $C$  appartient à l'ensemble  $(\Gamma)$
  - b) En déduire l'ensemble  $(\Gamma)$ , puis construire  $(\Gamma)$

**Problème : (11 points)**

**Partie A :**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 2e^x - x - 2$

- 1) Déterminer la limite de  $g$  en  $-\infty$  et la limite de  $g$  en  $+\infty$ .
- 2) Etudier le sens de variation de  $g$ , puis dresser son tableau de variation.
- 3) On admet que l'équation  $g(x) = 0$  a exactement deux solutions réelles.
  - a) Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.
  - b) L'autre solution est appelée  $\alpha$ . Montrer que :  $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$
- 4) Déterminer le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs du réel  $x$

**Partie B :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$

- 1) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$  et la limite de  $f$  en  $+\infty$  (on pourra mettre  $e^{2x}$  en facteur).
- 2) Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x)$  et  $g(x)$  ont le même signe. Etudier le sens de variation de  $f$ .

- 3) Montrer que  $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ , où  $\alpha$  est défini dans la partie A.

En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$ , (on rappelle que :  $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$ )

- 4) Etablir le tableau de variation de  $f$ .
- 5) Tracer la courbe  $(C)$ , représentative de  $f$ , dans le plan rapporté à un repère orthonormal (Unité graphique 2 cm).

**Partie C :**

- 1) Soit  $m$  un réel négatif. Interpréter graphiquement l'intégrale  $\int_m^0 f(x) dx$  (on justifiera la réponse)

- 2) a) Calculer  $\int_m^0 xe^x dx$  à l'aide d'une intégration par parties.

- b) En déduire  $\int_m^0 f(x) dx$

- 3) Calculer la limite de  $\int_m^0 f(x) dx$ , lorsque  $m$  tend vers  $-\infty$ .

**Partie 1**

On définit la fonction  $u$  sur  $\mathbb{R}^*$  par  $u(x) = 2x^3 - 1 + 2 \ln |x|$ .

► 1. Étudier les variations de la fonction  $u$  sur  $\mathbb{R}^*$ . Préciser la valeur de l'extremum relatif de  $u$ . (0,75 + 0,25 POINT)

► 2. Étudier les limites de  $u$  en 0 et en  $+\infty$ . (3 × 0,25 POINT)

► 3. On considère l'équation  $u(x) = 0$ .

a) Montrer qu'elle n'admet qu'une seule solution sur  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$  et en déduire qu'elle est la seule sur  $\mathbb{R}^*$ ; cette solution sera notée  $\alpha$ . (0,5 POINT)

b) Donner un encadrement de  $\alpha$  par deux nombres rationnels de la forme  $\frac{n}{10}$  et  $\frac{n+1}{10}$ , avec  $n$  entier. (0,25 POINT)

► 4. En déduire le signe de  $u(x)$  sur  $\mathbb{R}^*$ . (0,5 POINT)

**Partie 2**

On définit la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = 2x - \frac{\ln |x|}{x^2}$ . On appelle (C)

la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

► 1. Étudier les limites de  $f$  en 0, en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . (3 × 0,25 POINT)

► 2. Pour tout  $x$  réel, déterminer le nombre dérivé  $f'(x)$ . (0,75 POINT)

► 3. En utilisant les résultats déjà établis, donner les variations de la fonction  $f$  et le tableau de variation de  $f$ . (0,75 POINT)

a) Démontrer que  $f(\alpha) = 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2}$ . (0,25 POINT)

b) En utilisant l'encadrement de  $\alpha$  trouvé à la partie 1.3, prouver que  $1,6 \leq f(\alpha) < 2,1$ . La construction de (C) n'est pas demandée. (0,25 POINT)

**Partie 3**

Soit  $M$  le point de coordonnées  $(x; y)$  et  $M'$  le point de coordonnées  $(x'; y')$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , où  $M'$  est le symétrique de  $M$  par rapport à l'axe des ordonnées.

► 1. Déterminer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$ . (0,75 POINT)

► 2. a) Démontrer qu'une équation de la courbe  $(\Gamma)$  à laquelle appartient  $M'$  lorsque  $M$  décrit la courbe (C) est la suivante :

$$y = -2x - \frac{\ln |x|}{x^2}. \quad (0,75 \text{ POINT})$$

b) Étudier la position relative des courbes (C) et  $(\Gamma)$ . (1 POINT)

**Partie 4**

On considère un réel  $m$  supérieur ou égal à 1.

► 1. On note  $A(m)$  l'intégrale  $\int_1^m [2x - f(x)] dx$ . Calculer  $A(m)$ . (On utilisera une intégration par parties.) (1 POINT)

► 2. Déterminer, si elle existe, la limite de  $A(m)$  quand  $m$  tend vers  $+\infty$ . (0,75 POINT)

**PROBLEME** ...

40

Partie A

la fonction  $g$  de  $\mathbb{R}^*$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $g(x) = -x|x| + 1 - \ln|x|$   
Étudier le sens de variation de la fonction  $g$  et dresser son tableau de variation.

(On ne demande pas de calculer les limites aux bornes de  $D_f$ .)

- a. Déterminer le signe de  $g(x)$  sur  $]-\infty; 0[$ .
- b. Calculer  $g(1)$ . Déterminer le signe de  $g(x)$  sur  $]0; +\infty[$ .

Partie B

la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^*$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = -|x| + \frac{\ln|x|}{x}$

Soit  $(C_f)$  la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ .  
(L'unité sera égale à 1 cm).

- a. En utilisant les résultats de la partie A, étudier le sens de variation de  $f$ .
- b. Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition et dresser son tableau de variation.

Déterminer le signe de  $f(x)$  sur  $]0; +\infty[$ .

Démontrer que les droites  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  et  $(\Delta')$  d'équation  $y = -x$  sont asymptotes à  $(C_f)$  respectivement en  $+\infty$  et  $-\infty$ .

- a. Déterminer l'intersection de  $(C_f)$  et  $(\Delta')$  sur  $]0; +\infty[$ .
- b. Étudier la position relative de  $(C_f)$  et  $(\Delta')$  sur  $]0; +\infty[$ .
- a. Déterminer l'intersection de  $(C_f)$  et  $(\Delta)$  sur  $]-\infty; 0[$ .
- b. Étudier la position relative de  $(C_f)$  et  $(\Delta)$  sur  $]-\infty; 0[$ .

Tracer  $(\Delta)$ ,  $(\Delta')$  et  $(C_f)$ .

Partie C

On se propose de déterminer l'intersection de  $(C_f)$  et  $(\Delta')$  sur  $]-\infty; 0[$ .

la fonction  $h$  définie sur  $]-\infty; 0[$  par :  $h(x) = f(x) + x$ .

- a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ .
- b. Étudier le sens de variation de la fonction  $h$  et dresser son tableau de variation.

a. Démontrer que l'équation  $x \in ]-\infty; 0[$ ,  $f(x) = -x$  admet une solution unique  $\alpha$ .

- b. Démontrer que :  $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ .

Partie D

1. Soit  $t$  un nombre réel tel que  $t \geq 1$ .

Calculer l'aire  $\mathcal{A}(t)$  de la partie du plan délimitée par  $(\Delta')$ ,  $(C_f)$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = t$ .

2. On pose, pour tout nombre réel  $t$  tel que  $t \geq 1$  :  $\mathcal{J}(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx$ .

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\mathcal{J}(t)$ .

b. Démontrer que :  $0 \leq \mathcal{J}(t) \leq 1$ .

c. Déterminer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{J}(t)$ .

Commun à tous les candidats

Pour tout entier naturel, on considère les fonctions  $f_n$  définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_n(x) = \frac{e^{(1-n)x}}{1+e^x}$$

## Partie A

⊙ Étude de  $f_0$  et de  $f_1$

On appelle  $f_0$  la fonction définie par  $f_0(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ .

On appelle  $(\Gamma_0)$  et  $(\Gamma_1)$  les courbes représentatives respectivement de  $f_0$  et de  $f_1$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , (unité graphique : 5 cm).

- ▶ 1. Déterminer la limite de  $f_0$  en  $-\infty$ , puis en  $+\infty$ . (0,5 POINT)
- ▶ 2. Calculer la dérivée de  $f_0$  et étudier son sens de variation. (1 POINT)
- ▶ 3. Montrer que le point  $I\left(0; \frac{1}{2}\right)$  est un centre de symétrie de la courbe  $(\Gamma_0)$ . (0,5 POINT)
- ▶ 4. Déterminer une équation de la tangente en  $I$  à  $(\Gamma_0)$ . (0,5 POINT)
- ▶ 5. Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f_1(-x) = f_0(x)$ . (0,5 POINT)
- ▶ 6. Par quelle transformation simple  $(\Gamma_1)$  est-elle l'image de  $(\Gamma_0)$ ? Construire  $(\Gamma_0)$  et  $(\Gamma_1)$ . (1,5 POINT)

## Partie B

⊙ Calcul d'une aire

- ▶ 1. Montrer que, pour tout  $x$  réel,  $f_1(x) + f_0(x) = 1$ . (0,5 POINT)
- ▶ 2. Soit  $\alpha$  un réel positif ou nul, calculer  $\int_0^\alpha f_0(x) dx$ , puis  $\int_0^\alpha f_1(x) dx$ . (1,5 POINT)
- ▶ 3. En déduire l'aire  $A(\alpha)$  de la partie du plan définie par
 
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \alpha \\ f_1(x) \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (0,5 \text{ POINT})$$
- ▶ 4. Déterminer la limite de  $A(\alpha)$  quand  $\alpha$  tend vers  $+\infty$ . (0,5 POINT)

## Partie C

⊙ Étude d'une suite

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .

- ▶ 1. Calculer  $u_0$  et  $u_1$ . (0,5 POINT)
- ▶ 2. Montrer que, pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n} \left( \frac{e^n - 1}{e^n} \right)$ . (0,75 POINT)
- ▶ 3. En déduire la limite, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , de  $u_{n+1} + u_n$ . (0,5 POINT)
- ▶ 4. Montrer que, pour tout  $x$  réel de  $[0; 1]$ ,  $\frac{e^{(1-n)x}}{1+e^x} \geq \frac{e^{-nx}}{1+e^x}$ . (0,75 POINT)
- ▶ 5. En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ , puis la limite de  $(u_n)$ . (1 POINT)

Commun à tous les candidats.

La partie B peut être traitée indépendamment de la partie A.

Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ; unité graphique : 2 cm.

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_n(x) = \frac{e^x}{e^{nx}(1 + e^x)}.$$

On désigne par  $(C_n)$  la courbe représentative de  $f_n$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

### Partie A

⊗ Dans cette partie, on s'intéresse seulement aux fonctions  $f_0$  et  $f_1$  correspondant respectivement à  $n = 0$  et  $n = 1$ .

On considère d'abord la fonction  $f_0$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_0(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$ .

▶ 1. a) Déterminer la limite de  $f_0(x)$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$ . (0,25 POINT)

b) Déterminer la limite de  $f_0(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . (0,25 POINT)

c) En déduire les asymptotes de  $(C_0)$ . (0,25 POINT)

▶ 2. Montrer que le point  $K\left(0; \frac{1}{2}\right)$  est un centre de symétrie de  $(C_0)$ .

(0,5 POINT)

▶ 3. Étudier les variations de  $f_0$ . (1 POINT)

▶ 4. a) Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C_0)$  au point  $K$ . (0,25 POINT)

b) Montrer que, pour étudier la position de la tangente  $(T)$  par rapport à la courbe  $(C_0)$ , il suffit d'étudier sur  $\mathbb{R}$  le signe de  $g(x)$ , où

$$g(x) = 2e^x - xe^x - 2 - x \quad (0,5 \text{ POINT})$$

c) Calculer  $g'(x)$  et  $g''(x)$ . (0,25 + 0,25 POINT)

d) Déterminer, en les justifiant, les signes de  $g''(x)$ ,  $g'(x)$  et  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ . (1,5 POINT)

e) En déduire la position de la tangente  $(T)$  par rapport à la courbe  $(C_0)$ . (0,5 POINT)

- 4. Tracer  $(C_0)$  et  $(T)$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . (0,5 POINT)
- 5. a) Montrer que, pour tout réel  $x$ , les points  $M(x; f_0(x))$  et  $M(x; f_1(x))$  sont symétriques par rapport à la droite  $(d)$  d'équation  $y = \frac{1}{2}$ . (0,5 POINT)

b) Comment obtient-on  $(C_1)$  à partir de  $(C_0)$  ?  
Tracer  $(C_1)$ . (0,5 POINT)

### Partie B

► Étude de la suite  $(u_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$$

► 1. Montrer que  $u_0 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$ . (0,5 POINT)

► 2. Montrer que  $u_0 + u_1 = 1$ . En déduire  $u_1$ . (0,5 POINT)

► 3. Montrer que la suite  $(u_n)$  est positive. (0,25 POINT)

► 4. On pose  $k(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$ .

a) Montrer que, pour tout  $x$  réel,  $k(x) = \frac{1 - e^x}{e^{nx}(1 + e^x)}$ . (0,5 POINT)

a) Étudier le signe de  $k(x)$  pour  $x \in [0; 1]$ . (0,5 POINT)

a) En déduire que la suite  $(u_n)$  est décroissante. (0,25 POINT)

► 5. a) Montrer que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on a :

$$u_{n-1} + u_n = \frac{1 - e^{-(n-1)}}{n-1}. (0,5 POINT)$$

a) Calculer  $u_2$ . (0,25 POINT)

► 6. Soit  $(v_n)$  la suite définie, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, par

$$v_n = \frac{u_{n-1} + u_n}{2}$$

a) Calculer la limite de  $v_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . (0,25 POINT)

b) Montrer que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on a :

$$0 \leq u_n \leq v_n. (0,25 POINT)$$

c) En déduire la limite de  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . (0,25 POINT)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (2x + 1)e^{-2x}$  et sa courbe représentative  $(C)$  dans le repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (l'unité graphique est 2 cm).

### Partie A

#### ⊙ Étude de la fonction $f$

- ▶ 1. a) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
Que peut-on en déduire pour  $(C)$ ? (0,5 POINT)
- b) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ . (0,25 POINT)
- ▶ 2. Calculer  $f'(x)$  et étudier le signe de  $f'$  sur  $\mathbb{R}$ . (0,5 POINT)
- ▶ 3. Dresser le tableau de variation de  $f$ . (0,5 POINT)
- ▶ 4. a) Déterminer les coordonnées du point A d'intersection de  $(C)$  avec l'axe des abscisses. (0,25 POINT)
- b) Étudier le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$ . (0,5 POINT)

### Partie B

#### ⊙ Étude d'une tangente

- ▶ 1. On rappelle que  $f''$  désigne la dérivée seconde de  $f$ .  
a) Montrer que, pour tout  $x$  réel,  $f''(x) = 4(2x - 1)e^{-2x}$ . (0,5 POINT)
- b) Résoudre l'équation  $f''(x) = 0$ . (0,5 POINT)
- ▶ 2. Soit B le point d'abscisse  $\frac{1}{2}$  de la courbe  $(C)$ . Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  en B. (0,25 POINT)
- ▶ 3. On veut étudier la position relative de  $(C)$  et  $(T)$ ; pour cela, on considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = f(x) - \left(-\frac{2}{e}x + \frac{3}{e}\right)$ .  
a) Déterminer  $g'(x)$  et  $g''(x)$ . (0,5 POINT)
- b) Étudier le signe de  $g''(x)$  suivant les valeurs de  $x$ . (0,25 POINT)  
En déduire le sens de variation de  $g'$  sur  $\mathbb{R}$ . (0,25 POINT)
- c) En déduire le signe de  $g'(x)$  puis le sens de variation de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ . (0,5 POINT)
- d) Déterminer alors le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ . Que peut-on en conclure sur la position relative de  $(C)$  et  $(T)$ ? (0,5 POINT)
- ▶ 4. Dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , placer les points A et B puis tracer la tangente  $(T)$  et la courbe  $(C)$ . (1 POINT)

### Partie C

#### ⊙ Calculs d'aire et de volume

- ▶ 1. Soit  $\lambda$  un réel strictement positif.  
On note  $A(\lambda)$ , l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe  $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = -\frac{1}{2}$  et  $x = \lambda$ .  
a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer  $A(\lambda)$  en fonction de  $\lambda$ . (1 POINT)
- b) Déterminer  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$ . (0,25 POINT)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x - (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$ .  
 On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ; l'unité graphique est 2 cm.

### Partie A

⊙ Étude d'une fonction auxiliaire  $g$

Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{-x} - 1$ .

- ▶ 1. Étudier les limites de  $g$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . (0,5 POINT)
- ▶ 2. Calculer  $g'(x)$  et montrer que  $g'(x)$  et  $(3 - x^2)$  ont le même signe. (0,75 POINT)
- ▶ 3. En déduire le tableau de variation de  $g$ . (0,5 POINT)
- ▶ 4. a) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet deux solutions dans  $\mathbb{R}$ . Vérifier que  $g(0) = 0$ . On note  $\alpha$  la solution non nulle. (0,75 POINT)
- b) Prouver que  $-2,4 < \alpha < -2,3$ . (0,25 POINT)
- ▶ 5. En déduire le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ . (0,5 POINT)

### Partie B

⊙ Étude de la fonction  $f$

- ▶ 1. Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . (0,5 POINT)
- ▶ 2. a) Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = g(x)$ . (0,5 POINT)
- b) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ . (0,5 POINT)
- ▶ 3. Démontrer que la droite (D), d'équation  $y = x$ , est asymptote à la courbe (C). (0,25 POINT)
- ▶ 4. a) Montrer que la droite (D) et la courbe (C) se coupent en deux points A et B dont on donnera les coordonnées. (0,5 POINT)
- b) Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe (C). (0,75 POINT)
- ▶ 5. Construire la courbe (C) et la droite (D). (0,75 POINT)

### Partie C

⊙ Calculs d'aires

- ▶ 1. Soit  $H$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ . Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que la fonction  $H$  soit une primitive de la fonction  $h$  définie par  $h(x) = (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$ . (0,75 POINT)
- ▶ 2. Déterminer l'aire, en unités d'aire, de la partie de plan limitée par la courbe (C) et la droite (D). (1 POINT)
- ▶ 3. Soit  $m$  un réel strictement supérieur à  $-1$ . On considère le domaine  $(\mathcal{D}_m)$  délimité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives  $x = -1$  et  $x = m$ .
  - a) Calculer l'aire  $\mathcal{A}_m$  du domaine  $(\mathcal{D}_m)$ , en unités d'aire. (1 POINT)
  - b) Déterminer la limite de  $\mathcal{A}_m$  lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$ . (0,25 POINT)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  
 $f(x) = -3 - \ln x + 2(\ln x)^2$ .

On note  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative.

Partie A

- Étude de la fonction  $f$  et tracé de la courbe  $(\mathcal{C})$ .
  - ▶ 1. a) Résoudre dans  $]0; +\infty[$  l'équation  $f(x) = 0$ . (On pourra poser  $\ln x = X$ ). (0,5 POINT)
  - b) Résoudre dans  $]0; +\infty[$  l'inéquation  $f(x) > 0$ . (0,5 POINT)
  - ▶ 2. a) Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ . (0,5 POINT)
  - b) Calculer  $f'(x)$ . (0,5 POINT)
  - c) Étudier le sens de variation de  $f$  et dresser son tableau de variation. (1 POINT)
  - ▶ 3. Déterminer une équation de la tangente  $(\mathcal{T})$  à la courbe  $(\mathcal{C})$  au point d'abscisse  $e^{\frac{5}{4}}$ . (0,5 POINT)

▶ 4. On se propose d'étudier la position de la courbe  $(\mathcal{C})$  par rapport à la droite  $(\mathcal{T})$ . Pour cela, on considère la fonction  $\varphi$ , définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$\varphi(x) = f(x) - \left(4e^{-\frac{5}{4}}x - \frac{41}{8}\right)$$

- a) Montrer que  $\varphi'(x) = \frac{4 \ln x - 1}{x} - 4e^{-\frac{5}{4}}$ , puis calculer  $\varphi''(x)$ . (1 POINT)
- b) Étudier le sens de variation de  $\varphi'$  sur  $]0; +\infty[$ .  
En déduire que, pour tout  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ , on a :  
 $\varphi'(x) \leq 0$ . (1,5 POINT)
- c) Calculer  $\varphi(e^{\frac{5}{4}})$ . Pour tout  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ , déterminer le signe de  $\varphi(x)$ . En déduire la position de la courbe  $(\mathcal{C})$  par rapport à la droite  $(\mathcal{T})$ . (1 POINT)
- ▶ 5. Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$  et la droite  $(\mathcal{T})$  (unité graphique = 2 cm). (1 POINT)

Partie B

○ Calcul d'une aire

▶ 1. Vérifier que la fonction  $h$ , définie par  $x \mapsto x \ln x - x$ , est une primitive de la fonction logarithme népérien sur  $]0; +\infty[$ .

▶ 2. On pose  $I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^e \ln x \, dx$  et  $I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^e (\ln x)^2 \, dx$ .

- a) Calculer  $I_1$ . (0,5 POINT)
- b) En utilisant une intégration par parties, montrer que  $I_2 = \frac{5}{4}e^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{e}$ . (1 POINT)
- c) Calculer  $\int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} f(x) \, dx$ . En déduire l'aire, en unités d'aire, de l'ensemble des points  $M(x; y)$  du plan tels que  $\frac{1}{e} \leq x \leq e^{\frac{3}{2}}$  et  $f(x) \leq y \leq 0$ . (1,5 POINT)

Problème A\* B\* C\* (10 points)

Polynésie française, enseignement obligatoire et de spécialité,  
septembre 2000

49

ANALYSE : FONCTION EXPONENTIELLE ;  
FONCTION LOGARITHME ; SUITE  $u_{n+1} = f(u_n)$  ;  
CALCUL INTÉGRAL (INTÉGRATION PAR PARTIES)



## Sujet

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 2x + 1 - x e^{x-1}.$$

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

### A. Étude de la fonction $f$ et construction de la courbe $\mathcal{C}$

1. Étudier la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$  puis en  $+\infty$  (on pourra écrire  $x e^{x-1} = \frac{1}{e} x e^x$ ).

2. Démontrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x + 1$  est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $-\infty$  et préciser la position de la courbe  $\mathcal{C}$  par rapport à la droite  $\Delta$ .

3. a) Calculer la dérivée  $f'$  et la dérivée seconde  $f''$  de la fonction  $f$ .

b) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f'$  en précisant la limite de la fonction  $f'$  en  $-\infty$ .

c) Calculer  $f'(1)$  et en déduire le signe de  $f'(x)$  pour tout réel  $x$ .

d) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .

4. Soit  $I$  l'intervalle  $[1,9 ; 2]$ . Démontrer que, sur  $I$ , l'équation  $f(x) = 0$  a une solution unique,  $\alpha$ .

5. Tracer la droite  $\Delta$  et la courbe  $\mathcal{C}$  (unité graphique : 2 cm).

### B. Recherche d'une approximation de $\alpha$

On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $I$  par :

$$g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right).$$

1. Démontrer que, sur  $I$ , l'équation  $f(x) = 0$  équivaut à l'équation  $g(x) = x$ .
2. Étudier le sens de variation de la fonction  $g$  sur  $I$  et démontrer que, pour tout  $x$  appartenant à  $I$ ,  $g(x)$  appartient à  $I$ .
3. Démontrer que, pour tout  $x$  de l'intervalle  $I$ ,  $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$ .
4. Soit  $(u_n)$  la suite de nombres réels définie par :  
 $u_0 = 2$  et, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = g(u_n)$ .

On déduit de la question B. 2. que tous les termes de cette suite appartiennent à l'intervalle  $I$ .

On ne demande pas de le démontrer.

a) Démontrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9} |u_n - \alpha|$ .

b) En déduire, en raisonnant par récurrence, que :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}.$$

c) En déduire que la suite  $(u_n)$  converge et préciser sa limite.

### C. Calcul d'aire

1. En intégrant par parties, calculer l'intégrale  $J = \int_1^{\alpha} x e^{x-1} dx$ .

2. a) Déterminer, en unités d'aire, l'aire  $\mathcal{A}$  de la portion de plan limitée par la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses, la droite d'équation  $x = 1$  et la droite d'équation  $x = \alpha$ .

b) Démontrer qu'on peut écrire  $\mathcal{A} = (\alpha - 1) \cdot \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$ .

ANALYSE : FONCTION LOGARITHME ;  
SUITE  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

## Sujet

Dans tout le problème,  $C$  désigne la courbe d'équation  $y = \ln x$  représentant la fonction logarithme népérien dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine  $O$  et d'unité graphique 4 cm.

Question préliminaire : tracer, avec soin mais sans étude de la fonction, la courbe  $C$  et la droite  $D$  d'équation  $y = x$ .

### Partie A

1. a) Déterminer une équation de la tangente  $\Delta$  à  $C$  au point  $I$  d'abscisse 1.

b) Étudier les variations de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x - 1 - \ln x$ .

c) En déduire la position de  $C$  par rapport à  $\Delta$ .

2. a) Déduire de la question précédente la valeur minimale prise par  $x - \ln x$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

b)  $M$  et  $N$  sont les points de même abscisse  $x$  des courbes  $C$  et  $D$  respectivement.

Déterminer la plus petite valeur (exprimée en cm) prise par la distance  $MN$  lorsque  $x$  décrit l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

### Partie B

1. Soit  $M$  le point d'abscisse  $x$  de la courbe  $C$ . Exprimer la distance  $OM$  de l'origine à  $M$  en fonction de  $x$ .

2. Étude de la fonction auxiliaire  $u$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $u(x) = x^2 + \ln x$ .

a) Justifier les limites de  $u(x)$  en 0 et en  $+\infty$  ainsi que le sens de variation de  $u$ .

b) Montrer qu'il existe un réel  $\alpha$  et un seul tel que  $u(\alpha) = 0$ . Justifier que  $\alpha$  est compris entre 0,5 et 1 puis donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ .

c) Déterminer le signe de  $u(x)$  suivant la valeur de  $x$ .

3. Étude de la fonction  $g$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = x^2 + (\ln x)^2$ .

Calculer  $g'(x)$  et vérifier que  $g'(x) = \frac{2}{x} u(x)$ .

En déduire le tableau de variation de  $g$ .

4. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de la plus courte distance de l'origine aux points de la courbe  $C$  et en donner une valeur approchée (exprimée en cm) en utilisant pour  $\alpha$  la valeur centrale de l'encadrement trouvé à la question 2.b).

5.  $A$  étant le point d'abscisse  $\alpha$  de  $C$ , démontrer que la tangente en  $A$  est perpendiculaire à la droite  $(OA)$ .

### Partie C

#### Étude d'une suite

1. Montrer que le réel  $\alpha$  défini dans la partie B est solution de l'équation  $h(x) = x$ , où  $h$  est la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$h(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 + \ln x).$$

2. a) Calculer  $h'(x)$  et étudier son signe sur l'intervalle  $[\frac{1}{2}, 1]$ .

b) Prouver que  $h([\frac{1}{2}, 1]) \subset [\frac{1}{2}, 1]$ .

c) Calculer  $h''(x)$  et étudier son signe sur l'intervalle  $[\frac{1}{2}, 1]$ .

d) En déduire que, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[\frac{1}{2}, 1]$ , on a  $0 \leq h'(x) \leq 0,3$ .

3. On définit la suite  $(u_n)$  par :  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = h(u_n)$ .

a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ , et que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que l'on a, pour tout entier naturel  $n$ ,  $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,3 |u_n - \alpha|$  puis que

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{3}(0,3)^n.$$

c) En déduire que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\alpha$ .

d) Déterminer un entier  $n_0$  tel que  $u_{n_0}$  soit une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-5}$  près et indiquer la valeur de  $u_{n_0}$  donnée par la calculatrice (avec 5 décimales).

ANALYSE : FONCTION EXPONENTIELLE ; FONCTION LOGARITHME ; CALCUL INTÉGRAL (INTÉGRATION PAR PARTIES) ; ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

### 3) Sujet

L'objet de ce problème est d'étudier, à l'aide d'une fonction auxiliaire, une fonction et de résoudre une équation différentielle dont elle est solution.

#### A. Étude d'une fonction auxiliaire

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)$ .

1. Calculer  $g'(x)$  et montrer que ce nombre est strictement négatif pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .
2. Déterminer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
3. Dresser le tableau de variation de  $g$ .
4. Donner le signe de  $g(x)$ .

#### B. Étude d'une fonction et calcul d'une aire

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-2x} \ln(1+2e^x)$ .

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Calculer  $f'(x)$  et montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 2e^{-2x} g(x)$ .
2. a) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .  
b) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

On pourra remarquer que :

$$\text{si on pose } X = 1 + 2e^x, f(x) \text{ s'écrit } 4 \frac{X}{(X-1)^2} \frac{\ln X}{X}.$$

3. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
4. Tracer  $\mathcal{C}$ .
5. Soit  $\alpha$  un réel strictement positif.

a) Vérifier que, pour tout réel  $x$ ,  $\frac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$ .

En déduire la valeur de l'intégrale  $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+2e^x} dx$ .

- b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale :

$$J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx.$$

Donner une interprétation graphique de  $J(\alpha)$ .

## C. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + 2y = 2 \frac{e^{-x}}{1 + 2e^x}.$$

54

1. Vérifier que la fonction  $f$  étudiée dans la partie B est solution de (E).
2. Montrer qu'une fonction  $\varphi$  est solution de (E) si et seulement si  $\varphi - f$  est solution de l'équation différentielle

$$(E') : y' + 2y = 0.$$

3. Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).

### Problème A\* B\*\* C\* (12 points)

Amérique du Nord, enseignement obligatoire et de spécialité, juin 2001

ANALYSE : FONCTION LOGARITHME ; FONCTION EXPONENTIELLE ; CALCUL INTÉGRAL (INTÉGRATION PAR PARTIES) ; SUITE  $u_{n+1} = f(u_n)$

### 4 Sujet

Le but de ce problème est d'étudier dans la **partie A** la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$ , de déterminer ensuite dans la **partie B** la position de sa courbe représentative par rapport à son asymptote oblique et enfin d'étudier une suite récurrente dans la **partie C**, celle dernière partie étant dans une large mesure indépendante des deux autres.

#### Partie A

1. Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$g(x) = x^3 - x - 2 \ln x + 1.$$

- a) Montrer que la fonction  $g$  est dérivable et que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$

$$g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2 + 3x + 2)}{x}.$$

- b) Étudier les variations de la fonction  $g$  puis déterminer le signe de  $g(x)$ .

2. a) Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

- b) Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$   $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$  puis donner le tableau de variations de  $f$ .

#### Partie B

$\Gamma$  désigne la représentation graphique de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , unité graphique 2 cm.

1. Soit  $h$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $h(x) = x + \ln x$ .

- a) Étudier le sens de variation de  $h$  puis montrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur l'intervalle  $[0,4; 0,7]$ .

- b) Montrer que l'on a :  $e^{-\alpha} = \alpha$ .

2. a) Vérifier que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$  est asymptote oblique à  $\Gamma$  en  $+\infty$ .

b. utiliser les résultats de la question 1. a) pour déterminer les positions relatives de  $\Gamma$  et  $\Delta$ .

3. Construire  $\Gamma$  et  $\Delta$  dans le repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

4. a) Calculer au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale

$$I = \int_1^2 \frac{\ln t}{t^2} dt.$$

b. En déduire l'aire, en  $\text{cm}^2$  de la portion de plan limitée par la courbe  $\Gamma$ , la droite  $\Delta$  et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équation  $x = 1$  et  $x = 2$ .

### Partie C : Étude d'une suite.

Dans cette partie :

- $I$  désigne l'intervalle  $[0,4; 0,7]$

- $\alpha$  est le réel mis en évidence au B.1.

- $\varphi$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\varphi(x) = e^{-x}$

- $u$  est la suite récurrente définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 0,4 \\ \text{et} \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer qu'on a pour tout  $x \in I$  :

a)  $\varphi(x) \in I$

b)  $|\varphi'(x)| \leq 0,7$

c)  $|\varphi(x) - \alpha| \leq 0,7 |x - \alpha|$ .

2. a) Montrer qu'on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,7 |u_n - \alpha|$  puis en déduire par récurrence qu'on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $|u_n - \alpha| \leq 0,3 (0,7)^n$ .

b. Conclure alors quant à la convergence de la suite  $u$ .

3. Déterminer un entier  $p$  tel que pour  $n \geq p$  on ait  $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$  puis donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de  $u_p$  à  $10^{-3}$  près.

ANALYSE : FONCTION LOGARITHME ; FONCTION  
EXPONENTIELLE ; CALCUL INTÉGRAL. NOMBRES  
COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE PLANE : ROTATION ET  
TRANSFORMATION COMPLEXE ASSOCIÉE.

## 19 Sujet

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .  
Toutes les courbes demandées seront représentées sur un même  
graphique (unité graphique : 2 cm).

### A. Étude d'une fonction $f$

On définit la fonction  $f$  sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \ln(\sqrt{1+x} - 1)$ .

1. Calculer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

2. Étudier le sens de variation de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .

3. Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  et A le point de  
 $\mathcal{C}$  d'abscisse 3.

Calculer l'ordonnée de A. Soit B le point de  $\mathcal{C}$  d'abscisse  $\frac{5}{4}$ , P le

projeté orthogonal de B sur l'axe  $(O, \vec{u})$  et H le projeté orthogonal

de B sur l'axe  $(O, \vec{v})$ .

Déterminer les valeurs exactes des coordonnées des points B, P et H.

Placer les points A, B, P et H dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  et représenter  
la courbe  $\mathcal{C}$ .

### B. Utilisation d'une rotation

Soit  $r$  la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . À tout point M du plan  
d'affixe  $z$ , la rotation  $r$  associe le point M' d'affixe  $z'$ .

1. a) Donner  $z'$  en fonction de  $z$ .

On note  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$  ( $x, y, x', y'$  réels), exprimer  $x'$  et  $y'$   
en fonction de  $x$  et  $y$ , puis exprimer  $x$  et  $y$  en fonction de  $x'$  et  $y'$ .

b) Déterminer les coordonnées des points A', B' et P' images respec-  
tives des points A, B et P par la rotation  $r$ .

2. On appelle  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^{-2x} + 2e^{-x}$  et  $\Gamma$   
sa courbe représentative dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

a) Montrer que lorsqu'un point M appartient à  $\mathcal{C}$ , son image M' par  
 $r$  appartient à  $\Gamma$ .

On admet que lorsque le point M décrit  $\mathcal{C}$ , le point M' décrit  $\Gamma$ .

b) Tracer sur le graphique précédent les points A', B', P' et la courbe  
 $\Gamma$  (l'étude des variations de  $g$  n'est pas demandée).

### C. Calcul d'intégrales

On rappelle que l'image d'un domaine plan par une rotation est un  
domaine plan de même aire.

X 57

1. Calculer l'intégrale  $\int_0^{\ln 2} g(x) dx$ . Interpréter graphiquement cette intégrale.

2. a) Déterminer, en unités d'aire, l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine plan  $\mathcal{D}$  limité par les segments  $[AO]$ ,  $[OH]$  et  $[HB]$  et l'arc de courbe  $\mathcal{C}$  d'extrémités B et A.

b) On pose  $I = \int_{5/4}^3 \ln(\sqrt{1+x}-1) dx$ .

Trouver une relation entre  $\mathcal{A}$  et  $I$  puis en déduire la valeur exacte de l'intégrale  $I$ .

INGENIEUR DES MINES ALLIANCE

58

ANALYSE : ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ; FONCTION EXPONENTIELLE ; CALCUL INTÉGRAL (INTÉGRATION PAR PARTIES)

**27** Sujet

**Partie A : Résolution de l'équation différentielle (1)**

$$y' - 2y = xe^x$$

1. Résoudre l'équation différentielle (2) :  $y' - 2y = 0$ , où  $y$  désigne une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
2. Soient  $a$  et  $b$  deux réels et soit  $u$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = (ax + b)e^x$ .
  - a) Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $u$  soit solution de l'équation (1).
  - b) Montrer que  $v$  est une solution de l'équation (2) si et seulement si  $u + v$  est solution de (1).
  - c) En déduire l'ensemble des solutions de (1).
3. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

**Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 2e^x - x - 2$ .

1. Déterminer la limite de  $g$  en  $-\infty$  et la limite de  $g$  en  $+\infty$ .
2. Étudier le sens de variation de  $g$ , puis dresser son tableau de variation.
3. On admet que l'équation  $g(x) = 0$  a exactement deux solutions réelles.
  - a) Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.
  - b) L'autre solution est appelée  $\alpha$ . Montrer que  $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$ .
4. Déterminer le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs du réel  $x$ .

### Partie C : Étude de la fonction principale

59

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$ .

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$  et la limite de  $f$  en  $+\infty$ . (On pourra mettre  $e^{2x}$  en facteur).

2. Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x)$  et  $g(x)$  ont le même signe. Étudier le sens de variation de  $f$ .

3. Montrer que  $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ , où  $\alpha$  est défini dans la **partie B**.

En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$ . (On rappelle que  $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$ ).

4. Établir le tableau de variation de  $f$ .

5. Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$ , représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

### Partie D : Calcul d'aire

1. Soit  $m$  un réel négatif.

Interpréter graphiquement l'intégrale  $\int_m^0 f(x) dx$ . (On justifiera la réponse).

2. a) Calculer  $\int_m^0 xe^x dx$  à l'aide d'une intégration par parties.

b) En déduire  $\int_m^0 f(x) dx$ .

3. Calculer la limite de  $\int_m^0 f(x) dx$ , lorsque  $m$  tend vers  $-\infty$ .

**ANALYSE : FONCTION LOGARITHME ; CALCUL INTÉGRAL  
 (INTÉGRATION PAR PARTIES) ; SUITE DÉFINIE À L'AIDE  
 D'UNE INTÉGRALE**

**31) Sujet**

Dans tout le texte  $e$  désigne le nombre réel qui vérifie  $\ln e = 1$ .

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{\ln x + xe}{x^2}$ .

On note  $\Gamma$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ , unité graphique : 2 cm.

**Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $g(x) = -2 \ln x - xe + 1$ .

1. Déterminer les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. Étudier le sens de variation de  $g$ .
3. Montrer que dans  $[0,5 ; 1]$  l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution et une seule notée  $\alpha$ .  
Déterminer un encadrement de  $\alpha$  à 0,1 près.
4. En déduire le signe de  $g(x)$  selon les valeurs de  $x$ .

**Partie B : Étude de la fonction  $f$**

1. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
2. Soit  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ . Vérifier que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$  puis étudier le sens de variation de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .
3. Montrer que  $f(\alpha) = \frac{1 + \alpha e}{2\alpha^2}$ .
4. Donner le tableau de variation de  $f$ .
5. Construire  $\Gamma$ .

**Partie C : Intégrale et suite**

Soit  $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln t}{t^2} dt$  et  $A_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} f(t) dt$  pour tout entier naturel  $n$ .

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$I_n = \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}}$$

2. a) Montrer que  $A_n = I_n + e^n$   
 b) Calculer  $I_0$  et  $A_0$ .  
 c) Donner une interprétation géométrique de  $A_0$ .
3. Montrer que la suite  $(A_n)$  converge vers  $e$ .

ANALYSE : ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ; FONCTION  
EXPONENTIELLE ; CALCUL INTÉGRAL (INTÉGRATION  
PAR PARTIES) ; FONCTION DU TYPE  $x \rightarrow \int_0^x f(t) dt$ .

**35** **Sujet**

Les objectifs du problème sont de déterminer une solution particulière d'une équation différentielle (partie A), d'étudier cette solution (partie B) et de la retrouver dans un contexte différent (partie C).

**Partie A**

On appelle (E) l'équation différentielle  $y'' - y = 0$ , où  $y$  est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels.

1. Déterminer les réels  $r$  tels que la fonction  $h$ , définie par  $h(x) = e^{rx}$ , soit solution de (E).
2. Vérifier que les fonctions  $\varphi$  définies par  $\varphi(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux nombres réels, sont des solutions de (E).  
On admet qu'on obtient ainsi toutes les solutions de (E).
3. Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées  $(\ln 2 ; \frac{3}{4})$  et admet en ce point une tangente dont le coefficient directeur est  $\frac{5}{4}$ .

**Partie B**

On appelle  $f$  la fonction définie sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels par :  $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ .

On désigne par (C) la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Soit  $\mu$  un réel. Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \mu$  équivaut à  $e^{2x} - 2\mu e^x - 1 = 0$ .  
En déduire que l'équation  $f(x) = \mu$  a une unique solution dans  $\mathbb{R}$  et déterminer sa valeur en fonction de  $\mu$ .

2. a) Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .  
b) Calculer  $f'(x)$  pour tout nombre réel  $x$  et en déduire le sens de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.  
b) En étudiant le sens de variation de la fonction  $d$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $d(x) = f(x) - x$ , préciser la position de (C) par rapport à (T).  
c) Tracer (C) et (T). (Unité graphique : 2 cm).

4. Soit  $D$  la partie représentant sur le graphique l'ensemble des points  $M$  de coordonnées  $(x ; y)$  tels que : 
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq f(x). \end{cases}$$

Calculer, en  $\text{cm}^2$ , l'aire de  $D$ .

ANALYSE : FONCTION EXPONENTIELLE ; CALCUL INTÉGRAL (INTÉGRATION PAR PARTIES) ; SUITE  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

**39** **Sujet**

On considère la fonction  $f$ , définie sur l'intervalle  $]-1 ; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2}$$

On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

**A. Étude de la fonction  $f$  et tracé de  $(\mathcal{C})$**

1. a) Calculer la limite de cette fonction lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .  
b) Calculer la limite de cette fonction lorsque  $x$  tend vers  $-1$ .  
Que peut-on en déduire pour la courbe  $(\mathcal{C})$  ?
2. Calculer  $f'(x)$  et montrer que son signe est celui de  $\frac{x-1}{x+1}$ .
3. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
4. Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$ , les droites d'équations respectives  $x = -1$  et  $y = 1$ , ainsi que la tangente à cette courbe en son point d'abscisse 0.  
(Unité graphique : 4 cm)
5. Montrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet une unique solution, notée  $\alpha$ , dans l'intervalle  $[1 ; 10]$ . Utiliser le graphique précédent pour donner deux nombres entiers consécutifs  $a$  et  $b$  tels que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $[a ; b]$ .

**B. Calcul d'une aire**

1. Soit  $g$  la fonction définie sur  $]-1 ; +\infty[$  par  $g(x) \equiv \frac{e^x}{1+x}$ .  
a) Étudier le sens de variation de  $g$  dans l'intervalle  $[1 ; 2]$ .  
b) Montrer que, pour tout  $x$  appartenant à  $[1 ; 2]$ , on a :  
 $1 \leq g(x) \leq 2,5$ .  
c) En déduire un encadrement de  $A_1 = \int_1^2 g(x) dx$ .

2. Soit  $A_2$  l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les droites d'équations respectives  $x = 1$  et  $x = 2$ , la courbe  $(\mathcal{C})$  et l'axe des abscisses.

À l'aide d'une intégration par parties, exprimer  $A_2$  en fonction de  $A_1$  et en déduire un encadrement de  $A_2$ .

### C. Approximation d'un nombre à l'aide d'une suite

Pour cette partie, on utilisera sans justification le fait que l'équation  $f(x) = x$  a une unique solution  $\beta$  et que celle-ci est élément de l'intervalle  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .

Soit  $h$  la fonction définie sur  $]-1; +\infty[$  par  $h(x) = \frac{e^x}{(1+x)^3}$ .

1. a) Vérifier que, pour tout  $x$  appartenant à  $]-1; +\infty[$ , on a  $f'(x) = f(x) - 2h(x)$ .

b) Calculer  $h'(x)$ .

c) En utilisant la question a), calculer  $f''(x)$ .

En déduire le sens de variation de  $f'$  dans l'intervalle  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .

d) En déduire que, pour tout  $x$  appartenant à  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ , on a

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{4}.$$

2. On définit la suite  $(U_n)$ , pour tout nombre entier naturel  $n$ , par  $U_0 = 1$  et  $U_{n+1} = f(U_n)$  pour  $n \geq 0$ .

On admet que, pour tout nombre entier naturel  $n$ , on a :  $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$ .

a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel  $n$ , on a

$$|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|U_n - \beta|.$$

b) Montrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel  $n$

$$\text{on a } |U_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

c) En déduire une valeur approchée numérique de  $\beta$  à  $10^{-3}$  près.

ANALYSE : FONCTION EXPONENTIELLE ET FONCTION  
LOGARITHME NÉPÉRIEN ; CALCUL INTÉGRAL  
(INTÉGRATION PAR PARTIES)

**67** Sujet

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique : 5 cm).

**Partie A :**

On considère la fonction  $f_1$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f_1(x) = xe^{-x^2}$  on appelle  $C_1$  sa courbe représentative.

1. Montrer que pour tout réel positif  $x$ ,  $f_1'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$ . En déduire le sens de variation de  $f_1$ .
2. Calculer la limite de  $f_1$  en  $+\infty$  (on pourra poser  $u = x^2$ ). Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Dresser le tableau de variation de  $f_1$ .
4. On appelle  $\Delta$  la droite d'équation  $y = x$ . Déterminer la position de  $C_1$  par rapport à  $\Delta$ .
5. Tracer  $C_1$  et  $\Delta$ .

**Partie B :**

On considère la fonction  $f_3$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f_3(x) = x^3e^{-x^2}$  et on appelle  $C_3$  sa courbe représentative.

1. Montrer que pour tout réel  $x$  positif,  $f_3'(x)$  a même signe que  $3 - 2x^2$ . En déduire le sens de variation de  $f_3$ .
2. Déterminer les positions relatives de  $C_1$  et  $C_3$ .
3. Tracer  $C_3$  dans le même repère que  $C_1$  (on admettra que  $C_3$  a la même asymptote que  $C_1$  en  $+\infty$ ).

4. On appelle  $D$  la droite d'équation  $x = 1$ . Soit  $A_1$  l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe  $C_1$ , les deux axes de coordonnées et la droite  $D$  et soit  $A_3$  l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe  $C_3$ , les deux axes de coordonnées et la droite  $D$ .

a) Calculer  $A_1$ .

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$A_3 = -\frac{1}{2e} + A_1.$$

### Partie C :

On désigne par  $n$  un entier naturel non nul et on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$ . On note  $C_n$  la courbe représentative de  $f_n$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $f_n$  admet un maximum pour  $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$ . On note  $\alpha_n$  ce maximum.

2. On appelle  $S_n$  le point de  $C_n$  d'abscisse  $\sqrt{\frac{n}{2}}$ . Montrer que, pour tout  $n$ ,  $C_n$  passe par  $S_2$ .  
Placer  $S_1, S_2, S_3$  sur la figure.

3. Soit la fonction  $g$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = e^{\frac{x}{2}[-1 + \ln(\frac{x}{2})]}$   
c'est-à-dire  $g(x) = \exp\left[\frac{x}{2}\left(-1 + \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right]$

a) Étudier le sens de variation de  $g$ .

b) Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\alpha_n = g(n)$ .

En déduire que tout point  $S_n$  a une ordonnée supérieure à celle de  $S_2$ .

E6

**Problème A\*\* B\* C\*\* (10 points)**

Étranger groupe I, enseignement obligatoire et de spécialité, juin 2000

**ANALYSE : FONCTION EXPONENTIELLE ET FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN ; ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLE****68 Sujet**

Les buts du problème sont l'étude de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x}$ , puis la recherche de primitive de cette fonction.

**Première partie : Étude de fonctions auxiliaires**

1. On définit la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  par  $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$ .

a) On admet le résultat suivant :  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ . En déduire la limite de  $g(x)$  lorsque  $x$  tend vers 1.

b) Calculer  $g'(x)$  pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $]1; +\infty[$ .

c) Résoudre l'inéquation  $1 - \ln(x-1) > 0$ , d'inconnue  $x$  appartenant à l'intervalle  $]1; +\infty[$ .

d) Étudier le sens de variation de  $g$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ .

e) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  a une solution unique, notée  $\alpha$ , dans l'intervalle  $[e+1; e^3+1]$ , et étudier le signe de  $g(x)$  sur chacun des intervalles  $]1; \alpha[$  et  $]\alpha; +\infty[$ .

2. Soit  $\varphi$  la fonction définie sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  par

$$\varphi(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}$$

a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x)$  et prouver que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ .

b) Calculer  $\varphi'(x)$  et montrer que  $\varphi'(x)$  est du signe de  $g(x^2)$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ .

c) Montrer que  $\varphi$  est croissante sur l'intervalle  $]1; \sqrt{\alpha}[$  et décroissante sur l'intervalle  $]\sqrt{\alpha}; +\infty[$ .

67

**Deuxième partie : Étude de la fonction  $f$** 

1. Vérifier que, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  on a  $f(x) = \varphi(e^x)$ .

2. En déduire :

a) La limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers 0.

b) La limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

c) Le sens de variation de  $f$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  et que  $f$  admet un maximum en  $\ln(\sqrt{\alpha})$ .

3. Montrer que, pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ ,  $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$ .

4. Reproduire le tableau suivant et le compléter en donnant des valeurs approchées à  $10^{-2}$  près :

$x$	0,1	0,5	1	1,5	2	3
$f(x)$						

5. Représenter graphiquement  $f$  dans un repère orthogonal, d'unités 5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée. On prendra 10 comme valeur approchée de  $\alpha$ .

**Troisième partie : Recherche de primitives de  $f$** 

1. Vérifier que  $f$  est solution de l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1}$$

2. On pose  $h(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1}$ .

a) Trouver une primitive  $H$  de  $h$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

b) En déduire les primitives  $F$  de  $f$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

**Problème A\* B\*\*** (11 points)

Antilles-Guyane, enseignement obligatoire et de spécialité, juin 2000

ANALYSE : FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN ;  
CALCUL INTÉGRAL ; SUITE GÉOMÉTRIQUE**69** **Sujet**Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = x \ln(x^2) - 2x.$$

On désigne par  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O; i; j)$  ; unité graphique : 1 cm.**Partie A : Étude de  $f$ .**1. Montrer que, pour  $x > 0$ ,  $f(x) = 2x \ln x - 2x$  puis que  $f(x) = 2x \ln \frac{x}{e}$ .2. a) Étudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .b) Montrer que  $f$  est dérivable en tout  $x > 0$  ; calculer  $f'(x)$  pour  $x > 0$ .c) Étudier le sens de variation de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .d) Donner le tableau de variation de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .3. Déterminer par le calcul l'abscisse du point d'intersection de la courbe  $(\mathcal{C})$  avec l'axe des abscisses.4. Montrer que l'équation  $f(x) = 2$  admet sur l'intervalle  $[1; 5]$  une unique solution et en donner la valeur décimale arrondie à  $10^{-2}$ .**Partie B : Calcul d'aires.**1. Soit  $F$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par

$$\begin{cases} F(0) = 0 \\ F(x) = x^2 \ln x - \frac{3x^2}{2} \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

a) On admet que  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$  ; montrer que  $F$  est dérivable en 0et préciser  $F'(0)$ .b) Montrer que, pour tout  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ ,  $F'(x) = f(x)$ .2. On considère pour chaque entier  $n$  positif ou nul, la droite  $D_n$  d'équation  $y = nx$ .On trouvera en annexe un tracé de la courbe  $(\mathcal{C})$  et les droites  $D_0, D_1, D_2$ .

69

a) Déterminer les coordonnées du point  $I_n$ , d'abscisse strictement positive, intersection de  $(\mathcal{C})$  et de  $D_n$ .  
On appelle  $P_n$  le point de l'axe des abscisses de même abscisse que  $I_n$ .  
Placer les points  $I_0, I_1, I_2, P_0, P_1, P_2$ , sur la figure donnée en annexe.

b) Déterminer la position relative de  $(\mathcal{C})$  et de  $D_n$  pour les abscisses appartenant à  $]0; +\infty[$ .

3. Pour tout  $n \geq 1$ , on considère le domaine  $A_n$  situé dans le quart de plan défini par  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ , délimité par  $(\mathcal{C})$ ,  $D_{n-1}$  et  $D_n$ .  
On note  $a_n$  son aire, exprimée en unités d'aire.

a) Faire apparaître les domaines  $A_1$  et  $A_2$  sur la figure.

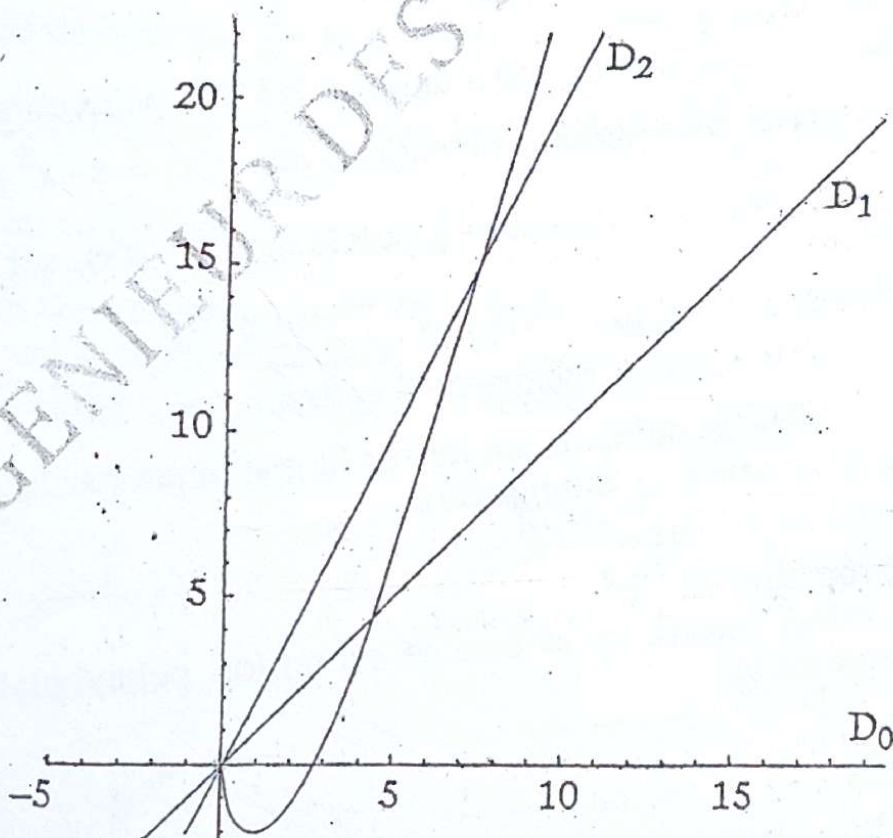
b) Calculer l'aire  $t_n$  du triangle  $OP_nI_n$ , en unités d'aire.

c) Calculer l'aire  $u_n$ , en unités d'aire, du domaine situé dans le quart de plan défini par  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ , délimité par  $(\mathcal{C})$ , l'axe des abscisses, et les parallèles à l'axe des ordonnées passant par  $P_0$  et  $P_n$ .

d) Vérifier que l'aire  $v_n$ , en unités d'aire, du domaine situé dans le quart de plan défini par  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ , délimité par  $(\mathcal{C})$ , l'axe des abscisses et  $D_n$ , est  $v_n = t_n - u_n = \frac{e^2}{2}(e^n - 1)$ .

e) Calculer alors  $a_n$ .

4. Montrer que la suite  $(a_n)$  est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.



# Problème A\* B\*\* C\*\*\* (11 points)

Asie, enseignement obligatoire et de spécialité, juin 2000

70

ANALYSE : FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN ; CALCUL  
INTÉGRAL ; SUITE  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

## 70 Sujet

### A. Etude d'une fonction

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$ .  
Sur  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère  
orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ; unité graphique : 5 cm.

1. Calculer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .  
Déterminer les asymptotes de  $\mathcal{C}$ .

2. Étudier le sens de variation de  $f$ .  
Dresser le tableau de variation de  $f$ .

3. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet sur l'intervalle  $[\frac{1}{e} ; 1]$  une  
solution unique, notée  $\alpha$ .  
Déterminer un encadrement de  $\alpha$ , d'amplitude  $10^{-2}$ .  
Donner, suivant les valeurs de  $x$ , le signe de  $f(x)$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

4. Tracer la courbe  $\mathcal{C}$ .

### B. Calcul d'aire

1. Déterminer une équation de la tangente  $\mathcal{D}$  à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 1.

2. a) Soit  $\varphi$  la fonction définie pour tout  $x > 0$  par :  $\varphi(x) = x - x^2 + \ln x$ .  
Calculer  $\varphi'(x)$ .

En déduire le sens de variation de  $\varphi$ , puis le signe de  $\varphi(x)$ , sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

b) Montrer que, pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) - x = \frac{\varphi(x)}{x}$ .

c) En déduire la position relative de  $\mathcal{C}$  et de  $\mathcal{D}$ .

3. On considère le domaine limité sur le graphique par l'axe des  
abscisses, la courbe  $\mathcal{C}$  et la tangente  $\mathcal{D}$ .

a) Hachurer ce domaine.

b) Soit  $\mathcal{A}$  son aire, en  $\text{cm}^2$ .

Écrire la valeur exacte de  $\mathcal{A}$  comme expression polynomiale  
second degré en  $\alpha$ .

### 71 C. Étude d'une suite

Soit  $x_0$  un réel appartenant à l'intervalle  $] \frac{1}{e}; \alpha[$ . On note  $M_0$  le point de  $\mathcal{C}$  d'abscisse  $x_0$ .

1. a) Donner une équation de la tangente  $\mathcal{T}_0$  à  $\mathcal{C}$  en  $M_0$ , en fonction de  $x_0$ ,  $f(x_0)$  et  $f'(x_0)$ .

b) Soit  $x_1$  l'abscisse du point d'intersection de  $\mathcal{T}_0$  avec l'axe des abscisses.

Écrire  $x_1$  en fonction de  $x_0$ ,  $f(x_0)$  et  $f'(x_0)$ .

2. On considère la fonction  $h$  définie sur  $] \frac{1}{e}; \alpha]$  par  $h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ .

(On remarquera que  $h(x_0) = x_1$ ).

a) Montrer que  $h'(x) = \frac{f''(x) \cdot f(x)}{[f'(x)]^2}$ .

b) Calculer  $f''(x)$  et étudier son signe sur  $] \frac{1}{e}; \alpha]$ .

c) En déduire que  $h$  est strictement croissante sur  $] \frac{1}{e}; \alpha]$ , puis montrer que  $x_1 < \alpha$ .

d) En écrivant  $h(x) - x = -\frac{f(x)}{f'(x)}$ , étudier le signe de  $h(x) - x$  sur

$] \frac{1}{e}; \alpha[$ .

En déduire que  $\frac{1}{e} < x_0 < x_1 < \alpha$ .

3. a) Démontrer que, pour tout  $x$  appartenant à  $] \frac{1}{e}; \alpha]$ ,  $h(x)$  appartient à  $] \frac{1}{e}; \alpha]$ .

b) On considère la suite  $(x_n)$  de réels définie par  $x_0$  et  $x_{n+1} = h(x_n)$  pour tout entier naturel  $n$ .

Montrer que la suite  $(x_n)$  est strictement croissante.

