

MEPU-A

DCE : RATOMA

DSEE : KOLOMA

COMPLEXE SCOLAIRE LA PLUME

SUJET :

BACCALAUREAT BLANC

EPREUVE DE MATHS

NIVEAU : TSM

DURÉE : 4Heures

Exercice 1 : NOMBRES COMPLEXES ET ARITHMETIQUE 4points

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J)

Unité graphique 1 cm. On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = -(\sqrt{3} + i)z - 1 + i(1 + \sqrt{3})$ 1) Montrer que f est une similitude directe dont le centre Ω a pour affixe i . En déduire le rapport et l'angle2) Soit M_0 le point d'affixe : $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$ Calculer ΩM_0 et donner une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{\Omega M_0})$ 3) On considère une suite de points (M_n) défini pour tout entier naturel n par $M_{n+1} = f(M_n)$. On appelle z_n l'affixe du point M_n .a- Placer les points $\Omega, M_0, M_1, M_2, M_3$ et M_4 b- Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ; $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$ c- Pour tout entier naturel n , calculer ΩM_n , puis déterminer le plus petit entier naturel n tels que : $M\Omega_n \geq 10^2$ 4) a) On considère l'équation : $7x - 12y = 1$ (E) où x et y sont deux entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple $(-5 ; -3)$ est solution, résoudre l'équation (E).b) Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que $Im(z) = 1$ et $Re(z) \geq 0$. Caractériser géométriquement (Δ) et le représenter.Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite droite d'origine Ω dirigée par le vecteur \vec{u} . Préciser son plus petit élément.**Exercice 2 : PROBABILITÉ 3points**Une urne U_1 contient n boules numérotées 1 et 2 boules numérotées 2Une urne U_2 contient 2 boules numérotées 1 ; 3 boules numérotées 2 et une boule numérotée 3Une urne U_3 contient $n - 1$ boules numérotées 2 et une boule numérotée 3On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2On tire une boule dans l'urne U_1 ; deux boules dans l'urne U_2 et une boule dans l'urne U_3 1) Montrer que la probabilité d'avoir les mêmes numéros est $P_n = \frac{2(n-1)}{5n(n+2)}$ 2) Montrer que la probabilité que la somme des numéros soit 5 est : $P_n = \frac{n-1}{15(n+2)}$ 3) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage, associe la somme des numéros tirésa) Donner les valeurs possibles de X b) Déterminer la loi de probabilité de X c) Calculer l'espérance mathématique de X d) Déterminons la valeur de n pour laquelle $E(X) = \frac{229}{240}$ **Exercice 3 : BARYCENTRE 3points**ABC est un triangle équilatéral de mesure 4cm et I le milieu du segment $[AC]$, G est lecentre de gravité de ce triangle et A' le point défini par $A' = \text{bar} \begin{matrix} A & B \\ 1 & -2 \end{matrix}$ 1) Soit E le point défini par $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Construire le point puis écrire le comme barycentre de A, B et C

- 2) M est un point appartenant à l'ensemble (E) défini par : $\overline{IM} \cdot \overline{IB} = 8$
- Montrer que le point E appartient à (E)
 - Déterminer la position de M puis représenter (E)
- 3) On sait de plus que M appartient à l'ensemble (F) défini par : $MA^2 - 2MB^2 = \frac{80}{9}$
- Montrer que le point E appartient à (F)
 - Déterminer la position de M puis représenter (F)
- 4) On sait encore que M appartient à l'ensemble (G) défini par : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{160}{3}$
- Montrer que le point E appartient à (G)
 - Déterminer la position de M puis représenter (G)
 - En déduire la position de M
- 5) Calculer $MA^2 - 2MB^2 + MC^2$
- 6) Utiliser les questions précédentes pour calculer la valeur approchée à 10^{-2} près des distances MA, MB et MC puis vérifier sur la figure (On donne $\sqrt{7} \approx 2,65$; $\sqrt{19} \approx 4,36$)

PROBLEME : FONCTION ET INTEGRALE 10 points

On considère la fonction f définie sur $] -1; 1[$ par $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$

On note (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique 2cm

Partie A :

- Calculer les limites de f en -1 et en 1. Interpréter graphiquement les résultats obtenus
- Démontrer que : $\forall x \in] -1; 1[, f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$
 - En déduire le tableau de variation de f
 - Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0
- Soit g la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $g(x) = f(x) - x$
 - Déterminer le sens de variation de g
 - Calculer g(0) et en déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x
 - Déterminer la position de (C) par rapport à (T)
- Construire dans le même repère (C) et (T)
- Démontrer que f est une bijection de $] -1; 1[$ vers \mathbb{R}
 - On désigne par f^{-1} la bijection réciproque de f et par (C') sa courbe représentative dans le repère (O, I, J). Construire (C')
 - Démontrer que $\forall y \in \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$

Partie B :

- Soit φ une primitive de f^{-1} sur \mathbb{R} (on ne cherchera pas à déterminer $\varphi(x)$)
- Démontrer que $\varphi \circ f$ est une primitive de la fonction $x \rightarrow x f'(x)$ sur $] -1; 1[$
- Démontrer que pour tout élément a et b de $] -1; 1[, \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t) dt = \varphi \circ f(b) - \varphi \circ f(a)$
- En déduire que $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t) dt = \int_a^b t f'(t) dt$
- Démontrer que pour tout élément x de $] -1; 1[, \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = \int_0^x t f'(t) dt$
(On pourra utiliser B1.c)
- Démontrer que pour tout élément x de $] -1; 1[, \int_0^x t f'(t) dt = -\frac{1}{2} \ln(1 - x^2)$
(On pourra utiliser B1.c)

- b) En déduire que, pour tout élément y de \mathbb{R} , $\int_0^y f^{-1}(t)dt = \ln\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)$
- 3) Soit A l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) de f^{-1} et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$. Calculer A en unités d'aires
- 4) a) Hachurer sur le graphique l'ensemble D des points dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$ et $f^{-1}(x) \leq y \leq f(x)$
- b) Calculer l'aire de D en cm^2

RESOLUTION

EXERCICE 1

1) Montrons que f est une similitude directe dont le centre Ω a pour affixe i . En déduire le rapport et l'angle

Comme $|a| = |-(\sqrt{3} + i)| = 2 \neq 1$ alors f est une similitude plane directe.

