LIMITES ET CONTINUITÉ

I) Limites

1) Quelques limites usuelles

$n \in N^*$, $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ $\qquad$ $n \in N^*$, $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & si\ n\ est\ pair \\ -\infty & si\ n\ est\ impair \end{cases}$

$n \in N^*$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0^+$ $\qquad$ $n \in N^*$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} 0^+ & si\ n\ est\ pair \\ 0^- & si\ n\ est\ impair \end{cases}$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0^+$

$\lim_{x\to a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty$, $a \in IR$ $\qquad$ $\lim_{x\to a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty$, $a \in IR$

Remarque

$x \to a^+ \iff x \to a$ et $x > a$. $\qquad$ $x \to a^- \iff x \to a$ et $x < a$.

2) Quelques théorèmes sur les limites

a) Théorème de majoration

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage I de x_0.

Si $\forall\ x \in I$, $|f(x) - l| \leq g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Remarque

Le théorème de majoration reste valable lorsque $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = a$, $a \in IR$.

Exercice d'application

Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x^2}$

Solution

$\forall\ x \in IR$, $|\cos x| \leq 1$ et $x^2 \geq 0$.On a $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+ = 0$ donc

D'après le théorème de majoration $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x^2} = 0}$

b) Théorème d'encadrement ou théorème des gendarmes

Soient f, g et h trois fonctions définies au voisianage I de x_0.

Si $\forall\ x \in I$ $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = l$, $l \in IR$ alors

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Remarque

Le théorème d'encadrement reste valable lorsque $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$ ou $x_0 = a$, $a \in IR$.

Exercice d'application

Calculer $lim_{x\to+\infty}\frac{3-\sin x}{x^2}$

Solution

$\forall\ x\in IR$, $-1\le \sin x\ \le 1$. $-1\le -\sin x\ \le 1$. $-1+3\le 3-\sin x\ \le 1+3$.

$2\le 3-\sin x\ \le 4$. $\frac{2}{x^2}\le\frac{3-\sin x}{x^2}\le\frac{4}{x^2}$. $lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}=0^+=0$. *Donc d'après*

Le théorème d'encadrement $\boxed{lim_{x\to+\infty}\frac{3-\sin x}{x^2}=0}$

c) Théorème de l'unicité de la limite

Si $\boldsymbol{lim_{x\to x_0} f(x)=l}$ ***alors l est unique.***

Propriété

- ***Si f est définie en*** $\boldsymbol{x_0}$ ***alors***

  $\boldsymbol{lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)}$ ***si et seulement si*** $\boldsymbol{lim_{x\to x_0^+} f(x)=lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)}$ **.**

- ***Si f n'est pas définie en*** $\boldsymbol{x_0}$ ***alors***

  $\boldsymbol{lim_{x\to x_0} f(x)=l}$ ***si et seulement si*** $\boldsymbol{lim_{x\to x_0^+} f(x)=lim_{x\to x_0^-} f(x)=l}$**.**

Exercice d'application

Calculer les limites suivantes.

- $lim_{x\to2}\frac{|x-2|}{x-2}$
- $lim_{x\to0}\frac{x^2-1}{|x|+1}$

e) Limite et composition de fonctions

Si f est définie au voisinage de $\boldsymbol{x_0}$ ***avec*** $\boldsymbol{lim_{x\to x_0} f(x)=l}$ ***et g est définie au voisinage de l alors***

$$\boldsymbol{lim_{x\to x_0} gof(x)=lim_{t\to l} g(t)}\ .$$

Démonstration

Posons $t=f(x)$. $gof(x)=g(f(x))=g(t)$. *(1)*

Si $x\to x_0$ *donc* $t\to lim_{x\to x_0} f(x)=l$ *.(2)* *D'après (1) et (2) ,* $lim_{x\to x_0} gof(x)=lim_{t\to l} g(t)$.

Exercice d'application

Calculer $lim_{x\to+\infty}\cos(\frac{1}{x+1})$.

Solution

$lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0^+=0$ *et* $lim_{t\to0}\cos t=1$ *donc* $\boxed{lim_{x\to+\infty}\cos(\frac{1}{x+1})=1}$.

f) Théorème du changement de variable

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{t \to 0} f(x_0 + t)$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{X \to 0^+} f\left(\frac{1}{X}\right)$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{X \to 0^-} f\left(\frac{1}{X}\right)$

Démonstration

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{t \to 0} f(x_0 + t)$

Soit le changement de variable $t = x - x_0$. $t = x - x_0$ *donc* $x = x_0 + t$. $f(x) = f(x_0 + t)$ *(1)*

Si $x \to x_0$ *alors* $t \to 0$ *(2)* *Donc d'après (1) et (2)* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{t \to 0} f(x_0 + t)$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{X \to 0^+} f\left(\frac{1}{X}\right)$ *et* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{X \to 0^-} f\left(\frac{1}{X}\right)$

Soit le changement de variable $X = \frac{1}{x}$. $X = \frac{1}{x}$ *donc* $x = \frac{1}{X}$. $f(x) = f(\frac{1}{X})$ *(1)*

Si $x \to \infty$ *alors* $X \to 0$ *(2)* *Donc d'après (1) et (2)* $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{X \to 0} f\left(\frac{1}{X}\right)$.

Exercice d'application

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x \to +\infty} x \sin\frac{1}{x}$ *et* $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2 - 2x - 3}$

Solution

$\lim_{x \to +\infty} x \sin\frac{1}{x}$ *Posons* $X = \frac{1}{x}$. *Donc* $x = \frac{1}{X}$. *Si* $x \to +\infty$ *alors* $X \to 0^+ = 0$

$x \sin\frac{1}{x} = \frac{1}{X} \sin X$. $\lim_{x \to +\infty} x \sin\frac{1}{x} = \lim_{X \to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$ *donc* $\boxed{\lim_{x \to +\infty} x \sin\frac{1}{x} = 1}$

$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2 - 2x - 3}$ *Posons* $t = x - 3$.*Donc* $x = t + 3$. *Si* $x \to 3$ *alors* $t \to 0$.

$\frac{x-3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{1}{t+4}$. $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t+4} = \frac{1}{4}$. $\boxed{\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{1}{4}}$

g) Limites des fonctions trigonométriques

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

3) Opérations sur les limites

- ***Cas des formes indéterminéés (FI)***

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $+\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $0 \times \infty$, $\infty \times 0$

- ***Cas particuliers***

$\frac{0}{\infty} = 0$, $\frac{\infty}{0} = \infty$, $\frac{\infty}{a} = \infty \quad a \in IR$ $\quad \frac{a}{\infty} = 0 \quad a \in IR$, $+\infty \times -\infty = -\infty$

Remarque

- ***La limite en l'infini d'un polynôme est égale à la limite en l'infini de son monôme le plus haut degré.***
- ***La limite en l'infini d'une fraction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.***

Exercice d'application *Calculer les limites suivantes :*

$\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{3}{\sqrt{2x+3}}\right)$; $\lim\limits_{x\to-3} 5\left(3+\sqrt{2x+6}\right)$; $\lim\limits_{x\to3}\frac{(2x-7)^{402}}{(x-4)^{11}}$; $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right)$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{3}-3\sqrt{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$; $\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}}\frac{3x+4}{(2x-5)^2}$; $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{2x^2+x-1}{x^2+x+2}\right)$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2-\frac{1}{x^3}}{\sqrt{x}}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-5x^4+4x}{5x+3}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+4x^5}{-x^6+5}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2x^2+x}{x^2+3x-2}}$;

Exercice d'applicaion *Calculer les limites suivantes :*

(a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{5x+4}-2}{x}$ *(b)* $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$ *(c)* $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{3x-5}-1}{x^2-4}$ *(d)* $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt{5}}{x+2}$

(e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ *(f)* $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-x+3}$

4) Interprétations gémétriques des limites

a) Asymptote horizontale (AH) ou asymptote parllèle à (ox)

- ***Si*** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ ***,*** $a \in IR$ ***alors y = a est une AH à*** (C_f) ***en +*** ∞.
- ***Si*** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$ ***,*** $a \in IR$ ***alors y = a est une AH à*** (C_f) ***en -*** ∞.

b) Asymptote verticale (AV) ou asymptote parllèle à (oy)

- ***Si*** $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad a \in IR$ ***alors x = a est une AV à*** (C_f).

c) Asymptote oblique (AO)

- ***Si*** $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$ ***alors y = ax + b est une AO à*** (C_f) ***en +*** ∞.
- ***Si*** $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$ ***alors y = ax + b est une AO à*** (C_f) ***en -*** ∞.

Cette méthode est utilisée pour montrer que y = ax + b est est une AO à (C_f).

Propriété1

Soit f une fonction et (C_f) sa courbe représentative .

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, $a \in IR$ et $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = b$, $b \in IR$ alors y = ax + b est une AO à (C_f) en + ∞.

Cette méthode est utilisée pour déterminer l'asymptote oblique à (C_f).

Remarque

Cette propriété reste valable lorsque $x \to -\infty$.

On aura y = ax + b est une AO à (C_f) en - ∞.

Propriété2

- ***Si f(x) = ax + b + g(x) et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ alors y = ax + b est une AO à (C_f) en + ∞.***
- ***Si f(x) = ax + b + g(x) et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = c$ alors y = ax + b + c est une AO à (C_f) en + ∞.***

Cette propriété reste valable lorsque $x \to -\infty$. On aura respectivement y = ax + b est une AO à (C_f) en $-\infty$ et y = ax + b + c est une AO à (C_f) en - ∞.

Exercice d'application

1) Soit f(x) = $\frac{2x}{\sqrt{x+1}}$.

Déterminer D_f et montrer que x = - 1 est une AV à C_f) .

2) Soit g(x) = $\sqrt{4x^2+1} + 2x$.

a) Montrer que y = 0 est une AH à (C_g) en - ∞.

b) Montrer que y = 4x est une AO à (C_g) en + ∞.

Solution

1) f(x) existe ssi x + 1 > 0 . x + 1 > 0 => x > -1 d'où $\boxed{D_f =]-1\ ;+\infty[}$.

$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \frac{-2}{0^+}$ = - ∞ $\boxed{\text{donc } x = -1 \text{ est une AV à } C_f)}$.

2) g(x) existe ssi $4x^2 + 1 \geq 0$. Or ∀ $x \in IR$ $4x^2 + 1 > 0$ donc $D_g = IR$.

$x \to -\infty$ *donc* $|x| = -x$. $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2+1} + 2x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2+1} - 2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-4x} = 0^+ = 0$

$\boxed{\text{D'où } \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0.}$

$\boxed{\text{Par conséquent } y = 0 \text{ est une AH à } (C_g) \text{ en } -\infty}$.

$x \to +\infty$ *donc* $|x| = x$. $\lim_{x\to+\infty} g(x) - 4x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2+1} + 2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4x} = 0^+ = 0$ *donc* $\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) - 4x = 0}$

$\boxed{\text{Par conséquent } y = 4x \text{ est une AO à } (C_g) \text{ en } +\infty}$.

d) Branche parabolique de direction (oy)

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ ***et*** $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ ***alors*** (C_f) ***admet une branche parabolique de direction (oy) en*** $+\infty$.

Remarque

Cette propriété reste valable lorsque $\to -\infty$

e) Branche pparabolique de direction (ox)

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ ***et*** $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ***alors*** (C_f) ***admet une branche parabolique de direction (ox) en*** $+\infty$.

Remarque

Cette propriété reste valable lorsque $x \to -\infty$.

f) Branche parabolique de direction y = ax

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ ***et*** $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, $a \in IR$ ***et*** $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = \pm\infty$ ***alors*** (C_f) ***admet une branche parabolique de direction y = ax en*** $+\infty$.

Remarque

Cette propriété reste valable lorsque $x \to -\infty$.

g) Définition

- ***Etudier les branches infinies, c'est déterminer les asymptotes et les directions asymptotiques.***
- ***On cherche la nature des branches infinies en calculant les limites aux bornes de l'ensemble de définition.***

Exercice d'application

Étudier les branches infinies des courbes représentatives des courbes des fonctions suivantes :

- $f(x) = \frac{2x^3 - 1}{x - 1}$
- $g(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$
- $h(x) = x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

II) Continuité

1) Définition

Soient f une fonction de domaine de définition D_f ***et*** x_0 ***un nombre réel.***

- ***f est continue en*** x_0 ***si et seulement si*** $\begin{cases} x_0 \in D_f \\ \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}$.
- ***Si f n'est pas continue en*** x_0 ***alors on dit que f est discontinue en*** x_0 .

Exercice d'application

Soit f(x) = $\sqrt{x^2 - x - 1}$.

Etudier la continuité de f en 5 et en $\frac{1}{2}$.

Solution

f(x) existe ssi $x^2 - x - 1 \geq 0$. *Donc* $\boxed{D_f =]-\infty \,;\, \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2} \,;\, +\infty[\,.}$

$5 \in D_f$. $lim_{x \to 5} f(x) = \sqrt{5^2 - 5 - 1} = \sqrt{19}$ = *f(5)* $\boxed{\text{Donc } f \text{ est continue en } 5.}$

$\frac{1}{2}$ $n'appartient\ pas\ à\ D_f$.$\boxed{\text{Donc } f \text{ est discontinue en } \frac{1}{2}\ .}$

2) Continuité à gauche et continuité à droite

- ***f est continue à gauche en*** $\boldsymbol{x_0}$ ***si et seulement si*** $\begin{cases} \boldsymbol{x_0 \in D_f} \\ \boldsymbol{lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)} \end{cases}$.
- ***f est continue à droite en*** $\boldsymbol{x_0}$ ***si et seulement si*** $\begin{cases} \boldsymbol{x_0 \in D_f} \\ \boldsymbol{lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)} \end{cases}$.
- ***f est continue en*** $\boldsymbol{x_0}$ ***si et seulement***
  si elle est continue à droite en $\boldsymbol{x_0}$ ***et continue à gauche en*** $\boldsymbol{x_0}$.

Exercice d'application

Soit g(x) = $\begin{cases} \frac{x^2+1}{x\ \ 1} \quad si\ x \leq 0 \\ x + \sqrt{x^2+1} \quad si\ x > 0 \end{cases}$

1) Déterminer D_g.

2) Etudier la continuité de f en 0 , en – 1 , en – 2 et en 1 .

Solution

Si $x \leq 0$ *alors g(x) existe ssi x + 1 # 0 .* $\boxed{\text{Donc } D_1 =]-\infty \,;\, -1[\cup]-1; 0[\,.}$

Si $x > 0$ *alors g(x) existe ssi* $x^2 + 1 \geq 0$. *Or* $x^2 + 1 > 0\ \forall\ x \in$ *IR .* $\boxed{\text{Donc} D_2 =]0 \,;\, +\infty[}$

$\boxed{D_g = D_1 \cup D_2 =]-\infty \,;\, -1[\cup]-1 \,;\, +\infty[}$.

$0 \in D_g$. *g(0) =* $\frac{0+1}{0+1} = 1$. $lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x + \sqrt{x^2+1})$ *= 1 .*

$lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x^2+1}{x\ \ 1}$ *= 1 .*$\boxed{\text{Donc } g \text{ est continue en } 0}$

- 1 n'appartient pas à D_g *donc* $\boxed{g \text{ est discontinue en } -1}$.

- 2 $\in D_g$. $lim_{x \to -2} g(x) = \lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2+1}{x\ \ 1}$ *= - 5 = g(- 2) .*$\boxed{\text{Donc } g \text{ est continue en } -2\,.}$

$1 \in D_g$. $lim_{x \to 1} g(x) = \lim\limits_{x \to 1}(x + \sqrt{x^2+1})$ *= 1* $+ \sqrt{2}$ *= g(1) .* $\boxed{\text{Donc } g \text{ est continue en }\ .}$

3) Prolongement par continuité

- ***Soit f une fonction définie sur un voisinage I de x_0 .f admet un prolongement par continuité en x_0 si et seulement si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, $l \in IR$.***
- ***Si f admet un prolongement par continuité en x_0 alors son prolongement par continuité en x_0 est la fonction g définie par :*** $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \neq x_0 \\ g(x_0) = l \end{cases}$

Exercice d'application

Etudier le prolongement par continuité de f en x_0 .

- $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ $\quad x_0 = -2$
- $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ $\quad x_0 = -1$
- $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x}$ $\quad x_0 = 0$
- $f(x) = \frac{x^2 - x}{x}$ $\quad x_0 = 0$
- $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - x}{x - 1}$ $\quad x_0 = 1$

Solution

1) f(x) existe ssi $x + 2 \neq 0$. $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$. $\boxed{\text{Donc } D_f =]-\infty\, ; -2[\cup]-2\, ; +\infty[.}$

$\frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x + 2} = x - 2$. $\quad \lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} x - 2 = -2 - 2 = -4$.

Donc f admet un prolongement par continuité en -2. Le prolongement par continuité de f en -2 est

la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} \quad \text{si } x \neq -2 \\ g(-2) = -4 \end{cases}$

2) f(x) existe ssi $x^2 - 1 \neq 0$. $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ *ou* $x \neq 1$.

.$\boxed{\text{Donc } D_f =]-\infty\, ; -1[\cup]-1\, ; 1[\cup]1\, ; +\infty[.}$ $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \frac{7}{0} = \infty$

∞ *n'appartient pas à IR* *donc f n' admet pas de prolongement par continuité en –1 .*

4) Continuité sur un intervalle

- ***Soit f une fonction et I un intervalle donné. f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout point x_0 de I. C'est-à-dire pour tout $x_0 \in I$, on a $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.***
- ***f est continue sur]a ; b[si et seulement si f est continue en tout point x_0 de]a ; b[.***
- ***f est continue sur [a ; b]si et seulement si*** $\begin{cases} f \text{ est continue sur }]a\, ; b[\\ f \text{ est continue à droite en } a \\ f \text{ est continue à gauche en } b \end{cases}$

5) Continuité de fonctions usuelles

- ***$x \to \sin x$ est continue sur IR*** $\quad$ ***$x \to \cos x$ est continue sur IR***
- ***$x \to |x|$ est continue sur IR*** $\quad$ ***$x \to \sqrt{x}$ est continue sur [0 ; +∞[***
- ***$x \to a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots\dots\dots + a_1 x + a_0$ est continue sur IR***
- ***$x \to \frac{1}{x}$ est continue sur $IR\backslash\{0\}$***

Propriété

- ***Toute fonction polynôme est continue sur IR .***
- ***Les fonctions rationnelles et les fonctions racines carrées sont continues sur leurs domaines de définitions.***

6) Opérations sur les fonctions continues

Si f et g sont continues en x_0 alors

- ***f + g est continue en x_0***
- ***f × g est continue en x_0***
- $\frac{f}{g}$ ***est continue en x_0 ssi $g(x) \neq 0$***

7) Compositions de deux fonctions continues

Si f est continue en x_0 et g est continue en f(x_0) alors gof est est continue en x_0 .On dit que la composition de deux fonctions continues est une fonction continue .

Exercice d'application

1) Soit f(x) = $\sqrt{|2x^5|}$

Etudier la continuité de f sur IR.

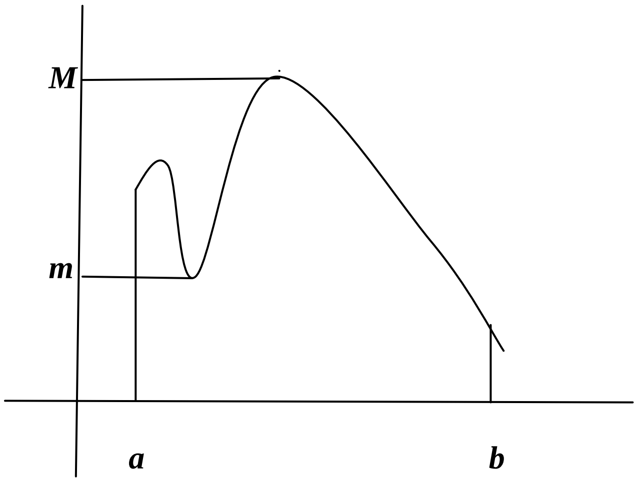
2) Soit f(x) = x $\sqrt{1 - x}$

Etudier la continuité de f sur son domaine de définition.

8)Propriété des fonctions continues sur un intervalle

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle .C'est à dire

$\left.\begin{matrix} f \text{ est continue sur } I \\ I \text{ est un intervalle} \end{matrix}\right\}$ ***alors f(I) est un intervalle***



f est continue sur [a ;b] alors

f([a ;b]) = [m ;M]

m est le minimum de f sur [a ;b]

M est le maximum f sur [a ;b]

Théorème

L'image d'un intervalle fermé et borné par une fonction continue est un intervalle fermé et borné .

9) Image d'unintervalle par une fonction continue et stritement monotone

Lorsqu'une fonction f est continue et strictement monotone sur K, f(K) est un intervalle de même nature

que K et ses bornes sont les limites de f aux bornes de K.

Le tableau ci-dessous précise f(K) suivant la nature de K et le sens de variation de f.

K	f(K)	f(K)
	f stictement croissante	f strictement décroissante
[a ; b]	[f(a) ; f(b)]	[f(b) ; f(a)]
[a ;b[	[f(a) ; $\lim_{x \to b^-} f(x)$ [	] $\lim_{x \to b^-} f(x) : f(a)$]
]a ; b[	] $\lim_{x \to a^+} f(x)$; $\lim_{x \to b^-} f(x)$ [	] $\lim_{x \to b^-} f(x)$; $\lim_{x \to a^+} f(x)$ [
[a ; ∞[	[f(a) ; $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ [	] $\lim_{x \to +\infty} f(x)$; $f(a)$]
IR	] $\lim_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ [	] $\lim_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ [

Exercice d'application

Soit f(x) = $\frac{2x+1}{x-1}$

Déterminer l'image par f des intervalles [- 2 ; 0] et]1 ; +∞[.

Solution

f(x) existe ssi x – 1 ≠ 0. $\boxed{D_f = IR\backslash\{1\}}$

f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son doomaine de définition IR $\backslash\{1\}$.

$\boxed{f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0 \ \forall x \in IR\backslash\{-1\}. \text{ Donc } f \text{ est strictement décroissante sur } IR\backslash\{1\}.}$

$\left.\begin{array}{r} f \text{ est continue sur } [-2\,;\,0] \\ f \text{ est strictement décroissante sur } [-2\,;\,0] \end{array}\right\}$ $\boxed{\text{alors } f([-2\,;\,0]) = [f(0)\,;f(-2)] = [-1\,;\,1]}$

$\left.\begin{array}{r} f \text{ est continue sur }]1\,;\,+\infty[\\ f \text{ est strictement décroissante sur }]1\,;\,+\infty[\end{array}\right\}$ alors

$\boxed{f(]1\,;+\infty[) =]\lim_{x \to +\infty} f(x)\,;\,\lim_{x \to 1^+} f(x)[=]2\,;+\infty[}$.

10)Théorème des valeurs intermediaries

- ***Si f est continue sur [a ; b] et y_0 compris entre f(a) et f(b) alors il existe au moins $x_0 \in$ [a ; b] tel que $f(x_0) = y_0$.***
- ***Si f est continue sur]a ; b[et y_0 compris entre $\lim_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim_{x\to b^-} f(x)$ alors il existe au moins $x_0 \in$]a ; b[tel que $f(x_0) = y_0$.***

Exercice d'application

Soit f(x) = $2x^5 + x^2 + x - 8$

Montrer que l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution dans [1 ; 2].

Solution

f est une fonction polynôme donc elle est continue sur IR en particulier sur [1 ; 2].

f(1) = -4 , f(2) = 62 et -4 < 0 < 62 donc f(x) = 0 admet au moins une solution dans [1 ; 2].

11) Théorème d'existence d'une bijection

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I alors f est une bijection de I vers J = f(I).

Exercice d'application

Soit f(x) = $x^3 + x^2 + x + 1$

Montrer que f est une bijection de IR vers un intervalle J à préciser.

Solution

f est une fonction polynôme donc elle est continue et dérivable sur IR . (1)

$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$. $3x^2 + 2x + 1 = 0$ Δ = - 8 < 0 *donc* $f'(x) > 0\ \forall x \in$ *IR.*

D'où f est strictement croissante sur IR . (2) .

D'après (1) et (2), f est une bijection de IR vers f(IR) = IR .

12) Théorème d'existence et d'unicité d'une solution

- ***Si f est continue et strictement monotone sur [a ; b] et y_0 compris entre f(a) et f(b) alors il existe un unique $x_0 \in$ [a ; b] tel que $f(x_0) = y_0$.***
- ***Si f est continue et strictement monotone sur]a ; b[et y_0 compris entre $\lim_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim_{x\to b^-} f(x)$ alors il existe un unique $x_0 \in$]a ; b[tel que $f(x_0) = y_0$.***

Exercice d'application

Soit f(x) = $x^3 + x - 1$

Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α sur IR.

Solution

f est une fonction polynôme donc elle est continue et dérivable sur IR . (1)

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0\ \ \forall x \in$ *IR donc f est strictement croissante sur IR (2)* .

$lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ et $lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, $\boxed{-\infty < 0 < \infty \quad (3)}$

$\boxed{\text{D'après (1), (2) et (3) l'équation f(x) = 0 admet une unique solution } \alpha \text{ sur IR}}$.

13) Encadrement de la racine α à ε près

Encadrer la racine α à ε près ,c'est trouver un intervalle]a ; b[tel que a $< \alpha < b$ et $b - a = \varepsilon$.

ε est appelé l'amplitude de l'encadrement.

- ***Méthode de balayage***

Soit f(x) =$x^3 - 3x + 1$ .On suppose que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans]0 ; 1[.

Donner un encadrement de α à 10^{-2} près .

Solution

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Signe de f(x)	+	+	+	-					

On a : 0< α < 1 . $\boxed{f(0,3) > 0 \text{ et } f(0,4) < 0 \text{ donc } 0,3 < \alpha < 0,4}$. *Cet encadrement est un encadrement de α à 10^{-1} près .*

x	0,31	0,32	0,33	0,34	0,35	0,36	0,37	0,38	0,39
Signe de f(x)	+	+	+	+	-				

$\boxed{f(0,34) > 0 \text{ et } f(0,35) < 0 \text{ donc } 0,34 < \alpha < 0,35}$.

Cet encadrement est un encadrement de α à 10^{-2} près .

$\boxed{\text{0,34 est la valeur approchée par défaut de } \alpha \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$

$\boxed{\text{0,35 est la valeur approchée par excès de } \alpha \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$

- ***Méthode de dichotomie***

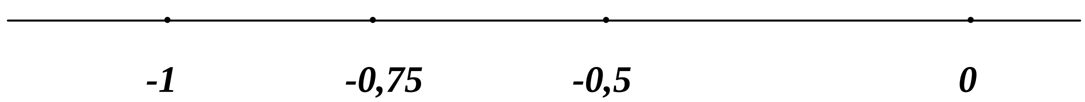
La méthode de dichotomie consiste à subdiviser l'intervalle]a ; b[progressivement par 2 à tel point qu'on ait b – a = ε.

Exercice d'application

Soit f(x) = - $x^3 + 3x^2 - 3$ .On suppose que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution $\alpha \in]-1; 0[$.

Donner un encadrement de α d'amplitude 0,25.

Solution



On a : - 1< α < 0 . f(- 1) = 1 , f(- 0,5) = - 1,3 , f(0) = -3 , f(- 0,75) = - 0,8 $\boxed{\text{donc } -1 < \alpha < -0,5}$

$\boxed{\text{Cet encadrement est un encadrement de } \alpha \text{ d'amplitude 0,5}}$.

$\boxed{-1 < \alpha < -0{,}75 \text{ . Cet encadrement est un encadrement de } \alpha \text{ d'amplitude } 0{,}25}$.

Exercice d'application

Soit f la fonction définie par f(x) =$x^3 - 3x + 1$.

1) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations

2) Démontrer que f(x) = 0 admet 3 solutions.

3) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} *de chacune de ces solutions.*

14) Calcul de $f^{-1}(y_0)$ sans connaître l'expression de f^{-1}

Soient f une bijection d'un intervalle I vers un intervalle J et f^{-1} sa bijection réciproque de J vers I.

Pour calculer $f^{-1}(y_0)$, on résoud l'équation $f(x) = y_0$ avec $x \in I$.

Exercice d'application

Soit f(x) = $\sqrt{x^2 + 3x} + x - 1$ *.On admet que f est une bijection de [0 ; +∞[* $vers$ $[-1; \infty[$.

Calculer $f^{-1}(2)$.

Solution

Résolvons l'équation f(x) = 2 avec x ∈ $[0; +\infty[$.

f(x) = 2 <=> $\sqrt{x^2 + 3x} + x - 1 = 2$ *<=>* $\sqrt{x^2 + 3x} = 3 - x$ *<=>* $\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x^2 + 3x = (3 - x)^2 \end{cases}$

$x^2 + 3x = (3 - x)^2$*<=>x = 1 et 3 – 1 =2 ≥* 0 *.Or 1 ∈* $[0; +\infty[$ *donc 1 est la solution de l'équation f(x) = 2 .* $\boxed{\text{Donc } f^{-1}(2) = 1}$

14) Expression de f^{-1}

Soient f une bijection d'un intervalle I vers un intervalle J et f^{-1} sa bijection réciproque de J vers I.

Pour déterminer l'expression de f^{-1}, on résoud l'équation $f(x) = y$ avec $x \in I$ et y ∈ J .

Exercice d'application

Soit f(x) = $x^2 - 2x + 5$ *. On suppose que f est une bijection de]1 ; ∞[* $vers$ $]4 ; +\infty[$.

Déterminer $f^{-1}(y)$.

Solution

Résolvons l'équation f(x) = y avec x ∈ $]1; +\infty[$ et y $\in]4 ; +\infty[$.

f(x) = y <=> $x^2 - 2x + 5 = y$ *<=>* $x^2 - 2x + 5$ *- y = 0* , $\boxed{\Delta = 4(-4 + y) > 0 \text{ car } y > 4.}$

$\boxed{x_1 = 1 - \sqrt{y - 4} \text{ n'appartient pas à }]1 ; +\infty[}$.

$\boxed{x_2 = 1 + \sqrt{y - 4} \text{ appartient pas à }]1 ; +\infty[}$.

$\boxed{\text{Donc } x = x_2 = 1 + \sqrt{y - 4} \text{ . D'où } f^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y - 4}}$.

15) Bijection réciproque d'une fonction continue et steictement monotone

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle K. On a :

- ***f réalise une bijection de K vers f(K)***
- f^{-1} ***est continue sur f(K)***
- f^{-1} ***est strictement monotone et a le même sens de variation de f***

EXERCICES

Exercice1

Etudier, dans chaque cas, la continuité de f en x_0 :

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x};\ x\neq 0\\ f(0)=0\end{cases},\ x_0=0$

2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|};\ x\neq 0\\ f(0)=2\end{cases},\ x_0=0$

3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1},\ x\in\left]1;+\infty\right[\\ \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1},\ x\in\left]-\infty;1\right[,\quad x_0=1\\ f(1)=2\end{cases}$

Exercice2

Etudier l'existence d'un prolongement par continuité pour les fonctions suivantes, en x_0 :

1) $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}$, $x_0=0$.

2) $f(x)=\dfrac{\cos(\pi x)}{2x-1}$, $x_0=\dfrac{1}{2}$.

3) $f(x)=\dfrac{1+3x}{x^2+x}$, $x_0=0$.

4) $f(x)=\dfrac{x^2+|x|}{x}$, $x_0=0$.

5) $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x^2+x-6}$, $x_0=2$.

Exercice3

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^3-3x^2+x+1\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2x^3-3x^2+x+1\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x+1}{x^2-x+3}$ 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{(1-x)^2}$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-2}$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{x-1}{2x+3}}$ 8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+\sin x}{2x+1}$

9) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 10) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$

11) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+x}-x$ 12) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\cos x}{x^2+x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$ 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\tan 5x}$

Exercice4

Déterminer, quand x tend vers x_0, la limite de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}-5}{x+\sqrt{x+2}-4}$, $x_0 = 2$.

2) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2-3x}-x}{\sqrt{x^2+2x+4}}$, $x_0 = 0$.

3) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x\,(1-\sin x)}{\cos x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

4) $f : x \mapsto \dfrac{2\cos^3 x+3\cos x-5}{\sin^2 x}$, $x_0 = 0$

Indication : Poser $u = \cos x$

Exercice5

1) Etudier les branches infinies des courbes représentatives des fonctions suivantes.

- $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$
- $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3}{x+1} & si\ x \leq 0 \\ 3\sqrt{x+1} & si\ x > 0 \end{cases}$
- $h(x) = x - \sqrt{|x^2-1|}$
- $r(x) = \begin{cases} -x+1+\dfrac{3}{x+3} & si\ x < 0 \\ -2x+1+\sqrt{x^2+1} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

2) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction f dans les cas suivants.

- $f(x) = \sqrt{(x+2)^2} - \dfrac{3}{x-1}$
- $f(x) = \sqrt{x^2-3x+1} - \sqrt{2x^2-x-1}$
- $f(x) = a(2-a)x^3 + a x^2 + (2-a)x + 1$. *On discutera suivant les valeurs du nombre réel a.*

Exercice6

Dans chacun des cas suivants, déterminer les branches infinies de la courbe(C) .

1)(C) : $y = 1 - 2x - x^3$ 2) (C) : $y = \dfrac{2x^2}{x^2 + x - 3}$

3)(C) : $y = \dfrac{x^2 - |x - 1|}{x + 3}$ 4)(C) : $y = \sqrt{x^2 - 3x}$

5)(C) : $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 4}}{1 - 2x}$ 6)(C) : $y = \dfrac{x}{\sin x}$

7) (C) : $y = 2\sqrt{x} - \sqrt{x + 1}$ 8)(C) : $y = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - 4x}{2x^2 + 3x - 2}$

9)(C) : $y = \dfrac{x^3 - x^2 + 5x}{2x^2 + 3x - |x^3 - 1|}$ 10) (C) : $y = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + x - 7}$

11) (C) : $y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + x - 7}$ 12)(C) : $y = \sqrt{4x^2 - 3x + 1} + 2x + \dfrac{1}{4}$

13) (C) : $y = x - 3\tan x$ 14)(C) : $y = \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 10x + 3}$

15) (C) : $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + x - 7} - \sqrt{x^2 - 1}}{2x + 1}$ 16)(C) : $y = \dfrac{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 2} - 2x^2 + 5x}{x - 2}$

Exercice7

Dans chacun des cas suivants, vérifier que les droites fixées sont asymptotes à la courbe (C) .

1)(C) : $y = \dfrac{x + 2}{2x - 3}$ (D_1): $x = \dfrac{3}{2}$ (D_2): $y = 2$

2)(C) : $y = \dfrac{2x - 3}{3x - |x + 1|}$ (D_1): $x = \dfrac{1}{2}$ (D_2): $y = \dfrac{1}{2}$ (D_3): $y = 1$

3) (C) : $y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 3}$ (D_1): $x = 3$ (D_2): $y = \dfrac{1}{2}$ (D_3): $y = x + 3$

4) (C) : $y = \dfrac{x^3 + 4x^2 + 3}{x^2 + 2x - 1}$ (D_1): $x = -1 - \sqrt{2}$ (D_2): $x = -1 + \sqrt{2}$ (D_3): $y = x + 2$

5)(C) : $y = \sqrt{4x^2 - 3x + 1} + x + \dfrac{1}{4}$ (D_1): $y = -x + 1$ (D_2): $y = 3x - \dfrac{1}{2}$

Exercice8

- *Déterminer la limite de f en x_0.*

1) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x+1}$ $x_0 = -1$ 2) $f(x) = \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$ $x_0 = 9$ 3) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{3x^2 - 2x - 1}$ $x_0 = 1$

4) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{3}}{x^2 - 16}$ $x_0 = 4$ 5) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x+6} - 3}$ $x_0 = 3$ 6) $f(x) = \frac{x^2(x-3)}{x - \sqrt{x+6}}$ $x_0 = 3$

7) f(x) = $\frac{x-\sqrt{x^2-x+1}}{2x-\sqrt{4x^2+2}}$ $x_0 = 0$ 8) f(x) = $\frac{2x-\sqrt{x+1}-4}{(x+1)(x-3)}$ $x_0 = 3$ 9) f(x) = $\frac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{2x-\sqrt{4x^2+x}}$ $x_0 = +\infty$

- *Déterminer la limite de f en 0*

1) f(x) = $\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$ 2) f(x) = $\frac{\tan 2x}{\tan 5x}$ 3) f(x) = $\frac{1-\cos x}{3\sin^2 x}$

4) f(x) = $\frac{\sin 2x}{\sin^2 x}$ 5) f(x) = $\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\tan 2x}$ 6) f(x) = $\frac{2\sin^2 x-2(1-\cos x)}{5x^2}$

7) f(x) = $\frac{2\sin x+3\tan x}{\sqrt{8x^3-2x^2}}$ 8) f(x) = $\frac{\tan 2x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$ 9) f(x) = $\frac{\sin 3x}{\sqrt{1-\cos 3x}}$

- *Calculer les limites suivantes*

1) $\lim_{x\to-\infty}[\sqrt{x^2+x+1}-(x+1)]$ 3) $\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2-x-1}-(x-1)]$

2) $\lim_{x\to-\infty}[\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2-1}]$ 4) $\lim_{x\to-\infty}[\sqrt{x^4+x^2+2}-(x^2+x+1)]$

<u>Exercice9</u>

- *Etudier le prolongement par continuité de f en x_0.*

1) f(x) = $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ $x_0 = a$ 2) f(x) = $\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ $x_0 = 0$ 3) f(x) = $\frac{6x^2+5x-4}{2x-1}$ $x_0 = \frac{1}{2}$

4) f(x) = $\frac{x^2-3x+2}{3x^2-7x+2}$ $x_0 = 2$ 5) f(x) = $x^2 \sin\frac{1}{x}$ $x_0 = 0$ 6) f(x) = $\frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$ $x_0 = 1$

- *Montrer que l'équation $2x^3+x+2=0$ admet une unique solution $\alpha \in$ [-1 ; 0]. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.*
- *Monter que l'équation $2x^3+x^2-1=0$ admet une unique solution $\alpha \in$ [0 ; +∞[. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.*

<u>Exercice10</u>

- *Etudier la continuité des fonctions suivantes sur leurs ensembles de définitions.*

1) f(x) = $(x^2+1)(3-2\cos x)$ 2) g(x) = $\frac{x^2-3x+2}{x^2+7x-8}$ 3) h(x) = $\sqrt{1-x^2}$

- *Etudier la continuité de f en x_0.On discutera suivant les valeurs du nombre réel a.*

1) f(x) = $\frac{x^2-4}{x-2}$ $x_0 = -2$ 2) f(x) = $\begin{cases} x^2+4 & si\ x \le 2 \\ 3x+2 & si\ x > 2 \end{cases}$ $x_0 = 2$ 3) f(x) = $\begin{cases} \frac{x+1}{2x+3} & si\ x \le 0 \\ x^2+x+a & si\ x > 0 \end{cases}$ $x_0 = 0$

- *Soit la fonction g définie par g(x) =* $\begin{cases} pour\ x \ne 3, x \ne -3 \quad g(x) = \frac{x^2-9}{|x|-3} \\ g(3) = g(-3) = 6 \end{cases}$

1) Déterminer D_g 2) g est-elle continue en 3 et en -3 ?

- *Soit la fonction g définie par g(x) =* $\begin{cases} \frac{x^2}{x-a} & si\ x < 0 \\ x-b & si\ x \ge 0 \end{cases}$

Déterminer a et b pour que la fonction g soit continue sur son domaine de définition.

Exercice11

- *Déterminer la limite de f en* x_0.

1) f(x) = $\frac{2x^2-3x+2}{x|x-2|}$ $x_0 = 2$

2) f(x) = $\frac{x^3+2x^2-6x+3}{x^3+x^2+x-3}$ $x_0 = 1$

3)f(x) = $\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$ $x_0 = 0$

4) f(x) = $\sqrt{x^2+\cos^2 x}$ $x_0 = +\infty$

5) f(x) = $\frac{1-\cos x}{x^2-2x|x|}$ $x_0 = 0$

6) f(x) = $\frac{\sin x-\tan x}{3x^3}$ $x_0 = 0$

- *Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité en* x_0 *?*

a) f(x) = $\frac{\sin^2 x}{x}$ $x_0 = 0$ b) f(x) = $\frac{\sqrt{5x-1}-3}{x-2}$ $x_0 = 2$ c) f(x) = $\frac{x^3-x^2-2x+2}{x-1}$ $x_0 = 1$

- *Démontrer que l'équation* $x^3 + x + 1 = 0$ *admet une unique solution* $\alpha \in]-1;0[$.

Donner un encadrement de α d'amplitude 0, 01.

- *Déterminer les réels A et B pour que la fonction f soit continue en* $\frac{\pi}{2}$ *et en* $-\frac{\pi}{2}$.

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x & si\ x \le -\frac{\pi}{2} \\ A\sin x + B & si\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & si\ x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Exercice12

- *Etudier les limites suivantes en* x_0 *:*

1) f(x) = $\sqrt{x^2-3x+4}+x-2$ $x_0 = -\infty$

2) f(x) = $x\sin\frac{1}{x}-2\frac{\sin x}{x}$ $x_0 = +\infty$

3) f(x) =$\sqrt{x^2-3x+4}-\sqrt{x^2+3x-4}$ $x_0 = +\infty$

4) f(x) = $\frac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x}$ $x_0 = \frac{\pi}{4}$

- *Soit h(x) =* $\frac{\sqrt{x^2+1}}{1+x-\sqrt{x^2+1}}$.

1) Déterminer D_h *et calculer les limites aux bornes de* D_h.

2) Démontrer que la courbe de h admet une asymptote oblique et une asymptote horizontale dont on précisera les équations

Exercice13

- *Etudier la limite de la fonction f aux points* x_0 *indiqués dans les cas suivants .*

a) $f(x)=\frac{3x^2+4x+1}{x^2-x-2}$ *en* $x_0=-1$

b) $f(x)=2x+\sqrt{x^2+1}$ *en* $x_0=-\infty$

c) $f(x)=\frac{x-\sqrt{x^2-x+1}}{2x-\sqrt{4x^2+x}}$ *en* $x_0=\pm\infty$

d) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$ en $x_0=\dfrac{\pi}{2}$

e) $f(x)=\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$ en $x_0=0$

f) $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 2x}$ en $x_0=0$

Exercice14

1) *Démontrer que pour tout* $x\in[1;+\infty[$: $\dfrac{1}{2}\le\dfrac{x}{x+1}\le 1$.

2) *En déduire :* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{x+1}$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$

Exercice15

- *Soit* f *la fonction sur* $\mathbf{R}$ *définie par :* $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x-1} & si \quad x\in]-\infty;-1]\\ x^2-1 & si \quad x\in]-1;1]\\ 2\sin(x-1) & si \quad x\in]1;+\infty[\end{cases}$

Etudier la continuité de f *en -1 et en 1.*

- *Soit la fonction g définie par g(x) =* $\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x+1} & si\ x\le 0\\ x+\sqrt{x^2+1} & si\ x>0\end{cases}$

1) Déterminer D_g.

2) Etudier la continuité de g en 0, - 1 et – 2.

- *Soit la fonction g définie par g(x) =* $\sqrt{4x^2+1}+2x$.

Etudier les branches infinies de la courbe représentative de g.

- *Soit la fonction* f *définie par :* $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}, x<0.\\ \dfrac{sin2x}{x}, si\ x>0.\\ 2, si\ x=0.\end{cases}$

Etudier la continue de f *en* 0.

- *Soit la fonction* f *définie par :* $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-x+2}, si\ x<-1\\ \dfrac{x^2-3}{x}, si\ x\ge -1.\end{cases}$

1)Déterminer Df.
2)Etudier la continuité de f *en* -1 *et en* 2

- *Etudier la continuité de f définie sur [0 ; π], par f(x) =* $\sqrt{sin\,x}$.
- *Etudier la continuité de f au point -1 définie par f(x) =* $\begin{cases}\dfrac{(x+2)^2}{2x+1} & si\ x\in]-\infty;-1]\\ x^2+3x+1 & si\ x\in]-1;+\infty[\end{cases}$

Exercice16

1)Etudier les branches infinies des fonctions suivantes :

- *f(x)* = $\sqrt{4x^2 + 8x + 5}$
- *f(x)* = $\frac{x^2 - x + 1}{|x|} - 2$

2) Etudier les limites suivantes en x_0 *:*

- *f(x)* = $\frac{1 - cosx}{x^2 - 2x|x|}$ $\quad x_0 = 0$
- *f(x)* = $\sqrt{x^2 + cos^2x}$ $\quad x_0 = +\infty$
- *f(x)* = $\frac{1 - sinx + cosx}{1 - sinx - cosx}$ $\quad x_0 = \frac{\pi}{2}$
- *f(x)* = $\frac{1 + sinx - cosx}{1 - sinx - cosx}$ $\quad x_0 = 0$

DÉRIVATION ET ÉTUDES DE FONCTIONS

I)Dérivation

1) Notion de nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle K contenant x_o .

f est dérivable en x_o ou f admet un nombre dérivé en x_o si et seulement

$\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = l$ ***, l ∈ IR . l est appelé le nombre dérivé de f en x_o et noté $f'(x_o)$.***

On a alors : $\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = f'(x_o)$.

Exercice d'application

Soit $f(x) = \frac{x}{2x+1}$

Etudier la dérivabilité de f en – 1.

Solution

$\boxed{f(-1) = 1}$. $\frac{f(x)-f(1)}{x+1} = \frac{-1}{2x+1}$. $\lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{-1}{2x+1} = 1$.

$\boxed{f \text{ est derivable en } -1 \text{ et } f'(-1) = 1}$.

2) Dérivée à gauche et dérivée à droite

Soit f une fonction définie sur un intervalle K contenant x_o .

- ***f est dérivable à gauche en x_o ou f admet un nombre dérivé à gauche en x_o si et seulement si***

$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = l_1$ ***, l_1 ∈ IR . l_1 est appelé le nombre dérivé de f à gauche en x_o et noté $f'_g(x_o)$.***

On a alors : $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = f'_g(x_o)$.

- ***f est dérivable à droite en x_o ou f admet un nombre dérivé à droite en x_o si et seulement si***

$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = l_2$ ***, l_2 ∈ IR . l_2 est appelé le nombre dérivé de f à droite en x_o et noté $f'_d(x_o)$.***

On a alors : $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = f'_d(x_o)$.

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle K contenant x_o . f est dérivable en x_o si et seulement si

f est dérivable à gauche en x_o et f est dérivable à droite en x_o et $f'_g(x_o) = f'_d(x_o)$.

Exercice d'application

Soit f(x) = x $|x-1|$

f est-elle dérivable en 1 ?

Solution

f(1) = 0 . $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{x(-x+1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-} -x = -1$

donc f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1)$ *= - 1* .

$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f((1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{x(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} x = 1$.

donc f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1)$ *= 1* .

On a $f'_g(1) \neq f'_d(1)$ *donc f n'est pas dérivable en 1*.

Exercice d'application

Soit la fonction f(x) = $\frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}$.

1) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en – 1 et en 0.

2) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

3) *Interprétation géométrique du nombre dérivé*

- ***Si f est dérivable en x_o alors $f'(x_o)$ existe et (C_f) admet une tangente au point d'abscisse x_o.***

L'équation de la tangente en x_o est : y = $f(x_o) + f'(x_o)(x-x_o)$.

- ***Si f est dérivable à gauche en x_o alors $f'_g(x_o)$ existe et (C_f) admet une demi- tangente à gauche au point d'abscisse x_o.***

L'équation de la demi- tangente à gauche en x_o est : y = $f(x_o) + f'_g(x_o)(x-x_o)$ avec $x \leq x_o$.

- ***Si f est dérivable à droite en x_o alors $f'_d(x_o)$ existe et (C_f) admet une demi- tangente à droite au point d'abscisse x_o.***

L'équation de la demi- tangente à droite en x_o est : y = $f(x_o) + f'_d(x_o)(x-x_o)$ avec $x \geq x_o$.

- ***Si $f'_g(x_o) \neq f'_d(x_o)$ alors on a deux demi-tangentes de coefficients directeurs différents et le point d'abscisse x_o est un point anguleux de (C_f) .***
- ***Si $f'(x_o) = 0$ alors (C_f) admet une tangente horizontale au point $M_0(x_o; f(x_o))$.***
- ***Si $f'_g(x_o) = \mp\infty$ ou $f'_d(x_o) = \mp\infty$ alors (C_f) admet une tangente verticale au point $M_0(x_o; f(x_o))$.***
- ***Si la tangente en x_o traverse la courbe au point d'abscisse x_o alors $M_0(x_o; f(x_o))$ est un point d'inflexion de (C_f) .***
- ***Si f'' s'annule et change de signe en x_o alors $M_0(x_o; f(x_o))$ est un point d'inflexion de (C_f)***

Exercice d'application

1) Soit f(x) = $\begin{cases} x + \sqrt{x^2+2x-3} & si\ x \leq -3 \\ x + \sqrt{x^2+10x+21} & si\ x > -3 \end{cases}$

Etudier la dérivabilité de f en – 3.

2) Soient f(x) = $|x^2 - 5x + 4|$ *et* (C_f) *sa courbe représentative.*

Etudier si (C_f) *admet au point M d'abscisse 2 et au point N d'abscisse 4 une tangente ou deux demi-tangentes dont vous préciserez les équations respectives.*

4) <u>Dérivabilité et continuité</u>

<u>a)Propriété</u>

Toute fonction dérivable en x_o ***est continue en*** x_o ***.Ce pendant la réciproque n'est pas toujours vraie.***

Démonstration

Soit f une fonction définie sur un intervalle K contenant x_o

$\forall\, x \in K$, $f(x) = f(x_o) + (x - x_o) \times \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$

$\boxed{f \text{ est derivable en } x_o \text{ alors } lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'(x_o).}$

Donc $\boxed{lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o) + 0 \times f'(x_o) = f(x_o) \text{ d'où } f \text{ est continue en } 0}$.

Contre-exemple : la réciproque n'est pas toujours vraie

Soit f(x) = $|x|$

Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

Solution

la continuité de f en 0 :

$f(0) = 0$. $\boxed{lim_{x \to 0^+} f(x) = lim_{x \to 0^+} x = 0}$. $\boxed{lim_{x \to 0^-} f(x) = lim_{x \to 0^-} -x}$ $= 0$, $\boxed{0 \in D_f = IR}$

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est continue en } 0.}$

la dérivabilité de f en 0 :

$\boxed{lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1}$. $\boxed{lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1}$

On a $\boxed{f_g'(0) \neq f_d'(0) \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable en } 0}$.

$\boxed{\text{Conclusion : la fonction } f \text{ n'est pas dérivable en } 0 \text{ mais elle continue en } 0}$.

<u>b)Propriété</u>

Toute fonction dérivable sur un intervalle K est continue sur cet intervalle K.

<u>c)Dérivabilité sur un intervalle</u>

- ***Soit f une fonction et I un intervalle donné . f est dérivable sur I si et seulement f est dérivable en tout point*** $x_o \in I$.
- ***f est dérivable sur]a ; b[si et seulement si f est dérivable en tout point*** x_0 ***de]a ; b[.***

➤ *f est dérivable sur [a ; b]si et seulement si* $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur }]a\,;\,b[\\ f \text{ est dérivable à droite en } a \\ f \text{ est dérivable à gauche en } b \end{cases}$

5)Dérivéé des fonctions usuelles

Fonction	Fonction dérivée	Ensemble de dérivabilité
k	0	IR
x^n	nx^{n-1}	IR
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	IR*
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	IR*
$\cos x$	$-\sin x$	IR
$\sin x$	$\cos x$	IR
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$IR \backslash \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \;, k \in Z\right\}$

6) Dérivée et opérations sur les limites

Fonction	Fonction dérivée
ku	ku'
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{u^n}$	$\frac{-nu'}{u^{n+1}}$
$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin u$	$u'\cos u$
$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
vou	$v'ou \times u'$

Exercice d'applicaion

1) Pour chacune des fonctions suivantes déterminer sa fonction dérivée :

$f(x) = -\frac{2}{3}x^5 + \frac{1}{4}x^7 + 2x + 2$; $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^5$; $f(x) = \sqrt{-2x^3 + x + 1}$;

$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{-x+3}}$; $f(x) = (-2x+3)^2(-5x+3)^7$; $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$;

2) Soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O,I,J).

Ecrire une équation de la tangente à C au point d'abscisse a.

$f(x) = x^6 - x^5 + 1$ $a = 1$; $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ $a = 0$;

Propriété

- ***Toute fonction polynôme est dérivable sur IR .***
- ***Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition .***
- $|f|$ ***est dérivable sur I si et selement si f est dérivable sur I et*** $f(x) \neq 0 \ \ \forall x \in I$ ***.***
- $\sqrt{f}$ ***est dérivable sur I si et selement si f est dérivable sur I et*** $f(x) > 0 \ \ \forall x \in I$ ***.***

7) Dérivée d'une fonction composée

Soit f une fonction définie sur un intervalle K et g une fonction définie sur un intervalle L contenant f(K).

- ***Si f est dérivable en un élément*** x_0 ***de K et g dérivable en f(***x_0***) alors gof est dérivable en*** x_0 ***et on a :***

$$(gof)'(x_0) = g'of(x_0) \times f'(x_0) .$$

- ***Si f est dérivable sur K et g dérivable sur L alors gof est dérivable sur K et on a :***

$$(gof)' = g'of \times f' .$$

Exercice d'application

f est définie sur $]-\infty ; 1]$ *par f(x) =* $x\sqrt{1-x}$.

Etudier sa dérivabilité.

Solution

Posons J = $]-\infty ; 1[$. *x→1 –x est dérivable sur IR donc sur J .(1)*

$\forall x \in J$ *, 1 - x> 0 et x→* $\sqrt{x}$ *est dérivable sur]0 ;+∞[.(2)*

Donc d'après (1) et (2) x→ $\sqrt{1-x}$ *est dérivable sur J car c'est la composition de deux dérivables sur .*

x→x est dérivable sur IR donc sur J donc x→ $x\sqrt{1-x}$ *est dérivable sur J par produit*

Dérivabilité de f en 1 : $\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x\sqrt{1-x}}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{-\sqrt{1-x}} = \frac{1}{0^-} = +\infty$

Donc f n'est pas dérivable en 1 et (C_f) *admet une tangente verticale au point d'abscisse 1* .

8)Dérivée successive

Soit $f^{(n)}$ ***la dérivée d'ordre n de f. On a :*** $f^{(n+1)}(x) = (f^{n}(x))' \quad \forall n \in IN^*$ ***.***

f(x) = $f^{(0)}(x)$

Exercice d'application

Soit f(x) = $x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 3x + 2$

Calculer $f^{(5)}(x)$.

Solution

f est une fonction rationnelle donc elle est 5 fois dérivable sur IR.

$f'(x) = f^{(1)}(x) = 4x^3 - 15x^2 + 4x + 3$

$f''(x) = f^{(2)}(x) = 12x^2 - 30x + 4$

$f'''(x) = f^{(3)}(x) = 24x - 30$

$f^{(4)}(x) = 24$

$\boxed{f^{(5)}(x) = 0}$.

9)Dérivée de la fonction réciproque

Soit f une fonction dérivable et bijective de I→J et f^{-1} la bijection réciproque.

$f : I \to J$ $\qquad\qquad$ $f^{-1} : J \to I$

$x \to y = f(x)$ $\qquad\qquad$ $y \to x = f^{-1}(y)$

On a $f^{-1}of(x) = x \quad => \quad (f^{-1}of(x))' = (x)' \quad => \quad f^{-1'}(f(x)) \times f'(x) = 1$

⇨ $f^{-1'}(y) \times f'(x) = 1 => \quad f^{-1'}(y) = \frac{1}{f'(x)}$ ***avec*** $f'(x) \neq 0$.

$$\boxed{\textbf{FORMULE : } f^{-1'}(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \textit{avec } f'(x) \neq 0}$$

Propriété

Soit f une fonction dérivable et bijective de I→J et f^{-1} la bijection réciproque.

$f : I \to J$ $\qquad\qquad$ $f^{-1} : J \to I$

$x \to y = f(x)$ $\qquad\qquad$ $y \to x = f^{-1}(y)$

- f^{-1} ***est dérivable sur J si et seulement*** $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I \text{ et} \\ f'(x) \neq 0 \ \forall x \in I \end{cases}$
- f^{-1} ***est dérivable en y_0 si et seulement*** $\begin{cases} f \text{ est dérivable en } x_0 = f^{-1}(y_0) \text{et} \\ f'(x_0) \neq 0 \end{cases}$

De plus $f^{-1'}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

Exercice d'application

Soit f(x) = $\sin^2 x$

1) Montrer que f est une bijection de]0 ;$\frac{\pi}{2}$[vers un intervalle J à préciser.

2) f^{-1} est-elle dérivable sur J ?

3) Donner l'expression de $f^{-1'}(y)$.

Solution

1) f est continue et dérivable sur IR donc sur]0 ;$\frac{\pi}{2}$[. $\boxed{f'(x) = 2\cos x \sin x > 0 \quad \forall x \in]0 ;\frac{\pi}{2}[}$.

Donc f est strictement croissante sur]0 ;$\frac{\pi}{2}$[.

D'où $\boxed{f \text{ est une bijection de}]0\,;\frac{\pi}{2}[\text{ vers } J=]\lim_{x\to 0^+} f(x)\,;\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)[\,=\,]0\,;1[}$.

2) f *est dérivable sur* $]0\,;\frac{\pi}{2}[$ *et* $f'(x) = 2\cos x\sin x \neq 0\ \forall\, x \in]0\,;\frac{\pi}{2}[$.

$\boxed{\text{Don } f^{-1} \text{ est dérivable sur }]0\,;1[}$.

3) *<u>L'expression de $f^{-1\prime}(y)$.</u>*

On a : $f^{-1\prime}(y) = \frac{1}{f'(x)}$. $x \in]0\,;\frac{\pi}{2}[$ *et* $y \in]0;1[$ $f'(x) = 2\cos x\sin x$.

<u>Exprimons sin x et cos x en fonction de y</u>

$f(x) = y = \sin^2 x$. $y = \sin^2 x <=> \sqrt{y} = \sqrt{\sin^2 x} <=> \boxed{\sqrt{y} = \sin x}$.

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 <=> \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - y$. $<=> \sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{1-y}$.

$<=> \boxed{\cos x = \sqrt{1-y}}$. $\boxed{\text{On a : } \cos x = \sqrt{1-y} \text{ et } \sin x = \sqrt{y}}$.

$$f^{-1\prime}(y) = \frac{1}{2\sqrt{1-y}\,\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y-y^2}} \text{ donc } \boxed{f^{-1\prime}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y-y^2}}} .$$

Exercice d'application

Soit $f(x) = \cos^2 x$

1) *Montrer que f est une bijection de* $]0\,;\frac{\pi}{2}[$ *vers un intervalle J à préciser.*

2) f^{-1} *est-elle dérivable sur J ?*

3) *Donner l'expression de* $f^{-1\prime}(y)$.

<u>10) Inégalité des accroissements finis (IAF)</u>

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K.S'ils existent deux nombres réels m et M tels que pour tout x élément de K , m ≤ $f'(x)$ ≤M, alors pour tous a et b éléments de K ona :

m(b-a) ≤f(b) – f(a) ≤ M(b- a).

<u>Propriété</u>

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle K.S'il existe un nombre réel M tel que pour tout x élément de K,

$|f'(x)| \leq M$ ***, alors pour tous a et b éléments de K, on a :*** $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$.

Démonstration

Démonstration de l'inégalité des accroissements finis

Soit g la fonction de K→IR définie par g(x) = Mx – f(x) . Soit a< b .

La fonction g est dérivable sur K et $g'(x) = M - f'(x) \geq 0\ \ \forall\, x \in K$.

La fonction g est croissante sur [a ;b] donc g(a)≤ g(b) .

g(a)≤ g(b) => Ma – f(a) ≤ Mb – f(b) => f(b) – f(a) ≤Mb – Ma => $\boxed{f(b) - f(a) \leq M(b-a).}$ *(1)*

Soit h la fonction de K→IR définie par h(x) = mx – f(x) . Soit a< b .

La fonction h est dérivable sur K et $h'(x) = m - f'(x) \leq 0 \ \ \forall x \in K$ *.*

La fonction h est décroissante sur [a ;b] donc h(a)≥ h(b) .

h(a)≥ h(b) => ma – f(a) ≥ mb – f(b) => mb – ma ≤f(b) – f(a) => $\boxed{m(b-a) \leq f(b) - f(a)}$ *(2).*

$\boxed{\text{D'après (1) et (2), on a : } m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)}$*.*

Démonstration de la propriété

Dans le cas particulier où m = - M . O n a : -M(b- a)≤ f(b) – f(a) ≤ M(b-a)

D'où $\boxed{|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|}$ *.*

Exercice d'application

1) Démontrer que $\forall x \in [0 ;\frac{\pi}{2}[, \ \ x \leq \tan x$ *.*

2) Démontrer que $\forall x \in IR, |\sin x| \leq |x|$ *.*

3) Démontrer que $\forall x,y \in IR, \ \ |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ *.*

Solution

1) Démontrons que $\forall x \in [0 ;\frac{\pi}{2}[, \ \ x \leq \tan x$ *.*

Soit g la fonction définie par g(t) = tan t.

g est dérivable sur $[0 ;\frac{\pi}{2}[$ *et* $g'(t) = 1 + \tan^2 t$ *.* $\boxed{\forall t \in [0 ;\frac{\pi}{2}[, \ \ 1 \leq g'(t)}$ *.*

Soit $x \in [0 ;\frac{\pi}{2}[$*, en appliquant l'inégalité des accroissements à la fonction g sur [0 ; x],on a*

$$1(x-0) \leq g(x) - g(0) \iff x \leq \tan x \ \ \boxed{\text{donc } \forall x \in [0 ;\tfrac{\pi}{2}[, \ \ x \leq \tan x}.$$

2) Démontrons que $\forall x \in IR, |\sin x| \leq |x|$ *.*

Soit g la fonction définie par g(t) = sin t.

g est dérivable sur IR et $g'(t) = \cos t$ *.* $\boxed{\forall t \in IR, |\cos t| \leq 1}$ *.* $\boxed{\forall t \in IR, |g'(t)| \leq 1}$ *.*

Soit $x \in IR$*, en appliquant l'inégalité des accroissements à la fonction g sur [0 ; x],on a*

$$|g(x) - g(0)| \leq 1|1 - x| \iff |\sin x| \leq |x| \ \ \boxed{\text{donc } \forall x \in IR, \ \ |\sin x| \leq |x|}.$$

3) Démontrons que $\forall x,y \in IR, \ \ |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ *.*

Soit g la fonction définie par g(t) = sin t.

g est dérivable sur IR et $g'(t) = \cos t$ *.* $\boxed{\forall t \in IR, |\cos t| \leq 1}$ *.* $\boxed{\forall t \in IR, |g'(t)| \leq 1}$ *.*

Soit $x,y \in IR$*, en appliquant l'inégalité des accroissements à la fonction g sur [x ; y],on a*

$$|g(x) - g(y)| \leq 1|x - y| \iff |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

$\boxed{\text{donc } \forall x, y \in IR, \ \ |\sin x - \sin y| \leq |x - y|}$.

Exercice d'application

Soit f(x) = $\frac{2x-3}{x-1}$.

1) Montrer que pour tout x ∈ $[2;3]$, $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq 1$.

2) Déduire un encadrement de f(x) – f(2) puis un encadrement de f(x) par deux fonctions affines

II) Etude de fonctions

1) Courbe de la fonction réciproque

Soit f une bijection de I vers J et f^{-1} ***sa bijection réciproque.***

La courbe de f (C_f) ***et la courbe de*** f^{-1} $(C_{f^{-1}})$ ***sont symétriques par rapport à la première bissectrice*** (Δ) ***d'équation y = x.***

2) Fonction paire

Soit f une fonction et D_f ***son ensemble de définition . f est dite paire lorsque pour tout x élément de*** D_f

On a – x ∈ D_f ***et f(-x) = f(x) .***

3) Fonction impaire

Soit f une fonction et D_f ***son ensemble de définition . f est dite impaire lorsque pour tout x élément de*** D_f

On a – x ∈ D_f ***et f(-x) = - f(x) .***

4) Centre de symétrie

Le plan est muni d'un repère(O, I, J). (C_f) ***est la représentation graphique d'une fonction f.***

Pour démontrer que le point A(a ; b) est un centre de symétrie de (C_f) ***on peut procéder comme suit :***

1^er méthode

- ***On détermine la fonction g dont la représentation graphique est l'image de*** (C_f) ***par la translation de vecteur*** $\overrightarrow{AO}$***, cette fonction g est définie par : g(x) = f(x + a) – b.***
- ***On démontre que g est impaire***

2eme méthode

Le point A(a ; b) est un centre de symétrie de (C_f) ***si et seulement pour tout x élément de*** D_f

On a 2a – x ∈ D_f ***et f(2a – x) + f(x) = 2b .***

Exercice d'application

Démontrer que le point A(2 ; 3) est un centre de symétrie de la représentation graphique (C_f) *de la fonction rationnelle définie par : f(x) =* $\frac{x^2-x-1}{x-2}$.

Solution

La fonction g dont la représentation graphique est l'image de (C_f) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$(-2 ;-3)

$\boxed{\text{est définie par } g(x) = f(x+2) - 3}$. $\boxed{\text{On a } g(x) = \frac{x^2+1}{x}}$.

Montrons que g est impaire

$\boxed{D_g = IR^*}$. $x \in D_g \Leftrightarrow x \neq 0$. $x \neq 0 \Leftrightarrow -x \neq 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{-x \in D_g \text{ et } g(-x) = -g(x).}$

$\boxed{\text{Donc g est impaire d'où A(2 ; 3) est un centre de symétrie de } (C_f).}$

5) Axe de symétrie

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J). (C_f) est la représentation graphique d'une fonction f.

Pour démontrer que la droite (Δ) d' équation x = a est un axe de symétrie de (C_f) on peut procéder comme suit :

1er méthode

- ***On détermine la fonction g dont la représentation graphique est l'image de (C_f) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$, A étant le point de coordonnées A(a ; 0), cette fonction g est définie par :***
  g(x) = f(x + a)
- ***On démontre que g est paire.***

2eme méthode

La droite (Δ) d' équation x = a est un axe de symétrie de (C_f) si et seulement pour tout x élément de D_f

On a $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.

Exercice d'application

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). On considère la fonction polynôme f définie par

$f(x) = x^2 - 4x + 7$. On désigne par (C_f) sa représention graphique. Démontrer que la droite

(Δ) d' équation x = 2 est un axe de symétrie de (C_f).

Solution

$\boxed{D_f = IR}$ $x \in IR \Leftrightarrow 2(2) - x =$ $\boxed{4 - x \in IR}$

$f(4 - x) = (4 - x)^2 - 4(4 - x) + 7 = x^2 - 4x + 7 = f(x)$

$\boxed{\text{Donc la droite } (\Delta) \text{ d' équation } x = 2 \text{ est un axe de symétrie de } (C_f)}$.

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J). (C_f) est la représentation graphique d'une fonction f.

La fonction g, dont la représentation graphique est l'image de (C_f)

- ***par la symétrie orthogonale d'axe (OI) est définie par : g(x) = - f(x)***
- ***par la symétrie orthogonale d'axe (OJ) est définie par : g(x) = f(- x)***
- ***par la symétrie centrale de centre O est définie par : g(x) = - f(-x)***
- ***par la translation de vecteur $\vec{u}(a; b)$ est définie par g(x) = f(x – a) + b ou g(x + a) = f(x) + b***

Remarque

- ***Si g(x) = f($|x|$) alors g(x) =*** $\begin{cases} f(x) si\ x \geq 0 \\ f(-x) si\ x < 0 \end{cases}$ ***construction voir Figure1***
- ***Si g(x) = $|f(x)|$ alors g(x) =*** $\begin{cases} f(x) si\ f(x) \geq 0 \\ -f(x) si\ f(x) < 0 \end{cases}$ ***construction voir Figure2***

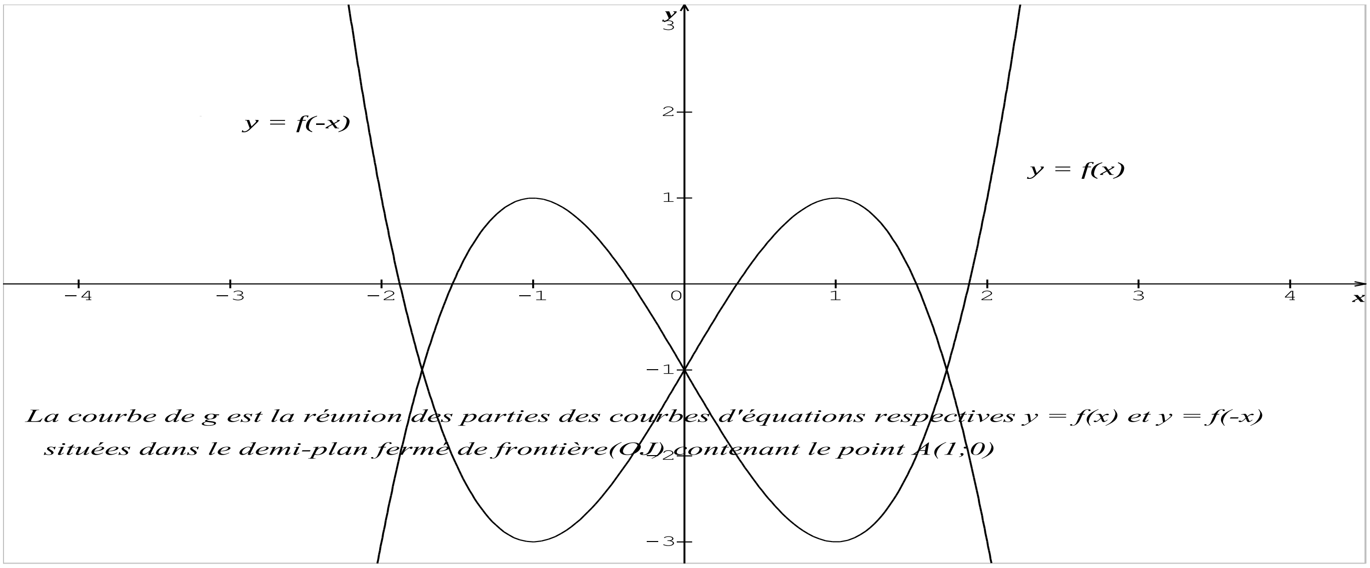


Figure1

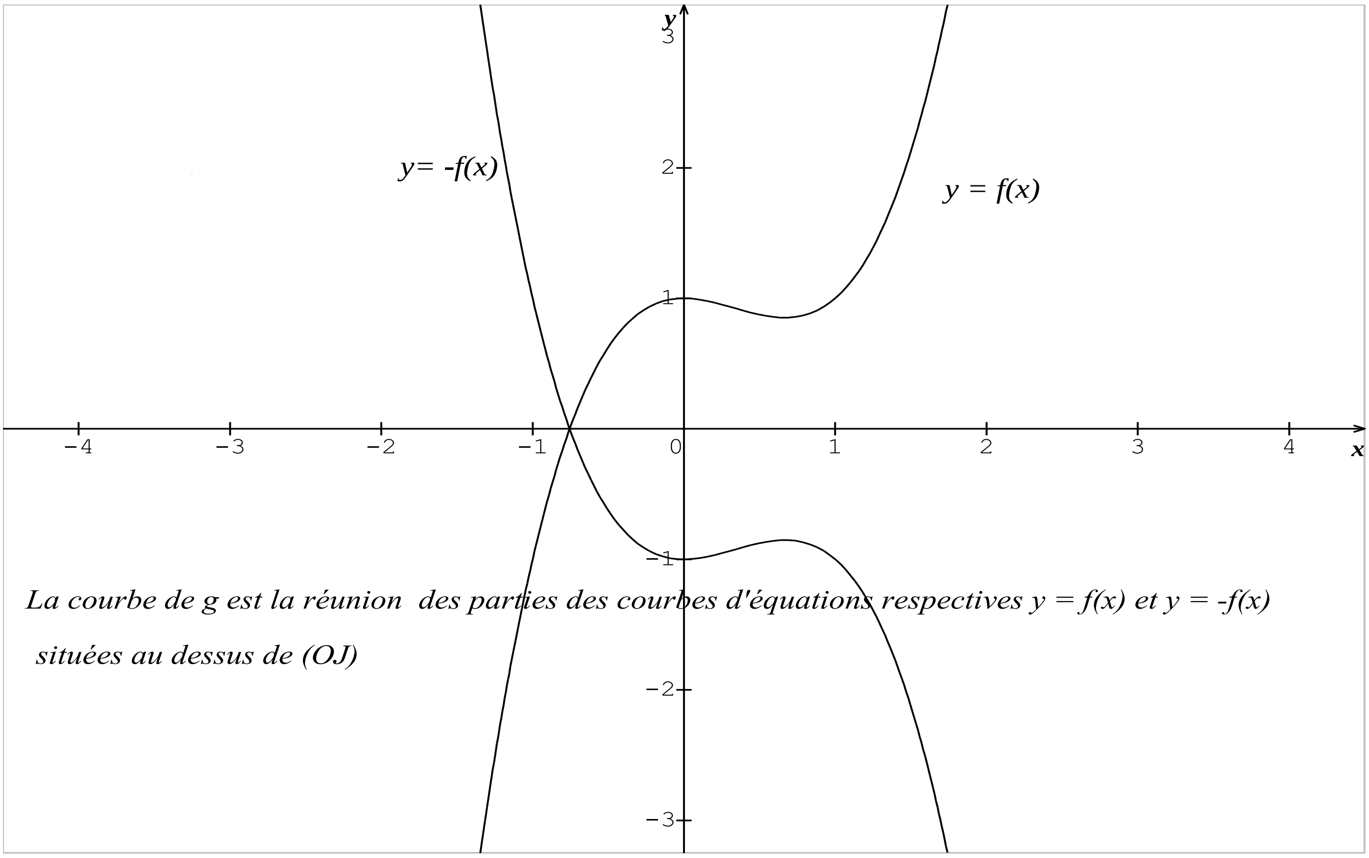


Figure2

6) Extremums d'une fonction

- ***La courbe d'une fonction f admet un maximum absolu au point d'abscisse x_0 si et seulement si $\forall\, x \in D_f, f(x) \leq f(x_0)$.***
- ***La courbe d'une fonction f admet un minimum absolu au point d'abscisse x_0 si et seulement si $\forall\, x \in D_f, f(x_0) \leq f(x)$.***
- ***La courbe d'une fonction f admet un maximum relatif au point d'abscisse x_0 si et seulement si il existe un intervalle I contenu dans D_f tel que $\forall\, x \in I, f(x) \leq f(x_0)$.***
- ***La courbe d'une fonction f admet un minimum relatif au point d'abscisse x_0 si et seulement si il existe un intervalle I contenu dans D_f tel que $\forall\, x \in I, f(x_0) \leq f(x)$.***
- ***On appelle un extremum un maximum ou un minimum.***
- ***On appelle un extremum absolu un maximum absolu ou un minimum absolu.***
- ***On appelle un extremum relatif un maximum relatif ou un minimum relatif.***

Propriété

f est une fonction dérivable sur un intervalle K contenant x_0.

- ***$f(x_0)$ est un extremum relatif de la fonction f si et seulement si f' s'annule en x_0 en changeant de signe.***
- ***Si f admet un extremum relatif en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.***

Exercice d'application

Soit f(x) = $x^3 - 3x$. Déterminer les extremums de f.

Solution

f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur IR et $\boxed{f'(x) = 3x^2 - 3}$ **.**

2 est un maximum relatif de f car $\boxed{\forall x \in]-\infty; 1] \text{ , } f(x) \leq 2}$ **.**

- 2 est un minimum relatif de f car $\boxed{\forall x \in [-1; +\infty[\text{ , } -2 \leq f(x)}$ **.**

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

8) Périodicité

Soit f une fonction et D_f son ensemble de définition. Soit T un nombre réel strictement positif. On dit que

T est une période de f lorsque pour tout x élément de D_f, on a :

- ***$x + T \in D_f$ (1)***
- ***$f(x + T) = f(x)$ (2)***

Le plus petit réel T strictement positif qui vérifie (1) et ((2) est appelé la période de f.

9) Position relative d'une courbe et de son asymptote (Δ) : y = ax + b

Soient f une fonction et (C_f) sa courbe représentative. (Δ) : y = ax + b .

Posons g(x) = f(x) –(ax + b).

- ***Si g(x) > 0 $\forall x \in$ K, alors (C_f) est au-dessus de (Δ) sur K.***
- ***Si g(x) < 0 $\forall x \in$ K, alors (C_f) est au-dessous (ou en dessous) de (Δ) sur K.***
- ***Si g(x) = 0 $\forall x \in$ K, alors (C_f) et $\Delta)$ se coupent sur K.***

10) Position relative d'une courbe et de sa tangente au point M_0 $d'abscisse x_0$

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle K et x_0 un élément de K.

O n désigne par (C_f) sa courbe représentative et par (T) la tangente à $C_f)$ au point M_0 $d'abscisse x_0$.

(T) a pour équation : y = $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

- ***Si $f'' > 0$ $\forall x \in$ K, alors (C_f) est au-dessus de (T) sur K. On dit que f est convexe sur K.***
- ***Si $f'' < 0$ $\forall x \in$ K, alors (C_f) est au-dessous (ou en dessous) de (T) sur K. On dit que f est concave sur K.***
- ***Si f'' s'annule et change de signe en x_0, alors la droite (T) traverse la courbe (C_f) en M_0.***
  On dit que M_0 est un point d'inflexion de (C_f) .

PROBLÈME

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} 2x\sqrt{|1-x^2|} & si\ \ x > 0 \\ -x + \sqrt{x^2 - 2x} & si\ x \leq 0 \end{cases}$

1) Déterminer Df, les limites aux bornes et préciser les asymptotes et branches infinies éventuelles.
2) Etudier la dérivabilité de f en 0 et 1; interpréter géométriquement les résultats obtenus.
3) Calculer f'(x) là où f' est définie, puis dresser le tableau de variation de f.
4) Tracer la courbe de f.
5) Soit h la restriction de f à l'intervalle] $-\infty$ *; 0].*

a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} *dont on précisera l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et le tableau de variation.*
b) Sans utiliser l'expression de $h^{-1}(x)$ *, calculer* $(h^{-1})'(2)$*.*
c) Déterminer explicitement h^{-1}*.*
d) Tracer la courbe de h^{-1} *dans le même repère que celle de f.*

SOLUTION

1) • $\sqrt{|1-x^2|}$ existe quel que soit x > 0, car une valeur absolue est toujours positive.

Pour x ≤ 0, — 2x est positif donc $x^2 - 2x$ est positif et par conséquent, $\sqrt{x^2 - 2x}$ existe.

En résumé, f(x) existe pour tout x réel et $\boxed{\mathbf{D_f =}\ \ }$.

• $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 - 2x = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2x} = +\infty \end{array}\right\}$ $\boxed{\text{Donc } \lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{f(x)} = +\infty.}$

• $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty\ \lim\limits_{x\to+\infty} |1-x^2| = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{|1-x^2|} = +\infty \end{array}\right\}$ $\boxed{\text{Donc } \lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{f(x)} = +\infty.}$

•$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+\sqrt{x^2-2x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -1 - \sqrt{\frac{x^2-2x}{x^2}}$ (car, pour x < 0, x = $-\sqrt{x^2}$).

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^2-2x}{x^2}} = 1$. Donc $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 - 1 = -\mathbf{2}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) + 2x] = \lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{x^2-2x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-(x^2-2x)}{x - \sqrt{x^2-2x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x}{x[1+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}} = 1$.

$\boxed{\text{On en conclut que la droite d'équation y = — 2x + 1 est } \textbf{asymptote oblique} \text{ à la courbe de f au voisinage de } -\infty}$.

•$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x\sqrt{|1-x^2|}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\sqrt{|1-x^2|} = +\infty$.

$\boxed{\text{On en conclut que la courbe de f admet au voisinage de } +\infty \text{ une } \textbf{branche parabolique} \text{ de direction } (O, \vec{j}).}$

2) • $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{-x+\sqrt{x^2-2x}}{x} = \lim\limits_{x\to0^-} \left(-1 - \sqrt{\frac{x^2-2x}{x^2}}\right) = \lim\limits_{x\to0^-} \left(-1 - \sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)$.

Or, $\lim\limits_{x\to0^-} -\frac{2}{x} =$ « $\frac{-2}{0^-}$ » $= +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to0^-} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^-} \sqrt{1-\frac{2}{x}} = +\infty$.

D'où : $\lim\limits_{x\to0^-} -\sqrt{1-\frac{2}{x}} = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^-} \left(-1 - \sqrt{1-\frac{2}{x}}\right) = -\infty$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -$ $\boxed{\infty \text{ et par conséquent } \textbf{f n'est pas dérivable à gauche en 0}}$.

• $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2x\sqrt{|1-x^2|}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 2\sqrt{|1-x^2|} = 2$.

Ainsi **f est dérivable à droite** en 0 et $f'_d(0) = \mathbf{2}$.

• $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{2x(1-x^2)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{x\to 1^-} -\frac{2x(1+x)}{\sqrt{1-x^2}} =$ « $\frac{-4}{0^+}$ » $= -\infty$.

f n'est pas dérivable à gauche en 1 .

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{2x\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{2x(x^2-1)}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{2x(x+1)}{\sqrt{x^2-1}} =$ « $\frac{4}{0^+}$ » $= +\infty$.

f n'est pas dérivable à droite en 1 .

• **<u>Interprétation géométrique des résultats</u> :**
A gauche du point origine O(0,0), on a un point anguleux : une demi-tangente verticale à gauche et une demi-tangente de coefficient directeur 2 à droite.
Au niveau du point A(1,0), on a un point de rebroussement.

3) • f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle (à savoir $x \mapsto -x$ et $x \mapsto \sqrt{x^2-2x}$, cette dernière l'étant comme racine carrée d'une fonction strictement positive et dérivable sur $]-\infty; 0[$).

Pour tout x < 0, $f'(x) = -1 + \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = -1 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$.

Or, si x < 0, (x − 1) est aussi négatif, ainsi que $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$ (fraction à numérateur négatif et à dénominateur positif).

Donc $f'(x) = -1 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$ est également négatif.

• Si $x \in]0; 1[$, $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

f est dérivable sur $]0; 1[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle (à savoir $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$, cette dernière l'étant comme racine carrée d'une fonction strictement positive et dérivable sur $]0; 1[$).

Pour $x \in]0; 1[$, $f'(x) = 2\sqrt{1-x^2} + 2x \times \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-x^2)-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ainsi f'(x) a même signe que $(1-2x^2)$ qui est un trinôme négatif à l'extérieur de ses racines c'est-à-dire sur $\left]\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right[$ et positif à l'intérieur de ses racines, c'est-à-dire sur $\left]0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$.

• Si $x \in]1; +\infty[$, $f(x) = 2x\sqrt{x^2-1}$.

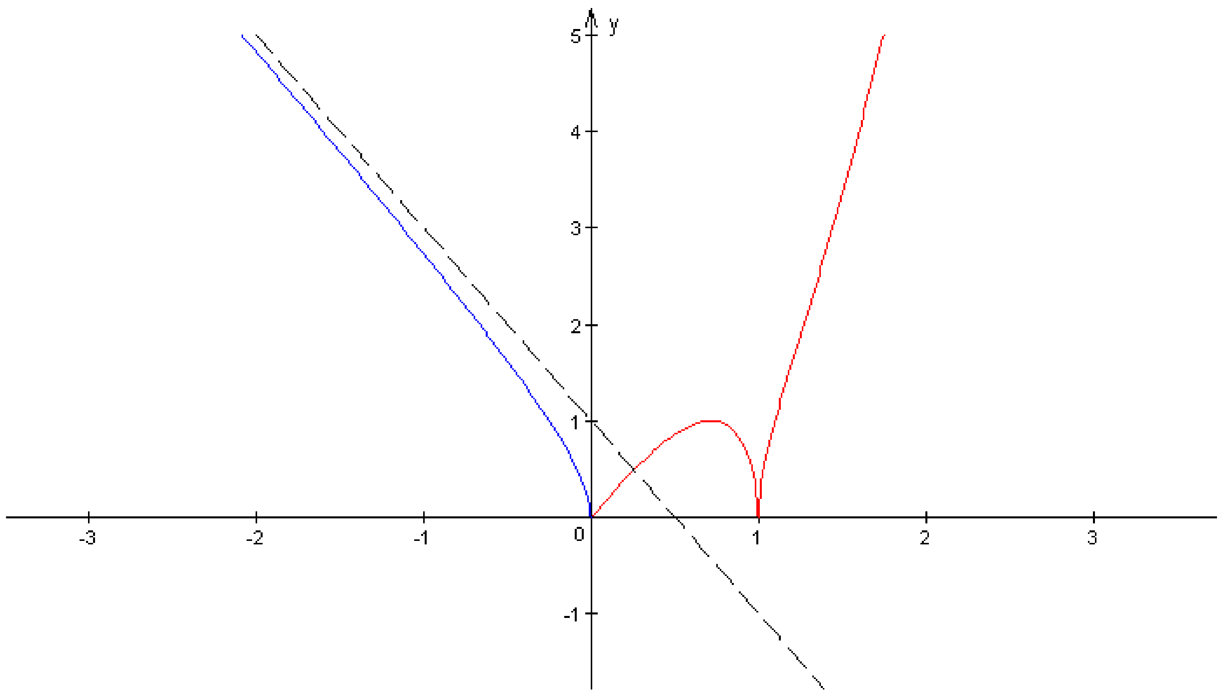
f est dérivable sur $]1; +\infty[$, comme produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle (à savoir $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$, cette dernière l'étant comme racine carrée d'une fonction strictement positive et dérivable sur $]1; +\infty[$).

Pour $x \in]1; +\infty[$, , $f'(x) = 2\sqrt{x^2-1} + 2x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{2(x^2-1)+2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4x^2-2}{\sqrt{1-x^2}}$.

Or, pour x > 1, on a $x^2 > 1$, d'où $4x^2 > 4$, donc a fortiori $4x^2 > 2$. f'(x) est donc positif comme fraction dont le numérateur et le dénominateur sont tous deux positifs.

Le tableau suivant résume les variations de f :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1		$+\infty$
f'(x)		−		+		−		+	
f	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$



4)

5) a) D'après l'étude précédente, h est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\ ; 0]$, donc réalise une bijection de $]-\infty\ ; 0]$ vers son image par h, à savoir, cf. tableau de variation, $[0; +\infty[$. D'autre part, la dérivée h $'$ est strictement négative (donc non nulle) sur $]-\infty; 0[$, donc h^{-1} est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$. h^{-1} a le même sens de variation que h, donc est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Voici son tableau de variation :

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
h^{-1}	0 $\searrow$ $-\infty$

b) Cherchons d'abord l'antécédent de 2. h(x) =2 $\Leftrightarrow -x+\sqrt{x^2-2x}=2 \ \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x}=2+x.$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x^2-2x=x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$. D'après le théorème de dérivation d'une réciproque,

$(h^{-1})'(2) = \dfrac{1}{h'(\frac{2}{3})}$ $\boxed{\text{. Après calcul, on trouve } h^{-1})'(2) = -\dfrac{9}{4}}$.

c) (h(x) = y et x $\in [-\infty; 0[) \Leftrightarrow (x = h^{-1}(y)\ et\ \ y\ \in [0; +\infty[)$
Or,
$(\mathrm{h}(\mathrm{x}) =\ \mathrm{y}\ \mathrm{et}\ \mathrm{x}\ \in [-\infty; 0[) \Leftrightarrow \left(-x+\sqrt{x^2-2x}=y \text{ et } x\ \in [-\infty; 0[\right)$
$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2-2x}=y+x \text{ et } x\ \in [-\infty; 0[)\ \Leftrightarrow (x^2-2x=(y+x)^2\ et\ y\ \geq -x\ \geq 0)\ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (y^2+2xy\ +2x=0\ et\ y\ \geq -x\ \geq 0) \Leftrightarrow (x(2y+2)+y^2=0\ et\ y\ \geq -x\ \geq 0) \Leftrightarrow$
$(\mathrm{x} = -\frac{y^2}{2y+2}$ et $y\ \geq -x\ \geq 0)$. Notons que 2y + 2 est non nul, puisque y $\geq$ 0.

$\boxed{\text{Ainsi } h^{-1} \text{ est définie sur } [0; +\infty[\text{ par } h^{-1}(y) = -\frac{y^2}{2y+2})}$.

d) Voir figure.

Exercice d'application

Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+2x}$. *On note (C) sa courbe représentative.*

1) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

2) Montrer que g est dérivable et calculer $g'(x)$.

3) Dresser le tableau des variations de g.

4)a) Démontrer que la courbe (C) a un axe de symétrie que l'on déterminera.

b) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

5) Tracer la courbe (C) et (T) dans un repère orthonormé d'unité 1cm. On indiquera et on tracera les asymptotes éventuelles à la courbe (C).

Exercice d'application

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{x^2-3x+6}{x-1}$. *On note par (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J).*

1) Déterminer les réels a,b et c tels que, pour tout $x \neq 1$, *on ait :* $f(x)= ax+b+\frac{c}{x-1}$.

2) a) Montrer que la droite (D) :y=x-2 est asymptote oblique à (Cf).

a) Préciser les positions de (Cf) et (D).

3) Etudier les variations de f . Tracer (Cf)

4) Montrer que le point I(1 ; -1) est centre de symétrie de (Cf)

5) Montrer que (Cf) admet deux tangentes paralléles à la droite (Δ *) :y=-3x+1*

Calculer les coordonnées de chacun de ces points et écrire l'équation de ces tangentes.

Exercice d'application

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

1) Etudier la parité de f puis calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Montrer que : $f(x)-x=\frac{-1}{x+\sqrt{x^2-1}}$. *En déduire* $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)$.

Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?

3) Montrer que : $f(x)+x=\frac{-1}{-x+\sqrt{x^2-1}}$. *En déduire* $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)$. *Conclure*

4) a) Etudier la dérivabilité de f en -1 et en +1.

a) Etudier les variations de f sur son ensemble de définition

5) Tracer la courbe (Cf) représentant de f dans un repère orthonormé.

EXERCICES

Exercice1

1) Démontrer que $\forall\, x, y \in IR$, $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$.

2) Démontrer que $\forall\, x \in [0\,; \frac{\pi}{4}]$, $\frac{\sqrt{2}}{2}\, x \leq \sin x \leq x$.

3) Démontrer que $\forall\, x \in [0\,; \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin x \leq x$

4) Etudier la dérivabilité de f en x_0 :

a) $f(x) = |x - 2|$ $\quad x_0 = 2$ $\qquad$ b) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{|x| + 1}$ $\quad x_0 = 0$ $\qquad$ c) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & si\ x \leq -1 \\ \frac{2x+2}{x+2} & si\ x > -1 \end{cases}$ $\quad x_0 = -1$

Exercice 2

$$\text{Soit } f:]0; \tfrac{\pi}{2}[\longrightarrow IR$$
$$x \longrightarrow \frac{1}{\cos x}$$

1) Montrer que f est bijective de $]0\,; \frac{\pi}{2}[$ vers un intervalle J à préciser.

2) Déterminer $(f^{-1})'(\sqrt{2})$ et $(f^{-1})'(2)$.

3) Démontrer que f^{-1} est dérivable sur J et que $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{y\sqrt{y^2 - 1}}$ $\quad \forall\, y \in J$.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $]0\,; +\infty[$ telle que $f(1) = 0$ et $f'(x) = \frac{1}{x}$.

1) Montrer que $\forall\, x \in]1\,; +\infty[$, $0 \leq f'(x) \leq 1$.

2) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\forall\, x \geq 1$, $0 \leq f(x) \leq x - 1$.

Exercice4

Soit f la fonction définie par :

$f(x) = 2x^2 + 2x - 3$ et C sa représentation graphique.

1°) Etudier f et en faire la représentation graphique.

2°) On désigne par g la restriction de f à $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Montrer que g est une bijection de $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ vers $\left[-\frac{7}{2}, +\infty\right[$.

3°) Soit g^{-1} la bijection réciproque et C^{-1} sa représentation graphique.

a) Tracer C^{-1} sans déterminer g^{-1}.

b) Déterminer une équation de la tangente à

C^{-1} au point A d'abscisse 9.

c) Déterminer g^{-1} en donnant l'ensemble de départ, l'ensemble d'arrivée et l'image d'un élément x.

d) Déterminer $(g^{-1})'$ et retrouver une équation de la tangente à C^{-1} au point d'abscisse 9.

Exercice5

Soit f la fonction définie par :

$f(x) = \dfrac{3x+1}{x+2}$ et C sa représentation graphique.

1°) Etudier f et tracer C .

2°). Montrer que f est une bijection de

$R \mid \{-2\}$ vers $R \mid \{3\}$. Soit g^{-1} la bijection réciproque et C^{-1} sa représentation graphique.

3°) a) Tracer C^{-1} sans déterminer f^{-1}.

b) Déterminer une équation de la tangente à

C^{-1} au point A d'abscisse 2.

c) Déterminer f^{-1} en donnant l'ensemble de départ, l'ensemble d'arrivée et l'image d'un élément x.

d) Faire l'étude de f^{-1}, retrouver C^{-1} et une équation de la tangente à C^{-1} au point A.

Exercice6

Soit f la fonction définie sur $[\frac{\pi}{3} ; \pi]$ *par :*

$f(x) = 2\cos x - \cos 2x$.

1°) Montrer que f admet une fonction réciproque, g, dont on précisera l'ensemble de définition et les propriétés.

2°) Calculer les valeurs de g et de sa fonction dérivée, pour les valeurs $-\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}$ et $+1$ de la variable .

Exercice7

Soit f l'application de [0; 2] vers $\mathbb{R}$ *définie par :* $f(y) = y^2 + 2y - 3$.

1°) Montrer que f définit une bijection de [0; 2] vers [— 3 ; 5] et préciser l'application réciproque de cette bijection ; on la notera φ .

2°) Montrer que φ est dérivable sur [— 3; 5] et déterminer sa fonction dérivée.

Exercice8

On considère l'application $f :]0;2[\to \mathbb{R}$ *définie par :* $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)$.

1°) Montrer que f est une bijection de $]0;2[$ sur un intervalle que l'on précisera .

2°) Soit h la bijection réciproque de f . Montrer que h est dérivable sur R et que l'on a : $h'(x) = \dfrac{2}{\pi(x^2+1)}$.

3°) Pour tout x non nul, on pose :

$\varphi(x) = h(x) + h\left(\frac{1}{x}\right)$.

Calculer $\varphi'(x)$ et en déduire que φ est constante sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$. Déterminer chacune de ces constantes .

Exercice9

Soit $f : x \mapsto \sin^2 x$ et g la restriction de f à $[0\,;\frac{\pi}{2}]$.

1°) Montrer que g définit une bijection de $[0\,;\frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J à préciser .

2°) Déterminer l'ensemble sur lequel la bijection réciproque g^{-1} est dérivable et démontrer que sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1}$ 0n note (τ) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère

Orthonormé d'unité 1 cm.

1) Montrer que $f(x) = ax + b + \frac{cx}{3x^2+1}$ $\forall x \in IR$.

2) Montrer que f est dérivable sur IR et calculer sa dérivée.

3) Dresser le tableau des variations de f.

4) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 3$ est une asymptote oblique à (τ) en $+\infty$ et en $-\infty$.

Etudier les positions relatives de (D) et de (τ).

5) Donner l'équation de la tangente (T) à (τ) au point d'abscisse 0. Tracer (D), (T) et la courbe (τ).

Montrer que la courbe (τ) a un centre de symétrie.

4) *Montrer que l'équation $f(x) = 1$ a une solution unique α dans IR. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.*

Exercice 11

Soit la fonction f définie par : $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct unité 4cm.

1) *Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 1. En déduire les tangentes à (C) aux points d'abscisses -1 et 1.*
2) *Dresser le tableau de variation de f .*
3) *Tracer la courbe (C).*
4) *Justifier que $f(x) = 1$ exactement deux solutions α et β ($\alpha < \beta$).*

Exercice 12

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-1}{x-1} & si \quad x \leq 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}} & si \quad x > 0 \end{cases}$

1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f, puis calculer les limites aux bornes D_f de f.
b) Etudier les branches infinies.

2) Etudier la dérivabilité de f en 0.

3) Calculer $f'(x)$ dans les intervalles où f est dérivable.

4) Tracer la courbe de f et ses asymptotes.

5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0;+\infty[$.

a) Montrer que g est une bijection de $]0;+\infty[$ vers un intervalle à préciser.

b) Soit g^{-1} la réciproque de g. Calculer $g^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$. En déduire que g^{-1} est dérivable en $x_0=\frac{3}{2}$ et calculer $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{3}{2}\right)$ c) Tracer la courbe de g^{-1} dans le même repère.

Exercice 13

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$ et (C) sa courbe représentative

1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f et vérifier que:

$$f(x)=x+1+\frac{1}{x+2}, \quad x\in D_f$$

b) Calculer les limites aux bornes de D_f .

2) Etudier les variations de f et donner son tableau de variation.

3) a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y=x+1$ est une asymptote à (C).

b) Etudier la position de (C) par rapport à l'asymptote oblique (D).

4) Indiquer une équation de l'asymptote verticale (Δ).

5) Montrer que le point I intersection des asymptotes est centre de symétrie de (C).

6) Tracer (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ ainsi que les asymptotes.

Exercice 14

On considère la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x-2)}{x-1} & si \quad x<0\\ x+\sqrt{|x^2-x|} & si \quad x\geq 0\end{cases}$

(C_f) sa courbe représentative dans un repère ortho normal unité 1 cm.

1) Déterminer le domaine de définition de f puis calculer les limites aux bornes.
2) Etudier la dérivabilité de f en 0 et en 1.

3) *Montrer que* f *est dérivable sur* $\mathbf{R}-\{0;1\}$ *et puis calculer* $f'(x)$.

4) *Résoudre dans l'intervalle* $]0;1[$ *l'inéquation* $2\sqrt{x-x^2}+1-2x\leq 0$. *En déduire le signe de* $f'(x)$ *sur cet intervalle.*

5) *Dresser le tableau de* f.

6) *Etudier les branches infinies de* f *, on précisera les positions relatives de* (C_f) *et de ses asymptotes éventuelles.*

7) *Soit* g *la restriction de* f *à l'intervalle* $I=[1;+\infty[$.

a) *Montrer* g *est une bijection de* I *vers un intervalle* J *à préciser.*

b) *Soit* g^{-1} *la réciproque de* g. *Donner les variation de* g^{-1} *sur* J.

c) g^{-1} *est-elle dérivable en 2 ? si oui calculer* $(g^{-1})'(2)$.

Construire C_f et la courbe de g^{-1} dans un repère.

Exercice 15

Soit la fonction f *définie par* $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$ *sur* $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ *à valeurs dans* $[1;+\infty[$.

1) *Démontrer que* f *admet une bijection réciproque* f^{-1}.

2) *Déterminer l'ensemble sur lequel* f^{-1} *est dérivable et démontrer que sa dérivée est* $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Exercice 16

Soit la fonction f *définie par* $f(x)=\tan 2x-2\tan x$ *et* (C_f) *sa courbe représentative.*

1) *Déterminer* D_f *; justifier que l'ensemble d 'étude de* f *peut être réduit à l'intervalle* $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2) *Démontrer que* $\forall\ x\in D_f$, $f'(x)=\dfrac{2\tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right)\left(3-\tan^2 x\right)}{\left(1-\tan^2 x\right)^2}$.

3) *Vérifier que sur* $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, (C_f) *présente deux branches infinies, dont on précisera la nature.*

4) *Dresser le tableau de variation de* f *sur* $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

5) *Tracer* (C_f) *sur l'intervalle* $[-\pi;\pi]$

Exercice 17

1) Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée de la fonction f :

a) $f(x) = (x^2-1)(x^3+2)$ *b)* $f(x) = (x+1)^6\,(x-1)^5$ *c)* $f(x) = \frac{2x+4}{x-1}$

d) $f(x) = \frac{1}{2x+1}-\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x}$ *e)* $f(x) = \frac{-1}{(2x+1)^2\,(x+2)^3}$ *f)* $f(x) = (1-x)\sqrt{2-3x}$

g) $f(x) = \frac{\cos x+x\sin x}{\sin x-\cos x}$ *h)* $f(x) = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ *i)* $f(x) = \frac{\cos 2x+\sin 3x}{\tan 6x}$

2) Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, puis déterminer sa fonction dérivée :

a) $f(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{2x-3}$ *b)* $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2-x}}$ *c)* $f(x) = \frac{2-x}{3x+1}$

d) $f(x) = \frac{x-1}{(x^2+1)^2}$ *e)* $f(x) = 2x\sqrt{x^2-1}$ *f)* $f(x) = \sqrt{5x-3}$

Exercice 18

1) Etudier la dérivabilité de f en x_0 :

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 \quad x_0 = -1$ *b)* $f(x) = \sqrt{x+5} \quad x_0 = 4$ *c)* $f(x) = x|x-3| \quad x_0 = 3$

d) $f(x) = |x(x-1)| \quad x_0 = 1$ *e)* $f(x) = \sqrt{|x^2 - x|} \quad x_0 = 0$ *f)* $f(x) = x^2 - |x| \quad x_0 = 0$

g) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si\ x < 1 \\ \frac{x-1}{x+1} & si\ x \geq 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$ *h)* $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & si\ x < 0 \\ 2x + 3 + \sqrt{x} & si\ x \geq 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$

2) Soit la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + (m^2 - 2)x + 2 & si\ x \leq 0 \\ \frac{x+2m}{x+1} & si\ x > 0 \end{cases}$

Déterminer m pour que la fonction g soit dérivable sur IR.

5) Soit $f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$. *On note* (τ) *sa courbe représentative.*

Déterminer a et b pour que (τ) *passe par A (0 ;4) et admette une tangente en A d'équation y = 4x + 3.*

Exercice 19

1) Soit $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 2}{(x-1)^2}$.

a) Préciser les intervalles sur lesquels f est dérivable et calculer sa fonction dérivée.

b) Déduire que f détermine une bijection de $]1; +\infty[$ *vers un intervalle J à préciser.*

2) Soit $g(x) = \sqrt{x^2 + 8x}$.

a) Préciser les intervalles sur lesquels g est dérivable et calculer sa fonction dérivée.

b) Démontrer que g réalise une bijection de $[1 ; \frac{9}{2}]$ *vers un intervalle J à préciser.*

c) Démontrer que sa bijection réciproque g^{-1} *se définit ainsi :*

$$g^{-1} : [1 ; \tfrac{9}{2}] \longrightarrow [3 ; \tfrac{15}{2}]$$
$$x \longrightarrow \sqrt{x^2 + 16} - 4$$

d) Calculer $(g^{-1})'(x)$ *par deux procédés différents.*

Exercice 20

Soit f la fonction définit par $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2 - 1}} & si\ |x| > 1 \\ x^2 - 3x + 2 & si\ |x| < 1 \end{cases}$

1) Peut-on prolonger f par continuité en 1 et en – 1 ?

2) Montrer que la fonction g restriction de f à l'intervalle]-1 ; 1[définit une bijection de]-1 ; 1[vers un intervalle J à préciser.

3) g^{-1} *est-elle dérivable en* $\frac{3}{4}$ *? si oui déterminer* $(g^{-1})'(\frac{3}{4})$.

4) Expliciter $g^{-1}(x)$.

Exercice 21

Soient a et b deux paramètres réels. On définit la fonction f par :

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & si\ x \leq 3 \\ \sqrt{2x+3} - 3 & si\ x > 3 \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit continue et dérivable en $x_0 = 3$.

Exercice 22

*Soit f la fonction définie par f(x) = 3*$cos^4 x + sin^4 x - 1$*.On note* (τ) *sa courbe représentative.*

1) Déterminer D_f *et montrer que f est dérivable sur IR.*

2) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe (τ) *au point d'abscisse* $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

3) Montrer que f est paire et périodique puis justifier que l'ensemble d'étude de f peut être réduit à l'intervalle *[0 ;* $\frac{\pi}{2}$*].*

4) Donner le tableau de variation de f sur [0 ; $\frac{\pi}{2}$*].*

5) Tracer la courbe (τ).

Exercice 23

Soit la fonction f définie par f(x) = $\sqrt{\frac{x^2(x-4)}{x-1}}$ *.On note* (τ) *sa courbe représentative.*

1) Déterminer son domaine de définition D_f.

2) Etudier la dérivabilité de f sur D_f *et déterminer sa fonction dérivée puis dresser le tableau de variation de f.*

3) Montrer que la courbe (τ) *admet deux demi-tangentes* (T_1) *et* (T_2) *dont on donnera les équations.*

4) Déterminer les asymptotes obliques (D_1) *en* $-\infty$ *et* (D_2) *en* $+\infty$ *à la courbe* (τ).

5) Etudier la position de (τ) *par rapport à* (D_1) *et à* (D_2).

6) Tracer la courbe (τ), (D_1) *et* (D_2).

Exercice 24

Soit la fonction g définie par g(x) = $\begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 2} & si\ x > 1 \\ \sqrt{|x^2 - x|} & si\ x \leq 1 \end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0 et en 1.Interpréter graphiquement ces résultats

2) Soit h la restriction de g à]-∞; 0[.Montrer que h est une bijection de]-∞; 0[vers un intervalle J à préciser.

3) Soit h^{-1} *la réciproque de h.* h^{-1} *est –elle dérivable sur J ? Dresser le tableau de variation de* h^{-1}.

4) Montrer que h^{-1} *est dérivable en* $\sqrt{2}$ *et calculer* $(h^{-1})'(\sqrt{2})$.

5) Expliciter $h^{-1}(x)$.

Exercice 25

Etudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes :

1°) $f(x) = x^6 - 2x^3 + 1$ 2°) $f(x) = x^2(x-1)^2$

3°) $f(x) = |x^3| + |3x^2 - 4|$ 4°) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2$

5°) $f(x) = \sup(-x^3 + x^2 + 5x,\ 2x^3 + x)$ 6°) $f(x) = \frac{2x-3}{3x+3}$

7°) $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$ 8°) $f(x) = \frac{|x+1| - 2x}{|x-1|}$

9°) $f(x) = \frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}$ 10°) $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{x^2+6x+8}$

11°) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4x+5}$ 12°) $f(x) = \frac{-3x+2}{x^2-3x+2}$

13°) $f(x) = \sqrt{\frac{-x^3}{x+1}}$ 14°) $f(x) = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 15°) $f(x) = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

16°) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2(x+1)}{x-1}}$ 17°) $f(x) = x\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$ 18°) $f(x) = (1-x)\sqrt{1+x}$

19°) $f(x) = \cos^2 x$ 20°) $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ 21°) $2\cos 3x + 1$

22°) $f(x) = 3\sin 2x + 2\cos 3x - 3$ 23°) $f(x) = \frac{\cos 3x}{1+\cos 2x}$ 24°) $f(x) = \frac{\cos 3x}{(\cos x - 1)^2}$

25°) $f(x) = \frac{\cos^3 x}{(\cos x - 1)^2}$ 26°) $f(x) = \sqrt{\frac{1-2\sin x}{1+2\sin x}}$ 27°) $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x}$

28°) $f(x) = \sin^2 x - 2\cos x$ 29°) $f(x) = x - \sin x$ 30°) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x}$

Exercice 26

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+2}$

1°) a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

b) Déterminer les limites aux bornes de D_f. En déduire que C_f admet une asymptote verticale.

2°) a) Montrer qu'il existe des réels a et b tels que $f(x) = ax + \frac{b}{x+2}$.

En déduire que la droite Δ d'équation , y = x est asymptote oblique à la courbe de f.

b) Etudier la position relative de C_f et Δ.

3°) Etudier les variations de f. Dresser le tableau de variation de f.

4°) Montrer que le point I(− 2 ; − 2) est centre de symétrie à C_f.

5°) Soit A le point d'intersection de C_f avec l'axe des ordonnées ; donner l'équation de la tangente T_A au point A.

6°) Construire la courbe C_f dans un repère orthonormé (O, I, J).

7°) Expliquer comment, puis effectuer la construction de la fonction g définie par :

$$g(x) = |f(x)| \text{ pour tout } x \neq 2.$$

Exercice 27

Soit la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{(x+2)^2 - |x+2|}{x-1}$.

1°) Ecrire g (x) sans la barre de valeur absolue.

2°) Déterminer les limites, les asymptotes et leur position par rapport à C_g.

3°) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en -2.

4°) Etablir le tableau de variation de g.

5°) Tracer C_g.

Exercice 28

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3}$

1°) Déterminer le domaine de définition de f, les limites et les asymptotes. Etudier la position relative de C_f par rapport à son asymptote oblique.

2°) Montrer que le point I(0 ;1) est centre de symétrie.

Déterminer l'équation de la tangente au point I et montrer que I est un point d'inflexion .

3°) Montrer que $f'(x) = \dfrac{(x^2-1)(x^2-6)}{(x^2-3)^2}$ *; en déduire le tableau de variation de f.*

4°) Tracer C_f

Exercice 29

On considère la fonction suivante définie par : $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 3x}{x-1}$.

1°) Déterminer le domaine de définition de f, puis calculer les limites aux bornes de D_f; préciser les asymptotes.

2°) Trouver les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.

En déduire que la droite D d'équation , $y = -2x - 1$ est asymptote oblique à la courbe de f.

Donner la position relative de D et C .

3°) Montrer que le point I d'intersection de D et de l'asymptote verticale est centre de symétrie à C .

4°) Etudier les variations de f, dresser le tableau de variation de f et construire C .

5°) Déduire du graphique précédent la courbe représentative de la fonction g définie par :

$$g(x) = |f(x)| \text{ pour tout } x \neq 1.$$

Exercice 30

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}$

1°) Démontrer que f est paire.

2°) Etudier les limites aux bornes de D_f. *Interpréter les résultats.*

3°) Etudier les variations de f.

4°) Démontrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ *admet une solution unique α dans [0 ; 1].*

5°) Tracer la courbe de f.

Exercice 31

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{x + 2}$

1°) a) Déterminer l'ensemble de définition D_f *de f.*

b) Déterminer les limites aux bornes de D_f. *En déduire que* C_f *admet une asymptote verticale.*

2°) Montrer qu'il existe des réels α, β et γ tels que $f(x) = \alpha x + \beta + \dfrac{\gamma}{x + 2}$.

