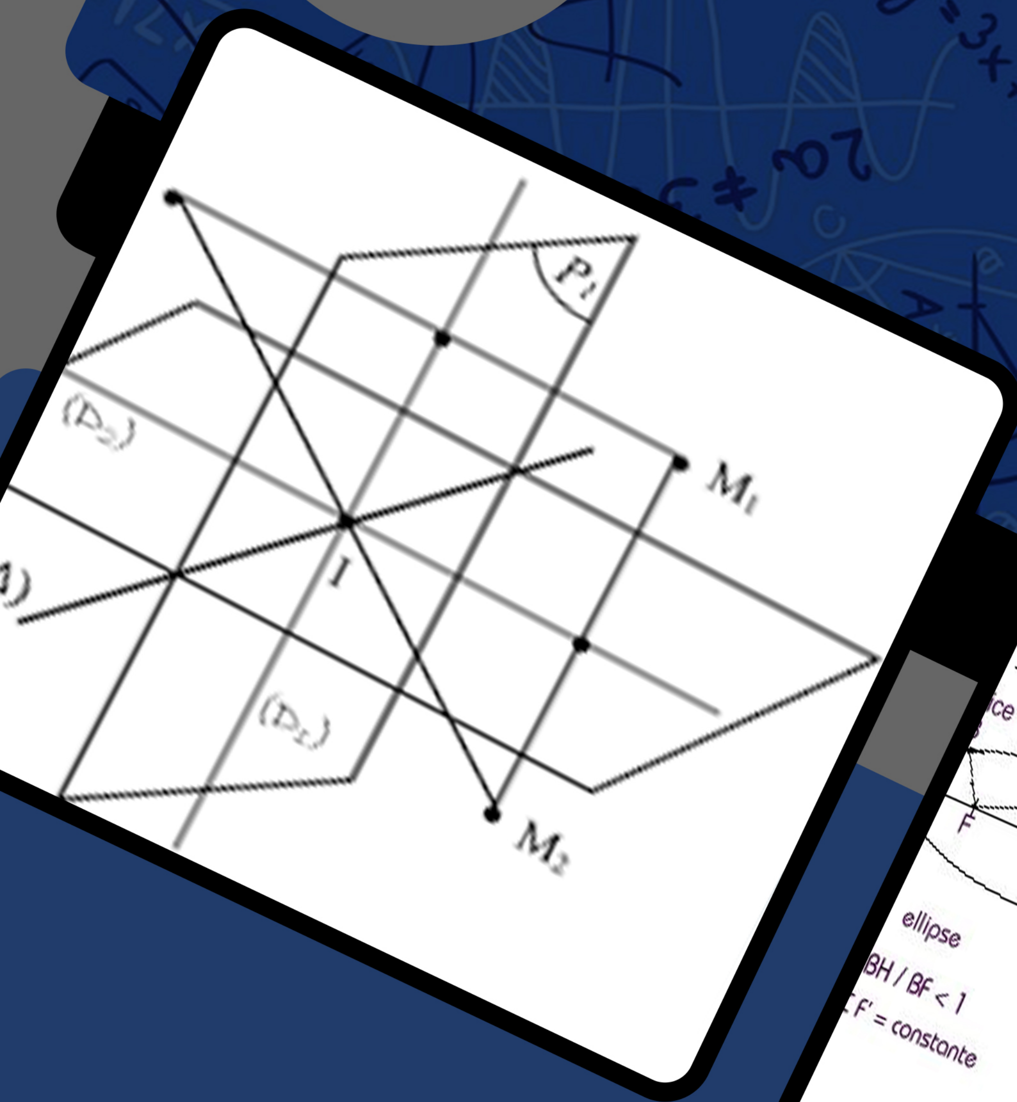
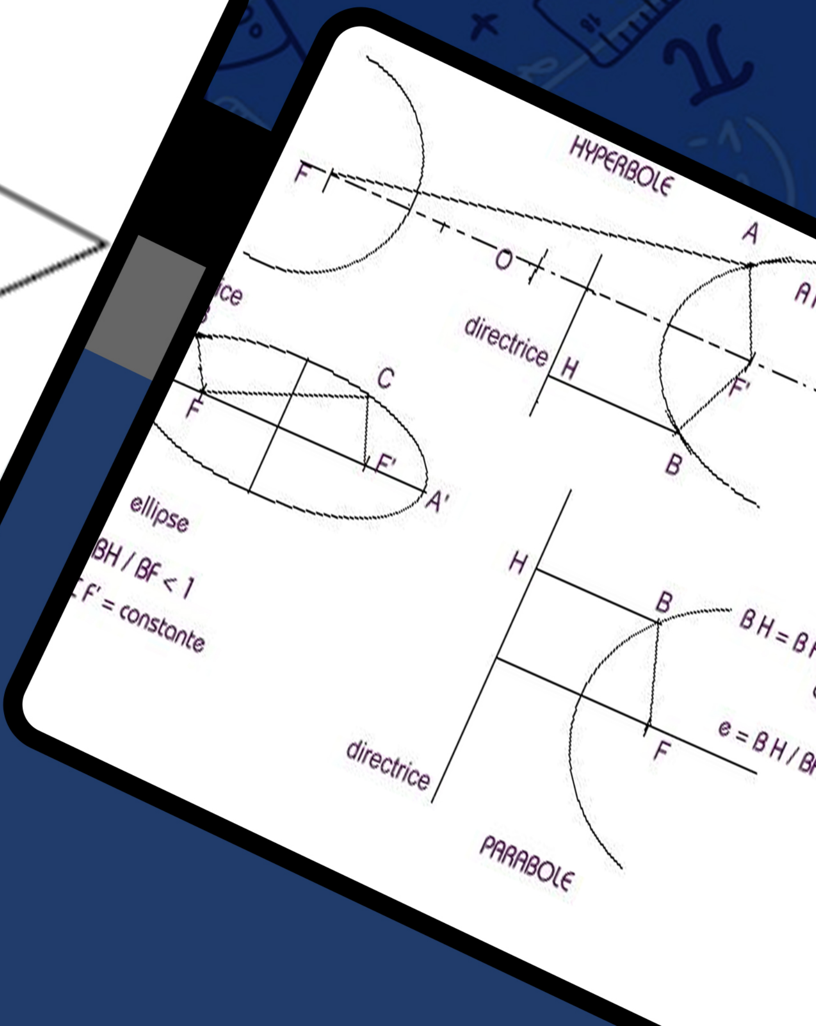
TRAVAUX DIRIGÉS SPÉCIAUX

T^{le} C

GPM 5ÈME EDITION

GRATUIT **100%**





@GPM 2022

AVANT PROPOS

Les systèmes éducatifs en Afrique francophone en général et au Cameroun en particulier connaissent de nos jours de nombreux problèmes parmi lesquels la préparation de l'une des étapes les plus importantes qu'est l'évaluation. Cette étape est prise en tenaille à cause de la qualité des ressources pédagogiques nécessaires pour préparer les apprenants à réagir de façon optimale aux évaluations. Chose qui ne facilite pas l'acquisition de savoir et savoir-faire véritables, encore moins les compétences.

Face à de telles situations, un collège d'enseignants Camerounais, réuni dans un forum WhatsApp dénommé ''Grandprofs de maths (GPM)'' a décidé de faire de sa 5ème édition, la confection des fiches de travaux dirigés spéciaux de la 6ème en Tle toutes séries confondues de l'enseignement général. Chaque fiche, pour un chapitre donné est constituée de quatre parties à savoir : les exercices de fixation, les exercices de consolidation, l'apprentissage à l'intégration qui prépare le terrain pour la dernière partie qui est l'activité d'intégration.

Conformes au nouveau programme en vigueur au Cameroun et destinés à mesurer et à consolider les ressources installées pendant la séance d'enseignement/apprentissage en vue de rendre les apprenants compétents, les documents de l'édition 5 n'ont pas pour objectif de substituer les livres inscrits au programme par la haute hiérarchie, mais d'être plutôt le complémentaire de ces derniers. Nous sommes persuadés que cette ressource pédagogique sera sans doute un catalyseur qui mettra en évidence le meilleur qui somnole en chaque apprenant.

Dans un écosystème où le bien-être des enseignants n'est pas encore une effectivité, il a fallu de l'amour, du professionnalisme, de la détermination et de la témérité de ce groupe d'enseignants motivés de bout en bout par les administrateurs de GPM dont en premier *M. Pouokam Léopold Lucien*. Difficile de ne pas mentionner les collègues *M. NTAKENDO EMMANUEL ; M. TSOPMO WILFRIED ; M. FANLEU EDDY ; M. OUAFEU TOKAM GUY PAULIN ; M. TACHAGO WILFRIED ; M. SIYAPDJE HENRI ; M. NGUETSE ARNAUD ; M. BAYIHA GHISLAIN* et *M. GUELA PIERRE* dont l'apport dans la fusion et les couvertures ont été capitales ; un coup de chapeau à tous les collègues qui ont cru en la réussite de ce nouveau projet en réalisant au moins une fiche de travaux dirigés sur l'un des 185 chapitres et en apportant des critiques et suggestions qui ont permis de faire tendre le fond et la forme de ces documents vers la perfection

Nous sommes convaincus que ces productions seront d'un apport certain pour la communauté éducative en général. De même les apprenants pourront mieux faire face aux nombreux défis qui les attendent au sortir du secondaire. Nous vous seront gré de nous faire parvenir via l'une des adresses mails suivantes : leopouokam@gmail.com ou gkppedro@yahoo.fr vos remarques, suggestions et critiques constructives pour l'optimisation de la qualité du contenu de ces documents.

Tous les enseignants ou passionnés de mathématiques désirant faire partie de la famille « GPM » et disponibles à participer aux futurs projets du groupe peuvent écrire via WhatsApp à l'un des administrateurs ci-dessous : M. GUELA KAMDEM Pierre (697 473 953/ 678 009 612), M. POUOKAM NGUEGUIM Léopold Lucien (696 090 236/ 651 993 749) et M. TACHAGO WABO Wilfried Anderson (699 494 671).

NB : Toute utilisation d'un document de cette collection à but lucratif est formellement proscrite.

Les auteurs

TABLE DES MATIERES

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »
ENSEIGNANT : **Calvin WAFO W.**
TEL : **693445317 / 674543219**

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023

TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : Tle C
DUREE : HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 1 : DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

Savoir-faire :

- ✓ **Déterminer le PGCD et le PPCM de deux entiers naturels en utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers.**
- ✓ **Déterminer deux entiers connaissant leur PPCM et leur PGCD.**
- ✓ **Justifier que deux entiers sont premiers entre eux ou non**
- ✓ **Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ une équation du type : $ax + by = c$**

.
.

- ✓ **Ecrire un entier naturel non nul dans le système de numération binaire ou décimale,**
- ✓ **Passer de l'écriture d'un entier d'une base à une autre**
- ✓ **Déterminer le PGCD de deux entiers naturels en utilisant l'algorithme d'Euclide**

✓ **Utiliser la compatibilité de la relation de congruence avec l'addition et avec la multiplication pour**
- ✓ **établir qu'un entier est divisible par un autre**
- ✓ **déterminer le reste d'un entier dans la division par un autre**
- ✓ **établir des critères de divisibilité en base dix**

I-Exercices de fixation

✍ **Ressource 1 :** Divisibilité, multiple et congruence

📖 EXERCICES :

1. soient a, n et b trois nombres entiers naturels non nul.
   a- Quand dit-on que a est un multiple de b ?
   b- Y a-t-il une différence entre : a est un multiple de b et b est un diviseur de a?
   c- Quand dit-on que a est congrue à b modulo n ?
   d- Réponds par vrai ou faux puis justifie
      - Le nombre de diviseurs d'un entier naturel a est fini
      - Le nombre de multiples d'un entier naturel a est fini
      - Si b divise a alors $|b| \leq |a|$
   e- Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances

2- Démontre la propriété de compatibilité avec la multiplication

3- Montrer que tout diviseur commun aux nombres $5n-3$ et $n+1$ est un diviseur de 8.
4- Justifie que 9 divise $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$
5- Démontre que pour tout entier naturel n, 24 divise $n(n+1)(n+2)(n+3)$ et que $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 120
6- Sachant que l'on a $96842 = 256 \times 375 + 842$, détermine sans faire la division le reste de la division de 96842 par chacun des nombres 256 et 375
7- Trouve le reste de la division euclidienne de 100^{1000} par 13
8- Détermine suivant les valeurs de n le reste dans la division euclidienne de 7^n par 10
9- Etablis par récurrence la propriété suivante :

Pour tout entier naturel n, $3^n - 1$ est un nombre paire

Ressource 2 : PPCM et PGCD

EXERCICES :

1- Calcule : $pgcd(126{,}230)$; $pgcd(390{,}720)$

1) Soient a et b deux entiers naturels dont la somme et le produit ont pour $PGCD$ le carré d'un nombre premier P.
   a) Calculer $a(a+b)-ab$ et en déduire que P^2 divise a^2.
   b) Montrer alors que P divise a et que P divise b.
   c) Montrer que le $PGCD$ de a et b est soit P soit P^2.
2) On cherche à déterminer les entiers naturels a et b tels que $PGCD(a+b\,;ab) = 49$ et $PGCD(a\,;b) = 231$
   a) Soient a et b deux tels entiers, montrer que le $PGCD$ de a et b ne peut être 49 et en déduire qu'il est 7. Quelles sont les solutions du problème posé
3) Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ chacun des systèmes

$\begin{cases} Pgcd(x,y) = 18 \\ x+y = 360 \end{cases}$ et $\begin{cases} Pgcd(x,y) = 18 \\ x \times y = 6480 \end{cases}$

4) Résous dans $\mathbb{N}^2$ chacun des systèmes
$\begin{cases} \mathrm{x+y} = 420 \\ \mathrm{PGCD(x,y)} = 35 \end{cases}$, $\begin{cases} PPCM(x,y) = 168 \\ x \times y = 1008 \end{cases}$, $\begin{cases} pgcd(a;b) = 7 \\ a^2 - b^2 = 343. \end{cases}$

Resource 3 : Système de numération et divisibilité

EXERCICES :

1- Trouver toutes valeurs de a et b telles que le nombre $x = \overline{26a85b}$ dans le système decimal soit divisible par 3 et 11.

2- Déterminer les couples (a,b) d'entiers tels que le nombre d'écriture décimale $\overline{724ab}$ soit divisible par 9

3- On considère un nombre entier naturel $x = \overline{a_p a_{p-1} \ldots\ldots a_1 a_0}$

a) Démontre chacune des propositions suivantes
   1- $x \equiv a_0 [2]$
   2- $x \equiv \sum_{i=0}^{p} a_i \,[3]$
   3- $x \equiv a_0 + 10a_1 [4]$
   4- $x \equiv a_0 [5]$
   5- $x \equiv \sum_{i=0}^{p} a_i \,[9]$
   6- $x \equiv \sum_{i=0}^{p} (-1)^i a_i \,[11]$

b) Comment reconnaitre facilement qu'un entier x est divisible par $3, 4, 5, 9, 11$ et 25

Resource 4 : Equations diophantiennes

EXERCICES**:**

1) a. En utilisant l'algorithme d'Euclide, détermine deux entiers relatifs x et y tels que $38x + 35y = 1$

b. En déduis alors une solution particulière de l'équation $228x + 210y = 6$

2) On considère l'équation suivante $(E): 37x + 54y = 1998$

a) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide, un couple (x_0, y_0) solution de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

3) Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: 1665x+1035y=45

4) Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation suivante notée: $5x - y = -3$.

On remarquera que $(1; 8)$ est une solution particulière de cette équation

II-Exercices de consolidation

Exercice 1 :

2- On considère les nombres X, Y et Z écris dans le système de numération b :
$X = \overline{211}^b, Y = \overline{312}^b$ et $Z = \overline{133032}^b$

1) Sachant que $Z = X \times Y$, démontrer que $b^3 - 3b^2 - 2b - 8 = 0$

En déduire de ce qui précède que b divise 8 et déterminer la valeur de b.

2) Ecrire X, Y et Z dans le système de numération de base 10 en prenant $b = 4$

Exercice 2 :

1) p est un entier premier et n un entier naturel non nul, démontrer que si p n'est pas un diviseur de n, alors n et n sont premiers entre eux.
2) On pose $p = 547$ et $n = 1113$

a) Vérifier que p est premier et en déduire que p et n sont premier entre eux.

A l'aide de l'algorithme d'Euclide, trouver deux entiers naturels u et v tels que $1113u - 547v = 1$.

Exercice 3 :

Soit x un entier naturel non nul.

a) Démontrer l'égalité suivante : $(x^{1113u} - 1) - (x^{574v} - 1)x = x - 1$

En déduire que le plus grand commun diviseur de $x^{1113u} - 1$ et $x^{574v} - 1$ est $x - 1$.

Exercice 4 :

Soit n un entier distinct de -2. On pose $x = \frac{n^2}{n+2}$; $\delta = \text{pgcd}(n^2, n+2)$

a) Montrer que $\delta = \text{pgcd}(n+2, 4)$ et en déduire les valeurs possibles de δ
b) Déterminer n pour que x soit un entier
c) Déterminer n pour que $\delta = 2$.
d) Déterminer n pour que x soit une fraction irréductible
e) 🕮 **Exercice 5**

1- On considère l'équation (E) : $11x - 24y = 1$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
 a- Montre à l'aide de l'énoncé d'un théorème que cette équation admet au moins une solution
 b- En utilisant l'algorithme d'Euclide, détermine une solution particulière de l'équation (E)
2- Justifie que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$

3- On veut déterminer les entiers n tels que $3 + 10^n$ soit divisible par 7
 a- Montre que le problème revient à déterminer les entiers naturels n tels que le reste de la division euclidienne de 10^n par 7 est 4
 b- Montre que 10^n et 3^n ont le même reste dans la division euclidienne par
 c- Montre que le problème revient à déterminer les entiers naturels n tels que le reste de la division euclidienne de 3^n par 7 est 4
 d- Dresse le tableau de congruence de la division euclidienne de 3^n par 7 et conclure

🕮 **Exercice 6** :

1) On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par :
$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 4x_n + 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} y_0 = 8 \\ y_{n+1} = 4y_n + 1 \end{cases}$
 a) Démontre par récurrence que (x_n) et (y_n) sont les suites d'entiers naturels.
 b) Démontre par récurrence que (x_n, y_n) est solution de l'équation $5x - y = -3$

En déduis que si x_n et y_n ne sont pas divisible par 3, alors x_n et y_n sont premiers entre eux.

🕮 **Exercice 7** :

3- Soit n est un entier naturel non nul.
 1) Donne la liste des diviseurs de 7^n
 2) Soit S_n la somme des diviseurs de 7^n
 a) Démontre que $6S_n + 1 = 7^{n+1}$
 b) Détermine suivant les valeurs de n le reste dans la division Euclidienne de 7^n par 10.

 c) Dans le système décimal, détermine suivant les valeurs de n le chiffre des unités du nombre S_n

🕮 **Exercice 8** :

4- On se propose de résous dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, l'équation (E): $25^n - 16^n = P^2$ où n et p sont les inconnues.
 1) Démontre que (E) est équivalente à l'équation : $(5^n - P)(5^n + p) = 2^{4n}$.

2) En déduis l'existence de deux entiers naturels q et r tels que :
$5^n - p = 2^q$ et $5^n - p = 2^r$ avec $q + r = 4n$.
3) A l'aide de la question précédente, démontre que l'on a le système :
$\begin{cases} q = 1 \\ r = 4n - 1 \\ 5^n = 1 + 4^{2n-1} \end{cases}$
4) Démontre à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que $n \leq 1$.

Résoudre d'équation (E).

📖 **Exercice 9** :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_0 = 1$, $u_1 = cos3$ et $u_{n+1} = 2u_1u_n - u_{n-1}$. Soient a, b, m trois entiers naturels supérieurs à 1 , $t = \overline{x43y}^7$ (en base 7) et $k = 10^{3n}$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \cos(3n)$.
b) Déterminer le plus petit entier naturel m tel que $m = \overline{300}^a = \overline{33}^b$ (respectivement en base a et b).
c) En remarquant que $999 = 27 \times 37$, donner le reste de la division de k par 37.
d) En déduire le reste de la division de $s = 10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$ par 37.

Déterminer x et y pour que t soit divisible par 6.

📖 **Exercice 10** :

1- Montrer que tout diviseur commun aux nombres $5n - 3$ et $n + 1$ est un diviseur de 8.
2- En déduire que si n est pair, alors $5n - 3$ et $n + 1$ sont premiers entre eux.
3- Démontre que si n est impair, $7^n + 1$ est divisible par 8. Donne le reste dans la division de $7^n + 1$ par 8 quand n est impair

III-Apprentissage à l'intégration

Exercice 1 :

Un marchand de jouets désirant attirer chez lui des enfants potentiels distribuait chaque jour le même nombre de bonbons gratuitement aux enfants qui se présentaient chez lui à la sortie de l'école. Le lundi *n* enfants se sont partagés à égalité les bonbons. Le mardi quatre enfants des *n* enfants ne vinrent pas ; alors chacun des autres eurent 6 bonbons de plus. Le mercredi, certains des *n* enfants ont ramené des copains ; il y avait 12 enfants de plus, de sorte que chacun d'eux eut 6 bonbons de moins.

1- En désignant : *x* le nombre de bonbons que distribuait le marchand ; k le nombre de bonbons reçus le lundi par chacun des *n* enfants. Montrer que n et k vérifient le système :

(S) : $\begin{cases} 6n - 4k = 24 \\ 12k - 6n = 72 \end{cases}$

2- Déterminer :
a) Le nombre de bonbons que chaque enfant avait reçus le lundi
b) Le nombre d'enfants qui se sont présentés le lundi chez le marchand
c) Le nombre de bonbons que le marchand distribuait chaque jour

Exercice 2 :

Une entreprise spécialisée dans la culture de maïs ravitaille une localité. Pour une livraison d'une commande dont le nombre de sacs est compris entre 175 et 240 sacs, l'entreprise fait recours au service d'un conducteur de tricycle pour transporter les sacs de l'entrepôt pour la route question de charger le camion qui ira effectuer la livraison. Le conducteur le conducteur a été informé qu'en transportant 11 sacs de riz par tour, il en restera deux sacs dans le magasin et s'il transporte 6 sacs par tour, il faudra deux sacs en plus au dernier tour.

Tâche1 : Déterminer le nombre de sacs de maïs que le conducteur devra transporter.

Exercice 3 :

Pour les travaux de sécurisation, le technicien demande d'acheter du sable qui coûte 15 000 $FCFA$ le mètre cube ; ce sable est rempli dans un bac de forme parallélépipédique de dimension en mètre $3 \times x \times y$ où x et y sont des entiers naturels qui vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} ppcm(x:y) = 440 \\ x^2 + y^2 = 4625 \\ y < x \end{cases}$$

Tâches 1 : Détermine le montant à dépenser pour l'achat sable

IV. Activités d'intégration

Situation 1 :

Le conseil d'administration d'une banque dans une métropole américaine a renforcé son système de sécurité au niveau du coffre-fort principal avec des portes et des agents de sécurité.

Les portes d'accès au coffre sont verrouillées respectivement par les codes $\overline{abca}$; $\overline{bbac}$ et l'entier n dont l'écriture en base sept est $\overline{bbac}$ et l'écriture en base onze est $\overline{abca}$.

Les agents de sécurité de la banque sont répartis en plusieurs équipes de garde ayant le même effectif. Une équipe est remplacée après trois heures de service, et le premier remplacement de la journée a lieu à 6 heures 00 du matin. Après leurs services respectifs cinq équipes embarquent dans les voitures de la compagnie transportant plus de 4 personnes et au moins 12 personnes, ils en remplissent onze et sept agents se sont débrouillés par eux même pour rentrer.

Tache 1 : Déterminer les codes de déverrouillage des portes d'accès au coffre.

Tache 2: Déterminer le nombre d'agents qui rentraient après leurs services.

Situation 2 :

Un boutiquier possède 41 tableaux répartis en trois lots dont le montant total s'élève à 288.000 Francs. Le prix d'une pièce du premier lot est de 28.800 Francs ; le prix d'une pièce du deuxième lot est de 21.600 Francs et le prix d'une pièce du troisième lot est de 2400 Francs. Il possède dans sa caisse entre 300 et 400 pièces de 50 Francs. S'il fait des tas de 17 pièces, il lui reste 9 pièces et s'il fait des tas de 5 pièces, il lui reste 3 pièces.

1. Quel est le nombre de tableaux de chaque lot ?
2. Combien de pièces de 50 Francs possède M. Talla dans sa caisse ?

Situation 3 :

Un ingénieur travaillant dans le service de codage/cryptographie/transmission de l'armée , choisit deux nombres p et q, puis calcule les produits $\mathrm{N} = pq$ et $n = (p-1)(q-1)$. Il choisit également un entier naturel c premier avec n.

L'ingénieur publie le couple (N ; c), qui est une clé publique permettant à quiconque de lui envoyer un nombre crypté.

Les messages à envoyer sur le terrain d'opération sont numérisés et transformés en une suite d'entiers compris entre 0 et N-1. Pour crypter un entier a de cette suite, on procède ainsi : on calcule le reste b de la division euclidienne par N du nombre a^c, et le nombre crypté est l'entier b.

Pour décrypter les messages reçus des services du Ministère de la Défense , l'ingénieur calcule dans un premier temps l'unique entier naturel d vérifiant la condition $0 \leq d < n \; et \; cd \equiv 1[n]$. Il garde secret ce nombre d qui lui permet ensuite, à lui et lui seul, de décrypter les nombres qui lui ont été envoyés cryptés avec sa clé publique.

Pour décrypter un nombre crypté b, l'ingénieur calcule le reste $\boldsymbol{a}$ dans la division euclidienne par N du nombre b^d, et le nombre en clair (c'est-à-dire avant le cryptage) est le nombre $\boldsymbol{a}$.

Ici, nous prendrons **p=5, q=11 et c=23.**

1) Si un émetteur envoie à l'ingénieur le nombre $a = 8$, quelle est la valeur du nombre crypté b reçu ?

2) Si l'ingénieure l'ingénieur reçoit le message crypté $b = 6$, quelle est le nombre à envoyer ?

3) Si un émetteur envoie à l'ingénieur le nombre $a = 1$, quelle est la valeur du nombre crypté b reçu ?

« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »
ENSEIGNANT : ……NDE SIGNE JOSEPH………
TEL : …… 699604953……….

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023

TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : Tle C
DUREE : ……. HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 2 :PGCD- PPCM

Savoir-faire :

- ✓ **Déterminer les nombres premiers inferieurs à un nombre donné en utilisant le crible d Eratosthène de cyrène.**
- ✓ **Déterminer le PGCD de deux entiers naturels en utilisant l'algorithme d'Euclide**
- ✓ **Déterminer le PGCD et le PPCM de deux entiers naturels en utilisant la décomposition en produit de facteur premier.**
- ✓ **Déterminer deux entiers connaissant leur PGCD et leur PPCM**
- ✓ **Justifier que deux entiers naturels sont premiers entre eux ou non.**
- ✓ **Résoudre dans Z*Z une équation du type : ax+by = c**

I-Exercices de fixation

Ressource 1 : Détermination du PGCD/ PPCM

EXERCICE1 : Déterminer :

a) PGCD (588 ; -165672). b) PGCD (n-1 ; n+1) ou n est un entier supérieur ou égal à 2. C) PGCD (588 ; 165672). d) PPCM (n-1 ; n+1) ou n est un entier supérieur ou égal à 2.

Exercice 2
soit a et b deux entiers relatifs. On pose A = 4a + 3b et B = 5a + 4b montrer que pgcd(A ;B) = pgcd(a ;b)

Exercice3
Soit n un entier naturel, on pose A = n+1 et B = n^2+3n+6
a) montrer que pgcd (A, B) = pgcd (A, 4)
b) Déterminer suivant les valeurs de n, pgcd (A, B).

c) Pour quelles valeurs de n, $\frac{A}{B}$ est un entier !

Ressource 2 : Déterminer deux nombres connaissant leur pgcd ou leur pppcm

Exercice 4

Déterminer les couples (a, b) d'entiers naturels tels que :

$a)\begin{cases} a+b=360 \\ pgcd(a,b)=18 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \mathrm{PPCM}(a,b)=168 \\ a*b=1008 \end{cases}$.

Exercice 5

Soit a et b deux entiers naturels non nuls, on pose d = pgcd(a, b) et m = PPCM(a, b)

Déterminer a et b pour que : $\begin{cases} m = d^2 \\ m + d = 156 \\ b \leq a \end{cases}$

✍ **Resource 3** : reconnaitre et utiliser les nombres premiers entre eux

□ **EXERCICE 6**

Démontrer que les fractions suivantes sont irréductibles ;

a) $\frac{n}{2n+1}$ (n ϵ Z) ; b) $\frac{n^2}{n+1}$ (n ϵ $Z/\{-\}$) ; c) $\frac{7n+3}{5n+2}$ (n ϵ Z)

Exercice 7

Démontrer que si la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible, il en est de même pour les fractions :

a) $\frac{a+b}{ab}$; b) $\frac{ab}{a^2+b^2}$; c) $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$

Exercice 8

a- Déterminer l'ensemble des entiers relatives n tels que n+2 divise 2n-1

b-Démontrer que pour tout entier relatifs n, les nombres n+2 et $2n^2 + 3n - 1$ sont premiers entre eux.

c-En déduire les entiers relatifs n pour lesquels la fraction $\frac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n^2-2)(n+2)}$ est un entier relatif.

✍ **Resource 4** : utiliser le théorème de GAUSS

Exercice 9

-En utilisant le théorème de Gauss, déterminer deux entiers a et b tels que :

a et b sont premiers entre eux et 33a-45b = **0**

Exercice 10

En utilisant le théorème de Gauss , déterminer deux entiers naturels a et b tels que la fraction $\frac{a}{b}$ soit irréductible et que $\frac{a+21}{b+15} = \frac{a}{b}$

✍ **Resource 5** : Résoudre et utiliser l'équation ax + by = c d'inconnues les entiers relatifs x et y à coefficients entiers

Exercice11

a-Résoudre dans Z^2 l'équation (E) : 2x – 3y =0

b-Déterminer dans Z^2une solution de l'équation (E) : 2x – 3y = 3.

c-Résoudre (E).

Exercice 12

- Résoudre dans Z^2 l'équation : x + 11y = 203

Exercice 13

a-E n utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers naturels x et y tels que : 45x – 28y = 1.

b- Résoudre dans Z^2l'équation 45x – 28y = 1.

c- Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation 45x – 28y = 6 ;

Exercice 14

-On se propose de déterminer les entiers relatifs n tels que :$\begin{cases} n \equiv 1[5] \\ n \equiv 5[7] \end{cases}$ (s)

a)Montrer que n est solution de (s) si et seulement si :$\begin{cases} 4n+1 \equiv 0[5] \\ 4n+1 \equiv 0[7] \end{cases}$.

b)En déduire que si n est solution de (s) alors on a 35k -4n = 1 ou k appartient à z. **(1)**

c) Résoudre (1), puis (s).

Resource 6 : Reconnaitre et utiliser les nombres premiers.

Exercice 15

-Reconnaitre si 937 et 1933 sont des nombres premiers

III-Exercices de consolidation

EXERCICE1 6

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $42u + 5v = 2$

2. a. Montrer que le couple d'entiers relatifs (x ;y) est solution de l'équation 42x + 5y = 2 si et seulement si 42(x + 4) = 5(34 – y)

b. Déterminer tous les couples (x ;y) d'entiers relatifs premiers entre eux solutions de l'équation 42x + 5y = 2

3. En déduire les couples (x ;y) d'entiers relatifs solutions de l'équation :

(42x + 5y -3)(42x + 5y +3) = -5 ,

Exercice 17

1. Déterminer le chiffre des unités de l'entier N = $7^{7^{7^7}}$.

2. On considère la suite définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et ∀ n N, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

a. Calculer u_2, u_3 et u_4

b- Montrer en utilisant la récurrence ∀ n ϵ N on a :$\mathbf{u_{n+1} \times u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n}$.

c-Déduire de la question précédente que ∀ n ∈ N, PGCD(u_n ; u_{n+1}) = 1

d-Montrer par récurrence sur p, ∀ n ϵ N , ∀ p ϵ N, $u_{n+p} = u_n \times u_{p-1} + u_{n+1}u_p$.

e-En déduire que ∀ (n ; m) ϵ N^2 on a PGCD (u_n , u_p) = PGCD n(u_n ,u_{n+p})

f- Montrer que ∀ (n ; m) ϵ N^2 on a : pgcd(u_n , u_m) = $u_{gcd(m\ ,n).}$

g- Montrer que ∀ n≥ 5, si u_n est un nombre premier, alors n est un nombre premier.

La réciproque est-elle vrai ?

Exercice 18:

La poissonnerie d'un village vend uniquement deux types de poissons. Le type A qui est conditionné en lots de 8 poissons et le type B qui est conditionné en lots de 5 poissons. A la fin d'une journée d'activité, le gérant de la poissonnerie dit avoir vendu 100 poissons et précise que le nombre de lots de type B est supérieur au double de celui du type A.

La poissonnerie a été construite sur le site d'un terrain triangulaire de cotés 132 m, 156 m et 204 m. Pour sécuriser son établissement, le propriétaire décide de faire une clôture sur chaque côté du site à l'aide de poteaux métalliques régulièrement espacés de telle sorte qu'il ait un poteau au niveau de chaque sommet du site. Un poteau est vendu à 9750 francs.

La poissonnerie dispose d'une balance à plateaux munie de dix poids pour mesurer les quantités de poissons achetées. Les masses respectives de ces poids sont 1, $2, 2^2, 2^3, \dots , 2^9$ grammes. Le gérant aimerait savoir la quantité maximale M de poissons qu'il pourra mesurer à l'aide de ces poids. Il se demande également comment choisir les poids pour équilibrer une quantité entière N de poissons sur la balance.

<u>Tâches</u> :

1. Déterminer le nombre de poissons de chaque type vendu au cours de cette journée.
2. Déterminer la dépense minimale requise pour l'achat des poteaux métalliques.
3. Déterminer la masse maximale et proposer une méthode de choix des poids au gérant.

Exercice1 9

1)a) Démontrer par récurrence la propriété suivante ; pour tous réels a et b et pour tout entier naturel différent de 0 et 1 on a : $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots \dots \dots . + b^{n-1})$.

b) Démontrer que si p et q appartiennent à ℕ , alors $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1\ et\ 2^q - 1$.

2) On pose p l'ensemble des nombres premiers

Démontrer que, pour tout entier naturel n, si ($2^n - 1$) appartient à p, alors n appartient à p.

Exercice 20

Pour tout couple (a ; b) d'entiers naturels, on désigne par β leur PPCM et par μ leur pgcd.

1 .Déterminer les couples (a ; b) d'entiers naturels tels que :2 β + 3μ = 11.

2- Dresser la liste des diviseurs de 108 et déterminer les couples (a ; b) d'entiers naturels tels que.

β - 3μ = 108 et 10< μ< 150

Exercice 21

I - Soit r un entier relatif non nul

1- Déterminer en fonction de r tous les entiers x tels que : $\begin{cases} x \equiv r[5] \\ x \equiv (r+1)[7] \end{cases}$

2- En déduire les valeurs de r pour que tous ces entiers soient multiples de 35.

II - 1-On considère dans Z× Z l'équation (E) :$8x + 5y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Donner une solution particulière de (E).
b) Résoudre (E).
c) Résoudre le système $\begin{cases} pgcd(x,y) = 12 \\ 8x + 5y = 1\,2 \end{cases}$

2.a) Résoudre dans Z×Z l'équation (E') : $8x + 5y = 100$, où x et y sont des entiers relatifs.

b) Au VIII siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans un motel. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait –il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

Exercice 22

Un astronaute a observé au jour j_0 le corps céleste A qui apparait périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard il observe le corps céleste B dont la période d'apparition est de81 jours. On appelle j_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des objets aux yeux de l'astronaute.

1. Soient u et v les nombres de périodes effectuées respectivement par A et B entre j_0 et j_1.

Montrer que le couple (u ; v) est solution de (E) :35x -27y = 2

2)a) Déterminer une solution particulière de l'équation (E)

b) Résoudre l'équation (E) dans Z^2

c) Déterminer la solution (u ; v) permettant de déterminer j_1

3)a) Combien de jours s'écouleront entre j_0 et j_1

b) Le jours j_0 étant le 26 octobre 2005, quelle est la date exacte du jour j_1 ?

c) Si l'astronaute manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des astres ?

Exercice 23

Partie A :

Une boite B a la forme d'un pavé droit de hauteur L à la base un carré de coté l ou L et l sont des entiers naturels non nul tel que l< L. On veut remplir la boite B avec des cubes tous identiques dont l'arrête a est un entier naturel non nul. Les cubes devront entièrement remplir la boite sans laisser d'espaces vides.

1) Dans cette question, l = 882 et L = 945
   a) Quelle est la plus grande valeur de a ?
   b) Quelles sont les valeurs possibles de a ?
2) Dans cette question, le volume de la boite est v = 77760
   a) Déterminer les couples (l ;L) des dimensions de B.
   b) Déduire les dimensions de la boite qu'on peut remplir avec les cubes d'arrête a = 12
   c) Combien de cubes utilisera- t- on dans ce cas ?

Partie B :

On veut remplir une caisse cubique C dont l'arrête c est un entier naturel non nul, avec des boites B toutes identiques telles que décrites dans la partie A. Les boites B, empilées verticalement, doivent remplir complètement la caisse C sans laisser de vides.

1) Dans cette question l = 885 et L = 945
   a) Quelle est la plus petite arrête c pour la caisse ?
   b) Quel est l'ensemble de toutes les valeurs de l'arrête c ?
2) Dans cette question, le volume de la boite B est v = 15435
   a) Déterminer les couples (l ;L) des dimensions de B
      Déduire pour chacune des boites la plus petite arête de la boite C
   b) Déduire les dimensions (l ;L) de B pour remplir un cube d'arête c = 105
      Quel est le nombre de boites B nécessaires pour le remplir ?

« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »
ENSEIGNANT :NSANGOU ABDOU
TEL :699892826

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023

TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : TLeC
DUREE :03 HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 2B : PPCM-PGCD –NOMBRES PREMIERS ET EQUATIONS DE BEZOUT.

Savoir-faire :

- ✓ **Justifier qu'un nombre est premier ou non.**
- ✓ **Déterminer les nombres premiers inférieurs à un nombre donné en utilisant le Crible d'Eratosthène de Cyrène.**
- ✓ **Déterminer le PGCD de deux entiers naturels en utilisant l'algorithme d'Euclide.**
- ✓ **Déterminer le PGCD et le PPCM de deux nombres entiers naturels en utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers.**
- ✓ **Déterminer deux entiers connaissant leur PPCM et leur PGCD.**
- ✓ **Justifier que deux entiers sont premiers entre-eux ou non.**
- ✓ **Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ une équation du type :$ax + by = c$.**

I-Exercices de fixation

Ressource 1 : Nombre premiers entre eux

EXERCICE 1**:** Soit la proposition suivante : « Pour tout entier naturel n non nul, $n + 1$ et $2n + 3$ sont premiers entre eux ». Cette proposition est-elle vraie ou fausse ? justifier votre réponse.