Problème A\*\*\* B\*\*\* C\*\* (10 points)

Amérique du Nord, enseignement obligatoire et de spécialité, juin 2000

ANALYSE : FONCTION EXPONENTIELLE ; CALCUL  
INTÉGRAL ; SUITE DÉFINIE À L'AIDE D'UNE INTÉGRALE

71 Sujet

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$  pour  $x > 0$  et  $f(0) = 0$ .

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$  (unité graphique 5 cm).

**Partie A**

1. Démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = 1$  est asymptote à  $\mathcal{C}$ .

2. Pour  $x > 0$ , calculer  $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ . Étudier la limite de cette expression quand  $x$  tend vers 0 (on pourra utiliser, pour  $n$  entier naturel non nul,  $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^n e^{-u} = 0$ ).

Que peut-on en déduire pour la fonction  $f$ ?

Que peut-on en déduire pour la courbe  $\mathcal{C}$ ?

3. Démontrer que pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$  on a  $f'(x) = \frac{1-x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$ .

4. Étudier les variations de la fonction  $f$  et dresser le tableau des variations de  $f$ .

**Partie B**

On note  $g$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = f(x) - xf'(x)$ .

1. Montrer que dans  $]0, +\infty[$  les équations  $g(x) = 0$  et  $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$  sont équivalentes.

2. Démontrer que l'équation  $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$  admet une seule racine réelle  $\alpha$  dont on justifiera un encadrement à  $10^{-2}$  près.

3. On pose  $A = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$ . Encadrer  $A$  à  $2 \times 10^{-1}$  près (justifier) et montrer que  $A = f'(\alpha)$ .

4. Pour tout  $a > 0$ , on note  $T_a$  la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $a$ .

Montrer que  $T_{\alpha}a$  a pour équation  $y = Ax$ . Tracer  $T_{\alpha}$ , puis la courbe  $\mathcal{C}$ .

5. Dédurre des questions précédentes que de toutes les tangentes  $T_{\alpha}$  à  $\mathcal{C}$  (en des points d'abscisses non nulles), seule  $T_{\alpha}$  passe par l'origine  $O$ .

6. On admettra que  $T_{\alpha}$  est au-dessus de  $\mathcal{C}$  sur  $]0, +\infty[$ .

a) Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = m$ , suivant le réel  $m$  donné.

b) Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = mx$  selon le réel  $m$  donné.

### Partie C

1. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx$ . Sans calculer explicitement

$u_n$  déterminer le signe de  $u_{n+1} - u_n$ . En déduire que la suite est croissante.

2. Démontrer que la fonction  $h$ , définie sur  $]0, +\infty[$

par  $h(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ , est une primitive de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .

3. Calculer  $u_n$ . Interpréter graphiquement le résultat.

Étudier la convergence de la suite  $(u_n)$ .

74

ANALYSE : FONCTION EXPONENTIELLE ; CALCUL  
INTÉGRAL (INTÉGRATION PAR PARTIES) ; SUITES

72 Sujet

Le but du problème est l'étude simultanée de deux fonctions  $f$  et  $g$  (partie A), utilisées ensuite pour déterminer une valeur approchée d'un certain nombre réel noté  $C$ .

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ; (unité graphique : 2 cm).

Partie A :

Soient les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'ensemble des nombres réels

par :  $f(x) = x - e^x$  et  $g(x) = (1-x)e^x$  ;

On appelle  $(C)$  et  $(C')$  leurs courbes représentatives respectives.

1. a) Déterminer les limites des fonctions  $f$  et  $g$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- b) Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe  $(C)$ .
- c) Étudier le sens de variation de chacune des fonctions  $f$  et  $g$ , sur l'ensemble des nombres réels.

c) Dresser les tableaux de variation des fonctions  $f$  et  $g$ .

2. Pour tout réel  $x$ , on pose  $h(x) = f(x) - g(x)$ .

a) Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $h'(x) = 1 - g(x)$ .

b) En déduire le sens de variation de la fonction  $h$ , sur l'ensemble des nombres réels.

c) Démontrer que les courbes  $(C)$  et  $(C')$  admettent un unique point d'intersection, dont l'abscisse, notée  $\alpha$ , appartient à l'intervalle  $[1 ; 2]$ .

Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-1}$ .

d) Étudier, suivant les valeurs de  $x$ , la position relative de  $(C)$  et de  $(C')$ .

3. Tracer la droite  $(\Delta)$  et les courbes  $(C)$  et  $(C')$ .

4. Pour tout réel  $x$ , on pose  $\theta(x) = \int_0^x h(t)dt$ .

a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\theta(x)$ .

b) En déduire, sous la forme d'une expression rationnelle en  $\alpha$ , l'aire en  $\text{cm}^2$  du domaine limité sur le graphique par les courbes  $(C)$  et  $(C')$ , l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = \alpha$ .

Partie B :

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ .

1. À l'aide d'une calculatrice, déterminer un encadrement de  $S_{20}$ , d'amplitude  $10^{-3}$ .

2. a) En utilisant le tableau de variation de la fonction  $g$  définie dans la partie A, démontrer que, pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle

$$]0 ; 1[ \quad e^x \leq \frac{1}{1-x}$$



- b) En déduire que, pour tout nombre entier  $k \geq 2$ ,  $e^{\frac{1}{k}} \leq \frac{k}{k-1}$ , puis que, pour tout nombre entier  $k \geq 2$ ,  $\frac{1}{k} \leq \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$ .
- c) Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , calculer  $S_n - S_{n-1}$ . En déduire que la suite  $(S_n)$  est décroissante.
3. Pour tout entier  $n > 20$ , on pose  $u_n = S_{20} - S_n$ .
- a) Vérifier que pour tout entier  $n > 20$ ,  $u_n \geq 0$ .
- b) En utilisant le tableau de variation de la fonction  $f$  définie dans la partie A, démontrer que, pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0 ; 1]$ ,  $1 + x \leq e^x$ .
- c) En déduire que pour tout nombre entier  $k \geq 1$ ,  $\frac{k+1}{k} \leq e^{\frac{1}{k}}$ , puis que, pour tout nombre entier  $k \geq 1$ ,  $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$ .
- d) Vérifier que, pour tout entier naturel  $n > 20$ ,
- $$u_n = \ln\left(\frac{n}{20}\right) - \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{n}\right).$$
- En raisonnant par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel  $n > 20$ ,  $\ln\left(\frac{n+1}{21}\right) \leq \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{n}$ .
- e) En déduire que, pour tout entier naturel  $n > 20$ ,
- $$u_n \leq \ln\left(\frac{21}{20}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right),$$
- puis que pour tout entier naturel  $n > 20$ ,
- $$u_n \leq 0,049.$$
4. On admet que la suite  $(S_n)$  est convergente de limite notée  $C$ .
- a) Justifier l'encadrement  $S_{20} - 0,049 \leq C \leq S_{20}$ .
- b) Déterminer un encadrement de  $C$  d'amplitude  $0,05$ .

Session normale de 1998, séries C et E.

On considère l'application  $f$  de  $] -1 ; +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

On note  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### Partie A

1. Étudier la continuité de  $f$  sur  $] -1 ; +\infty[$ .
2. Étudier la dérivabilité de  $f$  sur  $] -1 ; +\infty[$ .  
Expliciter la fonction dérivée  $f'$ .
3. On note  $g$  l'application de  $] -1 ; +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$ .
  - a) Étudier les variations de  $g$  et le signe de  $g(x)$ .  
(On ne demande pas l'étude de la limite de  $g$  en  $-1$ .)
  - b) En déduire les variations de  $f$ .
4. Étudier les limites de  $f$  aux bornes de l'intervalle  $] -1 ; +\infty[$ .
5. Construire la courbe  $(\mathcal{C})$ . Préciser les asymptotes et la position de  $(\mathcal{C})$  par rapport à l'axe des abscisses.
6. Déterminer une équation de la tangente à  $(\mathcal{C})$  au point d'abscisse 0 et étudier la position de  $(\mathcal{C})$  par rapport à cette tangente. (On étudiera les variations de l'application  $h$  de  $] -1 ; +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $h(x) = x^2 \left( \frac{1}{2} + f(x) \right)$ , puis le signe de  $h(x)$ ).

### Partie B

1. Démontrer qu'il existe un unique nombre réel  $\alpha$  de l'intervalle  $]0 ; 1[$  tel que :  $f(\alpha) = \alpha$ .  
(On ne demande pas de calculer  $\alpha$ ).
2. On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = \frac{1}{2}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .
  - a) Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq 1$ .
  - b) Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$ .  
(On remarquera que  $u_{n+1} - \alpha = f(u_n) - f(\alpha)$  et on utilisera le résultat :  $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$ .)

Le plan est muni du repère  $(O, I, J)$  ; l'unité graphique est 4 cm.

## Partie A

On considère la fonction numérique  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{1+e^{-x}}$$

On note  $(\Gamma)$  la courbe représentative de  $f$  dans le repère  $(O, I, J)$ .

1. a. Justifier que  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- b. Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
- c. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
2. Justifier que  $(\Gamma)$  admet pour asymptotes la droite  $(OI)$  et la droite  $(\delta)$  d'équation  $y = 1$ .
3. a. Démontrer que le point  $K \left(0; \frac{1}{2}\right)$  est un centre de symétrie de  $(\Gamma)$ .
- b. Démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation :  $x - 4y + 2 = 0$  est tangente à  $(\Gamma)$  en  $K$ .

4. On se propose d'étudier la position de  $(\Gamma)$  par rapport à  $(\Delta)$ .

Soit  $h$  et  $\varphi$  les fonctions numériques définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = f(x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x \quad \text{et} \quad \varphi(x) = 4e^{-x} (1+e^{-x})^2.$$

- a. Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \frac{\varphi(x)}{4(1+e^{-x})^2}$ .
- b. Étudier le sens de variation de  $\varphi$  et dresser le tableau de variation de  $\varphi$ .  
(On ne demande de calculer les limites de  $\varphi$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ ).
- c. En déduire que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \leq 0$ .
- d. Démontrer que  $h$  est une fonction strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .
- e. En vous aidant des questions précédentes, démontrer que :

$$\forall x \in ]-\infty; 0[, h(x) \geq 0.$$

$$\forall x \in ]0; +\infty[, h(x) \leq 0.$$

f. En déduire la position relative de  $(\Gamma)$  et  $(\Delta)$ .

g. Tracer la courbe  $(\Gamma)$  et  $(\Delta)$  dans le repère  $(O, I, J)$ .

## Partie B

On définit la fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$$

$(G)$  est la représentation graphique de  $g$  dans le repère  $(O, I, J)$  et  $(\Delta')$  est la tangente à  $(G)$  en  $K$ .

1. Démontrer que  $(\Gamma)$  et  $(G)$  sont symétriques par rapport à la droite  $(OJ)$ .
2. En déduire les constructions de  $(\Delta')$  et de  $(G)$  dans le repère  $(O, I, J)$ .  
(Utiliser une couleur différente de la précédente).

$$3. a. \text{Vérifier que : } \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})}$$

b. Calculer en  $\text{cm}^2$ , l'aire  $A$  de la partie du plan délimitée par la droite d'équation  $x = 1$ , la droite  $(O, J)$ , la courbe  $(G)$  et la droite des abscisses.

## Partie C

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On définit sur  $\mathbb{R}$  la fonction  $g_n$  par :

$$g_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}$$

Soit  $(G_n)$  la courbe représentative de  $g_n$  dans le repère  $(O, I, J)$ .

$$1. \text{Démontrer que : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq g_n(x) \leq e^{-nx}$$

2. On désigne par  $A_n$ , l'aire de la partie du plan délimitée par les droites  $(OI)$ ,  $(OJ)$ , la droite d'équation  $x = 1$  et la courbe  $(G_n)$ .

$$a. \text{Démontrer que : } \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq A_n \leq \frac{1}{n}(1 - e^{-n}).$$

(On pourra utiliser la question C1).

b. En déduire la limite de  $A_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

78

**PROBLÈME**

On considère la fonction  $f$  dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  et définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{2 \ln x}{x}$$

(C) est la représentation graphique de  $f$  dans le repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

Unité graphique 2 cm.

**Partie A**

On considère la fonction  $u$  dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  et définie par

$$u(x) = x^2 + 4 - 4 \ln x$$

1. Étudier les variations de  $u$ .
2. Justifier que:  $\forall x \in ]0; +\infty[, u(x) > 0$

**Partie B**

1. Calculer la limite de  $f$  en 0 et interpréter graphiquement le résultat.
2. a. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
b. Démontrer que la droite (D) d'équation  $y = \frac{1}{2}x - 1$  est asymptote à (C) en  $+\infty$ .
3. a. Vérifier que:  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = \frac{u(x)}{2x^2}$ .  
b. En déduire le sens de variation de  $f$  et dresser son tableau de variation.
4. a. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution  $\alpha$  tel que  $1 < \alpha < e$ .  
b. Déterminer une valeur approchée à  $10^{-1}$  près de  $\alpha$ .
5. a. Démontrer qu'il existe un point unique A de (C) où la tangente (T) est parallèle à la droite (D).  
b. Donner les coordonnées du point A.
- a. Étudier la position relative de (D) par rapport à (C).  
b. Construire (T), (D) et (C).

**Partie C**

On considère la suite numérique  $(a_n)$  définie pour tout entier  $n \geq 1$  par

$$a_n = \int_{e^{n-1}}^{e^n} \frac{2 \ln t}{t} dt$$

1. a. Hachurer sur le graphique le domaine du plan dont l'aire en unité d'aire est égale à  $a_1$ .  
b. Interpréter graphiquement le nombre  $a_n$ .  
c. Calculer  $a_n$  puis étudier la convergence de la suite  $(a_n)$ .
2. Justifier que:  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = n^2$ .

*Image - Abines*

On considère la fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et définie par  $f(x) = (1-x)e^{-2x+4}$

Soit  $(\Gamma)$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

L'unité graphique est 2 cm.

Le but du problème est la recherche d'une valeur approchée d'une solution de l'équation  $f(x) = -1$ .

I. Etude de la fonction  $f$

1. a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

b. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ .

c. Interpréter graphiquement les résultats précédents.

2. a. Calculer  $f'(x)$  et dresser le tableau de variation de  $f$ .

b. Démontrer que l'équation  $f(x) = -1$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $]1; \frac{5}{4}[$ .

c. Démontrer que  $\alpha = 1 + e^{2\alpha-4}$ .

3. Soient A et B les points de  $(\Gamma)$  d'abscisses respectives 1 et 2.

a. Donner une équation de la tangente (D) à  $(\Gamma)$  en B.

b. Tracer (D) et  $(\Gamma)$  sur l'intervalle  $[0,5; +\infty[$ .

4. Soit F la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ .

a. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$F(x) = \frac{2x-1}{4} e^{-2x+4} - \frac{e^2}{4}$$

b. Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire de la partie du plan comprise entre le segment [AB] et  $(\Gamma)$ .

II- Recherche d'une valeur approchée de  $\alpha$

Soit  $g$  la fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  et définie par  $g(x) = e^{2x-4} + 1$

On note I l'intervalle  $[1; \frac{5}{4}]$

1. a. calculer  $g'(x)$  et préciser le sens de variation de  $g$

b) Démontrer que  $g(I) \subset I$

c. démontrer que pour tout élément  $x$  de I on a  $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$

(on pourra étudier le sens de variation de  $g'$  sur I)

d) En déduire, en utilisant l'inégalité des accroissements finis et le résultat de la question 1.2.c).

que pour tout élément  $x$  de I on a  $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$

2. On considère la suite U définie par  $\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n$  est élément de I

b. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$   $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$   $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$

b. En déduire que la suite U est une suite convergente. Quelle est sa limite ?

4. Déterminer  $n$  pour que  $U_n$  soit une valeur approchée de  $\alpha$  au centimètre près.

**EPREUVE DE MATHÉMATIQUES**  
Cette épreuve comporte deux (2) pages  
(Les calculatrices ne sont pas autorisées).**Exercice 1 (4 points)**On considère le polynôme  $P$  défini sur  $\mathbb{C}$  par

$$P(z) = z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 20$$

- 1) a) Ecrire sous forme algébrique  $(1-i)^2$  puis en déduire les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^2 = -2i$ .  
b) Déterminer les nombres  $b$  et  $c$  pour que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  on ait  $P(z) = (z^2 + 2i)(z^2 + bz + c)$
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $P(z) = 0$
- 3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives  $z_A = 1 - i, z_B = -1 + i, z_C = 1 + 3i, z_D = 3 + i$ 
  - a) Faire une figure
  - b) On pose  $Z = \frac{z_{BA}}{z_{BC}}$ . Ecrire  $Z$  sous la forme algébrique.
  - c) Interpréter géométriquement le module et un argument de  $Z$ .
  - d) Quelle est la nature exacte du triangle  $ABC$  puis du quadrilatère  $ABCD$  ?

**Exercice 2 (4 points)**Dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(-1; 1; -3); B(-2; 3; -3); C(-2; 1; 0)$ .

- 1) Calculer les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
- 2) Soit  $I$  le point de coordonnées  $(-1; 3; 0)$ . Calculer la distance de  $I$  au plan  $(ABC)$ . Ces points  $A, B, C$  et  $I$  sont-ils coplanaires ?
- 3) a) Calculer l'aire  $A$  du triangle  $ABC$  en unité d'aire.  
b) Déterminer le volume  $V$  (en unité de volume) de la pyramide de sommet  $I$  et de base le triangle  $ABC$ .

**Problème (12 points)**On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{1+x} & \text{si } x \geq 1 \\ e^{\frac{1}{x-1}} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  tel que  $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$  et  $\|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$ .

Partie A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $I = [1; +\infty[$  par  $g(x) = 1 + x - x \ln x$

- 1) Calculer les limites de  $g$  aux bornes de  $I$
- 2) Etudier le sens de variation de  $g$  et dresser son tableau de variation
- 3) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $I$   
Vérifier que  $\alpha \in ]3,5; 4[$
- 4) Dédire de ce qui précède le signe de  $g$  sur  $I$

Partie B

- 1) Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$
- 2) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 3) Calculer  $f'(x)$  pour  $x \in \mathbb{R} - \{1\}$  et vérifier que  
pour tout  $x \in I$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x)^2}$
- 4) En déduire le signe de  $f'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R} - \{1\}$  puis dresser le tableau de variation de  $f$
- 5) Montrer que  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ .
- 6) Construire (C), ses tangentes et ses asymptotes

Partie C

On pose  $J_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

- 1) Calculer  $J_0$ .
- 2) Montrer que  $J_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- 3) Montrer que  $(J_n)$  est décroissante
- 4) Montrer que  $(J_n)$  est convergente.
- 5) En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel  $n$  :  $3J_{n+1} + (n+1)J_n = e^3$
- 6) En déduire les valeurs exactes de  $J_1$  et  $J_2$ .

Données :  $\ln(3,5) \approx 1,25$  ;  $\ln 2 \approx 0,7$  ;  $e^{-1} \approx 0,37$

## EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages  
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

**Exercice 1 (4 points)**

Les documents paléontologiques confirmant l'idée d'évolution sont nombreux. Parmi les mieux connus figurent les ossements fossiles des ancêtres du cheval actuel. Les longueurs du crâne et de la face pour une série d'animaux représentatifs de la lignée des ancêtres du cheval sont consignées dans le tableau suivant :

Nom	Longueur du crâne ( $x_i$ ) en cm	Longueur de la face ( $y_i$ ) en cm
Eohippus	7,5	10,7
Mésoshippus	11	12,8
Merychippus	14,5	18,5
Pliohippus	15,5	22,5
cheval	21,5	31,2

- Représenter le nuage de points associé à cette série  $(x_i, y_i)$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (Unité graphique 0,5 cm)
- Un ajustement affine du nuage de point paraît-il possible ?
  - Déterminer les coordonnées des points moyens  $G_1$  et  $G_2$  correspondant respectivement aux trois premiers points et aux deux derniers.
  - Donner l'équation de la droite  $(G_1G_2)$  sous la forme  $y = ax + b$  où  $a$  et  $b$  sont des paramètres à déterminer. Tracer cette droite.
- Estimer la longueur de la face d'un descendant du cheval qui aurait dans des millions d'années, une longueur de crâne de 23,2 cm.

**Exercice 2 (4 points)**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On considère la courbe paramétrée  $(\Gamma)$  définie par :

$$\begin{cases} x(t) = t + \ln(1-t) \\ y(t) = te^t \end{cases}, \quad t \in ]-\infty; 0]$$

- Etudier le sens de variations des fonctions coordonnées  $x$  et  $y$  sur l'intervalle  $]-\infty; 0]$
  - Dresser un tableau de variation conjoint de  $x$  et  $y$
- Déterminer les équations des tangentes à  $(\Gamma)$  aux points  $M(0)$  et  $M(-1)$ ;  $M(t)$  étant le point de coordonnées  $(x(t); y(t))$
  - L'unité étant 2 cm, tracer les tangentes précédentes et la courbe  $(\Gamma)$  dans le repère

LOVIDOC'S

**Problème (12 points)****Partie A**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x(1 + e^{2-x})$ . On note  $(C)$  la courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(Unité graphique = 2 cm)

- 1) Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = 1 + (1-x)e^{2-x}$ 
  - a) Etudier le sens de variation de  $h$  sur  $\mathbb{R}$  (On ne demande pas les limites de  $h$ ).
  - b) En déduire le signe de  $h(x)$  sur  $\mathbb{R}$
- 2)
  - a) Etudier les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$
  - b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
  - c) Soit  $(\Delta)$  la droite d'équation  $y = x$   
Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ , puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
  - d) Préciser la position de  $(C)$  par rapport à la droite  $(\Delta)$ .
- 3)
  - a) Déterminer  $f'(x)$  puis étudier son signe.
  - b) En déduire le sens de variation de  $f$  puis dresser son tableau de variation
  - c) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers un intervalle  $J$  à déterminer.  
On note  $f^{-1}$  la bijection réciproque de  $f$
  - d)  $f^{-1}$  est-elle dérivable en 4 ? Dresser le tableau de variation de  $f^{-1}$ .
  - e) Construire la courbe  $(C)$  et  $(\Delta)$  puis déduire la courbe  $(\Gamma)$  de  $f^{-1}$  dans le même repère

**Partie B**

- 1) Calculer l'aire  $A(\lambda)$  de la partie du plan limitée par  $(C)$ , la droite  $(\Delta)$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = \lambda$  où  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ .
- 2) Calculer  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$  puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages  
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

**Exercice 1 (4 points)**

Soit le polynôme  $P(z) = z^3 - (1 + 2i)z^2 - 3z + 2i - 1$

- 1) Montrer que le polynôme  $P(z)$  admet une racine réelle  $z_0$  que l'on déterminera
- 2) Déterminer trois nombres complexes  $a$ ,  $b$  et  $c$  tel que  
$$P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$$
- 3) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $P(z) = 0$
- 4) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  (unité 2 cm), on désigne par  $A$ ,  $B$  et  $C$  les points d'affixes respectives  $i$ ,  $2 + i$  et  $-1$ .
  - a) Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$
  - b) Soit  $D$  l'image de  $A$  par la translation de vecteur  $\vec{BC}$ . Calculer l'affixe de  $D$ .
  - c) Calculer le nombre  $Z = \frac{z_A}{z_A - z_B}$ . Déterminer le module et un argument de  $Z$ .

En déduire la nature du triangle  $OAB$

**Exercice 2 (4 points)**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on donne les

points  $A(-2; -1; 2)$ ;  $B(6; -5; 3)$ ;  $C(-1; 3; 10)$  et le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$

- 1) a) Calculer  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$  et  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$   
 b) Interpréter géométriquement ces résultats  
 c) Calculer les distances  $AB$  et  $AC$   
 d) En déduire la nature exacte du triangle  $ABC$
- 2) Démontrer que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$  sont colinéaires
- 3) Montrer que  $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = 9\|\vec{u}\|$  et en déduire l'aire du triangle  $ABC$  en fonction de la norme de  $\vec{u}$ .
- 4) Soit  $D(1; 1; 1)$  un point de l'espace.
  - a) Les points  $A, B, C, D$  sont-ils coplanaires ?
  - b) Calculer  $d(D; (ABC))$  et en déduire le volume  $V$ , en unité de volume, de la pyramide de sommet  $D$  et de base le triangle  $ABC$ .

**Problème (12 points)**

**Partie A**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = (1 - x)e^x - 1$

- 1) Etudier les variations de  $g$
- 2) Calculer  $g(0)$ . En déduire que pour tout  $x \neq 0, g(x) < 0$ .

Partie B

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} + 2 \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 3 \end{cases}$$

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 2 cm).

On admettra que  $f$  est dérivable en 0 et que  $f'(0) = -\frac{1}{2}$

- 1) a) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$
- b) Etablir que  $\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{1 - e^{-x}}$  puis déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$   
     En déduire que  $(C)$  admet une asymptote horizontale en  $+\infty$  dont on donnera l'équation.
- 2) Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = -x + 2$  est une asymptote oblique à la courbe  $(C)$  en  $-\infty$
- 3) Calculer, pour tout  $x \neq 0, f'(x)$  et montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$ .
- 4) a) Donner le sens de variation de  $f$
- b) Dresser le tableau de variation de  $f$
- 5) Soit  $(T)$  la tangente à  $(C)$  au point d'abscisse nulle, écrire l'équation de  $(T)$
- 6) Tracer  $(D), (T)$  et  $(C)$ .

Partie C

Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = f(x) - x$

- 1) Montrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et que  $\alpha \in ]2; 2,5[$
- 2) On pose  $I = [2; 2,5]$ 
  - a) Démontrer que pour tout  $x \in I, \text{ on a : } g(x) \geq -20 \text{ et } (e^x - 1)^2 \geq 40$
  - b) En déduire que si  $x \in I, -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$ .
- 3) Soit  $(U_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $U_0 = 2$  et  $U_{n+1} = f(U_n)$ .
  - a) Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}, \text{ on a } U_n \in I$ .
  - b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$  et que  $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$
  - c) En déduire que  $(U_n)$  converge vers  $\alpha$ .
  - d) Déterminer le plus petit entier  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0, \text{ on ait } |U_n - \alpha| \leq 10^{-3}$

On donne :  $\ln 2 \approx 0,69 ; \ln 10 \approx 2,3 ; e^2 \approx 7,39 ; e^{2,5} \approx 12,18 ; \frac{1}{e^2 - 1} \approx 0,15 ;$

$$\frac{1}{e^{2,5} - 1} \approx 0,09 ; (e^2 - 1)^2 \approx 40,83 ; (e^{2,5} - 1)^2 \approx 125$$

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages  
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

**Exercice 1 (3 points)**

Soit l'équation différentielle (E) :  $9y'' + 49y = 0$

- 1) Résoudre (E)
- 2) Déterminer la solution  $f$  de (E) qui vérifie  $f(0) = \sqrt{3}$  et  $f'(0) = 7$
- 3) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = 2\sqrt{3} \cos\left(\frac{7}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$
- 4) Résoudre dans  $]0 ; 2\pi[$ , l'équation  $f(x) = \sqrt{6}$
- 5) Calculer la valeur moyenne  $\vartheta$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $\left[\frac{3\pi}{14} ; \frac{3\pi}{7}\right]$

**Exercice 2 (5 points)**

- 1) Une urne contient 3 boules jaunes, 2 boules rouges et 5 boules noires. On extrait simultanément 2 boules de l'urne.  
Quel est le nombre de résultats possibles ?
- 2) Le tirage d'une boule jaune fait gagner 2 points, celui d'une boule rouge fait gagner 1 point, celui d'une boule noire fait perdre 3 points. On note  $X$  la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de points obtenu à l'issue d'un tirage simultané de 2 boules. Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre  $X$ .
- 3) En supposant tous les tirages équiprobables, déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
- 4) Calculer l'espérance mathématique de  $X$ .
- 5) Calculer la variance de  $X$ .

NB : On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

**Problème (12 points)**

**Partie A**

On considère l'équation différentielle (E) :  $-y' - 3y = \frac{-3e}{(1 + e^{-3x})^2}$

On donne une fonction  $\varphi$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$f(x) = e^{-3x}\varphi(x)$

- 1) a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$   
b) Exprimer  $f'(x)$  en fonction de  $\varphi(x)$  et de  $\varphi'(x)$
- 2) Sachant que  $\varphi$  est une solution de (E),  
a) Exprimer  $f'(x)$  en fonction de  $x$   
b) Déterminer l'expression de  $f(x)$  en fonction de  $x$  si  $f(0) = \frac{e}{2}$ .

Partie B

Soit la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = \frac{e^{1-2x}}{1+e^{-3x}}$   
 On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité = 2 cm).

- 1) Déterminer les limites de  $h$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$   
 En déduire que  $(C)$  admet deux asymptotes dont on donnera les équations
- 2) a) Calculer  $h'(x)$  en fonction de  $x$   
 b) Déterminer le signe de  $h'(x)$ . En déduire le sens de variation de  $h$ .  
 Dresser son tableau de variation.
- 3) Tracer  $(C)$  et ses asymptotes
- 4) Pour tout réel  $\alpha > 0$ , on pose  $I_\alpha = \int_0^\alpha h(x) dx$ 
  - a) Donner une interprétation graphique de  $I_\alpha$
  - b) Calculer  $I_\alpha$  en fonction de  $\alpha$   
 Déterminer  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I_\alpha$ .

Partie C

Soit  $(U_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $U_n = \int_0^1 h(x) e^{\frac{x}{n}} dx$  où  $h$  est la fonction définie dans la partie B.

- 1) a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n > 0$   
 b) Etudier le sens de variation de  $(U_n)$   
 c) la suite  $(U_n)$  est-elle convergente?
- 2) a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_1 \leq U_n \leq e^{\frac{1}{n}} I_1$   
 b) En déduire la limite de la suite  $(U_n)$

On donne  $e \approx 2,7$  ;  $e^3 \approx 20$ .

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU  
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2014  
Session Normale  
Epreuve du 1<sup>er</sup> tour  
Durée : 4 heures  
Coefficient : 05

**EPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

Cette épreuve comporte deux (2) pages  
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

**Exercice 1 (4 points)**

Le plan complexe  $\mathcal{P}$  est rapporté au repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ; unité: 2 cm.

On considère l'application  $f$  définie sur  $\mathbb{C}^*$  par  $f(z) = -\frac{1}{z} \cdot F$  est l'application du plan  $\mathcal{P}$  privé de  $O$  dans lui-même qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z' = f(z)$ .

- 1) On pose  $z = re^{i\theta}$ ,  $r \in \mathbb{R}^{*+}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ .  
Exprimer le module et un argument de  $f(z)$  en fonction de  $r$  et  $\theta$ .
- 2) On pose  $z = x + iy$  et  $Z = X + iY$  où  $Z$  est l'affixe du milieu  $I$  de  $[MM']$ ;  $x, y, X, Y$  sont des réels.
  - a) Exprimer  $X$  et  $Y$  en fonction de  $x$  et  $y$
  - b) Déterminer et représenter l'ensemble  $(\mathcal{E})$  des points  $M$  tels que  $I$  appartienne à l'axe  $(O; \vec{u})$
  - c) Déterminer et représenter l'ensemble  $(\mathcal{F})$  des points  $M$  tels que  $I$  appartienne à l'axe  $(O; \vec{v})$
- 3) On suppose  $|z| = 1$ . On pose donc  $z = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .
  - a) Calculer  $Z$  en fonction de  $\theta$
  - b) Caractériser géométriquement la restriction de  $F$  au cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

**Exercice 2 (4 points)**

A l'instant  $t = 0$ , un corps à température  $\theta_0 = 60^\circ\text{C}$  est placé dans l'air ambiant à la température  $\theta_1 = 20^\circ\text{C}$ .

Au bout de 10 minutes, la température du corps est  $50^\circ\text{C}$ . Sa température à la date  $t$  exprimée en minutes, est solution de l'équation différentielle :  $\frac{d\theta(t)}{dt} = -k(\theta(t) - \theta_1)$  où  $k$  est une constante réelle. On pose  $\Phi(t) = \theta(t) - \theta_1$ .

- 1) a) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par  $\Phi$  ?  
b) Déterminer  $\Phi$ .  
c) En déduire  $\theta(t)$  en fonction de  $k$ .  
d) Déterminer la constante  $k$  puis, en déduire l'expression définitive de  $\theta(t)$ .
- 2) a) Au bout de combien de minutes la température du corps diminuera-t-elle de moitié ?  
b) Quelle sera la température du corps au bout d'une heure ?

On donne :  $\ln 2 \approx 0,70$  ;  $\ln \frac{3}{4} \approx -0,29$ .

**Problème (12 points)**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = (1-x)e^x & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On note  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal direct  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ ; unité graphique : 2 cm.

**Partie A**

- 1) a) Etudier la continuité de  $f$  en  $x_0 = 1$   
 b)  $f$  est-elle dérivable en  $x_0 = 1$ ? Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- 2) a) Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$   
 b) Soit  $f'$  la dérivée de  $f$ . Calculer  $f'(x)$  et étudier le signe de  $f'$ .  
 c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 3) Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x + 1$  est asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$ .
- 4) Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'abscisse  $-1$ .  
 (On donne :  $\frac{1}{e} \approx 0,36$ )
- 5) Tracer  $(\Delta)$ ,  $(T)$  et  $(C)$ .
- 6) a) Montrer que la restriction de  $f$  à  $]1; +\infty[$  réalise une bijection de  $]1; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.  
 c) On note  $(C')$  la courbe représentative de cette bijection réciproque dans le repère  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ . Construire  $(C')$ .

**Partie B**

- 1) Soit  $\alpha$  un réel strictement négatif;
  - a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $I(\alpha) = \int_{\alpha}^0 x e^x dx$ ;
  - b) On désigne par  $D_{\alpha}$  le domaine plan délimité par  $(C)$ ,  $(Ox)$  et les droites d'équations  $x = \alpha$  et  $x = 0$ .  
 Calculer, en  $cm^2$ , la valeur de l'aire  $A(\alpha)$  du domaine  $D_{\alpha}$ .
  - c) Calculer  $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} A(\alpha)$
- 2) a) Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tels que la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$  soit une primitive sur  $\mathbb{R}$  de  $x \mapsto (x^2 - 2x + 1)e^{2x}$ .  
 c) Calculer, en  $cm^3$ , le volume  $V(\alpha)$  du solide  $S(\alpha)$  engendré par la rotation complète de  $D_{\alpha}$  autour de l'axe  $(Ox)$ .

**Partie C**

On considère la courbe  $(\Gamma)$  dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2}{\cos t} - 1 \\ y(t) = 2 \tan t \end{cases}, t \in ]0; \frac{\pi}{2}[$$

- 1) Donner une équation cartésienne de  $(\Gamma)$
- 2) En déduire que  $(\Gamma)$  est une partie de  $(C)$  que l'on précisera.

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU  
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2014  
Session Normale  
Epreuve du 2<sup>nd</sup> tour  
Durée : 4 heures  
Coefficient : 05

**EPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

Cette épreuve comporte deux (2) pages  
(Les calculatrices ne sont pas autorisées).

**Exercice 1 (4 points)**

On considère la courbe (C) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$

- 1) Etudier la position relative de :
  - a)  $M(t + 2\pi)$  et  $M(t)$
  - b)  $M(-t)$  et  $M(t)$
  - c)  $M(\pi - t)$  et  $M(t)$
- 2) a) Montrer que si  $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  alors  $(\pi - t) \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$   
 b) En déduire qu'il suffit d'étudier (C) pour  $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
- 3) On désigne par  $(C_1)$  la partie de (C) correspondant à  $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ 
  - a) Etudier les fonctions :  $t \mapsto x(t)$  et  $t \mapsto y(t)$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et dresser le tableau de variation conjoint
  - b) Tracer  $(C_1)$ , puis (C) en utilisant les résultats du 1)

**Exercice 2 (4 points)**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On donne les points :  
 $A(-1; 0; 2)$ ,  $B(0; 1; 3)$ ,  $C(1; 3; 0)$  et  $D(-1; -1; 1)$ .

- 1) Calculer l'aire du triangle ABC
- 2) a) Calculer la distance du point D au plan (ABC)  
 b) Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?
- 3) Calculer le volume du tétraèdre DABC
- 4) a) Déterminer les coordonnées du point E tel que ABDE soit un parallélogramme.  
 b) Calculer l'aire du parallélogramme ABDE

**Problème (12 points)**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x + 1 + (x + 1)e^{-2x}$ . On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  unité 2 cm.

**Partie A :** Etude d'une fonction auxiliaire

Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = e^{2x} - 2x - 1$

- 1) Calculer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

- 2) a) Etudier le sens de variation de  $g$  et dresser son tableau de variation
- b) En déduire le signe de  $g(x)$  pour tout réel  $x$

**Partie B:** Etude de  $f$  et construction de  $(C)$

- 1) Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$
- 2) Démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x + 1$  est asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$ .  
Préciser la position relative de  $(C)$  et  $(\Delta)$
- 3) a) Calculer  $f'(x)$  et l'exprimer à l'aide de  $g(x)$ . En déduire le signe de  $f'(x)$ .  
b) Dresser le tableau de variation de  $f$
- 4) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ , puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 5) a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera  
b) Construire dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ;  $(C)$ ;  $(\Delta)$  et la courbe  $(\Gamma)$  de  $f^{-1}$ , réciproque de  $f$ .

**Partie C:** Calcul d'aire et de volume

- 1) Soit  $\alpha$  un réel strictement supérieur à  $-1$ .  
a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer en  $cm^2$ , l'aire  $A(\alpha)$  du domaine plan limité par  $(C)$ ,  $(\Delta)$  et les droites d'équations :  
 $x = -1$  et  $x = \alpha$ .  
b) Calculer  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$
- 2) On désigne par  $(D)$  le domaine plan limité par  $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = -1$  et  $x = 0$ ; et par  $V$  le volume en  $cm^3$  du solide  $S$  engendré par la rotation complète de  $(D)$  autour de l'axe des abscisses.  
a) Montrer que  $[f(x)]^2 = (x + 1)^2(1 + 2e^{-2x} + e^{-4x})$   
b) Soit  $H$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  
$$H(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x - \left(x^2 + 3x + \frac{5}{2}\right)e^{-2x} - \frac{1}{32}(8x^2 + 20x + 13)e^{-4x}$$
  
Calculer  $H'(x)$  et l'exprimer à l'aide de  $f(x)$ ;  
c) En déduire le volume  $V$ .

Série D

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES  
Cette épreuve comporte deux (2) pages  
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

EXERCICE 1 (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soient  $A(1, 2, 3)$ ;  $B(3, 0, 3)$  et  $C(3, 2, 1)$ .

1. Calculer  $AB$ ;  $BC$  et  $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$
2. Soit  $D$  le point tel que  $\overline{AD} = \overline{BC}$ . Trouver les coordonnées de  $D$ . Quelle est la nature du quadrilatère  $ABCD$ ?  
En déduire que  $\overline{AC} \perp \overline{BD}$
3. Déterminer la distance séparant le point  $O$  au plan du quadrilatère  $ABCD$ ;
4. Soit  $I$  le milieu de  $[AC]$ . Calculer  $OI$ , en déduire que  $I$  est le projeté orthogonale de  $O$  sur le plan  $(ABCD)$ .
5. Démontrer que les plans  $(OAC)$  et  $(OBD)$  sont orthogonaux
6. Déterminer l'aire du quadrilatère  $ABCD$ .
7. Déterminer le volume de la pyramide de sommet  $O$  et de base, le quadrilatère  $ABCD$ .

EXERCICE 2 (4 points)

On considère la suite de terme générale  $U_n$  définie par :  $U_n = \frac{3U_{n-1}-1}{U_{n-1}+1}$ ;  $n \geq 3$  et par son premier terme  $U_2 = 3$ .

1. Calculer  $U_3$ ;  $U_4$  et en déduire que la suite  $(U_n)$  n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2.
  - a. Montrer que  $(U_n)$  est minorée par 1
  - b. Montrer que  $(U_n)$  est décroissante
  - c. En déduire que  $(U_n)$  converge et déterminer sa limite.
3. On pose  $V_n = \frac{U_n+1}{U_n-1}$ 
  - a. Montrer que  $(V_n)$  est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison (On pourra exprimer  $V_n$  et  $V_{n-1}$  en fonction de  $U_{n-1}$ )
  - b. Exprimer  $V_n$ , puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .
  - c. Déterminer la limite de  $(U_n)$

PROBLEME (12 points)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

désigne par  $(C)$  la courbe de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , unité graphique 2 cm.

PARTIE A

1. Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{x+1}$  si  $x \geq 0$ .  
Déterminer le sens de variation de  $g$  sur  $[0; +\infty[$  et en déduire son signe sur  $[0; +\infty[$

2.
  - a. Etudier la continuité de  $f$  en 0
  - b. Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0
3.
  - a. Calculer  $f'(x)$  suivant les valeurs de  $x$  et vérifier que pour tout  $x \geq 0$ ;  $f'(x) = g(x)$
  - b. Montrer que pour tout  $x < 0$ , on a  $f'(x) > 0$
  - c. Montrer que pour tout  $x \geq 0$ , on a  $f'(x) > 0$
  - d. Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$
  - e. Dresser le tableau de variation de  $f$
4.
  - a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  puis interpréter graphiquement le résultat
  - b. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right]$ . (On pourra poser  $X = \frac{1}{x}$ )
  - c. Montrer que la droite  $(D)$  d'équation :  $y = x + 1$  est une asymptote oblique à  $(C)$  en  $-\infty$
  - d. Préciser la position de  $(C)$  par rapport à  $(D)$  pour  $x < 0$ .  
(On admettra que  $x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \leq 1$  pour  $x < 0$ )
5. Tracer la droite  $(\Delta)$ :  $y = x$ ;  $(D)$ :  $y = x + 1$  et  $(C)$  dans le repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , unité graphique 2 cm.

## PARTIE B

1.
  - a. Déterminer trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}_+$ , on a :
 
$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$
  - b. Dédire au moyen d'une intégration par parties le calcul de  $\int_0^{e-1} f(x) dx$
2. Calculer en  $\text{cm}^2$ , l'aire  $\mathcal{A}$  de la partie du plan limitée par  $(\Delta)$ :  $y = x$ ;  $(C)$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = e - 1$ .
3. Soit  $h$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[0; +\infty[$ 
  - a. Montrer que  $h$  réalise une bijection de  $[0; +\infty[$  sur un intervalle  $I$  que l'on précisera.
  - b. Construire la courbe  $(C')$  de  $h^{-1}$  dans le même repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$
4. Quelle est l'aire  $\mathcal{A}'$  en  $\text{cm}^2$  de la boucle délimitée par  $(C)$  et  $(C')$ ?

## PARTIE C

On considère la courbe  $(\Gamma)$  dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{\ln(-t)} \\ y(t) = \frac{t}{\ln(-t)} \end{cases} \text{ avec } t \in ]-1; 0[$$

- 1) Déterminer une équation cartésienne de  $(\Gamma)$
- 2) Comment obtient-on  $(\Gamma)$  à partir de la courbe  $(C)$  de  $f$
- 3) Construire  $(\Gamma)$  en pointillées dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU  
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2013  
Session Normale  
Epreuve du 2<sup>nd</sup> tour  
Durée : 4 heures  
Coefficient : 05

**EPREUVE DE MATHÉMATIQUES**  
Cette épreuve comporte deux (2) pages  
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

**EXERCICE 1 (4 points)**

- Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, dont quatre portent le chiffre 1 et six portent le chiffre 5.  
On tire simultanément deux de ces boules.  
Calculer la probabilité des événements :  
A: « tirer deux boules portant chacune le chiffre 1 »  
B: « tirer deux boules portant chacune le chiffre 5 »  
C: « tirer deux boules portant des chiffres différents »
- On suppose maintenant que l'urne contient  $a$  boules portant le chiffre 1 et  $b$  boules portant le chiffre 5 avec  $a + b = 10$  ( $1 < a < 9$ ) et ( $1 < b < 9$ ).  
Soit  $X$  la variable aléatoire égale au total des points marqués sur les deux boules tirées simultanément.
  - Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$ .
  - Déterminer l'espérance mathématique  $E(X)$  en fonction de  $a$ .
  - Pour quelles valeurs de  $a$ , a-t-on  $6 < E(X) < 8$ ?

**EXERCICE 2 (4 points)**

Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , unité graphique : 2 cm.

- Soit le nombre  $z_0 = 1 + i$ .
  - Montrer que  $z_0$  est solution de l'équation (E) définie par  
$$z^3 - (7 + i)z^2 + 2(8 + 3i)z - 10(1 + i) = 0$$
  - Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$ .
- On considère les points  $A, B$  et  $C$  du plan, d'affixe respectives  $1 + i, 3 + i, 3 - i$ .
  - Calculer et écrire sous forme exponentielle  $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ .
  - En déduire la nature du triangle  $ABC$ .
  - Placer les points  $A, B$  et  $C$  dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  et compléter la figure au fur et à mesure.
  - Soit  $(\Gamma)$  le cercle circonscrit au triangle  $BAC$ .  
Déterminer l'affixe du centre  $G$  et le rayon  $r$  du cercle.
- Soit  $(\Delta)$  l'ensemble des points  $M$  du plan d'affixe  $z$  vérifiant la relation  
$$|z - 1 - i| = |z - 3 + i|$$
  - Caractériser géométriquement l'ensemble  $(\Delta)$
  - Justifier que le point  $F$  d'affixe  $4 + 2i$  appartient à  $(\Delta)$ .
  - Déterminer l'affixe du point  $E$  de  $(\Delta)$  situé sur l'axe des ordonnées.
- Quelle est la nature exacte du quadrilatère  $CEAF$ ? Justifier votre réponse.

**PROBLÈME (12 points)**

**PARTIE A**

On considère l'équation différentielle (E) définie par : (E) :  $\frac{1}{2}y' + y = 3e^{-2x} + 2$ .

## Annale de Mathématiques, BAC Série D

LOVIDOC'S

1. Déterminer le réel  $a$ , tel que la fonction  $v$  définie par  $v(x) = axe^{-2x} + 2$  soit une solution de (E).
2. Donner les solutions de l'équation (E):  $\frac{1}{2}y' + y = 0$ .
- 3.
- a. Montrer que  $u$  est solution de (E) si et seulement si  $v - u$  est solution de (E)
- b. En déduire les solutions de (E):
4. Déterminer la solution particulière  $h$  de l'équation (E) vérifiant  $h(0) = 0$ .

## PARTIE B

On définit la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = 2(3x - 1)e^{-2x} + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
Unité graphique : 4 cm.

## I. Etude d'une fonction auxiliaire

On définit la fonction  $g$  sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = 1 + x + \ln x$

1)

- a. Calculer les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$
- b. Déterminer le sens de variations de  $g$
- c. Dresser le tableau de variation de  $g$ .

2) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]0; +\infty[$ .  
Montrer que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $]0,2; 0,3[$ .

3) En déduire le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

II. Etude et représentation graphique de  $f$ 

1. Etudier la continuité de  $f$  en 0.
2. Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0. Donner une interprétation graphique.
3. Etudier les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$
4. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et interpréter le résultat obtenu.
5. Etudier le sens de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

(On montrera que pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ )

6. Montrer que  $f(\alpha) = -\alpha$  et déterminer le point d'intersection de  $(C_f)$  avec l'axe  $(Ox)$
7. Dresser le tableau de variations de  $f$
8. Construire  $(C_f)$

## PARTIE C

Soit  $\lambda < 0$ . On note  $\mathcal{A}(\lambda)$  l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équations  $x = \lambda$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  et la courbe  $(C_f)$ .

- 1) On pose  $F(x) = (ax + b)e^{-2x}$ . Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $F'(x) = (3x - 1)e^{-2x}$ .
- 2) Calculer  $\mathcal{A}(\lambda)$  en  $\text{cm}^2$
- 3) Calculer  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU  
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2012  
Session Normale  
Epreuve du 1<sup>er</sup> tour  
Durée : 4 heures  
Coefficient : 05

**EPREUVE DE MATHÉMATIQUES**  
*Cette épreuve comporte deux (2) pages*  
*(Les calculatrices ne sont pas autorisées)*

**EXERCICE 1 (4 points)**

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_1): y'' + 4y = 0 \text{ et } (E_2): y'' + y = 0$$

1. Déterminer la solution de l'équation  $(E_1)$  dont la courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  passe par le point  $A(0; -2)$  et admet en ce point une tangente horizontale

2. Déterminer la solution  $g$  de l'équation  $(E_2)$  vérifiant :  $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$  et  $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

3. Soit  $(C)$  la courbe définie par le système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = -2 \cos 2t \\ y(t) = \cos t - \sin t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

a. Déterminer la période commune des fonctions  $x$  et  $y$  ; comparer la position des points  $M(t)$  et  $(t + \pi)$ , puis en déduire un élément de symétrie de  $(C)$ . Justifier le choix de  $[0; \pi]$  comme ensemble d'étude.

b. Etudier les fonctions  $x$  et  $y$  sur  $[0; \pi]$  et dresser leur tableau de variations conjoint

c. Représenter la courbe  $(C)$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$   
(unité graphique 2 cm)

On précisera les tangentes particulières ainsi que les tangentes en  $O$ .

$$\text{NB : } \sqrt{2} \approx 1,4$$

**EXERCICE 2 (4 points)**

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4. On s'intéresse au nombre porté par la face cachée.

Pour  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ , on note  $P_k$  la probabilité d'obtenir le nombre  $k$  sur la face cachée. Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres  $P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$  dans cet ordre forment une progression arithmétique

1. Sachant que  $P_4 = 0,4$ ; montrer que  $P_1 = 0,1$ ;  $P_2 = 0,2$  et  $P_3 = 0,3$

2. On lance le dé trois (3) fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants

a. Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?

3. On lance dix (10) fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note  $X$  la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.

a. Pour  $0 \leq i \leq 10$ , exprimer en fonction de  $i$  la probabilité de l'évènement  $(X = i)$

- b. Calculer l'espérance mathématique de  $X$ . Interpréter le résultat obtenu.
- c. Calculer la probabilité de l'évènement  $(X \geq 1)$   
On donnera une valeur arrondie au millième
- 4. On lance  $n$  fois le dé, les lancers étant supposés indépendants. On note  $u_n$  la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au  $n^{\text{ième}}$  lancer.
  - a. Montrer que  $(u_n)$  est une suite géométrique et qu'elle converge
  - b. Calculer  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  en fonction de  $n$  puis étudier la convergence de la suite  $(S_n)$
  - c. Déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $S_n \geq 0,999$

NB : On donne  $(0,6)^{10} \approx 0,00604$  ;  $\ln(0,001) \approx -6,90$  ;  $\ln(0,6) \approx -0,51$

**PROBLEME (12 points)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} - \{1\}$  par :  $f(x) = \frac{x + \ln|1-x|}{1-x}$  et  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm.

**PARTIE A**

1. Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition. En déduire les asymptotes à  $(C)$
2. Soit  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ , calculer  $f'(x)$  puis étudier son signe. En déduire le sens de variation de  $f$
3. Dresser le tableau de variations de  $f$
4. Montrer que le point  $I(1; -1)$  est un centre de symétrie pour  $(C)$
5. Tracer  $(C)$  et les asymptotes

**PARTIE B**

Soit els fonctions  $u$  et  $v$  définies sur  $]1; +\infty[$  par :  $u(x) = \frac{-1}{1-x}$  et  $v(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-1}$

1. Déterminer une primitive de chacune des fonctions  $u$  et  $v$  sur  $]1; +\infty[$
2. Vérifier que pour tout réel  $x > 1$ ;  $-1 - f(x) = u(x) + v(x)$
3. Calculer, en  $\text{cm}^2$ , la valeur exacte de l'aire  $S$  du domaine plan compris entre  $(C)$  et les droites d'équations respectives  $y = -1, x = 2$  et  $x = 3$

**PARTIE C**

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 4 - e^{-u_n} \end{cases}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer, par récurrence, que pour tout entier non nul  $n, 3 < u_n < 4$
2.
  - a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n, u_{n+1} - u_n$  et  $u_n - u_{n-1}$  sont de même signe
  - b. Etudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$
3. Etudier la convergence de la suite  $(u_n)$

NB : On donne :  $e^{-3} \approx 0,05$  et  $e^{-4} \approx 0,02$

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU  
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2012  
Session Normale  
Epreuve du 2<sup>nd</sup> tour  
Durée : 4 heures  
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES  
Cette épreuve comporte deux (2) pages  
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

**EXERCICE 1** (4 points)

- On considère le polynôme  $P$  défini pour tout  $Z$  de l'ensemble  $\mathbb{C}$  par :  

$$P(Z) = Z^3 - 6Z^2 + 12Z - 16$$
  - Soit  $Z_0 \in \mathbb{C}$ . Montrer que si  $P(Z_0) = 0$  alors  $P(\overline{Z_0}) = 0$  où  $\overline{Z_0}$  est le conjugué de  $Z_0$
  - Calculer  $P(1 + i\sqrt{3})$  ; puis factoriser  $P(Z)$
  - Déduire les solutions de l'équation  $P(Z) = 0$
- Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  (unité graphique 2 cm). Soit  $A, B$  et  $C$  les points d'affixe respectives  $a = 4; b = 1 + i\sqrt{3}$  et  $c = \overline{b}$  où  $\overline{b}$  est le conjugué de  $b$ 
  - Placer les points  $A, B$  et  $C$  sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure
  - Quelle est la nature exacte du triangle  $ABC$ ?
- Soit  $K$  le point d'affixe  $Z_K = -\sqrt{3} + i$ , le point  $F$  image de  $K$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  et  $G$  l'image de  $K$  par la translation de vecteur  $\overline{OB}$ 
  - Déterminer les affixes respectives de  $F$  et  $G$
  - Montrer que les droites  $(OC)$  et  $(OF)$  sont perpendiculaires
- Soit  $H$  le quatrième sommet du parallélogramme  $COFH$ 
  - Calculer l'affixe  $Z_H$  de  $H$  puis montrer que le parallélogramme  $COFH$  est un carré
  - Quelle est la nature du triangle  $AGH$ ?

On donne  $\sqrt{3} = 1,7$

**EXERCICE 2** (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On donne les points  $A(2, 0, 0)$  ;  $B(0, 3, 0)$  et  $C(0, 0, -2)$

- Déterminer les coordonnées du vecteur  $\vec{u}$  défini par  $\vec{u} = \overline{AB} \wedge \overline{AC}$
- Soit  $H(a; b; c)$  le projeté orthogonal de  $O$  sur le plan  $(ABC)$ 
  - Que peut-on dire des vecteurs  $\overline{AH}$  et  $\vec{u}$  ?  
En déduire que :  $3a + 2b - 3c - 6 = 0$
  - Que peut-on dire des vecteurs  $\overline{OH}$  et  $\vec{u}$  ?  
En déduire qu'il existe un réel  $t$  tel que : 
$$\begin{cases} a = -6t \\ b = -4t \\ c = 6t \end{cases}$$
  - Déterminer la valeur de  $t$  puis donner les coordonnées de  $H$
  - Calculer la distance du point  $O$  au plan  $(ABC)$
- Calculer le volume du tétraèdre de base  $ABC$  et de sommet  $O$

**PROBLEME** (12 points)

On considère la fonction de la variable réelle  $x$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = \frac{-\ln|x|}{x} + x - 2$

On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm.

**PARTIE A**

Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $g(x) = -x^2 + 1 - \ln|x|$

1. Etudier les variations de la fonction  $g$  et dresser le tableau de variations
2. Calculer  $g(-1)$  et  $g(1)$  puis déduire le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$

**PARTIE B**

1. Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition. En déduire que la courbe  $(C)$  admet une asymptote verticale
2.
  - a. Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x - 2$  est une asymptote à  $(C)$
  - b. Etudier les positions relatives de  $(C)$  par rapport à  $(D)$
3.
  - a. Calculer  $f'(x)$  et exprimer  $f'(x)$  en fonction de  $g(x)$  et en déduire le sens de variation de  $f$
  - b. Dresser le tableau de variations de  $f$
4.
  - a. Montrer que le point  $I$ , intersection des deux asymptotes est un centre de symétrie pour la courbe  $(C)$
  - b. Construire la courbe  $(C)$  ainsi que les asymptotes
5. Discuter graphiquement et en fonction du paramètre  $m$ , le nombre de solutions de l'équation dans  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = m$  ( $m \in \mathbb{R}$ )

**PARTIE C**

Soit  $\alpha$  un réel tel que  $-1 \leq \alpha < 0$  et soit  $(\Delta)$  la région du plan délimité par la courbe  $(C)$ , les droites d'équations respectives  $x = -1; x = \alpha; y = x - 2$

1.
  - a. Calculer en fonction de  $\alpha$  l'aire  $\mathcal{A}(\alpha)$  de  $(\Delta)$
  - b. Calculer  $\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \alpha < 0}} \mathcal{A}(\alpha)$  et interpréter graphiquement le résultat
2. On donne la suite définie pour tout entier  $n > 0$  par :  $u_n = \int_1^n f(x) dx$ 
  - a. Calculer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
  - b. La suite  $(u_n)$  est-elle convergente ? Justifier

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU  
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2011  
Session Normale  
Epreuve du 1<sup>er</sup> tour  
Durée : 4 heures  
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES  
Cette épreuve comporte deux (2) pages  
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

**EXERCICE I (4 points)**

Dans le tableau suivant figurent les résultats d'une enquête réalisée dans un magasin pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels de'un modèle de chaussures, en fonction de son prix de vente.

Prix en francs : $x_i$	350	400	450	500	550	600
Nombre d'acheteurs potentiels $y_i$	140	120	100	90	80	55

- Représenter le nuage de points  $M_i(x_i, y_i)$  correspondant à cette série statistique dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  tel que 1cm représente 100 francs sur l'axe des abscisses et 1cm représente 20 acheteurs sur l'axe des ordonnées.
- On appelle  $G_1$  et  $G_2$  les points moyens des sous nuages constitués d'une part par les trois premiers points et d'autre part par les trois derniers points.
  - Calculer les coordonnées de  $G_1$  et  $G_2$ .
  - Placer les points  $G_1$  et  $G_2$  sur la figure tracer la droite  $(G_1G_2)$ .
  - Déterminer une équation de la forme  $y = mx + p$  de la droite  $(G_1G_2)$ .
- Déduire du 2-c) une équation :
  - du nombre d'acheteurs potentiels d'un modèle de chaussures vendu 650 F.
  - du prix d'un modèle dont le nombre d'acheteurs potentiel est 150.

**EXERCICE II (4 points)**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

Soient les nombres complexes  $a = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{i(\sqrt{3}-1)}{4}$  et  $z_0 = 6 + 6i$ .

On note  $A_0$  le point d'affixe  $z_0$  et pour tout  $n$  entier non nul, on désigne par  $A_n$  le point d'affixe  $z_n$  définie par  $z_n = a^n z_0$ .