En déduire que la droite Δ d'équation , $y = 2x - 1$ *est asymptote oblique à la courbe de f.*

3°) Etudier les variations de f. Dresser le tableau de variation de f.

4°) Démontrer que le point $I(-2 ; -5)$ *est centre de symétrie à* C_f.

5°) Soit A et B les points d'intersection de C_f *avec l'axe des abscisses ; donner les équations des tangentes* T_A *et* T_B *aux points A et B.*

6°) Construire Δ, T_A, T_B *et* C_f *dans un repère orthonormé (O, I, J).*

7°) Discuter suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ *où est un paramètre réel.*

Exercice 32

1°) Soit g la fonction définie par : $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

a) Etudier les variations de g.

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ *admet une solution unique* $\alpha \in]-2; -1{,}5[$ *; en déduire le signe de g.*

2°) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 - x^3}$

a) Déterminer D_f *et les limites aux bornes de* D_f. *Préciser les asymptotes.*

b) Etablir le tableau de variation de f.

c) Soit h la restriction de f sur $]1 ; +\infty[$, *montrer que h permet de définir une bijection de* $]1 ; +\infty[$ *vers un intervalle J à préciser.*

d) Calculer h(2) ; en déduire $\left(h^{-1}\right)'\left(-\frac{3}{7}\right)$.

e) Construire la courbe de f et la courbe de h^{-1} dans un même repère.

Exercice 33

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{ax^3 - 4x^2 + 8x + b}{(x-c)^2}$, où a, b, c sont des réels.

1°) Déterminer a, b, c sachant que la droite (D) : x = 1 est asymptote verticale à la courbe de f, que f(0) = − 4 et que la courbe admet, au point d'abscisse 2 une tangente parallèle à la droite d'équation y = − 4x.

2°) Pour la suite, on donne $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$.

a) Déterminer D_f, calculer les limites aux bornes de D_f.

b) Etudier les variations de f, dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que $f(x) = x - 2 - \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

d) En déduire que la droites (D ') d'équation y = x − 2 est asymptote oblique à la courbe de f.

e) Etudier la position relative de (D ') et deC_f.

3°) Soit A le point d'intersection de (D) et (D ').

Montrer que A est un centre de symétrie à la courbe de f.

4°) Soit B le point d'intersection de C_f et de l'axe des ordonnées.

Donner une équation de la tangente T_B en B.

5°) tracer la courbe de f dans un repère (O, I, J) unité : 2 cm.

6°) Soit g la restriction de f à] 3 ; + ∞ [. Montrer que g réalise une bijection de] 3 ; + ∞ [vers un intervalle J à préciser.

7°) Construire $C_{g^{-1}}$ dans le même repère.

8°) Déduire de l'étude de C_f le nombre de racines de l'équation :

$$x^3 - (4+m)x^2 + 2(4+m)x - 4 - m = 0 ,$$

Exercice 34

Le plan est rapporté à un repère orthonormé .

A . Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$.

1°) Lorsque f est définie, déterminer a, b, c, réels tels que $f(x) = x + a + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{(x-1)^2}$

2° Etudier la fonction f .

3°) Démontrer que C , courbe représentative de f, admet deux asymptotes, dont l'une est la droite D d'équation y = x − 2 .

Préciser la position de C par rapport à D, et les coordonnées de leur point commun.

4°) Construire la courbe C .

B . En utilisant la courbe C , déterminer, suivant les valeurs de m, paramètre réel, le nombre et le signe des solutions réelles de chaque équation :

$x^3 — (4 + m)\, x^2 + 2(4 + m)\, x — 4 — m = 0,$

$\sin^3 u — (4 + m) \sin^2 u + 2(4 + m) \sin u — 4 — m = 0$. (inconnue u telle que: $— \pi \leq u < + \pi$)

Exercice 35

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \sqrt{| 4x^2 — 1 |}$.

Soit C sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1°) Etudier la continuité de f .

2°) Etudier la dérivabilité de f . Calculer sa dérivée sur chaque intervalle où f est dérivable .

3°) Démontrer les équivalences :

$$\sqrt{4x^2 — 1} + 4x < 0 \Leftrightarrow x \in]— \infty \,;\, — \frac{1}{2}] \text{ et } \sqrt{1 — 4x^2} — 4x > 0 \Leftrightarrow x \in]— \frac{1}{2} \,;\, \frac{1}{2\sqrt{5}}] .$$

En déduire le signe de $f'(x)$.

4°) a) Calculer $\lim\limits_{x \to — \infty} f$ et $\lim\limits_{x \to + \infty} f$. Dresser le tableau de variation de f .

b) Calculer $\lim\limits_{x \to — \infty} [f(x) + x]$ et $\lim\limits_{x \to + \infty} [f(x) — 3x]$.

En déduire que C admet deux asymptotes, d'équations $y = — x$ et $y = 3x$.

Tracer la courbe C .

5°) a) Soit h la restriction de f à $]— \infty \,;\, — \frac{1}{2}]$. Démontrer que h admet une réciproque $h^{—1}$.

En préciser l'ensemble de définition et la variation .

b) Calculer $\lim\limits_{x \to + \infty} [x + h^{—1}(x)]$. En déduire que C et Γ, courbe représentative de $h^{—1}$,

ont une asymptote commune . Tracer Γ .

c) Calculer $h^{—1}(0)$. Déterminer une équation de la tangente à Γ au point de coordonnées $(0 \,;\, h^{—1}(0))$.

Exercice 36

Soit dans le plan les courbes $\mathscr{C}_m : y = \dfrac{mx^2 — mx — 1}{x^2 + mx + 1}$.

1°) Déterminer m tel que $\mathscr{C}_m$ soit une droite . On suppose dans la suite : $m \in \mathbb{R} | \{ — 1 \,;0 \}$.

2°) Démontrer que A (0 ; — 1) est le seul point commun à toutes les courbes $\mathscr{C}_m$, et qu'elles sont tangentes en A .

3°) Déterminer les valeurs de m telles que $\mathscr{C}_m$ ait trois asymptotes .

4°) Calculer $\alpha \neq 0$ tel que $f'(\alpha) = 0$. Déterminer les valeurs de m telles que $f(\alpha)$ soit un minimum de f ; un maximum .

5°) Soit $M[\alpha \,;\, f(\alpha)]$. Déterminer E, ensemble des points M quand m varie .

6°) *Tracer, dans un même repère, la courbe E et les courbes $\mathscr{C}_m$ correspondant à*

$m \in \{ -2 \,;\, -\frac{1}{2} \,;\, 3 \}$.

Exercice37

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$ *et* $\mathscr{C}$ *sa courbe .*

1°) *Etudier le signe de* $x^2 - 6x + 5$ *suivant les valeurs de x .*

2°) *En déduire l'expression de f sans valeur absolue .*

3°) *Etudier la continuité et la dérivabilité de f en particulier aux points d'abscisses 1 et 5 .*

$\mathscr{C}$ *admet-elle des tangentes en ces points ?*

4°) *Démontrer que la droite D d'équation x = 3 est un axe de symétrie de* $\mathscr{C}$.

5°) *Etudier les variations de f .*

6°) *Démontrer que les droites d' équation* $y = x - 3$ *et* $y = -x + 3$ *sont des asymptotes à* $\mathscr{C}$.

7°) *Déterminer les coordonnées des points A et B , intersections de* $\mathscr{C}$ *avec ses deux asymptotes .*

8°) *Montrer que f réalise une bijection de* $[5 \,;\, +\infty[$ *vers un intervalle à déterminer .*

9°) *Représenter* $\mathscr{C}$.

10°) *Pour* $x \in [5 \,;\, +\infty[$, *représenter la courbe de* f^{-1} .

Exercice 38

Soit f : $f : x \mapsto \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{x}$

1°) *f est-elle dérivable en 1 ? Calculer la dérivée de f là où elle est définie .*

2°) *Pour* $x \geq 1$, *mettre f (x) sous la forme :* $f(x) = \frac{x}{2} - 1 + \varepsilon(x)$ *où* $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$.

Que peut-on en conclure ?

3°) *Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 39

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$.

1°) *Déterminer l'ensemble de définition* D_f

2°) *Démontrer que :* $\forall x \in D_f$, $f(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$.

3°) *Démontrer que la fonction f est impaire .*

4°) *Etudier la continuité de f .*

5°) *Calculer* $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. *Que peut-on en déduire ?*

6°) Sur quelle partie de D_f la fonction f est-elle dérivable ? Déterminer sa fonction dérivée f ' .

7°) Etablir le tableau de variation de f .

8°) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f dans un repère orthonormal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) (unité : 5 cm) .

Exercice 40

*Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm sur (O*x*) , 1 cm sur (O*y*) .*

1°) Etudier la fonction f (limites, variations) .

2°) a) Déterminer les réels a, b, c et d tels que, pour tout réel $x \neq 1$, $f(x) = ax + b + \dfrac{cx + d}{(x-1)^2}$.

b) En déduire que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

c) Préciser la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ et les coordonnées du point I commun à la courbe $\mathscr{C}$ et à la droite $\mathscr{D}$.

3°) Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

4°) a) Déterminer l'abscisse du point J de la courbe $\mathscr{C}$, où la tangente est parallèle à $\mathscr{D}$, puis l'équation de cette tangente . Tracer cette tangente T .

b) En déduire graphiquement, suivant les valeurs de p, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x + p$.

5°) On se propose de retrouver par le calcul le résultat trouvé au 4°.

a) Montrer que les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation

$y = x + p$ sont les solutions de l'équation (E) : $(p + 2)x^2 + x(-2p - 7) + p + 4 = 0$.

b) Trouver, suivant les valeurs de p , le nombre de solutions de l'équation (E) .

c) Pour quelles valeurs de p la courbe $\mathscr{C}$ et la droite d'équation $y = x + p$ ont-elles deux points communs M et N ?

d) Dans ce cas, calculer, en fonction de p, l'abscisse du milieu P de [MN] .

e) Montrer que lorsque p varie, le point P appartient à la courbe $\mathscr{C}'$ d'équation

$$y = x + \frac{7 - 4x}{2x - 2}.$$

Exercice 41

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x(x-2)}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x + \sqrt{|x^2 - x|} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$)(unité : 1 cm)

1°) a) Déterminer D_f et calculer les limites de f aux bornes de D_f .

b) Etudier la continuité de f en 0 .

c) Etudier la dérivabilité de f en $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$ .Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses 0 et 1 ?

d) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0 , 1\}$ et calculer f ' (x) dans les intervalles où f est dérivable .

e) Résoudre dans]0 ;1[l'inéquation : $2\sqrt{x - x^2} + 1 - 2x \leq 0$.

En déduire le signe de f ' (x) sur]0 ;1[puis étudier son signe sur les autres intervalles . Dresser le tableau de variation de f .

2°) a) Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ en + ∞ . Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et Δ sur]1 ; + ∞ [.

b) Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique $\mathscr{D}$ en — ∞ . Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$ sur] — ∞ ; 0 [.

3°) Soit g la restriction de f à l'intervalle] 1 ; + ∞ [.

a) Montrer que g définit une bijection de I =] 1 ; + ∞ [sur un intervalle J à préciser .

b) La bijection réciproque g^{-1} est-elle dérivable sur J ? Calculer $g^{-1}{}'(2)$.

c) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

4°) Construire $\mathscr{C}_f$, ainsi que $\mathscr{C}_{g^{-1}}$ dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) .

Exercice 42

Soit la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Partie A .

1°) Déterminer le domaine de définition de f . On le notera D_f .

2°) Montrer que, pour tout $x \in D_f$, on a f (x) > 0 .

3°) Etudier la parité de f . Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}_f$ courbe représentative de f dans un repère orthonormé ?

4°) Calculer f ' (x) puis étudier le signe de f ' (x) pour x > 1 .

En déduire le tableau de variation de f pour x > 1 . Construire $\mathscr{C}_f$.

Partie B .

La fonction numérique g est définie par : $g(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$.

1°) Donner l'ensemble de définition de g .

2°) Etudier la parité de g .

3°) La droite (D) a pour équation y = x . Déterminer les coordonnées des points d'intersection

de (D) et de la courbe représentative de g .

4°) Calculer g ' (x) et exprimer g ' (x) en fonction de f (x) de A) .

5°) Soit h la fonction définie sur]1 ; + ∞ [par h(x) = g (x) .

a) Donner le tableau de variation de h .

b) Montrer que h est une bijection de]1 ; + ∞ [sur un intervalle que l'on précisera .

c) Tracer la courbe représentative de h .

d) Tracer la courbe représentative de h^{-1} dans le même repère .

Exercice 43

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin 2x}{1 + \sin x}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition D de f et montrer que f est périodique .

2°) Montrer que, pour tout $x \in D$, on a : $\pi - x \in D$ et $f(\pi - x) = -f(x)$.

En déduire que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) admet le point A ($\dfrac{\pi}{2}$;0) pour centre de symétrie .

3°) Etudier f sur l'intervalle $]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}]$

4°) Tracer la courbe $\mathscr{C}$. Construire la tangente en A à $\mathscr{C}$.

Exercice 44

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{\sin x - 1}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition D de f et montrer que f est périodique .

2°) Montrer que, pour tout $x \in D$, on a : $\pi - x \in D$ et $f(\pi - x) = f(x)$.

En déduire que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) admet la droite : $x = \dfrac{\pi}{2}$ pour axe de symétrie .

3°) Etudier f sur l'intervalle $[-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}[$.

4°) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 45

Soit m un réel non nul, f_m la fonction définie par : $f_m(x) = x + m \sin x$.

1°) Montrer que O est centre de symétrie pour $\mathscr{C}_m$.

2°) Montrer que l'on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_m(x)}{x} = 1$. Interprétation géométrique?

3°) a) Etudier f_1 sur $[0 ; \pi]$.

Tracer la courbe représentative Γ_0 de la restriction de f_1 à $[-\pi ; \pi]$.

b) Soit Γ_k l'ensemble des points de $\mathscr{C}_1$ qui satisfont à : $(2k - 1)\pi \leq x \leq (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Montrer que Γ_k se déduit de Γ_0 par une translation de vecteur $2k\pi(\vec{i} + \vec{j})$.

c) En déduire le tracé de la courbe représentative de la restriction de f_1 à $[-\pi ; 3\pi]$.

4°) Etudier f_{-2} sur $[0 ; \pi]$.

Tracer la courbe représentative de la restriction de f_{-2} à $[-\pi\ ;\ 3\pi]$.

Exercice 46

Soit la fonction $f : x \mapsto x \sin x$.

1°) Montrer que la droite $y'y$ est un axe de symétrie pour la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f .

2°) Déterminer la fonction dérivée f' .

3°) a) Tracer la courbe représentative de la fonction tan pour étudier graphiquement le signe de $\tan x + x$ quand x varie de 0 à 2π .

b) En déduire le tableau de variation de f sur $[0\ ;\ 2\pi]$.

4°)a) Tracer sur un autre graphique les droites d'équation $y = x$ et $y = -x$.

b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est tangente à chacune de ces deux droites . Préciser les coordonnées des points de contact .

c) Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_1$ de la restriction de f à l'intervalle $]-2\pi\ ;\ 2\pi]$.

Construire les tangentes à $\mathscr{C}_1$ aux points d'intersection avec l'axe $x'x$.

Exercice 47

1°) Soit la fonction g définie sur $[0\ ;\ \pi]$ par : $g(x) = 1 - 2\cos x$.

Déterminer le signe de g sur $[0\ ;\ \pi]$.

2°) Soit la fonction f définie par : $\dfrac{1 + \cos 3x}{\cos^3 x}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition D_f .

b) Montrer qu'on peut réduire l'étude de f à $D_f \cap [0\ ;\ \pi]$.

c) Dresser le tableau de variation de f .

d) Construire la courbe $\mathscr{C}$ de f après avoir précisé les points d'intersection avec l'axe (Ox).

Exercice 48

Dans chacun des cas suivants déterminer le domaine de définition ; les limites aux bornes de D_f et la fonction dérivée de f :

1°/ a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 4}$ *, b)* $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 2}$ *;c)* $f(x) = \dfrac{3x - 8}{(x-1)^2}$

2°/ a) $f(x) = -3x^3 + 6x^2 - 5x + 1$ *;b)* $f(x) = -2x^2 - 7x + 3$ *c)* $f(x) = \dfrac{3x^3 - 2x^2 - 1}{x - 1}$ *; d)* $f(x) = \dfrac{3}{2x - 1}$

Exercice 49

Etudier la parité des fonctions suivantes :

1°/ a)f(x)=2x+5 ; b) $f(x) = x^3 - 6x$ *;c)* $f(x) = x^2 - 3$

2°/ a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ *;b)* $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$ *,c)* $f(x) = x + \sqrt{x}$

3°/ a) $f(x) = |x| - 2$ *;b)* $f(x) = x(x^2 - 1)$

Exercice 50

Soit f une onction et (C) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1°/ Montrer que (Δ) est un axe de symétrie pour (C).

a) $f(x)=x^2-4x-1$; $(\Delta) : x=2$

b) $f(x)=-x^2-2x+1$; $(\Delta):x=-1$

c) $f(x)=|x+2|$; $(\Delta) : x=-2$

d) $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$; $(\Delta) :x=1$

2°/ Montrer que le point Ω est un centre de symétrie pour (C).

a) $f(x)=\frac{3x}{x+1}$; $\Omega\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$; *b)* $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$; $\Omega\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$

c) $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-3}$; $\Omega\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; *d)* $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$; $\Omega\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

e) $f(x)=\frac{2x}{1-x}$; $\Omega\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

Exercice 51

Soit $f(x)=\frac{-x^2+5x-4}{x-2}$

1) *Déterminer* D_f.
2) *Monter qu'il existe trois réels a ; b et c tels que pour tout réel appartenant à* D_f *on a :*

   $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$.
3) *Déterminer alors les asymptotes à la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.*
4) *Etudier les variations de f. Dresser son tableau de variation.*
5) *Construire la courbe* (C_f)

Exercice 52

Soit f une fonction et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal. Déterminer le domaine de définition de f et la tangente à (C) au point d'abscisse a. Puis trouver les asymptotes à (C).

a) $f(x)=\sqrt{2x-3}-x$ *et a=2*

b) $f(x)=2x-1+\frac{1}{x-2}$ *et* $a=-\frac{1}{4}$

c) $f(x)=\frac{2x}{x-3}$ *et a=0*

d) $f(x)=\frac{x}{x^2-x-2}$ *et a=-2*

Exercice 53

Soit $f(x)=2x^3-x^2+2x+6$

a) *Déterminer les limites de f.*
b) *Calculer la dérivée de f puis dresser son tableau de variations.*

Exercice 54

Soit $f : x \mapsto \frac{x^3+2x^2+4}{(x+1)^2}$ *et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) *Montrer qu'il existe trois réels a ;b et c tels que* $f(x)=ax+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}$.
2) *Etudier les limites de f*
3)
   a) *Calculer f'(x) puis montrer que* $f'(x)=\frac{(x-1)(x^2+4x+8)}{(x+1)^3}$
   b) *Etudier le signe de f ' (x). Puis en déduire le tableau de variations de f.*
   c) *En déduire le signe de f suivant les valeurs de x.*

d) *Montrer que la droite (D) d'équation y=x est une asymptote à C*
e) *Montrer que C admet une asymptote vericale que vous préciserez.*

4) *Donner une équation cartésienne de la tangente T à C au point d'abscisse 0.*
5) *Construire (C,) ;(D)   et T sur le même graphique? On prendra pour unité 2 cm*

PRIMITIVES-FONCTONS LOGARITHMIQUES ET EXPONENTIELLES

I)PRIMITIVES

1) Activité

Déterminer dans chacun des cas suivants une fonction F dérivable sur un intervalle que l'on précisera telle que $F'(x) = f(x)$.

1) f(x) =2　　*2) f(x) = x*　　*3) f(x) = $\frac{1}{\sqrt{x}}$*　　*4) f(x) = cos x*　　*5) f(x) = sin x*

Solution

1) f(x) =2　$\boxed{F(x) = 2x \quad \text{F est dérivable sur IR et} \quad F'(x) = 2}$.

2) f(x) = x　$\boxed{F(x)= \frac{x^2}{2} + \sqrt{7} \quad \text{F est dérivable sur IR et} \quad F'(x) = x}$.

3) f(x) = $\frac{1}{\sqrt{x}}$　$\boxed{F(x) = 2\sqrt{x} - 100 \quad \text{F est dérivable sur }]0\,;+\infty[\text{ et } F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}}$.

4) f(x) = cos x　$\boxed{F(x) = \sin x + 2 \quad \text{F est derivable sur IR et } F'(x) = \cos x}$.

5) f(x) = sin x　$\boxed{F(x) = -\cos x + 63 \quad \text{F est dérivable sur IR et } F'(x) = \sin x}$.

2) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle K. On appelle primitive de f sur K toute fonction F dérivable sur K telle que $F'(x) = f(x)$.

Exemple

x→ $2\sqrt{x}$ -100 est une primitive de x→ $\frac{1}{\sqrt{x}}$ sur]0 ;+∞[.

x→2x est une primitive de x→2 sur IR .

3)Condition d'existence d'une primitive

Toute fonction continue sur un intervalle K admet une primitive sur K.

Remarque

Soit f une fonction définie sur un intervalle K.

- ***Si f n'est pas continue sur K, elle peut admettre ou ne pas admettre de primitives sur K.***
- ***Si f est continue sur K, elle admet une admet une primitive sur K mais on ne sait pas toujours en donner une formule explicite.***

4)Ensemble des primitives d'une fonction

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle K.

- ***Pour tout réel c, la fonction x→F(x) + c est une primitive de f sur K.***
- ***Toute primitive de f sur K est de la forme x→F(x) + c , c ∈ IR.***

Démonstration

1) Soit c un nombre réel. La fonction x→F(x) + c est dérivable sur K et a la même dérivée que la fonction x→F(x) .Donc, la fonction x→F(x) + c est une primitive de f sur K.

2) Soit G une primitive de f sur K. La fonction G – F est dérivable sur K et on a :

$\forall x \in K$, $(G-F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$; donc, G – F est une fonction constante sur K. On en déduit que G est de la forme $x \to F(x) + c$, où $c \in IR$.

Exercice d'application

Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur K :

1) $f(x) = 3x^2$ K = IR 2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sin x$ K = IR 3) $f(x) = \cos x + x$ K = IR

Solution

1) $\boxed{F(x) = x^3 + c \ , c \in IR}$. 2) $\boxed{F(x) = 2\sqrt{x} - \cos x + c \ , c \in IR}$. 3) $\boxed{F(x) = \sin x + \frac{x^2}{2} + c \ , c \in IR}$.

5)Primitive d'une fonction vérifiant une condition initiale

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle K.y_0 est un nombre réel et

x_0 est un élément de K. Il existe une seule primitive de f sur K qui prend la valeur y_0 en x_0 .

Cette primitive est la fonction $x \to F(x) - F(x_0) + y_0$.

Démonstration

Soit F une primitive de f sur K .Toute primitive G de f sur K est telle que :

$\forall x \in K$, $G(x) = F(x) + c$, $c \in IR$. $\boxed{\text{On a: } G(x_0) = y_0}$.

$G(x_0) = F(x_0) + c = y_0 \iff \boxed{c = - F(x_0) + y_0}$.

$\boxed{\text{La fonction } x \to F(x) - F(x_0) + y_0 \text{ est la primitive de } f \text{ sur } K \text{ qui prend la valeur } y_0 \text{ en } x_0}$.

$\boxed{\text{En plus elle est unique}}$.

Exercice d'application

Déterminer la primitive F sur IR de f(x) = cos x qui prend la valeur -1 pour x = $\frac{\pi}{2}$.

De même pour f(x) = sin x qui prend la valeur $\sqrt{3}$ pour x = 0.

Solution

$f(x) = \cos x$ donc $\boxed{F(x) = \sin x + c}$, $c \in IR$. $F(\frac{\pi}{2}) = -1$

$F(\frac{\pi}{2}) = -1 \iff \sin\frac{\pi}{2} + c = -1 \iff \boxed{c = -2}$

$\boxed{\text{La primitive de } f \text{ sur IR qui prend la valeur -1 en } \frac{\pi}{2} \text{ est la fonction } x \to \sin x - 2}$.

$f(x) = \sin x$ $\boxed{F(x) = -\cos x + c}$, $c \in IR$. $F(0) = \sqrt{3}$

$F(0) = \sqrt{3} \iff -\cos 0 + c = \sqrt{3} \iff \boxed{c = 1 + \sqrt{3}}$

$\boxed{\text{La primitive de } f \text{ sur IR qui prend la valeur 0 en } \sqrt{3} \text{ est la fonction } x \to -\cos x + 1 + \sqrt{3}}$

6) Primitives de fonctions élémenyaires

La connaissance des dérivées des fonctions élémentaires permet de dresser le tableau suivant où c désigne un nombre réel.

Fonction f	Primitives de f	Sur l'intervalle
$x \to a$, $a \in IR$	$x \to ax + c$	IR
$x \to x^n$, $n \in N^*$	$x \to \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	IR
$x \to \frac{1}{x^n}$, $n \in N \backslash \{1\}$	$x \to \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]-\infty; 0[\cup]0 ; +\infty[$
$x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \to 2\sqrt{x} + c$	$]0 ;+\infty[$
$x \to \sqrt{x}$	$x \to \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$	$]0 ;+\infty[$
$x \to x^r$; $r \in Q \backslash \{-1\}$	$x \to \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$[0 ;+\infty[$ si $r \geq 0$. $]0 ;+\infty[$ si $r < 0$
$x \to \sin x$	$x \to -\cos x + c$	IR
$x \to \cos x$	$x \to \sin x + c$	IR
$x \to 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \to \tan x + c$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$, $k \in Z$

7) Formules de primitives

Fonction f	Primitives de f
$x \to au'$, $a \in IR$	$x \to au + c$
$x \to u'v + uv'$	$x \to uv + c$
$x \to \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$x \to \frac{u}{v} + c$
$x \to u'u^n$, $n \in N$	$x \to \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$
$x \to \frac{u'}{u^n}$, $n \in N \backslash \{1\}$	$x \to \frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} + c$
$x \to \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$x \to 2\sqrt{u} + c$
$x \to u'\sqrt{u}$	$x \to \frac{2}{3}u\sqrt{u} + c$
$x \to u'u^r$, $r \in Q \backslash \{-1\}$	$x \to \frac{u^{r+1}}{r+1} + c$
$x \to u'\cos u$	$x \to \sin u + c$
$x \to u'\sin u$	$x \to \cos u + c$
$x \to \frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$	$x \to \tan u + c$
$x \to v'ou \times u'$	$x \to vou + c$

8)Détermination pratique des primitives

a)Utilisation directe des formules de primitives

Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur I :

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + \frac{1}{x^2}$ $I =]0; +\infty[$

2) $f(x) = x + \sin x$ $I = IR$

3) $f(x) = \cos x \sin^3 x$ $I = IR$

4) $f(x) = \frac{1}{x^5}$ $I =]0; +\infty[$

5) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $I = IR$

6) $f(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x)^4}$ $I =]-2;0[$

Solution

1) $F(x) = \frac{x^4}{4} + 3\left(\frac{x^3}{3}\right) - 5\left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{x} + c = \boxed{\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{x} + c}$, $c \in IR$.

2) $\boxed{F(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + c}$, $c \in IR$.

3) $\boxed{F(x) = \frac{\sin^4 x}{4} + c}$, $c \in IR$.

4) $\boxed{F(x) = \frac{-1}{4x^4} + c}$, $c \in IR$.

5) $\boxed{F(x) = \frac{1}{2}(2\sqrt{1+x^2}) + c = \sqrt{1+x^2} + c}$, $c \in IR$

6) $\boxed{F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{3(x^2+2x)^3}\right) + c = \frac{-1}{6(x^2+2x)^3} + c}$, $c \in IR$

Propriété

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle K.

On a f(ax + b) a pour primitive $\frac{1}{a}F(ax+b) + c$, $c \in IR$.

Exemple

$x \to \sin(2x+3)$ a pour primitives $x \to \frac{-1}{2}\cos(2x+3) + c$, $c \in IR$.

$x \to \cos(5x+7)$ a pour primitives $x \to \frac{1}{5}\sin(5x+7) + c$, $c \in IR$.

Exercice d'application

g est la fonction définie sur $[-\pi ; \pi]$ par : $g(x) = \cos x - x$

1) Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

2) Montrer que $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

3) Donner le signe de g(x) sur $[-\pi ; \pi]$.

4) Déterminer la primitive G de g sur $[-\pi ; \pi]$ qui s'annule pour $x = 0$ et établir le tableau de variation de G.

SOLUTION

1)g est <u>continue</u> sur $[-\pi ; \pi]$ comme somme de deux fonctions continues sur , et a fortiori sur cet intervalle (à savoir $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto -x$).

g est également dérivable sur $[-\pi ; \pi]$ pour les mêmes raisons et, pour tout x de cet intervalle,

$g'(x) = -\sin x - 1 = -(\sin x + 1)$ est négatif (puisque sin x est toujours supérieur à -1 sur) : g est donc <u>strictement décroissante</u> sur $[-\pi ; \pi]$.

Etant continue et strictement monotone sur $[-\pi ; \pi]$, g réalise une bijection de cet intervalle vers son image par g, à savoir $[g(\pi) ; g(-\pi)] = [-1-\pi ; -1+\pi) = J$. Or $0 \in J$ donc 0 a un antécédent unique par g, en d'autres termes l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique α dans $[-\pi ; \pi]$.

2) $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 < 0$ et $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} > 0$. g étant continue sur $\left[\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{4}\right]$, l'équation $g(x) = 0$ admet, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, au moins une solution dans $\left[\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{4}\right]$. Comme par ailleurs, d'après la question précédente, on savait que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans $[-\pi ; \pi]$, il en résulte que cette solution α appartient nécessairement à $\left[\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{4}\right]$.

3) Le tableau de variation de g sur $[-\pi ; \pi]$ est donc le suivant :

x	$-\pi$	α	π
g	$-1+\pi$	0	$-1-\pi$

Il en résulte que g est positive $[-\pi ; \alpha]$ et négative sur $[\alpha ; \pi]$.

4) On a : $G(x) = \sin x - \frac{x^2}{2} + c$. (Appliquer les primitives usuelles). $G(0) = 0 \Rightarrow c = 0$. Donc finalement G est la fonction définie sur $[-\pi; \pi]$ par : $G(x) = \sin x - \frac{x^2}{2}$.

Le signe de G′, donc de g, a été trouvé à la question précédente. D'où le tableau :

x	$-\pi$		α		π
g			$G(\alpha)$		
	$-\frac{\pi^2}{2}$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\frac{\pi^2}{2}$

$G(\alpha) = \sin \alpha - \frac{\alpha^2}{2}$. Or, $\cos \alpha = \alpha$ et $\alpha \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$, donc $\sin \alpha > 0$, d'où $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \alpha^2}$.

Par conséquent : $G(\alpha) = \sqrt{1 - \alpha^2} - \frac{\alpha^2}{2}$.

II)Fonctions logarithmiques

1) Logarithme népérien

On appelle logarithme népérien la primitive de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ sur]0 ; +∞[et qui prend la valeur 0 pour x = 1. Elle est notée ln. Le logarithme népérien d'un nombre réel strictement positif x est noté ln x.

2)Conséquences de la définition

Soit $f(x) = \ln x$. On a les propriétés suivantes :

- $D_f =]0 ; +\infty[$
- $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $\ln 1 = 0$
- ***lnX existe si et seulement si $X > 0$.***

Exercice d'application

Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f :

1) $f(x)) = \ln(1 - 2x)$ *2)* $f(x) = \ln(|x|)$ *3)* $f(x) = \ln(x^2)$ *4)* $f(x) = \ln\left(\left|\frac{2x-1}{1-3x}\right|\right)$.

Solution

1) $f(x)) = \ln(1 - 2x)$ *f(x) existe ssi* $1 - 2x > 0$. $\boxed{1 - 2x > 0 \text{ donc } x < \frac{1}{2} .\ D_f =]-\infty; \frac{1}{2}[}$.

2) $f(x) = \ln(|x|)$ $\boxed{f(x) \text{ existes si } x \neq 0 .\quad D_f = IR\backslash\{0\}.}$

3) $f(x) = \ln(x^2)$ $\boxed{f(x) \text{ existe ssi } x \neq 0 \quad D_f = IR\backslash\{0\}}$.

4) $f(x) = \ln\left(\left|\frac{2x-1}{1-3x}\right|\right)$. $\boxed{f(x) \text{ existe ssi } 2x - 1 \neq 0 \text{ et } 1 - 3x \neq 0 .\quad D_f = IR\backslash\left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}}$.

3)Dérivée de la fonction ln(u) et ln(|u|)

- ***Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle K alors ln(u) est dérivable sur K et*** $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.
- ***Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K sur lequel elle ne s'annule pas alors ln(|u|) est dérivable sur K et*** $(\ln(|u|))' = \frac{u'}{u}$.

Exercice d'application

Calculer $f'(x)$

1) $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$ 2) $f(x) = \ln(\frac{2x-1}{x+3})$ 3) $f(x) = \ln^2(3x+1)$ 4) $f(x) = \ln(|x+1|)$

Solution

1) $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$ $\boxed{D_f =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[\text{ . } f \text{ est dérivable sur } D_f \text{ et } f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}}$.

2) $f(x) = \ln(\frac{2x-1}{x+3})$ $\boxed{D_f =]-\infty; -3[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[\text{ , } f \text{ est dérivable sur } D_f \text{ et } f'(x) = \frac{7}{(x+3)(2x+1)}}$.

3) $f(x) = \ln^2(3x+1)$ $\boxed{D_f =]\frac{1}{3}; +\infty[\text{ , } f \text{ est dérivable sur } D_f \text{ et } f'(x) = \frac{6\ln(3x+1)}{3x+1}}$.

4) $f(x) = \ln(|x+1|)$ $\boxed{D_f = IR\backslash\{-1\} \text{ , } f \text{ est dérivable sur } D_f \text{ et } f'(x) = \frac{1}{x+1}}$.

Propriété

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b , on a :

1) lna = lnb <=> a = b ***2) lna > lnb <=> a > b***

3) lna < lnb <=> a < b ***4) lna < 0 <=> 0< a < 1***

5) lna > 0 <=> a > 1 ***6) lne = 1 avec e ≅ 2,718***

Propriété

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b , on a :

1) ln(ab) = lna + lnb ***2)*** $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$

3) $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$ ***4)*** $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$

5) $\ln(a^n) = n\ln(a) \quad \forall\ n \in N$ ***6)*** $\ln(a^p) = p\ln(a) \quad \forall\ p \in Z$

7) $\ln(a^r) = r\ln(a) \quad \forall\ r \in Q$ ***8)*** $\ln(a^{\frac{1}{q}}) = \frac{1}{q}\ln a \quad \forall\ q \in Z^*$

Démonstration

1) ln(ab) = lna + lnb

$(\ln ax)' = \frac{(ax)'}{ax} = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$ *d'où* $(\ln ax)' = \frac{1}{x}$. $\boxed{\text{Donc } \ln ax = \ln x + c \text{ , } c \in IR}$.

Si x = 1 alors lna = ln1 + c d'où $\boxed{c = \ln a\text{. On a : } \ln ax = \ln x + \ln a \text{ . Pour } x = b \text{, on obtient } \ln(ab) = \ln a + \ln b}$.

2) $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$

$1 = a \times \frac{1}{a}$ **ce** qui entraîne que $\boxed{\ln 1 = \ln(a \times \frac{1}{a}) = \ln a + \ln\frac{1}{a} \text{ donc } \ln a + \ln\frac{1}{a} = 0 \text{ d'où } \ln\frac{1}{a} = -\ln a}$.

3) $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$

$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ $\boxed{\text{ce qui entraîne que } \ln\frac{a}{b} = \ln(a \times \frac{1}{b}) = \ln a + \ln\frac{1}{b} = \ln a - \ln b \quad \text{d'où } \ln ab = \ln a + \ln b}$

4) $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$

$\ln a = \boxed{\ln(\sqrt{a})^2 = 2\ln(\sqrt{a}) \quad \text{d'où } \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a}$.

5) $\ln(a^n) = n\ln(a) \quad \forall \; n \in N$ **la démonstration se fera par récurrence**

Pour n = 0, on a $\ln(a^0) = \ln 1 = 0$ *et* $0 \times \ln a = 0$ *donc* $\boxed{\text{la relation est vraie pour } n = 0}$.

Supposons qu'elle est vraie à l'ordre n $\boxed{\text{c'est-à-dire } \ln(a^n) = n\ln(}a)$.

$\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a) = \ln(a^n) + \ln a = n\ln a + \ln a = \boxed{(n+1)\ln a}$ *.Donc la relation est vraie à l'ordre*

n+ 1. $\boxed{\text{D'où} \quad \ln(a^n) = n\ln(a) \quad \forall \; n \in N}$.

6) $\ln(a^p) = p\ln(a) \quad \forall \, p \in Z$

$\boxed{\text{Si } p \geq 0 \text{ alors } p \in N}$ *d'où* $\ln(a^p) = p\ln(a)$.

$\boxed{\text{Si } p \leq 0 \text{ alors } -p \geq 0}$. $\ln(a^p) = \ln(\frac{1}{a^{-p}}) = -\ln(a^{-p}) = -(-p)\ln a = p\ln a$ $\boxed{\text{. Donc } \ln(a^p) = p\ln(a) \quad \forall \, p \in Z}$.

7) $\ln(a^r) = r\ln(a) \quad \forall \; r \in Q$

$r \in Q \iff r = \frac{m}{n}$ *avec* $m \in Z$ *et* $n \in Z^*$. $\boxed{n\ln(a^r) = \ln(a^r)^n = \ln(a^{\frac{m}{n}})^n = \ln(a^m) = m\ln a}$.

donc $n\ln(a^r) = m\ln(a)$ $\boxed{\text{d'où } \ln(a^r) = \frac{m}{n}\ln(a) = r\ln a}$.

On a donc $\boxed{\ln(a^r) = r\ln(a) \quad \forall \; r \in Q}$.

8) $\ln(a^{\frac{1}{q}}) = \frac{1}{q}\ln a \quad \forall \, q \in Z^*$

$\ln a = \ln(a^{\frac{1}{q}})^q = q\ln(a^{\frac{1}{q}})$ *d'où* $\ln(a^{\frac{1}{q}}) = \frac{1}{q}\ln a$. *On a donc* $\ln(a^{\frac{1}{q}}) = \frac{1}{q}\ln a \quad \forall \, q \in Z^*$

3) <u>Limites</u>

- $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0^-$
- $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

- $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x}=-1$

Démonstration

- $\lim_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$

Sur]0 ; +∞[, la fonction ln est strictement croissante.Si elle est majorée sur]0 ; +∞[alors elle admettrait

Une limite finie en + ∞ c'est-à-dire $\lim_{x\to+\infty}\ln x = l$ *, l ∈ IR . Dans le cas général, on a :*

$\lim_{u\to+\infty}\ln u = l$. $\boxed{\text{On pose } u = 2x}$.

$\lim_{u\to+\infty}\ln u = l \iff \lim_{x\to+\infty}\ln 2x = l \iff \lim_{x\to+\infty}(\ln 2+\ln x) = l$

$\iff \ln 2 + \lim_{x\to+\infty}\ln x = l \iff \ln 2 + l = l \iff \ln 2 = 0$ *ce qui est absurde.*

Donc sur]0 ; +∞[la fonction ln n'est pas majorée $\boxed{\text{d'où } \lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty}$.

- $\lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$

Posons $x=\frac{1}{t}$ *.Puisque* $x=\frac{1}{t}$ *donc* $t=\frac{1}{x}$. $\boxed{\text{Si } x\to 0^+ \text{ alors } t\to+\infty}$.

$\boxed{\lim_{x\to 0^+}\ln x = \lim_{t\to+\infty}\ln\frac{1}{t} = \lim_{t\to+\infty} -\ln t = -(+\infty) = +\infty}$.

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0^+$

Soient f(x)= lnx et (c_f) *sa courbe représentative. La fonction f est deux fois dérivables sur]0 ; +∞[*

Et $f''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0 \quad \forall x \in]0\,;+\infty[$. $\boxed{\text{Donc } (c_f) \text{ est en tout point située au- dessous de sa tangente}}$.

$\boxed{\text{Une équation de la tangente à } (c_f) \text{ au point d'abscisse 1 est } y = x-1}$.

$\boxed{\text{D'où } \forall x \in]0\,;+\infty[\quad \ln x \le x-1}$.

On a x – 1 < x . Soit x un nombre réel x > 1 . x > 1 donc $\sqrt{x} > 1$.

On a : $0 < \ln x < x$ *donc* $0 < \ln\sqrt{x} < \sqrt{x}$ *.ce qui implique que* $0 < \frac{1}{2}\ln x < \sqrt{x}$.

$0 < \ln x < 2\sqrt{x}$ *donc* $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2\sqrt{x}}{x}$ *or* $x = (\sqrt{x})^2$ *.D' où* $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}} = 0^+$ *et* $\lim_{x\to+\infty} 0 = 0 = 0^+$ *donc d'après le théorème d'encadrement on a :*

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0^+}$$.

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\ln x}{x}} = \boxed{\frac{1}{0^+} = +\infty}$.

- $\boldsymbol{lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0^-}$

Posons $x = \frac{1}{t}$.*Puisque* $x = \frac{1}{t}$ *donc* $t = \frac{1}{x}$. $\boxed{Si\ x \to 0^+\ alors\ t \to +\infty}$.

$lim_{x\to 0^+} x\ln x = lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln\frac{1}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} -\frac{lnt}{t}$ = - × $0^+ = 0^-$

$\boxed{Donc\ lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0^-}$.

- $\boldsymbol{lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1}$ ***On utilisera le nombre dérivé***

$lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = lim_{x\to 1}\frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$ $\boxed{donc\quad lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1}$.

- $\boldsymbol{lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1}$

Posons $t = 1 + x$.*Puisque* $x = t - 1$*donc* $t = 1 + x$. $\boxed{Si\ x \to 0\ alors\ t \to 1}$.

$lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = lim_{t\to 1}\frac{\ln t}{t-1} = 1$ $\boxed{donc\ lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1}$.

- $\boldsymbol{lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x} = -1}$

Posons $t = -x$.*Puisque* $x = -t$ $\boxed{donc\ t = -x\ .\ Si\ x \to 0\ alors\ t \to 0}$.

$lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x} = lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{-t} = -\ lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t} = -1.$ $\boxed{Donc\ lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x} = -1}$.

Exercice d'application

Calculer les limites suivantes

1) $\boldsymbol{lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x} + \ln x)}$

2) $\boldsymbol{lim_{x\to+\infty}(x - \ln x)}$

3) $\boldsymbol{lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x-1}}$

4) $\boldsymbol{lim_{x\to 2}\frac{x}{x-2}\ln(x-1)}$

Solution

1) $\boldsymbol{lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x} + \ln x)}$

$lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x} + \ln x) =$ 1) $lim_{x\to 0^+}(\frac{1 + x\,lnx}{x}) = \frac{1+0^+}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ *donc* $\boxed{lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x} + \ln x) =}$ $\boxed{+\infty}$.

2) $\boldsymbol{lim_{x\to+\infty}(x - \ln x)}$

$lim_{x\to+\infty}(x - \ln x) = lim_{x\to+\infty} x(1 - \frac{lnx}{x}) = +\infty(1 - 0^+) = +\infty \times 1 = +\infty$

$\boxed{donc\ lim_{x\to+\infty}(x - \ln x) = +\infty}$.

3) $\boldsymbol{lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x-1}}$

$lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x-1} = lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x} \times \frac{x}{x-1} = 0^+ \times 1 = 0^+$ $\boxed{donc\quad lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x-1} = 0^+ = 0}$.

4) $\lim_{x\to 2} \frac{x}{x-2} \ln(x-1)$

On pose $u = x - 1$. $u = x - 1$ *donc* $x = u + 1$ $\boxed{\text{Si } x \to 2 \text{ alors } u \to 1}$.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x}{x-2} \ln(x-1) = \lim_{u\to 1} \frac{u+1}{u-1} \times \ln u = \lim_{u\to 1}(u+1) \times \frac{\ln u}{u-1} = 2 \times 1 = 2$$

$$\boxed{\text{Donc } \lim_{x\to 2} \frac{x}{x-2} \ln(x-1) = 2}$$.

***Primitives* de $\frac{u'}{u}$**

Soit u une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur K.

La fonction $\frac{u'}{u}$ admet pour primitive sur K la fonction $\ln|u|$.

Exemples

1) La fonction $x \to \frac{1}{x}$ *a pour primitive sur* $]-\infty; 0[$ *ou* $]0; +\infty[$ *la fonction* $x \to \ln|x|$.

2) La fonction $x \to \tan x$ *a pour primitive sur* $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ *la fonction* $x \to \ln\cos x$.

3) La fonction $x \to \frac{2x-3}{x^2-3x+2}$ *a pour primitive sur* $]1; 2[$ *la fonction* $x \to \ln(-x^2+3x-2)$.

4) *Etude de la fonction ln*

Soit f(x) = ln x. Soit (c_f) *sa courbe représentative.*

1) On a : $D_f =]0 ; +\infty[$

2) Etude des branches infinies de (c_f) **.**

$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ $\boxed{\text{donc } x = 0 \text{ est une AV à } (c_f)}$.

$\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ *et* $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$

$\boxed{\text{donc } (c_f) \text{ admet une branche parabolique de direction (ox) au voisinage de } +\infty}$.

3) *Dérivée*

La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ *et* $\boxed{f'(x) = \frac{1}{x}}$.

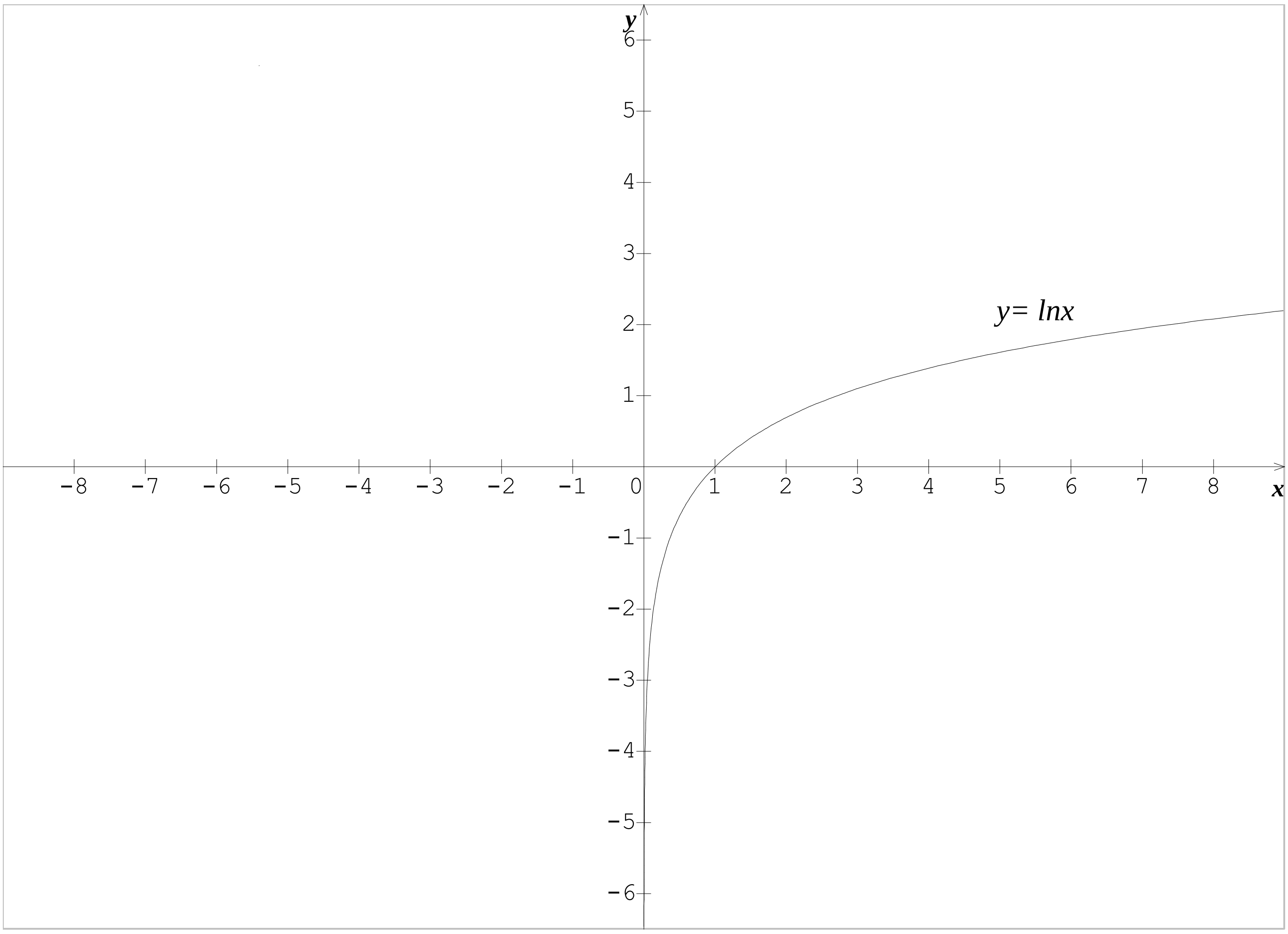
$f'(x) > 0 \quad \forall\ x \in]0 ; +\infty[$ $\boxed{\text{d'où la fonction } f \text{ est strictement croissante sur }]0 ; +\infty[}$.

x	0		1		e				$+\infty$
$f'(x)$		+	1	+	$\frac{1}{e}$		+		
$f(x)$	$-\infty$		0		1				$+\infty$

Une équation de la tangente à (c_f) au point d'abscisse 1 est $y = x - 1$.

Une équation de la tangente à (c_f) au point d'abscisse e est $y = \frac{x}{e}$.

4) Traçons (c_f)



La fonction ln est continue et strictement croissante sur]0 ; +∞[donc elle est bijective de]0 ; +∞[vers IR.

1 ∈ IR donc il existe un unique antécédent $\alpha \in$]0 ; +∞[tel que ln α = 1. On pose $\alpha = e$.

$\boxed{\text{D'où } \ln e = 1 \text{ avec } e \cong 2{,}718}$.

<u>III) Fonctions exponentielles</u>

<u>1)Fonction exponentielle</u>

La fonction exponentielle, notée Exp, est la bijection réciproque de la fonction ln.

Exp : IR→]0 ; +∞[

x→expx

L'exponentielle d'un nombre reel x est notée expx. De plus on a $\forall$ x $\in$ IR , expx >0.

NOTATION e^x

Montrons que exp x = e^x

Les fonctions ln et exp sont des bijections réciproques.

$\forall$ x $\in$ IR, ln(exp x) = x = exp(ln x) or x = ln(e^x) donc ln(exp x) = ln(e^x) d'où exp x = e^x.

$\boxed{\forall x \in IR, \quad \exp x = e^x}$.

On redéfinit la fonction exponentielle :

$$e : IR \to]0\,;+\infty[$$
$$x \to e^x$$

$\boxed{\text{De plus on a } \forall x \in IR,\ e^x > 0}$.

Propriété

Pour tout nombre réel a strictement positif et pour tout nombre réel b, on a

- $\ln a = b \iff a = e^b$
- $\ln a > b \iff a > e^b$
- $\ln a < b \iff a < e^b$

Propriété

Pour tous nombres réels a et b, on a

- $e^a = e^b \iff a = b$
- $e^a > e^b \iff a > b$
- $e^a < e^b \iff a < b$

Propriété

Pour tout nombre réel x, on a

- $e^x = 1 \iff x = 0$
- $e^x > 1 \iff x > 0$
- $e^x < 1 \iff x < 0$

Propriété

Pours tous nombres réels a et b, on a

1) $e^a \times e^b = e^{a+b}$

2) $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

3) $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

4) $(e^a)^r = e^{ar} \quad \forall r \in Q$

5) $(e^a)^p = e^{ap} \quad \forall p \in Z$

6) $(e^a)^n = e^{an} \quad \forall n \in N$

2)Dérivée de la fonction exponentielle

$$\ln :]0\,;+\infty[\to IR \qquad\qquad e : IR \to]0\,;+\infty[$$
$$x \to \ln x \qquad\qquad x \to e^x$$

La fonction ln est dérivable sur]0 ; +∞[(1) $(\ln x)' = \frac{1}{x} \neq 0$ ∀ x ∈]0 ; +∞[(2)

D'après '1) et (2) , la fonction exponentielle e est dérivable sur IR .

On a f(x) = y = lnx. ***y = lnx donc*** $e^y = e^{\ln x} = x$ ***d'où*** $e^y = x$.

$(f^{-1})'(y) = (e^y)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = e^y$ $\boxed{\text{donc } (e^y)' = e^y}$.

$\boxed{\text{On vient de montrer que : } \forall\, y \in IR,\ (e^y)' = e^y}$.

<u>Propriété</u>

La fonction $x \to e^x$ ***est dérivable sur IR et pour tout nombre réel x , on a :*** $(e^x)' = e^x$.

<u>Propriété</u>

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K alors e^u ***est dérivable sur K et*** $(e^u)' = u'\, e^u$.

Exercice d'application

Calculer la dérivée de la fonction f

1) $f(x) = e^{x^2+2x+1}$ 2) $f(x) = e^{\cos x}$ 3) $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-2}}$

Solution

1) $f(x) = e^{x^2+2x+1}$

$\boxed{D_f = IR}$. *f est dérivable sur IR et* $\boxed{f'(x) = (2x+2)\, e^{x^2+2x+1}}$.

2) $f(x) = e^{\cos x}$

$\boxed{D_f = IR}$. *f est dérivable sur IR et* $\boxed{f'(x) = -\sin x\, e^{\cos x}}$.

3) $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-2}}$

$\boxed{D_f = IR \setminus \{2\}}$. *f est derivable sur* $IR \setminus \{2\}$ *et* $\boxed{f'(x) = \frac{(x-2)-(x+1)}{(x-2)^2}\, e^{\frac{x+1}{x-2}} = \frac{-3}{(x-2)^2}\, e^{\frac{x+1}{x-2}}}$.

<u>3) Limites</u>

1) $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ 2) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ 4) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0^+$

5) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ 6) $\lim_{x\to-\infty} x\, e^x = 0^-$

Démonstration

La fonction exponentielle est une bijection strictement croissante de IR vers]0 ; +∞[donc

$\boxed{\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty}$.

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^{lnx}} = \boxed{lim_{x\to+\infty} e^{x\,-\,lnx} = lim_{x\to+\infty} e^{x(1\,-\,\frac{ln\,x}{x})} = +\,\infty}$.

4) $\boldsymbol{lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0^+}$

$lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = \boxed{\frac{1}{+\,\infty} = 0^+.}$

5) $\boldsymbol{lim_{x\to0} \frac{e^x\,-\,1}{x} = 1}$

$lim_{x\to0} \frac{e^x\,-\,1}{x} = \boxed{lim_{x\to0} \frac{e^x\,-\,e^0}{x\,-\,0} = e^0 = 1}$.

6) $\boldsymbol{lim_{x\to-\infty} x\,e^x = 0^-}$

Posons t = - x . $\boxed{\textit{Si } x \to -\infty \textit{ alors } t \to +\,\infty}$.

$lim_{x\to-\infty} x\,e^x = lim_{t\to+\infty} -t\,e^{-t} = \boxed{lim_{t\to+\infty} -\frac{t}{e^t} = -(0^+) = 0^-}$.

Exercice d'application

Calculer les limites suivantes

1) $\boldsymbol{lim_{x\to+\infty} \frac{3e^x\,-\,2}{5e^x\,+\,3}}$

2) $\boldsymbol{lim_{x\to+\infty}(x - e^x)}$

3) $\boldsymbol{lim_{x\to0} \frac{sin2x}{1 - e^x}}$

4) $\boldsymbol{lim_{x\to-\infty} \frac{ln(1\,+\,e^x)}{e^x}}$

Solution

1) $\boldsymbol{lim_{x\to+\infty} \frac{3e^x\,-\,2}{5e^x\,+\,3}}$

Posons $X = e^x$. $\boxed{\textit{Si } x \to +\infty \textit{ alors } X \to +\,\infty}$.

$lim_{x\to+\infty} \frac{3e^x\,-\,2}{5e^x\,+\,3} = lim_{X\to+\infty} \frac{3X\,-\,2}{5X\,+\,3} = \boxed{lim_{X\to+\infty} \frac{3X}{5X} = \frac{3}{5}}$.

2) $\boldsymbol{lim_{x\to+\infty}(x - e^x)}$

$lim_{x\to+\infty}(x - e^x) = \boxed{lim_{x\to+\infty} x(1 - \frac{e^x}{x}) = +\infty(-\infty) = -\infty}$.

3) $\boldsymbol{lim_{x\to0} \frac{sin2x}{1 - e^x}}$

$lim_{x\to0} \frac{sin2x}{1 - e^x} = lim_{x\to0} \frac{sin2x}{2x} \times \frac{2x}{1 - e^x} = \boxed{\lim_{x\to0} 1 \times \frac{2x}{-(\,e^x - 1)} = -2}.$

4) $\boldsymbol{lim_{x\to-\infty} \frac{ln(1\,+\,e^x)}{e^x}}$

Posons $X = e^x$. $\boxed{\textit{Si } x \to -\infty \textit{ alors } X \to +\,0}$.

$lim_{x\to-\infty} \frac{ln(1\,+\,e^x)}{e^x} = \boxed{lim_{X\to0} \frac{ln(1\,+\,X)}{X} = 1}$.

Primitives de $\boldsymbol{u'e^u}$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K.

La fonction $\boldsymbol{u'e^u}$ ***admet pour primitive sur K la fonction*** $\boldsymbol{e^u}$.

Exemples

1) Une primitive sur IR de la fonction $x \to xe^{-x^2}$ *est la fonction* $x \to -\frac{1}{2}e^{-x^2}$.

2)) Une primitive sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ *de la fonction* $x \to \frac{e^{tanx}}{cos^2x}$ *est la fonction* $x \to e^{tanx}$.

4)Etude de la fonction exponentielle

Soit f(x) = e^x **.** *Soit* (c_f) *sa courbe représentative.*

1) On a : $D_f = IR$

2) Etude des branches infinies de (c_f) **.**

$lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+ = 0$ *donc y = 0* $\boxed{\text{est une AH à } (c_f) \text{ en } -\infty.}$

$lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ *et* $lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $\boxed{\text{donc } (c_f) \text{ admet une branche parabolique de direction}}$ $\boxed{(oy)}$

au voisinage de $+\infty$.

3) Dérivée

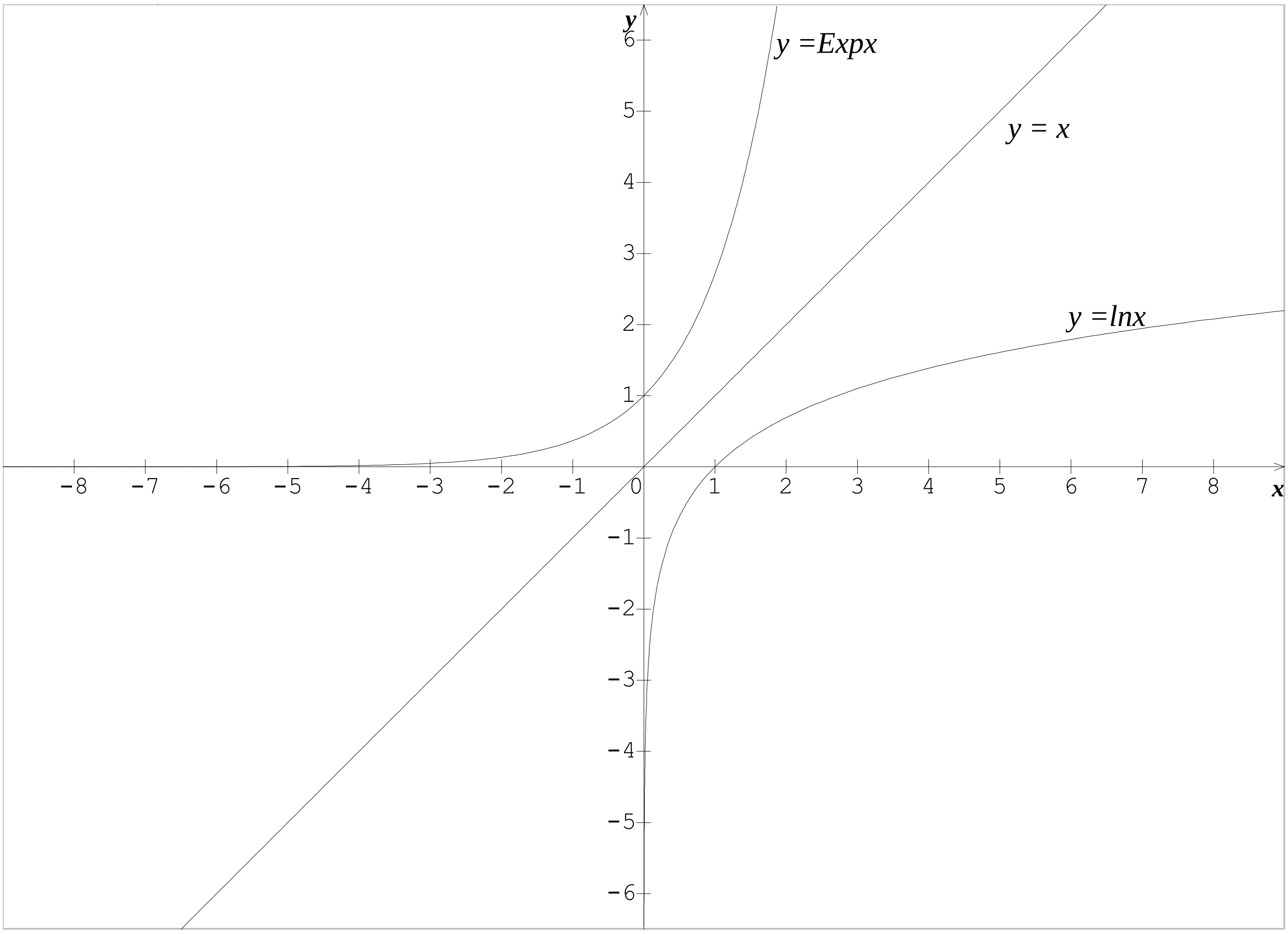
La fonction $x \to e^x$ *est dérivable sur IR et* $f'(x) = e^x$.

$f'(x) = e^x > 0 \ \forall x \in IR$ $\boxed{\text{donc } f \text{ est strictement croissante sur IR}}$.

x	$-\infty$		**0**		**1**		$+\infty$
$f'(x)$		+	**1**	+	**e**	+	
f(x)	**0**		**1**		**e**		$+\infty$

Les fonctions $x \to lnx$ *et* $x \to e^x$ *sont des bijections réciproques, leurs représentations graphiques sont symétriques par rapport à la première bissectrice* (Δ) *d'équation y = x.*

4)Traçons la courbe (c_f)



5) *Équations et inéquations avec logarithme*

Résoudre les équations et inéquations suivantes

1) $\ln(-2x + 1) = \ln(x + 4)$

2) $\ln(2x - 3) + 2\ln(x + 1) = \ln(6x - 3)$

3) $(\ln x)^2 - 6\ln x + 5 = 0$

4) $(\ln x)^3 - 7\ln x + 6 = 0$

5) $\ln(-x + 2) > \ln(x + 3)$

6) $\ln(x+ 2) + \ln(x + 4) < \ln(x + 8)$

7) $(\ln x)^2 + 2\ln x - 15 \leq 0$

Solution

1) ln(-2x + 1) = ln(x + 4)

L*'équation existe si et seulement si* $-2x + 1 > 0$ *et* $x + 4 > 0$*. D'où* $D_E =]-4; \frac{1}{2}[$ *où* D_E *est le domaine d'existence de l'équation.*

ln(-2x + 1) = ln(x + 4) =>-2x +1= x + 4 =>x = -1. Or -1 $\in D_E$

$\boxed{d'où\ S = \{-1\}}$.

2) ln(2x – 3) + 2ln(x + 1) = ln(6x – 3)

L*'équation existe si et seulement si 2x -3* > 0 *et x + 1*> 0 et $6x-3>0$*.D'où* $D_E =]\frac{3}{2};+\infty[$ *où* D_E *est le domaine d'existence de l'équation.*

ln(2x – 3) + 2ln(x + 1) = ln(6x – 3) =>(2x – 3)$(x+1)^2 = 6x-3$*=>*$2x^3 + x^2 - 10x = 0$

=>x = 0 ou x = 2 ou x = - $\frac{5}{2}$*. Or 2* $\in D_E$

$\boxed{D'où\ S = \{2\}}$.

3) $(\boldsymbol{lnx})^{\mathbf{2}} - \mathbf{6}\boldsymbol{lnx} + \mathbf{5} = \mathbf{0}$

L*'équation existe si et seulement si x*> 0*.D'où* $D_E =]0;+\infty[$ *où* D_E *est le domaine d'existence de l'équation.*

Posons X = lnx . $X^2 - 6X + 5 = 0$ *=>X = 1 ou X = 5.*

Lnx = 1 ou lnx = 5 => x = e ou x = e^5 *. Or e et* e^5 *appatiennent à* $]0;+\infty[$.

$\boxed{D'où\ S = \{e;\ e^5\}}$.

4)$(\boldsymbol{lnx})^{\mathbf{3}} - \mathbf{7}\ \boldsymbol{lnx} + \mathbf{6} = \mathbf{0}$

L*'équation existe si et seulement si x*> 0*.D'où* $D_E =]0;+\infty[$ *où* D_E *est le domaine d'existence de l'équation.*
Posons X = lnx . $X^3 - 7X + 6 = 0$ *=>X = 1 ou X = 2 ou X = -3.*
Lnx = 1 ou lnx = 2 ou lnx = -3 =>x = e ou x = e^2 *ou x =* e^{-3} *. Or e,* e^{-3} *et* e^5 *appatiennent à* $]0;+\infty[$.

$\boxed{D'où\ S = \{e;\ e^5;\ e^{-3}\}}$.

5) ln(-x + 2) $>$ ***ln(x + 3)***

L*'inéquation existe si et seulement si – x+ 2* > 0 $et\ x+3 > 0$*.D'où* $D_I =]-3;2[$ *où* D_I *est le domaine d'existence de l'inéquation.*
ln(-x + 2) $>$ *ln(x + 3) =>-x + 2>x +3=>x* $<$ *-* $\frac{1}{2}$ *=> x* $\in$ $]-\infty;-\frac{1}{2}[$

$]-\infty;-\frac{1}{2}[\cap]-3;2[=]-3;-\frac{1}{2}[$

$\boxed{d'où\ S =]-3;-\frac{1}{2}[}$.

6) ln(x+ 2) + ln(x + 4) $<$ ***ln(x + 8)***

L*'inéquation existe si et seulement si x+ 2* > 0 $et\ x+4 > 0\ et\ x+8 > 0$*.D'où* $D_I =]-2;+\infty[$ *où* D_I *est le domaine d'existence de l'inéquation.*

ln(x+ 2) + ln(x + 4) $<$ *ln(x + 8) =>(x + 2)(x + 4)* $<$ *x + 8=>* x^2*+ 5x <0 => x* $\in]-5;0[$.

$]-5;0[\ \cap]-2;+\infty[\ =]-2;0[$

$\boxed{d'où\ S =]-2;0[}$.

7) $(\boldsymbol{lnx})^2 + 2\,\boldsymbol{lnx} - 15 \leq 0$

L'*inéquation existe si et seulement si* $x > 0$.*D'où* $D_I =]0;+\infty[$ *où* D_I *est le domaine*

d'existence de l'inéquation.

Posons X = lnx . $X^2 + 2X - 15 = 0$ *=>X = -5 ou X = 3.*

$X^2 + 2X - 15 \leq 0$ <=> $-5 \leq X \leq 3$ <=> $-5 \leq lnx \leq 3$ <=> $e^{-5} \leq e^{lnx} \leq e^3$

<=> $e^{-5} \leq x \leq e^3$

$\boxed{D'où\ S = [e^{-5};\ e^3]}$.

5) *Équations et Inéquations avec exponentielle*

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1) $e^{x-3} = 4$

2) $e^{x+6} = -2$

3) $e^{3x} - 3e^{2x} - e^x + 3 = 0$

4) $3e^x + 5 - \frac{2}{e^x} = 0$

5) $3e^x - 7e^{-x} + 20 \leq 0$

6) $e^{x-3} < 4$

7) $e^{x+6} > -2$

8) $\frac{e^{2x} + 2}{e^{2x} - 1} \geq 2$

Solution

1) $\boldsymbol{e^{x-3} = 4}$

$e^{x-3} = 4$ => $lne^{x-3} = ln4$ => $x - 3 = ln4$ => $x = 3 + ln4$

$\boxed{D'où\ S = \{3 + ln4\}}$.

2) $\boldsymbol{e^{x+6} = -2}$

$e^{x+6} = -2$ *impossible car* $\forall\ x \in IR$, $e^{x+6} > 0$ *d'où* $S = \emptyset$.

3) $\boldsymbol{e^{3x} - 3e^{2x} - e^x + 3 = 0}$

Posons $X = e^x$

$X^3 - 3X^2 - X + 3 = 0$ => *X = -1 ou X = 1 ou X = 3 .*

e^x *= -1(impossible) ou* e^x *= 1 ou* e^x *= 3* => *x = 0 ou x = ln3*

$\boxed{D'où\ S = \{0; ln3\}}$.

4) $\boldsymbol{3e^x + 5 - \frac{2}{e^x} = 0}$

L'équation existe car $e^x > 0$ $\forall$ $x \in IR$.

Posons $X = e^x$. $3X + 5 - \frac{2}{X} = 0$ => $\frac{3X^2 + 5X - 2}{X} = 0$ => *X = -2 ou* $X = \frac{1}{3}$

e^x *= -2 (impossible) ou* $e^x = \frac{1}{3}$ =>*x = -ln3*

$\boxed{D'où\ S = \{-ln3\}}$.

5) $\boldsymbol{3e^{x} - 7e^{-x} + 20 \leq 0}$

Posons $X = e^{x}$.

$3X - \frac{7}{X} + 20 \leq 0 \quad => \frac{3X^2 - 7 + 20X}{X} \leq 0 \quad => \quad X \leq -7$ *ou* $0 < X \leq \frac{1}{3}$

$e^{x} \leq -7$ *impossible ou* $\quad 0 < e^{x} \leq \frac{1}{3} \quad => -\infty < x \leq -\ln 3$

$\boxed{D'où \quad S =]-\infty \ ; \ -\ln 3]}$.

6) $\boldsymbol{e^{x-3}} < 4$

$e^{x-3} < 4 \quad => \quad x - 3 < \ln 4 \quad => \quad x < 3 + \ln 4$.

D'où $\quad S =]-\infty \ ; \ 3 + \ln 4[$

7) $\boldsymbol{e^{x+6}} > -2$

$\forall x \in IR$, $e^{x+6} > 0 > -2$ $\quad \boxed{d'où \quad S = IR}$.

8) $\boldsymbol{\frac{e^{2x} + 2}{e^{2x} - 1} \geq 2}$

L'inéquation existe si et seulement si $e^{2x} - 1 \neq 0$ *donc* $x \neq 0$*.D'où* $D_I = IR\backslash\{0\}$ *où* D_I *est le domaine d'existence de l'inéquation.*

$\frac{e^{2x} + 2}{e^{2x} - 1} \geq 2 \quad => \quad \frac{e^{2x} + 1 - 2e^{2x} + 2}{e^{2x} - 1} \geq 0 \quad => \quad \frac{3 - e^{2x}}{e^{2x} - 1} \geq 0$

Posons $X = e^{2x}$

$\frac{3 - X}{X - 1} \geq 0 \quad => \quad 1 < X \leq 3 => 1 < e^{2x} \leq 3 => 0 < 2x \leq \ln 3$

$=> 0 < x \leq \frac{1}{2}\ln 3$

$\boxed{D'où \quad S =]0 \ ; \frac{1}{2}\ln 3[}$.

<u>***IV)Logarithme de bese a, a > 0 et a ≠ 1***</u>

<u>***1) Fonction logarithme de base a***</u>

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1. On appelle fonction logarithme de base a la fonction notée $\boldsymbol{\log_a}$ ***et définie par*** $\boldsymbol{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}}$.

$$\log_a : \ ]0 \ ; +\infty[\to IR$$

$$x \to \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$\boldsymbol{\log_a x}$ ***se lit logarithme de base a de x.***

Remarque

Soit $\boldsymbol{f(x) = \log_a x}$

On a $\boldsymbol{D_f =]0 \ ; +\infty[}$

$\boldsymbol{\log_e x = \ln x}$ ***d'où le logarithme népérien est le logarithme de base e.***

log_{10} est appelé le logarithme décimal et noté Log, on a : Logx = $log_{10}\, x = \frac{lnx}{ln10}$.

Définition

La fonction logarithme décimal, notée log, est la fonction : x → $\frac{lnx}{ln10}$.

Propriété

La fonction x→ $log_a\, x$ est dérivable sur]0 ; +∞[et $(log_a\, x)' = \frac{1}{x\, lna}$.

2) Dérivée de la fonction composée $log_a\, u$

Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle K alors $log_a\, u$ est dérivable sur K et $(log_a\, u)' = \frac{u'}{u\, lna}$.

Propriété

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1. Soient x et y deux éléments de]0 ; +∞[.

1) $log_a\, xy = log_a\, x + log_a\, y$ 2) $log_a \frac{1}{x} = -\, log_a\, x$

3) $log_a \frac{x}{y} = log_a\, x - log_a\, y$ 4) $log_a (x)^r = r\, log_a\, x \;\; \forall\, x \in Q$

5) $log_a\, x = b \iff x = a^b$

6) $log_a\, x = log_a\, y \iff x = y$

7) $log_a\, x > log_a\, y \iff \begin{cases} x > y \;\; si\; a > 1 \\ x < y \;\; si\;\; o < a < 1 \end{cases}$

Propriété

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs et différents de 1 et pour tout nombre réel x strictement positif, on a : $log_a\, x = log_a\, b \times log_b\, x$.

Cette égalité est appelée la formule de changement de base.

3)Fonction exponentielle de base a, a > 0

La fonction exponentielle de base a est la bijection réciproque de la fonction exponentielle de base a, elle est notée exp_a et définie par $exp_a\, x = a^x = e^{xlna}$

exp_a :]0; +∞[→ IR

x→ $exp_a\, x = a^x = e^{xlna}$

Propriété

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs et différents de 1 et pour tous nombres réels x et y, On a :

1) $a^x \times a^y = a^{x+y}$ 2) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ 7) $(a^x)^y = a^{xy}$

3) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ 4) $(ab)^x = a^x \times b^y$

5) $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^y}$ 6) $(a^x)^p = a^{xp} \quad \forall p \in Z$

Propriété

La fonction x→ a^x est dérivable sur IR et $(a^x)' = lna \times a^x$.

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K alors a^u est dérivable sur K et on a :

$$(a^u)' = u' \times lna \times a^u .$$

Propriété

La fonction x→ a^x est $\begin{cases} \text{strictement croissante si } a > 1 \\ \text{strictement décoissante si } 0 < a < 1 \end{cases}$

Propriété

- $a^x = a^y \iff x = y$
- $a^x > a^y \iff \begin{cases} x > y \text{ si } a > 1 \\ x < y \text{ si } o < a < 1 \end{cases}$

4) Fonction puissance

Soit α un nombre réel différent de 0. On appelle fonction puissance d'exposant réel α l'application

$$f_a : \ ]0; +\infty[\to IR$$
$$x \to x^\alpha$$

Propriété

La fonction x→ x^α est dérivable sur IR et $(x^\alpha)' = \alpha \times x^{\alpha-1}$.

Propriété

Soit u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle K alors u^α

est dérivable sur K et $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$.

Remarque : Nouvelles formes indéterminées .En tombant sur une des FI suivantes alors il faut lever l'indétermination.

$$1^\infty \quad , \quad 0^\infty \quad , \quad 0^0 \quad , \quad \infty^\infty \quad et \quad \infty^0$$

5)Croissance comparée de lnx , x^α, e^x

a) Croissace comparée de lnx et x^α

- ***En*** $+\infty$

$lim_{x\to+\infty} \frac{ln\, x}{x} = 0^+$ $\qquad lim_{x\to+\infty} \frac{ln\, x}{x^\alpha} = 0^+ \quad \forall \alpha > 0$

$lim_{x\to+\infty} \frac{x}{ln\, x} = +\infty$ $\qquad lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{ln\, x} = +\infty \quad \forall \alpha > 0$

En $+\infty$ ***, la fonction puissance l'emporte sur la fonction logarithme népérien.***

- ***En*** $\mathbf{0^+}$

$\boldsymbol{lim_{x\to 0^+} x\ ln\ x = 0^-}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ ln\ x = 0^-} \quad \forall\ \boldsymbol{\alpha} > 0$

En $\mathbf{0^+}$ ***, la fonction puissance l'emporte sur la fonction logarithme népérien.***

b) Croissance comparée de $\boldsymbol{e^x}$ ***et*** $\boldsymbol{x^{\alpha}}$

- ***En*** $+\infty$

$\boldsymbol{lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{\alpha}} = +\infty} \quad \forall\ \boldsymbol{\alpha} > 0$

$\boldsymbol{lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0^+}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^x} = 0^+} \quad \forall\ \boldsymbol{\alpha} > 0$

En $+\infty$ ***,la fonction exponentielle l'emporte sur la fonction puissance.***

- ***En*** $-\infty$

$\boldsymbol{lim_{x\to-\infty} x\ e^x = 0^-}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{lim_{x\to-\infty} x^{\alpha}\ e^x = 0^-} \quad \forall\ \boldsymbol{\alpha} > 0$

En $-\infty$ ***,la fonction exponentielle l'emporte sur la fonction puissance .***

Propriétés

Soit α un nombre réel strictement positif. On a :

- $\boldsymbol{lim_{x\to+\infty} \frac{ln\ x}{x^{\alpha}} = 0^+}$
- $\boldsymbol{lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ ln\ x = 0^-}$
- $\boldsymbol{lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{\alpha}} = +\infty}$
- $\boldsymbol{lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^x} = 0^+}$

Démonstration

1) $\boldsymbol{lim_{x\to+\infty} \frac{ln\ x}{x^{\alpha}} = 0^+}$

Posons $X = x^{\alpha}$.

$lim_{x\to+\infty} \frac{ln\ x}{x^{\alpha}} = lim_{x\to+\infty}\ \frac{1}{\alpha}\ \frac{ln\ x^{\alpha}}{x^{\alpha}} = \boxed{lim_{X\to+\infty}\ \frac{1}{\alpha} \frac{ln\ X}{X} = 0^+}$.

2) $\boldsymbol{lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ ln\ x = 0^-}$

Posons $X = x^{\alpha}$.

$lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ ln\ x = lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\alpha}[x^{\alpha}\ ln\ x^{\alpha}] = \boxed{lim_{X\to 0^+} \frac{1}{\alpha} X\ ln\ X = 0^-}$.

3) $\boldsymbol{lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^{\alpha}} = +\infty}$

Posons $X = \frac{x}{\alpha}$

$lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^{\alpha}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\alpha^{\alpha}} \left(\frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{\frac{x}{\alpha}}\right)^{\alpha} = \boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\alpha^{\alpha}} \left(\frac{e^X}{X}\right)^{\alpha} = +\infty.}$

4) $\boldsymbol{lim_{x\to +\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^x} = 0^+}$

$lim_{x\to +\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^x} = \boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^{\alpha}}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ = 0}$.

Exemples de calculs de limites

1) Déterminer la limite en + ∞ de f(x) = $\boldsymbol{\frac{e^x}{ln\,(x^2+1)}}$.

Solution

On a : ∀ x ∈ IR, $\frac{e^x}{ln\,(x^2+1)} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2+1} \times \frac{x^2+1}{ln\,(x^2+1)}$.

Or $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{ln\,(x^2+1)} = +\infty$

$\boxed{Donc\ \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{ln\,(x^2+1)} = +\infty}$.

2) Déterminer la limite en - ∞ de g(x) = $\boldsymbol{\sqrt{1-x}\ e^x}$

Solution

$\boxed{Posons\ X = -x}$. On a : $\sqrt{1-x}\ e^x = \sqrt{1+X}\ e^{-X} = X^{\frac{1}{2}} e^{-X} \sqrt{1+\frac{1}{X}}$

$\lim_{X\to +\infty} X^{\frac{1}{2}} e^{-X} = 0$ et $\lim_{X\to +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{X}} = 1$ $\boxed{donc\ \lim_{x\to -\infty} \sqrt{1-x}\ e^x = 0}$.

3) Déterminer la limite en 0 de h(x) = $\boldsymbol{\sqrt{x}\ ln(sinx)}$

On a : ∀ x ∈]0 ; $\frac{\pi}{2}$[, $\sqrt{x}\ ln(sinx) = \sqrt{\frac{x}{sinx}} \times (sinx)^{\frac{1}{2}} ln(sinx)$

Or $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{x}{sinx}} = 1$

De plus, en posant X = sinx, on : $\lim_{x\to 0^+} (sinx)^{\frac{1}{2}} ln(sinx) = \lim_{X\to 0^+} (X^{\frac{1}{2}} lnX) = 0$ $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ ln(sinx) = 0}$.

4) Déterminer la limite en + ∞ de r(x) = $\boldsymbol{\frac{e^{2x+1} - e^x}{x^2 - x + 1}}$

Solution

On a : ∀ x ∈ IR*, $\frac{e^{2x+1} - e^x}{x^2 - x + 1} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{e^{x+1} - 1}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$

Or: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x+1}-1}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = +\infty$ $\boxed{\text{donc } \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x+1}-e^x}{x^2-x+1} = +\infty}$.

Exercice d'application

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f (Préciser l'intervalle de définition I de la primitive).

1) $f(x) = \dfrac{6x-1}{3x^2-x+5}$ 2) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$; 3) $f(x)=\tan x$; 4) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$; 5) $f(x) = \dfrac{x\ln(x^2+1)}{x^2+1}$

6) $f(x)=\dfrac{3x^2+4x-25}{x^2+x-6}$ sur $]2;+\infty[$ (décomposer $f(x) = a + \dfrac{b}{x+3}+\dfrac{c}{x-2}$).

7) $g(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ sur $]2;3[$; 8) $f(x) = \dfrac{1}{1+\cos x}$; 9) $g(x) = 2xe^x + e^x x^2$;

10) $h(x) = \dfrac{1}{1-e^x}$; 11) $k(x)=2e^x(x-1+n)$, $n \in IN$; 12) $g(x) = \dfrac{1}{5-6e^x+e^{2x}}$;

13) $h(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$; 14) $f(x)= 2^x - xe^{x^2}$; 15) $g(x)= e^x\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\right)$;

16) $h(x)=\dfrac{3e^x}{e^x-e^{-x}}$; 17) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^x}$. 18) $g(x)=\dfrac{-4x^2+6x+2}{x-3}$

Exercice d'application

Soit f une fonction définie par : $f(x) = x + \dfrac{e^x}{2(e^x-2)}$.

1. *Déterminer le domaine de définition D_f de f .*
2. *Etudier les limites aux bornes de son ensemble de définition D_f .*
3. *a) Montrer que la droite D_1 d'équation : $y = x$ est une asymptote à la courbe représentative C_f de f . Préciser la position relative de C_f par rapport à D_1 .*

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+\dfrac{1}{2})\right]$. *En déduire l'existence d'une asymptote oblique D_2 à C_f .*

   Donner une équation de D_2 ; ainsi que la position de C_f par rapport à cette asymptote.

4. *Montrer que le point $I(\ln 2;\ln 2+\frac{1}{4})$ est centre de symétrie de C_f .*
5. *a) Montrer que f est dérivable sur D_f et calculer f'.*

   b) Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{(e^x-1)(e^x-4)}{(e^x-2)^2}$.

c) Etudier les sens de variation de f *sur* D_f .

d) Dresser le tableau de variation de f .

6. *Construire* C_f *dans un repère orthonormal* $(O;\vec{i};\vec{j})$.
7. *Soit* g *la restriction de* f *à l'intervalle* $]-\infty;\ 0]$.
   a) *Montrer que* g *réalise une bijection de* $]-\infty;\ 0]$ *vers un intervalle J à préciser.*
   b) *Calculer* $g(0)$.
   c) *Soit* g^{-1} *sa bijection réciproque. Etudier la dérivabilité de* g^{-1} *en* $-\frac{1}{2}$.

EXERCICES

Exercice1

Déterminer les primitives, en précisant sur quel(s) intervalle(s) elles sont définies, des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto x^3 - 2x + 1$ 2) $f : x \mapsto \sin 2x - 2\cos 2x$ 3) $f : x \mapsto \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$

4) $f : x \mapsto \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ 5) $f : x \mapsto \frac{4x+3}{(2x^2+3x+1)^3}$ 6) $f : x \mapsto \frac{1-x}{(x^2-2x+3)^2}$

7) $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ 8) $f : x \mapsto \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+2}}$ 9) $f : x \mapsto \sin x \cos^3 x$

10) $f : x \mapsto \sin 3x$ 11) $f : x \mapsto \frac{\cos x}{\sin^2 x}$ 12) $\frac{\tan x}{\cos^2 x}$ 13) $f : x \mapsto \left(\frac{x}{x^4+1}\right)^3$

14) $f : x \mapsto x\cos x^2$ 15) $f : x \mapsto 2x(x^2-1)^5$ 16) $f : x \mapsto \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ 17) $f : x \mapsto \tan^2 x$

18) $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 19) $f : x \mapsto \tan x + \tan^3 x$ 20) $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{\tan^2 x}$ 21) $f : x \mapsto \cos^3 x$

Exercice2

Déterminer la primitive F vérifiant $F(x_0) = y_0$ pour chacune des fonctions f définies par :

1) $f(x) = (2x-1)^3$ et $F(0) = 0$.

2) $f(x) = (2x-1)(x^2-x+1)^4$ et $F(1) = 1$.

3) $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}$ et $F(2) = 0$. 4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+8}}$ et $F(2) = 4$.

5) $f(x) = 3\sin\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2}$ et $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ 6) $f(x) = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $F(1) = 1$.

Exercice3

On considère la fonction f telle que :

$f(x) = a\cos x + b\cos^3 x$.

1) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

2) Comparer $f(x)$ et $f''(x)$.

3) En déduire les primitives de f .

Exercice4

1) Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

Montrer que la fonction $\frac{2}{3}u\sqrt{u}$ est une primitive sur I de la fonction $u'\sqrt{u}$.

2) Application : *Déterminer dans chacun des cas suivants une primitive de f sur I .*

a) $f(x) = x\sqrt{1 + x^2}$ $I = \mathbb{R}$ *b)* $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$ $I =]-1\,;\,1[$

Exercice5

1) Déterminer une primitive sur $[0\,;\,\frac{\pi}{4}]$ *de la fonction :* $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

2) On considère la fonction G, définie sur $[0\,;\,\frac{\pi}{4}]$ *par :* $G(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$.

Montrer que G est dérivable sur $[0\,;\,\frac{\pi}{4}]$ *et que :* $G'(x) = \dfrac{3}{\cos^4 x} - \dfrac{2}{\cos^2 x}$.

3) En déduire une primitive sur $[0\,;\,\frac{\pi}{4}]$ *, de la fonction :* $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos^4 x}$.

Exercice6

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de f sur I après avoir effectuée la transformation d'écriture indiquée.

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ $I =]1\,;\,+\infty[$ *Indication : Mettre f (x)sous la forme* $a + \dfrac{b}{(x-1)^2}$

2) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 12x - 1}{(x+2)^2}$, $I =]-2\,;\,+\infty[$ *Indication : Mettre f (x) sous la forme* $a + \dfrac{b}{(x-1)^2}$.

3) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 13x^2 + 24x + 2}{(x+3)^2}$, $I =]-3\,;\,+\infty[$

Indication : Mettre f (x) sous la forme $ax + b + \dfrac{c}{(x+3)^2}$.

4) $f(x) = \dfrac{x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$, $I =]-1\,;\,1[$ *Indication : Mettre f (x) sous la forme* $\dfrac{a}{(x-1)^3} + \dfrac{b}{(x+1)^3}$.

Exercice7

Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré :

1) $f : x \mapsto \dfrac{2}{3 - x}$ sur $]3\,;\,+\infty[$ *2)* $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ sur $]-\infty\,;\,+\infty[$

3) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ sur $]1\,;\,+\infty[$, puis sur $]0\,;1[$ *4)* $f : x \mapsto \tan x$ sur $]-\frac{\pi}{2}\,;0[$

5) $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2-2x+3}$ sur R *6)* $f : x \mapsto \dfrac{1}{2x+1}$ sur $]-\infty\,;-\frac{1}{2}[$

7) $f : x \mapsto \dfrac{2\ln x}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$ *8)* $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2}$ sur $]0\,;\,+\infty[$

9) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ sur $[0\,;\,\frac{\pi}{4}[$ *10)* $f : x \mapsto \dfrac{1 + \tan^2 x}{\tan x}$ sur $]0\,;\,\frac{\pi}{2}[$

11) $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)\,[\ln(x+1)]^2}$ sur $]0\,;\,+\infty[$ *12)* $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1-x^2} + \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ sur $]-1\,;\,1[$

Exercice8

Trouver les réels a et b tels que : $\forall\, x \in [\,0\,;\frac{\pi}{4}\,]\,,\ \frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1-\sin x} + \frac{b\cos x}{1+\sin x}$

En déduire les primitives sur $[\,0\,;\frac{\pi}{4}\,]$ *de la fonction* $f : x \mapsto \frac{1}{\cos x}$.

Exercice9

Dans chacun des cas suivants, déterminer les nombres réels α et β annulant le polynôme dénominateur .Déterminer des réels a, b et c tels que, pour tout x élément de l'ensemble de définition de f, on ait :

$f(x) = a + \frac{b}{x-\alpha} + \frac{c}{x-\beta}$.

En déduire une primitive de la fonction étudiée .

1°) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-x}$ 2°) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ 3°) $f(x) = \frac{2x^2+4x-5}{1-x^2}$

4°) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4x+3}$ 5°) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-2x-8}$ 6°) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+x-12}$

Exercice10

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x+1}{x^2-x-6}$

1°) a) *Mettre f (x) sous la forme* $\frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$, $\forall\, x \in D_f$.

b) *En déduire la primitive sur* $]-2\,;\,3\,[$ *de f qui s'annule en* $\frac{1}{2}$.

2°) *Soit f la fonction définie par* $f(x) = \frac{x^2-2x-2}{x^3-1}$

a) *Trouver les réels a, b et c tels que :* $\forall\, x \in D_f\,,\ f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$

b) *En déduire la primitive F de f sur* $]-\infty\,;\,1\,[$ *de f telle que* $F(-1) = -\ln 2$.

Exercice11

Soit $f : x \mapsto \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}$ *et* $g : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$.

1°) *Donner une primitive sur* $[0\,;\frac{\pi}{2}\,]$ *de chacune des fonctions* $h_1 : x \mapsto f+g$ *et* $h_2 : x \mapsto f-g$

2°) *En déduire une primitive sur* $[0\,;\frac{\pi}{2}\,]$ *de chacune des fonctions f et g.*

Exercice12

1) *Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction* f *sur* $\mathbf{R}$.

a) $f(x) = 5x\left(5x^2-7\right)^4$ b) $f(x) = \frac{2x-3}{\left(2x^2-6x+11\right)^3}$

c) $f(x)=\cos^3 x\sin^2 x$ d) $f(x)=\dfrac{x(2x^2+1)}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$

2) $g(x)$ $=cos\ (3x)-3sin(x)$,

Déterminer la primitive de g qui s'annule pour $x=\frac{\pi}{2}$.

Exercice13

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\frac{3x^2-6x+5}{(x-1)^2}$

1) Déterminer deux nombres réels $a\ et\ b$ telsque

$$f(x)=a+\frac{b}{(x-1)^2}$$

2) En déduire les primitives de f sur $]1;+\infty[$
3) a- Déterminer la primitive Fde f qui s'annule en 2.
   b-Déterminer la primitive de f dont la courbe représentative admet la droite (Δ): $y=3x+1$pour asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 14

Soit la fonction $f: x\mapsto \dfrac{1}{1-\sin x}$.

1) Montrer que $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$.
2) Déterminer les primitives de f sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice15

1) En utilisant les formules de duplication démontrez que :

$$cos^4 x=\frac{1}{8}cos4x+\frac{1}{2}cos2x+\frac{3}{8}.$$

2) Déduisez –en la primitive F dela fonction $x\longmapsto cos^4 x$, telle que $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Exercice16

On considère la fonction f définie sur [1 ; 2] par $f(t)=\dfrac{1}{(1+t)^2}$ et la fonction g définie par

$g(x)=\dfrac{1}{(1+e^x)^2}$.

1°) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $t\in[1\,;2]$, $f(t)=a+\dfrac{bt}{(1+t)}+\dfrac{ct}{(1+t)^2}$.

2°) En posant $t=e^x$, déterminer la primitive de g sur l'intervalle [1 ; ln 2] qui s'annule en 0.

Exercice17

Déterminer la primitive F vérifiant $F(x_0)=\ y_0$ pour chacune des fonctions f définies sur K.

1) $f(x)=\frac{x^2-4x+2}{(x-3)^2}$ $K=]-\infty;3[$, $F(2)=5$. Indication : Mettre f(x) sous la forme $a+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{(x-3)^2}$

2) $f(x)=\frac{x^2-2x-2}{x^3-1}$ $K=]-\infty;1[$ $F(-1)=-\ln 2$. Indication : Mettre f(x) sous la forme $\frac{a}{x-1}+\frac{b\,x+c}{x^2+x+1}$

3) f(x) = $\frac{x^2+x-11}{x-2}$ K =]2 ; +∞[F(3) = 14 .Indication : Mettre f(x) sous la forme a x + b + $\frac{c}{x-2}$

Exercice18

Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur K.

1) f(x) = $2x^3 + 3x - 1$, $K = IR$ 2) f(x) = $\frac{3}{x^2} + \frac{x^2}{3}$, $K =]0;\ +\infty[$ 3) f(x) = $\frac{2}{\sqrt{x}} + x\sqrt{2}$, $K =]0;\ +\infty[$

4) f(x) = $5(4x-1)^6$, K = IR 5) f(x) = $\frac{7}{(3x+2)^2}$, K =] 1; +∞[6) f(x) = $\frac{1}{\sqrt{3x+5}}$, K =]- 1; +∞[

7) f(x) = $\frac{7}{2x+1}$, K=] - $\frac{1}{2}$; +∞[8) f(x) = $\frac{1}{4-x}$, K =]-∞; 4[9) f(x) = $\frac{2x+1}{x^2+x-6}$, K =]-3; 2[

10) f(x) = cosx cos3x, K = IR 11) f(x) = sinx sin5x, K = IR 12) f(x) = sin2x cos3x, K = IR

13) f(x) = $cos^2\ x$, K= IR 14) f(x) = $cos^2\ x - 2sin^4\ x$, K = IR 15) f(x) = $cox^3\ x \sin x + 3\ sin^3\ x$, K = IR

16) f(x) = 2 sin x cos^5 x, K = IR 17) f(x) = $cos^2\ x\ sin^3\ x$, K= IR 18) f(x) = $sin^3\ x\ cos^3\ x$, K = IR

19) f(x) = $cos^3\ x$, K = IR 20) f(x) = $cos^6\ x$, K= IR 21) f(x) = sin x $cos^3\ x$, K= IR

22) f(x) = $\frac{\cos x}{\sin x}$, $K =]0;\ \frac{\pi}{2}[$ 23) f(x) = $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$, K=]$\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$[24) f(x) = $\frac{1+\ tan^2\ x}{tanx}$, K =]0; $\frac{\pi}{2}$[

Exercice19

1) Dans chaque cas déterminer une primitive F de f sur I :
$f(x) = \frac{6x}{(x^2-5)^3}$, I =] -$\sqrt{5}$;$\sqrt{5}$ [,$f(x) = \frac{1}{(cosx)^2} + sinx$, $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $et\ F(0) = 1$

$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+3}}$ $I = IR$.

2) Soit $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x^2+4}$ et $f(x) = x\sqrt{x^2+4}$
Déterminer les réels a, b et c pour que F soit une primitive de f sur IR.

3) Soit la fonction $g(x) = 2(sinx)^5(cosx)^4$
3-1) Démontré que $\forall x \in IR, g(x) = 2sinx[(cosx)^8 - 2(cosx)^6 + (cosx)^4]$

3-2) En déduire une primitive sur IR de la fonction g

Exercice20

Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur K.

1) f(x) = $\frac{\ln x}{x}$ K =]0 ; +∞[2) f(x) = $\frac{1}{x \ln x}$ K =]0; +∞[3) f(x) = $|x| + |x-1|$, K= IR

4) f(x) = $\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$ K =]0; 1[Indication: Mettre f(x) sous la forme $\frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2}$

5) f(x) = $\frac{2x+1}{x^2-2x+1}$ K =]1 ; +∞[Indication : Mettre f(x) sous la forme $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2}$

6) f(x) = $\frac{2x^3+x^2\ 2x+1}{x^2-1}$ K =]1 ; +∞[Indication : Mettre f(x) sous la forme a x + b + $\frac{c}{x+1} + \frac{d}{x-1}$

Exercice21

Dans chacun des cas suivants, préciser sur quel(s) intervalle(s) la fonction f admet des primitives, et déterminer ces primitives.

1) f(x) = $3x^2 - 5x + 4 + \frac{3}{(x-1)^2}$ 2) f(x) = $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x}{(x^2-1)^3}$

Exercice 22

Partie A

La fonction f est définie sur]0 ; +∞ [par f(x) = $x-2+\frac{1}{2}\ln x$

1)a) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

b) Calculer f'(x) et étudier le sens de variation de la fonction f.

2) a) Monter que l'équation f(x) = 0 admet dans]0 ; +∞[une solution unique e. Donner une valeur approchée de e à 10^{-2}

b) Etudier le signe de f(x) lorsque x décrit]0 ; +∞ [

Partie B

La fonction g est définie sur [0 ; +∞ [par $\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}\ln x \text{ , pour tuout réel } x > 0 \end{cases}$

1)a)Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

b)Déterminer la limite de g en +∞.

2) Soit g' la dérivée de la fonction g.

3)Pour tout réel x>0 calculer g'(x), puis vérifier que g'(x) = $x\,f\left(\frac{1}{x}\right)$.

4) En déduire le signe de g'(x) lorsque x décrit]0 ; +∞[. Dresser un tableau de variation de la fonction g.

5) Donner une équation des tangentes à la courbe (C) représentative de g aux points d'abscisses 0 et 1.

6)Tracer (C) et ses tangentes.

Exercice 23

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)\,e^{-x}$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (o ;I ,J) (unité graphique 2cm).

Partie A *Etude d'une fonction auxiliaire.*

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)\,e^{-x}$

1)Etudier les limites de g en -∞ et en +∞.

2)Calculer la dérivée de g et déterminer son signe.

3)En déduire le tableau de variation de g.

4)Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique t dans IR. Donner un encadrement de t d'amplitude 10^{-2}

5)En déduire le signe de g.

Partie B *Etude de f*

1)Etudier les limites de f en -∞ et en +∞

2)Déterminer f'(x) pour tout x réel.

3)En déduire à l'aide de la partie A, les variations de f et donner son tableau de variation.

4)Démontrer que f(t) =t (1 +2 e^{-t})

5)Démontrer que la droite (D) d'équation y = x -1 est asymptote à (C) en +∞.

6)Préciser la position de (C) par rapport à (D).

7)Donner une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0.

8)Tracer (D), T puis (C).

Exercice 24

Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par :

$$\begin{cases} pour\ x \in]0;1], f(x) = (1-e^{-x})lnx \\ \quad f(0) = 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

Exercice 25

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = (\frac{x}{x-1})^{\frac{1}{\sqrt{2}}} si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1)a)Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Démontrer que f est continue sur cet ensemble.

c)Etudier la dérivabilité de f en 0.

2) Etudier f et tracer (C) la courbe représentative de f .

Exercice 26

Soit la fonction f définie par f(x) = $|x^2 - 1|^x$

1)Déterminer Df

2)Etudier la dérivabilité de f en 0.

3)Etudier f et tracer (C) la courbe représentative de f.

Exercice 27

Soit la fonction définie par f(x) =2x +3 +ln$(\frac{x+1}{x-1})$.

1)Déterminer Df.

2)Etudier la nature des branches infinies de f.

3)Calculer f'(x) puis dresser le tableau de variation de f.

4)Préciser les tangentes horizontales de (C), courbe représentative de f.

5)Tracer (C).

Exercice 28

Soit f la fonction définie par f(x) = $\frac{x+e^x}{x-e^{-x}}$ *et (C) sa courbe représentative.*

1)Soit u la fonction définie par u(x) = -x -1 +e^x.

a)Etudier les variations de la fonction u.

b) Déduire que $\forall\ x \in IR,\quad e^x \quad \geq x+1$.

2) Etudier les variations de f.

3) Préciser les asymptotes de (C).

Démontrer que (C) coupe une seule de ses asymptotes, en un point I dont on calculera les coordonnées.

4)Déterminer une équation de la droite (D) tangente en I à (C).

5)Etudier la position de (D) et de (C).

6)Tracer (C), ses asymptotes et sa tangente en I.

Exercice29

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur]0 ; +∞[par g(x) = $x^2 - 2\ lnx$.

1) Etudier le sens de variation de g.

2) En déduire le signe de g(x) sur]0 ; +∞[.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur]0 ; +∞[par f(x) = $\frac{x}{2}+\frac{1+lnx}{x}$

On note (τ)*sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 2cm.*

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$ *et en* 0^+. *Interpréter graphiquement le résultat.*

2) Montrer que la droite (Δ) *d'équation y =* $\frac{x}{2}$ *est asymptote à* (τ).

Déterminer la position de (τ) *par rapport à* (Δ) *sur]0 ; +∞[.* (Δ) *coupe* (τ) *en un point dont on déterminera.*

3) Dresser le tableau de variations de f.

4) Montrer qu'il existe un point B, et un seul de la courbe (τ) *où la tangente (T) à* (τ) *est parallèle à* (Δ).

5) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α. *Justifier que 0,34* $< \ \alpha\ < 0;35$.

6) Tracer la courbe (τ) *et les droites (T) et* (Δ).

Exercice30 *BAC 2010 Epreuve du 1[er] groupe.*

PARTIE A

*1) Etudier sur IR le signe de 4*$e^{2x} - 5e^x + 1$.

2) Soit φ *la fonction définie par :* $\varphi(x)$*= lnx - 2*$\sqrt{x} + 2$.

a) Déterminer son domaine de définition D_φ *et calculer ses limites aux bornes de* D_φ.

b) Etudier ses variations et dresser son tableau de variations.

c) En déduire son signe.

PARTIE B

Soit f la fonction définie par : f(x) = $\begin{cases} x + \frac{e^x}{2e^x - 1} & si \quad x \leq 0 \\ 1 - x + \sqrt{x}\,lnx & si\ x > 0 \end{cases}$

On désigne par (τ) *la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.*

1) a) Déterminer D_f *le domaine de définition de f.*

b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f *et étudier les branches infinies de* (τ).

c) Etudier la position de (τ) *par rapport à l'asymptote non parallèle aux axes dans* $]-\infty; 0]$.

2) a) Etudier la continuité de f en 0

b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement les résultats.

3) Déterminer la dérivée de f et dresser le tableau de variations de f.

4) Construire (τ) *, les asymptotes et les demi-tangentes. On remarquera que f(1) = 0 et* $f'(1) = 0$.

Exercice 31

On considère la fonction g définie par g(x) = $\begin{cases} x\,(1 - lnx)^2 & si\ x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

On note (τ) *sa courbe représentative dans un repère orthonormal* $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de g sur son ensemble de définition.

2) Etudier les variations de g.

3) Tracer (τ).

Exercice32

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| & si\ x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\\ f(x) = x^2 e^{-x} & si\ x \in [0; +\infty[\end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

PARTIE A

1) Quel est le domaine de définition de f. Calculer f(-2) et f(3).

2) Montrer que la fonction f est continue en 0.

3) a) Calculer $f'(x)$ *sur* $[0; +\infty[$ *puis sur* $]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$.

b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier votre réponse.

4)a) Dresser le tableau des variations de la fonction f.

b) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une racine unique α *comprise entre -1,6 et -1,5.*

5) a) Justifier que la droite (D) d'équation y = x est asymptote à la courbe (C) au voisinage de - ∞.

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D) sur]-∞ ;0[\{-1}.

6) Tracer la courbe (C) en représant sur la même figure les asymptotes , les demi-tangentes en 0 et les points d'intersection avec les axes de coordonnées.

PARTIE B

Soit g la restriction de f à [0 ; 2].

1) Montrer que g réalise une bijection de[0 ; 2] vers un intervalle J à préciser

2) On note g^{-1} la bijection réciproque de g.

a) Résoudre l'équation $g^{-1}(x) = 1$.

b) Montrer que $(g^{-1})'\left(\frac{1}{e}\right) = e$.

3) On appelle (τ) la courbe représentative de g^{-1}. Tracer (τ).On placera sur la courbe ( ) le point d'ordonnée 1 et la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{e}$.

Exercice33 *Exrait du bac 2006*

1) On considère la fonction f définie sur IR par f(x) = x (1 + e^{2-x}).On note (τ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,$\vec{\imath},\vec{\jmath}$) .(unité 2 cm).

2) Soit h la fonction définie par h(x) = 1 + (1 – x) e^{2-x}.

a) Etudier les variations de h.

b) En déduire le signe de h(x) sur IR.

3) a) Etudier les limites de f en - ∞ et en + ∞.

b) Préciser la nature de la branche infinie de f en - ∞.

c) Calculer $lim_{x\to\infty}[\,f(x) - x]$, puis interpréter le résultat.

d) Préciser la position de (τ) par rapport à la droite (Δ) : y = x.

4) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} définie sur IR.

c) f^{-1} est elle dérivable en 4 ?

d) Etudier la position de (τ) par rapport à sa tangente au point d'abscisse 2.

e) Construire (τ). (On tracera la tangente à (τ) au point d'abscisse 2). Construire la courbe de f^{-1}.

5) Soit α un réel strictement positif et (R_α) la région du plan limitée par les droites d'équations respectives x = 0 et x = α et les courbes d'équations respectives y = f(x) et y = x. Soit a (α) l'aire de (R_α) en cm^2.

a) Calculer a (α) en fonction de α.

b) Déterminer $lim_{\alpha\to\infty}$ a (α) puis interpréter le résultat obtenu.

Exercice34

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $IR_+\backslash\{1\}$ *par :*

$$g(x) = \frac{1}{ln^2(x)} - \frac{1}{ln\,x} \text{ pour tout } x > 0 \text{ et } x \neq 1 \text{ ; } g(0) = 0$$

1) Montrer que g est continue à droite en zéro.

2) Etudier les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

3) Dresser le tableau de variations de g.

4) Etudier le signe de g(x).

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $IR_+\backslash\{1\}$ *par :*

$$f(x) = \frac{-x}{ln\,x} \quad si\ x > 0 \quad et\ x \neq 1 \text{ ; } f(0) = 0$$

1) Montrer que f est continue à droite en 0 et dérivable à droite en 0. En déduire l'existence d'une demi-tangente à la courbe représentative (τ) *de f au point d'abscisse 0.*

2) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3) Comparer $f'(x)$ *et g(x). En déduire les variations de f et son tableau de variations.*

4) Déterminer l'équation de la tangente (D) à la courbe (τ) *au point d'abscisse* e^2.

5) Soit M le point de (τ) *d'abscisse x et N le point de (D) de même abscisse x.*

On pose $\varphi(x) = \overline{NM}$.

Montrer que $\varphi(x) = f(x) + \frac{x + e^2}{4}$.

Déduire de la partie A le tableau de variations de $\varphi'(x)$ *puis le signe de* $\varphi'(x)$ *sur]1 ; +∞[. En déduire le signe de* $\varphi(x)$ *sur]1 ; +∞[et la position de* (τ) *par rapport à (D) pour les points d'abscisse* $x > 1$.

6) Représenter dans le plan rapporté à un repère orthonormé la courbe (τ) *et la droite (D*

Exercice35

$$f : x \mapsto \frac{ln\,x}{x - ln\,x}$$

1°) Etudier les variations de g : $x \mapsto x - ln\,x$ *. En déduire l'ensemble de définition de f .*

2°) Montrer que l'on peut prolonger f par continuité à droite au point x = 0 .

Soit h ce prolongement . Etudier la dérivabilité de h en 0 .

3°) Etudier les variations de h .

4°) Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}_h$ *au point d'abscisse 1 et préciser la position de* $\mathscr{C}_h$ *par rapport à cette tangente .*

5°) Tracer $\mathscr{C}_h$ *dans un repère orthonormé .*

Exercice36

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2\sqrt{|\ln x|} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 . \end{cases}$

1°) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser f ' (0) .

2°) Etudier la dérivabilité de f en 1 .

3°) Etudier les variations de f .

4°) Construire $\mathscr{C}_f$ *dans un repère orthonormal .*

Exercice37

Soit la fonction f définie sur $I = [\frac{1}{e} ; +\infty[$ *par :* $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$.

1°) Etudier les variations de f sur I .

2°) Quelle est la limite en $+\infty$ *de la fonction :* $x \mapsto f(x) - \ln x$.

Représenter sur un même graphique la fonction ln et la fonction f (pour $x \in I$ *) .*

Exercice38

1°) Etudier les variations de cette fonction .

2°) On désigne par $\mathscr{C}$ *la représentation graphique de f dans un repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer l'équation de la tangente T *à* $\mathscr{C}$ *au point de* $\mathscr{C}$ *d' abscisse e .*

3°) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ *est entièrement située au-dessus de* T .

(Pour cela, on étudiera le sens de variation d'une fonction bien choisie) .

4°) Déduire de la question 3° la limite de f en $+\infty$.

5°) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ *et la droite* T .

6°) La courbe $\mathscr{C}$ *admet-elle une tangente de coefficient directeur 1 ?*

Exercice39

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{5 - x}{3 + x}\right)$.