Ressource 2 : PGCD de deux entiers

Exercice 1 :

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse

a) PGCD(-3a,3b) =3PGCD(a,b)

b) Si PGCD(a,b)=PPCM(a,b) , alors a=b

c) $PGCD(588; -1235) = 1$

Exercice 2:

Trouver les valeurs possibles de l'entier a tels que $pgcd(a, 180) = 36$ et $|a| < 360$.

Resource 3 : PPCM de deux entiers

Exercice 4 :

Calculer $a)\ ppcm(588; -1235)$; $b)\ ppcm(2n + 1; n)$

✍ **Resource 4** : Equations de Bézout

📖 **Exercice 1 :**

On considère l'équation $(E): 5x - 3y = 17$ où x *et* y sont des entiers relatifs.

1.a) Justifier que l'équation admet des solutions entières et vérifier que le couple $(4\,;1)$ est une solution particulière de (E)

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

2) Soit$(x;y)$ une solution de (E).

a) Montrer que si x est un diviseur de y, alors x est un diviseur de 17.

b) Soit m un entier relatif. Trouver les valeurs de m telles que le quotient $\frac{1+5m}{4+3m}$ soit un entier relatif.

✍ **Resource 5** : Nombres premiers ou non

📖 **Exercice 1 :**

Soit $M_n = 1111 \dots 111$, le nombre constitué en base 10 par n chiffres ''1 '' .

Montrer que si M_n est premier alors n est premier.

📖 **Exercice 2 :**

On donne les nombres suivants :$A = 127117$ *et* $B = 65537$.
Ces nombres A et B sont-ils des nombres premiers ? Justifier.

I. Exercices de consolidation

📖 **Exercice 1 :**

On désigne par p l'entier naturel. On considère pour tout entier naturel non nul n l'entier :$A_n = 2^n + p$. On note $PGCD(A_{n+1}; A_n) = d_n$.

1) Montrer que d_n divise 2^n.
2) Déterminer la parité de A_n en fonction de celle de p.
3) Déterminer l'entier p en fonction de l'entier k pour que $A_5 = 33 + 6k$ puis en déduire la parité de p.

📖 **Exercice 2** :

Soit n un entier naturel et d un entier non nul.

1) Montrer que si d est un diviseur commun de $n + 1$ *et* $n + 9$, alors d divise 8.
2) En déduire que si n est pair alors $n + 1$ *et* $n + 9$ sont premiers entre eux.

📖 **Exercice 3** :

Soit a *et* b deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux.

1) Montrer que $a + b$ *et* ab sont premiers entre eux.

2) Montrer que $a + b$ et $a^2 - ab + b^2$ sont soit premiers entre eux, soit divisible par 3.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les équations suivantes : a) $35x - 14y = 7$; $b) 7x + 11y = -5$

Exercice 5

1) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les systèmes

a) $\begin{cases} ab = -1176 \\ PPCM(a;b) = 84 \end{cases}$ b) $\begin{cases} ab = 168 \\ PPCM(a;b) = 24 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a + b = 56 \\ pgcd(a;b) = 7 \end{cases}$

2) Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ les systèmes suivants (l'ensemble des couples $(x; y)$ d'entiers naturels)

a) $\begin{cases} pgcd(x;y) = 5 \\ ppcm(x;y) = 170 \ \ et\ x \leq y \end{cases}$ $b)$ $\begin{cases} pgcd(x;y) = 8 \\ x^2 - y^2 = 5440 \end{cases}$ $c)$ $\begin{cases} pgcd(x;y) = 3 \\ x.y = 135 \\ x < y \end{cases}$

Exercice 6 :

Pour tout entier n, on pose $a = 2n + 5$ et $b = n - 3$.

1) Montrer que tout diviseur de commun de a et b est un diviseur de 11.
2) En déduire, suivant les valeurs de n, la valeur du $pgcd(a, b)$.
3) Application : Déterminer $pgcd(a, b)$ lorsque $a = 2 \times 12^{3120} + 5$ et $b = 12^{3120} - 3$.

II. Apprentissage à l'intégration

Exercice 1 :

Une marchandise est mise dans des cartons à 19 pièces, le dernier carton ne contient 4 pièces et si elle est mise dans des cartons à 11 pièces, le dernier carton ne contient 5 pièces.

Tâche 1 : Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ puis dans $\mathbb{N}^2$, l'équation $19x - 11y = 1$.

Tâche 2 : déterminer le nombre de pièces de cette marchandise sachant qu'il est entre 1810 et 2220.

Exercice 2 :

Dans une ville de la place, un groupe d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune.

Tâche 1 : Combien pourrait-il avoir d'hommes et femmes dans ce groupe ?

III. Activités d'intégration

Situation 1 :

Un astronome a observé au jour j_0 le corps céleste A qui apparait périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard il observe le corps céleste B dont la période d'apparition est de 81 jours.

On appelle j_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.

Soient $u\ et\ v$ les nombres de périodes effectuées respectivement par A et B entre $j_0\ et\ j_1$.

Tâche 1 :Après avoir montré que le couple (u, v) est solution de l'équation $(E): 35x - 27y = 2$, déterminer le nombre de jours qui s'écouleront entre $j_0\ et\ j_1$.

Tâche 2 : Le jour j_0 étant le 12 novembre 2018, quelle est la date du jour j_1? NB : L'année 2020 est une année bissextile.

Tâche 3 : Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des astres ?

« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES

LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »

ENSEIGNANT : DJEUTCHA K. Alexandre

TEL : 697 37 44 20

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023

TD : MATHEMATIQUES

CLASSE : Tle C

DUREE : ……. HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 1:NOMBRES COMPLEXES (APPROCHE ALGEBRIQUE)

Savoir-faire :

- ✓ **Donner la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe à partir de son écriture algébrique (ou cartésienne).**
- ✓ **Déterminer l'écriture algébrique d'un quotient, d'une somme ou d'un produit de deux nombres complexes.**
- ✓ **Déterminer l'écriture algébrique du conjugué d'un nombre complexe donné.**
- ✓ **Ecrire le quotient $\frac{z}{z'}$ sous la forme $\frac{z''}{a}$, où a est un réel.**
- ✓ **Calculer le module d'un nombre complexe de forme algébrique connue.**
- ✓ **Calculer le module d'un nombre complexe de forme algébrique connue.**
- ✓ **Calculer le module d'un quotient de deux nombres complexes.**
- ✓ **Calculer le module d'un produit de plusieurs nombres complexes.**
- ✓ **Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe non nul.**
- ✓ **Résoudre une équation du second degré dans C.**
- ✓ **Reconnaitre une racine**

D'un polynôme de degré 3 et à variables complexes.

- ✓ **Factoriser un polynôme à variable complexe de degré 3 soit par division euclidienne, soit par la méthode des coefficients indéterminés.**

IV. Exercices de fixation

✍ **Ressource 1 :** Reconnaitre la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe.

🕮 EXERCICE:

Déterminer les parties réelle et imaginaire de chacun des nombres complexes suivants :

a) 0 b) 1 c) 3i d)-1+3i e) $\sqrt{3}+4i$ f) $\frac{2}{3\sqrt{5}}+7-i\sqrt{3}+2i$

Ressource 2 : Donner l'écriture algébrique d'une somme, d'un produit, d'un quotient de deux nombres complexes.

🕮 EXERCICE :

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a)4+7i+7+9ib) (7+2i)+(-7+3i) c) 3i(3-5i)

d)$\frac{2}{3\sqrt{5}}+7-i\sqrt{3}+2i-9$e) $(-2+7i)(3+i\sqrt{7})$ f) $(5+2i)\times(-3i)$

g)$(3+4i)^2$h) $(2-i\sqrt{3})^3$i) $(3+4i)^3-(2-i)^2$

j)$\frac{1}{i\sqrt{3}}$k) $\frac{2+i}{3+4i}+\frac{3-4i}{2-i}$ l)$\frac{(1-i)(2+i)}{2i(-3+2i)}+2-5i$

✍ **Ressource 3 :** Déterminer l'écriture algébrique du conjugué d'un nombre complexe.

🕮 EXERCICE :

Ecrire sous forme algébrique le conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

a)$(4-i\sqrt{3})(1+i)$ b) $\frac{2-i}{-3+3i}$c) $\frac{(2-3i)(1+i)}{(2-i)^2}$d) $\frac{(1-i)(2+i)}{2i(-3+i)}$

✍ **Ressource 4 :** Calculer le module d'un produit, d'un quotient de nombres complexes.

📖 EXERCICE **:**

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

a) $-1+3i$ b) $\sqrt{3}+4i$ c) $(4-i\sqrt{3})(1+i)$ d) $(2-i\sqrt{3})^2$

e) $\frac{2-i}{-3+3i}$ f) $\frac{(1-i)(2+i)}{2i(-3+i)}$ g) $\frac{2+i}{3+4i}+\frac{3-4i}{2-i}$ h) $(2-5i)^2$

✍ **Ressource 5 :** Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe.

📖 EXERCICE :

Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

a) $z_1=3+4i$ b) $z_2=8-6i$ c) $\sqrt{3}+i$

a) Trouver 2+i et -2-i b) Trouver 3-i et -3+i

✍ **Ressource 6 :** Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$.

📖 EXERCICE :

Résoudre les équations du second degré suivantes :

a) $z^2-2iz-1+2i=0$ b) $iz^2-(4i-3)z+i-5=0$ c) $z^2-(7+i)z+12+3i=0$.

a)Trouver -1+2i et 1. b) Trouver -3-2i et -1-i. c) Trouver 3et 4+i.

✍ **Ressource 7 :** Reconnaitre une racine d'un polynôme de degré 3 et à variables complexes.

📖EXERCICE:

Soit l'équation (E) : $z^3+(4-5i)z^2+(8-20i)z-40i=0$.

a) Calculer P(0), P(-2+2i), puis conclure.
b) Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure.
c) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

a) On constate que 0 n'est pas racine du polynôme P, tandis que -2+2i l'est.
b) L'imaginaire est sous la forme ib. Remplacer dans l'équation et trouver $5i$.
c) Trouver 5i, -2+2i et -2-2i.

Ressource 8: Factoriser un polynôme à variable complexe de degré 3 soit par division euclidienne, soit par la méthode des coefficients indéterminés.

📖 EXERCICE:

Soit P le polynôme défini par : $P(z)=z^3-2(1+2i)z^2+7iz+3(1-3i)$.

a) Démontrer qu'il existe un imaginaire pur $i\boldsymbol{\beta}$ solution de l'équation $P(z)=0$.
b) Déterminer le polynôme Q tel que $P(z)=(z-i\boldsymbol{\beta})$Q(z).
c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation P(z)= 0.

b) Exercices de consolidation

📖 **Exercice 1** :

On considère deux nombres complexes $z_1=8+8i$ et $z_2=\sqrt{3}-i$.

a) Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes z_1-z_2, $z_1\times z_2$ et $\frac{z_2}{z_1}$.
b) Calculer le module de chacun des nombres complexes z_1-z_2, $z_1\times z_2$ et $\frac{z_2}{z_1}$.

📖 **Exercice 2** :

Vérifier que $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}+\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}-1=0$.

📖 **Exercice 3**:

a) i^3, i^4 et i^5. En déduire i^{18} et i^{19}.

b) Calculer $1 + i + i^2 + i^3$, puis $i^{199} + i^{200} + i^{200} + i^{201} + i^{202}$.

c) Calculer $\sum_{k=0}^{2000} i^k$ et $\sum_{k=0}^{2002} (-i)^k$.

📖 **Exercice 4**:

Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (11 + 2i)z^2 + 2(17 + 7i)z - 42$.

a) Démontrer qu'il existe un réel α solution de l'équation P(z)=0.

b) Déterminer le polynôme Q tel que $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

📖 **Exercice 5**:

a) Développer, réduire et ordonner par rapport aux puissances décroissantes de z l'expression

$(z + 2)(z^2 + 6z + 34)$.

b) Soit l'équation $(E): z^3 - 4z^2 + 22z + 68 = 0$. Démontrer que (E) admet un entier comme solution.

📖 **Exercice 6**:

On considère l'équation $(E): z^3 - (6 + i\sqrt{3})z^2 + (11 + 4i\sqrt{3})z - 6 - 3i\sqrt{3} = 0$.

a) Montrer que $(E) \Leftrightarrow (z^2 - 4z + 3)(z - 2 - i\sqrt{3}) = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

📖 **Exercice 7**:

On considère la fonction polynôme P à variable complexe définie par :

$P(z) = z^3 - (6 + 6i)z^2 + 21iz + 15 - 5i$.

a) Calculer $P(i)$.

b) En déduire que $P(z) = (z - i)(az^2 + bz + c)$, où a, b et c sont des nombres complexes que l'on déterminera.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (6 + 5i)z + 5 + 15i = 0$

d) Donner les solutions de l'équation (E).

📖 **Exercice 8**:

Soit le polynôme $P(z) = z^3 - (1 + i)z^2 - (8 + 4i)z - 4 + 28i$.

a) Vérifier que P admet une racine imaginaire pure z_0.

b) Déterminer trois nombres complexes a, b et c tels que $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (1 + 3i)z - 14 - 2i = 0$.

d) Achever alors dans $\mathbb{C}$ la résolution de l'équation $P(z) = 0$.

📖 **Exercice 9**:

Soit le polynôme $P(z) = 2z^3 - 4z + \lambda$, où z désigne un nombre complexe et où λ est un nombre réel.

On considère l'équation $P(z) = 0$.

1.a) Montrer que si (E) admet une solution z_0, alors $\overline{z_0}$ est aussi solution de (E).

b) En déduire que l'équation (E) admet au moins une solution réelle. (On ne demande pas de la calculer).

2.a) Déterminer λ pour que l'équation (E) admette comme solution réelle le nombre 2.

b) Résoudre l'équation (E) pour $\lambda = 0$.

3. On donne $\lambda = 8$.

a) Vérifier que $1 + i$ est solution de (E).

b) Résoudre l'équation (E).

c)Déterminer le module de chaque solution de (E).

📖 **Exercice 10**:

Pour tout nombre complexe z, on pose $p(z) = z^4 - 4z^2 + 16$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): p(z) = 0$.

a) Montrer qu'il existe deux valeurs du réel a telles que : $p(z) = (z^2 + az + 4)(z^2 - az + 4)$.

b) Déduire les solutions de l'équation (E).

📖 **Exercice 11**:

On considère l'application t de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $t(z) = 9z^4 - 24z^3 + 50z^2 - 24z + 41$.

a) Montrer que si z_0 est une racine de t, alors $\overline{z_0}$ est aussi une racine de t.

b) Vérifier que i est une racine de t, et en déduire une autre racine.

c) Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que tels que $\forall z \in \mathbb{C}\ t(z) = (z^2 + 1)(az^2 + bz + c)$.

d) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $t(z) = 0$.

c) Apprentissage à l'intégration

📖 **Exercice** :

Bounyem, élève en classe de Terminale C et âgé de 16 ans, reçoit comme cadeau pour son examen de Probatoire brillamment obtenu, un téléphone Android de son père. Constatant que le téléphone est verrouillé, son papa, en bon farceur, lui dit que le code de déverrouillage du téléphone est le carré du module du nombre complexe racine du polynôme P ci-dessous, dont le conjugué est aussi racine, résultat qu'il devra multiplier par son âge. Il lui donne écrit sur un bout de papier le polynôme :$P(z) = z^3 + iz^2 - iz + 1 + i$.

a)Calculer $P(-1 - i)$.

b)Déterminer les réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z + 1 + i)(z^2 + az + b)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

d)Aider Bounyem à retrouver le code que son papa lui cache.

d) Activités d'intégration

📖 **Situation** :

Bob, Alice et James sont âgés respectivement de 16, 18 et 32 ans. Dans le but de trouver des mots de passe pour leurs adresses mail respectives, ils décident, d'un commun accord, de procéder comme suit, pour chacun :

-Former un nombre complexe ayant pour partie réelle le chiffre des dizaines de l'âge du concerné, et pour partie imaginaire le chiffre des unités du même âge.

-Calculer le carré du module du nombre complexe obtenu.

-Former un nombre à 4 chiffres en adjoignant, de gauche à droite, la partie réelle, la partie imaginaire et le carré du module trouvé.
-Utiliser le tableau ci-dessous pour convertir le nombre à 4 chiffres obtenu, en un message à 4 lettres, chaque lettre occupant, dans le message, le rang du chiffre dont elle est issue après conversion.
Dans un souci de confidentialité, ils décident que chacun devrait ajouter à la fin des 4 lettres obtenus dans son mot de passe, un nombre à 2 chiffres au moins, suivi du symbole **Arobase** (@).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Tâche 1 : Déterminer un mot de passe possible pour Bob.
Tâche 2 : Déterminer un mot de passe possible pour Alice.
Tâche 3 : Déterminer un mot de passe possible pour James.

« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »
ENSEIGNANT : TSANGOU METSIM
TEL : 698613868

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023
TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : Tle C
DUREE : ……. HEURES

CHAPITRE 4 : FONCTIONS NUMERIQUES D'UNE VARIABLE REELLE

Savoir-faire :

- ✓ **Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue.**
- ✓ **Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour justifier l'existence dans un intervalle donné des solutions d'une équation de la forme f$(x) = c$ et établir l'unicité de x quand c'est possible.**
- ✓ **Montrer que la restriction d'une fonction a un intervalle est bijective à partir de sa courbe ou de son tableau de variations.**
- ✓ **Etudier la continuité et la dérivabilité, le sens de variation de l'application réciproque d'une application bijective.**
- ✓ **Dériver la bijection réciproque d'une fonction numérique.**
- ✓ **Représenter graphiquement les courbes de deux fonctions réciproques l'une de l'autre.**
- ✓ **Résoudre des équations de la forme : $x^n = a$ avec $n \in \mathbb{N}$.**
- ✓ **Utiliser les inégalités des accroissements finis pour établir certaines inégalités.**
- ✓ **Lever les indéterminations issues des limites des fonctions trigonométriques et des fonctions irrationnelles.**
- ✓ **Déterminer les branches infimes à une courbe.**
- ✓ **Etudier et représenter graphiquement certaines fonctions rationnelles, irrationnelles et trigonométriques**

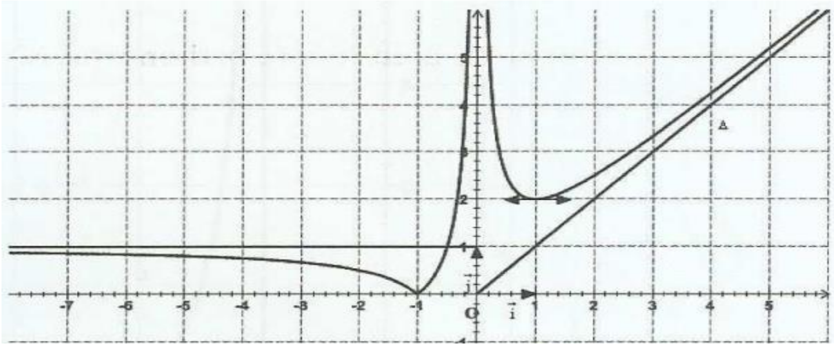
I. Exercices de fixation

✍ **Ressource 1 :** Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue

🕮 EXERCICE 1 :

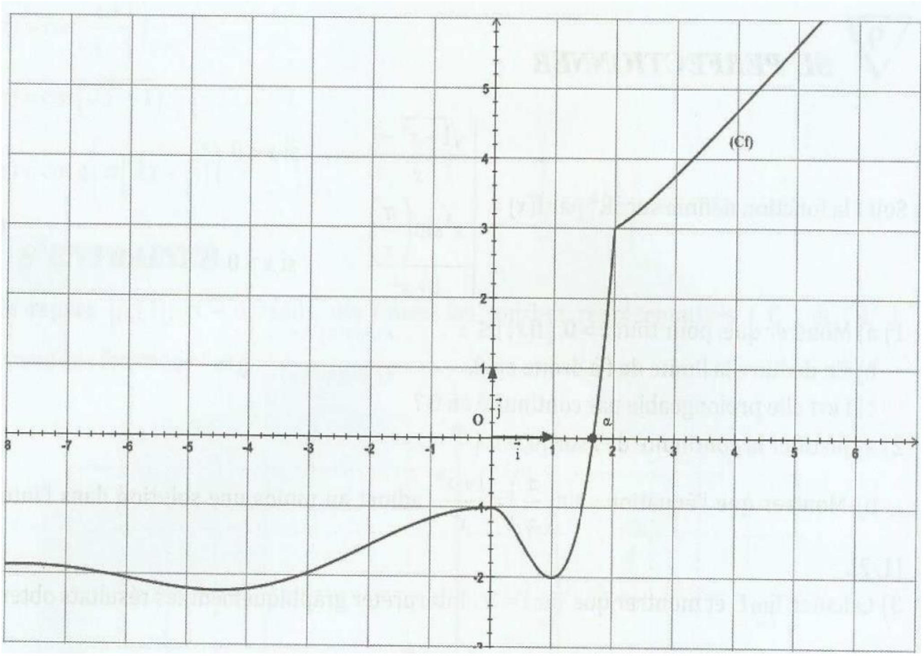
Dans chacun des cas suivants, déterminer par lecture graphique l'ensemble $f(I)$ image par f de l'intervalle I.

1)



A) $I =]-\infty; 0[$
B) $I =]0; +\infty[$

2)



📖 EXERCICE 2 :

1- Le tableau de variation suivant est celui d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3

Déterminer les images par f de chacun des intervalles suivants : $]-\infty; 0]$, $]2;\ +\infty[$

, $[0; 2]$; $[0;\ +\infty[$ et $]-\infty;\ +\infty[$

2- On donne ci-dessous le tableau des variations d'une fonction f. f est continue sur $]-\infty; 8[$ et sur $]8;\ +\infty[$.

x	$-\infty$		0		8		$+\infty$
$f(x)$	1	↗	2	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Déterminer les images par f des intervalles suivants : $]-\infty; 8[$ et sur $]8; +\infty[$.

3- Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]-3; +\infty[$ dont le tableau de variation est :

x	-3		-1		0		8		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	0	-	
f(x)	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	1	↘	-5

Déterminer les images par f des intervalles suivants : $]-3; -1]$; $]-1; 0[$; $[0; +\infty[$; $]-3; +\infty[$ et $[-1; 8]$.

🕮 EXERCICE 3 :

I- Dans chacun des cas suivants déterminer l'image de l'intervalle K par la fonction f.

a) $f: x \mapsto \frac{x+2}{x-3}$; $K =]3; +\infty[$.

b) $f: x \mapsto x^3 - 3x + 1$; $K = [-1; +\infty[$

c) $f: x \mapsto x^2 - 3x + 2$; $K = [2; 1]$

d) $f: x \mapsto \frac{-2x+5}{x-3}$; $K = [-4; -1]$

e) $f: x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x + 2}$; $K = [0; +\infty[$

f) $f: x \mapsto |3x^2 - 1|$; $K =]-\infty; 0]$.

g) $f: x \mapsto \sqrt{|x^2 - 4|}$; $K = [-2; 2]$

II- Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle $[-3; +\infty[$ par : $f(x) = 2x - 2\sqrt{x+3}$.

Déterminer les images par la fonction f des intervalles $[-3; 0]$; $[-2; 1]$ et $]0; 6[$

✍ **Ressource 2 :** Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour justifier l'existence dans un intervalle donné des solutions d'une équation de la forme $f(x) = c$ et établir l'unicité de x quand c'est possible.

🕮 EXERCICE 1 :

Le tableau suivant est le tableau des variations d'une fonction définie et continue sur l'intervalle $I = [-5; 8]$.

x	-5		0		8
$f(x)$	1	↗	2	↘	-6

1- Déterminer le nombre de solutions dans I des équations suivantes :

a) $f(x) = 0.$; b) $f(x) = 3$; c) $f(x) = 1{,}5$.

2- Déterminer le signe de $f(x)$ suivante les valeurs de x.

3- Soit m un nombre réel. Discuter en fonction de la valeur de m du nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

🕮 EXERCICE 2 :

On considère une fonction définie sur l'intervalle $[-4; 4]$ admettant le tableau de variation suivant :

x	-4		2		4
Variation de f	3	↘	$-\frac{9}{2}$	↗	-1

1- Justifier que la fonction f s'annule une unique fois sur son ensemble de définition.

2- Déterminer le signe de $f(x)$ suivante les valeurs de x.

3- Soit m un nombre réel. Discuter en fonction de la valeur de m du nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

🕮 EXERCICE 3 :

I- Démontrer que l'équation $x^3 - 6x - 6 = 0$ admet une solution réelle et donner la valeur approchée de cette solution a 10^{-2} près.

II- Démontrer que l'équation $x^3 - 12x + 10 = 0$ admet dans $]0; 1[$ une solution unique α et déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

III- Monter que l'équation $|x\sqrt{1-x}| = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ admet trois solutions x_1, x_2 et x_3 telles que : $-\frac{1}{3} < x_1 < 0$; $0 < x_2 < \frac{2}{3}$ et $\frac{2}{3} < x_3 < 1$.

IV- Un cube a une arrête de $x\ cm$, un parallépipede rectangle a pour dimensions : $1cm$; $3cm$ et $(x+1)cm$.

1- Démontrer qu'il existe une seule valeur de x pour laquelle les deux solides ont le même volume.

2- Donner un encadrement de cette valeur a $0{,}1$ pres.

🕮 EXERCICE 4 :

I- Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}$.

1- Etudier les variations de f.
2- Préciser le nombre de solutions des équations suivantes et déterminer une valeur approchée a 10^{-1} de chacune d'elles.
a) $f(x) = 1{,}1$; b) $f(x) = 0{,}75$; c) $f(x) = -0{,}5$.

II- On considère le polynôme p définie pour tout réel x par $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.
1- Etudier les variations de p.
2- Montrer que l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in]1{,}6; 1{,}7[$.
3- Dresser le tableau de signe de $p(x)$.

III- Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x^2 - x\sqrt{x} - 2$$

1- Déterminer l'ensemble de définition D de f et calculer les limites aux bornes de D.
2- On admet que f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$.
a) Démontrer que pour tout $x \in]0;\ +\infty[$, $f'(x) = \frac{\sqrt{x}(4\sqrt{x}-3)}{2}$.
b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.
3- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0;\ +\infty[$ une solution unique β.
4- En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

✍ **Resource 3** : Montrer que la restriction d'une fonction a un intervalle est bijective à partir de sa courbe ou de son tableau de variations ; Etudier la continuité et la dérivabilité, le sens de variation de l'application réciproque d'une application bijective et Dériver la bijection réciproque d'une fonction numérique.

🕮 EXERCICE 1 :

I- Soit la fonction $f : [0;\ +\infty[\to [0; 1[$

$$x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

a) Sans étudier ses variations, démontrer que f est une bijection.
b) Déterminer la bijection réciproque f^{-1} de f.

II- Soit la fonction f: $x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 + x + 1$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
a) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$. Vers $\mathbb{R}$.
b) Justifier que sa bijection réciproque f^{-1} est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
c) Calculer $(f^{-1})'(13)$.

🕮 EXERCICE 2 :

Soit la fonction f ; $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \to \left[\frac{3}{4}; +\infty\right[$

$$x \longmapsto x^2 + x + 1.$$

1.
a) Sans étudier ses variations, justifier que f est une bijection.
b) Déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.
c) Jusitifer que f^{-1} est dérivable sur $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right[$ et calculer $(f^{-1})'(x)$ pour tout $x \in \left[\frac{3}{4}; +\infty\right[$.

2.
a) Justifier par l'étude des variations que f est une bijection.
b) Calculer par une autre méthode que celle du 1) le nombre $(f^{-1})'(a)$ pour tout $a \in \left[\frac{3}{4}; +\infty\right[$.

🕮 EXERCICE 3 :

I- Soit g la fonction définie sur $[0;\ +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \sqrt{x^2+1}$.

1- Montrer que g est une bijection de $[0;\ +\infty[$ vers $[1;\ +\infty[$.
2- Montrer que pour tout $x \in [1;\ +\infty[$, $g^{-1}(x) = \sqrt{x^2-1}$.
3- g^{-1} est-elle dérivable sur $[1;\ +\infty[$? Justifier votre réponse.

II- Soit la fonction numérique g définie sur $[1;\ +\infty[$ par : $g(x) = (x-1)\sqrt{x-1}$.

1- Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} ,dont on déterminera l'ensemble de définition.
2- Déterminer l'ensemble J sur lequel g^{-1} est dérivable.
3- Déterminer de deux facons différentes la dérivée de g^{-1} sur J.

🕮 EXERCICE 4 :

I- Soit la fonction f définie sur $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = sin^2x$.

1- Montrer que f réalise une bijection de $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ vers un intervalle J que l'on déterminera.
2-
   a) Déterminer l' ensemble K sur lequel, f^{-1} est continue .
   b) Déterminer l' ensemble I sur lequel, f^{-1} est dérivable.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f^{-1}
   d) Démontrer que poiur tout $x \in I$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$.

II- Soit la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$ par : $f(x) = \frac{1}{1-tanx}$.

1- Montrer que f réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$ vers un intervalle J que l'on déterminera.
2- Soit g la fonction réciproque de f.
   a) Monttrer que g est dérivable sur $[1;\ +\infty[$ et que $g'(x) = \frac{1}{2x^2-2x+1}$.

III- Soit f la fonction définie sur $[0;\ \pi]$ par : $f(x) = cosx$.
   1- Montrer que f est une bijection de $[0;\ \pi]$ vers un intervalle J que l'on déterminera.
   2- Justifier que f^{-1} est dérivable sur $]-1;1[$ et dresser son tableau de variation.
   3- Démontrer que pour tout $x \in]-1;1[$, on a $(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

✍ **Resource 4** : Résoudre des équations de la forme : $\boldsymbol{x^n} = \boldsymbol{a}$ avec $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.

🕮 EXERCICE :

I- Simplifier : $A = \frac{\sqrt[3]{1024}\times\sqrt{\sqrt{64}}\times\sqrt[5]{7776}}{\sqrt{18}\times\sqrt{\sqrt[3]{256}}}$; $B = \frac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{9}\times\sqrt{6}}{\sqrt[3]{\sqrt{6}}}$; $C = \frac{\sqrt[5]{2}\times\sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}}$.

II- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^3+27=0$; b) $x^5-1024=0$; c) $\left(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt[3]{x}}\right)^3+125=0$.

III- Mettre sous forme d'un quotient dont le dénominateur est rationnel :

$A = \frac{10^{\frac{3}{2}}\times 8^{-\frac{4}{3}}}{5\times 4^{-\frac{7}{3}}}$; $B = \frac{1}{\sqrt[4]{5}-1}$; $C = \frac{1}{1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$.

IV- Soient a et b deus réels.
   a) Exprimer a en fonction de b pour que : $a^{\frac{4}{5}} - 2a^{\frac{2}{5}}b^2 + b^4 = 0$.
   b) Simplifier : $\frac{a^{\frac{6}{5}}-3a^{\frac{4}{5}}b^2+3a^{\frac{2}{5}}b^4-b^4}{a^{\frac{4}{5}}-2a^{\frac{2}{5}}b^2+b^4}$.

V- Soit $A = \sqrt[3]{28 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}} + \sqrt[3]{28 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}}$. On se propose de déterminer la valeur exacte de A sans utiliser la calculatrice. On pose $m = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5290}{3}}$, $a = \sqrt[3]{28+m}$ et $b = \sqrt[3]{28-m}$, de ce fait $A = a + b$.

1- a) montrer que $A^3 = 56 + 3abA$.
   c) Calculer a^3b^3 et en déduire que $A^3 = 56 + 2A$.

2- Etudier la fonction $f: x \longmapsto x^3 - 2x - 56$ et montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution positive.

3- Calculer $f(4)$ et en déduire la valeur exacte de A.

✍ **Resource 5** : Utiliser les inégalités des accroissements finis pour établir certaines inégalités.

📖 **EXERCICE1** :

I- On considere la fonction $f: x \longmapsto \sqrt{x} + x$.

1- Démontrer que pour tout $t \in [1;4]$, on a $\frac{5}{4} \leq f'(t) \leq \frac{3}{2}$.

2- Soit $x \in [1;4]$
   a) en appliquanr l'inégalité des accroissements finis montrer que $\frac{5}{4}(x-1) \leq f(x) - f(1) \leq \frac{3}{2}(x-1)$.
   b) Donner alors un encadrement de f par deux fonctions affines sur
   c) Montrer que $\left|\sqrt{x} + x - 6\right| \leq \frac{3}{2}|x-4|$.

II-

1- Démontrer que pour tout nombre réel a d l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $a \leq \tan a \leq 2a$.

2- Démontrer que pour tout nombre réel a et b de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $\frac{b-a}{cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{cos^2 b}$

📖 **EXERCICE 2 :**

1- Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;1]$ on a :

a) $\frac{x\sqrt{2}}{4} + 1 \leq \sqrt{x+1} \leq \frac{x}{2} + 1$; b) $\left|\sqrt{x+1} - 1\right| \leq \frac{x}{2}$.

2- Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

3- Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x de l'intervalle $[0;1]$; $\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$.

4- Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ on a : $1 - \frac{x}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{1-x} \leq 1 - \frac{x}{2}$.

✍ **Resource 6** : Lever les indéterminations issues des limites des fonctions trigonométriques et des fonctions irrationnelles.

📖 **EXERCICE1** :

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{9-x}$; $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{5+x^2}-\sqrt{5}}{4x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$; $\lim\limits_{x\to 3_>}\frac{\sqrt{x-3}}{4-\sqrt{6x-2}}$; $\lim\limits_{x\to 1_>}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}$

EXERCICE 2 :

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2sinx-1}{6x-\pi}$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{sin\pi x}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{sinx-1}{2x-\pi}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2cosx-1}{3x-\pi}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{sinx-cosx}{2x-\frac{\pi}{2}}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}cosx-sinx}{x-\frac{\pi}{3}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+sinx-cosx}{1-sinx-cosx}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+tanx}{1-tanx}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-sinx+cosx}{1-sinx-cosx}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{1-sinx}$.

EXERCICE 3 :

I- Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de f en 0.

a) $f(x)=\frac{sinx}{\sqrt{x}}$; b) $f(x)=\frac{tan^2x}{x}$; c) $f(x)=\frac{x^3cos^2x}{sin^2x}$; d) $f(x)=xsin(\frac{1}{x})$; e) $f(x)=\frac{\sqrt{cosx}-1}{x}$; f) $f(x)=\frac{1-cos2x}{sin^2x}$; g) $f(x)=\frac{1-cos3x}{x^2}$; h) $f(x)=\frac{\sqrt{1+sinx}-1}{sin2x}$.

II- Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

a) $f(x)=\sqrt{2x^2-x+3}$; b) $f(x)=2x+\sqrt{x^2+1}$; c) $f(x)=x-\sqrt{x^2-4}$; d) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$; e) $f(x)=\sqrt{x^2-3x}-x$; f) $f(x)=\sqrt{4x^2-2x+1}-2x+1$; g) $f(x)=3x+\sqrt{5x^2+3}$; h) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; i) $f(x)=\cos(\frac{\pi x+1}{x+2})$

EXERCICE 4 :

I-

1- Démontrer que pour tout x de l'intervalle $[1;\ +\infty[$, on a : $\frac{1}{2}\leq\frac{x}{x+1}\leq 1$

2- En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{x+1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$.

II- On considere la fonction $f: x\mapsto\frac{2x+sinx}{x-1}$.

1- Démontrer que pour tout x de l'intervalle $]1;\ +\infty[$, on a : $\frac{2x-1}{x-1}\leq f(x)\leq\frac{2x+1}{x-1}$.

2- En déduire la limite de f en $+\infty$.

III- Demontrer que pour tot réel x, $|cosx+sinx|\leq 2$ et en déduire les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f définie par $f(x)=\frac{cosx+sinx}{x^2}$.

IV- On considere les fonctions $f: x\mapsto x^2-3sinx$ et $g: x\mapsto 3x+2\,cosx$

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$.

V-

1- Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x ; $f(x)\geq x^2$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

2- Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ sachant que pour tout réel x, $|f(x)-2|\leq\frac{1}{x}$.

VI- On considere la fonction f définie sur $[2;\ +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3x+sinx}{x-1}$.

1- Montrer que pour tout $x \geq 2$, on a ; $|f(x) - 3| \leq \frac{4}{x-1}$.

2- En déduire la limite de f en $+\infty$.

✍ **Ressource 7 :**Déterminer les branches infinies

📖 **EXERCICE 1 :**

Le plan est muni d'un repere orthogonal, (C) est la représentation graphique de la fonction f. Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et donner une interprétation graphique de chaque limite s'il y a lieu.

1- f est définie sur $]-\infty;\ -1[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$.

2- f est définie sur $]-\infty;\ 1[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x^2}{x-1}$.

3- f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{1 + x^2} - x$

4- f est définie sur $]-\infty;\ -2[\ \cup\ ]-2;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+1}{(x+2)^2}$

📖 **EXERCICE 2** :

Le plan est muni d'un repere orthogonal, (C) est la représentation graphique de la fonction f. Dans chacun des cas suivants, démontrer que la droite (Δ) est asymptote a (C) en l'nedroit indiqué.

a) $f: x \mapsto -3x + 1 + \frac{1+x}{x^2+2}$; $(\Delta): y = -3x + 1$, en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) $f: x \mapsto 2 + \sqrt{1 + 4x^2} - x$; $(\Delta): y = x + 2$ en $+\infty$.

c) $f: x \mapsto \frac{-2x^3+4x^2-2x+1}{(x-1)^2}$; $(\Delta): y = -2x$ en $+\infty$.

📖 **EXERCICE 3 :**

I- Etudier les branches infinies des fonctions suivantes :

$f(x) = x^2 + 2cos2x$; $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$; $f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 - 3x + 2}$; $f(x) = \sqrt{x + 2}$; $f(x) = \frac{x^3+1}{x-2}$

II- Etudier les branches infinies des fonctions suivantes :

$f(x) = 2x - \sqrt{x}$; $f(x) = x\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$; $f(x) = \frac{x^3-3x^2+6}{x^2+1}$; $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x$; $f(x) = 2x - sinx$

$f(x) = \frac{x^2+sinx}{x}$; $f(x) = 3x - 3\sqrt{x}$

II. Exercices de consolidation

📖 **Exercice 1** :

I- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$.

1- Dresser le tableau de variation de la fonction g.

2- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α avec $\alpha \in\ ]0; 1[$.

II- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{x^3+x^2+1}{3x}$.

1- Montrer que pour tout réel x de $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{3x^2}$.
2- Dresser le tableau de variations de f.
3- Montrer que $f(\alpha) = \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{2\alpha}$. Et en déduire que $0 \leq f(\alpha) \leq \frac{2}{3}$
4- Etudier les branches infinies de la fonction f.
5- Construire la courbe de la fonction f dans un repere orthonormé.

📖 **Exercice 2** :

Le plan est muni d'un repere orthonormé $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $D =]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} - 1$.

1- Dreseer le tableau de variation de g pour tout $x \in D$.
2- En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in D$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x$ et (C) sa courbe représentative dans le repere $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1- Etudier la dérivabilité de f a droite de 0 et a gauche de -2. Interpréter les résultats obtenus.
2- Montrer que $f'(x) = g(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
3- Etudier les branches infinies de la fonction f.
4- Construire (C).
5- Soit h la restriction de f sur $[0; +\infty[$.
a) Montrer que h réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera.
b) Expliciter $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
c) Construire la courbe (C') de h dans le repere $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

📖 **Exercice 3** :

I- Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 3$.
1) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution β tel que $2{,}10 < \alpha < 2{,}11$.
3) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

II- On définit sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ la fonction f par : $f(x) = \frac{2x^3+3}{x^2-1}$.
1) Montrer que $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$ et étudier le signe de $f'(x)$.
2) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3) Donner un encadrement de $f(\alpha)$.
4) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote a la courbe (C) de f, puis étudier les positions relatives de (C) par rapport a (D) et préciser les autres asymptotes.
5) Construire la courbe (C) de f dans un repère orthonormal.