- Exprimer  $z_1$  et  $a^2$  sous forme algébrique. Ecris  $z_1$  sous forme exponentielle et montrer que  $a^2 = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$ .
  - Exprimer  $z_3$  et  $z_7$  en fonction de  $z_1$  et  $a^2$ ; en déduire  $z_3$  et  $z_7$  sous forme exponentielle.
- Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $|z_n| = r_n$ .
  - Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r_n = 12 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ .
  - En déduire que la suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
  - Déterminer la limite de la suite  $(r_n)$  et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

LOVIDOC'S

**PROBLEME (12 points)**

Soit  $f$  la fonction numérique définie par  $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^x}$  et de courbe représentative  $(C)$  dans un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  du plan (unité graphique 4 cm).

**PARTIE A**



- 1)
  - a) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
  - b) Calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- 2) Etudier le sens de variation de  $f$  et dresser son tableau de variation.
- 3) Soit  $A$  le point de  $(C)$  d'abscisse 0.
  - a) Déterminer l'équation réduite de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  en  $A$ .
  - b) Montrer que  $A$  est un centre de symétrie pour  $(C)$ .
- 4) Tracer  $(T)$  et  $(C)$  dans le repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

**PARTIE B**

Soit  $n$  un entier naturel. On désigne par  $D_n$  le domaine du plan délimité par la courbe  $(C)$  et les droites d'équations  $y = 1$ ,  $x = 0$ ,  $x = n$ .  $A_n$  désigne l'aire de la région  $D_n$  exprimer en unité d'aire.

- 1) Hachurer la région  $D_2$  sur le graphique (pour  $n = 2$ ).
- 2) Montrer que  $A_n = \ln 2 - \ln(1 + e^n) + n$ .
- 3) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$ .

**PARTIE C**

- 1) Déterminer les nombres réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$\frac{e^{2x}}{(1 + e^x)^2} = \frac{ae^x}{(1 + e^x)} + \frac{be^x}{(1 + e^x)^2}$$

- 2) Soit  $\alpha$  un réel négatif. On note  $V(\alpha)$  le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la portion de la courbe  $(C)$  obtenue pour  $\alpha \leq x \leq 0$ .
  - a) Exprimer  $V(\alpha)$  en fonction de  $\alpha$ .
  - b) Déterminer la limite de  $V(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  tend vers  $-\infty$ .

**PARTIE D**

Soit  $(\Gamma)$  la courbe paramétrée de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \ln t \\ y(t) = \frac{1}{1+t} - 1, \quad t \geq 1. \end{cases}$$

- 1) Déterminer une équation cartésienne de  $(\Gamma)$ .
- 2) Expliquer comment à partir de  $(C)$  on obtient  $(\Gamma)$ . Construire  $(\Gamma)$  en pointillés.  
On donne  $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,62$  ;  $f(1) \approx 0,73$  ;  $f(2) \approx 0,88$ .

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU  
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2011

Session Normale

Epreuve du 2<sup>nd</sup> tour

Durée : 4 heures

Coefficient : 05

**EPREUVE DE MATHÉMATIQUES**  
Cette épreuve comporte deux (2) pages  
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

**EXERCICE I (4 points)**

On considère la suite  $(I_n)$  définie par :  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ ,  $(n \in \mathbb{N})$ .

- 1) Calculer  $I_0$ ,  $I_0 + I_1$  et en déduire  $I_1$ .
- 2) Calculer  $I_n + I_{n+1}$  en fonction de  $n$ .
- 3) Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante et positive.
- 4) Montrer que  $I_n \leq \frac{1}{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- 5) En déduire que la suite  $(I_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

**EXERCICE II (4 points)**

L'espace est rapporté au repère orthonormal direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  unité de longueur 1 cm, on considère les points :  $A(3; 2; 4)$ ;  $B(0; 3; 5)$ ;  $C(0; 2; 1)$ ;  $D(3; 1; 0)$  et  $F(1; 2; 3)$ .

- 1) Démontrer que ABCD est un parallélogramme.
- 2) Soit E le point défini par  $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AB} \wedge \vec{AD}$ . Calculer les coordonnées de E.
- 3) Calculer l'aire A en  $\text{cm}^2$  du parallélogramme ABCD.
- 4) Calculer le volume V en  $\text{cm}^3$  du prisme droit de base ABCD et de hauteur [AE].
- 5) Le point F appartient-il à la droite (AB)? Justifier la réponse.

**PROBLEME (12 points)**

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  et l'unité est 2 cm.

On placera l'axe des abscisses au milieu de la feuille et l'axe des ordonnées sur le bord gauche de la feuille.

**PARTIE A**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \left(2 - \frac{2}{x}\right)(\ln x - 1)$ . (C) désigne sa courbe représentative relative au repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
- 2) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  puis calculer  $f'(x)$ .
- 3) Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = 2 \ln x + 2x - 4$ .
  - a) Étudier le sens de variation de  $g$  sur  $]0; +\infty[$  puis dresser son tableau de variation.
  - b) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $[1; 2]$ .
  - c) En déduire le signe de  $g$  sur  $]0; +\infty[$ .
- 4)
  - a) Étudier le sens de variation de  $f$  et dresser son tableau de variation sur  $]0; +\infty[$ .

- b) Montrer que  $f(\alpha) = \frac{-2(\alpha-1)^2}{\alpha}$ .
- c) Calculer  $f(1)$  et  $f(e)$ .
- 5)
- a) Etudier le signe de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
- b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et donner une interprétation qu résultat obtenu.
- c) Construire  $(C)$ . On prendra  $\alpha = 1,75$  et  $f(\alpha) = -0,6$ .
- 6) Soit  $h$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par:  $h(x) = -f(x)$ ,  $(C')$  désigne sa courbe représentative. Sans étudier  $h$ , construire  $(C')$  dans le même  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Justifier la construction de  $(C')$ .

**PARTIE B**

Soit  $F$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ .  $(\Gamma)$  désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

- 1)
- a) Que représente  $F$  pour  $f$ ?
- b) Sans calculer  $F(x)$ , donner le sens de variation de  $F$ .
- c) Que peut-on dire des tangentes à  $(\Gamma)$  aux points d'abscisses 1 et  $e$ ?  
(On pourra utiliser 4-c) de la partie A)
- 2)
- a) Le nombre  $x$  étant strictement positif, calculer  $\int_1^x \ln t dt$  (on pourra utiliser une intégration par parties)
- b) Montrer que, pour tout réel  $x > 0$ , on a :  $f(x) = 2 \ln x - 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2$ .
- c) En déduire l'expression de  $F(x)$  en fonction de  $x$ .
- 3) Calculer l'aire  $A$  en  $\text{cm}^2$  du domaine plan limité par  $(C)$ ,  $(C')$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ .

On donne  $\ln 2 \approx 0,7$  et  $\ln 2 \approx 1,1$ .

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU  
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2010  
Session Normale  
Epreuve du 1<sup>er</sup> tour  
Durée : 4 heures  
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES  
Cette épreuve comporte deux (2) pages  
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

**EXERCICE I** (4 points)

Soit  $(z) = z^3 - (1 - i)z^2 + z - 1 + i, z \in \mathbb{C}$ .

- 1) Démontrer que  $P(z)$  admet deux racines imaginaires pures
- 2) Résoudre l'équation  $P(z) = 0$ , puis donner les solutions sous forme exponentielle.
- 3) Le plan est muni d'un repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . On note  $a = -i; b = i$  et  $c = 1 - i$ .
  - a) Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure. On notera A, B et C les points d'affixes respectives  $a, b$  et  $c$ .
  - b) Calculer  $\frac{a-b}{a-c}$ , puis préciser la nature du triangle ABC.
  - c) Soit C l'image du point D par la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$ . Calculer l'affixe du point D.
  - d) E est l'image du point D par la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . Déterminer l'affixe du point E
  - e) Pour quelles valeurs de  $n, c^n$  est-il un réel.

**EXERCICE II** (4 points)

Une urne contient dix boules : quatre rouges et six blanches.

- 1) On extrait simultanément trois boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de boules rouges extraites. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'espérance  $E(X)$  de X.
- 2) On répète  $n$  fois l'épreuve précédente ; après chaque tirage de trois boules rouges.
  - a) On suppose  $n = 5$ . Calculer la probabilité que l'on obtienne exactement deux fois un tirage de trois boules rouges.
  - b) On prend maintenant  $n = 2$ . On note S l'évènement « le nombre total de boules rouges obtenues après les deux tirages est 3 ». Calculer la probabilité de S.

**PROBLEME** (12 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ,  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$ .

**PARTIE A**

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$  et  $g(x) = e^{-x}$ .

- 1)
  - a) Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ . Que peut-on en déduire pour la courbe  $(C_f)$ ? Calculer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
  - b) Calculer  $f'(x)$  et étudier son signe.
  - c) En déduire le sens de variation de  $f$  et dresser son tableau de variations.

- 2)
- Calculer la limite de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
  - Calculer  $g'(x)$ , étudier le sens de variation de  $g$  et dresser son tableau de variations.
- 3)
- Étudier le signe de  $f(x) - g(x)$  et en déduire la position relative des courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$ .
  - Montrer que les tangentes en  $A(0,1)$  aux courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$  sont perpendiculaires.
- 4) Tracer  $(C_f)$  et  $(C_g)$  et leurs tangentes en  $A$ .

**PARTIE B**

- 1) Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que la fonction qui à  $t$  associe  $(at^2 + bt + c)e^{-t}$  soit une primitive de la fonction qui à  $t$  associe  $(t^2 + 2t)e^{-t}$ .
- 2) Soit  $\alpha$  un réel positif
- Calculer  $A(\alpha)$  en  $\text{cm}^2$  de la région du plan comprise entre  $(C_f)$ ,  $(C_g)$ , l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = \alpha$ . (On pourra utiliser le résultat précédent)
  - Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(\alpha)$ .
- 3) Calculer en  $\text{cm}^2$  de la région du plan comprise entre  $(C_f)$ ,  $(C_g)$ , droite d'équation  $x = -2$  et l'axe des ordonnées.

**PARTIE C**

Soit  $(U_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  par  $U_n = \ln[f(n)]$ , où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien.

- Justifier que la suite  $(U_n)$  est décroissante.
- On désigne par  $S_n$  la somme des  $n$  premiers termes de la suite  $(U_n)$ :  

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$
  - Montrer que  $U_n = -n + \ln(n+1)$ .
  - Démontrer que :  $S_n = 2 \ln[\ln(n+1)!] - \frac{n(n+1)}{2}$   
 On donne  $e^{-1} = 0,4$ .

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES  
Cette épreuve comporte deux (2) pages  
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

**EXERCICE I (4 points)**

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormal (O ;  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ) ; unité graphique 2 cm. On désigne par A, B et C les points dont les affixes respectives sont :  $2i$ ,  $-1$  et  $i$ . Soit  $f$  l'application de (P) \ {A} dans (P) qui, à tout point M d'affixe  $z$  ( $z \neq 2i$ ) associe le point M' d'affixe  $z'$  tel que  $z' = \frac{z+1}{z-2i}$ .

- 1) Placer les points A, B et C. On complètera la figure dans la suite.
- 2) Déterminer l'affixe du point C', image de C par f. Quelle est la nature du quadrilatère ACBC' ?
- 3) Montrer que le point C admet un unique antécédent C'' par f. Quelle est la nature du triangle BCC''.
- 4) Donner une interprétation géométrique de  $|z'|$  et  $\arg(z')$ .
- 5) Déterminer les ensembles suivants :
  - a) L'ensemble (E) des points M dont l'image par f a pour affixe un réel strictement négatif.
  - b) L'ensemble (F) des points M dont l'image par f a pour affixe un imaginaire pur non nul.
  - c) L'ensemble (D) des points M dont l'image par f a pour affixe un nombre complexe de module 1
- 6) Construire ACBC', BCC'', (E), (F) et (D) dans la figure.

**EXERCICE II (4 points)**

Une entreprise fabrique des vêtements. Dans le tableau suivant, on a indiqué pour les sept premiers mois de l'année 2008 la production journalière moyenne de pulls.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet
Rang du moi $x_i$	1	2	3	4	5	6	7
Production journalière $y_i$	200	210	260	265	270	300	315

La direction devra fermer l'atelier de fabrication de pulls si la production moyenne journalière n'atteint pas 350 pulls à la fin de l'année 2008. On considère le nuage de points  $M_i(x_i, y_i)$  associé au tableau ci-dessus, relativement à un repère orthonormal (O ;  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ), prendre pour unité : en abscisse 1 cm par rang de mois ; en ordonnée 1cm pour 20 pulls produits.

- 1)
  - a) Représenter le nuage de points dans le repère (O ;  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ).
  - b) Calculer les coordonnées du point moyen G et placer ce point.
- 2)
  - a) Calculer les coordonnées du moimt moyen  $G_1$  associé aux quatre premiers points du tableau, puis celles du point moyen  $G_2$  associé aux trois derniers points.
  - b) Déterminer une équation de la droite ( $G_1G_2$ ) et la tracer.

LOVIDOC'S

- 3) On admet que  $(G_1, G_2)$  réalise un ajustement du nuage de points.
  - a) Déterminer par le calcul la production journalière moyenne de pulls en décembre 2008.
  - b) Comment peut-on retrouver graphiquement ce résultat ?
- 4) L'atelier de fabrication de pulls a-t-il été fermé en fin décembre ? justifier votre réponse.

**PROBLEME (12 points)**

**PARTIE A**

Soit  $u$  la fonction numérique définie par  $u(x) = 1 - xe^{-x}$ .

- 1) Etudier le sens de variation de  $u$  (on ne demande pas ni les limites ni le tableau de variation)
- 2) En déduire le signe de  $u(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

**PARTIE B**

On considère la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-4 \ln(-x)}{x} & \text{si } x \in ]-\infty; -1[ \\ f(x) = (x+1)(1+e^{-x}) & \text{si } x \in [-1; +\infty[ \end{cases}$$

et on désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , (unité: 2 cm).

- 1)
  - a) Vérifier que  $f$  est continue en  $-1$ .
  - b) Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $-1$ . Interpréter graphiquement le résultat.
  - c) Calculer la limite de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les éventuelles asymptotes à  $(C)$ .
  - d) Montrer que la droite  $(D)$  d'équation :  $y = x + 1$  est asymptote à  $(C)$ . Etudier la position relative de  $(C)$  et de  $(D)$  sur l'intervalle  $[-1; +\infty[$ .
- 2)
  - a) Vérifier que pour  $x < -1, f'(x) = \frac{4(\ln(-x)-1)}{x^2}$ .
  - b) Etudier les variations de  $f$  sur  $]-\infty; -1[$ , puis sur  $[-1; +\infty[$  et dresser le tableau de variations de  $f$ .
  - c) Montrer qu'il existe un point d'abscisse supérieur à  $-1$  où la tangente  $(T)$  à  $(C)$  est parallèle à la droite  $(D)$ .
- 3)
  - a) Montrer que la courbe  $(C)$  est située au dessus de l'axe des abscisses.
  - b) Tracer la courbe  $(C)$  et ses asymptotes, puis la tangente  $(T)$  à  $(C)$ .

**PARTIE C**

- 1) Soit  $\lambda$  un nombre réel supérieur à  $-1$ .
  - a) Calculer les intégrales  $I = \int_{-e}^{-1} \frac{\ln(-x)}{x} dx$  et  $J(\lambda) = \int_{-1}^{\lambda} (x+1)e^{-x} dx$ .
  - b) On note  $A(\lambda)$  l'aire en  $cm^2$ , de la partie du plan au dessus e l'axe des abscisses, délimitée par la courbe  $(C)$ , l'asymptote  $(D)$  et les droites d'équations :  $x = -e$  et  $x = \lambda$ . Montrer que  $A(\lambda) = 8 + 4e - 4(\lambda + 2)e^{-\lambda}$ .
- 2) Calculer la limite de  $A(\lambda)$  lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ .

**PARTIE D**

Soit  $(\Gamma)$  la courbe dont une représentation paramétrique est donnée par le système suivant :

$$\begin{cases} x(t) = -e^{-t} \\ y(t) = 4te^t \end{cases} (t < 0)$$

- 1) Montrer que  $(\Gamma)$  est l'image d'une partie de  $(C)$  par la symétrie orthogonale d'axe  $(O; \vec{i})$ .
- 2) Construis  $(\Gamma)$  en pointillés dans le même repère que  $(C)$ .

**EPREUVE DE MATHÉMATIQUES**  
*Cette épreuve comporte deux (2) pages*  
*(Les calculatrices ne sont pas autorisées)*

**EXERCICE I (4 points)**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(o; \vec{u}; \vec{v})$  d'unité graphique 2cm. Soit  $(\Gamma)$  la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x(t) = t(3 - t^2) \\ y(t) = t \ln\left(\frac{3+t}{3-t}\right) \end{cases} \quad t \in [-2; 2]$$

- 1°) Comparer  $M(t)$  et  $M(-t)$  pour  $t \in [-2; 2]$  et en déduire que l'on peut restreindre le domaine d'étude de  $(\Gamma)$  à  $[0; 2]$ .
- 2°) Etudier le sens de variation de  $x$  sur  $[0; 2]$
- 3°) a) Montrer que pour tout  $t \in [0; 2]$ ,  $\ln\left(\frac{3+t}{3-t}\right) \geq 0$   
b) Etudier le sens de variation de  $y$  sur  $[0; 2]$ .
- 4°) Dresser le tableau de variation conjoint de  $x$  et  $y$ .
- 5°) Déterminer les points d'intersections de  $(\Gamma)$  avec l'axe des ordonnées.
- 6°) Tracer  $(\Gamma)$ .

On donne :  $\ln 5 \approx 1,60$  ;  $\ln 2 \approx 0,69$  ;  $\ln(2 + \sqrt{3}) \approx 1,31$  ;  $\sqrt{3} \approx 1,73$

**EXERCICE II (4 points)**

Dans le plan complexe  $P$  muni d'un repère orthonormé direct  $(o; \vec{u}; \vec{v})$  on considère les points  $A, B, C, D$  d'affixes respectives  $z_A = -2i$  ;  $z_B = 4 - 2i$  ;  $z_C = 4 + 2i$  ;  $z_D = 1$ .

- 1°) a) Placer les points  $A, B, C$  et  $D$ .  
b) Calculer  $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$  et en déduire la nature exacte du triangle  $ABC$ .
- 2°) On désigne par  $f$  l'application qui à tout point  $M \neq A$  d'affixe  $z$  de  $P$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z' = \frac{z - 4 - 2i}{z + 2i}$ 
  - a) Déterminer les images  $B'$  et  $C'$  des points  $B$  et  $C$  par  $f$
  - b) Écrire l'affixe  $z_{B'}$  de  $B'$  sous forme trigonométrique.
  - c) Déterminer et construire l'ensemble  $(E)$  des points  $M$  d'affixe  $z$  tel que  $|z'| = 1$
- 3°) a) Montrer que pour tout complexe  $z$  distinct de  $-2i$ ,  $(z'-1)(z+2i) = -4 - 4i$ .  
b) Montrer que pour tout point  $M \neq A$ 
  - i)  $M' \neq D$
  - ii)  $DM' \times AM = 4\sqrt{2}$
  - iii)  $\text{mes}(\vec{u}; \overrightarrow{DM'}) + \text{mes}(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \frac{5\pi}{4}$

LOVIDOC'S

**PROBLEME** (12 points)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ . On désigne par  $(C)$  la courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthornomé  $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$  (unité graphique : 4cm)

**PARTIE A**: Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :  $g(x) = x + 2 - e^x$   
1°) Etudier le sens de variation de  $g$  sur  $[0 ; +\infty[$  et déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$

2°) a) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $[0 ; +\infty[$  et que  $1,14 < \alpha < 1,15$ .

b) En déduire le signe de  $g$  suivant la valeur de  $x$ .

**PARTIE B**

1°) a) Montrer que pour tout  $x \in [0 ; +\infty[$   $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$

b) En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

2°) a) Montrer que pour tout  $x \in [0 ; +\infty[$  ;  $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

b) En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ . Interpréter graphiquement le resultat trouvé.

3°) a) Montrer que  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$

b) En utilisant l'encadrement de  $\alpha$  établi dans la question A) 2) donner un encadrement de  $f(\alpha)$  d'amplitude de  $10^{-2}$

4°) Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse 0.

5°) a) Etablir que pour tout  $x \in [0 ; +\infty[$   $f(x) = x + \frac{(x+1) \cdot u(x)}{xe^x + 1}$  avec  $u(x) = e^x - xe^x - 1$

b) Etudier le sens de variation de la fonction  $u$  sur  $[0 ; +\infty[$ . En déduire le signe de  $u(x)$ .

c) Déduire des résultats précédents la position de  $(C)$  par rapport à  $(T)$ .

**PARTIE C**

1°) Déterminer une primitive  $F$  de  $f$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

On pourra utiliser l'expression de  $f(x)$  établie dans la question B) 2).

2°) On note  $D$  le domaine délimité par  $(C)$  ;  $(T)$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ .

Calculer en  $cm^2$ , l'aire  $A$  du domaine  $D$ .

3°) Pour tout entier  $n$  on pose  $V_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$

a) Calculer  $V_0, V_1$  et  $V_2$

b) Interpréter graphiquement  $V_n$

c) Montrer que pour tout  $n \geq 2$  ;  $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$ .

En déduire que pour tout  $n \geq 2$  ;  $V_{n+1} \leq V_n$

d) Déterminer la limite de  $(V_n)$

On donne :  $e \approx 2,72$  ;  $e^{1,14} \approx 3,12$  ;  $e^{1,15} \approx 3,16$

110

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU

Office du Baccalauréat

Série D

Année 2009

Session Normale

Epreuve du 2<sup>nd</sup> tour

Durée : 4 heures

Coefficient : 05

**ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

Cette épreuve comporte deux (2) pages  
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

**EXERCICE I (4 points)**

L'espace est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , unité graphique 2 cm.

Soient les points A (-2, 1, -4); B(2, 3, 1); C(2, 2, -1) et D(-3, -1, 3).

Soient les points E, F, G et H tel que ABCDEFGH soit un parallélépipède.

- 1) Déterminer les coordonnées du point F.
- 2) Calculer  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ . En déduire l'aire du parallélogramme ABFC et du triangle ABC en  $cm^2$ .
- Calculer la distance  $d$  du point D au plan (ABC).
- Calculer en  $cm^3$  le volume  $V$  de la pyramide de sommet D et de base ABFC.
- 5) Calculer le volume  $V'$  du parallélépipède ABFCDEGH.

**EXERCICE II (4 points)**

Le Tableau suivant donne le montant des prêts octroyés par une banque à des associations féminines entre 2002 et 2007.

Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année $x$	1	2	3	4	5	6
Montant des prêts en millions de francs CFA $y$	4,5	5	5,2	5,8	6,3	7,1

- 1) Représenter le nuage de points  $M_i(x_i, y_i)$  associé à cette série statistique dans un repère orthogonal.  
On prendra 1cm pour une unité en abscisse et 1cm pour un million en ordonnée.
- 2) Soit  $(\Delta)$  la droite d'ajustement de Mayer obtenue par regroupement des trois premiers points et des trois derniers points du nuage.  
Soit  $G_1$  le point moyen des trois premiers points et  $G_2$  celui des trois derniers points du nuage.
  - a) Calculer les coordonnées de  $G_1$  et  $G_2$ .
  - b) Construire la droite  $(\Delta)$ .
  - c) Déterminer une équation réduite de  $(\Delta)$ .
- 3) On suppose que l'évolution du montant des prêts faits aux associations féminines reste la même au cours des années à venir.  
A partir de quelle année le montant des prêts sera-t-il strictement supérieur au double de celui de 2009 ?

**PROBLÈME (12 points)**

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité 2 cm).

**PARTIE A**

Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $]-\pi, 0[$  par  $g(x) = \cos^2 x + \cos x - 1$ .

- a) Montrer que  $g$  est dérivable sur  $]-\pi, 0[$  et que  $g'(x) = -\sin x (2 \cos x + 1)$ .
- b) En déduire que  $g'(x) \leq 0$  pour tout  $x \in ]-\pi, -\frac{2\pi}{3}]$  et que

- $g'(x) \geq 0$  pour tout  $x \in [-\frac{2\pi}{3}; 0[$
- 2) c) Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- a) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\beta \in ]-\pi, 0[$  et que  $\beta \in ]-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}[$ .
- b) En déduire le signe de  $g$  sur  $]-\pi, 0[$ .

**PARTIE B**

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $]-\pi, +\infty[$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 \sin(2x)}{1 + \cos x} + \frac{1}{2} & \text{si } x \in ]-\pi, 0[ \\ 2 - \frac{3}{e^{3x} + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On note  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$ .

- 1) Etudier la continuité de  $f$  en 0.
- 2) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0 et en déduire une interprétation géométrique des résultats obtenus.
- 3) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- b) Montrer que pour tout  $x \in ]-\pi; 0[$  on a :  $f(x) = \frac{4 \sin x \cos x (1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x} + \frac{1}{2}$  et en déduire que  $\lim_{x \rightarrow -\pi} f(x) = +\infty$ .
- c) En déduire les asymptotes de la courbe  $(C_f)$ .
- 4) a) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  et en déduire le sens de variation de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
- b) Montrer que  $f'(x) = \frac{4g(x)}{1 + \cos x}$  pour tout  $x \in ]-\pi; 0[$  et en déduire le sens de variation de  $f$  sur  $]-\pi; 0[$ .
- c) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $]-\pi, +\infty[$ .
- 5) Construire  $(C_f)$ , ses asymptotes et ses demi-tangentes au point d'abscisse 0.

**PARTIE C**

On admet que pour tout  $x \in [1,5; 2], 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$  (e)

- 1) Soit  $h$  la fonction définie sur  $[1,5; 2]$  par  $h(x) = f(x) - x$ . Etudier les variations de  $h$  et en déduire que l'équation  $f(x) = x$  admet une solution unique  $\alpha \in [1,5; 2]$ .
- 2) Soit  $(U_n)$  la suite numérique définie par  $U_0 = 1,5$  et  $U_{n+1} = f(U_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
  - a) Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}, U_n \in [1,5; 2]$  en utilisant (e).
  - b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_{n-1} - \alpha|$  et que  $|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n |U_0 - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
  - c) En déduire que la suite  $(U_n)$  est convergente.
  - d) Déterminer l'entier naturel  $n_0$  tel que  $U_{n_0}$  soit une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près.

On donne :  $h(1,5) = 0,46$  ;  $h(2) = -0,007$  ;  $\ln 10 = 2,30$  ;  $\ln 2 = 0,69$

**EPREUVE DE MATHÉMATIQUES**  
Cette épreuve comporte deux (2) pages  
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

**EXERCICE I (4 points)**

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unité graphique : 2cm, la courbe  $(\Gamma)$  de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = e^{\sin t} \\ y(t) = \cos t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1) Montrer que les fonctions numériques  $x$  et  $y$  de la variable réelle  $t$ , sont périodiques de période  $2\pi$ .

2) a) Comparer les points  $M(t)$  et  $M(\pi-t)$  où  $M$  est un point de  $(\Gamma)$ .

b) Montrer que pour tout  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $(\pi-t) \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$  et en déduire que l'on peut restreindre le domaine d'étude à  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

3) Etudier et dresser le tableau de variations conjoint des fonctions  $x$  et  $y$  pour tout  $t$  appartenant à  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

4) Tracer la courbe  $(\Gamma)$ .

On donne  $e = 2,72$  ;  $e^{-1} = 0,37$ .

**EXERCICE II (4 points)**

Le plan complexe  $(P)$  est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  ayant comme unité graphique 1cm.

On note  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives :  $i$  et  $-4 - 2i$ .

Soit  $Z$  un nombre complexe différent de  $i$ , on pose :  $Z' = i \frac{Z + 4 + 2i}{Z - i}$ .

1) Donner une interprétation géométrique de l'argument et du module de  $Z'$ .

2) Déterminer et représenter l'ensemble  $E$  des points  $M$  plan complexe  $(P)$  d'affixe  $Z$  tel que  $Z'$  est un nombre réel.

3) On pose  $Z_1 = Z - i$  et  $Z_1' = Z' - i$ .

Montrer que  $Z_1 Z_1' = -3 + 4i$ . Calculer  $|Z_1 Z_1'|$ .

4) a) Prouver que si  $M$  appartient au cercle  $(C)$  de centre  $A$  d'affixe  $i$  et de rayon  $r$ ,  $r > 0$ , alors  $M'$  appartient à un cercle  $(C')$  de centre  $A$ .

b) Déterminer  $r$  pour que  $(C) = (C')$ .

**PROBLEME (12 points)**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x + 2 + \frac{4}{x-3} \text{ si } x \leq 2$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} \text{ si } x \geq 2$$

On désigne par  $(C)$  la courbe de  $f$  dans un repère orthonormal  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  ;  
unité graphique : 2cm.

**PARTIE A**

- 1) a) Etudier la continuité de  $f$  en 2 ;  
b) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 2 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 2) Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

3) a) Montrer que la droite  $(D_1)$  d'équation :  $y = x + 2$  est une asymptote à  $(C)$  en  $-\infty$ .

Préciser la position relative de  $(C)$  et de  $(D_1)$ .

b) Montrer que la droite  $(D_2)$  d'équation :  $y = x - \frac{3}{2}$  est asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$ .

Préciser la position relative de  $(C)$  et de  $(D_2)$ .

4) a) Etudier les variations de  $f$  sur  $]-\infty; 2]$  et sur  $]2; +\infty[$ .

b) Dresser le tableau de variations de  $f$ .

5) Tracer  $(D_1)$ ;  $(D_2)$  et  $(C)$ .

6) a) Soit  $h$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]-\infty; 1]$ . Montrer que  $h$  réalise une bijection de  $]-\infty; 1]$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.

b) Construire la courbe  $(\Gamma)$  de  $h^{-1}$  dans un même repère que  $(C)$ .

**PARTIE B**

1) Calculer en  $\text{cm}^2$ , l'aire  $A$  du domaine plan limité par  $(C)$ ,  $(D_1)$  et les droites d'équations :  $x = -3$  et  $x = 0$ .

2) Soit  $(\Delta)$  le domaine plan défini par : 
$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

Calculer en  $\text{cm}^3$ , le volume  $V$  du solide  $S$  engendré par la rotation complète du domaine  $(\Delta)$  autour de l'axe des abscisses.

(On pourra remarquer que  $\frac{8x+16}{x-3} = 8 + \frac{40}{x-3}$ ).

**PARTIE C**

Soit  $(\Gamma)$  la courbe dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = t + 3 \\ y(t) = \sqrt{t^2 + 3t + 2} \end{cases}, t > -1.$$

Montrer que  $(\Gamma)$  est une partie de  $(C)$ .

114

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU  
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2008  
Session Normale  
Epreuve du 2<sup>nd</sup> tour  
Durée : 4 heures  
Coefficient : 05

### EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages  
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

#### EXERCICE I (4 points)

Un sac contient six boules numérotées de 0 à 5. On extrait simultanément deux boules, qui portent respectivement les numéros  $x$  et  $y$ . A chaque tirage, on associe la variable aléatoire  $X$  définie de la façon suivante :

- si  $x$  et  $y$  sont pairs,  $X$  prend la valeur  $\frac{x+y}{2}$ .
- si  $x$  et  $y$  sont impairs,  $X$  prend la valeur  $\frac{|x-y|}{2}$ .
- si  $x$  et  $y$  sont de parité différentes on attribue à  $X$  la valeur 0 (zéro). (On rappelle que 0 est pair).

1)

- a) Déterminer les valeurs prises par  $X$ .
- b) Etablir la loi de probabilité de  $X$ .

2) Calculer l'espérance mathématique de  $X$ .3) On extrait dix fois de suite deux boules simultanément avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement sept fois  $x$  et  $y$  de même parité. (On exprimera le résultat sous forme de puissances de 2, 3 et 5).

#### EXERCICE II (4 points)

Un bloc de métal est déposé dans un four dont la température constante est de  $1000^\circ$ .

La température  $\theta$  est une fonction du temps  $t$  (en heures) qui vérifie l'équation différentielle

$$(E): \theta'(t) = k(1000 - \theta(t)), \quad k \in \mathbb{R}_+^*$$

1) On pose  $y(t) = \theta(t) - 1000$ .Ecris une équation différentielle  $(F)$  satisfaite par  $y$ .2) Résoudre  $(F)$ , puis  $(E)$ .3) Le bloc initialement à  $40^\circ\text{C}$  est déposé dans le four au temps  $t_0 = 0$ . Sa température est de  $160^\circ\text{C}$  au bout d'une heure.En déduire l'expression de  $\theta(t)$  en fonction de  $t$  uniquement.

4)

a) Calculer la température du bloc au temps  $t = 3$ .b) Déterminer le temps  $T$  à partir duquel la température du bloc dépassera  $500^\circ\text{C}$ .

On donne  $\left(\frac{7}{8}\right)^3 \approx 0,7$  ;  $\ln \frac{7}{8} \approx -0,13$  ;  $\ln \frac{25}{48} \approx -0,65$ .

#### PROBLEME (12 points)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x - x \ln x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O ;  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ) ; unité 2cm.

**PARTIE A**

- 1) Etudier la continuité de f en 0.
- 2) Etudier la dérivabilité de f en 0. (On rappelle que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ ) et interpréter graphiquement le résultat.
- 3)
  - a) Etudier les variations de f.
  - b) Dresser le tableau de variations de f.
- 4) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . interpréter graphiquement les résultats obtenus et tracer (C).
- 5)
  - a) Soit h la restriction de f à l'intervalle  $[1; +\infty[$ . Montrer que h réalise une bijection de  $[1; +\infty[$  sur un intervalle J que l'on précisera.
  - b) Construire la courbe ( $\Gamma$ ) de  $h^{-1}$  dans le même repère que (C).

**PARTIE B**

Soit  $\alpha$  un réel tel que  $0 \leq \alpha \leq e$ . On pose :  $I(\alpha) = \int_{\alpha}^e f(x) dx$ .

- 1)
  - a) A l'aide d'une intégration par parties calculer  $\int_{\alpha}^e x \ln x dx$ .
  - b) En déduire  $I(\alpha)$ .
- 2)
  - a) Donner une interprétation graphique de  $I(\alpha)$ .
  - b) Calculer  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} I(\alpha)$ .
- 3) En déduire en  $cm^2$  l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), les axes du repère et la droite d'équation :  $x = e$ .
- 4) Soit (E) l'ensemble des points  $M(x, y)$  tels que :  $\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$   
Calculer en  $cm^3$  le volume du solide engendré par la rotation complète de (E) autour de l'axe des abscisses.

**PARTIE C**

Dans le plan rapporté à un plan orthonormal (O ;  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ) , on considère la courbe ( $\Gamma$ ) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = \ln(\cos t) \\ y(t) = \frac{\cos^2 t - 1}{\cos t} \end{cases} \text{ avec } t \in ]0; \frac{\pi}{2}[$$

- 1) Montrer que ( $\Gamma$ ) est une partie de (C).
- 2) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse à l'instant  $t = \frac{\pi}{4}$ .

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU  
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2007  
Session Normale  
Epreuve du 1<sup>er</sup> tour  
Durée : 4 heures  
Coefficient : 05

### EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages  
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

#### EXERCICE I (4 points)

Soit  $P$  le polynôme de la variable complexe  $z$  défini par :

$$P(z) = z^3 - 5(1 - i)z^2 - 2(1 - 9i)z + 16 - 8i$$

- 1°) Montrer que l'équation  $P(z) = 0$  admet une solution imaginaire pure  $z_0$  que l'on déterminera.
- 2°) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $P(z) = 0$ . On désignera par  $z_1$  et  $z_2$  les deux autres solutions telles que  $\text{Im}(z_1) < \text{Im}(z_2)$ , ou  $\text{Im}(z)$  désigne la partie imaginaire de  $z$ .
- 3°) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(o; \vec{u}; \vec{v})$ . Unité : 1 cm.
  - a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives  $z_1$ ;  $z_0$  et  $\bar{z}_2$  ou  $\bar{z}_2$  désigne le conjugué de  $z_2$ .
  - b) Calculer  $\frac{\bar{z}_2 - z_1}{z_0 - z_1}$
  - c) En déduire la nature du triangle ABC.
- 4°) Soit  $t$  la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$ . M et M' sont les points d'affixes respectives  $z$  et  $z'$  tels que M' soit l'image de M par la translation  $t$ .
  - a) Exprimer  $z'$  en fonction de  $z$ .
  - b) Calculer l'affixe du point D image du point C par  $t$ .
  - c) Donner la nature exacte du quadrilatère ABDC. Justifier

#### EXERCICE II (4 points)

Soit  $(V_n)$  la suite numérique définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $V_1 = \frac{1}{2}$  et  $V_{n+1} = \frac{n+1}{2n} V_n$ .

- 1°) Calculer  $V_2$ ,  $V_3$  et  $V_4$
- 2°) a) Démontrer que pour tout entier  $n > 0$ , on a  $V_n > 0$   
b) Démontrer que la suite  $(V_n)$  est décroissante.  
c) En déduire que la suite  $(V_n)$  est convergente.
- 3°) Soit  $(U_n)$  la suite numérique définie par  $U_n = \frac{V_n}{n}$ ,  $\forall n > 0$ 
  - a) Montrer que la suite  $(U_n)$  est géométrique. Préciser la raison et le premier terme.
  - b) Exprimer  $U_n$  puis  $V_n$  en fonction de  $n$ .
  - c) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

### PROBLEME

#### PARTIE A

On considère la fonction numérique  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$ .

- 1°) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- 2°) Etudier le sens de variation de  $g$  et dresser le tableau de variation de  $g$ .

3°) En déduire que pour tout  $x > 0$  on a  $g(x) > 0$ .

### PARTIE B

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = x + \frac{2 \ln x}{x}$ . On considère par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$  (unité : 2cm)

1°) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

En déduire que (C) admet une asymptote verticale dont on précisera l'équation.

2°) a) Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x)$  a le même signe que  $g(x)$ .

b) En déduire le sens de variation de  $f$  puis dresser son tableau de variations.

3°) a) Montrer que la droite (D) d'équation  $y = x$  est asymptote à (C). Préciser la position de (C) par rapport à (D)

b) Déterminer les coordonnées du point B de (C) en lequel la tangente est parallèle à (D).

4°) Soit (T) la tangente à (C) au point A d'abscisse 1.

Déterminer une équation de (T).

5°) a) Démontrer que  $f$  est une bijection définie de  $]0 ; +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in ]\frac{1}{2} ; 1[$ .

c) Construire (C). (On placera les points A et B et les tangentes à (C) en A et en B).

6°) Construire dans le même repère, la courbe (C') de la fonction  $f^{-1}$  réciproque de  $f$ .

7°) Calculer l'aire  $S$  en  $\text{cm}^2$  du domaine plan délimité par la courbe (C) et les droites d'équations  $y = x$  ;  $x = 1$  et  $x = e$ .

### PARTIE C

Soit  $(\Gamma)$  l'ensemble des points  $M(x(t) ; y(t))$  tels que :

$$\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^t + 2te^{-t}, t \geq 0. \end{cases}$$

1°) Montrer que  $(\Gamma)$  est une partie de (C) que l'on précisera.

2°) Tracer en pointillé  $(\Gamma)$  sur le même graphique que (C).

## EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages  
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

**EXERCICE I (4 points)**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(1, 0, 0)$ ;  $B(0, 2, 0)$  et  $C(0, 0, 3)$ .

- 1) Calculer les coordonnées du vecteur  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ . Soit I le point de coordonnées  $(1, 2, 3)$ .
- 2) Calculer la distance de I au plan (ABC). Les points A, B, C et I sont-ils coplanaires ?
- 3)
  - a) Calculer  $A_1$  l'aire du triangle ABC en unité d'aire.
  - b) Déterminer le volume V (en unité de volume) de la pyramide de sommet I et de base le triangle ABC.
- 4) Soit D le point de coordonnées  $(1, -2, 3)$ .
  - a) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
  - b) Calculer l'aire  $A_2$  du quadrilatère ABCD.

**EXERCICE II (4 points)**

La constitution d'un groupe de trois élèves devant représenter leurs camarades à un exposé sur l'environnement est soumise à une expérience aléatoire.

On lance trois fois une pièce de monnaie. Un garçon est désigné à chaque apparition de pile et une fille à chaque apparition de face. Un groupe constitué de filles et de garçons est appelé « groupe mixte » et un groupe constitué uniquement de filles ou uniquement de garçons un « groupe non mixte ».

On désigne par M l'évènement « le groupe est mixte » et par  $\bar{M}$  l'évènement contraire de M

- 1) Calculer les probabilités des évènements M et  $\bar{M}$ .
- 2) A l'intérieur de la salle où se tient l'exposé, le groupe de trois élèves reçoit en cadeau trois tee-shirts par filles présente au sein du groupe. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tee-shirts reçus.
  - a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
  - b) Déterminer la loi de probabilité de X.
  - c) Déterminer la fonction de répartition F de X.
  - d) Construis la représentation graphique de F.
  - e) Calculer l'espérance mathématique  $E(X)$  de X.
- 3) Les tee-shirts reçus sont répartis de manière équitable à tous les membres du groupe. Quelle est la probabilité que chaque membre du groupe reparte avec au moins deux tee-shirts.

**PROBLEME (12 points)****PARTIE A**

On considère l'équation différentielle (E):  $y' + y = x - 1$

- 1) Trouver deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $U(x) = ax + b$  soit une solution de (E).
- 2) Démontrer que la fonction  $V$  est solution de (E) si et seulement si  $(V - U)$  est solution de l'équation différentielle (E') :  $y' + y = 0$ .
- 3) Résoudre (E').
- 4) En déduire les solutions de (E) ;
- 5) Déterminer la solution  $h$  de (E) vérifiant  $h(0) = 1$

**PARTIE B**

Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ; (unité graphique : 1cm).

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = e^{-x} + x - 2$

- 1) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition
- 2) Etudier le sens de variation de  $f$  puis dresser son tableau de variations.
- 3) Soit  $(D)$  la droite d'équation  $y = x - 2$  :
  - a) Montrer que  $(D)$  est asymptote à  $(C_f)$  en  $+\infty$ .
  - b) Préciser la position de  $(C_f)$  par rapport à  $(D)$ .
- 4) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 5) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$  telles que  $-1,2 \leq \alpha \leq -1,1$  et  $1,8 \leq \beta \leq 1,9$ .
- 6) Construis  $(C_f)$ .
- 7) Déterminer graphiquement suivant les valeurs de  $m$  le nombre de solution de l'équation :  $me^x - xe^x + 2e^x - 1 = 0$  où  $m$  est un paramètre réel .

**PARTIE C**

Soit  $\Delta$  la partie du plan limitée par  $(C_f)$ , la droite  $(D)$  et les droites d'équations  $x = 2$  et  $x = \lambda$  où  $\lambda$  est un réel strictement supérieur à 2 .

- 1)
  - a) Calculer l'aire  $A(\lambda)$  en  $\text{cm}^2$  de  $\Delta$  en fonction de  $\lambda$ .
  - b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(\lambda)$ .
- 2) Désignons par  $V$  le volume en  $\text{cm}^3$  du solide obtenu par rotation autour de l'axe des abscisses du domaine limité par  $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 2$  et  $x = 4$  .
  - a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $I = \int_2^4 (x - 2)e^{-x} dx$
  - b) Calculer  $V$

On donne  $e^{1,2} = 3,32$  ;  $e^{1,1} = 3,00$  ;  $e^{-1,8} = 0,15$  ;  $e^{-2} = 0,14$  ;  $e^2 = 7,39$ .

**EPREUVE DE MATHÉMATIQUES**  
*Cette épreuve comporte deux (2) pages*  
*(Les calculatrices ne sont pas autorisées)*

**EXERCICE I (4 points)**

Le plan complexe est muni d'un repère  $R = (O ; \vec{u} ; \vec{v})$  ; unité graphique 2cm

1°) Résoudre dans  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  le système : 
$$\begin{cases} iz + \bar{z}' = -2\sqrt{3} \\ \bar{z} - iz' = -2 \end{cases}$$

2°) Soient les points A ; B d'affixes respectives  $Z_A = -1 + i\sqrt{3}$  ;  $Z_B = -\sqrt{3} - i$

- a) Ecrire  $Z_A$  ;  $Z_B$  et  $Z_A \cdot Z_B$  sous forme trigonométrique.
- b) Montrer que  $Z_A^3$  est réel et  $Z_B^3$  est imaginaire pur

3°) Soit r la rotation de centre O et d'angle  $\frac{-\pi}{2}$

- a) On pose  $r(A) = C$ . Calculer  $Z_C$  de C
- b) On pose  $r(C) = D$ . Calculer  $Z_D$  de D
- c) Placer les points A ; B ; C ; D

4°)

- a) Montrer que O est le milieu de [AD] et [BC]
- b) Calculer le module et l'argument de  $\frac{Z_A}{Z_B}$
- c) En déduire la nature du quadrilatère ABDC

**EXERCICE II (4 points)**

Le tableau suivant donne les résultats d'une étude réalisée sur un produit P ; x représente le prix de vente unitaire du produit exprimé en FCFA ; y représente la quantité du produit disponible sur le marché, exprimée en milliers

$X_i$ en FCFA	30	35	45	60	80	100
$Y_i$ en milliers	12,5	13	13	15	15,5	16

1°) On considère l'ensemble des points  $M_i$  de coordonnées  $(x_i ; y_i)$  ou  $1 \leq i \leq 6$

- a) Construire le nuage de point  $M_i$  (1,5cm représente 10FCFA en abscisse et 1cm représente 1000 en ordonnées)
- b) Un ajustement affine de ce nuage semble-t-il raisonnable ? Justifier la réponse.

2°)

a) Construire la droite  $(\Delta)$  d'ajustement affine obtenue par la méthode de MAYER. On prendra pour premier sous-nuage les trois premiers points et pour le deuxième les trois derniers points.

b) Déterminer l'équation de  $(\Delta)$  sous la forme  $y = ax + b$ , a et b étant des réels à préciser.

3°) En utilisant l'équation de la droite  $(\Delta)$ , estimer

LOVIDOC'S

- a) La quantité du produit P disponible sur le marché pour un prix de vente de 150F
- b) Le prix de vente si la quantité du produit P disponible sur le marché est de 20 000F

**PROBLEME (12 points)**

On considère la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $f(x) = e^{-x} \sin(x)$  et Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $R = (O ; \vec{i} ; \vec{j})$  ; unité graphique : 2cm en abscisse et 10cm en ordonnées.

**PARTIE A :** Etude de f

- 1°) Montrer que pour tout  $x \geq 0, -e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$ . En déduire l'existence d'une asymptote à Cf en  $+\infty$
- 2°) Déterminer les abscisses des points d'intersection de Cf avec l'axe des abscisses.
- 3°) On se propose d'étudier f sur  $[0 ; \pi]$ .
  - a) Etablir l'égalité :  $\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - x)$  pour tout réel x
  - b) Calculer  $f'(x)$  et étudier son signe sur  $[0 ; \pi]$ .
  - c) Dresser le tableau de variations de f sur  $[0 ; \pi]$ .
- 4°) On appelle (C1) la portion de (Cf) déterminée par les points dont les abscisses dans l'intervalle  $[0 ; \pi]$ . Tracer (C1). On prendra les abscisses respectives :  $0 ; \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{4}$  et  $\pi$

**PARTIE B :** Calcul d'aire et de volume

- 1°) a) Vérifier égalité :  $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$
- b) En déduire une primitive F de f sur  $[0 ; +\infty[$
- 2°) On désigne par D le domaine du plan délimité par (C1) ; (Ox) et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=\pi$ . Calculer en  $cm^2$ , la valeur de l'aire du domaine D.
- 3°) Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $[0 ; \pi]$  par  $\varphi(x) = e^{-2x} \cos(2x)$ 
  - a) Vérifier l'égalité :  $\varphi''(x) + 4\varphi'(x) + 8\varphi(x) = 0$
  - b) En déduire une primitive  $\Phi$  de  $\varphi$  sur  $[0 ; \pi]$ .
  - c) Calculer, en  $cm^3$  le volume V du solide engendré par la rotation complète du domaine D autour de l'axe (Ox)

**PARTIE C :** Etude d'une suite

On considère la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $U_n = \int_0^\pi e^{-x} \sin(nx) dx$

- 1°) a) A l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que :  $U_n = \frac{n}{1+n^2} (1 - e^{-\pi} \cos(n\pi))$
  - b) En déduire que, pour tout n  $|U_n| \leq \frac{2n}{1+n^2}$
  - 2°) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n)$
- On donne  $e^{-\frac{\pi}{4}} = 0,46 ; e^{-\frac{\pi}{2}} = 0,21 ; e^{-\frac{3\pi}{4}} = 0,09$

**EPREUVE DE MATHÉMATIQUES**  
*Cette épreuve comporte deux (2) pages*  
*(Les calculatrices ne sont pas autorisées)*

**EXERCICE I (4 points)**

- 1° Calculer  $(2 + 4i)^2$
- 2° On considère dans  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, l'équation  
(E) :  $z^3 + (3 - 8i)z^2 - (13 + 12i)z + 9 + 20i = 0$ 
  - a) Montrer que (E) admet une solution réel que l'on déterminera
  - b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E).
- 3° On donne dans le plan les points A, B et C d'affixes respectives  $Z_A = -3 + 2i$  ;  $Z_B = 1 - i$  ;  $Z_C = -1 + 6i$ 
  - a) Calculer  $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ . En déduire la nature du triangle ABC.
  - b) Le point D est l'image du point B par la translation de vecteur  $\vec{u}$  d'affixe,  $2 + 4i$ . Calculer l'affixe  $Z_D$  du point D
  - c) Déterminer la nature du quadrilatère ABCD

**EXERCICE II (4 points)**

Le plan étant muni d'un repère orthonormé  $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$  ( $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$  et  $\|\vec{j}\| = 3\text{cm}$ ). On considère la courbe (C) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = t - 2 \sin t \\ y(t) = \cos t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

A tout instant t, M(t) est le point de (C) de coordonnées  $(x(t) ; y(t))$ .

1° Montrer que le point  $M(t + 2\pi)$  est l'image du point M(t) par une translation dont on précisera le vecteur de translation.

2° Montrer que M(t) et M(-t) sont symétriques par rapport à l'axe de ordonnées.

3° Calculer  $x'(t)$  et montrer que :

$$\begin{cases} x'(t) \leq 0 \text{ pour } t \in [0; \frac{\pi}{3}] \\ x'(t) > 0 \text{ pour } t \in ]\frac{\pi}{3}; \pi] \end{cases}$$

4° Etudier les variations de x et y et donner leurs variations dans un tableau commun, pour  $t \in [0; \pi]$

5° Tracer la partie (C1) de (C) correspondant à  $t \in [-\pi; \pi]$

6° Dire comment à partir de (C1), on peut obtenir la courbe (C2) de (C) correspondant à  $t \in [-\pi; 3\pi]$ . On donne  $\frac{\pi}{2} - 2 \approx -0,4$  ; et  $\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0,68$

**PROBLEME (12 points)**

On considère la fonction numérique f définie par :  $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$ . On note (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$  d'unité graphique 2cm.

**PARTIE A**

Etude de f et construction de (Cf)

- 1°) Calculer les limites de f en  $-\infty$  et en  $+\infty$
- 2°) Démontrer que la droite ( $\Delta$ ) d'équation  $y = 2x + 1$  est une asymptote à la courbe (Cf) en  $-\infty$  et préciser la position de (Cf) par rapport à ( $\Delta$ ).
- 3°) a) Calculer la dérivée première  $f'$  et la dérivée seconde  $f''$  de f.  
 b) Etudier les variations de  $f'$  et dresser son tableau de variations.  
 c) Calculer  $f'(1)$  et en déduire le signe de  $f'(x)$  pour tout réel x.  
 d) Dresser le tableau de variation de f.
- 4°) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $1,9 \leq \alpha \leq 2$  et  $-0,6 \leq \beta \leq -0,5$ .
- 5°) Calculer la limite de  $\frac{f(x)}{x}$  quand  $x \rightarrow +\infty$  puis tracer ( $\Delta$ ) et (Cf)

**PARTIE B** (Recherche d'une approximation de  $\alpha$ )

On considère la fonction g définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par

$g(x) = 1 + \ln(2 + \frac{1}{x})$

- 1°) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  équivaut à  $g(x) = x$  sur  $]0 ; +\infty[$
- 2°) Etudier les variations de g
- 3°) Soit  $I = [1,9 ; 2]$ .  
 a) Montrer que pour tout  $x \in I, g(x) \in I$   
 b) Montrer que pour tout  $x \in I, |g'(x)| \leq \frac{1}{9}$
- 4°) Soit  $(U_n)$  la suite numérique définie par  $U_0 = 2$  et  $U_{n+1} = g(U_n)$  pour tout n de  $\mathbb{N}$ .  
 a) Montrer que pour tout n de  $\mathbb{N}; U_n \in I$ .  
 b) Démontrer que pour tout n de  $\mathbb{N}; |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9} |U_n - \alpha|$ , puis, que  
 $|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{9})^n \times \frac{1}{10}$   
 c) En déduire que la suite  $(U_n)$  converge et préciser sa limite.

**PARTIE C** (Calcul d'aire)

- 1°) En intégrant par parties, Calculer  $J = \int_1^a x e^{x-1} dx$
- 2°) a) Calculer en unité d'aire (ua), l'aire A de la portion du plan limitée par la courbe (Cf), l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = \alpha$   
 b) Montrer que  $A = (\alpha - 1)(\alpha - \frac{1}{\alpha})$

On donne  $e \approx 2,72 ; e^{0,9} \approx 2,46 ; e^{-1,5} \approx 0,22 ; e^{-1,6} \approx 0,20 ; \ln(\frac{5}{2}) \approx 0,92$  et  $\ln(\frac{48}{19}) \approx 0,93$ .

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU  
Office du Baccalauréat

Année 2004  
Session Normale  
Durée : 4 heures  
Coefficient : 05

Série D

**EPREUVE DE MATHÉMATIQUES**  
Cette épreuve comporte deux (2) pages  
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

**EXERCICE I (4 points)**

Le plan complexe est muni repère orthonormé  $(o; \vec{u}; \vec{v})$ . Soit  $P(z)$  le polynôme défini par :  
 $P(z) = z^3 + (1-5i)z^2 - 4z + 16$  ou  $z$  désigne un nombre complexe.

- 1°) a) Montrer que l'équation  $P(z) = 0$ , admet une solution imaginaire pure  $z_0$ .  
b) Achever la résolution de l'équation  $P(z) = 0$ . On appelle  $z_1, z_2$  les deux autres racines, avec la partie réel de  $z_1$  négative  
c) Ecrire  $z_1, z_2$ , et  $z_0$  sous forme trigonométrique.
- 2°) Soient A ; B et C les points d'affixes respectives  $z_1, z_2$ , et  $z_0$ . Déterminer en radian la mesure de l'angle orienté  $(\vec{AC}; \vec{AB})$ , puis en déduire la nature du triangle ABC
- 3°) Soit  $r$  la rotation de centre O et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .
- a) Calculer  $z_{A'}$  ; l'affixe de  $A'$  tel que  $A' = r(A)$   
b) Quelle est la nature du quadrilatère  $OACA'$ ?

**EXERCICE II (4 points)**

Un sac contient 5 jetons Rouges et 2 jetons blancs tous indiscernables au toucher. Un jeu consiste à tirer au hasard un jeton du sac. Si le jeton est Rouge, le jeu s'arrête ; si non on tire un second jeton sans remettre le premier dans le sac. La mise est de 50F. Le tirage d'un jeton blanc rapporte 200F, tandis que celui d'un jeton Rouge ne rapporte rien.

Soit  $X$  la variable aléatoire réelle qui, à chaque jeu associe le gain algébrique du joueur.

- 1°) a) Quelles sont les valeurs possibles de  $X$  ?  
b) Déterminer la loi de probabilité de  $X$   
c) Déterminer la fonction de répartition de  $X$  puis la représenter graphiquement.
- 2°) Soit A l'événement : « Le joueur a un gain positif ». Montrer que  $P(A) = \frac{2}{7}$
- 3°) Un joueur joue successivement, de façon indépendante, 5 jeux. Il remet à la fin de chaque jeu les jetons dans le sac. Soit  $Y$  la variable aléatoire réelle qui, à ces 5 jeux associe le nombre de fois où l'événement A est réalisé.

Justifier que  $Y$  suit une loi binomiale et calculer la probabilité que le joueur obtienne au moins une fois un gain positif au cours des 5 jeux.

**PROBLEME (12 points)**

On considère la fonction Numérique  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$  et on désigne par (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  unité : 4cm

**PARTIE A**

- 1°) a) Justifier que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$

- b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2°) a) Justifier que est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer pour tout réel  $x$  l'expression  $f'(x)$   
 b) Etudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variations.
- 3°) a) Montrer que la fonction  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers un intervalle  $J$  que l'on précisera. Expliciter la bijection réciproque  $f^{-1}$   
 b) Construire dans le même la courbe  $(C_f)$  et la courbe représentative  $(\Gamma)$  de  $f^{-1}$ . On justifiera le tracé de  $(\Gamma)$  sans étudier les variations de  $f^{-1}$ .
- 4°) a) soit  $\lambda > 0$ , calculer en  $cm^2$ , l'aire  $A(\lambda)$  de la partie du plan limitée par la courbe  $(C_f)$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = \lambda$  et  $y = 0$   
 b) Calculer  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

**PARTIE B**

Soit la fonction  $h$  définie par :  $h(x) = 1 - xe^x - x$

- 1°) Calculer pour tout réel  $x$ , les expressions  $h'(x)$  et  $h''(x)$  de la dérivée première et la dérivée seconde de  $h$
- 2°) Etudier le sens de variation de  $h'$  et calculer  $h'(-2)$ . En déduire le signe de  $h'$
- 3°) a) Quel est le sens de variation de  $h$  ? Dresser son tableau de variations.  
 b) Montrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et vérifier que  $\alpha \in [0 ; 1]$
- 4°) Montrer que  $\alpha$  est solution de l'équation  $f(x) = x$ .
- 5°) soit  $I = [0 ; 1]$ .  
 a) Montrer que pour tout  $x \in [0 ; 1]$ ,  $f(x)$  est élément de  $I$   
 b) Montrer que si  $x \in [0 ; 1]$  alors  $(1 + e^{-1})^2 \leq (1 + e^{-x})^2 \leq 4$   
 c) En déduire que pour tout  $x$  de  $I$ ,  $|f'(x)| \leq (\frac{e}{1+e})^2$
- 6°) Soit  $(U_n)_{n \geq 0}$  la suite numérique définie par :  

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
  - a) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $U_n$  est élément de  $I$
  - b) On pose  $k = \frac{e}{1+e}$ , montrer en utilisant l'inégalité de la moyenne que pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $|f(x) - \alpha| \leq k^2|x - \alpha|$ .
  - c) En déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  ;  $|U_{n+1} - \alpha| \leq k^2|U_n - \alpha|$  puis que  $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}k^{2n}$
  - d) En déduire que  $U_n$  est convergente et préciser sa limite.