Le centre a pour affixe : $w = \frac{b}{1-a} = \frac{-1+i(1+\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}+i} = \frac{[-1+i(1+\sqrt{3})](1+\sqrt{3}-i)}{(1+\sqrt{3})^2+1^2}$

$$w = \frac{-1 - \sqrt{3} + i + i(1 + \sqrt{3})^2 + 1 + \sqrt{3}}{5 + 2\sqrt{3}} = \frac{i(5 + 2\sqrt{3})}{5 + 2\sqrt{3}} = i$$

Donc on a $w = i$

Le rapport : $k = |a| = |-(\sqrt{3} + i)| = 2$, $k = 2$

L'angle : $\theta = \arg a = \arg[-(\sqrt{3} + i)] = \pi + \arg(\sqrt{3} + i) = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$$\theta = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

Soit M_0 le point d'affixe : $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$

Calculons ΩM_0 et donner une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{\Omega M_0})$;

$$\Omega M_0 = |z_0 - w| = \left| \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i - i \right| = \left| \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i \right| = \frac{1}{2}$$

Donc la distance cherchée est : $\Omega M_0 = \frac{1}{2}$

$$Mes(\vec{u}; \overrightarrow{\Omega M_0}) = \arg(z_0 - w) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i\right) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Donc l'angle cherché est : $Mes(\vec{u}; \overrightarrow{\Omega M_0}) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

2) On considère une suite de points (M_n) défini pour tout entier naturel n par $M_{n+1}=f(M_n)$.

On appelle z_n l'affixe du point M_n .

a- Plaçons les points Ω , M_0 , M_1 , M_2 , M_3 et M_4

On a donc : $z_{n+1} = -(\sqrt{3} + i)z_n - 1 + i(1 + \sqrt{3})$

• $n = 0$; on a : $z_1 = -(\sqrt{3} + i)z_0 - 1 + i(1 + \sqrt{3})$

$$z_1 = -(\sqrt{3} + i)\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i\right) - 1 + i(1 + \sqrt{3}) = -1 + i$$

• $n = 1$; on a : $z_2 = -(\sqrt{3} + i)z_1 - 1 + i(1 + \sqrt{3})$

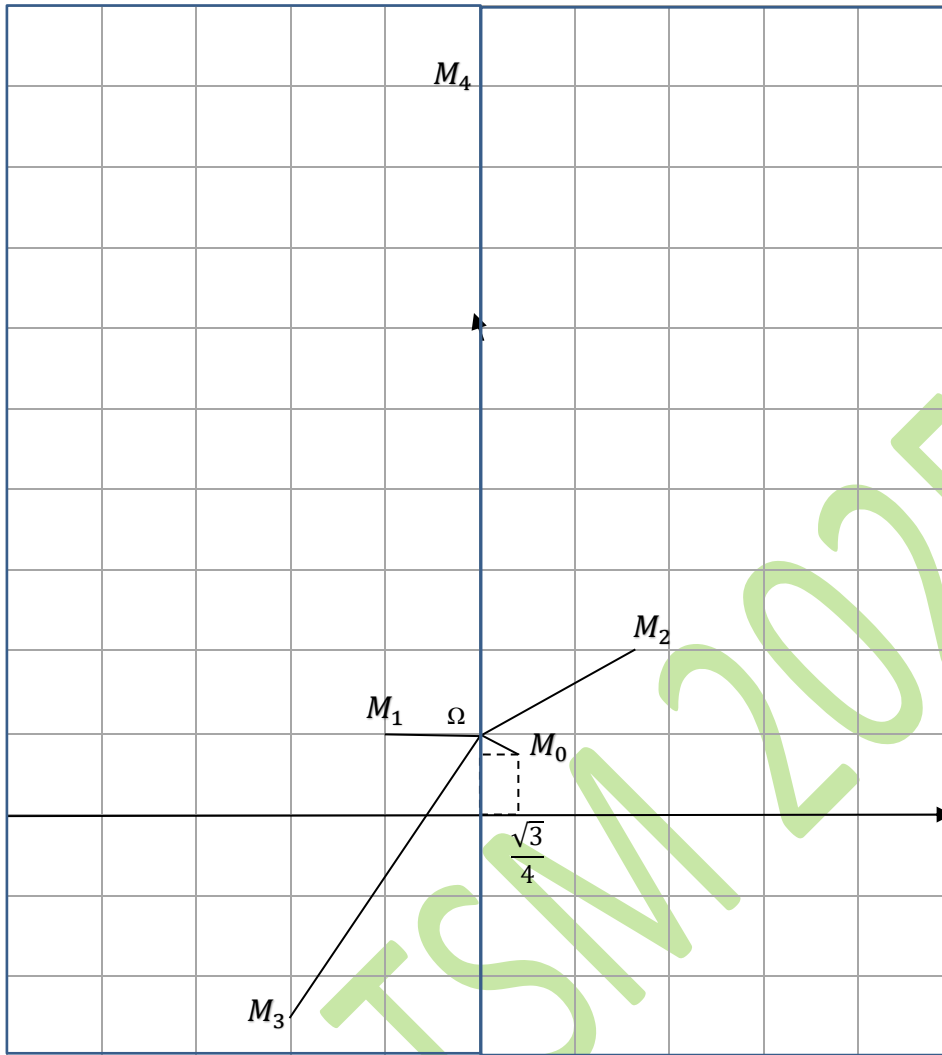
$$z_2 = -(\sqrt{3} + i)(-1 + i) - 1 + i(1 + \sqrt{3}) = \sqrt{3} + 2i$$

• $n = 2$; on a : $z_3 = -(\sqrt{3} + i)z_2 - 1 + i(1 + \sqrt{3})$

$$z_3 = -(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} + 2i) - 1 + i(1 + \sqrt{3}) = -2 + i(1 - 2\sqrt{3})$$

• $n = 3$; on a : $z_4 = -(\sqrt{3} + i)z_3 - 1 + i(1 + \sqrt{3})$

$$z_4 = -(\sqrt{3} + i)(-2 + i(1 - 2\sqrt{3})) - 1 + i(1 + \sqrt{3}) = 9i$$



2^{ème} méthode :