📖 **Exercice 4** :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{4x^2+1}}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repere orthonormé $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1)
a) Etudier les variations de f.
b) Montrer que le point $I(0, \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie.

2)

a) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique β tel que $\beta \in \left]\frac{3}{4},1\right[$.
b) Etudier les positions relatives de la courbe (C) et de la droite (Δ) d'équation $y=x$.
c) Tracer dans le repere $(O,\vec{\imath};\vec{\jmath})$ l a courbe (C) et de la droite (Δ).

3) On considere la fonction h définie sur $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ par : $h(x)=\begin{cases} 2f\left[\frac{1}{2}\tan(\frac{\pi}{2}x)\right] \\ h(\left(-\frac{1}{2}\right))=0 \\ h(\left(\frac{1}{2}\right))=2 \end{cases}$.

Montrer que h est continue sur $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

Exercice 5 :

f est la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x)=\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

1- Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2- Déterminer les limites aux bornes de D.
3- Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 1, puis donner une interprétation graphique des résultats.
4- Justifier pourquoi on peut étudier la fonction f sur$]0;1]$.
5- Démontrer que pour tout $x \in]0;1[$, $f'(x)=\frac{-1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.
6- Dresser le tableau de variation de f sur $]0;1]$.
7- Soit $k \in]1;+\infty[$. Démontrer que l'équation $f(x)=k$ admet une solution unique $\alpha \in]0;1[$.
8- Tracer (C) sur D.

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur par $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+1+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repere orthonormé $(O,\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1- Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f et donner une interpréy=tation graphique pour chacunes d'elles.
2- Etudier les branches infinies si possibles.
3- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4- Tracer la courbe de la fonction f dans le repere $(O,\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
5- On désigne par g la bijection réciproque de f.
a) Démontrer que g existe et déterminer son ensemble de définition.
b) Montrer que g est dérivable sur son ensemble de définition.
c) Tarcer dans le meme repere la courbe de la fonction g.
d) Expliciter $g(x)$.

Exercice 7 :

On considere la fonction f définie sur $[-1;1]-\{0\}$ par : $f(x)=1+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repere orthonormé $(O,\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Partrie A :

1- Calciuler $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, puis interpréter les résultats obtenus.
2- Etudier la dérivabilité de f en -1 et 1 puis interpréter les résultats obtenus.
3- Dresser le tableau de variayion de la fonction f.
4- Montrer que f réalise une bijection de $]0;1[$ vers un intervalle J que l'on précisera.
5- Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
6- Représenter dans le meme repere orthonormé $(O,\vec{\imath};\vec{\jmath})$ la courbe (C) et (C') de f^{-1}.

Partie B :

Soit φ la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par : $\varphi(x) = f(cosx)$.

1- Montrer que pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\varphi(x) = 1 + \tan(x)$.
2- Etudier le sens de variation de la fonction φ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.
3- Montrer que l'équation $\varphi(x) = x$ admet une unique solution α dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et vérifier que $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.
4- Montrer que φ réalise une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ vers un intervalle K que l'on précisera.
5- Montrer que φ^{-1} est dérivable sur K et que pour tout $x \in K$, $(\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}$

🕮 Exercice 8 :

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{3(x^2+2)}{x^2+6}$.

I- On considere dans $\mathbb{R}$, l'équation $(E): 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = 0$.

1- a. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution β dans $\mathbb{R}$.
b. Donner un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}.

2- On pose $\alpha = -\beta$.
a- Démontrer que $f(\alpha) = \alpha$.
b- Donner un encazdrement de α par deux entiers consécutifs.

II-

1- Démontrer que pôur tout réel x, $f''(x) = \frac{-72(x^2-2)}{(x^2+6)^3}$.
2- Dresser le tableau de variation de f' sur $\mathbb{R}$ et en déduire que pour tout réel x appartenant a l'intervalle $]0; +\infty[$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$.
3- Démontrer que pour tout $x \in [1; +\infty[$, $|f(x) - \alpha| \leq |x - \alpha|$

🕮 Exercice 9 :

Soit la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par : $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

1- Etufier la dérivabilité de f a droite de 1 et interpréter le résultat obtenu.
2- Monttrer que f est dérivable sur $]1; +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
3- Dresser le tableau de variation de f.
4- Montrer que f tréalise une bijection de $]1; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera.
5- Montrer que pour tout x appartenant a l'intervalle J, $f^{-1}(x) = \frac{1+x^2}{2x}$.
6- On désigne par (C) et (C')les courbes de f et f^{-1} dans le meme repere orthonormé.
1- Montrer que la droite $(D): y = 2x$ est asymptote oblique a (C).
2- Tracer (C) et (C').
7- Soit g la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = f(\frac{1}{\cos x})$.
1- Montrer que pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = \frac{1+sinx}{cosx}$.
2- Montrer que g réalise une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ vers un intervalle K que l'on précisezra.
3- Montrer que g^{-1} est dérivable sur K et que pour tout x de K ; $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

🕮 Exercice 10 :

On considere la fonction $f: x \longmapsto \frac{3}{4}\sqrt{[-x^2+4x+12]}$ et (C) sa courbe représentative dans un repere orthonormé.

1- Déterminer l'ensemble de définition de f.
2- Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définiion.
3- Etudier les branches infinies de la fonction f.
4- Exprimer $f(x)$ sans barre de valeur absolue.
5- Etudier la dérivabilité de f en -2 et en 6, puis ionterpréter les résultats obtenus.
6- Etudiuer les variations de f et dresser son tableau de variations.
7- Construire (C) en faisant ressortir :
   - Les démi-tangentes en -2 et en 6.
   - Les branches infinies.
   - Les extréma.

🕮 **Exercice 11 :**

On considere la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{sinx}{2+cosx}$.

1- Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
2- Montrer que f est impaire et $2\pi -$ périodique.
3- Sur quel intervalle suffit-il d'étudier la fonction f.
4- Etudier les variations de f sur l'intervalle trouvé a la question 3.
5- Représenter graphiquement la courbe représentative (C) de f dans l'intervalle $[-2\pi : 2\pi]$

🕮 **Exercice 12 :**

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{4sin^2x-3sinx}{sinx-1}$ et (C) sa coiurbe représentative dans un repere orthogonale. **<u>Unités graphiques :</u>** $4cm$ en abscisse pour π, et $1cm$ par unité en ordonné.

1- Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2- Démontrer que les droites d'équations $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$ sont des axes de symétries a (C).
3- Dans toute la suite, pour des rauisons de symétries on choisit pour domaibne d'étude $D = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.
   a) Montrer qiue pour tout $x \in D$, $f'(x) = \frac{(cosx)(4sin^2x-8sinx+3)}{(sinx-1)^2}$.
   b) Dresser le tableau de variations de f sur D.
   c) Construire la courbe (C) sur $[-2\pi; 2\pi] - \left\{-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$.
4- Soit h la restriction de f sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[$. montrer que h réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[$ vers un intervalle J a préciser, puis construire dans le meme repere la courbe $(C_{h^{-1}})$ de sa réciproque.

🕮 **Exercice 13 :**

f est la fonction définie sur l'intervalle $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = 2sinx + tanx - 3x$ de courbe représentative (C).
1- Démontrer que la fonction $u: t \longmapsto 2t^3 - 3t^2 + 1$ est positive sur l'intervalle $[0; 1]$.
2- Justifier que f est dérivable sur l'intervalle I et que $\forall\, x \in I$, $f'(x) = \frac{u(cosx)}{cos^2x}$.
3- En déduire le sens de variations de f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle I.
4- Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution $\beta \in I$.
5- Montrer que pour tout $x \in I$, $2sinx + tanx \geq 3x$

🕮 **Exercice 14 :**

I- Soit g la fonction définie sur $[0; \pi]$ par : $g(x) = xsinx + cosx - 1$.

1- Etudier les variations de g sur $[0;\ \pi]$.

2- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution δ sur $]0;\ \pi]$, et que $\delta \in \left]\frac{2\pi}{3};\ \pi\right[$.

3- Préciser le signe de $g(x)$ pour x élément de $[0;\ \pi]$.

II- Soit f la fonction telle que $f(x) = \begin{cases} \frac{1-cosx}{x} & si\ x \in\ ]0;\ \pi], \\ 0\ si\ x = 0. \end{cases}$

1- Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2- Etudier les variations de f sur $]0;\ \pi]$.

3- Vérifier que $f(\delta) = sin\delta$.

4- On donne $\delta = 2{,}34$ et $f(\delta) = 0{,}72$. Construire (C) la courbe de f.

III. Apprentissage à l'intégration

Exercice 1 :

Exercice 2 :

IV. Activités d'intégration

Situation 1 :

Trois usines A, B et C fabriquent des machines agricoles. L'usine A peut produire en un mois entre 0 et 40 machines ; L'usine B peut produire en un mois entre 0 et 50 machines ; L'usine C peut produire en un mois entre 40 et 160 machines. On a modélisé le bénéfice de chaque usine A, B et C exprimé en milliers de francs par les fonctions respectives $f; g\ et\ h$. Le bénéfice réalisé par l'usine A est modélisé par la fonction f définie pour tout nombre réel $x \in [0; 40]$ par : $f(x) = -30x^2 + 1200x + 4000$. Le bénéfice réalisé par l'usine B est modélisé par la fonction g définie pour tout nombre réel $x \in [0; 50]$ par $g(x) = x^3 - 96x^2 + 248x - 10000$. Le bénéfice réalisé par l'usine C est modélisé par la fonction h définie pour tout nombre réel $x \in [40; 160]$ par $h(x) = -x + 2000 - \frac{6400}{x}$.

Taches :

1- Déterminer le bénéfice maximal de l'usine A ainsi que le nombre de machines produites pour réaliser ce bénéfice.

2- Déterminer le bénéfice maximal de l'usine B ainsi que le nombre de machines produites pour réaliser ce bénéfice.

3- Déterminer le bénéfice maximal de l'usine C ainsi que le nombre de machines produites pour réaliser ce bénéfice

Situation 2 :

Une voiture placée en un point M se déplace sur une route. Marie décide d'étudiée le mouvement sur un intervalle de 0 à 4h de temps. L'abscisse de la voiture a l'instant t est donnée par : $f(t) = -t^3 + t^2 + 8t + 1$; sa vitesse par : $v(t) = f'(t)$ et son accélération $a(t) = f''(t)$. Marie se rappelle que sur un intervalle de temps, le mouvement est accéléré si $v(t) \times a(t) \geq 0$ et retardé si $v(t) \times a(t) \leq 0$.

Taches :

1- Démontrer que l'abscisse de M est nulle a un instant $t_0 \in [0; ,4]$. (Vous préciserez exactement l'intervalle de deux temps consécutifs ou t_0 appartient).

2- Déterminer l'abscisse et l'accélération de la voiture a l'instant ou sa vitesse est maximale.

3- Déterminer les intervalles de temps sur lesquels le mouvement de la voiture est accéléré ou retardé.

« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 5 : SUITES NUMERIQUES

Savoir-faire :

- ✓ **Utiliser le raisonnement par récurrence pour démontrer certaines propriétés sur N**
- ✓ **Etudier la monotonie d'une suite numérique**
- ✓ **Justifier qu'une suite numérique est minorée, majorée ou bornée**
- ✓ **Montrer sans déterminer sa limite qu'une suite numérique est convergente**
- ✓ **Etudier la convergence des suites définies par une formule de récurrence**
- ✓ **Utiliser l'inégalité des accroissements finies pour donner une valeur approchée de la limite d'une suite numérique définie par une forme de récurrence**
- ✓ **Suite arithmétique, suite géométrique.**

I-Exercices de fixation

Ressource 1 : Raisonnement par récurrence

📖 EXERCICE1 : **Démontrer par récurrence les propriétés suivantes**

(P) : $\forall n \in N^*$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots\dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(Q) : $\forall n \geq 3$, $1 + 2 + 3 + \dots\dots + (n-2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$

(R) : $\forall n \in N^*$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(S) : $\forall n \in N$, $2^n > n$

(T) : $\forall n \in N$, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11

(U) : $\forall n > 3$, $n^2 \leq n!$

(V) : $\forall n > 3$, $2^n \geq n^2$

(W) : $\forall n > 0, 2^{n-1} \leq n!$

(Y) : Soit x un nombre positif ou nul, n un entier naturel non nul.

Démontrer par récurrence que $(1+x)^n \geq 1+nx$

📖 EXERCICE 2 :

1- Déterminer les dérivées première (f '), seconde(f'') et troisième ($f^{(3)}$) de la fonction définie sur R- {1} par $f(x) = \frac{1}{1-x}$

2- Démontrer par récurrence que : $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ où $f^{(n)}$ est la dérivée n^{ième} de f

📖 EXERCICE 3 :

Démontrer par récurrence que les dérivées n[ièmes] des fonctions sinus et cosinus sont définies pour tout x réel par :
$\sin^{(n)}(x) = \sin(x+ n\frac{\pi}{2})$; $\cos^{(n)}(x) = \cos(x+ n\frac{\pi}{2})$

✍ Ressource 2 : Sens de variation d'une suite numérique $u_n = f(n)$

☐ EXERCICE 4: Etudier le sens de variations des suites (U_n)

a) $u_n = \frac{n^2+1}{n}$, $n \geq 1$; b) $u_n = \frac{n^3-1}{n^3+1}$, $n \epsilon N$; c) $u_n = \ln(\frac{n}{1+n})$, $\forall n \epsilon N^*$; d) $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$, $\forall n \epsilon N^*$

e) $u_n = \frac{7}{3^{n+1}}$; f) $u_n = \frac{3^{2n}}{5^{n+2}}$; g) $u_n = e^{1+3n}$

✍ Ressource 3 : Suites minorées, majorées, bornées

☐ EXERCICE 5 **:**

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$

Montrer par récurrence que la suite (u_n) est minorée par 1 et majorée par 2

☐ EXERCICE 6**:**

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 \,\epsilon [0; 1] \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \end{cases}$ .Démontrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 1$

☐ EXERCICE 7**:**

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \sqrt{3 + 2u_n} \end{cases}$. Montrer par récurrence que $-1 \leq u_n \leq 3$

☐ EXERCICE 8**:**

Démontrer que les suites suivantes sont bornées

a) $v_n = \frac{2n+\sin n}{n^2}$, $n \geq 1$; b) $w_n = \frac{2n-3}{5n-2}$, $n \geq 1$; c) $t_n = \ln(n+1) - \ln(n)$, $n \geq 0$

✍ Ressource 4 : Convergence d'une suite

📖 EXERCICE 9**:** Etudier la convergence des suites suivantes.

b) $u_n = \frac{n^2+1}{n}$, $n \geq 1$; b) $u_n = \frac{n^3-1}{n^3+1}$, $n \epsilon N$; c) $u_n = \ln(\frac{n}{1+n})$, $\forall n \epsilon N^*$; d) $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$, $\forall n \epsilon N^*$

e) $u_n = \frac{7}{3^{n+1}}$; f) $u_n = \frac{3^{2n}}{5^{n+2}}$; g) $u_n = e^{1+3n}$; h) $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$; i) $u_n = n(1 - e^{\frac{1}{n}})$

📖 EXERCICE 10**:**

Soit (u_n) la suite définie par : $u_1 = 3$ et $3u_{n+1} = u_n + 12$

1- Montrer que la suite (u_n) est croissante
2- Montrer que la suite (u_n) est majorée par 6
3- En déduire la convergence de la suite (u_n)

📖 EXERCICE 11**:**

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n-1}{2u_n+5} \end{cases}$

1- Montrer par récurrence que la suite (u_n) est minorée par $-\frac{1}{2}$

2- Étudier les variations de la suite (u_n).

3- En déduire la convergence cette suite puis déterminer sa limite

EXERCICE 12:

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = ln\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)$

1- Calculer u_1 et u_2

2- Calculer la limite de u_n

3- Soit (S_n) la suite définie par $S_n = u_0 + u_1 + ………….+ u_n$

   a- Calculer S_n en fonction de n

   b- En déduire la limite de la suite (S_n).

EXERCICE 13:

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

4) Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante

1- On pose $S_n = u_1 + u_2 + ………….+ u_n$

   a- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul on a : $S_n = ln\left(\frac{1}{n+1}\right)$

   b- En déduire la limite de S_n

EXERCICE 14:

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par

$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + …………. + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

1- Démontrer que $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

2- En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 15:

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + …………. + \frac{1}{n}$

1- Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n on a : $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n}$

2- Déduire que pour tout entier naturel non nul on a $u_n \geq \ln(n+1)$

3- Prononcez-vous sur la convergence de cette suite

Resource 5 : Suite arithmétique, suite géométrique

EXERCICE 16:

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3} \end{cases}$

1.Montrer que pour tout n entier naturel on a $u_n \neq 1$

2. On pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$. Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique dont vous préciserez la raison et le premier terme.

- Exprimer v_n en fonction de n
- Exprimer u_n en fonction de v_n puis u_n en fonction de n

- On pose $A_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots\ldots + v_{n-1}$ et $B_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots\ldots + u_{n-1}$

  Calculer A_n puis B_n en fonction de n

📖 EXERCICE 17**:**

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1 \end{cases}$

1- On pose $v_n = u_n + a$. Déterminer la valeur de a pour laquelle la suite (v_n) est géométrique de raison et premier terme à déterminer

2- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

3- On pose $S_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots\ldots + v_{n-1}$ et $T_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots\ldots + u_{n-1}$

   Calculer S_n puis T_n en fonction de n

II-Exercices de consolidation

📖 **Exercice 18** : QCM

Dans chacun des questions suivantes, une ou plusieurs réponses peuvent être exactes

1- n désigne un nombre entier naturel non nul ; la suite (u_n) admet une limite lorsque :

   a- $0 < u_n < \frac{1}{n}$

   b- $|u_n| < e^{-n}$

   c- $u_n > \ln n$

2- Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour $n > 0$ par $u_n = (1,2)^n$ et $v_n = n^4$

   a- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \quad et \quad \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

   b- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$

5) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$

3- f est une fonction croissante sur R

   a- La suite de terme général f(n) est croissante

   b- La suite de terme général f(n) est convergente

   c- Si la fonction f admet une limite finie en $+\infty$, alors la suite de terme général f(n) est convergente

   d- La suite de premier terme 0 définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante

4- La suite (u_n) telle que $u_n = \frac{n + \cos n}{n - \cos n}$

   a- est définie sur N

   b- est telle que $\frac{n-1}{n+1} < u_n < \frac{n+1}{n-1}$

   c- admet pour limite 1

📖 **Exercice 19** :

Soit la suite réelle u définie par son premier terme $u_0 = 3$ et par la relation de récurrence

$u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$, pour tout nombre entier naturel n.

1- Démontrer que tous les termes de la suite sont positifs
2- Si la suite est convergente, démontrer que sa limite l est solution de l'équation $x^2+x-2=0$
3- Soit la suite v de terme général $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$. Démontrer que la suite v est géométrique, convergente et déterminer sa limite
4- Déduire que la suite u converge et déterminer sa limite

📖 **Exercice 19** :

1- Justifier pout tout nombre entier naturel n, l'existence de l'intégrale : $2\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}dx$.

On pose $u_n = 2\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}dx$. (On ne cherche pas à calculer u_n)

2- Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{1+n}$
3- Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$
4- En déduire que cette suite converge et déterminer sa limite

📖 **Exercice 20**

On se propose d'étudier la convergence de la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{u_n+2} \end{cases}$

1- Soit f la fonction définie pour tout x compris entre 0 et 1 par $f(x) == \frac{e^x}{x+2}$
   a- Déterminer $f'(x)$ et $f''(x)$
   b- Etudier le sens de variation de f. Déduire l'image de l'intervalle [0 ;1] par f
2- Démontrer que, pour tout nombre x de l'intervalle [0 ; 1], $0.25 < f'(x) < \frac{2}{3}$
3- Démontrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique, α, dans l'intervalle [0 ; 1]
4- Démontrer que, pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$, puis que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$
5- En déduire la limite de la suite u

📖 **Exercice 21**

6) L'objet de l'exercice est la détermination d'une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = x$, où f est la fonction définie sur]0 ;+∞[par $f(x) = e^{\frac{1}{2x}}$

1-
   a- Démontrer que la fonction f est décroissante sur $]0\ ;+\infty[$, puis déduire le sens de variation de la fonction g définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$
   b- Déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha > 0$, telle que $\frac{5}{4} < \alpha < \frac{3}{2}$

2-

a- Prouver que pour tout x dans l'intervalle J = $[\frac{5}{4}\ ;\ \frac{3}{2}]$, $f(x)$ appartient aussi à J

b- Démontrer que pout tout élément x de J, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c- Déduire que pout tout élément x de J, $|f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

3- On considère la suite (u_n) d'éléments de J définie par $u_0 = \frac{5}{4}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

a- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n appartient à J

b- Démontrer que, pour tout entier naturel n, $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$,

c- En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $|u_n-\alpha| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$

d- Prononcez-vous sur la convergence de la suite u

e- Déterminer un entier n tel que u_n soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près. Calculer alors cette valeur approchée

Exercice 22 :

Pour tout entier naturel n≥ 1, on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-(-\sin x)^n}{1+sinx}dx$

1- Déterminer L = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+sinx}dx$

2- Montrer que $u_{n+1}-u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-sinx)^n cosxdx$, puis calculer $u_{n+1}-u_n$

3- Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$,

$u_n= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+................+\frac{(-1)^n}{n}$

4- Montrer que pour tout $n \geq 1$, $|u_n - ln2| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-sinx)^n cosx\, dx$

5- En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite

6- On pose $a_n = (2n+2)$ $(u_{n+1}-u_n)$, $b_n = \frac{(-1)^n}{u_{n+1}-u_n}$.

Montrer que la suite (a_n) est géométrique et que la suite (b_n) est arithmétique.

Exercice 23 :

1- Calculer PGCD (4^5-1 ; 4^6-1)

2- Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $\forall n \epsilon N$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$

a- Calculer les termes u_2, u_3 et u_4

b- Montrer que $\forall n \epsilon N$, $u_{n+1} = 4u_n + 1$ et que $u_n \epsilon N$

c- En déduire pour tout $n \epsilon N$, PGCD$(u_{n+1}\ ;\ u_n)$

3- Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \epsilon N$ par $v_n = u_n + \frac{1}{3}$

a- Soit (v_n) une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c- Déterminer pour tout $n \epsilon N$, PGCD (4^{n+1}-1 ; 4^n-1)

III-Apprentissage à l'intégration

Exercice 24 :

DTSA part du Cameroun avec une somme de 675000FCFA. Il doit visiter n pays d'Afrique. Sachant que le taux d'échange est de 15% à chaque frontière et que tous les frais de séjour sont pris en charge par ses amis dans chaque pays.

1- Combien lui reste-t-il au troisième pays
2- Combien de pays doit-il visiter pour qu'au retour dans son pays, il lui reste au moins 200000FCFA. On suppose que pour retourner au Cameroun, DTSA suit l même itinéraire qu'à l'allée, mais dans le sens inverse.

Exercice 25 :

(Au moyen-Âge, en 1202, Fibonacci pose le problème suivant dans le « Liber A bacci »)

« Un homme place un denier à intérêts composés à un taux tel qu'il possède 2 deniers en 5 ans et que tous les 5 ans son avoir double.

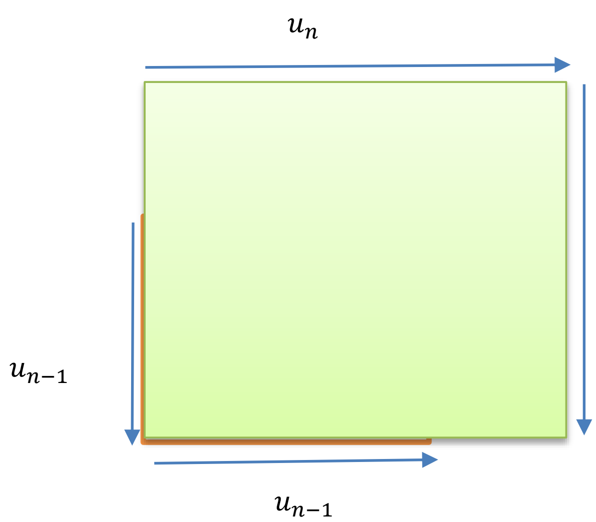
Combien aura-t-il gagné de deniers à partir d'un seul en 100 ans ?

IV-Activités d'intégration

Situation 1 :

L'unité de longueur est le centimètre

Le but de cet exercice est de calculer l'aire de la partie grisée pour n = 2020



On pose $u_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n$

On considère la suite (u_n) de termes général u_n. Sur la figure ci-dessus, le domaine grisé est délimité par les carrés de côtés u_n et u_{n-1} respectivement.

1- Exprimer u_n en fonction de n.

2- Démontrer par récurrence que $1^3 + 2^3 + \ldots\ldots\ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots\ldots\ldots + n)^2$

3- Calculer l'aire de la partie grisée puis calculer cette aire pour n = 2020

📖 **Situation 2** :

On désigne par inflation une hausse de prix généralisée due à un déséquilibre entre l'offre et la demande globale des biens et des services disponibles sur le marché. C'est aussi une augmentation excessive.

Dans un pays d'Afrique en difficulté, le taux d'inflation triple chaque année. On a remarqué que le taux d'inflation globale sur les deux premières années est de 5,07%.

1- Déterminer le taux d'inflation de la première année
2- Déterminer le taux d'inflation de la cinquième année
3- Dans combien d'année le taux d'inflation sera supérieur à 10% ?

« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »
ENSEIGNANT : **M. MBA WAFO ALEXANDRE.**
TEL **655595681 / 679446655** ………

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023

TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : TLED&TI
DUREE : ……. HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 6 : PRIMTIVES D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE

Savoir-faire :

- ✓ **Montrer qu'une fonction F est une primitive sur l'intervalle I, d'une fonction f continue sur I.**
- ✓ **Déterminer la primitive d'une fonction continue sur un intervalle I, qui prend la valeur a en b.**
- ✓ **Déterminer une primitive de :**
  $\boldsymbol{x \mapsto a\,x^r (r \in Q - \{-1\})\,;\, x \mapsto A\cos(ax+b)\,;\, x \mapsto A\sin(ax+b)\,;\, x \mapsto \cos^n(x)\,;\, x \mapsto \sin^n(x)\,;}$
  $\boldsymbol{x \mapsto \frac{a}{(cx+d)^r} (r \in Q - \{-1\})\,;\, au'u^r (r \in Q - \{-1\})}$

I-Exercices de fixation

Ressource 1 :

Montrer qu'une fonction F est une primitive sur l'intervalle I, d'une fonction f continue sur I.

EXERCICE 1:

Pour chacune des fonctions f ci-dessous, justifier que F est une primitive de f sur I ou non.

a) $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 20$ avec f(x)= $3x^2$-4x+5 sur I=IR ;

b) $F(x) = \frac{1}{15}(3x+2)^5$ avec f(x)= $(3x+2)^4$ sur I=IR ;

c) $F(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x^3 - 3x + 2}$ avec f(x)= $(x^2-1)\sqrt{x^3 - 3x + 2}$ sur I=IR

d) $F(x) = x^2 + x^3 - 7x + 50$ avec $f(x) = 2x + 3x^2 - 7$ sur I=IR ;

e) $F(x) = x^2 - x^4 - 1$ avec $f(x) = x - 4x^3$ sur I=IR ;

f) $F(x) = sinx + 2cosx$ avec $f(x) = \cos x - 2\sin x$ sur I= $[0; \pi[$;

g) $F(x) = 3cosx + tanx + 20$ avec $f(x) = -3\sin x + 1 + \tan^2 x$ sur I= $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

h) $F(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} + sinx + \frac{7\pi}{6}$ avec $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} + \cos x$ sur I= $]0; 2\pi[$.

EXERCICE 2:

Après avoir justifié que les fonctions suivantes sont continues sur I ; déterminer leur primitive sur I.

1-$f: x \mapsto 2x(x^2+3)^3$ sur I=IR

2- $g: x \mapsto \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}$ sur I=IR

3- $h: x \mapsto cosxsin^3x$ sur I=

4- $i: x \mapsto \frac{3x^2}{(x^3+1)^3}$ sur I= $]-1;\ +\infty[$

5- $f: x \mapsto \frac{x^4+2x^2-1}{x^2}$ sur I= $]0;\ +\infty[$

6- $g: x \mapsto (x+1)(2x-3)^2$ sur I=IR

7- $h: x \mapsto \sqrt{x+1}$ sur I= $]-1;\ +\infty[$

8- $i: x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x-3}$ sur I= $]3;\ +\infty[$

Ressource 2 : Déterminer la primitive d'une fonction continue sur un intervalle I, qui prend la valeur a en b

EXERCICE 1 :

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes qui prend la valeur 4 en 1:

$f(x)= 3x$; $g(x)= 5x^3-3x+2$; $h(x)= 4(2x-7)^2$; $i(x)= \frac{5}{(5x+3)^2}$; $l(x)= \frac{x^4-x+1}{x^4}$

$m(x)= \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

EXERCICE 2 :

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes qui prend la valeur a en b

1- $f: x \mapsto \frac{x}{(x^2+1)^3}$ avec a= ¼ et b = 2

2- $g: x \mapsto (x^2+1)(x^3+3x-2)^4$ avec a= 12 et b = 0

3- $h: x \mapsto sinxcos^2x$ avec a= 1/8 et b = $\frac{\pi}{4}$

4- $i: x \mapsto \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ avec a= 1 et b = 0.

II-Exercices de consolidation

EXERCICE 1 :

1) Déterminer les primitives F de f sur l'intervalles K indiqué dans chacun des cas :

a) $f(x) = 3x^2 - x + 7$ K=IR; **b)** $f(x) = \cos x - 5\sin x$ $K = [0;2\pi]$; **c)** $f(x) = \sin\frac{x}{2} - 5\cos 4x$ $K = [0;2\pi]$; **d)**

$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 1$ $K =]0;+\infty[$

2) On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \cos x - x\sin x$ et $g(x) = x\cos x$

a) Justifier que f admet une primitive sur IR.

b) Calculer la dérivée de g sur IR. En déduire une primitive de f sur IR.

c) Déterminer la primitive de f sur IR qui la valeur 1 en $\frac{-\pi}{3}$

🕮 EXERCICE 2 :

1) Déterminer les primitives F de f sur l'intervalles K indiqué dans chacun des cas :

a) $f(x)=3\cos\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)$ K=IR**;** **b)** $f(x)=7\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)$ $K=[0;2\pi]$; **c)** $f(x)=\frac{3}{8}\sin 12x$ $K=[0;2\pi]$;

d) $f(x)=2x\cos^2 x$ K=IR

e) $f(x)=\sin^2 x$ $K=]0;+\infty[$

2) On considère les fonctions f et g définies par $f(x)=\sin^4 x$ et $g(x)=\cos^5 x$

a) Linéariser f et g.

b) Déduire une primitive de f puis une primitive de g sur IR.

c) Déterminer la primitive de f sur IR qui la valeur 1 en $\frac{\pi}{2}$

🕮 EXERCICE 3

1) Déterminer les primitives F de f sur l'intervalle K indiqué dans chacun des cas :

a) $f(x)=3x^2(x^3+1)^4$ **,** $K=]0;+\infty[$ **;** **b)** $f(x)=\cos x\sin^3 x$, $K=[0;2\pi]$; **c)** $f(x)=\frac{4x+6}{\left(x^2+3x-1\right)^{\frac{3}{2}}}$,

$K=]1;+\infty[$;

d) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{-x+1}}$, $K=]-\infty;1[$; **e)** $f(x)=\frac{2}{(4x-3)^5}$, $K=\left]\frac{3}{4};+\infty\right[$.

2) On considère la fonction f définie par $f(x)=(1+\tan^2 2x)\tan 2x$

a) Déterminer les primitives de f sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$.

b) Déduire la primitive de f sur $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$ qui prend la valeur 1 en 0.

🕮 EXERCICE 4

I- f est une fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{4x^3-3x}{(2x-1)^2}$

1- Ecrire f sous la forme $f(x)=ax+b+\frac{c}{(2x-1)^2}$

2- Déterminer les primitives de f sur $[1;+\infty[$

1- En déduire la primitive de f qui s'annule en 1.

II- Soit $f: x\to sin^2xcos^3x$

1- Démontrer que $pour\ tout\ x\epsilon IR,\ f(x)=cosx(sin^2x-sin^4x)$

2- Déterminer alors toutes les primitives de f sur IR

3- En déduire la primitive F de f sur IR qui prend la valeur $-\sqrt{2}$ en $-\pi$

III-Apprentissage à l'intégration

EXERCICE :

L'expression de l'accélération d'un automobiliste est définie par la fonction $\boldsymbol{a(t) = 2t + 1}$ à un instant t donné. ($\boldsymbol{t}$ étant le temps en secondes et $a(\boldsymbol{t})$ **en m/s²**).

1) Détermine l'expression de la vitesse instantanée v(t) de l'automobiliste avec $v(0) = 25$.
2) Détermine l'expression de la distance x(t) parcourue par l'automobiliste à un instant.
3) Détermine alors la distance parcourue par l'automobiliste 1heure après son départ.

IV-Activités d'intégration

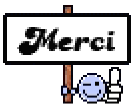
SITUATION

On appelle couverture réseau de rayon r la surface de disque de rayon r et de centre le point de fixation d'un pilonne. Le plan terrestre est muni d'un repère complexe $(O;\ \vec{u}; \vec{v})$. La couverture réseau d'une société de téléphonie au quartier Yassa est donnée par l'ensemble (C) des points M d'affixes z tel que $\boldsymbol{|z - 4 - 3i| \leq 3}$. Par ailleurs, dans ce quartier, le bloc 1 est delimité par un espace de forme triangulaire dont les sommets sont les solutions de l'équation $\boldsymbol{z^3 - (5 + 7i)z^2 - (4 - 25i)z - 12i + 30 = 0}$ l'un des sommets ayant pour affixe 2i.

Alex, un habitant de ce quartier a commencé à enregistrer sa consommation journalière de mégabits (données mobiles). L'évolution journalière de cette consommation modélisée par la fonction $\boldsymbol{f(x) = 5\sqrt{x^2 - 4}}$ où f(x) est le nombre de centaine de mégabits consommé x jours $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{2}, +\infty[$. Un matin Alex décide de faire du footing la loi horaire d'évolution de sa vitesse en fonction du temps ($\boldsymbol{t\ en\ heure}$) est définie par : $\boldsymbol{V(t) = 50 - 25t}$. ($V\ en\ dam/h$).

TACHES

1. Le BLOC 1 est -il entièrement couvert par le réseau de cette société ?
2. Existe-t-il un nombre limité de mégabits journalier que pourra consommer Alex au fils du temps ?
3. Déterminer la distance totale en Km qu'aura parcouru Alex à la fin du footing.



« La première règle de la réussite : ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 7 : FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Savoir-faire :

- ✓ **Résoudre des équations et inéquations où intervient ln**
- ✓ **Déterminer les limites des fonctions où intervient ln**
- ✓ **Dériver des fonctions où intervient ln**
- ✓ **Déterminer des primitives sur un intervalle des fonctions de type $\frac{u'}{u}$**
- ✓ **Étudier et représenter des fonctions où intervient ln**
- ✓ **Étudier et représenter des fonctions où intervient ln_a**

I-Exercices de fixation

Ressource 1 : Résoudre des équations et inéquations où intervient ln

EXERCICE 1:

1) Calculer y sachant que :
$\ln y = \ln(7+5\sqrt{2}) + 8\ln(\sqrt{2}+1) + 7\ln(\sqrt{2}-1)$
2) Démontrer l'égalité : $\frac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1) = \frac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)$
3) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :
$f(x) = \ln|x^2-4x+3|$; $g(x) = \ln\left(\frac{x^2+5x+6}{x-1}\right)$ $h(x) = \ln[\ln(5x^2+3x-25)]$; $k(x) = \frac{\ln x+4}{\ln(x-1)-2}$

EXERCICE 2:

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes
   a) $\ln\sqrt{x+4} + \ln\sqrt{x-1} = \ln\sqrt{6}$
   b) $\ln[\ln(x-1)(x^2-x-1)] = \ln[\ln(8x+1)]$
   c) $2\ln^2 x - 3\ln x + 1 = 0$
   d) $\ln^2(2x+1) - 2\ln(2x+1) - 3 = 0$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants :
   a) $\begin{cases} \ln x + \ln y - \ln 3 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$
   b) $\begin{cases} \ln(3x+4y) - \ln 7 = \ln(2-5x) + \ln 5 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$
3) Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$
   a) $\ln(x^2-1) < 0$
   b) $\ln x - \frac{1}{\ln x} < \frac{3}{2}$
   c) $\ln\left|\frac{x-3}{2x-5}\right| - \ln 2 \geq 0$
   d) $2\ln^2 2x - 5\ln 2x + 3 \leq 0$

Ressource 2 : Déterminer les limites des fonctions où intervient ln

EXERCICE 3:

1- Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(3x-\sqrt{x^2+1}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\ln x\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$ g) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+}\left(\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{2x-1}{2x+1}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(2x+1)}{3x}$

2- Etudier les branches infinies des fonctions suivantes :

a) $f(x)=2x-1+\ln(-x+1)$ b) $g(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$ c) $h(x)=\frac{\ln^2 x+\ln x-2}{\ln x+3}$

Resource 3 : Calculer la dérivée des fonctions où intervient ln

EXERCICE 4**:**

Calculer la dérivée des fonctions suivantes puis dresser leur tableau de variation :

a) $f(x)=\frac{x+\ln x}{x^2}$ b) $g(x)=-x+(x+1)\ln x$ c) $h(x)=1-\frac{1}{x}+\ln x$ d) $t(x)=\frac{\ln x}{x-\ln x}$

d) $t(x)=(x+2\ln(x-1))^2$

Resource 4 : Déterminer des primitives sur un intervalle des fonctions de type $\frac{u'}{u}$

EXERCICE **:**

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$; b) $g(x)=\frac{x}{\ln x}$; c) $h(x)=\frac{2}{x+3}$; d) $l(x)=\frac{2x-3}{x+1}$; $e)$ $k(x)=\frac{x+2}{(x-1)(x+3)}$; f) $p(x)=\frac{2x^2-3x+1}{x+2}$

Resource 5 : Étudier et représenter des fonctions où intervient ln

EXERCICE **:**

Étudier les variations des fonctions suivantes

a) $f(x)=1-\frac{1}{x}+\ln x$ b) $g(x)=x-x\ln(x+1)$ c) $h(x)=\frac{x-\ln x}{\ln x}$

Resource 6 : Étudier et représenter des fonctions où intervient ln_a

EXERCICE :

1- Soient a, b et M trois nombres réels strictement positifs et différents de 1. Montrer que $\ln_a M=\frac{\ln_b M}{\ln_b a}$

2- Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $\ln(x+1)=\ln_2 3$ b) $\ln_2 x=3$ c) $-\ln_{10} x=7\ln_5 5$

3- Étudier puis représenter graphiquement les fonctions suivantes : $f(x)=\ln_2 x$ et $g(x)=\ln_{\frac{2}{3}} x$ puis

Déduire les courbes des fonctions $h(x)=\ln_{\frac{1}{2}} x$ et $k(x)=\ln_{\frac{3}{2}} x$

II-Exercices de consolidation

Exercice 1 :

On considère les fonctions $f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$; $g(x)=-x+(x+1)\ln x$

1- Préciser l'ensemble de définition des fonctions f et g puis déterminer les limites aux bornes de leur ensemble de définition.