On donne  $e \approx 2,72$   $e^{-1} \approx 0,37$   $e^{-0,5} \approx 0,61$   $e^{0,5} \approx 1,65$

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU  
Office du Baccalauréat

Année 2003  
Session Normale  
Durée : 4 heures  
Coefficient : 05

Série D

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages  
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

**EXERCICE I (4 points)**

Dans une famille donnée, on admet qu'une naissance donne un garçon, une fille ou des jumeaux. Une naissance donne dans 30% des cas un garçon et dans 50% des cas une fille. On admet que le sexe de l'enfant ne dépend pas des naissances précédentes.

- 1°) a) Quelle est la probabilité pour qu'une naissance donne des jumeaux dans la famille ?
- b) Calculer la probabilité pour que les trois premières naissances donnent des filles et la quatrième donne un garçon.

2°) On suppose qu'il y a n naissances dans la famille.

- a) Calculer en fonction de n, la probabilité  $P_n$  d'avoir au moins une naissance donnant des jumeaux.
- b) Déterminer le nombre minimale  $n_0$  d'enfants pour que  $P_n$  soit supérieur ou égal à 0,97

3°) On suppose qu'il y a trois naissances dans la famille et l'on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'enfants possibles issus des trois naissances.

- a) Déterminer la loi de probabilité de X.
- b) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X

On donne  $\frac{\ln(0,03)}{\ln(0,8)} \approx 15,95$ .

**EXERCICE II (4 points)**

1°) Soit A ; B ; C trois points non alignés de l'espace

Déterminer l'ensemble des points M tels que  $\overline{AB} \wedge \overline{AM} = \overline{AB} \wedge \overline{AC}$

2°) Soient  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  deux droites de même vecteur directeur  $\vec{u}$  et H un point de  $(\Delta)$

On désigne par H' le projeté de H sur  $(\Delta')$

a) Démontrer que pour tout point A de  $(\Delta)$  et tout point A' de  $(\Delta')$ ,  $\overline{AA'} \wedge \vec{u} = \overline{HH'} \wedge \vec{u}$

b) En déduire que :  $HH' = \frac{\|\overline{AA'} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

c) Application numérique : soient A (-1 ; 2 ; 5) et A'(4 ; -1 ; 9) ; soient  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  les droites de vecteur directeur  $\vec{u}$  (-2 ; 2 ; 1) contenant respectivement A et A'. Calculer la distance de  $(\Delta)$  à  $(\Delta')$ .

**PROBLEME (12 points)**

**PARTIE A**

On considère la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (x+4)e^{-\frac{1}{2}x}$  et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  ; unité graphique : 2cm

1°) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Préciser les asymptotes s'il y a lieu.

Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  ; quelle interprétation géométrique peut-on en faire ?

b) Etudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variations.

c) Montrer que (C) coupe l'axe des abscisses en un point unique.

Préciser l'abscisse de ce point

2°) a) Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0

b) On veut préciser la position de (C) par rapport à (T). On pose  $y = l'$  équation de (T) et

on pose  $h(x) = f(x) - \varphi(x)$

Calculer  $h'(x)$  et  $h''(x)$

Etudier les variations de la fonction  $h'$  et en déduire le signe de  $h'(x)$  ; puis par un

raisonnement analogue, déterminer le signe de  $h(x)$ .

Préciser alors la position de (C) par rapport à (T)

3°) a) Calculer  $f(2)$  et  $f(4)$

b) Tracer (T) puis construire (C)

**PARTIE B**

1°) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$F(x) = (ax + b) e^{-\frac{1}{2}x} \text{ soit une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}$$

2°) Soit  $\lambda$  un réel supérieur ou égal à  $-4$ . Calculer en  $\text{cm}^2$ , l'aire  $\mathcal{A}(\lambda)$  de la surface limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations

$$x = -4 \text{ et } x = \lambda$$

$$\text{Calculer } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$$

3°) a) Déterminer les réels  $\alpha$  ;  $\beta$  ;  $\gamma$  pour que la fonction  $G$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$G(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) e^{-x} \text{ soit une primitive de } g \text{ définie sur } \mathbb{R} \text{ par :}$$

$$g(x) = (x^2 + 8x + 16) e^{-x}$$

b) Calculer en  $\text{cm}^3$  le volume  $V(\lambda)$  du solide engendré par la rotation de la surface définie autour de l'axe des abscisses.

$$\text{Calculer } \lim_{x \rightarrow +\infty} V(\lambda)$$

**PARTIE C**

Soit  $k$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $k(x) = |x + 4| e^{-\frac{1}{2}x}$

1°) Expliquer comment obtenir à partir (C) de la courbe représentative (C') de  $k$ . Construire (C') dans le même repère que (C). (On représentera (C') en pointillés.)

2°) A l'aide du graphique, donner en fonction du paramètre  $m$  le nombre de solutions de

$$\text{l'équation dans } \mathbb{R}, |x + 4| e^{-\frac{1}{2}x} = m$$

On donne :  $e \approx 2,7$  ;  $e^{-1} \approx 0,4$  ;  $e^{-2} \approx 0,13$  ;  $e^2 \approx 7,3$

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU  
Office du Baccalauréat

Année 2002  
Session Normale  
Durée : 4 heures  
Coefficient : 05

Série D

**EPREUVE DE MATHEMATIQUES**  
*Cette épreuve comporte deux (2) pages*  
*(Les calculatrices ne sont pas autorisées)*

**EXERCICE I (4 points)**

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 2cm. On désigne par A le point d'affixe 2, par B le point d'affixe  $2i$  et par  $\Omega$  le point d'affixe  $1+i$ . On considère l'application  $f$  qui, à tout nombre complexe  $z$  différent de 2, associe le nombre complexe :  $f(z) = \frac{iz+2}{z-2}$ .

1) On pose  $z = x + iy$  et  $f(z) = X + iY$  avec  $x, y, X, Y$  réels

- a) Exprimer  $X$  et  $Y$  en fonction de  $x$  et  $y$
- b) En déduire l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tel que  $f(z)$  soit réel et représenter cet ensemble.

2) Soit  $C$  l'image de  $A$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $-\frac{3\pi}{4}$ .

- a) Déterminer l'affixe  $Z_C$  du point  $C$
- b) déterminer une mesure en radians de l'angle  $(\vec{O\Omega}; \vec{OC})$  En déduire que les points  $\Omega; O; C$  sont alignés.

3) On pose  $z' = f(z)$

a) Vérifier que  $i$  n'a pas d'antécédent par  $f$  et exprimer pour  $z'$  différent de  $i$ ,  $z$  en fonction de  $z'$ .

b)  $M$  est le point d'affixe  $z$  ( $z$  différent de 2) et  $M'$  celui d'affixe  $z'$  ( $z'$  différent de  $i$ ).

Montrer que  $OM = 2 \frac{M'D}{M'E}$  où  $D$  et  $E$  sont les points d'affixes respectives  $-1$  et  $i$ .

c) Montrer que, lorsque le point  $M$  décrit le cercle de centre  $O$  et de rayon 2 privé du point  $A$ , son image  $M'$  appartient à une droite fixe que l'on définira graphiquement.

**EXERCICE II (4 points)**

Une urne contient  $n$  boules noires et  $3n$  boules blanches.

1) On tire simultanément deux boules de l'urne. On suppose qu'il y a équiprobabilité des tirages possibles. Calculer la probabilité  $P_n$  de tirer une boule de chaque couleur.

2) On tire une boule de l'urne, on l'y replace; puis on tire à nouveau une boule de l'urne; on suppose qu'il y a équiprobabilité de tirages possibles. Calculer la probabilité de tirer une boule de chaque couleur.

3) Quelle est la limite de  $P_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . A partir de quelle valeur de  $n$  la

différence  $P_n - \frac{3}{8}$  est-elle inférieure à  $\frac{1}{100}$  ?

**PROBLEME (12 points)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \begin{cases} x - x \ln(-x); & \text{si } x < 0 \\ 0; & \text{si } x = 0 \\ x e^{-\frac{1}{x}}; & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On note  $(Cf)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Unité graphique 2cm.

**PARTIE A**

- 1) Montrer que la fonction est continue sur  $\mathbb{R}$
- 2) Etudier les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
- 3) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
- 4) Etudier les variations de  $f$ ;
- 5) a) Etudier la limite de  $\frac{f(x)}{x}$  en  $-\infty$ . Que peut on en déduire pour la courbe  $(Cf)$  ?  
 b) Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x - 1$  est asymptote à la courbe  $(Cf)$  au voisinage de  $+\infty$ . (On pourra poser  $X = -\frac{1}{x}$ ).
- 6) Construire la courbe  $(Cf)$  et la droite  $(D)$ . On prendra les tangentes et demi-tangentes aux points d'abscisses :  $-e$ ;  $-1$ ;  $0$ .

**PARTIE B**

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $U_n = \int_{\frac{1}{n}}^e f(x) dx$ .

- 1) En étudiant le signe de  $f$  sur  $\left[-e; -\frac{1}{n}\right]$ , montrer que  $U_n \geq 0$ ; pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- 2) Sans calculer explicitement  $U_n$ , déterminer le signe de  $U_{n+1} - U_n$ . En déduire que la suite  $(U_n)$  est croissante.
- 3) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_{\frac{1}{n}}^e x \ln(-x) dx = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{n^2} + \frac{\ln(n)}{2n^2}. \text{ En déduire l'expression de } U_n \text{ en fonction de } n.$$

Donner une interprétation graphique de  $U_n$ .

- 4) Calculer la limite ( si elle existe ) de  $U_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .  
 En déduire l'aire, en  $\text{cm}^2$ , de la partie du plan délimitée par  $(Cf)$ , les axes des coordonnées et la droite d'équation  $x = -e$ .

**PARTIE C**

On considère le mouvement d'un mobile  $m$  dont les coordonnées en fonction du temps sont :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} \\ y(t) = \frac{e^{-t}}{t}; t > 0 \end{cases}$$

- 1) Déterminer l'équation de la trajectoire du mobile  $M$ ;
- 2) Construire ( en pointillées ) dans le même repère que  $(C)$  la trajectoire du mobile  $M$ . On

donne :  $e = 2,72$ ;  $e^2 = 7,39$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU  
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2001  
Session Normale  
Durée : 4 heures  
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES  
Cette épreuve comporte deux (2) pages  
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

**EXERCICE I (4 points)**

Une masse  $m$ , mobile sur un axe  $(O; \vec{i})$  a sa position représentée sur cet axe par le point  $M$ . Cette masse est soumise à une force d'attraction  $F$  telle que l'abscisse  $y(t)$  du point  $M$  exprimée comme fonction du temps, vérifie l'équation différentielle :

$$y'' + \frac{9\pi^2}{4}y = 0$$

1) Donner la solution générale de cette équation différentielle.

2) a) Montrer que la solution vérifiant les conditions initiales  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = -\frac{3\pi}{2}$ ,

s'exprime pour  $t \geq 0$  par :  $y(t) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right)$ .

b) Déterminer le nombre réel  $\alpha$  compris entre 0 et 1 et que pour  $t \geq 0$ ,

$$y(t) = \sqrt{2} \cos\left[\frac{3\pi}{2}(t + \alpha)\right]$$

3) En utilisant la question 2)b.

a) Donner la valeur positive de  $t$  pour laquelle le point  $M$  passe pour la première fois au point  $O$ .

b) Combien de fois le point  $M$  passe-t-il en  $O$  dans l'intervalle de temps  $[0; 4]$ .

**EXERCICE II (4 points)**

Dans une loterie, on distribue deux séries de billets : A et B.

La série A comporte 12 billets dont 4 gagnants.

La série B comporte 15 billets dont 5 gagnants.

Une personne achète 3 billets dont 2 de la série A et 1 de la série B. On suppose tous les choix équiprobables.

1) Quelle est la probabilité qu'un seul des 3 billets soit gagnant ?

2) Quelle est la probabilité que 2 au moins des 3 billets soient gagnants ?

3) Tout billet gagnant de la série A gagne 2500 F et tout billet gagnant de la série B gagne 5000 F. On désigne par  $X$  la variable aléatoire qui associe à l'achat de 3 billets (2 de A et 1 de B) le gain réalisé.

a) Quel est l'ensemble des valeurs prises par  $X$  ?

b) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

c) Calculer l'espérance Mathématique  $E(X)$  et la variance  $V(X)$  de  $X$ .  
Déduisez-en l'écart type.

**PROBLEME (12 points)**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \begin{cases} -x + \frac{3}{2} - \frac{x}{x^2+1} ; \text{ si } x \in ]-\infty; 1] \\ (x-1)e^{-x+1} \text{ si } x \in ]1; +\infty[ \end{cases}$

**PARTIE A**

1) a) Montrer que pour tout  $x$  de  $] - \infty ; 1 [$ ,  $f(x) = \frac{(x-1)(-2x^2+x-3)}{2(x^2+1)}$ .

b) Résolvez dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $f(x) = 0$ .

2) On admet que  $f$  est dérivable sur  $] - \infty ; 1 [$  et sur  $] 1 ; + \infty [$

a) Justifier la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Etudier la dérivabilité de  $f$  au point 1. Interpréter graphiquement ce résultat. Sur quel sous ensemble  $D$  de  $\mathbb{R}$   $f$  est-elle dérivable ?

c) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  de  $D$ .

d) Etudier les variations de  $f$ . Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ , puis dresser le tableau de variation de  $f$ .

3) a) Montrer que  $(Cf)$  admet une asymptote oblique  $(D)$  en  $-\infty$  dont vous préciserez une équation.

b) Etudier la position de  $(Cf)$  par rapport à  $(D)$  sur  $] - \infty ; 1 [$ .

4) a) Donner une équation de la tangente  $(T)$  à  $(Cf)$  au point  $A$  d'abscisse 0.

b) Etudier la position de  $(Cf)$  par rapport à  $(T)$  sur  $] - \infty ; 1 [$ .

c) Déterminer le point  $B$  de  $(Cf)$  d'abscisse  $a$ ,  $a < 1$ , en lequel la tangente  $(\Delta)$  est parallèle à la droite  $(D)$ .

5) Dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , placer les points  $A$  et  $B$ . Tracez les tangentes à  $(Cf)$  au point d'abscisse 1, puis tracez  $(D)$ ;  $(T)$ ;  $(\Delta)$  et  $(Cf)$ .

**PARTIE B**

Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $] - \infty ; 1 [$ .

1) a) Montrer que  $g$  est une bijection de  $] - \infty ; 1 [$  sur un intervalle que vous préciserez.

b) Sans expliciter la bijection réciproque  $g^{-1}$  de  $g$ , dresser son tableau de variations.

2) Construisez dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  la courbe  $(C_{g^{-1}})$  de  $g^{-1}$ , en expliquant la construction.

3) Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire de la partie du plan délimitée par  $(Cf)$ , la droite d'équation

$$x = \frac{3}{2} \text{ et les axes du repère.}$$

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU  
Office du Baccalauréat

Série D

Année 2000  
Session Normale  
Durée : 4 heures  
Coefficient : 05

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES  
Cette épreuve comporte deux (2) pages  
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

**EXERCICE I (4 points)**

Le tableau suivant donne pour chaque année, le nombre de naissances enregistrées dans une Mairie :

Années	1988	1990	1992	1994	1996	1998
Rang de l'année $x_i$	1	2	3	4	5	6
Nombre de naissances $y_i$	374	A	334	312	B	266

Lors d'un déménagement de cette mairie, les registres des années 1990 et 1996 ont été égarés, de sorte que le nombre de naissance de ces années restent introuvables. Mais un stagiaire qui était affecté avant la perte des documents avait permis d'obtenir par la méthode de MAYER par regroupement des trois premiers points et des derniers point du nuage, la droite d'ajustement de  $y$  en fonction de  $x$  d'équation :  $y = -22x + 397$ .

- 1) A combien peut on estimer le nombre de naissances lors de l'année 1995 ?
- 2) On suppose que l'évolution des naissances reste semblable au cours des années à venir.
  - a) Quel sera le nombre de naissances au cours de l'année 2000 ?
  - b) A partir de quelle année  $y$  aura-t-il deux fois moins de naissances qu'en 1988 ?
- 3) Déterminer A et B.

**EXERCICE II (4 points)**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  on donne les points A et B d'affixes

$$Z_A = 2 + 2i \text{ et } Z_B = (1 + \sqrt{3}) + i(3 + \sqrt{3}).$$

- 1) Ecrire le nombre complexe  $Z = \frac{Z_A}{Z_B}$  sous forme algébrique.
- 2) a) Déterminer OA et AB. Vérifier que  $OB = 2(1 + \sqrt{3})$ .  
b) Déterminer en radian, la mesure principale de  $(\vec{u}; \vec{OA})$  et de  $(\vec{u}; \vec{OB})$ . En déduire une mesure en radians de l'angle  $(\vec{OA}; \vec{OB})$ .
- 3) En utilisant les questions précédentes, donner les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et de  $\sin \frac{\pi}{12}$ .
- 4) a) Déterminer l'affixe du point D image de A dans la rotation de centre O et d'angle  $\alpha = 2(\vec{OA}; \vec{OB})$

b) Quelle est la nature du quadrilatère OABD ? Justifier votre réponse. ( pour la figure on prendra  $\sqrt{3} = 1,7$  ).

**PROBLEME (12 points)**

**PARTIE A**

Soit la fonction numérique g définie sur  $]1; +\infty[$  par :  $g(x) = \frac{x}{2x-1} - \ln(x-1)$  où, ln désigne la fonction logarithme népérien.

- 1) Etudier le sens de variation de g.
- 2) a) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  a une unique solution  $\alpha$  dans  $]1; +\infty[$ .
- b) Montrer que  $2 < \alpha < 3$ .
- 3) En déduire le signe de g sur  $]1; +\infty[$ .

**PARTIE B**

On considère la fonction f sur  $]1; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2\ln(x-1)}{x^2-x}$ . Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère (O ;  $\vec{i}$  ;  $\vec{j}$ ). Unité graphique : 2cm sur (x'Ox) ; et 4cm sur (y'Oy).

- 1) Calculer les limites de f en 1 et en  $+\infty$ . Interpréter les résultats.
- 2) a) Montrer que pour tout x de  $]1; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{2(2x-1)}{(x^2-x)^2} \times g(x)$ .

En déduire les variations de f.

- b) Montrer que  $f(\alpha) = \frac{2}{(\alpha-1)(2\alpha-1)}$  et dresser le tableau de variation de f.
- 3) Construire la courbe (C).

**PARTIE C**

On se propose de donner un encadrement de l'aire A exprimer en  $cm^2$  de l'ensemble des points M(x ; y) tels que :

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq \frac{5}{2} \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que pour tout  $x > 2$  on a :  $\frac{1}{(x-1)^2} \leq \frac{2}{x^2-x} \leq \frac{1}{x-1}$
- b) En déduire que pour tout  $x \geq 2$ ,  $\frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln(x-1)}{(x-1)}$ .

2) a) Calculer  $I = \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{\ln(x-1)}{(x-1)} dx$ .

b) En utilisant une intégration par parties, calculer  $J = \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2} dx$ .

3) a) Déduire de ce qui précède un encadrement de  $K = \int_2^{\frac{5}{2}} f(x) dx$ .

b) Exprimer A en fonction de K, puis en déduire un encadrement de A.

On donne  $\ln(2) = 0,69$  et  $\ln(3) = 1,09$ ,  $\alpha = 2,85$  et  $f(\alpha) = 0,25$

## Problème (11 points)

La partie B peut être traitée indépendamment de la partie A.

Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ; unité graphique : 2 cm.

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_n(x) = \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)}$ .

On désigne par  $C_n$  la courbe représentative de  $f_n$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

134

### Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse seulement aux fonctions  $f_0$  et  $f_1$  correspondant respectivement à  $n=0$  et  $n=1$ .

On considère d'abord la fonction  $f_0$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_0(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ .

1. a. Déterminer la limite de  $f_0(x)$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$ .
- b. Déterminer la limite de  $f_0(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
- c. En déduire les asymptotes de  $C_0$ .
2. Montrer que le point  $K(0; \frac{1}{2})$  est un centre de symétrie de  $C_0$ .
3. Étudier les variations de  $f_0$ .
4. a. Déterminer une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $C_0$  au point  $K$ .
- b. Justifier que, pour étudier la position de la tangente  $T$  par rapport à la courbe  $C_0$ , il suffit d'étudier sur  $\mathbb{R}$  le signe de  $g(x)$ , où  $g(x) = 2e^x - xe^x - 2 - x$ .
- c. Calculer  $g'(x)$  et  $g''(x)$ .
- d. Déterminer, en les justifiant, les signes de  $g'(x)$ ,  $g''(x)$  et  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
- e. En déduire la position de la tangente  $T$  par rapport à la courbe  $C_0$ .
5. Tracer  $C_0$  et  $T$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .
6. a. Montrer que pour tout réel  $x$ , les points  $M(x; f_0(x))$  et  $M'(x; f_1(x))$  sont symétriques par rapport à la droite  $d$  d'équation  $y = \frac{1}{2}$ .
- b. Comment obtient-on  $C_1$  à partir de  $C_0$ ? Tracer  $C_1$  sur la figure précédente.

### Partie B

Étude de la suite  $u$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$

1. Montrer que  $u_0 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$ .
2. Montrer que  $u_0 + u_1 = 1$ . En déduire  $u_1$ .
3. Montrer que la suite  $u$  est positive.
4. On pose  $k(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$ .
- a. Montrer que, pour tout  $x$  réel,  $k(x) = \frac{1-e^x}{e^{nx}(1+e^x)}$ .
- b. Étudier le signe de  $k(x)$  pour  $x \in [0, 1]$ .
- c. En déduire que la suite  $u$  est décroissante.
5. a. Montrer que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on a :  $u_{n-1} + u_n = \frac{1-e^{-(n-1)}}{n-1}$ .
- b. Calculer  $u_2$ .
6. Soit  $v$  la suite définie pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2 par  $v_n = \frac{u_{n-1} + u_n}{2}$ .
- a. Calculer la limite de  $v_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- b. Montrer que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on a :  $0 \leq u_n \leq v_n$ .
- c. En déduire la limite de  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

52 \*\*\* EXERCICE

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Toutes les courbes demandées seront représentées sur un même graphique (unité graphique : 2 cm).

**Partie A : Étude d'une fonction f**

On définit la fonction f sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \ln(\sqrt{1+x} - 1)$ .

- 1. Calculer les limites de f en 0 et en  $+\infty$ .
- 2. Étudier le sens de variation de f sur  $]0, +\infty[$ .
- 3. Soit C la courbe représentative de f dans  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  et A le point de C d'abscisse 3. Calculer l'ordonnée de A. Soit B le point de C d'abscisse  $\frac{5}{4}$ , P le projeté orthogonal de B sur l'axe  $(O, \vec{u})$  et H le projeté orthogonal de B sur l'axe  $(O, \vec{v})$ . Déterminer les valeurs exactes des coordonnées des points B, P et H. Placer les points A, B, P et H dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  et représenter la courbe C.

**Partie B : Utilisation d'une rotation**

Soit r la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . À tout point M du plan d'affixe z, la rotation r associe le point M' d'affixe z'.

- 1. a. Donner z' en fonction de z.  
On note  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$  ( $x, y, x', y'$  réels), exprimer x' et y' en fonction de x et y, puis exprimer x et y en fonction de x' et y'.
- b. Déterminer les coordonnées des points A', B' et P' images respectives des points A, B et P par la rotation r.
- 2. On appelle g la fonction définie sur R par  $g(x) = e^{-2x} + 2e^{-x}$  et  $\Gamma$  sa courbe représentative dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .
  - a. Montrer que lorsqu'un point M appartient à C, son image M' par r appartient à  $\Gamma$ . On admet que lorsque le point M décrit C, le point M' décrit  $\Gamma$ .
  - b. Tracer sur le graphique précédent les points A', B', P' et la courbe  $\Gamma$  (l'étude des variations de g n'est pas demandée).

**Partie C : Calcul d'intégrales**

On rappelle que l'image d'un domaine plan par une rotation est un domaine plan de même aire.

- 1. Calculer l'intégrale  $\int_0^{\ln 2} g(x) dx$ . Interpréter graphiquement cette intégrale.
- 2. a. Déterminer, en unités d'aire, l'aire A du domaine plan D limité par les segments [AO], [OH] et [HB] et l'arc de courbe C d'extrémités B et A.
- b. On pose  $I = \int_{5/4}^3 \ln(\sqrt{1+x} - 1) dx$ . Trouver une relation entre A et I puis en déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

**EXERCICE****Partie A : Une équation différentielle**

On considère l'équation différentielle : (E)  $y' - 3y = \frac{-3e}{(1+e^{-3x})^2}$ .

On donne une fonction  $\varphi$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-3x}\varphi(x)$ .

1. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ , exprimer  $\varphi'(x) - 3\varphi(x)$  en fonction de  $f'(x)$ .
2. Déterminer  $f$  de sorte que  $\varphi$  soit solution de (E) sur  $\mathbb{R}$  et vérifie  $\varphi(0) = \frac{e}{2}$ .

**Partie B : Étude d'une fonction**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{e^{1-3x}}{1+e^{-3x}}$ .

On désigne par  $C$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ , puis étudier les variations de  $f$ .
2. Tracer  $C$ .
3. Pour  $\alpha$  réel non nul, on pose  $I_\alpha = \int_0^\alpha f(x) dx$ .
  - a. Donner le signe et une interprétation graphique de  $I_\alpha$  en fonction de  $\alpha$ .
  - b. Exprimer  $I_\alpha$  en fonction de  $\alpha$ .
  - c. Déterminer la limite de  $I_\alpha$  lorsque  $\alpha$  tend vers  $+\infty$ .

**Partie C : Étude d'une suite**

On définit sur  $\mathbb{N}^*$  la suite  $(u_n)$  par  $u_n = \int_0^1 f(x)e^n dx$ , où  $f$  est la fonction définie dans la partie B.  
On ne cherchera pas à calculer  $u_n$ .

1. a. Donner, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , le signe de  $u_n$ .
- b. Donner le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
- c. La suite  $(u_n)$  est-elle convergente ?
2. a. Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  :  $I_1 \leq u_n \leq e^{\frac{1}{n}} I_1$  où  $I_1$  est l'intégrale de la partie B obtenue pour  $\alpha$  égal à 1.
- b. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ . Donner sa valeur exacte.

**Problème (11 points)**

Pour chaque entier naturel  $n$ , on définit, sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  la fonction notée  $f_n$  par :

$$f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x, \text{ où } \ln \text{ désigne la fonction logarithme népérien.}$$

**Partie A : Étude du cas particulier  $n = 0$**

$f_0$  est donc la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $f_0(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ .  
1. Construire dans un repère orthonormal, la courbe représentative de la fonction exponentielle puis tracer sa tangente au point d'abscisse 0.

2. Résolution graphique d'une inéquation :

- a. Justifier graphiquement l'inégalité suivante : pour tout réel  $u$ ,  $e^u \geq u + 1$ .
- b. En déduire que pour tout réel  $x$ ,  $e^{-x} + x - 1 \geq 0$ , puis que  $1 + (x - 1)e^x \geq 0$ .

3. Limites :

- a. Déterminer la limite de  $f_0$  en  $+\infty$ .
- b. Déterminer la limite de  $f_0$  en 0.

4. Sens de variation :

- a. Montrer que, pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty[$ , on a  $f'_0(x) = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$ .
- b. En déduire le sens de variation de  $f_0$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

5. On appelle  $C_0$  la courbe représentative de  $f_0$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  pour lequel 'unité graphique est 2 cm.

Tracer  $C_0$  dans ce repère et placer le point A de coordonnées (0 ; 1).

**Partie B : Étude de la famille de fonctions  $f_n$  pour  $n \geq 1$**

On appelle  $C_n$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  précédent.

1. Déterminer le sens de variation de  $f_n$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
2. Déterminer les limites de  $f_n$  en  $+\infty$  et en 0.  
En déduire que  $C_n$  possède une asymptote qu'on précisera.
3. Étudier les positions respectives des courbes  $C_{n+1}$  et  $C_n$ .
4. Montrer que toutes les courbes  $C_n$  passent par un même point B dont on précisera les coordonnées.
5. a. Montrer qu'il existe un unique réel  $\alpha_1$  appartenant à l'intervalle  $[0,2; 0,9]$  tel que  $f_1(\alpha_1) = 0$ .  
b. Montrer que  $f_n(\alpha_1) < 0$  pour tout entier naturel  $n > 1$ .  
c. Pour tout entier naturel  $n > 1$ , montrer qu'il existe un unique réel  $\alpha_n$  appartenant à l'intervalle  $[\alpha_1; 1]$  tel que  $f_n(\alpha_n) = 0$ .
6. a. En utilisant la partie A, montrer que pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; 1]$ ,  $\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$ .  
b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $\ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}$ , puis que,  $\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$ .
- c. Déterminer la limite de la suite  $(\alpha_n)$ .
7. Construire, sur le graphique précédent, les courbes  $C_1$  et  $C_2$ .

**Partie C : Étude d'une suite d'intégrales**

Pour tout entier naturel  $n$ , on appelle  $I_n$  l'intégrale  $I_n = \int_1^3 f_n(x) dx$ .

1. Donner une interprétation graphique de cette intégrale.
2. Étudier le sens de variation de la suite  $(I_n)$ .
3. Démontrer que l'aire comprise entre les courbes  $C_{n+1}$  et  $C_n$  et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = \frac{3}{2}$  est constante.

## Partie A

138

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{x-1}{x+1} - e^{-x}$  et l'on désigne par  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O; i; j)$  d'unité 3 cm.

1. Calculer la limite de  $f$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . Que peut-on en déduire pour la courbe  $(\mathcal{C})$  ?
2. Calculer  $f'(x)$ , en déduire les variations de  $f$  pour  $x$  appartenant à  $[0; +\infty[$ .
3. Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(\mathcal{C})$  en son point d'abscisse 0.
4. Montrer que l'équation :  $f(x) = 0$  admet une solution unique,  $u$ . Montrer que  $u$  appartient à  $[1; 2]$  et déterminer un encadrement d'amplitude  $10^{-1}$  de  $u$ .
5. Tracer  $(T)$  et  $(\mathcal{C})$  sur la même figure.
6. a. Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout  $x \neq -1$ ,  $\frac{x-1}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$ .  
b. En déduire l'aire en  $\text{cm}^2$  du domaine plan limité par  $(T)$ ,  $(\mathcal{C})$  et la droite d'équation  $x = 1$  (on admettra que  $T$  est au-dessus de  $(\mathcal{C})$ ).

## Partie B

$n$  désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - e^{-x}$ .

1. Calculer  $f'_n(x)$  et donner son signe sur  $[0; +\infty[$ . Préciser  $f_n(0)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ .  
Dresser le tableau de variation de  $f_n$ .
2. a. Calculer  $f_n(n)$  ; quel est son signe ?  
b. Démontrer, par récurrence que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $e^{n+1} > 2n + 1$ .  
En déduire le signe de  $f_n(n+1)$ .
3. Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une solution unique sur  $[n; n+1]$  ; cette solution sera notée  $u_n$ .
3. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$  puis  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n}$ .
4. a. En remarquant que, pour tout  $x$  de  $[0; +\infty[$  :  $\frac{x-n}{x+n} = 1 - \frac{2n}{x+n}$ , montrer que la valeur moyenne,  $M_n$ , de  $f_n$  sur  $[0; u_n]$  est égale à :  
$$1 - \frac{1}{u_n} + \frac{e^{-u_n}}{u_n} - 2 \left( \frac{n}{u_n} \right) \ln \left( \frac{u_n}{n} + 1 \right).$$
  
b. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$ .

**Partie A : Étude d'une fonction  $f$  et construction de sa courbe**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$ . On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . L'unité graphique est 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

1. a. On rappelle que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ . Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .  
 b. Vérifier que pour tout réel  $x$  :  $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x})$ . Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
 c. En déduire que la courbe  $\mathcal{C}$  admet deux asymptotes que l'on précisera.
2. On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $] -1 ; +\infty[$  par  $g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$ .  
 a. Démontrer que la fonction  $g$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .  
 b. En déduire le signe de  $g(t)$  lorsque  $t > 0$ .
3. a. Calculer  $f'(x)$  et l'exprimer en fonction de  $g(e^x)$ ,  $f'$  désignant la fonction dérivée de  $f$ .  
 b. En déduire le sens de variation de la fonction  $f$  puis dresser son tableau de variation.
4. Tracer les asymptotes à la courbe  $\mathcal{C}$  et la courbe  $\mathcal{C}$ .

**Partie B : Comportements asymptotiques d'une primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$**

Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

1. Étudier le sens de variation de la fonction  $F$ .
2. a. Vérifier que, pour tout nombre réel  $t$ ,  $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$  et calculer  $\int_0^x \frac{dt}{1+e^t}$ .  
 b. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de  $F(x)$ .  
 c. Vérifier que  $F(x)$  peut s'écrire sous les formes suivantes :  
 (1)  $F(x) = x - \ln(1 + e^x) - f(x) + 2 \ln 2$ .  
 (2)  $F(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - f(x) + 2 \ln 2$ .
3. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ .
4. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (F(x) - x)$ . Donner une interprétation graphique de ce résultat.

**Partie C : Étude d'une suite**

Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \sum_{k=1}^n e^{-k} \ln(1 + e^k)$ .

1. Hachurer sur la représentation graphique un domaine dont l'aire, en unités d'aire, est  $u_n$ .
2. Déterminer le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
3. a. Justifier que, pour tout entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n$ , on a  $f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$ .  
 b. Comparer  $u_n$  et  $F(n)$ .
4. La suite  $(u_n)$  est-elle convergente ?

48 PROBLÈME

12 points 2 h

Antilles-Guyane, septembre 2000

L'objet de ce problème est d'étudier, à l'aide d'une fonction auxiliaire, une fonction et de résoudre une équation différentielle dont elle est solution.

A. Étude d'une fonction auxiliaire

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)$ .

- 1. Calculer  $g'(x)$  et montrer que ce nombre est strictement négatif pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .
- 2. Déterminer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
- 3. Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- 4. Donner le signe de  $g(x)$ .

B. Étude d'une fonction et calcul d'une aire

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-2x} \ln(1+2e^x)$ .

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Calculer  $f'(x)$  et montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 2e^{-2x} g(x)$ .

- 2. a. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
- b. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

On pourra remarquer que si on pose  $X = 1 + 2e^x$ ,  $f(x)$  s'écrit  $4 \frac{X}{(X-1)^2} \frac{\ln X}{X}$ .

- 3. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 4. Tracer  $\mathcal{C}$ .

5. Soit  $\alpha$  un réel strictement positif.

a. Vérifier que, pour tout réel  $x$ ,  $\frac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$ . En déduire la valeur de l'intégrale  $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+2e^x} dx$ .

b. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale  $J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx$ . Donner une interprétation graphique de  $J(\alpha)$ .

C. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :  $y' + 2y = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$ .

- 1. Vérifier que la fonction  $f$  étudiée dans la partie B est solution de (E).
- 2. Montrer qu'une fonction  $\varphi$  est solution de (E) si et seulement si  $\varphi - f$  est solution de l'équation différentielle (E') :  $y' + 2y = 0$ .
- 3. Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).

**Problème (11 points)**

Le plan est muni d'un repère orthonormal  $\mathcal{O} = (O; \vec{i}; \vec{j})$ . L'unité graphique est 1 cm.

**Partie A**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$ .

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans le repère  $\mathcal{O}$ .

1. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
2. a. Étudier le sens de variation de  $f$  et donner le tableau de variation de  $f$ .  
b. Tracer  $\mathcal{C}$ .
3. Soit  $I = \int_{-3}^0 f(x) dx$ .  
a. Interprétez graphiquement  $I$ .  
b. En utilisant l'intégration par parties, calculer  $\int_{-3}^0 xe^x dx$  puis  $\int_{-3}^0 x^2 e^x dx$ .  
c. En déduire la valeur exacte de  $I$ .

**Partie B**

1. Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels et  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^{x^2 + ax + b}$ . Quelles sont les valeurs de  $a$  et  $b$  pour lesquelles le tableau de variation de  $g$  est celui donné ci-dessous.

$x$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$	$+\infty$	$e$	$+\infty$

2. Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = e^{(x^2 - 3x - 1)}$  et  $\Gamma$  sa courbe représentative dans le repère  $\mathcal{O}$ .

- a. Démontrer que la droite  $D$  d'équation  $x = \frac{3}{2}$  est axe de symétrie de  $(\Gamma)$ .
- b. Justifier l'affirmation suivante : « 3,2 est une valeur approchée à  $10^{-1}$  près d'une solution de l'équation  $h(x) = 5$  ».
- c. Soit  $\alpha$  un nombre dont 1,7 est une valeur approchée à 0,5 près. Établir que  $0,28 \leq h(\alpha) \leq 0,47$ .

**Partie C**

Soit  $u$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  dont le tableau de variation est donné ci-dessous ( $a, b, c$  étant trois nombres réels).

$x$	$-\infty$	0	$a$	$b$	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$		$c$	0	$+\infty$

Soit  $v_1, v_2, v_3$  les fonctions définies par :  $v_1(x) = e^{u(x)}$ ;  $v_2(x) = u(e^x)$ ;  $v_3(x) = u(x) e^x$ .

1. Déterminer le sens de variation des fonctions  $v_1$  et  $v_2$  (en justifiant votre réponse).
2. Indiquer un intervalle sur lequel il est possible de donner le sens de variation de la fonction  $v_3$  (en justifiant votre réponse).

# PROBLEME n°1

142

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = -\frac{1}{32}x + \frac{(x-2)\ln x}{x^2}$$

On désigne par  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, I, J)$  Unité graphique : 4 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.

## Partie A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = x^2 + 4x - 16 + 32\ln x.$$

1. Calculer les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. Démontrer que pour tout nombre réel  $x$  strictement positif,  $g'(x) = \frac{2x^2 + 4x + 32}{x}$ .
3. a) Déterminer le sens de variation de  $g$ .  
b) Dresser le tableau de variation de  $g$ .
4. Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]0; +\infty[$ .  
Vérifier que :  $1,32 < \alpha < 1,33$ .
5. Démontrer que : 
$$\begin{cases} \forall x \in ]0; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in ]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$$

Partie B

143

1. Calculer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. Démontrer que la droite (D) d'équation  $y = -\frac{1}{32}x$  est asymptote à  $(C_f)$  en  $+\infty$ .
3. Déterminer les positions relatives de  $(C_f)$  et (D) sur  $]0; +\infty[$ .
4. Démontrer que pour tout nombre réel  $x$  strictement positif,  $f(x) = \frac{(4-x)g(x)}{32x^3}$ .
5. Déterminer le signe de  $f'(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
6. Déterminer le sens de variation de  $f$  puis dresser le tableau de variation de  $f$ .
7. Tracer  $(C_f)$ .

Partie C

On désigne par A l'aire en  $cm^2$  de la partie délimitée par la droite (D), la courbe  $(C_f)$ , et les droites d'équations  $x=1$  et  $x=2$ .

1. Calculer  $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$ .
2. En utilisant une intégration par parties, démontrer que :  $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{1-\ln 2}{2}$ .
3. Vérifier que :  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $\frac{(x-2)\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x} - 2\frac{\ln x}{x^2}$ .
4. Calculer A.

# PROBLEME n°2

144

Soit  $f$  la fonction dérivable et définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{2x} - 4e^x + 4.$$

On désigne par  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal direct  $(O, I, J)$ . Unité graphique : 1 cm.

## Partie A

- Calculer la limite de  $f$  en  $-\infty$ . Interpréter graphiquement ce résultat.
  - Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . En donner une interprétation graphique.
- Démontrer que pour tout nombre réel  $x$ ,  $f(x) = 2(e^x - 2)e^x$ .
  - Déterminer le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
  - En déduire le sens de variation de  $f$ .
  - Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C_f)$  au point  $A(0; 1)$ .
- On désigne par  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :
$$h(x) = e^{2x} - 4e^x + 2x + 3.$$
  - Justifier que pour tout nombre réel  $x$ ,  $h(x) = 2(e^x - 1)^2$ .
  - Démontrer que  $h$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
  - Calculer  $h(0)$ . Démontrer que :  $\forall x \in ]-\infty; 0[$ ,  $h(x) < 0$  et  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $h(x) > 0$ .
- Déterminer les positions relatives de la courbe  $(C_f)$  et de la tangente  $(T)$ .
- Tracer  $(C_f)$  et  $(T)$ .

## Partie B

Dans cette partie,  $\lambda$  désigne un nombre réel inférieur ou égal à  $2 \ln 2$ .

- Déterminer le point d'intersection  $B$  de la courbe  $(C_f)$  et de la droite  $(D)$  d'équation  $y = 4$ .
- On désigne par  $A(\lambda)$  l'aire de la partie  $(E_\lambda)$  délimitée par  $(C_f)$ ,  $(D)$  et les droites d'équations  $x = \lambda$  et  $x = 2 \ln 2$ .
  - Démontrer que  $A(\lambda) = \frac{1}{2}e^{2\lambda} - 4e^\lambda + 8$ .
  - Définir  $(E_0)$  puis hachurer  $(E_0)$ .
    - Déduire de la question 2 Partie B) la valeur de  $A(0)$ .
- Calculer  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$ .

# PROBLEME n°3

145

On considère la fonction numérique  $f$  à variable réelle définie par :  $f(x) = \frac{x}{e^{\frac{x}{2}} - 1}$ .

On note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé direct  $(O, 1, 1)$ .

Unité graphique : 1 cm.

## Partie A

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Démontrer que la fonction  $f$  est impaire. En déduire une interprétation graphique.
3. Calculer la limite de  $f$  à droite en 0. En déduire une interprétation graphique.
4. a) Vérifier que pour tout nombre réel strictement positif  $x$ ,  $f(x) = \frac{1}{\frac{x}{e^{\frac{x}{2}} - 1}}$ .
- b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . En déduire une interprétation graphique.
5. Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif  $x$ ,  $f(x) = -\frac{\frac{x}{e^{\frac{x}{2}} + 1}}{2(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2}$ .
6. a) Déterminer le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
- b) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
7. En utilisant la question 2) de la Partie A, tracer  $(C_f)$  sur son ensemble de définition.

## Partie B

1. On désigne par  $h$  la restriction de  $f$  à  $]0; +\infty[$ .  
Démontrer que la fonction  $h$  réalise une bijection de  $]0; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  à déterminer.
2. Calculer  $h(\ln 2)$  et  $h'(\ln 2)$ . En déduire que  $h$  est dérivable en  $\sqrt{2}$  puis calculer  $(h^{-1})'(\sqrt{2})$ .
3. Tracer la courbe représentative  $(C')$  de  $h^{-1}$  dans le même repère que  $(C_f)$ .

## Partie C

Dans cette partie,  $\alpha$  désigne un nombre réel supérieur ou égal à  $\ln 2$ .

1. Vérifier que pour tout nombre réel non nul  $x$ ,  $2 \frac{\frac{x}{e^{\frac{x}{2}} - 1}}{e^{\frac{x}{2}} - 1} = \frac{\frac{x}{e^{\frac{x}{2}} - 1}}{\frac{x}{e^{\frac{x}{2}} - 1}} - \frac{\frac{x}{e^{\frac{x}{2}} + 1}}{\frac{x}{e^{\frac{x}{2}} + 1}}$ .
2. On désigne par  $A(\alpha)$  l'aire de la partie  $(E)$  délimitée par  $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = \ln 2$  et  $x = \alpha$ .
  - a) Démontrer que :  $A(\alpha) = \ln(1 - e^{-\frac{\alpha}{2}}) - \ln(1 + e^{-\frac{\alpha}{2}}) + \ln(3 + 2\sqrt{2})$ .
  - b) Calculer  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$ .

## PROBLEME n°4

146

Soit  $f$  la fonction dérivable sur  $]1; +\infty[$  et définie par :

$$f(x) = 2 + \frac{\ln(x-1)}{x^2}.$$

On désigne par  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, I, J)$ . L'unité graphique est 2cm.

### Partie A

Soit  $g$  la fonction dérivable sur  $]1; +\infty[$  et définie par :

$$g(x) = \frac{x}{x-1} - 2\ln(x-1).$$

- Calculer la limite de  $g$  à droite en 1.
  - Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .
- Démontrer que pour tout nombre réel  $x$ ,  $g'(x) = \frac{1-2x}{(x-1)^2}$ .
  - Déterminer le sens de variation de  $g$ .
  - Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$ .  
Vérifier que :  $3,093 < \alpha < 3,094$ .
  - Démontrer que : 
$$\begin{cases} \forall x \in ]1; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in ]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$$

Partie B

1. Démontrer que la droite (D) d'équation  $y = 2$  est asymptote à  $(C_f)$ .
2. Déterminer les coordonnées du point B d'intersection de  $(C_f)$  et de (D).
3. Démontrer que pour tout nombre réel  $x$  strictement supérieur à 1,  $f'(x) = g(x)$ .
4. a) Déterminer le signe de  $f'(x)$  suivant les valeurs de  $x$  et en déduire le sens de variation de  $f$ .  
b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
5.  $\alpha$  étant le nombre réel défini à la question 5 de la partie A.  
a) Démontrer que :  $f(\alpha) = 2 + \frac{1}{2\alpha(\alpha-1)}$ .  
b) En déduire une valeur approchée de  $f(\alpha)$  à  $2 \times 10^{-3}$  près par défaut.
6. Tracer la courbe  $(C_f)$ .

Partie C

Soit  $\beta$  un nombre réel appartenant à l'intervalle ] 1 ; 2 [.

On désigne par  $A(\beta)$  l'aire de la partie (E) délimitée par  $(C_f)$ , la droite (D) et les droites d'équations  $x = \beta$  et  $x = 2$ .

1. Vérifier que pour tout nombre réel  $x$  différent de 0 et 1,  $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}$ .
2. Exprimer  $\int_{\beta}^2 \frac{1}{x(x-1)} dx$  en fonction de  $\beta$ .
3. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$A(\beta) = \frac{(\beta-1) \ln(\beta-1)}{\beta} - \ln \beta + \ln 2.$$

4. En déduire  $\lim_{\beta \rightarrow 1} A(\beta)$ .

# PROBLEME n°5

148

On considère la fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = x - (x+1)e^{-2x}$$

On désigne par  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère  $(O, I, J)$ .

Unité graphique : 2 centimètres.

## Partie A

Soit  $g$  la fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  et définie par :  $g(x) = 1 + (2x+1)e^{-2x}$ .

- Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ .
  - Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .
- Démontrer que pour tout nombre réel  $x$ ,  $g'(x) = -4xe^{-2x}$ .
  - Déterminer le sens de variation de  $g$ .
  - Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $[-1; 0]$ .
  - Vérifier que :  $-0,64 < \alpha < -0,63$ .
- Démontrer que l'image de l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $g$  est l'intervalle  $]1; 2]$ .
  - Démontrer que : 
$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in ]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$$

## Partie B

- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ .
  - En déduire une interprétation graphique.
- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

- 3. a) Démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  est asymptote à  $(C_f)$  en  $+\infty$ .
- b) Déterminer les positions relatives de la courbe  $(C_f)$  et de la droite  $(\Delta)$ .
- 4. a) Démontrer que pour tout nombre réel  $x$ ,  $f'(x) = g(x)$ .
- b) Déterminer le sens de variation de la fonction  $f$ .
- c) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .
- 5. Démontrer que :  $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{2} + \frac{1}{4\alpha + 2}$ .
- 6. Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C_f)$  au point d'abscisse 0.

**Partie C**

Soit la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$h(x) = f(x) - 2x + 1.$

- 1. a) En utilisant la question 4b) de la Partie A, démontrer que pour tout nombre réel non nul  $x$ ,  $h'(x) < 0$ .
- b) En déduire le sens de variation de  $h$ .
- 2. a) Calculer  $h(0)$  puis démontrer que :  $\forall x \in ]-\infty; 0[, h(x) > 0$  et  $\forall x \in ]0; +\infty[, h(x) < 0$ .
- b) Déduire de la question 2a) les positions relatives de la tangente  $(T)$  et de la courbe  $(C_f)$ .
- 3. Tracer  $(C_f)$  et  $(T)$ .

On prendra :  $\alpha = -0,6$ ,  $f(\alpha) = -2$  et  $f(-1,1) = f(0,51) = 0$ .

**Partie D**

Soit  $t$  un nombre réel strictement positif.

On désigne par  $A(t)$  l'aire de la partie  $(E)$  délimitée par  $(C_f)$ , la droite  $(\Delta)$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = t$ .

- 1. Justifier que :  $A(t) = \int_0^t (x+1)e^{-2x} dx.$
- 2. En utilisant une intégration par parties, démontrer que :  $A(t) = -\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{3}{4}e^{-2t} + \frac{3}{4}.$
- 3. Calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t).$

# PROBLEME n°6

150

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = (x+1)^2 - x \ln(x+1).$$

On note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, I, J)$

## Partie A

Soit  $g$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $g(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x+1} - \ln(x+1)$ .

1. Démontrer que pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $] -1; +\infty[$ ,  $g'(x) = \frac{x(2x+3)}{(x+1)^2}$ .
2. a) Déterminer le sens de variation de  $g$ .  
b) Dresser le tableau de variation de  $g$ .  
(On ne calculera pas les limites aux bornes de l'ensemble de définition de  $g$ .)  
c) Justifier que pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $] -1; +\infty[$ ,  $g(x) > 0$ .

## Partie B

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ . En déduire une interprétation graphique.
2. a) Justifier que pour tout nombre appartenant à  $] -1; +\infty[ \setminus \{0\}$ ,  $f(x) = x(x+1) \left( \frac{x+1}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right)$   
puis calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .  
b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .
3. Donner une interprétation graphique de la question 2).
4. a) Démontrer que pour tout nombre réel  $x$ , strictement supérieur à 1,  $f'(x) = g(x)$ .  
b) Déterminer le sens de variation de  $f$ .  
c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

Déterminer une équation de la tangente (T) à (C<sub>f</sub>) au point A  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à ]-1; +∞[, f(x) - (2x+1) = x(x - ln(x+1))

Partie C

1. Soit h la fonction définie sur ]-1; +∞[ par : h(x) = x - ln(x+1).

2. Calculer h'(x) pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle ]-1; +∞[.

3. Déterminer le sens de variation de h.

4. Calculer h(0) puis démontrer que pour tout nombre réel non nul x appartenant à ]-1; +∞[, h(x) > 0.

5. En déduire les positions relatives de (T) et la courbe (C<sub>f</sub>).

6. Tracer (T) et (C<sub>f</sub>). (On prendra 2 centimètres pour unité graphique).

Partie D

1. Démontrer que f réalise une bijection de ]-1; +∞[ sur ℝ.

2. En déduire que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α comprise entre -1/2

3. Déterminer un encadrement de α à 10<sup>-2</sup> près.

4. On pose :  $A(\alpha) = \int_{\alpha}^0 f(x)dx$ .

a) Donner une interprétation graphique de A(α).

b) Vérifier que pour tout nombre réel x différent de -1,  $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ .

c) En utilisant une intégration par parties, démontrer que :

$$\int_{\alpha}^0 x \ln(x+1) dx = \frac{1}{4}(\alpha^2 - 2\alpha) + \frac{1}{2}(1 - \alpha^2) \ln(\alpha + 1).$$

5. Retrouver le résultat suivant :  $A(\alpha) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(\alpha + 1)^3 + \frac{1}{4}(2\alpha - \alpha^2) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1) \ln(\alpha + 1)$

On considère la fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et définie par :

$$f(x) = x^2 - (x-1)e^{x-1}$$

On désigne par  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, I, J)$ . Unité graphique : 2 cm.

**Partie A**

Soit  $g$  la fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  et définie par :

$$g(x) = x - e^{x-1}$$

1. Calculer  $g'(x)$  pour tout nombre réel  $x$ .
2. Déterminer le sens de variation de  $g$  et dresser le tableau de variation de  $g$  sans les limites.
3. En déduire que pour tout nombre réel  $x$  différent de 1,  $g(x) < 0$ .

**Partie B**

1. a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ .  
b) Interpréter graphiquement ce résultat.
2. a) Vérifier que pour tout nombre réel non nul  $x$ ,  $f(x) = x^2 \left( 1 - \frac{1}{e} \frac{x-1}{x} - \frac{e^x}{x} \right)$ .  
b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .  
c) Interpréter graphiquement ce résultat.
3. a) Démontrer que pour tout nombre réel  $x$ ,  $f'(x) = x(2 - e^{x-1})$ .  
b) Déterminer le sens de variation de la fonction  $f$ .  
c) Vérifier que :  $f(1 + \ln 2) = 1 + (\ln 2)^2$ . Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .
4. Soit  $h$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]0; 1 + \ln 2]$ .  
Démontrer que la fonction  $f$  réalise une bijection de  $]0; 1 + \ln 2]$  sur  $[\frac{1}{e}; 1 + (\ln 2)^2]$ .
5. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $]1 + \ln 2; +\infty[$ .  
Vérifier que :  $2,4 < \alpha < 2,41$ .
6. a) Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C_f)$  au point A d'abscisse 1.  
b) Démontrer que pour tout nombre réel  $x$ ,  $f(x) - x = (x-1)g(x)$ .  
c) Déterminer les positions relatives de  $(T)$  et de  $(C_f)$ .
7. Construire la courbe  $(C_f)$  et  $(T)$ .

**Partie C**

On note  $h^{-1}$  la réciproque de la fonction  $h$  et on désigne  $(\Gamma)$  la courbe représentative de  $h^{-1}$  dans le repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

1. a) Démontrer que  $h^{-1}$  est strictement croissante sur  $[\frac{1}{e}; 1 + (\ln 2)^2]$ .  
b) Dresser le tableau de variation de  $h^{-1}$ .
2. a) Démontrer que la fonction  $h^{-1}$  est dérivable en 1 puis calculer  $(h^{-1})'(1)$ .  
b) En déduire que  $(T)$  est la tangente à la courbe  $(\Gamma)$  au point A.
3. Construire  $(\Gamma)$  en indiquant la méthode utilisée.

## PROBLEME n°8

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction  $f$  dérivable sur  $]0; +\infty[$  et définie par :

$$f(x) = 2x - 3 + \frac{\ln x}{x}.$$

On note  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni du repère orthonormé  $(O, I, J)$ .  
L'unité graphique est 2 cm.

### Partie A

Soit  $g$  la fonction dérivable sur  $]0; +\infty[$  et définie par :

$$g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x.$$

1. Etudier les variations de  $g$  puis dresser son tableau de variation.  
(On ne demande pas de calculer les limites).
2. Justifier que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, g(x) > 0$ .

### Partie B

1. a) Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  puis interpréter graphiquement le résultat.
2. a) Démontrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = 2x - 3$  est une asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$ .  
b) Préciser la position de  $(C)$  par rapport à  $(D)$ .
3. a) Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif  $x$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .  
b) Etudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation.  
c) Démontrer qu'une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'abscisse 1 est :  $y = 3x - 4$ .
4. a) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$ .  
b) Justifier que :  $1,3 < \alpha < 1,4$ .

### Partie C

On pose pour tout nombre réel  $x$  strictement positif :

$$\varphi(x) = f(x) - (3x - 4) \text{ et } h(x) = -x^2 + 1 - \ln x.$$

1. a) Déterminer le sens de variation de  $h$  sur  $]0; +\infty[$ .  
b) Calculer  $h(1)$  puis justifier que :  $\forall x \in ]0; 1[, h(x) > 0$  et  $\forall x \in ]1; +\infty[, h(x) < 0$ .
2. a) Démontrer que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, \varphi'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ .  
b) Etudier les variations de  $\varphi$  puis en déduire le signe de  $\varphi(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .  
c) Déterminer la position de  $(C)$  par rapport à  $(T)$ .

### Partie D

Tracer la courbe  $(C)$ , la droite  $(D)$  et la tangente  $(T)$ . On prendra  $\alpha = 1,35$ .

Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe  $(C)$ , la droite  $(D)$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ .

(Extrait Bac 2008, Série D).

SUJET N°1Exercice

1. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  :  $2^{3n} - 1$  est un multiple de 7. En déduire que  $2^{3n+1} - 2$  est un multiple de 7 et que  $2^{3n+2} - 4$  est un multiple de 7.
2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.
3. Le nombre  $p$  étant un entier naturel, on considère le nombre entier  $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$ .
  - a) Si  $p = 3n$ , quel est le reste de la division de  $A_p$  par 7 ?
  - b) Démontrer que si  $p = 3n + 1$  alors  $A_p$  est divisible par 7.
  - c) Étudier le cas où  $p = 3n + 2$
4. On considère les nombres entiers  $a$  et  $b$  écrits dans le système binaire :  $a = \underline{1001001000}$  et  $b = \underline{1000100010000}$ . Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme  $A_p$ . Sont-ils divisibles par 7 ?

Problème

- On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$ . On note  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, i, j)$ .
- 1) Étudier la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$  (on pourra écrire :  $xe^{x-1} = \frac{1}{e}xe^x$ )
  - 2) Démontrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x + 1$  est asymptote à la courbe  $(C)$  en  $-\infty$  et préciser la position de la courbe  $(C)$  par rapport à la droite  $\Delta$ .
  3. a) Calculer la dérivée  $f'$  et la dérivée seconde  $f''$  de la fonction  $f$ .
  - b) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f'$  en précisant la limite de la fonction  $f'$  en  $-\infty$

- c) Calculer  $f'(1)$  et en déduire le signe de  $f'(x)$  pour tout réel  $x$
- d) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$
- 4) Soit  $I$  l'intervalle  $[1,9 ; 2]$ . Démontrer que, sur  $I$ , l'équation  $f(x) = 0$  a une solution unique  $\alpha$
- 5) Tracer la droite  $\Delta$  et la courbe  $(C)$  (unité graphique : 2cm)

### Résolution

#### Exercice

- 1) Démontrons que, pour tout entier naturel  $n$  :  $2^{3n} - 1$  est un multiple de 7 et que: Utilisons les congruences.

On a :  $2^3 = 8$ , alors  $2^3 \equiv 1[7]$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $2^{3n} \equiv 1[7]$ , donc  $2^{3n} - 1 \equiv 0[7]$

Conclusion :  $2^{3n} - 1$  est un multiple de 7.

De même :  $2^{3n} \equiv 1[7]$   $2^{3n} \equiv 1[7]$

$2^{3n} * 2 \equiv 2[7]$  et  $2^{3n} * 4 \equiv 4[7]$

$2^{3n+1} \equiv 2[7]$   $2^{3n+2} \equiv 4[7]$

$2^{3n+1} - 2 \equiv 0[7]$   $2^{3n+2} - 4 \equiv 0[7]$

Ceux-ci montrent que pour tout entier naturel  $n$ , les nombres  $2^{3n+1} - 2$  et  $2^{3n+2} - 4$  sont multiples de 7.

- 2) Déterminons les restes de la division par 7 des puissances de 2, c'est-à-dire, les restes de la division par 7 des nombres de la forme  $2^{3k}$  avec  $k \in \mathbb{N}$ .  
D'après la question précédente, les nombres de la forme  $2^{3n} - 1$ ,  $2^{3n+1} - 2$  et  $2^{3n+2} - 4$  sont multiples de 7. Donc les restes de la division par 7 des puissances de 2 sont e 1 ; 2 ou 4.