Pour construire ces points, on place d'abord Ω , M_0

- M_1 est l'image de M_0 par la SPD de rapport 2, d'angle $\frac{7\pi}{6}$ par rapport au centre Ω
- M_2 est l'image de M_1 par la SPD de rapport 2, d'angle $\frac{7\pi}{6}$ par rapport au centre Ω
- M_3 est l'image de M_2 par la SPD de rapport 2, d'angle $\frac{7\pi}{6}$ par rapport au centre Ω
- M_4 est l'image de M_3 par la SPD de rapport 2, d'angle $\frac{7\pi}{6}$ par rapport au centre Ω

b- Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n ; $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}} (z_0 - i)$

Soit $p(n) = \{z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}} (z_0 - i)\}$ cette proposition

Initialisation :

$$n = 0 : p(0) = \{z_0 - i = 2^0 e^{i\frac{7 \cdot 0 \cdot \pi}{6}} (z_0 - i)\}$$

$p(0) = \{z_0 - i = (z_0 - i)\}$ Vraie

Hérédité :

•Supposons que $p(n)$ est vraie au rang n :

$$p(n) = \{z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}} (z_0 - i)\}$$

•Démontrons que $p(n+1)$ reste toujours vraie au rang $n+1$:

$$p(n + 1) = \{z_{n+1} - i = 2^{n+1} e^{i\frac{7(n+1)\pi}{6}} (z_0 - i)\}$$

$$\text{Or } z_{n+1} = -(\sqrt{3} + i)z_n - 1 + i(1 + \sqrt{3})$$

$$z_{n+1} = -(\sqrt{3} + i)(z_n - i + i) - 1 + i(1 + \sqrt{3})$$

$$z_{n+1} = -(\sqrt{3} + i)(z_n - i) - i\sqrt{3} + 1 - 1 + i(1 + \sqrt{3})$$

Or $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$, on a :

$$z_{n+1} = -(\sqrt{3} + i) \left(2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i) \right) + i$$

Or $-(\sqrt{3} + i) = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$; on a :

$$z_{n+1} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} \left(2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i) \right) + i \Rightarrow$$

$$\boxed{z_{n+1} - i = 2^{n+1} e^{i\frac{7(n+1)\pi}{6}}(z_0 - i)}$$

Conclusion : pour tout entier naturel n, p(n) est vraie

c- Pour tout entier naturel n, calculons ΩM_n ,

$$\Omega M_n = |z_n - w| = |z_n - i| = \left| 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i) \right| = 2^n |(z_0 - i)|$$

Or $|z_0 - i| = \frac{1}{2}$; on a : $\Omega M_n = 2^n \frac{1}{2} = 2^{n-1} \Rightarrow \Omega M_n = 2^{n-1}$

Déterminons le plus petit entier naturel n tels que : $M\Omega_n \geq 10^2$

$$M\Omega_n \geq 10^2 \Rightarrow 2^{n-1} \geq 10^2 \Rightarrow (n-1) \ln 2 \geq 2 \ln 10 \Rightarrow$$

$$n-1 \geq \frac{2(2,3)}{0,7} \Rightarrow n-1 \geq 6,57 \Rightarrow n \geq 7,57$$

Donc $n = 8$

3) a) On considère l'équation : $7x - 12y = 1$ (E) où x et y sont deux entiers relatifs.

Après avoir vérifié que le couple (-5 ; -3) est solution, résolvons l'équation (E)

$$7(-5) - 12(-3) = -35 + 36 = 1 \text{ Vraie}$$

$$\begin{cases} 7x - 12y = 1 \\ 7(-5) - 12(-3) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x - 12y = 1 \\ 7(x+5) = 12(y+3) \end{cases}$$

$$7(x+5) - 12(y+3) = 0 \Rightarrow$$

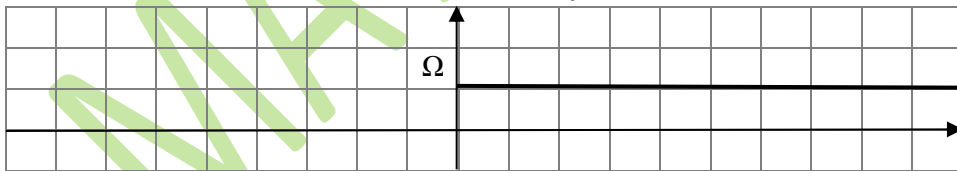
D'après Gauss, on a : $\frac{x+5}{12} = \frac{y+3}{7} = k \Rightarrow \begin{cases} x+5 = 12k \\ y+3 = 7k \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = 12k - 5 \\ y = 7k - 3 \end{cases} \text{ donc on a : } S = \{(12k - 5 ; 7k - 3)\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

b) Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que $Im(z) = 1$ et $Re(z) \geq 0$.

Caractérisons géométriquement (Δ) et le représenter.

On pose $Z=x+i$, (Δ) est définie par : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y = 1 \end{cases}$, donc (Δ) est la demi-droite de repère ($\Omega; \vec{u}$)



Déterminons l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite d'origine Ω dirigée par le vecteur \vec{u} .

$$\text{On pose } (\overrightarrow{\Omega M_n}; \vec{u}) \equiv 0[2\pi] \Rightarrow \arg \left(2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i) \right) \equiv 0[2\pi] \Rightarrow$$

$$\arg \left(2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}} \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} \right) \equiv 0[2\pi] \Rightarrow \arg \left(2^{n-1} e^{i\frac{(7n-1)\pi}{6}} \right) \equiv 0[2\pi]$$

$$\begin{cases} 2^{n-1} \neq 0 \\ \frac{(7n-1)\pi}{6} = 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \frac{7n-1}{6} = 2k \Rightarrow 7n-1 = 12k \Rightarrow 7n-12k = 1$$