2- Etudier leur branche infinie

3- Calculer les dérivées puis dresser le tableau de variation

4- Construire les courbes et les asymptotes s'il y a lieu

📖 **Exercice 2** :

On considère les fonctions $f(x) = \frac{\ln x}{x - \ln x}$; $g(x) = x - 1 + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

1- Préciser l'ensemble de définition des fonctions f et g puis déterminer les limites aux bornes de leur ensemble de définition.

2- Etudier leur branche infinie

3- Calculer les dérivées puis dresser le tableau de variation

4- Construire les courbes et les asymptotes s'il y a lieu

📖 **Exercice 3** :

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 + \dfrac{1}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - (\ln x)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

1) a- Après avoir donné le domaine de définition de f, étudier la continuité et la dérivabilité de f au point d'abscisse 1.
b- Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les branches infinies de la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f.
a- Etudier les variations de f et dresser son tableau des variations.
b- Démontrer que le point d'abscisse e est le point d'inflexion de $(\mathcal{C})$ et tracer soigneusement $(\mathcal{C})$.

2) Soit h la restriction de f à l'intervalle $\left]1;+\infty\right[$.

a- Démontrer que h réalise une bijection de $\left]1;+\infty\right[$ vers un intervalle que l'on précisera.
b- En déduire que h admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera son sens de variation et son tableau des variations.
c- Tracer la courbe de h^{-1}.

📖 **Exercice 3**

f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \; si \; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan (P) muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

1- Soit D l'ensemble de définition de f.

a) Démontrer que $D = [0\,;+\infty[$.

b) Démontrer que f est continue sur D.

c) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0.

Donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

2- Pour t élément de $]0;1[$, on pose : $\varphi(t) = f\left(\frac{1}{t} - 1\right)$

a) Démontrer que $\varphi(t) = \frac{(1-t)^2}{t} \times \frac{\ln(1-t)}{t}$

b) A l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{x+1}$, démontrer que : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3- On admet qu'au voisinage de 0, on a : $\ln(1-t) \cong -t - \frac{1}{2}t^2$

a) Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif x :$f(x) + x - \frac{1}{2} = \left(\frac{1-t}{t}\right)^2 \ln(1-t) + \frac{1}{t} - \frac{3}{2}$

avec $t = \frac{1}{x+1}$

b) En déduire que : $\lim_{x \to +\infty} f(x) + x - \frac{1}{2} = 0$

4- On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = 2x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}$

a) Étudier le sens de variation de g.

b) Déterminer les limites de g en 0 par valeurs supérieures et en $+\infty$

c) En déduire que : $\forall x \in]0\,;\,+\infty[, g(x) < 0$.

5. a) Justifier que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que : $\forall x \in]0\,;+\infty[, f'(x) = xg(x)$.

b) En déduire que f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$

c) Dresser le tableau des variations de f.

d) Construire la courbe (C).

Exercice 4 :

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$: \begin{cases} f(x) = x\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) & si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan (P) muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 5 cm).

Partie A

Soit la fonction numérique g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1}$

1. a) Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a : $g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$

   b) Étudier le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.

2. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to 0^+} g(x)$

3. a) Dresser le tableau des variations de g.

   b) En déduire que l'équation : $g(x) = 0$, admet une solution unique α et que: $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.

4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

5. a) Démontrer que, pour tout x élément de $]0\,;\,+\infty[$ on a : $f'(x) = g(x)$.

   b) En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

6. On pose $k(x) = xf(x)$ pour tout x élément de $]0\,;\,+\infty[$.

a) Calculer $\lim_{x \to +\infty} k(x)$ (on pourra poser $h = \frac{1}{x^2}$)

b) En déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

7. a) Démontrer que f est continue à droite en 0. (On pourra écrire $x\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = x\ln(x^2+1) - 2x\ln x$)

   b) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Donner une interprétation géométrique du obtenu.

8. a) Dresser le tableau des variations de f.
   b) Donner l'allure de la courbe (C) (on prendra $(\alpha) \approx 0{,}805$).

III-Apprentissage à l'intégration

Exercice 1 :

La fonction des ventes des services d'une entreprise de la place en fonction du nombre d'employé est donnée par $f(x) = 2\ln(x+1)$ en million de francs

La fonction des charges de cette même entreprise en fonction du nombre d'employé est donnée par $g(x) = x - \ln(x+1)$ en million de francs

On pose $B(x)$ la fonction bénéfice de cette entreprise

1) justifier que pour que l'entreprise réalise un bénéfice « positif » il faut qu'elle emploie au plus 5,71 million d'employés.
2) déterminer le nombre d'employés à embaucher par cette entreprise pour réaliser un bénéfice maximal et préciser ce bénéfice maximal (en million)

Exercice 2 :

L'évolution du nombre de bactérie dans un milieu de culture en fonction du temps est donnée par la fonction : $f(t) = \frac{t-\ln t}{\ln t}$ à partir de la troisième heure de l'étude où $f(t)$ est en millier et $t > 3$ en heure

1) préciser l'ensemble de définition de f
2) combien de temps faudra-t-il pour avoir 4 milles bactéries ?

IV-Activités d'intégration

Situation 1 :

Un cabinet d'étude de projet se penche sur une opportunité d'investissement qui a intéressé un de leur client (un investisseur). Les seuls informations dont ils disposent sont :

La fonction des ventes des services de l'entreprise en fonction du nombre d'employé est donnée par $f(x) = 5\ln(x+1)$ en million de francs

La fonction des charges de cette même entreprise en fonction du nombre d'employé est donnée par $g(x) = \frac{x^2}{x+1}$ en million de francs

L'investisseur dispose d'une somme de 3 millions de Francs. la préoccupation de l'investisseur est de savoir si ses fonds sont suffisant pour investir dans ce projet et avoir le bénéfice maximal.

Tâche : Déterminer la somme a investir pour avoir le bénéfice maximal puis répondre à l'investisseur

Situation 2 :

Dans un laboratoire deux molécules A et B sont testées. Les résultats montrent que les fonctions de destructions des pathogènes en fonction du temps sont les suivantes:

$N_A(t) = \frac{3}{x+1}$

$N_B(t) = 1{,}5 \times \frac{x+2+\ln(x+2)}{(x+2)\ln(x+2)}$

Où $N_A(t)$ et $N_B(t)$ représente le nombre de pathogène en centaine à un temps t en heure.

Le pathogène est détruit lorsque son nombre est inférieur à 100.

Le laboratoire souhaite connaitre la molécule la plus performante. Les tests sont faits sur 6 heures.

Tâche :

Dire laquelle des molécules est la plus performante

Situation 3 :

Les bénéfices d'une entreprise sont donnés par la fonction $B(t) = \frac{\ln(t+1)}{t+1}$ où $B(t)$ est exprimé en million et t en jours.

Tâche :

Déterminer le bénéfice après 7 jours de fonctionnement.

« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »
ENSEIGNANT : FABRICE NGUIAMBA NZITCHOUM
TEL : 655293909 / 670703140……….

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023

TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : TC
DUREE : ……. HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 8 : FONCTIONS EXPONENTIELLES ET PUISSANCES

Savoirs :

- **Fonction exponentielle népérienne**
- **Présentation et propriétés : équations et inéquations dans lesquelles intervient exp**
- **Limites ; Dérivée de e^u , primitives de $u'e^u$.**
- **Etude de quelques fonctions définies à l'aide de exp.**
- **Fonction $\exp_a$, $a > 0$.**
- **Fonctions du type $x \longmapsto x^\alpha$**

Savoir-faire :

- **Résoudre des équations et inéquations dans lesquelles intervient exp.**
- **Déterminer les limites des fonctions dans lesquelles intervient exp.**
- **Dériver des fonctions contenant exp.**
- **Déterminer sur un intervalle des primitives des fonctions $u'e^u$.**
- **Etudier et représenter graphiquement des fonctions contenant exp.**
- **Etudier et représenter les fonctions : $\longmapsto a^x$; $x \longmapsto x^\alpha$.**

I-Exercices de fixation

🕮 EXERCICE 1 :

Simplifier l'écriture des nombres réels suivants :

$a = e^{ln9}$ $\quad b = e^{-ln5}$ $\quad c = e^{2+ln3}$ $\quad d = e^{\frac{1}{2}-ln8}$ $\quad f = e^{1-ln7}$ $\quad g = ln\sqrt{e^{11}}$

🕮 EXERCICE 2 :

QCM : Pour chaque question, une seule réponse est correcte, dire laquelle sans justification :

1) L'ensemble des solutions de l'équation $e^x = 1$ est :
   a) $\{1\}$ b) $\{0\}$ c) $\{-1\}$ d) $\emptyset$
2) La courbe représentative de la fonction exponentielle a une……..
   a) tangente verticale b) tangente horizontale c) asymptote verticale d) asymptote horizontale
3) $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - e^{-x})$ est égale à :
   a) 1 b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) 0
4) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = e^{-x}$ est la fonction $f'(x)$ égale à :
   a) $\frac{1}{e^{-x}}$ b) $-e^x$ c) $-\frac{1}{e^x}$ d) e^{-x}
5) Soit la fonction g définie sur $]0;8[$ par $g(x) = 8 - xe^{x-8}$
   a) g est croissante sur $]0;8[$ b) g est décroissante sur $]0;8[$ c) $g'(x) = (1+x)e^{x-8}$

6) Le réel $e^{-3\ln(\frac{1}{2})}$ est égale à :

a) $-\frac{1}{8}$ b) 8 c) -6

7) L'équation $e^x = \frac{1}{e}$ est équivalente à : a) $x = -1$ b) $x = lne$ c) $x = e$

EXERCICE 3 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

a) $e^{2x}+3e^{x}-28=0$ b) $e^{x}+3e^{-x}-4=0$ c) $e^{3x}-3e^{2x}-e^{x}+3=0$

d) $3e^{x}-7e^{2x}+20=0$ e) $3e^{x}-7e^{2x}+20\leq 0$ f) $3e^{2x+1}+e^{x+1}-e^{1+ln2}=0$

g) $\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}-2\geq 0$ h) $e^{-x}\geq 2$ i) $e^{x^2-3}\leq e^{2x}$

j) $e^{x^2-1}<1$ k) $2e^{2x}-5e^{x}+2>0$.

📖 EXERCICE 4 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

a) $f(x)=8x^2e^x$ b) $f(x)=\left(2x+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$ c) $f(x)=xe^{\frac{2x+3}{x+1}}$

d) $f(x)=\ln(e^x-x)$ e) $f(x)=\ln(x^2-e^x)$ f) $f(x)=\frac{e^x}{lnx}$

i) $f(x)=\ln(1-e^{-x})$ j) $f(x)=x^3e^{\sqrt{1-x^2}}$ k) $f(x)=\frac{1-e^x}{x^2+e^{\frac{1}{x}}}$

📖 EXERCICE 5 :

Dans chacun des cas suivants ; préciser l'ensemble de la fonction f , puis déterminer sa fonction dérivée

a) $f(x)=e^{-2x+1}$ b) $(x)=e^{x^2}$ c) $f(x)=e^x lnx$ d) $f(x)=(1-x)e^{1-x}$

e) $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ f) $f(x)=x^2e^{-x}$ g) $f(x)=13^x$ h) $f(x)=x^x$

📖 EXERCICE 6 :

1. Soit t la fonction numérique définie par : $t(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$.

Montrer que la fonction t est impaire.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations $\ln|x-1|\leq 0$ et $2^{x-1}>sin\frac{15\pi}{4}$.

📖 EXERCICE 7 :

Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. a) $f(x)=\frac{\sqrt[6]{x}}{x}$ b) $f(x)=\frac{2-x^{0,3}}{x^{\sqrt{2}}}$ c) $f(x)=\left|\frac{x+1}{x}\right|^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

📖 EXERCICE 8 :

Soit la fonction $f:x\mapsto\frac{-e^x+1}{2e^x+1}$.

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=a+\frac{be^x}{2e^x+1}$
2. En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$

V. Exercices de consolidation

📖 EXERCICE 1 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{-x}$.

1) Etudier les variations de f puis établir son tableau de variation.
2) a- Résoudre l'équation $f(x)=0$ dans $\mathbb{R}$.

b- Discuter, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ dans $\mathbb{R}$.

🕮 EXERCICE 2 :

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \exp\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right), \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus |-1;1| \\ f(-1) = f(1) = 0. \end{cases}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f

1. Démontrer que f est dérivable à droite en -1 et à gauche en 1.
2. Etudier f et tracer $(\mathcal{C})$.

🕮 EXERCICE 3 :

1) Montrer que $e^{4x} - 14e^{2x} + 1 = (e^{2x} + 4e^x + 1)(e^{2x} - 4e^x + 1)$
2) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $e^{4x} - 14e^{2x} + 1 = 0$.
3) On définit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \frac{8}{1+e^{2x}}$
   a. Calculer $f'(x)$ où f' est la dérivée de f.
   b. Déterminer les limites de aux bornes du domaine de définition de f.
   c. Dresser le tableau de variation de f
   d. Montrer que la courbe (C) de f admet deux asymptotes obliques à déterminer.
   e. Construire la courbe (C) de f ainsi que ses asymptotes dans un repère orthonormé.
4) a. Montrer que $f(x) = x + \frac{8e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.
   b. en déduire la primitive F de f qui s'annule en 0.

🕮 EXERCICE 4 :

$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormé direct du plan. On considère la fonction f de courbe représentative (C_f)et définie par :
$\begin{cases} f(x) = x\ln(x) & si\ x > 0 \\ f(x) = \frac{1-2^x}{1+2^x} & si\ x \leq 0 \end{cases}$.

1. Calculer la limite en 0 de la fonction $\longmapsto \frac{1-e^{x\ln 2}}{x}$.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
3. Calculer la dérivée de f.
4. a) Dresser le tableau des variations de f.
   b) Construire soigneusement la courbe (C_f). $\underline{1\ unité\ d'axes\ \ vaut\ 2\ cm}$.
5. Soit $\mathcal{D}$ le domaine limité par (C_f) et les droites d'équation $x = -2$; $x = 0$ et $y = 0$.
   a) Montrer que pour tout nombre réel x on a : $(1 - 2^x)^2 = (1 + 2^x)^2 - 4 \times 2^x$.
   b) Calculer le volume V du solide de l'espace obtenu en faisant tourner le domaine $\mathcal{D}$ autour de l'axe des abscisses.

🕮 EXERCICE 5 :

On considère la fonction numérique f de variable réelle x définie par :$f(x) = \ln(e^x - x) - x - 1$.

1) a) Dresser le tableau des variations de la fonction g : $x \longmapsto e^x - x$.
   b) En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) a) Montrer que pour tout réel x strictement positif on a : $f(x) = \ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) - 1$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

   b) Montrer que pour tout réel x strictement négatif on a :

$f(x) = \ln(-x) + \ln\left(1 - \frac{e^x}{x}\right) - x - 1$. En déduire la limite de f en $-\infty$.

   c) Déterminer les branches infinies à la courbe de f.

3) a) Calculer la dérivée de f et dresser le tableau des variations de f.

b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α vérifiant l'égalité $e^{\alpha+1} = e^{\alpha} - \alpha$.

4) Vérifier en plus que $\alpha \in]-0,8\,;\,-0,7[$ puis tracer la courbe $(\mathcal{C})$ de f dans un repère orthonormé$(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

Unités d'axes : $1\ cm$.

📖 EXERCICE 6 :

Le repère (O, I, J) est orthonormé.

Soit la fonction $f\colon \mapsto ln|e^x|$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1.a) déterminer l'ensemble de définition D de f.

b) démontrer qu'il existe une fonction φ telle que : $\forall x\ \in \mathrm{D}, f(x) = x + \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.

c) compléter l'étude de f et tracer $(\mathcal{C})$.

2) soit g la restriction de f à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

a) démontrer que g réalise une bijection de $]0\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

b) tracer, sur le même graphique $(\mathcal{C})$, la courbe représentative $(\mathcal{C}')$ de la réciproque de g.

📖 EXERCICE 7 :

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \left|\frac{x-1}{x}\right|^{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1.
2. Etudier f et tracer $(\mathcal{C})$.

📖 EXERCICE 8 :

1) Soit a un nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes : $S\begin{cases} e^x e^{2y} = a \\ 2xy = 1 \end{cases}$ et $S'\begin{cases} 4^x 5^y = 5^{2x+1} \\ 12^x 9^y = 5^{2y+1} \end{cases}$

2) Soit m un nombre réel. Déterminer suivant les valeurs de m le nombre de solution des équations $E_1\colon (m-1)e^x + me^{-x} = 2m$ et $E_2\colon e^{2x} + 4me^x = 2m - 2$ ensuite, résous E_1 pour $m = \frac{1}{4}$ et E_2 pour $m = -1$.

📖 EXERCICE 9 :

PARTIE A

On considère la fonction *f* définie sur [10 ; 38] par $f(t) = \frac{5}{3}e^{0,18t}$.

1. a. Calculer *f'*(*t*).

b. Etudier le signe de *f'*(*t*).

c. Dresser le tableau de variation de *f* sur [10 ; 38]. On y indiquera les valeurs exactes de *f*(10) et *f*(38).

2. Reproduire et compléter le tableau suivant en donnant les résultats arrondis à la dizaine près.

t	10	20	25	30	32	35	38
f(*t*)			150			910	

3. Tracer la courbe représentative de la fonction *f* dans le plan rapporté à un repère orthogonal en prenant pour unités graphiques :

* en abscisse : 1 cm pour 5 unités ;
* en ordonnée : 1 cm pour 100 unités.

PARTIE B

Au début de la croissance d'une espèce donnée de coton, on estime que la masse exprimée en grammes, de la plante est donnée en fonction du temps *t*, exprimé en jours, par la formule : $f(t)=\frac{5}{3}e^{0,18t}$ où *t* varie de 10 à 38 .

1. En utilisant le graphique de la partie B, déterminer le jour où la masse est de 250 g. On laissera apparentes les constructions utiles.

2. Pour retrouver ce résultat par le calcul, il faut résoudre une équation.

a. Écrire cette équation.

b. Résoudre cette équation.

🕮 EXERCICE 10 :

Soit λ un paramètre réel ; f_λ et g_λ les fonctions définies par $f_\lambda(x)=\lambda 2^{-x}+2^x$ et $g_\lambda(x)=1+x-\lambda x ln|x|$

1) Etudier suivants les valeurs de λ les variations de f_λ puis tracer dans le meme repère les courbes de f_0, f_1 et f_2
2) Etudier suivants les valeurs de λ les variations g_λ puis montrer que toutes les courbes de g_λ passent par 3 points fixes à déterminer. (On montrera que l'un des points fixes A(0 ;1) est centre de symétrie

🕮 EXERCICE 11 :

Soit α un paramètre réel différent de 0; f_α les fonctions définies par $f_\alpha(x)=e^{\left(\frac{\alpha-x}{\alpha+x}\right)}$ On désigne par (C_α) la courbe représentative de f_α dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

1) Etudier les variations de f_α et dresser son tableau de variation suivant les valeurs de α
2) Déduire f_α réalise une bijection de son ensemble de définition vers un sous ensemble J de IR à préciser puis expliciter ${f_\alpha}^{-1}$

🕮 EXERCICE 12 :

PARTIE A

On considère la fonction numérique f de variable réelle x définie par :

$f(x)=\ln(e^x-x)-x-1.$

1) a) Dresser le tableau des variations de la fonction $g : x \longmapsto e^x-x$.

b) En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) a) Montrer que pour tout réel x strictement positif on a : $f(x)=\ln\left(1-\frac{x}{e^x}\right)-1.$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que pour tout réel x strictement négatif on a :

$f(x)=\ln(-x)+\ln\left(1-\frac{e^x}{x}\right)-x-1.$En déduire la limite de f en $-\infty$.

c) Déterminer les branches infinies à la courbe de f.

3) a) Calculer la dérivée de f et dresser le tableau des variations de f.

b) En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α vérifiant l'égalité $e^{\alpha+1}=e^\alpha-\alpha$.

4) Vérifier en plus que $\alpha\in]-0{,}8\,;-0{,}7[$ puis tracer la courbe $(\mathcal{C})$ de f dans un repère orthonormé$(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. $Unités\ d'axes : 1\ cm$.

PARTIE B

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=\frac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\frac{e^{u_n}}{u_n+2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. On considère la fonction h définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $h(x)=\frac{e^x}{x+2}$.

a) Étudier les variations de h, puis montrer que $h([0\,;1])\subset[0\,;1]$.

b) Démontrer que pour tout $x\in[0\,;1]$ on a : $\frac{1}{4}\le h'(x)\le\frac{2}{3}$.

c) Démontrer que l'équation $h(x)=x$ admet une unique solution $\alpha\in[0\,;1]$.

2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a :

(i) $u_n \in [0\,;1]$,
(ii) $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$,
(iii) $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

2. Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

📖 **EXERCICE 13 :** Étude géométrique d'une famille de courbes

1. k étant un nombre réel non nul, on désigne par $\boldsymbol{D_k}$ l'ensemble des solutions dans l'intervalle$]-\infty;\ +\infty[$ de l'inéquation : $\boldsymbol{e^x + k > 0}$

a. Selon k, déterminer $\boldsymbol{D_k}$(on distinguera les cas $k > 0$ et $k < 0$).
À tout réel k, on associe la fonction notée $\boldsymbol{f_k}$ définie pour $x \in \boldsymbol{D_k}$ par : $\boldsymbol{ln(e^x + k)}$

On désigne par (Ck) sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$

b. Établir le tableau de variation de $\boldsymbol{f_k}$ pour chacun des cas $k > 0$ et $k < 0$.
En déduire que pour tout réel non nul k, l'image par $\boldsymbol{f_k}$ de $\boldsymbol{D_k}$ est $\boldsymbol{D_{-k}}$.

2. a. Montrer que si $k > 0$, alors : pour tout réel x, $\boldsymbol{f_k(x + lnx) = f_1(x) + lnk}$.

b. En déduire que si $k > 0$, alors la courbe (**Ck**) représentative de la fonction $\boldsymbol{f_k}$ se déduit de (**C1**) par une transformation géométrique simple que l'on justifiera. Construire sans calcul la courbe (**C2**) représentative de f_2 dans le repère $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$

III-Apprentissage à l'intégration

📖 **Situation 1** : **Intensité d'un faisceau lumineux**

Un faisceau lumineux incident d'intensité 400 candelas traverse un filtre dont on peut faire varier l'épaisseur. La mesure I de l'intensité du faisceau émergent (exprimée en candelas) est donnée en fonction de la mesure x de l'épaisseur du filtre par $I = 400e^{-0,2x}$.

On considère la fonction numérique de la variable x définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = 400e^{-0,2x}$

1) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(x)$											

2) Etudier les variations de f puis tracer la courbe de la fonction f dans un repère orthogonal
3) Par une lecture graphique proposer une estimation de l'épaisseur lorsque l'intensité vaut 350 candelas. Retrouver ce résultat par calcul.

VI. Activités d'intégration

📖 **Situation 1** :

BOKA et SITCHOM sont deux étudiants en $1^{ère}$ année de médecine.

Pendant ses recherches sur le Net, BOKA a lu ceci : ≪ on admet que lorsqu'on injecte dans le sang une dose M d'un médicament, il reste à la date t, après élimination naturelle, la dose $Me^{-\frac{t}{24}}$. L'unité de temps est l'heure ; l'origine du temps est l'instant de l'injection ; l'unité de volume de la dose étant le cm^3. Pour diverses raisons, on ne peut injecter une dose M que toutes les 8 heures. A la dose 3,65M, le médicament devient dangereux . Après la $1^{ère}$ injection. On administre sur un patient n autres injections. SITCHOM pour savoir s'il y a un danger à poursuivre l'injection indéfiniment et au rythme précédent, aimerait trouver la formule donnant la dose contenue dans le sang après la $n^{ième}$ injection. Mais il a des difficultés compte tenu de son niveau douteux en Mathématiques.

BOKA déclare aussi avoir lu qu'après ladite $n^{ième}$ injection de ce médicament ; la dose contenue dans le sang est :$\frac{1-e^{\frac{-n}{3}}}{1-e^{\frac{-1}{3}}}M$. On suppose que cette déclaration de BOKA est avérée.

Dans un autre registre ; BOKA est content de constater que l'acidité d'une solution est mesurée par son $pH = -log[H_30^+]$, où $[H_30^+]$ désigne la concentration d'ions H_30^+(en mole par litre) dans la solution. Mais ayant aussi des difficultés en Maths, il souhaiterait pour sa très bonne formation et pour la santé de ses futurs malades, savoir utiliser cette connaissance.

Tâches :

1. Aide SITCHOM à trouver et à comprendre la formule donnant la dose contenue dans le sang après la $n^{ième}$ injection.
2. Y aurait-il un danger à poursuivre le traitement au rythme noté par BOKA lors de sa lecture ?
3. Aide BOKA à savoir comment varie le pH d'une solution lorsque sa concentration en ions H_30^+ décuple et à déterminer quelle est la concentration en ions H_30^+ d'une eau minérale gazeuse dont l'étiquette indique $pH = 6{,}3$.

Situation 2 : **Température en fonction du temps**

Dans un laboratoire de chimie, les analystes notent $\theta(t)$ la température d'une réaction chimique à l'instant t (t exprimé en heure et $\theta(t)$ en degrés Celsius). La réaction débute à 10 h du matin, heure choisie comme instant initial ($t = 0$). Les analystes admettent que la fonction θ peut être définie par $\theta(t) = (20t + 10)e^{-\frac{1}{2}t}$. L'expérience est réussie si on retrouve la même température de midi que celle entre 10h et 18h.

Tâches :

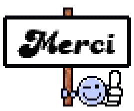
1) Quelle est la température initiale à 10h et la température à midi ?
2) Comment varie la température de 10h à 18 h ?
3) Cette expérience est-elle réussie ? Si oui préciser à quel(s) moment(s).

Situation 3 :

Un industriel évalue la dépréciation d'une machine achetée à 80 000 000 F CFA à 20% par an. Pour cela après acquisition de la machine en 2021, il souhaite connaître les valeurs résiduelles de la machine au bout des 3 premières années de son fonctionnement. Le technicien de maintenance qu'il a contacté lui a modélisé une fonction pour dix ans de fonctionnement de la machine sur l'intervalle $[0; 10]$ par $f(x) = 80\,000\,000 \times 0{,}8^x$ où x désigne le nombre d'année.

Tâches :

a) Déterminer la valeur résiduelle de la machine pour chacune des 3 premières années de son fonctionnement.
b) La fonction proposer par le technicien est-elle bien définie ? Si oui représenter la graphiquement dans un repère orthonormé.
c) Déterminer graphiquement puis par calcul le nombre d'années au bout duquel la machine n'aura plus qu'une valeur résiduelle de 10 000 000 F CFA.



« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

ENSEIGNANT : M NCHARE SOUFON ABDOULAYE
TEL : 679 32 58 93

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023

TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : Tle C&E
DUREE : HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 9 : CALCUL DES INTEGRALES

Savoir-faire :

- ✓ **Calculer l'intégrale d'une fonction usuelle ;**
- ✓ **Calculer l'intégrale d'une Somme de plusieurs fonctions et/ou d'un produit d'une fonction par un réel ;**
- ✓ **Donner le signe de $\int_a^b f(x)dx$ sur [; b] à partir de celui de f.**
- ✓ **Calculer l'intégrale d'une valeur absolue ;**
- ✓ **Étudier le sens des variations de : $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ sur un Intervalle contenant a et sur lequel f est continue, sans utiliser une primitive de f.**
- ✓ **Déterminer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle.**
- ✓ **Calculer une intégrale par L'utilisation directe des primitives, par une intégration par parties, par un changement de variable affine.**
- ✓ **Utiliser le calcul des intégrales dans la détermination des aires, de volumes.**
- ✓ **Déterminer une valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles.**

VII. Exercices de fixation

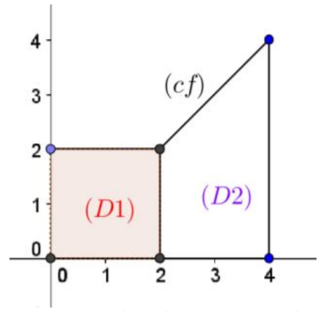
Ressource 1 : Calculer l'intégrale d'une fonction usuelle- calculer l'intégrale d'une Somme de plusieurs fonctions et/ou d'un produit d'une fonction par un réel.

EXERCICE 1 : **vrai ou faux**

1) Le résultat $\int_a^b f(t)dt$ dépend de t
2) Si f est une fonction négative et si $a < b$, alors $\int_a^b f(t)dt$ est une aire.
3) L'intégrale d'une fonction de signe quelconque est une somme d'aire
4) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ avec $a < b$, si la valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est nulle, alors, f est nulle sur $[a; b]$
5) La relation de Chasles sur les intégrales n'est valable que pour des fonctions positives
6) La relation de Chasles $\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$ n'est valable que si $a < b < c$
7) Si f est une fonction continue et négative sur $[a; b]$ avec $a < b$, alors $\int_a^b f(t)dt < 0$
8) Si m est la valeur moyenne d'une fonction continue f sur $[a; b]$, $\int_a^b f(t)dt = m(b - a)$
9) La valeur moyenne d'une fonction continue f sur $[2; 3]$ est $\int_2^3 f(t)dt$, alors
10) Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a; b]$ avec $a < b$ et si $f \leq g$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$
11) Soient f et g deux fonctions définies par $f(x) = sinxcos^2x$ et $g(x) = sinx + 5 - sin^3x$. f et g sont deux primitives d'une même fonction

📖 EXERCICE 2 : **QCM**

1) On considère la fonction f définie sur $[0;4]$ dont la courbe représentative est donnée ci-contre. L'intégrale de f entre 0 et 4 vaut :



a) $\int_0^2 1dx + \int_2^4 xdx$ b) 10 c) $\int_0^4 xdx$ d) $Aire\ (D1) + Aire\ (D1)$

e) $Aire\ (D1) - Aire\ (D2)$ f) 16

2) La valeur moyenne de la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ vaut :

a) 0 b) $\ln(2)$ c) $-0{,}5\ln(2)$

📖 EXERCICE 3 : Calculer les intégrales suivantes au moyen d'une primitive.

d) $\int_0^1 e^{2t}\,dt$ $\int_0^{-1}(e^{-2t}-1)$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sinxe^{2cosx}\,dx$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2xcos3x\,dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(tan^3x + tanx)dx$ $\int_0^4 \frac{dt}{\sqrt{2t+1}}$ $\int_{-2}^{1} \frac{2}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\,dx$ $\int_1^2 2x\sqrt{x^2+1}dx$

f) $\int_1^e \frac{lnt}{t}dt$ $\int_0^{-1}(e^{-2t}-1)\,dt$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sinxe^{2cosx}\,dx$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2xcos3x\,dx$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(tan^3x + tanx)dx$ $\int_0^4 \frac{dt}{\sqrt{2t+1}}$ $\int_{-2}^{1} \frac{2}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\,dx$ $\int_1^2 2x\sqrt{x^2+1}dx$

h) $\int_1^2 \frac{x-2}{x^2-4x+1}dx$ $\int_1^e \frac{lnt}{t}dt$ $\int_3^4 \frac{x+1}{(x^2+2x)^5}dx$ $\int_0^1 \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

Ressource 2 : Calculer l'intégrale d'une valeur absolue -Étudier le sens des variations de $f : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ sur un Intervalle contenant a et sur lequel f est continue, sans utiliser une primitive de f.

EXERCICE 1 :

Au moyen de la relation de Chasles, calculer les intégrales suivantes

a) $\int_0^1(|2-t| + |1-t|)dt$
b) $\int_0^{2\pi}(\pi - |2t-\pi|)dt$
c) $\int_{-1}^1 e^{-2|t|-1}dt$
d) $\int_0^2(1-|x-1|)^n dx$
e) $\int_0^{\pi}\left|cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right| dx$

Au moyen de la relation de Chasles, calculer les intégrales suivantes

f) $\int_0^1(|2-t| + |1-t|)dt$
g) $\int_0^{2\pi}(\pi - |2t-\pi|)dt$
h) $\int_{-1}^1 e^{-2|t|-1}dt$
i) $\int_0^2(1-|x-1|)^n dx$
j) $\int_0^{\pi}\left|cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right| dx$

Au moyen de la relation de Chasles, calculer les intégrales suivantes

k) $\int_0^1(|2-t| + |1-t|)dt$

l) $\int_0^{2\pi}(\pi - |2t - \pi|)dt$
m) $\int_{-1}^{1} e^{-2|t|-1}dt$
n) $\int_0^{2}(1 - |x - 1|)^n dx$
o) $\int_0^{\pi} \left|cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right| dx$

📖 EXERCICE 2 :

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ et g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = f(tanx)$
   a) Étudier la dérivabilité de f sur$\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée f'
   b) Déterminer g', puis g
   c) En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$

2) Dériver les fonctions suivantes.
   $f(x) = \int_x^1 ln(1 + t^2)dt$ $\qquad g(x) = \int_x^{2x} sin(t^2)dt$ $\qquad h(x) = \int_{x^2}^{x} ln(4 + cost)dt$

Resource 3 : déterminer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle.

🕮 EXERCICE 1 :

Soit $\alpha > 0$ et f la fonction définie sur $I = [1; 1+\alpha]$ par $f(t) = \frac{1}{t}$

a) Calculer le minimum, le maximum et la valeur moyenne de f sur I.

b) À l'aide de l'inégalité de la moyenne, en déduire l'encadrement : $\frac{\alpha}{1+\alpha} \leq \ln(1+\alpha) \leq \alpha$

🕮 EXERCICE 2 :

On considère la fonction f définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = e^{-x}$. Pour tout entier naturel n, on note U_n la valeur moyenne de f sur $[n; 1+n]$.

a) Donner l'expression de U_n pour tout n

b) Démontrer que $\forall\, n \in N;\ \forall x \in [n; 1+n]$, $e^{-(n+1)} \leq e^{-x} \leq e^{-n}$

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

✍ **Resource 4 : Calculer une intégrale par une intégration par parties, par un changement de variable affine.**

🕮 EXERCICE 1 :

À l'aide d'une intégration par partie, calculer les intégrales suivantes

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)cosxdx$

b) $\int_0^{\pi} (x-1)sin4xdx$

c) $\int_0^{2} (2x+1)e^{2x}dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\ln(x)dx$

e) $\int_2^{e} x^{-2}lnxdx$

f) $\int_2^{e} ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$

g) $\int_2^{3} x\sqrt{x+2}dx$

h) $\int_1^{e} x^2lnxdx$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{cos^2x}dx$

j) $\int_2^{e} ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$

🕮 EXERCICE 2 :

À l'aide d'un changement de variable affine, calculer les intégrales suivantes

a) $\int_2^{3} x\sqrt{x+2}dx$

b) $\int_{-8}^{-3} x\sqrt{x-1}dx$

c) $\int_2^{3} x^2\sqrt{2x+2}dx$

d) $\int_2^{6} \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$

e) $\int_2^{e} \frac{x^2}{(3x-4)^5}dx$

f) $\int_0^{1} x(1-x)^n dx$ $\quad n$ non nul

□ EXERCICE 3 :

À l'aide d'une double intégration par partie, calculer les intégrales suivantes

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 cosxdx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 sin2xdx$

c) $\int_0^2 (2x^2+1)e^x dx$

d) $\int_0^2 (2x^2+x-1)e^x dx$

e) $\int_2^e e^{-x} cosxdx$

f) $\int_0^1 \left(xe^{x^2}+x^2e^x\right)dx$

✍ **Resource 5** : **intégrale des fonction paires, impaires ou périodiques.**

 EXERCICE :

Justifier les égalités suivantes.

a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x - sinx)dx = 0$

b) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (-x^3 + tanx)dx = 0$

c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos4xdx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos4xdx$

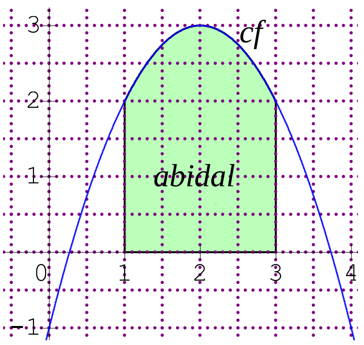
d) $\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{-5\pi}{6}} cos2xdx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} cos2xdx$

e) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} cos2xdx = \int_0^{\pi} cos2xdx$

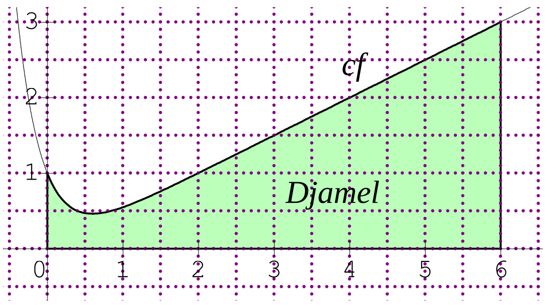
✍ **Resource 6** : **Utiliser le calcul des intégrales dans la détermination des aires, de volumes.**

🕮 Exercice 1 :

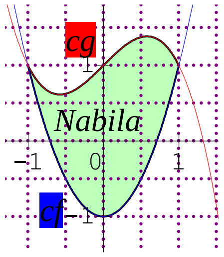
Calculer l'aire, en unités d'aire, de chacun des domaines coloriés appartenant aux différents enfants de Monsieur Nchare.



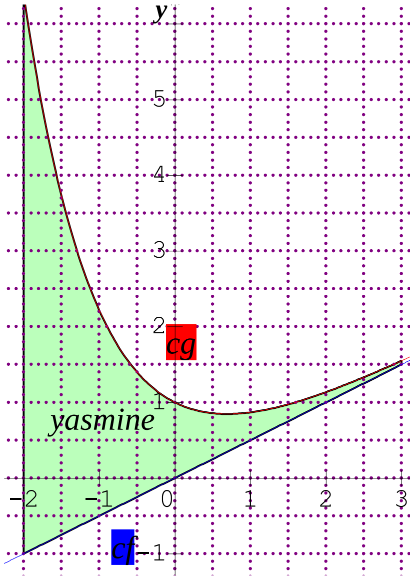
$f(x) = 3 - (x-2)^2$



$f(x) = \exp(-3x) + 0{,}5x$



$f(x) = 2x^2 - 1 \,;\, g(x) = -x^3 + x + 1$



$f(x) = \frac{x}{2} \,;\, g(x) = e^{-x} + \frac{x}{2}$

Exercice 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité d'axe 2 cm. Représenter puis calculer l'aire, en unités d'aire, de chacun des domaines D suivants

1. $D = \left\{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}; 0 \leq x \leq 4 \text{ } et \text{ } \frac{x^2}{4} \leq y \leq 2\sqrt{x}\right\}$
2. $D = \left\{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}; -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ } et \text{ } 0 \leq y \leq 3 + cosx\right\}$

Exercice 3 :

1. Calculer une valeur approchée de $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$ en utilisant la méthode des rectangles et une subdivision de l'intervalle $[0; 1]$ en cinq intervalles de même amplitude. Comparer le résultat à $\frac{\pi}{4}$
2. Calculer une valeur approchée de $I = \int_{-0,5}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx$ en utilisant la méthode des rectangles et une subdivision de l'intervalle $[-0,5; 1]$ en 15 intervalles de même amplitude.