- 3) Le nombre  $p$  étant un entier naturel, on considère le nombre entier  $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$

- a) Si  $p = 3n$ , déterminons le reste de la division de  $A_p$  par 7. On sait que les exposants  $3n$ ,  $6n$  et  $9n$  sont multiples de 3, donc  $2^{3n} \equiv 1[7]$ ,  $2^{6n} \equiv 1[7]$  et  $9^{3n} \equiv 1[7]$

Ainsi, on obtient :  $A_p \equiv 3[7]$ . Donc si  $p = 3$ , le reste de la division de  $A_p$  par 7 est 3.

b) Démontrons que si  $p = 3n + 1$  alors  $A_p$  est divisible par 7

si  $p = 3n + 1$  alors  $A_p = 2^{3n+1} + 2^{6n+2} + 2^{9n+3}$ . D'après les questions précédentes, on :  $2^{3n+1} \equiv 2[7]$ ,  $2^{6n+2} \equiv 4[7]$  et  $2^{9n+3} \equiv 1[7]$ . D'où  $A_p \equiv 7[7]$ , or  $7 \equiv 0[7]$ , alors  $A_p \equiv 0[7]$ .

**Conclusion** : lorsque  $p = 3n + 1$ ,  $A_p$  est divisible par 7

c) Etudions le cas où  $p = 3n + 2$

Si  $p = 3n + 2$  alors  $A_p = 2^{3n+2} + 2^{6n+4} + 2^{9n+6}$

Or,  $2^{3n+2} \equiv 4[7]$ ,  $2^{6n+4} \equiv 2[7]$  car  $6n + 4 = 3(2n + 1) + 1$  donc  $6n + 4$  est de la forme

$3n + 1$  et  $2^{9n+6} \equiv 1[7]$ . Donc  $A_p \equiv 7[7]$ , comme  $7 \equiv 0[7]$  alors  $A_p \equiv 0[7]$ .

**Conclusion** : lorsque  $p = 3n + 2$ ,  $A_p$  est divisible par 7.

4) On considère les nombres entiers  $a$  et  $b$  écrits dans le système binaire :  $a = \underline{1001001000}$  et

$b = \underline{1000100010000}$ . Vérifions que ces deux nombres sont des nombres de la forme  $A_p$ .

On pose :  $a = 2^3 + 2^6 + 2^9$  soit  $a = A_3$ . D'après la question 3.a),  $A_3$  n'est pas divisible par 7.

$b = 2^4 + 2^8 + 2^{12} = A_4$ . Or  $4 = 3 \times 1 + 1$ . D'après la question 3.b),  $A_4$  est divisible par 7.

### Problème

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$ . On note  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(o, i, j)$ .

157

1) Etudions la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$  (on pourra écrire:  $xe^{x-1} = \frac{1}{e}xe^x$ )

Limite de  $f$  en  $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1 - xe^{x-1})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1 - \frac{1}{e}xe^x), \text{ or}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1) = -\infty. \text{ D'où}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Limite de  $f$  en  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (2 \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e}). \text{ On sait que}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e}) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

$$-\infty$$

2) Démontrons que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x + 1$  est asymptote à la courbe (C) en  $-\infty$

$$\text{Pour cela calculons } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y], \text{ or } f(x) - y = -xe^{x-1}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-xe^{x-1}) = 0$$

Donc la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x + 1$  est asymptote à la courbe (C) au voisinage de  $-\infty$ .

Précisons la position de la courbe (C) par rapport à la droite

$\Delta$ . Pour cela on étudie le signe de  $f(x) - y$  Pour tout réel

$$x, f(x) - (2x + 1) = -xe^{x-1}$$

Or, pour tout réel  $x$ ,  $e^{x-1} > 0$  donc  $f(x) - (2x + 1)$  est du signe contraire à  $x$ .

Si  $x < 0$ ,  $f(x) - (2x + 1) > 0$  et (C) est au-dessus de  $\Delta$ .

Si  $x > 0$ ,  $f(x) - (2x + 1) < 0$  et (C) est en-dessous de  $\Delta$ .

3.a) Calculons  $f'$  et  $f''$

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) =$

$$2 - (e^{x-1} + xe^{x-1})$$

$f'$  est elle-même dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout réel  $x$ ,  $f''(x) = -e^{x-1} - (e^{x-1} + xe^{x-1})$

$f''(x) = e^{x-1}(-x-2)$

b) Tableau de variation de  $f'$

$f''(x) > 0$  c'est-à-dire  $e^{x-1}(-x-2) > 0$ , alors  $x < -2$   
 $f'$  est strictement croissante sur  $]-\infty; -2[$  et strictement croissante sur  $]-2; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2 - e^{x-1} - xe^{x-1}] = 2$

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$f''(x)$			0
$f'(x)$	2		$2 + e^{-3}$

c) Calculons  $f'(1)$  et puis on étudie le signe de  $f'(x)$  pour tout réel  $x$

On a :  $f'(1) = 2 - (e^{1-1} + e^{1-1})$ , donc  $f'(1) = 0$

Signe de  $f'(x)$ : D'après les variations de  $f'(x)$  obtenues à la question précédente, on en déduit :

$f'(x) > 0$  sur  $]-\infty; 1[$ ;

$f'(1) = 0$

$f'(x) < 0$  sur  $]1; +\infty[$

d) Tableau de variation de  $f$

D'après la question c),  $f$  est strictement croissante sur  $]-\infty; 1[$  et strictement décroissante sur  $]1; +\infty[$

$]1; +\infty[.$ 

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	0		
$f$	2		

$-\infty - \infty$

4) Soit  $I$  l'intervalle  $[1,9; 2]$ . Démontrons que, sur  $I$ , l'équation  $f(x) = 0$  a une solution unique  $\alpha$ .  
 La fonction  $f$  est continue sur  $I$  et strictement décroissante sur  $I$ . on a :  $f(1,9) > 0$  et  $f(2) = 5 - 2$  donc  $f(2) < 0$ .  
 Comme  $f(2) < 0 < f(1,9)$ , alors l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique sur l'intervalle  $[1,9; 2]$ .

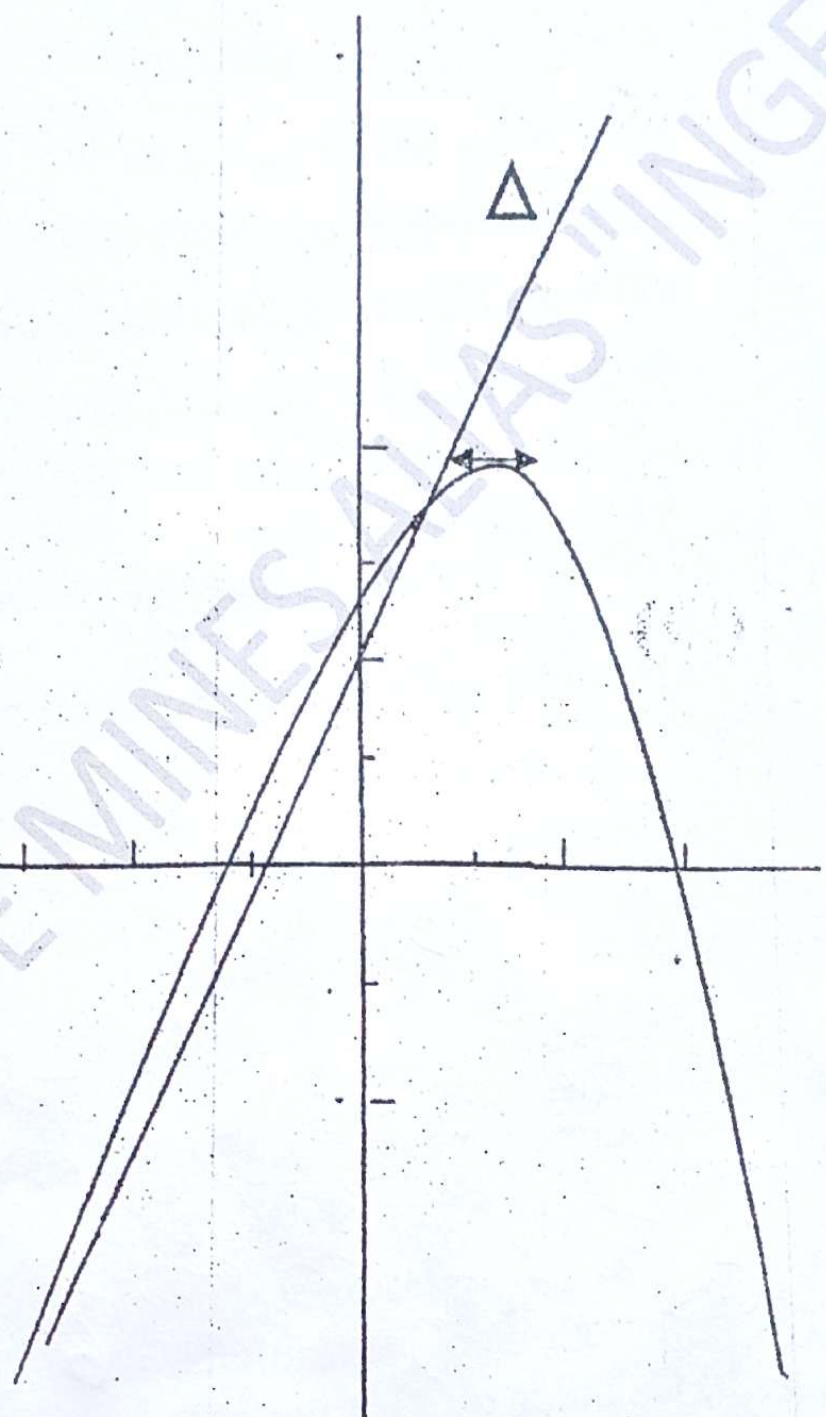
### 5) Représentation graphique

$$(\Delta) y = 2x + 1$$

$x$	0	-1
$y$	1	-1

2020

0



## Sujet N°2 :

161

### Exercice :

On définit, pour tout entier naturel  $n \geq 0$ , la suite  $(U_n)$  de nombres réels strictement positifs par

$$u_n = \frac{n^2}{2^n}$$

1. Pour tout entier naturel  $n > 0$ , on pose  $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

a) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$

b) Montrer que pour tout entier naturel  $n > 0$ ,  $v_n > \frac{1}{2}$

c) Trouver le plus petit entier  $N$  tel que, si  $n \geq N$ ,  $v_n < \frac{3}{4}$

d) En déduire que si  $n \geq N$  alors  $u_{n+1} < \frac{3}{4}u_n$ . On pose pour tout entier naturel  $n \geq 5$ ,

$$S_n = u_5 + u_6 + \dots + u_n$$

2. On se propose de montrer que la suite  $(S_n)$  ;  $n \geq 5$  est convergente.

a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel

$$n \geq 5, S_n \leq \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5$$

c) En déduire que pour tout entier naturel  $n \geq 5$ ,  $S_n \leq 4u_5$

3. Montrer que la suite  $(S_n)$ ,  $n \geq 5$  est croissante et en déduire qu'elle converge.

### Problème

#### Partie A

1. Montrer que pour tout  $x > 0$ , on a  $e^{2x} - 1 > 0$

2) Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{1}{e^{2x}-1}$

a) Déterminer les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$ . Interpréter graphiquement les résultats

b) Calculer  $g'(x)$ . Etudier le sens de variation de  $g$  puis dresser son tableau de variation.

#### Partie B :

b) Montrer que, l'équation  $f(x) = g(x)$  possède une solution unique  $\alpha$  sur  $[0,1; 0,3]$  et déterminer un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$

### Partie D

- 1) Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) > 0$ .
- 2) On définit  $h$  sur  $]0; +\infty[$  par l'expression suivante :  
 $h = g \circ f$ 
  - a) Déterminer les limites en 0 et en  $+\infty$  de  $h$
  - b) Déterminer le sens de variation de  $h$  sur  $]0; +\infty[$
  - c) Montrer que  $h(\alpha) = g \circ g(\alpha)$ . Déterminer une valeur approchée de  $h(\alpha)$  à  $10^{-4}$  près.

### Sujet N° 3

#### Exercice :

Sur une droite (D) muni d'un repère  $(o, i, j)$ ,  $A_0$  et  $B_0$  sont les points d'abscisses respectives :  $-4$  et  $3$ . Pour tout entier naturels  $n$ , on note :

$A_{n+1}$  le barycentre de  $\{(A_n; 1), (B_n; 4)\}$  ;

$B_{n+1}$  le barycentre de  $\{(A_n; 3), (B_n; 2)\}$  ;

1. Placer les points  $A_0, B_0, A_1$  et  $B_1$
2. Les points  $A_n$  et  $B_n$  ont pour abscisses  $a_n$  et  $b_n$  respectivement. Ainsi,  $a_0 = -4$  et  $b_0 = 3$ . Démontrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n + 4b_n)$  et

$$b_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n).$$

3. a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$  :  $3a_n + 4b_n = 0$ .

b) En déduire que :  $a_{n+1} = -\frac{2}{5}a_n$  et  $b_{n+1} = -\frac{2}{5}b_n$

4. a) Exprimer  $a_n$  et  $b_n$  à l'aide de  $n$ .

b) Déterminer les limites de  $a_n$  et  $b_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

c) Interpréter ce résultat à l'aide des points  $A_n$  et  $B_n$ .

#### Problème

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  dont la courbe représentative  $C$  dans un repère orthogonal  $(O, i, j)$  est donnée en annexe avec sa tangente au point d'abscisse  $e$ . On admet

l'égalité suivante :

$f(x) = 2x[a(\ln x)^2 + b \ln x + c]$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  désignent trois réels.

1.a) Exprimer  $f'(x)$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

b) A l'aide des informations données sur le graphique,

déterminer les valeurs de  $f'(\frac{1}{e})$ ,  $f'(\sqrt{e})$  et  $f'(e)$ .

c) En déduire l'égalité :  $f(x) = 2x[2(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2]$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ .

2.a) Déterminer la limite de  $f$  en  $0$ . On pourra poser

$t = -\ln x$  et vérifier pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  l'égalité :  $f(x) = 2e^{-t}[2t^2 + 3t + 2]$

b) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$

c) Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  l'égalité

$f'(x) = 2(\ln x + 1)(2 \ln x - 1)$ .

d) Etudier le signe de  $f'(x)$  et dresser le tableau de variation de  $f$ .

### Partie C

1) Tracer, dans le repère  $(O, i, j)$  de la feuille annexe, la courbe représentative  $C_g$  de la fonction  $g$  étudiée en partie A

2.a) Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , on a

$$g(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 1} - 1$$

b) Calculer et exprimer en unité d'aire, l'aire de la surface délimitée par l'axe des abscisses, la courbe  $C_g$  et les droites d'équation  $x = \frac{1}{4}$  et  $x = 2$

3) Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $[0,1 ; 0,3]$ , par

$$\varphi(x) = f(x) - g(x)$$

a) Montrer que, pour tout  $x \in [0,1 ; 0,3]$  on a  $\varphi'(x) > 0$ .

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

2) Hachurer le domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = \frac{1}{e}$  et  $x = 2$ .

Calculer la valeur exacte de  $\mathcal{A}$ , l'aire de ce domaine, exprimée en  $\text{cm}^2$ .

Sujet N° 4

Exercice :

On considère deux suites  $u$  et  $v$  par  $u_0 = 1, v_0 = 12$  et pour

$$\text{tout entier naturel } n : \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$$

1. On appelle  $w$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $w_n = v_n - u_n$ .

a) Montrer que  $w$  est une suite géométrique à termes positifs, dont on précisera la raison.

b) Déterminer la limite de la suite  $w$ .

2. a) Montrer que la suite  $u$  est croissante.

b) Montrer que la suite  $v$  est décroissante.

c) En déduire que, pour tout entier  $n, u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$ .

3. On admet que les suites  $u$  et  $v$  convergent. Montrer qu'elles ont la même limite que l'on appellera  $k$ .

4. On appelle  $t$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $t_n = 3u_n + 8v_n$ .

a) Montrer que  $t$  est une suite constante. Déterminer cette constante.

b) Déterminer alors la valeur de  $k$ .

Problème :

Partie A : On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0; \infty[$  par  $f(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  
 $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$  ; et on note  $(C)$  sa courbe représentative dans  
 un repère orthonormé  $(o, i, j)$  (unité graphique 5cm)

**Partie A :** Etude de la fonction  $f$ .

1. Etudier les limites de  $f$  en  $0$  et  $+\infty$  (pour cette dernière, on pourra remarquer que :  $(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$ )
2. a) Montrer que :  $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$  pour tout  $x$  appartenant à  $]0, +\infty[$
- b) En déduire le sens de variation de  $f$
- c) Dresser le tableau de variation de  $f$

**Partie B :** Etude de quelques points particuliers de  $(C)$

1. Déterminer l'abscisse  $x_1$  du point d'intersection  $M_1$  de  $(C)$  avec l'axe des abscisses.
2. Soit  $x_2 = \frac{1}{\sqrt{e}}$ . On note  $M_2$  le point de  $(C)$  d'abscisse  $x_2$ 
  - a) Déterminer une équation de la tangente  $\Delta_2$  au point  $M_2$
  - b) Vérifier que  $\Delta_2$  passe par  $0$
3. Indiquer l'abscisse  $x_3$  du point  $M_3$  de  $(C)$  tel que la tangente  $\Delta_3$  à  $(C)$  en  $M_3$  soit parallèle à l'axe des abscisses.
4. Soit  $f''$  la dérivée de  $f'$  ; calculer  $f''(x)$  pour  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ . Déterminer le réel  $x_4$  qui annule  $f''(x)$ . On appelle  $M_4$  le point de  $(C)$  d'abscisse  $x_4$ .
5. Vérifier que  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$  sont quatre termes consécutifs d'une suite géométrique dont on indiquera la raison.
- 6) Placer les points  $M_1, M_2, M_3$  et  $M_4$  dans le repère  $(o, i, j)$ . Construire les tangentes  $\Delta_2$  et  $\Delta_3$  puis la courbe  $(C)$ .

**Partie C :** Calcul d'une aire

1. On note  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = (\ln x)^2$ . Calculer la dérivée de  $g$ . En déduire une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ , après avoir remarqué que

Sujet N° 5Exercice :

**Partie A :** Une urne contient  $n$  boules blanches ( $n \in \mathbb{N}$  et  $n \geq 2$ ), 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?
2. On note  $p(n)$  la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

a) Montrer que 
$$p(n) = \frac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$$

b) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(n)$ . Interpréter ce résultat.

**Partie B :** Pour les questions suivantes  $n = 4$

1. Calculer  $p(4)$
2. Un tirage consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne. Un joueur effectue deux tirages indépendants, en remettant dans l'urne avant le second tirage les deux boules tirées la 1ère fois. Il mise au départ la somme de 30 f. Pour chaque tirage :

- Si les deux boules sont de même couleur, il reçoit alors 40f ;
- Si elles sont de couleurs différentes, il reçoit alors 5f.

On appelle gain du joueur la différence, à l'issue des deux tirages, entre la somme perçue par le joueur et sa mise initiale (ce gain peut être positif ou négatif). On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au gain du joueur.

- a) Quelles sont les valeurs prises par  $X$  ?
- b) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
- c) Calculer l'Espérance de  $X$ .

Problème :

**Partie A :** On considère la fonction  $g_k$  de la variable réelle  $x$  définie par  $g_k(x) = -2x + 1 + 2x \ln(kx)$ ,  $k$  étant un paramètre réel non nul.

1) Calculer la dérivée de  $f$  et en déduire le sens de variation de  $f$ .

2) Déduire de cette étude que  $f(x)$  est positive sur  $]0; \infty[$ .

**Partie B :** On considère la fonction numérique  $g$  définie sur  $]0; \infty[$  par  $g(x) = x + \frac{\ln x}{2x}$  et sa courbe représentative **(C)** dans un repère ortho-normé  $(O, i, j)$  (unité graphique 2cm)

1) Calculer la dérivée  $g'$  de la fonction  $g$  et montrer que  $g'(x)$  et  $f(x)$  ont même signe sur  $]0; +\infty[$ .

2) En utilisant les résultats de la question A.2°; établir le tableau de variation de la fonction  $g$ . On précisera le sens de variation de  $g$  et les limites en 0 et  $+\infty$ .

3) Calculer la limite en  $+\infty$  de  $[g(x) - x]$ ; en déduire que la courbe **(C)** admet comme asymptote la droite **(D)**

d'équation  $y = x$ ; on précisera la position relative de **(D)** et de **(C)** et les coordonnées de leur point commun.

4) Déterminer une équation de la tangente **(T)** à la courbe **(C)** au point d'abscisse  $e$ . Montrer que cette tangente est parallèle à la droite **(D)**.

5) Démontrer que la courbe **(C)** coupe une seule fois l'axe des abscisses en un point  $E$  d'abscisse  $x_0$  tel que

$0,5 < x_0 < 1$ . Donner une valeur approchée de  $x_0$  à  $10^{-2}$  près.

6) Construire **(D)**, **T** et **C** dans le repère donné

7) Colorier sur la représentation graphique précédente, la partie du plan, ensemble des points

$M(x; y)$  tels que

$1 \leq x \leq e$  et  $x \leq y \leq g(x)$ . Calculer en  $cm^2$ , l'aire  $A$  de cette partie du plan.

$$0 < \ln 2x < 2x - 1,$$

b) En déduire que :  $\int_1^2 \ln 2x dx < 2$ .

2) A l'aide du graphique de la partie B Montrer que :

$$\frac{\ln 6}{5} < \frac{1}{2} - \int_2^3 f_2(x) dx < \frac{2 \ln 2}{3}$$

### SUJET N°6

#### Exercice :

Dans le plan P, on donne un triangle équilatéral tel que :

$\|\vec{AB}\| = \|\vec{BC}\| = \|\vec{AC}\| = 1$ . Soit A' le milieu du segment [BC].

1. Montrer que le milieu G du segment [AA'] est le barycentre du système  $\{(A; 2), (B; 1), (C; 1)\}$
2. Trouver l'ensemble des points M du plan tel que :  $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2$

#### Problème

On considère la fonction f définie par  $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \ln|x-1|$  et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, i, j)

#### Partie A

Soit h la fonction définie sur  $\mathbb{R}/\{1\}$  par

$$h(x) = 2x - 1 - \ln|x-1|$$

- 1) Calculer la limite de h en 1 et en  $\pm\infty$
- 2) Etudier les variations de la fonction h
- 3.a) Montrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in ]-\infty; -1[$

b) Justifier que :  $0,3 < \alpha < 0,4$ ;

$$h(0,3) \approx -0,4 \text{ et } h(0,4) \approx 0,3$$

- 4) En déduire que :  $\begin{cases} \forall x \in ]-\infty; \alpha[; h(x) < 0 \\ \forall x \in ]\alpha; 1[ \cup ]1; +\infty[; h(x) > 0 \end{cases}$

#### Partie B :

Soit g la fonction définie sur  $\mathbb{R}/\{1\}$  par :

- 1) Déterminer, suivant les valeurs prises par  $k$ , l'ensemble de définition  $E_k$  de  $g_k$ .
- 2) Calculer les limites de  $g_k$  aux bornes de  $E_k$  pour  $k > 0$  et pour  $k < 0$ .
- 3) Calculer la dérivée  $g'_k$  de  $g_k$  pour chaque cas.
- 4) Etablir le tableau de variation de  $g_k$  pour chaque cas.
- 5.a) Montrer que pour  $k > 2$  et pour  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $g_k(x) > 0$
- b) Montrer que pour  $k < 0$  l'équation  $g_k(x) = 0$  admet une solution négative unique  $\alpha_0$  élément de l'intervalle  $] -\infty; \frac{1}{k}[$
- c) Montrer que pour  $0 < k < 2$ , l'équation  $g_k(x) = 0$  admet exactement deux solutions positives  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$
- d) Etudier le signe de  $g_2(x)$

**Partie B :** Soit la fonction numérique  $f_k$  de la variation réelle

$x$ , définie par  $f_k(x) = \frac{1}{k} - \frac{\ln kx}{2x-1}$ ,  $k$  étant un

paramètre réel supérieur ou égal à 2 ; on désigne par  $(C_k)$ , la représentation graphique de  $f_k$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(o, i, j)$ , unité graphique 1 cm.

- 1) Déterminer l'ensemble  $D_k$  de la fonction  $f_k$ .
- 2.a) Montrer que la fonction  $f_2$  admet un prolongement par continuité en  $\frac{1}{2}$ . On rappelle que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(h+1)}{h} = 1$
- b) Calculer aux bornes de  $D_k$ , les limites de  $f_k$ .
- 3.a) Calculer la fonction dérivée  $f'_k$  de  $f_k$  et établir une relation entre  $f'_k(x)$  et  $g_k(x)$  pour tout  $x$  de  $D_k$
- b) Etudier le sens de variation de  $f_k$  et dresser son tableau de variation pour  $k = 2$  et pour  $k \neq 2$ .
- 4) Représenter  $C_2$  et  $C_4$  dans le même repère ; (préciser les asymptotes à chacune de ces courbes)

**Partie C :**

1.a) A l'aide de  $f_2$ , montrer que,  $\forall x \in ]\frac{1}{2}; +\infty[$ ,

170

$$g(x) = x^2 - (x - 1) \ln |x - 1|$$

- 1) Calculer la limite de  $g$  en 1 et en  $\pm\infty$
- 2) Montrer que  $g'(x) = h(x)$
- 3) Dresser le tableau de variation de la fonction  $g$ .
- 4.a) Montrer que  $g(\alpha) = -\alpha^2 + 3\alpha - 1$
- b) Donner un encadrement de  $g(\alpha)$  à  $10^{-1}$  près.
- c) En déduire que  $g(\alpha) < 0$
- 5.a) Montrer que l'équation :  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\beta \in ]\alpha; +\infty[$
- b) Justifier que :  $0,6 < \beta < 0,7$  ;  
 $g(0,6) \approx -0,007$  et  $g(0,7) \approx 0,13$
- c) Calculer  $g(0)$
- d) En déduire le signe de la fonction  $g$

### Partie C

- 1) Calculer la limite de  $f$  en 1. Interpréter graphiquement le résultat
- 2) Montrer que  $f$  est continue à gauche en 0 et discontinue à droite en 0. Que peut-on dire de  $f$  en 0
- 3) Montrer que :  $f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2(x-1)} g(x)$
- 4) Etudier les variations de la fonction  $f$
- 5.a) Montrer que :  $f(\beta) = \frac{\beta^2}{\beta-1} e^{\frac{1}{\beta}}$
- b) Donner un encadrement à  $10^{-1}$  près de  $f(\beta)$ . On donne  $4,2 < e^{\frac{1}{\beta}} < 5,3$
- c) En déduire que  $f(\beta) < 0$
- 6) Démontrer que la tangente (T) au point d'abscisse 2 a pour équation :  $y = \left(4 - \frac{\sqrt{e}}{4}\right)x - 8 - \frac{\sqrt{e}}{4}$
- 6) Tracer (C) et (T).

**SUJET N°7**

**Exercice**

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches. Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète  $n$  fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis à la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants. On note  $p_n$  la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des  $n-1$  premiers tirages et une boule blanche lors du  $n$ ème tirage.

1. Calculer les probabilités  $p_2, p_3$  et  $p_4$
2. On considère les événements suivants :

$B_n$  : « On tire une boule blanche lors du  $n$ ème tirage »

$U_n$  : « On tire une boule blanche et une seule lors des  $n-1$  premiers tirages ».

- a) Calculer la probabilité de l'évènement  $B_n$
- b) Exprimer la probabilité de l'évènement  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- c) En déduire l'expression de  $p_n$  en fonction de  $n$  et vérifier l'égalité :  $p_n = \frac{n-1}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

3. On pose  $S_n = p_2 + p_3 + \dots + p_n$ .

- a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on a :

$$S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

- b) Déterminer la limite de la suite  $(S_n)$

**Problème**

On note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ . On appelle  $C$  la courbe représentative de  $f$  dans le repère  $(o, i, j)$

**Partie A**

**1. Etude de  $f$**

- a) Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ . Justifier vos calculs.
- b) Préciser les équations des asymptotes.

- 2. Donner l'expression de  $f'(x)$  ou  $f'$  est la dérivée de  $f$ . Dresser le tableau de variation de  $f$ . Préciser  $f(0)$ .
- 3. Déterminer une équation de la tangente à  $C$  au point d'abscisse  $x = 0$  ; on note  $T_0$  cette tangente.
- 4. courbe
  - a) Soit  $x$  un réel quelconque. Calculer  $f(x) + f(-x)$ .
  - b) Quelle propriété de symétrie peut-on déduire de la question précédente
  - c) Tracer  $(C)$ , ses asymptotes et la tangente  $T_0$

**Partie B**

- 1.a) Soit  $U(x) = 1 + e^{-x}$ . Calculer  $U'(x)$ .
- b) En déduire la primitive  $F$  de  $f$  qui prend la valeur :  $-\ln 2$  en  $x = 0$ .
- 2.a) On pose  $A = \int_0^1 f(x) dx$ . Calculer  $A$ .
- b) Déterminer le réel  $C$  tel que  $A = \ln C$
- 3. Pour tout entier naturel  $n$  non nul on pose

$$V_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} f(x) dx.$$

- a) Exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$ .
- b) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ .

**Sujet N° 8:**

**Exercice**

On considère les suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  définies par :  
 $x_0 = 1 ; y_0 = 8$  et

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

- 1. Montrer, par récurrence, que les points  $M_n$  de coordonnées  $(x_n; y_n)$  sont sur la droite  $(\Delta)$  dont une

équation est  $5x - y + 3 = 0$ . En déduire que  $x_{n+1} = 4x_n + 2$ .

2. Montrer, par récurrence, que tous les  $x_n$  sont des entiers naturels. En déduire que tous les  $y_n$  sont aussi des entiers naturels.

3. Montrer que :

a)  $x_n$  est divisible par 3 si et seulement si  $y_n$  est divisible par 3.

b) si  $x_n$  et  $y_n$  ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.

4. a) Montrer, par récurrence, que

$$x_n = \frac{1}{3}(4^n \cdot 5 - 2).$$

b. En déduire que  $4^n \cdot 5 - 2$  est un multiple de 3, pour tout entier naturel  $n$ .

### Problème :

**Partie A :** On considère la fonction  $g$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = (x - 1)e^{x-1} - 1$ .

1. a) Justifier que la limite de  $g$  en  $-\infty$  est  $-1$

b) Déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$

2. a) Démontrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $g'(x) = xe^{x-1}$

b) Étudier le sens de variation de  $g$  et dresser son tableau de variation.

3. a) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in ]\frac{3}{2}; 2[$

b) Vérifier que  $\alpha \in ]1,56; 1,57[$

**Partie B :** On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x - 2)e^{x-1} - x + 1$ . On désigne par  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; i, j)$  unité graphique 2cm.

1) Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$

2. a) Démontrer que  $f$  est une primitive de  $g$  sur  $\mathbb{R}$

176

b) Etudier le sens de variation de  $f$  et dresser son tableau de variation

3.a) Démontrer que la droite (D) d'équation  $y = -x + 1$  est asymptote à la courbe de  $f$  en  $-\infty$

b) Etudier les positions relatives de  $\mathcal{E}$  et (D)

4) Démontrer que  $\mathcal{E}$  admet en  $+\infty$  une branche parabolique dont on précisera la direction

5) Déterminer une équation de la tangente  $T$  à  $\mathcal{E}$  au point d'abscisse  $-1$

6) Démontrer que  $f(\alpha) = 2 - \alpha - \frac{1}{\alpha-1}$

7) Montrer que  $f(\alpha)$  est négatif

8) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement deux solutions strictement positives.

9) Tracer (D), (T) et  $\mathcal{E}$

10) Soit  $\mu$  un élément de  $] -\infty, 2[$  et  $A(\mu)$  l'aire en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan délimitée par  $\mathcal{E}$ , la droite (D) d'équation  $y = -x + 1$  et les droites d'équation  $x = \mu$  et  $x = 2$ .

a) A l'aide d'une intégration par partie, calculer  $A(\mu)$

b) Déterminer la limite de  $A(\mu)$  lorsque  $\mu$  tend vers  $-\infty$

### Partie C :

- Soit  $h$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $] -\infty, \alpha[$

1) Démontrer que  $h$  est une bijection sur un intervalle  $J$  à préciser.

2) Soit  $h^{-1}$  la bijection réciproque de  $h$

a) Préciser l'ensemble de dérivabilité de  $h^{-1}$ , puis dresser son tableau de variation.

b) Construire la courbe  $\mathcal{E}$  de  $h^{-1}$  dans le même que  $\mathcal{E}$ .

### SUJET N° 9

#### Exercice

2°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé. On considère les points  $A(-2; -1)$ ,  $B(1; 5)$ ,  $C(3; 1)$  et le cercle d'équation  $(\delta): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 24 = 0$

Déterminer trois nombres réels :  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  et la constante  $k$  tel que  $(\delta)$  soit une ligne de niveau  $k$  de la fonction numérique de Leibniz associée au système  $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \gamma)\}$

**Problème**

**Partie A** : Etude d'une fonction  $f$  et construction de sa courbe

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$ . On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé  $(O, i, j)$ . L'unité graphique est 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

1.a) On rappelle que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ . Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$

b) Vérifier que pour tout réel  $x$  :

$f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x})$ . Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$

c) En déduire que la courbe  $\mathcal{C}$  admet deux asymptotes que l'on précisera

2. On considère la fonction  $g$  définie sur  $]-1; +\infty[$  par

$$g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t).$$

a) Démontrer que la fonction  $g$  est strictement décroissante sur  $[0, +\infty[$

b) En déduire le signe de  $g(t)$  lorsque  $t > 0$

3.a) Calculer  $f'(x)$  et l'exprimer en fonction de  $g(e^x)$ ,

b) En déduire le sens de variation de la fonction  $f$  puis dresser son tableau de variation

4. Tracer les asymptotes à la courbe  $\mathcal{C}$ .

**Partie B** : Comportement asymptotique d'une primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

1) Etudier le sens de variation de la fonction F

176

2.a) Vérifier que, pour tout nombre réel  $t$ ,  $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$  et

calculer  $\int_0^x \frac{dt}{1+e^t}$

b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de  $F(x)$

c) Vérifier que  $F(x)$  peut s'écrire sous les formes suivantes

c1)  $F(x) = x - \ln(1 + e^x) - f(x) + 2\ln 2$

c2)  $F(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - f(x) + 2\ln 2$

3) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

4) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (F(x) - x)$ . Donner une interprétation graphique de ce résultat

### Partie C Etude d'une suite

Soit  $(U_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par

$$U_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \sum_{k=1}^n e^{-k} \ln(1 + e^k)$$

1) Hachurer sur la représentation graphique un domaine dont l'aire en unité d'aire est  $U_4$

2) Déterminer le sens de variation de la suite  $(U_n)$

3.a) Justifier que, pour tout entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n$ , on a

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

b) Comparer  $U_n$  et  $F(n)$

4) La suite  $(U_n)$  est-elle convergente ?

### Sujet N° 10

#### Exercice :

Deux personnes, A et B, écrivent chacune au hasard un nombre entier compris entre 1 et 50. On note a et b les nombres écrits respectivement par A et B. On suppose que

tous les couples  $(a ; b)$  tels que  $1 \leq a \leq 50$  et  $1 \leq b \leq 50$  sont équiprobables.

1. Déterminer les probabilités des événements suivants :

- a)  $a = b$
- b)  $a + b = 20$
- c)  $b \geq 15$
- d)  $b \geq a$

2. Si A et B font cinq fois la même expérience, quelle est la probabilité pour que l'évènement  $b \geq a$  soit réalisé au moins deux fois ? Le résultat sera arrondi à l'ordre 2.

**Problème:**

**Partie A :** Résolution de l'équation différentielle (1):

$$y' - 2y = xe^x$$

1) Résoudre l'équation différentielle (2) :  $y' - 2y = 0$ , où  $y$  désigne une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

2) Soient  $a$  et  $b$  deux réels et soit  $u$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = (ax + b)e^x$

a) Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $u$  soit solution de l'équation (1)

b) Montrer que  $v$  est une solution de l'équation (2) si et seulement si  $u + v$  est solution de (1)

c) En déduire l'ensemble des solutions de (1)

3) Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0

**Partie B:** Étude d'une fonction auxiliaire

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 2e^x - x - 2$

1) Déterminer la limite de  $g$  en  $-\infty$  et la limite de  $g$  en  $+\infty$

2) Étudier le sens de variation de la fonction  $g$ , puis dresser son tableau de variation

3) On admet que l'équation  $g(x) = 0$  admet exactement deux solutions réelles

a) Vérifier que 0 est l'une de ses solutions

b) L'autre solution est appelée  $\alpha$ . Montrer que:

$$-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$$

4) Déterminer le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs du réel  $x$   
**Partie C** : Etude de la fonction principale

Soit  $f$  la fonction définie-sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$$

- 1) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$  et la limite de  $f$  en  $+\infty$  (on pourra mettre  $e^{2x}$  en facteur)
- 2) Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x)$  et  $g(x)$  ont le même signe. Etudier le sens de variation de  $f$ .
- 3) Montrer que  $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ , où  $\alpha$  est défini dans la partie B. En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$ , (On rappelle que :  $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$ )
- 4) Etablir le tableau de variation de  $f$
- 5) Tracer la courbe  $\mathcal{C}$ , représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphiquement 2cm)

**Partie D** : Calculer d'aire

- 1) Soit  $m$  un réel négatif. Interpréter graphiquement l'intégrale  $\int_m^0 f(x) dx$ . (On justifiera la réponse)
- 2.a) Calculer  $\int_m^0 x e^x dx$  à l'aide d'une intégration par parties
- b) En déduire  $\int_m^0 f(x) dx$
- 3) Calculer la limite de  $\int_m^0 f(x) dx$ , lorsque  $m$  tend vers  $-\infty$

Sujet N° ; 11

Exercice :

- Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules blanches indiscernables au toucher. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
  - 1. On tire au hasard une boule de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche.
  - 2. On tire simultanément deux boules de l'urne. Calculer la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

3. On tire une boule de l'urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne. On fait cette expérience 4 fois.

- a) Calculer la probabilité de tirer exactement deux boules rouges.
- b) Calculer la probabilité de tirer au moins une boule blanche.

**Problème :**

Le but de ce problème est d'étudier la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par :

$f(x) = -5e^{-2x} + 7e^{-x} + x - 1$ . On désigne par  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, i, j)$  (unité graphique 2cm).

**Partie A :** Résolution d'une inéquation

- 1. Résoudre, dans l'ensemble des nombres réels, l'inéquation:  $10y^2 - 7y + 1 \leq 0$
- 2. Dédire de la question précédente que l'ensemble des nombres réels  $x$  tels que :  $10e^{-2x} - 7e^{-x} + 1 \leq 0$  est l'intervalle  $[\ln 2 ; \ln 5]$ . (on pourra poser  $e^{-x} = y$ ).

**Partie B :** Etude de la fonction  $f$

- 1. Calculer  $f'(x)$ . Etudier, en utilisant la partie A, le signe de  $f'(x)$ .
- 2. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$
- 3. Donner les valeurs exactes, puis les valeurs décimales approchées à  $10^{-2}$  près par défaut de  $f(\ln 2)$  et de  $f(\ln 5)$ .
- 4. Dresser le tableau de variation de  $f$
- 5. Donner le coefficient directeur de la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}$  en son point d'abscisse 0

**Partie C :** Tracé de la courbe représentative de  $\mathcal{C}$

1. Déterminer la limite de  $f(x) - (x - 1)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . En déduire que la courbe  $\mathcal{C}$  possède une asymptote oblique D dont on donnera une équation.
2. En remarquant que :  $f(x) - (x - 1) = e^{-2x}(7e^x - 5)$ , démontrer que la courbe  $\mathcal{C}$  est au-dessus de la droite D. (On rappelle que  $x$  est un nombre positif)
3. A l'aide de la calculatrice, donner des valeurs décimales approchées à  $10^{-2}$  près de  $f(0,5)$ ,  $f(1)$ ;  $f(2)$ ;  $f(3)$ ,  $f(4)$  et  $f(6)$ . On présentera les résultats sous forme d'un tableau.
4. Tracer sur une figure, le repère  $(o, i, j)$ , la tangente T définie dans la partie B, la droite D et la courbe  $\mathcal{C}$

**Sujet N° 12**

**Exercice :** Soit  $f$  la transformation du plan qui à tout point  $M(x; y)$  associe le point  $M'(x'; y')$  tel que :

$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{3}y \\ y' = -\sqrt{3}x + y \end{cases}$$

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de  $f$ .
2. Soit  $C$  l'ellipse d'équation :  $4x^2 + y^2 = 4$ . Déterminer une équation de  $C'$ , image de  $C$  par  $f$ .
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $C'$ . Tracer  $C$  et  $C'$ .

**Problème**

**Partie A :** Soit (E) l'équation différentielle définie par :

$$y'' - 4y' + y = x^2 - 8x + 1$$

- 1) Résoudre l'équation  $(E')$  :  $y'' - 4y' + y = 0$
- 2) Déterminer un polynôme du second degré  $P(x)$  solution de (E)
- 3) Montrer que  $f$  est solution de (E) si et seulement si  $f - P$  est solution de  $(E')$

- 4) En déduire la solution sur  $\mathbb{R}$  de (E) puis celle qui vérifie les conditions  $\begin{cases} y(0) = -1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

**Partie B:** On considère la fonction  $h$  sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = -4(x+1)e^{2x} + 2$$

- 1) Calculer les limites de  $h$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$
- 2) Calculer la dérivée de  $h$ , puis dresser son tableau de variations
- 3.a) Montrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$ .
- b) Vérifier que :  $-0,3 < \alpha < -0,2$
- c) En déduire que :  $\begin{cases} \forall x \in ]-\infty; \alpha[; h(x) > 0 \\ \forall x \in ]\alpha; +\infty[; h(x) < 0 \end{cases}$

**Partie C**

On considère la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = (-2x - 1)e^{2x} + 2x$$

- 1) Calculer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$
- 2) Démontrer que  $g'(x) = h(x)$
- 3.a) Montrer que la tangente (T) à (Cg) au point d'abscisse 0 a pour équation  $y = -2x - 1$
- b) Etudier la position relative de (T) et (Cg), (on étudiera les variations de la fonction  $g(x) - (-2x - 1)$ )
- 4.a) Montrer que la droite (D) d'équation  $y = 2x$  est une asymptote à (Cg) en  $-\infty$
- b) Etudier la position relative de (D) et (Cg)
- 5) Montrer que  $g(\alpha) = 2\alpha - 1 + \frac{1}{2\alpha+2}$
- 6) A partir de l'encadrement de  $\alpha$  dans la Partie B, donner un encadrement de  $f(\alpha)$
- 7) Dresser le tableau de variation de  $g$
- 8) En déduire que  $g(x) < 0$

183  
9) Construire la courbe représentative de  $g$ ,  $(C_g)$ ,  $(T)$  et  $(D)$

**Partie D :** On considère la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , par :

$$f(x) = -xe^{2x} + x^2 - 1$$

- 1) Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$
- 2) Démontrer que  $f'(x) = g(x)$ ; en déduire les variations de  $f$ .
3. a) Montrer que la parabole  $(P)$  d'équation  $y = x^2 - 1$  est asymptote à  $(C_f)$  en  $-\infty$
- b) Étudier la position relative de  $(P)$  et  $(C_f)$ .
- 4) Montrer que la tangente  $(T')$  à  $(C_f)$  au point d'abscisse 0 a pour équation  $y = -x - 1$
- 5) Construire la courbe représentative de  $f$   $(C_f)$ ,  $(T')$  et  $(P)$  dans le même repère
- 6) On considère par  $f^{-1}$  la bijection réciproque de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ 
  - a) Calculer  $f(0)$
  - b) Démontrer que le nombre dérivé de  $f^{-1}$  en  $-1$  existe
  - c) Calculer  $(f^{-1})'(-1)$
  - d) Construire sur le même graphique la courbe de  $f^{-1}$

**Partie E :** On considère par  $F$  l'intégrale définie par :

$$F(x) = -\int_0^1 f(x) dx$$

- a) Étudier l'existence de  $F(x)$
- b) Donner la nature de  $F(x)$
- c) Calculer alors  $F(x)$  en  $\text{cm}^2$ .

### SUJET N° 13

#### Exercice

1. Trouver suivants les valeurs de l'entier  $n$ , le reste de la division de  $4^n$  par 7.
2. Justifier que :  $1999 \equiv 4 [7]$
3. En déduire le reste de la division par 7 de  $(1999)^{132}$ .

4. Soit l'entier  $B_\alpha$  tel que :

$B_\alpha = 123^\alpha + 123^{2\alpha} + 123^{3\alpha} + 123^{4\alpha} + 123^{5\alpha}$ . Discuter suivant les valeurs de l'entier naturel  $\alpha$ , le reste de la division euclidienne de  $B_\alpha$  par 7.

5a) Quels sont les entiers naturels dont le carré est un diviseur de 1998 ?

b) Pour tout couple  $(a; b)$  d'entiers naturels on a :

$PPCM(a; b) = \mu$  et  $PGCD(a; b) = \delta$

Déterminer les couples  $(a; b)$  tel que :  $\mu^2 - 3\delta^2 = 1998$

**Problème :**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ . On désigne par  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(o; i; j)$ .

**Partie A :**

1. Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = xe^x + 1$ .

Etudier le sens de variation de  $h$  et démontrer que

$$h(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x + 2 - e^x$

a) Déterminer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et  $+\infty$

c) Étudier le sens de variation de  $g$  et dresser son tableau de variation

d) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet deux solutions sur

$\mathbb{R}$ . On note  $\alpha$  et  $\beta$  ces deux solutions, sachant que

$\alpha > \beta$ . Prouver que  $1.14 < \alpha < 1.15$ .

e) En déduire le signe de  $g(x)$  suivants les valeurs de  $x$

**Partie B :**

1. Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ , puis interpréter graphiquement les résultats.

2.a) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$

b) En déduire le sens de variation de  $f$  et dresser son tableau de variation.

- 3.a) Montrer que  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$
- b) En utilisant l'encadrement de  $\alpha$  établi dans la Partie A, déterminer un encadrement de  $f(\alpha)$  d'amplitude 0.01.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0.

5.a) Etablir que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$  avec  $u(x) = e^x - xe^x - 1$

b) Etudier le sens de variation de la fonction U et en déduire le signe de  $u(x)$ .

c) Déduire des questions précédentes, la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à la droite (T).

6. Tracer  $\mathcal{C}$  et (T). On prendra pour unité graphique 2cm sur l'axe des abscisses et 5cm sur l'axe des ordonnées.

On pourra admettre que  $-1.85 < \beta < -1.84$  et  $-1.19 < f(\beta) < -1.18$ .

**SUJET N° 14**

**Exercice**

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD(231 ; 3311)

2. Soit n un entier naturel supérieur à 2. On pose :

$$\begin{cases} A(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n \\ B(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \end{cases}$$

On rappelle que :  $A(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

a) Montrer par récurrence que  $B(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) On suppose que n est un multiple de 3. Déterminer dans ce cas le PGCD de  $A(n)$  et  $B(n)$

c) Vérifier le résultat obtenu dans le cas ou  $n = 21$ .

**Problème**

On considère la fonction f définiesur  $] -1 ; +\infty[$  par :  $f(x) = 2x \cdot \ln(x + 1) + \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1}$

**Partie A**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $]-1; +\infty[$  par :  $g(x) =$

$$2 \ln(x+1) + \frac{3x^2+4x-1}{(x+1)^2}$$

- 1) Calculer la limite de  $g$  en  $-1$  et en  $+\infty$ .
- 2) Etudier les variations de la fonction  $g$ .
3. a) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in ]-1; +\infty[$ .
- b) Justifier que :  $0,1 < \alpha < 0,2$  ;  
 $g(0,1) \approx -0,28$  et  $g(0,2) \approx 0,3$ .
- 4) En déduire que :  $\begin{cases} \forall x \in ]-1; \alpha[ & g(x) < 0 \\ \forall x \in ]\alpha; +\infty[ & g(x) > 0 \end{cases}$

**Partie B**

- 1) Calculer la limite de  $f$  en  $-1$  et en  $+\infty$ . En déduire une interprétation graphique du résultat.
- 2) Montrer que  $\forall x \in ]-1; +\infty[$  ;  $f'(x) = g(x)$ .
- 3) Etudier les variations de la fonction  $f$ .
- 4) Montrer que  $f(\alpha) = -2\alpha + 3 + \frac{2\alpha}{(\alpha+1)^2}$ .
- 5) Donner un encadrement de  $f(\alpha)$  à  $10^{-1}$  près et prouver que  $f(\alpha) > 0$ . En déduire que  $f(x) > 0$ .
- 6) Montrer que la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'abscisse 1 a pour équation  $y = \left(2 \ln 2 + \frac{3}{2}\right)x + \frac{3}{2}$ .
- 7) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ , donner une interprétation graphique du résultat.
- 8) Tracer  $(C)$  et  $(T)$ .

**Partie C**

On considère la fonction  $h$  définie sur  $]-1; +\infty[$  par :

$$h(x) = (x^2 + 1) \ln(x+1) + 2x + 1$$

- 1) Montrer que  $h$  est une primitive de  $f$ .
- 2) Calculer la limite de  $h$  en  $-1$  et en  $+\infty$ . En déduire les variations de la fonction  $h$ .

- 187
- 3) Calculer l'aire du domaine du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 2$ .
  - 4) Construire la courbe  $(C_h)$  dans le même repère
  - 5.a) Montrer que  $(C_h)$  réalise une bijection de  $] -1 ; +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$
  - b) Construire la courbe  $(C_{h^{-1}})$  dans le même repère.

### Partie D

Soit (S) l'application du plan dans lui-même définie par :  $Z' = Z + 1$

- 1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (S)
- 2) Déterminer l'expression analytique de (S)
- 3) Déterminer l'image de (T) par (S)
- 4) Démontrer que l'image de f par (S) est la courbe (D) d'équation :

$$y = 2(x + 1) \ln x + \frac{x^2 + 2}{x}$$

- 5.a) Montrer que  $f(x - 1) = y$ . Que peut-on déduire
- b) Tracer (D) sans étudier

### SUJET N° 15

#### Exercice:

On considère l'équation (E) :  $Z \in \mathbb{C}$ ,

$$Z^3 + (1 - 8i)Z^2 - (23 + 4i)Z - 3 + 24i = 0.$$

- 1.a) Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.
- b) Résoudre l'équation (E).
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C d'affixes respectives  $1+2i$ ,  $3i$ ,  $-2+3i$ . Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 2, -2 et 1.

- a) Déterminer puis écrire sous la forme trigonométrique les affixes des vecteurs  $\vec{GA}$ ,  $\vec{GB}$  et  $\vec{GC}$ .
- b) Démontrer que les affixes des vecteurs  $\vec{GA}$ ,  $\vec{GB}$  et  $\vec{GC}$  sont des termes d'une suite géométrique dont on déterminera la raison.
- c) En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C. Déterminer les éléments caractéristiques de cette similitude.

**Problème :**

**Partie A :** On considère la fonction numérique g définie sur R par :  $g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$

- 1. Etudier les variations de g.
- 2. Résoudre l'équation  $g(x) = 0$ .
- 3. En déduire suivant les valeurs de x, le signe de  $g(x)$ .

**Partie B :**

On considère la fonction numérique f définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$f(x) = 1 + 2x + \frac{e^x}{e^x - 1}$ . Le plan P est rapporté à un repère orthogonal  $(o; i; j)$  d'unité graphique 2cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées. On note C la courbe représentative de f dans ce plan.

- 1) Vérifier que, pour tout x de  $]0; +\infty[$ ,  $f(x) = 2 + 2x - \frac{1}{1 - e^x}$ .
- 2) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . Que peut-on déduire pour la courbe C ?
- 3) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- 4. a)  $f'$  étant la dérivée de f, montrer que  $f'(x)$  peut s'écrire, pour tout x de  $]0; +\infty[$ ,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(1 - e^x)^2}$$

- b) En déduire le signe de  $f'(x)$  selon les valeurs de x, et le tableau de variation de f.

189  
5) Montrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x + 2$  est asymptote à la courbe  $C$ . Préciser la position de  $C$  par rapport à  $\Delta$ .

6) Construire  $C$  et  $\Delta$  dans le repère  $(o, i, j)$ .

Partie C : On donne la fonction numérique  $F$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $F(x) = x + x^2 + \ln(e^x - 1)$ .

1) Démontrer que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$

2) Démontrer que la valeur exacte, en  $\text{cm}^2$ , de l'aire  $A$  de la partie du plan limitée par la courbe  $C$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation ;  $x = \ln 2$  et  $x = \ln 3$  est

$A = 2[\ln 3 + (\ln 3)^2 - (\ln 2)^2]$ . On donnera ensuite une valeur décimale approchée à 0,01 près de l'aire  $A$ .

### Sujet N° 16

#### Exercice :

Une automobile rencontre sur son trajet cinq feux tricolores. Pour chacun de ces feux, le rouge dure 15 secondes, les jaunes 5 secondes et le vert 40 secondes. Les cinq feux ne sont pas synchronisés et l'on suppose les aléas de la circulation sont tels que l'état d'un feu devant lequel se présente l'automobile ne dépend pas de l'état des autres feux rencontrés.

1. L'automobile se présente devant un feu. Quelle est la probabilité pour que le feu soit vert ?

2. Déterminer la probabilité pour que l'automobile sur l'ensemble de son trajet rencontre exactement trois fois le feu vert sur les cinq feux rencontrés.

3. On considère la variable aléatoire  $X$  qui prend pour valeur le nombre de feux verts rencontrés lors d'un trajet.

Déterminer la loi de probabilité de  $X$  et calculer l'Espérance mathématique  $E(X)$  de la variable aléatoire  $X$ .

**Problème**

**Partie A :** On appelle (E) l'équation différentielle  $y'' - y = 0$ , où  $y$  est une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels.

- 1) Déterminer les réels  $r$  tels que la fonction  $h$ , définie par  $h(x) = e^{rx}$ , soit solution de (E)
- 2) Vérifier que les fonctions  $\varphi$  définies par  $\varphi(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux nombres réels, solutions de l'équation (E). On admet qu'on obtient ainsi toutes les solutions de (E).
- 3) Déterminer la solution particulièrement de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées  $(\ln 2; \frac{3}{4})$  et admet en ce point une tangente dont le coefficient directeur est  $\frac{5}{4}$

**Partie B :** On appelle  $f$  la fonction définie sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels par :  $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ . On désigne par  $C$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O, i, j)$

- 1) Soit  $\mu$  un réel. Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \mu$  équivaut à  $e^{2x} - 2\mu e^x - 1 = 0$ . En déduire que l'équation  $f(x) = \mu$  a une solution unique dans  $\mathbb{R}$  et déterminer sa valeur en fonction de  $\mu$
- 2. a) Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$
- b) Calculer  $f'(x)$  pour tout nombre réel  $x$  et en déduire le sens de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 3. a) Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse 0.
- b) En étudiant le sens de variation de la fonction  $d$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $d(x) = f(x) - x$ , préciser la position de  $(C)$  par rapport à  $(T)$
- c) Tracer  $(C)$  et  $(T)$ . (Unité graphique 2cm)

19/1

4) Soit D la partie représentant sur le graphique l'ensemble des points M de coordonnées  $(x, y)$  tels que :  $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq f(x) \end{cases}$   
calculer, en  $\text{cm}^2$ , l'aire de D

### Partie C

On cherche à caractériser les fonctions  $\theta$ , dérivables sur l'ensemble des nombres réels, telles que, pour tout réel  $x$   
 $\theta(x) - \int_0^x (x-t)\theta(t) dt = x$  (H)

1) On suppose qu'il existe une telle fonction  $\theta$

a) Justifier que, pour tout nombre réel  $x$ ,

$$\theta(x) = x + x \int_0^x \theta(t) dt - \int_0^x t\theta(t) dt. \text{ Calculer } \theta(0)$$

b) Démontrer que, pour tout nombre réel  $x$ ,

$$\theta'(x) = 1 + \int_0^x \theta(t) dt. \text{ Calculer } \theta'(0)$$

c) Vérifier que  $\theta$  est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A. Déterminer laquelle parmi toutes les solutions explicitées dans la question A.2

2.a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\int_0^x t(e^t - e^{-t}) dt$

b) Démontrer que la fonction trouvée à la question 1.C vérifie bien la relation (H)

### Sujet N° 17

#### Exercice

Une urne contient quatre jetons marqués respectivement 1 ; 2 ; 3 et  $m$  ( $m \in \mathbb{R}^*$ ). On tire au hasard un jeton dans l'urne. On note  $P_1, P_2 ; P_3$  et  $P_m$  les probabilités respectives de tirer les jetons marqués 1 ; 2 ; 3 et  $m$ .

$P_1 ; P_2 ; P_3$  et  $P_m$  constituent dans cet ordre une suite arithmétique de raison  $\frac{1}{8}$

1. a) Montrer que  $P1 = \frac{1}{16}$
- b) Calculer  $P2$  ;  $P3$  et  $Pm$
2. On considère  $X$ , la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre marqué sur le jeton tiré
  - a) Définir la loi de probabilité de  $X$
  - b) Calculer  $m$  sachant que l'Espérance mathématique de  $X$  vaut 2.

**Problème :**

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + xe^{-x} \text{ et } g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x.$$

On notera  $C_f$  et  $C_g$  les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthonormé (unité graphique 2cm)

**Partie A :** Etude de  $f$  aux bornes de son intervalle de définition.

1. Montrer que  $f(x)$  peut s'écrire, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , sous la forme  $f(x) = xe^{-x} \left( \frac{1}{2}xe^x - e^x + 1 \right)$  ; en déduire la limite en  $-\infty$  de  $f$ .

2. a) Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $f$

b) On considère la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$h(x) = f(x) - g(x). \text{ Déterminer la limite en } +\infty \text{ de } h.$$

Donner une interprétation graphique de ce résultat

c) En utilisant le signe de  $h(x)$ , étudier la position relative des courbes  $C_f$  et  $C_g$ .

**Parité B :** Sens de variation de  $f$  et représentation graphique

1. a) Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$ . Montrer que pour tout nombre réel  $x$ ,  $f'(x) = (x - 1)(1 - e^{-x})$ . Étudier le signe de  $f'(x)$

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

2) Donner le tableau de variation de  $g$ .

3) Tracer  $C_f$  et  $C_g$

**Partie C :** Calcul d'une aire

1) Etant donnés deux nombres réels  $a$  et  $b$ , on considère la fonction  $H$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$H(x) = (ax + b)e^{-x}$ . Déterminer les valeurs de  $a$  et  $b$  pour que  $H$  soit une primitive de la fonction  $h$  sur  $\mathbb{R}$ .

2) On considère la partie du plan limitée par les deux courbes  $C_f$  et  $C_g$  et les droites d'équation  $x = 2$  et  $x = 6$ . Calculer l'aire  $A$ , exprimée en  $\text{cm}^2$ , de ce domaine. (On donnera sa valeur exacte puis son approximation décimale à  $10^{-2}$  près, par défaut).