1°) Rechercher l'ensemble de définition de f et les limites de f aux bornes de cet ensemble .

2°) Etudier les variations de f .

3°) On appelle $\mathscr{C}$ *la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère*

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ *(unité de longueur : 1 cm) .*

Rechercher le point A d'intersection de $\mathscr{C}$ *avec l'axe* $(O, \vec{i})$ *et former une équation de la tangente* T *à* $\mathscr{C}$ *en ce point .*

4°) Démontrer que le point A est centre de symétrie de $\mathscr{C}$ *. Construire* $\mathscr{C}$ *et* T .

Exercice40

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x + 4 + \ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|$.

Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé , le centimètre étant l'unité de longueur .

1°) a) Etudier les variations de f .

b) Montrer que $\mathscr{C}$ admet trois asymptotes, dont l'une Δ d'équation $y = x + 4$; préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ .

3°) Montrer que l'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des ordonnées est un centre de symétrie pour $\mathscr{C}$.

d) Construire la courbe $\mathscr{C}$; On placera en particulier les points d'abscisses

-3 ; -1 ;0 ;1 ;3 .

2°) Soit k un nombre réel . Etudier suivant les valeurs de k le nombre de pints d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x + k$ .Montrer que lorsque $\mathscr{D}$ coupe $\mathscr{C}$ en deux points distincts, d'abscisses x' et x'' , le produit $x'x''$ est indépendant de k .

Exercice41

Soit la fonction $f : x \mapsto \ln(1 - \ln x)$.

1°) Etudier les variations de f .Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f , D_f.

2°) Montrer que f est une bijection de D_f sur un ensemble I que l'on précisera .

3°) Construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm) .

Exercice42

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{(\ln|x|)^2}{x}$.

1°) Démontrer que f est une fonction impaire . Etudier les variations de f .Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2°) Montrer que f définit une bijection de] 0 ;1] sur un intervalle à préciser .

Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation :

$$[\ln(x)]^2 = m .$$

Exercice43

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction numérique fg définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $g(x) = \dfrac{x}{2} + 2 + \dfrac{\ln x}{x}$.

1°) On considère la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2 - 2\ln x + 2 .$$

Etudier les variations de h et préciser le signe de h (x) . (On ne demande pas de tracer la courbe représentative de h .)

2°) Etudier les variations de la fonction g .

Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ a deux asymptotes que l'on déterminera .

Montrer que $\mathscr{C}$ coupe l'une de ces asymptotes en un point que l'on précisera .

Tracer la courbe $\mathscr{C}$

Exercice44

Dans ce problème, on étudie la famille de fonctions f_λ définies par : $f_\lambda(x) = 1 + \ln(1 + \lambda x)$

où λ est un nombre réel non nul .

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé, $(\mathscr{C}_\lambda)$ est la courbe représentative de f et $\mathscr{D}$ est la droite d'équation $y = x$.

1°) Donner l'ensemble de définition de f_λ .(On distinguera les cas $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$.)

2°) a) Existe-t-il un lien entre les deux courbes $(\mathscr{C}_\lambda)$ et $(\mathscr{C}_{-\lambda})$?

b) Soit (Γ) la représentation graphique de la fonction logarithme népérien .

Trouver, lorsque $\lambda > 0$, une translation qui transforme (Γ) en $(\mathscr{C}_\lambda)$.

3°) On pose $\varphi_\lambda(x) = f_\lambda(x) - x$.

a) On suppose $\lambda < 0$.

Etudier les variations de φ_λ ainsi que ses limites aux bornes du domaine de définition .

En déduire le nombre de points d'intersection de $(\mathscr{C}_\lambda)$ et $\mathscr{D}$.

b) On suppose $\lambda > 0$.

Etudier les variations de φ_λ ainsi que ses limites aux bornes du domaine de définition (on pourra par exemple mettre x en facteur dans l'expression de $\varphi_\lambda(x)$ pour déterminer la limite à l'infini) .

Etablir que la plus grande valeur prise par $\varphi_\lambda(x)$, quand x décrit le domaine de définition de φ_λ est

$m(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda} + \ln\lambda$.

c) Etudier, quand λ décrit $]\,0\,;+\infty\,[$, les variations de m ; en déduire son signe .

d) Combien, lorsque λ est positif, $(\mathscr{C}_\lambda)$ et $\mathscr{D}$ ont-elles de points communs ?

Exercice45

f est la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\begin{cases} f(x) = x\ln\left(x + \dfrac{1}{x}\right) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$(\mathscr{C})$ est sa courbe représentative

1°) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 .

2°) On considère la fonction g définie pour $x \in [\,1\,;+\infty\,[$ par $g(x) = x\ln x$ et on appelle

(Γ) sa courbe représentative dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .Etudier g et tracer (Γ) .

3°) Etudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$.

Montrer que les courbes (Γ) et ($\mathscr{C}$) sont asymptotes et préciser leurs positions relatives .

4°) Déterminer f' et f'' , puis étudier le sens de variation de f' et montrer que f' est positive .

Achever l'étude de la fonction f .

Tracer la courbe ($\mathscr{C}$) sur la même figure que (Γ) .

<u>Exercice46</u>

1°)Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{x-1} + \ln|x-1|$

a) Etudier f et dresser son tableau de variation .

b) Calculer $f(0)$; en déduire le signe de f .

2°) Soit $g : x \mapsto x \ln|x-1|$.

a) Etudier g et tracer ($\mathscr{C}_g$) .

b) Soit A le point d'intersection de ($\mathscr{C}_g$) avec l'axe (Ox) , d'abscisse non nulle .

Démontrer que A est un point d'inflexion de ($\mathscr{C}_g$) et écrire une équation de la tangente

(T) à ($\mathscr{C}_g$) en A .

3°) Soit $h = g_{|\,]1\,;\,+\infty[}$ (c'est-à-dire la restriction de g à $]1\,;+\infty[$) . Démontrer que h est une bijection de $]1\,;+\infty[$ sur un intervalle à préciser et construire sur un autre graphique les courbes ($\mathscr{C}_h$) et ($\mathscr{C}_h^{-1}$) .

<u>Exercice47</u>

Soit $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2+1}$

1°) a) Déterminer D_f et démontrer que : $\forall x \in D_f$, $f(x) > x + |x|$.

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur D_f .

2°) Etudier f et tracer ($\mathscr{C}_f$) .

<u>Exercice48</u>

<u>Partie A</u>

Soit la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x+2+\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| & si\ x \prec 0 \\ (2+x)e^{-x} & si\ x \geq 0 \end{cases}.$$

1°) Montrer que f est définie sur $R \setminus \{-1\}$.

2°) a) Calculer les limites aux bornes de D_f.

Préciser les asymptotes parallèles aux axes de coordonnées.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x+2)]$.

Interpréter graphiquement ce résultat

3°) a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Démontrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x} - 1}{x} = -1$ *et*

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = -1.$

c) En déduire que f est dérivable à gauche et à droite en 0. f est-elle dérivable en 0 ?

4°) Calculer f ' (x) pour :

a) $x \in]0\,;+\infty[$ *b)* $x \in]-\infty\,;-1[\ \cup]-1\,;0[$.

5°) Etudier le signe de f ' (x) pour $x \in]0\,;+\infty[$ *et pour* $x \in]-\infty\,;-1[\ \cup]-1\,;0[$.

6°) Dresser le tableau de variation.

7°) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α appartenant à $]-3\,;2[$.

8°) Tracer C_f, *courbe représentative de f dans un repère orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *d'unités 1 cm.*

On mettra en évidence l'allure de C_f *au point d'abscisse 0 et les droites asymptotes*

Partie B

Soit g la restriction de f à $]-\infty\,;-1[$.

1°) Montrer que g définit une bijection de

$]-\infty\,;-1[$ *sur un intervalle J à préciser.*

2°) On note g^{-1} *sa bijection réciproque.*

a) Calculer $g(-2)$. *Montrer que* g^{-1} *est dérivable en ln 3.*

b) Calculer $(g^{-1})'(\ln 3)$.

c) Représenter la courbe de g^{-1} *dans le repère précédent.*

Exercice 49

Soit $\begin{cases} f(x) = x\ln(1+x) \quad si\ \ x \geq 0 \\ f(x) = x + 2\ln 2 - \dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x} - \ln(1+e^x) \quad si\ \ x \prec 0 \end{cases}$

I) *On pose* $h(x) = \dfrac{x}{1+x} + \ln(1+x)$.

1) *Etudier les variations de h sur Dh.*
2) *Calculer h(0) et en déduire le signe de h(x).*

II) 1) *Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter ce résultat.*

2) a) *Etudier la nature de la branche infinie de Cf en + ∞.*

b) *Montrer que (D) : y = x + 2ln2 – 1 est une asymptote à Cf en - ∞.*

c) Etudier la position de Cf par rapport à (D) sur]-∞ ; 0[.

3) a) Calculer f ' (x) sur [0, +∞ [et préciser son signe à l'aide de celui de h(x).

b) Montrer que sur]-∞ ; 0 [$f'(x) = \dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x}$.

4) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

5) Tracer Cf.

Exercice 50

Soit φ *la fonction définie de IR vers IR par :* $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.

1) *a) Etudier la variation de* φ.
   b) Tracer C, courbe représentative de φ *dans un repère .*

2) *Soit* ψ *la restriction de* φ *à]-1 ; 1[.*

   a) Démontrer, sans calcul, que ψ *admet une fonction réciproque* ψ^{-1}. *En préciser l'ensemble de définition.*

   b) Déterminer ψ^{-1}.

3) *a) Soit x et* $\dfrac{1}{x}$ *éléments de l'ensemble de définition de* φ. *Calculer* $\varphi(\dfrac{1}{x})$ *en fonction de* $\varphi(x)$.

   b) Déterminer $\psi^{-1} o \varphi$.

Exercice 51

On considère les fonctions f et h définies par : $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ *et* $h(x) = \ln\dfrac{2x}{x+1}$.

1) *Etudier les variations de f puis construire sa courbe (2 cm).*
2) *Montrer que I(1 ;0) est un centre de symétrie de Cf.*
3) *Placer les points d'abscisses 0 et 2.*
4) *On désigne par g la fonction :* $\begin{cases} g(x) = f(x) \ \ si \ \ x<1 \\ g(1) = 0 \\ g(x) = h(x) \ \ si \ \ x>1 \end{cases}$
   a) *Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 1.*
   b) *Etudier les variations de g .*
   c) *Montrer que g réalise une bijection de IR sur un intervalle J à préciser.*
   d) *Déterminer* $g^{-1}(-\dfrac{1}{2})$ *puis* $g^{-1'}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$. *Pour x >0 expliciter* $g^{-1}(x)$.

Exercice 52

Soit f la fonction définie par f(x) = (2x-1) $e^{\frac{1}{x}}$ *si* $x \neq 0$, *f(0) = 0.*

1) *Déterminer Df. 2) Etudier la continuité de f en 0. 3) Etudier la dérivabilité de f en 0.*

   4) Etudier les variations de f. 5) Vérifier que $\lim\limits_{x \to -\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = 1$ *et que* $\lim\limits_{x \to +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = 1$

   Déduire que (D) : y = 2x + 1 est asymptote à (Cf). Soit g la fonction définie par

   g(x) = $e^{\frac{1}{x} + \ln|2x-1|}$ *si* $x \neq 0$ *, g(0) = 0.*

   Exprimer g(x) en fonction de f(x). En déduire le tracé de (Cg) .

Exercice 53

Soit $g(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$

1) *Démontrer que g est impaire. 2) Etudier les variations de g. 3) Montrer que l'origine du repère est un point d'inflexion. 4) Tracer Cg.*

Exercice 54

1) *Montrer que la fonction f :* $x \mapsto x\ln x$ *est prolongeable par continuité en 0.*
   Définir le prolongement par continuité de f en 0.

2) *Démontrer que l'on a pour tout réels a et b : si 0 < a* $\leq$ *b alors* $\frac{b-a}{b} \leq \ln\frac{b}{a} \leq \frac{b-a}{a}$.

3) *On considère les applications f et g de]0 ; +* ∞ *[dans IR avec*

   $f(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$ $\qquad g(x) = x - \ln(1+x)$

   a) *Calculer f ' (x) et g' (x).*

   b) *En déduire que pour tout x > 0 :* $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.

   c) *On considère la suite (Un) avec n entier naturel non nul tel que :*

   $$U_n = \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)........\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)\right]$$

   Trouver la limite de Un lorsque n tend vers + ∞.

Exercice 55

Soit f la fonction telle que : $x \to x(x-2)e^x$.

1. *Déterminer les limites de f en +* ∞ *et en -* ∞.
2. *Etudier le sens de variation de f .*
3. *Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i};\vec{j})$.
   Tracez (C) ainsi que la tangente à (C) en O.

4. *La fonction* f *admet, quel que soit* $n \in IN^*$, *une dérivée d'ordre n :* $f^{(n)}$.
   Démontrez que : $\forall n \in IN^*$, $\forall\ x \in IR$, $f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x$ *où* a_n *et* b_n *sont des entiers indépendants de x. Montrez que l'on a :* $a_{n+1} = a_n + 2$ *et* $b_{n+1} = b_n + a_n$.

   Calculez a_n *en fonction de n.*

   Soit $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. *Calculez* σ_n *en fonction de n. Evaluez* b_n *en fonction de* σ_{n-1} *et déduisez- en l'expression de* b_n *en fonction de n.*

Exercice 56

m est un réel, on appelle f_m *la fonction de* $]0\ ;\ +\ \infty[$ *dans IR définie par :*

$f_m(x) = \dfrac{x^2 - 1}{4} - \dfrac{m}{2}\ln x$ *et* C_m *sa courbe représentative. On prendra 2 cm pour unité graphique.*

1. *Déterminer* $\lim\limits_{+\infty} f_m$ *suivant les valeurs de m, déterminer* $\lim\limits_{0} f_m$.
2. *Déterminer la fonction dérivée de* f_m.
   Donner suivant les valeurs de m, les différents tableaux de variations possibles.
3. *a) Soit M(* $x_0\ ;\ y_0$ *) un point du plan, avec* $x_0 > 0$ *et* $x_0 \neq 1$.
   b) Montrer qu'il passe une seule courbe C_m *par M.*

   Montrer qu'il existe un seul point A appartenant à les courbes C_m.
4. *Construire* C_0 ; C_4 *et* C_{-1} *sur un même graphique.*

Exercice 57

1. *Etudier les variations de la fonction P définie sur R par : P(x) =* $x^2 - 6x + 5$.
2. *Soit* f *la fonction définie sur* IR_+^* *par :* $f(x) = (\ln x)^2 - 6\ln x + 5$.
   a) Calculer les limites de f *en 0 et en +* ∞.

   b) Etudier les variations de f .

   c) Calculer la dérivée seconde f'' *de* f. *Pour quelles valeurs* x_0 *de x l'égalité*

   $f''(x) = 0$ *est – elle vérifiée ? Déterminer une équation cartésienne de la tangente D*

   à la courbe Γ *de* f *au point* M_0 *d'abscisse* x_0.
3. *On considère la fonction g définie sur* $]0\ ;\ +\ \infty[$ *par :*

   $$g(x) = (\ln x)^2 - 6\ln x + 5 - \frac{2}{e^4}x + 5.$$

   a) Calculer les dérivées premières et secondes de g.

   b) Etudier le sens de variations de g ' et en déduire le signe de g ' (x).

c) *Etudier le sens de variation de g et en déduire le signe de g (x).*

d) *Déterminer la position de* Γ *et D.*

4. *Construire la courbe* Γ *(on prendra 1mm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées). On construira les points d'abscisses* e^n *, n entier ; la droite D et on précisera son point d'intersection T avec l'axe des ordonnées.*

5. *Résoudre graphiquement* $f(x) > 0$ *et* $f(x) \leq -3$.

Exercice 58

Soit l'application de IR dans IR définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| & si \ x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]-1;0\right[\\ f(x) = x^2 e^{-x} & si \ x \in \left[0;+\infty\right[\end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ *avec* $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.

PARTIE A

1/ Quel est le domaine de définition de f. Calculer $f(-2)$ *et* $f(3)$.

2/ Montrer que la fonction f *est continue en zéro.*

3/ a) Etablir que la dérivée f' *de* f *a pour expression*

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \quad si \ x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]-1;0\right[\quad et \quad f'(x) = xe^{-x}(2-x) \quad si \ x \in \left]0;+\infty\right[.$$

b) La fonction f *est elle dérivable en zéro ? Justifier votre réponse.*

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

4 / Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ *admet une racine unique* α *comprise entre -1, 6 et 1, 5.*

5 / a) Justifier que la droite (D) d'équation y = x est une asymptote à la courbe (C) lorsque x tend vers - ∞.

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D) dans $\left]-\infty;0\right[- \{-1\}$.

6/ Tracer la courbe (C) en représentant sur la même figure les asymptotes, les demi tangentes et les points d'intersection de (C) avec les axes de coordonnées.

PARTIE B

Soit g la restriction de f *à* $[0,2]$.

1/ Montrer que g définit une bijection de $[0,2]$ *sur un intervalle J à préciser.*

2/ On note g^{-1} *la bijection réciproque de g.*

a) Résoudre l'équation $g^{-1}(x) = 1$.

b) Montrer que $(g^{-1})'(\frac{1}{e}) = e$.

3/ On appelle (C ') la courbe représentative de g^{-1}

Tracer (C ') en utilisant la courbe (C) . (On placera sur la courbe (C ') le point d'ordonnée 1 et la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{e}$*).*

<u>Exercice 59</u>

A. On considère la fonction u :

$$\begin{array}{l}[0;+\infty[\rightarrow IR\\ x\mapsto \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|-\dfrac{2x}{x^2-1}\end{array}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de u. Calculer u(0) et $\lim_{x\to+\infty} u(x)$.

2) Etudier les variations de u.

Dresser son tableau de variations (il n'est pas nécessaire de calculer la limite de u en 1).

3) Déduire des résultats précédents que :

a) $\forall\ x\in[0;1[,\ u(x)\geq 0$.

b) $\forall\ x\in\ ]1;+\infty[,\ u(x) < 0$.

B. Soit g la fonction définie par

$$\begin{array}{l}g:[0;+\infty[\rightarrow IR\\ x\mapsto x\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|-1\end{array}$$

1) Déterminer Dg (le domaine de définition de g) ; puis étudier la limite de g en 1.

2) a) Vérifier que : $\dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$*. Montrer que* $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{2}\ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)=1$.

b) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$*. Interpréter géométriquement ce résultat.*

c) Dresser le tableau de variations de g.

d) Montrer qu'il existe un réel α appartenant à $]0;1[$ tel que g(α) = 0.

Donner un encadrement d'ordre 1 de α.

3) Tracer la courbe Cg de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité = 2 cm).

C. Soit $f : [0;1[\to IR$, la fonction définie par $f(x) = (x^2 - 1)\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$.

Montrer que f est dérivable sur $[0;1[$ et que $f'(x) = g(x), \forall x \in [0;1[$.

Exercice 60

On se propose d'étudier la suite u, définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$; $\qquad u_n = \dfrac{e^{u_n}}{u_n + 2}$.

1. *Soit f la fonction de l'intervalle $[0; 1]$ dans IR définie par :*

   f(x) = $\dfrac{e^x}{x+2}$.

   a) *Calculez f '(x) ; f ''(x).*
   b) *Etudiez le sens de variation de f. Quelle est l'image du segment $[0; 1]$ par f ?*
   c) *Démontrez que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$* $\dfrac{1}{4} \leq f'(x) < \dfrac{2}{3}$.
   d) *Etablissez que l'équation f(x) = x admet une solution unique dans l'intervalle $[0; 1]$.*

2. *a) Prouvez que si la suite u admet une limite L, alors f(L) = L.*

   b) En utilisant le 1.c), démontrez que, pour tout naturel n : $0 \leq \dfrac{u_{n+1} - L}{u_n - L} \leq \dfrac{2}{3}$.

   Déduisez – en que la suite u converge vers L et déterminez un naturel n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $|u_n - L| \leq 10^{-3}$.

NOMBRES COMPLEXES ET SIMILITUDES

I) Nombres complexes

1) Activité

Soit l'équation (E) : $x^2 + 1 = 0$.

1) Résoudre (E) dans IR .

2) On introduit un nombre i appelé nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

Vérifier que (E) admet deux solutions i et – i .

Solution

1) Résolvons (E) dans IR .

$x^2 + 1 = 0 <=> x^2 = -1$ *ce qui est impossible car le carré d'un nombre réel n'est jamais négatif.*

D'où S = ∅ . *Dans l'ensemble des nombres réels, l'équation n'a pas de solutions.*

3)On introduit un nombre i appelé nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

$i^2 = -1$ *donc i n'est pas un nombre réel* .

2)Vérifions que (E) admet deux solutions i et – i .

$x^2 + 1 = 0$.

Si x = i alors $i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$. *donc i est solution de (E)* .

Si x = - i alors $(-i)^2 + 1 = -1 + 1 = 0$. *donc - i est solution de (E)* .

Le nombre i est appelé un nombre complexe.

2) Définition

On appelle un nombre complexe tout nombre de la forme a + i b avec a ∈ IR, b ∈ IR et $\boldsymbol{i^2 = -1}$.

L'ensemble des nombres complexes est noté C.

Si z ∈ C alors z s'écrit sous la forme z = a + i b avec a ∈ IR, b ∈ IR et $\boldsymbol{i^2 = -1}$.

Exemple

2 + 3i, 4 – 2i , 3i et 2 sont des nombres complexes.

3) Définition

Soit z un nombre complexe tel que z = a + i b .

Le nombre réel a est appelé la partie réelle de z et on note : Re(z) = a .

Le nombre réel b est appelé la partie imaginaire de z et on note : Im(z) = b .

- ***Remarque***

La partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel .

Exemple

1) $z = 2 + 3i$. $Re(z) = 2$ et $Im(z) = 3$.

2) $z = 1- 3i$. $Re(z) = 1$ et $Im(z) = -3$.

4) Définition

On a : $z \in \mathbb{C} \iff z = a + i\,b$.

1) Si b = 0 alors z = a . z = a , on dit que z est un nombre réel. Tout nombre réel est un nombre complexe.

2) Si a = 0 alors z = i b . z = i b, z est appelé un nombre imaginaire pur .

L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté i IR .

Remarque

0 est à la fois un nombre réel et un nombre imaginaire pur . C' est à dire $0 \in IR$ et $0 \in iIR$.

Propriété

1) $z \in IR \iff Im(z) = 0$.

2) $z \in i\,IR \iff Re(z) = 0$.

Propriété

Soient z et z′ deux nombres complexes.

1) $z = z' \iff Re(z) = Re(z')$ et $Im(z) = Im(z')$.

2) $z = 0 \iff Re(z) = 0$ et $Im(z) = 0$.

5) Forme algébrique d'un nombre complexe

$z \in \mathbb{C} \iff z = a + i\,b$.

L'expression z = a + i b est appelée la forme algébrique de z ou la forme cartésienne de z .

Donner la forme algébrique de z, c'est écrire z sous la forme z = a + i b .

6) Représentation géométrique d'un nombre complexe

Soit M(a ; b) . À ce point M, on peut faire correspondre un nombre complexe z tel que z = a + ib .

À tout nombre complexe z = a + ib, on peut faire correspondre un point M(a ; b) .

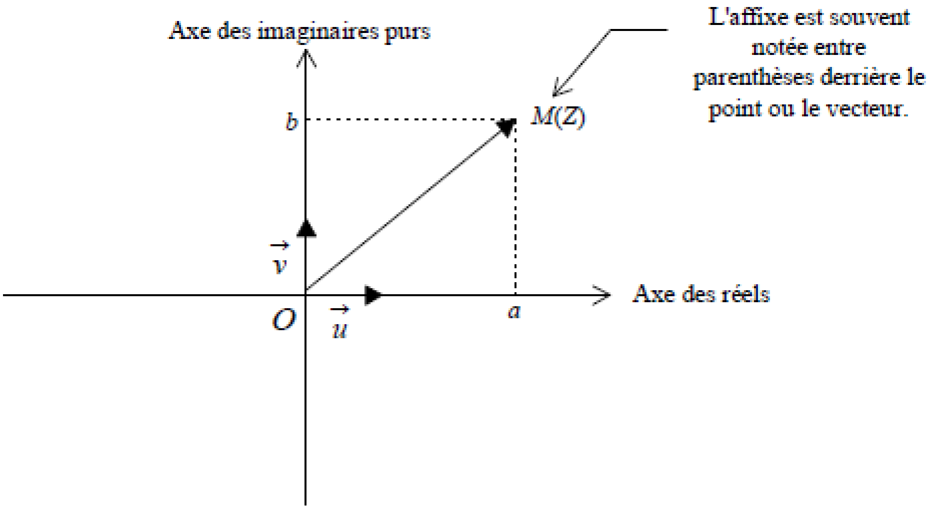
On dit que l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{C}$ qui ,à un point M, fait correspondre son affixe est une bijection.

Le nombre complexe z = a + ib est appelé l'affixe du point M .On note : $z_M = a + ib$.

M est appelé le point image de z . On le note M(z) .

$\overrightarrow{OM}$ est appelé le vecteur image de z . On le note $\overrightarrow{OM}(z)$.

- ***L'axe des abscisses est appelé l'axe des réels.***
- ***L'axe des ordonnées est appelé l'axe des imaginaires purs.***



Exercice d'application

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Placer les points suivants :

1) A tel que $z_A = 1 + i$.

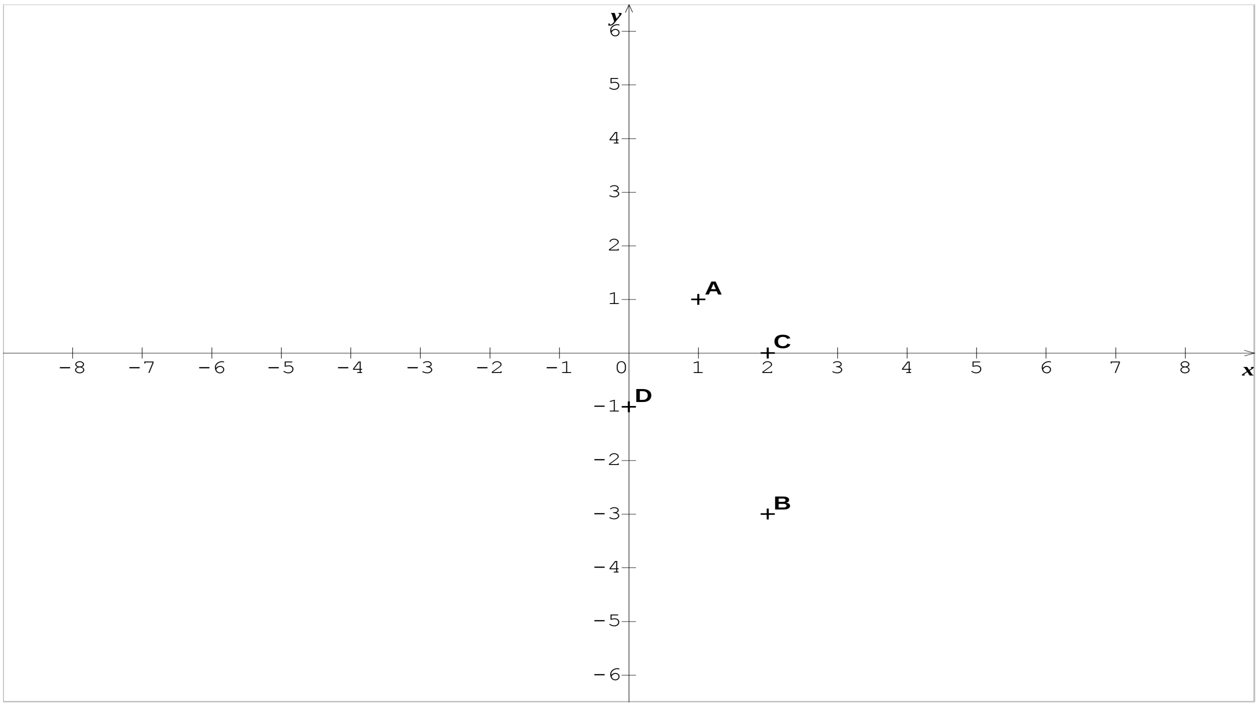
2) B tel que $z_B = 2 - 3i$.

3) C tel que $z_C = 2$.

4) D tel que $z_D = -i$.

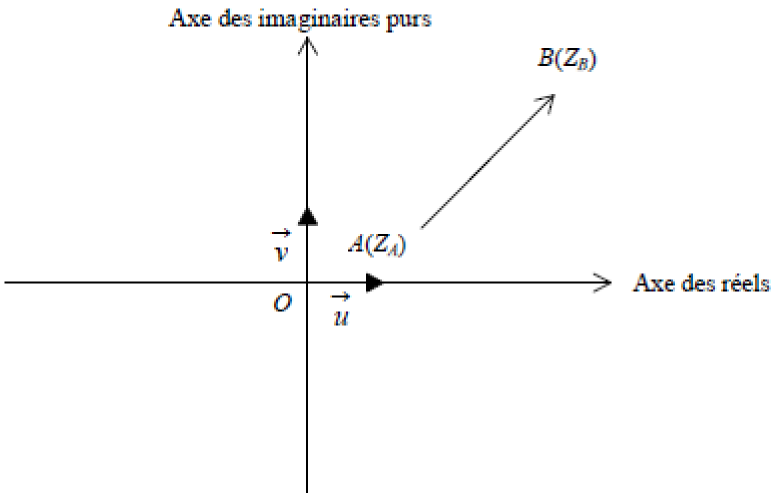
Solution

Plaçons les points suivants : ***A(1 ;1) , B(2 ; -3) , C(2 ; 0) et D(0 ; -1)*** .



6) Affixes de $\vec{u}+\vec{v}, k\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$

- $z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$
- $z_{k\vec{u}} = k\, z_{\vec{u}}$
- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$



7) Puissances de i

Activité

Sachant que $i^2 = -1$ *.Calculer* i^3 *,* i^4 *et* i^5 *.*

Solution

$\boxed{i^2 = -1}$. $i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i$ donc $\boxed{i^3 = -i}$.

$i^4 = i^3 \times i = -i \times i = 1$ $\boxed{\text{donc } i^4 = 1}$.

$i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i$ donc $\boxed{i^5 = i}$.

Propriété

Les puissances de i sont périodiques de période 4 .

$\forall n \in N\ \exists p \in N$ tel que $n = 4p + r$ avec $0 \leq r < 4$.

$$\boldsymbol{i^n = i^{4p+r} = i^r} .$$

En particulier : $i^{4p} = 1$, $i^{4p+1} = i$ et $i^{4p+2} = i^2 = -1$.

Exercice d'application

Calculer i^{37} , i^{47} et i^{2136} .

Solution

$i^{37} = i^{4\times9+1} = i^1 = i$.

$i^{47} = i^{4\times11+3} = i^3 = -i$.

$i^{2136} = i^{4\times534+0} = i^0 = 1$.

8) Inverse de i

On a : $\frac{1}{i} = -i$.

Démonstration

$\frac{1}{i} = \frac{1\times i}{i\times i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$.

9) Opérations dans $\mathbb{C}$

a) Somme de nombres complexes

Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ alors $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)$.

Démonstration

$z_1 = a_1 + ib_1$ $\qquad z_2 = a_2 + ib_2$

En additionnant, on a : $z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)$.

b) Produit de nombres complexes

Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ alors $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i\,(a_1 b_2 + b_1 a_2)$.

Démonstration

Si $z_1 = a_1 + ib_1$ *et* $z_2 = a_2 + ib_2$

$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i b_1 a_2 - b_1 b_2 = (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)$.

c)Inverse d'un nombre complexe

Soit z = a + ib avec z ≠ 0 alors $\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$.

Démonstration

z = a + ib avec z ≠ 0 alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{1\,(a-ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 - (ib)^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$.

d)Opposé d'un nombre complexe

Si z = a + ib alors - z = - a – ib .

Démonstration

z = a + ib alors – z = - (a + ib) = - a – ib .

Propriété

Pour tous nombres complexes z et z', ***on a :***

$z z' = 0 \iff z = 0$ ***ou*** $z' = 0$.

Propriété

Pour tous nombres réels a et b , on a :

- $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$
- $(a + ib)^2 = a^2 + 2iab - b^2$
- $(a - ib)^2 = a^2 - 2iab - b^2$

II)Conjugué d'un nombre complexe

1) Définition

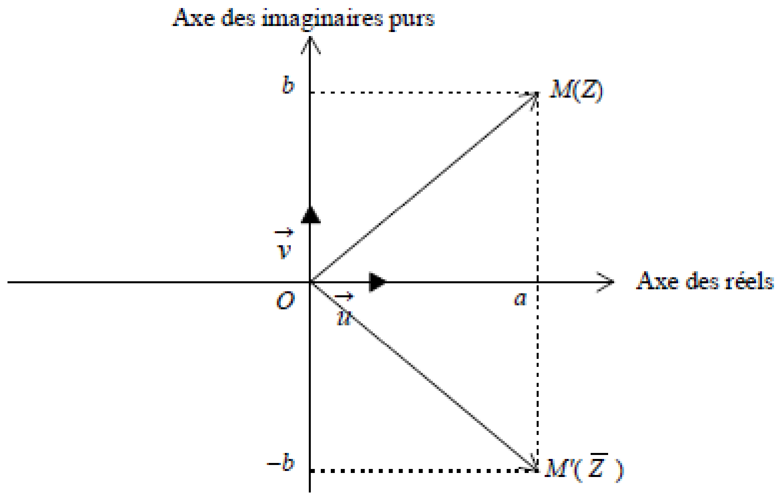
Soit z un nombre complexe tel que z = a + ib . On appelle conjugué de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ ***défini paz*** $\overline{z} = \overline{a + ib} = a - ib$.

$\overline{z}$ ***se lit z barre.***

Interprétation géométrique du conjugué

Les points M et M′ d'affixes respectives z et $\overline{z}$ ***sont symétriques par rapport à l'axe des réels***

$z_M = a + ib$ ***et*** $z_{M'} = a - ib$



Exercice d'application

Quel est le conjugué de z ?

1) $z = 1 + 3i$ 2) $z = 1 - i$ 3) $z = 2$ 4) $z = -i$

Solution

1) $z = 1 + 3i$ alors $\overline{z} = \overline{1 + 3i} = 1 - 3i$.

2) $z = 1 - i$ alors $\overline{z} = \overline{1 - i} = 1 + i$.

3) $z = 2$ alors $\overline{z} = \overline{2} = 2$

4) $z = -i$ alors $\overline{z} = \overline{-i} = i$

Propriété

Soit z un nombre complexe non nul . On a :

1) $\overline{\overline{z}} = z$ 2) $z + \overline{z} = 2\,Re(z)$

3) $z - \overline{z} = 2\,i\,Im(z)$ 4) $z\,\overline{z} = Re^2(z) + Im^2(z)$

5) $z \in IR \iff \overline{z} = z$ 6) $z \in i\,IR \iff \overline{z} = -z$

Propriété

Pour tous nombres complexes non nuls z , z_1 et z_2 . On a :

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ 2) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$

3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ 4) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ 5) $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

Exercice d'application

Quel est le conjugué de z ?

1) $z = \frac{1 + i}{3 + 5i}$ 2) $z = \frac{2}{1 - i}$ 3) $z = \frac{1}{i}$

Solution

1) $z = \frac{1\ +\ i}{3\ +\ 5i}$ alors $\overline{z} = \overline{(\frac{1\ +\ i}{3\ +\ 5i})} = \frac{\overline{1\ +\ i}}{\overline{3\ +\ 5i}} = \frac{1-\ i}{3-\ 5i}$

2) $z = \frac{2}{1\ -\ i}$ alors $\overline{z} = \overline{(\frac{2}{1\ -\ i})} = \frac{\overline{2}}{\overline{1\ -\ i}} = \frac{2}{1\ +\ i}$

3) $z = \frac{1}{i}$ alors $\overline{z} = \overline{(\frac{1}{i})} = \frac{\overline{1}}{\overline{i}} = \frac{1}{-\ i}$

Exercice d'application

1) Déterminer la forme algébrique de z

a) $z = \frac{1}{2\ +\ 4i}$ b) $z = \frac{3\ +\ 2i}{1\ -\ 5i}$

2) Soit $f:\ \boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{P}$

$M(z) \rightarrow M(z')$ tel que $z' = \frac{z+\ 1}{z\ -\ 1}$

a) Déterminer D_f.

b) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + i\,y'$

Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

c) Déterminer l'ensemble des points M tels que :

u) z' soit réel v) z' soit imaginaire pur

Solution

1) Déterminer la forme algébrique de z

a) $z = \frac{1}{2\ +\ 4i}$ alors $z = \frac{1(2-4i)}{(2\ +\ 4i)(2-4i)} = \frac{2\ -\ 4i}{2^2+4^2} = \frac{2\ -\ 4i}{20} = \boxed{\frac{1}{10} - \frac{1}{5}i}$.

b) $z = \frac{3\ +\ 2i}{1\ -\ 5i}$ alors $z = \frac{(3\ +\ 2i)(1+\ 5i)}{(1\ -\ 5i)(1+\ 5i)} = \frac{3+15i+2i-10}{1^2\ +\ 5^2} = \frac{-\ 7+17i}{26} = \boxed{\frac{-7}{26} + \frac{17}{26}i}$.

2) Soit $f:\ \boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{P}$

$M(z) \rightarrow M(z')$ tel que $z' = \frac{z+\ 1}{z\ -\ 1}$

<u>a) Déterminons D_f</u>

$z' = \frac{z+\ 1}{z\ -\ 1}$. z' existe s et seulement si $z\ -1 \neq 0$. $z\ -1 \neq 0$ alors $z \neq 1$.

Soit A le point d'affixe 1 . On a $\boxed{:\ \ D_f = \boldsymbol{P}\setminus\{A\}}$.

<u>b)Exprimer x' et y' en fonction de x et y.</u>

$z' = \frac{z+\ 1}{z\ -\ 1}$ alors $z' = x' + i\,y' = \frac{x+iy+\ 1}{x+iy\ -\ 1} = \frac{x+iy+\ 1}{x\ -\ 1+iy} = \frac{(x+iy+\ 1)(x-\ 1+iy)}{(x\ -\ 1+iy)(x-1+iy)}$

$= \frac{x^2-1+\ y^2-2iy}{(x-1)^2\ +\ y^2}$ donc $x' + i\,y' = \frac{x^2-1+\ y^2}{(x-1)^2\ +\ y^2} + i\ \frac{-\ 2y}{(x-1)^2\ +\ y^2}$ par identification

$x' = \frac{x^2 - 1 + y^2}{(x-1)^2 + y^2}$ et $y' = \frac{-2y}{(x-1)^2 + y^2}$

c) Déterminons l'ensemble des points M tels que z' soit réel

z' est réel si et seulement Im(z') = $y' = 0$.

$y' = 0 \iff \frac{-2y}{(x-1)^2 + y^2} = 0 \iff -2y = 0$ et $(x-1)^2 + y^2 \neq 0$

$\iff y = 0$ et $(x-1)^2 + y^2 \neq 0$

A est le point d'affixe 1 et B le point d'affixe – 1 .

L'ensemble des points M tels que z' est réel est la droite (AB) privée du point A(1).

d) *Déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit imaginai re pur .*

z' est imaginaire pur si et seulement si Re(z') = $x' = 0$

$x' = 0 \iff \frac{x^2 - 1 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} = 0 \iff x^2 - 1 + y^2 = 0$ et $(x-1)^2 + y^2 \neq 0$

$x^2 - 1 + y^2 = 0 \iff x^2 + y^2 = 1 \iff (x-0)^2 + (y-0)^2 = 1$.

L'ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur est le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point A d'affixe 1 .

III)Module d'un nombre complexe

1) Définition

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$. On appele module de z noté $|z|$ le nombre réel positif défini par : $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{Re^2(z) + Im^2(z)} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Interprétation géométrique du module

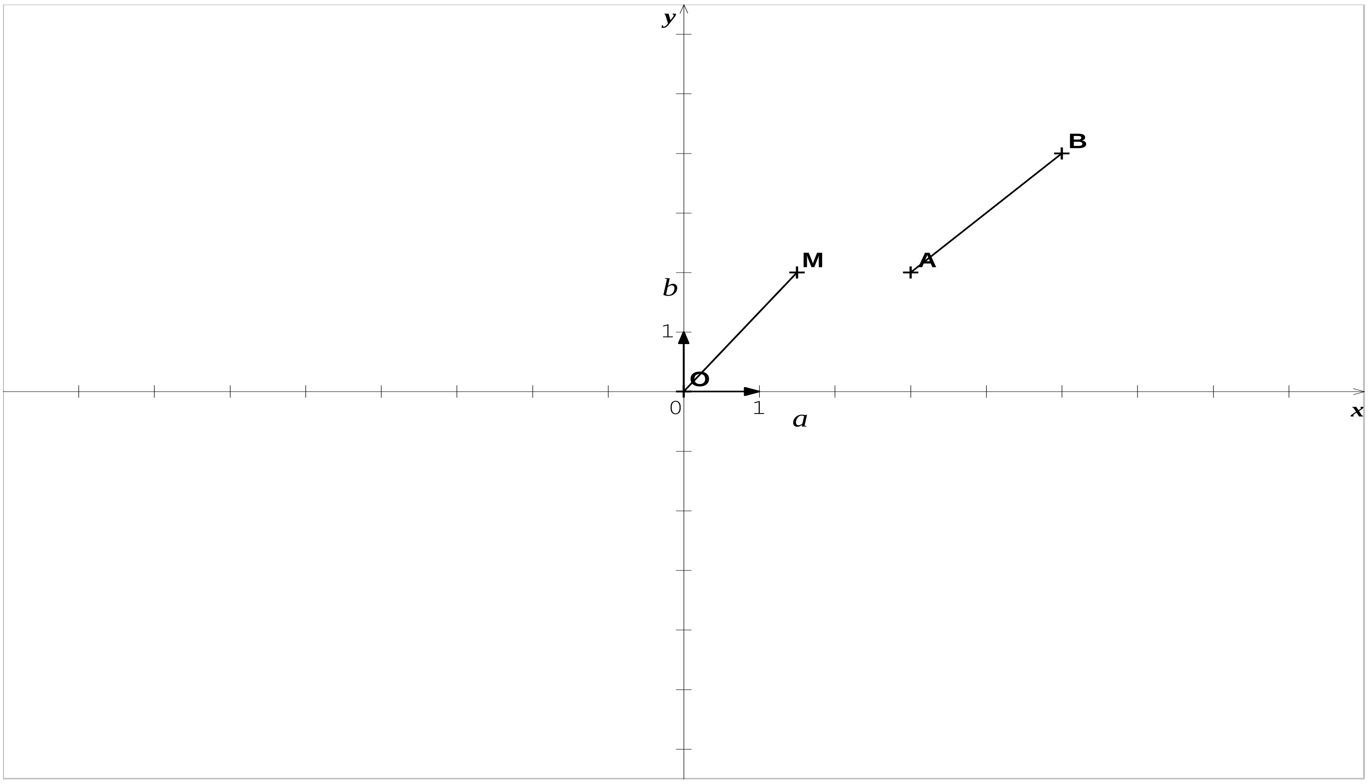
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

O est l'origine du repère donc $z_O = 0$.

Si z est l'affixe du point M alors $|z| =$ OM .

Si z_A et z_B sont les affixes respectives des points A et B alors AB = $|z_B - z_A|$.

Le module s'interprète géométriquement en distance .



Propriété

Si z_A et z_B sont les affixes respectives des points A et B alors AB = $|z_B - z_A|$.

Le module s'interprète géométriquement en distance.

Exercice d'application

Calculer le module de z

1) z = 1 + i *2) z = 2 – 3i* *3) z = 2* *4) z = - 2i*

Solution

1) z = 1 + i $\boxed{alors\ |z| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}}$

2) z = 2 – 3i $\boxed{alors\ |z| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}}$

3) z = 2 $\boxed{alors\ |z| = \sqrt{(2)^2} = 2}$

4) z = - 2i $\boxed{alors\ |z| = \sqrt{(-2)^2} = 2}$

Propriété

Soit z un nombre complexe non nul .

1) Si z = a + ib alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ***2)*** $|Re(z)| \leq |z|$

3) $|Im(z)| \leq |z|$ ***4)*** $|z| = 1 \iff z\,\overline{z} = 1$

5) $|z| = 0 \iff z = 0$ ***6)*** $|\overline{z}| = |z|$

7) $|\overline{z}| = |z| = |-\overline{z}| = |-z|$

Propriété

Pour tous nombres complexes non nuls z , z_1 et z_2, on a :

1) $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$ **2)** $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

3) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ **4)** $|z^n| = |z|^n \quad n \in N$

5) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ***(Inégalité triangulaire)***

Exercice d'application

1) Calculer le module de z

a) $z = -\sqrt{3} + i$ *b)* $z = 2(-\sqrt{3} + i)^4$ *c)* $z = (-\sqrt{3} + i)(1 + i)^2$

d) $z = \frac{(-\sqrt{3}+i)^3}{(1+i)^2}$ *e)* $z = \frac{1+i}{3+2i}$

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives 1 – 3i, 4 + 5i et -3 + 2i

Calculer AB, AC et BC .

Solution

1) Calculons le module de z

a) $z = -\sqrt{3} + i$

$$\boxed{|z| = |-\sqrt{3} + i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2}$$

b) $z = 2(-\sqrt{3} + i)^4$

$$\boxed{|z| = |2(-\sqrt{3} + i)^4| = |2| \times |(-\sqrt{3} + i)^4| = |2| \times |-\sqrt{3} + i|^4 = 2 \times 2^4 = 32}$$

c) $z = (-\sqrt{3} + i)(1 + i)^2$

$$|z| = |(-\sqrt{3} + i)(1 + i)^2| = |-\sqrt{3} + i| \times |(1 + i)^2| = |-\sqrt{3} + i| \times |1+i|^4$$
$$= 2 \times (\sqrt{2})^2$$

$$\boxed{= 2 \times 2 = 4}$$

d) $z = \frac{(-\sqrt{3}+i)^3}{(1+i)^2}$

$$\boxed{|z| = \left|\frac{(-\sqrt{3}+i)^3}{(1+i)^2}\right| = \frac{|(-\sqrt{3}+i)^3|}{(1+i)^2} = \frac{|-\sqrt{3}+i|^3}{|1+i|^2} = \frac{2^3}{(\sqrt{2})^2} = \frac{8}{2} = 4}$$

e) $z = \frac{1+i}{3+2i}$

$$\boxed{|z| = \left|\frac{1+i}{3+2i}\right| = \frac{|1+i|}{|3+2i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{26}}{13}}$$

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

$z_A = 1 - 3i$ $\quad z_B = 4 + 5i$ $\quad z_C = -3 + 2i$

$\boxed{AB = |z_B - z_A| = |4 + 5i - 1 + 3i| = |3 + 8i| = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}}$

$\boxed{AC = |z_C - z_A| = |-3 + 2i - 1 + 3i| = |-4 + 5i| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = \sqrt{41}}$

$\boxed{BC = |z_C - z_B| = |-3 + 2i - 4 - 5i| = |-7 - 3i| = \sqrt{(-7)^2 + (-3)^2} = \sqrt{58}}$

Exercice d'application

Soit f : $\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{P}$

$M(z) \rightarrow M'(z')$ *tel que* $z' = \dfrac{2iz - 1}{3 - iz}$

1) Déterminer D_f

2) Déterminer analytiquement puis geometriquement l'ensemble des points M tels que :

a) $|z'| = 2$ *b)* $|z'| = 4$

Solution

1) Déterminons $\boldsymbol{D_f}$

z' existe si et seulement si 3 – iz ≠ 0 .

3 – iz ≠ 0 donc 3 ≠ iz d'où z ≠ - 3i . Soit A d'affixe – 3i .

$\boxed{D_f = \boldsymbol{P}\backslash\{A\}}$ **.**

2) Déterminons analytiquement puis geometriquement l'ensemble des points M tels que :

a) $\boldsymbol{|z'| = 2}$ ***b)*** $\boldsymbol{|z'| = 4}$

Résolution géométrique

a) $|z'| = 2$

$|z'| = \left|\dfrac{2iz-1}{3-iz}\right| = \left|\dfrac{2i(z+\frac{1}{2}i)}{-i(z+3i)}\right| = \dfrac{|2i| \times |z+\frac{1}{2}i|}{|-i| \times |z+3i|} = \dfrac{2|z-(-\frac{1}{2}i)|}{|z-(-3i)|} = \dfrac{2MB}{MC}$ $\boxed{\text{avec } B(-\tfrac{1}{2}i) \text{ et } C(-3i)}$.

$\boxed{|z'| = 2 \quad \text{donc} \quad \dfrac{2MB}{MC} = 2 \text{ d'où } \dfrac{MB}{MC} = 1}$.

$\boxed{\text{L'ensemble des points M tels que } |z'| = 2 \text{ est la médiatrice de } [BC]}$.

b) $|z'| = 4$

$\boxed{|z'| = 4 \quad \text{donc} \quad \dfrac{2MB}{MC} = 4 \text{ d'où } \dfrac{MB}{MC} = 2}$.

L'ensemble des points M tels que $|z'| = 4$ *est le cercle de diamètre [EF] avec E et F définis par :*

$E = bar\,\{(B, 1); (C, 2)\}$ *et* $F = bar\{(B, 1); (C, -2)\}$.

Résolution algébrique

Déterminons l'ensemble des points M tels que $|\mathbf{z}'| = \mathbf{2}$

$z' = \frac{2iz\ -1}{3-iz}$ *Posons z = x + iy .*

$z' = \frac{2i(x+iy)\ -1}{3-i(x+iy)} = \frac{-2y-1+2ix}{3+y-ix}$

$|z'| = \frac{|-2y-1+2ix|}{|3+y-ix|} = \frac{\sqrt{(-2y-1)^2+4x^2}}{\sqrt{(3+y)^2+(-x)^2}}$

$|z'| = 2 \iff \frac{\sqrt{(-2y-1)^2+4x^2}}{\sqrt{(3+y)^2+(-x)^2}} = 2 \iff \frac{(-2y-1)^2+4x^2}{(3+y)^2+(-x)^2} = 4$

$\boxed{(-2y-1)^2 + 4x^2 = 4((3+y)^2+(-x)^2) \iff 4y+7=0}$.

L'ensemble des points M tels que $|z'| = 2$ est la droite d' équation : 4y + 7 = 0 .

Déterminons l'ensemble des points M tels que $|\mathbf{z}'| = \mathbf{4}$

$|z'| = \frac{|-2y-1+2ix|}{|3+y-ix|} = \frac{\sqrt{(-2y-1)^2+4x^2}}{\sqrt{(3+y)^2+(-x)^2}}$

$|z'| = 4 \iff \frac{\sqrt{(-2y-1)^2+4x^2}}{\sqrt{(3+y)^2+(-x)^2}} = 4 \iff \frac{(-2y-1)^2+4x^2}{(3+y)^2+(-x)^2} = 16$

$(-2y-1)^2 + 4x^2 = 16((3+y)^2+(-x)^2) \iff x^2+y^2+\frac{23}{3}y+\frac{143}{12} = 0$

$\iff (x-0)^2+(y-\frac{23}{6})^2-(\frac{23}{6})^2+\frac{143}{12} = 0 \iff (x-0)^2+(y-\frac{23}{6})^2 = \frac{100}{36}$

$\boxed{\iff (x-0)^2+(y-\frac{23}{6})^2 = (\frac{10}{6})^2}$.

L'ensemble des points M tels que $|z'| = 4$ est le cercle de centre I(0 ; - $\frac{23}{6}$) ou d'affixe - $\frac{23}{6}$ i

et de rayon R = $\frac{10}{6}$.

III) Argument d'un nombre complexe

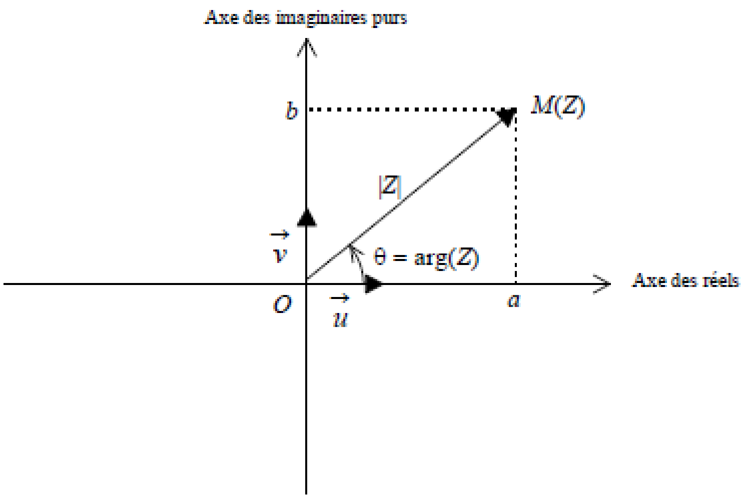
1) Définition

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}, \vec{v}$) .

Soit z un nombre complexe non nul tel que z = x + iy .M son image dans le plan complexe .

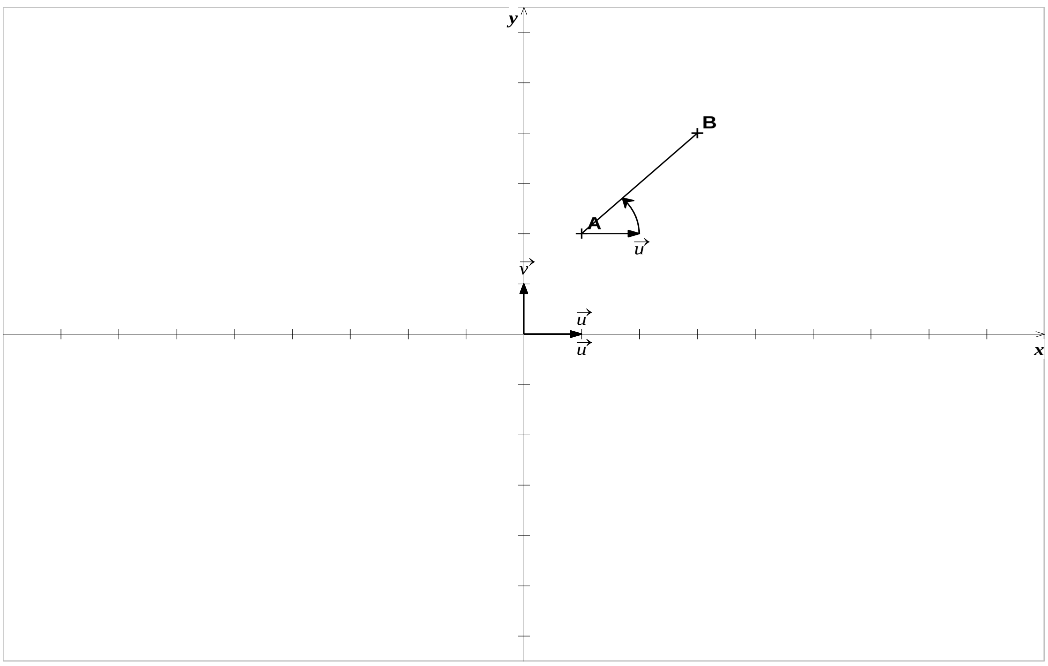
On appelle argument de z noté argz toute mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$ et on note

Argz = $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ (2π) .



<u>2)Interprétation géométrique de l'argument</u>

- ***Si z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$ alors argz est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}})$ et on note argz $=(\vec{u},\overrightarrow{OM})\ (2\pi)$.***
- ***Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B alors arg(z_B - z_A)est une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AB}})$ et on note arg(z_B - z_A) = $(\vec{u},\overrightarrow{AB})\ (2\pi)$.***



Exemple

1) arg(-3) = $\pi(2\pi)$

2) arg(2) = $0(2\pi)$

3) arg(2i) = $\frac{\pi}{2}(2\pi)$

4) arg(-3i) = $-\frac{\pi}{2}(2\pi)$

Propriété

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- ***Soit M le point d'affixe z alors $\arg z = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})\ (2\pi)$.***
- ***Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B alors $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})\ (2\pi)$.***
- ***Soient A, B et M les points d'affixes respectives z_A , z_B et z_M alors***
  $$\arg\left(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)(2\pi) .$$

Propriété

- $z \in IR \iff z = 0$ ***ou*** $\arg z = 0\ (\pi)$
- $z \in i\,IR \iff z = 0$ ***ou*** $\arg z = \frac{\pi}{2}\ (\pi)$

Propriété

- ***A, B et C sont alignés*** $\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in IR^*$ ***ou*** $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0\ (\pi)$
- $(AB) \perp (AC) \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\,IR^*$ ***ou*** $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}\ (\pi)$
- ***A, B, Cet D sont cocycliques*** $\iff \frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} : \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A} \in IR^*$ ***ou***
  $$\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_D - z_A}\right)\ (\pi)$$

Propriété

- ***ABCD est un parallélogramme*** $\iff z_B - z_A = z_C - z_D$ ***.***
- ***ABCD est un losange <=> ABCD est un parallélogramme et $(AC) \perp (BD)$.***
- ***ABCD est un rectangle <=> ABCD est un parallélogramme et AC = BD .***
- ***ABCD est un carré <=> ABCD est un parallélogramme et $(AC) \perp (BD)$ et AC = BD .***

Propriété

- ***ABC est un triangle rectangle en A*** $\iff \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\,IR^*$.
- ***ABC est un triangle isocèle en A*** $\iff \left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$ ***ou AB = AC .***
- ***ABC est un triangle rectangle et isocèle en A*** $\iff \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$ ***ou*** $-i$.
- ***ABC est un triangle équilatéral*** $\iff \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ***ou*** $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Propriété

Pour tous nombres complexes non nuls z , z_1 et z_2 , on a :

- $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)\ (2\pi)$
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)\ (2\pi)$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ (2\pi)$
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ (2\pi)$
- $\arg(z^n) = n\arg(z)\ (2\pi) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Exercice d'application

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

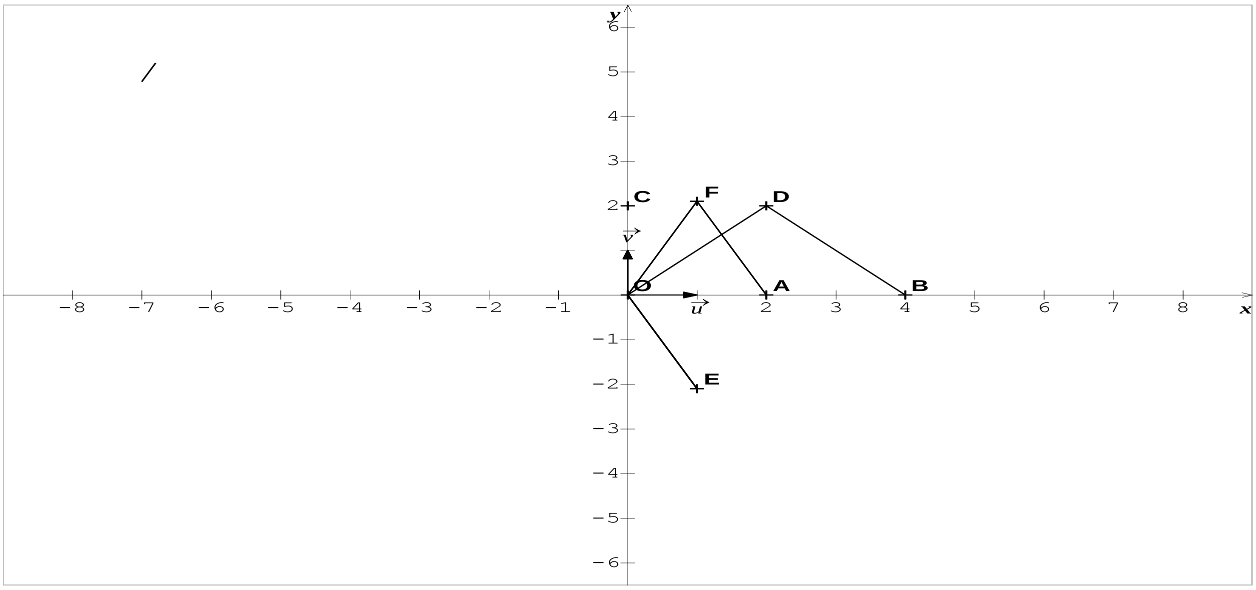
1) Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives 2, 4, 2i et 2 + 2i .

Placer ces points dans le repère . Quelle est la nature de OBD ?

2) Soient E et F les points d'affixes respectives 1 – i $\sqrt{3}$ et 1 + i$\sqrt{3}$

Placer ces points dans le repère . Quelle est la nature OEAF ?

Solution



1) Déterminons la nature de OBD.

$\frac{z_B - z_D}{z_O - z_D} = \frac{4-2-2i}{0-2-2i} = \frac{2-2i}{-2-2i} = \frac{i(-2-2i)}{-2-2i} = i$ *donc le triangle OBD est un triangle rectangle et isocèle en D*

2) Déterminons la nature de OEAF

$z_A - z_F$ = *2 – 1 - i*$\sqrt{3}$ = *1 - i*$\sqrt{3}$

$z_E - z_O$ = *1 - i*$\sqrt{3}$ *- o = 1 - i*$\sqrt{3}$

Donc OEAF est un parallélogramme.

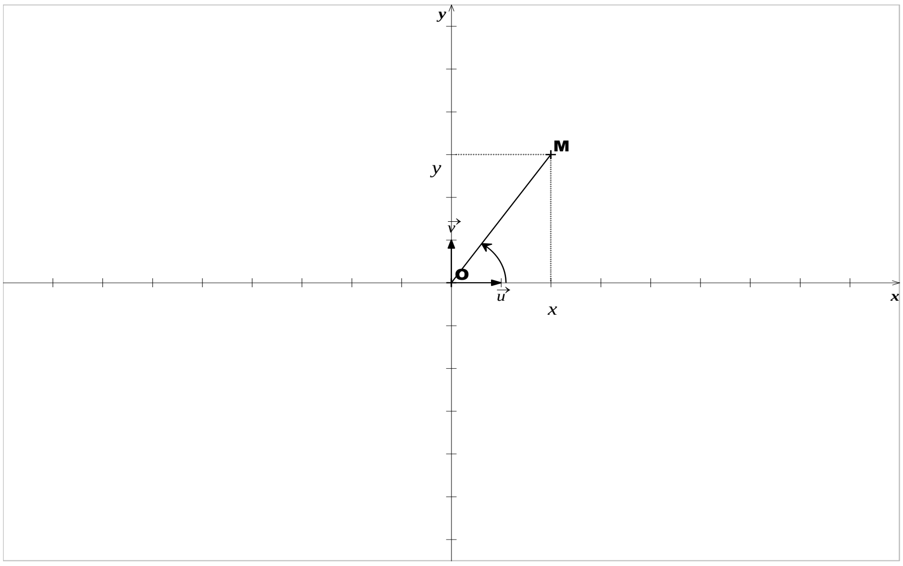
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{EF})$ = $arg(\frac{z_E - z_F}{z_O - z_A})$= $\boldsymbol{arg(}\frac{1 - i\sqrt{3}-1- i\sqrt{3}}{-2}) = \boldsymbol{arg(}\frac{-2i\sqrt{3}}{-2} = \boldsymbol{arg(i\sqrt{3})} = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{EF}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ ***donc (OA)*** $\perp$ ***(EF)*** **.**

Donc *OEAF est un parallélogramme qui a ses diagonales perpendiculaires d'où*

OEAF est un losange .

3) Détermination de l'argument



Posons $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})\ (2\pi)$ **= argz . Donc argz =** θ .

Soit z un nombre complexe non nul tel que z = x + iy . On a : $\begin{cases} \boldsymbol{argz} = \theta \\ z = x + iy \end{cases}$

$x = OM \cos\theta$ *or* $OM = |z|$ *donc* $x = |z|\cos\theta$ *d'où* $\cos\theta = \frac{x}{|z|}$ *.or x = Re(z) donc* $\cos\theta = \frac{Re(z)}{|z|}$.

$\boxed{\textbf{on obtient:} \quad \cos\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{Re(z)}}{\boldsymbol{|z|}}}$.

$y = OM \sin\theta$ *or* $OM = |z|$ *donc* $y = |z|\sin\theta$ *d'où* $\sin\theta = \frac{y}{|z|}$ *.or y = Im(z) donc* $\sin\theta = \frac{Im(z)}{|z|}$.

$\boxed{\textbf{on obtient:} \quad \sin\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{Im(z)}}{\boldsymbol{|z|}}}$.

Finalement on a : $\cos\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{Re(z)}}{\boldsymbol{|z|}}$ ***et*** $\sin\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{Im(z)}}{\boldsymbol{|z|}}$

Ces deux formules permettent de déterminer θ qui représente l'argument de z .

Exercice d'application

Déterminer l'argument de z :

1) $z = 1 + i$ 2) $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) $z = -\sqrt{3} + i$ 4) $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) $z = (-\sqrt{3} + i)^2(1 + i)^4$ 6) $z = \frac{(-\sqrt{3} + i)^3}{(1 + i)^2}$

Solution

1) $z = 1 + i$

$z = 1 + i$ *Soit* θ *l'argument de z .*

$Re(z) = 1$ $Im(z) = 1$ $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$ $\boldsymbol{\sin\theta = \frac{Im(z)}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$ ***d'où*** $\boldsymbol{\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}}$

$\boxed{\textbf{Donc } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ . On a : } \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)}$.

2) $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *Soit θ l'argument de z .*

$Re(z) = -\frac{1}{2}$ $Im(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $|z| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$

$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}}$ $\boldsymbol{\sin\theta = \frac{Im(z)}{|z|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$ ***d'où*** $\boldsymbol{\begin{cases} \cos\theta = \frac{-1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}}$

$\boxed{\textbf{Donc } \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ On a : } \arg(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)}$.

3) $z = -\sqrt{3} + i$

$z = -\sqrt{3} + i$ *Soit θ l'argument de z .*

$Re(z) = -\sqrt{3}$ $Im(z) = 1$ $|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$ $\boldsymbol{\sin\theta = \frac{Im(z)}{|z|} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}}$ ***d'où*** $\boldsymbol{\begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}}$

$\boxed{\textbf{Donc } \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \text{ On a : } \arg(-\sqrt{3} + i) = \frac{5\pi}{6}\ (2\pi)}$.

4) $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *Soit θ l'argument de z .*

$Re(z) = \frac{1}{2}$ $Im(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $|z| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$

$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}}$ $\boldsymbol{\sin\theta = \frac{Im(z)}{|z|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$ ***d'où*** $\boldsymbol{\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}}$

$\boxed{\textbf{Donc } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ On a : } \arg(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)}$.

5) $z = (-\sqrt{3} + i)^2(1 + i)^4$

$z = (-\sqrt{3} + i)^2(1 + i)^4$

$\arg z = \arg((-\sqrt{3} + i)^2(1 + i)^4) = \arg(-\sqrt{3} + i)^2 + \arg(1 + i)^4$

$= 2\, arg(-\sqrt{3} + i) + 4\, arg(1 + i)$

$= 2(\frac{5\pi}{6}) + 4(\frac{\pi}{4}) = \frac{8\pi}{3}$

$\boxed{arg((-\sqrt{3} + i)^2(1 + i)^4) = \frac{8\pi}{3}\ (2\pi)}$.

6) $z = \frac{(-\sqrt{3}+i)^3}{(1+i)^2}$

$z = \frac{(-\sqrt{3}+i)^3}{(1+i)^2}$

$argz = arg(\frac{(-\sqrt{3}+i)^3}{(1+i)^2}) = arg((-\sqrt{3} + i)^3) - arg((1 + i)^2)$

$= 3\, arg(-\sqrt{3} + i) - 2\, arg(1 + i)$

$= 3\,(\frac{5\pi}{6}) - 2(\frac{\pi}{4}) = 2\pi(2\pi) = 0\ (2\pi)$

4) Formule trigonométrique d'un nombre copmlexe

Soit z un nombre complexe non nul d'argument .

On appelle forme trigonométrique de z l'écriture $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Remarque

$z = x + iy$ et $argz =$. Or $x = OM\cos\theta = |z|\cos\theta$ et $y = OM\sin\theta = |z|\sin\theta$

donc $z = x + iy = |z|\cos\theta + i\,|z|\sin\theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

On obtient cette écriture : $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ appelée écriture trigonométrique de z .

Exercice d'application

Donner la forme trigonométrique de z :

1) $z = -\sqrt{3} + i$ 2) $z = 1 + i$ 3) $z = \frac{-\sqrt{2}}{1-i}$

4) $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 5) $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 6) $z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$, $\theta \in [0; 2\pi[$

7) $z = -\sin\theta + i\cos\theta$

Solution

Donnons la forme trigonométrique de z :

1) $z = -\sqrt{3} + i$

$|-\sqrt{3} + i| = 2$ et $arg(-\sqrt{3} + i) = \frac{5\pi}{6}\ (2\pi)$

$\boxed{z = -\sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})}$.

2) $z = 1 + i$

$|1 + i| = \sqrt{2}$ et $arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

$$\boxed{z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}\ .$$

3) $z = \dfrac{-\sqrt{2}}{1-i}$

$\left|\dfrac{-\sqrt{2}}{1-i}\right| = \dfrac{|-\sqrt{2}|}{|1-i|} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ $\boxed{\text{donc } \left|\dfrac{-\sqrt{2}}{1-i}\right| = 1}$.

$arg(\dfrac{-\sqrt{2}}{1-i}) = arg(-\sqrt{2}) - arg(1-i)$.

$arg(-\sqrt{2}) = \pi\ (2\pi)$ *et* $arg(1-i) = arg(\overline{1+i}) = -\,arg(1+i) = -\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

$arg(\dfrac{-\sqrt{2}}{1-i}) = arg(-\sqrt{2}) - arg(1-i) = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}\ (2\pi) = \frac{-3\pi}{4}\ (2\pi)$

$\boxed{arg(\dfrac{-\sqrt{2}}{1-i}) = \dfrac{-3\pi}{4}\ (2\pi)}$.

$\boxed{\left|\dfrac{-\sqrt{2}}{1-i}\right| = 1 \quad et \quad arg(\dfrac{-\sqrt{2}}{1-i}) = \dfrac{-3\pi}{4}\ (2\pi)}$.

$\boxed{z = \dfrac{-\sqrt{2}}{1-i} = 1\left(\cos\left(\dfrac{-3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{-3\pi}{4}\right)\right)}$.

4) $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\left|\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$ *et* $arg(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = \dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$

$\boxed{z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 1\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)}$.

5) $z = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\left|-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$ *et* $arg(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = \dfrac{2\pi}{3}\ (2\pi)$

$\boxed{z = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 1\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)}$.

6) $z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta\ ,\ \theta \in [0; 2\pi[$

$$|1 + \cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \sqrt{2 + 2\cos\theta} = \sqrt{2(1+\cos\theta)}$$
$$= \sqrt{2 \times 2\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2} = \sqrt{4\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2} = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

$\boxed{|1 + \cos\theta + i\sin\theta| = 2\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|}$.

1er cas:

Si $\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ *alors* $\cos\dfrac{\theta}{2} = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

Donc $z = 0$.

2eme cas :

Si $\dfrac{\theta}{2} \in [0; \dfrac{\pi}{2}[$ *alors* $\cos\dfrac{\theta}{2} > 0$.

$|z| = 2\cos\frac{\theta}{2}$. *Re(z) = 1 + cos θ* *Im (z) = sin θ*

Soit x l'argument de z .

$\cos x = \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{1+\cos\theta}{2\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2(\cos\frac{\theta}{2})^2}{2\cos\frac{\theta}{2}} = \cos\frac{\theta}{2}$

$\sin x = \frac{Im(z)}{|z|} = \frac{\sin\theta}{2\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}\,2\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}} = \sin\frac{\theta}{2}$

Donc $x = \frac{\theta}{2}$.

$\boxed{z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta = 2\cos\frac{\theta}{2}\,(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})}$.

3eme cas:

Si $\frac{\theta}{2} \in \left]\frac{\pi}{2};\ \pi\right[$ *alors* $\cos\frac{\theta}{2} < 0$.

$|z| = -2\cos\frac{\theta}{2}$. *Re(z) = 1 + cos θ* *Im (z) = sin θ*

Soit x l'argument de z .

$\cos x = \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{1+\cos\theta}{-2\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2(\cos\frac{\theta}{2})^2}{2\cos\frac{\theta}{2}} = -\cos\frac{\theta}{2}$

$\sin x = \frac{Im(z)}{|z|} = \frac{\sin\theta}{2\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}\,2\sin\frac{\theta}{2}}{-2\cos\frac{\theta}{2}} = -\sin\frac{\theta}{2}$

Donc $x = \pi + \frac{\theta}{2}$.

$\boxed{z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta = -2\cos\frac{\theta}{2}\,(\cos(\pi + \frac{\theta}{2}) + i\sin(\pi + \frac{\theta}{2}))}$

7) z = - sin θ + i cos θ

$|-\sin\theta + i\cos\theta| = \sqrt{(-\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2} = \sqrt{(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2} = \sqrt{\mathbf{1}} = \mathbf{1}$

$|\boldsymbol{z}| = \mathbf{1}$ ***Re(z)*** = - $\sin\theta$ *Im(z) = cos θ*

Soit x l'argument de z .

$\cos x = \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{-\sin\theta}{1} = -\sin\theta$

$\sin x = \frac{Im(z)}{|z|} = \frac{\cos\theta}{1} = \cos\theta$

Donc $x = \frac{\pi}{2} + \theta$.

$\boxed{z = -\sin\theta + i\cos\theta = 1\,(\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) + i\sin(\frac{\pi}{2} + \theta))}$.

Exercice d'application

On pose : $z_1 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$; $z_2 = 1 + i$ $z = \frac{z_1}{z_2}$

1) Donner la forme trigonométrique de z

2) Donner la forme algébrique de z

3) En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{\pi}{12}$.

Solution

1) Donnons la forme trigonométrique de z

$z_1 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$; $z_2 = 1 + i$; $z = \frac{z_1}{z_2}$

$$\boxed{|z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 \qquad \text{donc } |z| = 2 .}$$

$\arg z = \arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg z_1 - \arg z_2$

$\arg z_2 = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

Déterminons $\boldsymbol{\arg z_1 = \arg(\sqrt{6} + i\sqrt{2})}$

$z_1 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$ $|z_1| = |\sqrt{6} + i\sqrt{2}| = 2\sqrt{2}$

Re$(z_1) = \sqrt{6}$; *Im*$(z_1) = \sqrt{2}$; $|z_1| = 2\sqrt{2}$

Soit x l'argument de z_1 .

$\cos x = \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin x = \frac{Im(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

Donc $x = \frac{\pi}{6}$ *d'où* $\arg z_1 = \arg(\sqrt{6} + i\sqrt{2}) = \frac{\pi}{6}\ (2\pi)$

$\boxed{\arg z = \arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg z_1 - \arg z_2 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12}\ (2\pi)}$.

$\boxed{|z| = 2 \quad \text{et} \quad \arg z = -\frac{\pi}{12} \quad \text{donc} \quad z = 2(\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12}))}$.

2) Donnons la forme algébrique de z

$z_1 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$; $z_2 = 1 + i$; $z = \frac{z_1}{z_2}$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{1 + i} = \frac{(\sqrt{6} + i\sqrt{2})(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$$

$$\boxed{\text{Donc} \quad z = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}} .$$

3) Déduisons $\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{12}}$ ***et*** $\boldsymbol{\sin\frac{\pi}{12}}$.

$z = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ $\quad\quad$ $z = 2(\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12}))$

donc $\quad 2(\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12})) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ $\quad$ *d'où par indentification*

$$2\cos(-\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad 2\sin(-\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

On obtient :	$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Propriété

- ***L'ensemble des points M tels que*** $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0\ (2\pi)$ ***est la droite (AB) privée du segment [AB].***
- ***L'ensemble des points M tels que*** $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0\ (\pi)$ ***est la droite (AB) privée des points A et B .***
- ***L'ensemble des points M tels que*** $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi\ (2\pi)$ ***est le segment [AB] privé des points A et B.***
- ***L'ensemble des points M tels que*** $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}\ (\pi)$ ***est le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B .***

Exercice d'application

Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$ *. On considère le nombre complexe* z' *défini par :*

$z' = \frac{z+1}{z-1}$ $\quad$ *avec* $M(z)$, $M'(z')$, $A(1)$ *et* $B(-1)$.

1) Interpréter géométriquement $\arg z'$ *pour* $z \neq 1$ *et* $z \neq -1$.

2) Déterminer et représenter l'ensemble des points M tels que :

a) $z' \in IR$ $\quad\quad$ *b)* $z' \in iIR$

Solution

1) Interprétons géométriquement $\arg z'$ ***pour*** $z \neq 1$ ***et*** $z \neq -1$ ***.***

$z' = \frac{z+1}{z-1}$ $\quad \arg z' = \arg(\frac{z+1}{z-1}) = \arg(\frac{z-(-1)}{z-(1)}) = \arg(\frac{z-z_B}{z-z_A}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})(2\pi)$

$\boxed{\text{Donc} \quad \arg z' = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})}$.

2) Déterminons et représentons l'ensemble (E) des points M tels que :

a) $z' \in IR$

$z' \in IR \iff z' = 0$ *ou* $\arg z' = 0\ (\pi)$

$\iff \frac{z+1}{z-1} = 0$ *ou* $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0\ (\pi)$

$\iff z+1 = 0$ *et* $z-1 \neq 0 \quad = 0$ *ou* $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0\ (\pi)$

$\iff z = -1$ *et* $z \neq 1 \quad = 0$ *ou* $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0\ (\pi)$

Si $z = -1$ *alors* $z' = 0 \in IR$ *donc* $B \in (E)$.

Si $z = 1$ alors z' n'existe pas donc A n'appartient pas à (E) .

L'ensemble (E) des points M tels que $z' \in IR$ est la droite (AB) privé du point A d'affixe 1 .

2) Déterminons et représentons l'ensemble (F) des points M tels que :

b) $z' \in i\,IR$

$z' \in iIR \iff z' = 0$ *ou* $\arg z' = \frac{\pi}{2}\ (\pi)$

$\iff \frac{z+1}{z-1} = 0$ *ou* $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2}\ (\pi)$

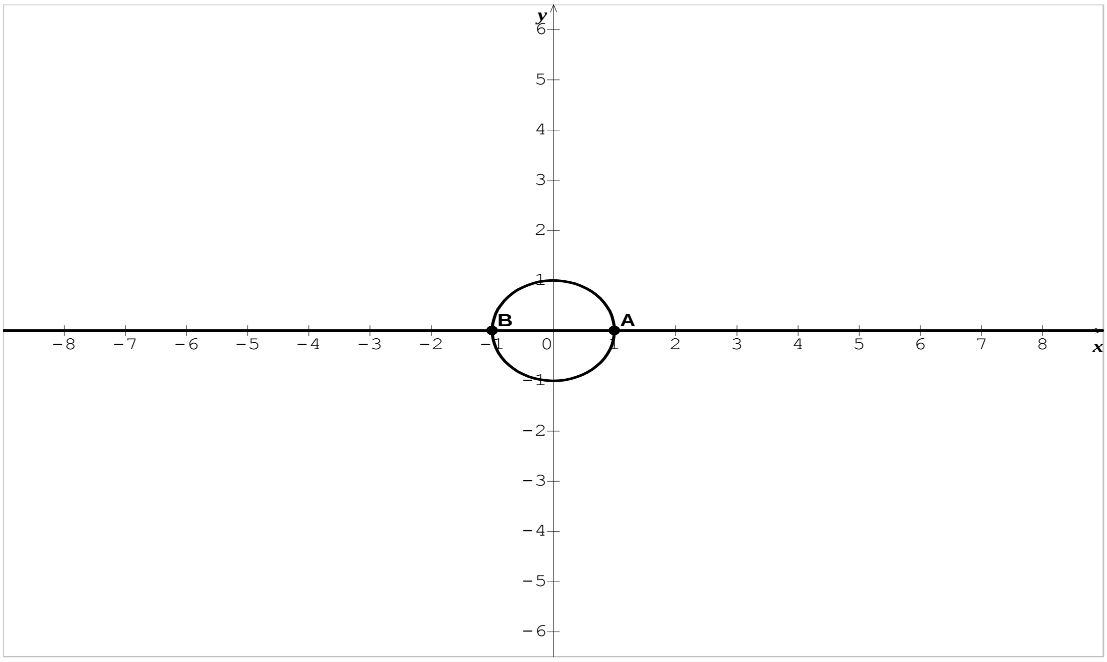
$\iff z + 1 = 0$ *et* $z - 1 \neq 0 \quad = 0$ *ou* $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2}\ (\pi)$

$\iff z = -1$ *et* $z \neq 1 \quad = 0$ *ou* $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2}\ (\pi)$

Si $z = -1$ alors $z' = 0 \in iIR$ donc $B \in (F)$.

Si $z = 1$ alors z' n'existe pas donc A n'appartient pas à (F) .

L'ensemble (F) des points M tels que $z' \in i\,IR$ est le cercle de diamètre [AB] privé du point A d'affixe 1 .



RAPPEL

1) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

2) $C_n^p = \frac{n\,!}{p!(n-p)!}$ ***avec*** $0 \leq p \leq n$, $C_n^0 = 1$, $C_n^n = 1$ ***et*** $C_n^1 = n$

5)Formule de Moivre

Pout tout nombre réel x et pour tout entier relatif n , on a :

- $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$
- $(\cos x - i \sin x)^n = \cos nx - i \sin nx$

APPLICATION DE LA FORMULE DE MOIVRE

La formule de Moivre permet de calculer cos nx et sin nx en fonction des puissances de cos x et sin x .

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

D'où l'on obtient:

- $\cos nx = Re\,[\,(\cos x + i \sin x)^n]$
- $\sin nx = Im\,[\,(\cos x + i \sin x)^n]$

FORMULES

Ces formules permettent de calculer :

1) cos nx en fonction des puissances de cos x .

2) sin nx en fonction des puissances de sin x .

$\cos nx = C_n^0 \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \sin^4 x - C_n^6 \cos^{n-6} x \sin^6 x + \dots\dots\dots$

$\sin nx = C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + C_n^5 \cos^{n-5} x \sin^5 x - C_n^7 \cos^{n-7} x \sin^7 x + \dots.$

Exercice d'application

1) Exprimer cos 3x en fonction de cos x

2) Exprimer sin 3x en fonction de sin x

3) Exprimer cos 5x en fonction de cos x

4) Exprimer sin 5x en fonction de sin x

Solution

1) Exprimons cos 3x en fonction de cos x

$\cos 3x = C_3^0 \cos^3 x - C_3^2 \cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$

$= \cos^3 x - 3\cos x\,(1 - \cos^2 x) = \cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^2 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\boxed{\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x}$.

2) Exprimons sin 3x en fonction de sin x

$\sin 3x = C_3^1 \cos^2 x \sin x - C_3^3 \cos^0 x \sin^3 x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$

$= 3(1 - \sin^2 x) \sin x - \sin^3 x = 3\sin x - 3\sin^3 x - \sin^3 x = -4\sin^3 x + 3\sin x$

$\boxed{\sin 3x = -4\sin^3 x + 3\sin x}$.

3) Exprimons cos 5x en fonction de cos x

$Cos\ 5x = C_5^0 cos^5 x - C_5^2 cos^3 x sin^2 x + C_5^4 cos\ x sin^4 x$

$= cos^5 x - 10cos^3 x sin^2 x + 5\ cos\ x sin^4 x$

$= cos^5 x - 10cos^3 x(1 - cos^2 x) + 5\ cos\ x(1 - cos^2 x)^{\ 2}$

$= cos^5 x - 10cos^3 x + 11cos^4 x + 5\ cos\ x - 10cos^3 x + 5cos^5 x$

$= 16cos^5 x - 20cos^3 x + 5cos\ x$

$\boxed{\mathbf{cos\ 5x = 16cos^5 x - 20cos^3 x + 5cos\ x}}$.

4) Exprimons sin 5x en fonction de sin x

$sin\ 5x = C_5^1 cos^4 x sin\ x - C_5^3 cos^2 x sin^3 x + C_5^5 sin^5 x$

$= 5cos^4 x sinx - 10cos^2 x sin^3 x + sin^5 x$

$=5(1 - sin^2 x)^2 sin\ x - 10(1 - sin^2 x) sin^3 x + sin^5 x$

$=16sin^5 x - 20sin^3 x + 5sin\ x$

$\boxed{\mathbf{sin\ 5x = 16sin^5 x - 20sin^3 x + 5sin\ x}}$.

6) Forme exponentielle d'un nombre complexe

a)NOATATION

On pose $\cos x + i \sin x = e^{ix}$ **,** $\cos x - i \sin x = e^{-ix}$

Exemple

1) $cos\ 2x + i\ sin\ 2x = e^{2ix}$

2) $cos\ 5x - i\ sin\ 5x = e^{-5ix}$

3) $cos10\ x + i\ sin10\ x = e^{10ix}$

b) Forme exponentielle d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ . On appelle forme exponentielle de z l'écriture

$z = |z|e^{i\theta}$.

Remarque

L'écriture trigonométrique de z est $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ **.**

Or $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ ***donc on obtient*** $z = |z|e^{i\theta}$.

L'écriture $z = |z|e^{i\theta}$ ***est appelée la forme exponentielle du nombre complexe z .***

Exercice d'application

Donner la forme exponentielle de z

1) $z = -\sqrt{3} + i$ 2) $z = 1 + i$ 3) $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) $z = 1 + i\sqrt{3}$ 6) $z = -\sqrt{6} + i\sqrt{2}$

Solution

Donner la forme exponentielle de z

1) $z = -\sqrt{3} + i$

$|-\sqrt{3} + i| = 2$ *et* $arg(-\sqrt{3} + i) = \frac{5\pi}{6}\ (2\pi)$

$\boxed{\boldsymbol{z = -\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}}}$.

2) $z = 1 + i$

$|1 + i| = \sqrt{2}$ *et* $arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

$\boxed{\boldsymbol{z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}}$.

3) $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$ *et* $arg(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$

$\boxed{\boldsymbol{z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1e^{i\frac{\pi}{3}}}}$.

4) $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$ *et* $arg(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$

$\boxed{\boldsymbol{z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1e^{i\frac{2\pi}{3}}}}$.

5) $z = 1 + i\sqrt{3}$

$|z| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{\mathbf{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \sqrt{\mathbf{4}} = \mathbf{2}$

Soit θ *l'argument de z*

$\cos\theta = \frac{1}{2}$ $\quad\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ *donc* $\theta = \frac{\pi}{3}$

$\boxed{\boldsymbol{z = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}}}$

6) $z = -\sqrt{6} + i\sqrt{2}$

$|z| = |-\sqrt{6} + i\sqrt{2}| = \sqrt{(-\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$

Soit θ *l'argument de z*

$\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ $\quad\sin\theta = \frac{1}{2}$ $\quad$ *donc* $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\boxed{\boldsymbol{z = -\sqrt{6} + i\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{2\pi}{3}}}}$.

Propriété

Pour tous nombres réels θ , θ_1 et θ_2 , on a :

- $e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
- $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
- $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $(e^{i\theta})^p = e^{ip\theta} \quad \forall\ p \in \mathbb{Z}$

7) *Formules d'Euler*

Pour tout nombre réel θ et pour tout entier relatif n , on a :

- $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
- $\cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$
- $\sin n\theta = \frac{e^{in\theta} \quad e^{-in\theta}}{2i}$

Démonstration

On a : $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ *(1)* , $\cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$ *(2)*

En faisant la somme de (1) et (2), on obtient : $2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ *d'où* $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

En faisant la différence de (1) et (2), on obtient : $2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$ *d'où* $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Exemple

1) $\cos 3x = \frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2}$ 2) $\sin 5x = \frac{e^{i5x} - e^{-i5x}}{2i}$

3) $\cos 10x = \frac{e^{i10x} + e^{-i10x}}{2}$ 4) $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

8) *Linéarisation*

O n peut transformer un polynôme en cos x et en sin x en une somme de cosinus et de sinus des multiples de x. On dit qu'on linéarise le polynôme donné.

9) *Formules de linéarisation*

Pour tout nombre réel θ et pour tout entier naturel n , on a :

- $\cos^n\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^n$
- $\sin^n\theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^n$

Exercice d'application

Linéariser

1) $\cos^3 x$ 2) $\sin^3 x$ 3) $\cos^4 x$ 4) $\cos^6 x$

Solution

1)Linérisons $\cos^3 x$

$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$\cos^3 x = (\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2})^3 = \frac{e^{i3x} + 3e^{i2x}e^{-ix} + 3\,e^{ix}\,e^{-i2x} + e^{-i3x}}{8} = \frac{e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x}}{8}$

$= \frac{(e^{i3x} + e^{-i3x}) + 3(\,e^{ix} + e^{-ix})}{8} = \frac{2\cos 3x + 3(2\cos x)}{8} = \frac{2\cos 3x + 6\cos x}{8} = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$

$\boxed{\boldsymbol{\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x}}$.

2) Linérisons $\sin^3 x$

$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$\sin^3 x = (\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i})^3 = \frac{e^{i3x} - 3e^{i2x}e^{-ix} + 3\,e^{ix}\,e^{-i2x} - e^{-i3x}}{-8i} = \frac{e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-i3x}}{8}$

$= \frac{(e^{i3x} - e^{-i3x}) - 3(\,e^{ix} - e^{-ix})}{-8i} = \frac{2\,i\sin 3x - 3(2i\sin x)}{-8i} = \frac{2\sin 3x - 6\sin x}{-8} = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$

$\boxed{\boldsymbol{\sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x}}$.

3) Linéarisons $\cos^4 x$

On pose z = cos x + i sin x . Donc $z\,\bar{z} = 1$

On a : $z = \frac{1}{\bar{z}}$ et $\bar{z} = \frac{1}{z}$. On a : $\cos x = \frac{z + \bar{z}}{2}$

$\cos^4 x = (\frac{z + \bar{z}}{2})^4 = \frac{1}{16}[C_4^0 z^4 + C_4^1 z^3\bar{z} + C_4^2 z^2\bar{z}^2 + C_4^3 z\bar{z}^3 + C_4^4\bar{z}^4]$

$= \frac{1}{16}[z^4 + 4z^3\bar{z} + 6z^2\bar{z}^2 + 4z\bar{z}^3 + 4\bar{z}^4]$

$= \frac{1}{16}[(z^4 + \bar{z}^4) + 4(z^2 + \bar{z}^2) + 6]$

$z^4 + \bar{z}^4 = 2\cos 4x$ $\qquad z^2 + \bar{z}^2 = 2\cos 2x$

$\cos^4 x = \frac{1}{16}\,(2\cos 4x + 4(2\cos 2x) + 6) = \frac{1}{16}\,(2\cos 4x + 8\cos 2x + 6) = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$

$\boxed{\boldsymbol{\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}}}$

4) Linéarisons $\cos^6 x$

On pose z = cos x + i sin x . Donc $z\,\bar{z} = 1$

On a : $z = \frac{1}{\bar{z}}$ et $\bar{z} = \frac{1}{z}$. On a : $\cos x = \frac{z + \bar{z}}{2}$

$\cos^6 x = (\frac{z + \bar{z}}{2})^6 = \frac{1}{64}[C_6^0 z^6 + C_6^1 z^5\bar{z} + C_6^2 z^4\bar{z}^2 + C_6^3 z^3\bar{z}^3 + C_6^4 z^2\bar{z}^4 + C_6^5 z^2\bar{z}^5 + C_6^6 z\bar{z}^6]$

$= \frac{1}{64}\,[z^6 + 6z^4 + 15z^2 + 20 + 15\bar{z}^2 + 6\bar{z}^4 + \bar{z}^6]$

$= \frac{1}{64}[(z^6 + \bar{z}^6) + 15(z^2 + \bar{z}^2) + 6(z^4 + \bar{z}^4) + 20]$

$z^6 + \bar{z}^6 = 2\cos 6x$ $\quad z^2 + \bar{z}^2 = 2\cos 2x$ $\quad z^4 + \bar{z}^4 = 2\cos 4x$

$\cos^6 x = \frac{1}{64}[(2\cos 6x) + 15(2\cos 2x) + 6(2\cos 4x) + 20] = \frac{1}{32}\cos 6x + \frac{3}{16}\cos 4x +$ *1532cos2x+ 516*

$$\boxed{\cos^6 x = \frac{1}{32}\cos 6x + \frac{3}{16}\cos 4x + \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{5}{16}}$$

Propriété

Pout tout nombre réel θ , on a :

- $1 + e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$
- $1 - e^{i\theta} = -2i\sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$

Propriété

Pour tous nombres réels a et b , on a :

- $e^{ia} + e^{ib} = 2\cos(\frac{a-b}{2})e^{i(\frac{a+b}{2})}$
- $e^{ia} - e^{ib} = -2i\sin(\frac{a-b}{2})e^{i(\frac{a+b}{2})}$

Propriété

Soient M et A deux points d'affixes respectices z et z_A .

L'ensemble des points M tels que $|z - z_A| = R$, $R > 0$ est le cercle de centre A et de rayon R .

Exemple

L'ensemble des points M tels que $|z - 1 + 2i| = 5$ est le cercle de centre A d'affixe 1 – 2i et de rayon 5 .

Propriété : ***Affixe du barycentre de n points***

Soient $A_1(z_{A_1}), A_2(z_{A_2}), A_3(z_{A_3}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. A_n(z_{A_n})$.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \alpha_n$ des nombres réels tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \ldots\ldots + \alpha_n \neq 0$.

L'affixe G du barycentre du système de points pondérés $\{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); (A_3, \alpha_3); \quad ; (A_n, \alpha_n)\}$

est : $z_G = \frac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \alpha_3 z_{A_3} + \qquad + \alpha_n z_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \qquad + \alpha_n}$

- ***L'affixe du milieu du segment [AB] est*** $\frac{z_A + z_B}{2}$.
- ***L'affixe du centre de gravité d'un triangle ABC est*** $\frac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

Exemple

1) L'affixe de G barycentre de $\{(A,2); (B,5)\}$ *est* $z_G = \frac{2z_A + 5z_B}{7}$

2) L'affixe de G barycentre de $\{(A,2); (B,5); (C,4)\}$ *est* $z_G = \frac{2z_A + 5z_B + 4z_C}{11}$

IV) Racine nieme d'un nombre complexe

1) Définition

Soient $n \in N^*$ et Z un nombre complexe . On appelle racine nième de Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

2) Racine nième d'un nombre complexe U non nul

Soit l'équation $z^n = U$ avec $U \in \mathbb{C}^*$.

Le nombre complexe U admet n racines nième de la forme :

$$z_k = \sqrt[n]{|U|}\, e^{i(\frac{argU}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \qquad \text{avec } k = 0,1,2,3,4, \quad ,n-1$$

Les points images de $z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots\ldots\ldots \ldots , z_{n-1}$ sont les n sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $R = \sqrt[n]{|U|}$.

Soient $M_0, M_1, M_2, M_3, \ldots \ldots , M_{n-1}$ les points images respectives de $z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots , z_{n-1}$.

On a : $OM_0 = OM_1 = OM_2 = \ldots\ldots\ldots = OM_{n-1} = \sqrt[n]{|U|}$ et $(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) = \frac{2\pi}{n} (2\pi)$

La somme des racines nième d'un nombre complexe U est égal à 0 c'est-à-dire :

$$z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots \ldots + z_{n-1} = 0 .$$

Propriété

Soit l'équation $z^n = 1$, $n \in N^*$. Les racines nième de 1 sont les nombres complexes de la forme :

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \qquad \text{avec } k = 0,1,2,3,4, \quad ,n-1$$

Les racines nième de 1 sont aussi appelées les racines nième de l'unité .

Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et placer dans le plan complexe les points images des solutions :

1) $z^3 = 1$ 2) $z^4 = 1$ 3) $z^3 = 1 - i$

4) $z^6 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$

Solution

1)Résolvons l'équation $z^3 = 1$

$z^3 = 1$, les solutions sont les nombres complexes $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ avec k = 0,1,2

$z_0 = e^{i\frac{2\times0\times\pi}{3}} = e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$ $\boxed{\text{donc } z_0 = 1}$

$z_1 = e^{i\frac{2\times1\times\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\boxed{\text{donc } z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

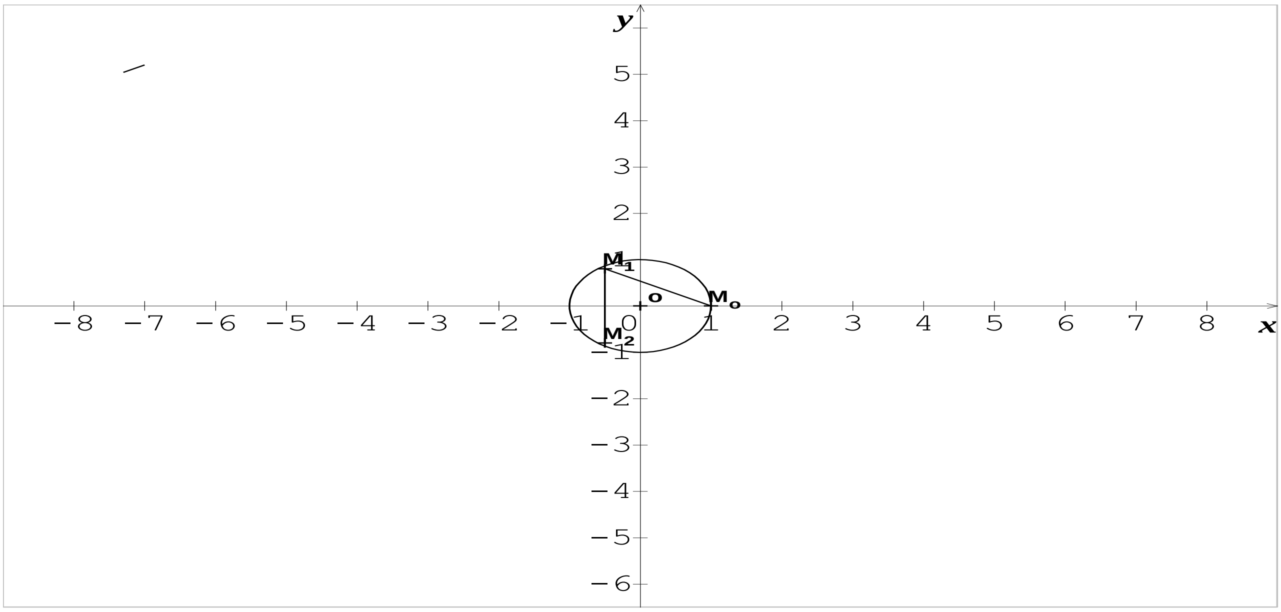
$z_2 = e^{i\frac{2\times2\times\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\boxed{\text{donc } z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\boldsymbol{z_0 = 1}$ **,** $\boldsymbol{z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ ***et*** $\boldsymbol{z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ ***sont les solutions de l'équation*** $\boldsymbol{z^3 = 1}$

On pose : $\boldsymbol{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j}$ ***. On dit que les racines cubiques de 1 sont 1,*** $\boldsymbol{j}$ ***et*** $\boldsymbol{\bar{j}}$ ***.***

Les propriétés de j sont les suivantes : $\boldsymbol{\bar{j} = j^2}$ ***et*** $\boldsymbol{1 + j + j^2 = 0}$ ***.***

$\boldsymbol{M_0, M_1, M_2}$ ***les points images respectives de*** $\boldsymbol{z_0, z_1}$ ***et*** $\boldsymbol{z_2}$ ***sont les sommets d'un triangle équilatéral .***



2)Résolvons l'équation $\boldsymbol{z^4 = 1}$

$z^4 = 1$, *les solutions sont les nombres complexes* $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{4}}$ *avec k = 0,1,2,3*

$z_0 = e^{i\frac{2\times0\times\pi}{4}} = e^{i0}$ *= cos 0 + isin 0 = 1 donc* $z_0 = 1$

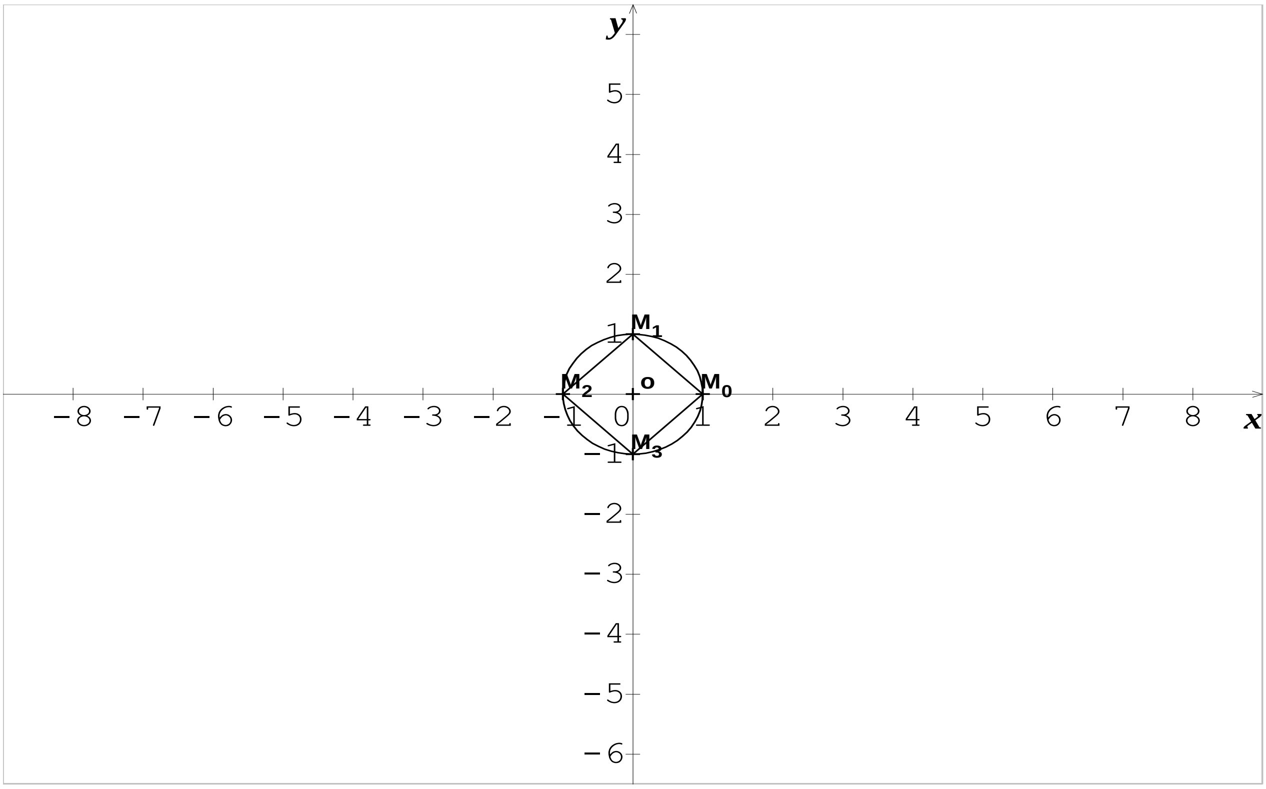
$z_1 = e^{i\frac{2\times1\times\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ *=* $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$ *donc* $z_1 = i$

$z_2 = e^{i\frac{2\times2\times\pi}{4}} = e^{i\pi}$ *=* $\cos\pi + i\sin\pi$ *= - 1 donc* $z_2 = -1$

$z_3 = e^{i\frac{2\times3\times\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$ *=* $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$ *= - i donc* $z_3 = -i$

$\boldsymbol{z_0 = 1}$ **,** $\boldsymbol{z_1 = i}$ **,** $\boldsymbol{z_2 = -1}$ ***et*** $\boldsymbol{z_3 = -i}$ ***sont les solutions de l'équation*** $\boldsymbol{z^4 = 1}$ ***.***

$\boldsymbol{M_0, M_1, M_2}$ ***et*** $\boldsymbol{M_3}$ ***les points images respectives de*** $\boldsymbol{z_0, z_1, z_2}$ ***et*** $\boldsymbol{z_3}$ ***sont les sommets d'un carré .***



3)Résolvons $\boldsymbol{z^3 = 1 - i}$

$z^3 = 1 - i$, *les solutions sont les nombres complexes* $z_k = \sqrt[3]{|1 - i|}e^{i(\frac{arg\,(1-\,i)}{3} + \frac{2k\pi}{3})}$ *avec k = 0,1,2*

arg(1 – i) = *arg(* $\overline{1 + \,i}$*)* $= -\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$ *et* $|1\ \ - i| = \sqrt{2}$

$z_0 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}e^{i(\frac{-\pi}{12} + \frac{2\times 0\times\pi}{3})} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\,e^{-\,i\frac{\pi}{12}}$ *donc* $z_0 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\,e^{-\,i\frac{\pi}{12}}$

$z_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}e^{i(\frac{-\pi}{12} + \frac{2\times 1\times\pi}{3})} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$ *donc* $z_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\,e^{\,i\frac{7\pi}{12}}$

$z_2 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}e^{i(\frac{-\pi}{12} + \frac{2\times 2\times\pi}{3})} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\,e^{\,i\frac{15\pi}{12}}$ *donc* $z_2 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\,e^{\,i\frac{15\pi}{12}}$

$\boldsymbol{z_0 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\,e^{-\,i\frac{\pi}{12}}}$ **,** $\boldsymbol{z_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}}$ ***et*** $\boldsymbol{z_2 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\,e^{\,i\frac{15\pi}{12}}}$ ***sont les solutions de l'équation*** $\boldsymbol{z^3 = 1 - i}$ **.** $\boldsymbol{M_0, M_1}$**,** $\boldsymbol{M_2}$ ***points images respectives de*** $\boldsymbol{z_0}$ **,** $\boldsymbol{z_1}$ **,** $\boldsymbol{z_2}$ ***sont les sommets d'un triangle inscrit dans le cercle de centre O et de rayon R =*** $\boldsymbol{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}$ **.**

4)Résolvons $\boldsymbol{z^6 = 4\sqrt{2}(-1 + i)}$

4) $z^6\ = 4\sqrt{2}(-1 + i)$ *les solutions sont les nombres complexes*

$z_k = \sqrt[6]{\left|4\sqrt{2}(-1 + i)\right|}e^{i(\frac{arg\,(4\sqrt{2}(-1+i)}{6} + \frac{2k\pi}{6})}$ *avec k = 0,1,2,3,4,5*

$\left|4\sqrt{2}(-1 + i)\ \right|\ 4\sqrt{2}|-1 + i| = 8$

arg($4\sqrt{2}(-1 + i)$ = *arg(*$4\sqrt{2}$*)* + *arg(-1 + i)* = *0* + $\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$

$\boxed{z_k = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{6})} \text{ avec } k = 0,1,2,3,4,5}$

L'équation $z^6 = 4\sqrt{2}(-1+i)$ admet six solutions z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 et z_5 correspondant respectivement aux valeurs 0,1, 2, 3, 4, 5 de k .

M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5 points images respectives de z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 et z_5 sont les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon R = $\sqrt{2}$.

<u>Propriété</u>

Soit l'équation $z^n = U$, $U \in \mathbb{C}^*$. Si un nombre complexe c est une racine nième de U alors on obtient

toutes les racines nième de U en multipliant par c les racines nièmes de 1

C'est-à-dire $z^n = U$,si $c^n = U$ alors $z_k = c\, e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec k = 0,1,2,3,4, ,n-1 .

Exercice d'application

1) Soit l'équation $z^3 = 8i$.

Calculer $(-2i)^3$ et en déduire les solutions de cette équation .

2) Soit l'équation $z^4 = (5+4i)^4$.

Calculer $(5+4i)^4$ et en déduire les solutions de cette équation .

Solution

1) Soit l'équation $z^3 = 8i$.

$(-2i)^3$ = -8 × i = 8i .Les racines cubiques de 1 sont 1 , j et $\bar{j}$.

Les solutions de l'équation $z^3 = 8i$ sont : - 2i× 1 , $-2i \times j$ et $-2i \times \bar{j}$.

Les racines cubiques de 8i sont : - 2i, -2i× j et -2i× $\bar{j}$.

2) Soit l'équation $z^4 = (5+4i)^4$.

$(5+4i)^4 = (5+4i)^4$ donc 5 + 4i est solution de l'équation .

Les racines quatrièmes de 1 sont : 1 , i, -1 et – i .

Les solutions de l'équation $z^4 = (5+4i)^4$ sont : 5+ 3i× 1 , 5+ 3i× i, 5+ 3i× -1 et 5+ 3i× $-i$

Les solutions de l'équation $z^4 = (5+4i)^4$ sont : 5 + 3i , -3 + 5i , -5 -3i et 3 – 5i .

2) ***<u>Équations dans $\mathbb{C}$</u>***
a) ***<u>Équation du type $z^2 = U$, $U \in \mathbb{C}$</u>***

<u>Résolution par la méthode trigonométrique</u>

L'équation $z^2 = U$ admet deux solutions :

$$z_0 = \sqrt{|U|}e^{i\frac{argU}{2}} \quad \text{et} \quad z_1 = -\sqrt{|U|}e^{i\frac{argU}{2}}$$

Résolution par la méthode algébrique

Soit l'équation $z^2 = U$ (E)

Posons z = x + i y . Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = U$ revient à résoudre dans IR × IR le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |U| \\ x^2 - y^2 = Re\,(U) \\ 2xy = Im(\,U) \end{cases}$$

Démonstration

Soit l'équation $z^2 = U$ Posons z = x + i y .

$z^2 = U \Rightarrow |z^2| = |U| \Rightarrow |z|^2 = |U| \Rightarrow |x + i\,y|^2 = |U| \Rightarrow (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = |U|$

$\boxed{\text{Donc } x^2 + y^2 = |U|}$

$z^2 = U \Rightarrow (x + i\,y)^2 = U \Rightarrow x^2 + 2ixy + y^2 = U \Rightarrow x^2 + y^2 + 2ixy = U$

$\boxed{\text{Donc } x^2 + y^2 = Re(U) \text{ et } 2xy = Im(U)}$

Exercice d'application

Soit l'équation $z^2 = 1 + i$ (E)

1) Résoudre par la méthode trigonométrique puis par la méthode algébrique l'équation (E) .

2) En déduire $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

Solution

Soit l'équation $z^2 = 1 + i$ (E)

1) Résolvons par la méthode trigonométrique l'équation (E) .