Exercice 4 :

1. Déterminer le volume du solide obtenu par la révolution autour de l'axe $[Ox)$ du domaine définit sur $[-1; 0]$ par le cercle de centre O et de rayon 1 et sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par la courbe d'équation $y = cosx$
2. Dessiner puis terminer le volume du solide obtenu par la révolution autour de l'axe $[Oy)$ du domaine du plan délimité par les axes $[Oy)$ et $[Ox)$,la droite d'équation $y = 2$ et la courbe d'équation $y = lnx$

II-Exercices de consolidation

Exercice 1 : **intégrale et suite**

n désigne un entier naturel non nul. On pose $I_n = \int_0^1 \frac{1}{t^n+1}dt$, $J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t^n+1}dt$ et $K_n = \int_0^1 ln(1+t^n)dt$

1. a) Calculer I_1
   b) Démontrer que la suite (I_n) est croissante et majorée par 1. Que peut-on en déduire ?
2. a) Établir que pour tout entier naturel non nul n, $I_n = 1 - J_n$.
   b) Démontrer que pour tout $t \in [0; 1]$, $0 \leq \frac{t^n}{t^n+1} \leq t^n$.
   c) En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$.
   d) Calculer la limite de la suite J_n puis celle de la suite I_n
3. a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, la fonction $F: x \mapsto \frac{x}{n} ln(1 + x^n)$ est dérivable sur $[0; 1]$ et calculer sa dérivée.
   b) En déduire les variations et le signe de la fonction $x \mapsto \ln(x+1) - x$ sur $[0; 1]$.
   c) En déduire que pour tout entier naturel non nul n,$0 \leq K_n \leq \frac{1}{n+1}$, puis calculer la limite de la suite K_n
   d) Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n(I_n - 1) + ln2)$

Exercice 2 : **Encadrer une intégrale-donner une valeur approchée d'une intégrale.**

1. Pour $x > 1$, ranger dans l'ordre décroissant les nombres $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{\sqrt{x}}$ et $\frac{1}{x^2}$. En déduire un encadrement de $ln2$.
2. Montrer que pour tout réel $t \geq 0$, on a $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$. En déduire que, pour tout $x \geq 0$, on a $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$
3. Soit la suite (I_n) définie par tout entier naturel n par $I_n = \int_0^\pi sin^n x dx$
   a) Calculer I_0 et I_1
   b) Sans calculer I_n, démontrer que la suite (I_n) est décroissante.
   c) À l'aide d'une intégration par partie, démontrer que pour tout entier naturel n, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
   d) Calculer I_9, I_{10} et I_{11}.
   e) En déduire que $\frac{2^{17}}{3^4 \times 7^2 \times 11} \leq \pi \leq \frac{2^{16}}{3^4 \times 7^2 \times 5}$

Exercice 3 : **Fonction définie par une intégrale**

1. Étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
   Pour tout réel x, on pose $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.
2. Justifier que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(x)$ et en déduire le sens de variation de F
3. Montrer que F est impaire.
4. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\int_0^x \frac{dt}{1+t} \leq \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
   Pour tout réel x, on pose $G(x) = F(2x) - F(x)$.

5. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$. Étudier les variations de G.
6. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) \leq \frac{1}{x}$. En déduire que, pour tout réel x, $G(x) \leq ln2$

Exercice 4: constante de Euler

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$.

1. Soit k un entier naturel non nul. Démontrer que $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$
2. En déduire que $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.
3. Démontrer que la suite (U_n) est monotone.
4. Établir, pour tout entier naturel $n \geq 2$, l'égalité $U_n = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)\right)$

Exercice 5 : calcul du volume d'une ampoule

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité d'axe 2cm, on donne les points $A\binom{-1,5}{0}$, $B\binom{0}{1,5}$, $C\binom{\pi}{0,5}$ et $D\binom{4}{0,5}$. Placer ces points puis tracer l'arc de cercle $\widehat{AB}$ de centre O et le segment $[DC]$.

1. On veut raccorder l'arc de cercle $\widehat{AB}$ au segment $[DC]$ par une courbe admettant en B la même tangente que le cercle et admettant la droite (CD) comme tangente en C. Démontrer que la courbe de la fonction définie sur $[0;\pi]$ par $f(x) = \frac{1}{2}cosx + 1$ répond aux conditions posées. Tracer la courbe de f
2. Démontrer que pour tout réel x, $\left(\frac{1}{2}cosx + 1\right)^2 = \frac{1}{8}\cos(2x) + cosx + \frac{9}{8}$.
3. Soit E l'ensemble des points du plan limité par l'arc $\widehat{AB}$, la courbe de f, le segment $[AB]$, l'axe $(O; \vec{\imath})$ et la droite d'équation $x = 4$. Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de E autour de l'axe $(O; \vec{\imath})$

III-Apprentissage à l'intégration.

Exercice 1 :

L'énergie W, en centijoules Cj, fournie par la tige d'un vérin pendant son déplacement sur une longueur x, exprimée en cm, s'exprime par la relation $W = \int_0^{10} \frac{25\,00}{x+14} dx$. Déterminer l'énergie W arrondie au centijoule.

Exercice 2 :

La tension aux bornes d'un condensateur lors de sa charge est représentée par la fonction u définie par : $u(t) = 5(1 - e^{-10t})$. Déterminer la tension moyenne pour une demie heure de charge.

Exercice 3 :

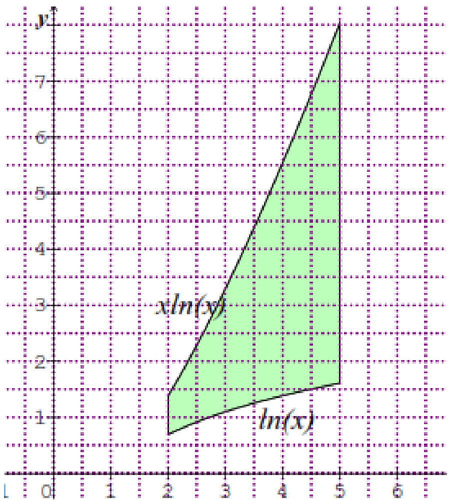
La différence de potentiel (en volts), entre deux points d'un circuit, est égale, en fonction du temps t (en s), à $u(t) = 60sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$. L'intensité (en ampères) est égale à $i(t) = 5sin(100\pi t)$. La puissance instantanée consommée dans le circuit (en watts) est égale à $p(t) = u(t)i(t)$.

1. Démontrer que les fonction u et i sont périodique de période $T = \frac{1}{50}$
2. Déterminer la valeur moyenne de p sur $[0; T]$

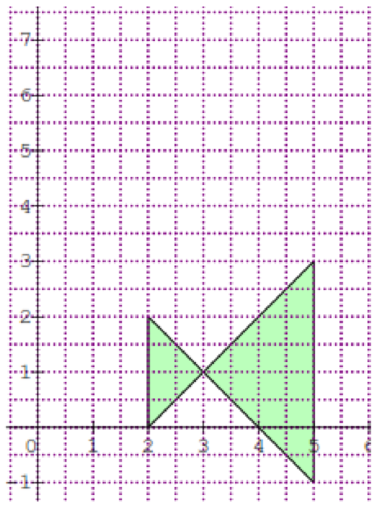
IV- Activités d'intégration

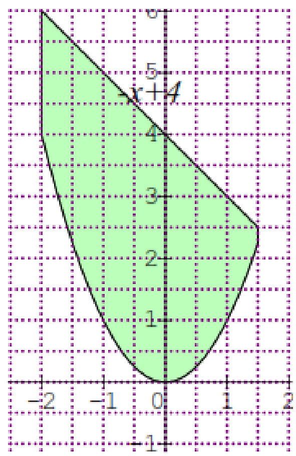
📖 **Situation 1** :

M. Pouokam, propriétaire terrien dispose de trois de terrain comme l'indique les figures ci-dessous. Pour envoyer ses trois enfants, MEKA, KAMDEM et KAMGUE à l'étranger continuer leurs études universitaires, il souhaite vendre chaque terrain à raison de 25.000 FCFA le mètre carré. Prendre : une unité d'aire égal à 100 m^2; ln(3) ≈ 1,1



Terrain1 : KAMGUE


Terrain2 : MEKA



Terrain3 : KAMDEM

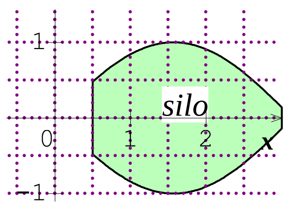
1) Déterminer le prix de vente du terrain de KAMGUE
2) Déterminer le prix de vente du terrain de MEKA
3) Déterminer le prix de vente du terrain de KAMDEM

📖 **Situation 2** :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

M Nchare est agro-industriel. Il possède une plantation de maïs dans un vaste domaine dont il ignore l'aire. Toutefois, il sait que cette aire est délimitée par la courbe de la fonction g défini par $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$ et $x = 3$.

Afin de mieux conserver sa récolte, il demande à son employé Dalive ingénieur en génie mécanique de lui construire des silos de conservation. Pour cela ce dernier a réalisé la maquette suivante



Il explique qu'un silo est obtenu en faisant tourner autour de l'axe des abscisses le domaine $D = \left\{M\binom{x}{y}; 0{,}5 \leq x \leq \pi \ \ et \ 0 \leq y \leq sinx\right\}$.

Les analyses économiques faites par le comptable indiquent que le coût marginal $C_M(q)$ exprimé en million de FCFA suivant la quantité produite q de tonnes de maïs est donné par la formule :

$C_M(q) = q^3 - 40q + 130 - \frac{1}{q^2}$ Où $q \in [0; 10]$. Le coût marginal C_M est assimilé à la dérivée du coût total C_T. Le coût total de production d'une tonne de maïs est de 300 000 FCFA. Durant la première campagne de production de l'année 2022, il a produit de 9,8 tonnes de maïs.

Unité d'aire 10 000 m^2. Unité de volume 1 000 m^3.

1. Donner une valeur approchée de l'aire du domaine de cet agriculteur après l'avoir dessiné
2. Déterminer coût total C_T de production
3. Déterminer le volume d'un silo

« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »
ENSEIGNANT : KAMDJOM YOEL………
TEL : 690524656…….

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023

TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : TLE C
DUREE : …2 HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 10: EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Savoir-faire :

- ✓ **Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle.**
- ✓ **Résoudre les équations différentielle du type f'= g**
- ✓ **Résoudre les équations différentielles du type f'=af**
- ✓ **Déterminer une équation caractéristique de l'équation différentielles du type af''+bf'+cf=0**
- ✓ **Résoudre les équations différentielles du type : af''+bf'+ cf=0**
- ✓ **Trouver les solutions de l'équation af''+bf'+ cf=d à partir de l'équation caractéristique de l'équation.**
- ✓ **Trouver les solutions de l'équation af''+bf'+cf=0 ; puis déterminer celle qui obéit a des conditions initiales données**

I-Exercices de fixation

✓ **Ressource 1 : les équations différentielles du type f'= g**

EXERCICE **:**

1) Dans chacun des cas vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) sur K

a) f(x)= x^3 –x+1, (E) ; y'=(x-1) (x+1) et K=IR

b) f(x)= lnx –x, (E) ; xy'-x-1=0 et K=] 0 ; +∞[

c) f(x)= $\ln(\frac{x+1}{x+3})$, (E) ; y'$-\frac{2}{(x+3)(x+1)}=0$

2) Résoudre dans IR les équations différentielles suivantes :

a) y'= e^{2x+1} b) xy'+x-1=0 ; c) y'= lnx d) $x^2y' - x + 3 = 0$

b)

Ressource 2 : les équations différentielles du type f'= af

EXERCICE :

1) Dans chacun des cas suivants, résoudre sur IR les équations différentielles suivantes et déterminer la solution vérifiant les conditions initiales données:

a) y' -3y = 0 et y(0) = 2 ; b) y' + yln2 = 0 et y(1) =1 ; c) y'= y et y(1) = -1

Resource 3 : **les équations différentielles du type ay''+ by'+ cy =0**

EXERCICE :

1) On considère l'équation différentielle suivante : (E) ; 4y''+8y'-12y=0

a) choisis parmi les équations suivantes celle qui est équation caractéristique de (E)

a) $r^2 + 2r - \frac{3}{4} = 0$; b) $2r^2 + 2r - 12 = 0$; c) $r^2 + 2r - 3 = 0$; d) $r^2 + r - \frac{5}{2} = 0$

b) En déduire une solution de (E) qui vérifie les conditions initiales suivantes :

y''(0)=0 et y(0)= -1

2) **résoudre dans IR les équations différentielles ci-dessous :**

a) $y'' + y' + y = 0$ et y'(0)= -1 et y(0)=3 ; b) $y'' + 2y' - 3y = 0$ et y(0)= 1 et y(2) =1.

c) 2$y'' + y' + y = 6$ avec y'(1)=0 et y(1)=1 d) $y'' + y' + 2y - 4 = 0$ avec y'(0)= 1 et y(1) =-1

II-Exercices de consolidation

Exercice 1 :

a)Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). Déterminer la fonction f dérivable sur IR telle que 2f '+ f =0 dont la courbe représentative admet a son point d'abscisse -2 une tangente de coefficient directeur 3.

b) Le plan est muni d'un repère (O ; I ; J). Déterminer la fonction f dérivable sur IR telle que 2f '+5f =0 et dont la courbe représentative admet a son point d'abscisse -1 une tangente parallèle à la droite d'équation : y + x = 0.

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie par f(x)= xsinx +cosx

1) Déterminer f'(x) et f''(x)
2) En déduire une relation entre f(x), f'(x) et f''(x).
3) Former une équation différentielle dont f est solution.

Exercice 3

1- Résoudre l'équation différentielle (E) : $2y' - y = 0$ dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur IR.

2- On considère l'équation différentielle (E′) : $2y' - y = (1-x)e^{\frac{x}{2}}$.

a)Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur IR par :

$f(x) = (mx^2 + px)e^{\frac{x}{2}}$. Soit solution de (E′).

b) Soit g une fonction définie et dérivable sur IR.

c) Montrer que g est solution de (E′) si et seulement si, $g - f$ est solution de (E).

d) Résoudre l'équation (E′).

1- Déterminer la solution g_0 de (E′) dont la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) passe par le point A(1,0).

Exercice 4

Soient f et g deux fonctions dérivables sur IR, l'équation différentielle (E) : y'+y= f(0) +f(2) et soit l'équation différentielle (E') ; y'+y=0

1) On pose K= f(0) +f(2), montrer que si g(x) est solution de l'équation (E') alors f(x)= g(x)+k
   Est solution de l'équation (E).
2) Montrer que la fonction g(x)= ce^{-x} (avec c∈IR) est solution de (E') et en déduire la solution f_0 (x) de (E) dont la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J) passe par le point B (2 ; 0).

III-Apprentissage à l'intégration

Exercice 1 :

Soit θ la température d'un corps à l'instant t. la température ambiante est 30℃. A chaque instant t on pose x(t) =$\theta(t) - 30$.

On suppose que la fonction x est dérivable sur IR et qu'elle vérifie : x'= -k^2x (**k** ∈ $\boldsymbol{IR}^*$).

A l'instant 0 la température du corps est 70℃ et au bout de 5 minutes elle n'est plus que 60℃

1- Déterminer $\theta(t)$, ou t est mesure en minutes.
2- A quelle température sera le corps au bout de 20 minutes

Exercice 2 :

M. Abdou est un éleveur de lapins. Au départ il compte 30 lapins dans son enclos. Une étude montre que le taux d'accroissement de ses lapins après chaque mois est proportionnel au nombre de lapins a cette période. Dans les 5 premiers mois il se retrouve avec 45 lapins et se demande combien de lapins au total peut-il en avoir après les 6 prochaines années.

Soit f(t) le nombre de lapins ou t est mesure en mois

1) Que représente f'(t) dans cette situation ?
2) Etablir une relation entre f(t) et f'(t)
3) En déduire le nombre de lapin de M. Abdou en fonction de t.
4) Aide M. Abdou à connaitre combien de lapins pourrait-il en avoir après les 6 prochaines années.

IV-Activités d'intégration

Situation 1 :

La population du Cameroun était de 10 millions en 1990 et de 12 millions en 2000. On suppose que la
vitesse d'accroissement de cette population est proportionnelle au nombre d'habitants à cet instant.

Tache 1 : en quelle année la population du Cameroun sera-t-elle de 20 millions ?

Tache 2 : Quelle est nombre minimal d'année pour la population du Cameroun soit supérieur a 30 millions ?

Situation 2 :

Une société de provenderie se sert d'un réservoir de 1000 l pour contenir l'huile a utilisé pour le mélange de la provende. A chaque minute, 0,1% de la quantité totale d'huile s'échappe du réservoir et
Le récipient est automatiquement rechargé au plein, si la quantité totale d'huile est inférieure à 50 litres.

Tache 1 : après combien de temps le récipient rempli risque de se recharger automatiquement si on n'utilise pas le contenu ?

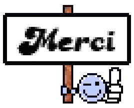
Tache 2 : Quelle sera la quantité d'huile dans le récipient si elle reste non utilisé 240minutes après le remplissage ?

□□**Situation 3** :

Un réservoir contient 25 litres d'air (60% d'azote et 40% d'oxygène). Il reçoit 0,4 litre par seconde. La
Même quantité de mélange, supposée homogène, s'échappe du réservoir.

Tache 1 : Au bout de combien de temps le réservoir contiendra-t-il 80% d'azote ?

Tache 2 : Au bout de combien de temps le réservoir contiendra-t-elle 30% d'oxygène ?



« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »
ENSEIGNANT : NOUBISSIE Parodi
TEL : 698621762

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023

TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : T^le^ C
DUREE : ……. HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES
CHAPITRE 11 : PROBABILITES

Savoir-faire :

- ✓ **Donner à partir des exemples, des éventualités, l'univers de toutes les possibilités, des évènements etc….**
- ✓ **Calculer la probabilité d'un évènement en situation d équiprobabilité.**
- ✓ **Appliquer la formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ pour calculer les probabilités de certains évènements.**
- ✓ **Résoudre des problèmes de probabilités conditionnelles.**
- ✓ **Résoudre des problèmes nécessitant l'utilisation des probabilités.**

I-Exercices de fixation

Ressource 1 : vocabulaire

EXERCICE **:**

Dans chacune des situations décrites ci-dessous, énoncer l'évènement contraire de l'évènement donné.

1) Dans une classe, on choisit deux élevés au hasard. A :<<Les deux élèves sont des filles>>.

2) Dans un groupe de camerounais et de gabonais, on discute avec une personne. B :<<La personne est un homme camerounais. >>

3) Au restaurant, MJANKA prend un plat et un désert. C :<<NJANKA prend une viande et une glace. >>

4) A une loterie, MOUMA achète 3 billes. D :<<L'un des billets au moins est gagnant>>, E :<<Deux billets au maximum sont gagnants. >>

Ressource 2 : Probabilité d'un évènement en situation d'équiprobabilité

EXERCICE :

Un sac contient 5 jetons verts et 4 jetons rouges. On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac. Calculer les probabilités :

1) De ne tirer que 3 jetons verts.

2) De ne tirer aucun jeton vert.

3) De tirer au plus 2 jetons verts.

4) De tirer exactement 1 jeton vert.

Resource 3 : Appliquer la formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

EXERCICE :

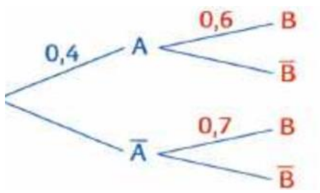
Parmi les élèves d'un lycée ,54% ont pratiqué le ski, 32% ont pratiqué la voile et 13% ont pratiqué ces deux sports. On interroge un élève au hasard.

Quelle est la probabilité qu'il n'y ait jamais pratique le ski et jamais pratique la voile ?

Resource 4 : Résoudre des problèmes de probabilités conditionnelles

EXERCICE :

On donne l'arbre pondéré suivant.



1) Indique les probabilités manquantes.

2) Calculer $P(A \cap B), P(A \cap \bar{B})\,, P(\bar{A} \cap B)\,, P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

Resource 5 : Problèmes nécessitant l'utilisation des probabilités

EXERCICE :

Une urne contient 3 boules vertes, 4 boules rouges et 5 boules bleues. On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Lorsqu' on tire une boule bleue, on marque 1 point, lorsqu' on tire une boule rouge, on perd 1 point et lorsqu' on tire une boule verte, on marque 0 point. On désigne par X le nombre des points marques.

1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

II-Exercices de consolidation

Exercice 1 :

Une urne contient 3 boules blanches et deux noires. On tire successivement au hasard trois boules suivant le protocole : on remet la boule si elle est noire, on ne la remet pas si elle est blanche.

1) La probabilité d'obtenir aucune boule blanche est :

a) $-(0.6)^3$ b) $(0.4)^3$ c) $(0.6)^3$

2) La probabilité d'obtenir trois boules blanches est :

a) $(0.6)^3$ b) 0.1 c) 0.15

3) La probabilité d'obtenir trois boules blanches est :

a) $3\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^2$ b) $\frac{27}{125}$ c) 0.366

4) La probabilité d'obtenir au plus une boules blanche est :

a) $1-(0.4)^3$ b) $\frac{183}{500}$ c) 0.43

5) La variable aléatoire X qui a chaque tirage associe le nombre de boules blanches sorties est telle que :

a) $E(X)=\frac{8}{5}$ b) $0.75<\sigma(X)<0.76$ c) $\sigma^2(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

Exercice 2 :

Trois revues scientifiques a, b et c mises à la disposition des élèves de Terminale d'un lycée sont telles que :

52% ont lu a, 43% b, 37% c, 22% ont lu a et b, 15% a et c, 13% b et c, 8% les trois revues. On interroge un élève de cette classe.

Quelle est la probabilité :

a) Qu il ait lu exactement une revue ?
b) Qu il n'ait lu aucune de ces revues ?

Exercice 3 :

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque fois votre réponse.

1) Deux évènements incompatibles sont indépendants

2) Deux évènements contraires sont indépendants

3) Si l'évènement B tel que $P(B)\neq 0$ est contenu dans l'évènement A, alors $P_B(A)=1$

4) Si A et B sont deux évènements tels que $p(B)=1-P(A)$ alors $B=\bar{A}$

5) Si A et B sont deux évènements tels que $P_B(A)=0.4\,,P_A(B)=0.3\ et\ P(B)=0.2$ alors

$P(A\cup B)=0.52$

6) On lance deux fois de suite un de parfait. Si la somme est 10 alors la probabilité d'un double 5 est $\frac{1}{3}$

7) On lance 10 fois de suite une pièce équilibre. La probabilité d'avoir au moins une fois pile dépasse 0.999

Exercice 4 :

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges ,3 jaunes et 2 vertes.

On tire au hasard et simultanément 3 boules.

1) Calculer les probabilités des évènements :

   A :<<les boules ont même couleur>>,

   B :<<les boules sont toutes de couleurs différentes>>

2) On appelle X la variable aléatoire qui, a chaque tirage, associe le nombre de couleurs obtenues.

a) Trouver la loi de probabilité de X

b) Calculer E(X)

Exercice 5 :

Une urne contient deux boules blanches (b) et quatre moires (n), toutes indiscernables au toucher

1) On tire successivement, au hasard quatre boules sana remise Calculer la probabilité des évènements suivants :

A :<<tirages alternée bnbn>>

B :<<tirage d'une seule boue blanche>>

2) Même question que 1) dans le cas de quatre tirages successifs avec remise

Exercice 6:

On considère un de rouge et un de vert, cubique, équilibres.

Le de rouge comporte : deux faces numérotées -1 ; deux faces numérotées 0 ; deux faces numérotées 1.

Le de vert comporte : une face numérotée 0 ; trois faces numérotées 1 ; deux faces numérotées 2.

On lance simultanément les deux des. On note X la somme des points obtenues.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Définir F, la fonction de répartition de X et construire sa courbe représentative.

VIII. Apprentissage à l'intégration

Exercice 1 :

Un joueur de tennis effectue une mise en jeu. Pour cela il a droit à deux tentatives : un premier service suivi, s'il n'est pas réussi, d'un deuxième service. La probabilité pour que le premier service réussite est 2/3 ; s il a échoué, la probabilité pour que le deuxième réussisse est 4/5. Lorsque les deux services échouent, on dit qu'il y a double faute. Sinon la mise en jeu est réussie.

1) Déterminer la probabilité pour que, sur une mise en jeu, ce joueur fasse une double faute.

2) Déterminer la probabilité pour que la mise en jeu soit réussie.

Exercice 2 :

Dans un stand de tir, un tireur touche la cible avec une probabilité de $\frac{7}{10}$.
Sachant qu'il a tiré quatre fois .

a) Déterminer la probabilité qu'il touche 3 fois la cible.

b) Déterminer la probabilité qu'il touche au plus 2 fois la cible.

c) Sachant que pour chacun de 4 tirs le tireur paie un dinar, et qu'il gagne 2 dinars chaque fois qu'il touche la cible, dire si le jeu lui est ou non favorable.

Exercice 3 :

a) Une compagnie a vendu 15 machines à laver avec une garantie d'une année. La probabilité pour qu'au cours de l'année la machine tombe en panne est 0,1. La direction de la compagnie estime qu'elle sera gagnante si au plus 5 machines tombent en panne au cours de l'année. Quelle est la probabilité pour la compagnie d'être gagnante ?

b) X étant la variable aléatoire donnant le nombre de machines tombant en panne au cours de l'année,

- Déterminer $p(X=0)$; $p(X=10)$
- Calculer $E(X)$.

Exercice 4 :

La probabilité pour qu'une personne ait une mauvaise réaction a un vaccin est de 0.001.

1) Tous les membres d'une famille de cinq personnes ayant été vaccinées, quelle est la probabilité qu'il y ait une mauvaise réaction :

a) chez 2 membres de la famille

b) chez moins de 2 membres de la famille.

2) Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de mauvaises réactions au vaccin dans une famille de 7 personnes.

a) Donner la loi de probabilité de X.

b) Déterminer E(X) et V(X).

Exercice 4 :

Le directeur d'une fabrique de microprocesseur constate que 4% de la production journalière est défectueuse. Un responsable qualité propose une vérification systématique des microprocesseurs. Cette vérification n'est pas parfaite, elle détecte que 95% des microprocesseurs défectueux et declare défectueux 2% des microprocesseurs qui ne présentent pourtant aucun défaut.

On prend au hasard l'un des microprocesseurs dans une production journalière.

1) Calculer la probabilité que le microprocesseur soit défectueux et déclare bon par la vérification.

2) Calculer la probabilité que le microprocesseur soit bon sachant que la vérification va le déclarer a rejeter.

IV-Activités d'intégration

Situation 1 :

Une agence loue des voitures à la journée. Son parc de m voitures lui coute chaque jour 30 francs. Chaque voiture louée rapporte par jour un bénéfice net de 20francs.Si un client se présente lorsque le parc est vide, l’agence, pour ne pas perdre le client, lui loue une voiture empruntée a un confrère et enregistre alors une perte nette de 10 francs. On pose $0 \leq m \leq 9$.

On considère la variable aléatoire N qui prend comme valeurs le nombre n de clients se présentant en un jour pour louer une voiture pour la journée ; on admettra que N prend exclusivement les valeurs entières 0, 1,2,…, 9.

Soit P la probabilité associée a N et B le bénéfice aléatoire associée a N.

1) Calculer en fonction de n et m, le bénéfice quotidien b(n.m) réalisé par l’agence , en considérant m fixe à chacune des valeurs entières de 0 a 9.

2) Calculer l’espérance mathématique et la variance de N.

Situation 2 :

Une urne contient deux jetons ; sur l’un est inscrit le nombre 2 et sur l’autre le nombre -3. On tire de trois fois de suite un jeton de l’urne en le remettant dans celle-ci a chaque fois, après avoir noté le nombre qui y est inscrit. Si a, b et c désignent les nombres obtenus dans cet ordre, au triplet (a, b, c) ,on associe l’équation dans IC :$az^2 + bz + c = 0$. $\qquad (1)$

1) Quelle est la probabilité pour que l’équation (1) admette deux solutions réelles ?
2) Soit X la variable aléatoire réelle, qui a tout triplet obtenu, associe la somme des solutions dans IC de l’équation(1). Calculer l’espérance mathématique de X.

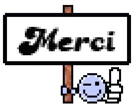
Situation 3 :

Une maladie atteint 10% d’une population. Un test de dépistage permet de détecter si un individu est malade. Ce test doit être positif si l’individu est malade et négatif sinon. La probabilité qu’un test soit positif sachant que l’individu est malade est de 0.008. La probabilité qu’un test soit négatif sachant que l’individu est sain est de 0.02.

On appelle valeur diagnostique d’un test, la probabilité qu’un individu dont le test est positif soit malade. Une erreur de test survient lorsque :<< l’individu est sain et le test positif>> ou << l’individu est malade et le test négatif. >>

1) Déterminer la valeur diagnostique de ce test.

2) Calculer la probabilité d’une erreur de test



« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »
ENSEIGNANT : KANMEGNE KAMSI OLIVER
TEL : 6 90 93 63 75

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023

TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : Tle C
DUREE : ……. HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 12 : ISOMETRIES DE L'ESPACE

Savoir-faire :

- ✓ **Reconnaître et déterminer la base d'une réflexion dans l'espace.**
- ✓ **Déterminer les expressions analytiques d'une réflexion dans l'espace.**
- ✓ **Déterminer sur les configurations appropriées, la nature et les éléments caractéristiques de la composée de :**
  - ➢ **Deux réflexions d'axes parallèles**
  - ➢ **Deux réflexions d'axes perpendiculaires**
  - ➢ **Deux demi-tours d'axes parallèles**
  - ➢ **Deux demi-tours d'axes orthogonaux.**

I-Exercices de fixation

Ressource 1 : Reconnaître et déterminer la base d'une réflexion dans l'espace.

Exercice 1 :

Considérons les points $A\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}-1\\4\\-3\end{pmatrix}$ de l'espace muni du repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1. Déterminer l'équation cartésienne de l'ensemble des points invariants de la réflexion de l'espace qui laisse invariant les points A, B et C.
2. La symétrie orthogonale de l'espace qui laisse invariant les points A, B et D est-elle une réflexion ou un demi-tour ? Déterminer l'équation de l'ensemble des points invariants.

Exercice 2 :

On donne les expressions analytiques suivantes :

$$R: \begin{cases} x' &= \frac{1}{3}(-x+2y-2z+2) \\ y' &= \frac{1}{3}(2x+2y+z-1) \\ z' &= \frac{1}{3}(-2x+y+2z+1) \end{cases} \text{ et } D: \begin{cases} x' &= \frac{1}{3}(-x-2y-2z+6) \\ y' &= \frac{1}{3}(-2x-y+2z-6) \\ z' &= \frac{1}{3}(-2x+2y-z+12) \end{cases}.$$

1. Pour chacune des expressions analytiques, déterminer l'ensemble des points invariants.
2. Montrer que R est une réflexion et D un demi-tour.

Ressource 2 : Déterminer les expressions analytiques d'une réflexion dans l'espace.

Exercice 3 :

1. Déterminer l'expression analytique de la réflexion de plan P dans chaque cas.

   a. $P : 2x + y - z + 1 = 0$

   b. $P : x = a, a \in \mathbb{R}$.

   c. $P : y = b, b \in \mathbb{R}$.

d. $P : z = c, c \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer l'expression analytique du demi-tour de droite D dans chaque cas.

a. D est la droite passant par le point $A\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$.

b. D est la droite de système d'équations $\begin{cases} x+y+z-1 & = & 0 \\ 2x-y-3z+2 & = & 0 \end{cases}$.

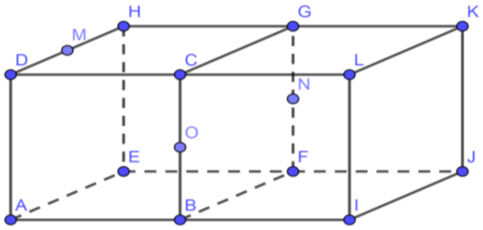
c. D est la droite passant par les points $B\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$.

✓ **Resource 3 : Déterminer sur les configurations appropriées, la nature et les éléments caractéristiques de la composée de :**

- **Deux réflexions d'axes parallèles**
- **Deux réflexions d'axes perpendiculaires**
- **Deux demi-tours d'axes parallèles**
- **Deux demi-tours d'axes orthogonaux.**

📖 **Exercice 4** :

Considérons la figure ci-dessous assimilable à deux cubes juxtaposés.



1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des composées des réflexions suivantes :

   a. $S_{IJK} \circ S_{BFG}$; $S_{AEH} \circ S_{BFG}$; $S_{DCG} \circ S_{BIJ}$; $S_{BEC} \circ S_{IFL}$

   b. $S_{BIJ} \circ S_{IJK}$; $S_{BIL} \circ S_{IJK}$; $S_{AED} \circ S_{KJF}$; $S_{DCG} \circ S_{KJI}$

2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des composées des demi-tours suivants : $S_{AB} \circ S_{BF}$; $S_{KL} \circ S_{GH}$; $S_{AB} \circ S_{EF}$; $S_{AB} \circ S_{GK}$.

3. Considérons la composée suivante : $S_{CG} \circ S_{AD}$

   a. Déterminer l'image du point D.

   b. Construire les images des points A, B et C.

   c. Déduire la nature et les éléments caractéristiques de cette composée.

4. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $S_{ON} \circ S_{AD}$

📖 **Exercice 5** :

1. Considérons les plans P_1, P_2 et P_3 d'équations respectives :

   $x - 2y + z - 2 = 0$, $x + y + z + 1 = 0$ et $-2x + 4y - 2z - 3 = 0$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des composées $P_1 \circ P_2$; $P_1 \circ P_3$ et $P_2 \circ P_3$.

2. Soient D_1et D_2 deux droites passants par le point $A\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ et dirigées respectivement par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la composée $D_1 \circ D_2$.
3. Soit de plus D_3 la droite passant par le point $B\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ et dirigée par $u_3 = u_1\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$. Déterminer la nature et l'élément caractéristique de $D_1 \circ D_3$.

II-Exercices de consolidation

🕮 **Exercice 6** :

Répondre par vrai ou faux.

1. Une réflexion est une isométrie
2. Les projections sont les isométries.
3. La composée de deux demi-tours d'axes orthogonaux n'est pas toujours un demi-tour.
4. La composée de deux demi-tours de l'espace d'axes perpendiculaires en A, est une symétrie centrale de centre A.
5. Le miroir est un exemple de réflexion.

🕮 **Exercice 7** :

Considérons l'application f de l'espace d'expression analytique : $\begin{cases} x' &= \frac{1}{3}(2x-2y+z-3) \\ y' &= \frac{1}{3}(-2x-y+2z-6). \\ z' &= \frac{1}{3}(x+2y+2z+3) \end{cases}$

1. Déterminer les images des points $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $O\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ par f.
2. Montrer que f est une isométrie de l'espace.
3. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
4. Montrer que f est involutive
5. Montrer que f est une réflexion.
6. Déterminer l'image par f de la sphère unité centrée en A.
7. Déterminer l'image du plan Q d'équation $x-y+2z-1=0$.

🕮 **Exercice 8** :

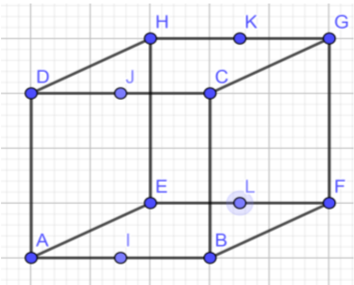
Soient P_1 et P_2 deux plans d'équations respectives $3x-y+2z-1=0$ et $x+y-z+2=0$

1. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont orthogonaux et déterminer le vecteur directeur de la droite de rencontre de ces plans.
2. Déterminer l'expression analytique de la composée $S_{P_1} \circ S_{P_2}$ des réflexions des plans P_1 et P_2.
3. Déterminer les expressions analytiques de chacune des réflexions de plan P_1 et P_2.
4. En utilisant les expressions analytiques, déterminer l'expression analytique de la composée $S_{P_1} \circ S_{P_2}$ et comparer le résultat à celui de la question 2.

IV-Apprentissage à l'intégration

Exercice 9 Compétences :

L'image ci-dessous montre un exemple de décoration en utilisant les réflexions.



L'intérieur du cube ci-dessus représente l'intérieur d'une salle de fête. Un motif est représenté sur la face $BFGC$. L'architecte voudrai reproduire ce motif sur le plafond $DCGH$, au sol et sur les trois autres murs.

Tache 1. Identifier pour chaque face une application nécessaire pour reproduire le motif à partir de celui de la face $BFGC$.

Tache 2. On muni l'espace du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. La réflexion de plan DBF permet la reproduction du motif sur l'une des faces. Déterminer l'expression analytique de cette réflexion.

Tache 3. Le demi-tour d'axe (DF) peut-il servir ? pour cela, déterminer son expression analytique et vérifier à travers un point et son image.

« La réflexion, l'outil de perfection de l'architecte ! »

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »
ENSEIGNANT : Eddy Michel Fanleu
TEL : 697477990

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023

TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : Tle C
DUREE :   HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 13 : NOMBRES COMPLEXES : APPROCHE GEOMETRIQUE

Savoir-faire :

- ✓ Représenter dans le plan complexe, le point image et le vecteur image d'un nombre complexe.
- ✓ Utiliser la relation $AB = |z_B - z_A|$ pour résoudre certains problèmes de géométrie plane :Points du plan dont l'affixe z vérifie $|z - a| = \alpha$ ou $|z - a| \leq \alpha$.
- ✓ Déterminer l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = \alpha$.
- ✓ Déterminer des arguments des nombres complexes à partir de la position dans le plan complexe, de leurs points images.
- ✓ Utiliser les relations $\cos(\arg(z)) = \frac{R_e(z)}{|z|}$ et $\sin(\arg(z)) = \frac{im(z)}{|z|}$, $z \neq 0$ pour déterminer un argument et l'argument principal d'un nombre complexe donné.
- ✓ Ecrire un nombre complexe sous la forme trigonométrique connaissant son module et un de ses arguments.
- ✓ Déterminer un argument d'un produit et d'un quotient de deux nombres complexes connaissant leurs arguments respectifs.
- ✓ Déterminer une forme exponentielle d'un nombre complexe non nul.
- ✓ Déterminer une forme exponentielle d'un produit et d'un quotient de deux nombres complexes non nuls.
- ✓ Utiliser la formule de Moivre pour linéariser une puissance entière de cosinus ou de sinus.
- ✓ Utiliser l'identité de Moivre pour déterminer sous forme exponentielle les racines nièmes d'un nombre complexe non nul.
- ✓ Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telle que : $\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \alpha + k(2\pi)$ (respectivement $\alpha + k\pi$).