Comme $7(-5) - 12(-3) = 1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 7n - 12k = 1 \\ 7(-5) - 12(-3) = 1 \end{cases} \quad 7(n+5) = 12(k+3)$$

$$7(n+5) - 12(k+3) = 0 \Rightarrow$$

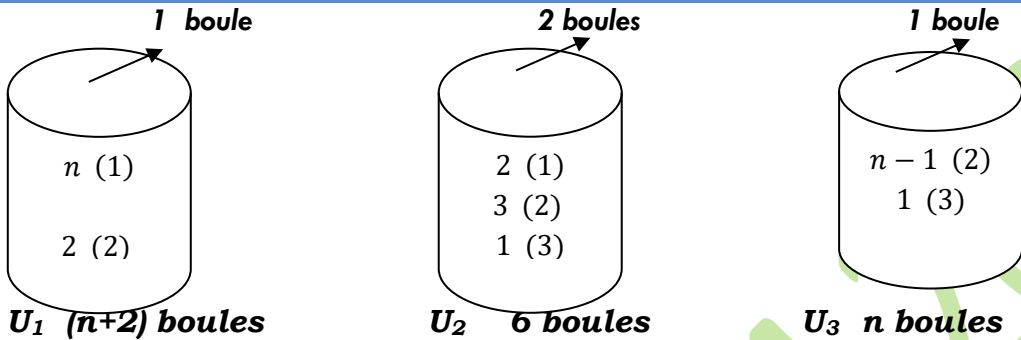
D'après Gauss, on a : $\frac{n+5}{12} = \frac{k+3}{7} = k \Rightarrow \begin{cases} n+5 = 12d \\ k+3 = 7d \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} n = 12d - 5 \\ k = 7d - 3 \end{cases} \quad \text{donc on a : } n = 12d - 5 \text{ avec } d \in \mathbb{Z}$$

Précisons son plus petit élément.

On pose $d=1$; on a : $n=7$

EXERCICE 2



Soit Ω l'univers : $\text{card } \Omega = C_{n+2}^1 \times C_6^2 \times C_n^1 = (n+2) \frac{6 \times 5}{2} (n) = 15n(n+2)$

$$\text{card } \Omega = 15n^2 + 30n$$

1) Montrons que la probabilité d'avoir les mêmes numéros est

$$P_n = \frac{2(n-1)}{5n(n+2)}$$

La possibilité : $\{(2; (2; 2); 2)\}$

$$P_n = \frac{C_2^1 \times C_3^2 \times C_{n-1}^1}{15n(n+2)} = \frac{6(n-1)}{15n(n+2)} \Leftrightarrow$$

$$P_n = \frac{2(n-1)}{5n(n+2)}$$

2) Montrons que la probabilité que la somme des numéros soit 5 est : $P_n = \frac{n-1}{15(n+2)}$

La possibilité : $\{(1; (1; 1); 2)\}$

$$P_n = \frac{C_n^1 \times C_2^2 \times C_{n-1}^1}{5n(n+2)} = \frac{n(n-1)}{5n(n+2)} \Leftrightarrow$$

$$P_n = \frac{n-1}{5(n+2)}$$

3) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage, associe la somme des numéros tirés

a) Donner les valeurs possibles de X

$$\begin{aligned} &1+1+1+2=5 ; 1+1+2+2=6 ; 1+1+3+2=7 ; 1+1+2+3=7 ; \\ &1+1+3+3=8 ; 1+2+2+2=7 ; 1+2+3+2=8 ; 1+2+2+3=8 ; 1+1+1+3=6 ; \\ &1+2+3+3=9 ; 2+1+1+2=6 ; 2+1+2+2=7 ; \\ &2+1+3+2=8 ; 2+1+2+3=8 ; 2+1+3+3=9 ; 2+2+2+2=8 ; 2+2+3+2=9 ; \\ &2+2+2+3=9 ; 2+1+1+3=7 ; 2+2+3+3=10 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \mathbf{X} = \{5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$$

b) Déterminons la loi de probabilité de X

$$\bullet P(X=5) = \frac{n-1}{15n+30}$$

$$\begin{aligned} \bullet P(X = 6) &= \frac{C_n^1 \times C_2^1 \times C_3^1 \times C_{n-1}^1 + C_2^1 \times C_2^2 \times C_{n-1}^1 + C_n^1 \times C_2^2 \times C_{n-1}^1}{5n(n+2)} \\ &= \frac{6n(n-1) + 2(n-1) + n}{15(n+2)} = \frac{6n^2 - 3n - 2}{15n^2 + 30n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet P(X = 7) &= \frac{C_n^1 \times C_2^1 \times C_1^1 \times C_{n-1}^1 + C_n^1 \times C_2^1 \times C_3^1 \times C_1^1 + C_n^1 \times C_3^2 \times C_{n-1}^1 + C_2^1 \times C_2^1 \times C_3^1 \times C_{n-1}^1 + C_2^1 \times C_2^2 \times C_1^1}{5n(n+2)} \\ &= \frac{2n(n-1) + 6n + 3n(n-1) + 12(n-1) + 2}{15(n+2)} = \frac{5n^2 + 13n - 10}{15n^2 + 30n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet P(X = 8) &= \frac{C_n^1 \times C_2^1 \times C_1^1 \times C_1^1 + C_n^1 \times C_3^1 \times C_1^1 \times C_{n-1}^1 + C_n^1 \times C_3^2 \times C_1^1 + C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1 \times C_{n-1}^1 + C_2^1 \times C_2^1 \times C_3^1 \times C_1^1 + C_2^1 \times C_3^2 \times C_{n-1}^1}{5n(n+2)} \\ &= \frac{2n + 3n(n-1) + 3n + 12 + 4(n-1) + 6(n-1)}{15(n+2)} = \frac{3n^2 + 12n + 2}{15n^2 + 30n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet P(X = 9) &= \frac{C_n^1 \times C_1^1 \times C_3^1 \times C_1^1 + C_2^1 \times C_2^1 \times C_1^1 \times C_1^1 + C_2^1 \times C_3^1 \times C_1^1 \times C_{n-1}^1 + C_2^1 \times C_3^2 \times C_1^1}{5n(n+2)} \\ &= \frac{3n + 4 + 6(n-1) + 6}{15(n+2)} = \frac{9n + 4}{15n^2 + 10n} \end{aligned}$$

$$\bullet P(X = 10) = \frac{C_2^1 \times C_3^1 \times C_1^1 \times C_1^1}{5n(n+2)} = \frac{6}{15n(n+2)} = \frac{2}{5n^2 + 10n}$$