$z^2 = 1 + i$, $|1 + i| = \sqrt{2}$ $arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$ (2π)

$\boxed{\text{Les solutions de l'équation (E) : } z_0 = \sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}} \quad \text{et} \quad z_1 = -\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}}$

1) Résolvons par la méthode algébrique l'équation (E) .

$z^2 = 1 + i$, $|1 + i| = \sqrt{2}$ *Re(1 + i) = 1* et *Im(1 + i) = 1*

Posons z = x + i y . Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 1 + i$ revient à résoudre dans IR × IR le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = \sqrt{2}$ *(1) et* $x^2 - y^2 = 1$ *(2)*

En additionnant (1) et (2) , on obtient : $2x^2 = 1 + \sqrt{2}$

$2x^2 = 1 + \sqrt{2}$ => $x^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ => $x = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$ *ou* $x = -\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$

On a : $2xy = 1$

Si $x = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$ *alors* $y = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}$

Si $x = -\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$ *alors* $y = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}$

Les solutions de l'équation (E) : $z_0 = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}$ ***et*** $z_1 = -\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}$ **.**

2) Déduisons $\cos\frac{\pi}{8}$ ***et*** $\sin\frac{\pi}{8}$ **.**

On a : $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ *et* $\sin\frac{\pi}{8} > 0$ *d'où* $z_0 = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}} = z_0 = \sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$

$\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})$ *donc*

$\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{8}$ *et* $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{8}$

Après calcul , on trouve : $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ***et*** $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ***et*** $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

On a : $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

b) <u>Équation du second degré dans C</u>

On appelle équation du second degré dans C toute équation de la forme a z^2 + bz + c = 0 avec

$a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$.

<u>Résolution de l'équation a z^2 + bz + c = 0</u>

Pour résolution l'équation a z^2 + bz + c = 0, on peut procéder comme suit :

1) On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

2) On détermine σ défini par $\sigma^2 = \Delta$ puis on calcule les deux solutions z_1 et z_2 définies par :

$z_1 = \frac{-b-\sigma}{2a}$ ***et*** $z_2 = \frac{-b+\sigma}{2a}$

3) Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une solution double $z_0 = \frac{-b}{2a}$.

Méthode de détermination de σ

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.

1) Si $\Delta > 0$ ***alors*** $\sigma = \sqrt{\Delta}$.

2) Si $\Delta < 0$ ***alors*** $\sigma = i\sqrt{-\Delta}$.

3) Si Δ ***n'appartient pas à IR alors*** $\sigma = x + iy$ ***avec*** $\begin{cases} x^2 + y^2 = |\Delta| \\ x^2 - y^2 = Re(\Delta) \\ 2xy = Im(\Delta) \end{cases}$.

Exercice d'application

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ *les équations suivantes :*

a) $iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0$ *b)* $z^2 - 4z + 5 = 0$ *c)* $-z^2 - 3z + 4 = 0$

2) Soit l'équation (E): $z^3 - 3iz^2 - (3-i)z + 2 + 2i = 0$

Résoudre l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure .

3) Soit l'équation (E): $z^3 + z^3 + z - 3 = 0$

Résoudre l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution réelle.

Solution

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ ***les équations suivantes :***

a) $iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (1-5i)^2 - 4i(6i-2) = -2i$. *Donc*

Δ ***n'appartient pas à IR alors*** $\sigma = x + iy$ ***avec*** $\begin{cases} x^2 + y^2 = |-2i| = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -2 \end{cases}$

$x^2 + y^2 = 2$ *(1) et* $x^2 - y^2 = 0$ *(2) . En additionnant (1) et (2), ona :*$2x^2 = 2$

Donc $x^2 = 1$ *ce qui entraîne* $x = 1$ *ou* $x = -1$. *Or* $2xy = -2$

Si $x = 1$ *alors* $y = -1$. *Si* $x = -1$ *alors* $y = 1$

On a : $\sigma = 1 - i$ *ou* $\sigma = -1 + i$

Quelque soit le σ *que vous prenez, vous aurez les mêmes solutions*

Je prends $\sigma = 1 - i$.

$z_1 = \frac{-b-\sigma}{2a} = \frac{-(1-5i)-(1-i)}{2i} = i + 3$ *et* $z_2 = \frac{-b+\sigma}{2a} = \frac{-(1-5i)+(1-i)}{2i} = 2$

Les solutions de l'équation sont : $i + 3$ ***et*** 2 . $S = \{i+3; 2\}$

b) $z^2 - 4z + 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times 1 \times 5 = -4$. Donc $\Delta < 0$ alors $\sigma = i\sqrt{-(-4)} = 2i$.

$z_1 = \frac{-b-\sigma}{2a} = \frac{-(-4)-(2i)}{2} = 2 - i$ et $z_2 = \frac{-b+\sigma}{2a} = \frac{-(-4)+(2i)}{2} = 2+i$

Les solutions de l'équation sont : 2 - i et 2+ i . $S = \{\boldsymbol{2-i};\boldsymbol{2+i}\}$

c) $-z^2 - 3z + 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\times -1 \times 4 = 25$. Donc $\Delta > 0$ alors $\sigma = \sqrt{25} = 5$

$z_1 = \frac{-b-\sigma}{2a} = \frac{-(-3)-(5)}{-2} = 1$ et $z_2 = \frac{-b+\sigma}{2a} = \frac{-(-3)+(5)}{-2} = -4$

Les solutions de l'équation sont : 1 et - 4 . $S = \{\boldsymbol{1};\ \boldsymbol{-4}\}$

2) Soit l'équation (E): $\boldsymbol{z^3 - 3i\, z^2 - (3-i)z + 2 + 2i = 0}$

Résolvons l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure .

Soit z_0 *la solution imaginaire pure donc* $z_0 = i\,b$ *avec* $b \in IR$ *.*

z_0 *est solution de (E) donc :* $(ib)^3 - 3i\,(ib)^2 - (3-i)(ib) + 2 + 2i = 0$ *, en développant on ontient :*

$-b + 2 + i(-b^3 + 3b^3 - 3b + 2) = 0$ *ce qui entraîne :* $-b + 2 = 0(1)$ *ou* $-b^3 + 3b^3 - 3b + 2 = 0(2)$

Avec (1) on a : b = 2 et 2 est solution de (2) . Donc $z_0 = 2i$ *.*

On peut aussi appliquer la méthode de HÖRNER pour factoriser le polynôme en z :

$z^3 - 3i\,z^2 - (3-i)z + 2 + 2i = (z + 2i(z^2 - iz - 1 + i)$

$z^2 - iz - 1 + i = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = (-i)^2 - 4(1)(-1+i) = -4i + 3$

$\sigma = 2 - i$ $z_1 = i - 1$ $z_2 = 1$

Les solutions de l'équation sont : 2i , i -1 et 1 . $S = \{\boldsymbol{2i};\boldsymbol{i-1};\boldsymbol{1}\}$

3) Soit l'équation (E): $\boldsymbol{z^3 + z^3 + z - 3 = 0}$

Résolvons l'équation (E) sachant qu'elle admet une solution réelle.

$z^3 + z^3 + z - 3 = 0$ *. Soit* z_0 *la solution réelle donc* $z_0 = b$ *avec* $b \in IR$ *.*

$z_0 = 1$ *. On peut aussi appliquer la méthode de HÖRNER pour factoriser le polynôme en z :*

$z^3 + z^3 + z - 3 = (z-1)(z^2 + 2z + 3)$

$z^2 + 2z + 3 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(1)(3) = -8$. $\sigma = 2\sqrt{2}i$ $z_1 = -1 - i\sqrt{2}$ $z_2 = -1 + i\sqrt{2}$

Les solutions de l'équation sont : 1, -1- i$\sqrt{2}$ et -1+ i$\sqrt{2}$. $S = \{\boldsymbol{1};\boldsymbol{-1-i\sqrt{2}};\boldsymbol{-1+i\sqrt{2}}\}$

V) Complexe et transformation du plan

1) Fonction dans $\mathbb{C}$ associée à une transformation u plan

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Soit $F : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$

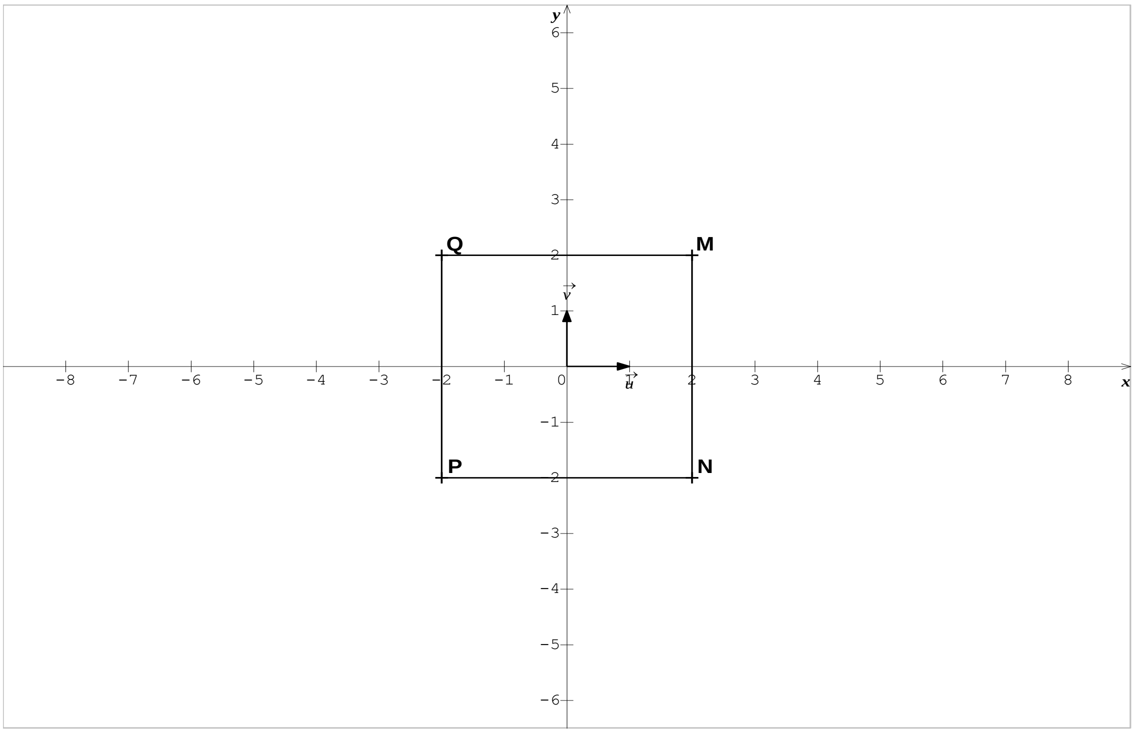
$z \to f(z$ $M(z) \to M'(z')$

f est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

F est la transformation du plan associée à la bijection complexe f dans $\mathbb{C}$.

2) Transformations élémentaires du plan

Soient M, N, P et Q les points d'affixes respectives z, $\bar{z}$, $-z$ et $-\bar{z}$.



- La symétrie d'axe(OI) a pour écriture complexe $z' = \bar{z}$.
- La symétrie d'axe(OJ) a pour écriture complexe $z' = -\bar{z}$.
- La symétrie de centre O a pour écriture complexe $z' = -z$.

3) Translation

Toute transformation du plan d'écriture complexe $z' = z + b$, $b \in \mathbb{C}$, est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b .

Démonstration

$t_{\vec{u}} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$

$M(z) \to t_{\vec{u}}(M) = M'(z')$

$t_{\vec{u}}(M) = M'$ <=> $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$ <=> $z_{\vec{u}} = z_{\overrightarrow{MM'}}$

$z_{\vec{u}} = z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{M'} - z_M$. $z_{\vec{u}} = z_{M'} - z_M$. Or $z_{M'} = z'$, $z_M = z$.

On pose : $z_{\vec{u}} = b$.

On obtient : $b = z' - z$ *d'où* $z' = z + b$.

Toute écriture complexe de la forme : $z' = z + b$ ***est une translation de vecteur*** $\vec{u}$ ***d'affixe b .***

Exercice d'application

1) Donner la nature de la transformation du plan d'écriture complexe : $z' = z - 3 + 2i$.

2) Soit la translation de vecteur $\vec{u}$ *d'affixe* $-2 + i$ *. Donner son écriture complexe .*

Solution

1) Donnons la nature de la transformation du plan d'écriture complexe : $z' = z - 3 + 2i$.

: $z' = z - 3 + 2i$, $b = -3 + 2i$.

La transformation du plan est la translation de vecteur $\vec{u}$ ***d'affixe*** $-3 + 2i$ ***.***

2) Soit la translation de vecteur $\vec{u}$ *d'affixe* $-2 + i$ *. Donnons son écriture complexe .*

Le vecteur $\vec{u}$ *est d'affixe* $-2 + i$ *donc* $b = -2 + i$.

La translation de vecteur $\vec{u}$ ***d'affixe*** $-2 + i$ ***est d'écriture complexe :*** $z' = z - 2 + i$ ***.***

4) Homothétie

Toute transformation du plan d'écriture complexe $z' = a z + b$, $a \in IR \backslash \{0; 1\}$, $b \in \mathbb{C}$, ***est une homomthétie de rapport k = a et de centre*** Ω ***tel que*** $z_\Omega = \frac{b}{1 - a}$ ***.***

Démonstration

$h(\Omega,k) : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$

$M(z) \rightarrow h(\Omega,k)(M) = M'(z')$

$h(\Omega,k)(M) = M' \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M} \iff z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = z_{k\,\overrightarrow{\Omega M}}$

$z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = z_{k\,\overrightarrow{\Omega M}} = k\, z_{\overrightarrow{\Omega M}} \iff z_{M'} - z_\Omega = k(z_M - z_\Omega)$. Or $z_{M'} = z'$, $z_M = z$.

On obtient: $z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega)$, $z' - z_\Omega = kz - kz_\Omega$ *donc* $z' = kz + (1-k)z_\Omega$.

Posons $k = a$ *et* $b = (1-k)z_\Omega$ *donc* $z' = az + b$.

$k = a$ *donc* $b = (1 - a)z_\Omega$ *donc* $z_\Omega = \frac{b}{1 - a}$.

Toute transformation du plan d'écriture complexe $z' = a z + b$, $a \in IR \backslash \{0; 1\}$, $b \in \mathbb{C}$, ***est une homomthétie de rapport k = a et de centre*** Ω ***tel que*** $z_\Omega = \frac{b}{1 - a}$ ***.***

Exercice d'application

1) Donner la nature de la transformation du plan d'écriture complexe : $z' = -\frac{1}{2}z + 3 - 6i$.

2) Soit l'homothétie de rapport -2 et de centre A d'affixe $-1 + i$ *. Donner son écriture complexe .*

Solution

1) Donnons la nature de la transformation du plan d'écriture complexe : $z' = -\frac{1}{2}z + 3 - 6i$.

$K = a = -\frac{1}{2}$ $\quad b = 3 - 6i$. $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{3-6i}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{3-6i}{\frac{3}{2}} = 2 - 4i$. $z_\Omega = 2 - 4i$

La transformation du plan d'écriture complexe : $z' = -\frac{1}{2}z + 3 - 6i$ est l'homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$ et de centre Ω d'affixe $2 - 4i$.

2) Soit l'homothétie de rapport -2 et de centre A d'affixe – 1 + i . Donnons son écriture complexe .

$k = a = -2$, $z_A = -1 + i$, $b = (1 - a)z_A = (1-(-2))(-1+i) = -3 + 3i$, $b = -3 + 3i$.

L'homothétie de rapport -2 et de centre A d'affixe – 1 + i est d'écriture complexe : $z' = -2z - 3 + 3i$.

5)<u>Rotation</u>

Toute transformation du plan d'écriture complexe $z' = az + b$, $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$, $b \in \mathbb{C}$, est une rotation d'angle θ = arga (2π) et de centre Ω tel que $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$.

- ***Soit $z' = az + b$, $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$, $b \in \mathbb{C}$ l'écriture complexe de la rotation d'angle θ et de centre Ω alors $a = e^{i\theta}$ et $b = (1 - a)z_\Omega$.***

Démonstration

$r(\Omega,\theta) \quad : \quad \mathcal{P} \to \mathcal{P}$

$M(z) \to r(\Omega,\theta)(M) = M'(z')$

$$r(\Omega,\theta)(M) = M' \quad <=> \quad \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$$

$$\Omega M = \Omega M' \quad <=> \quad |z_M - z_\Omega| = |z_{M'} - z_\Omega| \quad <=> \quad \left|\frac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega}\right| = 1 \qquad (1)$$

$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \quad <=> \quad arg(\frac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega}) = \theta \qquad (2)$$

D'après (1) et (2), on a : $\frac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega} = 1 \times e^{i\theta} = e^{i\theta}$

$$\frac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega} = e^{i\theta} \quad <=> \quad z_{M'} - z_\Omega = e^{i\theta}(z_M - z_\Omega) \quad <=> \quad z_{M'} - z_\Omega = e^{i\theta} z_M - e^{i\theta} z_\Omega$$

Or $z_{M'} = z'$, $z_M = z$. On obtient: $z' - z_\Omega = e^{i\theta} z - e^{i\theta} z_\Omega$, $z' = e^{i\theta} z + (1 - e^{i\theta}) z_\Omega$

On pose: $a = e^{i\theta}$ et $b = (1 - e^{i\theta}) z_\Omega = (1 - a) z_\Omega$.

On obtient : $z' = az + b$, $a = e^{i\theta}$ et $b = (1 - a) z_\Omega$.

Toute transformation du plan d'écriture complexe $z' = az + b$, $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$, $b \in \mathbb{C}$, est une rotation d'angle θ = arga (2π) et de centre Ω tel que $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$.

On a : $a = e^{i\theta}$ et $b = (1 - a) z_\Omega$.

Exercice d'application

1) Donner la nature de la transformation du plan d'écriture complexe : $z' = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\, z - \sqrt{3} + i$.

2) Soit la rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ *et de centre A d'affixe* $-2i$ *. Donner son écriture complexe .*

Solution

1) Donnons la nature de la transformation du plan d'écriture complexe : $\boldsymbol{z' = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\, z - \sqrt{3} + i}$ **.**

$z' = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\, z - \sqrt{3} + i$, $a = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$, $b = -\sqrt{3} + i$.

$\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) \in \mathbb{C}$, $\left|\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\right| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$

Donc cette transformation du plan est une rotation .

$$\theta = arg(a) = arg(\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})) = \frac{2\pi}{3}$$

$$z_\Omega = \frac{b}{1 - a} = \frac{-\sqrt{3}+i}{1 - (\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}))} = 2i$$

La transformation du plan d'écriture complexe : $\boldsymbol{z' = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\, z - \sqrt{3} + i}$ ***est la rotation d'angle*** $\boldsymbol{\frac{2\pi}{3}}$ ***et de centre centre Ω d'affixe 2i .***

2) Soit la rotation d'angle $\boldsymbol{-\frac{2\pi}{3}}$ ***et de centre A d'affixe – 2i . Donnons son écriture complexe .***

$\theta = -\frac{2\pi}{3}$, $z_A = 2i$, $z' = a z + b$, $a = e^{i\theta}$ et $b = (1 - a)\, z_A$.

$a = e^{i\theta} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. $b = (1 - a)\, z_A = (1 - (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}))(2i) = -3i + \sqrt{3}$.

Donc $z' = (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})\, z - 3i + \sqrt{3}$.

La rotation d'angle $\boldsymbol{-\frac{2\pi}{3}}$ ***et de centre A d'affixe – 2i a pour écriture complexe :***

$$\boldsymbol{z' = (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})\, z - 3i + \sqrt{3}} .$$

6) <u>Similitude directe</u>

On appelle similitude directe toute transformation du plan d'écriture complexe :

$$\boldsymbol{z' = a z + b \,,\, a \in \mathbb{C}^*,\, b \in \mathbb{C}}.$$

Les éléments caractéristiques de la similitude directe sont :

- ***Son rapport :*** $\boldsymbol{\lambda = |a|}$
- ***Son angle :*** $\boldsymbol{\theta = arg(a)\ (2\pi)}$
- ***Son centre : si*** $\boldsymbol{a \neq 1}$ ***alors son centre est Ω tel que*** $\boldsymbol{z_\Omega = \frac{b}{1 - a}}$ **.**

$\boldsymbol{\lambda}$ ***,*** $\boldsymbol{\theta}$ ***et Ω sont appelés les éléments caractéristiques de la similtude directe .***

La similitude directe est souvent notée S .

On dit S est la similitude directe de rapport λ , d'angle θ et de centre Ω .

- ***Soit $z' = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ l'écriture d'une similitude directe de rapport λ , d'angle θ et de centre Ω alors $a = \lambda e^{i\theta}$ et $b = (1 - a)\, z_\Omega$.***

Remarque

$z_\Omega = \frac{b}{1-a}$ <=> $b = (1 - a)\, z_\Omega$.

$\lambda = |a|$ donc $|a| = \lambda$, $arg(a) = \theta$ d'où $a = \lambda \times e^{i\theta} = \lambda e^{i\theta}$.

Exercice d'application

1) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe S d'écriture complexe :

$$z' = (1+i)\, z - 2i \ .$$

2) Donner l'écriture complexe de la similitude directe de rapport 2 , d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de centre Ω d'affixe 1+ i .

Solution

1) Déterminons les éléments caractéristiques de la similitude directe S d'écriture complexe :

$$z' = (1+i)\, z - 2i \ .$$

$z' = (1+i)\, z - 2i$, $a = 1 + i \in \mathbb{C}^*$, $b = -2i \in \mathbb{C}$ *donc S est une similitude directe .*

$\lambda = |a| = |1+i| = \sqrt{2}$, $\theta = arg(a) = arg(1+i) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$, $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-2i}{1-(1+i)} = 2$.

$\boxed{\text{Donc S est la similitude directe de rapport } \sqrt{2} \text{ , d'angle } \frac{\pi}{4} \text{ et de centre } \Omega \text{ d'affixe 2}}$

2) Donnons l'écriture complexe de la similitude directe de rapport 2, d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et decentre Ω d'affixe 1+ i.

$z' = az + b$, $a = \lambda e^{i\theta}$ et $b = (1-a)\, z_\Omega$. $\lambda = 2$, $\theta = -\frac{\pi}{3}$ et $z_\Omega = 1 + i$.

$a = \lambda e^{i\theta} = 2\, e^{-i\frac{\pi}{3}} = 1 - i\sqrt{3}$, $b = (1 - (1 - i\sqrt{3}))(1+i) = -\sqrt{3} + i\sqrt{3}$

La similitude directe de rapport 2, d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de centre Ω d'affixe 1+ i est d'écriture complexe :

$$\boldsymbol{z' = (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} + i\sqrt{3}} \ .$$

7) *Nature d'une similitude directe*

Soit la similitude directe S d'écriture complexe $z' = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$.

- ***Si a = 1 alors la similitude directe S est la translation de vecteur*** $\vec{u}$ ***d'affixe b .On a son rapport*** $\lambda = 1$, ***son angle*** $\theta = 0$ ***et la similitude directe S n'a pas de centre .***

- ***Si*** $a \in IR\backslash\{0;1\}$ ***alors la similitude directe S est l' homothétie de rapport k = a et de centre Ω tel que*** $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$ ***.On a son rapport*** $\lambda = |a|$ ***, son angle :*** $\theta = 0$ ***si*** $k > 0$, $\theta = \pi$ ***si*** $k < 0$ ***et son centre Ω est d'affixe*** $\frac{b}{1-a}$ ***.***

- ***Si*** $|a| = 1$ ***alors la similitude directe S est la rotation d'angle*** $\theta = \arg a \ (2\pi)$ ***et de centre Ω tel que*** $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$ ***. On a son rapport*** $\lambda = 1$ ***, son angle*** $\theta = \arg(a)$ ***et son centre Ω est d'affixe*** $\frac{b}{1-a}$ ***.***

- ***Si*** $|a| \neq 1$ ***alors la similitude directe S est la composition d'une rotation et d'une homothétie de même centre . S = hor = roh .***

  r est la rotation d'angle $\theta = \arg a \ (2\pi)$ ***et de centre Ω tel que*** $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$ ***.***

  h est l' homothétie de rapport k = $|a|$ ***et de centre Ω tel que*** $z_\Omega = \frac{b}{1-a}$ ***.***

  Son rapport est $\lambda = |a|$ ***, son angle angle*** $\theta = \arg(a)$ ***et son centre Ω est d'affixe*** $\frac{b}{1-a}$ ***.***

Propriété

Une similitude directe est soit une translation, soit une homothétie, soit une rotation , soit une composition de rotation et d'homothétie de même centre .

8) *Points invariants d'une simlitude directe*

- ***L'homothétie , la rotation et la composition d'une rotation et d'une homothétie de même centre sont des similitudes directes qui ont pour point invariant leur centre .***
- ***La similitude directe qui n'a pas de points invariants est la translation de vecteur non nul .***

Propriété

Soit la similitude directe S de rapport λ ***, d'angle*** θ ***et de centre Ω d'écriture complexe :***

$$z' = az + b \ , a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \ .$$

On a : $z' - z_\Omega = \lambda e^{i\theta}(z - z_\Omega)$ ***.***

Démonstration

On a: $z' = az + b$ *(1) ,* $S(\Omega) = \Omega$ *donc* $z_\Omega = az_\Omega + b$ *(2) .*

En faisant la difference de (1) et (2) , on a : $z' - z_\Omega = a(z - z_\Omega)$ *donc* $a = \frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega}$

$\left|\frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega}\right| = |a| = \lambda$ *(3) ,* $\arg(\frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega}) = \arg(a) = \theta$ *(4) .*

D'après (3) et (4), on a $\frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = \lambda \times e^{i\theta} = \lambda e^{i\theta}$.

$\frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = \lambda e^{i\theta}$ *donc* $z' - z_\Omega = \lambda e^{i\theta}(z - z_\Omega)$

Exemple

1) Soit la similitude directe S telle que $z_A - z_B = 2\, e^{i\frac{\pi}{4}}(z_C - z_B)$.

On a $S(C) = A$. $\lambda = 2$, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

S est la similitude directe de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{4}$ *et son centre est le point B .*

2) Soit la similitude directe S telle que $z_E - z_D = 5e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_F - z_D)$.

On a $S(F) = E$. $\lambda = 5$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

S est la similitude directe de rapport 5, d'angle $\frac{2\pi}{3}$ *et son centre est le point D .*

9) <u>Détermination d'une similitude à partir de ses éléments caractéristiques</u>

a) <u>À partir de deux points et de leurs images</u>

Soit la similitude directe S telle que $S(A) = A'$ ***et*** $S(B) = B'$ **.**

La similitude directe S est d'écriturecomplexe : $z' = az + b$ ***avec*** $a = \frac{z_{A'} - z_{B'}}{z_A - z_B}$ ***et*** $b = z_{A'} - az_A$ **.**

Démonstration

$z' = az + b$, $S(A) = A'$ *et* $S(B) = B'$.

$S(A) = A'$ *donc* $z_{A'} = az_A + b$ *(1)* , $S(B) = B'$ $z_{B'} = az_B + b$ *(2)*

En faisant la difference de (1) et (2), on a $z_{A'} - z_{B'} = a(z_A - z_B)$ *d'où* $a = \frac{z_{A'} - z_{B'}}{z_A - z_B}$

$z_{A'} = az_A + b$ *donc* $b = z_{A'} - az_A$.

Donc $z' = az + b$ *avec* $a = \frac{z_{A'} - z_{B'}}{z_A - z_B}$ *et* $b = z_{A'} - az_A$.

b) <u>À partir de son centre, d'un point et son image</u>

Soit la similitude directe S telle que $S(A) = A'$ ***et*** $S(\Omega) = \Omega$ **.**

La similitude directe S est d'écriture complexe : $z' = az + b$ ***avec*** $a = \frac{z_{A'} - z_\Omega}{z_A - z_\Omega}$ ***et*** $b = z_\Omega - az_\Omega$ **.**

Démonstration

$z' = az + b$, $S(A) = A'$ *et* $S(\Omega) = \Omega$.

$S(A) = A'$ *donc* $z_{A'} = az_A + b$ *(1)* , $S(\Omega) = \Omega$ $z_\Omega = az_\Omega + b$ *(2)*

En faisant la difference de (1) et (2), on a $z_{A'} - z_\Omega = a(z_A - z_\Omega)$ *d'où* $a = \frac{z_{A'} - z_\Omega}{z_A - z_\Omega}$

$z_\Omega = az_\Omega + b$ *donc* $b = z_\Omega - az_\Omega$.

Donc $z' = az + b$ *avec* $a = \frac{z_{A'} - z_\Omega}{z_A - z_\Omega}$ *et* $b = z_\Omega - az_\Omega$.

Exercice d'application

1. *Soit* z *un nombre complexe, et :* $P(z) = z^4 - 8(1+i)z^3 + 48iz^2 + 64(1-i)z - 80.$

   a) *Vérifier que l'équation* $P(z) = 0$ *admet une solution réelle,* z_0 *, et une solution imaginaire pure,* z_1 *. Les calculer.*

   b) *Déterminer* a, b *, des nombres complexes tels que :*

   $P(z) = (z - z_0)(z - z_1)(z^2 + az + b)$.

   c) *Résoudre dans C l'équation* $P(z) = 0$.

2. *Dans le plan rapporté au repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *soit les points :* $A(2{,}0)$, $B(0{,}2)$, $C(2{,}4)$, $D(4{,}2)$.

   a) *Déterminer l'affixe de G, l'isobarycentre de* A, B, C, D.

   b) *Soit* R *la rotation de centre G et d'angle* $+\frac{\pi}{2}$. *Donner une écriture complexe de* R.

   Déterminer : $R(A)$, $R(D)$, $R(C)$ *et* $R(B)$.

10) <u>Similitude directe déterminée par son écriture complexe</u>

Soit S l'application du plan dans lui-même d'écriture complexe : $z' = 3i\,z - 1 - 7i$.

1) Justifier que S est une similitude directe et préciser ses éléments caractéristiques .

2) Déterminer l'expression analytique de S .

3)Déterminer une équation de l'image par S de la droite(BC), B et C étant les points d'affixes respectives 2 et 3 – i .

4) Déterminer une équation de (C') *, image par S du cercle(C) d'équation :* $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

Solution

1) Justifions que S est une similitude directe et précisons ses éléments caractéristiques .

$z' = 3i\,z - 1 - 7i$ *, a= 3i ∈* $\mathbb{C}^*$***, b = -1 – 7i*** ∈ $\mathbb{C}$ ***donc S*** *est une similitude directe .*

$\lambda = |a| = |3i| = 3$, $\theta = \arg(a) = \arg(3i) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$, $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-1-7i}{1-(3i)} = 2 - i$.

$\boxed{\text{Donc S est la similitude directe de rapport 3 , d'angle } \frac{\pi}{2} \text{ et de centre } \Omega \text{ d'affixe 2- i}}$

2) Déterminons l'expression analytique de S .

Soit M(x ; y) un point du plan et $M'(x'; y')$ *son image par S .*

On a : $M' = S(M) \iff z' = 3i\,z - 1 - 7i$

$<=> \quad x' + iy' = 3i(x + iy) - 1 - 7i$

$<=> \quad x' + iy' = -3y - 1 + i(3x - 7)$

Donc, l'expression analytique de S est : $\begin{cases} \boldsymbol{x' = -3y - 1} \\ \boldsymbol{y' = 3x - 7} \end{cases}$

3)Déterminer une équation de l'image par S de la droite(BC)

B(2 ;0) et C(3 ;-1) .L'image d'une droite par une similitude directe est une droite .

B et C ont pour images respectives par S les points $B'(-1;-1)$ *et* $C'(2;2)$ *.*

($B'C'$*) a pour équation : y = x*

L'image de la droite(BC) par S est la droite d'équation : y = x .

4) Déterminons une équation de (C'***) , image par S du cercle(C) d'équation :*** $\boldsymbol{(x-2)^2 + y^2 = 1}$ **.**

Soit M(x ; y) un point du plan et $M'(x'; y')$ *son image par S .*

On a : $\begin{cases} x' = -3y - 1 \\ y' = 3x - 7 \end{cases} \quad <=> \quad \begin{cases} x = \frac{y'+7}{3} \\ y = \frac{-x'-1}{3} \end{cases}$

Donc: $\quad M' \in (C') \quad <=> \quad M \in (C)$

$$<=> \quad (x-2)^2 + y^2 = 1 \quad <=> \quad \left(\frac{y'+7}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{-x'-1}{3}\right)^2 = 1$$

$<=> \quad (x' + 1)^2 + (y' + 1)^2 = 9$

L'image de (C) par S est le cercle (C'***) d'équation*** $\boldsymbol{(x+1)^2 + (y+1)^2 = 9}$ **.**

11) <u>Similitude directe déterminée par son expression analytique</u>

Pour déterminer l'écriture complexe d'une application du plan dans lui-même d'expression analytique donnée, on peut procéder de la manière suivante :

- ***Ecrire*** $\boldsymbol{z' = x' + iy'}$ ***et remplacer*** $\boldsymbol{x'}$ ***et*** $\boldsymbol{y'}$ ***en fonction de x et y .***
- ***Remplacer x par*** $\boldsymbol{\frac{z + \bar{z}}{2}}$***, y par*** $\boldsymbol{\frac{z - \bar{z}}{2i}}$ ***et développer l'expression obtenue en fonction de z et*** $\boldsymbol{\bar{z}}$***.***

Exercice d'application

Soit S l'application du plan dans lui-même d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$$

1) Déterminer l'écriture complexe de S.

2) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de S .

Solution

1) Déterminons l'écriture complexe de S.

$z' = x' + iy' = (x + y + 2) + i(-x + y - 1) = x(1 - i) + y(1 + i) + 2 - i$

$= \frac{z + \bar{z}}{2}(1 - i) + \frac{z - \bar{z}}{2i}(1 + i) = (\frac{1-i}{2} + \frac{1+i}{2i})z + (\frac{1-i}{2} - \frac{1+i}{2i})\bar{z} + 2 - i = (1 - i)z + 2 - i$

$z' = (1 - i)z + 2 - i$

L'écriture complexe de S est : $z' = (1 - i)z + 2 - i$

2) Déduisons la nature et les éléments caractéristiques de S .

$z' = (1 - i)z + 2 - i$, $a = 1 - i \in \mathbb{C}^*$, $b = 2 - i \in \mathbb{C}$ **donc S** est une similitude directe .

$\lambda = |a| = |1 - i| = \sqrt{2}$, $\theta = arg(1 - i) = arg(3i) = -\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$, $z_\Omega = \frac{b}{1 - a} = \frac{2 - i}{1 - (1-i)} = 1 - 2i$.

Donc S est la similitude directe de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de centre Ω d'affixe $1 - 2i$

Propriété

Soit S la similitude directe de rapport k .

- **La similitude directe S conserve : l'alignement, le parallélieme, l'orthogonalité, les angles orientés, les barycentres et le contact .**
- **La similitude directe S multiplie : les longueurs par k et les aires par k^2 .**
- **La similitude directe S transforme : les droites en droites, les demi-droites en demi-droites, les segments en segments et les cercles en cercles.**

EXERCICES

EXERCICE 1

Déterminer la forme cartésienne des nombres complexes suivants :

a) $z = (1 + i)(1 - 2i)$ b) $z = (2 - 3i)(3i)$ c) $z = (2i + 1)(1 + i)^2(3i - 4)$

d) $z = (5 + 4i)(3 + 7i)(2 - 3i)$ e) $z = \dfrac{1 - i}{2i}$ f) $z = \dfrac{3 - 4i}{7 + 5i}$ g) $z = \dfrac{(3 - 2i)(5 + i)}{5 - i}$

EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer la partie réelle, la partie imaginaire et le conjugué du nombre complexe z :

1) $z = 5 + 3i - (2 + 6i)(3i - 4)$ 2) $z = \dfrac{2i + 3}{2 + 3i}$ 3) $z = \dfrac{3 - 5i}{2 + i}$ 4) $z = \dfrac{1 + i}{1 - i}$

EXERCICE 3

Trouver l'ensemble (S) des points M dont l'affixe z vérifie:

a) $|z - 4| = |z + 2i|$ b) $|z + 1 + i| = |z - 3|$

c) $|z - 5 + 3i| = 3$ d) $|\overline{z} + 5 - i| = |z - 4i|$

EXERCICE 4

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1) $(2 - i)z = 2 + i$ 2°) $3z - 5 + 2iz = 2i - 3z + 4iz$ 3) $\dfrac{(2 + i)z}{1 - i} = \dfrac{1 - i}{2 + 3i}$

4) $(2 + iz)(3 - i) = (1 - 3i)(z - 2i)$ 5) $(2 + 3i)z + 3(z - i) = 2i + 5z$

6) $\dfrac{1}{z - 1} = \dfrac{i}{z + i}$

EXERCICE 5

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $(3 - i)\overline{z} = \dfrac{1 + i}{1 - i}$ b) $z + \overline{z} - 2 = 0$ c) $3z - 2i\overline{z} = 2 - 3i$

d) $(2 + i)z + (1 - 3i)\overline{z} = -1 + 2i$ e) $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$

f) $\overline{z} = \dfrac{4}{z}$ *et représenter graphiquement les solutions .*

g) $z^2 - 2i\overline{z} = 0$ *; pour cette question, soit O, A, B, C les images dans le plan complexe, muni du repère orhonormé* $(O, \vec{u}, \vec{v})$ *des solutions obtenues . Montrer que le triangle ABC est équilatéral .*

h) $(3 + i)z + (1 - 3i)\overline{z} + 12 - 6i = 0.$ *(On trouvera une infinité de solutions).*

EXERCICE 6

On pose $Z = (z - 2)(\overline{z} + i)$.

Soit les écritures algébriques $z = x + iy$; x, y *réels et* $Z = X + iY$; X, Y *réels .*

1) Exprimer X et Y en fonction de x et y . Trouve alors les ensembles suivants :

E_1 *: ensemble des points M (z) tels que Z est réel .*

E_2 *: ensemble des points M (z) tels que Z est imaginaire .*

2) Traduire à l'aide de $\overline{Z}$ *que Z est réel, puis que Z est imaginaire .*

Retrouver alors les ensembles E_1 *et* E_2 *.*

EXERCICE 7

On pose $Z = z^2 + 2z - 3$.

1) Soit F_1 *l'ensemble des points M (z) tels que Z est réel.*

Reconnaître F_1.

2) Soit F_2 *l'ensemble des points M (z) tels que Z est imaginaire.*

Donner une équation de F_2 *.*

EXERCICE 8

u est un nombre complexe donné .

Déterminer l'ensemble des points M (z) tels que le nombre complexe : $a = \dfrac{u - \overline{u}\,z}{1 - z}$ *soit :*

a) *réel* ***b)*** *imaginaire pur .*

EXERCICE 9

Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation (E) , d'inconnue z : P (z) = 0, où :*

$P(z) = 2z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 6z + 2$.

1) Comparer $\overline{P(z)}$ *et* $P(\overline{z})$ *. (On indiquera avec précision les propriétés utilisées).*

Montrer que si z_0 *est racine de l'équation (E) , le nombre* $\dfrac{1}{z_0}$ *est aussi racine de (E) .*

2) Déduire de ce qui précède que, si z_0 *est racine de (E) , il en est de même de* $\overline{z_0}$ *et* $\dfrac{1}{\overline{z_0}}$ *.*

3) Montrer que l'équation (E) admet 1 + i pour racine.

Résoudre alors l'équation (E) .

EXERCICE 10

Pour tout nombre complexe $z \neq 1$, on pose $z' = \dfrac{z - 1}{\overline{z} - 1}$ et on appelle A, B , M et M ' les points d'affixes 1, -1 , z et z ' dans le plan complexe muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1°) a) Comparer $|z - 1|$ et $|\overline{z} - 1|$, et en déduire $|z'|$.

b) Traduire géométriquement ce résultat pour le point M ' .

2°) Calculer en fonction de z et $\overline{z}$ le complexe $r = \dfrac{z' + 1}{z - 1}$ et en déduire que r est réel.

3°) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ ' sont colinéaires.

4°) Utiliser ce qui précède pour donner une construction géométrique de M ' connaissant M.

Faire une figure.

EXERCICE 11

A tout complexe z, on associe dans le plan les points M d'affixe z, M ' d'affixe z + i et M '' d'affixe iz.

1°) Pour quel nombre z les points O et M ' sont-ils confondus ?

Pour quel nombre z les points M ' et M '' sont-ils confondus ?

2°) a) on suppose que z est distinct de 0, de $-i$ et de $\dfrac{1-i}{2}$.

Montrer que les points O, M ' et M '' sont alignés si et seulement si $\dfrac{z+i}{iz}$ est un nombre réel.

b) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on pose $z = x + iy$ avec x et y réels.

Calculer la partie imaginaire de $\dfrac{z+i}{iz}$ en fonction de x et de y.

3°) a) Déterminer et représenter l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M tels que O, M ' et M '' soient deux à deux distincts et alignés.

b) en prenant $z = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ I, placer dans le plan les points M, M ' et M ''.

EXERCICE 12

Calculer et écrire sous forme algébrique les racines carrées des nombres complexes suivants :

$z_1 = -3 + 4i$ $\quad z_2 = -8i$ $\quad z_3 = 7 + 24i$ $\quad z_4 = -8 - 6i$

EXERCICE 13

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 5 + 12i$

2°) En utilisant le 1°, résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 = 5 - 12i$

(Indication : utiliser le conjugué de z)

3°) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2 - 5)^2 + 144 = 0$

EXERCICE 14

1°) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 = 7 + 24i$

2°) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^4 = 7 + 24i$

EXERCICE 15

1°) Calculer $(1 + 8i)^2$

2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(2 + i)z^2 - (9 + 2i)z + 5(3 - i) = 0$

EXERCICE 16

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1°) $z^2 + (i - 5)z + 8 - i = 0$

2°) $z^2 - 3(\sqrt{3} + i)z + 3(2 + i\sqrt{3}) = 0$

EXERCICE 17

Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (11 + 2i)z^2 + 2(17 + 7i)z - 42$.

1°) Démontrer qu'il existe un nombre réel α solution de l'équation : $P(z) = 0$.

2°) Déterminer le polynôme Q tel que : $P(z) = (z - \alpha) Q(z)$

3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

EXERCICE 18

Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - 2(1 + 2i)z^2 + 7iz + 3(1 - 3i)$.

1°) Démontrer qu'il existe un imaginaire pur iβ solution de l'équation : $P(z) = 0$.

2°) Déterminer le polynôme Q tel que : $P(z) = (z - i\beta) Q(z)$

3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

EXERCICE 19

Soit $P(z) = z^3 - (6 - 2i)z^2 + (10 + 4i)z - 16 - 4i$.

1°) Montrer que $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure, puis résoudre cette équation.

On notera z_0, z_1, z_2 les trois solutions avec $|z_1| < |z_2|$.

2°) Dans le plan complexe de repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, placer les points A, B, C d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 , puis donner l'affixe du barycentre G des points pondérés (A , 2) (B , 1) et (C , 1).

EXERCICE 20

Soit P le polynôme défini par :

$P(z) = z^4 + (5 - 2i)z^3 + 2(8 - 10i)z^2 + (6 - 16i)z - 12i$.

1°) Vérifier que : $P(2i) = P(-3) = 0$.

2°) Déterminer un polynôme Q du second degré tel que, pour tout nombre complexe z, on a :

$$P(z) = (z^2 + (3 - 2i)z - 6i)\,Q(z) .$$

3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : P (z) = 0 .

EXERCICE 21

Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8$ ($z \in \mathbb{C}$) .

1°) Comparer $f(\overline{z})$ et $\overline{f(z)}$.

Calculer f(i). En déduire une, puis deux solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation f(z) = 0.

2°) Mettre f(z) sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels. Achever la résolution de l'équation f(z) = 0

EXERCICE 22

Démontrer que, si les nombres complexes z_1 et z_2 ont pour module 1, le nombre complexe:

$z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ *est réel.*

EXERCICE 23

Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z telle que :

1°) $(3z + 1)(\overline{z} - i)$ soit réel 2°) $(\overline{z} + 2)(z - 2i)$ soit imaginaire pur

3°) $z + \overline{z} = |z|$ 4°) $(2z + i)(\overline{z} - 2)$ soit réel 5°) $\dfrac{2 - z}{i + z}$ soit imaginaire pur

6°) $\dfrac{z - i}{z + 1}$ soit un réel strictement positif

7°) $Z = \dfrac{z + 2 - i}{z - 3 + i}$ soit imaginaire pur avec $Im(Z) \leq 0$

EXERCICE 24

Soit $\mathscr{P}$ un plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1°) Démontrer que l'ensemble $\mathscr{D}$ des points M de $\mathscr{P}$ d'affixe z telle que :

$$|z - 1 - 2i| = |z - 7 + 2i|$$

est une droite dont on donnera une équation cartésienne.

2°) En considérant les points A et B d'affixes respectives $1 + 2i$ et $7 - 2i$, retrouver géométriquement le résultat de la question 1°.

EXERCICE 25

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z qui sont alignés avec les points d'affixe i et iz.

EXERCICE 26

On considère le plan complexe $\mathscr{P}$.

1°) Déterminer et représenter l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M d'affixe z telle que $(z - 2i)(\overline{z} - 1)$ soit un imaginaire pur.

2°) Déterminer et représenter l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M (z) telle que $(z - 2i)(\overline{z} - 1)$ soit un nombre réel positif.

EXERCICE 27

On note M le point d'affixe $z = x + iy$. Soit $u = z^2 + \overline{z} + 1$ et $v = z(\overline{z} + 1)$.

1°) Calculer Re(u), Im(u), Re(v) et Im(v) en fonction de x et y.

2°) Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tels que : Im(u) = Im(v).

3°) Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tels que : Re(u) = Re(v).

4°) Résoudre l'équation d'inconnue z : u = v.

EXERCICE 28

Donner une forme trigonométrique puis exponentielle des nombres complexes suivants :

1°) $\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{9i}$ 2°) $\dfrac{1 + i}{1 - i}$ 3°) $\dfrac{12}{i}$ 4°) $\dfrac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}$ 5°) $(\sqrt{6} - i\sqrt{2})^4$

6°) $(3i)^6$ 7°) $(\sqrt{3} - i)^8$ 8°) $(1 - i)^{18}$ 9°) $\dfrac{(1 - i)^3}{(\sqrt{3} - i)^2}$

EXERCICE 29

1°) a) Déterminer une forme trigonométrique et la forme algébrique de $\dfrac{3 + 3i}{1 + i\sqrt{3}}$

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ *et* $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

2°) Déterminer de même les valeurs exactes de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ *et* $\sin\dfrac{5\pi}{12}$ *à l'aide de* $\dfrac{\sqrt{3} + i}{1 - i}$

EXERCICE 30

Soit $z = \dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)^4}{\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

1°) Déterminer Re(z) et Im(z).

2°) Déterminer | z | et arg(z).

3°) Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ *et* $\sin\dfrac{11\pi}{12}$.

EXERCICE 31

Exprimer en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$:

a) $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ b) $\cos 4\theta$ et $\sin 4\theta$ c) $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$

EXERCICE 32

Linéariser :

a) $\cos^3\theta$ b) $\sin^4\theta$ c) $\cos^4\theta$ d) $\cos^3\theta\sin\theta$ e) $\sin^3\theta\cos\theta$ f) $\sin^4\theta\cos^2\theta$

EXERCICE 33

Soit $\theta \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$ *et les complexes* $z_1 = 1 + \cos 2\theta + i\sin 2\theta$ et $z_2 = 1 + \cos 2\theta - i\sin 2\theta$.

Déterminer en fonction de θ *le module et un argument de* z_1 et z_2.

EXERCICE 34

1°) *Donner un argument de chacun des complexes suivants :*

$z_1 = \cos\theta - i\sin\theta$; $z_2 = -\sin\theta + i\cos\theta$; $z_3 = \sin\theta + i\cos\theta$;

$z_4 = -\sin\theta - i\cos\theta$ et $z_5 = -\cos\theta - i\sin\theta$.

2°) *Dans le plan muni d'un repère orthonormal* $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, *placer le point* M_0 *d'affixe*

$\cos\theta + i\sin\theta$ (*prendre* θ *tel que* $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) *et les points* M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 *d'affixes respectives* z_1, z_2, z_3, z_4, z_5.

EXERCICE 35

Soit $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ (*avec* $\alpha \in$).

1°) *Mettre sous la forme la plus simple* $\frac{1}{z}$.

2°) *Calculer* $z^n + \frac{1}{z^n}$ (*avec* $n \in \mathbb{N}^*$).

3°) *Développer le complexe* $\left(z + \frac{1}{z}\right)^4$ *et en déduire une linéarisation de* $\cos^4\alpha$.

EXERCICE 36

Déterminer et construire l'ensemble des points M(z) tels que :

a) $\frac{z-i}{z-1}$ soit réel. b) $\frac{z-i}{z+i}$ soit imaginaire pur c) $\left|\frac{z-1+i}{z+3}\right| = 1$

d) $\arg\left(\frac{z-2+i}{z+2i}\right) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ e) $\arg\left(\frac{z-1+2i}{z-3+i}\right) = \pi\ (2\pi)$ f) $\frac{z-2i}{z+2i}$ soit un réel strictement positif

g) $\arg(z-i) = \arg(z+1) + k\pi$ h) $\arg(z-i) = \frac{\pi}{2} + \arg(z+1) + 2k\pi$ i) $\left|\frac{z-i}{z-4}\right| = 2$.

EXERCICE 37

Soit f l'application de $\mathbb{C} \mid \{2i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = \dfrac{z + 2i}{z - 2i}$. on pose $Z = f(z)$.

1°) Soit $A(-2i)$ et $B(2i)$. Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{D}$ des points m d'affixe z tels que $|Z| = 1$.

2°) On rappelle que : $\forall z \in \mathbb{C}, |Z|^2 = Z\overline{Z}$.

Déterminer et construire l'ensemble des points M(z) tels que $Z \in i$.

EXERCICE 38

Pour tout complexe $z = x + iy$ avec $x, y \in$ et $(x,y) \neq (-1, 0)$, on considère le complexe u défini par $u = \dfrac{z - i}{z + 1}$.

1°) On note $u = X + iY$ avec $X, Y \in$.

Exprimer X et Y en fonction de x et y.

2°) Déterminer les ensembles E_1, E_2 et E_3 définis respectivement par :

E_1 : ensemble des points M(z) du plan tels que u soit imaginaire pur ;

E_2 : ensemble des points M(z) du plan tels que u soit réel ;

E_3 : ensemble des points M(z) du plan tels que u soit réel et strictement positif ;

3°) Représenter E_1, E_2 et E_3.

EXERCICE 39

Soit $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$

$$M(z = x + iy) \mapsto M'(z') \quad \text{avec } z' = \frac{z - 1}{z + 1}.$$

1°) Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}_1$ des points M de $\mathscr{P}$ pour lesquels l'affixe de l'image M ' est un imaginaire pur.

2°) Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}_2$ des points M de $\mathscr{P}$ tels que leur image M ' par f appartient au cercle de centre O et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

EXERCICE 40

Soit f l'application de $\mathbb{C} \mid \{i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = \dfrac{z - i}{iz + 1}$. On pose $Z = f(z)$.

1°) Soit A(i) et B(− i) et M(z). Interpréter géométriquement $|Z|$ et arg(Z).

2°)Déterminer de deux façons (algébriquement et géométriquement) les ensembles

$$E_1 = \{M(z) / Z \in \ \} \text{ et } \quad E_2 = \{M(z) / Z \in i \ \}.$$

Construire E_1 et E_2.

EXERCICE 41

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) , on considère les points : A (— i) , B(2i) et l'application : f : $\mathscr{P} \setminus \{A\} \rightarrow \mathscr{P}$

$$M(z) \mapsto i\,\frac{z - 2i}{z + i}$$

1°) a) Soient $M_1(i)$ et $M_2\left(\frac{3}{2} + \frac{i}{2}\right)$; déterminer $f(M_1)$ et $f(M_2)$.

b) Déterminer le point M de $\mathscr{P} \setminus \{A\}$ tel que f (M) = O et le point Q tel que f (Q) = N si

N est le point d'affixe 2 — i.

2°) Déterminer et construire :

a) L'ensemble $\mathscr{E}$ des points M de $\mathscr{P} \setminus \{A\}$dont les images ont pour affixe un imaginaire pur ;

b) L'ensemble $\mathscr{F}$ des points M de $\mathscr{P} \setminus \{A\}$dont les images ont pour affixe un réel.

c) L'ensemble $\mathscr{G}$ des points M de $\mathscr{P} \setminus \{A\}$dont les images appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

EXERCICE 42

Soit f l'application définie sur $\mathbb{C}|\{2i\}$ par $f(z) = \frac{z + i}{z - 2i}$.

1°) Soit $z \in \mathbb{C}|\{2i\}$. On pose $z - 2i = \rho\, e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in$.

Ecrire f(z) — 1 sous forme exponentielle à l'aide de ρ et θ.

2°) Soit A le point d'affixe 2i.

a) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}_1$ des points M d'affixe z vérifiant $| f(z) - 1 | = 3$.

b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des points M d'affixe z tels que $\frac{\pi}{4}$ soit un argument de

f(z) — 1.

c) Représenter les ensembles $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$.

EXERCICE 43

1°) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$.

On désigne par z_1 la solution de partie imaginaire positive et par z_2 l'autre solution.

b) Donner un argument et le module de chacune des solutions z_1 et z_2. En déduire le module et un argument des complexes z_1^2 et z_2^2, puis écrire ces 2 nombres sous forme algébrique.

2°) a) Placer dans le plan les points A, B, A ' et B ' d'affixes respectives $1 + i\sqrt{3}$, $1 - i\sqrt{3}$, $-2 + 2i\sqrt{3}$ et $-2 - 2i\sqrt{3}$.

b) Déterminer la nature du quadrilatère A A' BB ' *c) Montrer que le triangle A A' B ' est rectangle et qu'il en est de même du triangle BB ' A '*

En déduire que les 4 points A, A', B et B ' sont sur un même cercle dont on déterminera

le centre Ω et le rayon r.

EXERCICE 44

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 - 2z + 5 = 0$

b) $z^2 - 2(1 + \sqrt{3})\ z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$

2°) On considère dans le plan de repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ *les points A, B, C et D d'affixes respectives :*

$Z_A = 1 + 2i$; $Z_B = 1 + \sqrt{3} + i$; $Z_C = 1 + \sqrt{3} - i$; $Z_D = 1 - 2i$

a) Placer A, B, C et D dans le plan (P)

b) Vérifier que $\dfrac{Z_D - Z_B}{Z_A - Z_B} = i\sqrt{3}$ *, en déduire la nature du triangle ABD*

c) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle,($\mathscr{C}$*) dont on précisera le centre et le rayon.*

3°) On considère l'équation (E) : $z^2 - 2(1+ 2\cos\theta) Z+5 +4\cos\theta = 0$

θ *est un élément de .*

a) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$

b) Montrer que les points images des solutions de (E) appartiennent à ($\mathscr{C}$ *) .*

EXERCICE 45

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$*.*

Soit f l'application de $\mathbb{C} \mid \{1\}$ *dans* $\mathbb{C}$ *définie par :* $f(z) = \dfrac{2 - iz}{1 - z}$ *.*

1°) Déterminer le module et un argument de f(z). Pour quelles valeurs de l'entier naturel k le nombre $[f(2)]^k$ *est-il réel ?*

2°) On pose $z' = f(z)$*.*

a) Exprimer z en fonction de z ' .

b) Soient M le point d'affixe z $(z \neq 1)$ *et M ' le point d'affixe z ' .*

Montrer que $OM = \dfrac{M'A}{M'B}$ *où A et B sont des points dont on donnera les affixes.*

c) Soit $\mathscr{C}$ *l'ensemble des points m du plan pour lesquels* $|z| = 1$ *et* $z \neq 1$*.*

Montrer que si M appartient à $\mathscr{C}$*, M ' appartient à une droite* $\mathscr{D}$ *que l'on pourra*

définir géométriquement. Tracer $\mathscr{C}$ *et* $\mathscr{D}$ *sur une même figure.*

EXERCICE 46

1°) Ecrire sous forme trigonométrique le complexe 1 + i.

2°) On pose $z = \rho\, e^{i\theta}$ *avec* $\rho \in]0 ; +\infty[$ *et* $\theta \in [0 ; 2\pi[$.

a) Calculer z^2 *et* $(1 + i)\overline{z}$ *en fonction de* ρ *et* θ.

b) En déduire la valeur r de ρ *pour laquelle on a l'égalité :* $z^2 = (1 + i)\overline{z}$ *(1).*

2°) Déterminer les valeurs θ_0, θ_1 *et* θ_2 *de* θ *telles que* $z = r\, e^{i\theta}$ *vérifie l'égalité (1).*

on note respctivement z_0 z_1 *et* z_2 *les nombres complexes de module r et d'arguments*

θ_0, θ_1 *et* θ_2.

3°) Soient A_1 *et* A_2 *les points d'affixe respectives* $z_1 - z_0$ *et* $z_2 - z_0$ *dans le plan complexe, et O le point d'affixe nulle. Calculer sous forme trigonométrique le nombre complexe*

$\dfrac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$. *En déduire la nature du triangle* OA_1A_2.

EXERCICE 47 **Calcul de cos** $\boldsymbol{\frac{\pi}{5}}$

Au nombre complexe z, on associe le nombre complexe $Z = 1 + z + z^2 + z^3 + z_4$.

1°) a) Vérifier que si $z \neq 1$, *alors* $Z = \dfrac{1 - z^5}{1 - z}$.

b) On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ *; calculer Z. En déduire la valeur de :*

$$S = 1 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5}.$$

2°) Montrer que :

$\cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{8\pi}{5} = 4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) - 2.$

$\cos\dfrac{4\pi}{5} + \cos\dfrac{6\pi}{5} = -2\cos\dfrac{\pi}{5}.$ (*Indication* : remarquer que : $\dfrac{8\pi}{5} = 2\pi - \dfrac{2\pi}{5}$ et $\dfrac{6\pi}{5} = 2\pi - \dfrac{4\pi}{5}$)

Utiliser ces égalités et la valeur trouvée pour S au 1°b *pour calculer* $\cos\dfrac{\pi}{5}$.

EXERCICE 48

Soit $z = 1 + e^{i\theta}$, *où* $\theta \in]-\pi ; \pi[$.

1°) Déterminer le module r et un argument φ *de z (on pourra factoriser par* $e^{i\frac{\theta}{2}}$*).*

2°) Calculer z^4 *partir de l'écriture : a)* $z = 1 + e^{i\theta}$ *b)* $z = r\, e^{i\varphi}$.

3°) Etablir la relation : $\cos^4\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{8}\cos 2\theta + \dfrac{1}{2}\cos\theta + \dfrac{3}{8}.$

EXERCICE 49

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) (unité : 4 cm).

On désigne par A le point d'affixe 1 et par $\mathscr{P}'$ le plan $\mathscr{P}$ privé de A.

Soit f l'application de $\mathscr{P}'$ dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M d'affixe z associe le point M ' = f(z) d'affixe Z telle que : $Z = \dfrac{z-2}{z-1}$.

1°) Soit B le point d'affixe $\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Déterminer B ' = f (B).

2°) Déterminer les points I et J invariants par f. (on notera I celui d'ordonnée positive).

3°) a) Exprimer en fonction de z les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$.

b) Déduire du a) une relation entre AM ' et AM et prouver que l'image du cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 1 est le cercle $\mathscr{C}$. Vérifier que B $\in \mathscr{C}$.

c) Tracer $\mathscr{C}$ et placer les points B, B ' , I et J sur la figure.

EXERCICE 50

Le plan $\mathscr{P}$ complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$).

Soit f l'application qui, à tout point M d'affixe z associe le point M ' d'affixe z ' telle que :

$$z' = \frac{1}{z}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1°) Placer sur une figure le point B d'affixe $w = \dfrac{1}{2}(1 + i)$ et son image B ' par f (Unité : 4cm).

donner le module et un argument de chacun des complexes w et w ' .

2°) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Comparer les modules et les arguments de z et z ' .

3°) Quel est l'ensemble des points M pour lesquels M et M ' sont symétriques par rapport à l'axe (O, $\vec{u}$) ?

4°) Soit M un point de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = \dfrac{1}{2}$. Montrer que son affixe z vérifie :

$$|1 - z| = |z|.$$

EXERCICE 51

On définit les nombres complexes Z_n de la manière suivante : $Z_0 = 1$ et, pour n entier supérieur ou égal à 1, $Z_n + 1 = \dfrac{1}{3}Z_n + \dfrac{2}{3}i$.

1°) Pour tout entier n, on pose $u_n = Z_n - i$.

a) Calculer u_{n+1} en fonction de u_n.

b) Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $u_n = (1 - i)\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

2°) a) Exprimer en fonction de n la partie réelle x_n et la partie imaginaire y_n de u_n.

Calculer les limites des suites (x_n) et (y_n).

On note A_n le point du plan complexe d'affixe u_n et B_n le point d'affixe Z_n.

b) Calculer le module et l'argument de u_n. Montrer que les points A_n sont alignés, ainsi que les points B_n.

EXERCICE 52

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système : $\begin{cases} z_1 z_2 = \frac{1}{2} \\ z_1 + 2z_2 = \sqrt{3} \end{cases}$.

Donner les solutions sous forme trigonométrique.

2°) On donne : $S_1 = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta$ et $S_2 = \sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin n\theta$.

a) Montrer que si $\theta \neq 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$, alors $S = S_1 + i S_2 = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}$

b) En déduire que $S = e^{i\frac{n\theta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$ puis les valeurs de S_1 et S_2.

EXERCICE 53

Soit (E) : $z^4 - 4(\cos a \cos b) z^3 + 2(1 + \cos 2a + \cos 2b)z^2 - 4(\cos a \cos b) z + 1 = 0$, où a et b sont des réels donnés.

1°) Démontrer qu'en posant $u = z + \frac{1}{z}$, on peut ramener la résolution de (E) à celle de deux équations du second degré.

2°) Résoudre (E) en donnant en fonction de a et b une forme trigonométrique de chacune des solutions.

EXERCICE 54

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1°) $z^2 = -5 + 12i$ 2°) $z^3 = 1 + i$ 3°) $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right) + 1 = 0$

4°) $z^2 - (5 - i\sqrt{3})z + 6 - 3i\sqrt{3} = 0$

EXERCICE 55

On veut déterminer trois nombres complexes z_1 , z_2 et z_3 tels que leurs modules forment une progression géométrique de raison 2, et leurs arguments une progression arithmétique de raison $\frac{2\pi}{3}$. Déterminer z_1, z_2, z_3 sachant que $z_1 \times z_2 \times z_3 = 4(1 + i\sqrt{3})$ et qu'un argument de z_1 appartient à $]0 ; \frac{\pi}{2}[$. Donner les résultats sous forme trigonométrique.

EXERCICE 56

1°) $\theta \in [0\ ;\ 2\pi[$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (2^{\theta+1}\cos\theta)\, z + 2^{2\theta} = 0$ (1) .

Donner les solutions sous forme exponentielle.

2°) On considère les points A, B d'affixes les solutions de (1).

Déterminer θ pour que OAB soit équilatéral dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 57

1°)Ecrire sous forme exponentielle les racines cubiques de a = 16 (1 — i) .

2°) Pour $\lambda \in$, on pose $z_\lambda = 1 + i + 2\sqrt{2}\ e^{\lambda} = x_\lambda + i\, y_\lambda$.

a) Déterminer x_λ et y_λ en fonction de λ .

b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M (x_λ , y_λ) quand λ décrit $[0\ ;\ 2\pi[$.

3°) Montrer que les solutions de l'équation $(z - (1 - i))^3 = a$ sont des affixes de points de $\mathscr{C}$

EXERCICE 58

1°) Déterminer les complexes solutions de l'équation $z^4 = 1$.

2°) Déterminer sous forme trigonométrique les solutions de l'équation $z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$.

3°) Soit $a = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\, i$.

Vérifier que $a^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$. En déduire sous forme algébrique les résultats de 2°.

4°) Des questions 2° et 3°, déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{11\pi}{12}$.

EXERCICE 59

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1°) On considère la transformation T de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, au point M (x , y) associe le point M ' (x ', y ') tel que :

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + \sqrt{3} \end{cases}$$

Le point M a pour affixe z et M ' a pour affixe z ' .

a) Exprimer z ' en fonction de z.

b) Donner la nature de T.

2°) Soit S : $\mathscr{P} \to \mathscr{P}$

$$M_1(z_1) \mapsto M_2(z_2) \text{ tel que } z_2 = -\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_1.$$

a) Donner la nature de f et ses éléments caractéristiques.

b) Définir analytiquement l'application $S \circ T$.

Quelle est l'image du point E $\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ *par* $S \circ T$ *?*

c) Soit $\mathscr{D}$*:* $x + \sqrt{3}\ y + 2 = 0$*. Montrer que* $E \in \mathscr{D}$

Trouver l'image $\mathscr{D}'$ *de* $\mathscr{D}$ *par* $S \circ T$*.*

Quel est le point d'intersection de $\mathscr{D}$ *et* $\mathscr{D}'$ *?.*

EXERCICE 60

Soit $a \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ *et* f_a *l'application du plan complexe dans lui-même qui, au point M d'affixe z associe le point M ' d'affixe z ' définie par :*

$z' = (-1 + i \tan a)\, z - i \tan a + 2$

1°) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $-1 + i \tan a$ *.*

2°) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f_a*.*

3°) Soit h_a *l' homothétie de centre le point Ω d'affixe 1 et de rapport* $\frac{1}{\cos a}$ *.*

Donner une écriture complexe de la rotation r_a *telle que :* $f_a = r_a \circ h_a$*.*

EXERCICE 61

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ *, on considère l'application F qui à tout point M d'affixe z associe le point M ' d'affixe z ' définie par :*

$$z' = u^2 z + u - 1, \text{ où } u \in \mathbb{C}.$$

1°) Déterminer l'ensemble des complexes u pour lesquels f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$*.*

2°) Déterminer u tel que F soit une translation.

3°) Déterminer u tel que F soit une homothétie de rapport -2*.*

4°) Caractériser F lorsque $u = 1 - i$*.*

EXERCICE 62

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O\ ; \vec{u}, \vec{v})$*. Soit* S_1 *l'application qui, à tout point M(x, y) associe* $M'(x', y')$ *définie par :* $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

1) Déterminer l'affixe, $z' = x' + i\,y'$*, de* M' *en fonction de l'affixe, z = x + i y, de M. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de* S_1*.*

2) Soient les points A(1) et B (- 1).Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S_2 *telle que* $S_2(A) = O$ *et* $S_2(B) = B$ *puis caractériser* S_2*.*

3) On pose $S = s_1 \circ s_2$*. Déterminer l'écriture complexe de S.*

4) Déterminer l'image par S :

a) de la droite (D) d'équation 2x + y – 1= 0

b) du cercle (C) d'équation $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4$.

EXERCICE 63

1) Soit (E) : $z^3 - 4i\,z^2 - (6+i)z + 3i - 1 = 0$.

Démontrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure noté z_0*.Résoudre l'équation (E).*

2) Soit (E) : $z^3 - 15\,z^2 + 76z - 130 = 0$*.Résoudre (E) sachant qu'elle admet une solution réelle.*

3) Résoudre dans C l'équation $z^3 = 1$

4) a) Développer $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$

b) Soit l'équation (E) $z^3 = 4\sqrt{2}(-1-i)$*.En posant u =* $\frac{z}{\sqrt{2}-\ i\sqrt{2}}$ *, déterminer sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique les racines de l'équation (E) .*

En déduire les valeurs de cos$(\frac{5\Pi}{12})$ *et de sin* $(\frac{5\Pi}{12})$.

EXERCICE 64

Soit l'équation (E) $z^3 + (1-8i)z^2 - (23+4i)z - 3\,24i = 0$*.Résoudre (E) sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure. Soient les points A , B et C d'affixes respectives 1 +2i, 3i et -2 +3i.*

Soit G le barycentre des points A,B et C affectés de coefficients respectifs 2, -2 et 1.

1) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ *,* $\overrightarrow{GB}$ *et* $\overrightarrow{GC}$ *ont pour affixes respectives* $\sqrt{2}\,e^{i\frac{\Pi}{4}}$ *,* $2i$ *et* $2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\Pi}{4}}$ *et que ces affixes sont,*

Dans cet ordre, en progression géométrique ; déterminer la raison de cette suite.

2) En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C. Donner les éléments caractéristiques de cette

EXERCICE 65

1) Soit l'équation (E) : $z^3 + (4-5i)z^2 + (8-20i)z - 40i = 0$.

Résoudre (E) sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

2) Soit l'équation (E) : $z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0$.

Résoudre (E) sachant qu'elle admet une solution réelle.

. 3) Soit l'équation (E) : $z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$.

a) Démontrer que (E) est équivalente au système : $\begin{cases} u = z + \frac{1}{z} \\ u^2 - 5u + 4 = 0 \end{cases}$

b) Achever la résolution de (E).

EXERCICE 66

Soit l'équation (E) : $z^3 + (3-2i)z^2 + (1-4i)z - 1 - 2i = 0$

1) Résoudre (E) sachant qu'elle admet une solution réelle.

2) On donne les points A, B et C définis par : $z_A = -1$, $z_B = -2+i$, $z_C = i$

a) Calculer le module et l'argument de $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

3) Déterminer le centre, le rapport et l'angle de la similitude directe qui laisse invariant A et transforme C en B.

EXERCICE 67

1) Résoudre l'équation : $z^3 - 2(1+2i)z^2 + 7iz + 3(1-3i) = 0$ *sachant qu'elle admet une solution Imaginaire pure.*

2) Soit l'équation (E) : $z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$

a) Démontrer que si z_0 *est solution de (E) ; alors* $\overline{z_0}$ *est solution de (E).*

b) Démontrer que (E) est équivalente au système : $\begin{cases} u = z + \frac{1}{z} \\ u^2 - 5u + 4 = 0 \end{cases}$

c) En déduire la résolution de (E).

3) Soit P(z) = $z^4 - z^3 + z - 1$

a) Résoudre l'équation P(z) = 0.

b) On appelle α *la solution de partie imaginaire strictement positive.*

Calculer $\alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6$ *puis* α^{1992}.

EXERCICE 68

Soit l'équation (E) : $z^3 - (2+5i)z^2 + (4i-9)z - 6 + 9i = 0$

1) Montrer que (E) admet une solution entière. Soit z_1 *cette solution.*

2) Vérifier que 3i est une solution de (E). On pose $z_2 = 3i$*. On note* z_3 *la troisième solution de (E).*

3) Placer les points A, B et C d'affixes respectifs z_1, z_2 et z_3.

Montrer que le triangle ABC est isocèle.

4) On désigne par S la similitude directe qui laisse le point A invariant et qui transforme B en C.

Soit M un point quelconque du plan. Donner un programme de construction de l'image M' *de M par la Similitude S.*

5) Construire les points D et E tels que : D = S(C) et E = S(D).

EXERCICE 69

1) Soient les points A(1 + i), B(2 – i), C(-3 + 6i) et D(3 + 4i). Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S

Telle que S(A) = C et S(B) = D puis donner ses éléments caractéristiques.

a) Déterminer et construire l'image par S de la droite (D) d'équation : y = 3x – 5.

b) Déterminer et construire l'image par S du cercle de centre I(2i + 3) et de rayon 2.

EXERCICE 70

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{u},\vec{v}$) .Soient A(1 + 2i), B(- 2 + i) et L(2 – i).

1) Donner les éléments caractéristiques de la similitude directe S_1 de centre L telle que$S_1(A\ ) =\ B$.

2) Soit S_2 la transformation plane M(z) → $M'(z')$ telle que $z' = \left(\frac{\mathbf{1+i}}{\mathbf{2}}\right)\boldsymbol{z} + \frac{\mathbf{1-3i}}{\mathbf{2}}$ .Quelle est la nature et les éléments caractéristiques de S_2 ?

3) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de S =S_1°S_2.

4) a) Soit T la transformation qui à M(z = x + iy) → $M'(z' =\ x' +\ iy')$ définie par $\begin{cases} x' = x + \sqrt{3}y - 1 \\ y' = -\sqrt{3}x + y + 1 \end{cases}$

Déterminer l'écriture complexe de T.

b) Déterminer les complexes α et β pour que T_2 définie par $T_2 : M(z) \to\ M'(z')/ \quad z' =\ \alpha^2 z +\ \beta$ soit

telle que S_2°T_2 soit une translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe 1.

CALCUL INTÉGRAL

I)Calcul de primitives

1) Rappel de quelques primitives

Soit c un nombre réel .

$x \rightarrow \frac{1}{x}$	$x \rightarrow \ln\lvert x\rvert + c$
$x \rightarrow \frac{1}{ax+b}$	$x \rightarrow \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + c$
$x \rightarrow \frac{u'}{u}$	$x \rightarrow \ln\lvert u\rvert + c$
$x \rightarrow u'e^{u}$	$x \rightarrow e^{u} + c$

Exercice d'application

Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur I .

1) $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $I =]0\,;+\infty[$ ou $I =]-\infty\,;0[$

2) $f(x) = \frac{5}{2x-1}$ sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$ ou $I =]-\infty\,;\frac{1}{2}[$

Solution

Déterminons une primitive F de la fonction f définie sur I .

1) $f(x) = \frac{1}{x}$ $F(x) = \ln\lvert x\rvert + c$, $c \in IR$ $\boxed{\text{sur } I =]0\,;+\infty[\quad F(x) = \ln x + c}$.

$\boxed{\text{Sur } I =]-\infty\,;0[\quad F(x) = \ln(-x) + c}$.

2) $f(x) = \frac{5}{2x-1}$, $f(x) = \frac{5}{2} \times \frac{2}{2x-1}$ $F(x) = \frac{5}{2}\ln\lvert 2x-1\rvert + c$, $c \in IR$

$\boxed{\text{Sur }]\frac{1}{2}\,;+\infty[\quad F(x) = \frac{5}{2}\ln(2x-1) + c}$.

$\boxed{\text{Sur } I =]-\infty\,;\frac{1}{2}[\quad F(x) = \frac{5}{2}\ln(-2x+1) + c}$.

2) Linéarisation ou transformations des fonctions tigonométriques

Pour déterminer les primitives des fonctions du type : $\cos^n x \sin^m x$, n , m ∈ N* , on peut procéder ainsi :

- ***Si m et n ont la même parité alors il faut linéariser $\cos^n x \sin^m x$.***
- ***Si m et n sont de parités différentes alors il faut utiliser la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ puis écrire $\cos^n x \sin^m x$ sous la forme cos x P(sin x) si n est impair ,***
  $\cos^n x \sin^m x$ sous la forme sin x P(cos x) si m est impair .
  P désigne un polynôme .

Exercice d'application

Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur I .

1) $f(x) = \sin^3 x \cos^2 x$ $I = IR$ 2) $f(x) = \cos^2 x \sin^2 x$ $I = IR$

Solution

Déterminons une primitive F de la fonction f définie sur I .

1) $f(x) = sin^3 x \, cos^2 x$ $I = IR$

$f(x) = sin^3 x \, cos^2 x = \sin x \, sin^2 x \, cos^2 x = \sin x \,(1 - cos^2 x) \, cos^2 x = \sin x (cos^2 x - cos^4 x)$

$f(x) = -(-\sin x cos^2 x) + (- \sin x cos^4 x)$

$$\boxed{F(x) = -\frac{cos^3 x}{3} + \frac{cos^5 x}{5} + c \, , \; c \in IR}$$

2) $f(x) = cos^2 x \, sin^2 x$ $I = IR$

$$f(x) = cos^2 x \, sin^2 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 \times \left(\frac{e^{ix} - e^{ix}}{2i}\right)^2 = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \times \frac{e^{ix} - e^{ix}}{2i}\right)^2 = \left(\frac{e^{i2x} - e^{i2x}}{4i}\right)^2$$

$$= \frac{e^{i4x} - 2 + e^{-i4x}}{-16} = \frac{(e^{i4x} + e^{-i4x}) - 2}{-16} = \frac{2\cos 4x - 2}{-16} = -\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{8}$$

$f(x) = cos^2 x \, sin^2 x = -\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{8}$

$F(x) = -\frac{1}{8}(\frac{1}{4}\sin 4x) + \frac{1}{8}x + c = -\frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{8}x + c \, , \; c \in IR$

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{8}x + c \, , \; c \in IR}$$

Exercice d'application

Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur I .

1) $f(x) = \tan x$ $I =] -\frac{\pi}{2} ; -\frac{\pi}{2} [$ 2) $f(x) = tan^2 x$ $I =] -\frac{\pi}{2} ; -\frac{\pi}{2} [$ 3) $f(x) = \sin 5x \cos 4x$ $I = IR$

Solution

Déterminons une primitive F de la fonction f définie sur I .

1) $f(x) = \tan x$ $I =] -\frac{\pi}{2} ; -\frac{\pi}{2} [$

$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{-\sin x}{\cos x}$, $F(x) = -\ln(\cos x) + c$, $c \in IR$. $\boxed{F(x) = -\ln(\cos x) + c \, , \; c \in IR}$

2) $f(x) = tan^2 x$ $I =] -\frac{\pi}{2} ; -\frac{\pi}{2} [$

$f(x) = tan^2 x = 1 + tan^2 x - 1$, $F(x) = \tan x - x + c$, $c \in IR$. $\boxed{F(x) = \tan x - x + c \, , c \in IR}$

3) $f(x) = \sin 5x \cos 4x$ $I = IR$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$f(x) = \sin 5x \cos 4x = \frac{1}{2} [\sin(5x+4x) + \sin(5x-4x)] = \frac{1}{2} (\sin 9x + \sin x)$

$F(x) = \frac{1}{2} (-\frac{1}{9}\cos 9x) + \frac{1}{2} (-\cos x) + c = -\frac{1}{18}\cos 9x - \frac{1}{2}\cos x + c \, , \; c \in IR$

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{18}\cos 9x - \frac{1}{2}\cos x + c \, , \; c \in IR}$$

3) ***Décomposition de fractions rationnelles***

Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur I .

1) $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x+1}{x^3\,(x+1)^2}$ *I= IR* *Indication: Mettre f(x) sous la forme* $\frac{a}{x^3} + \frac{b}{(x+1)^2}$.

2) $f(x) = \frac{x^4 - 3x + 3}{x^4(x-1)}$ *I =]1 ; +∞[* *Indication: Mettre f(x) sous la forme* $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x^4}$.

3) $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + x + 7}{(x-1^2}$ *I =]5 ; +∞[Indication: Mettre f(x) sous la forme* $ax + b + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2}$

.

Solution

Déterminons une primitive F de la fonction f définie sur I .

1) $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x+1}{x^3\,(x+1)^2}$ *I= IR* *Indication: Mettre f(x) sous la forme* $\frac{a}{x^3} + \frac{b}{(x+1)^2}$.

$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x+1}{x^3\,(x+1)^2} = \frac{x^3 + (x+1)^2}{x^3\,(x+1)^2} = \frac{x^3}{x^3\,(x+1)^2} + \frac{(x+1)^2}{x^3\,(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^3}$

$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^3}$, $F(x) = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2x^2} + c$, $c \in IR$. $\boxed{F(x) = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2x^2} + c\ ,\ c \in IR}$

2) $f(x) = \frac{x^4 - 3x + 3}{x^4(x-1)}$ *I =]1 ; +∞[* *Indication: Mettre f(x) sous la forme* $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x^4}$.

$f(x) = \frac{x^4 - 3x + 3}{x^4(x-1)} = \frac{x^4 - 3(x-1)}{x^4(x-1)} = \frac{x^4}{x^4(x-1} + \frac{-3(x-1}{x^4(x-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{-3}{x^4}$

$F(x) = \ln|x-1| - 3\left(\frac{-1}{3x^3}\right) + c = \ln(x-1) + \frac{1}{x^3} + c$, $c \in IR$

$\boxed{F(x) = \ln(x-1) + \frac{1}{x^3} + c\ ,\ c \in IR}$

3) $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + x + 7}{(x-1^2}$ *I =]5 ; +∞[Indication: Mettre f(x) sous la forme* $ax + b + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2}$

.

$f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + x + 7}{(x-1^2}$

$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2} = \frac{(ax+b)(x-1)^2 + c\,(x+1) + d}{(x-1)^2} = \frac{ax^3 + (-2a+b)x^2 + (a-2b+c)x + b - c + d}{(x-1)^2}$

Par identification : $a = 2$, $-2a + b = -3$, $a - 2b + c = 1$ *et* $b - c + d = 7$

On trouve $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$ *et* $d = 7$.

$f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{7}{(x-1)^2}$ $F(x) = x^2 + x + l\,n|x-1| - \frac{7}{x-1} + c$, $c \in IR$

$\boxed{F(x) = x^2 + x + l\,n(x-1) - \frac{7}{x-1} + c\ ,\ c \in IR}$

II) Calcul integral

1) Présentation

Soit f une fonction continue sur un intervalle K .f admet une infinité de primitives sur K . Soient F et G deux primitives de f sur K . Il existe une constante c tel que $\forall x \in K$, $F(x) = G(x) + c$.

Soient a et b deux éléments de K .

$$F(a) = G(a) + c$$

$$F(b) = G(b) + c$$

Donc $F(a) - F(b) = G(a) - G(b)$.

On a : $F(a) - F(b) = G(a) - G(b)$.

On dit que le nombre réel $F(a) - F(b)$ est indépendant de la primitive de f choisie sur K .

2) Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle K. F une primitive de f sur K .

Soient a et b deux éléments de K. On appelle intégrale de f de a à b le nombre réel noté $\int_a^b f(x)dx$ défini par :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) .$$

$\int_a^b f(x)dx$ se lit intégrale de a à b de f(x) dx .

$[F(x)]_a^b$ se lit F (x) pris entre a et b .

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$. x est une variable muette. On peut remplacer x par toute autre lettre sauf a et b .

Exemple

1) $\int_1^2 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$

2) $\int_0^{\pi} \cos x\, dx = [\sin x]_0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\cos\frac{\pi}{4} - (-\cos 0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$

3) Interprétation géométrique de l'intégrale

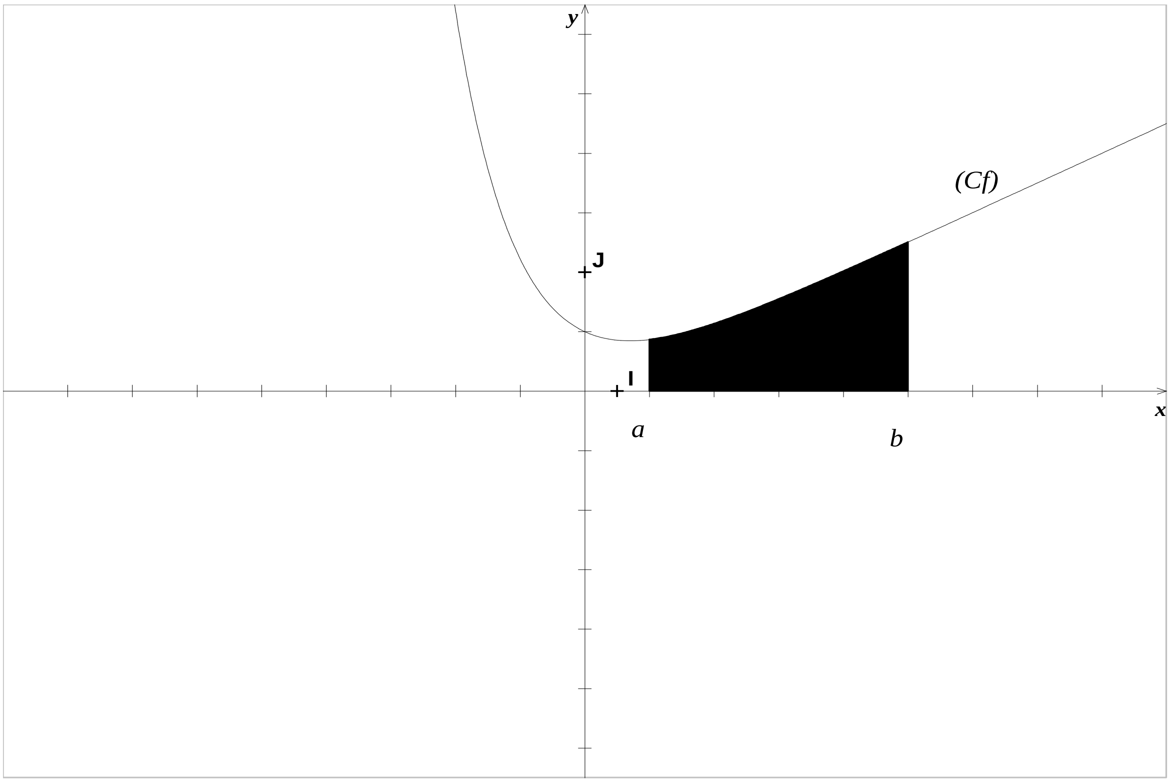
Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) et l'unité d'aire est l'aire du rectangles de dimensions OI et OJ . On note : u. a = OI $\times$ OJ .

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle K. (C_f) sa courbe représentative .Soient a et b deux éléments de K .

$\int_a^b f(x)dx$ est l'aire en unité d'aire de la partie Δ du plan limiée par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b .

$$M(x\,;y) \in \Delta \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases} \qquad Aire(\Delta) = \int_a^b f(x)dx \times u.a\ .$$

$$Aire(\Delta) = \int_a^b f(x)dx \times u.a\ .$$



Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle K . Soit a un élément de K . La seule primitive de f sur K s'annulant en a est la fonction : $x \rightarrow \int_a^x f(t)dt$ **.**

Démonstration

Soit F la primitive de f s'annulant en a . Donc F(a) = 0 .

Par définition de l'intégrale, on a : $\int_a^x f(t)dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a) = F(x) - 0 = F(a)$.

D'où $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

On obtient : $F : K \rightarrow IR$

$$x \rightarrow \int_a^x f(t)dt$$

Exemple

La primitive sur $]0;\ +\infty[$ *de la fonction* $x \rightarrow \frac{1}{x}$ *et qui s'annule en 1 est la fonction ln .*

$$\forall\, x \in\ ]0;\ +\infty[\ ,\quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

4) *Propriétés de l'intégrale*

Propriété 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle K .Soient a,b et c trois éléments de K . On a :

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ ***Relation de Chasles***

Démonstration

Soit F une primitive de f sur K . Par définition de l'intégrale, on a :

$\int_a^a f(x)dx = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$ $\boxed{\text{donc } \int_a^a f(x)dx = 0}$

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx$

$\boxed{\text{Donc } \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = [F(x)]_a^c + [F(x)]_c^b = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a)$

$\boxed{\text{D'où } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$

Propriété2

Soient f et g deux fonctions continues sur K . Soient a et b deux éléments de K , $\alpha \in IR$, on a :

- $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$

Démonstration

Soit F une primitive de f sur K et G une primitive de g sur K . On a :

$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = [F(x) + G(x)]_a^b = (F+G)(b) - (F+G)(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a)$

$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ *donc* $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

$\int_a^b \alpha f(x)dx = [\alpha F(x)]_a^b = \alpha F(b) - \alpha F(a) = \alpha (F(b) - F(a)) = \alpha \int_a^b f(x)dx$

Donc $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$

Propriété3

Soient f et g deux fonctions continues sur [a ; b] .

- ***Si f*** ≥ 0 ***alors*** $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- ***Si f*** $\geq g$ ***alors*** $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

On dit que l'intégrale conserve l'ordre .

Démonstration

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ *, F une primitive de f sur* $[a;b]$ *.*

On a : $\forall\ x \in [a;b]$ *,* $F'(x) = f(x)$ *d'où F est croissante sur* $[a;b]$ *.*

Donc $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \geq 0$ *. On a :* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Soient f et g des fonctions continues sur $[a;b]$ *, telles que :* $\forall\ x \in [a;b]$ *,* $f(x) \geq g(x)$ *.*

$f(x) \geq g(x)$ *donc* $f(x) - g(x) \geq 0$ *d'où* $\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx \geq 0$

$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx \geq 0$ *donc* $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

5) <u>Technique de calcul intégral</u>

a) <u>Utilisation des primitives usuelles</u>

Calculer les intégrales suivantes .

1) $\int_{-2}^{0} t^2\, dt$ 2) $\int_0^1 (t^3 + 2t + 1)dt$ 3) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2t}{t^2 - 1}\, dt$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2t + \frac{\pi}{2})dt$ 5) $\int_{-2}^{3} |t^2 - 1|\, dt$ 6) $\int_3^4 (6t + \frac{7}{2\sqrt{t}})\, dt$ 7) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t\, dt$

Solution

Calculons les intégrales suivantes .

1) $\boldsymbol{\int_{-2}^{0} t^2\, dt}$

$\int_{-2}^{0} t^2\, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-2}^{0} = \frac{0^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{8}{3}$ *donc* $\boxed{\int_{-2}^{0} t^2\, dt = \frac{8}{3}}$.

2) $\boldsymbol{\int_0^1 (t^2 + 2t + 1)dt}$

$\int_0^1 (t^2 + 2t + 1)dt = \left[\frac{t^4}{4} + t^2 + t\right]_0^1 = \frac{1}{4} + 1 + 1 = \frac{9}{4}$ *donc* $\boxed{\int_0^1 (t^2 + 2t + 1)dt = \frac{9}{4}}$

3) $\boldsymbol{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2t}{t^2 - 1}\, dt}$

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2t}{t^2 - 1}\, dt = [\ln|t^2 - 1|]_0^{\frac{1}{2}} = \ln\left|\frac{1}{4} - 1\right| - \ln|-1| = \ln\frac{3}{4}$ *donc* $\boxed{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2t}{t^2 - 1}\, dt = \ln\frac{3}{4}}$

4) $\boldsymbol{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2t + \frac{\pi}{2})dt}$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2t + \frac{\pi}{2})dt = \left[-\frac{1}{2}\cos(2t + \frac{\pi}{2})\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$

Donc $\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2t + \frac{\pi}{2})dt = \frac{1}{2}}$

5) $\int_{-2}^{3}|t^2 - 1|\, dt$

$\int_{-2}^{3}|t^2 - 1|\, dt = \int_{-2}^{-1}(t^2 - 1)dt + \int_{-1}^{1}(-t^2 + 1)dt + \int_{1}^{3}(t^2 - 1)dt$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - t\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{t^3}{3} + t\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{t^3}{3} - t\right]_{1}^{2} = \frac{28}{3}$$

Donc $\boxed{\int_{-2}^{3}|t^2 - 1|\, dt = \frac{28}{3}}$

6) $\int_{3}^{4}(6t + \frac{7}{2\sqrt{t}})\, dt$

$\int_{3}^{4}(6t + \frac{7}{2\sqrt{t}})\, dt = \left[3t^2 + 7\sqrt{t}\right]_{3}^{4} = 15 + 7(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ *donc* $\boxed{\int_{3}^{4}(6t + \frac{7}{2\sqrt{t}})\, dt = 15 + 7(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$

7) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t\, dt$

On a : $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$ $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t\, dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(\frac{1 + \cos 2t}{2})\, dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}$

Donc $\boxed{\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}}$

b) <u>Intégration par parties</u>

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle K telles que les dérivées u' et v' sont continues sur K . Soient a et b deux éléments de K .

On a : $\int_{a}^{b} u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_{a}^{b} u'(t)v(t)dt$

Cette méthode est connue sous le nom d'intégration par parties .

Démonstration

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle K . Soient a et b deux éléments de K .

La fonction uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$ *.Les fonctions* u' *et* v' *sont continues sur K alors* $u'v$ *et* uv' *sont continues sur K .*

On a : $\int_{a}^{b}(uv)'(t)dt = \int_{a}^{b}(uv')(t)dt + \int_{a}^{b}(u'v)(t)dt$ *; donc :*

$$\int_{a}^{b} u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_{a}^{b} u'(t)v(t)dt$$

Exercice d'application

Calculer à l'aide d'une ou de deux intégrations par parties les intégrales suivantes :

1) $\int_{1}^{2} \ln t\, dt$ *2)* $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\, dt$ *3)* $\int_{0}^{\pi} \sin t\, e^t\, dt$

Solution

Calculons à l'aide d'une ou de deux intégrations par parties les intégrales suivantes :

1) $\int_{1}^{2} \ln t\, dt$ *u(t) = ln t ,* $v'(t) = 1$ *donc* $u'(t) = \frac{1}{t}$ *et* *v(t) = t .*

$\int_{1}^{2} \ln t\, dt = [\ln t \times t]_1^2 - \int_{1}^{2} t \times \frac{1}{t}\, dt = [\ln t \times t]_1^2 - \int_{1}^{2} 1\, dt = [\ln t \times t]_1^2 - [t]_1^2$

$= (2\ln 2 - 1\ln 1) - (2-1) = 2\ln 2 - 1$ $\boxed{\text{donc } \int_1^2 \ln t\, dt = 2\ln 2 - 1}$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\, dt$ $u(t) = t$, $v'(t) = \cos t$ donc $u'(t) = 1$ et $v(t) = \sin t$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\, dt = [t \times \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times \sin t\, dt = [t \times \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt$$

$$= [t \times \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - (-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0) = \frac{\pi}{2} - 1$$

$\boxed{\text{Donc } \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\, dt = \frac{\pi}{2} - 1}$

3) $\int_0^{\pi} \sin t\, e^t\, dt$ $u(t) = \sin t$, $v'(t) = e^t$ donc $u'(t) = \cos t$ et $v(t) = e^t$.

$$\int_0^{\pi} \sin t\, e^t\, dt = [\sin t\, e^t]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos t\, e^t\, dt = (\sin\pi\, e^{\pi} - \sin 0\, e^0) - \int_0^{\pi} \cos t\, e^t\, dt$$

$$= -\int_0^{\pi} \cos t\, e^t\, dt$$

On va faire une deuxième intégration par parties pour calculer $\int_0^{\pi} -\cos t\, e^t\, dt$.

$u(t) = -\cos t$, $v'(t) = e^t$ donc $u'(t) = \sin t$ et $v(t) = e^t$

$$\int_0^{\pi} -\cos t\, e^t\, dt = [-\cos t e^t]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin t e^t\, dt = e^{\pi} + 1 - \int_0^{\pi} \sin t e^t\, dt$$

$\int_0^{\pi} \sin t e^t\, dt = e^{\pi} + 1 - \int_0^{\pi} \sin t e^t\, dt$ donc $\int_0^{\pi} \sin t e^t\, dt = \frac{e^{\pi}+1}{2}$

$\boxed{\int_0^{\pi} \sin t e^t\, dt = \frac{e^{\pi}+1}{2}}$

c) <u>Changement de variable affine</u>

Pour calculer l'intégrale $\int_a^b f(\alpha t + \beta)dt$, $\alpha \neq 0$ ***, on peut utiliser le procédé suivant :***

- ***Faire le changement de variable :*** $u = \alpha t + \beta$ ***; on obtient*** $du = \alpha\, dt$
- ***Utiliser l'égalité :*** $\int_a^b f(\alpha t + \beta)dt = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} \frac{1}{\alpha} f(u)du$.

Démonstration

Soit f une fonction continue sur un intervalle K . Soit F une primitive de f sur K .

La fonction $\frac{1}{\alpha} F(\alpha t + \beta)$ *est une primitive de* $f(\alpha t + \beta)$

On a : $\int_a^b f(\alpha t + \beta)dt = \left[\frac{1}{\alpha} F(\alpha t + \beta)\right]_a^b = \frac{1}{\alpha} F(\alpha b + \beta) - \frac{1}{\alpha} F(\alpha a + \beta)$

$$= \left[\frac{1}{\alpha} F(u)\right]_{\alpha b+\beta}^{\alpha a+\beta} = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} \frac{1}{\alpha} f(u)du$$

Exercice d'application

Calculer les integrals suivantes:

1) $\int_{-1}^{0} \frac{t}{\sqrt{2t+3}} dt$ 2) $\int_0^1 t\sqrt{1+t}\, dt$

Solution

Calculons les integrals suivantes:

1) $\int_{-1}^{0} \frac{t}{\sqrt{2t+3}} dt$ *Posons u = 2t - 3 . Donc du = 2 dt d'où* $dt = \frac{1}{2} du$.

Si t = -1 alors u = 1 . Si t = 0 alors u = 3 .

$$\int_{-1}^{0} \frac{t}{\sqrt{2t+3}} dt = \int_{1}^{3} \frac{\frac{1}{2}(u-3)}{\sqrt{u}} \frac{1}{2} du = \frac{1}{4} \int_{1}^{3} \left(\sqrt{u} - \frac{3}{\sqrt{u}}\right) du \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3} u\sqrt{u} - 6\sqrt{u}\right]_{1}^{3} = \frac{4}{3} - \sqrt{3}$$

$\boxed{Donc \int_{-1}^{0} \frac{t}{\sqrt{2t+3}} dt = \frac{4}{3} - \sqrt{3}}$

2) $\int_{0}^{1} t\sqrt{1+t}\, dt$ *Posons u = t + 1 . Donc du = dt d'où dt = du .*

Si t = 0 alors u = 1 . Si t = 1 alors u = 2 .

$$\int_{0}^{1} t\sqrt{1+t}\, dt = \int_{1}^{2} (u-1)\sqrt{u} du = \int_{1}^{2} \left(u\sqrt{u} - \sqrt{u}\right) du = \int_{1}^{2} \left(u^{\frac{3}{2}} - \sqrt{u}\right) du$$

$$= \left[\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} u\sqrt{u}\right]_{1}^{2} = \frac{4}{15}(1 + \sqrt{2})$$

Donc $\boxed{\int_{0}^{1} t\sqrt{1+t}\, dt = \frac{4}{15}(1 + \sqrt{2})}$

d) <u>Intégration de fonctions paires et impaires</u>

Soit f une fonction continue sur un intervalle K symétrique par rapport à 0 .

Pour tout a élément de K , on a :

- ***Si f est paire alors*** $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2 \int_{0}^{a} f(t)dt$
- ***Si f est impaire alors*** $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$

Démonstration

Soit a un élément de K . On a : $\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt$

Posons u = - t .Si f est paire alors f(- u) = f(u) . Posons u =- t . Donc du =- dt d'où dt =- du .

Si t = -a alors u = a . Si t = 0 alors u = 0

$$\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{a}^{0} f(-u) - du = \int_{0}^{a} f(u)du \quad donc \int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(u)du = \int_{0}^{a} f(t)dt$$

$\boxed{Donc \int_{-a}^{a} f(t)dt = 2 \int_{0}^{a} f(t)dt}$.

Si f est imaire alors f(- u) = - f(u) .

$$\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{a}^{0} f(-u) - du = - \int_{0}^{a} f(u)du \quad donc \int_{-a}^{0} f(t)dt = - \int_{0}^{a} f(u)du = - \int_{0}^{a} f(t)dt$$

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = - \int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt = 0 \quad donc \quad \int_{-a}^{a} f(t)dt = 0 .$$

Exercice d'application

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t\,dt$ 2) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t\,dt$

Solution

Calculons les intégrales suivantes :

1) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t\,dt$ *La fonction $t \to \cos 2t$ est paire donc*

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t\,dt = 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t\,dt = 2\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$\boxed{\text{donc } \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t\,dt = 1}$

2) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t\,dt$ *La fonction $t \to \sin 2t$ est impaire donc*

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t\,dt = 0$ *donc* $\boxed{\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t\,dt = 0}$.

e) <u>Intégration de fonctions périodiques</u>

Soit f une fonction continue sur IR et périodique de période p . Pour tous nombres réels a et b , on a :

- $\int_{a+p}^{b+b} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$
- $\int_a^{a+p} f(t)dt = \int_0^p f(t)dt$

Démonstration

Soit f une fonction continue sur IR et périodique de période p . Donc f(x + p) = f(x) .

Soient a et b deux nombres réels .

Posons x = t – p ; si t = a + p alors x = a ; si t = b + p alors x = b ; dx = dt .

$$\int_{a+p}^{b+p} f(t)dt = \int_a^b f(x+p)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

$\boxed{\text{Donc } \int_{a+p}^{b+p} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt}$

On a : $\int_a^b f(t)dt = \int_{a+p}^{b+p} f(t)dt$

Donc $\int_a^b f(t)dt = \int_{a+p}^{a} f(t)dt + \int_a^b f(t)dt + \int_b^{b+p} f(t)dt$ *d'où*

On en déduit que : $\int_a^{a+p} f(t)dt = \int_b^{b+p} f(t)dt$

On pose b = 0 , on obtient : $\int_a^{a+p} f(t)dt = \int_0^p f(t)dt$

Donc $\boxed{\int_a^{a+p} f(t)dt = \int_0^p f(t)dt}$

Exercice d'application

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{5\pi}{6}} \cos 2t\,dt$ 2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2t\,dt$

Solution

Calculons les intégrales suivantes :

1) $\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{5\pi}{6}} \cos 2t\,dt$

$$\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{5\pi}{6}} \cos 2t\,dt = \int_{-\frac{3\pi}{4}+\pi}^{-\frac{5\pi}{6}+\pi} \cos 2t\,dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \cos 2t\,dt = \left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}-2}{4}$$

$$\boxed{\text{Donc } \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{5\pi}{6}} \cos 2t\,dt = \frac{\sqrt{3}-2}{4}}$$

2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2t\,dt$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2t\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\pi} \cos 2t\,dt = \int_{0}^{\pi} \cos 2t\,dt = \left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{0}^{\pi} = 0$$

$$\boxed{\text{Donc } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2t\,dt = 0}$$

6) ***Intégration de polynômes trigonométriques***

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3 t\sin t + 3\sin^3 t)dt$ 2) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\cos^2 t - 2\sin^4 t)dt$

3) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\,dt$ 4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^3 t\sin t\,dt$

Solution

Calculons les intégrales suivantes :

1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3 t\sin t + 3\sin^3 t)dt$ *On a :* $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$

$\cos^3 t\sin t + 3\sin^3 t = \sin t(\cos^3 t + 3\sin^2 t) = \sin t\,(\cos^3 t + 3(1 - \cos^2 t))$

$= \sin t\,(\cos^3 t + 3 - 3\cos^2 t)$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3 t\sin t + 3\sin^3 t)dt = \left[-\frac{\cos^4 t}{4} + \cos^3 t - 3\cos t\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{4}$$

$$\boxed{\text{Donc } \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3 t\sin t + 3\sin^3 t)dt = \frac{9}{4}}$$

2) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\cos^2 t - 2\sin^4 t)dt$

On a : $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ $\qquad$ $\sin^4 t = \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{8}\cos 4t - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{3}{8}$

Donc $\cos^2 t - 2\sin^4 t = -\frac{1}{4}\cos 4t + \frac{3}{2}\cos 2t - \frac{1}{4}$

$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\cos^2 t - 2\sin^4 t)dt = \left[-\frac{\sin 4t}{16} + \frac{3}{4}\sin 2t - \frac{t}{4}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{8}$

$\boxed{\text{Donc } \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\cos^2 t - 2\sin^4 t)dt = -\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{8}}$

3) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\,dt$ $\qquad$ On a : $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$

$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\,dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\boxed{\text{Donc } \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\,dt = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}}$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3 t\sin t\,dt$ $\qquad$ $\cos^3 t\sin t = -(-\sin t\cos^3 t)$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3 t\sin t\,dt = \left[-\frac{\cos^4 t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{16}$ $\qquad$ $\boxed{\text{donc } \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3 t\sin t\,dt = \frac{3}{16}}$

*7)**<u>Intégration de fractions rationnelles</u>***

1) Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $\forall\ t \in IR\backslash\{-1;2\}$, $\frac{1}{t^2-t-2} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t-2}$

En déduire $\int_0^1 \frac{1}{t^2-t-2}\,dt$

2) Déterminer trois nombres réels a , b et c tels que : $\forall\ t \in IR^*$, $\frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{t^2+1}$

En déduire $\int_1^2 \frac{1}{t(t^2+1)}\,dt$

Solution

1) Déterminons deux nombres réels a et b tels que : $\forall\ t \in IR\backslash\{-1;2\}$, $\frac{1}{t^2-t-2} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t-2}$

$\frac{1}{t^2-t-2} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t-2}$, $\frac{a}{t+1} + \frac{b}{t-2} = \frac{a(t-2)+b(t+1)}{(t+1)(t-2)} = \frac{(a+b)t+b-2a}{t^2-t-2}$

Par identification , on a : $a + b = 0$ et $b - 2a = 1$.

On trouve : $a = -\frac{1}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$

Donc $\frac{1}{t^2-t-2} = \frac{-1}{3(t+1)} + \frac{1}{3(t-2)}$

$\int_0^1 \frac{1}{t^2-t-2}\,dt = \int_0^1\left(\frac{-1}{3(t+1)} + \frac{1}{3(t-2)}\right)dt = \left[-\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{3}\ln|t-2|\right]_0^1 = -\frac{2}{3}\ln 2$

$\boxed{\text{Donc} \quad \int_0^1 \frac{1}{t^2 - t - 2}\, dt = -\frac{2}{3} \ln 2}$

2) Déterminons trois nombres réels a , b et c tels que : $\forall \ t \in IR^*$, $\frac{1}{t\,(t^2+1)} = \frac{a}{t} + \frac{bt + c}{t^2 + 1}$

$\frac{1}{t\,(t^2+1)} = \frac{a}{t} + \frac{bt + c}{t^2 + 1}$, $\frac{a}{t} + \frac{bt + c}{t^2 + 1} = \frac{a\,(t^2+1) + (bt + c)t}{t\,(t^2+1)} = \frac{(a + b)t^2 + ct + a}{t\,(t^2+1)}$

Par identification, on a : $a + b = 0$, $c = 0$ et $a = 1$.

On trouve : $a = 1$, $b = -1$ et $c = 0$

$\frac{1}{t\,(t^2+1)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2 + 1}$

$\int_1^2 \frac{1}{t\,(t^2+1)}\, dt = \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}\right) dt = \left[\ln|t| - \frac{1}{2}\ln|t^2 + 1|\right]_1^2 = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5$

$\boxed{\int_1^2 \frac{1}{t\,(t^2+1)}\, dt = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5}$

8)*<u>Inégalités de la moyenne</u>*

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ tel que $a < b$, m et M sont des nombres réels .

- ***Si*** $\forall \ x \in [a\,;b]$, $m \le f(x) \le M$ ***alors*** $m\,(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M\,(b-a)$
- ***Si*** $\forall \ x \in [a\,;b]$, $|f(x)| \le M$ ***alors*** $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M\,(b-a)$

Démonstration

Les fonctions constantes $x \to m$ *et* $x \to M$ *sont continues sur* $[a\,;b]$.

Si $\forall \ x \in [a\,;b]$, $m \le f(x) \le M$ *alors* $\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M\,dx$

Donc $[mx]_a^b \le \int_a^b f(x)dx \le [M\,x]_a^b$ *d'où* $m\,(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M\,(b-a)$

Si $\forall \ x \in [a\,;b]$, $|f(x)| \le M$ *alors* $-M \le f(x) \le M$

Donc $\int_a^b -M\,dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M\,dx$ *d'où* $[-Mx]_a^b \le \int_a^b f(x)dx \le [M\,x]_a^b$

Donc $-M\,(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M\,(b-a)$ *d'où* $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M\,(b-a)$

Remarque

- *Si f est continue sur* $[a\,;\,b]$ *alors* $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

Exercice d'application

1) Démontrer que $\frac{1}{8} \le \int_2^4 \frac{1}{t^2}\, dt \le \frac{1}{2}$

2) Encadrer l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$

3) Encadrer l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx$

Solution

1) Démontrons que $\frac{1}{8} \leq \int_2^4 \frac{1}{t^2}\,dt \leq \frac{1}{2}$

Soit f(x) = $\frac{1}{x^2}$ *, f est décroissante sur [2 ; 4] , t ∈ [2 ; 4] donc* $2 \leq t \leq 4$

$2 \leq t \leq 4$ *donc* $f(4) \leq f(t) \leq f(2)$ *d'où* $\frac{1}{16} \leq f(t) \leq \frac{1}{4}$

$\frac{1}{16} \leq f(t) \leq \frac{1}{4}$ *donc* $\frac{1}{16}(4-2) \leq \int_2^4 \frac{1}{t^2}\,dt \leq \frac{1}{4}(4-2)$ *d'où* $\frac{1}{8} \leq \int_2^4 \frac{1}{t^2}\,dt \leq \frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{Donc } \frac{1}{8} \leq \int_2^4 \frac{1}{t^2}\,dt \leq \frac{1}{2}}$

2) Encadrons l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

Soit f(x) = sin x , f est croissante sur $[\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}]$, $x \in [\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}]$ *donc* $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$x \in [\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}]$ *donc* $f(\frac{\pi}{6}) \leq f(x) \leq f(\frac{\pi}{2})$ *d'où* $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$

$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$ *donc* $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \leq 1(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})$ *d'où* $\frac{\pi}{6} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \leq \frac{\pi}{3}$

$\boxed{\text{Donc } \frac{\pi}{6} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \leq \frac{\pi}{3}}$

3) Encadrons l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx$

Soit f(x) = sin x , f est croissante sur $[\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}]$, $x \in [\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}]$ *donc* $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$x \in [\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}]$ *donc* $f(\frac{\pi}{6}) \leq f(x) \leq f(\frac{\pi}{2})$ *d'où* $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$

$x \in [\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}]$ *donc* $x^2 \geq 0$, $\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$ *donc* $\frac{x^2}{2} \leq x^2 \sin x \leq x^2$

On a : $\frac{x^2}{2} \leq x^2 \sin x \leq x^2$ *donc* $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{2}\,dx \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\,dx$

$$\left[\frac{x^3}{6}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx \leq \left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \quad \text{donc} \quad \frac{13\pi^3}{648} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx \leq \frac{13\pi^3}{324}$$

$\boxed{\text{Donc } \frac{13\pi^3}{648} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx \leq \frac{13\pi^3}{324}}$

9) Valeur moyenne d'une fonction

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b] tel que a < b .