SUJET N°18

EXERCICE

On considère la suite  $(U_n)$  définie par

$$\begin{cases} U_0 = 0; U_1 = 1 \\ \forall n \geq 1; U_{n+1} = 7U_n + 8U_{n-1} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite  $(S_n)$  définie par :

$S_n = U_n + U_{n-1}$  est une suite géométrique dont on précisera la raison. En déduire  $S_n$  en fonction de  $n$ .

2. On pose  $V_n = (-1)^n U_n$  et on considère la suite  $(t_n)$  définie par :  $t_n = V_{n+1} - V_n$ . Exprimer  $t_n$  en fonction de  $S_{n+1}$ .

3. Exprimer  $V_n$ , puis  $U_n$  en fonction de  $n$  (on pourra calculer de deux manières, la somme  $t_0 + t_1 + \dots + t_n$ ).

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{8^n}$ .

Problème

PARTIE A : Etude d'une fonction f

On définit la fonction  $f$  sur  $]0, +\infty[$  par

$$f(x) = \ln(\sqrt{1+x} - 1).$$

1. Calculer les limites de  $f$  en  $0$  et en  $+\infty$ .

2. Etudier le sens de variation de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .

3. Soit  $C$  la courbe représentative de  $f$  dans  $(O; u; v)$  et  $A$  le point de  $C$  d'abscisse 3. Calculer l'ordonnée de  $A$ .  
Soit  $B$  le point de  $C$  d'abscisse  $\frac{5}{4}$ ,  $P$  le projeté orthogonal de  $B$  sur l'axe  $(O, u)$  et  $H$  le projeté orthogonal de  $B$  sur l'axe  $(O, v)$ . Déterminer les valeurs exactes des coordonnées des points  $B$ ,  $P$  et  $H$ . Placer les points  $A$ ,  $B$ ,  $P$  et  $H$  dans le repère  $(o, u, v)$  et représenter la courbe  $C$ .

**Partie B : Utilisation d'une rotation**

Soit  $r$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . A tout point  $M$  du plan d'affixe  $z$ , la rotation  $r$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$ .

- 1.a) Donner  $z'$  en fonction de  $z$ . On note  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$  ou  $(x, y, x', y'$  réels), exprimer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$ , puis exprimer  $x$  et  $y$  en fonction de  $x'$  et  $y'$ .
  - b) Déterminer les coordonnées des points  $A'$ ,  $B'$  et  $P'$  l'image respectives des points  $A$ ,  $B$  et  $P$  par la rotation  $r$ .
2. On appelle  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^{-2x} + 2e^{-x}$  et  $\varphi$  sa courbe représentative dans le repère  $(o, u, v)$ .
- a) Montrer que lorsqu'un point  $M$  appartient à  $C$ , son image  $M'$  par  $r$  appartient à  $\varphi$ . On admet que lorsque le point  $M$  décrit  $C$ , le point  $M'$  décrit  $\varphi$ .
  - b) Tracer sur le graphique précédent les points  $A'$ ,  $B'$ ,  $P'$  et la courbe  $\varphi$  (l'étude des variations de  $g$  n'est pas demandée).

**Partie C : Calcul d'intégrales**

On rappelle que l'image d'un domaine plan par une rotation est un domaine plan de même aire.

1. Calculer l'intégrale  $\int_0^{\ln 2} g(x) dx$ . Interpréter graphiquement cette intégrale.
- 2.a) Déterminer, en unité d'aire, l'aire  $A$  du domaine plan  $D$  limité par les segments  $[AO]$ ,  $[OH]$  et  $[HB]$  et l'arc de courbe  $C$  d'extrémités  $B$  et  $A$ .
- b) On pose  $I = \int_{5/4}^3 \ln(\sqrt{1+x} - 1) dx$ . Trouver une relation entre  $A$  et  $I$  puis en déduire la valeur exacte de l'intégrale  $I$ .

### SUJET N°19

#### Exercice

1. On considère dans l'ensemble  $C$  des nombres complexes, l'équation :  
 (E) :  $Z^4 + (-5 + 3i)Z^3 + (8 - 9i)Z^2 + (-14 + 6i)Z + 10 = 0$ 
  - a) Vérifier que  $1$  et  $i$  sont des solutions évidentes de (E)
  - b) Résoudre l'équation (E)
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives  $1, i, 1 - 3i$  et  $3 - i$ .
  - a) Placer ces points dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$
  - b) Soit  $S$  la similitude directe qui transforme  $A$  en  $C$  et  $B$  en  $D$ .
    - b1) Déterminer l'écriture complexe de  $S$ .
    - b2) Donner les éléments caractéristiques de  $S$  (centre  $\Omega$ , rapport  $k$  et d'angle  $\theta$ )
3. On considère la suite de points  $M_n$  d'affixe  $Z_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) avec  $Z_0 = i$  et
 
$$Z_{n+1} = -2iZ_n + 1 - i.$$

- a) Calculer  $\frac{z_{n+1}-\omega}{z_n-\omega}$  ou  $\omega$  est l'affixe du centre  $\Omega$  de la similitude  $S$ .

En déduire la nature du triangle  $\Omega M_n M_{n+1}$ .

- b) Démontrer que la suite  $(U_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  définie par la relation :  $U_n = |z_{n+1} - z_n|$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

- c) Exprimer en fonction de  $n$  la longueur

$$d_n = M_0 M_1 + M_1 M_2 + \dots + M_{n-1} M_n + M_n M_{n+1} \text{ avec } n \geq 2$$

ProblèmePartie A

On considère la fonction numérique de  $f$  définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par :

$f(x) = x + 1 - (2x + 1)\ln x$  ou  $\ln$  est la fonction logarithme népérien.

- 1°a) Calculer les fonctions  $f'(x)$  et  $f''(x)$  dérivées première et seconde de  $f$ .
- b) Déterminer le sens de variation de  $f'$ . En déduire que pour tout réel  $x$  strictement positif  $f'(x) < 0$ .
- 2°a) Indiquer le sens de variation de  $f$
- b) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de l'intervalle de définition.
- c) Démontrer qu'il existe un et un seul nombre réel  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 0$ . Justifier que 1,83 est une valeur décimale approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  par défaut.
- d) Donner les signes de  $f(x)$  selon les valeurs de  $x$ .

Partie B

Etude de la fonction numérique  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$

$$\text{par : } g(x) = \frac{\ln x}{x^2 + x}$$

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $g$  dans le plan rapporté au repère orthonormé  $(o, i, j)$  d'unité 4 cm sur  $(ox)$  et 12 cm sur  $(oy)$ .

- 1°a) Déterminer le sens de variation de  $g$  (on montrera que  $g'(x)$  a le même signe que  $f(x)$ ). Vérifier que  $g(\alpha) = \frac{1}{\alpha(2\alpha+1)}$  ( $\alpha$  est le nombre réel défini dans la partie A)
- b) Déterminer les limites de  $g$  aux bornes de l'intervalle de définition. Interpréter graphiquement ces résultats.
- 2°) Tracer la courbe  $(C)$  et sa tangente au point d'abscisse 1.

Parti C

Majoration de l'intégrale

$$I(\theta) = \int_1^\theta \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx \text{ ou } \theta \text{ est un réel tel que } \theta > 1$$

1°) Donner l'interprétation générale de  $I(\theta)$ .

2°a) Montrer que  $I(\theta) \leq \int_1^\theta \frac{\ln x}{x^2} dx$

b) A l'aide d'une intégration par partie calculer  $\int_1^\theta \frac{\ln x}{x^2} dx$ .

En déduire que pour tout réel  $\theta$  élément de  $[1; +\infty[$ ,  $I(\theta) < 1$ .

### SUJET N 20

#### Exercice

Soit la suite  $U_n$  définie par :

$$U_1 = -1 \text{ et } U_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)} U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \text{ pour } n > 0$$

1. Montrer, en raisonnant par récurrence, que la suite  $U_n$  est majorée par 3.
2. Etudier le sens de variations de la suite  $U_n$ .
3. On considère la suite  $V_n$  définie pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $V_n = n(3 - U_n)$ . Montrer que  $V_n$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
4. Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .

#### Problème :

On considère la fonction numérique  $f$  de la variable réelle  $x$

$$\text{définie par } f(x) = \frac{e^x}{x+2}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, i, j)$ , l'unité graphique étant égale à 2cm.

- 1.a) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ . Etudier les limites de  $f$  aux bornes du  $D_f$ . Préciser les asymptotes de la courbe (C).

b) Etudier les variations de  $f$ ; dresser son tableau de variation. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

c) Construire avec soin (T) et la courbe (C).

2. On se propose de montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet sur  $[0; 1]$  une solution unique.

a) Etudier les variations de la fonction dérivée  $f'$  sur  $[0; 1]$ . Démontrer que pour tout  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$ , on a :

$$\frac{1}{4} < f'(x) < \frac{2}{3}$$

b) Etudier les variations de la fonction numérique  $g$  définie sur  $[0; 1]$  par  $g(x) = f(x) - x$ . Démontrer que l'équation  $f(x) = x$  dans  $[0; 1]$  une solution unique  $\alpha$ . Vérifier que :

$$\frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{e}{3}$$

3. On se propose de déterminer une valeur approchée de  $\alpha$ .

Soit  $(U_n)$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

a) Démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq U_n \leq \frac{e}{3}$

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |U_n - \alpha|$ .

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

c) Démontrer que la suite  $(U_n)$  est convergente. Quelle est sa limite ?

d) Déterminer un entier  $n_0$  tel que : Si  $n \geq n_0$ , alors

$$|U_n - \alpha| \leq 10^{-2}$$

4. Ne connaissant pas de primitive de la fonction  $f$  sur  $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ , on se propose de déterminer un encadrement de l'intégrale  $I$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx.$$

- a) Justifier l'existence de I et en donner une interprétation graphique.
- b) On pose  $J = \int_0^{\frac{1}{2}} (2 - x)e^x dx$  et  $K = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx$ : Vérifier que :  $4I = J + K$ .
- c) Calculer J.
- d) Quelle est l'image par f du segment  $[0; \frac{1}{2}]$ ?  
En déduire un encadrement de K par deux intégrales simples que l'on calculera.
  - a) A l'aide des questions précédentes, écrire un encadrement de l'intégrale I. En déduire un encadrement de I, d'amplitude  $10^{-2}$  par des nombres décimaux.

INGENIEUR DE MINES

Exercice

Une variable aléatoire  $X$  prend les valeurs : 1; -1 et 2 avec les probabilités respectives :  $e^a, e^b$  et  $e^c$  ou  $a, b$  et  $c$  sont en progression arithmétique. On suppose que l'espérance mathématique  $E(X) = 1$ .

1. Calculer  $a, b$  et  $c$  et la variance  $V(X)$ .
2. Soit  $A, B$  et  $C$  trois points d'abscisses respectifs : 1; -1 et 2 d'une droite graduée  $(D)$ 
  - a) Calculer l'abscisse du point  $G$  barycentre de  $\{(A; 1), (B; 2), (C; 4)\}$
  - b) On pose :  $\varphi(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$ , ou  $M$  est un point de  $(D)$ . Montrer que  $\varphi(G) = V(X)$ .
  - c) Déterminer l'ensemble  $(T)$  des points  $M$  de  $(D)$  tels que  $\varphi(M) = 3$

Problème :

On considère la fonction  $f$  dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  et définie par :  $f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{2\ln x}{x}$ .  $(C)$  est la représentation graphique de  $f$  dans le repère orthonormé  $(o, i, j)$ . Unité 2cm.

**Partie A**

On considère la fonction  $u$  dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  et définie par  $u(x) = x^2 + 4 - 4\ln x$

- 1. Etudier les variations de  $u$ .
- 2. Justifier que  $\forall x \in ]0; +\infty[, u(x) > 0$

**Partie B**

- 1. Calculer la limite de  $f$  en  $0$  et interprétation graphiquement le résultat.
- 2.a) Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$
- b) Démontrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = \frac{1}{2}x - 1$  est asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$
- 3.a) Vérifier que  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = \frac{u(x)}{2x^2}$
- b) En déduire le sens de variation de  $f$  et dresser son tableau de variation.
- 4.a) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution  $\alpha$  tel que  $1 < \alpha < e$
- b) Déterminer une valeur approchée à  $10^{-1}$  près de  $\alpha$
- 5.a) Démontrer qu'il existe un point  $A$  de  $(C)$  où la tangente  $(T)$  est parallèle à la droite  $(D)$ .
- b) Donner les coordonnées du point  $A$ .
- c) Etudier la position relative de  $(D)$  par rapport à  $(C)$
- d) Construire  $(T)$ ,  $(D)$  et  $(C)$ .

**SUJET N° 22**

**Exercice**

On lance deux dés non pipés, dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on désigne par  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque lancer associe la valeur absolue de la différence des nombres obtenus.

- 1. Déterminer la loi de probabilité de  $X$
- 2. Définir la fonction de répartition de  $X$  et tracer sa courbe représentative.

3. Calculer l'espérance mathématique et l'écart type de X.

203

### Problème

La partie A est l'étude d'une fonction auxiliaire  $g$  nécessaire à l'étude de la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  
 $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$ . L'étude de la fonction  $f$  fait l'objet de la partie B. La partie C est l'étude de deux suites numériques associées.

#### Partie A

On considère la fonction numérique  $g$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $g(x) = x^2 - 2\ln x$

1°) Etudier le sens de variation de  $g$ .

2°) En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $]0, +\infty[$ .

#### Partie B

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$ . On appelle (C) la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O ; i ; j)$  (unité graphique 2cm).

1°) Déterminer la limite de  $f$  en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2°-a) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

b) Déterminer, sur  $]0, +\infty[$ , la position de (C) par rapport à la droite (D) d'équation  $y = \frac{x}{2}$ . Montrer en particulier que (D) coupe (C) en un point A que l'on déterminera.

3°) Etudier le sens de variation de  $f$ . Dresser le tableau de variation de  $f$ .

4) Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à (D). Préciser les coordonnées de B.

5) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  a une solution unique  $\alpha$ .

Justifier l'encadrement :  $0,34 < \alpha < 0,35$ .

6) Tracer la courbe (C) et les droites (D) et (T).1

**Partie C**

On considère la fonction numérique  $x_n$  définie par

$x_n = e^{\frac{n-2}{2}}$  pour tout nombre entier naturel  $n$ .

1° a) Montrer que  $x_n$  est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b) Montrer que  $x_n$  est une suite croissante.

2° Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :

$a_n = 4 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left( f(x) - \frac{x}{2} \right) dx$

a) Donner une interprétation géométrique de  $a_n$ .

b) Montrer que  $a_n = \frac{2n+1}{2}$  pour tout nombre entier naturel  $n$ .

En déduire que  $(a_n)$  est une suite arithmétique.

**SUJET N°23**

**Exercice:**

1. Trouver les nombres de trois chiffres dont le produit de chacun par 4 se termine par 364.
2. Trouver les nombres de deux chiffres qui sont multiples du produit de leurs chiffres.

**Problème**

**Partie A**

On considère la fonction de variable réel  $x$  définie par :  $g(x) = (1-x)e^{1-x} - 1$

1° a) Justifier que la limite de  $g$  en  $+\infty$  est  $-1$

b) Déterminer la limite de  $g$  en  $-\infty$

2° a) Démontrer que  $\forall x \in R, g'(x) = (x-2)e^{1-x}$

b) Etudier les variations de  $g$  et dresser son tableau de variation

3° a) Démontrer que  $\forall x \in R, g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$

b) En déduire que : 
$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty; \alpha[ & g(x) > 0 \\ \forall x \in ]\alpha; +\infty[ & g(x) < 0 \end{cases}$$

205

### Partie B

On considère la fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et définie par :

$$f(x) = xe^{1-x} - x + 2$$

On note par  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; i; j)$ . L'unité graphique est 2cm

1°) Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$

2°a) Démontrer que  $f$  est une primitive de  $g$

b) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

3°a) Démontrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = -x + 2$  est une asymptote oblique à  $(C)$  en  $+\infty$ .

b) Etudier la position relative de  $(D)$  et  $(C)$

4°) Démontrer que  $(C)$  admet en  $-\infty$  une branche parabolique de direction  $(OJ)$ .

5) Déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point  $x = 1$ .

6°) Démontrer que  $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$

7°) Justifier que, pour tout nombre réel  $x$ ,

$$f(-x + 2) = e^{x-1} f(x)$$

8°) On admet que l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement deux solutions. On appelle  $\beta$  l'une de ses solutions.

Démontrer que  $-\beta + 2$  est l'autre solution.

9°) Tracer  $(D)$ ,  $(T)$  et  $(C)$

On prendra  $\alpha = 0,4$  et  $\beta = 2,5$

### Partie C

Soit  $\theta$  un nombre réel strictement positif et  $S(\theta)$  l'aire en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan délimitée par  $(C)$  la droite  $(D)$  d'équation  $y = -x + 2$  et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = \theta$ .

1°) Calculer  $S(\theta)$  à l'aide d'une intégration partie.

2°) Déterminer la limite de  $S(\theta)$  lorsque  $\theta$  tend vers  $+\infty$ .

SUJET N° 24

EXERCICE:

On compose un jury en tirant au sort 3 personnes parmi 7 volontaires : 4 hommes et 3 femmes.  $X$  désigne la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de femme qu'il présente.

- 1. Déterminer la loi de probabilité de  $X$  et calculer son espérance mathématique.
- 2. Calculer la probabilité pour qu'il ait au moins une femme dans le jury.

Problème

Partie A

Soit la fonction  $g$  de  $R^*$  dans  $R$  définie par :

$$g(x) = -x|x| + 1 - \ln|x|.$$

1) Etudier le sens de variation de la fonction  $g$  et dresser son tableau de variation.

(On ne demande pas de calculer les limites aux bornes du  $D_f$ )

2.a) Déterminer le signe de  $g(x)$  sur  $]-\infty; 0[$

b) Calculer  $g(1)$ . Déterminer le signe de  $g(x)$  sur  $]0; +\infty[$ .

Partie B

Soit la fonction  $f$  de  $R^*$  dans  $R$  définie par :

$$f(x) = -|x| + \frac{\ln|x|}{x}$$

Soit  $(C)$  la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthonormé  $(o ; i ; j)$

(Unité sera égale à 1cm)

1.a) En utilisant les résultats de la partie A, étudier le sens de variation de  $f$ .

- b) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition et dresser son tableau de variation.
2. Déterminer le signe de  $f(x)$  sur  $]0; +\infty[$
3. Démontrer que les droites  $(D_1)$  d'équation  $y = x$  et  $(D_2)$  d'équation  $y = -x$  sont asymptotes à  $(C)$  respectivement en  $+\infty$  et  $-\infty$
- 4.a) Déterminer l'intersection de  $(C)$  et  $(D_2)$  sur  $]0; +\infty[$
- b) Étudier la position relative de  $(C)$  et  $(D_2)$  sur  $]0; +\infty[$
- 5.a) Déterminer l'intersection de  $(C)$  et  $(D_1)$  sur  $] -\infty; 0[$
- b) Étudier la position relative de  $(C)$  et  $(D_1)$  sur  $] -\infty; 0[$
- 6) Tracer  $(C)$ ,  $(D_1)$  et  $(D_2)$

### Partie C

On se propose de déterminer l'intersection de  $(C)$  et  $(D_2)$  sur  $] -\infty; 0[$

Soit  $h$  la fonction définie sur  $] -\infty; 0[$  par :

$$h(x) = f(x) + x$$

- 1.a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ .
- b) Étudier le sens de variation de la fonction  $h$  et dresser son tableau de variation.
- 2.a) Démontrer que pour tout  $x \in ] -\infty; 0[$ , l'équation  $f(x) = -x$  admet une solution unique  $\alpha$
- b) Démontrer que :  $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$

### Partie D

1. Soit  $t$  un nombre réel tel que  $t \geq 1$ .

Calculer l'aire  $A(t)$  de la partie du plan délimitée par  $(D_2)$ ,  $(C)$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = t$ .

2. On pose, pour tout nombre réel  $t$  tel que  $t \geq 1$  ;

$$J(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx$$

- a) À l'aide d'une intégration par partie, calculer  $J(t)$
- b) Démontrer que :  $0 \leq J(t) \leq 1$
- c) Déterminer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} J(t)$ .

SUJET N° 25

Exercice

1. On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Toutes les cartes ont la même probabilité d'être choisies. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
  - A : « La carte choisie est la dame de cœur »
  - B : « La carte choisie est un cœur »
  - C : « La carte choisie est un cœur ou un as »
  - D : « La carte choisie n'est ni un cœur, ni un as »
2. On choisit une carte au hasard parmi les cœurs. Tous les cœurs ont la même probabilité d'être choisis. Calculer la probabilité de l'évènement F : « La carte choisie est une figure ».

Problème

Partie A :

Soit g la fonction définie sur R par :

$$g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1 + 2e^x)$$

1. Calculer  $g'(x)$  et montrer que ce nombre est strictement négatif pour tout x de R.
2. Déterminer les limites de g en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
3. Dresser le tableau de variation de g.
4. Donner le signe de g(x).

Partie B :

Soit la fonction f définie sur R par  $f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x)$   
On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques 4cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées).

1. calculer  $f'(x)$  et montrer que pour tout réel x,  
 $f'(x) = 2e^{-2x} g(x)$ .
- 2.a) Déterminer la limite de f en  $-\infty$ .

- b) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- 3. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 4. Tracer  $(C)$ .

5. Soit  $\alpha$  un nombre réel strictement positif.

a) Vérifier que, pour tout réel  $x$ ,  $\frac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$ . En déduire la valeur de l'intégrale

$$I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+2e^x} dx.$$

b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale :  $J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx$ . Donner une interprétation graphique de  $J(\alpha)$ .

**Partie C**

On considère l'équation différentielle (E) :  $y'+2y = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$   
 Vérifier que la fonction  $f$  étudiée dans la partie B est solution de (E).

**SUJET N°26**

**Exercice :**

On considère l'équation (E) :  $Z \in \mathbb{C}$ ,  
 $Z^3 + (1 - 8i)z^2 - (23 + 4i)z - 3 + 24i = 0$ .

- 1.a) Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.
- b) Résoudre l'équation (E).

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C d'affixes respectives  $1+2i$ ,  $3i$ ,  $-2+3i$ . Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 2, -2 et 1.

- a) Déterminer puis écrire sous la forme trigonométrique les affixes des vecteurs  $\vec{GA}$ ,  $\vec{GB}$  et  $\vec{GC}$ .
- b) Démontrer que les affixes des vecteurs  $\vec{GA}$ ,  $\vec{GB}$  et  $\vec{GC}$  sont des termes d'une suite géométrique dont on déterminera la raison.

c) En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C. Déterminer les éléments caractéristiques de cette similitude.

**Problème**

**Partie A :**

Résolution de l'équation différentielle (E):  $y' + y = x - 1$ .

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\int_1^x e^t(t - 1)dt$

2.a) Soit z une fonction dérivable sur l'ensemble R des nombres réels. On pose  $f(x) = z(x)e^{-x}$ . Montrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si pour tout x de R,  $z'(x) = e^x(x - 1)$ .

b) A l'aide de la première question, déterminer toutes les fonctions z vérifiant pour tout x de R,  $z'(x) = e^x(x - 1)$ .

3. Déduire de la question précédente les solutions de (E)

b) Déterminer la solution de (E) pour laquelle l'image de 1 est 0.

**Partie B :**

**Etude d'une fonction**

Soit f la fonction définie sur R par  $f(x) = x - 2 + e^{1-x}$ . Le plan est rapporté à un repère orthonormé (o, i, v) (unité graphique : 1cm). On désigne par (Cf) la courbe représentative de f.

1.a) Etudier le sens de variation de f.

b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ , et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,

2.a) Montrer que la droite (D), d'équation  $y = x - 2$ , est asymptote à la courbe (Cf).

b) Préciser la position de (Cf) par rapport à (D).

3. Tracer (D) et (Cf).

**Partie C :**

Calcul d'aire

1. On considère le domaine limité par la courbe (Cf), son asymptote (D) et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = x_0$ . Exprimer, à l'aide de  $x_0$ , l'aire  $S_1$  de ce domaine.
2. On considère la fonction  $g$ , définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^{1-x}$ .
  - a) Étudier  $g$ , puis tracer sa courbe représentative (Cg).
  - b) Donner une interprétation, en terme d'aire, de l'intégrale ayant servi au calcul de  $S_1$  à l'aide de la courbe (Cg).
3. A est le point de coordonnées  $(x_0 ; 0)$ . B est le point de la courbe (Cg) d'abscisse  $x_0$ . Soit (T) la tangente à la courbe (Cg) au point d'abscisse  $x_0$ . C est le point d'intersection de (T) et de l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées de C.
4. Calculer (en unités d'aire) l'aire  $S_2$  du triangle ABC. Vérifier que  $S_1 + 2S_2 = 0$ .

**SUJET N°27**

**Exercice**

Soit dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $Z^2 - (4 + 3i\sqrt{3})Z + 6i\sqrt{3} = 0$ .

1. Résoudre cette équation. Soient  $Z_1$  et  $Z_2$  les solutions ;  $Z_1 \in \mathbb{R}$ . A, B et C sont les points du plan complexe d'affixes respectives  $Z_1, Z_2$  et  $-7 + 6i\sqrt{3}$ .
2. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe  $S$  telles que  $S(A) = B$  et  $S(B) = C$
3. Déterminer l'expression analytique de  $S$ .

**Problème**

**Partie A** : Soit  $f$  la fonction numérique d'une variable réelle définie par :

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right|$$

1. Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .
2. Étudier les variations de  $f$ .

3. On désigne par (Cf) la courbe de f dans un repère orthonormé (0, i, j)  
(Unité 2cm). Montrer que la droite ( $\Delta$ ) d'équation  $y = -\frac{x}{2}$  est asymptote à (Cf). Préciser la position de (Cf) par rapport à ( $\Delta$ ).
4. Montrer que le point  $I(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$  est centre de symétrie pour (Cf).
5. Donner une équation de la tangente de la tangente en I à (Cf).
6. Construire (Cf).
7. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $x_0$  et que :  $\frac{2}{5} < x_0 < \frac{9}{20}$  (on donne :  $\ln 2 = 0,693; \ln 3 = 1,099; \ln 11 = 2,398$ )

### Partie B

Soit  $\theta \in ]1; 2[$ .

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$\int_{\theta}^2 \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) dx$$

2. En déduire l'aire  $A(\theta)$ , en  $\text{cm}^2$ , de la partie du plan dont les points ont des

coordonnées  $x$  et  $y$  telles que : 
$$\begin{cases} \theta \leq x \leq 2 \\ f(x) \leq y \leq \frac{-x}{2} \end{cases}$$

3. Calculer :  $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} A(\theta)$ , avec  $\theta > 1$

### SUJET N°28

#### Exercice

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O.

Déterminer les applications suivantes :

a)  $r(B; \frac{\pi}{3})$  or  $(C; \frac{\pi}{3})$

b)  $r(E; \frac{\pi}{3})$  or  $(O; \frac{2\pi}{3})$

#### Problème

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la fonction  $f_n$  définie

$$\text{sur l'intervalle } [0; +\infty[ \text{ par : } \begin{cases} f_n(x) = x^n \ln x - \frac{x^n - 1}{n} & \text{si} \\ f_n(0) = \frac{1}{n} \end{cases}$$

$x > 0$

On désigne par  $(C_n)$  la représentation graphique de  $f_n$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(o; i, j)$  (unité 2cm)

**Partie A**

1. Etudier la continuité de  $f_n$  à droite en 0.
2. Déterminer la limite de  $\frac{f_n(x) - \frac{1}{n}}{x}$  lorsque  $x$  tend vers 0 par valeurs supérieures (on distinguera les cas  $n = 1$  et  $n > 1$ ). Interpréter géométriquement les résultats obtenus.
3. Etudier le sens de variation de  $f_n$ . Préciser la nature de la branche infinie.
4. Construire  $(C_1)$  et  $(C_2)$ .

**Partie B**

Soit  $\lambda$  un réel strictement positif.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer en fonction de  $\lambda$  l'intégrale :  $\int_{\lambda}^1 x^2 \ln x dx$ .
2. En déduire la valeur, en fonction de  $\lambda$ , de  $I(\lambda)$  tel que :  $I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(x) dx$ .
3. Calculer la limite de  $I(\lambda)$  quand  $\lambda$  tend vers 0. En déduire l'aire en  $cm^2$  de la portion de plan limitée par  $(C_2)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 1$ .

**Partie C**

1. On pose, pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0; 1[$ ,  $g(x) = f_2(x) - x$ . Dresser le tableau de variation de  $g$ . En déduire que l'équation  $f_2(x) = x$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $]0; 1[$ .

2.a) Etudier le sens de variation de  $f_2'(x)$ , sur l'intervalle  $]0; 1]$  et dresser son tableau de variation.

b) Démontrer que, pour tout

$x$  de l'intervalle  $[0; 1]$ , on a :  $|f_2'(x)| \leq \frac{2}{e}$

3. On considère la suite  $(U_n)$  définie :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f_2(U_n) \end{cases}$$

a) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n \in [0; 1]$

b)  $\alpha$  étant le nombre réel défini à la question C.1, démontrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{e} |U_n - \alpha|$ ,

c) Démontrer par récurrence que :  $|U_n - \alpha| \leq (\frac{2}{e})^n |1 - \alpha|$ .

d) En déduire que la suite  $(U_n)$  converge vers  $\alpha$ .

**SUJET N°29**

**Exercice**

Une urne U contient une boule portant le numéro 1 et deux boules portant le numéro 2. Une urne V contient une boule portant le numéro 4 et n boules portant le numéro 3. On tire au hasard une boule de U, une boule de V et on désigne par X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des numéros portés par les deux boules.

1. Déterminer en fonction de n la loi de probabilité de X.
2. Calculer en fonction de n l'Espérance mathématique E(X).
3. Déterminer n pour que :  $E(X) = \frac{59}{12}$ .
4. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle  $E(X) < 4,8$ .

**Problème**

**Partie A :** Soit la fonction définie par :

$f(0) = 0$  et pour tout réel  $x$  :

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. Soit  $\varphi$  la fonction dérivable sur  $]0, +\infty[$  et définie par :

$$\varphi(x) = \ln x + x + 1.$$

- a) Etudier le sens de variation de  $\varphi$ .
  - b) Démontrer que l'équation  $\varphi(x) = 0$  admet une solution unique  $\beta$  telle que  $0,27 \leq \beta \leq 0,28$ .
3. a) Exprimer  $f'(x)$  en fonction de  $\varphi(x)$ .  
En déduire les variations de f.
  - b) Vérifier que :  $f(\beta) = -\beta$
  - c) Calculer la limite de f en  $+\infty$
  - d) Dresser le tableau de variation de f.

4. Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (o,i,j), (unité graphique 2cm).

**Partie A :** Etude d'une fonction auxiliaire. Soit g la fonction définie sur R par :

$$g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}.$$

1. Etudier les limites de g en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
2. Calculer la dérivée de g et déterminer son signe.
3. En déduire le tableau de variation de g.

Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans d'un repère orthonormé (o,i,j).

On placera en particulier les pions d'abscisses 1 ; 3 ; 4 ;  $e^2$  ; 12.

On prendra :  $\ln 0,27 \approx -1,31$  ;  $\ln 0,28 \approx -1,27$  ;  $\ln 2 \approx 0,7$  ;  $\ln 3 \approx 1,1$  ;  $\ln 5 \approx 1,6$ .

**Partie B**

- a) Démontrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $[3; 4]$ .

b) Démontrer que les équations  $f(x) = 1$  et  $e^{1+\frac{1}{x}} = x$  sont équivalentes. Soit  $g$  la fonction dérivable sur  $]0, +\infty[$  et définie pour tout réel strictement positif  $x$  par :

$$g(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$$

- a) Etudier le sens de variation de  $g$ .
- b) Démontrer que pour tout  $x$  élément de  $[3; 4]$ ,  $g(x)$  est un élément de  $[3; 4]$
- c) Démontrer que :  $\forall x \in [3; 4], |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ .

On prendra  $e^{\frac{4}{3}} \approx 3,8$ ;  $e^{\frac{5}{4}} \approx 3,49$ .

3. Soit  $(U_n)$  la suite définie par :  $U_0 = 3$  et la relation de récurrence  $U_{n+1} = g(U_n)$ .

- a) Démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [3; 4]$ .
- b) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$ .

En déduire que  $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$ .

- c) Démontrer que la suite  $(U_n)$  est convergente. Calculer sa limite.
- d) Pour quelles valeurs de  $n$ ,  $(U_n)$  est une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près ?

Partie C

1. Soit  $n$  un entier naturel non nul. Démontrer que l'équation  $f(x) = n$  admet une solution  $\alpha_n$  et une seule. Placer  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  dans le même repère que précédemment.

2.a) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a :  $\alpha_n \geq e^n$ .

b) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ , on :  $f(\alpha_n) = n$  est équivalent à  $\ln \frac{\alpha_n}{e^n} = \frac{n}{\alpha_n}$ .

c) Déduire des questions 2.a et 2.b que la suite  $\frac{\alpha_n}{e^n} \ n \in \mathbb{N}^*$  est convergente et calculer sa limite.

SUJET N°30

Exercice

1. Une urne contient trois boules : une rouge, une verte, une bleue. On tire successivement deux boules de l'urne. Avant de tirer la deuxième la boule, on remet dans l'urne la première boule obtenue. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

Donner l'ensemble des neufs tirages possibles.

2. On convient de la règle suivante : le tirage d'une boule rouge fait marquer 1 point, celui d'une verte fait marquer 2 points et celui d'une bleue fait marquer -3 points.

On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe la somme des points marqués.

Par exemple : au tirage (rouge, rouge), on associe +2 ; au tirage (verte, bleue) on associe -1.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer la probabilité de perdre (c'est-à-dire d'obtenir une somme de points négative).

d) Calculer l'Espérance mathématiques E(X) de X. Que représente E(X) ?

Problème :

Partie A : Etude d'une fonction

On considère la fonction f définiesur ]0 ; +∞[ par :  $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$ . Soit C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (o,i,j) ; unité graphique 5cm.

1. Calculer les limites de f en 0 en +∞. Déterminer les asymptotes de C.

- 2. Etudier le sens de variation de  $f$ . Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 3. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet sur l'intervalle  $[\frac{1}{e}; 1]$  une solution unique noté  $\alpha$ . Déterminer un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 0,01. Donner suivants les valeurs de  $x$ , le signe de  $f(x)$  sur  $]0; +\infty[$ .
- 4. Tracer la courbe  $C$ .

**Partie B : Calcul d'aire**

- 1. Déterminer une équation de la tangente (D) à  $C$  au point d'abscisse 1.
- 2.a) Soit  $\varphi$  la fonction définie, pour tout  $x > 0$  par ;  

$$\varphi(x) = x - x^2 + \ln x.$$
Calculer  $\varphi'(x)$ . En déduire le sens de variation de  $\varphi$ , puis le signe de  $\varphi(x)$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

- b) Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) - x = \frac{\varphi(x)}{x}$
- c) En déduire la position relative de  $C$  et de (D).
- 3. On considère le domaine limité sur le graphique par l'axe des abscisses, la courbe  $C$  et la tangente (D).

- a) Hachurer ce domaine
- b) Soit  $A$  son aire, en  $cm^2$ . Ecrire la valeur exacte de  $A$  comme expression polynomiale du second degré en  $\alpha$ .

**Partie C : Etude d'une suite**

Soit  $x_0$  un réel appartenant à l'intervalle  $]\frac{1}{e}; \alpha]$ . On note  $M_0$  le point de  $C$  d'abscisse  $x_0$ .

- 1.a) Donner une équation de la tangente  $T_0$  à  $C$  en  $M_0$ , en fonction de  $x_0, f(x_0)$  et  $f'(x_0)$ .
- b) Soit  $x_1$  l'abscisse du point d'intersection de  $T_0$  avec l'axe des abscisses. Ecrire  $x_1$  en fonction de  $x_0, f(x_0)$  et  $f'(x_0)$ .
- 2. On considère la fonction  $h$  définiesur  $]\frac{1}{e}; \alpha[$  par :  $h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ , (On remarquera que  $h(x_0) = x_1$ )

- a) Calculer  $f''(x)$  et étudier son signe sur  $] \frac{1}{e}; \alpha[$
- b) Montrer que  $h'(x) = \frac{f''(x) \cdot f(x)}{[f'(x)]^2}$ .
- c) En déduire que  $h$  est strictement croissante sur  $] \frac{1}{e}; \alpha[$  puis montrer que  $x_1 < \alpha$ .
- d) En écrivant  $h(x) - x = -\frac{f(x)}{f'(x)}$ , étudier le signe  $h(x) - x$  sur  $] \frac{1}{e}; \alpha]$ . En déduire que  $\frac{1}{e} < x_0 < x_1 < \alpha$ .
- 3.a) Démontrer que, pour tout  $x \in ] \frac{1}{e}; \alpha]$ ,  $h(x) \in ] \frac{1}{e}; \alpha]$ .
- b) On considère la suite  $(x_n)$  de réels définie par  $x_0$  et  $x_{n+1} = h(x_n)$  pour tout entier naturel  $n$ .  
Montrer que la suite  $(x_n)$  est strictement croissante.

2020

# EXAMEN 1

Session normale Juin 1998

## EXERCICE 1

Soit les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies par :  $a_0 = 1$  ;  $b_0 = 8$  et pour tout élément  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$  ;  $b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}$ .

- 1) Calculer  $a_1$  et  $b_1$ .  
Soit la suite  $(d_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $d_n = b_n - a_n$ .
- 2) a. Démontrer que  $(d_n)$  est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme  $d_0$  et la raison.  
En déduire une expression de  $d_n$  en fonction de  $n$ , puis en déduire que : pour tout élément  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $d_n > 0$ .
- b. Calculer la limite de la suite  $(d_n)$ .
- 3) a. Démontrer que, pour tout élément  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  
$$a_{n+1} - a_n = \frac{d_n}{3} \text{ et } b_{n+1} - b_n = -\frac{d_n}{4}$$
  
En déduire les variations des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .
- b. Démontrer que : pour tout élément  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $a_0 < a_n < b_n < b_0$ .
- c. Déduire de 3.a. et 3.b. que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont convergentes.
- 4) a. Déduire de la question 3.a. que :  
pour tout entier naturel  $n$  strictement plus grand que 1  
$$a_n - a_0 = \frac{1}{3} (d_0 + d_1 + \dots + d_{n-1})$$
- b. Déduire la limite de la suite  $(a_n)$  puis celle de la suite  $(b_n)$ .

Soit le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  (unité : 4 cm).

On considère la transformation  $S$  du plan qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , fait correspondre le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que :  $z' = (1 + i\sqrt{3})z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

- 1) a. Démontrer que  $S$  a un point invariant  $J$  d'affixe  $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .
  - b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $S$ .
- Soit le point  $A(-1; 0)$ .
- 2) a. Tracer le cercle  $(\mathcal{C})$  de diamètre  $[JA]$ .
  - b. Caractériser puis tracer le cercle  $(\mathcal{C}')$  image par  $S$  du cercle  $(\mathcal{C})$ .
  - 3) Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan, d'affixe  $z$  tels que :

$$\left| (1 + i\sqrt{3})z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 1$$

(On pourra utiliser la question 1.b.).

**PROBLEME**

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$  (unité : 2 cm).

**PARTIE A**

On considère la fonction  $g$ , définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , par :

$$g(x) = x + 1 - e^x.$$

- ① Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ .
- ② Calculer  $g'(x)$  pour  $x$  élément de  $\mathbb{R}$ .
- ③ Étudier, suivant les valeurs de  $x$ , le signe de  $g'(x)$  puis dresser le tableau de variation de  $g$ . En déduire le signe de  $g(x)$ , suivant les valeurs de  $x$ .

**PARTIE B**

On considère la fonction  $f$ , définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , par :

$$f(x) = 3(x^2 + x)e^{-x} \text{ et } (\mathcal{C}) \text{ sa courbe représentative dans le repère } (O, I, J).$$

- ① a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- b. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ .
- c. Interpréter graphiquement les résultats de a. et b.
- ② a. Démontrer que, pour tout élément  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 3(-x^2 + x + 1)e^{-x}$ .
- b. Étudier, suivant les valeurs de  $x$ , le signe de  $f'(x)$  puis dresser le tableau de variation de  $f$ .

On ne cherchera pas à calculer  $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$  et  $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ .

- ③ a. Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(\mathcal{C})$  au point d'abscisse 0.
- b. Démontrer que, pour tout élément  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $f(x) - 3x = 3xe^{-x} - g(x)$ .
- c. Déduire de la partie A les positions relatives de  $(T)$  et de  $(\mathcal{C})$ .
- ④ Tracer avec précision, dans le repère  $(O, I, J)$ , la tangente  $(T)$  et la courbe  $(\mathcal{C})$ .

On donne  $\sqrt{5} \approx 2,2$  ;  $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \approx -1,3$  et  $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 2,5$ .

**PARTIE C**

- ① Soit la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$  où  $a, b$  et  $c$  sont des nombres réels. Déterminer  $a, b$  et  $c$  pour que la fonction  $F$  soit une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- ②  $t$  étant un nombre réel strictement positif, calculer l'aire  $\mathcal{A}(t)$  de la partie du plan limitée par la courbe  $(\mathcal{C})$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = t$ .
- ③ Calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(t)$ .

**EXAMEN 2**

Session de remplacement 1998

**EXERCICE 1**

On considère l'équation (E) suivante :

$$z \in \mathbb{C}, z^3 - (7 + 8i)z^2 + (10 + 26i)z + 6 - 24i = 0.$$

- ① a. Sachant que (E) admet une solution réelle, la calculer.
- b. Résoudre (E).
- ② Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  où l'unité est 2 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives  $1 + i, 3$  et  $3 + 5i$ .
- a. Placer A, B et C et démontrer que le triangle ABC est rectangle.
- b. Déterminer le rapport et la mesure principale de l'angle orienté de la similitude directe S de centre A qui transforme B en C.
- ③ a. Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABDC soit un rectangle.
- b. Déterminer l'affixe du centre  $\Omega$  du rectangle ABDC.
- c. Construire l'image par S du cercle circonscrit au rectangle ABDC. Justifier.

**EXERCICE 2**

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier et homogène dont les quatre faces sont marquées des nombres 1, 3, 7 et 10. Lorsque le dé est posé, trois faces sont visibles.

- ① Calculer la probabilité pour que le dé se pose sur une face donnée.
- ② Soit X la variable aléatoire égale à la somme des nombres visibles après un lancer.
- a. Donner l'ensemble des valeurs prises par X.
- b. Calculer la probabilité de l'événement  $(X \geq 14)$ . Soit  $n$  un entier naturel non nul. On lance le dé  $n$  fois et après chaque lancer, on calcule la somme X des nombres visibles.
- ③ a. Calculer la probabilité  $p_n$  pour que l'événement  $(X \geq 14)$  se réalise au moins une fois au cours des  $n$  lancers.
- b. Calculer la plus petite valeur de  $n$  pour laquelle on a :  $p_n \geq 0,999$ .

**PROBLEME**

**PARTIE A**

On considère la fonction numérique  $g$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 1 - (1+x)e^x$ .

- 292
- ① a. Calculer les limites de  $g(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et quand  $x$  tend vers  $-\infty$ .
  - b. Calculer  $g'(x)$  pour tout nombre réel  $x$ .
  - c. Étudier le signe de  $g'(x)$  et dresser le tableau de variation de  $g$ .
  - ② a. Calculer  $g(0)$ .
  - b. En déduire que :
 
$$\forall x \in ]-\infty, 0[ , g(x) > 0 ;$$

$$\forall x \in ]0, +\infty[ , g(x) < 0 .$$

**PARTIE B**

On considère la fonction numérique  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x + 2 - xe^x$ .  
On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté au repère orthonormé  $(O, I, J)$  où l'unité graphique est 1 cm.

- ① a. Calculer les limites de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et quand  $x$  tend vers  $-\infty$ .
- b. Étudier le sens de variation de  $f$  en utilisant la question A,2) et dresser son tableau de variation.
- ② a. Démontrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x + 2$  est asymptote à  $(\mathcal{C})$  en  $-\infty$ .
- b. Étudier la position de  $(D)$  par rapport à  $(\mathcal{C})$ .
- ③ a. Calculer la limite de  $\frac{f(x)}{x}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et donner une interprétation graphique du résultat.
- b. Tracer  $(\mathcal{C})$ .
- ④ a. Démontrer que  $(\mathcal{C})$  coupe  $(OI)$  en deux points A et B, A désignant le point d'abscisse négative  $\alpha$ .
- b. Démontrer que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $]-2,3; -2,2[$ .
- c. Démontrer que  $e^\alpha = \frac{\alpha+2}{\alpha}$ .
- ⑤ Soit  $h$  la restriction de  $f$  à  $]-\infty, 0[$ .
- a. Démontrer que  $h$  est une bijection de  $]-\infty, 0[$  sur un intervalle  $K$  que l'on précisera.
- b. Soit  $(\Gamma)$  la courbe représentative de  $h^{-1}$  dans le repère orthonormé  $(O, I, J)$ . Tracer la demi-tangente  $(T)$  à  $(\Gamma)$  au point d'abscisse 2.
- c. Tracer  $(\Gamma)$ .

**PARTIE C**

- ① Soit  $t$  un élément de l'intervalle  $]-\infty, \alpha[$ . Calculer l'aire  $\mathcal{A}(t)$  de la partie du plan délimitée par  $(\mathcal{C})$ , la droite  $(D)$  et les droites d'équations respectives  $x = t$  et  $x = \alpha$ .
- ② Calculer la limite quand  $t$  tend vers  $-\infty$  de  $\mathcal{A}(t)$ .

**EXAMEN 3**

Session normale Juin 1999

**EXERCICE 1**

Un pharmacien observe, durant les 6 premiers mois de l'ouverture de son officine, le chiffre d'affaires en millions de Francs CFA. Le résultat de l'observation est résumé dans le tableau suivant où  $x$  désigne le numéro du mois et  $y$  le chiffre d'affaires correspondant.

x	1	2	3	4	5	6
y	12	13	15	19	21	22

- ① Calculer les moyennes  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  respectivement des variables  $x$  et  $y$ .
- ② Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique double ainsi que le point moyen  $G$  (Unités : 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées).
- ③ Calculer la variance  $V(x)$  de  $x$  et la covariance  $Cov(x,y)$  de  $x$  et  $y$ . Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
- ④ Démontrer qu'une équation de la droite de régression  $(D)$  de  $y$  en fonction de  $x$  est :  $y = \frac{78}{35}x + 9,2$ .
- ⑤ Tracer la droite  $(D)$ .
- ⑥ En utilisant la droite  $(D)$ , calculer une estimation du chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du 7<sup>e</sup> mois.

**EXERCICE 2**

Cet exercice a pour but de déterminer lesquels des avions à 2 ou à 4 moteurs sont les plus sûrs.

Un avion ne s'écrase pas tant que la moitié au moins de ses moteurs fonctionnent. Les moteurs d'un avion tombent en panne de manière indépendante.

Soit  $P$  la probabilité pour qu'un moteur tombe en panne.

**A**

Dans cette partie :  $P = 0,1$ .

- ① Calculer la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.
- ② Calculer la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne.
- ③ Calculer la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne.
- ④ En déduire la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase.

**B**

On revient au cas général.

- ① Soit  $f(P)$  la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase. Démontrer que :  $f(P) = P^2$ .
- ② Soit  $g(P)$  la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase. Démontrer que :  $g(P) = P^2(-3P^2 + 4P)$ .
- ③ On pose :  $h(P) = f(P) - g(P)$ .
  - a. Étudier le signe de  $h(P)$  en fonction de  $P$ .
  - b. En déduire, suivant les valeurs de  $p$ , dans quels avions il vaut mieux monter.

**PROBLÈME**

Le plan est muni du repère orthogonal  $(O, I, J)$  (Unités graphiques : 1 cm en abscisses et 5 cm en ordonnées).

**PARTIE A**

On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \frac{5 \ln x}{x^2}$ .

X 223

On désigne par  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans le repère  $(O, I, J)$ .

- ① Déterminer l'ensemble de définition de  $f$  puis l'image de  $\sqrt{e}$  par  $f$ .
- ② Calculer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$  puis interpréter graphiquement ces résultats.
- ③ Déterminer la fonction dérivée  $f'$  de  $f$  puis étudier le sens de variation de  $f$ .
- ④ Dresser le tableau de variation de  $f$ .

**PARTIE B**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = \frac{5(\ln x)^2}{x^2}$ .

On désigne par  $(\mathcal{C}_g)$  la courbe représentative de  $g$  dans le repère  $(O, I, J)$ .

- ① Calculer les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$ .
- ② Vérifier que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, g'(x) = \frac{10(1 - \ln x) \ln x}{x^3}$ .
- ③ Étudier le sens de variation de  $g$ .
- ④ Dresser le tableau de variation de  $g$ .

**PARTIE C**

On considère la fonction  $h$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $h(x) = g(x) - f(x)$ .

- ① Étudier le signe de  $h(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
- ② En déduire la position relative des courbes  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_g)$ .
- ③ Tracer les courbes  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_g)$  sur une même figure.

On donne les valeurs :  $e = 2,7$ ;  $\sqrt{e} = 1,6$ ;  $f(\sqrt{e}) = 0,91$ ;  $g(e) = 0,7$ ;  $\ln 2 = 0,7$ ;  $\ln 3 = 1,1$ .

**PARTIE D**

On considère l'intégrale  $I_n$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$$

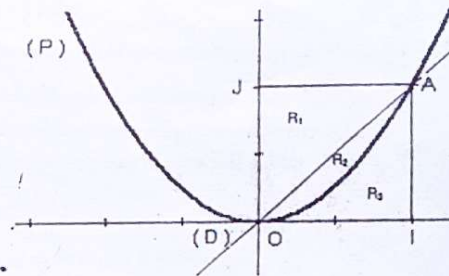
- 294
- ① À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale  $I_1$ .
  - ② À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2,  $I_n = -\frac{1}{e} + nI_{n-1}$ .
  - ③ En déduire que :  $I_2 = 2 - \frac{5}{e}$ .
  - ④ Interpréter graphiquement  $I_1 - I_2$  puis calculer  $I_1 - I_2$ .

## EXAMEN 4

Session de remplacement 1999

### EXERCICE 1

Dans le plan muni du repère orthonormé  $(O, I, J)$ , on donne le point  $A$  de couple de coordonnées  $(1; 1)$ , la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$  et la parabole  $(P)$  d'équation  $y = x^2$ .



- ① La parabole  $(P)$  et la droite  $(D)$  divisent le carré  $OIAJ$  en trois régions distinctes :
  - $R_1$  est le triangle  $AJO$ .
  - $R_2$  est la portion du plan comprise strictement entre  $(D)$  et  $P$ , contenue dans le carré  $OIAJ$ .
  - $R_3$  est le complémentaire dans le carré  $OIAJ$  de  $R_1 \cup R_2$ .
 Calculer les aires  $A_1$ , de  $R_1$ ,  $A_2$  de  $R_2$  et  $A_3$  de  $R_3$ .
- ② On joue à un jeu de fléchettes dont la cible est le carré  $OIAJ$ . La probabilité d'atteindre la cible est  $\frac{5}{6}$ . Lorsque la cible est atteinte, les probabilités d'atteindre les régions  $R_1, R_2, R_3$ , sont proportionnelles aux aires de ces trois régions; on les note  $p_1, p_2$ , et  $p_3$  respectivement.

205

$p_4$  désigne la probabilité de manquer la cible.

a. Calculer  $p_4$ .

b. Démontrer que :  $p_1 = \frac{5}{12}$  ;  $p_2 = \frac{5}{36}$  et  $p_3 = \frac{5}{18}$ .

③ Le joueur ne marque aucun point si la fléchette n'atteint pas le carré. Il marque 3 points si elle atteint  $R_1$ , 4 points si elle atteint  $R_2$  et 2 points si elle atteint  $R_3$ . Le jeu consiste en deux lancers successifs. Les résultats des lancers sont indépendants.

a. Calculer la probabilité pour qu'il ne marque aucun point.

b. Démontrer que la probabilité pour que le joueur marque 2 points est  $\frac{5}{54}$ .

**ENRICHISSEMENT DE L'EXERCICE**

④ On désigne par  $X$  la variable aléatoire qui à chaque jeu associe la somme des points marqués par le joueur.

a. Définir la loi de probabilité de  $X$ .

b. Calculer l'espérance mathématique  $E(X)$  du joueur.

**EXERCICE 2**

On considère deux triangles équilatéraux  $ABC$  et  $ANP$  de sens direct tels que le point  $N$  soit le milieu du segment  $[BC]$ . Soit  $S$  la similitude directe de centre  $A$  qui applique  $B$  sur  $N$ . On note  $Q$  le milieu de  $[NP]$ .

① Faire une figure.

② Déterminer le rapport de la similitude  $S$ .

③ Donner la mesure principale de l'angle orienté de  $S$ .

④ Justifier que  $P$  est l'image de  $C$  par  $S$ .

⑤ Justifier que  $Q$  est l'image de  $N$  par  $S$ .

⑥ On munit le plan du repère orthonormé direct  $(O, I, J)$ . Les nombres complexes  $2$ ,  $-1 + i\sqrt{3}$  et  $-1 - i\sqrt{3}$  sont les affixes respectives des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

a. Faire une nouvelle figure.

X

b. Calculer l'afixe de  $N$ .

c. Déterminer la transformation complexe  $f$  associée à  $S$ .

d. Calculer les affixes des points  $P$  et  $Q$ .

**PROBLÈME**

Dans ce problème, le plan est muni du repère orthonormé  $(O, I, J)$ .  
Unité 2 cm.

**PARTIE A**

On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$ .

① Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .

② Calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$ , en  $-1$  et en  $-\infty$ .

③ Calculer  $f'(x)$  pour tout nombre réel  $x$  différent de  $-1$ .

**PARTIE B**

Soit  $h$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :

$$h(x) = \frac{3 + \ln x}{1 + \ln x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } h(0) = 1.$$

On désigne par  $(\Gamma)$  la courbe représentative de  $h$ .

① Déterminer l'ensemble de définition de  $h$ .

② a. Justifier que la limite de  $h$  :  
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{à droite en } \frac{1}{e} \text{ est } +\infty ; \\ \text{gauche en } \frac{1}{e} \text{ est } -\infty ; \\ \text{en } +\infty \text{ est } 1. \end{array} \right.$

b. Interpréter géométriquement les résultats précédents.

③ Démontrer que  $h$  est continue à droite en  $0$ .

④ Démontrer que  $(\Gamma)$  admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse  $0$ .

- ⑤ Calculer  $h'(x)$  pour tout nombre réel  $x$  appartenant à  $]0, \frac{1}{e} \cup ]\frac{1}{e}, +\infty[$ .
- ⑥ Étudier le sens de variation de  $h$  puis dresser son tableau de variation.
- ⑦ Tracer  $(T)$ ; les asymptotes à  $(\Gamma)$  et  $(\Gamma')$ .

**PARTIE C**

Soit  $\varphi$  la restriction de  $h$  à  $]0, \frac{1}{e} [$ .

- ① Démontrer que  $\varphi$  est une bijection de l'intervalle  $]0, \frac{1}{e} [$  sur un intervalle  $K$  que l'on précisera.
- ② Déterminer  $\varphi^{-1}(1)$ .
- ③ Pour tout nombre réel  $x$  différent de 1, appartenant à  $K$ , démontrer que :  $\varphi^{-1}(x) = \exp\left(\frac{3-x}{x-1}\right)$ .
- ④ Tracer la courbe représentative  $(\mathcal{C})$  de  $\varphi^{-1}$  dans le repère  $(O, I, J)$ .

226

**EXAMEN 5**

Session normale juin 2000

**EXERCICE 1**

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct  $(O, I, J)$ , les points  $A$  et  $B$  ont pour affixes respectives  $\sqrt{3}+i$  et  $-\sqrt{3}+i$ . On désigne par  $S$  la similitude directe d'écriture complexe :

$$z' = \frac{3-i\sqrt{3}}{2}z - \sqrt{3}+i.$$

- ① Déterminer les images par  $S$  des points  $O$  et  $A$ .
- ② Déterminer les éléments caractéristiques de  $S$ .
- ③ Soit  $(\mathcal{C})$  le cercle de centre  $O$  et de rayon 2 et  $(\mathcal{C}')$  son image par  $S$ .
  - a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $(\mathcal{C}')$ .
  - b. Construire  $(\mathcal{C}')$ .

**EXERCICE 2**

Une entreprise veut prévoir le nombre d'articles qu'elle aura en stock en l'an 2004. L'évolution du stock de ses articles, (donc de 1983 à 1990), est donnée par le tableau statistique ci-dessous :

Ordre $x_i$ des années	1	2	3	4	5	6	7
Nombre $y_i$ d'articles en stock	3810	3860	3940	4020	4100	4180	4220

- ① A partir de quelle année l'entreprise s'est-elle intéressée à ses stocks ?
- ② Représenter graphiquement le nuage de points de la distribution statistique définie par le tableau précédent, dans le plan muni du repère orthogonal  $(O, I, J)$ . (On prendra pour unité 2 cm en abscisse et 200 articles pour 1 cm sur la droite des ordonnées).

- ③ Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points. (On prendra l'arrondi d'ordre zéro pour l'ordonnée de G).
- ④ Déterminer par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression de y en x. (On donnera l'arrondi d'ordre 1 du coefficient directeur de cette droite).
- ⑤ Quel serait le nombre d'articles en stock de l'entreprise en 2004 ? (On donnera une valeur approchée d'ordre 1 par excès du résultat).

### PROBLÈME

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + x - 2x \ln x \text{ si } x \in ]0; +\infty[ \text{ et } f(0) = 0.$$

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction f et le tracer de sa courbe représentative (C) dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) ; ln désigne la fonction logarithme népérien.

### PARTIE A ÉTUDE D'UNE FONCTION AUXILIAIRE

On considère la fonction numérique g définie sur ]0; +∞[ par :

$$g(x) = x - 1 - 2 \ln x.$$

- ① Calculer les limites respectives de g à droite en 0 et en +∞.
- ② On admet que la fonction g est dérivable sur ]0; +∞[ et on note g' sa dérivée.
- a. Déterminer g' et étudier son signe.
- b. En déduire le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
- ③ Vérifier que g(1) = 0.
- ④ Démontrer qu'il existe un unique réel α tel que α ∈ ]3; 4[ et g(α) = 0.
- ⑤ Déduire des questions précédentes, le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

227

### PARTIE B

### DETERMINATION D'UNE VALEUR APPROCHÉE DE A

On considère la fonction numérique h définie et dérivable sur ]0; +∞[ par :

$$h(x) = 2 \ln x + 1.$$

- ① Démontrer que :  $\forall x \in [3; 4], h(x) \in [3; 4]$ .
- ② On considère la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 3,5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$$

- a. Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [3; 4]$ .
- b. Calculer l'arrondi d'ordre 3 de  $U_1$ .
- c. Démontrer par récurrence que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
- d. En déduire que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.