x_i	5	6	7	8	9	10
$P(X = x_i)$	$\frac{n-1}{15n+30}$	$\frac{6n^2 - 3n - 2}{15n^2 + 30n}$	$\frac{5n^2 + 13n - 10}{15n^2 + 30n}$	$\frac{3n^2 + 12n + 2}{15n^2 + 30n}$	$\frac{9n + 4}{15n^2 + 10n}$	$\frac{2}{15n^2 + 10n}$

c) Calculons l'espérance mathématiques de X

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum x_i P_i = \frac{5(n-1)}{15n+30} + \frac{6(6n^2 - 3n - 2)}{15n^2 + 30n} + \\ &\frac{7(5n^2 + 13n - 10)}{15n^2 + 30n} + \frac{8(3n^2 + 12n + 2)}{15n^2 + 30n} + \frac{9(9n + 4)}{15n^2 + 10n} + \frac{20}{15n^2 + 10n} \end{aligned}$$

D'où $E(X) = \frac{100n^2 + 245n + 26}{15n^2 + 30n}$

d) Déterminons la valeur de n pour laquelle $E(X) = \frac{229}{30}$

$$\frac{100n^2 + 245n + 26}{15n^2 + 30n} = \frac{229}{30} \Leftrightarrow 3000n^2 + 7350n + 780 = 3435n^2 + 6870n \Leftrightarrow$$

$$-435n^2 + 480n + 780 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-29n^2 + 32n + 52 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 32^2 - 4(-29)(52) \Rightarrow$$

$$\Delta = 7056 = 84^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 84$$

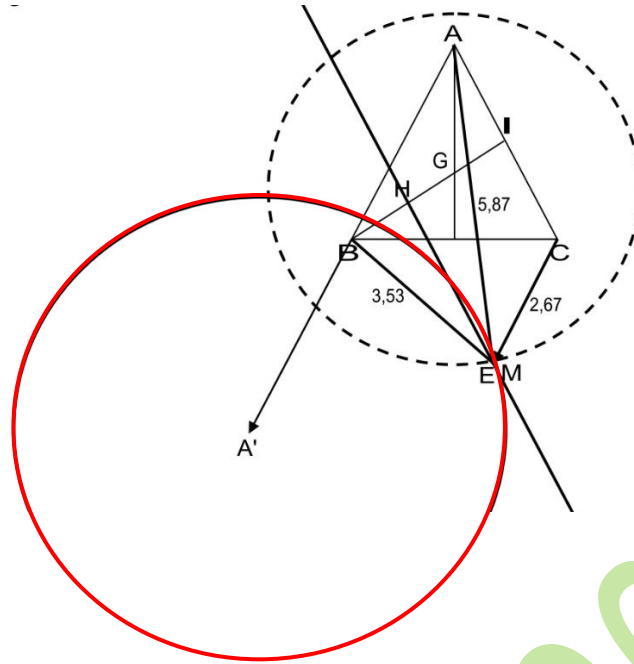
$$\begin{cases} n_1 = \frac{-32 - 84}{-58} = \frac{-116}{-58} = 2 \\ n_2 = \frac{-32 + 84}{-58} = \frac{52}{-58} < 0 \end{cases}$$

D'où $\underline{n = 2}$

EXERCICE 3

1) Soit E le point défini par $\vec{CE} = \frac{2}{3}\vec{AB}$

Construisons le point E puis écrivons le comme barycentre de A, B et C



Comme $\vec{CE} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ insérons le point E :

$$\vec{CE} = \frac{2}{3}(\vec{AE} + \vec{EB}) \Leftrightarrow 3\vec{CE} = 2\vec{AE} + 2\vec{EB} \Leftrightarrow 3\vec{CE} - 2\vec{AE} - 2\vec{EB} = \vec{0}$$

$$2\vec{EA} - 2\vec{EB} - 3\vec{EC} = \vec{0}$$

D'où $E = \frac{2}{3}A + \frac{2}{3}B + \frac{1}{3}C$

2) M est un point appartenant à l'ensemble (E) défini par : $\vec{IM} \cdot \vec{IB} = 8$

a) Montrons que le point E appartient à (E)

On pose : $M=E : \vec{IE} \cdot \vec{IB} = 8$

Insérons le point C : $\vec{IE} \cdot \vec{IB} = \vec{IB}(\vec{IC} + \vec{CE}) = \vec{IB} \cdot \vec{IC} + \vec{IB} \cdot \vec{CE}$

Or $\vec{CE} = \frac{2}{3}\vec{AB}$, on a : $\vec{IE} \cdot \vec{IB} = \frac{2}{3}\vec{IB} \cdot \vec{AB}$

$$\vec{IE} \cdot \vec{IB} = \frac{2}{3}BI \times AB \cos \hat{B} = \frac{2}{3}BI \times AB \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\vec{IE} \cdot \vec{IB} = \frac{2}{3}BI \times 4 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}BI$$

D'après la propriété de Pythagore dans le triangle ABI ; on a :

$$AB^2 = AI^2 + IB^2 \Leftrightarrow IB^2 = AB^2 - AI^2 = 4^2 - 2^2 = 12$$

$$IB = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\vec{IE} \cdot \vec{IB} = \frac{4\sqrt{3}}{3}2\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\vec{IE} \cdot \vec{IB} = 8 \quad \text{CQFM}$$

b) Déterminons la position de M puis représenter (E)

$$\vec{IM} \cdot \vec{IB} = 8$$

Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (IB)

$$\vec{IH} \cdot \vec{IB} = 8 \Leftrightarrow \vec{IH} = \frac{8}{IB^2}\vec{IB} \Leftrightarrow \vec{IH} = \frac{8}{12}\vec{IB} \Leftrightarrow \vec{IH} = \frac{2}{3}\vec{IB}$$

(E) est une droite passant par H et perpendiculaire à la droite (IB)

3) On sait de plus que M appartient à l'ensemble (F) défini par :

$$MA^2 - 2MB^2 = \frac{80}{9}$$

a) Montrons que le point E appartient à (F)