On appelle valeur moyenne de la fonction f sur [a ; b] , le nombre réel noté μ défini par

$$\boldsymbol{\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx .}$$

Remarque

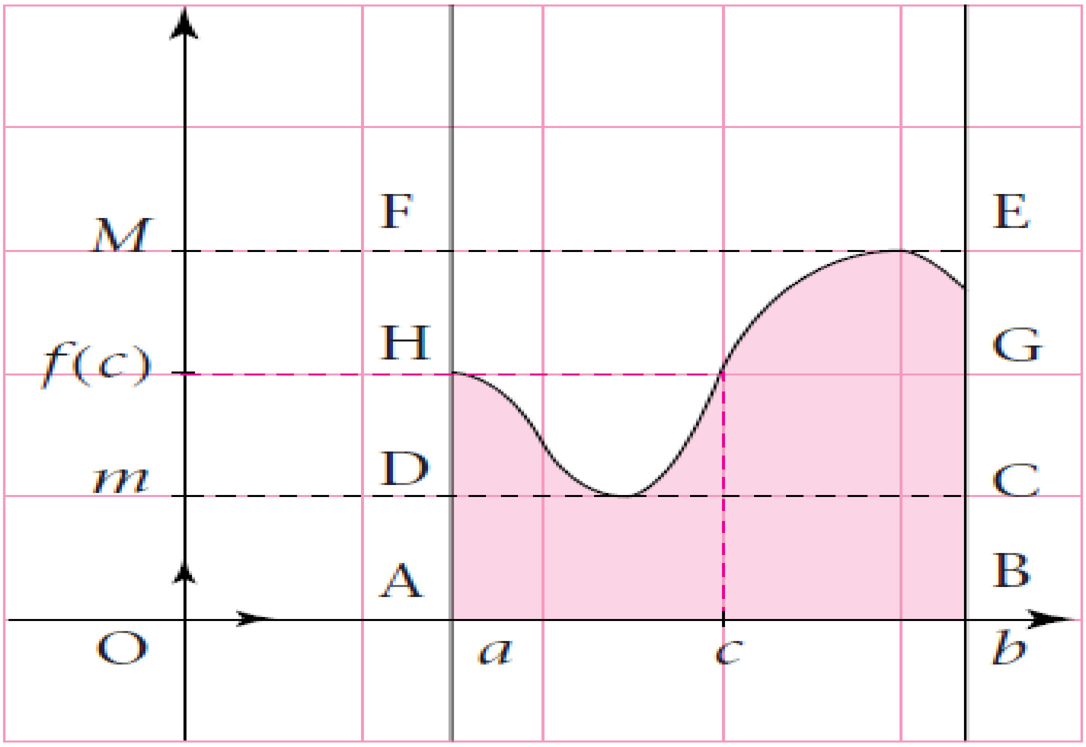
D'après l'inégalité de la moyenne , on a : $m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\,(b-a)$

Donc $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$

Si f est une fonction continue sur un intervalle [a ; b] , f admet son minimum m et son maximum M sur[a ; b]

et il existe un élément c de [a ; b] tel que : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

On obtient : $m \leq f(c) \leq M$.



On a : $m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\,(b-a)$

Cette double inégalité signifie que l'aire du domaine coloré est minorée par l'aire du rectangle ABCD, et majorée par celle du rectangle ABEF .

On a : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Cette égalité signifie que l'aire du domaine coloré est égale à celle du rectangle ABGH .

Exercice d'application

1) Calculer la valeur moyenne de la fonction $x \to 1 - x^2$ *sur l'intervalle [-1 ; 1] .*

2) Calculer la valeur moyenne de la fonction $x \to x - \sin x$ *sur l'intervalle [0 ; π].*

Solution

1) Calculons la valeur moyenne de la fonction $x \to 1 - x^2$ *sur l'intervalle [-1 ; 1] .*

$f(x) = 1 - x^2$, $a = -1$ et $b = 1$

$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1}(1 - x^2)dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$ $\boxed{\text{donc } \mu = = \frac{2}{3}}$

2) Calculons la valeur moyenne de la fonction $x \to x - \sin x$ *sur l'intervalle* $[0 ; \pi]$.

$f(x) = x - \sin x$, $a = 0$ et $b = \pi$

$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\pi-(0)}\int_0^{\pi}(x - \sin x)\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2} + \cos x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2 - 4}{2\pi}$

$\boxed{\text{Donc } \mu = \frac{\pi^2-4}{2\pi}}$

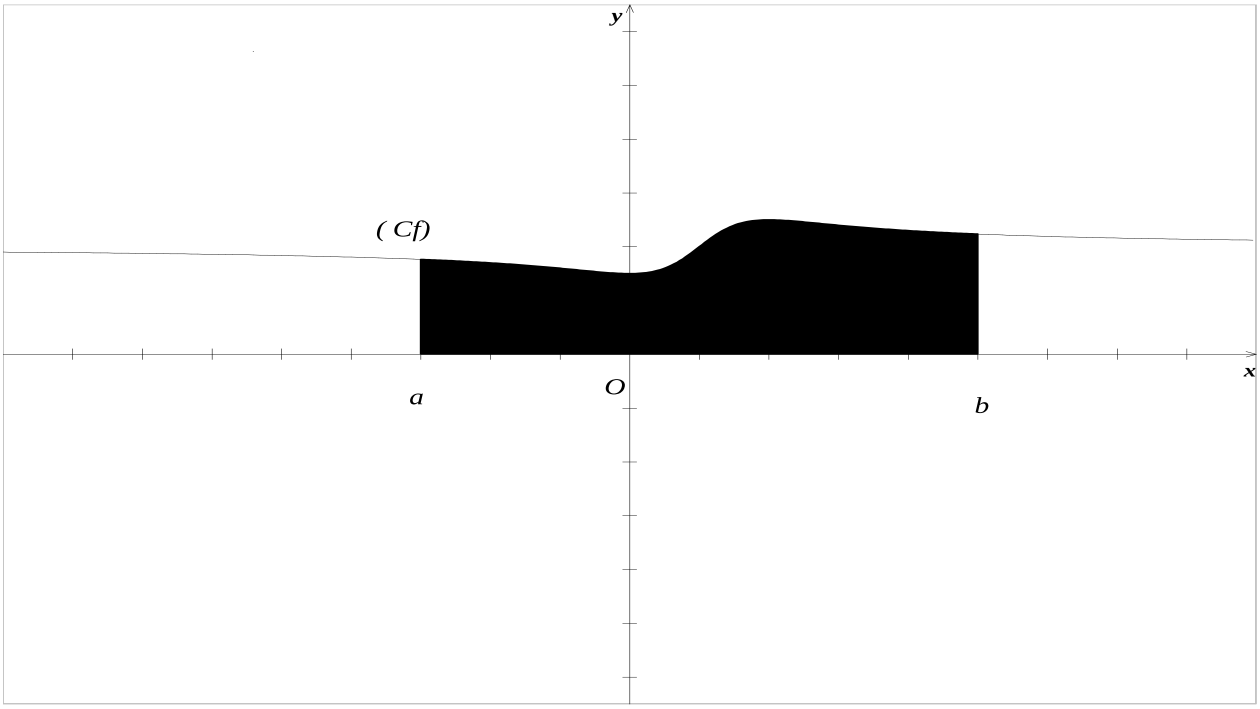
III)<u>Quelques applications du calcul</u>

1)<u>Calcul d'aires</u>

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O ,I , J) .Soit f une fonction continue sur [a ; b] de représentation graphique (C_f) ***.***

L'unité d'aire est l'aire du rectangle de dimensions OI et OJ , u . a = OI × OJ .

- ***Cas où f est une fonction continue et positive sur [a ; b]***



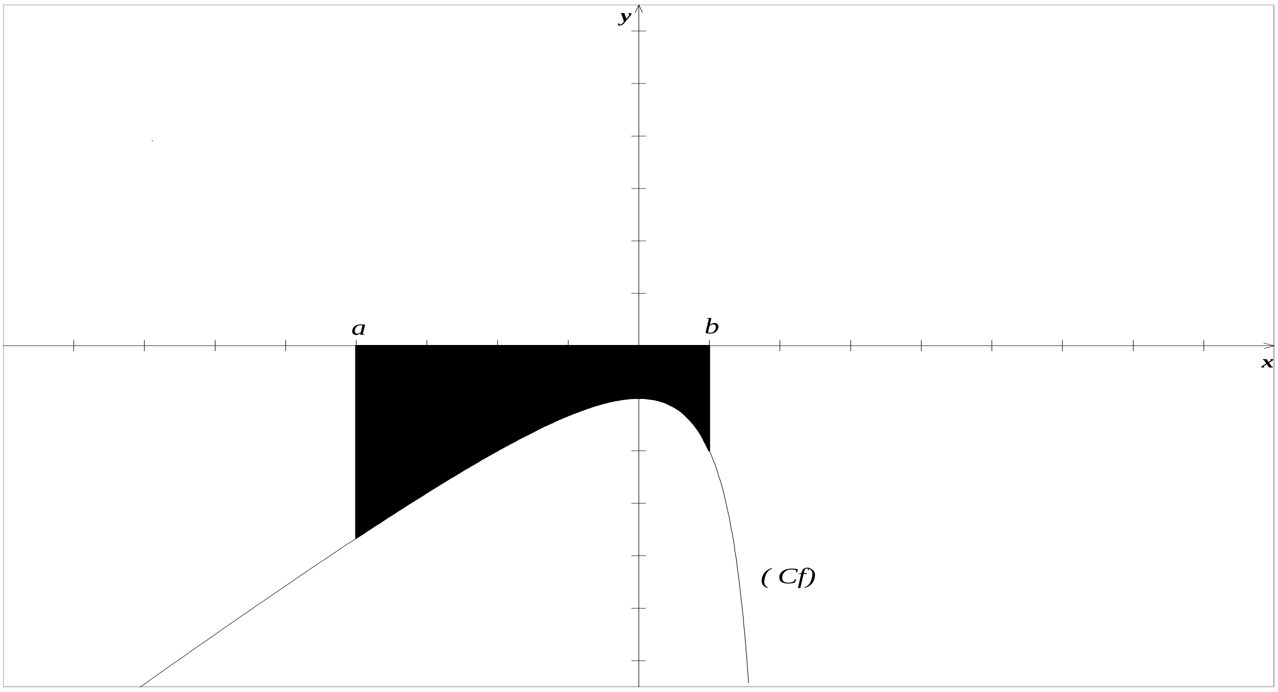
f est continue et positive sur [a ; b] .

Δ est la partie du plan limitée par (C_f) ***, (OI) et les droites d'équations x = a et x = b .***

$M(x ; y) \iff \begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

$$\boxed{Aire\ (\Delta) = \int_a^b f(x)dx \times u.a}$$

➢ ***Cas où f est une fonction continue et négative sur [a ; b]***



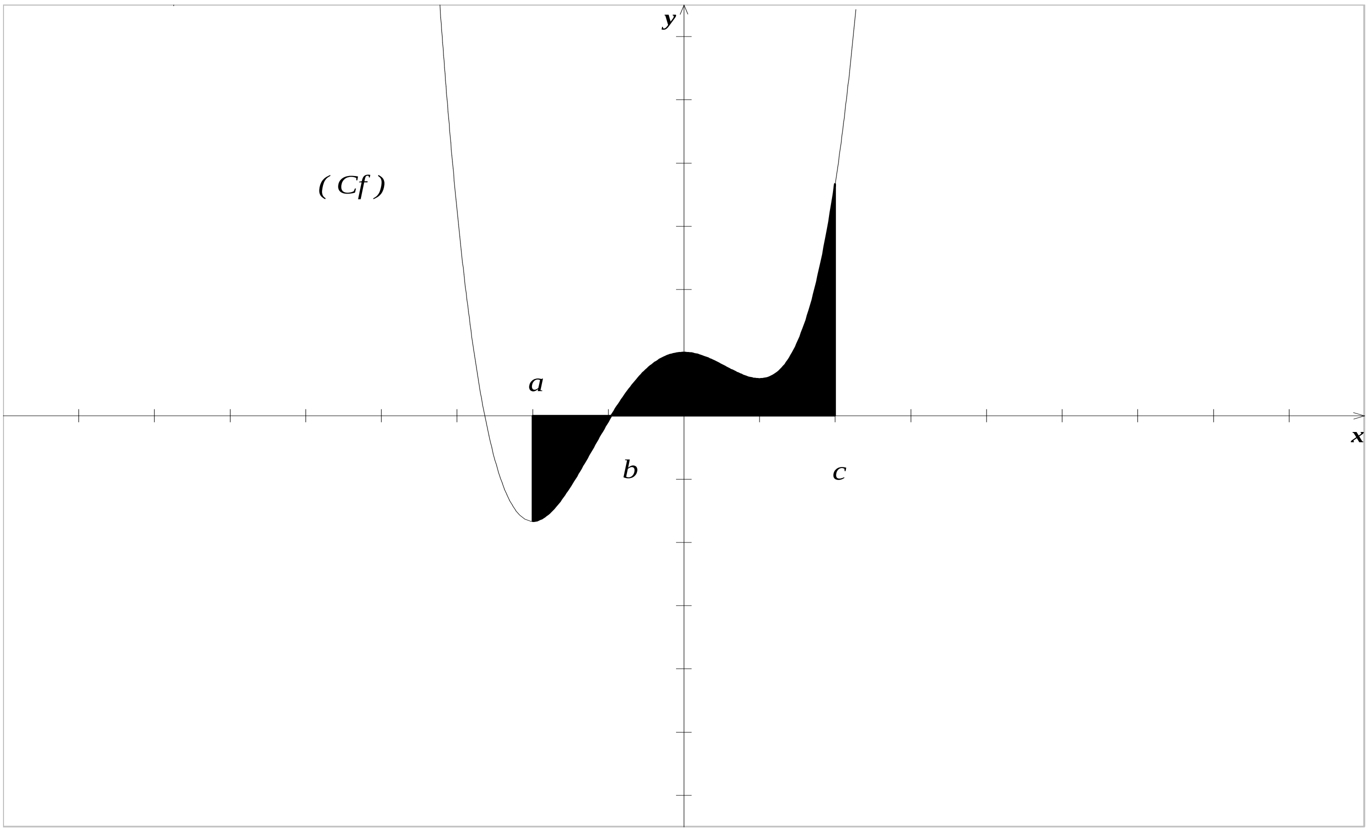
f est continue et négative sur [a ; b] .

Δ est la partie du plan limitée par (C_f) , (OI) et les droites d'équations x = a et x = b .

$$M(x\,;y) \iff \begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{Aire\ (\Delta) = -\int_a^b f(x)dx \times u.a}$$

- ***Cas où f est une fonction continue et quelconque sur [a ; b]***

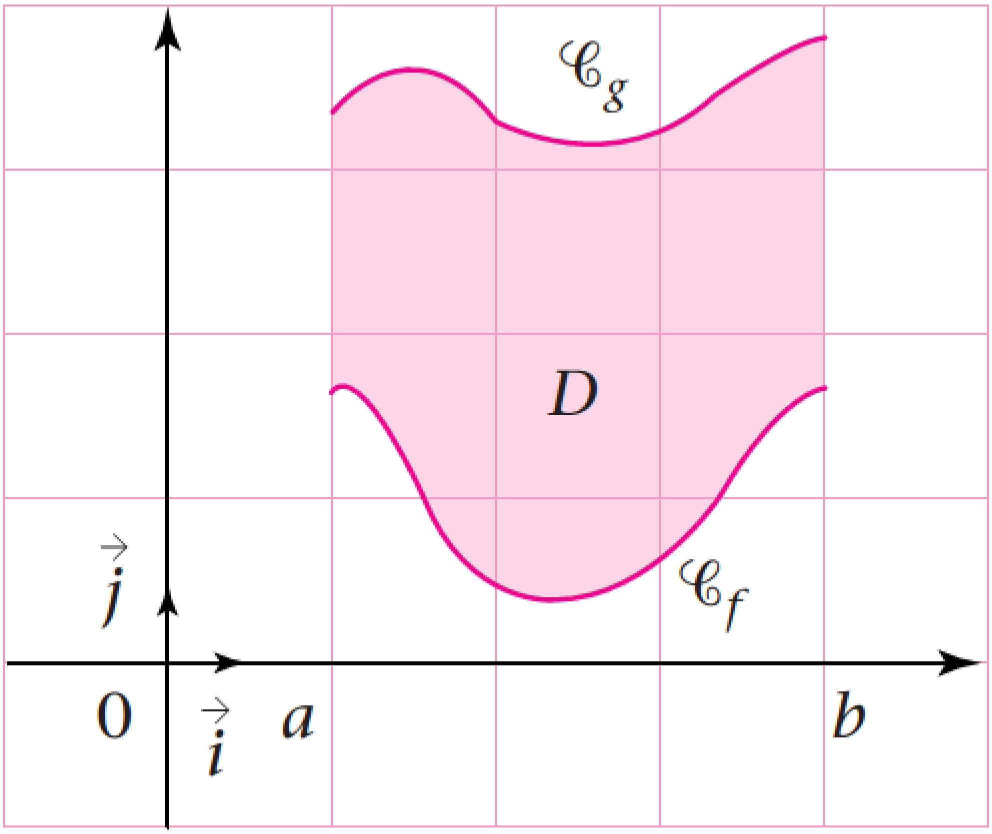


f est continue et quelconque sur [a ; b] .

Δ est la partie du plan limitée par (C_f) , (OI) et les droites d'équations x = a et x = c .

$$\boxed{\textbf{Aire }(\Delta) = -\int_a^b f(x)dx \times u.a + \int_b^c f(x)dx \times u.a}$$

2) Calcul de l'aire d'une partie du plan limitée par deux courbes



L'unité d'aire est l'aire du rectangle de dimensions OI et OJ , u . a = OI × OJ .

Soient f et g deux fonctions continues sur [a ; b] de représentations graphiques (Cf) et (Cg) .

Lorsque f ≤ g sur [a ; b] alors l'aire du domaine D limitée par (Cf) , (Cg) et les droites d'équations x = a et x = b est :

$$\boxed{\textbf{Aire (D)} = \int_a^b [\, g(x) - f(x)] \times u\ .a}$$

Exercice d'application1

Le plan est muni d'un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) tel que $\|\vec{\imath}\| = 1$ et $\|\vec{\jmath}\| = 3$, l'unité est le centimètre .

Soient : f(x) = $\frac{x^2 - x + 2}{x - 2}$ *et (D) : y = x + 1 .*

Calculer l'aire du domaine D limité par (Cf) la droite (D) et les droites d'équations x = -3 et x = -1 .

Exercice d'application2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (Unité graphique 2 cm) .

(Cf) est la représentation graphique de la fonction définie par f(x) = $x^3 - 3x^2 + 2$ *.*

Calculer l'aire du domaine D limité par (Cf) , l'axe des abscisses et les droites d'équations x = -1 et x = 2 .

Exercice d'application3

Le plan est muni d'un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) tel que $\|\vec{\imath}\| = 2$ et $\|\vec{\jmath}\| = 3$, l'unité est le centimètre .

Soient : f(x) = $x^2 - e^{-x}$ et g(x) = x^2 .

Calculer l'aire du domaine D limité par (Cf) , (Cg) et les droites d'équations x = -2 et x = 2 .

Exercice d'application4

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (Unité graphique 1 cm) .

Soient : f(x) = x , g(x) = $\frac{1}{x}$ et h(x) = $\frac{x^2}{8}$

Calculer l'aire du domaine D limité par (Cf) , (Cg) et (Ch)

Solution1

Le plan est muni d'un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) tel que $\|\vec{\imath}\| = 1$ et $\|\vec{\jmath}\| = 3$, l'unité est le centimètre .

Soient : f(x) = $\frac{x^2 - x + 2}{x - 2}$ et (D) : y = x + 1 .

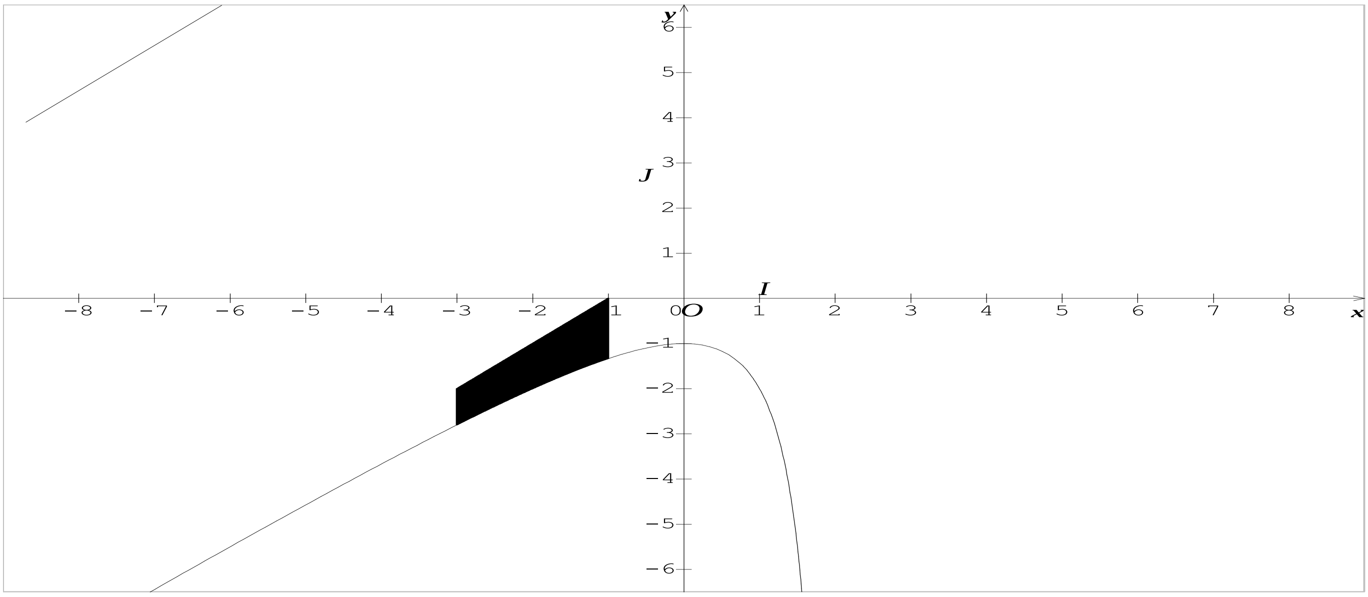
Calculons l'aire du domaine D limité par (Cf), la droite (D) et les droites d'équations x = -3 et x = -1 .

u . a = 1cm × 3cm = 3cm²

f(x) = $\frac{x^2 - x + 2}{x - 2}$ = x + 1 + $\frac{4}{x - 1}$, (D) : y = x + 1 est une A . O à (Cf) en +∞ et en - ∞ .

Dans l'intervalle [-3 ; -1], la droite (D) est au-dessus de (Cf) .

Aire(D) = $\int_{-3}^{-1} [f(x) - (x+1)]dx \times 3cm^2$ = 12 ln $\frac{3}{5}$ cm² donc $\boxed{\text{Aire(D)= 12 ln } \frac{3}{5} \text{ cm}^2}$



Solution2

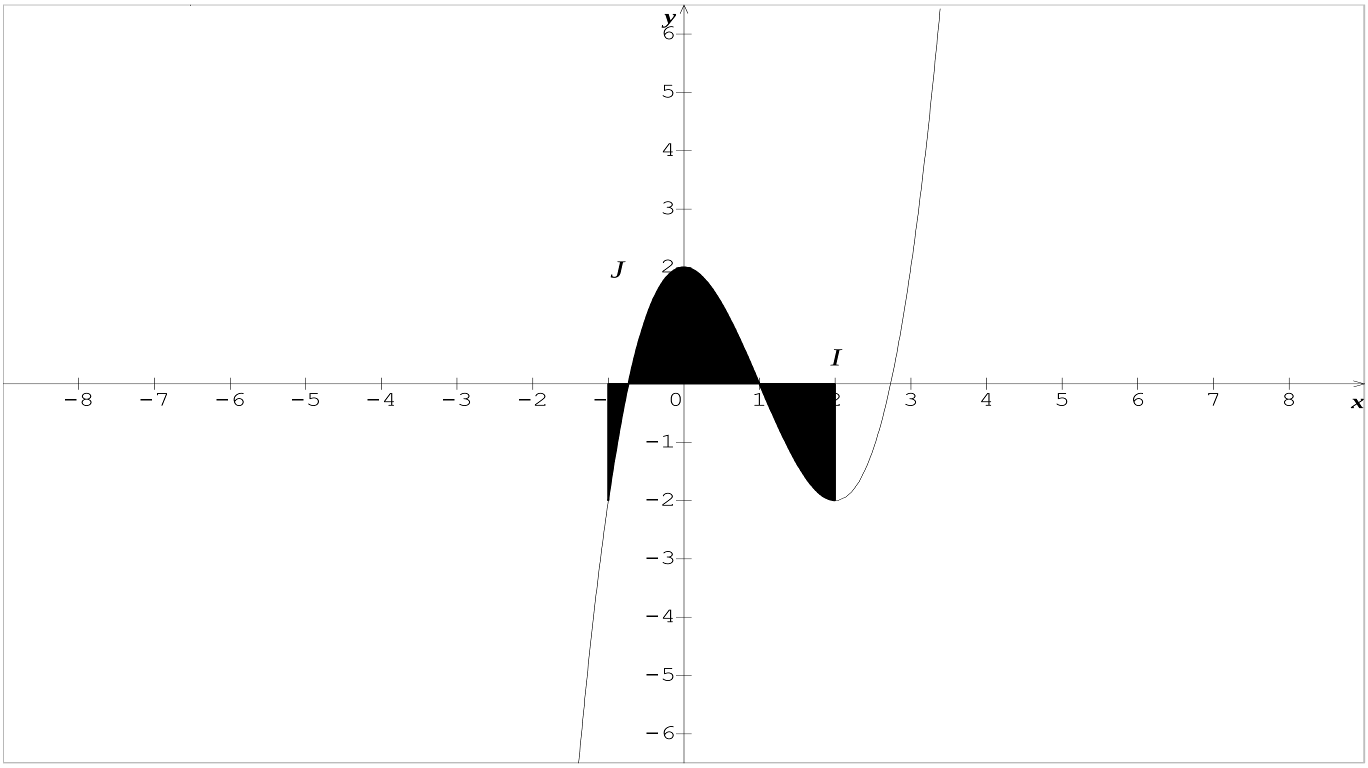
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (Unité graphique 2 cm) .

(Cf) est la représentation graphique de la fonction définie par f(x) = $x^3 - 3x^2 + 2$ **.**

Calculons l'aire du domaine D limité par (Cf) , l'axe des abscisses et les droites d'équations x = -1 et x = 2 .

u . a = 2cm $\times$ **2cm = 4 cm²**

f(x) = 0 donc x = 1 ou x = 1 - $\sqrt{3}$ ***ou x = 1 +*** $\sqrt{3}$



Aire (D) = - $\int_{-1}^{1-\sqrt{3}} f(x)dx \times 4cm^2 + \int_{1-\sqrt{3}}^{1} f(x)dx \times 4cm^2 - \int_{1}^{2} f(x)dx \times 4cm^2$

$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2x\right]_{-1}^{1-\sqrt{3}} \times 4cm^2 + \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2x\right]_{1-\sqrt{3}}^{1} \times 4cm^2 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2x\right]_{1}^{2} \times 4cm^2$

Solution3

Le plan est muni d'un repère (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ *) tel que* $\|\vec{\imath}\| = 2$ *et* $\|\vec{\jmath}\| = 3$ *, l'unité est le centimètre .*

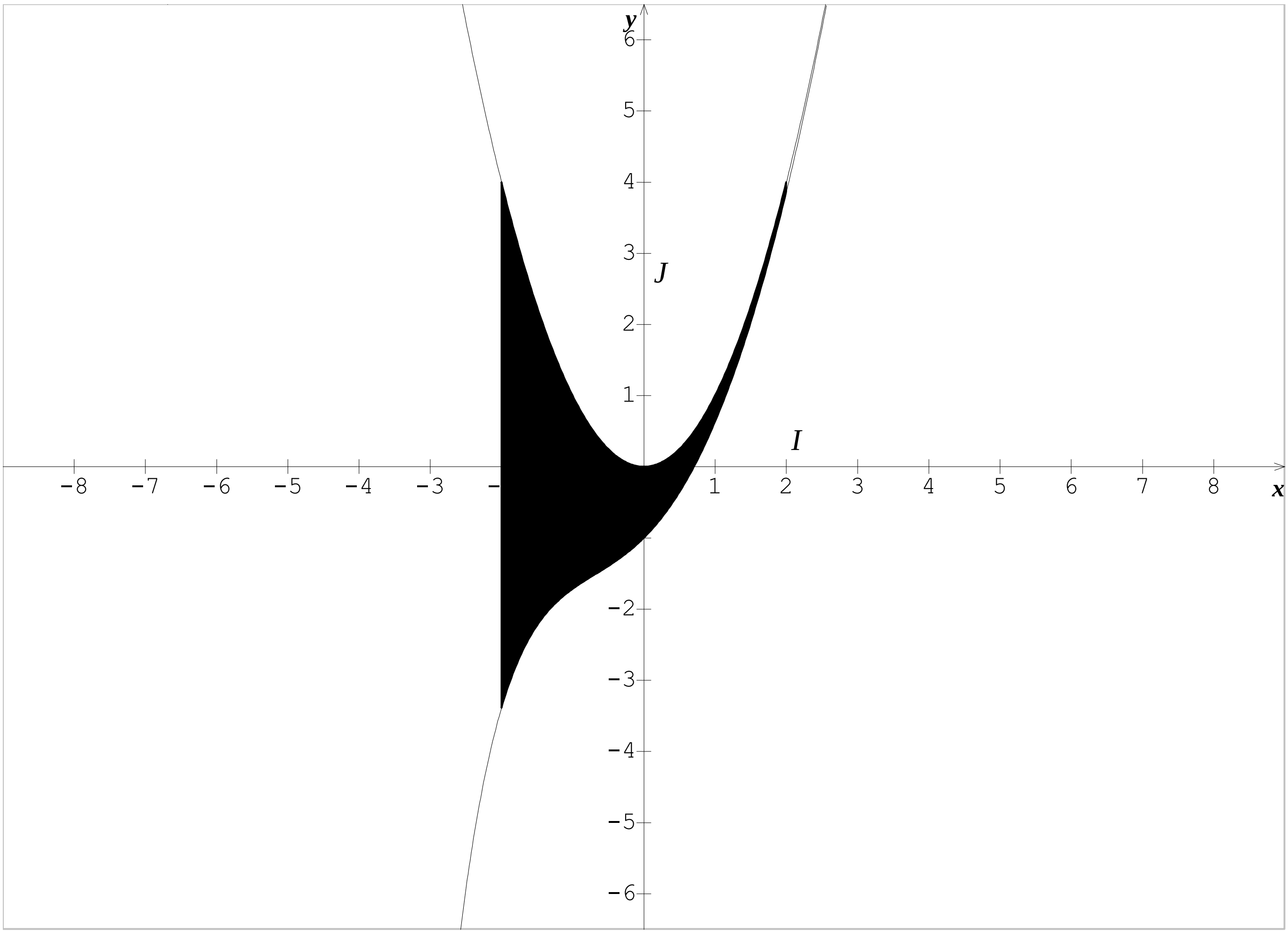
Soient : f(x) = $x^2 - e^{-x}$ *et g(x) =* x^2 *.*

Calculons l'aire du domaine D limité par (Cf) , (Cg) et les droites d'équations x = -2 et x = 2 .

u . a = 2 cm × 3cm = $6cm^2$

$\forall$ *x* $\in [-2; 2]$ *, f(x) ≤ g(x)*

Aire (D) = $\int_{-2}^{2}[g(x) - f(x)] \times 6cm^2$ *= 6(* $e^2 - e^{-2}$*)* cm^2 *donc* $\boxed{\text{Aire (D) = 6(} e^2 - e^{-2}\text{) } cm^2}$



Solution4

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (Unité graphique 1 cm) .

Soient : $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x}$ *et* $h(x) = \frac{x^2}{8}$

Calculons l'aire du domaine D limité par (Cf) , (Cg) et (Ch)

$u . a = 1cm \times 1cm = 1cm^2$

Le domaine D peut être partagé en deux domaines D1 et D2 .

D1 est le domaine limité par (Cf) , (Ch) et les droites d'équations x = 0 et x = 1 .

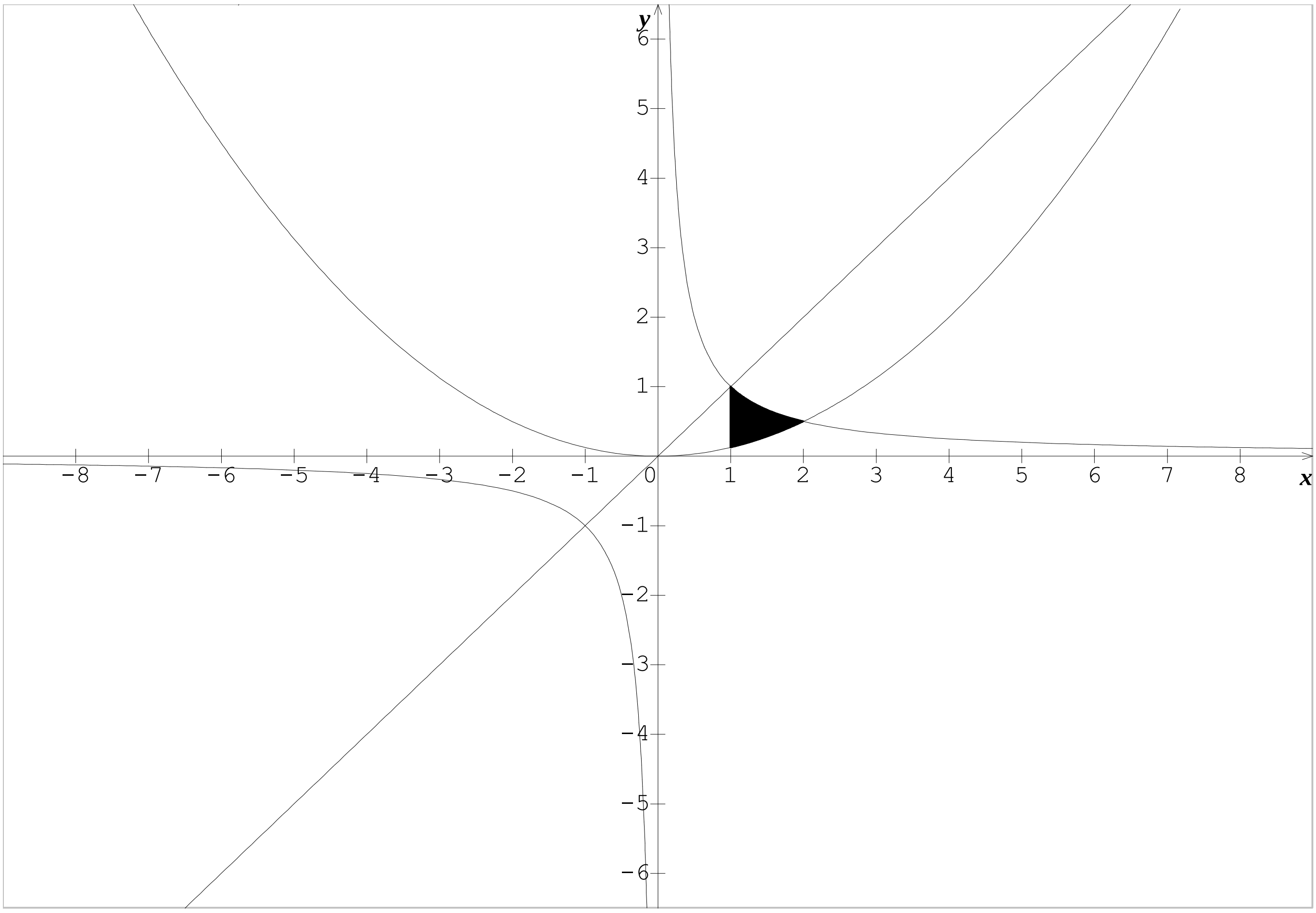
D2 est le domaine limité par (Cg) , (Ch) et les droites d'équations x = 1 et x = 2 .

D = D1 + D2 donc Aire (D) = Aire (D1) + Aire(D2)

$Aire (D1) = \int_0^1 (x - \frac{x^2}{8}) \times 1cm^2 = \frac{11}{24} cm^2$

$Aire(D2) = \int_1^2 (\frac{1}{x} - \frac{x^2}{8}) \times 1cm^2 = (\ln 2 - \frac{7}{24}) cm^2$

$Aire (D) = Aire (D1) + Aire(D2) = \frac{11}{24} cm^2 + (\ln 2 - \frac{7}{24}) cm^2 = (\ln 2 + \frac{1}{6}) cm^2$


y
x
0
1
2
3
4
5
6
7
8
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8

2)<u>Calcul de volumes</u>

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O, I, J, K) .

L'unité de volume est le volume du cube de dimensions IO, OJ et OK :

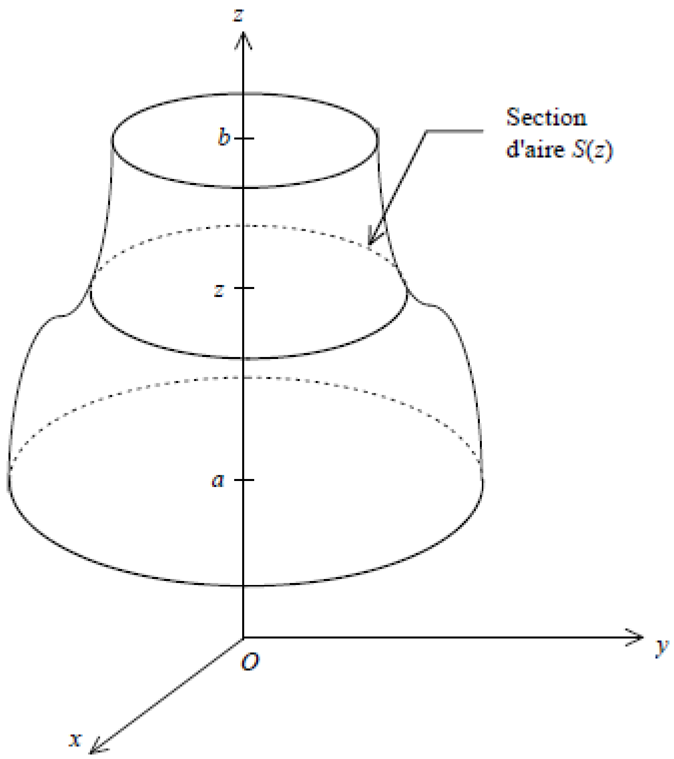
$$u\,.\,v = OI \times OJ \times OK$$

$\sum$ est le solide limité par les plans d'équations $z = a$ et $z = b$ ($a < b$) .

$S(z)$ est l'aire de la section de $\sum$ par le plan de cote z .

Si la fonction $z \rightarrow S(z)$ est continue sur [a ; b] alors le volume du solide $\sum$ est :

$$V = \int_a^b S(z)\,dz \times u\,.\,v$$



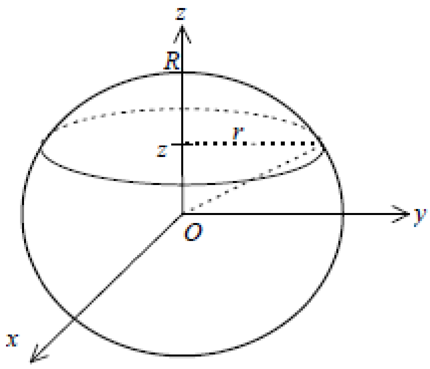
Exercice d'application

1) Calculer le volume d'une sphère de rayon R .

2) Calculer le volume d'un cône de révolution de hauteur h et dont la base est un disque de rayon R .

Solution

1) Calculons le volume d'une sphère de rayon R .



L'espace est muni d'un repère orthonormé ($O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$) , unité graphique 1 cm .O est le centre de la sphère .

On a : $R^2 = z^2 + r^2$, $u \cdot v = 1cm \times 1cm \times 1cm = 1\ cm^3$

$R^2 = z^2 + r^2$ *donc* $r^2 = R^2 - z^2$.

La section de la boule par le plan de cote z est un disque de rayon r .

L'aire de ce disque est $S(z) = \pi r^2 = \pi\ (R^2 - z^2)$

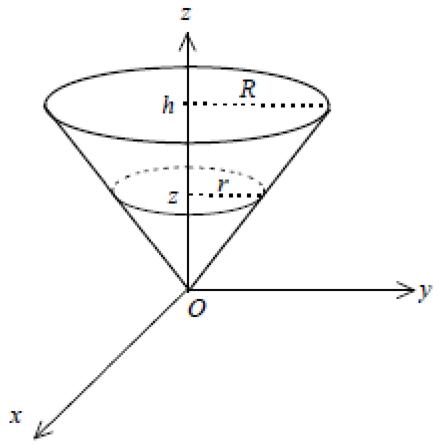
Soit V le volume de la sphère , on a : $V = \int_{-R}^{R} S(z)dz \times u.v = \int_{-R}^{R} S(z)dz \times 1\ cm^3$

$$V = \int_{-R}^{R} \pi\ (R^2 - z^2)dz \times 1\ cm^3 = \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{-R}^{R} 1\ cm^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 cm^3$$

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3 cm^3}$$

On retrouve la formule classique donnant le volume d'une sphère de rayon R : $\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$ **.**

2) Calculons le volume d'un cône de révolution de hauteur h et dont la base est un disque de rayon R .



L'espace est muni d'un repère orthonormé ($O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$) , unité graphique 1 cm .

u . v = 1cm × 1cm × 1cm = 1 cm^3

La section du cône de révolution par le plan de cote z est un disque de rayon r .

L'aire de ce disque est $S(z) = \pi r^2$.

D'après le théorème de Thalès , on a : $\frac{r}{R} = \frac{z}{h}$

$\frac{r}{R} = \frac{z}{h}$ *donc* $r = R\frac{z}{h}$ *d'où* $S(z) = \pi \frac{R^2}{h^2} z^2$

Soit V le volume du cône de révolution :

$$V = \int_0^h S(z)dz \times u.v = \int_0^h S(z)dz \times 1\ cm^3$$

$$V = \int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} z^2\, dz \times 1\ cm^3 = \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h z^2\, dz \times 1\ cm^3 = \pi \frac{R^2}{h^2} \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h \times 1\ cm^3 = \frac{\pi R^2 h}{3}\ cm^3$$

$$\boxed{V = \frac{\pi R^2 h}{3}\ cm^3}$$

On retrouve la formule classique donnant le volume d'un cône de révolution de hauteur h et dont la base est un disque de rayon R : $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$

3) <u>Calcul de volume par rotation</u>

Soit f une fonction continue sur [a ; b] de représentation graphique (Cf) .

Le volume obtenu par rotation de (Cf) autour de l'axe des abscisses est :

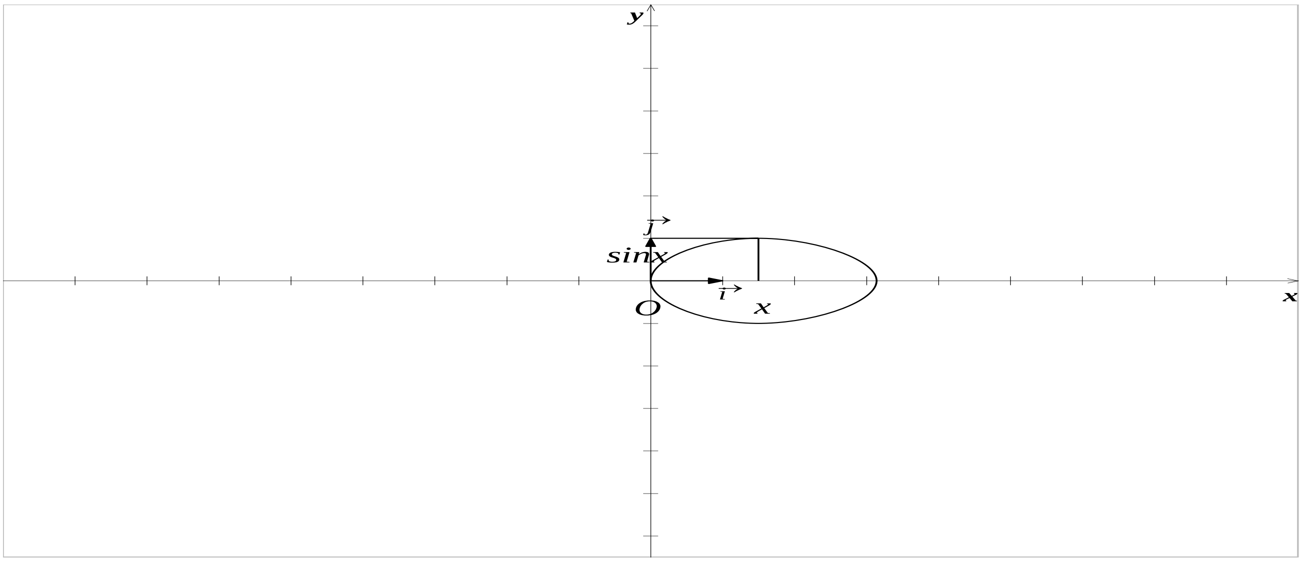
$$V = \int_a^b \pi f^2(x)dx \times u.v$$

Exercice d'application

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$), unité graphique 1 cm . On considère la fonction sinus sur

[0 ; π] . Calculer le volume que l'on obtient par rotation de (Cf) autour de l'axe des abscisses (Ox) .

Solution



Traçons la fonction sinus sur [0 ; π] puis tournons la courbe autour de (Ox) :Voir la courbe ci-dessus

En faisant tourner la courbe autour de (Ox) , on obtient un solide $\sum$.

La section de $\sum$ par un plan perpenduculaire à (Ox) au point H d'abscisse x est un disque de rayon sin x .

L'aire de ce disque est égal à $\pi\, r^2 = \pi \sin^2 x$.

Le volume du solide $\sum$ est : $V = \int_0^{\pi} \pi \sin^2 x \, dx \ \times u\,.\,v \ = \pi \left[\frac{1}{2}\, x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi} \times u.v = \frac{\pi^2}{2}\ u\,.\,v$

$\boxed{V = \frac{\pi^2}{2}\ u\,.\,v}$

Exercice d'application

1) À l'aide d'une intégration par parties, déterminer la primitive F sur IR qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$, de la fonction f de IR vers IR définie par : f(x) = x sin x .

2) À l'aide d'une intégration par parties, déterminer la primitive G sur IR qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$, de la fonction g de IR vers IR définie par : f(x) = x^2 cos x .

Solution

1) La primitive F est la fonction de IR vers IR définie par : $F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} t \sin t \, dt$.

Calcul de cette intégrale par une intégration par parties :

u(t) = t , v'(t) = sin t , On a : u'(t) = 1 et v (t) = - cos t

$F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} t \sin t \, dt = [-t\cos t]_{\frac{\pi}{2}}^{x} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \cos t \, dt$ = - xcos x + sin x – 1

$\boxed{\boldsymbol{F(x) = -x\cos x + \sin x - 1}}$

2) La primitive G est la fonction de IR vers IR définie par : $G(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} t^2 \cos t \, dt$.

Calcul de cette intégrale par une intégration par parties :

$u(t) = t^2$, $v'(t) = \cos t$, On a : $u'(t) = 2t$ et $v(t) = \sin t$

$G(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} t^2 \cos t \, dt = [t^2 \sin t]_{\frac{\pi}{2}}^{x} - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} t \sin t \, dt = x^2 \sin x - \frac{\pi^2}{4} - 2F(x)$

$= x^2 \sin x - \frac{\pi^2}{4} + 2(x\cos x - \sin x + 1)$

$\boxed{\boldsymbol{G(x) = x^2 \sin x - \frac{\pi^2}{4} + 2(x\cos x - \sin x + 1)}}$

EXERCICES

EXERCICE 1

Calculer les intégrales suivantes

$\int_0^1 \frac{1+e^x}{x+e^x}dx$; $\int_2^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$; $\int_{-1}^1 le^x - 1ldx$; $\int_0^{\Pi/3} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$; $\int_0^{\Pi/2} \sin x \cos dx$; $\int_0^{\Pi/6} \sin^3 xdx$;

$\int_0^1 (\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} + \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2})dx$; $\int_0^{\Pi/2} \cos^2 x \sin^4 xdx$

EXERCICE 2

On pose $I = \int_0^{\Pi/8} e^{-2t}\cos^2 tdt$ *et* $J = \int_0^{\pi/8} e^{-2t}\sin^2 tdt$

1°) En intégrant successivement deux fois pat parties Calculer $K = \int_0^{\Pi/8} e^{-2t}\cos(2t)dt$

En déduire I- J

2°) Calculer I+J ; 3°) Déduire des questions précédentes I et J.

EXERCICE 3

1°) *Déter* min *er les réels a et b tels que* $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$

2°) Calculer $\int_2^4 \frac{1}{x(x^2-1)}dx$

3°) A l'aide d'une intégration par parties Calculer $\int_2^4 \frac{x\ln x}{(x^2-1)^2}dx$

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{2x-3}{/x^2-3x/+4}$

1°) Calculer $\int_0^b f(x)dx$ *où b est un réel positif*

2°) Donner la valeur moyenne de f dans l'intervalle [1,4]

EXERCICE 5

On pose $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{e^t+1}dt$ *et pour tout entier naturel n* $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{e^t+1}dt$

1°) Calculer I_n; I_0+I_1. *En déduire* I_0

2°) Calculer I_n *et* I_{n+1} *;En déduire* I_2 *et* I_3

3°) Pour tout réel t de l'intervalle [0,1] Comparer e^{nt} *et* $e^{(n+1)t}$

. En déduire la variation de la suite (I_n) n∈N

EXERCICE 6

1°) Calculer $I = \int_0^{\Pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

2°) Soit la fonction f définie par $\frac{\sin x}{\cos^3 x}$; $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$*; calculer f'(x).*

3°) On pose J= $\int_0^{\Pi/4} \frac{1}{\cos^4 x}\,dx$ *-a) Déduire de 2°) une relation entre I et J.*

b) Calculer J.

EXERCICE 7

Pour tout n∈ IN , on pose $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n\,dx$

1°) Calculer I_1 et I_2 ;2°) En intégrant par parties trouver une relation entre I_n et I_{n-1}

3°) calculer I_3 et I_4.

EXERCICE 8

1°) Démonter que pour tout réel x on a : $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$

En déduire l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$

2°) On pose $J = \int_0^1 e^x \ln(1+e^x)\,dx$*. En intégrant par partie ,calculer J.*

EXERCICE 9

I°/ Soit f la fonction définie $f(x) = xe^{1-x}$*. On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 4cm)*

1°) Etudier les variations de f

2°) Tracer la courbe (C)

3°) Soit a un réel structure positif, exprimer en cm^2 l'aire A(a) du domaine plan limité par (C) l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = o$ *et* $x = a$*. Calculer* $\lim_{a \to +\infty} A(a)$

II°/ Pour tout n ∈ IN, on pose* $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$

1°) A l'aide d'une intégration par parties démontrer que $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$*. En déduire I_2 et I_3*

2°) On pose $J_n = \int_0^1 x^n\,dx$

a) Calculer J_n en fonction de n

b) Montrer que pour tout x ϵ [0, 1] ; $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$

c) En déduire un encadrement de I_n *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

EXERCICE 10

Soit la fonction définie par $g(x) = \dfrac{2+e^x}{1-e^x}$ *, (C) la courbe représentative de g dans un repère orthonormal* $(o, \vec{i}, \vec{j})$ $(\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 1cm)$

1°) Déterminer le domaine de définition de g

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ *à* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

2°) Etudier les variations de g

3°) Tracer la courbe (C)

4°) a) D'montrer que $g(x) = -1 - \dfrac{3e^{-x}}{1+e^{-x}}$ *pour tout x≠o*

b) Soit α un réel supérieur à ln2. On note par E_α *la portion du plan comprise entre la courbe (C) et les droites d'équations* $x = \ln 2$, $x = \alpha$, $y = -1$

c) Représenter graphiquement E_2

Calculer A(α) l'aire de E_α *et* $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$

EXERCICE 11

Démontrer que $\forall\, x \in IR$, $\boldsymbol{x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x}$**.**

EXERCICE 12

Calculer les intégrales suivantes.

1) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ *2)* $\int_0^3 (-x^2 + 4x + 1)dx$ *3)* $\int_1^3 x^3 \sqrt{x}\, dx$

4) $\int_2^3 \left(x^2 + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$ *5)* $\int_0^3 \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{1+x} + \frac{2}{2x+2}\right) dx$ *6)* $\int_{-3}^{-2} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$

7) $\int_{-1}^{0} \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$ *8)* $\int_2^5 \left(2x - 1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx$ *9)* $\int_{-1}^{ln2} (1 - 5e^x)dx$

EXERCICE 13

À l'aide d'une ou de deux intégration(s) par parties, calculer les intégrales suivantes.

1) $\int_1^e x^2 \ln x\, dx$ *2)* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$ *3)* $\int_0^2 (2x+1)e^{2x} dx$

4) $\int_0^\pi x^2 \cos x dx$ *5)* $\int_0^1 x^2 e^x\, dx$ *6)* $\int_{-1}^{0} (1+x)^2\, e^{-x}\, dx$

7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\, dx$ *8)* $\int_{-1}^{0} (1+x)^2 e^{-x}\, dx$ *9)* $\int_1^2 x \sqrt{-x+3}\, dx$

EXERCICE 14

1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx$ 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, d$ 3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\, dx$

4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x\, dx$ 5) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \sin^3 x\, dx$ 6) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x \cos^3 x\, dx$

7) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x|\, dx$ 8) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$ 9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$

EXERCICE 15

1) Déterminer les réels a et b tels que : pour tout x $\in IR\backslash\{-1\}$ *, f(x) =* $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$ *avec f(x) =* $\frac{2x+5}{(x+1)^2}$.

Calculer $\int_0^3 f(x)dx$.

2) Déterminer les réels a, b et c tels que : pour tout x $\in IR\backslash\{1\,;\,-3\}$ *, f(x) =* $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}$ *avec*

f(x) = $\frac{2x^2+x-1}{(x-1)(x+3)^2}$ *. Calculer* $\int_2^3 f(x)dx$.

EXERCICE 16

f_n *est définie sur IR par :* $f_n(x) = x^n e^{1-x}$ *et on pose* $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\, dx$.

1) Etablir une relation entre I_{n+1} *et* I_n*. Calculer* I_1 *et* I_2

2) Donner une interprétation géométrique de I_2.

3) Montrer que pour tout réel x de [0 ; 1], $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq e\, x^n$.

En déduire un encadrement de I_n *puis la limite de* I_n.

EXERCICE 17

On considère les intégrales I = $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$ *et J =* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$.

1) Calculer I.

2) f est définie sur [0 ; $\frac{\pi}{4}$*] par f(x) =* $\frac{\sin x}{\cos^3 x}$ *; Calculer f'(x), puis J.*

EXERCICE 18

Soient les intégrales I = $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^4 x\, dx$ *et J =* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^4 x\, dx$.

1) Calculer I + J et I – J.

2) En déduire I et J.

EXERCICE 19

Déterminer en unités d'aire, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) représentant la fonction f définie par f(x) = $x^2 - x - 3$*, la droite d'équation y = 2x – 3 et les droites verticales d'équations x = 1 et x = 2. Faire un dessin.*

EXERCICE 20

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ *tel que* $\|\vec{i}\| = 2$ *et* $\|\vec{j}\| = 3$. *Soit la fonction f définie sur]0 ; + ∞[par*

$f(x) = \frac{4}{x}$ *et la fonction g définie sur IR par* $g(x) = -x^2 + 4x + 1$.

1) Représenter graphiquement la courbe de f et la courbe de g.

2) Étudier la position des courbes et calculer l'aire de la partie fermée du plan limitée par ces deux courbes.

EXERCICE 21

On considère l'intégrale : $I = \int_0^1 e^x \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)dx$.

Calculer I à l'aide de deux intégrations par parties successives.

EXERCICE 22

Soit la suite définie par $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$ *avec* $n \in IN^*$

1) Montrer que $I_1 = 1 - 2e^{-1}$

2) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ *on a :* $I_{n+1} = (n+1)I_n - e^{-1}$.

b) Calculer I_2 . *Vérifier que* $I_3 = 6 - 16e^{-1}$.

c) En déduire la valeur de $\int_0^1 (2x^3 - x^2 + x)e^{-x}dx$.

3) a) Montrer que la suite (I_n) *est décroissante .*

b) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ *et* $x \in [0,1]$ *on a :* $e^{-1}x^n \le e^{-x}x^n \le x^n$

c) déduire que : $\frac{1}{e(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{n+1}$. *Calculer la limite de* I_n .

EXERCICE 23

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = (2 - x)e^x - 2$.

1) Déterminer les limites de f en $-\infty$ *et en* $+\infty$.

2) Calculer f'(x). En déduire le tableau de variation de f.

3) a) Etablir que l'équation f (x) = 0 a deux solutions, 0 et une autre notée $\alpha \in]1 ; 2[$.

b) Préciser le signe de f (x) suivant les valeurs de x.

4) a) A l'aide d'une intégration par parties calculer $I_1 = \int_0^1 (2-x)e^x dx$.

b)Donner une interprétation graphique de $I = \int_0^1 (2-x)e^x - 2\ dx$ *et puis calculer I.*

5) On appelle (C) la représentation graphique de f Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ *On prendra pour unité graphique 2 cm. Tracer (C)dans le plan muni du repère orthonormé* $(o,\vec{i},\vec{j})$

6) Calculer l'aire A en cm^2 *du domaine limité par la courbe (C) , la droite D :y= -2 et les* *droites d'équation x = -1 et x = 0*

EXERCICE 24

Soit la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ *par f(x) = Ln(1 + x) – x . On note* **C** *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(o, \vec{i}, \vec{j})$ *(unité 2 cm).*

1. *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\text{Ln}(1+x)}{x}=0$. *En déduire* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. *dresser le tableau des variations de f.*
2. *Soit la fonction h définie sur* $]-1,+\infty[$ *par : h(x) = f(x) – x .*
3. *a) Dresser le tableau des variations de h.*
   b) montrer que l'équation h(x) = 0 admet dans $]-1,+\infty[$ *deux solutions 0 et* α *tel que* $\alpha < -\frac{1}{2}$.
   c) On déduire le signe h(x).
   d) Etudier la position de **C** et la droite $\Delta : y = x$.
   e) Tracer **C** .
4. *Soit* g *la restriction de f à* $]-1,0]$.
   a) Montrer que g *est une bijection de* $]-1,0]$ *sur* $]-\infty,0]$.
   b) Construire dans le même repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ *la courbe* **C'** *de* g^{-1}
5. *On pose* $I=\int_{\alpha}^{0}\text{Ln}(1+x)dx$ et $J=\int_{\alpha}^{0}\frac{x}{1+x}dx$.
   a) Vérifier que $\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{1+x}$ *puis claculer* J .
   b) A l'aide d'une integration par partie calculer I .
   c) Calculer en cm² l'aire A *de la partie du plan limitée par la courbe* **C** *et les droites d'équations resoectives y = x ; x = 0 et* $x=\alpha$*. En déduire l'aire en cm²* A' *de la partie du plan limitée par les courbes* **C** et **C'** *et les droites d'équations :* $x=\alpha$ *et x = 0.*

EXERCICE 25

On pose $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\cos^2 x dx$ et $J=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\sin^2 x dx$.

1) *Calculer I + J*
2) *Calculer à l'aide d'une intégration par parties I – J .*
3) *En déduire les valeurs de I et J*

EXERCICE 26

Soit f la fonction définie par :f(x) = $e^{\frac{x}{2}}$ *- x - 1.*

1) Dresser le tableau de variations de f.

2) a)Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet dans IR exactement deux solutions 0 et α *et que* $2 \le \alpha \le 3$*. En déduire le signe de f(x) .*

b) Tracer dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ *la courbe* (C) *. (Unité =2cm) .*

3) a) Soit $\lambda\in]-\infty,-1[$ *. Calculer en cm² l'aire A(*λ*) du domaine plan limité par :la courbe* (C) *et les droites d'équations respectives x = -1 et x =* λ *et D :y = -x-1 .b) Calculer* $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)$.

4) Soit g la fonction définie par :g(x) =2Ln(x+1)

a) Montrer que le réel α *est solution de l'équation g (x) = x.*

b) Dresser le tableau de variations de g .

c) Tracer dans un repère orthonormé la courbe (C') .

5) Calculer l'aire du domaine plan limité par : (C') ,et les droites d'équations respectives $x = 0$, $x = \alpha$ et $y = x$. (On montrera que $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$)

6) a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} .

b) Tracer dans le même repère orthonormé la courbe (C^{-1}) de g^{-1}.

c) En déduire l'aire du domaine plan limité par : les courbes (C') et (C^{-1}) , et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.

EXERCICE 27

1) Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)= 1- (2x + 1)e^{-2x}$.
   a)Dresser le tableau de variations de f
   b) Représenter graphiquement la courbe (C) de f dans un repère orthonormée $(o,\vec{i},\vec{j})$ (L'unité = 2cm)
2) Pour tout nombre λ strictement supérieur à 1, on appelle $A(\lambda)$ l'aire du domaine constitué des points du plan de coordonnées (x,y) telles que : $1 \leq x \leq \lambda$ et $0 \leq y \leq f(x)$
   a) Calculer $A(\lambda)$.
   b) Etudier la limite de $A(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

EXERCICE 28

Soit f la fonction définie par : $f(x) = e^x - 1$.

1) Dresser le tableau de variations de f .

2) Tracer dans un repère orthonormé la courbe (C) .

3) Calculer l'aire du domaine plan limité par : la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

EXERCICE 29

Soit n un entier naturel non nul. On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} dt.$

1.a) Soit φ la fonction définie sur [0 ; 2] par $\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$.Etudier les variations de φ sur [0 ; 2].

En déduire que, pour tout réel t dans [0 ; 2], $\frac{3}{2} \leq \varphi(t) \leq \frac{7}{4}$.

b) Montrer que, pour tout réel t dans [0 ; 2], on a : $\frac{3}{2} e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t) e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{7}{4} e^{\frac{t}{n}}$.

c) En déduire que : $\frac{3}{2} n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right) \leq u_n \leq \frac{7}{4} n(e^{\frac{2}{n}} - 1)$.

Montrer que, si (u_n) possède une limite L, alors $3 \leq L \leq \frac{7}{2}$.

2.a) Vérifier que, pour tout t dans [0 ; 2], on a : $\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$. En déduire l'intégrale $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt$.

b) Montrer que, pour tout t dans [0 ; 2], on a : $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$.En déduire que $I \leq u_n \leq e^{\frac{t}{n}} I$.

c) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite L.

EXERCICE 30

1) On considère les intégrales: I = $\int_0^{\pi} cos^4\ x\ dx$ *et J =* $\int_0^{\pi} sin^4\ x\ dx$.

a) Montrer que I = $\int_0^{\pi} cos\ x(cos\ x - cos\ x\ sin^2\ x)dx$ *et à l'aide d'une intégration par parties que I=*$\int_0^{\pi} sin^2\ x\ dx - \frac{1}{3}\ J$.

b) Montrer de même que J = $\int_0^{\pi} cos^2\ x\ dx$ - $\frac{1}{3}$ *I. En déduire les valeurs de I et J.*

2) Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_1^2 (x+5)^4\ dx$ *b)* $\int_0^1 \left(2x^2 - 1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx$ *c)* $\int_{-1}^2 (x+1)(\ x^2 + 2x - 7)dx$

3) Calculer à l'aide de deux intégrations par parties les intégrales suivantes:

a) $\int_0^1 x^2 e^x\ dx$ *b)* $\int_{-1}^0 (1+x)^2 e^{-x}\ dx$ *c)* $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} cos\ x e^x\ dx$

EXERCICE 31

Soit f la fonction définie par: f(x) = $\frac{(2x-1)e^x - 2x+2}{e^x - 1}$*.On note* (τ) *sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O,*$\vec{\imath}, \vec{\jmath}$*) dont l'unité est de 2 cm.*

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f *de f et trouver les trois réels a, b et c tels que, pour tout x de* D_f,

On ait f(x) = ax + b + $\frac{c}{e^x - 1}$.

2) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.

3) a) Déterminer la dérivée de f.

b) Résoudre dans IR l'équation : $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$.

c) En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f.

4) Démontrer que les droites d'équations respectives : y = 2x – 1 et y = 2x – 2 sont des asymptotes de (τ) *respectivement en + ∞ et en - ∞.*

Préciser l'autre asymptote.

5) Soit x un réel de D_f*, on considère les deux points M et* M' *de* (τ) *d'abscisses respectives x et – x,*

Déterminer les coordonnées du milieu I du segment [MM'*]. Que peut-on en déduire pour la courbe* (τ).

6) Tracer la courbe (τ).

7) a) Trouver les réels α *et* β *tels que, pour tout x de* D_f*, on ait f(x) = 2x +* $\alpha + \frac{\beta e^x}{e^x - 1}$.

b) Soit k un réel supérieur ou égal à 2.

Déterminer l'aire A(k) en cm² de l'ensemble des points du plan donts les coordonnnées (x ;y) vérifient :

$ln2 \leq x \ \leq lnk$ et $\quad 2x - 1 \ \leq y \ \leq f(x).$

c) Calculer $lim_{k \to +\infty} A(k)$.

EXERCICE 32

1) Soient a et b ($a < b$) deux nombres réels de l'intervalle $[0 \,;\, \frac{\pi}{2}[$.

a) Démontrer que : $\forall$ x ∈ [a ; b], $\quad \frac{1}{cos^2\, a} \ \leq \ \frac{1}{cos^2\, x} \ \leq \ \frac{1}{cos^2\, b}$.

b) En déduire que : $\frac{b-a}{cos^2\, a} \ \leq tan\, b - tan\, a \ \leq \ \frac{b-a}{cos^2\, b}$.

2) a) À l'aide d'une intégration par parties, déterminer la primitive F qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction f définie par f(x) = x sin x.

b) À l'aide de deux intégrations par parties, déterminer la primitive G qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction g définie par g(x) = x^2 cos x.

3) Préciser sur quel(s) intervalle(s) la fonction f admet des primitives et déterminer ces primitives.

a) f(x) = $x\sqrt{1 - \ x^2}$ b) f(x) = $\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ c) f(x) = $\frac{x-1}{\sqrt{2x^2 - 4x - 6}}$

d) f(x) = cos x $sin^5\, x$ e) f(x) = $cos^4\, x\ sin^2\, x$ f) f(x) = 2 $sin^5\, x\ cos^4\, x$

EXERCICE 33

1) Démontrer que : $\frac{\pi}{4} \ \leq \ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sin\, x}\ dx \ \leq \ \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

2a) Soit f(x) = $\frac{2x+5}{(x+1)^2}$ .Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall\, x \ \in IR\backslash\{-1\}$, f(x) = $\frac{a}{x+1} + \ \frac{b}{(x+1)^2}$.

b) En déduire la valeur de $\int_0^3 f(x)dx$.

3a) Soit f(x) = $\frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 2}{x+1}$ .Déterminer quatre réels a, b, c et d tels que : $\forall$ x ∈ $IR\backslash\{-1\}$,

f(x) = a $x^2 + bx + c + \ \frac{d}{x+1}$.

b) En déduire la valeur de $\int_0^3 f(x)dx$.

4) Calculer A = $\int_0^2 x^2 \sqrt{2x+1}\, dx$ et B = $\int_{-2}^{3}(x^2 + \ |x-1|)dx$.

5) Calculer C = $\int_2^3 |1-x|^3 dx$ et D = $\int_{-1}^{2} |e^x - \ 1|\ dx$.

EXERCICE 34

1) On considère la fonction f définie sur IR par f(x) = x (1 + e^{2-x}).On note (τ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.(unité 2 cm).

2) Soit h la fonction définie par h(x) = 1 + (1 – x) e^{2-x}.

a) Etudier les variations de h.

b) En déduire le signe de h(x) sur IR.

3) a) Etudier les limites de f en - ∞ et en + ∞.

b) Préciser la nature de la branche infinie de f en - ∞.

c) Calculer $lim_{x\to\infty}[\,f(x) - \,x]$, puis interpréter le résultat.

d) Préciser la position de (τ) par rapport à la droite (Δ) : y = x.

4) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} définie sur IR.

c) f^{-1} est elle dérivable en 4 ?

d) Etudier la position de (τ) par rapport à sa tangente au point d'abscisse 2.

e) Construire (τ). (On tracera la tangente à (τ) au point d'abscisse 2). Construire la courbe de f^{-1}.

5) Soit α un réel strictement positif et (R_α) la région du plan limitée par les droites d'équations respectives x = 0 et x = α et les courbes d'équations respectives y = f(x) et y = x.

Soit a (α) l'aire de (R_α) en cm^2.

a) Calculer a (α) en fonction de α.

b) Déterminer $lim_{\alpha\to+\infty}\, a\,(\alpha)$ puis interpréter le résultat obtenu.

EXERCICE 35

Soit la fonction de dans définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x\, e^{\frac{1}{x}} \text{ si } x < 0 \\ f(x) = x \ln(1 + x) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) (unité graphique 2 cm)

On désigne par ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f et (Δ) la droite d'équation y = x.

Partie A

1°) a) Montrer que f est continue en $x_0 = 0$

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

2°) a) Montrer que pour x < 0, f ' (x) > 0.

b) Etudier les variations de f ' sur [0 ;+ ∞[.

En déduire que pour x >0, f ' (x) >0.

c) Donner le tableau de variation de f.

3°) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ (on pourra poser $u = \frac{1}{x}$).

b) Montrer que (D) : $y = x + 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$. On admettra que ($\mathscr{C}$) est en dessous de (D).

4°) a) Construire ($\mathscr{C}$), on précisera les coordonnées de I, point d'intersection de (C) et (Δ) pour $x > 0$

a) *Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe ($\mathscr{C}$) en $+\infty$.*

<u>Partie B</u>

1°) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x de $_+$: $\dfrac{x^2}{x+1} = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.

2°) En déduire au moyen d'une intégration par partie que la fonction F telle que :

$$F(x) = \frac{x^2 \ln(1+x)}{2} - \frac{1}{4}(x^2 - 2x) \text{ est une primitive de } f \text{ sur } _+$$

3°) Calculer l'aire A en cm² de la partie du plan limitée par (Δ), ($\mathscr{C}$) et

les droites d'équations $x = 0$ et $x = e - 1$.

<u>Partie C</u>

1°) a) Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} .

b) f^{-1} est-elle dérivable en 0 ? Préciser la nature de la tangente en 0 à la courbe représentative de f^{-1} .

2°) Construire ($\mathscr{C}'$) courbe représentative de f^{-1} dans le repère ($O, \vec{i}, \vec{j}$).

3°) Déduire du B.3) l'aire du domaine (D) ensemble des points

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que : $\begin{cases} 0 \leq x \leq e - 1 \\ f(x) \leq y \leq f^{-1}(x). \end{cases}$

<u>EXERCICE 36</u>

<u>PARTIE A</u>

1) Etudier sur IR le signe de $4e^{2x} - 5e^{x} + 1$.

2) Soit φ la fonction définie par : $\varphi(x) = \ln x - 2\sqrt{x} + 2$.

a) Déterminer son domaine de définition D_φ et calculer ses limites aux bornes de D_φ.

b) Etudier ses variations et dresser son tableau de variations.

c) En déduire son signe.

<u>PARTIE B</u>

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{e^x}{2e^{x} - 1} & si \quad x \leq 0 \\ 1 - x + \sqrt{x}\ln x & si\ x > 0 \end{cases}$

On désigne par (τ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1) a) Déterminer D_f le domaine de définition de f.

b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f et étudier les branches infinies de (τ).

c) Etudier la position de (τ) par rapport à l'asymptote non parallèle aux axes dans $]-\infty; 0]$.

2) a) Etudier la continuité de f en 0

b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement les résultats.

3) Déterminer la dérivée de f et dresser le tableau de variations de f.

4) Construire (τ) , les asymptotes et les demi-tangentes. On remarquera que f(1) = 0 et $f'(1) = 0$.

5) Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par (τ) , la droite d'équation y = x et

les droites d'équations x = - ln8 et x = - ln4 .

EXERCICE 37

1) Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \, dx$ b) $\int_1^2 \ln x \, dx$

c) $\int_0^{\pi} \sin x \, e^x \, dx$ d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$

2) Déterminer une primitive de la fonction f sur K:

a) $f(x) = \frac{x^4 - 3x + 3}{x^4(x-1)}$ $K =]1 ;+\infty[$

b) $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^3(x+1)^2}$ $K =]0 ;+\infty[$ décomposer f(x) sous la forme $\frac{a}{x^3} + \frac{b}{(x+1)^2}$

3) Calculer les integrales suivantes:

a) $\int_1^2 x\sqrt{-x+3}\,dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2x \cos 3x \, dx$ c) $\int_2^3 |1-x|^3 \, dx$

d) $\int_{-2}^{3} (x^2 + |x-1|)dx$ e) $\int_0^2 x^2 \sqrt{2x+1} \, dx$ f) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \, dx$

EXERCICE 38

1) Calculer les intégrales suivantes:

a) $\int_1^2 \ln x \, dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$

c) $\int_0^{\pi} \sin x \, e^x \, dx$ d) $\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{2x+3}} \, dx$

2)Déterminer les nombres reels a, b et c tels que :

$\forall\, t \in IR^*, \frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{t^2+1}$

En déduire $\int_1^2 \frac{dt}{t(t^2+1)}$.

3)Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \cos^4 x \sin^2 x$

b) $g(x) = 2\sin^5 x \cos^4 x$

c) $h(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x+1}{x^3(x+1)^2}$ *. On mettra f(x) sous la forme* $\frac{a}{x^3} + \frac{b}{(x+1)^2}$.

EXERCICE 39

1°) Déterminer la solution de l'équation différentielle $9y'' + 6y' + y = 0$ *vérifiant les conditions initiales* $y(0) = 6$ *et* $y'(0) = 0$.

2°) Dresser le tableau de variation de $f : x \mapsto 2(x+3)\, e^{-\frac{x}{3}}$.

3°) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty\,;0]$.

a) Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera.

b) Prouver que la bijection réciproque g^{-1} *est dérivable en 0 et calculer* $g^{-1}{}'(0)$.

4°) Construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ *de f dans un repère orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5°) Déterminer l'aire S (λ) du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$*, la droite* $(O, \vec{i})$ *et les droites d'équations x = 0 et x = λ . (N.B. On sera amené à faire une intégration par parties).*

Déterminer la limite de cette aire lorsque λ tend vers + ∞.

EXERCICE 40

Partie A

Soit l'équation différentielle (E) : $-\frac{1}{2}y'' + \frac{3}{2}y' - y = 0$.

Déterminer la solution g de (E) dont la courbe représentative (C) passe par le point A (0 ; — 1) et dont la tangente en ce point est parallèle à l'axe des abscisses.

Partie B

1°) Etudier les variations de f définie sur R par $f(x) = e^{2x} - e^x$.

2°) Soit (Γ) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ *. ; unité 2 cm .*

a) Déterminer l'équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse ln 2 .

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ *. Interpréter géométriquement le résultat.*

3°) a) Tracer (Γ) .

b) Calculer l'aire A (α) en cm² du domaine délimité par (Γ) , les droites d'équations respectives : x = α

($\alpha < 0$) , $x = \ln 2$ et l'axe des abscisses .

c) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} A(\alpha)$ et interpréter graphiquement le résultat .

Partie C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1°) Démontrer que h est une bijection de $[0 ; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

2°) Démontrer que h^{-1} est dérivable en 3 puis calculer $h^{-1}{}'(3)$.

3°) Déterminer $h^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

4°) Tracer (C ') la courbe représentative de h^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 41

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $IR_+\backslash\{1\}$ par :

$$g(x) = \frac{1}{\ln^2(x)} - \frac{1}{\ln x} \text{ pour tout } x > 0 \text{ et } x \neq 1 \; ; \; g(0) = 0$$

1) Montrer que g est continue à droite en zéro.

2) Etudier les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

3) Dresser le tableau de variations de g.

4) Etudier le signe de g(x).

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $IR_+\backslash\{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{-x}{\ln x} \quad \text{si } x > 0 \quad \text{et } x \neq 1 \; ; \; f(0) = 0$$

1) Montrer que f est continue à droite en 0 et dérivable à droite en 0. En déduire l'existence d'une demi-tangente à la courbe représentative (τ) de f au point d'abscisse 0.

2) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3) Comparer $f'(x)$ et g(x). En déduire les variations de f et son tableau de variations.

4) Déterminer l'équation de la tangente (D) à la courbe (τ) au point d'abscisse e^2.

5) Soit M le point de (τ) d'abscisse x et N le point de (D) de même abscisse x.

On pose $\varphi(x) = \overline{NM}$.

Montrer que $\varphi(x) = f(x) + \frac{x + e^2}{4}$.

Déduire de la partie A le tableau de variations de $\varphi'(x)$ puis le signe de $\varphi'(x)$ sur $]1 ; +\infty[$. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $]1 ; +\infty[$ et la position de (τ) par rapport à (D) pour les points d'abscisse $x > 1$.

6) Représenter dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité :2cm)la courbe (τ) et la droite (D).

7) On note (T) la courbe représentative de g .

Sans construire (T) , calculer en cm^2 , l'aire de la partie plane comprise entre la courbe (T) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = e et x = e^2.

EXERCICE 42

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + ln\left|\frac{x\ \ -\ 1}{x\ +\ 1}\right| & si\ x\ \in]-\infty;-1[\cup]-\ 1;0[\\ f(x) =\ x^2e^{-x} & si\ x\ \in\ [0;\ +\infty[\end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

PARTIE A

1) Quel est le domaine de définition de f. Calculer f(-2) et f(3).

2) Montrer que la fonction f est continue en 0.

3) a) Calculer $f^{'}(x)$ sur $[0;\ +\infty[$ puis sur $]-\infty;-1[\cup]-\ 1;0[$.

b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier votre réponse.

4)a) Dresser le tableau des variations de la fonction f.

b) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une racine unique α comprise entre -1,6 et -1,5.

5) a) Justifier que la droite (D) d'équation y = x est asymptote à la courbe (C) au voisinage de - ∞.

b) Etudier la position de (C) par rapport à (D) sur]-∞ ;0[$\backslash\{-1\}$.

6) Tracer la courbe (C) en représant sur la même figure les asymptotes , les demi-tangentes en 0 et les points d'intersection avec les axes de coordonnées.

PARTIE B

Soit g la restriction de f à [0 ; 2].

1) Montrer que g réalise une bijection de[0 ; 2] vers un intervalle J à préciser

2) On note g^{-1} la bijection réciproque de g.

a) Résoudre l'équation $g^{-1}(x) = 1$.

b) Montrer que $(g^{-1})'\left(\frac{1}{e}\right) =\ e$.

3) On appelle (τ) la courbe représentative de g^{-1}. Tracer (τ).On placera sur la courbe $(\tau\ )$ le point d'ordonnée 1 et la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{e}$.

PARTIE C

Soit λ un nombre réel strictement positif . On pose I(λ) = $\int_0^{\lambda} f(x)dx$.

1) a) Interpréter graphiquement I(λ).

b) Calculer I(λ) en procédant à une integration par parties .

2) Quelle est la limite de I(λ) lorsque λ tend vers + ∞ .

3) On pose λ = 2 .

a) Calculer I(2).

b) En déduire la valeur en cm^2 *de l'aire limitée par* (τ) *et les droites d'équatons* $y = 0$, $x = 0$ *et* $x = \frac{4}{e^2}$.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I) Équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants

1) Activité

Soit la fonction f définie par f(x) = e^{4x} .

Calculer la dérivée de f et démontrer que , pour tout nombre réel x , on a :

$$f'(x) - 4f(x) = 0$$

Solution

f(x) =e^{4x} *. f est dérivable sur IR et* $f'(x) = 4e^{4x}$.

$f'(x) - 4f(x) = 4e^{4x} - 4e^{4x} = 0$ *donc* $\forall x \in IR$ *, on a* $f'(x) - 4f(x) = 0$.

On pose : $y = f(x)$.

On dit que f est solution de l'équation différentielle $y' - 4y = 0$.

2) Définition

On appelle équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants sans second membre toute équation de la forme $ay' + by = 0$, $a \in IR$, $b \in IR$ et $a \neq 0$.

Remarque

L'expression sans second membre est un abus de langage qui signifie que le second membre est nul .

Exemple

1) $2y' - 3y = 0$ 2) $\frac{3}{4}y' + 5y = 0$ 3) $y' + y = 0$ 4) $y' = 0$

Propriété

Les solutions de l'équation différentielle $ay' + by = 0$ sont les fonctions $x \to k\,e^{-\frac{b}{a}x}$, $k \in IR$.

Démonstration

Soit $(E) : ay' + by = 0$

La fonction nulle est solution de (E) <=> $y = o$ *solution de (E) .*

Soit y la solution de (E) différente de la fonction nulle .

$ay' + by = 0 \iff ay' = -by \iff \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a} \iff \exists\, c \in IR$ *tel que* $\ln|y| = -\frac{b}{a}x + c$

$\iff \exists\, c \in IR$ *tel que* $|y| = e^{-\frac{b}{a}x + c} = e^{c} \times e^{-\frac{b}{a}x}$. *Posons* $k' = e^{c}$.

$$\iff |y| = k' \times e^{-\frac{b}{a}x} = k'\,e^{-\frac{b}{a}x}$$

La fonction y est dérivable et ne s'annule pas sur IR donc elle est de signe constant .

On en déduit qu'il existe $k \in IR^*$ *tel que* $y = k\,e^{-\frac{b}{a}x}$ *. En ajoutant la fonction nulle , les fonctions*

$x \to k\, e^{-\frac{b}{a}x}$, $k \in IR$ sont solutions de (E) .

Démontrons toute solution de (E) est de la forme $x \to k\, e^{-\frac{b}{a}x}$, $k \in IR$.

Soit y une solution de (E) et z la fonction $x \to y(x)\, e^{\frac{b}{a}x}$.

La fonction z est dérivable sur IR et $z'(x) = \frac{1}{a}(a\, y'(x) + b\, y(x))$ *avec* $a \neq 0$.

Or $a\, y'(x) + b\, y(x) = 0$ *d'où* $z'(x) = 0$.

$z'(x) = 0$ *donc z est une fonction constante . IL existe* $k \in IR$ *tel que* $\forall\, x \in IR$, $z(x) = k$.

Donc $y(x)\, e^{\frac{b}{a}x} = k$ *d'où* $y(x) = k\, e^{-\frac{b}{a}x}$, $k \in IR$.

Toute solution de (E) est de la forme $x \to k\, e^{-\frac{b}{a}x}$, $k \in IR$.

Exercice d'application

Résoudre les équations différentielles suivantes

1) $2y' - 5y = 0$ 2) $y' - 3y = 0$ 3) $2y' - 3y = 0$

4) $y' + y = 0$ 5) $\frac{3}{5}y' + 6y = 0$ 6) $y' = 0$

Solution

Résolvons les équations différentielles suivantes

1) $2y' - 5y = 0$

$2y' - 5y = 0 \Rightarrow 2y' = 5y \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{5}{2} \Rightarrow y(x) = k\, e^{\frac{5}{2}x}$, $k \in IR$.

Les solutions de $2y' - 5y = 0$ *sont les fonctions* $x \to k\, e^{\frac{5}{2}x}$, $k \in IR$

2) $y' - 3y = 0$

$y' - 3y = 0 \Rightarrow y' = 3y \Rightarrow \frac{y'}{y} = 3 \Rightarrow y(x) = k\, e^{3x}$, $k \in IR$.

Les solutions de $y' - 3y = 0$ *sont les fonctions* $x \to k\, e^{3x}$, $k \in IR$

3) $2y' - 3y = 0$

$2y' - 3y = 0 \Rightarrow 2y' = 3y \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{3}{2} \Rightarrow y(x) = k\, e^{\frac{3}{2}x}$, $k \in IR$.

Les solutions de $2y' - 3y = 0$ *sont les fonctions* $x \to k\, e^{\frac{3}{2}x}$, $k \in IR$

4) $y' + y = 0$

$y' + y = 0 \Rightarrow y' = -y \Rightarrow \frac{y'}{y} = -1 \Rightarrow y(x) = k\, e^{-x}$, $k \in IR$.

Les solutions de $y' + y = 0$ *sont les fonctions* $x \to k\, e^{-x}$, $k \in IR$

5) $\boldsymbol{\frac{3}{5} y' + 6 y = 0}$

$\frac{3}{5} y' + 6 y = 0 \quad => \frac{3}{5} \; y' = - 6 y \quad => \frac{y'}{y} = \frac{-6}{\frac{3}{5}} = -10 \quad => \quad y(x) = k\, e^{-10x} \quad , k \in IR$.

$\boxed{\text{Les solutions de } \frac{3}{5} \; y' + 6 y = 0 \text{ sont les fonctions } x \to k\, e^{-10x} \; , k \in IR}$.

6) $\boldsymbol{y' = 0}$

$y' = 0$ donc $y(x) = k$, $k \in IR$.

$\boxed{\text{Les solutions de } y' = 0 \text{ sont les fonctions } x \to k \; , k \in IR}$

<u>Propriété</u> ***Solution vérifiant une condition initiale***

L'équation différentielle $ay' + b\, y = 0$ admet une unique solution vérifiant la condition initiale

$$\boldsymbol{y (x_0) = y_0} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{x_0} \in IR \quad \text{et} \quad \boldsymbol{y_0} \in IR \; .$$

Cette unique solution est la fonction $\boldsymbol{x \to y_0\, e^{-\frac{b}{a}(x - x_0)}}$.

Démonstration

On a : $ay' + b\, y = 0$ *et* $y(x) = k\, e^{-\frac{b}{a}x}$, $k \in IR$.

Cherchons la solution qui vérifie $y (x_0) = y_0$.

$y (x_0) = k\, e^{-\frac{b}{a}x_0} = y_0$ donc $k = y_0 e^{\frac{b}{a}x_0}$ d'où $k = y_0 e^{\frac{b}{a}x_0}$

En remplaçant k par sa valeur dans y (x) , on obtient :

$$y(x) = k\, e^{-\frac{b}{a}x} = y_0 e^{\frac{b}{a}x_0} \; e^{-\frac{b}{a}x} = y_0\, e^{-\frac{b}{a}(x - x_0)}$$

La solution qui vérifie $\boldsymbol{y (x_0) = y_0}$ ***est unique et c'est la fonction*** $\boldsymbol{x \to y_0\, e^{-\frac{b}{a}(x - x_0)}}$.

Exercice d'application

Dans chacun des cas suivants, résoudre sur IR l'équation différentielle et déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée .

1) $3 y' + 5 y = 0$ et $y (1) = 2$

2) $y' + \frac{1}{2} y = 0$ et $y (\ln 4) = 1$

3) $4 y' - 3 y = 0$ et $y (-4) = 1$

4) $y' - 3 y = 0$ et $y (0) = 1$

Solution

Résolvons les équations différentielles avec condition initiale .

1) $\boldsymbol{3 y' + 5 y = 0}$ **et** $\boldsymbol{y (1) = 2}$

$3 y' + 5 y = 0 \quad => 3 y' = - 5 y \quad => \frac{y'}{y} = -\frac{5}{3} \quad => \quad y(x) = k\, e^{-\frac{5}{3}x} \quad , k \in IR$

$y(1) = 2 \quad => \quad k\, e^{-\frac{5}{3}} = 2 \quad => \quad k = 2\, e^{\frac{5}{3}} \quad$ *d'où* $\; y(x) = 2\, e^{-\frac{5}{3}(x-1)}$

La solution vérifiant y (1) = 2 est la fonction $\boldsymbol{x \to 2\, e^{-\frac{5}{3}(x-1)}}$

2) $\boldsymbol{y' + \frac{1}{2} y = 0}$ ***et*** $\boldsymbol{y(\ln 4) = 1}$

$y' + \frac{1}{2} y = 0 \quad => \quad y' = -\frac{1}{2} y \quad => \quad \frac{y'}{y} = -\frac{1}{2} \quad => \quad y(x) = k\, e^{-\frac{1}{2}x} \quad , k \in IR$

$y(\ln 4) = 1 \quad => \quad k\, e^{-\frac{\ln 4}{2}} = 1 \quad => \quad k = 2 \quad$ *d'où* $\; y(x) = e^{-\frac{1}{2}(x - \ln 4)} = 2\, e^{-\frac{1}{2}x}$

La solution vérifiant y (ln 4) = 1 est la fonction $\boldsymbol{x \to 2\, e^{-\frac{1}{2}x}}$

3) $\boldsymbol{4y' - 3y = 0}$ ***et*** $\boldsymbol{y(-4) = 1}$

$4y' - 3y = 0 \quad => \quad 4y' = 3y \quad => \quad \frac{y'}{y} = \frac{3}{4} \quad => \quad y(x) = k\, e^{\frac{3}{4}x} \quad , k \in IR$

$y(-4) = 1 \quad => \quad k\, e^{-3} = 1 \quad => \quad k = e^{3} \quad$ *d'où* $\; y(x) = 1\, e^{\frac{3}{4}(x+4)} = e^{\frac{3}{4}(x+4)}$

La solution vérifiant y (- 4) = 1 est la fonction $\boldsymbol{x \to e^{\frac{3}{4}(x+4)}}$

4) $\boldsymbol{y' - 3y = 0}$ ***et*** $\boldsymbol{y(0) = 1}$

$y' - 3y = 0 \quad\quad y' = 3y \quad => \quad \frac{y'}{y} = 3 \quad => \quad y(x) = k\, e^{3x} \quad , k \in IR$

$y(0) = 1 \quad => \quad k\, e^{0} = 1 \quad => \quad k = 1 \quad$ *d'où* $\; y(x) = 1\, e^{3x} = e^{3x}$

La solution vérifiant y (0) = 1 est la fonction $\boldsymbol{x \to e^{3x}}$

3)<u>Définition</u>

On appelle équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants avec second membre toute

équation de la forme $\boldsymbol{ay' + by = \varphi(x)}$, $\boldsymbol{a \in IR, b \in IR}$ ***et*** $\boldsymbol{a \neq 0}$ ***et*** $\boldsymbol{\varphi(x)}$ ***est une fonction non nulle .***

Remarque

L'expression avec second membre est un abus de langage qui signifie que le second membre est non nul .

4) <u>Méthode de résolution de</u> $\boldsymbol{\underline{ay' + by = \varphi(x)}}$

Soit $\boldsymbol{(E_1) : ay' + by = \varphi(x)}$

Soit $\boldsymbol{(E_2) : ay' + by = 0}$

1) On détermine une solution particulière g de $\boldsymbol{(E_1)}$ ***.***

2) On démontre qu'une fonction h est solution de $\boldsymbol{(E_1)}$ ***si et seulement si (h – g) est solution de*** $\boldsymbol{(E_2)}$ ***.***

3) On pose f = h – g . On détermine la fonction f .

4) La solution générale de (E_1) est la fonction h = f + g .

Remarque

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle est appelée la solution générale de l'équation différentielle .

Exercice d'application

Soit (E_1) : $2y' + 3y = 6x^2 - 7x + 2$. Soit (E_2) : $2y' + 3y = 0$

1) Déterminer un polynôme g du second degré solution de (E_1) .

2) Démontrer qu'une fonction h est solution de (E_1) si et seulement si (h – g) est solution de (E_2) .

3) En déduire les solutions de (E_1) .

Solution

Soit (E_1) : $2y' + 3y = 6x^2 - 7x + 2$. Soit (E_2) : $2y' + 3y = 0$

1) Déterminons un polynôme g du second degré solution de (E_1) .

Le polynôme g est un polynôme du second degré donc $g(x) = ax^2 + bx + c$, $a \in IR$, $b \in IR$, $c \in IR$ et $a \neq 0$.

La fonction g est dérivable sur IR et $g'(x) = 2ax + b$.

La fonction g est solution de (E_1) donc $2g'(x) + 3g(x) = 6x^2 - 7x + 2$.

$2g'(x) + 3g(x) = 2(2ax + b) + 3(ax^2 + bx + c) = 3ax^2 + (4a + 3b)x + 2b + 3c$

On a : $3ax^2 + (4a + 3b)x + 2b + 3c = 6x^2 - 7x + 2$.

Par identification , on a : $3a = 6$, $4a + 3b = -7$ et $2b + 3c = 2$. On trouve $a = 2$, $b = -5$ et $c = 4$ ..

Donc $g(x) = 2x^2 - 5x + 4$.

$\boxed{g(x) = 2x^2 - 5x + 4}$

2) Démontrons qu'une fonction h est solution de (E_1) si et seulement si (h – g) est solution de (E_2) .

h est solution de (E_1) <=> $\forall x \in IR$, $2h'(x) + 3h(x) = 6x^2 - 7x + 2$.

En remplaçant $6x^2 - 7x + 2$ par $2g'(x) + 3g(x)$. On obtient :

h est solution de (E_1) <=> $\forall x \in IR$, $2h'(x) + 3h(x) = 2g'(x) + 3g(x)$

<=> $\forall x \in IR$, $2h'(x) - 2g'(x) + 3h(x) - 3g(x) = 0$

<=> $\forall x \in IR$, $2(h'(x) - g'(x)) + 3(h(x) - g(x)) = 0$

<=> $\forall x \in IR$, $2(h - g)'(x) + 3(h - g)(x) = 0$.

<=> (h – g) est solution de (E_2) .

3) Déduisons les solutions de (E_1) .

On pose f = h – g . Or (h – g) est solution de (E_2) donc f est solution de (E_2) .

(E_2) : $2y' + 3y = 0$. $2y' + 3y = 0$ => $2y' = -3y$ => $\frac{y'}{y} = -\frac{3}{2}$ => $y(x) = k\,e^{-\frac{3}{2}x}$, $k \in IR$

Donc $f(x) = y(x) = k\,e^{-\frac{3}{2}x}$, $k \in IR$

On a : f = h – g donc h = f + g . h est la solution générale de (E_1) .

Donc $h(x) = f(x) + g(x) = k\,e^{-\frac{3}{2}x} + 2x^2 - 5x + 4$.

Les solutions de (E_1) : $2y' + 3y = 6x^2 - 7x + 2$ *sont les fonctions* $x \to k\,e^{-\frac{3}{2}x} + 2x^2 - 5x + 4$.

5) <u>Équations du type $y' = f(x)$ où f est une fonction non nulle</u>

1) Résoudre sur IR les équations différentielles suivantes :

a) $y' = 6x^2 + 5x - 10$ *b)* $x\,y' = 1$

c) $y' + x + \sin x = 0$ *d)* $(x^2 + 1)\,y' = x$

2) Résoudre sur $]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}[$ *l'équation différentielle* (E_2) : $y' = 1 + \tan^2 x$

Déterminer la solution de (E_2) qui vérifie y (0) = 1 .

Solution

IL suffit tout simplement d'utiliser les primitives

1) Résolvons sur IR les équations différentielles suivantes

a) $\boldsymbol{y' = 6x^2 + 5x - 10}$

$y' = 6x^2 + 5x - 10$ *donc* $y = 6\left(\frac{x^3}{3}\right) + 5\left(\frac{x^2}{2}\right) - 10x + c$, $c \in IR$

D'où $\boldsymbol{y(x) = 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 10x + c}$, $\boldsymbol{c \in IR}$

b) $\boldsymbol{x\,y' = 1}$

$x\,y' = 1$ *donc* $y' = \frac{1}{x}$ *d'où* $y = \ln|x| + c$, $c \in IR$

Donc $\boldsymbol{y(x) = \ln|x| + c}$, $\boldsymbol{c \in IR}$

c) $\boldsymbol{y' + x + \sin x = 0}$

$y' + x + \sin x = 0$ *donc* $y' = -x - \sin x$ *d'où* $y = -\frac{x^2}{2} + \cos x + c$, $c \in IR$

Donc $\boldsymbol{y(x) = -\frac{x^2}{2} + \cos x + c}$, $\boldsymbol{c \in IR}$

d) $(x^2 + 1)\, y' = x$

$(x^2 + 1)\, y' = x$ *donc* $y' = \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1}$ *d'où* $y = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + c$, $c \in IR$

$\boxed{\textbf{Donc } y(x) = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + c \text{ , } c \in IR}$

2) Résolvons sur $]-\frac{\pi}{2} \,;\, \frac{\pi}{2}[$ ***l'équation différentielle*** (E_2) : $y' = 1 + \tan^2 x$

$y' = 1 + \tan^2 x$ *donc* $y = \tan x + c$, $c \in IR$ *d'où* $y(x) = \tan x + c$, $c \in IR$

Déterminons la solution de (E_2) ***qui vérifie*** $y(0) = 1$.

$y(x) = \tan x + c$ *donc* $y(0) = \tan 0 + c = 1$ *d'où* $0 + c = 1$. *Donc* $c = 1$.

$\boxed{\textbf{La solution de } (E_2) \textbf{ qui vérifie } y(0) = 1 \textbf{ est } y(x) = \tan x + 1 \text{ .}}$

II) <u>Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants</u>

1) <u>Activité</u>

Soit la fonction g définie par $g(x) = 2\,e^{-5x} + 3\,e^{2x}$

Calculer la dérivée première et la dérivée seconde de g et démontrer que , pour tout nombre réel x , on a :

$$g''(x) + 3\,g'(x) - 10\,g(x) = 0$$

Solution

Calculons la dérivée première et la dérivée seconde de g

La fonction g est deux fois dérivable sur IR et on a :

$g'(x) = -10\,e^{-5x} + 6\,e^{2x}$ *et* $g''(x) = 50\,e^{-5x} + 12\,e^{2x}$

$g''(x) + 3\,g'(x) - 10\,g(x) = 50\,e^{-5x} + 12\,e^{2x} + 3(-10\,e^{-5x} + 6\,e^{2x}) - 10(2\,e^{-5x} + 3\,e^{2x})$

$= 50\,e^{-5x} - 50\,e^{-5x} + 12\,e^{2x} - 12\,e^{2x} = 0$

Donc $\forall x \in IR$, $g''(x) + 3\,g'(x) - 10\,g(x) = 0$

On pose $y = g(x)$.

On dit que g est solution de l'équation différentielle $y'' + 3y' - 10y = 0$

2) <u>Définition</u>

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre toute équation de la forme $ay'' + b\,y' + c\,y = 0$, $a \in IR$, $b \in IR$, $c \in IR$ ***et*** $a \neq 0$.

Remarque

L'expression sans second membre est un abus de langage qui signifie que le second membre est nul .

Exemple

1) $2y'' + 3y' + y = 0$ 2) $y'' + 3y' - 10y = 0$

3) $y'' + 3y' = 0$ 4) $y'' = 0$

3) Équation caractéristique

On appelle équation caractéristique de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ l'équation d'inconnue r : $ar^2 + br + c = 0$.

Démonstration

On a : $ay'' + by' + cy = 0$

Soit r un nombre réel et y la fonction définie par $y(x) = e^{rx}$.

La fonction y est deux fois dérivable sur IR et $y' = ry$, $y'' = r^2 y$.

$ay'' + by' + cy = a(r^2 y) + b(ry) + cy = y(ar^2 + br + c)$

$ay'' + by' + cy = 0$ donc $y(ar^2 + br + c) = 0$ d'où $ar^2 + br + c = 0$

y est solution de $ay'' + by' + cy = 0 \iff ar^2 + br + c = 0$

L'équation d'inconnue r : $ar^2 + br + c = 0$ est appelée équation caractéristique de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$.

4) Méthode de résolution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$

Pour résoudre une équation différentielle du type $ay'' + by' + cy = 0$, on résout l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ puis on utilise le tableau suivant :

$\Delta = b^2 - 4ac$	*Solutions de l'équation caractéristique* $ar^2 + br + c = 0$	*Solutions de l'équation différentielle* $ay'' + by' + cy = 0$
$\Delta = 0$	*Solution double :* r_0	$y(x) = (Ax + B)e^{r_0 x}$ $A \in IR, B \in IR$
$\Delta > 0$	*Deux solutions réelles :* r_1 *et* r_2	$y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ $A \in IR, B \in IR$
$\Delta < 0$	*Deux solutions complexes conjuguées :* $z_1 = \alpha + i\beta$ *et* $z_2 = \alpha - i\beta$	$y(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ $A \in IR, B \in IR$

Exercice d'application

Résoudre les équations différentielles suivantes

1) $y'' - 8y' + 16y = 0$

2) $y'' + 3y' - 10y = 0$

3) $y'' - 4y' + 13y = 0$

Solution

Résolvons les équations différentielles suivantes

1) $\boldsymbol{y'' - 8y' + 16y = 0}$

$y'' - 8y' + 16y = 0$, *L'équation caractéristique est :* $r^2 - 8r + 16 = 0$

$r^2 - 8r + 16 = 0$, $\Delta = (-8)^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = 0$, $r_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2} = 4$ donc $r_0 = 4$

$y(x) = (Ax + B)e^{r_0 x}$, $A \in IR$, $B \in IR$, $y(x) = (Ax + B)e^{4x}$

La solution générale de $\boldsymbol{y'' - 8y' + 16y = 0}$ est : $\boldsymbol{y(x) = (Ax + B)e^{4x}}$, $\boldsymbol{A \in IR , B \in IR}$

2) $\boldsymbol{y'' + 3y' - 10y = 0}$

$y'' + 3y' - 10y = 0$, *L'équation caractéristique est :* $r^2 + 3r - 10 = 0$

$r^2 + 3r - 10 = 0$, $\Delta = (3)^2 - 4(1)(-10) = 49$, $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-7}{2(1)} = \frac{-10}{2} = -5$ et $r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+7}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2$

Donc $r_1 = -5$ et $r_2 = 2$

$y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$, $A \in IR$, $B \in IR$, $y(x) = Ae^{-5x} + Be^{2x}$

La solution générale de $\boldsymbol{y'' + 3y' - 10y = 0}$ est $\boldsymbol{y(x) = Ae^{-5x} + Be^{2x}}$, $\boldsymbol{A \in IR , B \in IR}$

3) $\boldsymbol{y'' - 4y' + 13y = 0}$

$y'' - 4y' + 13y = 0$, *L'équation caractéristique est :* $r^2 - 4r + 13 = 0$

$r^2 - 4r + 13 = 0$, $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(13) = -36$ donc $\sigma = i\sqrt{-\Delta} = i\sqrt{36} = 6i$

$z_1 = \frac{-b - \sigma}{2a} = \frac{4 - 6i}{2(1)} = \frac{4 - 6i}{2} = 2 - 3i$ et $z_2 = \frac{-b + \sigma}{2a} = \frac{4 + 6i}{2(1)} = \frac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i$

Donc $z_1 = 2 - 3i$ et $z = 2 + 3i$ On prend $\alpha = 2$ et $\beta = 3$

$y(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$, $A \in IR$, $B \in IR$, $y(x) = e^{2x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$

La solution de $y'' - 4y' + 13y = 0$ est $y(x) = e^{2x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$, $A \in IR$, $B \in IR$

Propriété ***Solution vérifiant des conditions initiales***

L'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ admet une unique solution vérifiant les conditions initiales $y(x_0) = y_0$ et $y'(x'_0) = y'_0$ avec x_0 , y_0 , x'_0 et y'_0 sont des nombres réels .

Exercice d'application

Dans chacun des cas suivants , résoudre sur IR l'équation différentielle et déterminer la solution vérifiant les conditions initiales données .

1) $y'' - 3y' - 4y = 0$ $\quad y(0) = 2$ et $y'(0) = 4$

2) $4y'' + 4y' + 65y = 0$ $\quad y(0) = 1$ et $y'(0) = -\frac{1}{2}$

3) $y'' + 4y' + 4y = 0$ $\quad y(0) = 2$ et $y'(0) = -1$

4) $x'' + \frac{k}{m}x = 0$ $\quad x(0) = x_0$ et $x'(0) = 0$

Solution

Résolvons les équations différentielles suivantes

1) $y'' - 3y' - 4y = 0$ $\quad y(0) = 2$ et $y'(0) = 4$

$y'' - 3y' - 4y = 0$

L'équation caractéristique est $r^2 - 3r - 4 = 0$, $\Delta = (-3)^2 - 4(1)(-4) = 25$, $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

Donc $r_1 = -1$ et $r_2 = 4$ d'où $y(x) = A\,e^{r_1 x} + B\,e^{r_2 x}$, $A \in IR$, $B \in IR$,

$y(x) = A\,e^{-x} + B\,e^{4x}$. $\quad y'(x) = -A\,e^{-x} + 4B\,e^{4x}$

$y(0) = 2 \iff A + B = 2$; $y'(0) = 4 \iff -A + 4B = 4$

On obtient : A + B = 2 et $-A + 4B = 4$. *On trouve* $A = \frac{4}{5}$ et $B = \frac{6}{5}$

Donc $y(x) = \frac{4}{5}e^{-x} + \frac{6}{5}e^{4x}$

La solution de l'équation $y'' - 3y' - 4y = 0$ qui vérifie $y(0) = 2$ et $y'(0) = 4$ est la fonction $x \to \frac{4}{5}e^{-x} + \frac{6}{5}e^{4x}$

2) $4y'' + 4y' + 65y = 0$ $\quad y(0) = 1$ et $y'(0) = -\frac{1}{2}$

$4y'' + 4y' + 65y = 0$

L'équation caractéristique est $4r^2 + 4r + 65 = 0$, $\Delta = (4)^2 - 4(4)(65) = -1024$

donc $\sigma = i\sqrt{-\Delta} = i\sqrt{1024} = 32i$

Donc $z_1 = -\frac{1}{2} + 4i$ *et* $z = -\frac{1}{2} - 4i$ *On prend* $\alpha = -\frac{1}{2}$ *et* $\beta = 4$

$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(A\cos 4x + B\sin 4x)$, $A \in IR, B \in IR$, $y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(A\cos 4x + B\sin 4x)$

$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(A\cos 4x + B\sin 4x)$,

$y'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}(A\cos 4x + B\sin 4x) + e^{-\frac{1}{2}x}(-4A\sin 4x + 4B\cos 4x)$

$y(0) = 1 \iff A = 1$

$y'(0) = -\frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2}A + 4B = -\frac{1}{2}$

On obtient : $A = 1$ *et* $-\frac{1}{2}A + 4B = -\frac{1}{2}$. *On trouve* $A = 1$ *et* $B = 0$

Donc $y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\cos 4x$

La solution de $\boldsymbol{4y'' + 4y' + 65y = 0}$ ***qui vérifie*** $\boldsymbol{y(0) = 1}$ ***et*** $\boldsymbol{y'(0) = -\frac{1}{2}}$

est la fonction $\boldsymbol{x \to e^{-\frac{1}{2}x}\cos 4x}$

3) $\boldsymbol{y'' + 4y' + 4y = 0}$ $\boldsymbol{y(0) = 2}$ ***et*** $\boldsymbol{y'(0) = -1}$

$y'' + 4y' + 4y = 0$

L'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 4 = 0$, $\Delta = (4)^2 - 4(1)(4) = 0$, *donc* $r_0 = -2$

$y(x) = (Ax + B)e^{r_0 x}$, $A \in IR, B \in IR$, $y(x) = (Ax + B)e^{-2x}$

$y(x) = (Ax + B)e^{-2x}$; $y'(x) = Ae^{-2x} - 2(Ax + B)e^{-2x}$

$y(0) = 2 \iff B = 2$

$y'(0) = -1 \iff -2A + B = -1$

On obtient : $B = 2$ *et* $-2B + A = -1$. *On trouve* $A = 3$ *et* $B = 2$

$y(x) = (2x + 3)e^{-2x}$

La solution de $\boldsymbol{y'' + 4y' + 4y = 0}$ ***qui vérifie*** $\boldsymbol{y(0) = 2}$ ***et*** $\boldsymbol{y'(0) = -1}$

est la fonction $\boldsymbol{x \to (3x + 2)e^{-2x}}$

4) $\boldsymbol{x'' + \frac{k}{m}x = 0}$ $\boldsymbol{x(0) = x_0}$ ***et*** $\boldsymbol{x'(0) = 0}$

Remarque : Les solutions sur IR de l'équation différentielle $\boldsymbol{y'' + w^2 y = 0}$ ***,*** $\boldsymbol{w \in IR}$ ***sont les***

fonctions $\boldsymbol{x \to A\cos wx + B\sin wx}$ ***,*** $\boldsymbol{A \in IR, B \in IR}$

$x'' + \frac{k}{m} x = 0$

Les solutions de cette équation sont les fonctions $x \to A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + B\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\, t$, $A \in IR$, $B \in IR$

$x(0) = x_0 \iff A = x_0$ *et* $x'(0) = 0 \iff B = 0$

$x(t) = x_0 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t$

La solution de $x'' + \frac{k}{m} x = 0$ ***qui vérifie*** $x(0) = x_0$ ***et*** $x'(0) = 0$ ***est la fonction*** $x \to x_0 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t$

5) ***<u>Définition</u>***

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre toute équation de la forme $ay'' + by' + cy = \varphi(x)$, $a \in IR$, $b \in IR$ ***et*** $a \neq 0$ ***et*** $\varphi(x)$ ***est une fonction non nulle .***

Remarque

L'expression avec second membre est un abus de langage qui signifie que le second membre est non nul .

6) ***<u>Méthode de résolution de</u>*** $\underline{ay'' + by' + cy = \varphi(x)}$

Soit (E_1) : $ay'' + by' + cy = \varphi(x)$

Soit (E_2) : $ay'' + by' + cy = 0$

1) On détermine une solution particulière g de (E_1) ***.***

2) On démontre qu'une fonction h est solution de (E_1) ***si et seulement si*** $(h - g)$ ***est solution de*** (E_2) ***.***

3) On pose f = h – g . On détermine la fonction f .

4) La solution générale de (E_1) ***est la fonction h = f + g .***

Remarque

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle est appelée la solution générale de l'équation différentielle .

Exercice d'application

Soit (E_1) : $y'' - 4y' + 7y = 2\cos 2x$

Soit (E_2) : $y'' - 4y' + 7y = 0$

1) Déterminer a et b pour que $g(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$ *soit solution de* (E_1) .

2) Démontrer qu'une fonction h est solution de (E_1) *si et seulement si* $(h - g)$ *est solution de* (E_2) .

3) En déduire les solutions de (E_1) .