I-Exercices de fixation

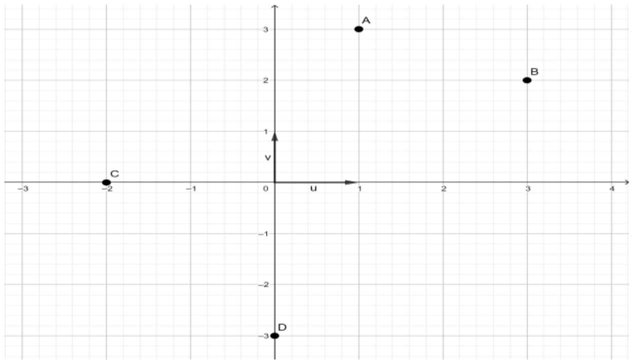
✍ **Ressource 1 :** Représentation graphique du point image et du vecteur image d'un nombre complexe.
Dans les exercices suivants le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

🕮 EXERCICE 1 :

On considère le nombre complexe $z = 2 + i$. Placer dans le plan complexe :

a) Le point A d'affixe z **b)** Le point B d'affixe $-z$. **c)** Le point C d'affixe $\bar{z}$

d) Le point D d'affixe $-\bar{z}$. **e)** Le point E d'affixe $z - i$. f) Le point F d'affixe $\frac{5}{z}$.



🕮 EXERCICE 2 :

On considère le graphique suivant.

1. Déterminer les affixes respectives des points A, B, C et D.

2. Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et celui de $\overrightarrow{CD}$.

3. Placer les points E, F et G d'affixes respectives :

$z_{\mathrm{E}} = -2 - i$, $z_{\mathrm{F}} = -4$ □et $z_{\mathrm{G}} = 4i$

🕮 EXERCICE 3 :

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :$z_{\mathrm{A}} = -3 - 2i$, $z_{\mathbf{B}} = 5 + 2i$, $z_{\mathrm{C}} = 1 - 3i$.

1. Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et celui de $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

2. Le quadrilatère OABC est-il un parallélogramme ?

3. Déterminer l'affixe du point G centre de gravité du système $\{(A, 2), (B, -1), (C, 1)\}$

□ EXERCICE 4 :

On considère les points A,B et C d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 1 + i$, $z_{\mathrm{B}} = 2 - 3i$ et $z_{\mathrm{C}} = -2 - i$.

1. Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

2. Déterminer l'affixe du point E, centre du parallélogramme.

3. Déterminer l'affixe du point G , centre de gravité du triangle ABC.

🕮 EXERCICE 5 :

On considère les points A,B et C d'affixes respectives $2 + 2i\sqrt{3}$, -4 et $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Démontrer que les points A,B et C sont alignés.

Ressource 2 : Utiliser la relation $\mathrm{AB} = |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}|$ pour déterminer certains lieux géométriques.

□ EXERCICE 1 :

On considère les points A,B et C d'affixes respectives : $z_{\mathrm{A}} = 3 - i$, $z_{\mathrm{B}} = -2i$, $z_{\mathrm{C}} = 2 + 2i$.

1. Calculer les distances AB ;BC et AC.

2. En déduire la nature du triangle ABC.

🕮 EXERCICE 2 :

Dans chacun des cas suivants déterminer l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie :

a) $|z| = 4$,**b)** $|z - 3| = 2$, **c)** $|z - 2 + i| = 3$, **d)** $|z + 1 - i| = -2$, **e)** $|z + 3i| = 5$.

f) $|z-1-i| \leq 4$, **g)** $|\bar{z}+3-2i| = 1$, **h)** $|2z-4+2i| = 8$, **i)** $|-z+2i-1| = 0$

j) $|z-2| = |z-8|$,**k)** $|z-2+3i| = |z+4-2i|$, **l)** $\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = 1$, **m)** $\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = 3$

🕮 EXERCICE 3 :

Soit A, B, C et D quatre points d'affixes respectives $a = -1+i$, $b = -1-i$, $c = 2i$ et $d = 2-2i$.

1. Calculer les distances BC,BD et CD. Quelle est la nature du triangle BCD ?

2. Déterminer l'affixe w du milieu Ω du segment $[CD]$.Calculer la distance ΩA.

3. Justifier que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

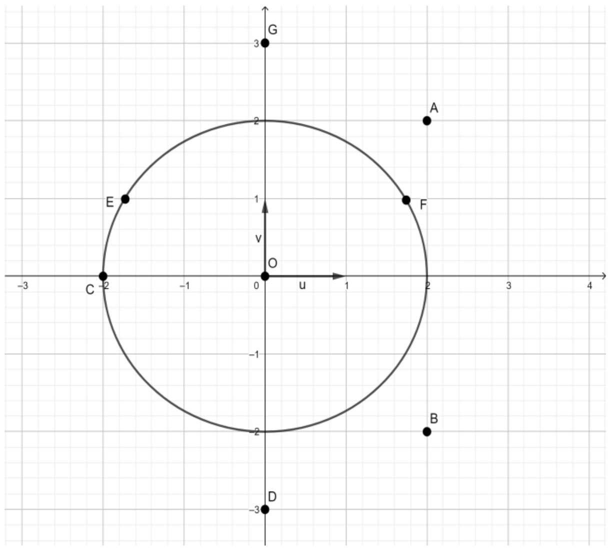
4. Déterminer l'affixe e du point E symétrique de B par rapport à Ω.Quelle est la nature du quadrilatère

CBDE ?

Ressource 3 : Déterminer des arguments des nombres complexes à partir de la position des points images.

EXERCICE 1 :

Observe attentivement la figure suivante :



Les points A,B,C,D,E,F et G sont les points images respectifs des nombres complexes d'affixes z_A , z_B

z_C , z_D , z_E , z_F et z_G.

1. Déterminer un argument de chacun de ces complexes.

2. Déterminer le module de chacun de ces complexes.

3. Calculer les distances AB,AC et BC et donner la nature du triangle ABC.

Ressource 4 : Utiliser les relations $\cos(\arg(z)) = \frac{R_e(z)}{|z|}$ et $\sin(\arg(z)) = \frac{im(z)}{|z|}$ pour déterminer un argument et l'argument principal d'un nombre complexe.

EXERCICE 1 :

1. Déterminer l'argument principal de chacun des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = 6$, **b)** $z_2 = -6$, **c)** $z_3 = i$, **d)** $z_4 = -i$, **e)** $z_5 = \sqrt{3}i$, $f)$ $z_6 = -1+\sqrt{3}i$,**g)** $z_7 = -2-2\sqrt{3}i$

h) $z_8 = -4\sqrt{3}-12i$, **i)** $z_8 = 6-i\sqrt{12}$, **j)** $z_9 = 3+3i$, **k)** $z_{10} = 2-2i$

EXERCICE 2 :

On considère le nombre complexe $z = -1+i$.

1. Déterminer un argument de z

2. En déduire un argument de $-z$ et de $\overline{z}$.

Ressource 5 : Ecrire un nombre complexe sous forme trigonométrique connaissant son module et un argument.

EXERCICE 1 :

1. Ecrire chacun des nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

a) $\left[1;\frac{\pi}{4}\right]$, **b)** $\left[2;\frac{2\pi}{3}\right]$,**c)** $\left[\sqrt{3};\frac{7\pi}{6}\right]$, **d)** $\left[1;-\frac{\pi}{4}\right]$, **e)** $\left[\sqrt{2};\frac{11\pi}{4}\right]$

2. Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

a) $z = 1 - i\sqrt{3}$,**b)** $\boldsymbol{z} = \frac{1-i}{2i}$, **c)** $z = -2i$, **d)** $z = -4\sqrt{3} + 12i$, **e)** $z = -3 - 3i$,**f)** $z = \frac{cos\theta+isin\theta}{cos\theta-isin\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$).

3. Soit θ un réel dans $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$,écrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes.

a) $-cos\theta - isin\theta$ **b)** $sin\frac{\pi}{7} + icos\frac{\pi}{7}$ **c)** $-cos\theta + isin\theta$ **d)** $- sin\theta - icos\theta$ **e)** $cos\theta + icos\theta$

EXERCICE 2 :

1. Déterminer l'écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad z_2 = 2\left(cos\frac{\pi}{4} - isin\frac{\pi}{4}\right) \quad z_3 = -3\left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right) \quad z_4 = cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{-\pi}{6}$$

$$z_5 = 2(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}).$$

2. Déterminer l'écriture algébrique des complexes z_6 et z_7 définis par :

a) $|z_6| = 5$ et $\arg(z_6) = -\frac{\pi}{3}$ **b)** $|z_7| = 2$ et $\arg(z_7) = -\frac{\pi}{2}$.

Ressource 6 : Argument d'un produit, d'un quotient de deux nombres complexes

EXERCICE1 :

1. Déterminer un argument des nombres complexes suivants : $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = -1 - i$.

2. En déduire un argument de : a) $z_1 \times z_2$; b) $\frac{z_1}{z_2}$; c) $2i \times z_1$; d) ${z_1}^2$

EXERCICE2 :

On donne $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.

1. Ecrire z_1 , z_2 , $z_1 \times z_2$ et $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme trigonométrique.

2. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

EXERCICE3 :

1. Déterminer un argument de $z = 4 - 4i\sqrt{3}$.

2. En déduire un argument de $\frac{1}{z}$ et de z^{2022}

EXERCICE4 :

1. Déterminer un argument de $-2\sqrt{3}-2i$.

2. En déduire que $(-2\sqrt{3}-2i)^3$ est imaginaire pur.

EXERCICE5 :

1. Soit $=\sqrt{2+\sqrt{3}}-i\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Calculer u^2 . En déduire le module et un argument de u.

2.a) Déterminer suivant les valeurs du réel x différent de 2, le module et un argument de

$z=(x-2)(cos\frac{\pi}{4}+isin\frac{\pi}{4})$.

b) Montrer que z^{1972}est un réel, préciser son signe.

Ressource 7 : Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul.

EXERCICE1 :

Donner la forme exponentielle de chacun des nombres suivants :

a) $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, **b)** $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, **c)** $z=-3$,**d)** $z=4$, **e)** $z=3i$,**f)** $=-3i$,**g)** $z=\frac{\sqrt{2}}{1-i}$

h) $z=-2+2\sqrt{3}i$, i) $z=-\frac{1}{2}i$, j) $z=\frac{cos\theta+isin\theta}{cos\theta-isin\theta}$ $(\theta\in\mathbb{R})$.

EXERCICE 2 :

Placer dans le plan complexe les points images des nombres complexes d'affixes respectives :

a) $\boldsymbol{z_1}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ $z_2=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ $z_3=\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

b) $z_1=1+i$ $z_2=2e^{i\frac{\pi}{4}}$ $z_3=\frac{2}{1-i}$

EXERCICE 3 :

1.Soit z un nombre complexe admettant pour forme exponentielle $z=re^{i\theta}$ où $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$.

Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

a) $\bar{z}$ b) $-z$ c) $\frac{1}{z}$.

2.a) Justifier l'égalité $3e^{i\frac{2\pi}{3}}=-3e^{-i\frac{\pi}{3}}$

b) En déduire l'écriture exponentielle de $z'=2e^{-i\frac{\pi}{3}}+3e^{i\frac{\pi}{3}}$.

EXERCICE 4 :

Dans $\mathbb{C}$ on considère les deux nombres complexes suivants : $z_A=1-i$ et $z_B=2+\sqrt{3}+i$.

1. Déterminer le module et un argument de z_A

2. Ecrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique.

3. Montrer que $\frac{z_B}{z_A} = (1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ et déduire l'écriture exponentielle de z_B.

EXERCICE 5 :

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par : $z_0 = \sqrt{3} - i$ et $z_{n+1} = (1+i)z_n$ pour tout entier naturel n.

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.

2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et $1+i$ et en déduire la forme exponentielle de z_1.

3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $cos\frac{\pi}{12}$.

EXERCICE 6 :

On considère dans $\mathbb{C}$ les nombres complexes z_1 et z_2 de module 1 et d'arguments respectifs α et β.

Montrer que $\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 \times z_2}$ est un réel positif ou nul.

Resource 8 : Forme exponentielle d'un produit, d'un quotient de deux nombres complexes non nuls.

EXERCICE1 :

On donne les nombres complexes suivants $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i$

1. Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2. En déduire l'écriture exponentielle de $z_1 \times z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ et ${z_1}^2$.

EXERCICE 2 :

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Donner l'écriture exponentielle de :

a) $z_1 \times z_2$ **b)** $\boldsymbol{{z_1}^2} \times z_2$ **c)** $\frac{z_2}{{z_1}^3}$

Ressource 9 : Identité de Moivre et linéarisation

EXERCICE1 :

1. Développer à l'aide de la formule du binôme de newton $(a+b)^4$

2. Linéariser$cos^4 x$.

3. En déduire$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4 x \; dx$.

EXERCICE 2 :

1.a) q étant différent de 1,rappeler la formule donnant la somme $\sum_{k=0}^{n} q^k$.

b) Montrer que $e^{i\theta} - 1 = 2isin\frac{\theta}{2} \times e^{i\frac{\theta}{2}}$.

2. On pose $S_1 = \sum_{k=0}^{n} cosk\theta$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{n} sink\theta$.

a) Calculer$S_1 + iS_2$.

b) En déduire alors S_1 et S_2

EXERCICE 3 :

1. A l'aide du triangle de pascal développer $(a + b)^4$.

2. En déduire $cos4x$ en fonction de $cosx$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $8cos^2x(cos^2x - 1) = -1$.

EXERCICE 4 :

Linéariser les expressions suivantes :**a)** cos^4x et sin^4x **b)** $sin^4x + 3sin^2xcos^2x$ **c)** cos^5xsin^3x

Ressource 10 : Identité de Moivre et racines nièmes d'un nombre complexe non nul.

EXERCICE 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = -8$.

2. Représenter graphiquement les images des solutions.

3. Factoriser sur $\mathbb{C}$, $x^6 + 8$ en produit de trois facteurs du second degré.

EXERCICE 2 :

1. Déterminer les racines quatrièmes de l'unité.

2. Développer à l'aide du triangle de pascal $(1 - 2i)^4$

3. En déduire dans $\mathbb{C}$, les solutions de l'équation $z^4 = -7 + 24i$.

EXERCICE 3 :

1.a) Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :$z_1 = 8i$ et $z_2 = 2 - 2i\sqrt{3}$

b) En déduire les racines carrés de z_1 *et* z_2 sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $\mathrm{z}^2 - 2(2 - \mathrm{i})\mathrm{z} + 3(1 - 2\mathrm{i}) = 0$ **b)** $\mathrm{z}^2 - (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})\mathrm{z} - 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 0$

EXERCICE 4 :

1. Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

2.a) Déterminer les racines quatrièmes de l'unité.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$,l'équation : $z^4 = (1 + 3i)^4$.

Ressource 11 : Ensemble des points M d'affixe z telle que $\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \alpha + k(2\pi)$ $(\mathrm{resp.}\, \alpha + \mathrm{k}\pi)$.

EXERCICE 1 :

On donne les points $A(2-8i)\ et\ B(1+i)$. Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que : **a)** $\arg\left(\frac{z-2+8i}{z-1-i}\right)=\frac{\pi}{2}$ **b**) $\arg\left(\frac{z-2+8i}{z-1-i}\right)=\pi$

EXERCICE 2 :

Représenter dans le plan complexe les points M d'affixe z tels que $|2|=2$ et $\arg(z+1)=\frac{\pi}{4}[\pi]$.

EXERCICE 3 :

Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants :

a)$\arg(i-z)=0[\pi]$ **b**) $\arg(z+1-i)=\frac{\pi}{6}[2\pi]$ **c**) $\arg\left(\frac{1}{z+1}\right)=\frac{\pi}{2}[\pi]$ **d)** $\frac{z+2i}{z-4i}$ est réel.

EXERCICE 4 :

Déterminer l'ensemble des M d'affixe z tels que $\frac{iz}{e^{i\frac{\pi}{6}}}$ soit : **a)** réel **b)** imaginaire pur.

EXERCICE 5 :

A,B,C et D sont quatre points d'affixes respectives $a=1+i$,$b=3+i$,$c=3+3i$,$d=2+\sqrt{2}+2i$

1. Calculer $mes(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})$ et déduire que les points A,B,C et D sont cocycliques.

2. Montrer que les points A,B et C d'affixes respectives $1\,,-i\ et -1-2i$ sont alignés.

EXERCICE 6 :

On considère les points A,B et C d'affixes respectives $2+2i\sqrt{3}$, $2-2i\sqrt{3}$ et $-1+i\sqrt{3}$

Démontrer que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

II-Exercices de consolidation

Dans cette partie le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O,$\vec{u},\vec{v}$).

□□**Exercice 1** :

Pour chaque question une seule des quatre réponses proposées est exacte. On justifiera la réponse.

1. Une solution de l'équation $2z+\bar{z}=9+i$ est :

a) 3 **b)** i **c)** 3+i. **d)** aucune réponse juste.

2. Soit z un nombre complexe, $|z+i|$ est égal à : **a)** $|z|+1$ **b)** $|z-1|$ **c)** $|i\bar{z}+1|$ **d)** aucune réponse juste.

3. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\frac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :

a) $-\frac{\pi}{3}+\theta$ **b)** $\frac{2\pi}{3}+\theta$ **c)** $\frac{2\pi}{3}-\theta$ **d)** aucune réponse.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$,lenombre complexe $(\sqrt{3}+i)^n$est imaginaire pur si et seulement si :

a) $n = 3$ **b**) $n = 6k+3, k \in \mathbb{N}$ **c**) $n = 6k, k \in \mathbb{N}$ **d)** aucune réponse

5. Soient deux points $A(i)$ et $B(-1)$. L'ensemble des points M(z) tels que $|z-i| = |z+1|$ est :

a) la droite (AB) **b)** le cercle de diamètre $[AB]$ **c)** la perpendiculaire à (AB) passant par O.

d) aucune réponse.

6. Soit Ω(1-i). L'ensemble des points M$(x+iy)$ vérifiant $|z-1+i| = |3-4i|$ a pour équation :

a) $y = -x+1$ b) $(x-1)^2 + y^2 = \sqrt{5}$ **c)** $z = 1-i+5e^{i\theta}$ **d)** aucune réponse.

7. Soient les points A(4) et B(3i).l'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec

Mes$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{2}$ est : a) $1-4i$ **b**) $-3i$ **c**) $7+4i$ **d)** aucune réponse.

8. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\frac{z-2}{z-1} = z$ est :a) $\{1-i\}$ $b)$ Ø c) $\{1-i, 1+i\}$

d) aucune réponse.

Exercice 2 :

On donne le point A d'affixe $\sqrt{3}-i$ et le point B d'affixe $\sqrt{3}+i$.

Démontrer que le triangle OAB est équilatéral.

Exercice 3 :

On considère les points A,B et C d'affixes respectives : $a = -1+2i$, $b = 1+3i$ et $c = 4i$.

Démontrer que le triangle ABC est isocèle en A.

Exercice 4 :

Soient A,B,C les points d'affixes respectives $z_A = 2i$, $z_B = -\sqrt{3}+i$, $z_C = -\sqrt{3}-i$. Soit $z = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$.

1. Interpréter géométriquement le module et un argument de z.

2. Ecrire z sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

3. En déduire la nature du triangle ABC ainsi qu'une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

Exercice 5 :

1. Soient A,B et D les points d'affixes $z_A = 2$, $z_B = 4$ et $z_D = 2+2i$.Quelle est la nature du triangle ODB ?

2. Soient E et F les point d'affixes respectives $z_E = 1-i\sqrt{3}$ et $z_F = 1+i\sqrt{3}$. Quelle est la nature du quadrilatère OEAF ?

Exercice 6 :

Soient les points A, B, C d'affixes respectives : $z_A = 1+i$, $z_B = 2$ et $z_C = 3+i$

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?

2. Déterminer l'affixe du point D pour que ABCD soit un carré.

□□**Exercice 7** :

On considère les points A, B, D et K d'affixes respectives $z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = \overline{z_1}$, $z_3 = \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\boldsymbol{z_4 = 1.}$

Montrer que les points A, B et D appartiennent à un cercle (C) de centre K.

□□**Exercice 8** :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telle que :

a) $z + \bar{z} = |z|$ **b)** $z + \bar{z} + z\bar{z} = 0$ **c)** $(z-1)^2$ soit imaginaire pur.

d) z^2 ait pour partie imaginaire pur **e)** $\arg(\bar{z} + 5i) = \frac{\pi}{3}$ **f)** $arg[(1+i)z + 1] = \frac{\pi}{3}$.

□□**Exercice 9** :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telle que :

a) $|\bar{z} + i| = |z - 3 + 2i|$ **b)** $(z - 1 - i)(\bar{z} - 1 + i) = 3$

□□**Exercice 10** :

On considère les points A,B,C et D d'affixes respectives : $z_A = -\sqrt{3} - i$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$,$z_C = \sqrt{3} + i$ et

$z_D = -1 + i\sqrt{3}$.

1.a) Donner le module et un argument de chacun des complexes $z_A, z_B, z_C\ et\ z_D$.

b) Construire à la règle et au compas les points A, B, C et D. (On prendra 2cm pour unité graphique).

c) Déterminer le milieu du segment $[\mathrm{AC}]$ et celui du segment $[\mathrm{BD}]$

d) Donner la nature du quadrilatère ABCD.

2. On considère l'application f d'écriture complexe $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}z + 2$.

a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

b) Construire à la règle et au compas les images respectives E,F et J des points A,C et O.

c) Que constate-t-on concernant les points E,F et J ?justifier.

□□**Exercice 11** :

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = -2 - 2i$, $b = 2$, $c = 2 + 4i\ et\ d = -2 + 2i$

Répondre par vrai ou faux.

1. ABCD est un parallélogramme.

2. Le point E, image de C par la rotation de centre B et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$ est un point de l'axe des abscisses.

3. Soit le point F d'affixe $f = 6i - 4$.Le triangle CDF est rectangle et isocèle en D.

4. Soit le point G d'affixe $g = -2i$.Le triangle CDG est rectangle et isocèle en C.

5. Le nombre complexe $(1 + i)^{10}$ est imaginaire pur.

6. Le nombre complexe $\frac{1-i\sqrt{3}}{(1+i)^2}$ est de module 1 et l'un de ses arguments est $\frac{7\pi}{3}$.

7. Soit le point A$(-1 + 2i)$. L'ensemble des points M(z) telle que $(z + 1 - 2i)(\bar{z} + 1 + 2i) = 4$ est le cercle de centre A et de rayon 4.

□□**Exercice 12** :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\bar{z} - 3iz - 3 + 6i = 0$.

2. Soit A$(4 - 2i)$.Déterminer la forme algébrique du point B tel que le triangle OAB soit équilatéral direct.

3. Soit le point D d'affixe 2i.

a) Représenter l'ensemble (E) des points M d'affixe z différent de 2i tels que $\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

b) Représenter l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $z = 2i + 2e^{i\theta}$.

4. A tout point M d'affixe $z \neq -2$, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{z-1}{\bar{z}+2}$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $|z'| = 1$.

Exercice 13 :

On considère les points A,B et C d'affixes respectives $a = -2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3} - 3i$ et $c = 2i$.

1.a) Ecrire b sous forme exponentielle.

b) Placer les points A et C dans le repère. Construire le point B à la règle et au compas.

2. On désigne par E le barycentre du système $\{(A, 1), (C, 3)\}$ et F celui du système$\{(A, 2), (B, 1)\}$.

a) Etablir que l'affixe du point E est $e = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

b) Déterminer l'affixe f du point F.

3.a) Démontrer que le quotient $\frac{e-c}{e-b}$ peut s'écrire ki où k est un réel à déterminer. En déduire que dans le triangle ABC, le point E est le pied de la hauteur issue de B, et placer E.

b) Démontrer que F possède une propriété analogue et placer F.

4. On désigne par H le barycentre du système $\{(A, 2), (B, 1), (C, 6)\}$.

a) Démontrer que H est le point d'intersection des droites (BE) et (CF).

b) Que peut-on en déduire pour le point H ?

Exercice 14 :

Soient A,B et I les points d'affixes respectives $1 + i$, $3 - i$, et 2. A tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = z^2 - 4z$. Le point M' est appelé l'image du point M.

1. Faire une figure sur papier millimétré que l'on complètera au fur et à mesure.

2. Calculer les affixes des points A' et B' images respectives des points A et B. Que remarque-t-on ?

3. Déterminer les points qui ont pour image le point d'affixe -5.

4.a) vérifier que pour tout nombre complexe z, on a $z' + 4 = (z-2)^2$

b) En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$ et , lorsque $z \neq 2$ une relation entre

$\arg(z' + 4)$ *et* $\arg(z-2)$.

c) Que peut-on dire du point M' lorsque M décrit le cercle (C) de centre I et de rayon 2.

5. Soit le point E d'affixe $2 + 2e^{i\frac{\pi}{3}}$,J le point d'affixe -4 et E' l'image de E.

a) Calculer la distance IE et une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{IE})$

b) Calculer la distance JE' et une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{JE'})$

c) Construire à la règle et au compas le point E'.(On laissera apparent les traits de construction).

Exercice 15 :

On note A et B les points d'affixes respectives $-i$ et $3i$.On note f l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{iz+3}{z+i}$.

1. Pour tout point M distinct de A et B démontrer que $\arg(z') = \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\text{MA}}, \overrightarrow{\text{MB}}}\right) + \frac{\pi}{2}$.

2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.

3. Soit M d'affixe z un point du cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B. A quel ensemble appartient le point M' ?

Exercice 16 :

On donne les points A et B d'affixes respectives 1 et i. A tout point M d'affixe z distinct de A,on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{(1-i)(z-i)}{z-1}$.

1. Soit $z = x + iy$ où x et y désignent des nombres réels.

a) Montrer l'égalité $z' = \frac{(x-1)^2+(y-1)^2-1}{(x-1)^2+y^2} + i\frac{-x^2-y^2+1}{(x-1)^2+y^2}$.

b) Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que z' soit réel.

c) Déterminer l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $\mathcal{R}_e(z')$ soit négatif ou nul.

2.a) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $1 - i$.

b) Soit un point M d'affixe z distinct de A et Montrer que z' est un réel non nul si et seulement s'il un entier relatif k tel que $mes(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

c) En déduire l'ensemble des points M vérifiant $mes(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

d) Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $mes(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

Exercice 17 :

On donne $p(z) = z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8$.

1. Calculer $p(2)$ et déterminer la factorisation de $p(z)$ par $z - 2$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$.On appelle z_1 et z_2 les solutions autres que 2 et $Im(z_1) > 0$.

Vérifier que $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$.Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2.

3.a) Placer dans le plan complexe (unité 2cm) les points A(2) , B(z_1) et C(z_2). Le point I est le milieu du segment $[AB]$

b) Démontrer que le triangle OAB est isocèle et en déduire une mesure de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{OI})$.

c) Calculer l'affixe z_I de I, puis calculer le module de z_I.

d) Déduire les valeurs exactes de $cos\frac{3\pi}{8}$ et $sin\frac{3\pi}{8}$.

Exercice 18 :

1. Montrer que $1 + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{6\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}} = 0$ en déduire que $1 + cos\frac{2\pi}{5} + cos\frac{4\pi}{5} + cos\frac{6\pi}{5} + cos\frac{8\pi}{5} = 0$

2.a) Montrer que $cos\frac{2\pi}{5} + cos\frac{8\pi}{5} = 4cos^2\frac{\pi}{5} - 2$ puis que $cos\frac{4\pi}{5} + cos\frac{6\pi}{5} = -2cos\frac{\pi}{5}$.

b) En déduire la valeur de $cos\frac{\pi}{5}$.

Exercice 19 :

On considère le nombre complexe $z = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)$.

1. Déterminer le module et un argument de z^2.En déduire le module et un argument de z.

2. Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $(\sqrt{3} + 1)cosx + (\sqrt{3} - 1)sinx = \sqrt{2}$ et placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 20 :

Pour tout nombre complexe z, on pose $z' = \frac{z-1}{\bar{z}-1}$, et on appelle A,B,M et M' les points d'affixes respectives 1 , -1 , z et z' dans le plan complexe.

1. Comparer $|z - 1|$ et $|\bar{z} - 1|$ et en déduire $|z'|$.Traduire géométriquement le résultat pour le point M'.

2. Calculer en fonction de z et $\bar{z}$ le complexe $r = \frac{z'+1}{z-1}$ et en déduire que r est réel.

3. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires et donner une construction géométrique du point M' connaissant le point M.

Exercice21 :

Soit x un nombre réel positif,on considère les points A,B et C d'affixes respectives $z_A = 1 - xi$, $z_B = 2i$ et $z_C = -2$.

1.Donner les distances AB et AC en fonction de x.

2.Pour quelle valeur de x le triangle ABC est isocèle en A ?

3.Le triangle ABC peut il etre équilatéral ?

4.Soit D le point tel que ABCD est un parallélogramme. Déterminer en fonction de x,l'affixe x_D du point D.

Exercice 22 :

On considère trois points A,B et C d'affixes respectives $a, b\ et\ c$. On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.On veut démontrer que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$.

1.a) Montrer que $1 + j + j^2 = 0$

b) Montrer que $e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2$.

2. Montrer que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} = -j^2$.

3. En déduire que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$.

4. Démontrer que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$.

Exercice 23 :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (Unité graphique 4 cm).
On désigne par θ un nombre réel tel que $-\pi < \theta < \pi$.
On appelle A, M et N les points d'affixes respectives 1, $e^{i\theta}$ et $1 + e^{i\theta}$.
On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1, et par (C') le cercle de centre A et de rayon 1.
1. Tracer (C) et (C'), et placer A, M et N dans le cas où $\theta = \frac{\pi}{6}$.
2. Montrer que N appartient à (C') et donner la nature du quadrilatère OANM. Déterminer un argument de $1 + e^{i\theta}$.
3. On pose $u = 1 + e^{i\theta}$ avec $-\pi < \theta < \pi$.
a) Montrer que u est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^2 - (2 + 2\cos\theta)z + 2 + 2\cos\theta = 0$.
En déduire la seconde solution de cette équation.
b) Quelle sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$?
4. On considère l'équation (E) : $z^2 - az + a = 0$ où a est un nombre réel tel que $0 < a \leq 4$. On nomme R le point d'affixe a, et T le milieu de [OR].
La perpendiculaire à l'axe réel passant par T coupe (C') en deux points U et U'.
Montrer que les affixes de U et de U' sont les solutions de (E).

III-Apprentissage à l'intégration

Exercice1 :

Lors d'une réception d'un signal émis par un satellite, une partie du signal traversant la parabole et le câble coaxial est réfléchie en arrière à cause des impédances de ces deux matériels. On mesure cette partie par le coefficient de réflexion CR défini par $CR = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$ où z_1 est l'impédance complexe de la parabole et z_2 celle du câble coaxial. Une installation fournit $z_1 = 75$ et $z_2 = 46{,}6 - 20{,}3i$.

1. Ecrire CR sous la forme algébrique $a + ib$.
2. La superposition de ces deux ondes provoque l'apparition d'ondes stationnaires. Le rapport d'ondes stationnaires est défini par $ROS = \frac{1+p}{1-p}$ où $p = \sqrt{a^2 + b^2}$. Pour respecter la norme imposée, le ROS doit être inférieur à 2.
L'installation est-elle conforme ?
3. Dans le cas général, pour toute installation, on admet que p est compris entre 0 et 1.
Quelle est la valeur maximale de p qui respecte la norme imposée ?

IV-Activités d'intégration

Situation 1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O,$\vec{u}, \vec{v}$)d'unité graphique 1m.

Hector est un lauréat du baccalauréat C, il se propose d'utiliser ses connaissances pour l'élaboration du plan et de la décoration de la nouvelle maison que son père projette de construire. Dans ses préoccupations, il suggère la construction d'une paillotte dont le plancher aura la forme de l'ensemble des points M(z) du plan complexe tels que $\frac{z+3-2i}{z-5+3i}$ soit imaginaire pur.

La toiture de cette paillote aura la forme de l'intérieur de l'ensemble des points M(z) du plan complexe tel que $\arg\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Enfin le cadre d'une fenetre est constitué des points $(3+i), B(1+2i), C(2+4i)\ etD(4+3i)$ dans le plan complexe.

Taches.

1. Quelle est la forme du plancher d'une paillote ?

2. Quelle est la forme de la toiture de cette paillote ?

3. Quelle est la forme géométrique du cadre d'une fenêtre ?

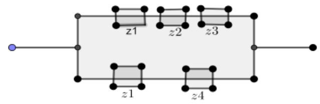
Situation 2 :

Dans les archives du club scientifique d'un établissement de la capitale, on observe les éléments suivants : Pour un dipôle linéaire passif de bornes A et B en régime sinusoïdal de courant et de tension, on donne $I = I_{max}[\cos(\omega t + \varphi_1) + isin(\omega t + \varphi_1)]$ et $U = U_{max}[\cos(\omega t + \varphi_2) + isin(\omega t + \varphi_2)]$.

L'impédance de ce dipôle est $= \frac{U}{I}$. Les anciens élèves membres de ce club ont réalisé le montage suivant. où $z_1 = 3$, $z_2 = 10i$, $z_3 = -2i$, $z_4 = 2 - i$.

Par ailleurs, dans ces mêmes archives, y est mentionné le nombre Complexe $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Taches :



1. Ecrire l'impédance Z du dipôle sous forme trigonométrique.

2. Déterminer l'impédance du circuit.

3. Après avoir prouvé que $= 2\left(1 + cos\frac{\pi}{4}\right) + 2isin\frac{\pi}{4}$, déterminer la forme trigonométrique de a et dire si l'affirmation selon laquelle << a^4 est imaginaire pur >> est vraie

« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »
ENSEIGNANT : Eddy Michel Fanleu
TEL : 697477990

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023

TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : TleC
DUREE : …. HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 14 : SIMILUTES DIRECTES DU PLAN

Savoir-faire :

- ✓ Reconnaitre l'écriture complexe d'une translation, d'une rotation, d'une homothétie, de manière générale d'une similitude directe du plan.
- ✓ Déterminer les éléments géométriques qui caractérisent une similitude directe du plan à partir de son écriture complexe.
- ✓ Reconnaitre l'écriture analytique d'une similitude directe du plan.
- ✓ Passer de l'écriture analytique à l'écriture complexe et vice versa d'une similitude directe du plan.
- ✓ Utiliser les similitudes pour résoudre des problèmes de construction de certains lieux géométriques.

I-Exercices de fixation

Ressource 1 : Reconnaitre l'écriture complexe d'une similitude directe.

EXERCICE 1 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Dans chacun des cas suivants, étudier la transformation d'écriture complexe donnée et préciser les éléments géométriques qui la caractérisent.

1) $z' = z + 2 + i$ **2)** $z' = -z + 2i$ **3)** $z' = 3z - 2$ **4)** $z' = \frac{1}{i}z$ **5)** $z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z$

6) $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z$ **7)** $z' = 2z + 1 - i$ **8)** $z' - i = (\sqrt{3} + i)(z - i)$ **9)** $z' = -2iz + 5$

10) $z' = (3+4i)z - 4 - 8i$ **11)** $z' = (1-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}z + i$ **12)** $z' = (-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})z + i + 3$

13) $z' = \sqrt{3}z + \sqrt{3} - i$ **14)** $z' = (1-i)z - 2 + i$ **15)** $z' = (1+i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i\sqrt{3}$.

 EXERCICE 2 :

a) Donner l'écriture complexe de chacune des similitudes directes suivantes.

Affixe du centre	Angle	Rapport
$w = 1 + 2i$	$\frac{\pi}{2}$	2
$w = 6 - 2i$	$\frac{-2\pi}{3}$	4
$w = 2i$	$\frac{3\pi}{4}$	2
$w = 4$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}$

b) Donner l'écriture complexe des transformations suivantes :

i). La translation de vecteur d'affixe 2-i.

ii) L'homothétie de centre A$(3 - 2i)$ et de rapport -2

iii) La rotation de centre A$(-1 + 2i)$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{6}$

4i) La symétrie centrale de centre A$(1 + i)$.

c) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S=hor où r est la rotation de centre Ω et d'angle de mesure α, h est l'homothétie de rapport k et de centre Ω dans les cas suivants :

a)$\Omega(2;-1); k = -\frac{2}{3}\ et\ \alpha = \frac{\pi}{3}$ **b**) $\Omega(1;-2); k = -1\ et\ \alpha = \frac{\pi}{3}$

c) $\Omega(0;-1); k = 2\ et\ \alpha = \frac{2\pi}{3}$ **d**) $\Omega(1;1); k = -\sqrt{2}\ et\ \alpha = -\frac{3\pi}{4}$.

Ressource 2 : Déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude directe connaissant son écriture complexe.

 EXERCICE :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Donner le centre, l'angle et le rapport des similitudes directes associées aux fonctions

$f : z' = az + b$ dans chacun des cas suivants :

1) $\boldsymbol{a} = 1 + i\ et\ b = 4 + 5i$ **2**) $a = i\ et\ b = 2 + 2i$ **3**)$a = 1 + i\sqrt{3}\ et\ b = -2i$ **4**)$a = 2i\ et\ b = 1 - i$.

Ressource 3 : Reconnaitre l'écriture analytique d'une similitude directe du plan.

 EXERCICE :

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

f est l'application du plan dans lui-même qui à tout point M$(x,)$ associe le point M'(x',y').

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f dans les cas suivants :

a) $\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$ **b**) $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y \end{cases}$ **c**) $\begin{cases} x' = -x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} - y + 2\sqrt{3} \end{cases}$ **d**) $\begin{cases} x' = 2x + 3 \\ y' = 2y + 1 \end{cases}$

Ressource 4 : Passer de l'écriture analytique à l'écriture complexe et vice versa.

 EXERCICE 1 :

1.a) Déterminer l'expression complexe de l'application f du plan qui à tout point M(x,y) associe le point M'(x',y') tel que $\begin{cases} x' = 2x - y + 1 \\ y' = x + 2y - 6 \end{cases}$.

b) En déduire la nature de f.

2. Déterminer l'image de la droite (AB) et celle du cercle (C) de centre A et de rayon 2 avec A et B d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = 1 + i$.

 EXERCICE 2 :

Dans le plan complexe f est la similitude directe de centre Ω d'affixe $2 - 3i$,d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $3\sqrt{2}$.

1. Donner l'expression complexe de f.

2. Donner l'expression analytique de f.

3. Quelle est l'image de la droite (D) d'équation y=x+1 par f ?

 EXERCICE 3 :

1. Etudier l'application f du plan complexe qui à tout point M(x,y) associe le point M'(x',y') tel que

$$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y \end{cases}.$$

2.Montrer que le cercle (C) de centre O, de rayon 1 et la droite (D) :y=-1 sont tangents.

3.Déterminer l'image de (C) et celle de la droite (D) par f et étudier leur position.

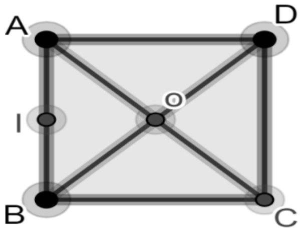
Resource 5 : Utiliser les similitudes pour résoudre des problèmes de construction et certains lieux géométriques.

 EXERCICE 1 :

ABCD est un carré direct de centre O,I est le milieu du segment $[AB]$

Pour chacune des similitudes directes suivantes, préciser son rapport et

Son angle.



a) S_1 a pour centre C et $S_1(A) = B$.

b) S_2 a pour centre O et $S_2(I) = C$.

 EXERCICE 2 :

ABCD est un losange de sens direct de centre I et tel que mes$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{4}$. S est la similitude directe de centre C qui transforme A en B.

1. Démontrer que le point l'image du point I par S est le milieu du segment $[BC]$

2. Démontrer que l'image D' du point D par S appartient à la droite (AC) et que les droites (D'I') et (BC) sont perpendiculaires.