On pose $M=E$:

$$EA^2 - 2EB^2 \stackrel{?}{=} \frac{80}{9}$$

Comme $\vec{CE} = \frac{2}{3}\vec{AB}$; insérons le point A :

$$\begin{aligned} \vec{CA} + \vec{AE} &= \frac{2}{3}\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AE} = -\vec{CA} + \frac{2}{3}\vec{AB} \\ \vec{AE} &= \vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AB} \Leftrightarrow AE^2 = AC^2 + \frac{4}{9}AB^2 + \frac{4}{3}AB \cdot AC \cos \hat{A} \\ AE^2 &= 4^2 + \frac{4}{9}4^2 + \frac{4}{3}4^2 \frac{1}{2} = \frac{288 + 128 + 192}{18} = \frac{608}{18} \\ AE^2 &= \frac{304}{9} \end{aligned}$$

Comme $\vec{CE} = \frac{2}{3}\vec{AB}$; insérons le point B :

$$\begin{aligned} \vec{CB} + \vec{BE} &= \frac{2}{3}\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{BE} = -\vec{CB} + \frac{2}{3}\vec{AB} \\ \vec{BE} &= \vec{BC} + \frac{2}{3}\vec{AB} \Leftrightarrow BE^2 = BC^2 + \frac{4}{9}AB^2 + \frac{4}{3}BC \cdot AB \cos \hat{B} \\ BE^2 &= 4^2 + \frac{4}{9}4^2 - \frac{4}{3}4^2 \frac{1}{2} = \frac{288 + 128 - 192}{18} = \frac{224}{18} \\ BE^2 &= \frac{112}{9} \\ EA^2 - 2EB^2 &= \frac{304}{9} - 2\left(\frac{112}{9}\right) = \frac{304 - 224}{9} = \frac{80}{9} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } EA^2 - 2EB^2 = \frac{80}{9} \quad \text{CQFM}$$

b) Déterminons la position de M puis représenter (F)

$$MA^2 - 2MB^2 = \frac{80}{9}$$

Insérons le point A' :

$$(1-2)MA'^2 + f(A') = \frac{80}{9} \Leftrightarrow -MA'^2 + f(A') = \frac{80}{9}$$

$$\text{Or } f(A') = \frac{-2AB^2}{1-2} = 2(4)^2 = 32$$

$$-MA'^2 + 32 = \frac{80}{9} \Leftrightarrow MA'^2 = \frac{80}{9} - 32 = \frac{80 - 288}{9} = -\frac{208}{9} \Leftrightarrow$$

$$MA'^2 = \frac{208}{9} \Leftrightarrow MA' = \frac{4}{3}\sqrt{13}$$

(F) est un cercle de centre A' et de rayon $\frac{4}{3}\sqrt{13}$ ou EA'

4) On sait encore que M appartient à l'ensemble (G) défini par :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{160}{3}$$

a) Montrons que le point E appartient à (G)

On pose $M=E$:

$$EA^2 + EB^2 + EC^2 \stackrel{?}{=} \frac{160}{3}$$

$$\text{Or } EA^2 = \frac{304}{9} ; EB^2 = \frac{112}{9} ;$$

$$\vec{CE} = \frac{2}{3}\vec{AB} \Leftrightarrow EC^2 = \frac{4}{9}4^2 = \frac{64}{9}$$

$$EA^2 + EB^2 + EC^2 = \frac{304}{9} + \frac{112}{9} + \frac{64}{9} = \frac{480}{9}$$

$$\text{D'où } EA^2 + EB^2 + EC^2 = \frac{160}{3} \quad \text{CQFM}$$

b) Déterminons la position de M puis représentons (G)

Insérons le point G :

$$3MG^2 + f(G) = \frac{160}{3}$$

Or $f(G) = \frac{AB^2+AC^2+BC^2}{3} = \frac{4^2+4^2+4^2}{3} = 16$

$$3MG^2 + 16 = \frac{160}{3} \Leftrightarrow 3MG^2 = \frac{160 - 48}{3} = \frac{112}{3} \Leftrightarrow$$

$$MG^2 = \frac{112}{9} = EB^2 \Leftrightarrow MG = EB$$

(G) est un cercle de centre G et de rayon EB

c) En déduisons la position de M

Comme $E \in (E)$; $E \in (F)$ et $E \in (G)$; alors $M=E$

5) Calculons $MA^2 - 2MB^2 + MC^2$

Dans $MA^2 - 2MB^2 + MC^2$, insérons le point I :

$$MA^2 - 2MB^2 + MC^2 = IA^2 - 2IB^2 + IC^2 + 2\vec{MI}(-2\vec{IB})$$

$$MA^2 - 2MB^2 + MC^2 = 2^2 - 2(12) + 2^2 + 4\vec{IM} \cdot \vec{IB}$$

Or $\vec{IM} \cdot \vec{IB} = 8$; on a :

$$MA^2 - 2MB^2 + MC^2 = -16 + 4(8) = 16$$

$$\boxed{MA^2 - 2MB^2 + MC^2 = 16}$$

6) Calculons la valeur approchée à 10^{-2} près des distances MA, MB et MC puis vérifions sur la figure

$$\begin{cases} MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{160}{3} \\ MA^2 - 2MB^2 = \frac{80}{9} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} MA^2 - 2MB^2 + MC^2 = 16 \\ MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{160}{3} \quad (E_1) \\ MA^2 - 2MB^2 = \frac{80}{9} \quad (E_2) \\ -MA^2 + 2MB^2 - MC^2 = -16 \quad (E_3) \end{cases}$$

De $(E_1) + (E_3)$; on a : $3MB^2 = \frac{160}{3} - 16 = \frac{160-48}{3} = \frac{112}{3} \Leftrightarrow$

$$MB^2 = \frac{112}{9} \Leftrightarrow MB = \frac{\sqrt{112}}{3} = \frac{4\sqrt{7}}{3} \Leftrightarrow \boxed{MB \approx 3,53}$$

$$MA^2 - 2\left(\frac{112}{9}\right) = \frac{80}{9} \Leftrightarrow MA^2 = \frac{80}{9} + \frac{224}{9} = \frac{304}{9}$$

$$MA = \sqrt{\frac{304}{9}} = \frac{4\sqrt{19}}{3} = 5,81 \Rightarrow \boxed{MA \approx 5,81}$$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{160}{3} \Leftrightarrow MC^2 = -MB^2 - MA^2 + \frac{160}{3}$$

$$MC^2 = \frac{160}{3} - \frac{112}{9} - \frac{304}{9} = \frac{480 - 112 - 304}{9} = \frac{64}{9}$$

$$MC = \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3} = 2,67 \Rightarrow \boxed{MC \approx 2,67}$$

Preuve : Comme $M=E$; on a :

$$\boxed{MA^2 = EA^2 = \frac{304}{9} ; MB^2 = EB^2 = \frac{112}{9} \text{ et } MC^2 = EC^2 = \frac{64}{9}}$$

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur $] -1; 1[$ par $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

On note (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé (O, I, J) . Unité graphique 2cm

Partie A :

1) Calculons les limites de f en -1 et en 1 .