Solution

Soit (E_1) : y'' - 4 y' + 7 y = 2cos 2x ; Soit (E_2) : y'' - 4 y' + 7 y = 0

1) Déterminer a et b pour que g(x) = acos 2x + bsin 2x soit solution de (E_1) .

g(x) = acos 2x + bsin 2x , g est deux fois dérivable sur IR

$g'(x) = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x$; $g''(x) = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x$

La fonction g est solution de (E_1) donc $g''(x) - 4g'(x) + 7g(x) = 2\cos 2x$

$g''(x) - 4g'(x) + 7g(x) = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x - 4(-2a\sin 2x + 2b\cos 2x) + 7(a\cos 2x + b\sin 2x) = 0$

$g''(x) - 4g'(x) + 7g(x) = (3a - 8b)\cos 2x + (3b + 8a)\sin 2x$

Donc $(3a - 8b)\cos 2x + (3b + 8a)\sin 2x = 2\cos 2x$; *par identification on a :*

$3a - 8b = 2$ *et* $3b + 8a = 0$. *On trouve* $a = \frac{6}{73}$ *et* $b = -\frac{16}{73}$

D'où $g(x) = \frac{6}{73}\cos 2x - \frac{16}{73}\sin 2x$. $\boxed{g(x) = \frac{6}{73}\cos 2x - \frac{16}{73}\sin 2x}$

2) Démontrons qu'une fonction h est solution de (E_1) si et seulement si (h – g) est solution de (E_2)

h est solution de (E_1) <=> $\forall x \in IR$, $h''(x) - 4h'(x) + 7h(x) = 2\cos 2x$

En remplaçant 2cos 2x par $g''(x) - 4g'(x) + 7g(x)$. *On obtient :*

h est solution de (E_1) <=> $\forall x \in IR$, $h''(x) - 4h'(x) + 7h(x) = g''(x) - 4g'(x) + 7g(x)$

<=> $\forall x \in IR$, $h''(x) - g''(x) \quad 4h'(x) - 4g'(x) + 7h(x) - 7g(x) = 0$

<=> $\forall x \in IR$, $(h''(x) - g''(x)) - 4(h'(x) - g'(x)) + 7(h(x) - g(x)) = 0$

<=> $\forall x \in IR$, $(h - g)''(x) - 4(h - g)'(x) + 7(h - g)(x) = 0$.

<=> *(h – g) est solution de (E_2) .*

3) Déduisons les solutions de (E_1) .

On pose f = h – g . Or (h – g) est solution de (E_2) donc f est solution de (E_2) .

(E_2) : $y'' - 4y' + 7y = 0$

$y'' - 4y' + 7y = 0$

L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 7 = 0$, $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(7) = -12$

donc $\sigma = i\sqrt{-\Delta} = i\sqrt{12} = 2\sqrt{3}\,i$

Donc $z_1 = 2 - i\sqrt{3}$ *et* $z_2 = 2 + i\sqrt{3}$ *On prend* $\alpha = 2$ *et* $\beta = \sqrt{3}$

$y(x) = e^{2x}(A\cos\sqrt{3}x + B\sin\sqrt{3}x)$, $A \in IR$, $B \in IR$, $y(x) = e^{2x}(A\cos\sqrt{3}x + B\sin\sqrt{3}x)$

$y(x) = e^{2x}(A\cos\sqrt{3}x + B\sin\sqrt{3}x)$, *Donc* $f(x) = y(x) = e^{2x}\,(A\cos\sqrt{3}x + B\sin\sqrt{3}x)$

On a : f = h – g donc h = f + g . h est la solution générale de (E_1) .

Donc $h(x) = f(x) + g(x) = e^{2x}\,(A\cos\sqrt{3}x + B\sin\sqrt{3}x) + \frac{6}{73}\cos 2x - \frac{16}{73}\sin 2x$

$$h(x) = e^{2x}\,(A\cos\sqrt{3}x + B\sin\sqrt{3}x) + \frac{6}{73}\cos 2x - \frac{16}{73}\sin 2x$$

La solution de $y'' - 4y' + 7y = 2\cos 2x$

sont les fonctions $x \to e^{2x}\,(A\cos\sqrt{3}x + B\sin\sqrt{3}x) + \frac{6}{73}\cos 2x - \frac{16}{73}\sin 2x$

7) Équations du type $y'' = f(x)$ où f est une fonction non nulle

1) Résoudre sur IR les équations différentielles suivantes :

a) $y'' = \sin x + x + 3$ b) $1 + 6x^2 + y'' = 0$

c) $\cos 2x + 4y'' = 0$ d) $y'' = 2x$

2) Résoudre sur IR l'équation différentielle (E) : $y'' = e^{-3x}$.

Déterminer la solution de (E) qui vérifie $y(0) = \frac{10}{9}$ *et* $y'(0) = \frac{5}{3}$.

Solution

IL suffit tout simplement d'utiliser les primitives

1) Résolvons sur IR les équations différentielles suivantes :

a) $y'' = \sin x + x + 3$

$y'' = \sin x + x + 3 \iff y' = -\cos x + \frac{x^2}{2} + 3x + a\ ,\ a \in IR$

$\iff y = -\sin x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{2}x^2 + ax + b\ ,\ a \in IR\ ,\ b \in IR$

Donc $y(x) = -\sin x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{2}x^2 + ax + b\ ,\ a \in IR\ ,\ b \in IR$

La solution de $y'' = \sin x + x + 3$ ***est la fonction*** $x \to -\sin x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{2}x^2 + ax + b\ ,\ a \in IR\ ,\ b \in IR$

b) $1 + 6x^2 + y'' = 0$

$1 + 6x^2 + y'' = 0 \iff y'' = 1 + 6x^2 \iff y' = x + 2x^3 + a\ ,\ a \in IR$

$\iff y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x^4 + ax + b\ ,\ a \in IR\ ,\ b \in IR$

Donc $y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x^4 + ax + b\ ,\ a \in IR\ ,\ b \in IR$

La solution de $1 + 6x^2 + y'' = 0$ est la fonction $x \to \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x^4 + ax + b$, $a \in IR$, $b \in IR$

c) $\cos 2x + 4y'' = 0$

$\cos 2x + 4y'' = 0 \iff y'' = -\frac{1}{4}\cos 2x \iff y' = -\frac{1}{8}\sin 2x + a$, $a \in IR$

$\iff y = -\frac{1}{16}\cos 2x + ax + b$, $a \in IR$, $b \in IR$

Donc $y(x) = -\frac{1}{16}\cos 2x + ax + b$, $a \in IR$, $b \in IR$

La solution de $\cos 2x + 4y'' = 0$ est la fonction $x \to -\frac{1}{16}\cos 2x + ax + b$, $a \in IR$, $b \in IR$

d) $y'' = 2x$

$y'' = 2x \iff y' = x^2 + a$, $a \in IR$

$\iff y = \frac{x^3}{3} + ax + b$, $a \in IR$, $b \in IR$

Donc $y(x) = \frac{x^3}{3} + ax + b$, $a \in IR$, $b \in IR$

La solution de $y'' = 2x$ est la fonction $x \to \frac{x^3}{3} + ax + b$, $a \in IR$, $b \in IR$

2) Résolvons sur IR l'équation différentielle (E) : $y'' = e^{-3x}$.

$y'' = e^{-3x} \iff y' = -\frac{1}{3}e^{-3x} + a$, $a \in IR$

$\iff y = \frac{1}{9}e^{-3x} + ax + b$, $a \in IR$, $b \in IR$

Donc $y(x) = \frac{1}{9}e^{-3x} + ax + b$, $a \in IR$, $b \in IR$

Déterminons la solution de (E) qui vérifie $y(0) = \frac{10}{9}$ et $y'(0) = \frac{5}{3}$.

$y(0) = \frac{10}{9} \iff \frac{1}{9} + b = \frac{10}{9}$; $y'(0) = \frac{5}{3} \iff -\frac{1}{3} + a = \frac{5}{3}$

On trouve : $a = 2$ et $b = 1$

Donc $y(x) = \frac{1}{9}e^{-3x} + 2x + 1$.

La solution de $y'' = e^{-3x}$ qui vérifie $y(0) = \frac{10}{9}$ et $y'(0) = \frac{5}{3}$ est la fonction $x \to \frac{1}{9}e^{-3x} + 2x + 1$

EXERCICES

Exercice1

Résoudre sur IR les équations différentielles suivantes avec les conditions initiales données

a) $y' + 3y = 0$ avec $y(1) = 1$
b) $y' = \cos(3x)$ avec $y(0) = 1$
c) $y'' = 2x$ avec $y(0) = 1$ et $y(1) = 0$
d) $2y'' + 3y' = 0$ avec $y(0) = 2$ et $y'(0) = -1$
e) $4y'' + 9y = 0$ avec $y(\pi) = 2$ et $y'(\pi) = 0$
f) $y'' = 4y$ avec $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$

g) $4y'' + 4y' + 65y = 0$ avec $y(0)=1$ et $y'(0) = -1/2$.

h) $y'' + 2y' + y = 0$ avec $y(1)=0$ et $y'(0) = 1$.

i) $y'' - y' - 2y = 0$ avec $y(0)=2$ et $y'(0) = 1$.

Exercice2

Résoudre sur IR l'équation différentielle : $y'' - 4y' + 4y = 0$

Déterminer la fonction f solution de cette équation dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées (0;1) et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice3

1) *Donner la solution générale sur IR de l'équation différentielle* $9y'' + 4y = 0$.

2) *Déterminer la solution particulière f, dont la courbe représentative dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *passe par le point de coordonnées* $\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{3}\right)$ *et admet en ce point une tangente de coefficient directeur* $-\frac{2}{3}$.

3) *Montrer que pour tout x de R, on a l'égalité :* $f(x) = 2\cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$.

4) *Résoudre l'équation f(x) = 0 et placer les extrémités des arcs solutions sur le cercle trigonométrique.*

Exercice4

Soit (E) l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$.

1) *Quelles sont les solutions de (E) ?*

2) *Quelle est la solution de (E) dont la courbe représentative C admet au point d'abscisse x = 0 la même tangente que la courbe C' représentative de* $y = e^{3x}$ *? (On dit que C et C' sont tangentes).*

3) *Représenter dans un même repère les courbes C et C', dont on précisera les positions relatives.*

d) *m étant un réel strictement positif, soit* h_m *les fonctions telles que :*
$h_m(x) = -m^2e^x + 2me^{2x}$. *Montrer que* h_m *est solution de (E).*

4) *Soit* C_m *la courbe représentative de* h_m. *Montrer que les courbes* C_m *et C' sont tangentes et préciser les positions relatives de ces deux courbes.*

Exercice5

Soit θ *un nombre réel tel que* $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$.

1) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $z^2 \cos^2 \theta - 2z \sin \theta \cos \theta + 1 = 0$.

Déterminer le module et un argument des solutions éventuelles de cette équation.

2) *Résoudre l'équation différentielle* $(1 + \cos 2\theta)\, y'' - (2 \sin 2\theta)\, y' + 2y = 0$.

Exercice6

Trouver des fonctions vérifiant l'équation différentielle $y^2 + y'^2 = 1$.

Indication : dériver d'abord les deux membres, puis résoudre l'équation obtenue et vérifier si les solutions conviennent.

Exercice7

On se propose de chercher les fonctions f de IR dans IR telles que pour tout x de R on ait :

(1) $f''(x) - 4f'(x) + 3f(x) = 6x^2+5x$.

1) *On désigne par g une fonction polynôme définie par* $g(x) = ax^2 + bx + c$, *où a, b et c sont des réels. Déterminer a, b et c pour que, pour tout x réel, on ait :*

$$g''(x) - 4g'(x) + 3g(x) = 6x^2+5x.$$

2) *On pose* $F = f - g$. *Montrer que f est solution de (1) si et seulement F est solution de l'équation*

(2) : $F'' - 4F' + 3F = 0$.

3) *Résoudre l'équation (2) et en déduire les solutions f qui satisfont à (1).*

Exercice8

1) *Résoudre l'équation différentielle (E) :* $y'' + 4y = 0$

2) *Soit (E1) l'équation différentielle :* $y'' + 4y = 3 \cos 2x$. *Montrer que (E1) admet une solution particulière* f_1 *du type* $f_1(x) = k\, x \sin 2x$ *(k : constante réelle).*

3) *Montrer que les fonctions* $g = f + f_1$ *, où f est une solution quelconque de (E), sont solutions de (E1).*

Exercice9

1) *Résoudre l'équation différentielle* $y'' - y = 0$ *avec* $y(0) = a$ *et* $y'(0) = b$. *Soit f la solution.*

2) *Chercher* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ *en fonction de a et de b.*

Exercice10

1) *Résoudre l'équation différentielle E :* $y'+2y=0$

2) *Soit l'équation différentielle E' :* $y'+2y=x$.

a) *Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur IR par* $g(x) = ax + b$ *soit solution de E'.*
b) *En posant dans E'* $y = z + g$, *montrer que z est solution de E. En déduire les solutions de E'.*

c) Déterminer la solution f de E' qui vérifie $f(0)=\frac{3}{4}$

3) Etudier les variations de la fonction f définie sur IR par $f(x)=e^{-2x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ *(on ne demande pas d'étude de limites).*

4) a) Montrer que la fonction F définie par $F(x)=-(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})e^{-2x}$ *est une primitive de la fonction définie par* $x \to xe^{-2x}$

b) Montrer que $f^2(x)=e^{-4x}+xe^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}$.

c) Calculer $\int_0^1 f^2(x)dx$

Exercice11

Considérons les deux équations différentielles : $E_1 : y'-2y=0$, $E_2 : y'=y$

1) Résoudre E_1 *et* E_2.

Déterminer la solution particulière f_1 *de* E_1 *telle que* $f'_1(0)=4$.

Déterminer la solution particulière f_2 *de* E_2 *telle que* $f_2(0)=1$.

2) Soit f définie sur IR par $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. *Résoudre dans IRl'équation :* $f(x) = 0$.

3) Etudier les variations de la fonction g définie sur IR par $g(x)=2e^{2x}-e^{x}$. *On précisera les coordonnées des points d'intersection de la courbe de g avec les axes du repère.*

4) Etudier les limites de g en $-\infty$ *et* $+\infty$ *(On pourra écrire, en justifiant, que* $g(x)=e^{x}(2e^{x}-1)$.

Exercice12

1) Résoudre l'équation différentielle E : $y''+\frac{1}{9}y=0$.

2) a) Déterminer la fonction f, solution particulière de E, telle que $f(0)=-\sqrt{3}$ *et* $f(\frac{3\pi}{2})=1$.

b) Déterminer un réel positif R et un réel φ *appartenant à* $]-\pi ; \pi]$ *tel que l'on ait pour tout réel x* $f(x)=R\cos(\frac{1}{3}x+\varphi)$.

3) Déterminer la fonction g, solution particulière de E, telle que $g(0)=2$ *et* $g(\frac{3\pi}{2})=0$.

4) Résoudre dans IR l'équation f(x) = g(x).

Exercice13

1) Résoudre sur IR l'équation différentielle (E_1) : $y'' = \sin x$.

2) Résoudre sur$]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle (E_2) : $y' = 1 + tan^2 x$. Déterminer la solution de (E_2) vérifiant y(0) = 1.

3) Résoudre sur IR l'équation différentielle (E_3) : $y'' = e^{-3x}$. Déterminer la solution de (E_3) vérifiant la solution $y(0) = \frac{10}{9}$ et $y'(0) = \frac{5}{3}$.

Exercice 14

Résoudre dans IR les équations différentielles suivantes.

1) $4y' + 3y = 0$ 2) $3y + 5y' = 0$ 3) $y' - 3y = 0$

4) $y'' - 4y' + 4y = 0$ 5) $y'' - 4y' + 3y = 0$ 6) $y'' + y' + y = 0$

7) $y'' + 2y' + 5y = 0$, *déterminer la solution vérifiant* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = -1$.

8) $y'' + y = 0$, *déterminer la solution vérifiant* $y(\frac{\pi}{2}) = 3$ *et* $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Exercice 15

Soient les deux équations différentielles

$$y'' - y' - 6y = 0 \qquad (1)$$

$$y'' - y' - 6y = -6x - 1 \qquad (2)$$

1) Résoudre l'équation (1).

2) Montrer que la fonction g définie par g(x) = x est solution de (2).

3) Montrer qu'une fonction h est solution de (2) si, et seulement si, h – g est solution de (1).

En déduire la fonction h solution de (2) vérifiant h(1) = 2 et $h'(1) = 4$.

Exercice 16

Soient les équations différentielles suivantes

$$y' + 2y = 0 \quad (1) \qquad\qquad y' + 2y = e^{-2x} \quad (2)$$

1) Résoudre l'équation (1).

2) Monter que la fonction g définie par g(x) = (x + 1)e^{-2x} est solution de (2).

3) Montrer qu'une fonction h est solution de (2) si, et seulement si, h – g est solution de (1).

En déduire la solution h, solution de (2), qui vérifie h(0) = 3.

Exercice 17

1) Déterminer la solution f de l'équation différentielle $9f'' + f = 0$ *sachant que :*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 0 \quad et \quad \int_0^{\pi} f(x)dx = 3$$

2) Résoudre l'équation différentielle : $(m-1)y'' + y' - 2y = 0$ *où m désigne un paramètre réel.*

3) Résoudre dans IR les équations différentielles suivantes :

a) $xy' = 1$ b) $y' + x + \sin x = 0$ c) $(x^2 + 1)y' = x$

Exercice 18

Soient les équations différentielles suivantes:

$$y'' + 6y' + 9y = 0 \quad (1) \qquad y'' + 6y' + 9y = \sin x \quad (2)$$

1) Soit f définie par f(x) = a sin x + b cos x, a et b ∈ IR. Déterminer a et b pour que f soit solution de (2).

2) Montrer qu'une fonction h est solution de (2) si, et seulement si, h – f est solution de (1).

En déduire la solution h de (2) qui vérifie h(0) = 0 et $h'(0) = 0$.

Exercice 19

1) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' - 3y' - 4y = 0$

avec pour conditions initiales y(0) = 2 et $y'(0) = 4$.

2)Résoudre l'équation différentielle (E) : $4y'' + 4y' + 65y = 0$

avec pour conditions initiales y(0) = 1 et $y'(0) = -\frac{1}{2}$.

3) Soient les équations différentielles suivantes :

(E_1): $y'' - 4y' + 7y = 2\cos 2x$. (E_2): $y'' - 4y' + 7y = 0$.

a) Déterminer a et b pour que g(x) = acos 2x + bsin 2x soit solution de (E_1).

b) Démontrer qu'une fonction h est solution de (E_1) <=> *(h – g) est solution de* (E_2).

c) En déduire les solutions de (E_1).

4) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $xy' = 3$ b) $y' + 2x + 3\sin x = 0$ c) $(x^2 + 1)y' = 6x$

Exercice 20

On considère l'équation différentielle (E) : $y - y' = \frac{e^{-x}}{x^2}$ *, et on cherche les solutions de cette équation définies sur l'intervalle]0 ; +∞[.*

1) Démontrer que la fonction u *définie par* $u(x) = \frac{e^x}{x}$ *est solution de (E).*

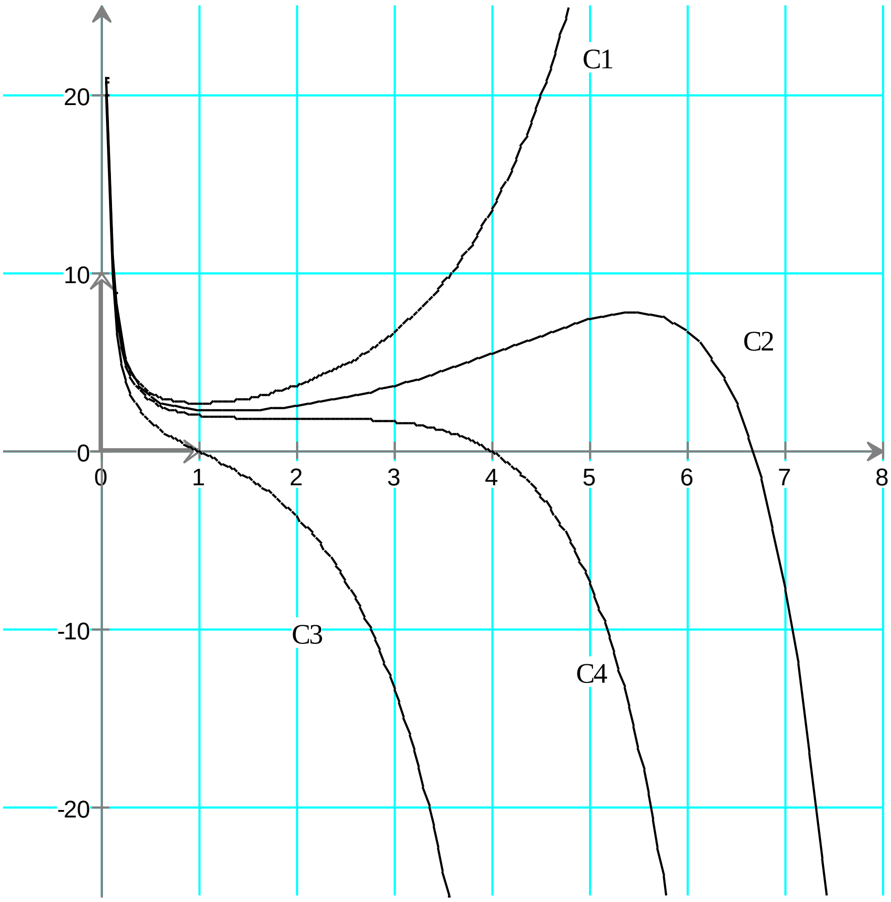
2) *Montrer qu'une fonction* v *est solution de (E) si et seulement si la fonction* h *définie par* $h(x) = v(x) - \frac{e^x}{x}$ *vérifie l'équation :* $h' - h = 0$. *En déduire les solutions de l'équation (E) définies sur* $]0\,;+\infty[$

3) *Pour tout réel* k *négatif ou nul, on considère la fonction* f_k *définie sur* $]0\,;+\infty[$ *par* $f_k(x) = \frac{kx+1}{x}e^x$.

   Déterminer les limites de f_k *en 0 et en* $+\infty$.

4) *Calculer la dérivée de* f_k. *Déterminer, suivant les valeurs de* k *le nombre de solutions à l'équation* $f_k'(x) = 0$.

5) *Sur la figure ci-dessous, on a représenté les fonctions* $f_0, f_{-1}, f_{-0,25}, f_{-0,15}$. *A l'aide de la question 4, expliquer quelle courbe correspond à quelle fonction.*



Exercice 21

1) *Résoudre l'équation différentielle (E) :* $y'' + 2y' + y = 0$

2) *Soit* (E') *l'équation différentielle :* $y'' + 2y' + y = x + 3$

   Déterminer les réels a et b tels que la fonction h définie par h(x) = a x + b soit solution de (E').

3a) *Démontrer que g est solution de* (E') *si et seulement si g – h est solution de (E).*

 b) *Résoudre alors* (E') .

 c) *Déterminer la solution f de (E) telle que : f(0) = 2 et* $f'(0) = -1$.

4) *Soit k la fonction définie par* $k(x) = (x + 2)\,e^{-x}$. *Etudier les variations de k.*

a) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (τ) *de k au point d'abscisse 0.*

b) Démontrer que le point I(0 ; 2) est un point d'inflexion de la courbe (τ) *.*

c) Tracer (τ) *et (T) dans le plan muni d'un repère orthonormé* $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Exercice 22

1) Résoudre les équations différentielles ci-dessous avec les conditions initiales imposées :

a) $y'' - 2y' + 5y = 0$, *y(0) = 1 et* $y'(0) = 3$ *b)* $5y' + y = 0$, *y(-5) = 0*

2) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $x^3\, y' = 1 + x$ *b)* $(x^4 + 1)y' = x^3$ *c)* $y' + e^{-x} + \cos x = 3x^3 + 5$

3) Résoudre l'équation différentielle ci-dessous où m désigne un paramètre réel :

$$my'' + (m-1)y' - y = 0$$

4) Soit l'équation différentielle (E) : $-\frac{1}{2}\, y'' + \frac{3}{2}\, y' - y = 0.$

Déterminer la solution g de (E) dont la courbe représentative (C) passe par le point A(0 ; -1) et dont la tangente en ce point est parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 23

Résoudre dans IR les équations différentielles suivantes :

a) $y' + 2y = 0$ *b)* $y' - 4 = 0$ *c)* $3y' - y = 0$

d) $y'' - y' - 2y = 0$ *e)* $2y'' - 12y' + 18 = 0$ *f)* $-y'' + y' - y = 0$

g) $4y'' + 6y = 0$

Exercice 24

Résoudre dans IR les équations différentielles ci-dessous avec des conditions initiales imposées.

a) $-y' + 2y = 0$; $y(3) = -2.$

b) $2y'' + 3y' - 2 = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 3.$

c) $3y'' - 2y' + 7y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = -1.$

d) $25y'' + y = 0$; $y(\pi) = 2$; $y'(0) = -1$

Exercice 25

1) Résoudre l'équation différentielle : $y' - 0,5y = 0$.

Déterminer la solution qui prend la valeur e^{-1} *pour* $x = 1$.

2) Soit la fonction f définie par $f(x) = e^{0,5x - 1,5}$

Calculer à l'aide d'une intégration par partie : $\int_0^1 x\, f(x)dx$

3) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + y = 0$.

4) Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant $f(0) = 1$ *et* $f'(0) = \sqrt{3}$.

5) Résoudre :

a) dans IR : $f(x) + \sqrt{2} = 0$

b) dans $[0 ;2\pi[$: $f(x) + \sqrt{2} = 0$

Exercice 26

Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$ *sachant que sa representation graphique passe par* $A(0;4)$ *et la tangente à cette courbe au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses.*

Exercice 27

On donne l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 0 \qquad (E)$

On pose : pour tout nombre réel x : $h(x) = e^x\, k(x)$

1) *Démontrer que k est solution de (E) si et seulement si , pour tout nombre réel x,* $h''(x) = 0$.
2) *Résoudre l'équation différentielle* $h''(x) = 0$.
3) *En déduire les solutions de (E) .*

SUITES NUMÉRIQUES

I) Rappel

1) Définition

On appelle suite numérique à valeur réelle toute fonction d'un sous ensemble I de IN vers IR .

$$u: \ I \ \to IR$$
$$n \to u(n)$$

- ***L'image de n par la suite u est noté*** $u_n = u(n)$ ***.***
- u_n ***est appelé le terme général de la suite u .***
- ***n est appelé l'indice ou le rang du terme*** u_n ***.***
- ***L'ensemble I est appelé l'ensemble des indices de la suite u .***
- ***La suite u se note*** $(u_n)_{n \in I}$ ***.***

Exemple

1) $u: \ IN\backslash\{0\} \ \to IR$

$$n \to \frac{2n^2+1}{n}$$

2) $u: \ IN \ \to IR$

$$n \to n^3 + 4n$$

2) Autres definitions d'une suite

- ***Une suite peut être définie par une relation fonctionnelle***

Soit la suite $(u_n)_{n \in IN}$ ***définie par*** $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$

On a $u_n = f(n)$ ***avec*** $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

- ***Une suite peut être définie à l'aide de son premier terme et d'une relation de récurrence***

Soit la suite $(u_n)_{n \in IN}$ ***définie par*** $u_n = \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \ ; \ n \geq 0 \end{cases}$

3) Principe du raisonnement par récurrence

Pour démontrer qu'une proposition P(n) qui concerne un entier naturel n est vraie pour tout $n \geq n_0$ ***, on procède en deux étapes :***

- ***On démontre P(*** n_0 ***) est vraie .***
- ***On démontre que pour tout entier naturel*** $k \geq n_0$ ***, si P (k) est vraie alors P(k + 1) est vraie .***

Exercice d'application

Soit $S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \qquad n\text{-}1 + n$

Montrer que par récurrence que $S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall \ n \geq 1$

Solution

Montrons que la relation est vraie pour n = 1

On a $S_n = 1$ *et pour n = 1* $S_1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ *donc la relation est vraie pour n = 1 .*

Soit k un entier naturel tel que k ≥ 1 .

Supposons que la relation est vraie au rang k c'est-à-dire $S_k = \frac{k\,(k+1)}{2}$

Montrons que la relation est vraie au rang k + 1

$S_{k+1} = 1 + 2 + 3 + 4 + \qquad k-1 + k + k + 1$

Donc $S_{k+1} = S_k + k + 1$ *or* $S_k = \frac{k\,(k+1)}{2}$

$S_{k+1} = \frac{k\,(k+1)}{2} + k + 1 = k + 1\,(\frac{k}{2} + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ *donc la relation est vraie au rang k + 1 .*

$\boxed{D'où\ \ n \geq 1\ ,\ \ S_n = \frac{n\,(n+1)}{2}}$

4) *Monotonie d'une suite*

Soit u une suite numérique et n_0 un entier naturel .

- ***u est croissante à partir du rang n_0 si et seulement si*** $\forall\, n \geq n_0\ ,\ u_{n+1} \geq u_n$
- ***u est strictement croissante à partir du rang n_0 si et seulement si*** $\forall\, n \geq n_0\ ,\ u_{n+1} > u_n$
- ***uest décroissante à partir du rang n_0 si et seulement si*** $\forall\, n \geq n_0\ ,\ u_{n+1} \leq u_n$
- ***u est strictement décroissante à partir du rang n_0 si et seulement si*** $\forall\, n \geq n_0\ ,\ u_{n+1} < u_n$
- ***u est constante à partir du rang n_0 si et seulement si*** $\forall\, n \geq n_0\ ,\ u_{n+1} = u_n$

5) *Définition*

- ***Une suite est dite monotone lorsqu'elle est ,soit croissante ,soit décroissante .***
- ***Une suite est dite strictement monotone lorsqu'elle est ,soit strictement croissante ,soit strictement décroissante .***

6) *Comment prouver la monotonie d'une suite*

Pour étudier le sens de variation d'une suite numérique U, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- ***On peut chercher le signe de*** $u_{n+1} - u_n$

Exercice d'application

Soit la suite $(u_n)_{n \in IN*}$ *définie par* $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$

Déterminer le sens de variation de la suite u .

Solution

On a $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .. + \frac{1}{n}$

Don c $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .. + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$

$\boxed{On\ a\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0 \quad \forall\ n \geq 1}$

D'où la suite u est strictement croissante .

- ***Si $u_n = f(n)$ où f est une fonction numérique . Alors la suite u et la fonction f ont le même sens de variation .***

Exercice d'application

Soit la suite $(u_n)_{n \in IN}$ définie par $u_n = \frac{3n+2}{2n-1}$

Déterminer le sens de variation de la suite u .

Solution

On a $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$

La fonction f est dérivable sur [1 ; + ∞[et $f'(x) = \frac{3(2x-1) - (3x+2)(2)}{(2x-1)^2} = \frac{-7}{(2x-1)^2}$

$\boxed{\text{On a } f'(x) = \frac{-7}{(2x-1)^2} \quad \text{donc } f'(x) < 0 \quad \forall x \in [1\,;+\infty[}$

Ce qui entraîne que la fonction f est strictement décroissante sur [1 ; + ∞[.

$\boxed{\text{D'où la suite u est strictement décroissante à partir du rang } n = 1}$

- ***Si $\forall\, n \geq n_0$, u_n a un signe constant alors on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1***

1) Si $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors la suite u est strictement croissante .

2) Si $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors la suite u est strictement décroissante .

3) Si $u_n < 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors la suite u est strictement décroissante .

4) Si $u_n < 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors la suite u est strictement croissante .

Exercice d'application

Soit la suite $(u_n)_{n \in IN}$ définie par $u_n = -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

Déterminer le sens de variation de la suite u .

Solution

On a $\forall\, n \in IN$, $u_n < 0$

On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{-2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{-2\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{3}{4}$ et $\frac{3}{4} < 1$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

$\boxed{\text{On a } u_n < 0 \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \quad \text{alors la suite uest strictement croissante}}$

- ***Si $u_{n+1} = f(u_n)$ alors on peut utiliser un raisonnement par récurrence en s'appuyant sur le sens de variation de f .***

Exercice d'application

Soit la suite $(u_n)_{n \in IN}$ définie par $u_n = \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = e^{u_n} \quad , \; n \geq 0 \end{cases}$

Déterminer le sens de variation de la suite u .

Solution

$u_0 = 0$ *et pour n = 0* $u_1 = e^{U_0} = e^0 = 1$ $\boxed{donc\ \ u_1 > u_0}$

Supposons que $u_n > u_{n-1}$

Puisque x $\rightarrow e^x$ *est strictement croissante , on a*

$u_n > u_{n-1}$ *entraîne que* $e^{u_n} > e^{u_{n-1}}$ *or* $u_{n+1} = e^{u_n}$ *et* $u_n = e^{u_{n-1}}$

$\boxed{Donc\ \ u_{n+1} > u_n}$

$\boxed{D'où\ \forall\ n \in IN\ ,\ u_{n+1} > u_n \quad \text{Alors la suite u est strictement croissante}}$

7) Suites bornées

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique .

- ***La suite u est dite majorée s'il existe un nombre réel M tel que pour tout n ∈ I, on a $u_n \leq M$.***
- ***La suite u est dite minorée s'il existe un nombre réel m tel que pour tout n ∈ I, on a $m \leq u_n$.***
- ***suite u est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée . C'est-à-dire qu'ils existent des nombres m et M tels que pour tout n ∈ I, on a $m \leq u_n \leq M$.***

Remarque

- ***On dit que m est un minorant de u et M est un majorant de u .***
- ***Si la suite u est positive alors elle minorée par 0 .***
- ***Si la suite est négative alors elle majorée par 0 .***
- ***Une suite est positive si tous ses termes sont positifs .***
- ***Une suite est négative si tous ses termes sont négatifs .***

Exercice d'application

1) Soit la suite $(u_n)_{n \in IN}$ *définie par* $u_n = \frac{n^2}{n^2+1}$

Démontrer que $0 \leq u_n \leq 1$.

2) Soit la suite $(u_n)_{n \in IN}$ *définie par* $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$

Démontrer que la suite u est bornée **.**

Solution

1) Soit la suite $(u_n)_{n \in IN}$ *définie par* $u_n = \frac{n^2}{n^2+1}$

Démontrons que $0 \leq u_n \leq 1$.

$\forall\ n \in IN\ ,\ n^2 \geq 0$ *et* $n^2 + 1 > 0$ *donc* $\frac{n^2}{n^2+1} \geq 0 \iff u_n \geq 0 \iff \boxed{0 \leq u_n}$

$u_n - 1 = \frac{n^2}{n^2+1} - 1 = \frac{n^2 - n^2 - 1}{n^2+1} = \frac{-1}{n^2+1}$ *or* $\frac{-1}{n^2+1} \leq 0$

Donc $u_n - 1 \leq 0 \iff \boxed{u_n \leq 1}$

$\boxed{\text{On obtient } \quad 0 \leq u_n \quad \text{et } u_n \leq 1 \qquad \text{donc } \; 0 \leq u_n \leq 1}$

Donc la suite u est minorée par 0 et majorée par 1

2) Soit la suite $(u_n)_{n \in IN}$ *définie par* $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$

Démontrons que la suite est bornée **.**

$|u_n| = \left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \quad <=> \quad |u_n| \leq \frac{1}{n^2}$

$n \geq 1 \quad <=> \quad n^2 \geq 1 \quad <=> \quad 1 \geq \frac{1}{n^2} \quad <=> \quad \frac{1}{n^2} \leq 1$

$\boxed{\text{Donc } \; |u_n| \leq \frac{1}{n^2} \leq 1 \quad <=> \quad |u_n| \leq 1 \quad <=> \quad -1 \leq u_n \leq 1}$

Donc la suite u est minorée par – 1 et majorée par 1

7) Suite périodique

Soit $(u_n)_{n \in I}$ ***une suite numérique . La suite u est dite périodique s'il existe un entier naturel p tel que*** $u_{n+p} = u_n \quad \forall \, n \in I$ **.**

La période de u est le plus petit entier naturel p tel que $u_{n+p} = u_n \quad \forall \, n \in I$ **.**

Exercice d'application

Soit la suite $(u_n)_{n \in IN}$ *définie par* $u_n = (-1)^n$

Déterminer la période de la suite u .

Solution

On a $\quad u_n = (-1)^n \quad , \quad u_{n+2} = (-1)^{n+2} = (-1)^n = u_n$

D'où la suite u est périodique de période 2

8) Convergence et divergence

Soit $(u_n)_{n \in I}$ ***une suite numérique .***

- ***La suite u est dite convergente si et seulement si*** $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$ ***avec*** $l \in IR$ ***. On dit que u converge vers l .***
- ***La suite u est dite divergente si et seulement si elle n'est convergente .C'est à dire si et seulement*** $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ***ou*** $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ **.**

Exercice d'application

Étudier la limite de u, v et w définies par :

1) $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ $\qquad$ *2)* $v_n = n - 3 + \frac{1}{n+1}$ $\qquad$ *3)* $w_n = \frac{1-2n}{n+1}$

Solution

Étudions la limite de u, v et w

1) $u_n = 2 - \frac{1}{n}$

$\boldsymbol{lim_{n \to +\infty} u_n = lim_{n \to +\infty}(2 - \frac{1}{n}) = 2}$

La suite u est convergente et elle converge vers 2

2) $v_n = n - 3 + \frac{1}{n+1}$

$\boldsymbol{lim_{n \to +\infty} v_n} = \boldsymbol{lim_{n \to +\infty}}(n - 3 + \frac{1}{n+1}) = +\infty$

La suite v est divergente et elle diverge vers $+\infty$

3) $w_n = \frac{1-2n}{n+1}$

$\boldsymbol{lim_{n \to +\infty} w_n} = \boldsymbol{lim_{n \to +\infty}}(\frac{1-2n}{n+1}) = \boldsymbol{-2}$

La suite w est convergente et elle converge vers - 2

9) ***<u>Théorème de la convergence</u>***

- ***Toute suite croissante et majorée est convergente .***
- ***Toute suite décroissante et minorée est convergente .***

Exercice d'application

Soit la suite $(v_n)_{n \in IN}$ *définie par* $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1) Montrer que v est croissante .

2) Montrer que $\forall\, k \in IN\backslash\{0; 1\}$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2 - k}$.

3) Montrer que $\forall\, k \in IN\backslash\{0; 1\}$, $\frac{1}{k^2 - k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

4) E n déduire que v est bornée .

5) Démontrer que v est convergente .

Solution

Soit la suite $(v_n)_{n \in IN}$ *définie par* $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

On a $v_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + \frac{1}{n^2}$

1) Montrons que v est croissante .

On a $v_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2}$, *donc* $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0 \iff v_{n+1} - v_n \geq 0$

$\iff v_{n+1} \geq v_n$ *d'où la suite v est croissante*

2) Montrons que $\forall\, k \in IN\backslash\{0; 1\}$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2 - k}$.

$\forall\, k \in IN\backslash\{0; 1\}$ *,on a* $k^2 - k \leq k^2$

$k^2 - k \leq k^2 \iff \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2 - k}$

D'où $k \in IN\backslash\{0; 1\}$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2 - k}$

3) Montrons que $\forall\, k \in IN\backslash\{0;1\}$, $\frac{1}{k^2 - k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

On a $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k - k + 1}{k\,(k-1)} = \frac{1}{k^2 - k}$

$\boxed{D'où \quad \forall\, k \in IN\backslash\{0;1\}\ ,\ \frac{1}{k^2 - k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}}$

4) Déduisons que v est bornée .

On a $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n^2}$ $\boxed{donc\ \ v_n \geq 0 <=> 0 \leq v_n}$

On a $\forall\, k \in IN\backslash\{0;1\}$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2 - k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

$\boxed{\textbf{Donc}\ \ \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}}$

$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \quad <=> \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$

$<=> \quad 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$

$\boxed{On\ a\ \ v_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}}$.

$1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$

$= 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$ *après simplification*

On a donc $v_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ *d'où* $v_n \leq 2$ *car* $2 - \frac{1}{n} \leq 2$

$\boxed{On\ a\ \ v_n \leq 2}$

$\boxed{On\ a\ \ 0 \leq v_n \ \ et \ \ v_n \leq 2 \quad donc\ 0 \leq v_n \leq 2}$

5) Démontrons que v est convergente .

D'après les questions précédentes on a ,

La suite v est croissante

La suite v est bornée

Donc d'après le théorème de la convergence la suite v est convergente .

Elle converge vers un nombre réel l qui vérifie 0 ≤ l ≤ 2 .

<u>Propriété</u>

- ***Toute suite croissante et non majorée a pour limite + ∞ .***
- ***Toute suite décroissante et non minorée a pour limite - ∞ .***

<u>10) Suites adjacentes</u>

Deux suites u et v sont adjacentes si et seulement si , l'une est croissante, l'autre est décroissante et la limite de leur différence est égale à 0 . C'est-à-dire

$$\begin{cases} u \text{ est croissante} \\ v \text{ est décroissante} \\ \lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u \text{ est décroissante} \\ v \text{ est croissante} \\ \lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0 \end{cases}$$

11) $\lim_{n\to+\infty} q^n$, $q \in IR$

- $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ ***si*** $q > 1$.
- $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ ***si*** $-1 < q < 1$.
- $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$ ***si*** $q = 1$.
- $\lim_{n\to+\infty} q^n$ ***n'existe pas si*** $q \leq -1$.

Exemple

1) $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ ***car*** $2 > 1$; 2) $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2})^n = 0$ ***car*** $\frac{1}{2} < 1$

3) $\lim_{n\to+\infty}(-\frac{1}{3})^n = 0$ ***car*** $-1 < -\frac{1}{3}$

II) Compléments

1) Propriété de comparaison

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique .

- ***S'il existe une suite (v_n) telle que $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.***
- ***S'il existe une suite (v_n) telle que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.***

Exercice d'application

Soit la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par $u_n = n^2 + \sin n$

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Solution

On a $u_n = n^2 + \sin n$

On a $\forall n \in IN,\ -1 \leq \sin n \leq 1$ *donc* $\sin n \geq -1 \quad \forall n \in IN$

Donc $u_n = n^2 + \sin n \geq n^2 - 1 \iff \boxed{u_n \geq n^2 - 1}$

$\lim_{n\to+\infty}(n^2 - 1) = +\infty$ $\boxed{\text{d'où} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

2) Propriété

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique .

- ***S'ils existent deux suites (v_n) et (w_n) telle que $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$ et $\lim_{n\to+\infty} w_n = l$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.***
  Elle reste valable lorsque $l = +\infty$ ou $l = -\infty$.
- ***S'il existe une suite (v_n) telle que $|u_n - l| \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.***

Exercice d'application

1) *Soit la suite* $(v_n)_{n \in IN*}$ *définie par* $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k}$.

Déterminer la limite de v .

2) *Soit la suite* $(u_n)_{n \in IN*}$ *définie par* $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$.

Déterminer la limite de u .

Solution

1) *Soit la suite* $(v_n)_{n \in IN*}$ *définie par* $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k}$.

Déterminons la limite de v .

Soit k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n$

$$1 \leq k \leq n \quad <=> \quad 1 + n^2 \leq k + n^2 \leq n + n^2 \quad <=> \quad \frac{1}{n + n^2} \leq \frac{1}{k + n^2} \leq \frac{1}{1 + n^2}$$

$$<=> \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n + n^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + n^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + n^2}$$

$$\boxed{<=> \quad \frac{n}{n + n^2} \leq v_n \leq \frac{n}{1 + n^2}}$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n + n^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{1 + n^2} = 0 \quad \text{Donc} \quad \lim_{n \to +\infty} v_n = 0}$$

2) *Soit la suite* $(u_n)_{n \in IN*}$ *définie par* $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$.

Déterminons la limite de u .

$$|u_n| = \left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \quad <=> \quad |u_n| \leq \frac{1}{n^2} \quad <=> \quad |u_n - 0| \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \text{Donc} \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$$

3) <u>Propriété</u>

Soient (u_n) ***et*** (v_n) ***deux suites convergentes .***

Si $u_n \leq v_n$ ***à partir d'un certain rang alors*** $\lim_{n \to +\infty} u_n \leq \lim_{n \to +\infty} v_n$.

4) <u>Image d'une suite par une fonction</u>

Soit f une fonction , D_f ***son domaine de définition et*** (u_n) ***une suite d'éléments de*** D_f .

Si $\lim_{n \to +\infty} u_n = a$ ***et*** $\lim_{x \to a} f(x) = l$ ***alors*** $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = l$.

Exercice d'application

Soit la suite $(v_n)_{n \in IN*}$ *définie par* $v_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

Déterminer la limite de v .

Solution

On a $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = f(u_n)$

$$\boxed{\text{Avec } u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \text{ et } f(x) = e^x}$$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} e^x = e^1 = e$ donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = e$

$$\boxed{\text{D'où } \lim_{n\to+\infty} v_n = e}$$

Remarque

- ***Cette propriété est utilisée pour démontrer qu'une fonction n'a pas de limite .***

Exercice d'application

Montrer que la fonction $f : x \to \cos\frac{1}{x}$ *n'a pas de limite en 0 .*

Solution

On a $f(x) = \cos\frac{1}{x}$

Soient $a_n = \frac{1}{2\pi n}$ et $b_n = \frac{1}{\pi + 2\pi n}$, $n \in IN^*$

$$\boxed{\text{On a } \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = 0}$$

On a $f(a_n) = \cos 2\pi n = 1$ et $f(b_n) = \cos(\pi + 2\pi n) = -1$

Si la fonction f admettait une limite en 0 , on aurait

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = \lim_{x\to 0} f(x) = l}$$

Donc $l = 1$ ou $l = -1$ ce qui est impossible .

$$\boxed{\textbf{D'où la fonction f n'admet pas de limite en 0}}$$

5)Suite arithmétique et Suite géométrique

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Premier terme	u_0	u_0
Raison	r avec $r \in IR$	q avec $q \in IR$
Formule de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Formule explicite	$u_n = u_0 + nr$ $u_n = u_p + (n-p)r$	$u_n = u_0 \times q^n$ $u_n = u_p \times q^{n-p}$
Somme des n premiers termes $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1}$	$\frac{n\ (u_0 + u_{n-1})}{2}$	$u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$ avec $q \neq 1$

Remarque

- Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors :

$$u_n = u_0 + nr$$

- Si le premier terme est u_1 , alors : $u_n = u_1 + (n - 1)\,r$
- Si la suite a pour premier terme u_0 , alors

  la somme $S_n = u_0 + u_1 + \ldots.. + u_n$ vaut : $S_n = \frac{(n+1)\,(u_0 + u_n)}{2}$

- Si la suite a pour premier terme u_1 , alors

  la somme $S_n = u_1 + u_1 + \ldots.. + u_n$ vaut : $S_n = \frac{n\,(u_1 + u_n)}{2}$

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = 2n - 1$ et $u_1 = 1$. Alors (u_n) est une suite arithmétique

car : $u_{n+1} - u_n = 2\,(n+1) - 1 - (2n - 1) = 2n + 2 - 1 - 2n + 1 = 2.$

Donc : $u_{n+1} = u_n + 2$. La raison de la suite est 2 .

La somme des n premiers termes vaut : $u_1 + u_2 \ldots.. + u_n = \frac{n\,(1 + 2n - 1)}{2} = n^2$.

Remarque

- Si la suite géométrique (u_n) a pour premier terme u_0 et pour raison q, alors : $u_n = u_0 \times q^n$
- Si le premier terme est u_1, alors : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$
- Pour toute suite géométrique de raison $q \neq 1$, on a :

  1) $u_0 + u_1 + \ldots.. + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

2) $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \boldsymbol{u_1} \times \dfrac{\boldsymbol{1 - q^n}}{\boldsymbol{1 - q}}$

Exemple

Soit $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2^n}$

S_n *est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison* $\frac{1}{2}$.

$$\text{Donc : } S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Remarque

- *Les résultats concernant les opérations sur les limites de fonctions s'étendent aux limites de suites.*

Exercice d'application

1) *Soit la suite* (u_n) *définie par :* $u_n = \dfrac{3n^3 - 5n^2 + 1}{2n^3 + 1}$

Déterminer la limite de u .

2) *Soit la suite* (v_n) *définie par :* $v_n = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$.

Déterminer la limite de v .

Solution

1) *Soit la suite* (u_n) *définie par :* $u_n = \dfrac{3n^3 - 5n^2 + 1}{2n^3 + 1}$

$$\boxed{\text{Alors } \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{3n^3}{2n^3} = \frac{3}{2}}$$

2) *Soit la suite* (v_n) *définie par :* $v_n = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$.

v_n *est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison* $\frac{1}{3}$.

$$: v_n = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} \quad , \text{ comme } -1 < \frac{1}{3} < 1, \quad \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \text{ . D'où : } \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \text{ .}$$

$$\boxed{\text{Alors } \lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{3}{2}}$$

Remarque **On a les résultats suivants**

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$; $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$; $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$.

Exercice d'application

Le radium 266 est un corps radioactif dont 0,04% des atomes se désintègrent chaque année.

1) En janvier 2000, un objet contient $u_0 = 10$ moles de radium 266, calculer le nombre de moles u_1 que l'objet contient en janvier 2001.

2) Soit u_n le nombre de moles de radium 266 que contient l'objet en janvier 2000 + n.
Exprimer u_n en fonction de n en justifiant ce résultat.

3) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

4) La période d'un élément radioactif est égale au nombre d'années nécessaire à la désintégration de la moitié des atomes du corps. À l'aide de la calculatrice, déterminer la période du radium 266.

Exercice d'application

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{n^2 + (-1)^n}{n^2}$

1) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $1 - \dfrac{1}{n^2} \leq u_n \leq 1 + \dfrac{1}{n^2}$

2) En déduire la limite de la suite (u_n).

Solution

1. Pour tout entier n on a : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

donc $-1 + n^2 \leq (-1)^n + n^2 \leq 1 + n^2$

et $\dfrac{-1 + n^2}{n^2} \leq \dfrac{(-1)^n + n^2}{n^2} \leq \dfrac{1 + n^2}{n^2}$

soit $1 - \dfrac{1}{n^2} \leq u_n \leq 1 + \dfrac{1}{n^2}$

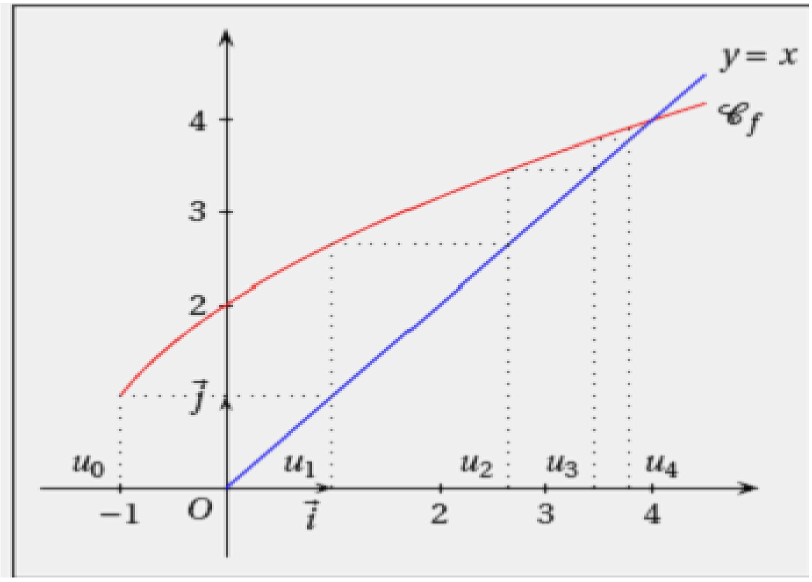
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - \dfrac{1}{n^2}) = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{n^2} = 1$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

6) Étude d'une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f une fonction et (C_f) sa courbe représentative .

Soit (Δ) la droite d'équation : $y = x$.

Si $u_{n+1} = f(u_n)$ alors on construit les premiers termes de la suite à l'aide de (C_f) et de la droite (Δ) .



La représentation des premiers termes de la suite permet de conjecturer (supposer à l'avance) la monotonie, la majoration, la minoration et la convergence de la suite (u_n).

Pour démontrer la monotonie, la majoration et la minoration alors on peut utiliser un raisonnement par récurrence en s'appuyant sur le sens de varition de f .

- ***Si $u_{n+1} = f(u_n)$ et la suite (u_n) converge vers un nombre réel l et la fonction f est***

continue en l alors la limite l est solution de l'équation f(x) = x .

Les solutions de l'équation f(x) = x sont appelées les limites éventuelles de (u_n) .

Exercice d'application

Soit la suite (u_n)$_{n \in IN}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n \left(2 - \frac{u_n}{4}\right) \end{cases}$

Soit f(x) = x (2 - $\frac{x}{4}$). Soit (C_f) sa courbe représentative .

1) Étudier les variations de f et tracer la courbe (C_f) .

2) En déduire la construction des premiers termes de la suite u .

3) Que peut-on conjecturer pour la suite u .

4) Démontrer les comportements observés

5) Déterminer les limites éventuelles de la suite u puis la limite de u .

Solution

Soit la suite (u_n)$_{n \in IN}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n \left(2 - \frac{u_n}{4}\right) \end{cases}$

Soit f(x) = x (2 - $\frac{x}{4}$). Soit (C_f) sa courbe représentative .

Soit (Δ) la droite d'équation : y = x .

1) Étudier les variations de f et tracer la courbe (C_f) .

On a $f(x) = x\left(2 - \frac{x}{4}\right)$.

La fonction f est une fonction polynôme donc elle dérivable sur IR en particulier sur [0 ; + ∞[.

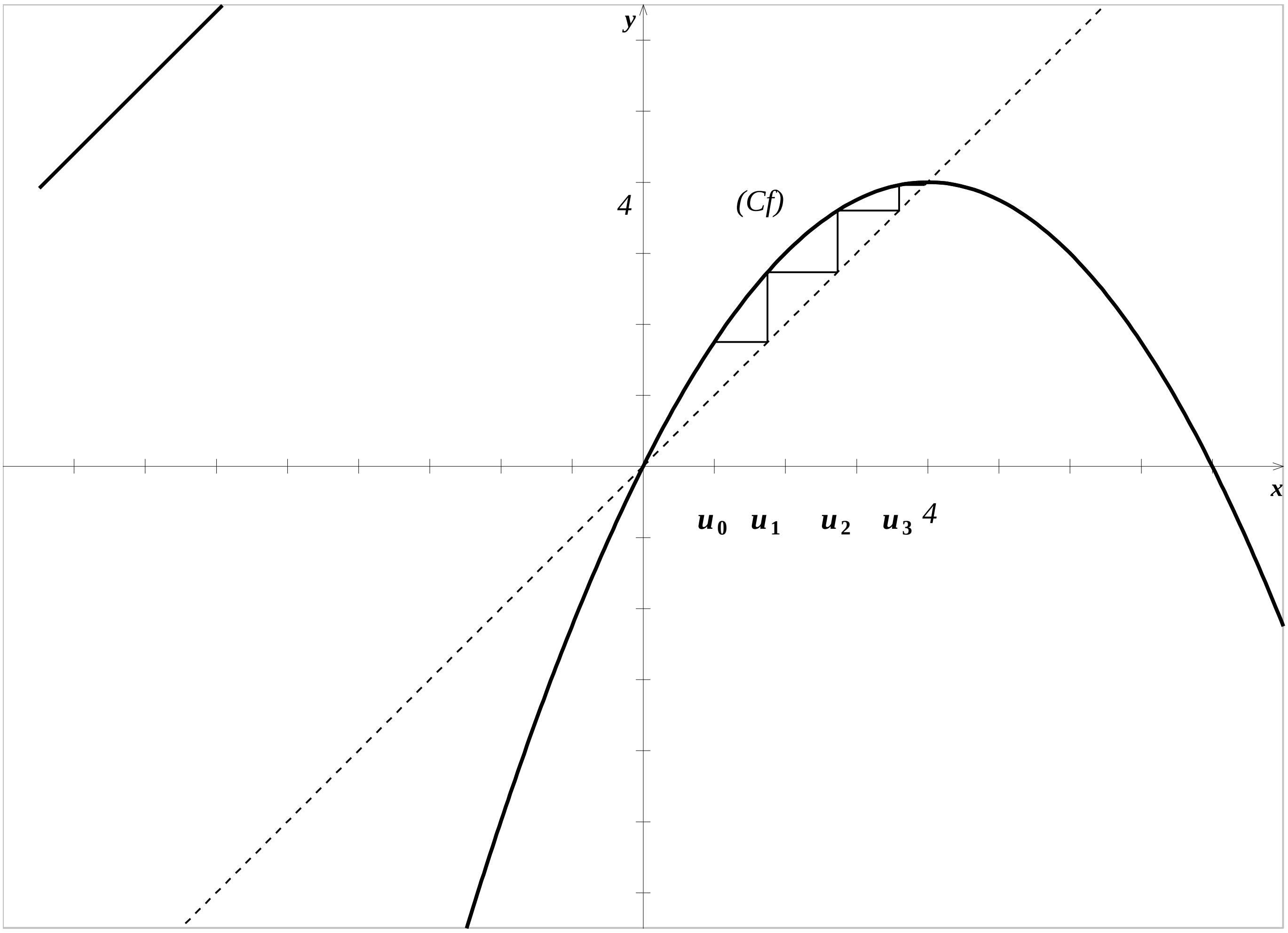
On a $\boldsymbol{f'(x) = 2 - \frac{x}{2} = \frac{4 - x}{2}}$

$\boxed{\textit{Donc } f \textit{ est croissante sur } [0 ; 4] \textit{ et elle décroissante sur } [4 ; +\infty[}$

x	*0*		***4***		+ ∞
$f'(x)$		+	***0***	-	
f(x)	***0*** ↗		***4***	↘	- ∞

$\boxed{\textbf{\textit{La courbe }} (C_f) \textit{ et la droite } (\Delta) \textbf{\textit{ se coupent en A(4 ; 4)}}}$

2) Déduisons la construction des premiers termes de la suite u .



3) Que peut-on conjecturer pour la suite u .

On peut conjecturer que :

a) *la suite u est croissante*
b) $0 \leq \ u_n \ \leq 4$
c) *La suite converge vers 4*

4) Démontrons les comportements observés

a) ***la suite u est croissante***

Montrons par récurrence que $u_{n+1} \ \geq \ u_n$

On a $u_0 = 1$ *et* $u_1 = \ u_0 \ (2 - \ \frac{u_0}{4}) = 1 \ (2 - \frac{1}{4}) = \ \frac{7}{4}$

Donc $u_1 \ \geq \ u_0$ *d'où la relation est vraie au premier rang n = 0 .*

Supposons que la relation est vraie au rang n , c'est-à-dire $u_n \ \geq \ u_{n-1} \quad \forall\ n \in IN$

On a $u_n \ \geq \ u_{n-1}$ *et f est croissante* ***sur [0 ; 4] d'où*** $f(u_n) \ \geq \ f \ (u_{n-1})$

Or $u_{n+1} = f(u_n)$ *et* $u_n = f(u_{n-1})$ *donc on aura* $u_{n+1} \ \geq \ u_n$

Donc la relation est vraie au rang n + 1, donc $u_{n+1} \ \geq \ u_n \quad \forall\ n \in IN$.

Donc la suite u est croissante

b) $\boldsymbol{0 \leq \ u_n \ \leq 4}$

Montrons par récurrence que $0 \leq \ u_n \ \leq 4$

On a $u_0 = 1$ *et* $0 \leq \ u_0 \ \leq 4 \quad <=> \quad 0 \leq \ 1 \ \leq 4$

d'où la relation est vraie au premier rang n = 0 .

Supposons que la relation est vraie au rang n , c'est-à-dire $0 \leq \ u_n \ \leq 4 \quad \forall\ n \in IN$

On a $0 \leq \ u_n \ \leq 4$ *et f est croissante* ***sur [0 ; 4] d'où*** $f(0) \leq \ f \ (u_n \ ) \leq f \ (4 \ )$.

Or $f(0) = 0$ *et* $f(4) = 4$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$

Donc on aura $0 \leq \ u_{n+1} \ \leq 4$

Donc la relation est vraie au rang n + 1, donc $0 \leq \ u_n \ \leq 4 \quad \forall\ n \in IN$

c)La suite converge vers 4

La suite u est croissante et elle est majorée par 4 donc d'après le théorème de la convergence la suite u est convergente .

Elle est convergente donc elle converge vers un nombre réel l avec $0 \leq \ l \ \leq 4$.

La fonction f est continue sur [0 ; + ∞[donc elle est continue en l .

Donc l est solution de l'équation f(x) = x .

Résolvons l'équation f(x) = x . Les solutions de cette équation sont appelées les limites éventuelles de u .

$f(x) = x$ $\iff$ $x\left(2 - \frac{x}{4}\right) = x$ $\iff$ $x - \frac{x^2}{4} = 0$ $\iff$ $x = 0$ ou $x = 4$

$\boxed{\text{Donc les limites éventuelles son : 0 et 4}}$.

D'où $l = 0$ *ou* $l = 4$

Or $0 \leq u_n \leq 4$ *et u est croissante donc* $l = 4$

$\boxed{\text{D'où } \lim_{n \to +\infty} u_n = 4}$

7) *<u>Méthode du point fixe</u>*

La méthode du point fixe est la détermination d'une valeur approchée d'une solution d'une équation en utilisant les suites numériques .

On considère l'équation (E) : ln (x + 3) = x

1) Démontrer que l'équation (E) admet dans [0 ; + ∞[une unique solution α comprise entre 1 et 2 .

2) On désigne par f la fonction x → ln (x + 3) et K = [1 ; 2] .

a) Démontrer que f(K) c K .

b) Démontrer que $\forall x \in K$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

3) Soit la suite $(u_n)_{n \in IN}$ ***définie par*** $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = ln(u_n + 3) \end{cases}$

a) Démontrer par récurrence que $u_n \in K$ $\forall n \in IN$ **.**

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$ **.**

c) Démontrer par récurrence que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}|u_0 - \alpha|$ **.**

d) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} u_n$ **.**

4) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} ***près .***

Solution

On considère l'équation (E) : ln (x + 3) = x

1) Démontrons que l'équation (E) admet dans [0 ; + ∞[une unique solution α comprise entre 1 et 2 .

Posons $g(x) = ln(x + 3) - x$

$ln(x + 3) = x$ $\iff$ $ln(x + 3) - x = 0$ $\iff$ $g(x) = 0$

La fonction g est continue et dérivable sur]- 3 ; + ∞[en particulier sur [0 ; + ∞[

Donc g est continue sur [0 ; + ∞[(1)

On a $g'(x) = \frac{1}{x+3} - 1 = \frac{-x-2}{x+3}$

On a $g'(x) < 0$ $\forall x \in [0 ; +\infty[$ *donc g est strictement décroissante sur [0 ; + ∞[(2)*

On a $g(0) = ln3$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ *et* $-\infty < 0 < ln3$ *(3)*

D'après (1) , (2) et (3) l'éauation g(x) = 0 admet un unique solution $\alpha \in [0 ; +\infty[$

Montrons que α ***est comprise entre 1 et 2 .***

On a g(1) = ln4 - 1 et g(2) = ln5 – 2 et g (α) = 0

On a $\ln 5 - 2 < 0 < \ln 4 - 1$ *donc* $1 < \alpha < 2$

Autrement dit $\alpha \in [1 ; 2]$

2) On désigne par f la fonction x $\rightarrow \ln(x+3)$ *et K = [1 ; 2] .*

a) Démontrons que f(K) c K .

On a f(x) = ln(x + 3) et K = [1 ; 2]

La fonction f est continue sur [1 ; 2] (1)

La fonction f est dérivable sur [1 ; 2] et $f'(x) = \frac{1}{x+3} > 0 \ \forall \ x \in [1 ; 2]$

Donc f est strictement croissante sur [1 ; 2] (2)

D'après (1) et (2) , f est une bijection de [1 ; 2] vers [f(1) ; f(2)]

Donc f([1 ; 2]) c [f(1) ; f(2)]

On a f(1) = ln4 > 1 *et f(2) = ln5* < 2 *donc [f(1) ; f(2)] c[1 ; 2]*

On aura f([1 ; 2]) c [f(1) ; f(2)] c[1 ; 2] donc f([1 ; 2]) c [1 ; 2]

D'où f(K) c K

b) Démontrer que $\forall \ x \in K , \ |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ ***.***

La fonction f est deux fois dérivable sur [1 ; 2] et $f'(x) = \frac{1}{x+3}$

On a $f''(x) = \frac{-1}{(x+3)^2}$ *donc la fonction* f' *est décroissante sur [1 ; 2]*

$x \in [1 ; 2] \iff 1 \leq x \leq 2 \iff f'(2) \leq f'(x) \leq f'(1)$

On a $f'(1) = \frac{1}{4}$ *et* $f'(2) = \frac{1}{5}$ *, on aura* $\frac{1}{5} \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$

De plus $f'(x) \geq 0$ *donc* $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$ *on en déduit que* $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

On donc $\forall \ x \in [1 ; 2] , \ |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

3) Soit la suite $(u_n)_{n \in IN}$ ***définie par*** $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \ln(u_n + 3) \end{cases}$

a) Démontrons par récurrence que $u_n \in K \quad \forall \ n \in IN$ ***.***

On a $u_0 = 1$ *et 1* $\in$ *[1 ; 2] donc la relation est vraie pour n = 0 .*

Supposons que la relation est vraie au rang n c'est-à-dire $u_n \in K$

$u_n \in K \iff f(u_n) \in f(K)$ *or f(K) c K donc* $f(u_n) \in f(K) \subset K$

On a $u_{n+1} = f(u_n)$ *donc* $u_{n+1} \in K$ *d'où la relation est vraie au rang n + 1*

$\boxed{\text{Donc } u_n \in K \quad \forall\, n \in IN}$

$\boxed{\text{Autrement dit } u_n \in [1\,;2]}$

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$ **.**

On sait que $u_n \in [1\,;2]$ *et* $\alpha \in [1\,;2]$ *et* $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction f sur $[\alpha\,; u_n]$ *, on aura*

$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$ *or* $u_{n+1} = f(u_n)$ *et* $f(\alpha) = \alpha$

Donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$

$\boxed{\text{On a } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|}$

c) Démontrer par récurrence que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}|u_0 - \alpha|$ **.**

Pour n = 0 , on a $|u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{4^0}|u_0 - \alpha|$ <=> $|u_0 - \alpha| \leq |u_0 - \alpha|$

Donc la relation est vraie pour n = 0 .

Supposons que la relation est vraie au rang n c'est-à-dire $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}|u_0 - \alpha|$

On a $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$ *donc* $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n}|u_0 - \alpha|$

D'où $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4^{n+1}}|u_0 - \alpha|$ *, la relation est vraie au rang n + 1*

$\boxed{\text{On a donc } |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}|u_0 - \alpha|}$

d) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} u_n$ **.**

On a $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}|u_0 - \alpha|$

On a $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4^n} = 0$ *car* $\frac{1}{4} < 1$

Donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4^n}|u_0 - \alpha| = 0$ *d'où* $\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

$\boxed{\text{On a } \lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha}$

4) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} ***près .***

On a $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}|u_0 - \alpha|$

Déterminons le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}|u_0 - \alpha| \leq 10^{-3}$

O n a $u_0 = 1$ *et* $|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| \leq 1$ *donc* $\frac{1}{4^n} \leq 10^{-3}$

$\frac{1}{4^n} \leq 10^{-3}$ <=> $10^3 \leq 4^n$ <=> $\ln(10^3) \leq \ln(4^n)$

$<=> \quad 3\ln 10 \leq n\ln 4 \quad <=> \quad n \geq \frac{3\ln 10}{\ln 4} \quad <=> \quad \boxed{n \geq 4{,}98}$

Le plus petit entier naturel n qui vérifie n $\geq 4{,}98$ est n = 5

D'où u_5 est la valeur approchée de α à 10^{-3} près

Calculons u_5

On a $u_0 = 1$, $u_1 = \ln(u_0 + 3) = \ln 4 = 1{,}386$

$u_2 = \ln(u_1 + 3) = 1{,}478$

$u_3 = \ln(u_2 + 3) = 1{,}499$

$u_4 = \ln(u_3 + 3) = 1{,}504$

$u_5 = \ln(u_4 + 3) = 1{,}504$ donc $u_5 = 1{,}505$

D'où 1,505 est la valeur approchée de α à 10^{-3} près

8) Propriété

- **Si $\alpha > 0$ alors $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$**
- **Si $\alpha > 0$ et $a > 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$**
- **Si $0 < a < 1$ et $\alpha < 0$ alors $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = +\infty$**

Exemple

1) $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0$ car $2 > 0$

2) $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(\sqrt{n})^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\frac{\ln(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n}}} = +\infty$

Exercice d'application

Étudier la limite des suites u , v et w de termes généraux

$u_n = \frac{\ln n}{n^5}$

$v_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$

$w_n = n^3 - 2^{n+2}$

Solution

Étudions la limite des suites u , v et w

1) $u_n = \frac{\ln n}{n^5}$

On a $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n^5} = 0$ car $5 > 0$, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n^5} = 0}$

2) $v_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$

On a $\quad v_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n} = \frac{1 - (\frac{2}{3})^n}{1 + (\frac{2}{3})^n}$, or $\lim_{n \to +\infty} (\frac{2}{3})^n = 0$ car $\frac{2}{3} < 1$

Donc $\lim_{n \to +\infty} v_n = 1$

$\boxed{\text{On a} \quad \lim_{n \to +\infty} v_n = 1}$

3) $w_n = n^3 - 2^{n+2}$

On a $\quad w_n = n^3 - 2^{n+2} = 2^n \left(\frac{n^3}{2^n} - 4\right)$

Or $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$ car $2 > 1$ et $3 > 0$

On a aussi $\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ car $2 > 1$

Donc $\lim_{n \to +\infty} w_n = +\infty\,(0 - 4) = -\infty$

$\boxed{\text{On a} \quad \lim_{n \to +\infty} w_n = -\infty}$

EXERCICES

Exercice1

On considère la suite (u_n) *définie pour* $n \geq 1$ *par* $u_1 = 1, u_{n+1} = \dfrac{n}{2(n+1)}u_n + \dfrac{3(n+2)}{2(n+1)}$.

1) *Démontrer par récurrence que pour tout* $n \geq 1,\ u_n \geq 0$.
2) *Démontrer que* (u_n) *est majorée par 3*
3) *Démontrer que* (u_n) *est convergente. Déterminer sa limite.*
4) *Cette question est indépendante de la précédente. On définit pour tout entier naturel* n *non nul la suite* (v_n) *par* $v_n = n(3 - u_n)$. *Montrer que* (v_n) *est géométrique de raison* $\dfrac{1}{2}$.
5) *En déduire l'expression de* u_n *en fonction de* n *et retrouver la limite de* (u_n).

Exercice2

Soit la suite $(u_n)_{n \in IN}$ *définie par* $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2 \end{cases}$

Soit f(x) = $\frac{1}{2}x + 2$. *Soit* (C_f) *sa courbe représentative .*

1) Étudier les variations de f et tracer la courbe (C_f) .

2) En déduire la construction des premiers termes de la suite u .

3) Que peut-on conjecturer pour la suite u .

4) Démontrer les comportements observés

5) Déterminer les limites éventuelles de la suite u puis la limite de u .

Exercice3

Soit la suite $(u_n)_{n \in IN}$ *définie par* $\begin{cases} u_0 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$

Soit f(x) = 2 + $\frac{1}{x}$. *Soit* (C_f) *sa courbe représentative .*

1) Étudier les variations de f et tracer la courbe (C_f) .

2) En déduire la construction des premiers termes de la suite u .

3) Que peut-on conjecturer pour la suite u .

4) Démontrer les comportements observés

5) Déterminer les limites éventuelles de la suite u puis la limite de u .

Exercice4

Soit la suite $(u_n)_{n\in IN}$ *définie par* $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = ln(1+u_n) \end{cases}$

Soit f(x) = ln (1 + x) . Soit (C_f) *sa courbe représentative .*

1) Étudier les variations de f et tracer la courbe (C_f) *.*

2) En déduire la construction des premiers termes de la suite u .

3) Que peut-on conjecturer pour la suite u .

4) Démontrer les comportements observés

5) Déterminer les limites éventuelles de la suite u puis la limite de u .

Exercice5

1) *On appelle* $U=(u_n)$ *la suite définie par* $u_n = 4n-10$. *Quelle est la nature de la suite* U *? En préciser les éléments caractéristiques.*
2) *On définit maintenant la suite* $V=(v_n)$ *par* $v_0 = 4, v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 2n - 1$. *Vérifier que* $v_1 = 1$, $v_2 = \frac{3}{2}$, *et donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de* v_{10}.
3) *On pose enfin* $w_n = v_n - u_n$. *Calculer* w_0, w_1, w_2. *Démontrer que la suite* $W=(w_n)$ *est géométrique, en préciser les éléments caractéristiques.*
4) *Donner l'expression de* w_n, *puis de* v_n *en fonction de* n. *Quelle est la limite de* (v_n) *?*
5) *On pose pour tout* n *:* $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$. *Donner l'expression de* S_n *en fonction de* n.

Exercice6

1) *On appelle* f *la fonction définie sur* $]0;+\infty[$ *par* $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$. *Etudier la limite de* f *en 0 et en* $+\infty$. *Montrer que la droite Δ d'équation* $y = \frac{1}{2}x$ *est asymptote à la courbe de* f. *Préciser l'autre asymptote.*
2) *Etudier les variations de* f, *dresser son tableau de variation.*
3) *Représenter, dans un repère orthonormal d'unité 2 cm, la droite Δ, la courbe de* f *ainsi que la droite* D *d'équation* $y = x$.
4) *On définit, pour tout* n, *la suite* $U=(u_n)$ *par* $u_0 = 2, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$. *Calculer* u_1, u_2, u_3. *Représenter les premiers termes de la suite sur le graphique précédent. Quel semble être le sens de variation de* (u_n) *? Sa limite ?*
5) *Dans toute la suite, on admettra que pour tout* n *:* $\sqrt{2} \le u_n \le 2$. *Montrer alors que* (u_n) *est décroissante.*
6) *Montrer que, pour tout* n, $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{2u_n}$.
7) *Montrer que, pour tout* n, $u_{n+1} - \sqrt{2} \le \frac{u_n - \sqrt{2}}{2}$.

8) En déduire que, pour tout n : $u_n - \sqrt{2} \leq \dfrac{u_0 - \sqrt{2}}{2^n}$ et la limite de (u_n).

Remarque culturelle : cette suite s'appelle suite de Babylone. Elle était connue il y a 3000 ans par les Babyloniens, et elle a la propriété de converger très vite vers sa limite. Elle était utilisée pour donner une valeur approchée de $\sqrt{a}$ (en prenant $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$ bien sûr).

Exercice7

1) On appelle f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x+3}{x+2}$. Etudier les variations de f. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
2) Construire dans le repère ci-dessous la courbe représentative de f ainsi que la droite d'équation $y = x$.
3) On appelle (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 3}{u_n + 2} \end{cases}$. Calculer u_1, u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
4) Représenter les premiers termes de la suite (u_n) à l'aide du graphique de la question 2. Quel semble être le sens de variation de (u_n) ? Sa limite ?
5) Pour tout entier n, on pose $v_n = \dfrac{u_n + 1}{3 - u_n}$. Calculer v_0, v_1, v_2.
6) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 5.
7) En déduire l'expression de (v_n) puis de (u_n) en fonction de n (on pourra démontrer que $u_n = \dfrac{3v_n - 1}{v_n + 1}$)

Exercice8

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par son premier terme u_0 et par la condition :

pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.

1) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

2) Démontrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

3) Démontrer que si $u_0 + u_0^2 > 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

4) Démontrer par récurrence que si $u_0 + u_0^2 < 0$, alors pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $-1 < u_n < 0$.

Conclure sur la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice9

1) *Prouver que si a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, il en est de même pour $a^2 - bc$, $b^2 - ca$, $c^2 - ab$, et aussi pour $b^2 + bc + c^2$, $c^2 + ca + a^2$, $a^2 + ab + b^2$.*

Montrer que la réciproque est vraie si $a + b + c \neq 0$.

2) On considère une suite géométrique de premier terme u_1, de raison q, de somme S_n.

a) Calculer q et S_n connaissant $u_1 = 5$, $n = 6$, $u_n = 160$.

b) Calculer u_1 et u_n connaissant $q = \frac{1}{2}$, $n = 6$, $S_n = 63$.

Exercice10

1) Démontrer que pour tout réel $x \geq 0$, et pour tout entier $n \geq 0$, on a : $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

2) On dispose de n boules numérotées de 1 à n. On les place toutes au hasard dans n boîtes (chaque boîte pouvant contenir de 0 à n boules).

On désigne par P_n la probabilité que chaque boîte contienne exactement une boule.

Montrer que $P_n = \frac{n\,!}{n^n}$.

3) En utilisant le 1°, montrer que pour tout entier $n > 0$, on a : $\frac{P_n}{P_{n+1}} \geq 2$.

En déduire que : $P_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

Quelle est la limite de P_n quand n tend vers $+\infty$?

Exercice11

Soit f la fonction définie sur$]0 ; +\infty[$par : $f(x) = x + 1 - 2\ln x$.

1) Calculer $f(\sqrt{e})$.

2) Montrer que pour tout x élément de [1,5 ; 2], $|f'(x)| \leq \frac{1}{3}$.

3) On considère la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(u_n) \quad \forall\, n \in IN \end{cases}$

a) Démontrer par récurrence que pour tout n élément de IN, u_n appartient à [1,5 ; 2].

b)Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour montrer que pour tout entier naturel n

$$|u_{n+1} - \sqrt{e}| \leq \frac{1}{3}|u_n - \sqrt{e}|$$

c)Montrer pour tout $n \in IN$: $|u_n - \sqrt{e}| \leq \frac{1}{2 \times 3^n}$

Déduire que u_4 est une valeur approchée de $\sqrt{e}$ à 10^{-2} près.

Exercice 12

On considère la suite (u_n) *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n} \text{ pourt tout } n \in IN \end{cases}$

On pose f(x) = $\sqrt{4+3x}$*. Etudier les variations de f et tracer* (C_f)*, courbe représentative de f.*

1) *Tracer* (Δ) *: y = x et la construction des premiers termes de la suite.*
   Que peut-on conjecturer pour la suite (u_n).

2) Démontrer les comportements observés.

3) Déterminer les limites éventuelles de (u_n) *et la limite de* (u_n).

Exercice 13 ***extrait du BAC 2009***

1) a) Etudier les variations de la fonction f définie sur]- 1 ; +∞[par f(x) = 2ln(x + 1). Tracer sa courbe représentative (C_f) *dans un repère orthonormé (O ;* $\vec{\imath};\vec{\jmath}$*), unité : 2cm.*

b) Démonter que sur [2 ; +∞[la fonction l, définie par l(x) = f(x) – x, est bijective et l'équation l(x) = 0 admet une unique solution α.

2) On considère la suite $(u_n)_{n\in IN}$ *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2ln(1+u_n) \end{cases}$

a) Sans faire de calcul, représenter les quatre premiers termes de la suite sur le graphique

b) Démontrer que pour tout n , $u_n \geq 2$.

c) Montrer que, pour tout x de l'intervalle [2 ; +∞[, $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

d) En déduire que pour tout n, on a $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n-\alpha|$*, que* $|u_{n+1}-\alpha| \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ *et que la suite* (u_n) *converge vers* α.

e) Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $|u_p-\alpha| \leq 10^{-2}$*. Que représente* u_p *pour* α.

Exercice 14

Soit g la fonction définie sur]0 ; +∞[par : g(x) = x -2 + $\frac{1}{2}$ lnx.

1) Prouver que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution t dans [1 ; 2].

2) Soit f la fonction définie sur I = [1 ; 2] par f(x) = 2 - $\frac{1}{2}$ lnx*. Vérifier que t est l'unique solution de l'équation f(x) = x .*

a) Etudier les variations de f et montrer que , pour tout x de I, on a f(x) est dans I.

b) Montrer que, pour tout x de I, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

3) Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ *et pour tout entier naturel n,* u_{n+1} *= f(*u_n*).*

a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n *est dans I.*

b) Montrer que , pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - t| \leq \frac{1}{2}|u_n - t|$ *et* $|u_n - t| \leq (\frac{1}{2})^n$

Déduire que u converge vers t.

c)Trouver le plus petit entier naturel m tel que $|u_m - t| \leq 10^{-2}$.

Déduire un encadrement de t d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 15

1) Etudier la convergence de la suite u

a) $u_n = \frac{\sin n}{n}$ *b)* $u_n = n^2 + \sin 2n$ *c)* $u_n = \cos^2 n - n\ln n$ *d)* $u_n = \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2}$

2) Déterminer la limite de u

a) $u_n = \frac{1-2n}{n+1}$ *b)* $u_n = \frac{\ln(1+n)}{n^2}$ *c)* $u_n = \frac{2n^2 + n - 3}{5n+4}$ *d)* $u_n = e^{\frac{3-2n}{n-1}}$

e) $u_n = \ln(\frac{n^2 - n + 1}{n^3})$ *f)* $u_n = \sqrt{\frac{5n^2 - 4n - 5}{3n^2 + 2}}$ *g)* $u_n = 2n - \sqrt{4n^2 + 1},\ n \geq 0$

Exercice 16

Soit la suite numérique (u_n) *définie pour tout entier naturel n non nul par :* $u_n = \frac{n(n+1)}{(n+1)^2}$

1) a) Montrer que pour tout entier n, $0 < u_n \leq 1$.

b) Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

c) Calculer la limite de (u_n) *lorsque n tend vers plus l'infini.*

2) On pose $X_n = u_1 \times u_2 \times u_3 \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \times u_n$. *Montrer que* $\forall\ n \in IN^*$, *on a* $X_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

Calculer la limite de X_n *lorsque n tend vers plus l'infini.*

3) On pose $V_n = \ln(u_n)$. *Justifier que la suite* (V_n) *est définie pour tout entier naturel n non nul.*

a) Déduire que la suite (V_n) *est négative.*

b) Montrer que la suite (V_n) *est croissante et* $\lim_{n\to+\infty} V_n$.

4) On pose pour tout entier naturel $n < 0$, $Y_n = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots\ldots\ldots\ldots + V_n$.

Exprimer Y_n *en fonction de* X_n *et* $\lim_{n\to+\infty} Y_n$.

Exercice 17

On considère la suite (U_n) *définie par :* $\begin{cases} U_1 = -2 \\ U_{n+1} = 3U_n + 3, n \geq 1. \end{cases}$

1) Calculer U_2 *et* U_3.

2) On définit la suite (V_n) par $V_n = U_n + 3/2$, $n \geq 1$.

a) Calculer V_1 et V_2.

b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique et préciser le premier terme et la raison.

c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

d) Montrer que (V_n) et (U_n) Sont des suites divergentes.

Exercice 18

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = \dfrac{3}{2}U_n + 1 \end{cases}$

1) Calculer U_2 et U_3.

2) On définit la suite (V_n) définie par $V_n = U_n + 2$.

a) Calculer V_0 et V_1.

b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique et préciser le premier terme et la raison.

c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

Calculer $S_n = V_0 + V_1 + \dots\dots\dots + V_{n-1}$ en fonction de n, puis $S'_n = U_0 + U_1 + \dots\dots + U_{n-1}$

Exercice 19

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1cm. On considère les nombres complexes $a = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$ et $z_0 = 6 + 6i$ d'image A_0. Pour tout entier n *non nul on désigne par A_n le point d'affixe $z_n = a^n z_0$.*

1) *Exprimer z_1 et a^2 sous forme algébrique. Ecrire z_1 sous forme exponentielle et montrer que $a^2 = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.*
2) *Exprimer z_3 puis z_7 en fonction de z_1 et a^2, en déduire l'expression de z_3 et z_7 en forme exponentielle.*
3) *Placer les points A_0, A_1, A_3, A_7, images respectives de z_0, z_1, z_3, z_7.*
4) *On pose maintenant, pour tout entier naturel* n, *$|z_n| = r_n$. Montrer que, pour tout* n, *on a $r_n = 12\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$. En déduire la nature de la suite (r_n) et sa limite. Interpréter le résultat obtenu.*
5) *Déterminer le plus petit entier naturel* p *tel que $OA_p < 10^{-3}$ et donner alors une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OA_p}\right)$*

Exercice 20

On appelle f *la fonction définie sur [0 ; 2] par* $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$.

1) *Etudier les variations de* f *sur [0 ; 2] Montrer que si* $x\in[1;2]$ *alors* $f(x)\in[1;2]$.
2) (u_n) *et* (v_n) *sont deux suites définies respectivement par* $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$, $\begin{cases}v_0=2\\v_{n+1}=f(v_n)\end{cases}$.
   a) *Le graphique donné en annexe représente la courbe de* f *sur [0 ; 2]. Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites* (u_n) *et* (v_n) *en laissant apparents les traits de construction. A partir de ce graphique, quelles conjectures peut-on faire concernant le sens de variation et la convergence des suites* (u_n) *et* (v_n) *?*
   b) *Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :*
   Pour tout entier naturel n, $1\le v_n\le 2$ *et Pour tout entier naturel* n, $v_{n+1}\le v_n$.

   On admettra que l'on a aussi :

   Pour tout entier naturel n, $1\le u_n\le 2$ *et Pour tout entier naturel* n, $u_n\le u_{n+1}$.

   c) *Montrer que pour tout entier naturel* n, $v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{v_n-u_n}{(1+u_n)(1+v_n)}$. *En déduire que pour tout entier naturel* n, $v_n-u_n\ge 0$ *et* $v_{n+1}-u_{n+1}\le\dfrac{1}{4}(v_n-u_n)$.
   d) *Montrer que, pour tout entier naturel* n, $v_n-u_n\le\dfrac{1}{4^n}$.
   e) *En admettant que les suites* (u_n) *et* (v_n) *convergent, montrer qu'elles ont une même limite. Déterminer cette limite.*

Exercice 21

Pour chacune des questions précédentes, plusieurs affirmations sont proposées. Vous devez dire si ces affirmations sont vraies ou fausses, en justifiant votre réponse.

1) *On définit deux suites* (u_n) *et* (v_n) *par* $u_0=1, u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n$ *et* $v_0=1, v_{n+1}=v_n+\dfrac{1}{2^{n+1}}$.

a) (u_n) *est une suite géométrique*
b) (v_n) *est une suite arithmétique*
c) *Pour tout entier naturel* n, $u_0+u_1+...+u_n=2\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$
d) *Pour tout entier naturel* n, $v_n=1+\dfrac{n+1}{2^{n+1}}$
e) (v_n) *a pour limite 2.*

2) *Pour une suite réelle* (u_n) *, on a :*

a) *Si* (u_n) *converge, alors* (u_n^2) *converge.*
b) *Si* (u_n^2) *converge, alors* (u_n) *converge.*
c) *Si* (u_n) *est bornée, alors* (u_n) *converge.*
d) *Si* (u_n) *converge, alors* (u_n) *est bornée.*
e) *Si* (u_n^2) *est bornée, alors* (u_n) *est bornée.*

Exercice 22

n *désigne un entier naturel.*

1) *Rappeler sans démonstration la valeur de* $S_n = 1+2+3+...+(n-1)+n$.
2) *On pose* $T_n = 1^3+2^3+3^3+...+(n-1)^3+n^3$.
   a) *Exprimer* T_n *à l'aide du symbole Σ.*
   b) *Démontrer par récurrence que, pour tout* n, $T_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Exercice 23

Parmi les affirmations suivantes, démontrer celles qui sont vraies et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses.

1) Toute suite croissante est minorée.

2) Aucune suite croissante n'est majorée.

3) Toute suite convergente et majorée est croissante.

4) Si la suite (u_n) *diverge, il en est de même de* $v_n = u_{n+1} - u_n$.

5) Si la suite (u_n) *diverge, il en est de même de* $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

6) Si la suite (u_n) *est croissante, alors* $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

Exercice 24

Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

1) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \quad \forall n \geq 1.$

2) $(5^{2n} + 3n + 8)$ *est divisible par 9* $\forall n \in \mathbb{N}$

Exercice 25

Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par : $f(x) = \frac{1-x}{3} e^x$.

On se propose d'étudier un algorithme d'approximation de la solution a de l'équation $f(x) = x$.

1) Etude de f

a) Etudier le sens de variation de f , et tracer sa courbe représentative (unité : 4 cm).

b) Prouver que l'équation f (x) = x admet une solution a et une seule appartenant à [0 ; 1].

c) Déterminer l'image de [0 ; 1] par f ; en déduire que a appartient à $[0 ; \frac{1}{3}]$.

2) On considère la suite (u_n) *définie par :* $u_{n+1} = f(u_n)$ *et la condition initiale* $u_0 = \frac{1}{3}$.

a) Prouver que, pour tout entier n, u_n appartient à $[0 ; \frac{1}{3}]$.

b) Montrer que $u_1 \leq a$; en déduire que : $| u_0 - a | \leq u_0 - u_1 \leq 2,5 . 10^{-2}$.

c) Etablir, par récurrence sur p, que pour tout p, $u_{2p+1} \leq a \leq u_{2p}$.

3) Convergence de (u_n) vers a .

a) Démontrer que , pour tout élément x de $[0 ; \frac{1}{3}]$, $-0,16 \leq f'(x) \leq 0$;

en déduire que : $| f(x) - f(a) | \leq 0,16 | x - a |$.

b) Prouver que, pour tout entier $n \geq 1$: $| u_n - a | \leq (0,16)^n | u_0 - a |$;

en déduire que (u_n) converge vers a .

c) Calculer une valeur approchée de a à 10^{-3} près.

Déterminer un entier p tel que $| u_p - a | \leq 10^{-12}$ (on ne demande pas de calculer u_p).

Exercice 26

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$ et $f(0) = 0$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 En donner une interprétation graphique.

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2) Soit φ la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $\varphi(x) = \ln x + x + 1$.

Etudier les variations de φ. Etablir que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution β et une seule et que

$0,27 \leq \beta \leq 0,28$ (on ne demande pas de construire la courbe de φ) .

3) Pour $x > 0$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$. En déduire le tableau de variations de f.

4) Déterminer la limite en $+\infty$ de $[\ln x - f(x)]$. Qu'en déduire ?

5) Construire les courbes représentatives $\mathscr{C}$ de f et Γ de $x \mapsto \ln x$ dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) (unité : 4 cm) .

Partie B

On se propose d'étudier l'équation $f(x) = 1$. A cet effet, on introduit la fonction g définie par :

$$g(x) = e . e^{\frac{1}{x}}$$

1) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution α et une seule et que : $3,5 \leq \alpha \leq 3,7$.

Placer le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse α .

2) a) Prouver que l'équation $f(x) = 1$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.

b) Etudier la monotonie de g.

c) Prouver que, pour tout élément x de [3,5 ; 3,7], g (x) appartient aussi à [3,5 ; 3,7] .

d) Etablir que, pour tout élément x de [3,5 ; 3,7], $| g'(x) | \leq | g'(3,5) | \leq \frac{1}{3}$ .En déduire

que : $| g(x) - \alpha | \leq \frac{1}{3} | x - \alpha |$.

3) Soit (u_n) la suite d'éléments de [3,5 ; 3,7] définie par la relation de récurrence

$u_{n+1} = g(u_n)$ et la condition initiale : $u_0 = 3,5$.

a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $| u_n - \alpha | \leq \frac{1}{5} \times \frac{1}{3^n}$. En déduire la limite de (u_n) .

b) Préciser un entier n_0 tel que $\left| u_{n_0} - \alpha \right| \leq 10^{-3}$ et donner la valeur de u_{n_0} .

En déduire une valeur décimale approchée de α à 10^{-3} près.

Partie C

On se propose d'étudier l'équation $f(x) = n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que, pour tout n, cette équation admet une solution α_n et une seule.

(en particulier $\alpha_1 = \alpha$) .

2) <u>Comparaison de α_n à e^n</u>

a) Etablir que $f(e^n) \leq n$. En déduire que : $\alpha_n \geq e^n$.

b) Prouver que la relation $f(\alpha_n) = n$ peut s'écrire sous la forme : $\ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n}$ (1) .

c) En déduire, à l'aide de 1), la limite de $\frac{\alpha_n}{e^n}$ lorsque n tend vers l'infini.

3) <u>Comparaison de α_n à $e^n + n$</u>

On écrit α_n sous la forme : $\alpha_n = e^n(1 + \varepsilon_n)$, où $\varepsilon_n \geq 0$ (2) .

1) A l'aide de (1) , exprimer $(1 + \varepsilon_n) \ln(1 + \varepsilon_n)$ en fonction de n.

2) Etablir que pour $t \geq 0$: $0 \leq (1 + t) \ln(1 + t) - t \leq \frac{t^2}{2}$.

3) Déduire de 1) et 2) que pour tout $n \geq 1$: $\varepsilon_n \leq n\, e^{-n} \leq \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2}{2}$, puis que :

$$0 \leq n\, e^{-n} - \varepsilon_n \leq \frac{n^2}{2}\, e^{-2n} \quad (3) .$$

4) A l'aide de (2) et (3), déterminer la limite de $e^n + n - \alpha_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 27

f est la fonction définie sur] 1 ; + ∞ [par $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1) Prouver que l'équation f (x) = 0 admet une unique solution α dans] 1 ; 2 [.

2) Montrer que l'équation f (x) = 0 a même ensemble de solutions que l'équation $1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x$.

3) Notons g la fonction définie sur] 0 ; + ∞ [par $g(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

a) Montrer que, pour tout x dans] 1 ; + ∞ [$|g'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

b) En déduire que pour tout x dans [1 ; + ∞ [, $|g(x) - \alpha| \leq |x - \alpha|$.

4) On considère la suite (u_n) *définie par* $u_0 = 1$ *et la relation de récurrence :* $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$.

a) Prouver, en utilisant la question précédente que : pour tout n de $\mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

b) En déduire que (u_n) *converge et déterminer sa limite.*

Exercice 28

On donne un réel a > 0 et on considère la suite (u_n) *définie par* $u_0 > 0$ *et, pour tout* $n \geq 1$, *par :*

$u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_{n-1} + \dfrac{a}{u_{n-1}}\right)$ *et la suite* (v_n) *définie, pour* $n \geq 0$, *par :* $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$.

1) a) Calculer, pour n > 0, v_n *en fonction de* v_{n-1}.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0^{2^n}$.

c) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \geq n$.

d) Prouver que $|v_0| \leq 1$.

En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

2) Démontrer que la suite (u_n) *a pour limite* $\sqrt{a}$.

3) On pose $u_n = \sqrt{a}\,(1 + \varepsilon_n)$. *Calculer* ε_{n+1} *en fonction de* ε_n.

Application numérique : On donne a = 2 et $u_0 = 1{,}4$.

Calculer les valeurs décimales approchés à 10^{-4} *près par défaut de* u_1, u_2, u_3.

Donner à l'aide de u_3 *un encadrement de* $\sqrt{2}$.

Exercice 29

Soit n un entier naturel non nul. On considère la suite (u_n) *définie par :* $u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} dt.$

1.a) Soit φ *la fonction définie sur [0 ; 2] par* $\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$.*Etudier les variations de* φ *sur [0 ; 2].*

En déduire que, pour tout réel t dans [0 ; 2], $\frac{3}{2} \leq \varphi(t) \leq \frac{7}{4}$.

b) Montrer que, pour tout réel t dans [0 ; 2], on a : $\frac{3}{2} e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t)e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{7}{4} e^{\frac{t}{n}}$.

c) En déduire que : $\frac{3}{2}\, n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right) \leq u_n \leq \frac{7}{4} n(e^{\frac{2}{n}} - 1)$.

Montrer que, si (u_n) *possède une limite L, alors* $3 \leq L \leq \frac{7}{2}$.

2.a) Vérifier que, pour tout t dans [0 ; 2], on a : $\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$. *En déduire l'intégrale* $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt$.

b) Montrer que, pour tout t dans [0 ; 2], on a : $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$.*En déduire que* $I \leq u_n \leq e^{\frac{t}{n}} I$.

c) Montrer que (u_n) *est convergente et déterminer sa limite L.*

Exercice 30

Montrer que (U_n) *est une suite arithmétique :*

a) $U_n = 2 + 5n$ *b)* $U_n = -3 - n$ *c)* $U_n = U_{n+1} + 3$

Exercice 31

Soit (U_n) *est une suite arithmétique de raison r :*

1) $U_0 = 2$ *et r= -3 ; calculer* U_{10} *et* U_{20}
2) $U_1 = 10$ *et* $U_{10} = 28$ *; calculer r et* U_0
3) $U_{10} = 13$ *et r= -2 ; calculer* U_0 *et* U_{20}

Exercice 32

La suite (U_n) *est une suite arithmétique de premier terme* $U_0 = 1$ *et de raison r= 3/2*

a) *Calculer* U_{20}*, puis la somme* $S = U_0 + U_1 + \cdots + U_{19} + U_{20}$
b) *Calculer* $T = U_5 + U_6 \ldots + U_{25}$

Exercice 33

La suite (U_n) *est définie par :* $\begin{cases} U_1 = 4 \\ U_{n+1} = U_n + 2 \end{cases}$

1) *Quelle est la nature de la suite* (U_n) *?*
2) *Exprimer* U_n *en fonction de n.*
3) *Calculer le centième terme de la suite* (U_n) *.*

Exercice 34

Montrer que les suites (U_n) *sont géométriques :*

a) $U_n = 3^n$ *b)* $U_n = 1{,}5(1{,}03)^n$ *c)* $U_{n+1} - U_n = 1{,}5U_n$

Exercice 35

Soit (U_n) *est une suite géométrique de raison q :*

1) $U_1 = 32$ *et q= 1/4 ; calculer* U_2 *et* U_8
2) $U_0 = 1$ *et* $U_1 = 1/3$*; calculer q et* U_{10}

Exercice 36

La suite (U_n) est une suite géométrique de premier terme $U_0 = 135$ et de raison q=1/3

a) *Calculer* $S = U_0 + U_1 + \cdots + U_{11}$

b) *Calculer* $T = U_5 + U_6 \ldots + U_{20}$

Exercice 37

Soit la suite (U_n) *définie par* $U_0 = -3$ *et pour* $n \in IN$ $U_{n+1} - U_n = U_n$

1) *Déterminer U_{n+1} en fonction de U_n.déduisez en la nature de (U_n).*

2) *Exprimer U_n en fonction de n.*

Exercice 38

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ *et* $(v_n)_{n\geq 0}$ *deux suites numériques tels que* $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} \; \forall n \geq 0 \end{cases}$ *et* $v_n = u_n - 1 \quad \forall n \geq 0$

1) *calculer les cinq 1ers termes des suites* $(u_n)_{n\geq 0}$ *et* $(v_n)_{n\geq 0}$

2) *Montrer que* $(v_n)_{n\geq 0}$ *est une suite géométrique préciser sa raison. En déduire les expressions de* u_n et v_n *en fonction de n.*

3) *Calculer alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Exercice 39

Soit (u_n) *la suite définie par :* $\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$.

Calculer u_1 ; u_2 et u_3.

Soit (v_n) *la suite définie par:* $v_n = u_n - 3$.

Exprimer alors v_{n+1} en fonction de v_n.

En déduire que (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\frac{1}{3}$

Exprimer alors v_n et u_n en fonction de n.

Calculer S_n la somme des n premiers terme de (v_n) *et S'_n la somme des n premiers termes de la suite* (u_n) *en fonction de n.*

Exercice 40

Calculer les sommes suivantes :

$$S = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots\cdots\cdots\cdots + 199 + 201.$$

$$S' = 37 + 48 + 59 + \cdots\cdots\cdots\cdots + 1170 + 1081.$$

Exercice 41

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 8$ et $U_{n+1} = 2U_n - 3$ pour tout $n \in IN$.

1) *Calculer U_1 , U_2 et U_3.*
2) *Soit (V_n) la suite définie pour tout $n \in IN$ par $V_n = U_n - 3$*
   a) *Exprimer V_{n+1} en fonction de U_{n+1} .Puis exprime V_{n+1} en fonction de de U_n.*
   b) *En déduire en fin l'expression de V_{n+1} en fonction de V_n.*
   c) *Quelle est la nature de la suite (V_n) ?*
3) *Donner l'expression de V_n en fonction de n, en déduire l'expression de U_n en fonction de n.*

Exercice 42

On se propose d'étudier la suite u, définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$; $\quad u_n = \frac{e^{u_n}}{u_n + 2}$.

1) *Soit f la fonction de l'intervalle $[0; 1]$ dans IR définie par :*

   $$f(x) = \frac{e^x}{x+2}.$$

   a) *Calculez f '(x) ; f ''(x).*
   b) *Etudiez le sens de variation de f. Quelle est l'image du segment $[0; 1]$ par f ?*
   c) *Démontrez que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ $\frac{1}{4} \le f'(x) < \frac{2}{3}$.*
   d) *Etablissez que l'équation f(x) = x admet une solution unique dans l'intervalle $[0; 1]$.*

4) *a) Prouvez que si la suite u admet une limite L, alors f(L) = L.*

   b) En utilisant le 1.c), démontrez que, pour tout naturel n : $0 \le \frac{u_{n+1} - L}{u_n - L} \le \frac{2}{3}$.

   Déduisez – en que la suite u converge vers L et déterminez un naturel n_0 tel que si $n \ge n_0$ alors $|u_n - L| \le 10^{-3}$.

STATISTIQUES

- ***DÉFINITION DE LA STATISTIQUE***

La classe de Terminale S2 est une classe scientifique tournée vers les sciences expérimentales .En conséquence, les statistiques y prennent une place prépondérante.

La statistique est la science qui a pour objet de collecter des données, de les traiter et de les analyser puis de les interpréter .L'interprétation rigoureuse conduit à une prise de décision .

La statistique comprend trois parties : la statistique descriptive, la statistique inférentielle et la statistique mathématique .

Dans le programme du moyen secondaire, on trouve exclusivement la statistique descriptive étudiée de manière étaler de la quatrième à la terminale .

La statistique est aujourd'hui présente dans beaucoup de domaines : finance, météo, assurance ,banque, sociologie , médecine etc…

- ***INTRODUCTION***

L'étude des séries statistiques à une seule variable s'avère lorsqu'il s'agit de certains phénomènes aléatoires dépendant au moins de deux variables. Dans ce cas, on est contraint d'étudier en même temps les deux variables mises en exergue .

L'objectif est de trouver une liaison éventuelle entre les deux variables étudiées .Dans le cadre du programme de la terminale S2, nous aller cibler notre étude sur les séries doubles à deux variables quantitatives puis d'essayer de trouver une liaison linéaire entre ces deux variables .

Une série statistique à deux variables est appelée une série double .

I) Rappel

1) Moyenne, variance et écart-type

- ***Soit X une variable discrète dont les modalités x_1 , x_2 , x_3 , ……………… . x_p sont d'effectifs α_1 , α_2 , α_3 , ……………… . α_p .***

x_i	x_1	x_2	x_3			x_p
α_i	α_1	α_2	α_3			α_p

On pose $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots\dots\dots + \alpha_p$

On appelle série statistique de X l'ensemble noté $G_X = \{(x_i ; \alpha_i) \ , \ 1 \leq i \leq p\}$.

On appelle moyenne de la série X , le nombre réel noté $\overline{X}$ et défini par $\overline{X} = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{p} x_i\alpha_i$.

On appelle variance de la série X, le nombre réel noté V(X) ou var (X) et défini par

$$V(X) = \overline{X^2} - (\overline{X})^2$$

Avec $\overline{X^2} = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{p} {x_i}^2\alpha_i$

On appelle écart-type de la série X, le nombre réel noté σ_X ou $\delta (X)$ et défini par

$$\delta (X) = \sqrt{V(X)}$$

- ***Soit Y une variable discrète dont les modalités $y_1 , y_2 , y_3 , \dots\dots\dots\dots\dots\dots . y_q$ sont d'effectifs $\beta_1 , \beta_2 , \beta_3 , \dots\dots\dots\dots\dots\dots . \beta_q$.***

y_j	y_1	y_2	y_3			y_q
β_j	β_1	β_2	β_3			β_q

On pose $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \beta_q$

On appelle série statistique de Y l'ensemble noté $G_Y = \{(y_j; \beta_j) , 1 \le j \le q\}$.

On appelle moyenne de la série Y , le nombre réel noté $\overline{Y}$ et défini par $\overline{Y} = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{q} y_j\beta_j$.

On appelle variance de la série Y, le nombre réel noté V(Y) ou var (Y) et défini par

$$V(Y) = \overline{Y^2} - (\overline{Y})^2$$

Avec $\overline{Y^2} = \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{q} {y_j}^2\beta_j$

On appelle écart-type de la série Y, le nombre réel noté σ_Y ou $\delta (Y)$ et défini par

$$\delta (Y) = \sqrt{V(Y)}$$

2) <u>Tableau à double entrée</u>

Le service social d'une entreprise effectue une enquête auprès de son personnel portant sur le nombre d'années d'ancienneté X et le nombre de jours de congé Y .Les observations suivantes sont faites

X \ Y	0	1	2	3	4	5	Total (X)
0	7	1	1	0	0	0	9
1	6	4	15	8	5	3	41
2	0	0	0	1	2	7	10
3	0	0	0	0	0	2	2
Total (Y)	13	5	16	9	7	12	62

LECTURE DU TABLEAU À DOUBLE ENTRÉE

X est le nombre d'années d'ancienneté et Y est le nombre de jours de congé .

- *15 signifie que 15 personnes ont 1 année d'ancienneté et ont pris 2 jours de congé .*

On dit que le couple (1 ; 2) est d'effectif 15.

- *8 signifie que 8 personnes ont 1 année d'ancienneté et ont pris 3 jours de congé .*

On dit que le couple (1 ; 3) est d'effectif 8.

- *0 signifie que 0 personne ont 3 année d'ancienneté et ont pris 4 jours de congé .*

On dit que le couple (3 ; 4) est d'effectif 0.

- *Il y a 62 personnes qui sont concernées par l'enquête effectuée par le service social .*
- *Il y a 41 personnes qui ont 1 année d'ancienneté .*
- *Il y a 7 personnes qui ont pris 4 jours de congé .*

VOCABULAIRE

n_{ij} ***est l'effectif ou effectif partiel du couple*** $\left(x_i ; y_j\right)$ ***:*** n_{ij} ***est le nombre de personnes qui ont la valeur*** x_i ***du caractère X et la valeur*** y_j ***du caractère Y . Pour notre exemple :*** $n_{11} = 7$; $n_{34} = 1$; $n_{23} = 15$ ***etc.***

La somme de tous les effectifs donne l'effectif total n = 62 .

3) <u>Série marginale</u>

Si on extrait de la série statistique l'une des variables de la série double alors on obtient une série marginale .

- ***Sérié marginale de X***

x_i	0	1	2	3
α_i	9	41	10	2

- ***Série marginale de Y***

y_j	0	1	2	3	4	5
β_j	13	5	16	9	7	12

4) <u>Série conditionnelle</u>

- ***Si on veut étudier la répartition du nombre de jours de congé selon les personnes qui ont 1 année d'ancienneté alors on obtient une série conditionnelle***

Y/ X = 1	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$n_{2\,j}$	**6**	**4**	**15**	**8**	**5**	**3**

- ***Si on veut étudier la répartition du nombre d'années d'ancienneté selon les personnes qui ont pris 3 jours de congé***

X / Y = 3	***0***	***1***	***2***	***3***
$n_{i\,4}$	***0***	***8***	***1***	***0***

II) <u>Série double</u>

1) <u>Définition d'une série double</u>

On appelle série double de variables X et Y l'ensemble des triplets $(x_i\,;\,y_j\,;\,n_{ij})$ ***où*** $n_{ij} \neq 0$ ***avec*** n_{ij} ***est l'effectif du couple*** $(x_i\,;y_j)$***. On dit la série double (X ; Y) .***

Exemple

Les triplets (1 ; 2 ; 15) , (1 ; 3 ; 8) et (3 ; 5 ; 2) sont des éléments de la série double (X ; Y) .

2) <u>Représentation graphique d'une série double</u>

La représentation graphique d'une série double s'effectue à l'aide d'un nuage de points .

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, le nuage de points est l'ensemble des couples $(x_i\,;\,y_j)$ ***tels que*** $n_{ij} \neq 0$ ***avec*** n_{ij} ***est l'effectif du couple*** $(x_i\,;y_j)$***. Au dessus de chaque point du nuage on précise l'effectif*** n_{ij} ***.***

Exercice d'application

À partir du tableau à double entrée précédent , représenter le nuage de points de la série double (X ; Y).

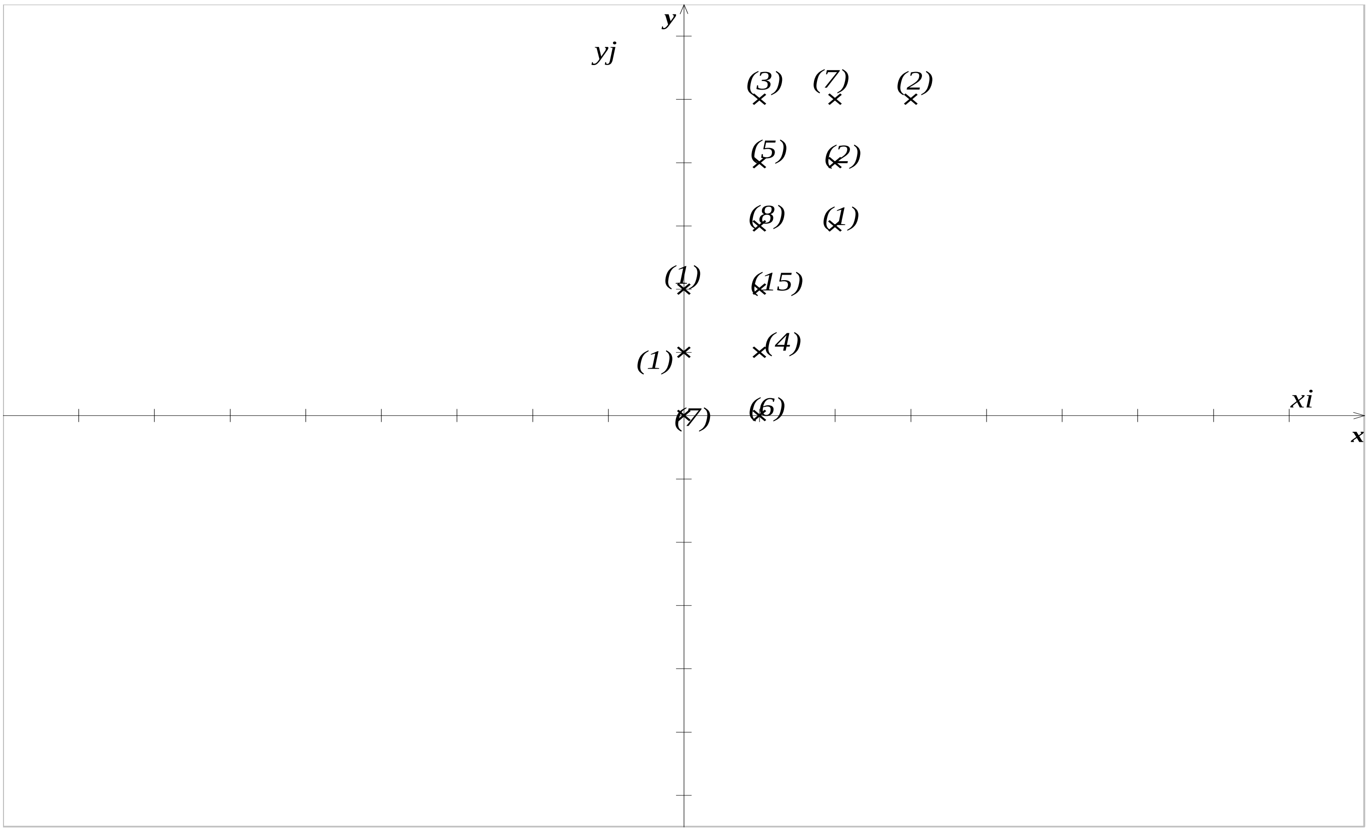
Solution

Les éléments de la série double sont (1 ; 2 ; 15) , (1 ; 3 ; 8) , (3 ; 5 ; 2) , (1 ; 0 ; 6) , (0 ; 0 ; 7) ,

(0 ; 1 ; 1), (0 ; 2 ; 1) , (1 ; 1 ; 4) , (1 ; 4 ; 5) , (1 ; 5 ; 3) , (2 ; 3 ; 1) , (2 ; 4 ; 1) , (3 ; 5 ; 2)

Il faut placer les points de coordonnées (1 ; 2) , (1 ; 3) , (3 ; 5) , (1 ; 0), (0 ; 0) ,

(0 ; 1), (0 ; 2) , (1 ; 1) , (1 ; 4) , (1 ; 5) , (2 ; 3) , (2 ; 4) , (3 ; 5) en mettant au dessus de chaque point son effectif .