3. En déduire une construction du point D'.

 EXERCICE 3 :

(C) est un cercle de diamètre $[AB]$.M est un point de (C) distinct de A et B, on désigne par N et P les points d'intersection de la droite (BM) et du cercle de centre M passant par A.

Déterminer les lieux géométriques des points N et P lorsque M décrit le cercle (C) privé de A et B.

 EXERCICE 4 :

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de sens direct. Soit M un point du segment $[DC]$.

La perpendiculaire à (AM) passant par A coupe la droite (BC) au point N et on note I le milieu du segment $[MN]$

1. Montrer que le triangle rectangle AMN est isocèle en A.

2. Déterminer une application du plan qui transforme M en I.

3. Quel est le lieu géométrique des points I lorsque M décrit la droite (DC).

□□ EXERCICE 5 :

S est la similitude directe plane de centre Ω d'affixe ω, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.le point A d'affixe z_A a pour image par S le point B d'affixe z_B.Démontrer que le triangle ΩAB est rectangle isocèle en A et de sens direct.

□□ EXERCICE 6 :

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et D est le point tel que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AC}$. Soit S la similitude directe qui transforme A en C et B en D.

1. Déterminer le rapport et l'angle de S.

2. Soit O le centre de S. Exprimer OA et OC en fonction de AC.

3. Démontrer que le triangle OAC est rectangle en A, puis placer le point O.

4. Soit le point Image de C par S. Montrer que :

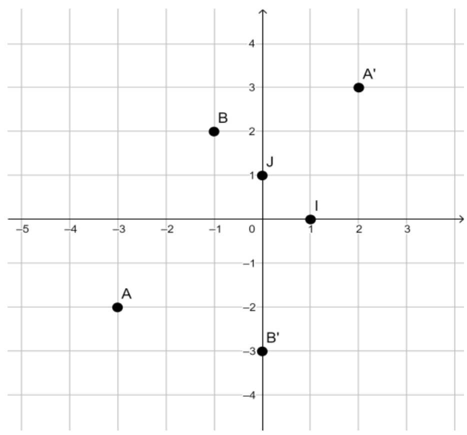
i) $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CH}}) = \frac{\pi}{3}$ **ii)** Le triangle CDH est équilatéral puis construire le point H.

□□ EXERCICE 7 :

ABCD est un carré de côté 3cm et de sens direct, I est le milieu du segment $[CD]$.

Déterminer la similitude directe S telle que S(I)=B et S(D)=C. (On construira le centre de S).

□□ EXERCICE 8 :



On considère la figure ci-contre où A 'et B' sont les images respectives de A et B par une similitude directe S. S(A)=A' et S(B)=B'.

1. Quel est le rapport de S ?

2. Construire le point K tel que S(K)=I.

3. Construire l'image du cercle de centre A passant par O.

4. On pose S(O)=O'. Le triangle O'A'B' est-il rectangle ?

5. L'image par S de la médiatrice de $[AB]$ est-elle parallèle à (AB') ?

6. Soit le point C de coordonnées $(0, -1)$ et C' son image par S.

Montrer que le triangle A'B'C' est isocèle rectangle en C' et calculer son aire.

□□ EXERCICE 9 :

Dans le plan orienté, ABCD est un carré direct de coté 1 et de centre O tel que I est le milieu du segment $[AO]$.

1. Justifier qu'il existe une similitude directe et une seule telle que $S(A) = O$ et $S(B) = I$.

2. Déterminer le rapport et l'angle de S.

3. Donner l'écriture complexe de S dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

4. On note Ω le centre de S. Démontrer que les droites (ΩA) et (ΩD) sont perpendiculaires.

EXERCICE 10 :

On considère les applications du plan dans lui-même f et g d'écritures complexes respectives :

$z' = (1 + i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i\sqrt{3}$ et $z' = 2i\bar{z} - 3 + 3i$.

1.Donner les points fixes de f et de g.

2.Déteminer les écritures complexes respectives de fog et de gof.

3.Soit A et B les points d'affixes respectives $1 + i$ et $1 - i$.Déterminer $fog(A)$ et $gof(B)$.

i) Exercices de consolidation

Exercice 1 :

1. Résoudre dans ℂ, l'équation $4z^2 - 12z + 153 = 0$.

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1cm, on considère les points A,B,C et P d'affixes respectives $z_A = \frac{3}{2} + 6i$, $z_B = \frac{3}{2} - 6i$, $z_C = -3 - \frac{1}{4}i$,

$z_P = 3 + 2i$ et le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$.

a) Déterminer l'affixe z_Q du point Image du point B par la translation de vecteur $\vec{w}$.

b) Déterminer l'affixe z_R du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $\frac{-1}{3}$.

c) Déterminer l'affixe z_S du point S, image du point P par la rotation r de centre A et d'angle de mesure

$\frac{-\pi}{2}$. Placer les points P, Q, R et S dans le repère.

3.a) Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

b).Calculer le rapport $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$ et en déduire la nature exacte du quadrilatère PQRS.

c).Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle (C), on calculera l'affixe de son centre Ω et son rayon r.

4.La droite (AP) est-elle tangente au cercle (C) ?

Exercice 2 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2cm,on considère les points A,B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 1 - i$ et $c = 1 + i$.

1.a) Placer les points A, B, C sur la figure.

b) Calculer $\frac{c-a}{b-a}$ et en déduire la nature du triangle ABC.

2.a) R est la rotation de centre A qui transforme B en C. Déterminer l'angle de R calculer l'affixe du point D, image de C par R.

b) Soit (C) le cercle de diamètre $[BC]$.Déterminer et construire l'image (C') de (C) par la rotation R.

3. Soit M un point de (C) d'affixe z, distinct de C et M' d'affixe z' son image par R.

a) Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$ tel que $z = 1 + e^{i\theta}$.

b) Exprimer z' en fonction de θ.

c) Montrer que $\frac{z'-c}{z-c}$ est un réel et en déduire que les points C,M et M' sont alignés.

Exercice 3 :

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 5cm.

On pose $z_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$. On note A_n le point d'affixe z_n.

1. Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 puis placer les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4.

2. Pour tout entier naturel n,on pose $u_n = |z_n|$.Justifier que (u_n) est une suite géométrique puis établir que pour tout entier naturel $n, u_n = 2(\frac{\sqrt{2}}{2})^n$.

3. A partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 0,1 ?

4.a) Etablir que pour tout entier naturel $n, \frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = i$,en déduire la nature du triangle OA_nA_{n+1}.

b) pour tout entier naturel n, on note l_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots . A_{n-1}A_n$.Exprimer l_n en fonction de n puis, donner la limite de la suite (l_n).

Exercice 4 :

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2cm.

Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.

1.a) Déterminer l'affixe du point B_1, image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

b) Déterminer l'affixe du point B', image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.

Placer les points A,B et B'.

2. On appelle f la transformation de plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'

tel que $z' = (1 + i)z + 1$.

a) Montrer que B a pour image B' par f.

b) Montrer que A est le seul point invariant par f.

c) Etablir que pour tout nombre complexe z distinct de i, $\frac{z'-z}{i-z} = -i$.interpreter ce résultat en termes de distances puis en termes d'angles. En déduire une méthode de construction de M'à partir de M, pour M distinct de A.

3.a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Σ_1) des points M du plan d'affixe z

tels que $|z-2| = \sqrt{2}$.

b) Démontrer que $z' - 3 - 2i = (1+i)(z-2)$.En déduire que si M appartient à (Σ_1), alors son image M' par f appartient à un ensemble (Σ_2) dont on donnera la nature et les éléments caractéristiques.

c) Tracer (Σ_1) et (Σ_2).

Exercice 5 :

Dans le plan orienté, ABC est un triangle équilatéral tel que mes$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$=$\frac{\pi}{3}$.D est le symétrique de B par rapport à (AC) ;R est la rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en C ;E est l'image de B par R.

1.a) Quelle est la nature précise du quadrilatère ABCD ?

b) Démontrer que D est le centre de la rotation R.

c) Démontrer que C est le milieu du segment $[AE]$.

2. A tout point M de $[AB]$ distinct de A et B, on associe le point M' de $[CE]$ tel que AM=CM'.

Démontrer que le triangle DMM' est équilatéral.

3. Soit G l'isobarycentre du triangle DMM' et S la similitude directe plane de centre D qui transforme M en G.

a) Préciser le rapport et l'angle de S.

b) Démontrer que S(B)=C.

c) Construire le point A' image se A par S.

d) Démontrer que les points C, G et A' sont alignés.

Exercice 6 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC isocèle direct de sommet A tel que mes$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$=$\frac{\pi}{4}$.

Le point I est tel que CAI est un triangle isocèle rectangle de sommet C.r_A désigne la rotation de centre A qui transforme B en C,r_C la rotation de centre C d'angle de mesure $\frac{-\pi}{2}$. Soit l'application

$f = r_C \mathrm{o} r_A$ et O son centre ; S est la similitude directe de centre O qui transforme A en B, S(C)=C' ;

H est le milieu de $[\mathrm{BC}]$ et H'=S(H).

1. a) Déterminer $f(A) et\ f(B)$.

b) Montrer que f est une rotation.

c) Donner la nature exacte du quadrilatère ABOC.

2.a) Donner une mesure de l'angle de S.

b) Montrer que C'appartient à (OA).

c)Montrer que H'est le milieu de $[OB]$.

d) Montrer que (C'H') est perpendiculaire à (OB).

e) En déduire que C' est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC.

Exercice 7 :

le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$.On désigne par f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z'=$(1+i)z - i$.

1. Montrer que f est une similitude directe dont on déterminera les éléments caractéristiques. On notera A le point invariant par f. Donner une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MM'}})$ en suposant $\mathrm{M} \neq \mathrm{A}$.

2.a) Construire M' pour M donné.

b) Déterminer l'image (D') par f de la droite (D) d'équation $y = x$.

3.a) montrer qu'il existe un unique point B du plan distinct de A tel que les affixes z_0 de B et $z_0{}'$de B'=f(B) soient liées par la relation $z_0 z_0{}' = 1$.Placer B et B' sur la figure.

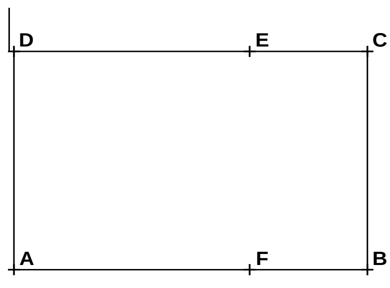
b) Soit A' le symétrique de A par rapport à O. Montrer que les points A, A', B et B' sont cocycliques.

III-Apprentissage à l'intégration

Exercice 1 :

Sur un domaine ABCD de forme rectangulaire, Arouna le propriétaire décide d'ériger une maison.

Dans le dossier technique, l'architecte en charge du projet propose un aménagement comme l'indique la figure ci-contre.



La partie représentée par le carré AFED est destinée au bâtiment et l'autre partie au jardin et aux autres ouvrages.

L'architecte affirme que pour réaliser le découpage du domaine, il a utilisé une similitude directe S qui transforme les

points A, B, C et D respectivement en B, C, E et F.

N'étant pas outillé pour comprendre le dossier, Arouna sollicite son fils Ousmane élève en Terminale C pour mieux apprécier certaines informations qui y sont contenues.

Afin de vérifier l'existence de la similitude S, Ousmane suppose que AD=1 et AB=$l(l > 1)$,puis il munit le plan du repère orthonormé $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AF}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}})$.

1. On suppose que la similitude S existe.

a) Montrer que l'on a : $\frac{1}{l} = l - 1$ et en déduire que $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) Déterminer le rapport et l'angle de S.

2.a) Justifier l'existence d'une similitude S'qui transforme A en B et B en C.

b) Démontrer que dans le repère $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AF}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}})$, la similitude S'a pour écriture complexe

$z' = \frac{\sqrt{5}-1}{2} iz + \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

c) Déterminer les images des points C et D par S'.

d) L'architecte a-t-il eu raison au sujet du procédé de découpage du domaine ?

Exercice 2 :

Un concours de mathématiques organisé à l'endroit des élèves de niveau Terminale C a porté sur la notion de similitude directe du plan.

L'un des supports de l'épreuve soumis aux élèves est la droite (D) d'équation $4x + 4y - 6 = 0$ et le

Point A(1,1) dans un repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$ du plan complexe. La question posée est de déterminer l'ensemble (Δ) des points N du plan tels que pour tout point M de (D) on a :

$$\begin{cases} \mathrm{AN} = 2\mathrm{AM} \\ \mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \overrightarrow{\mathrm{AN}}}) = \frac{\pi}{3} \end{cases}.$$

1. Justifier que N est l'image de M par une application f dont on donnera la nature et les éléments caractéristiques.

2. Déterminer l'écriture complexe de f.

3. Quelle est la nature de (Δ)? Déterminer son équation cartésienne.

ii) Activités d'intégration

Situation 1 :

Pour susciter l'inscription des élèves en série C, la commune de Yaoundé a organisé un championnat doté de prix pour les élèves de terminale C. Ces élèves ont été chargés de la préparation de la salle de fête. 200 chaises ont été déplacées par un groupe d'élèves constitués de garçons et de filles. Les garçons ont transporté chacun 8 chaises et les filles, chacune 5 chaises,(il y a plus de garçons que de filles).

Patrick qui est un élève doué en informatique, a décidé de projeter sur l'un des murs de la salle de fête, des décorations lumineuses obtenues en traçant dans un ordinateur les images des courbes, (C_m) d'équations $y = mx^2 - (m-1)x - 3(2m+1)$,dans un repère orthonormé du plan $(0, \vec{u}, \vec{v})$,par la similitude directe plane S qui transforme $\mathrm{A}(3,0)$ en $\mathrm{A}'(3,-3)$et $\mathrm{B}(-3,0)$ en $\mathrm{B}'(-3,3)$.

Taches :

1. Déterminer le nombre de garçons et le nombre de filles ayant transportés les chaises.

2. Déterminer la nature et l'équation cartésienne de $(C_0{}')$, image de (C_0) par S et construire $(C_0{}')$.

3. Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par deux points fixes dont on précisera les cordonnées.

□□**Situation 2** :

Après son admission à la retraite, monsieur HECTOR précédemment professeur de mathématiques, a été désigné pour être le nouveau chef de sa collectivité. Comme il est de coutume, le nouveau chef doit se faire confectionner une tenue qui reflète sa profession.

Afin de garder secrète les spécificités de la tenue, HECTOR confie à son fils Koffi élève en terminale C, des informations codées à décrypter au couturier chargé de confectionner la tenue. C'est ainsi qu'il a retenu que le couturier devra disposer de deux types T_1 et T_2 de perles. Les perles du type T_1 seront réparties sur la trace d'une ligne courbe (Γ) et celles du type T_2 sur une autre ligne courbe (Γ').

Le nombre a de perles du type T_1 et le nombre b de perles du type T_2 vérifient la relation $b = \overline{121}^a$,

avec $a \geq 2$. Koffi a été également informé que a est la valeur du plus petit entier naturel n tel que

$(1 + e^{i\frac{\pi}{5}})^n$ soit imaginaire pur.

La courbe (Γ) est obtenue à partir de l'image du cercle de centre A(0,1) de rayon2 par l'application f du plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$,qui à tout point M(z) associe le point M'(z')

tel que $z' = (1 + i)z + 4 + 4i$.

La courbe (Γ') est l'image par f de l'ensemble des points M(z) du plan complexe tel que les points

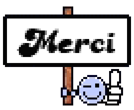
O,M et M' sont alignés.

Taches :

1. Prouver qu'on a 5 perles de type T_1 et déduire le nombre de perles de type T_2.

2. Sur quel ensemble seront reparties les perles de type T_1 ?

3. Sur quel ensemble seront reparties les perles de type T_2



« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »
ENSEIGNANT : NOUMIE FEUNOU MARRION
TEL :693130659

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023

TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : TC
DUREE : 8 HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 15 : ESPACE VECTORIEL

Savoir-faire :

- ✓ **Démontrer qu'une famille de trois vecteurs est une base d'un espace vectoriel de dimension 3. Et déterminer sa base**
- ✓ **Montrer qu'un sous ensemble est un sous espace vectoriel d'un espace de dimension 3 puis en déterminer une base.**

I-Exercices de fixation

Ressource 1 : Famille libre, famille liée, dépendance et indépendance des vecteurs

EXERCICE **:**

Exercice1 :
Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (4,1,4)$ et $v_3 = (2, -1,4)$.
La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?

Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,2,2)$ et $v_3 = (3,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,1)$ et $v_3 = (1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $v_1 = (1,2,1,2,1)$, $v_2 = (2,1,2,1,2)$, $v_3 = (1,0,1,1,0)$ et $v_4 = (0,1,0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^5$.
4. $v_1 = (2,4,3, -1, -2,1)$, $v_2 = (1,1,2,1,3,1)$ et $v_3 = (0, -1,0,3,6,2)$ dans $\mathbb{R}^6$.
5. $v_1 = (2,1,3, -1, -4, -1)$, $v_2 = (-1,1, -2,2, -3,3)$ et $v_3 = (1,5,0,4, -1,7)$ dans $\mathbb{R}^6$.

Exercice2 :
On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants (e_1, e_2, e_3, e_4) Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(e_1, 2e_2, e_3)$.
2. (e_1, e_3).
3. $(e_1, 2e_1 + e_4, e_4)$.
4. $(3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3)$.

5. $(2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1)$.

Exercice3 :
Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $u_1 = (1,2,3,4)$ et $u_2 = (1, -2,3, -4)$. Peut-on déterminer x et y pour que

$(x, 1, y, 1) \in (u_1, u_2)$? Et pour que $(x, 1,1, y) \in (u_1, u_2)$

Exercice 4 :
Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Exercice 5 :
Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs : $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,2,3,4)$, $v_3 = (3,1,4,2)$,

$v_4 = (10,4,13,7)$ et $v_5 = (1,7,8,14)$

Chercher les relations de dépendance linéaires entre ces vecteurs. Si ces vecteurs sont dépendants, en extraire au moins une famille libre engendrant le même sous-espace.

Exercice 6 :
Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs : $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,2,3,4)$, $v_3 = (3,1,4,2)$,

$v_4 = (10,4,13,7)$ et $v_5 = (1,7,8,14)$

À quelle(s) condition(s) un vecteur $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ appartient-il au sous-espace engendré par les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 et v_5 ? Définir ce sous-espace par une ou des équations.

Exercice 7 :
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et v_1, v_2, v_3 et v_4 une famille libre d'éléments de E, les familles suivantes sont-elles libres?

1. $(v_1 , 2v_2, v_3)$
2. (v_1, v_3)
3. $(v_1, v_1 + 2, v_4)$
4. $(3v_1 + v_3, v_3, v_2 + v_3)$.
5. $(2v_1 + v_2, v_1 - 3v_2, v_4, v_2 - v_1)$

Exercice 8 :
Dans $\mathbb{R}^4$, comparer les sous-espaces F et G suivants :

$$F = ((1,0,1,1), (-1, -2,3, -1), (-5, -3,1,5))$$
$$G = ((-1, -1,1, -1), (4,1,2,4))$$

Exercice 9 :
On suppose que $v_1, v_2, \ldots,$ sont des vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^n$.

1. Les vecteurs $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_n - v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
2. Les vecteurs $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \ldots, v_{n-1} + v_n, v_n + v_1$sont-ils linéairement indépendants ?

Les vecteurs $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \ldots, v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1} + v_n, v_n + v_1$
sont -ils linéairement indépendants ?

✍ **Ressource 2 :** Espace vectoriel et sous espace vectoriel

 EXERCICE :

1) Soient $a = (2,3, -1)$, $b = (1, -1, -2)$, $c = (3,7,0)$ et $d = (5,0, -7)$.

Soient $E = (a, b)$ et $F = (c, d)$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $E = F$

Peut-on déterminer des réels x, y pour que le vecteur $v = (-2, x, y, 3)$ appartienne au sous-espace-vectoriel engendré par le système (u_1, u_2), où $u_1 = (1, -1,1,2)$ et $u_2 = (-1,2,3,1)$

2) Soient $u_1 = (0,1, -2,1)$, $u_2 = (1,0,2, -1)$, $u_3 = (3,2,2, -1)$, $u_4 = (0,0,1,0)$ et $u_5 = (0,0,0,1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. $(u_1, u_2, u_3) = ((1,1,0,0), (-1,1, -4,2))$
2. $(1,1,0,0) \in Vect(u_1, u_2) \cap Vect(u_2, u_3, u_4)$.
3. $\dim(Vect(u_1, u_2) \cap Vect(u_2, u_3, u_4)) = 1$.
4. $(u_1, u_2) + (u_2, u_3, u_4) = \mathbb{R}^4$.
5. (u_4, u_5) est un sous-espace vectoriel de supplémentaire (u_1, u_2, u_3) dans $\mathbb{R}^4$.

3) On considère les vecteurs $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$ et $v_5 = (0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

a) (v_1, v_2) et (v_3) sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
b) Même question pour (v_1, v_3, v_4) et (v_2, v_5).
C) Même question pour (v_1, v_2) et (v_3, v_4, v_5)

4) Est-ce que le sous-ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x\}$ de $\mathbb{R}^2$, muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
Est-ce que le sous-ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y^2 = 2x, z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$, muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

5) Soient $u_1 = (1, -1,2)$, $u_2 = (1,1, -1)$ et $u_3 = (-1, -5, -7)$

Soit $E = (u_1, u_2, u_3)$

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z$
$= 0\}$ 1. Donner une base de E.

2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner une base de F.
4. Donner une base de $E \cap F$.

6) Soient $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (2, -2, -1)$ et $u_3 = (1,1, -1)$

Soient $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y + z = 0\}$ et $F = Vect(u_1, u_2)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de E.
2. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ? Est-ce que $u_3 \in F$?
3. Est-ce que $u_3 \in E$?
4. Donner une base de $E \cap F$.
5. Soit $u_4 = (-1,7,5)$, est-ce que $u_4 \in E$? est-ce que $u_4 \in F$?

7) Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$

Soient $a = (1, -2,3)$ et $b = (2,1, -1)$ deux vecteurs. On pose $F = (a, b)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer $E \cap F$.
3. A-t-on $E \oplus F$?

II-Exercices de consolidation

Exercice 1 :

1) Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - 2z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$.

On admettra que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soient $a = (1,1,1)$, $b = (1,0,1)$ et $c = (0,1,1)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base.
3. Montrer que $\{b, c\}$ est une base de F.
4. Montrer que $\{a, b, c\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
5. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
6. Soit $u = (x, y, z)$, exprimer u dans la base $\{a, b, c\}$.

Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} | 2x + y - z = 0 \text{ et } x + 2y + z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - 3y + z = 0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$.

2) On admettra que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soient $a = (1, -1,1)$, $b = (-2, -1,1)$ et $c = (-1,0,2)$

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base.

c) Montrer que $\{b, c\}$ est une base de F.

d) Montrer que $\{a, b, c\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

e) A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

f) Soit $u = (x, y, z)$, exprimer u dans la base $\{a, b, c\}$.

3) Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0 \text{ et } x - y - z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - 2z = 0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$.

On admettra que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soient $a = (1,0,1)$, $b = (1,1,1)$ et $c = (0,2,1)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base.
3. Montrer que $\{b, c\}$ est une base de F.
4. Montrer que $\{a, b, c\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
5. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
6. Soit $u = (x, y, z)$, exprimer u dans la base $\{a, b, c\}$.

4) Soient $E = (a, b, c, d)$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$a = (2, -1, -1); \quad b = (-1,2,3); \quad c = (1,4,7); \quad d = (1,1,2)$$

1. Est-ce que (a, b, c, d) est une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Montrer que (a, b) est une base de E.
3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant E.
4. Compléter une base de E en une base de $\mathbb{R}^3$.

5) Soient $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z - t = 0 \text{ et } x - 2y + 2z + t = 0 \text{ et } x - y + z = 0\}$

On admettra que E est un espace vectoriel.

Et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, 2x + 6y + 7z - t = 0\}$

Soient $a = (2,1,-1,2)$, $b = (1,1,-1,1)$, $c = (-1,-2,3,7)$ et $d = (4,4,-5,-3)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Première partie

1. Déterminer une base de E et en déduire la dimension de E.
2. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.

Deuxième partie

3. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
4. Déterminer une base de F.
5. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^4$?

Troisième partie

6. Montrer que $F = (b, c, d)$.
7. Soit $u = (x, y, z, t) \in F$, exprimer u comme une combinaison linéaire de b, c et d.

6) Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0, x + 2y - z + t = 0, -x - y + 2z + 2t = 0\}$ et

$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 3y + 4t = 0\}$

1. Donner une base de ces deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^4$?
3. Soit $a = (1,3,0,4) \in \mathbb{R}^4$ et on pose $G = Vect(a)$, a-t-on $G \oplus F = \mathbb{R}^4$?

7) Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$

Soit $a = (1,2,-3)$, et $F = (a)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et déterminer une base de cet espace-vectoriel.
2. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?

On justifiera la réponse.

Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_3 = 0$ et $x_2 + x_4 = 0\}$

Soient $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,1,-1)$ et $u_3 = (1,0,1,0)$

Soit $F = (u_1, u_2, u_3)$

On admettra que E est un espace vectoriel.

1. Donner une base de E et en déduire sa dimension.
2. Déterminer une base de F.
3. Donner une (ou plusieurs) équation(s) qui caractérise(nt) F.
4. Donner une famille génératrice de $E + F$.
5. Montrer que : $E \oplus F = \mathbb{R}^4$.

8) Soient $a = (1,1,1,1)$ et $b = (1,-1,1,-1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Soit $E = (a, b)$.

Soient

$$F_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \text{et} \quad 2x_1 + x_2 = 0\}$$
$$F_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_2 + x_4 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 + x_3 = 0\}$$

On admettra que E, F_1 et F_2 sont trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer une base (c, d) de F_1. 2. Déterminer une base (e, f) de F_2

3. A-t-on $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^4$?
4. Montrer que (a, b, c, d) est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. A-t-on $E \oplus F_1 = \mathbb{R}^4$?

9) Soient
$E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x - y + z - t = 0\}$, $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}$ et $H =$

$\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, y = 2x, z = 3x, t = 4x\}$

1. Montrer que E, F et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, donner une base de chacun de ces sous espaces vectoriels.
2. Déterminer $E + F$.
3. Montrer que $E \oplus H = \mathbb{R}^4$

Soient $u_1 = (2,1,1)$, $u_2 = (1,2,-1)$, $u_3 = (1,1,0)$ et $u_4 = (1,-1,-2)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer une sous famille de (u_1, u_2, u_3, u_4) libre qui engendre $E = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, en déduire la dimension de E.

10) Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 - x_2 = 0 \text{ et } x_3 - x_4 = 0\}$ On admettra que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer une base de E.
2. Compléter cette base de E en une base de E

III-Apprentissage à l'intégration

□□**Exercice** :

A) Soient $a = (2,-1,1,2)$, $b = (2,-1,6,1)$ et $c = (6,-3,8,5)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
Soient $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, -7x + z + 5t = 0 \text{ et } x + y = 0\}$ et $F = Vect(a,b,c)$

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner une base de E et une base de F.
3. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^4$?

A) Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ à 3 lignes et 3 colonnes. Soit $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. C'est-à-dire les matrices qui vérifient ${}^tA = A$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\dim(\mathcal{S}_3(\mathbb{R}))$.

B) Soient $P_0 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$, $P_1 = -X(X-2)$ et $P_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer P dans la base (P_0, P_1, P_2).
3. Soit $Q = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer Q dans la base $(1, X, X^2)$.
4. Pour tout A, B et C réels montrer qu'il existe un unique polynôme de $R \in \mathbb{R}_2[X]$, tel que : $R(0) = A$, $R(1) = B$ et $R(2) = C$.

C) Soient $P_1 = X^3 + X^2 + X + 1$, $P_2 = X^3 + 2X^2 + 3X + 4$, $P_3 = 3X^3 + X^2 + 4X + 2$ et $P_4 = 10X^3 + 4X^2 + 13X + 7$ quatre polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$

1. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle libre ?
2. Donner une base de (P_1, P_2, P_3, P_4)

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(1) = 0\}$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Donner une base de E et en déduire sa dimension.

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(-1) = 0$ et $P(1) = 0\}$ 1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

D) Déterminer une base et la dimension de E.

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les trois fonctions $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \sin(2x)$ et $x \mapsto \sin(3x)$, sont-elles linéairement indépendantes?

Soient $(x) = \cos(x)$, $g(x) = \cos(x)\cos(2x)$ et $h(x) = \sin(x)\sin(2x)$. Déterminer (f, g, h).

Exercice 2.

Soit E l'ensemble des fonctions vérifiant l'équation différentielle

$$y'' + xy' - x^2y = 0$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions.

Exercice 3.

1. Montrer que les systèmes : $S_1 = (1, \sqrt{2})$ et $S_2 = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ sont libre dans $\mathbb{R}$ considéré comme $\mathbb{Q}$espace vectoriel.

2. Soient, dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $u_1 = (\overline{3} + \sqrt{5}, \overline{2} + 3\sqrt{5})$ et $u_2 = (4, 7\sqrt{5} - 9)$. Montrer que le système (u_1, u_2) est $\mathbb{Q}$-libre et $\mathbb{R}$-lié.
3. Soient les vecteurs $v_1 = (1 - i, i)$ et $v_2 = (2, -1 + i)$ dans $\mathbb{C}^2$.
   a. Montrer que le système (v_1, v_2) est $\mathbb{R}$-libre et $\mathbb{C}$-lié.

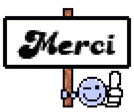
Vérifier que le système $S = \{(1,0), (i, 0), (0,1), (0, i)\}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner les composantes des vecteurs v_1 et v_2 par rapport à cette base

IV-Activités d'intégration

Situation 1 :

Soient $E = \{(x ; y ; z) \in R^3 / x + y - 2x = 0$ et $2x - y - z = 0\}$ et $F = \{(x ; y ; z) \in R^3 / x + y - z = 0\}$ deux sous-ensembles de R^3. Soient $a = (1 ;1 ;1)$, $b = (1 ;0 ;1)$ et $c = (0 ;1 ;1)$ trois éléments de R^3. DJENIL voudrait établir deux voies aériennes symétriques de direction E par rapport à F. Pour cela, il faut que E et F soient des sous espaces vectoriels supplémentaires de R^3. Il doute sur la faisabilité.

Tache1 : **Montrer que E est un sous espace vectoriel de R^3 de base (a).**
Tache 2 : Montrer que (b, c) est une base de F.
Tache 3 : Déterminer $E \oplus F$ et conclure



« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »
ENSEIGNANT : YONTA TSOTSOP ARIOSTE
TEL : 656811364

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023

TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : Terminale C
DUREE : ……. HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 16: Matrices et applications linéaires en dimension 2 et 3.

Savoir-faire :

- ✓ **Ecrire la matrice d'une application linéaire relativement à deux bases.**
- ✓ **Identifier les matrices particulières.**
- ✓ **Effectuer les opérations de somme et produit de deux matrices**
- ✓ **Calculer le déterminant d'une matrice carrée.**
- ✓ **Utiliser la notion de déterminant pour démontrer qu'une application linéaire est bijective.**
- ✓ **Déterminer la matrice inverse d'une matrice inversible.**

I-Exercices de fixation

✍ **Ressource 1 :** Ecrire la matrice d'une application linéaire relativement à deux bases.

 EXERCICE 1 **:**

Soit f l'application linéaire définie par :

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto (4x-y, -9x+2y)$$

Soit β une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice de f dans la base β dans chacun des cas suivants :

a) $\beta = (e_1, e_2)$ avec $e_1(1,0)$ et $e_2(0,1)$.
b) $\beta = (e_1, e_2)$ avec $e_1(1,1)$ et $e_2(0,1)$.
c) $\beta = (e_1, e_2)$ avec $e_1(1,1)$ et $e_2(2,3)$.

 EXERCICE 2 **:**

Soit g l'application linéaire définie par :

$$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \mapsto (x+y+z, -2x+3y+z)$$

Déterminer la matrice de g relativement aux bases β et β' dans chacun des cas suivants :

a) $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1(1,0,0)$; $e_2(0,1,0)$ et $e_3(0,0,1)$.
$\beta' = (f_1, f_2)$ avec $f_1(1,0)$ et $f_2(0,1)$.

b) $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1(1,1,0)$; $e_2(1,0,1)$ et $e_3(0,1,1)$.
$\beta' = (f_1, f_2)$ avec $f_1(1,0)$ et $f_2(0,1)$.

c) $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1(1,0,0)$; $e_2(0,1,0)$ et $e_3(0,0,1)$.
$\beta' = (f_1, f_2)$ avec $f_1(1,1)$ et $f_2(2,3)$.

 EXERCICE 3 **:**

Soit h l'application linéaire définie par :

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x + 6y, 3x + 7y, 17x - 5y\ ) \end{aligned}$$

Déterminer la matrice de h relativement aux bases β et β' dans chacun des cas suivants :

a) $\beta = (e_1, e_2)$ avec $e_1(1,0)$ et $e_2(0,1)$.
$\beta' = (f_1, f_2, f_3)$ avec $f(1,0,0)$; $f_2(0,1,0)$ et $f_3(0,0,1)$.

b) $\beta = (e_1, e_2)$ avec $e_1(1,0)$ et $e_2(0,1)$.
$\beta' = (f_1, f_2, f_3)$ avec $f(1,1,0)$; $f_2(1,0,1)$ et $f_3(0,1,1)$.

c) $\beta = (e_1, e_2)$ avec $e_1(1,1)$ et $e_2(2,3)$.
$\beta' = (f_1, f_2, f_3)$ avec $f(1,0,0)$; $f_2(0,1,0)$ et $f_3(0,0,1)$.

 Ressource 2 : Identifier les matrices particulières.

 EXERCICE **:**

Donner la nature des matrices suivantes (matrice unitaire, matrice carrée, matrice diagonale ou matrice triangulaire) :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

 Resource 3 : Effectuer les opérations de somme et produit de deux matrices.

 EXERCICE 1**:**

Soit E, un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit β une base de E. Considérons f respectivement g, des applications linéaires de E, représentée dans la base β par la matrice A respectivement par B.
Dans chacun des cas suivants, effectuer lorsque cela est possible les opérations suivantes :
AB , BA , $A + B$, $5A$ et $-7B$.

1. A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -5 & 9 & 21 \\ 10 & 2 & 15 \end{pmatrix}$ et B=$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -31 \end{pmatrix}$
2. A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -7 & 1 & 17 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et B=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 10 \\ -6 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

□ EXERCICE 2:

Soient E, F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et soit β respectivement β' une base de E respectivement de F. Considérons f une application linéaire de E dont la matrice dans la base β est A et g une application linéaire de F dont la matrice dans la base β' est B.
Effectuer lorsque cela est possible les opérations suivantes :

AB , BA , $A+B$, $-A$ et $3B$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -7 & 1 & 17 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$

□ EXERCICE 3:

Soient E, F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et soit β respectivement β' une base de E respectivement de F. Considérons f une application linéaire de E dont la matrice dans la base β est A et g une application linéaire de F dont la matrice dans la base β' est B.
Effectuer lorsque cela est possible les opérations suivantes :

AB , BA , $A+B$, $-2A$ et $7B$, avec $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}$

□ EXERCICE 4:

Soient E, F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et soit β respectivement β' une base de E respectivement de F. Considérons f une application linéaire de E dont la matrice dans la base β est A et g une application linéaire de F dont la matrice dans la base β' est B.
Effectuer lorsque cela est possible les opérations suivantes :

AB , BA , $A+B$, $5A$ et $-7B$, avec $A = (2)$ et $B = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

✍ **Resource 4** : Utiliser la notion de déterminant pour démontrer qu'une application linéaire est bijective.

□ EXERCICE :

Soit E, un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$ et soit β une base de E. Considérons f, l'application linéaire de E, représentée dans la base β par la matrice M.

Dans chacun des cas suivants, répondre par vrai ou faux aux différentes assertions.

1. $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$
   a) Le déterminant de la matrice M est 0
   b) L'application linéaire f n'est pas bijective

2. $M = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$
   a) Le déterminant de la matrice M est 12
   b) L'application linéaire f est bijective
3. $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$
   a) Le déterminant de la matrice M est 0
   b) L'application linéaire f est bijective

✍ **Resource 5** : Déterminer la matrice inverse d'une matrice inverse.

 EXERCICE **:**

Soit E, un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$ et soit β une base de E. Considérons f, l'application linéaire de E, représentée dans la base β par la matrice M.

Dans chacun des cas suivants, montrer que la matrice M est inversible et calculer son inverse :
a) $M = \begin{pmatrix} -1 & -21 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$ b) $M = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 21 & -1 \end{pmatrix}$ c) $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ d) $M = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 21 \end{pmatrix}$

II-Exercices de consolidation

Exercice 1 :

Soit (e_1, e_2, e_3) , une base de l'espace vectoriel E à trois dimensions sur $\mathbb{R}$. I_E désigne l'application identique de E.
On considère l'application linéaire f de E dans E telle que :

$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3$; $f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3$ et $f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$.

1. Déterminer une base et la dimension du sous espace vectoriel $Ker(f - I_E)$.
2. Déterminer une base et la dimension du sous espace vectoriel $Ker(f^2 - I_E)$.
3. Montrer que la réunion des bases précédentes constitue une base de E.

   Quelle est la matrice de f dans cette nouvelle base ? et celle de f^2 ?

Exercice 2 :

Soient trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note φ, l'application linéaire définie par :

$\varphi(e_1) = e_3$, $\varphi(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$ et $\varphi(e_3) = e_3$

1. Ecrire la matrice A de φ dans la base (e_1, e_2, e_3). Déterminer le noyau de cette application.
2. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$ et $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.

   Calculer e_1, e_2 et e_3 en fonction de f_1, f_2 et f_3. Les vecteurs f_1, f_2 et f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

   Calculer $\varphi(f_1)$, $\varphi(f_2)$, $\varphi(f_3)$ en fonction f_1, f_2 et f_3.
   Ecrire la matrice B de φ dans la base (f_1, f_2, f_3) et trouver la nature de l'application φ.

3. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}. Quelle relation lie A , B, P et P^{-1} ?

Exercice 3 :

On considère la matrice carrée suivante : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^2 - 5\mathrm{A} + 4I_2 = 0$
2. Déduire que A est inversible et calculer son inverse.
3. Retrouver ce résultat par calcul direct.

Exercice 4 :

On considère la matrice carrée suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^3 - 3\mathrm{A} + 3I_3 = 0$
2. Déduire que A est inversible et calculer son inverse.
3. Retrouver ce résultat par calcul direct.

Exercice 5 :

Pour chacune des applications linéaires suivantes :

1. Vérifier que u est linéaire.
2. Déterminer sa matrice dans les bases canoniques des espaces vectoriels considérés.
3. Déterminer u^{-1} quand cette application existe.
4. Calculer l'image du vecteur V donnée en utilisant cette matrice.
   a. $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
      $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - 2y - 3z)$ et $V(0,1,-1)$.
   b. $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
      $(x, y, z) \mapsto (x + z, y - z, z - x)$ et $V(1,2,-1)$.
   c. On pose $\vec{v}(1,1,1)$.
      $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
      $\vec{u} \mapsto \vec{u} \wedge \vec{v}$ et $V(-1,0,2)$.