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-1}{1+1}\right) = \frac{1}{2} \ln(0) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+1}{1-1}\right) = \frac{1}{2} \ln(+\infty) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

Interprétons graphiquement les résultats obtenus

Les droites d'équations $x=-1$ et $x=1$ sont des asymptotes verticales

2) a) Démontrons que : $\forall x \in] -1; 1[, f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \right)' = \frac{1}{2} (\ln(x+1) - \ln(1-x))'$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1-x+x+1}{2(1-x^2)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

b) En déduisons le tableau de variation de f

$\forall x \in] -1; 1[; f'(x) = \frac{1}{1-x^2} > 0$, f est strictement croissante

x	-1	1
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

c) Déterminons une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$y = f'(0)x + f(0)$$

$$f'(0) = \frac{1}{1-0^2} = 1 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+0}{1-0}\right) = 0$$

D'où (T) : $y=x$

3) Soit g la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $g(x) = f(x) - x$

a) Déterminons le sens de variation de g

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{1-x^2} - 1 = \frac{1-1+x^2}{1-x^2} = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$\forall x \in] -1; 1[; g'(x) = \frac{x^2}{1-x^2} \geq 0$, f est croissante

b) Calculons $g(0)$

$g(0) = f(0) - 0 = 0$ alors $g(0) = 0$

En déduisons le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

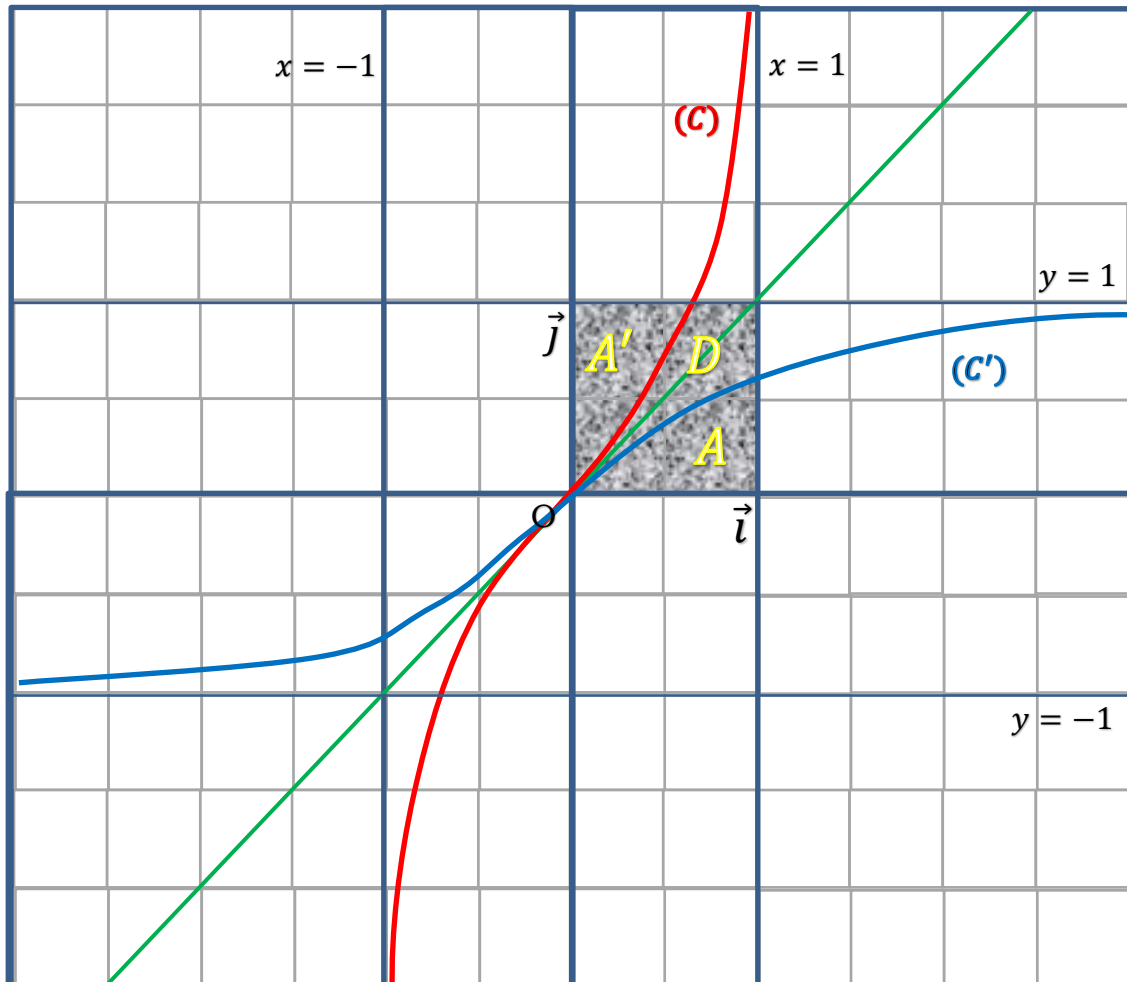
x	-1	0	1
$f'(x)$	+		
$f(x)$			
Signe $g(x)$	-		+

$$\begin{cases} \forall x \in]-1 ; 0[; g(x) < 0 \\ \forall x \in]0 ; 1[; g(x) > 0 \end{cases}$$

c) Déterminons la position de (C) par rapport à (T)