3) <u>Point moyen</u>

Le point moyen G d'un nuage de points associé à une série double (X, Y) est le point de coordonnées

($\overline{X}$; $\overline{Y}$) où $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont les moyennes respectives des variables X et Y .

4) <u>Covariance d'une série double</u>

On appelle covariance d'une série double d'effectif n et de variables X et Y le nombre réel

noté COV(X, Y) et défini par $COV(X, Y) = \frac{1}{n}\sum n_{ij}\, x_i\, y_j - \overline{X}\,\overline{Y}$

On a $\overline{XY} = \frac{1}{n}\sum n_{ij}\, x_i\, y_j$

On obtient ainsi la formule pratique de la covariance

$$COV(X, Y) = \overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}$$

On dit que la covariance est égale à la moyenne du produit moins le produit des moyennes .

- ***COV(X, Y) est souvent notée*** σ_{XY} .
- ***La covariance peut être positive ou négative .***

5) <u>Tableau linéaire ou cas particulier d'une série double injective</u>

On appelle une série double injective une série double (X ; Y) telle qu'à chaque valeur de la variable X, correspond une seule valeur de la variable Y.

Exemple

Le tableau suivant indique X le chiffre d'affaire en millions d'une entreprise et Y le budget en publicité en millions

X	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Y	*20*	*25*	*28*	*30*	*32*	*36*	*40*

- *(1 ; 20) signifie que pour un budget en publicité d'un million ,on a un chiffre d'affaire de 20 millions .*
- *(4 ; 30) signifie que pour un budget en publicité de 4 millions ,on a un chiffre d'affaire de 30 millions*
- *(7 ; 40) signifie que pour un budget en publicité de 7 millions ,on a un chiffre d'affaire de 40 millions*

Exercice d'application

Le tableau suivant indique X le chiffre d'affaire en millions d'une entreprise et Y le budget en publicité en millions

X	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Y	*20*	*25*	*28*	*30*	*32*	*36*	*40*

Représenter le nuage de points de la série double (X ; Y) .

Solution

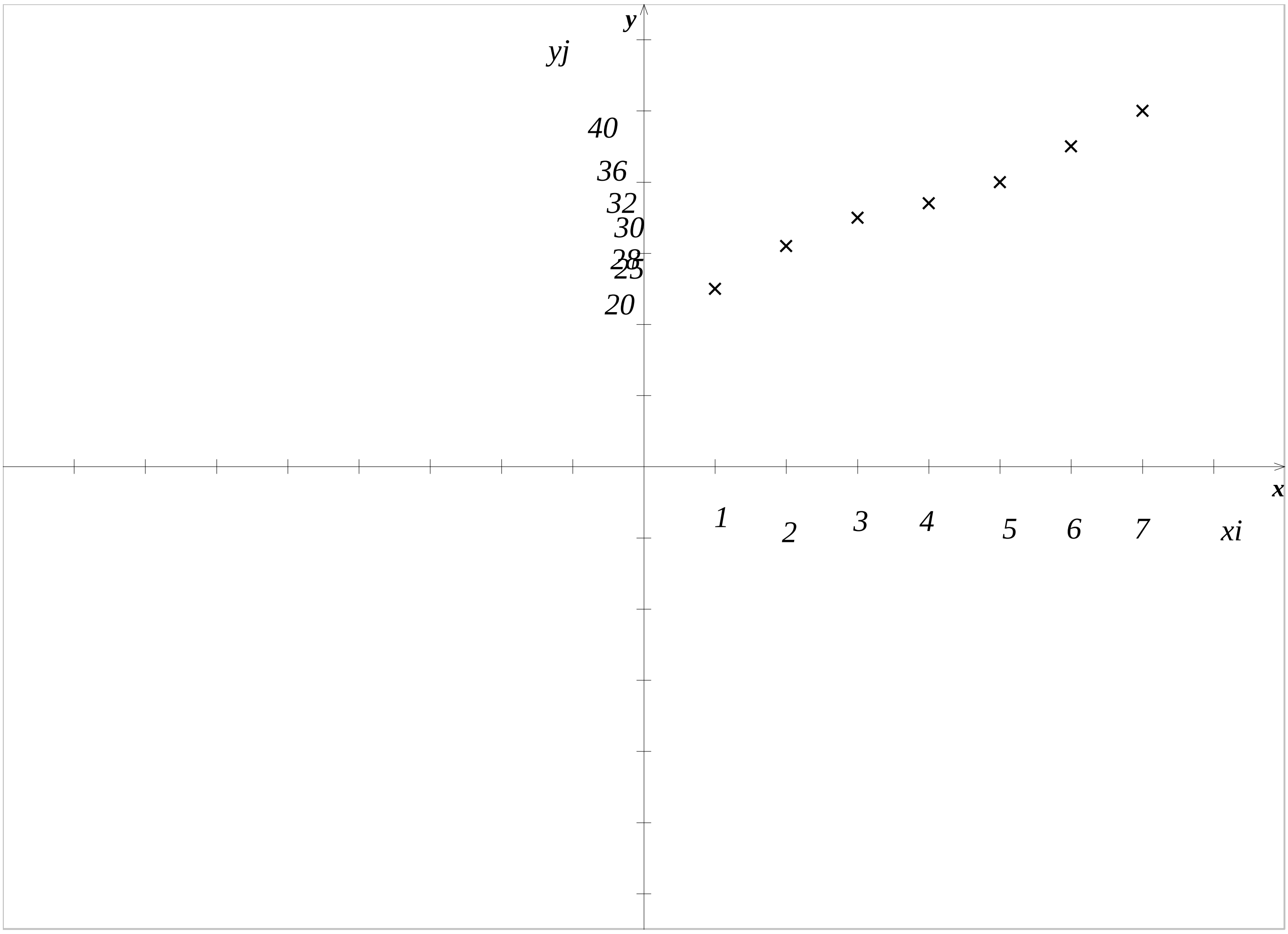
Ici chaque valeur de X est observée une fois et chaque valeur de Y est observée une fois .

Pour chaque couple (x_i ; y_j) son effectif est 1 . Au dessus des points , on ne mettra pas (1)

Plaçons dans un repère orthogonal les points (1 ; 20) , (2 ; 25), (3 ; 28) , (4 ; 30) , (5 ; 32)

(6 ; 36), (7 ; 40)

On prend comme échelle : En abscisse 1 cm → 1 ; En ordonnée 5cm → 40



6) <u>Ajustement</u>

- ***PRÉSENTATION***

Dans la pratique les deux variables sont souvent liées d'une certaine manière. Sur le graphique représentant le nuage de points sur un repère orthonormé il est parfois possible de tracer une courbe épousant au mieux l'ensemble des points : c'est la courbe d'ajustement. La courbe d'ajustement peut être linéaire, parabolique, logarithmique etc……

Un ajustement linéaire n'apparaît nécessaire que lorsque le nuage de points associé au couple (X,Y) a une forme « allongée ».On cherche dans ce cas à exprimer Y comme fonction affine de X .

Dans le cas contraire la méthode d'ajustement linéaire donnera toujours un résultat qui malheureusement ne sera qu'une très mauvaise représentation mathématique de la réalité et donc ne sera pas exploitable

- ***Ajustement graphique***

Effectuer un ajustement graphique d'un nuage de points , c'est tracer une courbe simple et régulière

(continue) qui épouse le mieux la forme du nuage de points associé à la série double étudiée .

- ***Ajustement linéaire***

Effectuer un ajustement linéaire ou ajustement affine d'un nuage de points , c'est tracer une droite qui passe le plus près possible de tous les points du nuage de points .

IL existe plusieurs méthodes d'ajustement linéaire .

7) <u>Ajustement linéaire à main levée</u>

À partir de l'observation, on réalise à main levée une droite qui passe le plus près possible de tous les points du nuage de points .

Cette méthode est subjective car elle est relative à l'œil de l'observateur .

Remarque

Parfois on vous dit de faire un ajustement linéaire avec la règle , il faut réaliser avec la règle une droite qui passe le plus près possible de tous les points du nuage de points .

8) <u>Corrélation linéaire</u>

- ***PRÉSENTATION***

Lorsqu'une variable Y est en corrélation (liaison) avec une variable X, deux problèmes se posent :

- ✓ *Établir la forme de la liaison statistique existant entre Y et X , en déterminant la courbe de régression de Y en X .*
- ✓ *Dans le cas où celle-ci est une droite, mesurer l'intensité de la liaison par un indice appelé le coefficient de corrélation linéaire .*

a) <u>Définition</u>

Deux variables X et Y sont dites en corrélation linéaire lorsque la courbe de régression de Y en X et la courbe de régression de X en Y sont des droites .

b) <u>Coefficient de corrélation linéaire</u>

On appelle coefficient de corrélation linéaire d'une série double (X, Y) le nombre réel noté r et défini par

$$r = \frac{COV(X,Y)}{\delta(X)\,\delta(Y)} \qquad \text{avec} \quad \delta(X) = \sqrt{V(X)} \quad \text{et} \quad \delta(Y) = \sqrt{V(Y)}$$

Le coefficient de corrélation linéaire permet d'apprécier la pertinence de l'ajustement linéaire . Autrement dit r permet de savoir si un ajustement linéaire est envisageable ou pas .

<u>Propriété</u>

- ***Si $|r| \geq 0{,}87$ alors on dit que la corrélation linéaire entre X et Y est très forte . Dans ce cas , un ajustement linéaire est recommandé (justifié).***
- ***Si $|r| < 0{,}87$ alors on dit que la corrélation linéaire entre X et Y est très faible . Dans ce cas , un ajustement linéaire n'est pas recommandé .***

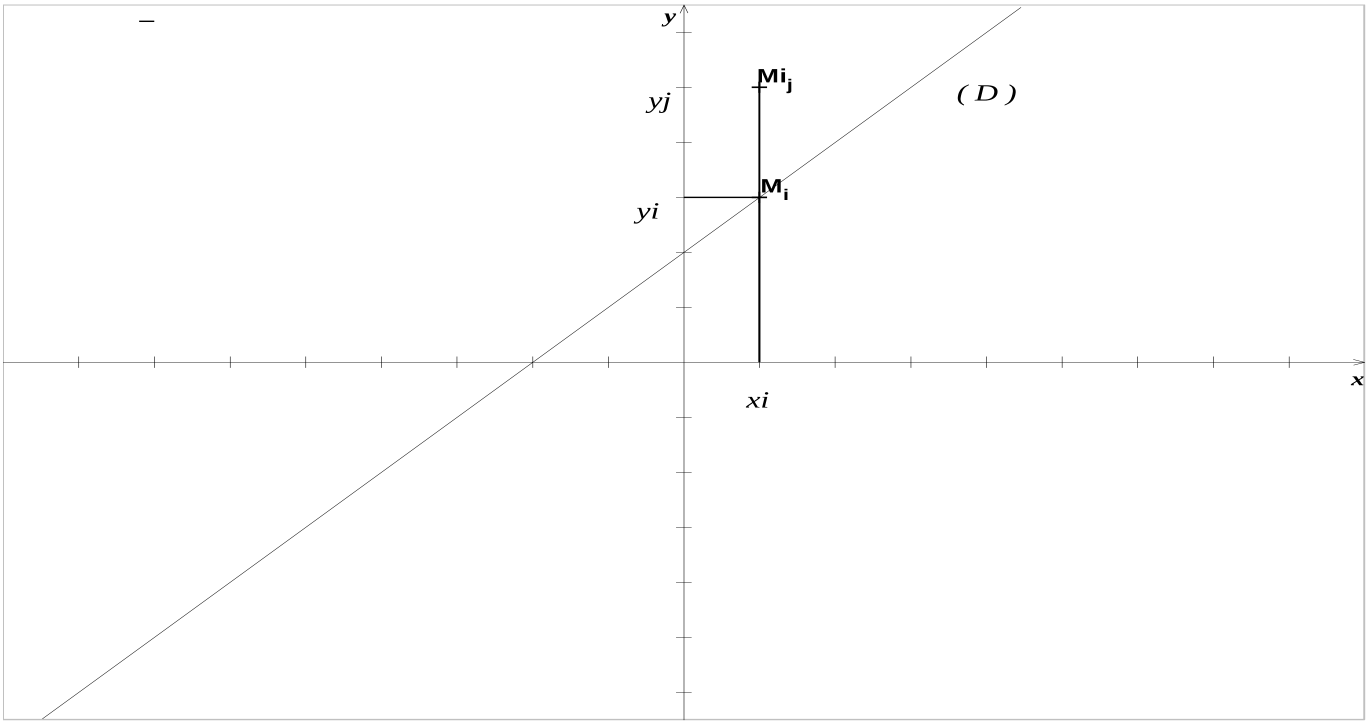
Remarque

- ***Le coefficient de corrélation linéaire est toujours compris entre – 1 et 1 . C'est-à-dire $-1 \leq r \leq 1$.***
- ***Le coefficient de corrélation linéaire est du même signe que la covariance .***
- ***Si r = 0 alors on dit que la corrélation linéaire entre X et Y est minimale .***
- ***Si r = 1 ou r = - 1 alors on dit que la corrélation linéaire entre X et Y est maximale .***

9) <u>Ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés</u>

- ***PRÉSENTATION***

On considère une série double à deux variables X et Y qui sont en corrélation linéaire .



On a $e_{ij} = y_j - y_i$ *donc* ${e_{ij}}^2 = (y_j - y_i)^2$

L'écart moyen entre y_j *et* y_i *est* $e_M = \frac{1}{n}\sum n_{ij}{e_{ij}}^2$

Si on effectue un ajustement linéaire par une droite (D) d'équation cartésienne y = ax + b alors chaque point du nage M_{ij}*sera substitué à un point* M_i *de (D) . On a* M_i *(* x_i *;* y_i *).*

Puisque (D) passe le plus près possible de tous les points du nuage de points, on est ramené à rendre le plus faible possible l'écart moyen e_M *. On a* $y_i = a\,x_i + b$

C'est pourquoi on cherche à minimiser la somme $\frac{1}{n}\sum n_{ij}(y_j - a\,x_i - b)^2$

On cherche à minimiser la somme des carrés des écarts d'où l'expression méthode des moindres carrés .

La droite qui rend minimale la somme des carrés des écarts de l'ajustement linéaire du nuage de points de la série double (X , Y) est défini par :

(D) : y = a x + b On note $D_{Y/X}$ *: y = a x + b*

Avec $a = \frac{COV\,(X,Y)}{V\,(X)}$ *et* $b = \bar{Y} - a\,\bar{X}$

(D) est la droite des moindres carrés ou droite de régression de Y en X .

De même on définit la droite de régression de X en Y

(D') *:* $x = a'y + b'$ *On note* $D_{X/Y}$ *:* $x = a'y + b'$

Avec $a' = \frac{COV\,(X,Y)}{V\,(Y)}$ *et* $b' = \bar{X} - a'\,\bar{Y}$

(D') *est la droite des moindres carrés ou droite de régression de X en Y .*

Théorème

- ***Si le nuage de points associé à la série double (X, Y) où X est en abscisse et Y est en ordonnée, les variables X et Y étant en corrélation linéaire alors il existe une droite d'ajustement (D) du nuage et une seule qui constitue le meilleur ajustement de ce nuage . Elle a pour équation :***

  $$(D) : y = a\,x + b \qquad \text{avec} \qquad a = \frac{COV(X,Y)}{V(X)} \qquad \text{et} \quad b = \overline{Y} - a\,\overline{X}$$

  (D) est la droite des moindres carrés ou droite de régression de Y en X .

- ***De manière analogue, il existe une droite d'ajustement*** *(D′) de X en fonction de Y* ***du nuage et une seule qui constitue le meilleur ajustement de ce nuage . Elle a pour équation :***

  $$(D') : \ x = a'y + b' \qquad \text{avec} \quad a' = \frac{COV(X,Y)}{V(Y)} \qquad \text{et} \quad b' = \overline{X} - a'\,\overline{Y}$$

  (D′) est la droite des moindres carrés ou droite de régression de X en Y .

Remarque

- ***De toutes les droites d'ajustement d'un nuage de points associé à une série double , celle qui réalise le meilleur ajustement est la droite des moindres carrés .***
- ***Les droites de régression (D) et (D′) passent par le point moyen . C'est-à-dire*** $G(\overline{X}\,;\,\overline{Y}) \in (D) \quad ; \quad G(\overline{X}\,;\,\overline{Y}) \in (D')$
- ***Les droites de régression (D) et (D′) permettent de faire des prévisions sur les variables étudiées.***
  C'est-à-dire $(D) : y = a\,x + b$ ***et*** $(D') : \ x = a'y + b'$ ***, ces deux équations permettent d'estimer l'une des variables connaissant l'autre .***

Remarque

- ***Soient les deux droites de régression*** $(D) : y = a\,x + b$ ***et*** $(D') : \ x = a'y + b'$
  On a $r^2 = a \times a'$

  Démonstration

On a $r = \dfrac{COV(X,Y)}{\delta(X)\,\delta(Y)}$ *avec* $\delta(X) = \sqrt{V(X)}$ *et* $\delta(Y) = \sqrt{V(Y)}$

On a $\delta^2(X) = V(X)$ *et* $\delta^2(Y) = V(Y)$

On a $a = \dfrac{COV(X,Y)}{V(X)}$ *et* $a' = \dfrac{COV(X,Y)}{V(Y)}$

Donc $a \times a' = \dfrac{COV(X,Y)}{V(X)} \times \dfrac{COV(X,Y)}{V(Y)} = \dfrac{COV(X,Y)}{\delta^2(X)} \times \dfrac{COV(X,Y)}{\delta^2(Y)} = \dfrac{COV^2(X,Y)}{\delta^2(X)\delta^2(Y)} = r^2$

D'où $r^2 = a \times a'$

Exercice d'application

Le tableau suivant indique X le chiffre d'affaire en millions d'une entreprise et Y le budget en publicité en millions

X	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Y	*20*	*25*	*28*	*30*	*32*	*36*	*40*

1) Calculer $\overline{X}$ *,* $\overline{Y}$ *,* $\overline{XY}$ *puis* $COV(X,Y)$ *.*

2) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X .

3) Déterminer l'équation de la droite de régression de X en Y .

Solution

Le tableau suivant indique X le chiffre d'affaire en millions d'une entreprise et Y le budget en publicité en millions

X	1	2	3	4	5	6	7
Y	20	25	28	30	32	36	40

1) Calculons $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\overline{XY}$ puis COV (X , Y) .

$\bar{X} = \frac{1}{7}(1+2+3+4+5+6+7) = \frac{28}{7} = 4$ $\boxed{\text{donc } \bar{X} = 4}$

$\bar{Y} = \frac{1}{7}(20+25+28+30+32+36+40) = 30{,}14$ donc $\boxed{\bar{Y} = 30{,}14}$

$\overline{XY} = \frac{1}{7}(1\times 20 + 2\times 25 + 3\times 28 + 4\times 30 + 5\times 32 + 6\times 36 + 7\times 40) = \frac{930}{7} = 132{,}86$

$\boxed{\text{Donc } \overline{XY} = 132{,}86}$

$COV(X, Y) = \overline{XY} - \bar{X}\,\bar{Y} = 132{,}86 - 4 \times 30{,}14 = 12{,}3$

$\boxed{\text{Donc } COV(X, Y) = 12{,}3}$

2) Déterminons l'équation de la droite de régression de Y en X .

On a $(D) : y = a x + b$ avec $a = \frac{COV(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \bar{Y} - a\bar{X}$

On a $V(X) = \overline{X^2} - (\bar{X})^2$

On a $\overline{X^2} = \frac{1}{7}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2) = 20$

Donc $V(X) = \overline{X^2} - (\bar{X})^2 = 20 - 4^2 = 20 - 16 = 4$ d'où $\boxed{V(X) = 4}$

On a $a = \frac{COV(X,Y)}{V(X)} = \frac{12{,}3}{4} = 3{,}075$ donc $\boxed{a = 3{,}075}$

On a $b = \bar{Y} - a\bar{X} = 30{,}14 - 3{,}075 \times 4 = 17{,}84$ $\boxed{\text{donc } b = 17{,}84}$

On obtient $(D) : y = 3{,}075\,x + 17{,}84$

$\boxed{\text{La droite de régression de Y en X est la droite d'équation } (D) : y = 3{,}075\,x + 17{,}84}$

3) Déterminer l'équation de la droite de régression de X en Y .

On a $(D') : x = a'y + b'$ avec $a' = \frac{COV(X,Y)}{V(Y)}$ et $b' = \bar{X} - a'\bar{Y}$

On a $V(Y) = \overline{Y^2} - (\bar{Y})^2$

On a $\overline{Y^2} = \frac{1}{7}(20^2 + 25^2 + 28^2 + 30^2 + 32^2 + 36^2 + 40^2) = \frac{6629}{7} = 947$

Donc $V(Y) = \overline{Y^2} - (\bar{Y})^2 = 947 - (30{,}14)^2 = 38{,}58$ *d'où* $V(Y) = 38{,}58$

On a $a' = \frac{COV\,(X,Y)}{V\,(Y)} = \frac{12{,}3}{38{,}58} = 0{,}32$ $\boxed{\text{donc } a = 0{,}32}$

On a $b' = \bar{X} - a'\,\bar{Y} = 4 - 0{,}32 \times 30{,}14 = -5{,}6$ $\boxed{\text{donc } b = -5{,}6}$

On obtient (D') : $x = 0{,}32\,y - 5{,}6$

$\boxed{\text{La droite de régression de } X \text{ en } Y \text{ est la droite d'équation } (D') : x = 0{,}32\,y - 5{,}6}$

Exercice d'application

Le service social d'une entreprise effectue une enquête auprès de son personnel portant sur le nombre d'années d'ancienneté X et le nombre de jours de congé Y .Les observations suivantes sont faites

X \ Y	0	1	2	3	4	5	Total (X)
0	7	1	1	0	0	0	9
1	6	4	15	8	5	3	41
2	0	0	0	1	2	7	10
3	0	0	0	0	0	2	2
Total (Y)	13	5	16	9	7	12	62

1) Calculer $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\overline{XY}$ puis $COV\,(X\,,Y)$.

2) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X .

3) Déterminer l'équation de la droite de régression de X en Y .

Solution

Y X	0	1	2	3	4	5	Total (X)
0	7 0	1 0	1 0	0 0	0 0	0 0	9 0
1	0 6	4 4	30 15	24 8	20 5	15 3	93 41
2	0 0	0 0	0 0	6 1	16 2	70 7	92 10
3	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	30 2	30 2
Total (Y)	0 13	4 5	30 16	30 9	36 7	115 12	215 62

1) Calculns $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{XY}$ puis COV (X , Y) .

On a $\overline{XY} = \frac{215}{62} = 3{,}46$ $\boxed{\textbf{donc } \overline{XY} = 3{,}46}$

La série marginale de X est

x_i	0	1	2	3	Total(X)
α_i	9	41	10	2	62

On a $\bar{X} = \frac{1}{62}\,(\,0 \times 9 + 1 \times 41 + 2 \times 10 + 3 \times 2\,) = \frac{67}{62} = 1{,}08$ $\boxed{\text{donc } \bar{X} = 1{,}08}$

On a $\overline{X^2} = \frac{1}{62}\,(\,9 \times 0^2 + 41 \times 1^2 + 10 \times 2^2 + 2 \times 3^2) = \frac{99}{62} = 1{,}59$

$\boxed{\text{Donc } \overline{X^2} = 1{,}59}$

Donc $V(X) = \overline{X^2} - (\bar{X})^2 = 1{,}59 - (1{,}08)^2 = 0{,}43$ $\boxed{\text{d'où } V(X) = 0{,}43}$

La série marginale de Y est

y_j	0	1	2	3	4	5	Total(Y)
β_j	13	5	16	9	7	12	62

On a $\bar{Y} = \frac{1}{62}\,(\,0 \times 13 + 1 \times 5 + 2 \times 16 + 3 \times 9 + 4 \times 7 + 5 \times 12\,) = \frac{152}{62} = 2{,}45$ $\boxed{\text{donc } \bar{Y} = 2{,}45}$

On a $\overline{Y^2} = \frac{1}{62}\,(\,13 \times 0^2 + 5 \times 1^2 + 16 \times 2^2 + 9 \times 3^2 + 4 \times 4^2 + 5 \times 12^2\,) = \frac{562}{62} = 9{,}06$

$\boxed{\text{Donc } \overline{Y^2} = 9{,}06}$

Donc $V(Y) = \overline{Y^2} - (\bar{Y})^2 = 9{,}06 - (2{,}45)^2 = 3{,}06$ $\boxed{\text{d'où } V(Y) = 3{,}06}$

$COV(X, Y) = \overline{XY} - \bar{X}\,\bar{Y} = 3{,}46 - 1{,}08 \times 2{,}45 = 0{,}82$

$\boxed{\text{Donc } COV(X, Y) = 0{,}82}$

2) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X .

On a (D) : $y = a x + b$ avec $a = \frac{COV(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \bar{Y} - a\bar{X}$

On a $a = \frac{COV(X,Y)}{V(X)} = \frac{0{,}82}{0{,}43} = 1{,}90$ $\boxed{\text{donc } a = 1{,}90}$

On a $b = \bar{Y} - a\bar{X} = 2{,}45 - 1{,}90 \times 1{,}08 = 0{,}4$ $\boxed{\text{donc } b = 0{,}4}$

On obtient (D) : $y = 1{,}90\,x + 0{,}4$

La droite de régression de Y en X est la droite d'équation (D) : $y = 1{,}90\,x + 0{,}4$

3) Déterminer l'équation de la droite de régression de X en Y .

On a (D') : $x = a'y + b'$ avec $a' = \frac{COV(X,Y)}{V(Y)}$ et $b' = \bar{X} - a'\bar{Y}$

On a $a' = \frac{COV(X,Y)}{V(Y)} = \frac{1{,}90}{3{,}06} = 0{,}62$ $\boxed{\text{donc } a = 0{,}62}$

On a $b' = \bar{X} - a'\bar{Y} = 1{,}08 - 0{,}62 \times 2{,}45 = -0{,}43$ $\boxed{\text{donc } b = -0{,}43}$

On obtient (D') : $x = 0{,}62\,y - 0{,}43$

La droite de régression de X en Y est la droite d'équation (D') : $x = 0{,}62\,y - 0{,}43$

10) <u>Distributions marginales</u>

- ***Effectifs marginaux***
  La somme des effectifs partiels contenus dans la ligne x_i est égale à l'effectif des éléments dont la valeur du caractère X est x_i elle est notée n_i.
  $n_{i.} = n_{i1} + n_{i2} + \cdots + n_{iq} = \sum_{j=1}^{q} n_{ij}$ ***. On pose*** $n_{i.} = \alpha_i$
  On a $\alpha_i = n_{i1} + n_{i2} + \cdots + n_{iq} = \sum_{j=1}^{q} n_{ij}$
  L'effectif marginal associé à x_i est α_i
  La somme des effectifs partiels contenus dans la ligne de y_j est égale à l'effectifs des éléments dont la valeur du caractère Y est y_j elle est notée $n_{.j}$.
  $n_{.j} = n_{1j} + n_{2j} + \cdots + n_{pj} = \sum_{i=1}^{p} n_{ij}$ ***. On pose*** $n_{.j} = \beta_j$
  On a $\beta_j = n_{1j} + n_{2j} + \cdots + n_{pj} = \sum_{i=1}^{p} n_{ij}$
  L'effectif marginal associé à y_j est β_j
  $n_{i.}$ et $n_{.j}$ sont appelés effectifs marginaux.
  On a toujours :
  $n = \sum_{i=1}^{p} n_{i.} = \sum_{j=1}^{q} n_{.j}$ ***; n est appelé effectif total.***
  Pour chaque couple (x_i ; y_j) du couple de variable (X ; Y) , on donne l'effectif n_{ij} observé .
- ***Distribution marginale***
  De la distribution du couple (X, Y), on peut déduire les distributions marginales :
  $(x_i\,;\,\alpha_i)$ est la distribution marginale de X.

$(\boldsymbol{y_j}\ ;\ \boldsymbol{\beta_j})$ ***est la distribution marginale de Y.***

TABLEAU À DOUBLE ENTRÉE (I)

X / Y	x_1	x_2	x_3	x_4			x_p	*Total(X)*
y_1	n_{11}	n_{21}	n_{31}	n_{41}			n_{p1}	β_1
y_2	n_{12}	n_{22}	n_{32}	n_{42}			n_{p2}	β_2
y_3	n_{13}	n_{23}	n_{33}	n_{43}			n_{p3}	β_3
y_q	n_{1q}	n_{2q}	n_{3q}	n_{4q}			n_{pq}	β_q
Total(Y)	α_1	α_2	α_3	α_4			α_p	*n*

TABLEAU À DOUBLE ENTRÉE (II)

Y / X	y_1	y_2	y_3	y_4			y_q	*Total(Y)*
x_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}			n_{1q}	α_1
x_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	n_{24}			n_{2q}	α_2
x_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	n_{34}			n_{3q}	α_3
x_p	n_{p1}	n_{p2}	n_{p3}	n_{p4}			n_{pq}	α_p
Total(X)	β_1	β_2	β_3	β_4			β_p	*n*

- ***Vous pouvez avoir un tableau à double entrée du genre :***
  TABLEAU À DOUBLE ENTRÉE (I) ou
  TABLEAU À DOUBLE ENTRÉE (II)

La série marginale de X est

$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$		$\boldsymbol{x_p}$	*Total (X)*
$\boldsymbol{\alpha_i}$	$\boldsymbol{\alpha_1}$	$\boldsymbol{\alpha_2}$	$\boldsymbol{\alpha_3}$		$\boldsymbol{\alpha_p}$	*n*

La série marginale de Y est

y_j	y_1	y_2	y_3		y_q	*Total(Y)*
β_j	β_1	β_2	β_3		β_q	*n*

11) *Fréquences marginales*

- ***Fréquence marginale de X***

  la fréquence marginale de x_i est $f_{i\,.} = \dfrac{\alpha_i}{n}$
- ***Fréquence marginale de Y***

  la fréquence marginale de y_j est $f_{.\,j} = \dfrac{\beta_j}{n}$
- ***Fréquence du couple (x_i ; y_j)***

  La fréquence du couple $(x_i ; y_j)$ est $f_{i\,j} = \frac{n_{i\,j}}{n}$
- ***Fréquences conditionnelles***

  La fréquence de x_i sachant y_j notée f_{x_i/y_j} ou f(x_i/y_j) est définie par :

  $f_{x_i/y_j} = \frac{n_{ij}}{\beta_j}$

  La fréquence de y_j sachant x_i notée f_{y_j/x_i} ou f(y_j/x_i) est définie par :

  $f_{y_j/x_i} = \frac{n_{ij}}{\alpha_i}$

- ***Remarque***

Les résultats sont donnés en pourcentage pour les fréquences marginales et les fréquences conditionnelles .

Exemple

Le service social d'une entreprise effectue une enquête auprès de son personnel portant sur le nombre d'années d'ancienneté X et le nombre de jours de congé Y .Les observations suivantes sont faites

X \ Y	0	1	2	3	4	5	Total (X)
0	7	1	1	0	0	0	9
1	6	4	15	8	5	3	41
2	0	0	0	1	2	7	10
3	0	0	0	0	0	2	2
Total (Y)	13	5	16	9	7	12	62

Calculons $f_{3\,.}$

$f_{3\,.} = \frac{\alpha_3}{n} = \frac{10}{62}$ ***= 16,12 %***

Calculons $f_{.\,2}$

$f_{.\,2} = \frac{\beta_2}{n} = \frac{5}{62}$ ***= 8,06%***

Calculons f_{x_2/y_5}

$f_{x_2/y_5} = \frac{n_{25}}{\beta_5} = \frac{7}{12}$ ***= 58,33%***

Calculons f_{y_5/x_3}

$f_{y_5/x_3} = \frac{n_{35}}{\alpha_3} = \frac{2}{10}$ ***= 20%***

Calculons $f_{2\,4}$

$f_{2\,4} = \frac{n_{24}}{n} = \frac{8}{62}$ ***= 12,90%***

12) <u>Détermination du rang d'une année</u>

Soit le réel a l'année de départ → Soit le réel b l'année de d'arrivée

Soit r le rang de b

- ***N° 0 C'est à dire si la numérotation commence à partir de 0 alors r = b – a***
- ***N° 1 C'est à dire si la numérotation commence à partir de 1 alors r = b – a + 1***

Exercice d'application

L'évolution de 1985 à 1991 du salaire moyen d'un ouvrier dans un pays en voie de développement donné est consigné dans le tableau suivant :

Années	*1985*	*1986*	*1987*	*1988*	*1989*	*1990*	*1991*
Salaire horaire moyen en FCFA	*1650*	*1760*	*1930*	*2020*	*2220*	*2450*	*2530*

1) Représenter graphiquement les variations du salaire moyen .

2) Ajuster à la règle le nuage de points obtenu par une droite dont on déterminera une équation cartésienne.

3) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X .

4) En admettant que cette évolution se poursuive, donner une estimation du salaire horaire moyen d'un tel ouvrier à l'an 2001 ?

Solution

On désigne les années par leurs rangs .L'année 1985 aura le rang 1, l'année 1986 aura le rang 2 , l'année 1987 aura le rang 3 et ainsi de suite ….

Soit x_i le rang de l'année et y_i salaire horaire moyen en FCFA en cette année .

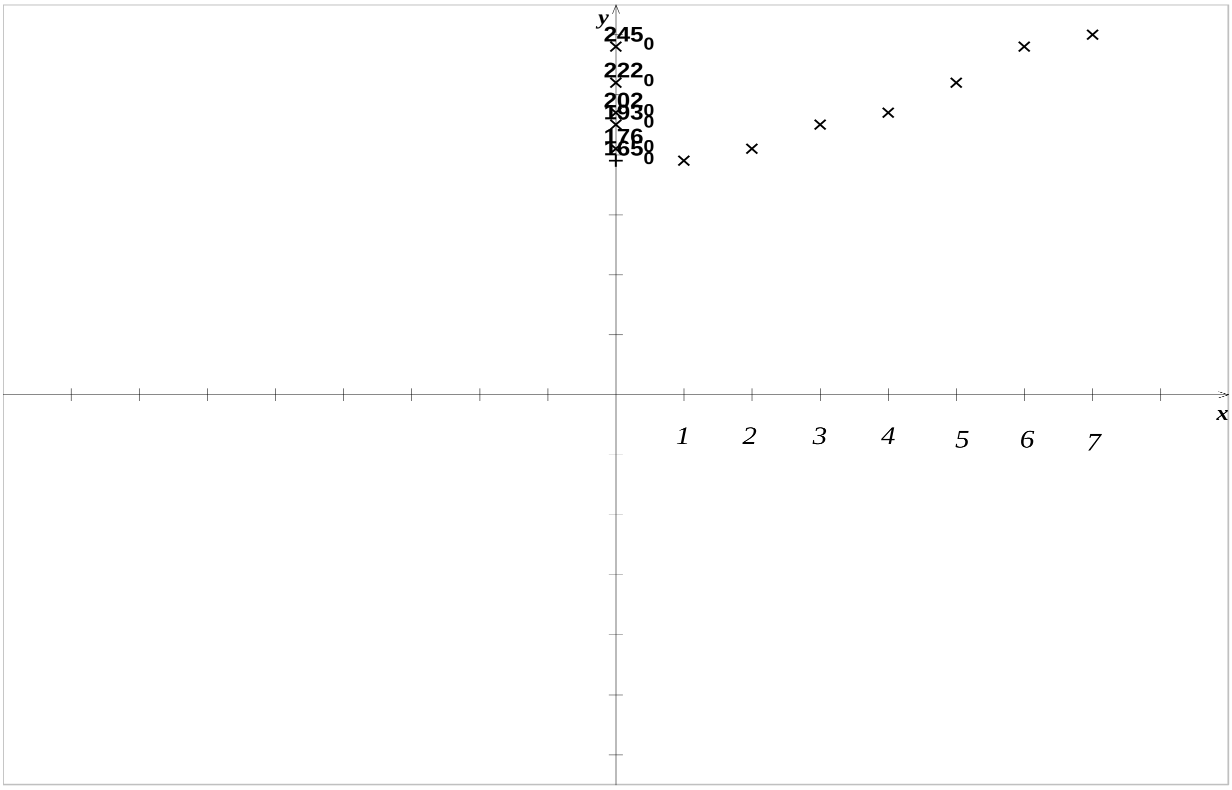
On obtient ainsi une série double (X ; Y) .

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	1650	1760	1930	2020	2220	2450	2530

1) Représentons graphiquement les variations du salaire moyen .

Cela revient à faire la représentation du nuage de points associé à la série double (X ; Y) .

Echelle : En abscisse 1 cm →1 En ordonnée 6 cm → 2530



2) Ajustons à la règle le nuage de points obtenu par une droite dont on déterminera une équation cartésienne.

Il s'agit de tracer à la règle une droite qui passe le plus près possible de tous les points du nuage de points

Soit (Δ) : y = a x + b

La droite (Δ) passe par les points A (4 ; 2020) et B (7 ; 2530)

A (4 ; 2020) ∈ (Δ) <=> 4a + b = 2020

B (7 ; 2530) $\in$ *(Δ) <=> 7a + b = 2530*

En résolvant le système , on obtient a = 170 et b = 1340

$\boxed{\text{D'où } (\Delta) : y = 170x + 1340}$

3) Déterminons l'équation de la droite de régression de Y en X .

On a $\bar{X} = \frac{1}{7}(1+2+3+4+5+6+7) = \frac{28}{7} = 4$ $\boxed{\text{donc } \bar{X} = 4}$

$\overline{X^2} = \frac{1}{7}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2) = 20$ $\boxed{\text{donc } \overline{X^2} = 20}$

On a $V(X) = \overline{X^2} - (\bar{X})^2 = 20 - (4)^2 = 4$ $\boxed{\text{d'où } V(X) = 4}$

On a $\bar{Y} = \frac{1}{7}(1650+1730+1930+2020+2220+2450+2530) = 2080$ $\boxed{\text{donc } \bar{Y} = 2080}$

$\overline{XY} = \frac{1}{7}(1\times 1650 + 2\times 1730 + 3\times 1930 + 4\times 2020 + 5\times 2220 + 6\times 2450 + 7\times 2530) =$ $8935{,}71$ $\boxed{\text{donc } \overline{XY} = 8935{,}71}$

$COV(X, Y) = \overline{XY} - \bar{X}\,\bar{Y} = 8935{,}71 - 4 \times 2080 = 615{,}71$

$\boxed{\text{Donc } COV(X, Y) = 615{,}71}$

4) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X .

On a $(D) : y = ax + b$ avec $a = \frac{COV(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \bar{Y} - a\bar{X}$

On a $a = \frac{COV(X,Y)}{V(X)} = \frac{615{,}71}{4} = 153{,}92$ $\boxed{\text{donc } a = 153{,}92}$

On a $b = \bar{Y} - a\bar{X} = 2080 - 153{,}92 \times 4 = 1464{,}32$ $\boxed{\text{donc } b = 1464{,}32}$

On obtient $(D) : y = 153{,}92x + 1464{,}32$

$\boxed{\text{La droite de régression de Y en X est la droite d'équation } (D) : y = 153{,}92x + 1464{,}32}$

4)Donnons une estimation du salaire horaire moyen d'un tel ouvrier à l'an 2001

L'année de départ est 1985 , l'année d'arrivée est 2001 et la numérotation commence à partir de 1

alors r = b – a + 1 = 2001- 1985 + 1 = 17

$\boxed{\text{L'année 2001 a le rang 17}}$

$\boxed{\text{Si } x = 17}$ alors $y = 153{,}92 \times 17 + 1464{,}32 = 4080{,}96$

$\boxed{\text{D'où 4081FCFA est une estimation du salaire horaire moyen d'un tel ouvrier en l'an 2001}}$

EXERCICES

Exercice1

Afin de mieux gérer ses stocks, une entreprise décide d'estimer son besoin en matières premières par l'intermédiaire d'une grandeur dont la valeur peut être connue rapidement (chiffre d'affaires ou total des salaires et primes). On note X la quantité, en tonnes, de matières premières, Y le chiffre d'affaires en milliers de francs, Z le total de salaires et primes en milliers de francs. Le relevé des 6 mois précédents est le suivant :

Numéro des mois	1	2	3	4	5	6
X	0,9	1,2	0,6	0,5	1,4	1
Y	37	40	33	33	41	35
Z	3,9	3,7	3,2	3,3	3,6	3,7

1) a) Calculer les coefficients de corrélation linéaire r_1 entre X et Y er r_2 entre X et Z.

b) Est-ce un ajustement entre X et Y ou entre X et Z qui permettra la meilleure estimation de X ?

2) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X et en déduire une estimation du besoin en matières premières quand Y = 39.

Exercice2 ***Extrait du BAC 2006 Série S2***

Les parties A et B sont indépendantes.

***Partie A** : Une étude du service des transports donne la distance de freinage d'une voiture sur une route en bon état en fonction de sa vitesse.*

Vitesse en km/h : X	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Distance en m : Y	8	12	18	24	32	40	48	58	72

On désigne par X la vitesse et par Y la distance de freinage.

1) Représenter le nuage de points. On prendra 1 cm pour 10 km/h en abscisse et 1 cm pour 5 m en ordonnée.

NB : On commencera en abscisse les graduations à partir de 40km/h et en ordonnée les graduations à partir de 8m.

2) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X.

3) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r. Avons-nous une bonne corrélation ?

4) a) On suppose que cette évolution se poursuit. Un automobiliste roulant à 150 km/h entame un freinage à 85m d'un obstacle immobile. Percutera-t-il l'obstacle ?

b) Quelle devrait être sa vitesse maximale au moment du freinage pour ne pas heurter l'obstacle ?

***Partie B** : Une autre étude sur les causes des accidents donne les résultats ci-contre :*

Type de transport : Y / Cause des Accidents : X	Particuliers y_1	Transporteurs en commun y_2
Accidents liés à l'excès de vitesse x_1	440	360
Accidents à cause mécanique x_2	110	90

1) Déterminer l'effectif des accidents enregistrés lors de cette étude.

2) Déterminer les fréquences conditionnelles f_{y_2/x_1} *et* f_{x_2/y_2}

3) Déterminer les fréquences marginales $f_{.1}$ *et* $f_{2.}$

<u>Exercice3</u>

On donne l'évolution du chiffre d'affaires d'une entreprise.

Années	n° année x_i	Chiffre d'affaires en 10^5 francs y_i
1985	1	32
1986	2	35
1987	3	37
1988	4	41
1989	5	45
1990	6	49
1991	7	51
1992	8	53
1993	9	54
1994	10	57

1) Tracer le nuage de points associé à la série double (X ; Y) .

2) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X .

3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

4) Si l'évolution continue ainsi, quel chiffres d'affaires peut-on prévoir en 1995 ?

5) Si l'évolution continue ainsi, à partir de quelle année aura-t-on un chiffre d'affaires supérieur à 6 500 000 francs ?

<u>Exercice4</u>

Le tableau ci-dessous donne le cours moyen d'une action donnée à la bourse d'Abidjan :

Année	Rang de l'année x_i	Prix en FCFA y_i
1991	0	550
1992	1	580
1993	2	640
1994	3	850
1995	4	1050
1996	5	1120

1) *Représenter le nuage de points associé à la série double (X ; Y) dans le plan muni d'un repère Orthonormé d'unités : 1 cm pour une année en abscisse et 1 cm pour 100 FCFA en ordonnée.*

Calculer les coordonnées du point moyen G et placer le sur la figure.

2) Calculer à 10^{-3} près, le coefficient de corrélation linéaire de la série (X ; Y). En déduire qu'un ajustement affine est justifié.

3) Déterminer une équation de la droite de régression de Yen X . On donnera les coefficients à 10^{-1} près.

Tracer cette droite sur la figure précédente.

4) En supposant que cette tendance continue, estimer

a) le cours moyen de cette action au 1er janvier 2000 ;

b) à partir de quelle année, le cours moyen de l'action considérée dépassera-t-il 2000 FCFA ?

Exercice5

Cinq élèves d'une même classe ont passé les épreuves de sciences économiques et sociales du baccalauréat

et d'un concours. Désignons par x_i la note obtenue au baccalauréat et par y_i la note obtenue au concours.

Note x_i	7	10	11	13	16
Note y_i	8	9	12	12	13

1) Représenter le nuage de points associé à la série statistique (X ; Y) .

2) Déterminer les coordonnées du point moyen G et le placer sur la figure .

3) Déterminer l'équation la droite de régression de Y en X puis celle de X en Y .

4) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y. Interpréter le

5) Deux autres élèves de cette classe ont passé ces épreuves

Papi a obtenu 12 au baccalauréat. Estimer sa note au concours générale à l'aide de la droite de régression de Y en X.

Doudou a obtenu 10 au concours. Estimer sa note au baccalauréat à l'aide de la droite de régression de X en Y.

Exercice6

Une étude sur le nombre d'années d'exercice X, des ouvriers d'une entreprise et leur salaire mensuel Y en milliers

de francs, a donné les résultats indiqués dans la tableau ci-dessous avec des données manquantes désignées par a et b.

Y \ X	2	6	10	14	18	22
75	a	5	0	0	0	0
125	0	7	1	0	2	0
175	2	0	9	8	15	4
225	0	1	0	3	B	1

1) Déterminer a et b pour que la moyenne de la série marginale de X soit égale à $\frac{596}{59}$ et celle de la série marginale de Y soit $\frac{8450}{59}$.

Dans la suite, on suppose que a = 40 et b = 20. A chaque valeur x_i de X on associe la moyenne m_i de la série conditionnelle : Y/ X = x_i. On obtient ainsi la série double (X , M) définie par le tableau ci-dessous. Les calculs se feront à deux chiffres après la virgule.

X	2	6	10	14	18	22
M	80	113	170	189	199	185

a) Calculer le coefficient de corrélation de X et M puis interpréter le résultat.

b) Déterminer l'équation de la droite de régression de M en X.

c) Quelle serait le salaire moyen d'un ouvrier de l'entreprise si son ancienneté était de 30 ans, si cette tendance se poursuit.

Exercice7

On considère la série statistique double représentée ci-dessous

Y \ X	0	1	2	3	4	5
1	6	4	1	0	0	0
2	3	11	10	5	1	0
3	1	3	16	13	4	1
4	0	1	3	5	8	4

1) *Déterminer le nuage de points de la série.*
2) *Déterminer les séries marginales.*
3) *a) Donner le tableau de la série conditionnelle de X/Y=4*

   b) Calculer les fréquences conditionnelles de la série X/Y=4.

   c) Calculer la variance et l'écart type de X/Y=4.

4) *Pour chaque y_i , Déterminer la moyenne w_i de la série conditionnelle X / y_i .*
5) *On considère la série double $(W;Y)$ avec $W = (w_i)$ et $Y = (y_i)$.*

   Calculer la covariance de W et Y .

Exercice8

Les résultats en math et P.C d'un groupe de 10 élèves d'une terminale S sont les suivants : x_i désigne la note en math et y_i la note en P.C

x_i	14	13	9	10	11	5	4	13	16	5
y_i	15	12	8	11	7	10	6	15	16	10

1) *Construire le nuage de points de cette série double.*
2) *Déterminer l équations de la droite de régression y en x par la méthode des moindres carrés et la construire dans le même graphique.*
3) *Calculer le coefficient de corrélation.*

Exercice 9

On donne la série double suivante

X	1,2	1,4	1,6	1,8	2
Y	13	12	14	16	a

Par la méthode des moindre carrés la droite de régression de Y en X a pour équation cartésienne $y = 9x + 0{,}6$.

1) *Calculer* $\overline{X}$ *puis exprimer* $\overline{Y}$ *en fonction de a. En déduire que* $a = 20$.
2) *Calculer le coefficient de corrélation pour cette valeur de a. Cette corrélation est elle forte ?*
3) *Estimer y pour* $x = 3{,}2$.

Exercice 10

Le tableau ci-dessous donne le pourcentage des ménages possédant au moins une voiture entre 1958 et 1986. On désigne par X l'année et par Y le pourcentage.

X	58	62	66	70	74	78	82	86
Y	25,5	35,7	49	56,5	62,1	66,8	71	74,7

1) *Représenter le nuage de points*
2) *Calculer les moyennes, les variances et la covariance.*
3) *Déterminer la droite de régression de Y en X puis la tracer.*
4) *Faire une estimation pour l'an 2000. Conclure.*

Exercice 11

On donne les notes X_i *en mathématiques (sur 20) et* Y_i *en français (sur 20) de 12 élèves à un concours.*

X	5	7	8	9	11	12	14	16	17	18	19	19
Y	5	4	4	6	5	7	12	11	10	9	11	13

1)Dessiner le nuage des points.

2)Marquer le point moyen

3)Quelle est la nature de la corrélation linéaire entre les notes de mathématiques et celles de français.

4)Déterminer la droite de régression $\Delta_{Y/X}$

Exercice 12

Les importations d'un pays se chiffrent en moyenne à 1 154 milliards de francs CFA par an. Le tableau suivant donne en chiffres les importations de ce pays de 2000 à 2007.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x	1	2	3	4	5	6	7	8
Montant en milliards y FCFA des importations	907	1025	1025	1092	1095	1217	k	1469

1) *Trouver la valeur de k sachant que* $\bar{Y} = 25300$
2) *On suppose que k est égal à 1 402.*

a) *Construire le nuage de points correspondants au tableau ci-dessus dans un repère orthogonal avec x en abscisse et y ordonnée.*
Echelle : abscisse : 1 cm pour 1 ; ordonnée : 1 cm pour 150.
b) *Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.*
c) *Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X.*

d) *En supposant que l'évolution se poursuit de la même façon, estimer le montant des importations de ce pays en 2012.*

Exercice 13

Le coût Y d'une activité en fonction de la production X est donné par le tableau suivant :

X (unités)	10	12	15	6	18	20	21	25	30
Y (million de Frs C.F.A)	20	25	32	x	35	40	43	45	50

1) *Déterminer x sachant que* $\overline{Y} = 25{,}7$
2) *Construire le nuage de points associé à cette série statistique*
3) *Placer le point moyen.*
4) *Calculer les moyennes, les variances et les écarts types de ces deux variables.*
5) *Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X.*
6) *Déterminer le coût pour une production de 70 unités*
7) *Donner le nombre d'unités pour un coût de 100 millions de francs.*

Exercice 14

Dans une le tableau suivante donne la note obtenue en S.V.T (X) et en biologie (Y)

X	9	12	5	6	9	14	3	6	12	14
Y	10	13	8	10	13	17	5	8	16	16

1) *Construire le nuage de points associé à cette série statistique.*
2) *Quelle est la moyenne de cette classe en S.V.T et en Biologie ?*
3) *Placer le point moyen de ce nuage.*
4) *Déterminer le coefficient de corrélation.*
5) *Un ajustement linéaire est il justifié ?*
6) *Donner l'équation de la droite de régression de X en Y.*
7) *Tracer cette droite dans le même repère.*

Exercice 15

On a relevé les notes de Maths et de Physique de 160 candidats à un examen. Les caractères étudiés sont donc la note de Maths X et la note de Physique Y. Les valeurs des caractères X et Y sont données par le tableau à double entrée suivant :

Y \ X	7	10	11	12	14	15	Total(X)
7	5	7	2	0	3	5	22
8	1	4	0	6	2	3	16
9	8	9	10	13	5	4	49
10	0	3	7	12	10	11	43
11	1	1	3	2	0	4	11
13	2	6	2	3	5	1	19
Total(Y)	17	30	24	36	25	28	n=160

1) Calculer $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{XY}$ puis $COV(X, Y)$.

2) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X .

3) Déterminer l'équation de la droite de régression de X en Y .

4) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r. Avons-nous une bonne corrélation ?

5)Construire le nuage de points associé à cette série statistique double (X ; Y) .

Exercice 16

On considère la série statistique suivante qui donne les dépenses annuelles en millions de francs d'une société de 1996 à 2005 .

Années x_i	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Dépenses y_i	0,3	0,30,4	0,4	0,7	0,9	1,0	1,3	1,4	1,5	2,2

1) Calculer $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{XY}$ puis $COV(X, Y)$.

2) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X .

3) Déterminer l'équation de la droite de régression de X en Y .

4) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r. Avons-nous une bonne corrélation ?

5)Faire une estimation de la dépense annuelle pour l'an 2009. Conclure.

6)Construire le nuage de points associé à cette série statistique double (X ; Y) .

Exercice 17

On fait une enquête sur 100 familles portant sur :

- *Le nombre d'enfants par famille (X)*
- *le nombre de pièces d'habitations par famille (Y)*

Les résultats sont donnés par le tableau ci – dessous

X \ Y	0	1	2	3	4	5
1	8	2	1	0	0	0
2	3	11	10	5	1	0
3	1	3	16	13	4	1
4	0	1	3	5	8	4

1) Calculer $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\overline{XY}$ puis COV (X , Y) .

2) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X .

3) Déterminer l'équation de la droite de régression de X en Y .

4) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r. Avons-nous une bonne corrélation ?

5)Construire le nuage de points associé à cette série statistique double (X ; Y) .

Exercice 18 ***Extrait du BAC 2005 Série S2***

Une entreprise a mis au point un nouveau produit et cherche à fixer le prix de vente. Une Enquête est réalisée auprès des clients potentiels ; les résultats sont donnés dans le tableau suivant où y_i représente le nombre d'exemplaires du produit que les clients sont disposés à acheter si le prix de vente, exprimé en milliers de francs, est x_i.

x_i	60	80	100	120	140	160	180	200
y_i	952	805	630	522	510	324	205	84

On appelle X la variable statistique dont les valeurs sont x_i etY celle dont les valeurs sont les y_i.

1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y. La valeur trouvée justifie-elle la recherche d'un ajustement linéaire ?

2) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X.

3) Les frais de conception du produit se sont élevées à 28 millions de francs. Le prix de fabrication de chaque produit est de 25000 francs.

a) Déduire de la précédente que le bénéfice z en fonction du prix de vente x est donnée par l'égalité :

$z = -5{,}95x^2 + 1426{,}25x - 59937{,}5$ *où x et z sont exprimés en milliers de francs.*

b) Déterminer le prix de vente x permettant de réaliser un bénéfice maximum et calculer ce bénéfice.

NB : prendre 2 chiffres après la virgule sans arrondir. *Bénéfice = Prix de vente – Prix de revient.*

Exercice 19 ***Extrait du BAC 2009 Série S2***

1) (X,Y) est unes série statistique double. Soit (D_1) la droite de régression de Y en X.
Soit (D_2) la droite de régression de X en Y. On suppose que :
(D_1) : y = a x + b et (D_2) : x = a' y + b'.
Soit r le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.
Etablir que r^2 = aa'.
2) Dans une entreprise une étude simultanée portant sur deux caractères X et Y donnent les résultats suivants :
la droite de régression de Y en X a pour équation : 2,4x – y = 0
la droite de régression de X en Y a pour équation : 3,5 y – 9 x + 24 = 0.
a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y, sachant que leur covariance est positive.
b) Calculer la moyenne de chacun des caractères X et Y.

Exercice 20 ***Extrait du BAC 2010 Série S2 session de remplacement***

Le tableau suivant donne le montant y en millions de dollars des droits de retransmission télévisée des jeux olympiques d'été de 1972 à 1992 avec x le rang.

Ville et année	Rang de l'année xi	Montant yi
Munich 1972	1	15,2
Montréal 1976	2	29,5
Moscou 1980	3	92,6
Los Angeles 1984	4	288,0
Séoul 1988	5	402,0
Barcelone 1992	6	634,5

1) Représenter les nuages de points Mi (xi, yi) dans le plan muni d'un repère orthogonal. Unité graphique : 2 cm pour un rang sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 50 millions de dollars sur l'axe des ordonnées.
2) On pose z = lny.
Déterminer l'équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés. Les valeurs zi de z, les coefficients a et b de la droite de régression seront arrondis au centième prés.
3) Déduire de la question précédente une relation entre y et x de la forme y = $\alpha\ \beta^x$. Les coefficients α et β seront arrondis au centième prés.
4) A l'aide de la question précédente, donner une estimation de ce que devrait être le montant des droits de retransmission pour les jeux olympiques d'Atlanta en 1996.

Exercice 21 ***Extrait du BAC 2011 Série S2 session de remplacement***

Historiquement, on avait décidé de numéroter les planètes du système solaire suivant leur distance moyenne au soleil.
On considère la série statistique double (i, di) où i représente le numéro d'ordre de la planète et di la distance au soleil de la planète i (en millions de kilomètres).

Planètes	*Mercure*	*Vénus*	*Terre*	*Mars*	*Cérès*	*Jupiter*	*Saturne*	*Uranus*
Numéro d'ordre i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Distance di ausoleil	*57,94*	*108,27*	*149,60*	*228,06*	*396,44*	*778,73*	*1427,7*	*2872,4*

1) On pose $y_i = ln\ (d_i - d_1)$, avec i ∈ {2, 3, 4, 5, 6, 7,8}.
a) Compléter le tableau en donnant les valeurs de yi au dixième près.

i	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
yi	*3,9*						

b) Construire le nuage de points Mi (i, yi), 2 ≤ i ≤ 8, de cette série notée (i, y) dans un repère orthonormal, unité graphique : 2 cm.
c) Déterminer par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression (D) de y en i, i ∈ {2, 3, 4, 5, 6, 7,8}.
Donner les formules, ensuite les résultats à 10-3 près.
2) a) Sachant que y(i) = y_i, déduire de ce qui précède que : d_i = 57,94 + 11,965 $(1{,}958)^i$.
(les coefficients sont arrondis à 10-3 près).
b) Calculer la distance moyenne probable au soleil d'une planète numérotée 9.
(Ce résultat est connu sous le nom de loi de Titius – Bode du nom de deux astronomes allemands qui permirent la découverte de Neptune n°9 en 1848)

Exercice 22 **Extrait du BAC 2013 Série S2**

Le tableau statistique ci-dessous donne le degré de salinité Y_i du lac rose pendant le $i^{ème}$ mois de pluie noté X_i

X_i	0	1	2	3	4
Y_i	4,26	3,4	2,01	1,16	1,01

Dans ce qui suit il faudra rappeler chaque formule le cas échéant, avant de faire les calculs. On donnera les valeurs approchées par excès des résultats à 10^{-3} près.
1) a) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de cette série (X, Y) et interpréter le résultat.
b) Quelle est l'équation de la droite de régression de Y en X.
c) Cette équation permet-elle d'estimer le degré de salinité du lac au 6ième mois de pluie, le cas échéant ? Justifier la réponse.
2) On pose $Z = \ln(Y - 1)$
a) Donner le tableau correspondant à la série (X, Z). Les résultats seront arrondis au millième près.
b) Donner le coefficient de corrélation linéaire de cette série (X , Z).
c) Donner l'équation de la droite de régression de Z en X, puis exprimer Y en fonction de X.

d) Utiliser cette équation pour répondre à la question 1/c).

Exercice 23 **Extrait du BAC 2009 Série S2 session de remplacement**

Le tableau suivant indique les quantités de riz (en millions de tonnes) importées par un pays pendant 7 années successives.

Rang de l'année 1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Quantités importées X_i	**615**	**597**	**580**	**510**	**500**	**498**	**487**

*Un riziculteur propose une politique agricole dénommée **GOANAR** (Grande offensive Agricole pour la Nourriture et l'Abondance en Riz) dont l'objectif est de remplacer progressivement les importations par du riz local de qualité.*
Sa politique consiste à produire chaque année une quantité Y_i, en millions de tonnes proportionnelle au rang de l'année selon la relation : Yi = 31 i
***1)** Dresser le tableau de la série statistique (X_i ,Y_i).*
***2)** a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les deux variables X et Y.*
b) Interpréter le résultat du 2a).
***3)** Donner une équation de la droite de régression de Y en X.*
***4)** On suppose que cette évolution se maintient, estimer le rang de l'année où les importations sont égales à la production.*

__5)__ A partir de quelle année, l'importation représente les 10 % de la production, sachant que la première année correspond à 2008.

Exercice 24

Un fermier doit embaucher des ouvriers agricoles. Lors de précédents recrutements analogues, il a fait une étude statistique et a dressé le tableau suivant.Le salaire proposé est x et y est le nombre de candidatures .

Salaires proposés enF CFA	*60000*	*64000*	*68000*	*72000*
Nombre de candidatures	*11*	*17*	*20*	*25*

1) Donner l'équation de la droite de régression de y en x.
2) En déduire une estimation du salaire que doit proposer le fermier s'il veut recruter trente ouvriers

Exercice 25

La série statistique ci-dessous indique l'évolution du chiffre d'affaires (en millions de francs CFA) d'une entreprise suivant les années :

Années	*1999*	*2000*	*2001*	*2002*	*2003*	*2004*	*2005*	*2006*
Chiffre d'affaires(en millions de F CFA)	*5*	*8*	*10*	*13*	*16*	*18*	*19*	*20*

1) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.
2) Quel est le chiffre d'affaires prévu en l'an 2007 ?
3) En quelle année l'entreprise atteindra-t-elle un chiffre d'affaires de 25 millions ?

Exercice 26

Le tableau suivant recense, par clinique, le nombre de postes de personnel non médical en fonction du nombre de lits de la clinique :

Clinique	C*1*	C*2*	C*3*	C*4*	C*5*	C*6*	C*7*	C*8*	C*9*	C*10*	C*11*
Nombre lits X	*122*	*177*	*77*	*135*	*109*	*88*	*185*	*128*	*120*	*146*	*100*
Nombre de postes Y	*205*	*249*	*114*	*178*	*127*	*122*	*242*	*170*	*164*	*188*	*172*

1) Construire le nuage de points Mi(xi ; yi) correspondant à cette série statistique.
Unités graphiques :
en abscisse : 1 cm pour 10 lits
en ordonnée : 1 cm pour 20 postes.
2) Calculer les coordonnées du point moyen G *du nuage et le placer sur le graphique.*
3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r. *Un ajustement affine est-il justifié ?*
4) Déterminer une équation de la droite de régression D *de* y *en* x *par la méthode des moindres carrés.*
Tracer la droite D *sur le graphique. (Marquer les points utilisés pour tracer* D*)*
5) Une clinique possède 25 lits. En utilisant les résultats de la question 4, à combien peut-on estimer, par calcul,le nombre de postes de personnel non médical ? Illustrer sur le graphique.

Exercice 27

Un hypermarché dispose de 20 caisses.
Le tableau ci-dessous donne le temps moyen d'attente à une caisse en fonction du nombre de caisses ouvertes :

Nombre de caisses ouvertes X	*3*	*4*	*5*	*6*	*8*	*10*	*12*
Temps moyen d'attente (en minutes) Y	*16*	*12*	*9,6*	*7,9*	*6*	*4,7*	*4*

1) Construire le nuage de points Mi(xi ; yi) *correspondant à cette série statistique.*
Unités graphiques :
en abscisse : 1 cm pour une caisse ouverte

en ordonnée : 1 cm pour une minute d'attente.
2) Calculer les coordonnées du point moyen G *du nuage et le placer sur le graphique.*
3) Un ajustement affine.
a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r.
b) Déterminer, l'équation de la droite de régression D *de* y *en* x *par la méthode des moindres carrés.*
Tracer la droite D *sur le graphique. (Marquer les points utilisés pour tracer* D*)*
c) Estimer à l'aide d'un calcul utilisant l'équation de la droite D *:*
i) Le nombre de caisses à ouvrir pour que le temps moyen d'attente à une caisse soit de 5 minutes.
ii) Le temps moyen d'attente à la caisse lorsque 15 caisses sont ouvertes.
iii) Pensez-vous que, dans le cas de la question ii), l'ajustement affine soit fiable ?
4) Un ajustement non affine.
On considère la fonction f définie sur]0 ; +∞[par : $f(X) = \frac{\lambda}{x}$
a) Déterminer λ de façon à avoir : $f(3) = 16$.
b) Tracer alors la représentation graphique C *de f dans le repère utilisé pour le nuage.*
c) Estimer à l'aide d'un calcul utilisant la fonction f :
i) Le nombre de caisses à ouvrir pour que le temps moyen d'attente à une caisse soit de 5 minutes.
ii) Le temps moyen d'attente à la caisse lorsque 15 caisses sont ouvertes.

DÉNOMBREMENT

I) Théorie des ensembles

1) Notion d'ensemble

On appelle ensemble toute collection d'objets définis sans ambiguïté (c'est-à-dire que, pour tout objet, on peut dire si oui ou non il fait partie de l'ensemble). Soit E un ensemble, On note $x \in E$ pour indiquer que l'objet x est un élément de l'ensemble E.
On peut définir un ensemble de deux façons :

- *En donnant la liste exhaustive de ses éléments.*

Exemple : $A = \{1, -1, 0, 3, 4\}$
A est un ensemble et 1 , -1 ,0 , 3 et 4 sont des objets ou des éléments de A .

- *En donnant une propriété caractéristique de ses éléments.*

Exemple : E = {0, 2, 4, 6, 8}
On peut aussi dire que E est l'ensemble des entiers naturels pairs inférieurs à 9. $2 \in E$. $3 \notin E$.

2) Ensemble fini

Un ensemble est dit fini si l'on peut compter ses éléments.
Il est dit infini dans le cas contraire .

3) Cardinal d'un ensemble fini

Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé cardinal de l'ensemble E et noté Card(E) .

Exemple

1) Soit $A = \{1, -1, 0, 3, 4\}$
On a Card(A) = 5
2) Soit $B = \{a, b\}$
On a Card(B) = 2

4) Ensemble vide

Nous admettrons qu'il existe un seul ensemble qui ne contient aucun élément. Cet ensemble est appelé ensemble vide et noté $\emptyset$.

On pose par convention Card($\emptyset$) = 0

5) Inclusion

On dit qu'un ensemble A est un sous-ensemble ou une partie d'un ensemble B si tout élément de A est également élément de B. On note $A \subset B$.
Si $a \in A$ et $A \subset B$ alors $a \in B$

L'ensemble de toutes les parties d'un ensemble E est un nouvel ensemble noté $\mathscr{P}(E)$.

6) Intersection de deux ensembles

On appelle intersection de deux ensembles A et B noté $A \cap B$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B.

On a $a \in A \cap B \iff a \in A$ et $a \in B$

- *Si $A \cap B = \emptyset$ alors on dit que les ensembles A et B sont disjoints .*

7) *Réunion de deux ensembles*

On appelle réunion de deux ensembles de A et B notée $A \cup B$, l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B.

$$a \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad a \in A \quad \text{ou} \quad a \in B$$

8) *Propriété de l'intersection et de la réunion*

- ***Idempotence : Pour tout ensemble A :*** $A \cap A = A$ ***et*** $A \cup A = A$.
- ***Associativité : Pour tous ensembles A, B et C :***
  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ***et*** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
- ***Commutativité : Pour tous ensembles A et B :*** $A \cup B = B \cup A$ ***et*** $A \cap B = B \cap A$.
- ***Distributivité : Pour tous ensembles A, B et C :***
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ***et*** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

9) *Complémentaire d'un ensemble*

Soit E un ensemble et A un sous ensemble de E .
On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A. On le note $E \setminus A$, ou $\overline{A}$, ou encore C_E^A .

On a $a \in \overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad a \in E \quad \text{et} \quad a \notin A$

- ***On a*** $A \cap \overline{A} = \emptyset$ ***et*** $A \cup \overline{A} = E$

10) *Formule de MORGAN*

Soient A et B deux parties d'un même ensemble E , Alors on a

- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

11) *Différence de deux ensembles*

La différence de A et B (pris dans cet ordre) notée $A \setminus B$ est l'ensemble des éléments qui sont dans A mais pas dans B.

$$a \in A \setminus B \quad \Leftrightarrow \quad a \in A \quad \text{et} \quad a \notin B$$

- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
- $\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B)$

12) *Différence symétrique de deux ensembles*

La différence symétrique de A et B notée $A \Delta B$ est l'ensemble des éléments qui sont dans l'un et un seul des ensembles A et B.

$$[a \in (A \Delta B)] \Leftrightarrow [(a \in A \text{ et } a \notin B) \text{ ou } (a \in B \text{ et } a \notin A)]$$

- $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- $\text{Card}(A \Delta B) = \text{Card}(A \cup B) - \text{Card}(A \cap B)$

13) ***<u>Partition d'un ensemble</u>***

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n parties d'un même ensemble E. On dit qu'elles constituent une partition de E si et seulement si :
1) Elles sont tous non vides : $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad A_i \neq \emptyset$.
2) Elles sont disjointes deux à deux :
$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \text{ avec } i \neq j, \text{ on a } A_i \cap A_j \neq \emptyset.$$
3) Leur réunion est égale à E : $\quad A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$.

14) ***<u>Produit cartésien</u>***

On appelle produit cartésien de A et B noté A × B, l'ensemble de tous les couples de la forme (x ; y), où x est un élément quelconque de A et y un élément quelconque de B.

$$A \times B = \{ (x,y) \,/\, x \in A \text{ et } y \in B\}$$

A × B on lit A croix B

- $A \times B \neq B \times A \quad \text{si } A \neq B$
- $A \times A = A^2$
- $\underbrace{A \times A \times A \times A \times A \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times A}_{p\ fois} = A^p \qquad \forall p \in IN^*$

Exemple

1) Si A = {a, b, c} et B = {1, 2}, alors A × B = {(a,1); (a,2); (b,1); (b,2); (c, 1); (c, 2)}.

2) Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'ensemble des couples coordonnées des points M(x,y) est le produit cartésien IR × IR .

15) ***<u>Principes de dénombrement</u>***

a) ***<u>Principe additif</u>***

Nous admettrons la propriété suivante, appelée Principe Additif :
Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ constituent une partition d'un ensemble E , alors :
$$Card(E) = card(A_1) + Card(A_2) + \ldots\ldots + Card(A_n) = \sum_{i=1}^{n} Card(A_i).$$

CONSÉQUENCES

Soient A et B deux parties d'un même ensemble fini E. On a les relations suivantes :
- ***Si A et B sont disjoints alors $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$.***
- ***Formule des 4 cardinaux***

Si A et B sont quelconques alors : $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$.
- ***$Card(\bar{A}) = Card(E) - Card(A)$.***

Démonstration

1) A et B étant disjoints constituent une partition de $A \cup B$. D'où, d'après le principe additif :
$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$.
2) $(A \cap B)$ et $(A \setminus B)$ constituent une partition de A. D'où :
$Card(A) = Card(A \cap B) + Card(A \setminus B)$ (1).
B et $(A \setminus B)$ constituent une partition de $(A \cup B)$. D'où:
$Card(A \cup B) = Card(B) + Card(A \setminus B)$ (2).

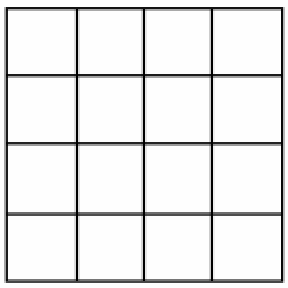
D'après (1), on a donc : Card(A \ B) = Card(A) ─ Card(A ∩ B) et en reportant cette expression dans (2), on obtient: Card(A ∪ B) = Card(B) + Card(A) ─ Card (A ∩ B), d'où le résultat.

3) A et A constituent une partition de E donc Card($\bar{A}$) + Card(A) = Card(E), d'où

Card($\bar{A}$) = Card(E) ─ Card(A) .

Exercice d'application

Combien y a-t-il de carrés sur la figure ci-dessous?



Solution

Soit E l'ensemble de tous ces carrés. Notons A_1, A_2, A_3, A_4 respectivement l'ensemble de ces carrés ayant pour côtés 1, 2, 3 et 4 carreaux. Les sous-ensembles A_1, A_2, A_3, A_4 constituent une partition de E (puisqu'ils n'ont pas d'élément en commun et que leur réunion est égale à E).D'après le principe additif,

Card(E) = Card(A_1) + Card(A_2) + Card(A_3) + Card(A_4) = 16 + 9 + 4 +1 = 30.

b)<u>Principe multiplicatif</u>

Nous admettrons la propriété suivante, appelée Principe Multiplicatif :

Soient n ensembles A_1, A_2,…., A_n donnés. Alors :

$$Card(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = card(A_1) \times Card(A_2) \times \ldots\ldots \times Card(A_n) = \prod_{i=1}^{n} Card(A_i)$$

- ***Dans la pratique, ce principe s'applique sous la forme équivalente suivante:***
  Si une situation comporte p étapes offrant respectivement n_1, n_2, ... ,n_p possibilités alors le nombre total d'issues est : $n_1 \times n_2 \times \ldots \ldots\ldots \times n_p$

CONSÉQUENCES

Soient A et B deux ensembles finis . On a les relations suivantes :

- ***Card (A × B) = Card (A) × Card (B)***
- ***Card (A^p) = ($Card(A)$)^p $\forall$ p ∈ IN****

Exercices d'application

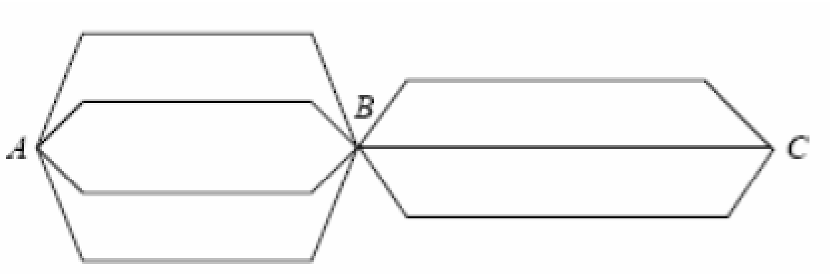
- *Le menu d'un restaurant propose un certain jour pour le repas de midi 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts. De combien de façons un client peut-il composer son menu ce jour là ?*

Le choix d'un menu est une situation qui comporte 3 étapes :
choix d'une entrée : 3 possibilités
choix d'un plat de résistance : 4 possibilités
choix d'un dessert : 2 possibilités.
D'après le principe multiplicatif, le nombre total de choix possibles est : 3 × 4 × 2 = 24 menus différents.

- *Un code comporte deux lettres distinctes suivies d'un chiffre non nul. Combien peut-on former de codes distincts ?*

Les trois étapes : choix de la première lettre, de la deuxième, puis du chiffre offrent respectivement 26, 25 et 9 possibilités. Le nombre cherché est donc 26 × 25 ×9 = 5850 codes distincts.

- *Nombre d'itinéraires distincts menant de A à C ? Nombre d'itinéraires "aller retour" A-C-A* *n'empruntant que des chemins distincts ?*



Aller simple A- C : 4 $\times$ 3 = 12
Aller retour A- C - A : 4 $\times$ 3 $\times$ 2 $\times$ 3 = 72.

16)<u>Factorielle n</u>

Soit $n \in IN^*$, on appelle factorielle n noté n ! le produit de tous les entiers naturels de 1 à n .

On a : $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1$

- ***On pose par convention $0! = 1$***

n ! lire factorielle n et non pas n factorielle .

Exemple

1) $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

2) $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$

17)<u>Anagramme d'un mot</u>

L'anagramme d'un mot est un mot formé à partir de toutes les lettres de ce mot .

Le nombre d'anagramme d'un mot donné est le nombre de mots distincts que l'on peut former avec toutes les lettres du mot initial .

Exemple

Donner le nombre d'anagramme des mots suivants :

1) FEMME 2) HOMME 3) ABABACAR 4) LAMPE

Solution

Donnons le nombre d'anagramme des mots suivants :

1) FEMME

Le nombre d'anagramme de FEMME est $n = \frac{5!}{2! \times 2!} = 30$

2) HOMME

Le nombre d'anagramme de HOMME est $n = \frac{5!}{2!} = 60$

3) ABABACAR

Le nombre d'anagramme de ABABACAR est $n = \frac{8!}{4! \times 2!} = 840$

4) LAMPE

Le nombre d'anagramme de LAMPE est n = 5 ! = 120

II)<u>Outils de dénombrement</u>

1)<u>Notion de p-listes</u>

On appelle une p- liste de E ou p- uplet d'éléments de E toute suite constituée par p éléments de E distincts ou non (Chacun des éléments de E peut être pris autant de fois que l'on veut) . Les p éléments sont ordonnés .

Elle est notée $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}, \dots\dots\dots\dots.., \boldsymbol{x_p})$ ***avec*** $\boldsymbol{x_i} \in \boldsymbol{E} \ \forall \boldsymbol{i} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \dots\dots.., \boldsymbol{p}\}$

- ***Remarque***

Une p- liste de E est un élément de E^p ***donc le nombre de p- liste de E est le nombre d'éléments de*** E^p ***.***

- ***Théorème***

Soit E un ensemble de cardinal fini n. Alors le nombre des p-listes de E est $\boldsymbol{n^p}$ ***.***
Autrement dit le nombre de p- liste d'éléments d'un ensemble E à n éléments est $\boldsymbol{n^p}$ ***.***

Démonstration

Pour constituer une p-liste de E, on doit suivre les p étapes suivantes :

- *choix du premier élément de la liste : n possibilités.*
- *choix du deuxième élément de la liste : n possibilités.*
- *………………………………………………..*
- *………………………………………………..*
- *choix du p-ième élément de la liste : n possibilités.*

En effet, comme il est possible de répéter les éléments de la liste, on a à chaque étape autant de possibilités qu'il y a d'éléments dans E, soit n possibilités.
D'après le Principe multiplicatif, le nombre total de façons de constituer la p-liste est
$\underbrace{n \times n \times n \times n \times n \times \dots\dots\dots\dots.. \times n}_{p \ fois}$ *, soit* n^p *.*

Exercice d'application

Soit $E = \{a, b, c\}$

1)Former les 1- listes d'éléments de E.

2) Former les 2- listes d'éléments de E.

3) Former quelques 4- listes d'éléments de E.

Solution

Soit $E = \{a, b, c\}$

1)Formons les 1- listes d'éléments de E.

Le nombre de 1- listes d'éléments d'un ensemble E à 3 éléments est $3^1 = 3$ *.*

Les 1- listes d'éléments de E sont (a) , (b) et (c)

2) Former les 2- listes d'éléments de E.

Le nombre de 2 - listes d'éléments d'un ensemble E à 3 éléments est $3^2 = 9$.

Les 2 - listes d'éléments de E sont :
(a , a) , (a, b) , (a, c) , (b , b) , (b, a) , (b, c) , (c , c) , (c, b) , (c, a)

3) Former quelques 4- listes d'éléments de E.

Le nombre de 4 - listes d'éléments d'un ensemble E à 3 éléments est $3^4 = 81$

Les 4 - listes d'éléments de E sont :
(a , a,a, a) , (a, b, a ,a) , (a, c,a, a) , (b , b, a, a) , (b, a, c, c) , (b, c,b, b) ……

Situation d'utilisation de la formule n^p

- ***SITUATION 1***

Dans toute situation où le résultat est caractérisé par l'ordre et la remise, on peut utiliser la formule n^p.

- ***SITUATION 2***

Dans toute expérience de tirages successifs avec remise , on peut utiliser la formule n^p.

- ***SITUATION 3***

Dans toute expérience où le résultat correspondant à une application d'un ensemble vers un autre ensemble , on peut utiliser la formule n^p.

Le nombre d'applications d'un ensemble A vers un autre ensemble B est égal à $(Card(B))^{Card(A)}$

- ***Remarque***

Une utilisation fréquente des p – listes est le tirage successif avec remise .

Exercice d'application

Une urne contient 5 boules noires , 2 boules jaunes et 6 boules rouges . On tire successivement et avec remise 3 boules de l'urne .

1)Déterminer le nombre de tirages possibles .

2) Déterminer le nombre de tirages dont la première boule est rouge .

3) Déterminer le nombre de tirages ne contenant aucune boule rouge .

4) Déterminer le nombre de tirages formés de boules de même couleur .

5) Déterminer le nombre de tirages formés de boules de couleurs différentes .

Solution

L'urne contient 5 boules noires , 2 boules jaunes et 6 boules rouges .On a donc 13 boules dans l'urne

On tire successivement et avec remise 3 boules de l'urne .

On a : n = 13 et p = 3

1)Déterminons le nombre de tirages possibles .

Soit Ω l'ensemble des tirages possibles .

On a $\boxed{Card\,(\,\Omega\,) = 13^3 = 2197}$

2) Déterminons le nombre de tirages dont la première boule est rouge .

Soit A l'ensemble des tirages dont la première boule est rouge .

On a $\boxed{Card\,(\,A\,) = 6^1 \times 13^2 = 1014}$

3) Déterminer le nombre de tirages ne contenant aucune boule rouge .

Soit B l'ensemble des tirages ne contenant aucune boule rouge .

On a $\boxed{Card\,(\,B\,) = 7^3 = 343}$

4) Déterminons le nombre de tirages formés de boules de même couleur

Soit C l'ensemble des tirages formés de boules de même couleur

On a $\boxed{Card(\,C\,) = 5^3 + 6^3 + 2^3 = 349}$

5) Déterminons le nombre de tirages formés de boules de couleurs différentes .

Soit D l'ensemble des tirages formés de boules de couleurs différentes .

On $\boxed{a \quad Card(\,D\,) = (\,6^1 \times 5^1 \times 2^1\,) \times 6 = 360}$

6 = 3 ! qui est le nombre d'anagramme de RNJ .

Exercice d'application

Papi veut ranger 7 livres dans 3 casiers . U n casier peut contenir 0 à 7 livres.

Déterminer le nombre de rangements possibles .

Solution

Le rangement correspond à une application de l'ensemble des livres vers l'ensemble des casiers .

$\boxed{\text{Le nombre de rangements possibles est } 3^7 = 2187}$

***2)**<u>**Notion de p - arrangements**</u>*

On appelle un p- arrangement d'éléments d'un ensemble E toute suite constituée par p éléments de E distincts (Un élément de E déjà pris ne peut plus être repris) . Les p éléments sont ordonnés .

Elle est notée $(\,x_1, x_2\,, x_3\,, \dots\dots\dots\dots\dots, x_p\,)$

avec $x_i \in E \;\; \forall\, i \in \{1, 2, 3, 4, \dots\dots, p\}$ ***et*** $x_i \neq x_j \quad \forall\, i \neq j$ **.**

- ***Théorème***
  Soit E un ensemble de cardinal fini n et p un entier naturel tel que 0 ≤ p ≤ n.
  Le nombre d'arrangements de p éléments de E est :
  $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots\dots\dots \times (n-p+1)$
  Autrement dit le nombre de p – arrangement d'éléments d'un ensemble à n éléments est
  A_n^p ***défini par*** $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots\dots\dots \times (n-p+1)$
  On a la formule suivante $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$, $avec\ p \leq n$

Démonstration

Pour constituer un arrangement de p éléments de E, on doit d'abord choisir le 1er élément, ce qu'on peut faire de n façons, puis le 2e élément, ce qu'on peut faire de (n — 1) façons, car il doit être distinct du premier, etc..., et enfin le p-ième élément ce qu'on peut faire de n — (p — 1) façons.
D'après le Principe multiplicatif, il y a au total n × (n — 1) × .... × [n — (p — 1)] façons de constituer l'arrangement.

- ***Remarque***

Pour former un p – arrangement d'éléments d'un ensemble à n , il faut que p ≤ n.
Un p-arrangement (ou arrangement de p éléments) de E est une p-liste d'éléments distincts de E.

- ***Remarque***

Si n = p alors on dit que cet arrangement est une permutation . Autrement dit une permutation de E est un arrangement de tous les éléments de E .
Une permutation de E est un arrangement des n éléments de E.
Le nombre de permutations de E est : $A_n^n = n\,!$

Exemple

1) A_n^p *est le produit de p entiers consécutifs décroissant à partir de n.*
A_8^3 *= 8 × 7 × 6 = 336 .*
A_{2008}^4 *= 2008 × 2007 × 2006 × 2005 = 16 209 006 133 680.*
2) On obtient le nombre A_n^p *sur la plupart des calculatrices en utilisant la touche nPr*

Exercice d'application

Soit $E = \{a, b, c\}$

1)Former les 1- *arrangements d'éléments de E.*

2) Former les 2- *arrangements d'éléments de E.*

3) Former les 3 - *arrangements d'éléments de E.*

4) Former les 4- *arrangements d'éléments de E.*

Solution

Soit $E = \{a, b, c\}$

1)Formons les 1- arrangements d'éléments de E.

Le nombre de 1- *arrangements d'éléments d'un ensemble E à 3 éléments est* $A_3^1 = 3$.

Les 1- *arrangements d'éléments de E sont (a) , (b) et (c)*

2) Formons les 2- arrangements d'éléments de E.

Le nombre de 2 - *arrangements d'éléments d'un ensemble E à 3 éléments est* $A_3^2 = 6$.

Les 2 – arrangements d'éléments de E sont :

(a , b) , (a, c) , (b, c) , (b , a) , (c, a) , (c, b)

3) Formons les 3 - arrangements d'éléments de E.

Le nombre de 3 - arrangements d'éléments d'un ensemble E à 3 éléments est $A_3^3 = 6$.

Les 3 – arrangements d'éléments de E sont :

(a , b, c) , (a, c, b) , (b, c, a) , (b , a, c) , (c, a , b) , (c, b, a)

4) Formons les 4- arrangements d'éléments de E.

Ceci est impossible car 4 > Card(E) = 3 .

Situation d'utilisation de la formule A_n^p

- **SITUATION 1**

Dans toute expérience où le résultat est ordonné sans répétition possible, on peut utiliser la formule A_n^p **.**

- **SITUATION 2**

Dans toute expérience de tirages successifs sans remise , on peut utiliser la formule A_n^p **.**

- **SITUATION 3**

Dans toute expérience où le résultat correspondant à une injection d'un ensemble vers un autre ensemble , on peut utiliser la formule A_n^p **.**

Le nombre d'injections d'un ensemble A vers un autre ensemble B est égal à $A_{Card\,(B)}^{Card\,(A)}$

- ***Remarque***

Une utilisation fréquente des p – arrangements est le tirage successif sans remise .

Exercice d'application

Une urne contient 4 boules noires , 2 boules jaunes et 6 boules rouges . On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne .

1)Déterminer le nombre de tirages possibles .

2) Déterminer le nombre de tirages dont la première boule est rouge .

3) Déterminer le nombre de tirages ne contenant aucune boule rouge .

4) Déterminer le nombre de tirages formés de boules de même couleur .

5) Déterminer le nombre de tirages formés de boules de couleurs différentes .

Solution

L'urne contient 4 boules noires , 2 boules jaunes et 6 boules rouges .On a donc 12 boules dans l'urne

On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne .

On a : n = 12 et p = 3

1)Déterminons le nombre de tirages possibles .

Soit Ω l'ensemble des tirages possibles .

On a $\boxed{Card\ (\ \Omega\ ) =\ A_{12}^3\ =\ 1320}$

2) Déterminons le nombre de tirages dont la première boule est rouge .

Soit A l'ensemble des tirages dont la première boule est rouge .

On a $\boxed{Card\ (\ A\ ) = A_4^1\ \times\ A_{11}^2\ =\ 440}$

3) Déterminer le nombre de tirages ne contenant aucune boule rouge .

Soit B l'ensemble des tirages ne contenant aucune boule rouge .

On a $\boxed{Card\ (\ B\ ) = A_6^3\ =\ 120}$

4) Déterminons le nombre de tirages formés de boules de même couleur

Soit C l'ensemble des tirages formés de boules de même couleur

On a $\boxed{Card(\ C\ ) = A_6^3 +\ A_4^3\ =\ 144}$

5) Déterminons le nombre de tirages formés de boules de couleurs différentes .

Soit D l'ensemble des tirages formés de boules de couleurs différentes .

On a $\boxed{Card(\ D\ ) = (\ A_6^1\ \times\ A_4^1\ \times\ A_2^1\ )\ \times\ 6 = 288}$

6 = 3 ! qui est le nombre d'anagramme de RNJ .

Exercice d'application

Dans une ville, il y a 10 salles de cinéma .5 élèves désirent se rendre au cinéma en même temps dans les différentes salles .

Déterminer le nombre de tirages possibles .

Solution

Cette situation correspond à une injection de l'ensemble des élèves vers l'ensemble des salles de cinéma .

$\boxed{\text{Le nombre de tirages possibles est } A_{10}^5 = 30240}$

- ***Remarque***

Au moins x $= \geq x\ = x\ ,\ x+1\ ,\ x+2\ ,\ x+3\ , \dots\dots\dots\dots +\infty$.

Au plus x $= \leq x\ = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ , \dots\dots\dots\dots, x-1\ ,\ x$.

$\overline{\text{Au moins } x}$ = *Au plus x – 1 . C'est-à-dire le complémentaire de Au moins x est Au plus x – 1 .*

$\overline{\text{Au plus } x}$ = *Au moins x + 1 . C'est-à-dire le complémentaire de Au plus x est Au moins x + 1 .*

3)<u>Notion de p - combinaison</u>

Soit E un ensemble donné . On appelle une p – combinaison d'éléments de E toute partie (ou sous ensemble) constituée par p éléments de E . Les p éléments sont distincts .

Elle est notée $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots\dots\dots, x_p\}$

avec ***avec*** $x_i \in E \ \forall\, i \in \{1, 2, 3, 4, \dots\dots.., p\}$ ***et*** $x_i \neq x_j \quad \forall\, i \neq j$.

- ***Théorème***

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que 0 ≤ p ≤ n.
Une p- combinaison (ou combinaison de p éléments) de E est une partie de E ayant p éléments.

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ ***avec*** $p \leq n$.

Démonstration

Dénombrons les arrangements de p éléments d'un ensemble fini E de cardinal n.
Un arrangement est caractérisé par :
Le choix d'une partie de E à p éléments (Notons qu'il y a C_n^p *choix de telles parties)*
La façon d'ordonner les p éléments de la partie choisie (p! façons)
Le principe multiplicatif donne alors : $A_n^p = C_n^p \times p\,!$*, d'où le théorème.*

Interprétation importante : C_n^p *représente le nombre de façons de choisir p objets parmi n (l'ordre n'a pas d'importance).*

- ***Remarque***

1)Pour former une p – combinaison d'éléments d'un ensemble à n , il faut que $p \leq n$.
2)Deux parties qui contiennent les mêmes éléments sont égales.
Ainsi {a ; b} = {b ; a}. (L'ordre dans lequel on écrit les éléments n'a pas d'importance).
3)C_n^p *est souvent noté* $\binom{n}{p}$
4)On obtient le nombre C_n^p *sur la plupart des calculatrices en utilisant la touche nCr*

Exercice d'application

Soit $E = \{a, b, c\}$

1) Former les 0- combinaisons d'éléments de E.

2)Former les 1- combinaisons d'éléments de E.

3) Former les 2- combinaisons d'éléments de E.

4) Former les 3 - combinaisons d'éléments de E.

5) Former les 4- combinaisons d'éléments de E.

Solution

Soit $E = \{a, b, c\}$

1) Formons les 0- combinaisons d'éléments de E.

Le nombre de 0- combinaisons d'éléments d'un ensemble E à 3 éléments est $C_3^0 = 1$.

$\boxed{\text{Les 0- combinaisons d'éléments de E sont : } \emptyset}$

2)Formons les 1- combinaisons d'éléments de E.

Le nombre de 1- combinaisons d'éléments d'un ensemble E à 3 éléments est $C_3^1 = 3$.

$\boxed{\text{Les 1- combinaisons d'éléments de E sont :} \{a\} \ , \ \{b\} \ \text{ et } \ \{c\}}$

3) Formons les 2- combinaisons d'éléments de E.

Le nombre de 2- combinaisons d'éléments d'un ensemble E à 3 éléments est $C_3^2 = 3$.

$\boxed{\text{Les 2- combinaisons d'éléments de E sont :} \{a , b\} \ , \ \{b , c\} \ \text{ et } \{c , \ a\}}$

4) Formons les 3 - combinaisons d'éléments de E.

Le nombre de 3- combinaisons d'éléments d'un ensemble E à 3 éléments est $C_3^3 = 1$.

$\boxed{\text{Les 3- combinaisons d'éléments de E sont :} \{a , b \ , c \}}$

5) Formons les 4- combinaisons d'éléments de E.

Ceci est impossible car 4 > Card(E) = 3 .

<u>Situation d'utilisation de la formule C_n^p</u>

- **SITUATION 1**

Une p – combinaison est caractérisée par ni ordre , ni remise .

Dans toute situation où il n' y a pas d'ordre dans le résultat, on peut utiliser la formule C_n^p .

- **SITUATION 2**

Dans tous tirages simultanés , on peut utiliser la formule C_n^p .

- ***Remarque***

Une utilisation fréquente des p – combinaisons est le tirage simultané .

Exercice d'application

Une urne contient 3 foulards bleus et 4 foulards verts . On tire simultanément 2 foulards de l'urne .

1)Déterminer le nombre de tirages possibles .

2) Déterminer le nombre de tirages d'avoir au plus 1 foulard vert .

3) Déterminer le nombre de tirages formés de foulards de même couleur .

4) Déterminer le nombre de tirages formés de foulards de couleurs différentes .

Solution

L'urne contient 3 foulards bleus et 4 foulards verts 4 .On a donc 7 foulards dans l'urne

On tire simultanément 2 foulards de l'urne

On a : n = 7 et p = 2

1)Déterminons le nombre de tirages possibles .

Soit Ω l'ensemble des tirages possibles .

On a $\boxed{Card\ (\ \Omega\ ) = C_7^2 = 21}$

2)Déterminons le nombre de tirages d'avoir au plus 1 foulard vert .

Soit A l'ensemble des tirages d'avoir au plus 1 foulard vert .

Au plus 1 = 0 ou 1

Au plus 1 foulard vert = 0 foulard vert et 2 foulards bleus ou 1 foulard vert et 1 foulard bleu

On a $\boxed{Card\ (\ A\ ) = C_3^2 + C_4^1 \times C_3^1 = 15}$

3) Déterminons le nombre de tirages formés de foulards de même couleur .

Soit C l'ensemble des tirages formés de boules de même couleur

On a $\boxed{Card(\ C\ ) = C_4^2 + C_3^2 = 9}$

4) Déterminer le nombre de tirages formés de foulards de couleurs différentes .

Soit D l'ensemble des tirages formés de boules de couleurs différentes .

On a $\boxed{Card(\ D\ ) = (\ C_4^1 \times C_3^1\ ) \times 2 = 24}$

- ***Propriétés des*** C_n^p

1) Symétrie : Pour tout entier n et tout entier p tel que $0 \le p \le n$***, on a :*** $C_n^p = C_n^{n-p}$

En particulier, $C_n^0 = C_n^n = 1$ ***et*** $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

2) Formule de PASCAL Pour tout entier n et tout entier p tel que $1 \le p \le n - 1$***, on a :***

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

- ***Remarque***

Les coefficients C_n^p *sont encore appelés coefficient binomiaux .*

- ***Triangle de PASCAL***

La formule de Pascal permet de calculer les coefficient binomiaux de la façon suivante : pour trouver un certain coefficient, on additionne dans le tableau suivant les coefficients situés"juste au dessus" et "juste au dessus à gauche" entre eux :

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	…	$p-1$	p	…	$n-1$	n
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
…											
$n-1$	1	$n-1$					$\binom{n-1}{p-1}$	$\binom{n-1}{p}$		1	
n	1	n						$\binom{n}{p}$		n	1

Note historique
Le tableau est appelé triangle de Pascal en hommage à ce dernier qui écrivit en 1654 son "traité du triangle arithmétique" dans lequel il expose d'innombrables applications du triangle déjà connu de Tartaglia (1556), Stiefel (1543) et des Chinois (1303).

- ***Formule du binôme de NEWTON***

Pour tous nombres complexes a et b et tout entier naturel n non nul :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

- ***Tableau récapitulatif des outils de dénombrement***

Soient n et p deux entiers naturels .

Les tirages de p boules , dans une urne qui en contient n , modélisent de nombreux problèmes de dénombrement .

Modélisation	***Les p éléments sont ordonnés***	***Les p éléments sont distincts***	***Outil***	***Nombre de tirages***
Tirages successifs avec remise	***oui***	***non***	***p- liste de E***	n^p
Tirages successifs sans remise	***oui***	***oui***	***Arrangement de p éléments de E***	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
Tirages simultanés	***non***	***oui***	***Combinaisons de p éléments de E***	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

EXERCICES

Exercice1

D'un jeu de 32 cartes vous tirez quatre cartes ; de combien de manières différentes pouvez-vous le faire si :

a) le tirage est successif et avec remise ?

b) le tirage est successif et sans remise ?

c) le tirage est simultané ?

Exercice2

Une urne contient 6 boules rouges, 4boules noires, 2boules jaunes. On tire successivement et sans remise

3 boules de l'urne.

1) Déterminer le nombre de tirages possibles.

2) Déterminer le nombre de tirages dont la première boule est noire.

3) Déterminer le nombre de tirages contenant 3 boules de même couleur.

4) Déterminer le nombre de tirages contenant 3 boules de couleurs différentes.

Exercice3

Une urne contient 12 boules. On tire trois boules de cette urne.

Déterminer le nombre de tirages dans les trois cas suivants :

a) les boules sont tirées l'une après l'autre en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne ;

b) les boules sont tirées l'une après l'autre sans les remettre dans l'urne ;

c) les trois boules sont tirées simultanément.

Exercice4

Une urne contient 3 boules rouges, 4 boules vertes et 5 boules blanches. On tire successivement et avec remise 3 boules de cette urne.

Déterminer le nombre de tirages dans les deux cas suivants :

a) les trois boules tirées sont de la même couleur ;

b) la première et la troisième boule tirée sont vertes.

Exercice5

Une urne contient 3 boules rouges, 4 boules vertes et 5 blanches. On tire simultanément 3 boules de cette urne.

Déterminer le nombre de tirages dans les deux cas suivants :

a) une des boules au moins est blanche ; *b) il y'a au plus deux couleurs distinctes dans le tirage.*

Exercice6

Un jeu de 32 cartes est constitué de 4 couleurs : Pique, Cœur, Carreau et Trèfle contenant chacune l'As, le Roi,

La Dame, le valet, le 10, le 9, le 8 et le 7.il y'a donc 8 piques, 8 cœurs, 8carreaux et 8 trèfles.

On tire simultanément 5 cartes. Déterminer le nombre de tirages dans les cas suivants :

a) les 5 cartes sont quelconques

b) il y' a exactement 2 As parmi les 5 cartes

c) il y'a au moins 1 As parmi les 5 cartes

d) les 5 cartes sont de la même couleur

Exercice7

1)Une coopérative de 20 membres doit élire un bureau composé d'un président, d'un secrétaire général et d'un trésorier. Les statuts de la coopérative n'autorisent pas le cumul de postes.

Déterminer le nombre de bureaux possibles ?

2) On appelle anagramme d'un mot toute permutation des lettres de ce mot, en vue d'obtenir un nouveau mot qui a un sens ou non. Par exemple, EBIN et BENI sont des anagrammes du mot BIEN.

Déterminer le nombre d'anagrammes du mot AFRIQUE.

Exercice 8

Une classe de terminale comprend 20 filles et 15 garçons. Pour participer au concours Génie en herbe à la télévision, on veut former une équipe de 5 élèves.

1) Combien d'équipes peut-on former ?

2) Déterminer le nombre d'équipes comportant :

a) Exactement 3 filles ?
b) Aucun garçon ?
c) Au moins un garçon ?

Exercice 9

1) Une classe comporte 9 garçons et 3 filles.

a)De combien de manières le professeur peut-il faire un choix de 4 élèves ?

b)Combien de ces choix comportent au moins une fille ?

c)Combien comportent exactement une fille ?

2) Une classe de 30 élèves dont 12 filles doit élire un comité comprenant un Président, un Vice-président et un secrétaire.

Calculer le nombre de façons d'obtenir :

a)Un comité dont le poste de Secrétaire est occupé par une fille ?

b)Un comité pour lequel le Président est une fille et le Secrétaire est un garçon ?

c) Un comité pour lequel le Président et le Vice-président sont de sexes différents ?

Exercice 10

Un sac contient 10 boules blanches numérotées de 1 à 10 ; 2 boules rouges numérotées de 1 à 2 et 3 boules noires numérotées de 1 à 3.

1) On tire simultanément 3 boules du sac. Calculer le nombre de tirages contenant :

a)3 boules blanches

b) 3 boules de même couleur.

c) 3 boules portant le même numéro

2) On tire successivement sans remise 3 boules du sac. Calculer le nombre de tirages contenant :

a) 1 boule blanche, une boule noire et une boule rouge dans cet ordre.

b) Au moins une boule rouge

c) Au plus deux boules blanches.

Exercice 11

Au jeu de poker, chaque joueur dispose d'une main de 5 cartes, distribuées d'un jeu de 32 cartes (4 couleurs : trèfle, pique, cœur et carreau ; et pour chaque couleur, 8 valeurs de l'as au sept).

1) Dénombrer les mains de 5 cartes possibles.

2) Dénombrer les mains de 5 cartes contenant :

a) Un carré (4 cartes de même valeur)

b) Deux paires

c) Un full (trois cartes de même valeur et deux autres de même valeur : par exemple : 3 rois et 2 as)

d) Exactement une paire (deux cartes de même valeur)

Exercice 12

Un jury est composé de 7 membres tirés au sort parmi 12 hommes et 9 femmes.

1) Combien de jurys peut-on former ayant 3 femmes et 4 hommes.

2) Combien de jurys peut-on former ayant au moins une femme

3) Combien de jurys peut-on former sachant que Mademoiselle X refuse de siéger avec Monsieur Y ?

Exercice 13

A l'oral du bac, une élève doit répondre à 8 questions sur un total de 10.

1) combien y a-t-il de choix possibles ?

2) Combien y a-t-il de choix possibles si elle doit répondre aux 3 premières questions ?

3) Combien y a-t-il de choix possible s'il doit répondre au moins à 4 des 5 premières questions ?

Exercice 14

Un élève répond à un questionnaire à choix multiples (Q.C.M.) dans lequel il y a quatre réponses proposées par question (désignées par A, B, C, D) .

1) Combien y a-t-il de manières différentes de répondre si le Q.C.M. comporte 10 questions ?

2) Par jeu,il décide de répondre A à toutes les questions paires ; combien y a-t-il de réponses possibles pour cet élève en respectant ce critère ?

Exercice 15

Un fabriquant de chaussures réalise trois modèles différents. De plus, il peut faire chacun d'eux en trois couleurs et en quatre tailles différentes.

Combien de paires de chaussures distinctes peut-t-il proposer à sa clientèle ?

Exercice 16

Une course comporte seize chevaux.

1) Combien peut-on jouer de tiercés possibles ?

2) On joue le cheval n^o 10 à l'une des trois places. Combien peut-on jouer de tiercés où figure ce cheval ?

Exercice 17

On donne un système de trois inéquations du premier degré à deux inconnues en faisant suivre : $ax + by + c$, $a'x + b'y + c'$, $a''x + b''y + c''$ de l'un des signes < 0, > 0, ≤ 0, ≥ 0.

Combien peut-on former de tels systèmes ?

Exercice 18

1) Sans répétition, combien de nombres de trois chiffres peut-on former à l'aide des 6 chiffres 2, 3, 5, 6, 7, 9 ?

2) Combien de ces nombres sont :

a) pairs ? b) inférieurs à 500 ? c) impairs ? d) multiples de 5 ?

Exercice 19

Combien y a-t-il de mots de 5 lettres prises parmi {A, B, C, …., X,Y, Z} qui finissent par une voyelle ? par deux voyelles distinctes ?

Exercice 20

1) Combien de nombres inférieurs à 2000 peut-on fabriquer avec les chiffres 1, 2, 4 et 7 :

a) si aucun chiffre ne peut être répété ?

b) si les répétitions sont autorisées ?

2) Combien de ces nombres sont pairs ? impairs ?

Exercice 21

Soit A l'ensembles des 9 chiffres autres que 0 et p un entier naturel non nul .

1) Combien peut-on former de nombres de p chiffres pris dans A ?

2) Parmi les nombres ainsi formés, combien y en a-t-il qui :

a) finissent par 2 ? b) sont pairs ?

c) contiennent un seul chiffre 2 ?

d) contiennent au moins un chiffre 2 ?

e) contiennent des chiffres tous distincts ?

N.B Pour e), on discutera suivant les valeurs de p .

Exercice 22

On jette trois dés A, B, C ayant chacun six faces . Les faces de chaque dé sont numérotées de 1 à 6 . Dénombrer tous les résultats :

a) possibles b) où les trois faces sont identiques c) où les trois faces sont différentes deux à deux d) ne comportant aucun chiffre 1 e) comportant au moins un chiffre 1   f) comportant exactement un chiffre 1 g) comportant exactement deux chiffres 1 .

h) Indiquer les liens entre les questions d), e), f), g) et une autre question concernant le chiffre 1 qui n'a pas été posée .

Exercice 23 Tirages avec ou sans remise

Une urne contient 5 boules vertes, 6 boules jaunes et 7 boules rouges.

1) On tire successivement avec remise 3 boules. Dénombrer les résultats :

a) possibles b) tricolores c) unicolores d) contenant 2 jaunes suivies d'une rouge e) contenant 2 jaunes et une rouge.

2) Reprendre les questions précédentes dans le cas de tirages successifs sans remise.

Exercice 24

Huit coureurs, 3 Sénégalais et 5 étrangers participent à une course et sont classés de 1 à 8.

1) Quel est le nombre d'arrivées possibles ?

2) Quel est le nombre d'arrivées lorsque la course est gagnée par un Sénégalais ?

3) Quel est le nombre de possibilités pour qu'il y ait un Sénégalais et un seul parmi les trois premiers coureurs ?

Exercice 25

Les numéros d'un réseau téléphonique sont tous formés de 7 chiffres choisis parmi les chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 .

Exemples de numéros théoriquement acceptés : 000 00 00 ; 961 52 87 ; 022 23 33 ; etc….

Calculer le cardinal des ensembles suivants :

Ω : la capacité théorique du réseau.

A : ensemble des numéros composés de 7 chiffres distincts.

B : ensemble des numéros composés de 7 chiffres identiques.

C : ensemble des numéros ne contenant aucun chiffre 0.

D : ensemble des numéros contenant exactement un 0.

E : ensemble des numéros contenant au moins un 0.

F : ensemble des numéros contenant au plus un 0.

G : ensemble des numéros contenant au moins deux 0.

H : ensemble des numéros pairs, chaque numéro étant strictement inférieur à 7000000.

I : ensemble des numéros commençant par un chiffre pair et finissant par un chiffre impair strictement inférieur à 7.

Exercice 26

On lance trois fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Les résultats sont alors les triplets (a, b, c), où a, b et c sont des entiers de 1 à 6 .

1) Dénombrer tous les résultats possibles.

2) Dénombrer les triplets (a, b, c) tels que :

a) $a = b = c$; b) $a \neq b$ et $a \neq c$; c) $a \leq b$ et $b = c$; d) $a < b$.

3) Dénombrer les triplets (a, b, c) tels que :

a) $a = 1$ et $b \leq c$ b) $a = 2$ et $2 \leq b \leq c$; c) $a \leq b \leq c$.

Exercice 27

Une classe de 30 élèves, 18 filles et 12 garçons, doit élire un comité comprenant un président, un trésorier et un secrétaire (sachant qu'il n y a ni cumul ni discrimination)

1) Combien de comités peut-on ainsi constituer ?

2) Quel est le nombre de comités comprenant l'élève X ?

3) Quel est le nombre de comités pour lesquels le président est une fille et le secrétaire un garçon ?

4) Sachant que le président est un garçon, le secrétaire une fille, et que M.X ne veut pas faire partie du même comité que M^elle^ Y, quel est le nombre de comités possibles ?

Exercice 28

Soit le nombre 1234. On utilise les quatre chiffres de ce nombre et, en les permutant au hasard, on obtient un nombre de quatre chiffres. On dit qu'il y a coïncidence chaque fois qu'un chiffre retrouve sa place initiale. Ainsi, par exemple : si on compose le nombre 4213 il y a une coïncidence car le chiffre 2 a retrouvé sa place ;

si on compose le nombre 1324 il y a deux coïncidences ; si on compose le nombre 1234 il y a quatre coïncidences, etc.

1) Combien de nombres peut-on obtenir?

2) a) Existe-t-il des nombres présentant exactement trois coïncidences ?

b) Combien de nombres présentent exactement deux coïncidences ?

3) Dresser la liste des nombres qui présentent exactement une coïncidence.

En déduire combien de nombres ne présentent aucune coïncidence.