(On admettra que  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers la valeur α précédente et on prendra α = 3,5).

### PARTIE C

### ÉTUDE DE LA FONCTION f

- ① Démontrer que la fonction f est continue à droite en 0.
- ② La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ? Justifier votre réponse.
- ③ En donner une interprétation graphique.
- ④ Calculer la limite de f(x) quand x tend vers +∞.
- ⑤ Calculer la limite de  $\frac{f(x)}{x}$  quand x tend vers +∞ puis interpréter graphiquement ce résultat.
- ⑥ La fonction f est dérivable sur ]0; +∞[ et on note f' sa dérivée.
- a. Démontrer que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$ .
- b. En utilisant les résultats de la partie A, déterminer le signe de f'.
- c. Dresser le tableau de variation de f.
- ⑦ Tracer la courbe (C).

- 8 Soit  $t$  un nombre réel tel que  $0 < t < 1$ .
- En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire  $A(t)$  de la partie du plan comprise entre la courbe ( $\mathcal{C}$ ), la droite (OI) et les droites d'équations  $x = t$  et  $x = 1$ .
  - Calculer la limite de  $A(t)$  quand  $t$  tend vers 0.

278

**EXAMEN 6**

Session de remplacement 2000

**EXERCICE 1**

Pour préparer la retraite de ses membres, une coopérative a planté en 1991 des anacardières qui sont rentrés en production trois ans plus tard. Le tableau statistique suivant donne l'évolution des productions depuis la première année de récolte.

Ordre $X_i$ de l'année de production	1	2	3	4	5	6	7
Année de production			1996				
Quantité $Y_i$ de production (en tonnes)	118	146	184	247	267	278	255

- En quelle année cette coopérative a-t-elle obtenu 278 tonnes d'anacarde ?
- Recopier et compléter le tableau statistique ci-dessus.
- Représenter dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J), le nuage de points de la série statistique double  $(X_i; Y_i)$ .  
(On prendra sur la droite des abscisses : 2 cm pour unité et sur la droite des ordonnées : 1 cm pour 20 tonnes).
- Déterminer l'arrondi d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire de la distribution statistique  $(X_i; Y_i)$ .
- La corrélation entre les variables statistiques X et Y est-elle bonne ? Justifier.
- Déterminer par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression qui permet d'estimer l'année en fonction de la production.
- En quelle année la coopérative produira-t-elle 350 tonnes ?

**EXERCICE 2**

On considère les suites  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{3}{2}(U_n)^2 \end{cases} \text{ et } V_n = \ln\left(\frac{3}{2}U_n\right).$$

( $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien).

- Calculer  $V_0$ .
- Démontrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison 2.
- Exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$ .
- Calculer la limite de  $(V_n)$ .
- Exprimer  $U_n$  en fonction de  $V_n$  et en déduire la limite de  $(U_n)$ .
- Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose :

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1} \text{ et } T_n = U_0 \times U_1 \times U_2 \times \dots \times U_{n-1}$$

a. Démontrer que :  $S_n = (1 - 2^n) \ln 2$ .

b. Justifier que :  $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$ .

c. Exprimer  $T_n$  en fonction de  $n$ .

### PROBLÈME

#### PARTIE A

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(0) = 0 \text{ et pour } x > 0: f(x) = -x + x \ln x.$$

( $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien).

On désigne par  $(\Gamma)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni du repère orthonormé  $(O, I, J)$ . (unité : 2 cm).

① Calculer  $f(1)$  et  $f(e)$ .

② Étude des branches infinies :

a. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

b. Calculer la limite de  $\frac{f(x)}{x}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

c. Interpréter graphiquement ce résultat.

③ Étude de la dérivabilité de  $f$  en 0.

a. Démontrer que  $f$  est continue à droite en 0.

b. Étudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 0.

c. Préciser la tangente à  $(\Gamma)$  en 0.

④ La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et on note  $f'$  la dérivée de  $f$ .

a. Déterminer  $f'(x)$  pour tout  $x$  élément de  $]0; +\infty[$ .

b. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

c. Donner une équation de la tangente  $(D)$  à  $(\Gamma)$  au point d'abscisse  $e$ .

⑤ Construire  $(D)$  et  $(\Gamma)$ .

⑥ Soit  $t$  un nombre réel tel que :  $0 < t < 1$ .

a. En utilisant une intégration par parties, démontrer que l'aire  $\mathcal{A}(t)$  de la partie du plan limitée par la courbe  $(\Gamma)$ , la droite  $(OI)$  et les droites d'équations  $x = t$  et  $x = e$  est égale à  $\frac{1}{4}e^2 + \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln t\right)t^2$ .

b. Calculer la limite de  $\mathcal{A}(t)$  quand  $t$  tend vers 0.

#### PARTIE B

On considère la transformation plane  $T$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que :  $z' = z + 1 + 2i$ .

On appelle  $A$ , le point d'affixe  $1 - i$  et  $B$  le point d'affixe  $e$ .

① Calculer les affixes de  $O'$ ,  $A'$ ,  $B'$  images respectives des points  $O$ ,  $A$  et  $B$  par  $T$ .

② Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $T$ .

③ Construire en utilisant une autre couleur, la courbe  $(\Gamma')$  image de  $(\Gamma)$  par  $T$ .

## EXAMEN 7

Session normale juin 2004

### EXERCICE 1

$a$  est un nombre réel quelconque.

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :

$$Z^2 - (ia + 2\sqrt{3})Z^2 + (2ia\sqrt{3} + 4)Z - 4ai = 0.$$

① Déterminer le nombre réel  $a$  pour que  $-2i$  soit une solution de (E).

② Déterminer le polynôme complexe  $q$  de degré deux, tel que :

$$\forall Z \in \mathbb{C}, Z^3 + (2i - 2\sqrt{3})Z^2 + (4 - 4i\sqrt{3})Z + 8i = q(Z)(Z - \sqrt{3} - i).$$

③ Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) pour  $a = -2$ .

④ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, I, J)$ , on

donne les points  $M, N, Q$  d'affixes respectives :  $\sqrt{3} + i$ ,  $-2i$  et  $\sqrt{3} - i$ .

a. Représenter dans le repère  $(O, I, J)$  les points  $M, N$  et  $Q$ .

(on prendra 3 cm pour l'unité).

b.  $T$  désigne le symétrique de  $M$  par rapport à  $(OJ)$ .

Démontrer que le triangle  $TMQ$  est rectangle en  $M$ .

c. Démontrer que les points  $M, Q, N$  et  $T$  sont cocycliques.

### EXERCICE 2

Dans une urne se trouvent six médailles identiques, indiscernables au toucher, numérotés de 1 à 6.

Un jeu consiste à tirer au hasard un médaille de l'urne après avoir misé une certaine somme versée aux organisateurs du jeu et à recevoir un prix ou non selon le numéro inscrit sur le médaille tiré.

- Si le joueur tire le médaille numéroté 4, on lui remet ce qu'il a misé et il gagne 3 000 F.
- S'il tire le médaille numéroté 1, 2 ou 6, il perd sa mise et ne gagne rien.
- S'il tire le médaille numéroté 3, il ne gagne rien mais récupère sa mise.
- S'il tire le médaille numéroté 5, il le remet dans l'urne et effectue un second tirage. Si le médaille retiré :
  - porte le même numéro (c'est-à-dire 5), le joueur gagne 2 000 F et perd sa mise,
  - sinon, il perd sa mise et de plus il paie 1 500 F aux organisateurs.

- ① Calculer la probabilité pour que ce joueur récupère sa mise.
- ② Calculer la probabilité pour qu'il perde 1 500 F et qu'il perde aussi sa mise.
- ③ Le joueur a misé une somme  $S$ . On note  $X$  la variable aléatoire qui à chaque partie, associe le résultat financier de son jeu, c'est-à-dire la différence entre ce que le joueur possédait à l'issue du jeu et ce qu'il possédait avant de jouer.

X 230

a. Compléter le tableau ci-dessous définissant la loi de probabilité de la variable X.

$x_i$ (valeurs de la variable)	-S	-S-1500	0	-S+2000	3000
$p(X=x_i)$					

b. Démontrer que l'espérance mathématique de X est:

$$E(X) = -\frac{2}{3}S + \frac{3125}{9}$$

c. Quelle somme le joueur doit-il miser pour que son résultat financier moyen soit nul ? (on donnera l'arrondi de cette somme à l'unité près).

**PROBLÈME**

On donne la fonction numérique:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x(x+2)e^{x+2}$ .

Soit  $(\mathcal{C})$  la représentation graphique de  $f$  dans le repère orthonormé  $(O, I, J)$ ; (unité graphique: 1 cm).

On rappelle que:  $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^x = +\infty$ .

- ① a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- b. Démontrer que:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ .
- ② c. Interpréter graphiquement les résultats ci-dessus.
  - a. Calculer:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
  - b. Interpréter graphiquement ce résultat.
- ③ Vérifier que:  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x^2 + 4x + 2)e^{x+2}$ .
- ④ a. Étudier le sens de variation de  $f$ .
- b. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- ⑤ a. Déterminer une équation de chacune des tangentes  $(T)$  et  $(T')$  à la courbe  $(\mathcal{C})$  aux points d'abscisses respectives -2 et 0.
- b. Tracer  $(T)$ ,  $(T')$  et  $(\mathcal{C})$ .
- ⑥  $\lambda$  est un nombre réel strictement inférieur à -2.  $\mathcal{A}_\lambda$  désigne l'aire de la portion du plan délimitée par  $(O)$ ,  $(\mathcal{C})$  et les droites d'équations  $x = -2$  et  $x = \lambda$ .
  - a. À l'aide de deux intégrations par parties, démontrer que  $\mathcal{A}_\lambda = 4 - \lambda^2 e^{\lambda+2}$ .
  - b. Déterminer  $\lim_{\lambda \rightarrow -2} \mathcal{A}_\lambda$ .
- ⑦ a. Déterminer les nombres réels  $u$  et  $v$  tels que la fonction  $F$  définie par  $F(x) = (x^2 + ux + v)e^{x+2}$ , soit une primitive de  $f$ .
- b. Retrouver le résultat de la question ⑥.a.

**EXAMEN 8**

Session de remplacement 2001

**EXERCICE 1**

- ① Déterminer sous forme trigonométrique les racines cubiques du nombre complexe  $U = 32\sqrt{2}(1+i)$ .
- ② On pose  $\rho = e^{\frac{3i\pi}{4}}$ . Démontrer que les racines cubiques de  $U$  peuvent s'écrire respectivement sous la forme  $4\rho$ ,  $4\rho e^{\frac{2i\pi}{3}}$  et  $4\rho e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ .
- ③ En déduire la forme algébrique de chacune des racines cubiques de  $U$ .
- ④ Déduire des questions précédentes que:
 
$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

**EXERCICE 2**

- ① Déterminer les fonctions  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$ , solutions de l'équation différentielle:  $g' = ag$  où  $a$  est une constante réelle.
- ② Soit  $f$  la fonction qui au temps  $t$  évalué en années, associe le nombre d'atomes de radium d'une substance radioactive. On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
 On suppose que la vitesse de désintégration  $f'(t)$  est proportionnelle au nombre d'atomes de radium et on a:  $f'(t) = -k f(t)$ ,  $k$  étant un nombre réel strictement positif donné.  
 À l'instant  $t = 0$ , le nombre d'atomes de radium est  $x_0$ .
  - a. Déduire de la question 1. l'expression de  $f(t)$  en fonction de  $x_0$ ,  $k$  et  $t$ .
  - b. On donne  $k = 4,65 \cdot 10^{-3}$ . Au bout de combien d'années, à partir de l'instant  $t = 0$ , le nombre d'atomes de radium aura-t-il diminué de moitié?

**PROBLÈME**

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par:

$$f(x) = -\frac{x^3}{6} + x^2 - \frac{x}{2} - x \ln x + \frac{2}{3} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = \frac{2}{3}$$

On note  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni du repère orthonormé  $(O, I, J)$ . L'unité graphique est 3 cm.

**PARTIE A**

On donne la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2} - \ln x$ .

- ① Étudier le sens de variation de  $g$ .
- ② Calculer  $g(1)$ .
- ③ En déduire que :  $\forall x \in ]0; 1[, g(x) > 0$  ;  
 $\forall x \in ]1; +\infty[, g(x) < 0$ .

**PARTIE B**

- ① Étudier la continuité de  $f$  à droite en 0.
- ② a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .  
b.  $f$  est-elle dérivable à droite en 0 ? Justifier.  
c. Donner une interprétation graphique du résultat de la question a.
- ③ a. Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif  $x$ ,  $f'(x) = g(x)$ .  
b. Déduire de la partie A, le sens de variation de  $f$ .
- ④ a. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
b. Dresser le tableau de variation de  $f$ .  
c. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et donner une interprétation graphique du résultat.
- ⑤ a. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ .  
b. Vérifier que :  $3,3 < \alpha < 3,4$ .  
c. Tracer  $(\mathcal{C})$ .

**PARTIE C**

Soit  $t$  un nombre réel strictement positif inférieur à 1.

- ① Calculer  $I(t) = \int_t^2 \left( -\frac{x^3}{6} + x^2 - \frac{x}{2} + \frac{2}{3} \right) dx$ .
- ② À l'aide d'une intégration par parties, calculer  $J(t) = \int_1^2 x \ln(x) dx$ .
- ③ En déduire l'expression en fonction de  $t$ , de l'aire  $\mathcal{A}(t)$  (en  $\text{cm}^2$ ) de la partie du plan délimitée par la courbe  $(\mathcal{C})$ , la droite  $(OI)$  et les droites d'équations respectives  $x = t$  et  $x = 2$ .
- ④ Déterminer  $\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{A}(t)$ .

**EXAMEN 9**

Session normale juin 2002

**EXERCICE 1**

On considère la suite numérique  $u$  définie par :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n} \end{cases}$ .

- ① Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2x+3}{x}$  et dont la représentation graphique  $(\mathcal{C})$  est donnée en annexe.
  - a. Représenter sur l'axe  $(OI)$  les termes  $u_0, u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$  de la suite  $u$  à l'aide de la courbe  $(\mathcal{C})$  et de la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$ .
  - b. Que peut-on conjecturer quant à la convergence de la suite  $u$  ?
- ② a. Démontrer que  $f(]1; 5]) \subset ]1; 5]$ .  
b. En déduire au moyen d'un raisonnement par récurrence que :  
 $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 5$ .
- ③ Soit  $v$  la suite numérique définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$ .
  - a. Démontrer que  $v$  est une suite géométrique de raison  $-\frac{1}{3}$ .
  - b. En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ .
- ④ a. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $v_n$  puis en fonction de  $n$ .  
b. En déduire la limite de la suite  $u$ .

**EXERCICE 2**

Une enquête menée dans une entreprise auprès du personnel a porté sur le salaire net mensuel par agent  $Y$  et le nombre de personnes par famille, à la charge de chaque agent  $X$ . Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

salaire net mensuel $y_i$ (en milliers de francs)	30	45	25	45	60	45	75
nombre de personnes de la famille $x_i$	1	2	2	3	3	4	4

salaires net mensuel $y_i$ (en milliers de francs)	80	90	105	150	100	120	105	130
nombre de personnes de la famille $x_i$	5	5	5	6	6	6	7	7

Dans les réponses, tous les résultats seront arrondis au centième près.  
 ① Représenter le nuage de points correspondant à la série double  $(X; Y)$  dans un repère orthogonal  $\mathcal{R}$ .

Sur l'axe des abscisses, prendre 1 cm pour 1 personne et sur l'axe des ordonnées, prendre 1 cm pour 10.000 francs.

- ② a. Calculer le salaire moyen  $\bar{Y}$  du personnel de l'entreprise.  
 b. Quel est le nombre moyen de personnes à charge par agent ?  
 c. Placer dans le repère  $\mathcal{R}$  le point moyen G du nuage.
- ③ Calculer la covariance  $\text{cov}(X; Y)$ .
- ④ a. Déterminer une équation de la droite (D) d'ajustement de Y en X par la méthode des moindres carrés.  
 b. Tracer (D).
- ⑤ Selon cet ajustement, si un agent de cette entreprise gagne 80.000 F. par mois, à combien peut-on évaluer le nombre de personnes de sa famille ? (on arrondira le résultat à l'unité).

### PROBLÈME

Les parties A et B sont indépendantes.

#### PARTIE A

On se propose de chercher les fonctions dérivables  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  solutions de l'équation différentielle (E) :  $f'(x) + 2f(x) = 2x - 1$ .

- ① Démontrer que la fonction g définie par  $g(x) = x - 1$  est solution de (E).
- ② Soit (E') l'équation différentielle :  $f'(x) + 2f(x) = 0$ .

232

a. Résoudre (E').

b. Soit k un nombre réel. Démontrer que les fonctions  $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :  $f_k(x) = ke^{-2x} + x - 1$  sont solutions de (E).

- ③ a. Soit f une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Démontrer que si f est solution de (E) alors f-g est solution de (E').  
 b. En déduire les solutions de (E).

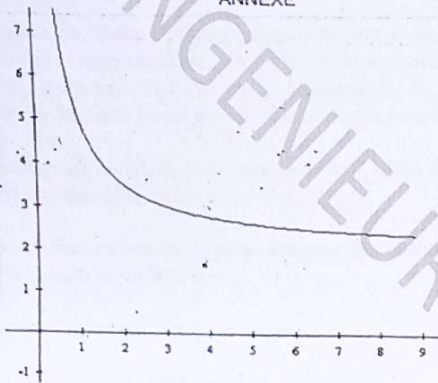
#### PARTIE B

On considère la fonction numérique f définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^{-2x} + x - 1$ . Soit (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé (O, I, J), unité graphique 3 cm.

- ① a. Déterminer la limite de f en  $-\infty$ .  
 b. Déterminer la limite lorsque x tend vers  $-\infty$  de  $\frac{f(x)}{x}$ .  
 c. Interpréter graphiquement les résultats précédents.
- ② a. Déterminer la limite de f en  $+\infty$ .  
 b. Démontrer que la droite (D) d'équation  $y = x - 1$  est asymptote à (C) en  $+\infty$ .  
 c. Étudier la position de (C) par rapport à (D).
- ③ a. Pour tout nombre réel x, calculer  $f'(x)$ .  
 b. Étudier le sens de variation de f.  
 c. Dresser le tableau de variation de f.
- ④ a. Démontrer que l'équation :  $x \in [\frac{\ln 2}{2}; +\infty[$ ,  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$ .  
 b. Démontrer que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $]0,79; 0,8[$ .  
 c. Construire (D) et (C).
- ⑤ Soit t un nombre réel supérieur à  $\alpha$ .  
 a. Calculer l'aire  $A(t)$  de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations  $x = t$  et  $x = \alpha$ .  
 b. Exprimer la limite lorsque t tend vers  $+\infty$  de  $A(t)$  en fonction de  $\alpha$ .

ANNEXE

283



**EXAMEN 10**

Session de remplacement 2002

**EXERCICE 1**

On considère la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à termes positifs définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{4U_n - 3}{U_n} \end{cases}$$

①  $f$  est la fonction dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  et définie par :

$$f(x) = \frac{4x-3}{x}$$

$(\mathcal{C})$  désigne la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté au repère orthonormé  $(O, I, J)$ . L'unité graphique est 2 cm.

- Étudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation.
- Tracer  $(\mathcal{C})$  et la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$ .
- Utiliser  $(\mathcal{C})$  et  $(D)$  pour construire  $U_0, U_1, U_2$  et  $U_3$  sur l'axe  $(OI)$ .

- Démontrer que :  $f([2; 3[) \subset ]2; 3[$ .
  - En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$ ,  $2 \leq U_n < 3$ .
  - Démontrer que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.
  - En déduire que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

③ On considère la suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n - 1}$ .

- Démontrer que  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{3}$ .
- En déduire la limite de la suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- Déterminer la limite de la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

## EXERCICE 2

Une société de transport a déposé dix cars en vue d'une révision dans un garage. Devant l'impossibilité de tenir les délais, le mécanicien a procédé à la révision de seulement huit cars choisis au hasard sur les dix. La société décide tout de même de mettre les dix cars en circulation. Elle estime que :

- Si un car est révisé, la probabilité pour qu'il tombe en panne avant la prochaine révision est égale à 0,1 ;
- Si un car n'est pas révisé, la probabilité pour qu'il tombe en panne avant la prochaine révision est égale à 0,6.

① On choisit au hasard un car sur les dix.

- a. Calculer la probabilité pour qu'il ait été révisé.
- b. Calculer la probabilité pour qu'il ait été révisé et qu'il tombe en panne avant la prochaine révision.
- c. Calculer la probabilité pour qu'il n'ait pas été révisé et qu'il tombe en panne avant la prochaine révision.
- d. En déduire que la probabilité pour qu'il tombe en panne avant la prochaine révision est égale à 0,2.

② La société apprend que l'un des dix cars est tombé en panne avant la prochaine révision. Elle cherche à savoir si ce car a été révisé. Calculer la probabilité pour que ce car ait été révisé.

③ On suppose que l'état de chaque car est indépendant des états des autres cars.

Calculer la probabilité pour que huit cars au moins sur les dix ne tombent pas en panne avant la prochaine révision.

(On donnera l'arrondi d'ordre 2 du résultat).

## PROBLÈME

### PARTIE A

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R} - \{1\}$  par :

$$g(x) = (x-1)^2 - 1 + \ln|x-1|.$$

① On suppose que  $g$  est dérivable sur  $]-\infty; 1[$  et sur  $]1; +\infty[$ .

- a. Calculer  $g'(x)$ .
- b. Étudier les variations de  $g$  et dresser son tableau de variation.

② a. Calculer  $g(0)$  et  $g(2)$ .

b. Démontrer que :  $\forall x \in ]-\infty; 0[ \cup ]2; +\infty[, g(x) > 0$   
et  $\forall x \in ]0; 1[ \cup ]1; 2[, g(x) < 0$ .

### PARTIE A

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} - \{1\}$  par :  $f(x) = x - \frac{\ln|x-1|}{x-1}$ .

On désigne par  $(\mathcal{C})$  la représentation graphique de  $f$  dans le plan muni du repère orthonormé  $(O, I, J)$ . L'unité graphique est 2 cm.

① a. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ .

En déduire que  $(\mathcal{C})$  admet une asymptote que l'on déterminera.

b. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

② Démontrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$  est asymptote à  $(\mathcal{C})$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

③ On suppose que  $f$  est dérivable sur  $]-\infty; 1[$  et sur  $]1; +\infty[$ .

a. Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$ .

b. En utilisant les résultats de la question A) 2.b., étudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation.

- X
- 235
- ④ Démontrer que le point  $\Omega(1; 1)$  est un centre de symétrie de  $(\mathcal{C})$ .
  - ⑤ a. Démontrer que pour tout nombre réel  $x$  différent de 1 :  

$$\ln|x-1| > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty; 0[ \cup ]2; +\infty[.$$
 b. En déduire la position de  $(\mathcal{C})$  par rapport à  $(D)$ .
  - ⑥ Construire  $(\mathcal{C})$  et  $(D)$ .
  - ⑦ Calculer l'aire  $\mathcal{A}$  de la partie du plan limitée par  $(\mathcal{C})$ ,  $(D)$  et les droites d'équations respectives  $x=0$  et  $x=1-\frac{1}{e}$ .

## EXAMEN 11

Session normale Juin 2003

### EXERCICE 1

- ① Un dé A, bien équilibré possède :

- une face numérotée 1;
- deux faces numérotées 2;
- une face numérotée 4;
- une face numérotée 5;
- une face numérotée 6.

- a. On lance une fois le dé A et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure. Quelle est la probabilité d'obtenir le numéro 2 ?
- b. On lance 3 fois de suite le dé et on note de la gauche vers la droite les chiffres obtenus successivement. On obtient ainsi un nombre de trois chiffres. Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre 421 ?

- ② Un autre dé B, bien équilibré, possède :

- une face numérotée 1;
- deux faces numérotées 2;
- deux faces numérotées 4;
- une face numérotée 6.

On lance 3 fois de suite le dé B comme à la question 1.b.

Vérifier que la probabilité d'obtenir le nombre 421 est égale à  $\frac{1}{54}$ .

- ③ Une urne contient 4 dés identiques au dé A et 6 dés identiques au dé B. Egný tire au hasard un dé de l'urne et le lance 3 fois de suite pour obtenir un nombre à 3 chiffres comme décrit précédemment.

- a. Démontrer que la probabilité d'obtenir 421 est égale à  $\frac{2}{135}$ .
- b. Egný a obtenu 421; calculer la probabilité qu'il ait joué avec un dé de type A.

## EXERCICE 2

Soit  $a$  un nombre réel donné. On considère les suites  $(U)$  et  $(V)$  définies respectivement par :

- $U_0 = 3, U_1 = 5$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = \frac{1}{2}(a+1)^2 U_{n+1} + (a-2)U_n$ .
- $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_{n+1} - U_n$ .

**I** On pose :  $a = 1$ .

- ① Démontrer que la suite  $(V)$  est constante et donner sa valeur.
- ② En déduire que  $(U)$  est une suite arithmétique dont la raison est égale à 2.
- ③ On pose :  $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ .  
Exprimer  $U_n$  puis  $S_n$  en fonction de  $n$ .

**II** On pose :  $a = -5$

- ① Démontrer que  $(V)$  est une suite géométrique dont la raison est égale à 7.
- ② Exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$ .
- ③ Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, exprimer en fonction de  $n$  la somme  $T_n$  où  $T_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$ .
- ④ Exprimer  $U_n$  en fonction de  $T_n$ .
- ⑤ En déduire que la suite  $(U)$  est divergente.

## PROBLEME

### PARTIE A

Soit  $h$  la fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  et définie par :  $h(x) = 3 + (x-1)e^{-x}$ .

- ① Calculer les limites de  $h$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

- 236
- ② Démontrer que, pour tout  $x$  élément de  $\mathbb{R}$ ,  $h'(x) = (2-x)e^{-x}$ .
  - ③ Étudier les variations de  $h$  et dresser son tableau de variation.
  - ④ a. Démontrer que sur l'intervalle  $] -\infty, 2 ]$  l'équation  $h(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$ .  
b. Démontrer que  $-1 < \alpha < 0$ .
  - ⑤ En déduire que, pour tout nombre réel  $x$  :  
si  $x < \alpha$  alors  $h(x) < 0$  ;  
si  $x > \alpha$  alors  $h(x) > 0$ .

### PARTIE B

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 3x + 1 - xe^{-x}$ .  
On note  $(\ell)$  sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé  $(O, I, J)$ . (unité : 2 cm).

- ① Calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .  
(On pourra mettre  $x$  en facteur dans l'expression de  $f(x)$ ).
- ② Démontrer que, pour tout nombre réel  $x$ ,  $f'(x) = h(x)$ .
- ③ Étudier le sens de variation de  $f$  et dresser son tableau de variation.
- ④ Démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = 3x+1$  est asymptote à  $(\ell)$  en  $+\infty$ .
- ⑤ Étudier la position relative de  $(\Delta)$  et  $(\ell)$ .
- ⑥ Démontrer que  $(\ell)$  admet en  $-\infty$  une branche parabolique de direction  $(OJ)$ .
- ⑦ Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(\ell)$  au point d'abscisse 0.
- ⑧ Tracer  $(\Delta)$ ,  $(T)$  et  $(\ell)$  (On prendra :  $\alpha = -0,6$  et  $f(\alpha) = 0,3$ ).

⑨ Soit  $\lambda$  un nombre réel strictement positif.

- Utiliser une intégration par parties pour calculer l'intégrale  $\int_0^\lambda x e^{-x} dx$ .
- Calculer l'aire  $A(\lambda)$  de la partie du plan limitée par  $(\mathcal{O})$ ,  $(\Delta)$  et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = \lambda$ .
- Calculer  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$ .

237  
**EXAMEN 12**

**Deuxième session 2003**

**EXERCICE 1**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{1}{4}x + 3$ .

Soit  $u$ , la suite définie par :

$$u_0 = -4 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n).$$

- Calculer  $u_1$ .
- Le plan est rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité 2 cm).
  - Tracer les droites  $(D)$  et  $(\Delta)$  d'équations respectives  $y = x$  et  $y = \frac{1}{4}x + 3$ .
  - Utiliser  $(D)$  et  $(\Delta)$  pour placer  $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4$  sur l'axe des abscisses. (On laissera les traits de construction en pointillés sur le dessin).
  - Que peut-on conjecturer quant à la convergence de la suite  $u$  ?
- Démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 4$ .
  - Démontrer que la suite  $u$  est strictement croissante.
  - La suite  $u$  est-elle convergente ? Justifier.
- On pose : pour tout entier naturel  $n, v_n = u_n - 4$ .
  - Démontrer que  $v$  est une suite géométrique. Donner son premier terme et sa raison.
  - Démontrer que pour tout entier naturel non nul  $n, v_n = \frac{-2}{4^{n-1}}$ .
  - Déterminer la limite de la suite  $v$ .
  - En déduire la limite de la suite  $u$ .
- Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
  - Trouver une valeur de l'entier naturel  $k$  telle que  $|u_k - 4| < 10^{-10}$ .

**EXERCICE 2**

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct  $(O, I, J)$ , (unité : 2 cm).

① On considère l'équation :

$$(E) : Z \in \mathbb{C}, Z^3 - 2iZ^2 + 4(1+i)Z + 16 + 16i = 0.$$

Vérifier que :

$$\forall Z \in \mathbb{C}, Z^3 - 2iZ^2 + 4(1+i)Z + 16 + 16i = (Z+2)[Z^2 - 2(1+i)Z + 8(1+i)].$$

- Déterminer les racines carrées du nombre complexe  $-8 - 6i$ .
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation :

$$(E_1) : Z \in \mathbb{C}, Z^2 - 2(1+i)Z + 8(1+i) = 0.$$

- En déduire les solutions de l'équation  $(E)$ .
- ③ Soit  $A, B$  et  $C$  les points d'affixes respectives  $-2$ ;  $4i$  et  $2 - 2i$ .

- a. Faire une figure.  
 b. Soit  $K$  le milieu de  $[BC]$ . On considère la similitude directe  $S$  de centre  $A$ , qui transforme  $B$  en  $K$ . Déterminer et construire l'image  $(C')$  du cercle  $(C)$  de diamètre  $[AB]$  par la similitude  $S$ .  
 c. Déterminer l'écriture complexe de  $S$ .  
 d. Déterminer l'angle et le rapport de  $S$ .

### PROBLÈME

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 2x}$ .

Soit  $(\Gamma)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté au repère orthogonal  $(O, I, J)$ ,  $(OI = 2 \text{ cm} ; OJ = 4 \text{ cm})$ .

- ① a. On considère la fonction  $u$  dérivable et définie par  $u(x) = e^x - 2x$ .  
 En utilisant le sens de variation de la fonction  $u$ , démontrer que :  

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x - 2x > 0.$$
- b. En déduire l'ensemble de définition de  $f$ .  
 c. Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .  
 d. Donner une interprétation graphique des résultats précédents.
- ② Soit  $g$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $g(x) = (2-x)e^x - 2$ .
- a. Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (1-x)e^x$ .  
 b. Étudier les variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .  
 c. Dresser le tableau de variation de  $g$ .  
 d. Déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$  et démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$ , appartenant à l'intervalle  $[1 ; +\infty[$ .  
 e. Calculer  $g(0)$  et démontrer que :  

$$\forall x \in ]-\infty ; 0[, g(x) < 0 ;$$

$$\forall x \in ]0 ; \alpha[, g(x) > 0 ;$$

$$\forall x \in ]\alpha ; +\infty[, g(x) < 0.$$
- ③ a. Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x - 2x)^2}$ .  
 b. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- ④ a. Démontrer, en utilisant 2.d), que :  $e^\alpha = \frac{2}{2-\alpha}$ .  
 En déduire un encadrement de  $\alpha$  par deux entiers consécutifs.  
 b. Déduire de la question précédente que :  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$ .  
 c. On admet que 1,60 est une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près par excès.  
 Démontrer que 1,68 est une valeur approchée de  $f(\alpha)$  à  $2 \cdot 10^{-2}$  près.  
 d. Construire  $(\Gamma)$ .
- ⑤ Soit  $(E)$ , la partie du plan limitée par les droites d'équations respectives  $x = 1$  et  $x = \alpha$ , la courbe  $(\Gamma)$  et l'axe des abscisses.  
 Démontrer que l'aire en  $\text{cm}^2$  de  $(E)$  est égale à  $8 \ln \left[ \frac{2(\alpha-1)^2}{(2-\alpha)(e-2)} \right]$ .

## DEUXIEME PARTIE

### LES 10 DERNIERS SUJETS DE BAC ENTIEREMENT RESOLUS

(BAC 2008 A 2017)

	Année	Enoncé	Correction	Contenu de l'épreuve		
				Exercice 1	Exercice 2	Problème
Sujet 1	2017	319	348	Statistiques	Complexes	Exponentielle
Sujet 2	2016	322	357	Suites	Complexes	Exponentielle
Sujet 3	2015	325	369	Complexes	Probabilités	Exponentielle
Sujet 4	2014	328	380	Complexes	Suites	Exponentielle
Sujet 5	2013	331	389	Complexes	Suites	logarithme
Sujet 6	2012	334	397	Statistiques	Suites	Logarithme/ Exponentielle
Sujet 7	2011	338	407	Suites	Probabilités	Logarithme/ Exponentielle
Sujet 8	2010	341	419	Probabilités	Complexes	Logarithme
Sujet 9	2009	344	429	Statistiques	Suites	Exponentielle
Sujet 10	2008	346	439	Complexes	Statistiques	Logarithme

239

## EXAMEN 1: BAC D 2017

### EXERCICE 1

Dans le cadre d'un recensement portant sur le nombre de travailleurs dans les champs d'hévéa, un agent recenseur a visité huit (8) exploitations. Un exploitant voudrait estimer le nombre de travailleurs que prendrait une exploitation de 16ha d'hévéa. Pour cela l'agent recenseur a recueilli les informations consignées dans le tableau ci-dessous :

Nombre x de travailleurs	2	4	4	5	7	7	8	8
Superficie exploitée y (en ha)	3	5	6	7	10	11	8	12

- Représente le nuage de points correspondant à la série statistique double  $(X, Y)$  dans le plan muni d'un repère orthonormé.  
On prendra sur l'axe des abscisses 1 cm pour 1 travailleur et sur l'axe des ordonnées 1 cm pour une superficie de 1 ha.
- Pour les questions 2), 3), 4) et 5), les résultats seront arrondis à l'ordre 2.
- Justifie que le point moyen a pour couple de coordonnées  $(5,63 ; 7,75)$
- On note  $V(X)$  la variance de  $X$ ,  $V(Y)$  la variance de  $Y$  et  $\text{Cov}(X,Y)$  la covariance de  $X$  et  $Y$ .  
Justifie que :  $V(X) = 4,18$  ;  $V(Y) = 8,44$  et  $\text{Cov}(X,Y) = 5,37$
- a) Calcule le coefficient de corrélation linéaire  $r$  de la série  $(X,Y)$ .  
b) Interprète le résultat précédemment.
- a) Justifie qu'une équation de la droite  $(D)$  d'ajustement de  $Y$  en  $X$  par la méthode des moindres carrés est :  $y = 1,28x + 0,54$   
b) Trace  $(D)$  sur le graphique précédent.
- Utilise l'ajustement précédent pour répondre à la préoccupation de l'exploitant.  
On donnera l'arrondi d'ordre zéro du résultat.

### EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ .  
L'unité graphique est de 2 cm.

- Résous l'équation :  $z \in \mathbb{C}, z^2 + (1-3i)z - 4 = 0$ .
- On pose  $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^3 + (1-i)z^2 + (2+2i)z - 8i$ .  
a) Justifie que :  $P(-2i) = 0$ .  
b) Détermine les nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que :  
 $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z+2i)(z^2 + az + b)$ .
- Déduis des questions précédentes les solutions de l'équation :  
 $z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$ .

260

On note (D) le symétrique de A par rapport au point O.

- a) Place les points A, B, C, et D dans le plan complexe.
- b) Démontre que le triangle ABC est rectangle et isocèle en (C).
- c) Démontre que les points A, B, C et D sont cocycliques.

**PROBLEME**

**Partie A**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (1-x^2)e^{-x}$

On note (C) la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

1. a) Justifie que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .  
b) Donne une interprétation graphique du résultat obtenu précédemment.
2. a) Calcule  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$   
b) Donne une interprétation graphique des résultats obtenus précédemment.
3. On suppose que  $f$  est dérivable et on note  $f'$  sa fonction dérivée.  
a) Démontre que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x}$   
b) Justifie que :  
•  $\forall x \in ]-\infty; 1 - \sqrt{2}[ \cup ]1 + \sqrt{2}; +\infty[ , f'(x) > 0$  ;  
•  $\forall x \in ]1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}[ , f'(x) < 0$   
c) Dresse le tableau de variation de  $f$   
On ne calculera pas  $f(1 - \sqrt{2})$  et  $f(1 + \sqrt{2})$
4. Démontre qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est :  $y = -x + 1$
5. Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = (1+x)e^{-x} - 1$ .  
a) On suppose que  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on note  $h'$  sa fonction dérivée. Calcule  $h'(x)$ .  
b) Etudie les variations de  $h$ .  
c) Calcule  $h(0)$  et dresse le tableau de variation de  $h$ .  
On ne demande pas de calculer les limites de  $h$ .  
d) Justifie que :  $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \leq 0$ .  
e) Vérifie que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + x - 1 = (1-x)h(x)$ .  
f) Dédus des questions précédentes la position relative de (C) et (T).
6. Trace la tangente (T) et la courbe (C).  
On prendra :  $f(1 - \sqrt{2}) = 1,3$  et  $f(1 + \sqrt{2}) = -0,4$ .

**Partie B**

Soit  $\lambda$  un nombre réel de l'intervalle  $]1; +\infty[$  et  $A(\lambda)$  l'aire en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OJ) et les droites d'équations  $x=1$  et  $x=\lambda$ .

1. Démontre en utilisant deux intégrations par parties, que :  
$$A(\lambda) = \left( \frac{16}{e} - \frac{4(1+\lambda)^2}{e^\lambda} \right) \text{cm}^2$$
2. Déterminer la limite de  $A(\lambda)$  lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ .

# EXAMEN 2: BAC D 2016

## EXERCICE 1

1. On considère la fonction  $h$  dérivable et définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  par :

$$h(x) = 2x - x^2$$

- a) Démontrer que  $h$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; 1]$ .  
 b) En déduire que l'image de l'intervalle  $[0; 1]$  par  $h$  est l'intervalle  $[0; 1]$ .

2. Soit la suite  $u$  définie par :  $u_0 = \frac{3}{7}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$

- a) Démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$   
 b) Démontrer que la suite  $u$  est croissante.  
 c) Justifier que la suite  $u$  est convergente.  
 3. On considère la suite  $v$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(1 - u_n)$   
 a) Démontrer que  $v$  est une suite géométrique de raison 2.  
 b) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .  
 c) Calculer la limite de la suite  $v$ .  
 d) En déduire la limite de la suite  $u$ .

## EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , (unité graphique: 2 cm).

On considère la transformation  $S$  du plan qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que :

$$z' = \left[1 - i \frac{\sqrt{3}}{3}\right]z + 2i \frac{\sqrt{3}}{3}$$

1. a) Soit  $\Omega$  le point d'affixe 2. Vérifier que  $S(\Omega) = \Omega$ .  
 b) Justifier que  $S$  est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

2. a) Démontrer que  $\forall z \neq 2, \frac{z' - z}{2 - z} = i \frac{\sqrt{3}}{3}$

- b) En déduire que le triangle  $MM'\Omega$  est rectangle en  $M$ .  
 c) Donner un programme de construction de l'image  $M'$  par  $S$  d'un point  $M$  donné.  
 3. a) Placer les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $-1 + i$  et  $5 - i$  dans le plan muni du repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Construire les images respectives  $A'$  et  $B'$  de  $A$  et  $B$  par  $S$ .

- b) On note  $z_A, z_B, z_{A'}, z_{B'}$  les affixes respectives des points  $A, B, A'$  et  $B'$ .

Démontrer que :  $z_{A'} - z_A = z_B - z_{B'}$

- c) En déduire la nature du quadrilatère  $AA'B'B'$ .

241

## PROBLEME PARTIE A

Soit  $g$  la fonction dérivable et définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = -1 + (2 - 2x)e^{-2x+3}$

1. Calculer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

2. a) Soit  $g'$  la fonction dérivée de  $g$ .

Justifier que :  $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (4x - 6)e^{-2x+3}$

b) Etudier le signe de  $g'(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

c) Justifier que :  $g\left(\frac{3}{2}\right) = -2$

d) Dresser le tableau de variations de  $g$ .

3. a) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une solution unique notée  $\alpha$ .

b) Vérifier que :  $0,86 < \alpha < 0,87$ .

c) Justifier que :  $\forall x \in ]-\infty; \alpha[, g(x) > 0$  et  $\forall x \in ]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$ .

## PARTIE B

Le plan est muni d'un repère orthogonal  $(O, i, j)$ , (unité graphique : 2cm)

On considère la fonction  $f$  dérivable et définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = -x + \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-2x+3}$$

On note  $(C)$  la courbe représentative de  $f$ .

1. a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ .

b) En déduire que  $(C)$  admet une branche parabolique de direction  $(Oj)$  en  $-\infty$ .

2. a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

b) Démontrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = -x$  est asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$ .

c) Etudier la position de  $(C)$  par rapport à  $(D)$ .

3. a) Soit  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ . Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$

b) En déduire les variations de  $f$ .

c) Dresser le tableau de variations de  $f$  (On ne calculera pas  $f(\alpha)$ ).

4. Construire  $(D)$  et  $(C)$  sur le même graphique.

On précisera les points de  $(C)$  d'abscisses  $0; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 4$ .

On prendra :  $\alpha \approx 0,865$  et  $f(\alpha) \approx 0,4$ .

5. Soit  $t$  un nombre réel strictement supérieur à  $\frac{3}{2}$ .

On désigne par  $A(t)$  l'aire en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations  $x = \frac{3}{2}$  et  $x = t$ .

On pose :  $I_t = \int_{\frac{3}{2}}^t (x - \frac{1}{2})e^{-2x+3} dx$ .

- a) A l'aide d'une intégration par parties, justifier que :  $I_t = \frac{3}{4} - \frac{t}{2}e^{-2t+3}$
- b) En déduire  $A(t)$ .
- c) Calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t)$ .

242

## EXAMEN 3: BAC D 2015

### EXERCICE 1

#### PARTIE I

On considère la fonction  $p$  définie sur  $\mathbb{C}$  par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, p(z) = z^3 - 3 + 2iz^2 + (1+5i)z + 2 - 2i$$

- 1. a) Calculer  $p(i)$ .
- b) Déterminer deux nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que :

$$p(z) = z - i(z^2 + az + b)$$

- 2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation :  $z^2 - (3+i)z + 2 + 2i = 0$
- 3. En déduire les solutions dans  $\mathbb{C}$ , de l'équation (E) :  $p(z) = 0$ .

#### PARTIE II

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , d'unité : 5 cm.

On pose  $z_0 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n$

On note  $A_n$  le point du plan d'affixe  $z_n$ .

- 1. a) Calculer  $z_1$  et  $z_2$ .
- b) Placer les points  $A_0, A_1$  et  $A_2$  dans le plan complexe.

2. On considère la suite  $U$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = |z_{n+1} - z_n|$ .

- a) Justifier que :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$
  - b) Démontrer que  $U$  est une suite géométrique de raison  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  et de premier terme  $\sqrt{2}$
  - c) Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .
  - 3. On désigne par  $A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$  la longueur de la ligne brisée  $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )
- On pose  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$
- a) Calculer  $\ell_n$
  - b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n$

243

PARTIE B

On considère la fonction  $f$  dérivable et définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x^2 - 3}{2} e^{-x}$ .

On note (C) la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), d'unités graphiques OI = 2cm ; OJ = 4cm.

1. a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- b) Démontrer que la courbe (C) admet en  $-\infty$  une branche parabolique de direction celle de (OI).
2. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et interpréter graphiquement ce résultat.
3. a) Soit  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .

Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{3 + 2x - x^2}{2} e^{-x}$

- b) Etudier les variations de  $f$ .
- c) Dresser le tableau de variations de  $f$ .
4. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 est :  $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$
5. Etudier les positions relatives de (C) par rapport à l'axe des abscisses.
6. Représenter graphiquement (T) et (C).

PARTIE C

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer :  $\int_0^1 x e^{-x} dx$

2.a) Vérifier que  $f$  est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.

b) En déduire que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f'(x) + x e^{-x}$

c) En utilisant la question précédente, calculer en cm<sup>2</sup> l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=1$ .

Mariam, une jeune diplômée sans emploi, a reçu un fonds et décide d'ouvrir un restaurant. Après un mois d'activité, elle constate que :

- pour un jour donné, la probabilité qu'il y ait une affluence de clients est 0,6 ;
- lorsqu'il y a une affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,7 ;
- lorsqu'il n'y a pas d'affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,4.

On désigne par A l'évènement « il y a affluence de clients » et B l'évènement « Mariam réalise un bénéfice ».

1. On choisit un jour au hasard.
  - a) Calculer la probabilité de l'évènement E suivant : « il y a une affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice ».
  - b) Démontrer que la probabilité p(B) de l'évènement B est 0,58.
  - c) Mariam a réalisé un bénéfice.

Calculer la probabilité qu'il y ait eu une affluence de clients ce jour-là.

2. Mariam veut faire des prévisions pour trois jours successifs donnés. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où elle réalise un bénéfice sur les 3 jours successifs.
  - a) Déterminer les valeurs prises par X.
  - b) Déterminer la loi de probabilité de X.
  - c) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.

3. Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On note  $p_n$  la probabilité que Mariam réalise au moins une fois un bénéfice pendant n jours successifs sur une période de n jours.

- a) Justifier que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2 :  $p_n = 1 - (0,42)^n$ .
- b) Déterminer la valeur minimale de n pour qu'on ait  $p_n \geq 0,9999$ .

PROBLEME  
PARTIE A

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $r(x) = x e^{-x}$   
On considère l'équation différentielle (E) :  $y' + y = r$

Soit  $g$  la fonction dérivable et définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-x}$

1. Démontrer que  $g$  est une solution de l'équation (E).
2. Soit l'équation différentielle (F) :  $y' + y = 0$ .
  - a) Démontrer qu'une fonction  $\varphi$  est solution de (E) si et seulement si  $\varphi - g$  est une solution de (F).
  - b) Résoudre l'équation différentielle (F).
  - c) En déduire la solution  $\varphi$  de (E) qui vérifie  $\varphi(0) = -\frac{3}{2}$

# EXAMEN 4: BAC D 2014

## EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On note B et C les points du plan d'affixes respectives  $3-2i$  et  $5+i$ .

On désigne par S la similitude directe de centre O qui transforme C en B.

1. a) Démontrer que l'écriture complexe de S est :  $z' = \frac{1}{2} 1 - i z$ .

b) Déterminer les éléments caractéristiques de S.

c) Déterminer l'affixe du point D qui pour image le point C par S.

2. a) Justifier que l'affixe  $z_1$  du point  $B_1$ , image de B par S est  $\frac{1}{2} 1 - 5i$ .

b) Justifier que le triangle  $OB B_1$  est rectangle et isocèle en  $B_1$ .

3. On définit les points suivants :  $B_0 = B$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = S B_n$ .

On note  $z_n$  l'affixe du point  $B_n$ .

a) Démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \left(\frac{1-i}{2}\right)^n 1 - i^n z_0$

b) Calculer la distance  $OB_n$  en fonction de  $n$ .

c) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} OB_n$ .

## EXERCICE 2

Pour étudier l'évolution du nombre de bacheliers accédant aux études supérieures, le ministère du plan d'un pays a diligenté une enquête depuis l'an 2003.

Les résultats de cette enquête sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Année	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Rang X de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre Y de diplômés (en milliers)	25	27	30	33	34	35	38	41	43

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique double  $(X, Y)$  dans le plan muni d'un repère orthonormé. (Unité graphique : 1cm).

On prendra pour origine le point  $\Omega \left(\frac{24}{2}\right)$ .

2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de la série  $(X, Y)$ .

3. Justifier que :

a) La variance de X est  $\frac{20}{3}$  ;

b) La covariance de X et Y est  $\frac{44}{3}$ .

264

4. a) Sachant que la variance de Y est égale à  $\frac{98}{3}$ , déterminer la valeur du coefficient de corrélation linéaire.

b) Justifier que ce résultat permet d'envisager un ajustement linéaire.

5. Soit (D) la droite de d'ajustement de Y en X obtenue par la méthode des moindres carrés.

a) Déterminer une équation de (D).

b) Tracer (D).

6. On suppose que l'évolution se poursuit de la même manière au cours des années suivantes. Donner une estimation du nombre de bacheliers qui accéderont aux études supérieures en 2020.

## PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . L'unité graphique est le centimètre.

### Partie A

Soit  $g$  la fonction dérivable et définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = x + ax + b e^{-x}$  où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels.

Dans le plan muni du repère  $(O, I, J)$ , on désigne par :

(C) la courbe représentative de  $g$  ; (D) la droite d'équation  $y = x$ .

1. a) On donne :  $g(0) = 1$ . Déterminer la valeur de  $b$ .

b) On admet que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite (D). Déterminer la valeur de  $a$ .

2. Soit  $h$  la fonction dérivable et définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = e^x - x$

a) Soit  $h'$  la dérivée de  $h$ . Calculer  $h'(x)$ , pour tout  $x$  élément de  $\mathbb{R}$ .

b) Dresser le tableau de variation de  $h$ .

On ne calculera pas les limites de  $h$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

c) En déduire que :  $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) > 0$ .

### Partie B

Soit  $f$  la fonction dérivable et définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x + x + 1 e^{-x}$ .

1. a) Calculer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .

b) Justifier que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ .

c) Donner une interprétation graphique de ces résultats.

2. a) Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

b) Démontrer que (D) est une asymptote à (C) en  $+\infty$ .

c) Etudier les positions relatives de (C) et (D).

3. a) On désigne par  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .

Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x} h(x)$ .

b) Déterminer le sens de variation de  $f$ .

c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

4. Construire sur le même graphique (T), (C) et (D).  
 5. a) Démontrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) On note  $f^{-1}$  la bijection réciproque de  $f$ . Calculer  $f^{-1} \circ 1$

c) Construire  $\Gamma$  la courbe représentative de  $f^{-1}$  sur le même graphique que (C).

**Partie C**

On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_{-1}^n t+1 e^{-t} dt$ .

1. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :  
 $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = -2 - n e^{-n} + e$ .

2. Calculer l'aire  $A_n$  en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations  $x = -1$  et  $x = n$

3. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$ .

245

## EXAMEN 5: BAC D 2013

**EXERCICE 1**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, I, J)$ , on désigne par K, A et B les points d'affixes respectives  $z_1 = 2$ ,  $z_2 = 4 + 2i$  et  $z_3 = 2 + 4i$ .

L'unité graphique est 2 cm.

1. a) Placer les points K, A et B.

b) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ .

2. On note S la similitude directe de centre K qui transforme A en B.

a) Démontrer que l'écriture complexe de S est  $z' = (1+i)z - 2i$ .

b) Déterminer les affixes respectives des points I' et J', images respectives des points I et J puis placer I' et J'.

3. Déterminer le rapport et une mesure de l'angle orienté de la similitude directe S.

4. Soit (C) le cercle de centre  $\Omega(1; 1)$  et de rayon 2.

a) Tracer (C).

b) Déterminer le centre et le rayon de (C'), image de (C) par S.

c) Construire (C').

5. a) Déterminer puis construire l'image par S de la droite (U).

On pourra caractériser l'image par S de la droite (U) par deux de ses points.

b) On désigne par E le point d'intersection de (C) et la droite (U) d'abscisse négative. Placer E et l'image E' de E par S. Justifier la position du point E'.

**EXERCICE 2**

On considère la suite numérique (u) définie par :  $u_0 = \sqrt{2}$  et pour tout nombre entier naturel n,  $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2}u_n$

naturel n,  $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2}u_n$

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . L'unité graphique est 2 cm.

1. Déterminer les valeurs exactes de  $u_1$  et  $u_2$ .

2. Soit f la fonction définie par :  $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$  et de représentation graphique (D).

a) Tracer (D) et la droite ( $\Delta$ ) d'équation  $y = x$ .

b) Placer  $u_0$  sur l'axe (OI).

c) A l'aide de (D) et ( $\Delta$ ), placer les termes  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  de la suite (u) sur l'axe (OI).

3. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,  $u_n \leq 4$ .

b) Démontrer que la suite (u) est croissante.

# EXAMEN G: BAC D 2012

## EXERCICE 1

Madame Kouamé, statisticienne à la retraite, a créé une petite entreprise de fabrication de colliers traditionnels.

Dans l'intention de faire des prévisions pour la production de colliers de l'année 2011, elle a fait l'état des ventes des huit types de colliers fabriqués en 2010.

Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Type de collier	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix $x_i$ de vente en centaines de francs CFA du collier de type $i$ .	54	60	66	72	84	90	96	102
Nombre $y_i$ de dizaines de colliers vendus au prix $x_i$	18	16	15	13	10	9	8	7

On désigne par :

X le caractère « prix de vente du collier » ;

Y le caractère « nombre de colliers vendus au prix X »

- Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série statistique double de caractère (X;Y) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). On prendra 2 cm pour 10 centaines de francs sur (OI) et 2 cm pour 2 dizaines de colliers sur (OJ).
- Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage.
- Calculer la variance  $V(X)$  de X.
  - Calculer la covariance  $COV(X;Y)$  de la série statistique double de caractère (X;Y)
  - On admet que  $V(Y)=14,50$ . Démontrer que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire est égal à -0,99.
- Soit (D) la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés.
  - Justifier que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient directeur de (D) est égal à -0,23.
  - Démontrer qu'une équation de la droite (D) est :  $y = -0,23x + 29,94$ .
- Pour l'année 2011, Madame Kouamé souhaite fabriquer un nouveau type de collier qu'elle vendrait à 11 500 francs CFA l'unité. Combien de colliers de ce type pourrait-elle vendre selon l'ajustement linéaire réalisé ?

246

## EXERCICE 2

On considère la suite numérique  $U$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :

$$\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2} \left( U_n + \frac{4}{U_n} \right) \end{cases}$$

- On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{4}{x} \right)$ 
  - On note (C) la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) où les unités respectives sur (OI) et (OJ) sont 4 cm et 2 cm. La courbe (C) et la droite (D) d'équation  $y=x$  sont tracées sur la feuille annexe à rendre avec la copie.
  - Représenter sur l'axe des abscisses (OI) les termes  $U_1, U_2$  et  $U_3$  de la suite  $U$  en utilisant la courbe (C) et la droite (D).
  - Quelle conjecture peut-on faire quant à la convergence de la suite  $U$  ?
- On admet que  $f$  est continue et strictement croissante sur  $]2;3]$ .
  - Démontrer que  $f(2;3] \subset ]2;3]$
  - En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier  $n \geq 1, 2 \leq U_n \leq 3$
  - Démontrer que la suite  $U$  est décroissante.
    - En déduire que la suite  $U$  est convergente.
- On considère la suite  $V$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2}$ 
  - Démontrer que pour tout entier  $n \geq 1, V_{n+1} = V_n^2$
  - Démontrer par récurrence que pour tout entier  $n \geq 1, V_n = [V_1]^{2^{n-1}}$ .
  - Calculer  $V_1$  puis exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$ .
  - Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .
  - Démontrer que  $\lim V = 0$ . En déduire la limite de  $U$ .

- c) En déduire que la suite  $(u)$  est convergente.
4. On considère la suite  $(v)$  définie par  $v_n = u_n - 4$ , pour tout nombre entier naturel  $n$ .  
Démontrer que la suite  $(v)$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
5. On pose, pour tout nombre entier naturel  $n$  :  
 $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  la somme des  $n+1$  premiers termes de la suite  $(v)$   
 $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  la somme des  $n+1$  premiers termes de la suite  $(u)$
- Déterminer une expression de  $T_n$  en fonction de  $n$ .
  - Justifier que :  $S_n = 2(\sqrt{2}-4)\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + 4(n+1)$
  - Déterminer la limite de  $S_n$ .

**PROBLEME**

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . L'unité graphique est 2 cm.  
On considère la fonction  $f$  dérivable et définie sur  $]-\infty; 1[$  par :

$$f(x) = x^2 - 1 + \ln(1-x)$$

On note  $(C)$  la courbe représentative de  $f$ .

- Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
  - Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  puis donner une interprétation graphique du résultat.
  - Calculer la limite de  $f$  à gauche en 1 puis donner une interprétation graphique du résultat.
- Pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $]-\infty; 1[$ , calculer  $f'(x)$ .
  - Démontrer que  $f$  est strictement décroissante sur  $]-\infty; 1[$ .
  - Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- Démontrer que l'équation  $(E) x \in ]-\infty; 1[$ ,  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$ .
  - Justifier que  $-0,7 < \alpha < -0,6$ .
- Démontrer qu'une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'abscisse 0 est :  $y = -x - 1$ .
  - On donne le tableau de valeurs suivant :

$x$	-2	-1,5	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0,25	0,5	0,75
arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	4,1	2,2	0,7	0,1	-0,3	-0,7	-1,2	-1,4	-1,8

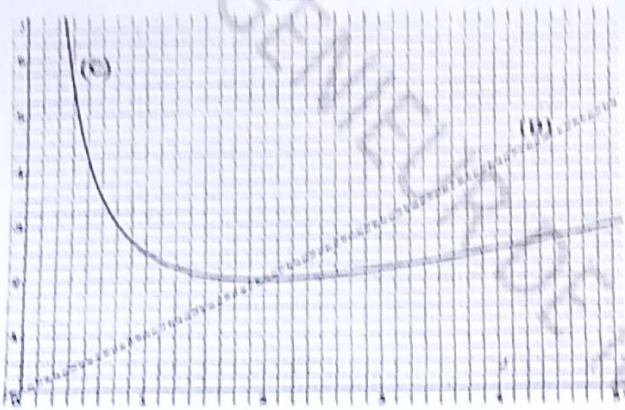
Tracer  $(T)$  et  $(C)$ .

On pourra faire la figure dans la partie du plan caractérisée par  $\begin{cases} -3 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 6 \end{cases}$

246

5. On désigne par  $A$  l'aire de la partie du plan délimitée par  $(C)$ , la droite  $(OJ)$  et les droites d'équations respectives  $X = \alpha$  et  $X = 0$ .