- $\forall x \in]-1 ; 0[; f(x) - x < 0$; (C) est en dessous de la droite (T)
- $\forall x \in]0 ; 1[; f(x) - x > 0$; (C) est en dessus de la droite (T)
- $x = 0 ; f(x) - x = 0$; (C) et (T) se coupent

d) Construisons dans le même repère (C) et (T)



4) a) Démontrons que f est une bijection de $] -1 ; 1[$ vers \mathbb{R}

Comme f est continue et strictement croissante sur $] -1 ; 1[$ alors f réalise une bijection de $] -1 ; 1[$ vers $f(] -1 ; 1[) = \mathbb{R}$

b) On désigne par f^{-1} la bijection réciproque de f et par (C') sa courbe représentative dans le repère (O, I, J). Construisons (C')

(C') et (C) Sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$
Voir figure

c) Démontrons que $\forall y \in \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$

On pose $f(x) = y \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = y \Rightarrow$

$$\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = 2y \Rightarrow \frac{1+x}{1-x} = e^{2y} \Rightarrow$$

$$x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \Rightarrow \begin{matrix} f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow]-1; 1[\\ y \rightarrow \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \end{matrix}$$

$$D'où \quad f^{-1}(y) = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$$

Partie B :

1) Soit φ une primitive de f^{-1} sur \mathbb{R} (on ne cherchera pas à déterminer $\varphi(x)$)

a) Démontrons que $\varphi \circ f$ est une primitive de la fonction $x \rightarrow xf'(x)$ sur $]-1; 1[$

On pose $\varphi' = f^{-1}$

$$(\varphi \circ f)' = f'(\varphi' \circ f) \text{ or } \varphi' = f^{-1}; \text{ on a :}$$

$$(\varphi \circ f)' = f'(f^{-1} \circ f) \text{ or } f^{-1} \circ f = x$$

Donc $(\varphi \circ f)' = xf'(x)$

b) Démontrons que pour tout a et b de $]-1; 1[$, $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \varphi \circ f(b) - \varphi \circ f(a)$

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \int_{f(a)}^{f(b)} \varphi'(t)dt = [\varphi(t)]_{f(a)}^{f(b)} = \varphi(f(b)) - \varphi(f(a))$$

D'où $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \varphi \circ f(b) - \varphi \circ f(a)$

c) En déduisons que $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \int_a^b tf'(t)dt$

$$\int_a^b tf'(t)dt = \int_a^b (\varphi \circ f)' dt = [(\varphi \circ f)(t)]_{f(a)}^{f(b)} = \varphi(f(b)) - \varphi(f(a))$$

Donc $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \int_a^b tf'(t)dt$

d) Démontrons que pour tout élément x de $]-1; 1[$, $\int_0^x f^{-1}(t)dt = \int_0^x tf'(t)dt$

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = \int_a^b tf'(t)dt$$

On pose $a = 0$ et $b = x$; on a :

$$\int_{f(0)}^{f(x)} f^{-1}(t)dt = \int_0^x tf'(t)dt \text{ or } f(0) = 0$$

$$\text{Donc } \int_0^x f^{-1}(t)dt = \int_0^x tf'(t)dt$$

5) a) Démontrons que pour tout élément x de $]-1; 1[$; $\int_0^x tf'(t)dt = -\frac{1}{2}\ln(1 - x^2)$

$$\int_0^x tf'(t)dt = \int_0^x \frac{t}{1-t^2} dt = -\frac{1}{2} \int_0^x \frac{-2t}{1-t^2} dt = -\frac{1}{2} [\ln(1 - t^2)]_0^x$$

$$\text{D'où } \int_0^x tf'(t)dt = -\frac{1}{2}\ln(1 - x^2)$$

b) En déduisons que, pour tout élément y de \mathbb{R} , $\int_0^y f^{-1}(t)dt = \ln\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)$

$$\int_0^x f^{-1}(t)dt = \int_0^x tf'(t)dt$$

On pose $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

$$\int_0^y f^{-1}(t) dt = \int_0^{f^{-1}(y)} t f'(t) dt = -\frac{1}{2} \ln(1 - (f^{-1}(y))^2)$$

$$\int_0^y f^{-1}(t) dt = -\frac{1}{2} \ln\left(1 - \left(\frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}\right)^2\right) = -\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{(e^{2y} - 1)^2}{(e^{2y} + 1)^2}\right)$$

$$\int_0^y f^{-1}(t) dt = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{(e^{2y} + 1)^2 - (e^{2y} - 1)^2}{(e^{2y} + 1)^2}\right)$$

$$\int_0^y f^{-1}(t) dt = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{(e^{2y} + 1 + e^{2y} - 1)(e^{2y} + 1 - e^{2y} + 1)}{(e^{2y} + 1)^2}\right)$$

$$\int_0^y f^{-1}(t) dt = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{4e^{2y}}{(e^{2y} + 1)^2}\right) = -\ln\sqrt{\frac{(2e^y)^2}{(e^{2y} + 1)^2}}$$

$$\int_0^y f^{-1}(t) dt = -\ln\left(\frac{2e^y}{e^{2y} + 1}\right) = -\ln\left(\frac{2}{e^y + e^{-y}}\right)$$

D'où $\int_0^y f^{-1}(t) dt = \ln\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)$

6) Soit A l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C') de f^{-1} et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$. Calculons A en unités d'aires

$$A = \int_0^1 f^{-1}(t) dt = \ln\left(\frac{e + e^{-1}}{2}\right) ua$$

Où $ua = 2cm \times 2cm = 4cm^2$

$$A = 4 \ln\left(\frac{e + e^{-1}}{2}\right) cm^2$$

7) a) Hachurer sur le graphique l'ensemble D des points dont les coordonnées (x ; y) vérifient $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$ et $f^{-1}(x) \leq y \leq f(x)$

Voir le graphique

b) Calculons l'aire de D en cm^2

On constate que $ua = A + D + A'$ or A et A' symétriques par rapport à la droite $y=x$

Alors $A=A'$; on a : $4cm^2 = 2A + D \Leftrightarrow D = 4cm^2 - 2A \Leftrightarrow D = 4cm^2 - 8 \ln\left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right) cm^2$

$$D = \left[4 - 8 \ln\left(\frac{e + e^{-1}}{2}\right)\right] cm^2$$

BONNE CHANCE AU BAC 2025