Exercice 29

On tire successivement 5 cartes dans un jeu de 32 cartes, en remettant à chaque fois la carte tirée dans le jeu, après avoir noté la couleur de cette carte.

On obtient ainsi une suite ordonnée de 5 cartes, non nécessairement distinctes.

1) Dénombrer tous les tirages possibles.

2) Dénombrer les tirages composés de :

a) 5 cartes de même couleur ; b) 4 cœurs et un pique ; c) 2 couleurs, dont l'une revient quatre fois ; d) exactement 4 trèfles et un roi .

Exercice 30

D'un jeu de 32 cartes, on tire successivement une première carte, puis une deuxième et une troisième, sans remettre dans le jeu les cartes tirées.

1) Dénombrer tous les tirages possibles.

2) Dénombrer les tirages tels que :

a) les trois cartes tirées soient des piques ; b) la 2^e carte tirée soit un pique ;

c) la 2^e carte tirée soit un roi et la 3^e un as ; d) la 2^e carte tirée soit un roi et la 3^e un pique e) les 1^{re} et 3^e cartes tirées soient des piques et la 2^e un roi.

Exercice 31

On constitue une grille de « Loto Sportif » en cochant l'une des 3 cases

1	N	2

pour chacun des 13 matches sélectionnés.

1) Dénombrer toutes les grilles possibles.

2) Une grille gagnante ayant été déterminée, dénombrer parmi toutes les grilles possibles, celles contenant n résultats justes pour n = 10, n = 11 et n = 12.

Exercice32

Lors d'un recrutement, un chef d'entreprise doit choisir 4 personnes parmi 20 candidats (13 femmes et 7 hommes).

1) Dénombrer les choix possibles de ce recrutement.

2) Dénombrer les choix de recrutement, si le chef d'entreprise désire embaucher :

a) trois femmes et un homme ; b) deux femmes et deux hommes ; c) au moins une femme ; d) au moins une femme et au moins un homme.

Exercice 33

On extrait simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes ;on obtient ainsi une main de 5 cartes .

1) Dénombrer les tirages possibles.

2) Retrouver parmi les réponses proposées, celles correspondant au nombre de mains :

a) contenant au moins un as ;

b) contenant trois trèfles et deux piques ;

c) ne contenant que des cœurs ou des carreaux ;

d) contenant exactement un as ;

e) ne contenant que des cœurs ou ne contenant que des carreaux.

1. $C_4^1 \times C_{31}^4$ 2. $(C_8^5)^2$ 3. C_{16}^5 4. $2 \times C_8^5$ 5. $C_8^3 \times C_8^2$ 6. $C_{32}^5 - C_{28}^5$ 7. $C_4^1 \times C_{28}^4$

(N.B. Deux parmi ces sept réponses sont fausses et correspondent à des erreurs souvent commises ; à méditer !)

Exercice 34

Coumba et Amadou font partie d'une assemblée de 17 hommes et 12 femmes.

Cette assemblée doit choisir six de ses membres pour constituer un comité.

1) Dénombrer les choix possibles pour constituer ce comité.

2) Dénombrer les comités :

a) contenant Coumba et Amadou ;

b) ne contenant ni Coumba ni Amadou ;

c) contenant Coumba ou Amadou (de deux façons).

3) Dénombrer les comités :

a) contenant deux femmes et quatre hommes ; b) contenant au moins deux hommes ; c) contenant au plus deux femmes ; d) contenant au moins une femme et au moins un homme.

Exercice 35

Au jeu de poker, chaque joueur dispose d'une main de 5 cartes, distribuées d'un jeu de 32 cartes (4 couleurs : trèfle, pique, cœur et carreau, et pour chaque couleur, 8 valeurs de l'as au sept) .

1) Dénombrer les mains de 5 cartes possibles.

2) Dénombrer les mains de 5 cartes contenant :

a) un carré (quatre cartes de même valeur) ; b) deux paires ; c) un full (trois cartes de même valeur et deux autres de même valeur ; par exemple : 3 rois et 2 as) ; d) exactement une paire (deux cartes de même valeur) ; e) un brelan (trois cartes de même valeur, sans full ni carré) ;

f) une quinte (cinq cartes de même couleur, se suivant dans l'ordre des valeurs ; par exemple : 9, 10, valet, dame et roi de pique).

Exercice 36

Au Loto, une grille simple est un choix de 6 numéros parmi {1, 2, ….., 48, 49}.

1) Quel est le nombre total de grilles que l'on peut jouer ?

2) Une grille gagnante ayant été déterminée, calculer, parmi toutes les grilles possibles, le nombre d'entre elles comportant exactement n bons numéros pour n = 5, n = 4, puis n = 3.

Exercice 37

Dans un sac, se trouvent cinq jetons verts numérotées de 1 à 5 et quatre jetons rouges numérotées de 1 à 4

.On tire simultanément trois jetons du sac .Combien y a-t-il de tirages :

a) possibles ? b) ne contenant que des jetons verts ? c) ne contenant aucun jeton vert ? d) contenant au plus deux jetons verts ?

Exercice 38

On a un jeu de 32 cartes. On en prend huit, ce qui constitue une main .Dénombrer les mains qui contiennent :

a) Exactement un as b) Exactement deux as c) Aucun as d) Au moins un as

e) 2 cœurs et 3 piques f) 2 cœurs, 3 piques et un trèfle g) 2 cœurs et 1 as

h) 2 cœurs et 2 dames

Exercice 39

Un marchand de timbres constitue des pochettes de quatre timbres qu'il tire au hasard d'un paquet contenant 10 timbres sénégalais, 20 timbres mauritaniens et 15 timbres gambiens.

De combien de façons peut-il constituer des pochettes :

1) qui contiennent quatre timbres d'un même pays ?

2) qui contiennent des timbres des trois pays ?

3) qui contiennent des timbres de deux pays seulement ?

Exercice 40

Un bana-bana présente en vrac un lot de 13 paires de chaussures. Les chaussures ne se différencient que par leurs pointures ou par le fait qu'elles sont soit du pied droit soit du pied gauche. Parmi les 13 paires, il y a 4 paires de la pointure 40, 6 paires de la pointure 41 et 3 paires de la pointure 42.

Un client choisit au hasard 2 chaussures dans le tas des 26 chaussures.

1) Combien y a-t-il de possibilités pour que les deux chaussures soient de pointures différentes ?

2) Combien y a-t-il de possibilités pour que les deux chaussures soient de la même pointure ?

3) Combien y a-t-il de possibilités pour que les deux chaussures soient du même pied ?

4) Combien y a-t-il de possibilités pour que les deux chaussures soient de pieds différents ?

Exercice 41

Un jury est composé de 7 membres tirés au sort parmi 12 hommes et 9 femmes.

1) Combien de jurys peut-on former ayant 3 femmes et 4 hommes ?

2) Combien de jurys peut-on former ayant au moins une femme ?

3) Combien de jurys peut-on former sachant que Mademoiselle X refuse de siéger avec Monsieur Y ?

Exercice 42

1) Démontrer que, pour tous entiers naturels n et p tels que $1 \leq p \leq n$ *, on a :*

$$p\,C_n^p = n\,C_{n-1}^{p-1}\ .$$

2) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$*, on a :*

$$C_n^1 + 2\,C_n^2 + 3\,C_n^3 + \ldots\ldots + n\,C_n^n = n\,2^{n-1}\ .$$

Exercice 43

Soit x un réel et n un entier naturel non nul .

1) Ecrire le développement de $(1 + x)^n$ *par la formule du binôme .*

2) En choisissant x convenablement, démontrer que :

a) $C_n^0 + 2\,C_n^1 + 2^2\,C_n^2 + \ldots\ldots + 2^p\,C_n^p + \ldots\ldots + 2^n\,C_n^n = 3^n.$

b) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots\ldots + (-1)^p\,C_n^p + \ldots\ldots + (-1)^n\,C_n^n = 0\ .$

Exercice44

1) Développer par la formule du binôme :

a) $(4x + \frac{1}{2}y)^4$ b) $(x - \frac{1}{x})^5$ c) $(x^2 + \frac{1}{x})^6$

Exercice 45

1) Montrer que, pour n et p entiers naturels, avec $p \leq n - 2$ *, on a :*

$$C_n^p + 2\,C_n^{p+1} + C_n^{p+2} = C_{n+2}^{p+2}\ .$$

2) Montrer que, pour n et p entiers naturels, avec $p \leq n - 3$ *, on a :*

$$C_n^p + 3C_n^{p+1} + 3C_n^{p+2} + C_n^{p+3} = C_{n+3}^{p+3}.$$

3) Montrer que, pour n et k entiers naturels, on a :

$$C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \dots\dots + C_{n+k}^n = C_{n+k+1}^{n+1}.$$

Exercice 46

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = (1 + x)^n$, où n est un entier naturel .

1) En utilisant la dérivée de f,

Calculer $S_1 = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots\dots + kC_n^k + \dots\dots + nC_n^n$.

2) Calculer $S_2 = 2.1\,C_n^2 + 3.2\,C_n^3 + \dots\dots + k(k-1)\,C_n^k + \dots\dots + n(n-1)\,C_n^n$.

Exercice 47

Simplifier les expressions suivantes:

$$\frac{n!}{(n-1)!},\ \frac{(n+1)!}{n!},\ \frac{n!}{(n-2)!},\ \frac{(n+1)!}{(n-3)!},\ \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!},\ \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n}{(n+1)!}$$

Exercice48

Démontrer la formule suivante :

$$A_n^p = A_{n-1}^p + p\,A_{n-1}^{p-1}.$$

En déduire la construction d'un triangle analogue au triangle de PASCAL dans lequel on fera apparaître les valeurs de A_n^p *pour* $1 \leq n \leq 8$.

Exercice 49

Démontrer les relations : $A_n^p = n\,A_{n-1}^{p-1}$ *et* $A_{n+1}^p = (n+1)\,A_n^{p-1}$.

Exercice 50

Résoudre les équations :

1) $C_n^3 + C_n^2 = 3n(n-1)$

2) $2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n$.

3) $C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 387.$

Exercice 51

1) En utilisant la formule du binôme de Newton, développer : $(1+i)^4$, $(1-\sqrt{2})^5$, $(\sqrt{2}+1)^5$

2) Montrer que $\forall\ n \in IN\backslash\{0\}$, $\sum_{k=1}^{n} k(k!) = (n+1)! - 1$.

3) Montrer que $\forall\ n,k \in IN\backslash\{0\}$, $C_n^k = \frac{n}{k}\, C_{n-1}^{k-1}$. *(a)*

Déduire que si $n \geq 2$ *et* $k \geq 2$*, alors* $C_n^k = \frac{n}{k}\,\frac{n-1}{k-1}\, C_{n-2}^{k-2}$ *(b)*

4) En utilisant (a) et (b), calculer les sommes suivantes :

$S = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k$ $T = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k$ $U = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k$

Exercice 52

Simplifier les expressions suivantes :

(i) $\frac{8!}{6!};\frac{15!}{6!9!};\frac{n!}{(n-2)!};(ii)\frac{(n+1)!}{(n-1)!};\frac{(n+i)!}{n!}$

(ii) Déterminer l'entier naturel n tel que :

$C_n^3 = 56$; $A_n^1 = 20$

Exercice 53

Sur 8224 voitures vendues par une société commerciale 5243 sont équipées d'un lecteur de cassettes tandis que 4932 sont équipées d'un climatiseur et 1927 ne possèdent ni cassette ni climatiseur.

Combien de voitures sont équipées à la fois d'un lecteur de cassettes et d'un climatiseur.

Exercice 54

On appelle ''mot'' toute permutation de lettres données. Avec toutes les lettres du mot FATICK combien peut on former de mots.

- *a) de 6 lettres ?*
- *b) de 6 lettres commençant par 2 consonnes ?*
- *c) de 6 lettres commençant par 2 voyelles ?*
- *d) de 6 lettres commençant et finissant par une voyelle ?*
- *e) de 6 lettres commençant par une consonne et finissant par une voyelle*

Exercice 55

On considère un clavier d'un téléphone à 10 chiffres que sont 0-1-2-3-4-5-6-7-8-9

On veut former un numéro à 8 chiffres.

1) *combien de numéro peut –on former ?*
2) *combien de ces numéros sont constitués de 8 chiffres tous distincts ?*
3) *combien de ces numéros ne comportent que des chiffres impairs ?*
4) *combien de ces numéros se terminent par un chiffre pair ?*

PROBABILITÉS

➢ INTRODUCTION

*Le Calcul de Probabilités est une des branches les plus récentes des mathématiques .Il a pour origine l'étude des jeux de hasard, l'exploitation des données statistiques concernant divers secteurs d'activités .***Condorcet** *énonce le principe général du Calcul de Probabilités :*

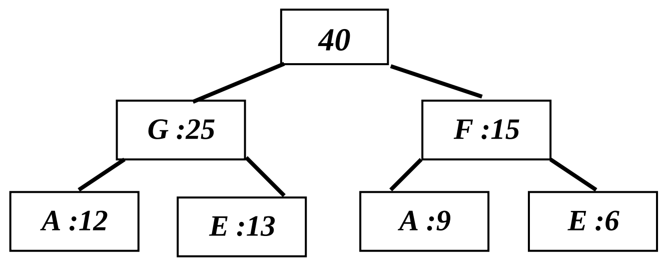
« Si , sur un nombre donné de combinaisons également possibles , il y'a en un nombre qui donne un événement et un autre nombre qui donne l'événement contraire , la probabilité de chacun des événements sera égale au nombre des combinaisons qui l'amènent divisé par le nombre total. »

➢ ACTIVITÉ INTRODUCTIVE

Mettre en évidence les principes multiplicatif et additif au moyen d'un arbre.

Une classe comporte 40 élèves, dont 25 garçons.

Parmi les garçons, 12 apprennent l'anglais et les autres l'espagnol. Parmi les filles, 9 apprennent l'anglais et les autres l'espagnol. On peut représenter ceci par l'arbre des effectifs ci-contre :



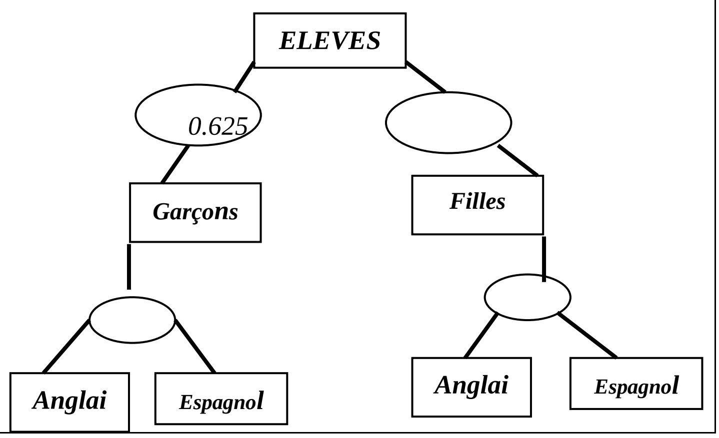
1) Les réponses aux questions suivantes seront données sous forme d'une fraction, puis d'un pourcentage, enfin d'un nombre compris entre 0 et 1.

1) a) La. Quelle est la proportion de filles dans la classe ? De garçons ?

1) b) Parmi les garçons, quelle est la proportion de ceux qui apprennent l'anglais ? L'espagnol ?

1) c) Parmi les filles, quelle est la proportion de celles qui apprennent l'anglais? L'espagnol?

2) Complétez l'arbre des fréquences ci-contre.
3) a) Calculez la proportion de garçons qui apprennent l'anglais parmi les élèves de la classe.
3) b) Calculez la proportion de filles qui apprennent l'anglais parmi les élèves de la classe.
3) c) Calculez la proportion d'élèves qui apprennent l'anglais.
3) d) Calculez la proportion d'élèves qui apprennent l'espagnol.



Remarque : on fera découvrir aux élèves les principes multiplicatif (questions 3)a) et 3)b) et additif (questions 3)c) et 3)d)) des arbres. Par exemple, on pourra énoncer :

«Dans la classe la proportion de garçons qui apprennent l'anglais est égale à la proportion d'anglicistes chez les garçons multipliée par la proportion de garçons dans la classe »

Et le traduire en terme de fraction : $\frac{12}{40} = \frac{12}{25} x \frac{25}{40}$

I)Vocabulaire

1)Expérience aléatoire

Une expérience est dite aléatoire si l'issu est imprévisible .

Exemple

1) On lance un dé et on note le numéro de la face supérieure. On ne peut pas prévoir à l'avance le résultat de cette expérience. On dit que c'est une expérience aléatoire.

2) On lance une pièce de monnaie. On ne peut pas prévoir à l'avance le résultat de cette expérience. On dit que c'est une expérience aléatoire.

2)L'univers des possibles

On appelle univers d'une expérience aléatoire noté Ω , l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience aléatoire .

Exemple

1)Lancer d' une pièce de monnaie .

L'univers associé à cette expérience est Ω ***= {P, F}***

2) Lancer un dé numéroté de 1 à 6 .

L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

3)Évènement

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire . On appelle évènement de Ω toute partie (ou sous ensemble) de Ω .

Exemple

Soit le Lancer un dé numéroté de 1 à 6 .

L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

$A = \{1, 2, 3\}$ *est un évènement de Ω .*

$B = \{5, 6\}$ *est un évènement de Ω .*

4) Évènement élémentaire

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire . On appelle évènement élémentaire de Ω tout singleton de Ω .

Exemple

Soit le Lancer un dé numéroté de 1 à 6 .

L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

$\{1\}, \{4\}, \{6\}$ *sont des évènements élémentaires de Ω .*

5) Évènement réalisé

Un événement est dit réalisé s'il contient le résultat de l'expérience .

Exemple

Soit le Lancer un dé numéroté de 1 à 6 .

L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

$A = \{3, 4, 5\}$ *est un évènement de Ω .*

Par exemple si à l'issu d'un lancé la face 5 apparaît, on dit que A est réalisé.

Par exemple si à l'issu d'un lancé la face 3 apparaît, on dit que A est réalisé.

6) Évènement certain

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire .Lorsqu'un évènement est l'ensemble Ω , on l'appelle évènement certain .

Exemple

Soit le Lancer un dé numéroté de 1 à 6 .

L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

L'événement « le numéro de la face apparue est inférieur à 7 » est $\{1,2,3,4,5,6\}$ *.C'est l'événement certain.*

7) Évènement incertain ou évènement impossible

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire .Lorsqu'un évènement est l'ensemble vide , on l'appelle évènement impossible .Il ne se réalise jamais .

Soit le Lancer un dé numéroté de 1 à 6 .

L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

L'événement « le numéro de la face apparue est supérieur à 7 » est $\varnothing$*. C'est l'événement impossible. Il ne se réalise jamais.*

8) Évènement contraire

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire .Soit A un évènement de Ω . L'évènement contraire de A noté $\overline{A}$ ***, est le complémentaire de A dans Ω .***

Autrement dit $\overline{A} = C_{\Omega}^{A}$ **.**

Exemple

Soit le Lancer un dé numéroté de 1 à 6 .

L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

A ={1 ; 3 ; 5} est un évènement de Ω .

On a $\overline{A} = \{2 ; 6; 4\}$

On a : $A \cup \overline{A} = \Omega$ *et* $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

9) <u>Évènements incompatibles</u>

Deux événements sont incompatibles lorsque leur intersection est vide ; ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Exemple

Soit le Lancer un dé numéroté de 1 à 6 .

L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

A = {1 ; 3 ; 5} et C = {2 ; 6}sont incompatibles.

- ***RÉSUMÉ***

Le tableau suivant indique la signification des diverses expressions utilisées dans le langage des évènements .

Vocabulaire des évènements	Signification ensembliste	Notation
Univers	Ensemble Ω	Ω
Éventualité	Élément de Ω	$w \quad , \quad w \in \Omega$
Évènement	Partie de Ω	$A \quad , \quad A \subset \Omega$
Évènement certain	Partie pleine	Ω
Évènement impossible	Partie vide	$\varnothing$
Évènement ≪ A ou B ≫	Réunion des parties A et B	$A \cup B$
Évènement ≪ A et B ≫	Intersection des parties A et B	$A \cap B$
Évènements A et B incomptibles	Parties A et B sont disjointes	$A \cap B = \varnothing$
Évènement contraire de A	Complémentaire de A dans Ω	$\overline{A} = C_{\Omega}^{A}$
Évènement élémentaire	Singleton	$\{w\} \quad , w \in \Omega$

II)<u>Généralité sur la probabilité</u>

1)<u>Probabilité d'un évènement</u>

Soit le Lancer un dé numéroté de 1 à 6 .

L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

L'événement E=$\{2\}$*a une chance sur six de se réaliser.On dit que la probabilité de cet événement* $\frac{1}{6}$.

On note P(A) = $\frac{1}{6}$.

L'événement B = $\{3,4\}$ a deux chances sur six de se réaliser.On dit que la probabilité de cet événement $\frac{2}{6}$.

On note P(B) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

2)<u>Probabilité uniforme</u>

Lorsque les événements élémentaires ont la même probabilité , on dit qu'ils sont équiprobables ou qu'il y a une équiprobabilité .

Une probabilité est dite uniforme si tous les événements élémentaires sont équiproprables .

3)<u>Formule de la probabilité uniforme</u>

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire .*Soit P la probabilité définie sur Ω .*

Soit Ω $= \{w_1, w_2, w_3, \dots\dots\dots\dots.., w_n\}$ .Supposons que la probabilité P est uniforme .

Donc $P(\{w_1\}) = P(\{w_2\}) = P(\{w_3\}) = P(\{w_4\}) = \cdots \dots\dots\dots\dots = P(\{w_n\})$

On a $P(\Omega) = P(\{w_1\}) + P(\{w_2\}) + P(\{w_3\}) + P(\{w_4\}) + \cdots \dots\dots\dots\dots + P(\{w_n\})$

D'où $P(\Omega) = n\, P(\{w_1\})$.

Or $P(\Omega) = 1$ donc $n\, P(\{w_1\}) = 1$ d'où $P(\{w_1\}) = \frac{1}{n}$

On obtient donc pour tout i , $P(\{w_i\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{Card\,(\Omega)}$

On en déduit que s'il y a équiprobabilité , $P(A) = \frac{cardA}{card\Omega}$ pour tout évènement A de Ω .

<u>Probabilité</u>

- ***Si la probabilité est uniforme alors la probabilité d'un évènement élémentaire est égale à $\frac{1}{Card\,(\Omega)}$.***
- ***On en déduit que si A est évènement de Ω alors la probabilité de l'évènement A est :***

$$P(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Exercice d'application

Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher , numérotées de 1 à 6 .On tire une boule de cette urne et on note son numéro .

1)Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre pair ?

2) Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre plus grand que 4 ?

Solution

L'urne contient 6 boules indiscernables au toucher , numérotées de 1 à 6 .On tire une boule de cette urne et on note son numéro .

Les boules étant indiscernables au toucher donc elles ont la même chance d'être tirées .Autrement il y a une équiprobabilité des évènements élémentaires .

L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$*.Donc Card (Ω) = 6*

1)Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre pair ?

Soit A l'évènement avoir un chiffre pair donc A = $\{2 , 4 , 6\}$

$$\boxed{P(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad P(A) = \frac{1}{2}}$$

2) Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre plus grand que 4 ?

Soit B l'évènement avoir un chiffre plus grand que 4 donc B = $\{5 , 6\}$

$$\boxed{P(B) = \frac{Card\,(B)}{Card\,(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{donc} \quad P(B) = \frac{1}{3}}$$

4)Définition

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire .

On appelle probabilité sur un Univers Ω ***toute application P :*** $\Omega \to [0;1]$ ***.vérifiant***

- ***p(*** $\Omega)\ = 1$
- ***Pour des événements A et B tels que*** $A \cap B = \Phi$ ***on a P(A∪B)= P(A) + P(B).***

CONSÉQUENCES

- ***Pour tout évènement A de Ω , on a 0 ≤ P (A) ≤ 1 .***
- ***La probabilité de l'ensemble vide est égale 0 : P (∅) = 0 .***
- ***La probabilité d'un événement A est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.***
  C'est-à-dire si A = $\{a_1 , a_2 , a_3, \dots\dots\dots\dots, a_n\}$ ***alors***

  $$P(A) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + P(\{a_3\}) + P(\{a_4\}) + \cdots \dots\dots\dots + P(\{a_n\})$$

Propriétés

Soient A et B deux événements de Ω .

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- *Si* $A \subset B$ *alors* $P(A) \leq P(B)$ *(Croissance de la probabilité)*

Démonstration

a) A *et* $\overline{A}$ *sont disjoints* $A \cup \overline{A} = \Omega$ *donc* $P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1 = P(A) + P(\overline{A})$

D'où $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

b) $A = (A\cap B)\cup(A-B))$ *donc* $P(A) = P(A\cap B)+P(A-B)$ *car* $A\cap B$ *et* $A-B$ *sont disjoints*

d'où $P(A-B) = P(A)-P(A\cap B)$

c) $B = A\cap B \cup (B-A)$ *donc* $P(B) = P(A\cap B) + P(A-B)$ *d'où le résultat*

d) Si A ⊂ B *alors* B *est l'union disjointe de* A *et de* (B \ A) *donc :* $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$
Et comme $P(B \setminus A) \geq 0$*, on obtient bien :* $P(A) \leq P(B)$

Exercice d'application

Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15 .On tire au hasard une boule de cette urne et on note son numéro N .Les boules ont la même chance d'être tirées .

On désigne respectivement par A et B les évènements ≪ N est pair ≫ et ≪ N est multiple de 3 ≫

Quelle est la probabilité des évènements A , B , $\bar{A}$, $\bar{B}$, $A \cap B$ *et* $A \cup B$?

Solution

Les boules ont la même chance d'être tirées .Autrement il y a une équiprobabilité des évènements élémentaires .

L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1, 2, 3\ 4, \ldots\ldots..,15\}$*.Donc Card (Ω) = 15*

A est l'évènement ≪ N est pair ≫ donc $A = \{2,4,6,8,10,12,14\}$

$$\boxed{\text{On a } Card(A) = 7 \quad ; \quad P(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{7}{15} = \quad donc \quad P(A) = \frac{7}{15}}$$

Best l'évènement ≪ N est multiple de 3 ≫ donc $B = \{3,6,9,12,15\}$

$$\boxed{\text{On a } Card(B) = 7 \quad ; \quad P(B) = \frac{Card\ (B)}{Card\ (\Omega)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \quad donc \quad P(B) = \frac{1}{3}}$$

On a $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$ $\boxed{donc \quad P(\overline{A}) = \frac{8}{15}}$

On a $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ $\boxed{donc \quad P(\bar{B}) = \frac{2}{3}}$

On a $A \cap B = \{6,12\}$

On a On a $Card(A \cap B) = 7$; $P(B) = \frac{Card\ (A \cap B\ )}{Card\ (\Omega)} = \frac{2}{15}$ $\boxed{donc \quad P(A \cap B) = \frac{2}{15}}$

On a $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = \frac{7}{15} + \frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{10}{15}$

$$\boxed{Donc \quad P(A \cup B) = \frac{10}{15}}$$

III)*Épreuve de Bernoulli*

1)*Définition*

On appelle épreuve de Bernoulli toute expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles . L'une des issues est appelée succès et l'autre issue est appelée échec .

Exemple

- *Passer un examen : réussite ou échec*
- *Lancer d'une pièce de monnaie : pille ou face*
- *Naissance d'un bébé : garçon ou fille*

2)Probabilité sur une épreuve de Bernoulli

Soit une épreuve de Bernoulli . S i la probabilité du succès est p alors celle de l'échec est 1 – p .

3)Processus ou schéma de Bernoulli

On appelle processus ou schéma de Bernoulli une répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes .

Exemple

- *Lancer d'une pièce de monnaie 15 fois de suite*
- *Subir un test de 50 questions où on répond par oui ou par non*

Propriété

Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves où pour chaque épreuve la probabilité du succès est p et celle de l'échec 1 – p .

La probabilité d'avoir exactement k succès ($0 \le k \le n$) au cours de ces n épreuves est égale à P_k défini par $P_k = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}$

Autrement dit :

$$P_k = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}$$

- ***n est le nombre de répétitions de l'épreuve***
- ***k est le nombre de succès***
- ***p est la probabilité du succès***

Exercice d'application

On soumet à un candidat 10 questions .Chaque question est assortie de 3 réponses dont l'une est exacte .

Le candidat répond au hasard aux questions .

1)Déterminer la probabilité pour que le candidat trouve 3 bonnes réponses .

2) Déterminer la probabilité pour que le candidat trouve 4 bonnes réponses .

3) Déterminer la probabilité pour que le candidat trouve au moins une bonne réponse .

Solution

Le nombre de répétitions de l'épreuve est 10   donc   n = 10 .

la probabilité du succès est $\frac{1}{3}$ *donc* $p = \frac{1}{3}$. *On a* $1 - p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

1)Déterminons la probabilité pour que le candidat trouve 3 bonnes réponses .

On a   k = 3

P(k = 3) = $C_{10}^{3}\,(\frac{1}{3})^3\,(\frac{2}{3})^7 = \frac{40}{9}\,(\frac{2}{3})^7$

La probabilité pour que le candidat trouve 3 bonnes réponses est $\frac{40}{9}\,(\frac{2}{3})^7$

2) Déterminons la probabilité pour que le candidat trouve 4 bonnes réponses .

On a k = 4

P(k = 4) = $C_{10}^{4}\,(\frac{1}{3})^4\,(\frac{2}{3})^6 = \frac{70}{27}\,(\frac{2}{3})^6$

La probabilité pour que le candidat trouve 4 bonnes réponses est $\frac{70}{27}\,(\frac{2}{3})^6$

3) Déterminons la probabilité pour que le candidat trouve au moins une bonne réponse .

Soit B l'évènement ≪ avoir au moins une bonne réponse ≫

Donc $\bar{B}$ *est l'évènement ≪ avoir aucune bonne réponse ≫*

P ($\bar{B}$*) = P(k = 0) =* $C_{10}^{0}\,(\frac{1}{3})^0\,(\frac{2}{3})^{10} = (\frac{2}{3})^{10}$

P(B) = 1 – P(B) = 1 - $(\frac{2}{3})^{10}$

La probabilité pour que le candidat trouve aucune bonne réponse est 1 - $(\frac{2}{3})^{10}$

*IV)**Probabilité conditionnelle***

Le concept de probabilités conditionnelles est un des concepts les plus importants en théorie de probabilités. Commençons par un exemple illustratif.

Je lance à deux reprises un dé non pipé. Quelle est la probabilité pour qu'on ait au moins une fois la valeur six ?

Soit Ω *l'univers de l'expérience card*Ω *= 36*

A l'événement « obtenir au moins une fois la valeur six » card A= 11 Donc p(A) = $\frac{11}{36}$

Maintenant je lance le dé deux fois en annonçant l'information supplémentaire « la somme des résultats obtenus est 8 ». Quelle est la probabilité que j'aie obtenu au moins un six ?

On note d'abord qu'il y a 5 résultats possibles : (2 , 6) ,(3 , 5) ; (4 , 4) ; (6 , 2) ; (5 , 3)

Parmi ces résultats seuls (2 , 6) et (6 , 2) contiennent 6. La réponse est donc $\frac{2}{5}$

Examinons la démarche d'un peu plus prés

A= $\{(1,2);(2,6);(3,6),(4,6);(5,6);(6,6)(6,5);(6,4);(6,3)(6,2)(6,1)\}$

B « la somme des résultats obtenus est 8 » B= $\{(2,6);(3,5);(4,4);(5,3);(6,2)\}$

$A \cap B$ *= {(2 , 6) ; (6 , 2)}*

$\frac{2}{5}$ *peut s'écrire sous la forme* $\frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

La probabilité de A est ici modifiée car on dispose d'une information supplémentaire.

1)*Définition*

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire . Soit P la probabilité définie sur Ω .

Soient A et B sont deux événements de Ω tels que $P(B) \neq 0$.

On appelle probabilité de A sachant B *est le nombre réel noté P(A/ B) ou* $P_B(A)$ *et défini par :*

$$P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

P(A/ B) est une nouvelle probabilité appelée probabilité conditionnelle sur Ω .

Il s'en suit que toutes les propriétés usuelles des probabilités sont valides pour les probabilités conditionnelles . Autrement la probabilité conditionnelle a toutes les propriétés d'une probabilité .

Propriétés

Soit B un événement tel que $P(B) \succ 0$ ***alors***

- ***Pour tout événement A,*** $0 \leq P(A/B) \leq 1$
- $\boldsymbol{P}(\Phi / B) = 0$ *et* $P(\Omega / B) = 1$
- ***Soit*** A_1 ; A_2 **……………**A_n ***une suite d'événements incompatibles deux à deux :*** $P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i / B\right] = \sum_{i=1}^{n} P[A_i / B]$
- $P_B(A) + P_B(\overline{A}) = 1$

Propriété

Dans une situation d'équiprobabilité , on a $P_B(A) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(B)}$.

2)*Probabilité de l'intersection*

Soient A et B sont deux événements tels que $P(B) \neq 0$ ***et P(A) ≠ 0 . On a :***

- $P(A \cap B) = P_B(A)\, P(B)$
- $P(A \cap B) = P_A(B)\, P(A)$

Exercice d'application

Une usine de conditionnement de café abrite deux machines qui travaillent en chaîne . Les fèves de café décortiquées et séchées passent de la 1^re^ machine pour torréfaction, la 2^e^ machine a alors pour fonction de moudre les fèves de café grillées .

Des experts ont estimé à :

0,002 la probabilité pour que la 1^{re} machine tombe en panne ,

0,003 la probabilité pour que la 2^{e} machine tombe en panne ,

0,6 la probabilité pour que la 2^{e} machine tombe en panne lorsque la 1^{re} est en panne.

Calculer

1)la probabilité pour que les deux machines tombent en panne simultanément .

2) la probabilité pour que la 1^{re} machine tombe en panne lorsque la 2^{e} est en panne.

Solution

Désignons par : T l'évènement ≪ la 1^{re} machine tombe en panne ≫

M l'évènement ≪ la 2^{e} machine tombe en panne ≫

Donc $T\cap M$ est l'évènement ≪ les deux machines tombent simulténément en panne ≫

On a $P(T) = 0{,}002$; $P(M) = 0{,}003$; $P_T(M) = 0{,}6$

1)la probabilité pour que les deux machines tombent en panne simultanément .

On a $P_T(M) = \frac{P(T\cap M)}{P(T)}$ *donc* $P(T \cap M) = P_T(M) \times P(T)$

Ce qui fait que $P(T \cap M) = 0{,}6 \times 0{,}002 = 0{,}0012$

On obtient $\boxed{P(T \cap M) = 0{,}0012}$

2) la probabilité pour que la 1^{re} machine tombe en panne lorsque la 2^{e} est en panne.

On a $P_M(T) = \frac{P(T\cap M)}{P(M)}$ *donc* $P_M(T) = \frac{P(T\cap M)}{P(M)} = \frac{0{,}0012}{0{,}003} = 0{,}4$

D'où $\boxed{P_M(T) = 0{,}4}$

3)<u>Événements indépendants</u>

Deux événements A et B sont dits indépendants si et seulement si $P(A\cap B) = P(A)P(B)$ **.**

<u>Propriétés</u>

Soient A et B sont deux événements tels que $P(B) \neq 0$ ***et P(A) ≠ 0 et qui sont indépendants , on a :***

- $P_B(A) = P(A)$
- $P_A(B) = P(B)$
- $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A)\,P(B)$

<u>4)Définition</u>

On dit que deux évènements sont indépendants lorsque la probabilité de l'un n'est pas modifiée par la réalisation de l'autre .

Propriétés

Soient A et B deux événements indépendants . Alors on a :

- ***A et $\overline{B}$ sont indépendants***
- ***$\overline{A}$ et B sont indépendants***
- ***$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants***

5)Formule des probabilités totales

Soient B_1 , B_2………..B_n une partition de Ω pour laquelle B_1 , B_2………..B_n ne sont pas de probabilités nulles .

- ***Pout tout évènement A de Ω , on a :***
  $P(A) = P_{B_1}(A)P(B_1) + P_{B_2}(A)P(B_2) + \ldots\ldots + P_{B_n}(A)P(B_n)$
- ***Pour tout i ($1 \leq i \leq n$) , $P(A \cap B_i) = P_{B_i}(A)P(B_i)$***
- ***Pout tout évènement A de Ω , on a :***
  $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) + \ldots\ldots + P(A \cap B_n)$

Exercice d'application

Dans l'entrepôt d'une usine de fabrication de clous , 50% des clous sont fabriqués par la machine I, 30% par la machine II et 20% par la machine III . Parmi les clous fabriqués par la machine I ,3% sont défectueux. Parmi ceux fabriqués par la machine II, 5% sont défectueux et parmi ceux fabriqués par la machine III , 8% sont défectueux .On choisit un clou au hasard . Quelle est la probabilité pour qu'il soit défectueux. ?

Solution

On pose A= l'évènement « le clou est défectueux »

E_1 = l'événement « le clou provient de la machine I »

E_2 = l'événement « le clou provient de la machine II »

E_3 = l'événement « le clou provient de la machine III »

Les informations données dans l'énoncé se traduisent de la façon suivante

$P(E_1) = 0.5$ $\quad P(A/E_1) = 0.03$

$P(E_2) = 0.3$ $\quad P(A/E_2) = 0.05$

$P(E_3) = 0.2$ $\quad P(A/E_3) = 0.08$

E_1 , E_2 , E_3 forment une partition de Ω

D'après la formule des probabilités totale

$$\boxed{P(A) = P(A/E_1)P(E_1) + P(A/E_2)P(E_2) + P(A/E_3)P(E_3) = 0.03\times0.5 + 0.05\times0.3 + 0.08\times0.2 = 0.046}$$

Exercice d'application

Deux événements A et B sont indépendants tels que $P(A) = \frac{1}{5}$ et $P(B) = \frac{1}{4}$.

Déterminer $P(A\cap B)$, $P_A(B)$ *et* $P(\bar{A}\cap B)$.

Solution

A et B sont indépendants donc $P(A\cap B) = P(A)P(B)$

Donc $P(A\cap B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ $\boxed{\text{d'où } P(A\cap B) = \frac{1}{20}}$

A et B sont indépendants donc $P_A(B) = P(B)$

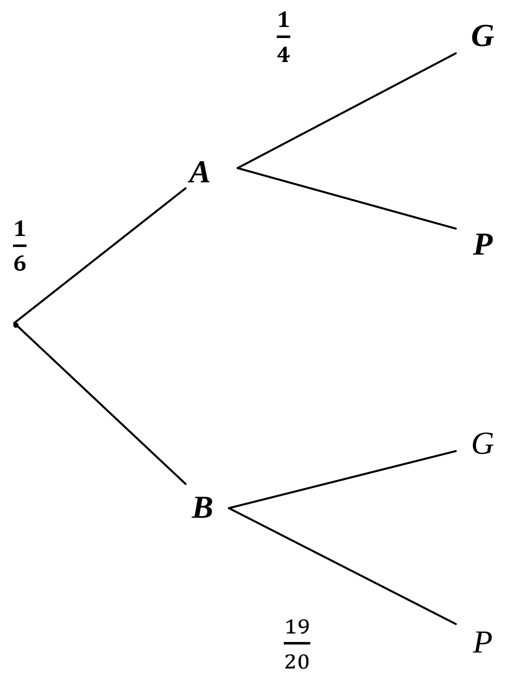
$\boxed{\text{D'où } P_A(B) = P(B) = \frac{1}{4}}$

A et $\bar{A}$ *forment une partition de* Ω *. B est un évènement de* Ω *donc d'après la formule des probabilités totales ,* $\boxed{\text{on a } P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap \bar{A})}$

$P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap \bar{A})$ *donc* $P(B\cap \bar{A}) = P(B) - P(B\cap A)$

Donc $P(B\cap \bar{A}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ *d'où* $\boxed{P(B\cap \bar{A}) = \frac{1}{5}}$

6)<u>Arbre des probabilités ou arbre pondéré</u>



- ***Au niveau 1, se trouvent les probabilités de A et de B c'est-à-dire P(A) et P (B).***

Par lecture directe de l'arbre des probabilités , on a : $P(A) = \frac{1}{6}$

P(B) est donnée par la relation $P(B) = 1 - P(A)$

Donc $P(B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ ***D'où*** $P(B) = \frac{5}{6}$

On obtient : $P(A) = \frac{1}{6}$ ***et*** $P(B) = \frac{5}{6}$

- ***An niveau 2 , se trouvent les probabilités conditionnelles (sachant que A est réalisé ou sachant que B est réalisé) .***

Par lecture directe de l'arbre des probabilités , on a : $P_A(G) = \frac{1}{4}$ ***et*** $P_B(P) = \frac{19}{20}$

$P_A(P)$ ***est donnée par la relation*** $P_A(P) = P_A(\overline{G}) = 1 - P_A(G)$

Donc $P_A(P) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ $\boxed{D'où \quad P_A(P) = \frac{3}{4}}$

$P_B(G)$ ***est donnée par la relation*** $P_B(G) = P_B(\overline{P}) = 1 - P_B(P)$

Donc $P_B(G) = 1 - \frac{19}{20} = \frac{1}{20}$ $\boxed{D'où \quad P_B(G) = \frac{1}{20}}$

On obtient : $P_A(P) = \frac{3}{4}$ ***et*** $P_B(G) = \frac{1}{20}$

- ***On peut calculer les probabilités des intersections P(G∩ A) , P(P∩ A) , P(P∩ B) et P(G∩ B) en utilisant la définition des probabilités conditionnelles .***

On a : $P(G \cap A) = P_A(G)\,P(A)$

Donc $P(G \cap A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$ $\boxed{d'où \quad P(G \cap A) = \frac{1}{24}}$

On a : $P(P \cap A) = P_A(P)\,P(A)$

Donc $P(P \cap A) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ $\boxed{d'où \quad P(P \cap A) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}}$

On a : $P(G \cap B) = P_B(G)\,P(B)$

Donc $P(G \cap B) = \frac{1}{20} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{24}$ $\boxed{d'où \quad P(G \cap B) = \frac{1}{24}}$

On a : $P(P \cap B) = P_B(P)\,P(B)$

Donc $P(P \cap B) = \frac{19}{20} \times \frac{5}{6} = \frac{19}{24}$ $\boxed{d'où \quad P(P \cap B) = \frac{19}{24}}$

- ***On peut calculer les probabilités P(G) et P(P) en utilisant la formule des probabilités totales .***

On a : $P(G) = P(G \cap A) + P(G \cap B)$

Donc $P(G) = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$ $\boxed{d'où \quad P(G) = \frac{1}{12}}$

On a : $P(P) = P(P \cap A) + P(P \cap B)$

Donc $P(P) = \frac{1}{8} + \frac{19}{24} = \frac{11}{12}$ $\boxed{d'où \quad P(P) = \frac{11}{12}}$

On obtient : $P(G) = \frac{1}{12}$ ***et*** $P(P) = \frac{11}{12}$

FORMULE : $P(P) = P(\overline{G})$ ***et*** $P(G) = P(\overline{P})$

- ***Règle d'utilisation des arbres de probabilités .***

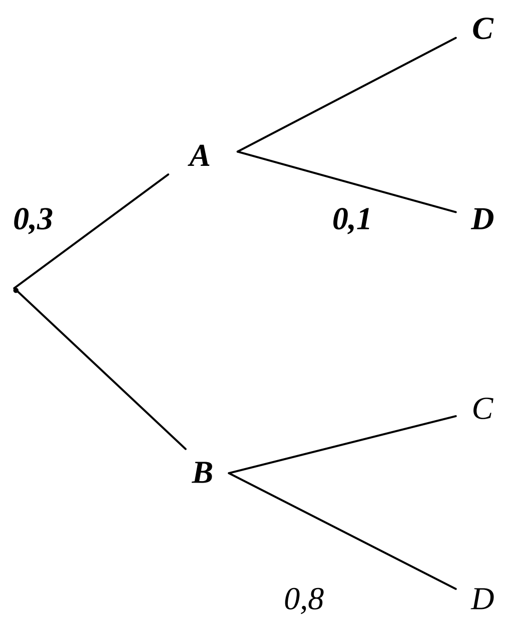
1)La somme des probabilités des différentes branches issues d'un même nœud est égale à 1 .

2)Les probabilités situées sur les branches de niveau 2 sont des probabilités conditionnelles .

3)La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités figurant sur les différentes branches qui mènent à cet évènement .

Exercice d'application

Une situation de probabilité est représentée par l'arbre ci-contre



Compléter cet arbre et donner les probabilités suivantes :

$P(B)$, $P_A(C)$, $P(A \cap C)$, $P(C)$, $P(D)$ et $P_C(A)$

Solution

Par lecture directe de l'arbre des probabilités , on a :

$P(A) = 0{,}3$; $P_A(D) = 0{,}1$ et $P_B(D) = 0{,}8$

$P(B)$ est donnée par la relation $P(B) = 1 - P(A)$

Donc $P(B) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$ $\boxed{D'où \quad P(B) = 0{,}7}$

$P_A(C)$ *est donnée par la relation* $P_A(C) = P_A(\overline{D}) = 1 - P_A(D)$

Donc $P_A(C) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$ $\boxed{D'où \quad P_A(C) = 0{,}9}$

$P_B(C)$ *est donnée par la relation* $P_B(C) = P_B(\overline{D}) = 1 - P_B(D)$

Donc $P_B(C) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ $\boxed{D'où \quad P_B(C) = 0{,}2}$

On a : $P(A\cap C) = P_A(C)\,P(A)$

Donc $P(A\cap C) = 0{,}9 \times 0{,}3 = 0{,}27$ $\boxed{\text{d'où } \; P(A\cap C) = 0{,}27}$

On a : $P(C\cap B) = P_B(C)\,P(B)$

Donc $P(C\cap B) = 0{,}2 \times 0{,}7 = 0{,}14$ $\boxed{\text{d'où } \; P(C\cap B) = 0{,}14}$

On a : $P(C) = P(C\cap A) + P(C\cap B)$

Donc $P(C) = 0{,}27 + 0{,}14 = 0{,}41$ $\boxed{\text{d'où } \; P(C) = 0{,}41}$

P(D) est donnée par la relation $P(D) = P(\bar{C}) = 1 - P(C)$

Donc $P(D) = 1 - 0{,}41 = 0{,}59$ $\boxed{\text{D'où } \; P(D) = 0{,}59}$

$P_C(A) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}27}{0{,}41} = \frac{27}{41}$ $\boxed{\text{donc } \; P_C(A) = \frac{27}{41}}$

V) Variable aléatoire

1) Définition

On appelle variable aléatoire X sur un univers Ω , toute application de Ω vers IR ,qui à chaque élément de Ω , on associe un nombre réel x_i .

X(Ω) = $\{x_1, x_2, x_3, \dots\dots\dots, x_n\}$ ***est appelé univers image de Ω par X .***

(X = x_i ***) désigne l'évènement ≪ X prend la valeur*** x_i ***≫***

2) Loi de proobabilité

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω .On appelle loi de probabilité de X sur Ω , toute application qui , à toute valeur x_i ***prise par X , on associe*** $P(X = x_i)$ ***.***

Déterminer la loi de probabilité de X, c'est :

- ***Déterminer X(Ω)***
- ***Calculer la probabilité de chaque valeur de X***
- ***Consigner le résultat dans un tableau appelé tableau de loi de probabilité de X***

X	x_1	x_2	x_3			x_n
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$P(X = x_3)$			$P(X = x_n)$

Remarque

Lorsqu'on vient de déterminer la loi de probabilité de X , il est prudent de vérifier que :

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + P(X = x_n) = 1$$

3) *Espérance mathématique , Variance et Ecart-type*

Soit X une variable aléatoire de tableau de loi de probabilité

X	x_1	x_2	x_3			x_n
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$P(X = x_3)$			$P(X = x_n)$

- ***Espérance mathématique de X***

On appelle Espérance mathématique de X le nombre réel noté E(X) et défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, P(X = x_i)$$

- ***Variance de X***

On appelle variance de X le nombre réel noté V(X) ou Var(X) et défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 \, P(X = x_i)$$

FORMULE PRATIQUE DE V(X)

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \, P(X = x_i)$$

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$$

- ***Écart-type de X***

On appelle Écart-type de X le nombre réel noté σ(X) ou σ_X et défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

4) *Fonction de répartition de X*

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P . L a fonction de répartition de X est l'application de IR vers [0 ; 1] et définie par F(x) = P (X ≤ x) .

Soit la loi de probabilité de X

X	x_1	x_2	x_3			x_n
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$P(X = x_3)$			$P(X = x_n)$

Si $x < x_1$ ***alors*** $F(x) = 0$

Si $x_1 \leq x < x_2$ ***alors*** $F(x) = P(X = x_1)$

Si $x_2 \leq x < x_3$ ***alors*** $F(x) = P(X = x_1) + P(X = x_2)$

Si $x_3 \leq x < x_4$ ***alors*** $F(x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3)$

.

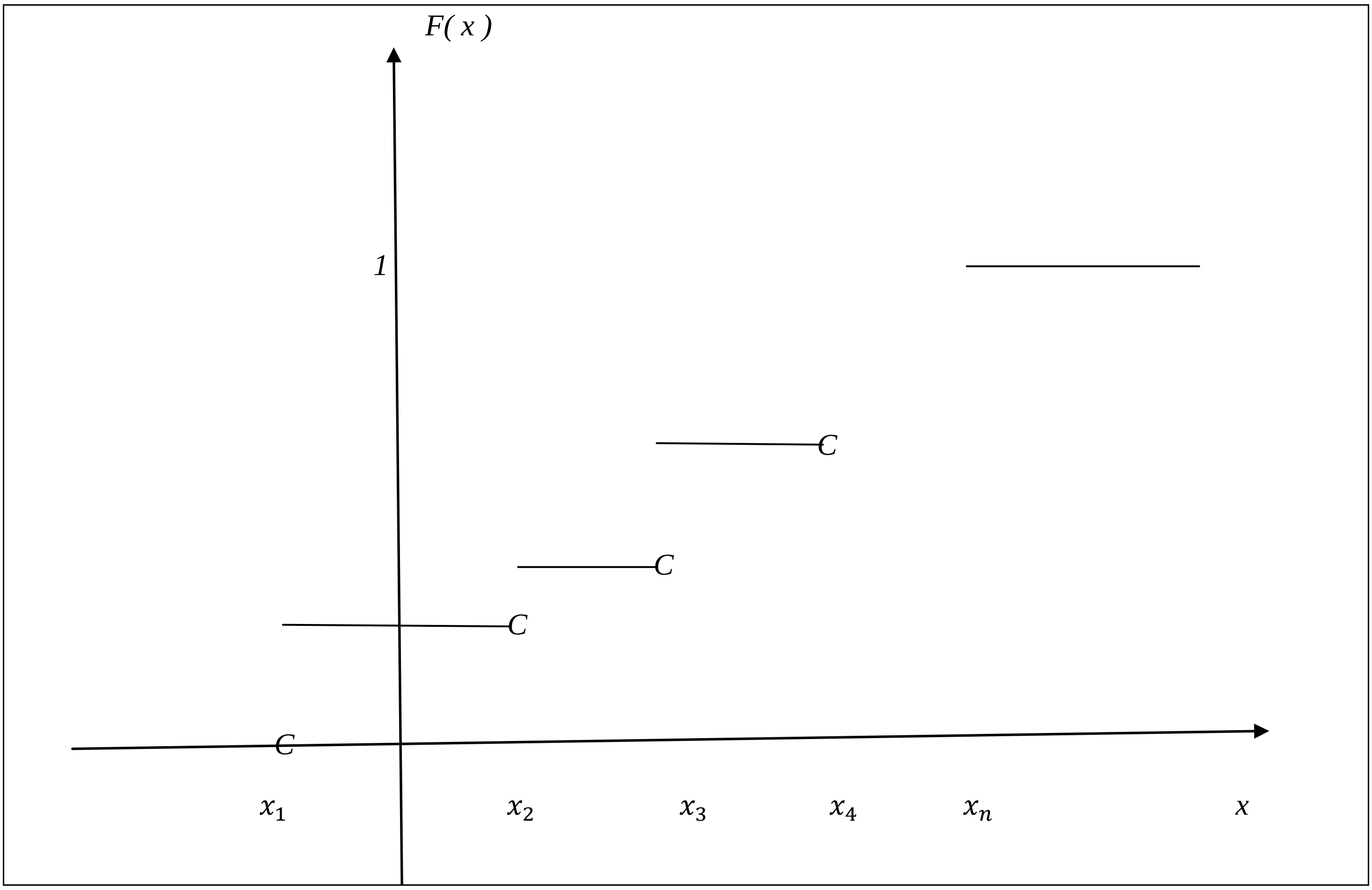
.

.

.

Si $x_n \leq x$ ***alors*** ***F (x) = 1***

- ***Construction de la fonction de répartition de X***



Exercice d'application

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules bleues . On tire simultanément 2 boules de l'urne .

On gagne 100F par boule rouge tirée .

Soit X la variable aléatoire , qui à chaque tirage de 2 boules , fait correspondre la somme gagnée en francs .

1)Déterminer la loi de probabilité de X .

2)Calculer E(X) , V(X) et σ *(X) .*

3) Déterminer et construire la fonction de répartition de X .

Solution

L' urne contient 3 boules rouges et 4 boules bleues . On tire simultanément 2 boules de l'urne .

On gagne 100F par boule rouge tirée .

Soit X la variable aléatoire , qui à chaque tirage de 2 boules , fait correspondre la somme gagnée en francs .

1)Déterminons la loi de probabilité de X .

On peut tirer 0 , 1 ou 2 boules rouges et donc gagner 0F , 100 F ou 200F .

Désignons par X la somme gagnée donc $X(\Omega) = \{0\ ;\ 100\ ; 200\}$

P(X = 0) est la probabilité de l'évènement ≪ tirer 2 boules bleues ≫

$P(X = 0) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$ $\boxed{\text{donc } \quad P(X=0) = \frac{2}{7}}$

P(X = 100) est la probabilité de l'évènement ≪ tirer 1 boules bleue et 1 boule rouge ≫

$P(X = 100) = \frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_7^2} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$ $\boxed{\text{donc } \quad P(X=100) = \frac{4}{7}}$

P(X = 200) est la probabilité de l'évènement ≪ tirer 2 boules rouges ≫

$P(X = 200) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$ $\boxed{\text{donc } \quad P(X=200) = \frac{1}{7}}$

Le tableau de la loi de probabilité de X est le suivant :

X	0	100	200
$\boldsymbol{P(X = x_i)}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

Vérification : $\frac{2}{7} + \frac{4}{7} + \frac{1}{7} = \frac{7}{7} = 1$

2)Calculons E(X) , V(X) et σ (X) .

$E(X) = 0 \times \frac{2}{7} + 100 \times \frac{4}{7} + 200 \times \frac{1}{7} = \frac{600}{7}$ $\boxed{\text{donc } \quad E(X) = \frac{600}{7}}$

$E(X^2) = 0^2 \times \frac{2}{7} + 100^2 \times \frac{4}{7} + 200^2 \times \frac{1}{7} = \frac{80000}{7}$ $\boxed{\text{donc } \quad E(X^2) = \frac{80000}{7}}$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{80000}{7} - \left(\frac{600}{7}\right)^2 = \frac{200000}{49}$

$\boxed{\text{Donc } \quad V(X) = \frac{200000}{49}}$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{200000}{49}} = \frac{\sqrt{200000}}{7} = \frac{200}{7}\sqrt{5}$ $\boxed{\text{donc } \quad \sigma(X) = \frac{200}{7}\sqrt{5}}$

3) Déterminons et construire la fonction de répartition de X .

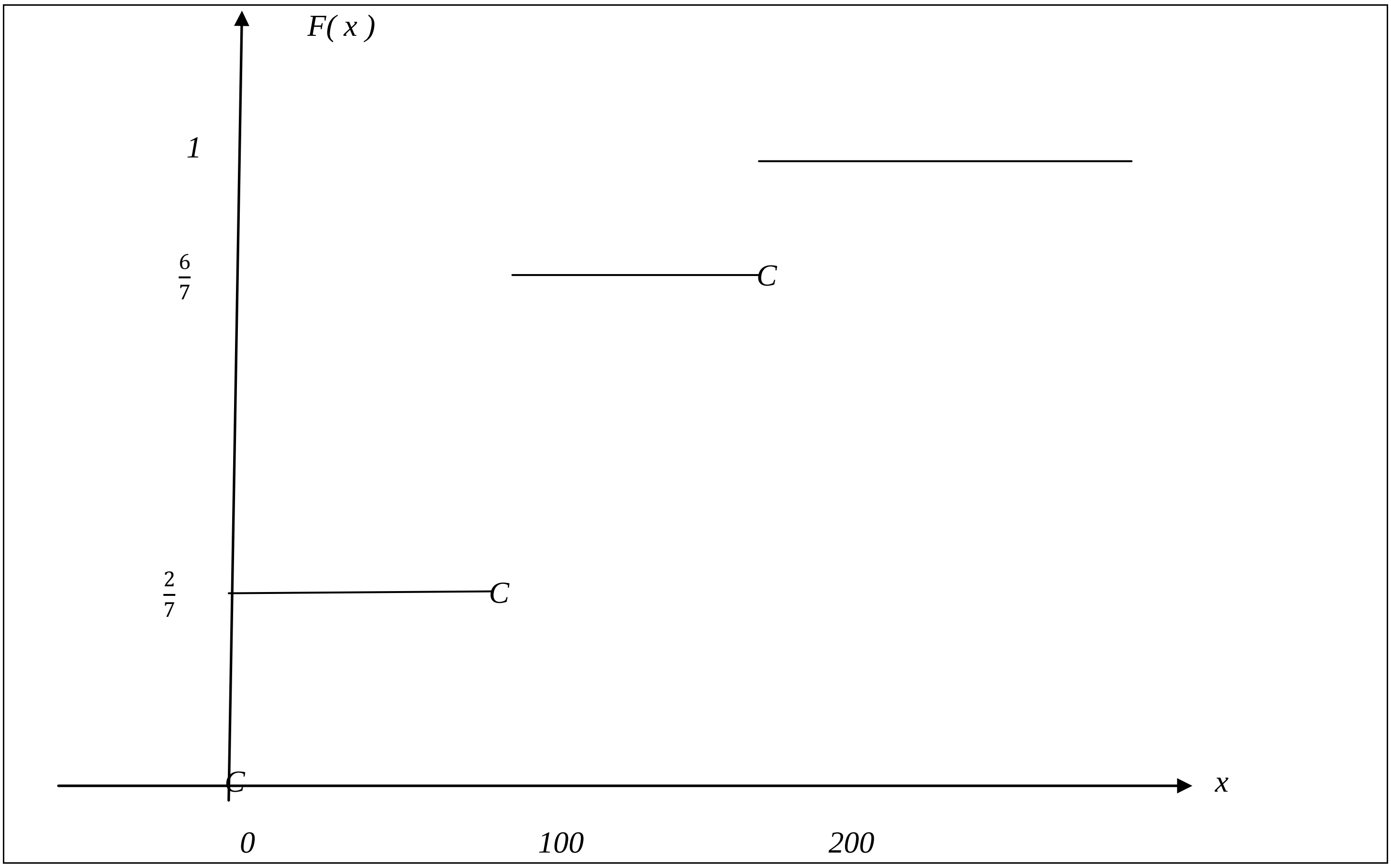
***Si** $x < 0$ **alors** $F(x) = 0$*

***Si** $0 \leq x < 100$ **alors** $F(x) = P(X = 0) = \frac{2}{7}$*

Si 100 $\leq x < 200$ alors F (x) = P(X = $\mathbf{0}$) + P(X = $\mathbf{100}$) = $\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=\frac{6}{7}$

Si 200 $\leq x$ alors F (x) = 1

Construction de la fonction de répartition de X



5)<u>Loi binomiale</u>

Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves où pour chaque épreuve la probabilité du succès est p et celle de l'échec 1 – p . On lui associe la variable aléatoire notée X désignant le nombre de succès .

L'univers image de X est $\{\mathbf{0}\ ;\mathbf{1};\mathbf{2};\mathbf{3};\ldots\ldots\ldots\ldots,\boldsymbol{n}\}$.

L'application : $\{\mathbf{0}\ ;\mathbf{1};\mathbf{2};\mathbf{3};\ldots\ldots\ldots\ldots,\boldsymbol{n}\}\rightarrow$ [0 ; 1]

$$\boldsymbol{k} \rightarrow \boldsymbol{C_n^k}\,\boldsymbol{p^k}\,(\,\mathbf{1}-\boldsymbol{p}\,)^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}}$$

définie la loi de probabilité de X . Cette loi de probabilité est la loi binomiale de paramètres n et p .

<u>Propriété</u>

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi binomiale de paramètres n et p . Alors

- ***E(X) = n p***
- ***V(X) = n p (1 – p)***

EXERCICES

Exercice1

Deux événements A et B sont indépendants. En utilisant la formule des probabilités totales, démontrer que :

a) $\bar{A}$ et B sont indépendants   b) A et $\bar{B}$ sont indépendants   c) $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants

Exercice2

Une urne contient 5 boules rouges, 6boules noires et 2 boules blanches.

On tire simultanément 3 boules de l'urne.

Soit X la variable aléatoire, qui à chaque tirage de 3 boules, fait correspondre le nombre de boules blanches.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Déterminer la fonction de répartition de X, et la représenter graphiquement.

3) Calculer l'espérance mathématique E(X), V(X) et $\sigma(X)$.

Exercice3

La porte- monnaie de Souleymane contient 6 pièces de 10F parmi lesquelles exactement 2 pièces fausses qui ne valent rien. Souleymane règle un achat en choisissant au hasard 2 de ces 6 pièces. Soit X la somme réellement déboursée par Souleymane.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Déterminer la fonction de répartition de X, et la représenter graphiquement.

3) Calculer l'espérance mathématique E(X), V(X) et $\sigma(X)$.

Exercice4   *Extrait du BAC 1997*

Un jeu de 32 cartes est constitué de 4 couleurs : Pique, Cœur, Trèfle et Carreau. Chaque couleur est composé de 8 cartes : l'As, le Roi, la Dame, le Valet, le 10, le 9, le 8 et le 7.

1) On tire simultanément 3 cartes d'un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité de chacun des événements :

A : « les trois cartes sont des As » B : « il y'a au moins 2 couleurs parmi ces 3 cartes »

C : « il y'a pas d'As parmi les 3 cartes »

2) On tire successivement avec remise 3 cartes du jeu de 32 cartes. Le nombre de cœur tirés définit une variable aléatoire X. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X ; la loi de probabilité de X et son espérance mathématique E(X).

Exercice5

Un grossiste en appareils ménagers est approvisionné par trois marques, notées respectivement M_1, M_2 *et*

M_3. *La moitié des appareils de son stock provient de* M_1, *un huitième de* M_2, *les trois huitièmes de* M_3.

Ce grossiste sait que dans son stock, 13% des appareils de la marque
M_1 *sont rouges, que* 5% *des appareils de la*

marque M_2 *sont rouges et que* 10% *des appareils de la marque* M_3 *le sont aussi.*

On choisit au hasard un appareil emballé dans le stock de ce grossiste.

1) Quelle est la probabilité qu'il vienne de M_3 *?*

2) Quelle est la probabilité qu'il soit rouge sachant qu'il vienne de M_2 *?*

3) Quelle est la probabilité que l'appareil choisi ne soit pas de couleur rouge ?

4) Après examen, on s'aperçoit que l'appareil choisi est rouge. Quelle est la probabilité qu'il soit de la marque M_1 *?*

Exercice 6

En 2006, un laboratoire de recherche met au point un test de dépistage d'une maladie responsable de la disparition

d'animaux et fournit les renseignements suivants : La population testée comporte 50% d'animaux malades.

Si un animal est malade, le test est positif dans 99% des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans

0,1% des cas. On note M l'événement « l'animal est malade », $\overline{M}$ *l'événement contraire et T l'événement « le test*

Est positif »

1) Déterminer P(M), $P_M(T)$ *et* $P_{\overline{M}}(T)$. *En déduire P(T).*

2) Le laboratoire estime qu'un test est fiable, si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal

Soit malade sachant que le test est positif, est supérieur à 0,999. Ce test est-il fiable ?

Exercice 7

On admet que la probabilité pour qu'un individu pris au hasard soit né sous le signe du capricorne est égale à $\frac{1}{12}$.

On considère un groupe de 6 personnes prises au hasard indépendamment les unes des autres et on note X

La variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'individus de ce groupe qui sont nés sous le signe du capricorne

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

Exercice 8 *Extrait du Bac 2010*

Un tiroir contient, pêle-mêle,5 paires de chaussures noires,3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges.Toutes les paires de chaussures sont des modèles différents, mais indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément 2 chaussures au hasard et l'on admet l'équiprobabilité des tirages.

a) Calculer la probabilité de l'événement A : « tirer 2 chaussures de la même couleur »

b) Calculer la probabilité de l'événement B : « tirer un pied gauche et un pied droit »

c) Montrer que la probabilité de l'événement C : « tirer les deux chaussures d'un même modèle » est $\frac{1}{19}$.

2) On ne conserve plus dans le tiroir qu'une paire de chaussures noires et une paire de chaussures rouges.

On tire successivement et sans remise une chaussure du tiroir jusqu'à ce que le tiroir soit vide.On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième chaussure noire.

a) Justifier que X prend les valeurs 2,3 et 4.

b) Montrer que la loi de probabilité de X est : $P(X=2) = \frac{1}{6}$; $P(X=3) = \frac{1}{3}$ $P(X=4) = \frac{1}{2}$.

c) Calculer son espérance mathématique et son écart-type.

Exercice 9

Un porte-monnaie contient quatre pièces de 500F et six pièces de 200F. Un enfant tire au

hasard et simultanément 3 pièces de ce porte-monnaie.

1) Calculer la probabilité de l'événement A « tirer 3 pièces de 500F ».

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 500F figurant parmi les trois pièces tirées.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X et l'écart-type de X.

3) L'enfant pépète 5 fois l'expérience en remettant chaque fois les trois pièces tirées dans le porte-monnaie.

Quelle est la probabilité que l'événement A se réalise trois fois à l'issue des 5 tirages ?

Exercice 10

Une classe comporte 10 garçons et 5 filles.

On choisit 3 élèves de la classe au hasard, l'un après l'autre.

Quelle est la probabilité pour que :

1) Les deux premiers soient des garçons et le troisième soit une fille.

2) Le premier et le troisième soient des garçons et le deuxième soit une fille.

3) Le premier et le troisième soient du même sexe, et le second soit de sexe opposé.

Exercice 11

Une urne A renferme 5 billes rouges et 3 billes blanches, et une urne B contient 2 billes rouges et 6 billes blanches.

1) Si l'on tire une bille dans chaque urne, quelle est la probabilité pour que les deux billes soient de la même couleur.

2) Si l'on tire deux billes dans chaque urne, quelle est la probabilité pour que les quatre billes soient de la couleur ?

Exercice 12

Le foyer d'un lycée doit élire son bureau composé d'un président, d'un vice président et d'un trésorier. Parmi les 20 candidats se trouvent 12 filles dont 5 en terminale et 8 garçons dont 4 en terminale.

On suppose que les candidats ont la même chance d'être élu.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A:« Les personnes choisies sont de même sexe. »

B: « Le président est un garçon et les autres sont des filles »

C : « Le bureau est constitué de deux filles et d'un garçon »

D : « Le bureau comprend un président et un vice président de sexes différents. »

E : « Le bureau comprend au moins un élève de terminal. »

Exercice 13

Une urne contient 12 fiches portant chacune une lettre du mot « BACCALAUREAT »

1) On tire successivement et au hasard les 12 fiches en les plaçant à la suite l'une après l'autre.

Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) Un mot commençant par une consonne ?

b) Un mot commençant par une voyelle ?

c) Le mot « BACCALAUREAT » ?

2) On remet les fiches dans l'urne et on en tire que 3 toujours successivement sans remise.

Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) Le mot « BAC » ? b) 3 voyelles ? c) Un seul « A » ? d) Au moins un « A »

e) Au plus une consonne ? f°) Trois lettres distinctes deux à deux ?

Exercice 14

Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20.

1) On tire au hasard une boule de l'urne . Calculer :

a)- La probabilité de l'événement :

A = « Le numéro de la boule tirée est multiple commun à 2 et 3 ? »

b)- La probabilité de l'événement :

B = « Le numéro de la boule tirée est multiple au moins de l'un des nombres 2 ou 3 ?

2)- On tire au hasard 3 boules successivement et avec remise.

Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois un numéro multiple commun à 2 et 3.

Exercice 15

1) *Le code PIN d'un téléphone portable est un nombre de quatre chiffres choisis parmi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ,8 et 9.*
   a) *Quel est le nombre de codes possibles ?*
   b) *Quel est le nombre de codes formés de quatre chiffres deux à deux distincts ?*
2) *Le téléphone portable étant éteint, le propriétaire voulant l'allumer sait que les quatre chiffres de ce code sont 1, 9, 9 et 5 mais il ignore l'ordre de ces chiffres.*
   a) *Combien de codes différents peut-il composer avec ces 4 chiffres ?*
   b) *Si le premier code introduit n'est pas bon, il doit attendre 2mn avant de pouvoir tenter un second essai ; délai d'attendre entre le second et le troisième essai est de 4mn ; entre le $3^{ème}$ et le $4^{ème}$ essai est de 8mn. (Le délai d'attente double entre deux essais successifs).*

   Combien de codes peut-il introduire au maximum en 24h.

Exercice 16

I)- Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un six en jetant 2 dés ?

- *Même question avec 3 dés ?*

II)- Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5.

On en tire simultanément deux.

1) -Proposer un univers adapté à ce problème.

2)-Calculer de deux façons la probabilité d'obtenir au moins un chiffre pair.

3)-Quelle est la probabilité d'obtenir :

a)- Deux chiffres de même parité

b)- Deux chiffres de parités différentes ?

Exercice 17

A la kermesse du lycée, un jeu consiste à tirer simultanément deux enveloppes parmi cinq dont une contenant un billet de 2000 F CFA, deux enveloppes contenant chacune un billet de 1000 F CFA et les deux autres contenant chacune une feuille sans valeur.

Les enveloppes sont identiques et non transparentes.

1) a) Quelle est la probabilité de tirer une enveloppe contenant chacune une feuille sans valeur.

b)Quelle est la probabilité de tirer une enveloppe contenant un billet de 2000 F CFA et une enveloppe contenant une feuille sans valeur.

2) Pour participer au jeu, le joueur verse 200 F CFA.

a) Quelle est la probabilité de perdre ?
b) Quelle est la probabilité de gagner 1800 F CFA ?

Exercice 18

Dans une publicité, une loterie annonce : « Un billet sur trois est gagnant. Achetez 3 billets »

Le texte de cette publicité suggère qu'en achetant 3 billets on est sûr de gagner.

Faisons le calcul dans le cas où la loterie comporte 30 billets et sachant qu'un billet sur trois est gagnant.

1) Combien y a-t-il de billets gagnants ?

2) On achéte un billet. On suppose que tous les billets ont la même probabilité d'être achetés. Quelle est la probabilité de ne rien gagner ?

3) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant sur trois ?

4) Quelle est la probabilité d'avoir trois billets gagnants ?

Exercice 19

Une urne contient 10 boules : 6 boules rouges numérotés de 1 à 6 et 4 boules bleues numérotés de 1 à 4. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

On suppose que les tirages de 3 boules sont équiprobables.

1) Quel est le nombre de tirages possibles ?

2) Calculer la probabilité des événements suivants :

a) A : « Les 3 boules tirées sont rouges »
b) B : « L'une au moins des 3 boules tirées est bleue »
c) C : « Chacune des 3 boules tirées porte un numéro supérieur ou égal à 3 »
d) $A \cap C$: « Les 3 boules tirées sont rouges et portent un numéro supérieur ou égal à 3 »
e) $A \cup C$: « Les 3 boules tirées sont rouges ou portent un numéro supérieur ou égal à 3 »

Exercice 20

Une urne contient 6 jetons blancs et 4 noirs.

1) On tire au hasard et simultanément 4 jetons de l'urne .Calculer les probabilités de événements suivants :

E_1 : « les jetons tirés sont blancs ».

E_2 : « au moins un des 4 jetons tirés est noir ».

2) On tire successivement, avec remise 4 jetons de l'urne. Calculer les probabilités des événements suivants :
F1 : le premier jeton tiré est blanc, les 3 autres sont noirs.

F2 : au moins un des 4 jetons tirés est noire

Exercice 21

Sept jetons portant les lettres A-I-E-O-R-T-S sont placés dans une urne.

1) on tire simultanément 4 jetons au hasard de l'urne .Calculer les probabilités des événements suivants :
E1 : « Obtenir 4 voyelles »; E2 : « Obtenir 2 voyelles et 2 consones » ;

E3 : « Obtenir au moins une voyelle ».

2) *On tire successivement sans remise au hasard tous les jetons que l'on place en ligne pour former un mot. calculer la probabilité des événements suivants :*

F_1 : « obtenir le mot OTARIES »

F_2 : « obtenir un mot commençant par une voyelle »

F_3 : « obtenir un mot commençant et finissant par une consone ».

3) *On tire successivement avec remise 8 jetons pour former également un mot .Quelle est la probabilité d'obtenir le mot « ARISTOTE » ?*

Exercice 22

Une urne contient 3 boules noires numérotées de 1 à 3 et 4 boules rouges numérotées de 2 à 5.

On tire simultanément 3 boules de l'urne. Calculer la probabilité pour que le tirage contienne :

1) *« 2 boules noires exactement ».*
2) *« Plus de 2 boules noires ».*
3) *« Au plus 2 boules noires ».*
4) *« Exactement 2 boules numérotées 2 ».*

Exercice 23

Une urne contient dix jetons : 4 jetons verts portant chacun le N° 2, 3 jetons blancs portant chacun le N° 0, 1 jeton bleu portant le numéro 0.

1) *On extrait un jeton de l'urne. Déterminer les probabilités des événements suivants :*
   a) *« le jeton est vert »*
   b) *« le jeton porte le numéro 0 »*
2) *On extrait simultanément 3 jeton de l'urne. Déterminer les probabilités des événements les suivants :*
   a) *« les jetons sont verts »*
   b) *« il y a au moins 2 jetons verts ».*
3) *On extrait enfin trois jetons de l'urne mais successivement et sans remettre le jeton tiré dans l'urne. Déterminer la probabilité des événements suivants :*
   a) *« Tirer dans l'ordre un jeton vert puis un rouge et enfin un blanc »*
   b) *« Tirer parmi les 3 un seul jeton portant le numéro 0 ».*

Exercice 24

Dans le jeu télévisé « chiffres et de lettres »,trois roulettes murales identiques sont alignés horizontalement .Pour chaque roulette,peut apparaître l'un des chiffres 0,1,2,3,4,5,6,7,8 ou 9 et nous supposerons que chaque chiffre a la probabilité de sortie.

A chaque tirage (mise en rotation de trois roulettes) on lit le nombre de trois chiffres obtenu (on considère 012,002, 000 comme des nombres à trois chiffres).

1) Déterminer combien de nombres différents on peut ainsi obtenir.

2) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Le résultat obtenu est un nombre formée de trois chiffres distincts »

B : « Le résultat obtenu est un nombre comportant deux ou trois chiffres identique »

C : « Le résultat est un nombre commençant par 0 »

D : « Le résultat obtenu est un nombre ne commençant par 0 »

Exercice 25

Dans une enveloppe, il y'a 44 timbres :8 du Sénégal et 6 de Côte d'Ivoire .On tire 4 timbres simultanément et hasard de l'enveloppe.

1) Quelle est la probabilité de prendre 2 timbres de chaque pays ?

2) Quelle est la probabilité de prendre au moins un timbre ivoirien ?

3) Quelle est la probabilité de prendre au plus 3 timbre au sénégalo ?

On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Exercice 26

On dispose d'un jeu de deux dés parfaitement différentiable, chacun ayant ses faces numérotées de 1 à 6.

Simultanément on lance les deux puis on relève le numéro marqué sur la face supérieure des dés.

Calculer la probabilité des événements suivants :

1) *les deux numéros relevés sont différents.*
2) *La somme des deux numéros est :*
   a) *égale à 7.*
   b) *supérieure à 10.*
   c) *inférieure à 6.*
3) *La différence entre les deux numéros est égale à 3.*

Exercice 27

Un sac contient 10 boules : 2 vertes, 3 jaunes et 5 rouges. Nous allons procéder à 2 épreuves, chaque fois avec l'hypothèse d'équiprobabilité.

1) ***1^er^ épreuve*** *: on tire simultanément, au hasard 3 boules du sac.*
   a) *Quel est l'univers Ω_1 associé à cette épreuve ? Calculer son cardinal*
   b) *Calculer les probabilités p(A) et p(B) si A est l'événement « On obtient 1 jaune et 2 rouges » et si B est l'événement « On obtient au moins une rouge ».*
2) ***2éme épreuve*** *:On tire successivement avec remise, au hasard ,3 boules du sac.*
   a) Quel est l'univers Ω_2 associé à cette épreuve ? Calculer son cardinal
   b) Calculer les probabilités p(C) et p (D) si C est l'événement : « on obtient 1 jaune suivie de deux rouges » et si D est l'événement : « on obtient 1 jaune ainsi que deux rouges »

Exercice 28

Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20

1) *On tire au hasard une boule de l'urne. Calculer les probabilités des événements suivants :*

A : « le numéro de la boule tirée est multiple commun à 2 et 3 »

B : « le numéro de la boule tirée est multiple au moins de l'un des nombres 2 ou 3 »

2) *On tire au hasard trois boules successivement et avec remise. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois un numéro multiple commun à 2 et 3.*

Exercice 29

Les lettres du mot « ORGANISME » sont inscrites sur neuf plaques. On tire au hasard successivement et sans remise 3 plaques que l'on dispose devant soit de gauche à droite dans l'ordre du tirage. On obtient ainsi un

« mot »de 3 lettres ayant un sens au nom.

1) *Combien de « mot » différent peut-on formé ?*
2) *Quelle est la probabilité :*

a) *Pour que le « mot » soit écrit avec trois consones ? .*

b) *Pour que le « mot » soit écrit avec trois voyelles ?*

c) *Pour que le « mot » comporte au moins une voyelle ?*

d) *De lire le « mot » mer ?*

e) *D'obtenir les lettres du mot mer ? »*

Exercice 30

Le programme d'histogénie d'un candidat au baccalauréat se compose de 15 chapitres d'histoire et 12 chapitres de géographie.

Le candidat n'a que 11 chapitres d'histoire et 10 chapitres de géographie. Il a fait l'impasse sur les 6 autres d'ont il ne sait rien.

Le sujet comporte 2 question d'histoire et 2 question de géographie portant sur des chapitres distincts. Lecandidat ne doit traiter qu'une seule question (au choix) dans chacun des deux disciplines. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

1) A : « le candidat ne sait traiter aucune des 4 questions ».

2) B : « le candidat sait traiter les 4 questions ».

3) C : « le candidat sait traiter au moins un des 4 questions».

4) D : « le candidat sait traiter au moins une question d'histoire et au moins une question de géographie ».

Exercice 31

Une urne contient 7 jetons portant les lettres S, N, G, H, O, E et R. On suppose qu un mot est un assemblage de lettres distinctes ou non, ayant un sens ou non.

1) On tire successivement 5 jetons de l'urne ; en remettant après chaque tirage le jeton tiré dans l'urne. On note dans l'ordre les jetons tirés pour formée un mot de 5 lettres.

a) Déterminer la probabilité de former un mot commençant par une voyelle.

b) Déterminer la probabilité de former un mot commençant par S, se terminant par R et contenant exactement une voyelle.

2) On tire successivement 7 jetons de l'urne, sans remettre le jeton tiré dans l'urne et on les aligne dans l'ordre du tirage pour former un mot de 7 lettres.

a) Déterminer la probabilité de tirer un mot commençant par une voyelle et se terminant par une voyelle.

b) Déterminer la probabilité de former le mot SENGHOR.

<u>Exercice 32</u>

Un sac contient 10 boules numérotées de 1 à 10 ; 2 boules rouges numérotées 1 et 2 et 3 boules

noires numérotées 1, 2 et 3

1) On tire simultanément 3 boules du sac. Calculer les probabilités des événements A, B, C et D suivants :

A : « Tirer trois boules blanches ».

B : « Tirer une rouge et deux noires ».

C : « Tirer trois boules de même couleurs ».

D : « Tirer trois boules portant le même numéro ».

2) On tire successivement sans remise 3 boules du sac. Calculer les probabilités des événements E et F suivants :

E : « Tirer une blanche, une noire et une rouge dans cet ordre ».

F : « Tirer deux blanches et une noire ».

<u>Exercice 33</u>

Une urne contient 10 jetons indiscernables au toucher sur lesquels on inscrit des nombres : 3 jetons

Portant le nombre 15 ; 5 jetons le nombre 10 et 2 nombres le nombre 20. On tire simultanément 2 jetons

de l'urne.

(N.B : tous les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible)

1) Calculer les probabilités des événements suivants :

A : « Obtenir 2 jetons portant le même nombre »

B : « Obtenir 2 jetons portant des nombres pair »

C : « tirer 2 jetons portant des nombres de même parité »

2) On effectue le somme des nombres obtenus. Compléter le tableau suivant, et calculer la probabilité de l'événement D : « Obtenir une somme supérieure à 33 »

Nombres tirés	*15 et 15*	*15 et 10*		*10 et 10*		
Somme des deux nombres						

Exercice 34

5 formations politiques de même envergure dont celui au pouvoir partent en compétition électorale. On suppose la chance pour que deux parties politiques est le même suffrage est nulle.

1) Quel est le nombre de classements possibles ?

2) Quel est la probabilité :

a) P_1 : pour que le partie au pouvoir gagne les élections ?

b) P_2 : pour que le partie au pouvoir soit parmi les trois formations politiques ?

c) P_3 : pour qu'a l'issue des élections le partie au pouvoir ne soit ni premier ni dernier ?

Exercice 35

Pour une épreuve orale, trois professeurs d'histoire et de géographie X,Y et Z proposant chacun des exercices :un de géographie et un d'histoire. Chaque élève doit obligatoirement traiter deux de ces six exercices pris au hasard (on aura une équiprobabilité).

1) Quel est le nombre de choix possibles pour un candidat ?

2) Doudou étant un candidat à cette épreuve , déterminer la probabilité :

a) Qu'il choisisse les deux exercices de l'enseignant Y.

b) Qu'il choisisse deux exercices géographie.

c) Qu'il choisisse deux exercices proposés par deux enseignants différents.

Exercice 36

Une urne contient trois boules jaunes, 5 boules rouges et deux boules vertes.

1) On tire simultanément 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité :

a) d'avoir un tirage unicolore ?

b) d'avoir exactement deux boules de même couleur

2) on tire successivement sans remise 3 boules. Quelle est la probabilité :

a) d'avoir des boules rouges uniquement ?

b) de ne pas avoir 2 boules vert au 2^e tirage

Exercice 37

Un sac contient deux boules blanches numérotées de 1 à 2 et 3 boules noires numérotées de 1 à 3. On tire successivement sans remise et au hasard 3 boules du sac. Calculer les probabilités des événements suivants :

1) *A : « le tirage contient une boule noire »*
2) *B : « le tirage contient seulement des boules noire »*
3) *C : « le tirage contient au moins une boule noire »*
4) *D : « le tirage contient une boule numérotée et une boule blanche exactement »*

Exercice 38

Un sac contient neuf jetons portant respectivement : 1, 2,3, 4, 5, 6, 7,8 et 9 .On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1) *On tire successivement, sans remise, trois jetons du sac . On forme ainsi un nombre de trois chiffres , le premier jetons donne le chiffre des unités ,le second celui des dizaines et le troisième celui des centaines*
   Calculer la probabilité pour que :
   a) *Le chiffre des unités du nombre obtenu soit 9.*
   b) *Le chiffre 9 figure dans le nombre obtenu.*
   c) *La somme des chiffres du nombre obtenu soit 9.*
2) *On tire un jeton du sac, on note le chiffre qu'il porte puis on le remet du sac . On répète trois fois cette opération (autrement dit, on tire successivement avec remise trois jetons).On obtient ainsi un nombre de trois chiffre de la même façon qu'à la question N°1 .Calculer les probabilités pour que :*
   a) *le chiffre des unités du nombre soit 9.*
   b) *Le chiffre 9 figure dans le nombre obtenu.*
   c) *Le chiffre 9 figure exactement une fois dans le nombre obtenu.*

Exercice 39

Une urne contient 5 boules blanches ,3 boules noires et 2 boules rouges, indiscernables au toucher.

1ére épreuve : *On tire simultanément 3 boules de l'urne. Calculer la probabilités événements suivants :*

A : « Obtenir un tirage unicolore ».

B : « Obtenir exactement 2 boules blanches ».

C : « Ne pas obtenir de boule noire ».

2éme épreuve *: On tire successivement sans remise 3 boules de l'urne.*

Calculer les probabilités des événements suivants :

D : « Obtenir deux boules blanches suivies d'une rouge ».

E : « Obtenir deux boules blanches et une boules rouge ».

Exercice 40

Un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est truquée de telle manière que l'apparition du numéro du 5 est deux fois « plus probable » que l'apparition de chacun des autres numéros . On note P_i la probabilité du numéro (i = 1 , 2 , 3 ,…6).

1. *Calculer la probabilité d'apparition de chaque numéro.*
2. *Dans cette question on suppose que $P_1=P_2=P_3=P_4=P_6=\frac{1}{7}$ et $P_5=\frac{1}{5}$.Calculer les probabilités des événements suivants :*
   a) *« Obtenir un numéro pair ».*
   b) *« Obtenir un numéro impair ».*

Exercice 41

La fédération de lutte veut classer par ordre de mérite, sans ex-aequo les 3 meilleurs lutteurs de l'arène de l'année 2003, parmi 8 lutteurs choisie par les journalistes sportifs dont Bombardier Yékini et Tyson. On suppose l'hypothèse d'équiprobabilité vérifiée.

1) *Déterminer le nombre de classements possibles.*
2) *Calculer les probabilités de chacun des événements suivant s :*
   a) *E : « Bombardier figure parmi les 3 lutteurs choisis »*
   b) *F : « Bombardier est élus meilleur lutteur parmi les 3 lutteurs choisis »*
   c) *G : « les 3 lutteurs choisis sont Tyson, Bombardier et Yékini dans le désordre.*

Exercice 42

Le foyer d'un lycée doit élire sont bureau composé d'un président, d'un vice- président et d'un trésorier. Parmi 20 candidats se trouve 12 filles dont 5 en terminale et 8 garçons dont 4 en terminal. On suppose que les candidats ont la même chance d' être élus :

Calculer les probabilités de chacun des événements suivant s :

- A- *« les personnes choisies sont de même sexe. »*
- B- *« le président est un garçon et les autres sont des filles. »*
- C- *« le bureau est constitué de 2 filles et 1 garçon. »*
- D- *« Le bureau comprend un président et un vice- président de sexes différents. »*
- E- *« Le bureau comprend au moins un élève de terminale »*

Exercice 43

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher composées de 4 rouges et 5 blanches.

1) *On tire au hasard sans remise 3 boules de l'urne. Calculer la probabilité des évènements suivants :*

A '' Obtenir 3 boules rouges''

B'' Obtenir 3 boules blanches''

C'' 2 boules rouges et une blanche''

2) *Si le tirage a lieu avec remise, quelle est la probabilité des évènements A, B et C du première question.*

Exercice 44

Un sac contient 10 boules indiscernables au toucher constituées de 2 vertes ; 3 jaunes et 5 rouges. On tire simultanément au hasard 3 boules du sac . Calculer la probabilité des évènement suivants :

1) *A''obtenir 1 jaune et 2 rouges''*
2) *B''obtenir au moins un rouge''*

Exercice 45

6 personnes choisissent séparément, au hasard, de déjeuner dans l'un des 6 restaurants d'une ville.

a) Quelle est la probabilité P_1 qu'il n'y ait aucune rencontre.

b) Quelle est la probabilité pour que 3 personnes se rencontrent et les autres ne se rencontrent pas.

Exercice 46

Une urne contient 6 jetons numérotés de 1 à 6. On tire au hasard un jeton de l'urne, on note P_i la probabilité de tirer le jeton numéroté i. On suppose que les nombres P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 et P_6 sont dans cet ordre en progression arithmétique de raison $\frac{1}{30}$.

1) a) Montrer que $P_1 = \frac{1}{12}$.

b) En déduire P_2, P_3, P_4, P_5 *et* P_6

2) On tire 3 fois de suite et avec remise un jeton de cette urne. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jeton portant un numéro pair.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Déterminer l'espérance mathématiques de X puis son écart-type.

3) Un joueur tire simultanément 2 jetons et on note S la valeur absolue de la différence des numéros que portent 2 jetons tirés.

a) Déterminer la loi de S ?

b) On gagne à ce jeu si $S \geq 4$. *Déterminer la probabilité de gagner.*

Exercice 47

Un appareil fabriqué en très grande série peut être défectueux à cause de 2 défauts seulement, que l'on désigne par A et B.

Dans un lot de 10 000 appareils, on a constitué que 1000 appareils présentaient le défaut A, 800 appareils présentaient le défaut B, 400 appareils présentaient à la fois les défauts A et B un client acheté un de ces appareils.

1) Compléter le tableau suivant :

Défaut	*B*	*Non B*	*Total*
A			
Non A			
Total			

2) Quelle est la probabilité pour que cet appareil présente le défaut A seulement ? le défaut B seulement.

3)Les évènements A et B sont – ils indépendants.

Exercice 48

Dans une entreprise on fait appel à un technicien lors de son passage hebdomadaire, pour l'entretien des machines. Chaque semaine, on décide donc pour chaque appareil de faire appel ou non du technicien. Pour un certain type de machine, le technicien constate :

- *Qu'il doit intervenir la première semaine.*
- *Que s'il est intervenu la* $n^{ième}$ *semaine, la probabilité qu'il intervienne la* $(n+1)^{ième}$ *semaine est égale à* $\frac{3}{4}$
- *Que s'il n'est pas intervenu la* $n^{ième}$ *semaine, la probabilité qu'il intervienne la* $(n+1)^{ième}$ *semaine est égale à* $\frac{1}{10}$

On désigne par E_n *''l'événement le technicien intervient la* $n^{ième}$ *semaine'' et par* p_n *sa probabilité.*

1) Déterminer $P(E_1)=p_1$; $P(E_{n+1}/E_n)$ et $P\left(E_{n+1}/\overline{E}_n\right)$. Puis exprimer en fonction de p_n, $P(E_{n+1}\cap E_n)$ et $P\left(E_{n+1}\cap\overline{E}_n\right)$

2) En déduire que $p_{n+1}=\frac{13}{20}p_n+\frac{1}{10}$.

3) On pose $q_n=p_n-\frac{2}{7}$. Montrer que (q_n) est géométrique. En déduire p_n en fonction de n.

4) Pour quelles valeurs de n, la probabilité que le technicien intervienne la $n^{ième}$ semaine, est-elle inférieur à $\frac{3}{10}$?

Exercice 49

On dispose de 2 dés cubiques en apparence identique dont l'un est parfait et l'autre truqué. Les faces de chacun d'eux sont numérotées de 1 à 6. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir la face portant le chiffre 5 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

1)a) On lance le dé parfait 3 fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où la face portant le chiffre 5 apparait. Quelle est la loi de probabilité de X.

b) On lance le dé truqué 3 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 fois la face portant le chiffre 5 ?

2) On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. On le lance 3 fois de suite. On considère les évènements suivants

A''obtenir exactement 2 fois la face portant le chiffre 5''

B''Choisir le dé truqué''

C''Choisir le dé truqué et obtenir exactement 2 fois la face portant le chiffre 5''

D''Choisir le dé non truqué et obtenir exactement 2 fois la face portant le chiffre 5''

Calculer p(A), p(B), p(C) et p(D).

Exercice 50

Un tireur à l'arc envoie 5 flèches sur une cible. On admet que chaque tir est indépendant des précédents et que la probabilité d'atteindre la cible lors d'un tir est égale à 0,75.

1) On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la cible est atteinte.
a) Déterminer la loi de probabilité des évènements suivants : $(X\leq 1)$; $(X>3)$ et $(2\leq X<5)$
b) Calculer l'espérance mathématique de X et sa variance.
2) Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition F de X.

Exercice 51

Un joueur de tennis effectue une mise en jeu. Pour cela il a droit à 2 tentatives : un premier service suivi, s'il n'est pas réussi, d'un second service. La probabilité que le premier service réussisse est égale à $\frac{2}{3}$. S'il a échoué, la probabilité que le deuxième service réussite est égale $\frac{4}{5}$.

Lorsque les 2 services échouent, il a ''double faute''. Sinon, la mise en jeu réussie.

1) a) Donner la probabilité que le second service ne soit pas réussi sachant que le premier service n'est pas réussi.

b) Montrer que sur une mise, la probabilité que ce joueur fasse une double faute est égale à $\frac{1}{15}$.

c)En déduire la probabilité que la mise en jeu soit réussie.

2) Ce joueur fait un pari avec un de ses camarades. Il effectue 10 mises en jeu successives (de manière indépendante). S'il réussit 10 ou 9 mise en jeu, il gagne 10^F par mise en jeu réussi. Sinon il perd 50^F. On appelle X la variable aléatoire représentant la somme gagnée (comptée positivement) ou perdue (comptée négativement) par ce joueur.

a)Exprimer en fonction de k ($k \in \{0,1,2,...,10\}$), la probabilité p_k que le joueur réussisse k mise en jeu.

b)Calculer $P(X=100)$; $P(X=90)$; $P(X=-50)$

c)Calculer l'espérance mathématique E(X) et la variance V(X) de X

Exercice 52

Un sac contient six boules rouges numérotées de 1 à 6 et trois boules blanches numérotées de 1 à 3. On extrait simultanément deux boules ; on note a et b les numéros portés sur ces deux boules. On admet l'équiprobabilité de toutes les paires de boules.

1) Quelle est la probabilité pour que l'on ait a = b ?

2) Quelle est la probabilité pour que les deux boules tirées soient de couleurs différentes ?

3) A chaque tirage de deux boules, on associe la variable aléatoire X définie par :

— si les deux boules sont blanches, X prend la valeur a + b

— si les deux boules sont rouges, X prend la valeur | a — b |

— si les deux boules sont de couleurs différentes, X prend la valeur 0.

a) Définir la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

c) Représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

Exercice 53

On teste un médicament parmi un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé. Pour cela 60% des individus prennent le médicament, les autres recevant un placebo[1],et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie.

Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de ce taux avec une probabilité de 0,8 ; on ne constate aucune baisse de taux pour 90% des personnes ayant le placebo. On appelle :

M l'événement « avoir pris le médicament », $\overline{M}$ l'événement contraire.

---

[1] Substance que l'on substitue à un, médicament (sans que la personne testée le sache) pour tester les effets de celui-ci par comparaison.

B l'événement « avoir une baisse du taux de glycémie » ; $\overline{B}$ l'événement contraire.

1) Utiliser l'égalité $B = (M \cap B) \cup (\overline{M} \cap B)$ pour montrer que la probabilité P(B) de l'événement B est 0,52.

2) On soumet au test un individu pris au hasard.

Quelle est la probabilité pour qu'il ait pris le médicament si on ne constate pas de baisse de son taux de glycémie ?

3) On contrôle cinq individus au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux n'a pas baissé ?

Le résultat sera donné sous forme décimale à 10^{-3} près.

<u>Exercice 54</u>

On tire deux cartes simultanément d'un jeu de 32 cartes .Calculer la probabilité pour qu'il y ait : a) au moins un as b) exactement un as c) deux as .

<u>Exercice 55</u>

Dans une ville, il existe deux lycées, l'un de garçons, l'autre de filles .

Chaque lycée a une classe de Terminale S1, une classe de Terminale S2 et une classe de Terminale L . Une bourse de voyage est offerte par la ville à six élèves parmi les élèves des six classes terminales .

Pour cela, on choisit les six meilleurs élèves de chaque classe, soit, en tout, trente-six élèves, et les noms des six boursiers sont alors déterminés par tirage au sort parmi ces trente-six élèves . On demande de calculer les probabilités :

a) pour que les six boursiers soient les six élèves de la Terminale S2 garçons .

b) pour que les six boursiers soient des élèves de la Terminale S2 .

c) pour que les six boursiers soient six filles .

d) pour que les six boursiers soient trois garçons et trois filles .

e) pour que, dans les six boursiers, il y ait moins de trois garçons .

<u>Exercice 56</u>

Une urne contient 12 boules noires et 2 boules blanches .

1) On tire simultanément boules . On suppose l'hypothèse d'équiprobabilité .

Quelle est la probabilité d'avoir deux boules blanches ? d'avoir au moins une boule blanche ?

2) Combien de boules faut-il tirer, au minimum, pour que la probabilité d'avoir au moins une boules blanche soit supérieure à $\frac{5}{6}$?

<u>Exercice 57</u>

Dans une urne, il y a dix jetons portant le numéro 3 et cinq jetons portant le numéro 2 . on considère l'épreuve qui consiste à tirer simultanément deux jetons . Tous les tirages sont équiprobables .

1) Calculer la probabilité de l'événement A : « la somme des points marqués sur les jetons est égale à 4 ».

2) Calculer la probabilité de l'événement B : « la somme des points marqués sur les jetons est égale à 5 ».

3) Calculer la probabilité de l'événement c : « la somme des points marqués sur les jetons est paire ».

Exercice 58

On associe au jet d'un dé pipé, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et la probabilité p satisfaisant aux conditions suivantes :

a) les événements {4}, {5} et {6} sont équiprobables .

b) $p(2) = p(3) = \frac{2}{3}p(1)$.

c) la probabilité de l'événement {1, 2, 3 } est égale aux $\frac{4}{5}$ *de l'événement contraire .*

1) Donner les valeurs de p pour les événements élémentaires .

2) Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat impair par le jet de ce dé ?

3) Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat inférieur à 5 ?

Exercice59

1) Un joueur tire simultanément quatre cartes d'un jeu de trente-deux .

En supposant que les tirages soient équiprobables, calculer la probabilité p_1 de l'événement « le joueur tire l'as de cœur » .

2) Ce joueur étant tricheur utilise un jeu de cartes biseautées (*) ; ce qui lui permet d'obtenir exactement deux as pour tout tirage de quatre cartes .

En supposant que ces nouveaux tirages soient équiprobables, calculer la probabilité p_2 de l'événement « le joueur tire l'as de cœur » .

(*)biseautées = coupées obliquement

Exercice 60

Une urne contient six boules blanches et quatre boules noires .

On appelle « tirage » la prise simultanée de deux boules dans cette urne, et l'on admet que tous les tirages sont équiprobables .

1) On procède à un tirage unique . Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : on obtient deux boules blanches ;

B : on obtient deux boules noires ;

C : on obtient deux boules de couleurs différentes ;

Quelle est la somme de ces trois probabilités ?

2) On procède à deux tirages successifs en remettant dans l'urne, après le premier tirage, les deux boules tirées .On appelle « succès » la sortie de deux boules blanches lors d'un même tirage . Calculer :

a) la probabilité d'obtenir deux succès ;

b) la probabilité d'obtenir un seul succès ;

c) la probabilité de n'obtenir aucun succès ;

Quelle est la somme de ces trois probabilités ?

Exercice 61

On veut construire une grille de mots croisés ayant cinq lignes et cinq colonnes . on noircira, au hasard, huit des vingt-cinq cases de la grille et on considèrera que les choix des cartes sont équiprobables .

1) De combien de manières peut-on choisir les huit cases noires de la grille ?

2) Quelle est la probabilité, lors d'une épreuve, d'obtenir un tableau ainsi constitué : une case noire au centre du carré et une à chacun des sommets, les trois autres cases noires étant à une place quelconque ?

3) Quelle est la probabilité d'obtenir, lors d'une épreuve, une grille dont une colonne est entièrement composée de cases noires, les trois autres cases noires étant à une place quelconque ?

On donnera, des probabilités demandées, des valeurs décimales approchées exprimées avec cinq décimales .

Exercice 62

Une urne contient cent billets numérotées de 1 à 100 .

1) On extrait de l'urne un billet . sachant que chaque billet a la même probabilité d'être extrait, quelle est la probabilité d'obtenir un billet dont le numéro est terminé par le chiffre 2 ?

2) On tire deux billets de l'urne simultanément . Donner le nombre de tirages différents possibles .

3) Ces billets sont utilisés pour une tombola .Chaque billet dont le numéro est terminé par un chiffre 2 donne droit à un lot . On extrait simultanément deux billets de l'urne .

Les événements élémentaires attachés à cette expérience sont équiprobables .

Soit A l'événement « gagner un lot et un seulement » ;

Soit B l'événement « gagner deux lots» ;

Soit C l'événement « gagner au moins un lot» ;

Calculer la probabilité des événements A, B, C.

Exercice 63

On dispose de 26 jetons identiques. Sur chacun d'eux, on inscrit une des 26 lettres de l'alphabet (deux jetons ne portent pas la même lettre). On les met dans un sac et on en tire 3 successivement sans remise. Quelle la probabilité de tirer :

a) Trois consonnes ? *b) Trois voyelles ?* *c) les lettres B, A, C dans cet ordre ?*

d) les lettres B, A, C sans tenir compte de l'ordre ?

Exercice 64

On met dans une urne les lettres mobiles susceptibles de former le mot économie *et l'on tire successivement cinq lettres au hasard. Quelle la probabilité pour que, dans l'ordre de l'obtention, ces lettres forment le mot* moine *:*

a) Si l'on remet la lettre après chaque tirage ?

b) Si l'on laisse la lettre hors de l'urne après chaque tirage ?

Exercice65

On partage un cercle en six parties égales . On obtient les points A , B, C, D, E, F qui sont les sommets consécutifs d'un hexagone régulier . On considère, d'autre part, l'ensemble U constitué par ces six lettres .

1) On tire au hasard et simultanément deux lettres dans U . Quelle est la probabilité pour que ces deux lettres désignent deux sommets consécutifs de l'hexagone ?

2) On tire maintenant, au hasard et simultanément, trois lettres dans U . Quelle est la probabilité pour que ces trois lettres obtenues désignent les sommets :

a) D'un triangle équilatéral(les trois côtés égaux) ?

b) D'un triangle isocèle non équilatéral (deux côtés égaux) ?

c) D'un triangle rectangle(un côté du triangle doit être un diamètre du cercle) ?

Exercice 66

Une cible circulaire est divisée en dix régions par dix cercles concentriques de rayons 1, 2, 3, …., 10 cm . Aucune balle ne pouvant sortir de la cible, on appelle événement l'impact d'une balle dans le disque central, ou dans une des couronnes circulaires ainsi tracées . On suppose que la probabilité pour que la balle atteigne une région de la cible est proportionnelle à l'aire de cette région .On rappelle que l'aire d'un disque de rayon R est πR^2 .

1) Quelles sont les probabilités respectives d'atteindre le disque central et chacune des couronnes ?

2) On donne dix points si la balle atteint le disque central, neuf si elle atteint la première couronne de rayons 1 et 2, huit si elle atteint la seconde couronne, etc., et un point pour la dernière couronne . Calculer la probabilité d'un score supérieur ou égal à 8 .

Exercice 67

On utilise deux dés supposés parfaits, dont les faces sont numérotées de 1 à 6 .

1) On lance simultanément les deux dés . Calculer la probabilité :

a) d'obtenir deux fois le numéro 6 ;

b) d'obtenir une fois et une fois seulement le numéro 6 ;

c) de ne pas obtenir le numéro 6 .

2) Un joueur procède à l'expérience suivante : il lance simultanément les deux dés et :

a) s'il obtient deux fois le numéro 6, il a gagné ;

b) s'il obtient une fois seulement le numéro 6, il relance le dé qui ne marquait pas 6 : si celui-ci donne 6, le joueur a gagné ;

c) s'il n'obtient pas de numéro 6, il relance les deux dés ; s'il obtient alors deux fois le numéro 6, il a gagné .

Calculer la probabilité pour que ce joueur gagne .

N.B. On exprimera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Exercice 68

Une école élémentaire possède trois classes dans chacun des cinq niveaux (CP, CE1, CE2, CM1, CM2) . Chacune des quinze classes accueille vingt-cinq élèves. Chaque année, les soixante-quinze élèves d'un niveau donné sont répartis au hasard dans les trois classes de ce niveau. Oumou et Fatima entrent au Cours Préparatoire et sont admises chaque année dans la classe suivante.

1) Quelle la probabilité pour qu'elles soient dans le même C.P ?

2) Quelle la probabilité pour qu'elles restent ensemble pendant les cinq années de leur scolarité ?

Exercice 69

On dispose de dés cubiques dont les faces sont numérotés de 1 à 6.

1) Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité d'obtenir au moins une fois le « six » en quatre lancers successifs d'un dé.

2) On lance deux dés simultanément, n fois de suite.

a) Quelle la probabilité d'obtenir au moins une fois le « double six » ?

b) Pour quelles valeurs de n cette probabilité est-elle supérieure à $\frac{1}{2}$?

Exercice 70

Au cours d'une expérience sur le comportement des animaux, des rats doivent choisir entre quatre portes d'apparence identique, dont l'une est dite « bonne » et les trois autres sont dites « mauvaises ». Chaque fois qu'il choisit une mauvaise porte, le rat reçoit une décharge électrique désagréable et est ramené à son point de départ, et cela jusqu'à ce qu'il choisisse la bonne porte.

1) Le rat n'a aucune mémoire.

Il choisit à chaque essai de façon équiprobable entre les quatre portes. Déterminer la probabilité des événements suivants :

a) le rat sort au bout de la troisième fois ;

b) le rat sort au bout de la septième fois ;

2) Le rat a une mémoire parfaite.

A chaque nouvel essai, il évite les mauvaises portes choisies précédemment et il choisit de façon équiprobable entre celles qu'il n'a pas encore essayées. Soit k le nombre d'essais effectués par le rat.

Déterminer les valeurs possibles de k, ainsi que les probabilités pour que le nombre d'essais soit égal à chacune de ces valeurs.

Exercice 71

On lance trois dés D_1, D_2 et D_3, cubiques équilibrés. Les faces de chacun d'eux sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

1) Calculer les probabilités des événements suivants :

A : « les trois dés donnent 1 »

B : « les trois dés donnent le même résultat »

C : « deux dés seulement donnent 1 »

D : « deux dés donnent le même résultat et l'autre un résultat différent »

Pour chaque résultat, on donnera la valeur exacte, puis une valeur décimale approchée à 10^{-3} près.

2) On répète n fois l'expérience et on note P_n la probabilité d'obtenir au moins une fois trois résultats identiques sur les trois dés (n est un entier naturel non nul).

Montrer que $P_n = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$.

Déterminer le plus petit entier n tel que $P_n \geq 0{,}3$.

Exercice 72

Ismaïla possède un jeu électronique. Une partie est un duel entre Ismaïla et un monstre choisi par la machine. Deux choix équiprobables sont possibles :

La machine choisit soit le monstre M_1, soit le monstre M_2.

Les événements « Ismaïla choisit le monstre M_1 » et « Ismaïla choisit le monstre M_2 » ont la même probabilité $\frac{1}{2}$.

Les deux monstres sont de forces inégales et on admet que, si Ismaïla combat M_1, la probabilité pour qu'il gagne la partie est $\frac{1}{3}$; si Ismaïla combat M_2, la probabilité pour qu'il gagne la partie est $\frac{1}{4}$.

1) Ismaïla joue une partie. Soit G l'événement : « Ismaïla gagne la partie ».

Calculer la probabilité des événements $A \cap G$ et $B \cap G$.

En déduire que la probabilité de G est $\frac{7}{24}$.

2) Ismaïla joue cinq parties. Quelle la probabilité pour qu'il gagne exactement trois fois ?

Donner ce résultat à 0,01 près.

Exercice 73

Un élève doit répondre à un QCM comportant dix questions. A chaque question, trois réponses sont proposées dont une seule est correcte.

L'élève ne peut cocher, au plus, qu'une réponse. A la correction, il est attribué un point par bonne réponse, zéro point en l'absence de réponse et -1 point par réponse erronée.

L'élève connaît la bonne réponse à cinq des dix questions. Pour les cinq autres, il hésite entre ne pas répondre et répondre au hasard.

1) L'élève décide de ne pas répondre aux questions dont il ignore la réponse.

Quelle sera sa note ?

2) L'élève décide de répondre au hasard à chacune des questions dont il ignore la réponse.

a) Etablir qu'on est en présence d'un schéma de Bernoulli.

b) On note X la variable aléatoire indiquant la note de l'élève.

Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique E(X).

Exercice 74

1)Lors d'un concours d'équitation, un cavalier effectue un parcours de 1500 m à la vitesse de 10 km/h et franchit sur ce parcours six obstacles indépendants les uns des autres. Pour ce cavalier, la probabilité de franchir « sans faute » un obstacle est $\frac{2}{3}$.

Le passage sans faute d'un obstacle ne ralentit pas le cavalier, tandis qu'un passage avec faute lui fait perdre une minute.

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre d'obstacles franchis sans faute.

Quelle est la nature de la loi de probabilité de X ?

Calculer l'espérance mathématique de X.

En déduire la durée moyenne du parcours.

2) Ce cavalier doit ensuite effectuer à cheval deux sauts indépendants l'un de l'autre. Pour chaque saut, il lui est attribué 0, 2 ou 5 points.

La probabilité d'avoir cinq points est $\frac{2}{3}$, celle d'avoir deux points est $\frac{1}{6}$, celle d'avoir zéro point est $\frac{1}{6}$.

On considère la variable aléatoire qui, aux deux sauts effectués, associe le nombre de points totalisés.

Quelles sont les valeurs prises par Y ?

Déterminer la loi de probabilité de Y.

En déduire la probabilité de l'événement $(Y \geq 5)$.

Exercice 75

Un jardinier décide de planter des graines de salade. Le pouvoir germinatif de chaque graine est 0,8.

1) Il sème huit graines. Quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité pour que :

a) cinq graines exactement germent?

b) au moins sept graines germent ?

2) Quand une graine a germé, la probabilité pour que les vers détruisent le jeune plant est 0,5.

a) Calculer la probabilité pour qu'une graine semée donne un plant bon à repiquer.

b) Combien faut-il semer de graines pour que la probabilité d'avoir au moins un plant à repiquer soit supérieure à 0,99 ?