- Calculer  $\int_{\alpha}^0 \ln(1-x) dx$  à l'aide d'une intégrale par parties.
  - Démontrer que la valeur de  $A$  en unités d'aire est  $A = \frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha)$ .
  - Déterminer en  $cm^2$  l'arrondi d'ordre 2 de la valeur de  $A$  pour  $\alpha = -0,65$ .
6. Soit  $f^{-1}$  la bijection réciproque de  $f$  et  $(C')$  la courbe représentative de  $f^{-1}$  dans le plan muni du repère  $(O, I, J)$ .
- Calculer  $f(-1)$ .
  - Démontrer que le nombre dérivé de  $f^{-1}$  en  $\ln 2$  existe puis le calculer.
  - Construire la courbe  $(C')$  et sa tangente  $(\Delta)$  au point d'abscisse  $\ln 2$  sur la figure de la question n°4.b).



**PROBLEME**  
**PARTIE A**

On considère la fonction  $g$  dérivable et définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = e^x + 2 \ln x$

1. a. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .  
b. Calculer  $g'(x)$   
c. Etudier le sens de variation de  $g$  puis dresser son tableau de variation.
2. a. Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $]0; +\infty[$   
b. Vérifier que  $0,4 < \alpha < 0,5$ .  
c. Démontrer que :

$$\forall x \in ]0; \alpha[, \quad g(x) < 0;$$

$$\forall x \in ]\alpha; +\infty[, \quad g(x) > 0.$$

R(4.7)

**PARTIE B**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = e^x + 2x \ln x - 2x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O, I, J)$ . L'unité graphique est 1 cm.

1. a. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .  
b. Interpréter graphiquement les résultats.
2. a. Démontrer que  $f$  est continue en 0.  
b. Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$ .  
c. La fonction  $f$  est-elle dérivable en 0 ? Justifier la réponse.  
d. Interpréter graphiquement le résultat de la question 2. b.
3. On admet que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .  
a. Démontrer que  $\forall x \in ]0; +\infty[, \quad f'(x) = g(x)$ .  
b. Etudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation.  
4. Tracer la courbe (C) sur l'intervalle  $[0; 2]$ .

(On prendra  $\alpha \approx 0,45$  et on admettra que la courbe (C) coupe la droite (D) en deux points d'abscisses respectives 0,3 et 0,6).

5. a. On pose  $K = \int_1^2 x \ln x \, dx$ .

A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :  $K = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$ .

b. Soit A l'aire en cm<sup>2</sup> de la partie du plan délimitée par la courbe, la droite (D) et les droites d'équations respectives  $x = 1$  et  $x = 2$ .

Calculer A puis donner l'arrondi d'ordre 2 du résultat.

# EXAMEN 7: BAC D 2011

## EXERCICE 1

On considère la suite numérique  $v_n$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $v_n = \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}$

1. a. Démontrer que la suite  $v_n$  est convergente après avoir déterminé sa limite.
  - b. Démontrer que la suite  $v_n$  est croissante.
  - c. Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{3}{4} \leq v_n < 1$
2. On pose pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $a_n = v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$

a. Démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$

b. En déduire la limite de la suite  $a_n$ .

3. On pose pour tout entier naturel  $n$  :  $b_n = \ln(v_1) + \ln(v_2) + \dots + \ln v_n$

a. Démontrer que  $b_n$  est une suite à termes négatifs.

b. Calculer la limite de la suite  $b_n$ .

## EXERCICE 2

La société « Gnamienlait » de Gnamien produit des sachets de lait caillé.

Soit  $X$  la variable aléatoire qui associe à chaque sachet de lait caillé produit, sa masse en gramme (g). La loi de probabilité de  $X$  est définie par le tableau ci-dessous.

$x_i$ (en g)	220	230	240	250	260	270	280
$P_i$	0,08	0,10	a	b	0,16	0,15	0,04

a et b sont deux nombres réels.

$x_i$  représente la masse du sachet de lait caillé ;

$P_i$  la probabilité qu'un sachet de lait ait la masse  $x_i$ .

1. a. Calculer  $E(X)$  l'espérance mathématique de  $X$  en fonction de a et b.
- b. Sachant que  $E(X) = 250$ , justifier que  $a = 0,14$  et  $b = 0,33$ .

Dans la suite de l'exercice, on conservera les valeurs de a et de b données ci-dessus.

2. Gnamien prend au hasard un sachet de lait caillé de sa société.

Calculer la probabilité pour que la masse de ce sachet de lait caillé soit au moins de 250g.

268

3. Tiéplé, la fille de Gnamien, prend au hasard et de façon indépendante cinq sachets de lait caillé.

Calculer la probabilité qu'elle ait choisi exactement trois sachets de lait caillé de 220 g.

On prendra l'arrondi d'ordre 3 du résultat.

4. Les sachets de lait caillé sont contrôlés par une machine.

Cette machine est réglée pour éliminer en principe les sachets de lait de masse inférieure à 250 g.

- Si un sachet de lait caillé a 240 g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,7.
- Si un sachet de lait caillé a 230 g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,8.
- Si un sachet de lait caillé a 220 g, il est systématiquement éliminé.
- Si un sachet de lait caillé a une masse supérieure ou égale à 250g, il est systématiquement accepté.

a. Justifier que la probabilité qu'un sachet de lait caillé de 240 g soit éliminé est de 0,098.

b. Calculer la probabilité pour qu'un sachet de lait caillé de cette société soit éliminé.

## PROBLEME

### Partie A

Soit la fonction numérique dérivable sur  $]0; +\infty[$  et définie par :

$$g(x) = -\frac{2x+1}{x^2} + \ln x$$

1. a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

b. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

2. a. Démontrer que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, g'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$

b. En déduire le sens de variation de  $g$ .

c. Dresser le tableau de variation de la fonction  $g$ .

3. a. Démontrer que l'équation  $x \in ]0; +\infty[, g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$ .

b. Justifier que  $2,55 < \alpha < 2,56$ .

c. Démontrer que :  $\begin{cases} \forall x \in ]0; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in ]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

### Partie B

On considère la fonction dérivable sur  $]0; +\infty[$  et définie par

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) e^{-x}$$

On note (C) la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O, I, J)$ . (Unités graphiques:  $OI = 2$  cm et  $OJ = 10$  cm).

- a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  puis donner une interprétation graphique du résultat.  
b. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  puis donner une interprétation graphique du résultat.

2. Démontrer que:  $f(\alpha) = -\frac{1+\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha}$

3. a. Démontrer que:  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = e^{-x} \cdot g(x)$

b. En utilisant la partie A, déterminer les variations de  $f$ .

c. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

4. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse

1 est:  $y = -\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$ .

5. Construire la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère  $(O, I, J)$ .  
On prendra  $\alpha = 2,6$ .

### Partie C

1. Soit  $h$  la fonction dérivable sur  $]0; +\infty[$  et définie par:  $h(x) = e^{-x} \cdot \ln x$

Démontrer que  $h$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

2. Soit  $\lambda$  un nombre réel tel que  $\lambda > 3$ .

a. Calculer, en  $\text{cm}^2$  et en fonction de  $\lambda$ , l'aire  $A(\lambda)$  de la partie du plan comprise entre (C), (OI) et les droites d'équation  $x = 3$  et  $x = \lambda$ .

b. Calculer  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

269

## EXAMEN 8: BAC D 2010

### EXERCICE 1

#### Partie A

On considère dans  $\mathbb{C}$ : l'équation: (E):  $4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3+i\sqrt{3})z - 4 = 0$ .

1. Déterminer les racines carrées de  $6+6i\sqrt{3}$ .

2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$ : l'équation  $2z^2 - (1+3i\sqrt{3})z - 4 = 0$ .

3. a. Développer, réduire et ordonner  $(2z+1)[2z^2 - (1+3i\sqrt{3})z - 4]$

b. En déduire les solutions de (E).

4. Soit  $z_0 = -\frac{1}{2}$ ;  $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ;  $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

Exprimer chacun des nombres complexes  $z_0$ ;  $z_1$  et  $z_2$  sous forme trigonométrique.

#### Partie B

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  où l'unité est 1 cm, on considère les points  $M_0$ ,  $M_1$  et  $M_2$  d'affixes respectives

$$-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; 1 + \sqrt{3}i$$

S est la similitude directe de centre O, d'angle  $-\frac{\pi}{3}$  et de rapport 2.

1. a. Déterminer l'écriture complexe de S.

b. Justifier que  $S(M_0) = M_1$  et  $S(M_1) = M_2$ .

2. Soit  $M_n$  un point du plan d'affixe  $Z_n$ .

On pose pour tout nombre entier naturel  $n$ ,  $M_{n+1} = S(M_n)$

Justifier que  $Z_{n+1} = (1 - \sqrt{3}i)Z_n$  où  $Z_{n+1}$  est l'affixe de  $M_{n+1}$ .

3. On considère la suite  $(U_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $U_n = |Z_n|$

a. Démontrer que  $(U_n)$  est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b. Justifier que la distance  $OM_{12} = 2048$ .

### EXERCICE 2

On teste un médicament sur un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé.

Pour cela, 60% des individus prennent le médicament, les autres recevant une substance neutre et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie.

Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de ce taux avec une probabilité de 0,8.

On ne constate aucune baisse de ce taux pour 90% des personnes ayant reçu la substance neutre.

1. Calculer la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie sachant qu'on a pris le médicament.

2. Démontrer que la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie est 0,52.

3. On soumet au test un individu pris au hasard.

Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie.

4. On contrôle 5 individus au hasard.

a. Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé.

b. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé.

5. On contrôle  $n$  individus pris au hasard. ( $n$  est un entier naturel non nul).

Déterminer  $n$  pour que la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé soit supérieur à 0,98.

### PROBLEME

#### Partie A

Soit la fonction  $g$  dérivable sur  $]0; +\infty[$  et définie par:  $g(x) = 1 + x \ln x$ .

1. a. Justifier que:  $\forall x \in ]0; +\infty[, g'(x) = 1 + \ln x$ .

b. Étudier les variations de  $g$  puis dresser son tableau de variation.  
(On ne calculera pas les limites de  $g$ )

2. En déduire que:  $\forall x \in ]0; +\infty[, g(x) > 0$ .

#### Partie B

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par:  $f(x) = \frac{x}{1+x \ln x}$

On note  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . (Unité: 4 cm).

1. a. Étudier la continuité de  $f$  en 0.

b. Étudier la dérivabilité de  $f$  en 0.

c. Démontrer qu'une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point  $O$  est:  $y = x$ .

250

243

d. Démontrer que:

$(C)$  est au-dessus de  $(T)$  sur  $]0; 1[$

$(C)$  est au-dessous de  $(T)$  sur  $]1; +\infty[$ .

2. Démontrer que la droite  $(OI)$  est une asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$ .

3. a. On suppose que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

Démontrer que:  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = \frac{1-x}{1+x \ln x^2}$

b. En déduire les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

4. Construire la droite  $(T)$  et la courbe  $(C)$  dans le plan muni du repère  $(O, I, J)$ .

#### Partie C

1. a. Justifier que:  $\forall x \in ]0; +\infty[, f(x) \leq 1$ .

b. Démontrer que:  $\forall x \in [1; e], 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$ .

2. Soit  $A$  l'aire en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan limitée par  $(C)$ ,  $(OI)$  et les droites d'équations  $X=1$  et  $X=e$ .

Démontrer que:  $16(e-1) + 16 \ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq A \leq 16(e-1)$

# EXAMEN 9: BAC D 2009

## EXERCICE 1

L'entreprise Ivoirbois, spécialisée dans l'industrie du bois, envisage de faire des prévisions pour l'année 2007 du coût de production de feuilles de contre-plaqué en fonction du chiffre d'affaires.

Elle dispose à cet effet des statistiques résumées dans le tableau ci-dessous :

Années	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Chiffre d'affaires X (en millions de francs)	350	380	500	450	580	650	700
Coût de production Y (en millions de francs)	40	45	50	55	60	65	70

1. Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série double (X, Y) dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O, I, J).  
On prendra 1 cm pour 50 millions de francs en abscisse et 1 cm pour 5 millions de francs en ordonnées.

2. a. Calculer le chiffre d'affaires moyen  $\bar{X}$ .
- b. Calculer le coût moyen de production  $\bar{Y}$ .
3. a. Vérifier qu'un arrondi à l'entier de la covariance  $\text{cov}(X, Y)$  de la série statistique est égal à 1193.
- b. Justifier l'existence d'un ajustement linéaire entre X et Y.
4. a. Déterminer une équation de la droite (D) d'ajustement de Y en fonction de X par la méthode des moindres carrés.
- b. Construire (D) dans le repère (O, I, J).
5. Utiliser l'ajustement précédent pour prévoir le coût de production de l'entreprise Ivoirbois de l'année 2007 si le chiffre d'affaires de l'année 2007 est de 800 millions de francs.

## EXERCICE 2

Soit la suite définie  $U_n \in \mathbb{N}$  par : 
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{3}{5}U_n + 1 \end{cases}$$

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), représenter sur l'axe des abscisses les termes  $U_0, U_1, U_2$  et  $U_3$  de la suite  $U_n \in \mathbb{N}$  (unité : 2 cm).

2. a. Démontrer par récurrence que la suite  $U_n \in \mathbb{N}$  est majorée par  $\frac{5}{2}$ .

b. Démontrer que la suite  $U_n \in \mathbb{N}$  converge.

3. Soit la suite  $V_n \in \mathbb{N}$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_n - \frac{5}{2}$ .

a. Démontrer que la suite  $V_n \in \mathbb{N}$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de n.

c. Déterminer la limite de  $U_n \in \mathbb{N}$ .

## PROBLEME

### PARTIE A

On considère la fonction  $g$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et définie par :  $g(x) = (1-x)e^{1-x} - 1$

1. a. Justifier que la limite de  $g$  en  $+\infty$  est -1.

b. Déterminer la limite de  $g$  en  $-\infty$ .

2. a. Démontrer que, pour tout  $x$  élément de  $\mathbb{R}$ ,  $g'(x) = (x-2)e^{1-x}$ .

b. Etudier les variations de  $g$  et dresser son tableau de variation.

3. a. Démontrer que l'équation  $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$ .

b. Justifier que :  $0,4 < \alpha < 0,5$ .

5. En déduire que : 
$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty; \alpha[, g(x) > 0; \\ \forall x \in ]\alpha; +\infty[, g(x) < 0. \end{cases}$$

### PARTIE B

On considère la fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et définie par :  $f(x) = xe^{1-x} - x + 2$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

1. Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

2. a. Démontrer que  $f$  est une primitive de  $g$ .

b. Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

3. a. Démontrer que (D) :  $y = -x + 2$  est une asymptote oblique à (C) en  $+\infty$ .

b. Etudier la position relative de (D) et (C).

4. Démontrer que (C) admet en  $-\infty$  une branche parabolique de direction (OJ).

5. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

6. Démontrer que  $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$

7. Justifier que, pour tout nombre réel  $x$ ,  $f(-x+2) = e^{x-1}f(x)$

8. On admet que l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement deux solutions.

On appelle  $\beta$  l'une de ces solutions. Démontrer que  $-\beta + 2$  est l'autre solution.

9. Tracer (D), (T) et (C). (On prendra  $\alpha = 0,4$  et  $\beta = 2,5$ ).

### PARTIE C

Soit  $\lambda$  un nombre réel strictement positif et  $A(\lambda)$  l'aire en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan délimitée par (C), la droite (D) d'équation  $y = -x + 2$  et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = \lambda$ .

1. Calculer  $A(\lambda)$  à l'aide d'une intégration par parties.

2. Déterminer la limite de  $A(\lambda)$  lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ .

# LAAMEN 10: BAC D 2008

## EXERCICE 1

Le plan complexe est muni du repère orthonormé  $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ .

On considère l'équation (E):  $Z \in \mathbb{C}, Z^3 + 6 - 5i Z^2 + (1 - 20i)Z - 14 - 5i = 0$

1. a. Vérifier que  $i$  est une solution de l'équation (E).  
 b. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation:  $Z^2 + (6 - 4i)Z + 5 - 14i = 0$   
 c. Résoudre à l'aide des questions qui précèdent l'équation (E).
2. On considère les points A, B et D d'affixes respectives  $u = i$ ;  $v = -2 + 3i$  et  $t = -4 + i$ .  
 a. Placer les points A, B et D dans le repère.  
 b. Ecrire le nombre complexe  $Z = \frac{u-v}{t-v}$  sous forme trigonométrique.

- c. En déduire que le triangle ABD est rectangle isocèle en B.
3. Soit S la similitude directe de centre A qui transforme D en B. B' est l'image de B par S.

- a. Justifier que le triangle ABB' est rectangle isocèle en B'.
- b. En déduire la construction du point B'.
4. a. Déterminer l'écriture complexe de S.  
 b. Calculer l'affixe de B'.

## EXERCICE 2

Le tableau ci-dessous donne les notes sur 20 obtenues en mathématiques et en sciences physiques par huit candidats de la série D au baccalauréat 2005.  $X_i$  est la note de mathématiques,  $Y_i$  la note en sciences physiques.

$X_i$	4	6	7	9	11	14	12	17
$Y_i$	3	4	6	8	10	12	9	14

1. Représenter graphiquement le nuage de points associé à cette série statistique dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . L'unité graphique est 1 cm.
2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage puis le placer dans le repère.
3. a. Vérifier que la covariance  $\text{cov}(X, Y)$  de la série statistique est égale à  $\frac{57}{4}$ .  
 b. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.
4. Démontrer qu'une équation de la droite (D) de régression de Y en fonction de X par la méthode des moindres carrés est:  $Y = \frac{19}{22}X - \frac{17}{44}$ .
5. Sur la base de l'ajustement linéaire ainsi réalisé, calculer la note probable de mathématiques d'un candidat qui a obtenu 15 sur 20 en sciences physiques.

252

## PROBLEME

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction  $f$  dérivable sur  $]0, +\infty[$  et définie par  $f(x) = 2x - 3 + \frac{\ln x}{x}$ . On note (C) la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni du repère orthonormé  $(O, I, J)$ . L'unité graphique est 2 cm.

### PARTIE A

Soit  $g$  la fonction dérivable sur  $]0, +\infty[$  et définie par:  $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$ .

1. Etudier les variations de  $g$  puis dresser son tableau de variation.  
 (On ne demande pas de calculer les limites).
2. Justifier que:  $\forall x \in ]0, +\infty[, g(x) > 0$ .

### PARTIE B

1. a. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
 b. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  puis interpréter graphiquement le résultat.
2. a. Démontrer que (D):  $y = 2x - 3$  est une asymptote à (C) en  $+\infty$ .  
 b. Préciser la position de (C) par rapport à (D).
3. a. Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif  $x$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .  
 b. Etudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation.  
 c. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 est  $y = 3x - 4$ .
4. a. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$ .  
 b. Justifier que:  $1,3 < \alpha < 1,4$ .

### PARTIE C

On pose  $\varphi(x) = f(x) - (3x - 4)$  et  $h(x) = -x^2 + 1 - \ln x$ .

1. a. Déterminer le sens de variation de  $h$  sur  $]0, +\infty[$ .  
 b. Calculer  $h(1)$  puis justifier que:  $\forall x \in ]0, 1[, h(x) > 0$  et  $\forall x \in ]1, +\infty[, h(x) < 0$ .
2. a. Démontrer que:  $\forall x \in ]0, +\infty[, \varphi'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ .  
 b. Etudier les variations de  $\varphi$  puis en déduire le signe de  $\varphi(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
- c. Déterminer la position de (C) par rapport à la tangente (T).

### PARTIE D

1. Tracer la courbe (C), la droite (D) et la tangente (T). On prendra  $\alpha = 1,35$ .
2. Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations  $X = 1$  et  $x = e$ .

**BACCALAUREAT Session 2017 Série C**

**Exercice 1.**

On désigne par  $Y$  une variable aléatoire vérifiant les conditions suivantes :

- $Y$  prend les valeurs  $1, -1$  et  $2$  avec les probabilités respectives  $e^a, e^b$  et  $e^c$  où  $a, b$  et  $c$  sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison  $r$  tels que :  $a = b - r$  et  $c = b + r$ .
- L'espérance mathématique  $E(Y)$  de  $Y$  est égale à  $1$ .

- Justifie que  $(b, r)$  est solution du système  $(S) \begin{cases} e^b e^{-r} + e^b + e^b e^r = 1 \\ e^b e^{-r} - e^b + 2e^b e^r = 1 \end{cases}$
  - Résous le système  $(S)$ .
  - Déduis de ce qui précède que :  $a = \ln(\frac{1}{7})$  et  $c = \ln(\frac{4}{7})$ .
- Justifie que la variance  $V(Y)$  de  $Y$  est égale à  $\frac{12}{7}$ .
- On marque sur une droite gradué  $(D)$  les points  $A, B$  et  $C$  d'abscisses respectives  $1, -1$  et  $2$ . On désigne par  $G$  le barycentre des points pondérés  $(A, 1), (B, 2)$  et  $(C, 4)$ .  
On désigne par  $(\Gamma)$  l'ensemble des points  $M$  de la droite  $(D)$  tels que :  $MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2 = 187$  et on pose  $h(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$ .
  - Calculer l'abscisse du point  $G$ .
  - Démontre que :  $h(G) = V(Y)$ .
  - Détermine l'ensemble  $(\Gamma)$ .

**Exercice 2**

Dans le plan orienté, on considère un triangle  $OIJ$  tel que :  
 $OI = OJ$  et  $Mes(\overline{OI}, \overline{OJ}) = \frac{\pi}{2}$ .  
 $A, B$  et  $C$  sont les milieux respectifs des segments  $[IJ], [JO]$  et  $[OI]$ .

Soit  $\gamma$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et  $t$  la translation de vecteur  $\frac{1}{2}\overline{JB}$ .  
 On pose :  $F = r \circ t$  et  $G = t \circ r$ .

- Fais une figure. (On prendra :  $OI = 8$  cm).
- Détermine  $F(C)$  et  $G(B)$ .
  - Déduis de ce qui précède la nature et les éléments caractéristique de chacune des transformations  $F$  et  $G$ .

- On désigne par  $F^{-1}$  la réciproque de la transformation  $F$ .
  - Détermine la nature de la transformation  $G \circ F^{-1}$ .
  - Détermine  $(G \circ F^{-1})(O)$ , puis caractérise la transformation  $G \circ F^{-1}$ .
  - Détermine  $(G \circ F)(I)$  puis déduis-en la nature et les éléments caractéristique de la transformation  $G \circ F$ .
- On muni le plan du repère orthonormé  $(O, I, J)$  tel que défini précédemment. Soit  $h$  l'homothétie de centre  $B$  et de rapport  $-2$ .  
 On pose  $S = h \circ r$ .
  - Ecris l'affixe de chacun des points  $A, B$  et  $C$ .
  - Détermine l'écriture complexe de  $h$  et celle de  $r$ .
  - Soit  $g$  l'application complexe associée à  $S$ .  
 Démontre que : Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $g(z) = -2iz - 2 + \frac{3}{2}i$ .
  - En déduire la nature et les éléments caractéristiques de  $S$ .

**Problème**

On considère la suite  $(t_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $t_n = n - (n + \frac{1}{2})\ln(n) + \ln(n!)$ .  
 Le but de ce problème est d'étudier la convergence de la suite  $(t_n)$  et de démontrer que :  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \ln(\sqrt{2\pi})$ .

**Partie I : Etude de la convergence de la suite  $(t_n)$ .**

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $\psi$  la fonction définie sur  $] -n; +\infty[$  par  $\psi(t) = \ln(1 + \frac{t}{n}) - \frac{t}{n}$ . On suppose que  $\psi$  est dérivable sur  $] -n; +\infty[$  et on note  $\psi'$  sa fonction dérivée.

- Justifie que pour tout  $t \in ] -n; +\infty[$ ,  $\psi'(t) = \frac{-t}{n^2(1 + \frac{t}{n})}$ .
  - Calcule  $\psi(0), \psi$  (on ne calculera pas les limites)
  - $\forall t \in ] -n; +\infty[, \ln(1 + \frac{t}{n}) \leq \frac{t}{n}$ . a) En utilisant la question 1-d) et en effectuant un changement de variable, démontre que :  $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ln(x) \leq x - 1$ .
  - Démontre que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} (\frac{x}{k} - 1) dx = 0$ .

254

c) Déduis des questions 2-a) et 2-b) que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{x}{k}\right) dx \leq 0$ .

d) Justifie, alors que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(x) dx \leq \ln(k)$ .

e) En utilisant la relation de Chasles, démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(x) dx \leq \ln(n!)$$

3- a) En utilisant une intégration par parties, démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n - (n + \frac{1}{2}) \ln(n + \frac{1}{2}) + \ln(n!) \geq \ln(\sqrt{2})$$

b) Démontre que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n \geq \ln(\sqrt{2})$

4- On définit la fonction  $f$  sur  $]0;1[$  par :  $f(x) = \frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ .

On admet que :  $\forall x \in ]0;1[, f(x) \geq 1$  et  $n \in \mathbb{N}^*, t_{n+1} - t_n = 1 - f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$ .

a) Détermine le sens de variation de la suite  $(t_n)$ .

b) Déduis des questions précédentes la convergence de la suite  $(t_n)$ .

**Partie II : Calcul de la limite de la suite  $(t_n)$ .**

On définit la suite  $(w_n)$  par :  $w_0 = \frac{\pi}{2}$  et  $n \in \mathbb{N}^*, w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$ .

1- a) Calcule  $w_1$ .

b) Démontre que la suite  $(w_n)$  est décroissante et positive. On admet que la suite  $(w_n)$  est à termes strictement positifs.

c) A l'aide d'une intégration par parties, démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n \quad (\text{remarque que } \sin^{n+2}(t) = \sin(t) \times \sin^{n+1}(t)).$$

d) En utilisant les questions 1-b) et 1-c) de la partie II, justifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{w_{n+1}}{w_n} \leq 1$$

e) Déduis de ce qui précède  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n}$ .

2- On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = (n+1)w_{n+1} \times w_n$ .

a) Démontre que la suite  $(y_n)$  est constante.

b) Déduis de ce qui précède que :  $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \frac{\pi}{2}$ .

c) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n w_n^2$  (Remarque que :  $n w_n^2 = \frac{n}{n+1} \times y_n \times \frac{w_n}{w_{n+1}}$ )

d) Déduis de ce qui précède que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} w_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ .

3- On admet dans toute la suite du problème que si une suite  $(a_n)$  converge vers  $l$  alors la suite  $(a_{2n})$  converge aussi vers  $l$ .

a) Déduis de la question 2-c) de la partie II la limite de la suite  $(n w_{2n}^2)$ .

(On remarquera que :  $n w_{2n}^2 = \frac{1}{2} (2n w_{2n}^2)$ )

b) En utilisant la question 1-c) de la partie II, démontre par récurrence

$$\text{que : } \forall n \in \mathbb{N}, w_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

c) Démontre que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, e^{1/n} = n! \left(\frac{e}{n}\right)^n \times \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

d) En admettant que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, e^{1/n} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{n w_{2n}^2}$ , déterminer la limite de la suite  $(t_n)$ .

# BACCALAUREAT Session 2016 Série C

## EXERCICE 1

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\ln(n+1) + \ln(n+2) + \dots + \ln(n+n) - n \ln(n)}{n}$$

- Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul, 
$$u_n = \frac{1}{n} \left[ \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{n}{n}\right) \right]$$
- Démontrer que pour tout entier naturel  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n-1$ , 
$$\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$$
  
(On pourra utiliser un encadrement de  $\ln(x)$  sur  $\left[1 + \frac{k}{n}; 1 + \frac{k+1}{n}\right]$ )
  - En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_n - \frac{1}{n} \ln(2) \leq \int_1^2 \ln(x) dx \leq u_n$
- Sachant que  $\int_1^2 \ln(x) dx = 2 \ln(2) - 1$ , déduire de ce qui précède la limite de la suite  $(u_n)$ .

## EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . L'unité graphique est 2 cm.

- On note  $(\mathcal{E})$  l'ensemble des points  $M$  du plan d'affixe  $z$  ( $z = x + iy$  avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ) tel que : 
$$14z\bar{z} + 16i(z - \bar{z}) = z^2 + \bar{z}^2$$
  
Démontrer que  $M$  appartient à  $(\mathcal{E})$  si et seulement si : 
$$3x^2 + 4y^2 - 8y = 0$$
- Justifier que  $(\mathcal{E})$  est une ellipse. On note  $\Omega$  son centre.
  - Préciser les coordonnées de  $\Omega$ .
  - Déterminer une équation de l'axe focale de  $(\mathcal{E})$ .

255

X

- On note  $A, A', F$  et  $F'$  les points d'affixes respectives

$$\frac{-2\sqrt{3}}{3} + i, \frac{2\sqrt{3}}{3} + i, -\frac{\sqrt{3}}{3} + i \text{ et } \frac{\sqrt{3}}{3} + i.$$

Justifier que  $A$  et  $A'$  sont les sommets de  $(\mathcal{E})$  situés sur son axe focal. Justifier que  $F$  et  $F'$  sont les foyers de  $(\mathcal{E})$ .

- Construire l'ellipse  $(\mathcal{E})$ .
- On considère l'hyperbole  $(H)$  de foyers  $A$  et  $A'$  et de sommets  $F$  et  $F'$ .
  - Démontrer qu'une équation cartésienne de  $(H)$  dans le repère  $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est :  $3x^2 - y^2 = 1$ .
  - Tracer les asymptotes de  $(H)$ .
  - Construire  $(H)$ .

## PROBLEME

### PARTIE A

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ;  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$  cm.

On considère la fonction dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et définie par :

$$f(x) = x - 4 + \frac{1}{4} \ln|x|.$$

- Calculer la limite de  $f$  en 0.
  - Calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
  - Démontrer que  $f$  est strictement croissante sur chacun des intervalles  $] -\infty; -\frac{1}{4}[$  et  $] 0; +\infty[$  et strictement décroissante sur l'intervalle  $] -\frac{1}{4}; 0[$ .
  - Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- Démontrer que l'équation  $x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  tel que  $3 < \alpha < 4$ .
- Démontrer que : 
$$\begin{cases} \forall x \in ] -\infty; 0[ \cup ] 0; \alpha[, f(x) < 0; \\ \forall x \in ] \alpha; +\infty[, f(x) > 0. \end{cases}$$

### ARTIE B

On considère la fonction  $h$  dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, h(x) = x + 1 - \frac{31}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^2 \ln|x| \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

1- a) Démontrer que  $h$  est dérivable en 0.

b) Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}^*, h'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ .

c) Démontrer que en utilisant A-3) que :

$$\forall x \in ]-\infty; 0[ \cup ]0; \frac{1}{\alpha}[, h'(x) > 0; \forall x \in \left] \frac{1}{\alpha}; +\infty \right[, h'(x) < 0.$$

2- On note  $(\Gamma)$  la courbe représentative de la restriction de  $h$  à l'intervalle

$$\left[ -1; \frac{3}{2} \right] \text{ dans le plan muni du repère } (O, \vec{i}, \vec{j}).$$

a) Tracer la tangente à  $(\Gamma)$  en son point d'abscisse 0.

b) Construire la courbe  $(\Gamma)$ . (On prendra  $\alpha = 3,6$ .)

3-  $\lambda$  est un nombre réel appartenant à l'intervalle  $]0; 1[$ .

a) En utilisant une intégration par partie, démontrer que :

$$\int_{\lambda}^1 x^2 \ln(x) dx = -\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^3 \ln \lambda.$$

b) On note  $\mathcal{A}(\lambda)$  l'aire en centimètre carré de la partie du plan limitée par la courbe  $(\Gamma)$ , la droite de repère  $(O, \vec{i})$  et les droites d'équations  $x = \lambda$  et  $x = 1$ .

Déduire de la question précédente que :

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left( \frac{125}{36} - 4\lambda - 2\lambda^2 + \frac{91}{36}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^3 \ln(\lambda) \right) \text{ cm}^2$$

c) Calculer la limite de  $\mathcal{A}(\lambda)$  quand  $\lambda$  tend vers 0 par valeur supérieures.

### PARTIE C

On se propose de calculer une valeur approchée de  $\alpha$  à 0,01 près.

1- Soit  $g$  la fonction dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  et définie par

$$g(x) = 4 - \frac{1}{4} \ln(x).$$

a) Etudier les variations de  $g$ .

b) Démontrer que  $g([3; 4]) \subset [3; 4]$ .

c) Démontrer que  $\alpha$  est l'unique solution de l'équation :  
 $x \in ]0; +\infty[, g(x) = x$ .

2- On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $3 \leq u_n \leq 4$ .

b) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $(u_n - \alpha)$  et  $(u_{n+1} - \alpha)$  sont de signes contraires.

c) Démontrer que, pour tout  $x$  élément de  $[3; 4]$  on a :  $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$ .  
En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{12} |u_{n+1} - u_n| \text{ puis que } |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{12^n}.$$

d) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{12^n}$ .  
En déduire une valeur approchée de  $\alpha$  à 0,01 près.

## BACCALAUREAT Session 2015 Série C

### EXERCICE 1

Dans un quartier d'affaire d'une ville, la mairie a créé des parkings payants pour les véhicules. Le prix du stationnement dans ces parkings est de 2 000 F par jour. Par ailleurs le stationnement en tout autre endroit est interdit et l'amende à payer liée à cette infraction est égale à 5 000 F.

(On donnera les résultats sous forme de fraction irréductibles).

#### Partie I

Pour encourager les automobilistes à utiliser ses parkings, la mairie organise, dans le cadre d'une promotion, une loterie. Cette loterie est constituée de dix tickets identiques disposés dans une urne dont deux sont gagnants. Chaque automobiliste qui désire se garer dans un des parkings, effectue le tirage d'un ticket, note le résultat, le remet dans l'urne puis effectue le deuxième tirage.

- Si les deux tickets tirés sont gagnants alors le client stationne gratuitement.
- Si un seul des 2 tickets est gagnant alors le client stationne à 1 000 F.
- Si aucun des deux tickets tirés n'est gagnant alors le client stationne à 2 000 F.

Un automobiliste se présente et effectue les deux tirages.

1. Calculer la probabilité de stationner gratuitement.
2. Justifier que la probabilité de payer la moitié du prix du stationnement est  $\frac{8}{25}$ .
3. Calculer la probabilité de payer au moins 1 000 F pour le stationnement.

#### Partie II

La probabilité pour un automobiliste d'être interpellé par la Police Municipale pour stationnement interdit et d'avoir alors à payer l'amende est égale à  $\frac{4}{5}$ .

Un automobiliste se gare  $n$  fois en stationnement interdit. Les risques d'amende sont indépendants d'un stationnement interdit à l'autre.

1. a) Calculer la probabilité  $q_n$  de payer l'amende au plus une fois.  
b) Démontrer que la probabilité  $P_n$  qu'il paye au moins une fois

$$\text{l'amende est : } P_n = 1 - \frac{1}{5^n}$$

- c) Déterminer le plus petit entier naturel  $n$  pour que  $P_n \geq 0,99$ .

258

2. Monsieur Ricko, exerçant dans ce quartier, paye en moyenne 4 800 F pour trois jours de stationnement par semaine dans les parkings payants. Il estime que les stationnements payants lui reviennent trop chers et prend le risque de se garer en stationnement interdit trois fois dans la semaine.

Soit  $X$  la variable aléatoire qui prend pour valeur le montant total des amendes qu'il peut payer dans la semaine.

- a) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
- b) Monsieur Ricko a-t-il intérêt à se garer en stationnement interdit ? Justifier la réponse.

### EXERCICE 2

#### Partie I

Le plan est muni du repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

L'unité graphique est 2 cm.

On note  $A$ ,  $B$  et  $C$  les points d'affixes respectives  $2i$ ;  $\sqrt{3} + i$  et  $\sqrt{3} + 2i$ .

- 1- a) Calculer le module et l'argument principal de  $\frac{z_A}{z_B}$ , où  $z_A$  et  $z_B$  sont

les affixes respectives des points  $A$  et  $B$ .

- b) En déduire que le triangle  $OAB$  est équilatéral.

- 2- On note  $P$  et  $Q$  les milieux respectifs des segments  $[OB]$  et  $[AB]$ .

$r$  est la rotation de centre  $J$  d'affixe  $i$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  et  $t$  la translation

de vecteur  $\overrightarrow{PQ}$ . On pose :  $f = t \circ r$ .

- a) Déterminer l'image par  $f$  du point  $O$ .
- b) Démontrer que  $f$  est une rotation dont on donnera l'angle.
- c) Construire le centre  $K$  de  $f$ .

#### Partie II

- 1- Soit  $M$  un point du plan d'affixe  $z$ . On pose :  $z = x + iy$ , où  $x$  et  $y$  sont des nombres réels. On note  $H$  le point d'affixe  $x + 3i$ .

Soit  $(\Gamma)$  l'ensemble des points  $M$  du plan tels que :  $2|z| = |y - 3|$ .

X

X

- Démontrer que :  $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{MO}{MH} = \frac{1}{2}$ .
  - Justifier que  $(\Gamma)$  est une ellipse dont on précisera l'excentricité, un foyer et la directrice  $(D)$  associée.
  - Démontrer que :  $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$ .
  - Préciser les coordonnées du centre  $\Omega$  de  $(\Gamma)$  et les coordonnées des sommets de  $(\Gamma)$  dans le repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .
  - Tracer  $(\Gamma)$ .
- 2- Soit  $(\Gamma')$  l'image  $(\Gamma)$  par  $f$ .
- Démontrer que  $(\Gamma')$  est une ellipse d'excentricité  $\frac{1}{2}$ .
  - Préciser un foyer et la directrice associée.

**PROBLEME**

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . unité graphique : 10 cm.

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = (e^{-x^2} - 1) \ln x ; \text{ si } x > 0$$

$$f(0) = 0$$

On note  $(C)$  la courbe représentative de la fonction  $f$ .

On se propose dans ce problème de trouver un encadrement de  $\int_0^1 f(x) dx$ .

**Partie A**

On considère les fonctions  $h$  et  $g$  dérivables sur  $]0; +\infty[$  par :

$$h(x) = \ln x + e^x + 1 \text{ et } g(x) = x \ln x + e^x - 1$$

On admet qu'il existe un nombre réel  $\alpha \in ]0; 1[$  tel que :

$$\forall x \in ]0; \alpha[, h(x) < 0$$

$$\forall x \in ]\alpha; +\infty[, h(x) > 0$$

$$h(\alpha) = 0$$

258

X X

- Calculer les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$ .
- Justifier que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, g'(x) = h(x)$ .
- Etudier les variations de  $g$  sur  $]0; +\infty[$
  - Dresser le tableau de variation de  $g$
- Démontrer que l'équation :  $x \in ]0; +\infty[, g(x) = 0$  admet une solution unique  $\beta$ .
  - Justifier que :  $\beta \in ]0, 3; 0, 4[$ .
  - Démontrer que :  
 $\forall x \in ]0; \beta[, g(x) < 0 ; \forall x \in ]\beta; +\infty[, g(x) > 0$

**Partie B**

- Démontrer que  $f$  est continue en 0.
- Justifier que  $f$  est dérivable en 0.
- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
  - Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$
  - Donner une interprétation graphique des résultats des limites des questions a) et b).
- On admet que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .
  - Démontrer que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = -\frac{e^{-x^2}}{x} g(x^2)$ .
  - Déterminer les variations de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
  - Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse 1.
  - Tracer  $(C)$  et  $(T)$  dans le plan muni du repère  
On prendra  $\beta = 0,31$

Partie C

1- Sachant que :  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$ ,

a- Démontrer :  $\forall x \in ]0, +\infty[ , -1 \leq -e^{-x} \leq -1+x$

b- Démontrer que :  $\forall x \in ]0, +\infty[ , 1-x \leq e^{-x} \leq 1-x + \frac{x^2}{2}$

2- Soit  $t$  nombre réel appartenant à  $]0, 1]$ .

On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n(t) = \int_0^1 x^n \ln x dx$

a) A l'aide d'une intégration par parties, Calculer  $I_n(t)$ .

b) Démontrer que :

$$\forall n \in ]0, 1], -I_2(t) + \frac{1}{2}I_4(t) \leq \int_0^1 f(x) dx \leq -I_2(t)$$

3- On pose :  $S = \int_0^1 f(x) dx$

a) Donner une interprétation géométrique de  $S$ .

b) On admet que :  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_r^1 f(x) dx = S$

Déterminer un encadrement de  $S$

259

BACCALAUREAT Session 2014 Série C

EXERCICE 1

- I.
- Démontrer qu'il existe un couple  $(a; b)$  d'entiers relatifs que :  $45a - 16b = 1$ .
  - Soit l'équation  $(E) : 45x - 16y = 2$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.
    - Justifier que  $(10; 28)$  est une solution particulière de  $(E)$ .
    - Résoudre  $(E)$ .

II.

Deux navires A et B accostent régulièrement et périodiquement dans un port pour décharger et charger des marchandises.  
Le navire A accoste tous les 90 jours et B accoste tous les 32 jours.  
Le navire A accoste un jour  $J_0$  au port et quatre jours plus tard, B accoste au port à son tour.

- On note  $J_1$  le jour de la prochaine entrée simultanée des deux navires au port.
- Soient  $u$  et  $v$  le nombre d'entrée au port effectuées respectivement par A et B entre  $J_0$  et  $J_1$  ( $J_0$  non compris).  
Démontrer que le couple  $(u; v)$  est une solution de  $(E)$ .
  - Déterminer le couple  $(u; v)$ .
  - Déterminer le nombre de jours qui s'écoulent entre  $J_0$  et  $J_1$ . ( $J_0$  non compris).

EXERCICE 2

L'unité de longueur est le centimètre.

Dans le plan orienté, on considère un triangle  $ABC$  rectangle en  $A$  tel que :

$$\text{Mes}(\overline{AB}; \overline{AC}) = -\frac{\pi}{2} \text{ et } \text{Mes}(\overline{CA}; \overline{CB}) = -\frac{\pi}{6}$$

PARTIE I

- Soit la similitude directe  $S$  qui transforme  $A$  en  $B$  et  $C$  en  $A$ .
  - Faire une figure en prenant  $AC = 7$   
(On la complètera au fur et à mesure)
  - Justifier que  $S$  n'est pas une translation.
  - Justifier que l'angle de la similitude  $S$  est  $-\frac{\pi}{2}$ .

- d) Déterminer le rapport de  $S$ .
- 2- On note  $\Omega$  le centre de  $S$ .
- a) Démontrer que  $\Omega$  appartient aux cercles  $(\mathcal{C}')$  et  $(\mathcal{C})$  de diamètres respectifs  $[AB]$  et  $[AC]$ .
- b) Justifier que  $\Omega$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur la droite  $(BC)$ .
- 3- Soit  $(\Delta)$  une droite passant par  $A$  et ne passant pas par  $\Omega$ .  $(D)$  est la perpendiculaire à  $(\Delta)$  passant par  $C$ . On appelle  $B'$  et  $C'$  les projetés orthogonaux de respectifs de  $B$  et  $C$  sur  $(\Delta)$ .
- a) Déterminer les images respectives de  $(D)$  et  $(\Delta)$  par  $S$ .
- b) En déduire l'image du point  $C'$  par  $S$ .
- c) Dédurre de ce qui précède que le cercle de diamètre  $[B'C']$  passe par un point fixe lorsque la droite  $(\Delta)$  varie. Préciser ce point.

#### PARTIE II

- 1- Placer le point  $I$  de la demi-droite  $[AC]$  tel que :  $AB = AI$ .
- 2- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(A; \overline{AI}; \overline{AB})$ .
- a) Démontrer que l'affixe du point  $C$  est  $\sqrt{3}$ .
- b) Soit  $M'$  un point d'affixe  $z$  et  $M$  le point d'affixe  $z'$ , image de  $M'$  par  $S$ . Justifier que  $z' = -i \frac{\sqrt{3}}{3} z + i$ .
- c) Déterminer l'affixe du centre  $\Omega$  de  $S$ .
- 3- a) Déterminer l'ensemble  $(\Gamma)$  des points  $M$  d'affixe  $z$  tel que  $|z| = 1$ .
- b) Tracer  $(\Gamma)$ .

#### PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . Unité graphique : 2 cm.

#### Partie A

Soit  $f$  la fonction dérivable sur  $]0; +\infty[$  et définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2(1 - 2 \ln x), & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note  $(\mathcal{C})$  sa représentation graphique dans le plan muni du repère  $(O, I, J)$ .

260

- 1- Démontrer que  $f$  est continue en 0.
- 2- Justifier que la courbe  $(\mathcal{C})$  admet en son point d'abscisse 0, une tangente horizontale.
- 3- a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .
- b) Interpréter graphiquement les résultats de la question 3-a).
- 4- a) Démontrer que pour tout  $x$  élément de  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = -4x \ln x$ .
- b) Etudier les variations de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ , puis dresser son tableau de variation.
- c) Calculer  $f(\sqrt{e})$  et justifier que :
- $$\begin{cases} \forall x \in [0; \sqrt{e}], & 0 \leq f(x) \leq 1 \\ \forall x \in ]\sqrt{e}; +\infty[, & f(x) < 0 \end{cases}$$
- 5- a) Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(\mathcal{C})$  en son point d'abscisse  $\sqrt{e}$ .
- b) Tracer  $(T)$  et  $(\mathcal{C})$ .

#### Partie B

$a$  est un élément de  $]0; \sqrt{e}[ \cup ]\sqrt{e}; +\infty[$  et  $x$  un nombre réel strictement positif. On pose :  $S = \int_0^a f(t) dt$ .

- 1- A l'aide d'une intégration par partie, démontrer que :

$$S = \frac{x^3}{3} \left( \frac{5}{3} - 2 \ln x \right) - \frac{a^3}{3} \left( \frac{5}{3} - 2 \ln a \right).$$

- 2- On note  $\mathcal{A}(a)$  l'aire en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan limitée par  $(\mathcal{C})$  et les droites d'équations :  $y = 0$ ,  $x = a$  et  $x = \sqrt{e}$ .

a) Démontrer que  $\mathcal{A}(a) = \left( 4 \int_0^{\sqrt{e}} f(t) dt \right) \text{cm}^2$ .

(On distinguera les cas  $a < \sqrt{e}$  et  $a > \sqrt{e}$ .)

- b) On suppose dans cette question, que  $a < \sqrt{e}$ .

Calculer la limite de  $\mathcal{A}(a)$  lorsque  $a$  tend vers 0. (On admettra que cette limite est l'aire en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan limitée par  $(\mathcal{C})$  et les droites d'équations :  $x = 0$ ,  $x = \sqrt{e}$  et  $y = 0$ .)

261

X

c) On suppose dans cette question que  $a > \sqrt{e}$ .  
 Déterminer la valeur de  $a$  pour laquelle  

$$s'(a) = \left(\frac{8}{9}e\sqrt{e}\right) \text{ cm}^2.$$

3- Déduire de ce qui précède que l'aire en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan comprise entre la courbe  $(\mathcal{C})$ , la droite  $(OI)$  et les droites d'équations :  $x=0$  et  $x=e^{\frac{5}{6}}$  est égale à  $\frac{16}{9}e\sqrt{e}$ .

**Partie C**  
 $n$  est un entier naturel.  
 Soit  $f_n$  la fonction dérivable sur  $[0; +\infty[$  et définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^2(n-2 \ln x)e^{\frac{1-n}{2}}, & \text{si } x > 0, \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par  $(\mathcal{E}_n)$  la représentation graphique de  $f_n$  dans le plan muni du repère  $(O, I, J)$ .

- Démontrer que  $(\mathcal{E}_n)$  est l'image de  $(\mathcal{E}_1)$  par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $e^{\frac{n-1}{2}}$  (On remarquera que :  $(\mathcal{E}_1) = (\mathcal{C})$ ).
- Construire la courbe  $(\mathcal{E}_2)$  et ses tangentes aux points d'abscisses respectives  $0$  et  $e$ .
  - Déterminer en  $\text{cm}^2$  l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $(\mathcal{E}_2)$ , les droites  $(OI)$ ,  $(OJ)$  et la droite d'équation  $x=e$ .
- Déterminer l'aire en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan comprise entre la courbe  $(\mathcal{E}_2)$ , la droite  $(OI)$  et les droites d'équations :  $x=0$  et  $x=e^{\frac{4}{3}}$ .

X

**BACCALAUREAT Session 2013 Série C**

**EXERCICE 1** (5 points)  
 $a$  est un nombre réel strictement positif et différent de 1. On considère la fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et définie par :  $f(x) = \sqrt{1+ax^2}$ .

On admet que  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

Soit la suite  $(u_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- On suppose que :  $0 < a < 1$ .
  - Démontrer par récurrence que :
    - Pour tout  $n$ , élément de  $\mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$ .
    - La suite  $(u_n)$  est croissante.
  - Démontrer que la suite  $(u_n)$  est convergente puis déterminer sa limite.
- On suppose que :  $a > 1$ .  
 Soit la suite  $(v_n)$  définie par :  $v_n = (u_{n+1})^2 - (u_n)^2$  ; pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
  - Démontrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
  - En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, (u_{n+1})^2 - (u_n)^2 = a^n$ .
  - On pose :  $S_0 = 1$  et  $S_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
 Justifier que :  $S_n = \frac{1-a^n}{1-a}$ .
  - En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{S_n}$ .

**EXERCICE 2** (5 points)  
 Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , d'unité 1 cm, on considère les points  $A(-1; 0)$  et  $I(4; 0)$ .  
 On note  $(E)$  l'ellipse de centre  $I$  dont un sommet est  $A$  et un foyer est le point  $O$ .

- 1- a) Déterminer les coordonnées des trois autres sommets de  $(E)$  dans le repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .
- b) Justifier que l'excentricité de  $(E)$  est égale à  $\frac{4}{5}$ .
- c) Donner une équation de la directrice  $(D)$  de l'ellipse  $(E)$  associé au foyer  $O$  dans le repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .
- 2- a) Démontrer qu'une équation de  $(E)$  dans le repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est :  

$$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$
- b) Construire  $(E)$ .
- 3- On considère l'équation :  
 $(E_\alpha) : z \in \mathbb{C}, z^2 - 2(4+5\cos\alpha)z + (4\cos\alpha+5)^2 = 0$  avec  $\alpha \in [0; \pi]$ .
- a) Justifier que le discriminant de  $(E_\alpha)$  est  $\Delta = (6i \sin \alpha)^2$ .
- b) Résoudre l'équation  $(E_\alpha)$ .  
*On notera  $z_1$  la solution dont la partie imaginaire est strictement positive et  $z_2$  l'autre solution.*
- c) On note  $M_1$  le point d'affixe  $z_1$  et  $M_2$  le point d'affixe  $z_2$  dans le repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . Démontrer que  $M_1$  et  $M_2$  appartiennent à  $(E)$  lorsque  $\alpha$  décrit  $[0; \pi]$ .

**PROBLEME** (10 points)

Partie A

On considère la fonction dérivable sur  $]0; +\infty[$  et définie par  $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ .

On note  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni du repère orthogonal  $(O, I, J)$ . Unité :  $OI = 2 \text{ cm}$  et  $OJ = 4 \text{ cm}$ .

1. Soit la fonction  $u$  dérivable sur  $]0; +\infty[$  et définie par  $u(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$ .

1- Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$ .

2- a) Etudier les variations de  $u$  puis dresser son tableau de variation.

262

- b) Démontrer que l'équation :  $(E) : x \in ]0; +\infty[, u(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$ .
- c) Démontrer que  $1,89 < \alpha < 1,9$ .
- d) Justifier que :  $\begin{cases} \text{si } x \in ]0; \alpha[, u(x) > 0 \\ \text{si } x \in [\alpha; +\infty[, u(x) \leq 0 \end{cases}$

II.

1- Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

2- a) Démontrer que pour tout  $x$  élément de  $]0; +\infty[$ ,

$$f'(x) = \frac{u(x)}{x(1+x^2)^2}$$

b) Démontrer que  $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$ .

c) Etudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation.

3- a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de  $(\mathcal{C})$  et  $(OI)$ .

b) Déterminer suivant les valeurs de  $x$  le signe de  $f(x)$ .

4- Tracer  $(\mathcal{C})$  dans le plan muni du repère  $(O, I, J)$ .

Partie B

On note  $F$  la fonction dérivable sur  $]0; +\infty[$  et définie par

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt.$$

1- a) Déterminer le signe de  $F$  sur  $]0; +\infty[$ .

b) Calculer  $F'(x)$  pour tout  $x$  élément de  $]0; +\infty[$ .

2- On note  $\varphi$  la bijection réciproque de la fonction tangente sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ .

a) Démontrer que pour tout  $x$  élément de  $]0; +\infty[$ ,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

263

### BACCALAUREAT Session 2012 Série C

#### EXERCICE 1

L'ARETI est une association au sein de laquelle les hommes sont plus nombreux que les femmes. Les cotisations mensuelles sont de 900 F CFA pour les hommes et 700 F CFA pour les femmes. Pour sa fête annuelle, le parrain de l'ARETI désire offrir des tee-shirts aux hommes et des pagnes aux femmes. Malheureusement, il ne connaît pas le nombre de femmes et d'hommes de cette association. Cependant, il sait que les cotisations mensuelles de tous les membres de l'ARETI s'élèvent à 20 000 F CFA. L'objectif de cet exercice est déterminé le nombre d'hommes et de femmes de cette association.

- On considère l'équation (E) :  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ,  $9x + 7y = 1$ .
  - Soit  $(x, y)$  un couple d'entiers relatifs solution de (E). Démontrer que  $2x \equiv 1[7]$ .
  - Résoudre dans  $\mathbb{Z}$ , l'équation  $2x \equiv 1[7]$ .
  - En déduire que l'ensemble des solutions de (E) est :  $\{(4 + 7k; -5 - 9k), k \in \mathbb{Z}\}$
- Résoudre l'équation (E') :  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ,  $9x + 7y = 200$ .
- En déduire le nombre d'hommes et de femmes de cette association.

#### EXERCICE 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  avec  $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 2 \text{ cm}$ .  
 K est le point de coordonnées  $(-1; 0)$ . Soit  $(\Gamma)$  l'ensemble des points M du plan de coordonnées  $(x, y)$  vérifiant :  $3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0$ .

- Justifier que  $(\Gamma)$  est une ellipse.
- On note :
  - F' et F les foyers de  $(\Gamma)$  ;
  - A et A' les sommets de  $(\Gamma)$  situés sur l'axe focal. L'abscisse de A' est négative. B' et B sont deux autres sommets de l'ellipse.
- Justifier que les coordonnées respectives de F et F' dans le repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  sont  $(0; 0)$  et  $(-2; 0)$ .
- Déterminer les coordonnées de A', A, B' et B dans le repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

b) Soit  $h$  la fonction définie par :  $\begin{cases} \forall x \in ]0; +\infty[, h(x) = \frac{\varphi(x)}{x} \\ h(0) = 1 \end{cases}$   
 Démontrer que  $h$  est continue en 0.

3- a) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties, que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, F(x) = \varphi(x) \ln x - \int_1^x h(t) dt$ .

b) En utilisant la question 2-b) de la partie B, démontrer que :  $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) \ln x = 0$

4- On admet que  $F$  est prolongeable par continuité en 0 et que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, F(x) = F(\frac{1}{x})$ .

Soit  $G$  le prolongement par continuité de  $F$  en 0.  
 On pose :  $G(0) = l$ ; ( $l \in \mathbb{R}$ ).

$G$  est définie par :  $\begin{cases} \forall x \in ]0; +\infty[, G(x) = F(x) \\ G(0) = l \end{cases}$

On désigne par  $(\Gamma)$  sa courbe représentative dans le repère  $(O, I, J)$ .

a) Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = l$ .

b) Etudier les variations de  $G$  sur  $]0; +\infty[$  puis dresser son tableau de variation.

5- On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

On admet que :  $|l - v_n| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$

- Justifier que  $v_2 = \frac{209}{225}$ .
- Déterminer le plus petit entier naturel  $n$  tel que :  $\frac{1}{(2n+3)^2} \leq 25 \cdot 10^{-3}$ .
- En déduire une valeur approchée de  $l$  à  $25 \cdot 10^{-3}$ .
- Donner l'allure de  $(\Gamma)$  dans le plan muni du repère  $(O, I, J)$ .

INGENIEUR DES HAUTES ETUDES

- c) Construire  $(\Gamma)$  dans le plan muni du repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .
- 3- Soit  $M$  un point quelconque de  $(\Gamma)$ .
  - a) Construire le point  $N$  tel que le triangle  $KMN$  soit rectangle isocèle en  $N$  de sens indirect, puis construire le point  $P$  symétrique de  $K$  par rapport à  $N$ .
  - b) Justifier que  $P$  est l'image de  $M$  par une similitude directe  $s$  de centre  $K$  dont on précisera le rapport et l'angle.
  - c) On admettra que l'image d'une conique par une similitude directe est une conique de même nature. Déterminer et construire l'ensemble  $(\mathcal{C})$  des points  $P$  lorsque  $M$  décrit  $(\Gamma)$ .
- 4- a) Démontrer que l'écriture complexe de la similitude  $s$  est :  $z' = (1-i)z - i$ .  
 $z$  étant l'affixe d'un point  $M$  quelconque du plan et  $z'$  l'affixe du point  $M'$ , image de  $M$  par  $s$ .
- b) On note  $G'$  et  $G$  les images respectives par  $s$  des foyers  $F'$  et  $F$  de  $(\Gamma)$ .  
 Déterminer les coordonnées de  $G'$  et  $G$  dans le repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .
- c) Démontrer qu'une équation cartésienne de  $(\mathcal{C})$  dans le repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est :  $7x^2 + 7y^2 + 2xy + 14x + 2y - 41 = 0$

**PROBLEME**

Soit  $(u_n)$  la suite définie, pour tout entier naturel  $n$  non nul, par :  $u_n = \frac{\sqrt{n!}}{n}$ .  
 Le but de ce problème est de déterminer la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

Partie A

Soit  $f$  la fonction dérivable sur  $]0; +\infty[$  et définie par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} - \ln x.$$

- 1- a) Démontrer que la droite  $(OJ)$  est une asymptote à  $(\mathcal{C})$ . X
- b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  puis  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et interpréter graphiquement ces résultats.
- 2- a) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  élément de  $]0; +\infty[$ .
- b) En déduire les variations de  $f$ .
- c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 3- Construire  $(\mathcal{C})$ , dans le plan muni du repère  $(O, I, J)$ .

Partie B : Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- 1- A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\int_n^1 \ln t dt$ .
- 2- On pose :  $A_n = \int_n^1 f(t) dt$ 
  - a) Interpréter graphiquement  $A_n$ .
  - b) Vérifier que  $A_n = \frac{3}{4} - \frac{2}{3n} - \frac{1}{12n^2} - \frac{\ln(n)}{n}$ .
  - c) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$ .
- 3- a) Soit  $k$  un entier naturel tel que  $1 \leq k \leq n-1$ .  
 Démontrer que :  $\forall t \in \left[ \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right]$ , on a :  
 $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ .  
 b) En déduire que :  
 $\frac{1}{n} \left[ f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] \leq A_n \leq \frac{1}{n} \left[ f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right]$ .  
 On pose :  $S_n = \frac{1}{n} \left[ f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right]$ .  
 a) Démontrer que :  $A_n \leq S_n \leq A_n + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$ .