Exercice 6 :

φ est un endomorphisme du plan vectoriel P, muni d'une base $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
La matrice de φ dans la base B est $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$

a) Déterminer $\varphi(\vec{\imath})$ et $\varphi(\vec{\jmath})$ dans la base B.
b) Déterminer l'expression analytique de φ dans la base B.
c) Montrer que $\varphi o \varphi = \varphi$
d) Soit $\vec{u} = 3\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$.
   Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de P et déterminer la matrice de φ dans la base $B' = (\vec{u}, \vec{v})$.
e) Déterminer la matrice de $\Psi = Id_P - \varphi$ dans la base B.

Exercice 7 :

Un plan vectoriel P, est rapporté à une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Déterminer les matrices, dans cette base, des endomorphismes φ de , tel que :
$\varphi(\vec{\imath}) = -2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\varphi o \varphi(\vec{\jmath}) = -\vec{\imath}$.

Exercice 8 :

E désigne un plan vectoriel sur $\mathbb{R}$, et f est un endomorphisme de E tel que $\ker(f) = Im(f)$.
Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de (f) .

1. Quelle est la dimension de $ker(f)$? De $Im(f)$?
2. Etudier fof.
3. Démontrer l'existence de $\vec{v}$, vecteur non nul tel que $f(\vec{v}) = \vec{u}$

   Démontrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E et trouver la matrice de f dans cette base.

   Retrouver alors la matrice de fof dans cette base.
4. $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base de , on pose $\vec{u} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

   Trouver la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 9 :

Soit V un plan vectoriel rapporté à une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et φ l'endomorphisme de V de matrice dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$: $\begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix}$, λ, a et b étant des nombres réels données.
On suppose a et b non tous deux nuls.

1. Déterminer le noyau et l'image de φ. A quelle condition $\ker(\varphi) = Im(\varphi)$?
2. On suppose $\ker(\varphi) \neq Im(\varphi)$

   En prenant pour base $(\vec{u}, \vec{v})$, avec $\vec{u} \in Im(\varphi)$ et $\vec{v} \in \ker(\varphi)$, trouver la matrice de φ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.
3. On suppose $\ker(\varphi) = Im(\varphi)$. Montrer que l'on a $b \neq 0$ et que $(b\vec{\imath} - a\vec{\jmath}, \vec{\jmath})$ est une base de V.

   Quelle est la matrice de φ dans cette base ? Que peut-on dire de $\varphi o \varphi$?

Exercice 10

Soit V un plan vectoriel. $End(V)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de V.

1. On suppose que $\varphi \in End(V)$ et $\ker(\varphi) = Im(\varphi)$.
   a. Démontrer que $dim \ker(\varphi) = dim\, Im(\varphi) = 1$.
   b. Soit $\vec{\imath}$ un vecteur non nul de $\ker(\varphi)$.
      Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{\jmath}$ tel que $\varphi(\vec{\jmath}) = \vec{\imath}$ et tel que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ soit une base de V.
   c. On pose $\varphi o \varphi = \varphi^2$ et ω désigne l'application nulle de V. Démontrer que $\varphi^2 = \omega$.
2. Réciproquement, soit $\varphi \in End(V)$ tel que $\varphi \neq \omega$ et $\varphi^2 = \omega$.
   a. Démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ de V tel que $(\vec{u}, \varphi(\vec{u}))$ soit une base de V.
   b. Quelle est la matrice de φ dans cette base ? Montrer que $\ker(\varphi) = Im(\varphi)$.

IV-Apprentissage à l'intégration

Exercice:
Un volume constant de 2200 m^3 est réparti entre deux bassins A et B. Le bassin A refroidit une

machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de deux pompes.
On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- Au départ, le bassin A contient 1100 m^3 d'eau et le bassin B contient 1100 m^3 d'eau.
- Tous les jours, 15% du volume d'eau présent en début de journée dans le bassin B est transféré dans le bassin A.
- Tous les jours, 10% du volume d'eau présent en début de journée dans le bassin A est transféré dans le bassin B, pour des raisons de maintenance, on transfère également 5 m^3 du bassin A vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du $n^{ième}$ jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du $n^{ième}$ jour de fonctionnement.

  On a donc $a_0 = 1100$ et $b_0 = 1100$.

On considère la matrice carrée $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}15 \\ 0{,}1 & 0{,}85 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $R = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$
On admet que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = MX_n + R$.

1) On note $S = \begin{pmatrix} 1300 \\ 900 \end{pmatrix}$

   Vérifier que $S = MS + R$

   En déduire que, pour tout entier naturel n, $X_n - S = M(X_n - S)$

Dans la suite, on admettra que, pour tout entier naturel n :

$$X_n - S = M^n(X_0 - S) \text{ et } M^n = \begin{pmatrix} 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}75^n & 0{,}6 - 0{,}6 \times 0{,}75^n \\ 0{,}4 - 0{,}4 \times 0{,}75^n & 0{,}4 + 0{,}6 \times 0{,}75^n \end{pmatrix}$$

2) Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} 1300 - 200 \times 0{,}75^n \\ 900 + 200 \times 0{,}75^n \end{pmatrix}$
3) On considère que le processus est stabilisé lorsque l'entier naturel n vérifie :

   $1300 - a_n < 1{,}5$ et $b_n - 900 < 1{,}5$

   Déterminer le premier jour pour lequel le processus est stabilisé.

IV-Activités d'intégration

Situation :

Deux matrices colonnes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ à coefficients entiers sont dites congrues modulo 5 si et seulement si

$$\begin{cases} x \equiv x'(5) \\ y \equiv y'(5) \end{cases}$$

Deux matrices carrées d'ordre 2, $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ à coefficients entiers sont dites congrues modulo 5 si et seulement si

$$\begin{cases} a \equiv a'(5) \\ b \equiv b'(5) \\ c \equiv c'(5) \\ d \equiv d'(5) \end{cases}$$

Junior et Brenda veulent s'échanger des messages en utilisant la procédure décrite ci-dessous.

- Ils choisissent une matrice M carrée d'ordre 2, à coefficient entiers.
- Leur message initial est écrit en lettre majuscule sans accent.

	0	1	2	3	4
0	A	B	C	D	E
1	F	G	H	I	J
2	K	L	M	N	O
3	P	Q	R	S	T
4	U	V	X	Y	Z

Remarque : la lettre W est remplacée par les deux lettres accolées V.

- Chaque lettre de ce message est remplacée par une matrice colonne $\binom{x}{y}$ déduite du tableau ci-dessus : x est le chiffre situé en haut de la colonne et y est le chiffre situé à gauche de la ligne ; par exemple, la lettre T d'un message initial correspond à la matrice colonne $\binom{4}{3}$.
- On calcule une nouvelle matrice $\binom{x'}{y'}$ en multipliant $\binom{x}{y}$ à gauche par la matrice : $\binom{x'}{y'} = M\binom{x}{y}$.
- On calcule r' et t' les restes respectifs des divisions euclidiennes de x' et y' par 5.
- On utilise le tableau ci-dessus pour obtenir la nouvelle lettre correspondant à la matrice colonne $\binom{r'}{t'}$.

Junior et Brenda choisissent la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Tâche 1 : Montrer que la lettre « T » du message initial est codée par la lettre « U », puis coder par le message « TE ».

Tâche 2 : On pose $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que les matrices PM et $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont congruentes modulo 5.

Tâche 3 : On considère A et A' deux matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers congrues modulo 5 ;
$Z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Z' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux matrices colonnes à coefficients entiers congrues modulo 5. Montrer alors que les matrices AZ et AZ' sont congrues modulo 5.

« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. »

ENSEIGNANT : ……ERIC ONGUENE………
TEL : …… 694577986……….

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES
CHAPITRE 17:CONIQUES (APPROCHES GÉOMÉTRIQUES & ANALYTIQUES)

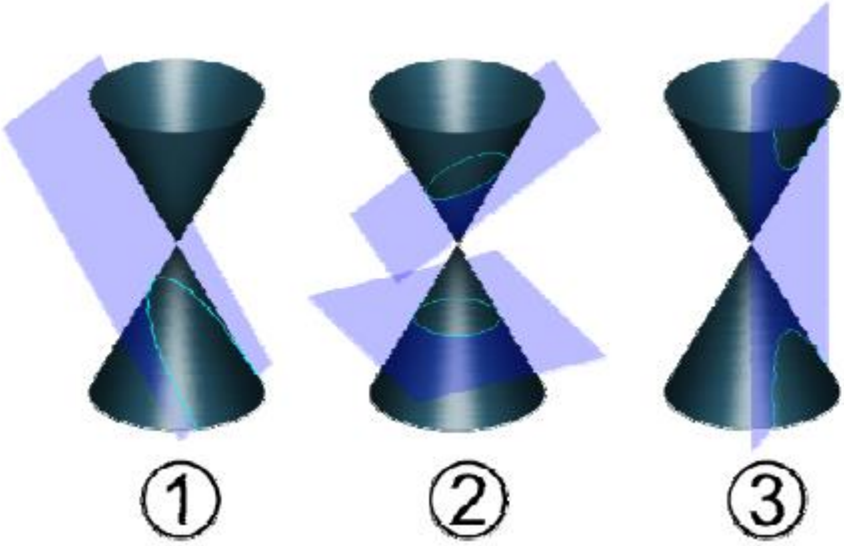
Savoir-faire :

- ✓ **Reconnaitre et nommer les figures obtenues par section d'un cône de révolution avec un plan de l'espace.**
- ✓ **Déterminer les éléments de symétrie de l'ensemble Γ_e F des points M du plan tels que $d(M,F) = ed(M,(D))$ où e est un réel strictement positif, (D) une droite et F un point n'appartenant pas à (D).**
- ✓ **Construire point par point Γ_e dans les cas : $e = 1, e > 1$ et $0 < e < 1$.**
- ✓ **Donner la nature de Γ_e dans chacun des cas ci-dessus.**
- ✓ **Déterminer la nature ; les éléments caractéristiques de l'image d'une conique par une similitude directe.**
- ✓ **Construire la tangente en un point d'une conique.**

I-Exercices de fixation

Ressource 1 : Reconnaitre une conique

Exercice1 : Donne le nom, de la conique obtenue lorsque le plan de et le cône se rencontre comme suit :



Exercice2 : compléter le texte suivant par les éléments suivants : **parabole, ellipse, hyperbole, conique, cône , e, (D), M, 0,1**

L'intersection d'un cône de révolution et d'un plan de l'espace donne une figure appelée……….. ou encore section…………….

Suivant l'intersection on distingue deux catégories de coniques à savoir les coniques…………………. Et les coniques……………………………….

Suivant l'angle d'inclinaison de ce plan avec l'axe du cône, on distingue différents cas :

Si cet angle est inférieur à l'angle d'ouverture du cône, on obtient une…………

Si cet angle est supérieur à l'angle d'ouverture du cône, on obtient une…………

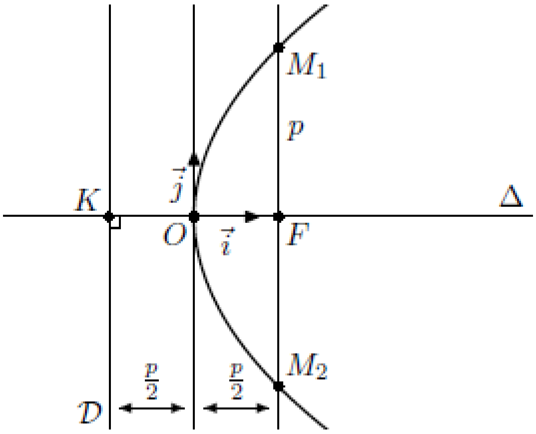
Si cet angle est égal à l'angle d'ouverture du cône, on obtient une…………

On appelle aussi conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e, la courbe (C) formée des points M du plan vérifiant : d(…,F) = …d(M, ….). Si …< e < …. Alors notre conique est une……………………..

Si e = ….., alors notre conique est une ……………………………et si e > ….. alors notre conique est une………………….

Exercice3 :

On considère la figure suivante. Compléter à chaque fois par le terme approprié :



a. La conique représentée ci-dessus est une………., son excentricité est égal à………..

b. La droite Δ est appelée…………………… ; cette droite est un……………..pour cette conique.

c. Le réel p est appelé…………………de la………………

d. Notre conique admet pour équation…………………

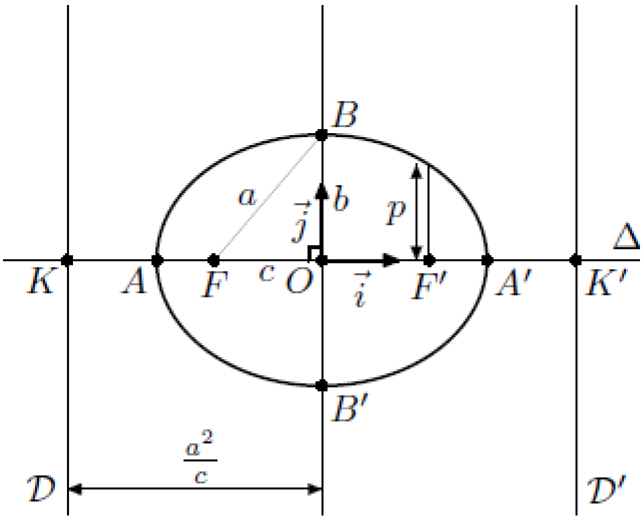
e. Le point F est le………………et O est le…………….de notre conique.

f. La droite (D) est appelée…………., dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ elle a pour équation………………..

g. Dans le repère $(F,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ le point O a pour coordonnées………………..

h. Si le point $M_1(x_1, y_1)$ alors le point $M_2(\ldots,\ldots)$ et une équation de la tangente en M_1 à notre conique est donnée par :………………

1. Compléter et répondre aux questions à l'aide maintenant de la figure suivante :



a. La conique donnée ci-dessus est une………et son excentricité est donnée par…………

b. Les droites…… et…… sont les directrices, dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ elles ont pour équations………………………………..

c. Dans notre même repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ l'axe focal Δ a pour équation…………….. et notre conique a pour équation réduite…………………

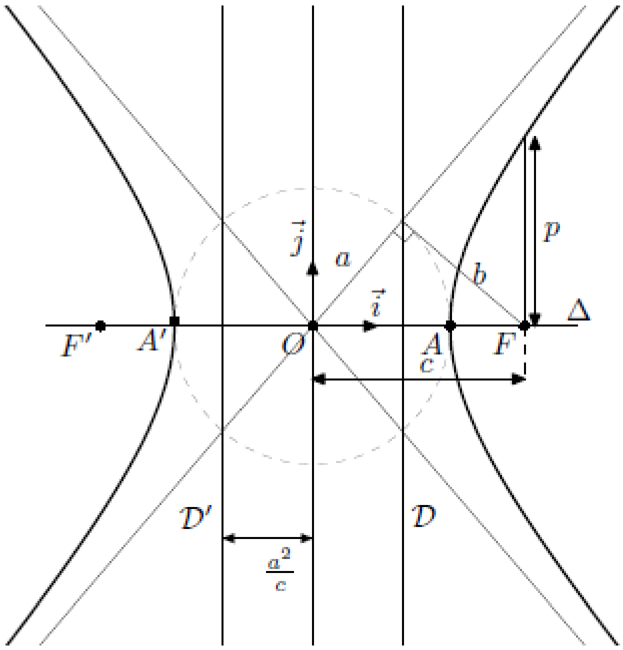
d. Les sommets de notre conique sont les points………………….et les foyers les points…………………….

e. Donner les coordonnées de tous les points présents sur cette figure dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et une équation réduite de notre conique.

f. Quelle relation existe entre les réels a ,b et c

g. Donner les équations de tangentes aux quatre sommets de notre conique

2. Faire de même qu'aux deux premières questions :



a. La conique suivante est une………………son excentricité est………………..

b. Trouver une relation entre les réels a , b et c

c. Nommer les points suivants : F, F', A, A'

d. Cette conique possède-t-elle des asymptotes si oui donné leurs équations respectives dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

e. Dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$:

Donner les coordonnées de tous les points présents sur cette figure

Déterminer une équation des droites D et D'

Déterminer une équation réduite de notre conique

Déterminer une équation de la tangente à notre conique aux points A et A'

Déterminer une équation du cercle représenté en pointillé

Exercice4 :

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses :

a. Toutes les coniques ont un centre

b. Un cercle est une conique

c. Si on connait l’excentricité d’une conique on connait sa nature

d. Les coniques ont deux foyers et deux directrices

e. Une hyperbole admet deux asymptotes qui se coupent au centre de l’hyperbole

1. Soient A et B deux points tels que AB = 2. Quelle est la nature dans chacun des cas suivants de l’ensemble des points M du plan tels que :

a. AM +BM = 4

b. AM + BM = 1

c. AM –BM =1

Ressource 2 : Caractériser une conique à partir de son équation

Exercice5 :

1. Donner les caractéristiques (sommet, foyer, directrice) des paraboles suivantes :
   a. $y^2 - 6x = 0$
   b. $-2x^2 + 3y = 0$;
   c. $y^2 - 6x - 6y + 15 = 0$;
   d. $x^2 + 8x - 6y + 4 = 0$;

2. Déterminer l’équation de la parabole dont l’axe de symétrie est parallèle à l’axe des abscisses, dont le sommet est S(2,1) et qui passe par le point P(0,4).

3. Déterminer l’équation de la parabole de sommet S(-2,3) et de foyer F(1,3).

Exercice6 :

Voici des équations de coniques dont l’(les) axe(s) de symétrie est(sont) parallèles aux axes du repère. Pour chacune d’elles, détermine l’équation réduite et spécifie sa nature en justifiant ta réponse. Donne, en plus, les éléments caractéristiques demandés.

1. $25y^2 - 16x^2 + 32x + 50y - 91 = 0$;
   a. Équation de l’axe focal
   b. Centre
   c. S’il y’en a, équations des asymptotes
2. $9x^2 + 36y^2 - 36x + 360y + 855 = 0$;

   a. Centre

   b. Sommets

   c. Foyers

   d. S’il y’en a, équations des asymptotes

Exercice7 :

Déterminer, une équation cartésienne réduite des coniques suivantes :

1. Ellipse de foyers F(0,2) et F’ (0,-2), et de directrices (D) : $x = 3 \ et \ x = -3$

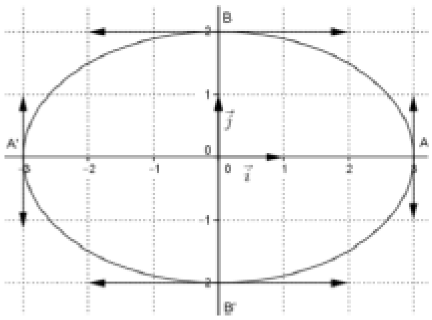
2. Hyperbole de foyers F(1,0) et F'(-1,0), et d'excentricité 2
3. Ellipse d'excentricité $\frac{1}{3}$ et de paramètre p = 1
4. Hyperbole d'asymptotes$y = \frac{1}{2}x \ et \ y = -\frac{1}{2}x$, de sommets $A\left(\frac{3}{2}, 0\right) et \ A'\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

Exercice8: (QCM)

1. Soit (D) une droite et F un point du plan n'appartenant pas à (D). On note H le projeté orthogonal de M sur (D). L'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $MF = (ln2)MH$ est :

a. Une parabole
b. Une ellipse
c. Une hyperbole

2. On donne dans le graphique ci-dessous une ellipse (E)
   a. L'ellipse (E) admet pour équation :
      i. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ ii. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ iii. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
   b. L'un des foyers de l'ellipse (E) est :
      i. F $(0,\sqrt{5})$ ii. F$(\sqrt{5},0)$ iii. F$(\sqrt{13},0)$
   c. L'une des directrices de l'ellipse (E) est :
      i. (D) : $y = \frac{4}{\sqrt{5}}$ ii. (D) : $x = \frac{9}{\sqrt{5}}$ iii. (D) : $x = \frac{4}{\sqrt{5}}$



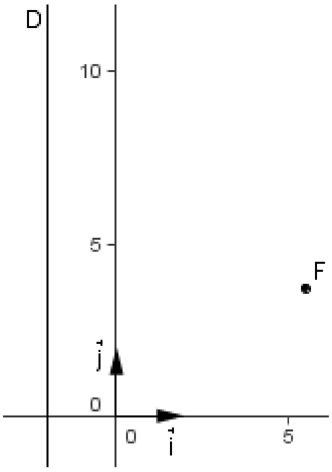
3. L'hyperbole (H) de centre O,de foyer F(5,0) et de directrice (D) : $x = \frac{9}{5}$ a pour équation :
   a. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
   b. $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$
   c. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$
   d.

Ressource 3: construction point par point d'une conique

Exercice 9 :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Dans la figure ci-contre on désigne par F et D respectivement le foyer et la directrice d'une parabole P.

a. Construire le sommet S de la parabole P
b. Construire le point A de la parabole P d'ordonné 10.
c. Construire le point B intersection de la parabole P et l'axe $(O,\vec{\imath})$
d. Construire la tangente en A de la parabole P
e. Construire la parabole P



✍ **Resource 4**: Utiliser les complexes pour caractériser une conique

Exercice10 :
On considère l'équation (E) d'inconnue z suivante : z^2-(6cos(α))$z + 4 + 5\cos^2\alpha = 0$, avec α dans $[0\,;2\pi]$

1. a. Justifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = (4isin\alpha)^2$.
   b. Résoudre alors dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E)
2. On note M et N les points images d'affixes respectives : $m = 3\cos\alpha + 2isin\,\alpha$ et $n = 3\cos\alpha - 2isin\,\alpha$
   Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$
   a. Démontrer que les points M et N appartiennent à la courbe (F) d'équation : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
   b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe (F) (centre, sommets, foyers et directrices).

Exercice11 :
Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $O,\vec{u},\vec{v})$

1. On considère l'ensemble (H) des points M(Z) tels que : $\left| Z+2\bar{Z}+1 \right| = \sqrt{2}\left|Z+\bar{Z}\right|$
   a. Donner la nature de (H)
   b. Caractériser (H)
   c. Tracer (H) et ses directrices
2. À tout point M du plan d'affixe Z, avec $Z \neq 0$, on associe le point M' d'affixe Z'= $\frac{1}{2}(Z + \frac{1}{Z})$. On pose Z = x+iy où x et y sont des réels.
   a. Exprimer en fonction de x et y la partie réelle x' et la partie imaginaire y' de Z'

b. Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels M'appartienne à l'axe des réels.

c. On pose Z = $2e^{it}$ avec t un élément de l'intervalle [0 ; 2π]

i. Quel ensemble décrit M

ii. Exprimer x' et y' en fonction de t

iii. En déduire que Z' décrit une ellipse (C) dont on déterminera le centre et les sommets

Exercice12:

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct O,$\vec{u}$,$\vec{v}$). On désigne par M,N et P trois points d'affixes respectives m , n et p.

1. Démontrer que le triangle MNP est rectangle en N ssi le complexe $i\frac{p-n}{m-n}$ est un réel non nul.
2. Dans cette question M, N et P sont d'affixes respectives z, z^2, z^4

a. Quelles conditions doit vérifier z pour que M, N et P soient deux à deux distincts

b. Démontrer que l'ensemble des points M d'affixe z = x+iy du plan tels que le triangle MNP soit rectangle en N est une conique (Γ) d'équation $(x+\frac{1}{2})^2 - y^2 = \frac{1}{4}$, privée de deux points que l'on précisera

c. Construire (Γ) on précisera ses caractéristiques

II- Exercices de consolidation

Exercice13 :

Le plan (P) est rapporté à un repère (O ;$\vec{u}$;$\vec{v}$). On pose Z = x+iy l'affixe du point M de coordonnées (x,y).

1. Vérifier que l'ensemble de points M tels que $\bar{Z}$+Z+4 = 0 est une droite (D) et tracer (D).
2. Démontrer que pour tout point M, la distance de M à la droite (D) est $\frac{1}{2}\left|\bar{Z}+Z+4\right|$
3. On note A le point d'affixe 1+i et (P') le plan de (P) privé de la droite (D). Soit (E) l'ensemble de points M d'affixe Z de (P') tel que $\left|\frac{Z-1-i}{\bar{Z}+Z+4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Démontrer que (E) est une ellipse dont on déterminera les éléments caractéristiques.

,

Exercice 14:

Dans le plan (P) muni du repère orthonormé (O ;$\vec{u}$;$\vec{v}$) on définit les points A(1,0), B($\frac{3}{2}$,$\frac{1}{2}$) et C($\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$) et (D) la droite d'équation : x =4.

1. Déterminer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{CG}$= $\overrightarrow{AB}$. Quelle est la nature du quadrilatère ABGC.
2. On note (γ) l'ensemble de points M(x,y) du plan vérifiant : $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(x-1)^2$

a. Montrer que (γ) est l'ensemble des points M vérifiant : MG = $\sqrt{2}$d(M, (D))

b. En déduire la nature de (γ) et préciser ses éléments caractéristiques et représenter (γ) dans le repère donné ci-dessus.

Exercice 15:

1. Soit S l'application du plan (P) dans lui-même qui à tout point M(Z) associe le point M' (Z') tel que : Z' = (1+i)Z.
   a. Donner la nature et les éléments caractéristiques de S.
   b. Déterminer l'expression analytique de S
   c. Soit (E) l'ensemble de points M du plan ayant pour équation cartésienne : $x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$. Déterminer une équation de l'ensemble (E') image de (E) par S
   d. Donner la nature et les éléments caractéristiques de (E').
2. Dans le plan rapporté au repère orthonormé (O ;$\vec{u}$;$\vec{v}$), on considère la courbe (F) d'équation cartésienne
   : $21x^2 + 31y^2 - 10\sqrt{3}xy = 0$; et f désigne la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
   a. Donner l'expression analytique de f
   b. Soit (E') = f(E) ; montrer que l'équation cartésienne de (E') est : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
   c. À partir de la question ci-dessus :
      i. Montrer que € est une ellipse
      ii. On note A, A',B et B' les sommets de (E), préciser leurs coordonnées
      iii. Préciser les foyers F et F' de (E) puis tracer (E) et (E')

Exercice16 :

1. ABCD est un carré direct de centre O, I et J les milieux respectifs de [AD] et [CD]. Soit (P) la parabole de sommet I et de foyer A.
   a. Déterminer la directrice de (P)
   b. Montrer que B appartient à (P) et préciser la tangente à (P) en B.
   c. Soit (P') l'image de (P) par le quart de tour indirect de centre O. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (P')
   d. Tracer (P) et (P').
2. ABC est un triangle isocèle en C, avec I milieu de [AB] et tel que : AB = 6 et IC = 2. Soit (E) l'ellipse de foyers A et B et passant par C.
   a. Quelle est la longueur du grand axe de (E)

b. Préciser un sommet de (E), déterminer et construire les trois autres sommets de (E) et tracer (E)

c. Déterminer l'excentricité de (E)

Exercice17 :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O ;$\vec{\imath}$;$\vec{\jmath}$), on considère l'ellipse (E) : $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ et on désigne par M le point de coordonnées $(\cos\theta, 2\sin\theta)$, où θ est un réel de $]0\,;\frac{\pi}{2}[$.

1. Déterminer :
   a. Par leurs coordonnées, les sommets et les foyers de (E)
   b. Vérifier que le point M appartient à (E)
   c. Une représentation graphique de (E) et placer ses foyers
2. Soit (T) la tangente à (E) en M. Montrer qu'une équation de (T) est $2x\cos\theta + y\sin\theta - 2 = 0$
3. On désigne respectivement par P et Q les points d'intersection de (T) avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées on désigne par A l'aire du triangle OPQ
   a. Montrer que A = $\frac{2}{\sin 2\theta}$
   b. En déduire que l'aire A est minimale si et seulement si M est le milieu du segment [PQ]

Exercice18:

1. On considère dans le repère canonique la courbe (Γ) d'équation $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$; et la rotation r de centre O origine du repère et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
   a. Montrer dans le repère d'origine A (-1,1), la courbe (Γ) a pour équation (E) : $25x^2 - 14xy + 25y^2 - 288 = 0$
   b. Déterminer l'écriture complexe et l'expression analytique de r
   c. Montrer que par la rotation r l'équation (E) devient $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.
   d. Déduire alors la nature de (Γ) en précisant son centre et son excentricité
   e. Tracer alors la courbe (Γ).
2. Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit (E) l'ensemble de points M(x,y) d'équation $x^2 + 4y^2 = 1$. (D) et (D') les droites d'équations respectives x = 1, x = -1 et F $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$. Soit$M_0(\cos\theta, \frac{1}{2}\sin\theta)$ un point du plan avec $\theta \neq k\pi$ avec k un entier.
   a. Donner la nature et les éléments caractéristiques de (E)
   b. Vérifier que M_0 est un point de (E)
   c. Écrire une équation de la tangent (T) à (E) au point M_0
   d. (T) coupe (D) et (D') respectivement en K et K'. Montré que le triangle KFK' est rectangle en F.

III-Apprentissage à l'intégration

Exercice19:

Le colisée de Rome (en latin colosseum = très grand) amphithéatre construit par Vespasien et Titus, servit de cirque. Il n'est cependant pas circulaire : c'est une ellipse de grand axe 187m et de petit axe 155m. l'arène est aussi une ellipse de 85m sur 53m. Pour mieux gérer l'entretien de ces édifices l'empereur aimerait connaitre les caractéristiques de celui-ci.

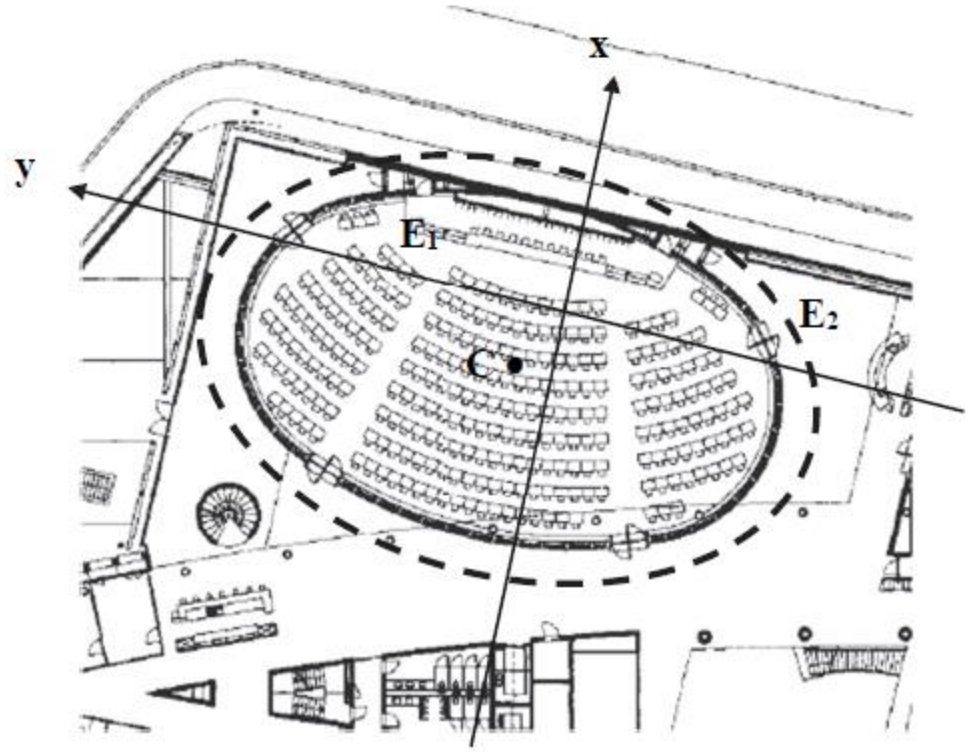
Tache :

1. **Tache1 :** Établir l'équation cartésienne réduite de chaque ellipse avec son domaine de définition.
2. **Tache2 :** Aider l'empereur à caractériser ces édifices.
   Indications : Pour simplifier, les ellipses seront centrées en O(0,0) avec le grand axe (axe focal) confondu avec l'axe des abscisses.

IV-Intégration

Exercice20:

Bouba architecte est mandaté pour construire dans un grand bâtiment de l'ONU, une salle de conférence E_1 de forme elliptique d'équation : $400x^2 + 169y^2 + 1600x - 338y - 65831 = 0$ (unité le mètre) Suite à une discussion avec le propriétaire il doit augmenter le grand axe de l'ellipse de 4m ce qui lui donne une nouvelle ellipse E_2 (voir figure ci-dessous)

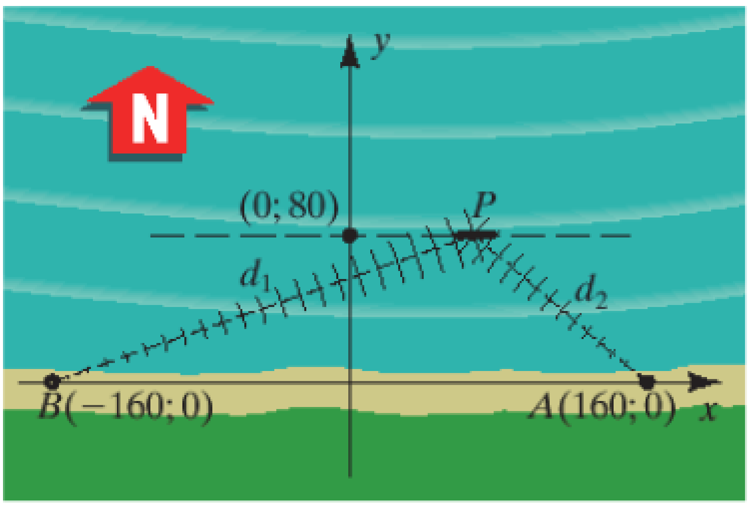


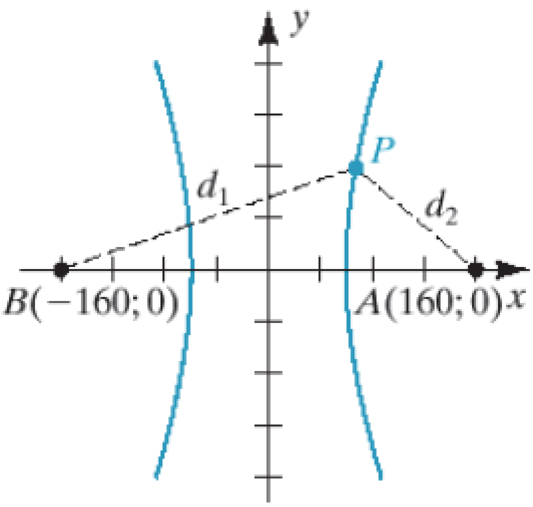
Bouba doit déterminer certains éléments de référence pour mener à bien son chantier

Taches :

1. **Tache1 :** Aider Bouba à déterminer la valeur du demi axe grand axe a' ainsi du demi petit axe b' de l'ellipse E_2 de manière à ce que le rapport $\frac{b}{a}$ soit proportionnel au rapport $\frac{b'}{a'}$.
2. **Tache2 :** Aider Bouba à vérifier si ces deux ellipse ont les mêmes foyers.
3. **Tache3 :** Aider Bouba à représenter graphiquement ces ellipses

Exercice21:





Un poste de garde cote au lac Tchad, surveillé par le Cameroun est représenté (voir figure ci-dessus) par le point A qui est à 320Km à l’est d’un autre poste B. un bateau navigue le long d’une droite parallèle et à 80Km au nord de la droite reliant A et B. Des signaux radio sont émis à partir de A et B à la vitesse de 294m/μs (mètre/ micro seconde) . Sachant qu’à 13h00 le signal parti de de B atteint le bateau 400μs après le signal émis par A.

Tache : Localiser la position du bateau en ce moment

« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 18 : STATISTIQUES

Savoir-faire :

- ✓ **Regrouper les données d'une série statistique à deux caractères quantitatifs dans un tableau à double entrée ;**
- ✓ **Dresser les tableaux marginaux d'une série à deux caractères, puis calculer les paramètres marginaux ;**
- ✓ **Calculer les coordonnées du point moyen d'un nuage de série à deux caractères ;**
- ✓ **Construire dans le plan le nuage de points d'une série ;**
- ✓ **Déterminer une équation cartésienne de la droite d'ajustement par la méthode de Mayer, puis l'utiliser pour donner approximativement en prévision la valeur d'une variable connaissant celle de l'autre ;**
- ✓ **Calculer la covariance, le coefficient de corrélation d'une série double ;**
- ✓ **Déterminer les équations des droites de régression par la méthode des moindres carrés ;**
- ✓ **Apprécier la qualité de la corrélation entre deux variables d'une série double, puis donner approximativement en prévision la valeur d'une variable connaissant celle de l'autre.**

I-Exercices de fixation

Ressource 1 : Tableaux à double entrée

Un tableau à double entrée est un tableau mettant en relation des éléments qui vont se croiser horizontalement et verticalement**.** Il sert à représenter l'effectif correspondant à chaque combinaison de valeurs, de modalités ou de classes en lien avec les deux variables étudiées.

 EXERCICE1 :

Lesquels de ces tableaux sont des tableaux à double entrée ?

a)

Continent	Population en 1995 en millions d'habitants
Afrique	728
Asie	3458
Europe	727
Amérique latine	432
Amérique du nord	391
Océanie	28

X / Y	0	1	2	3	4	5	Total
1	6	4	1	0	0	0	11
2	3	11	10	5	1	0	30
3	1	3	16	13	4	1	38
4	0	1	3	5	8	4	21
Total	10	19	30	23	13	5	100

X \ Y	[40,45[	[45,50[	[50,55[	[55,60[
[150,155[	18	10	2	0
[155,160[	3	16	5	1
[160,165[	0	5	13	5
[165,170[	0	2	6	14

Exercice 2 :

Dans un hôpital, on a relevé pour des quinze naissances d'une journée, l'âge de la mère et le poids du nouveau-né. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

X	21	19	22	22	20	18	21	24	19	22	19	22
y	3.3	2.9	3.1	2.8	3.5	2.9	3.3	3.5	3	2.8	3.3	2.8

Présenter ces données dans un tableau à double entrée.

Exercice 3 :

On demande aux 30 élèves d'une classe de noter la couleur de leurs yeux et de leurs cheveux. Puisque ces couleurs sont assez standards, chacun doit sélectionner les couleurs appropriées parmi les suivantes :

Pour les cheveux : blonds, châtains, bruns, noirs, roux.

Pour les yeux : bleus, verts, bruns.

Après compilation, on obtient ces résultats : (blonds, bleus); (blonds, bleus); (blonds, verts); (blonds, bruns) ; (châtains, bleus); (châtains, bleus); (châtains, bleus); (châtains, bleus); (châtains, bleus); (châtains, verts); (châtains, bruns); (châtains, bruns); (châtains, bruns); (châtains, bruns); (châtains, bruns); (bruns, bleus); (bruns, bleus); (bruns, verts); (bruns, verts); (bruns, bruns); (bruns, bruns); (bruns, bruns); (bruns, bruns); (bruns, bruns); (bruns, bruns); (noirs, bleus); (noirs, verts); (noirs, bruns); (noirs, bruns), (roux, verts). Construis le tableau à double entrée associée à cette situation.

✍ **Ressource 2** : Tableaux marginaux d'une série à deux caractères

Exercice 4 :

Dans un hôpital, on a relevé pour des quinze naissances d'une journée, l'âge de la mère et le poids du nouveau-né. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

X	21	19	22	22	20	18	21	24	19	22	19	22
y	3.3	2.9	3.1	2.8	3.5	2.9	3.3	3.5	3	2.8	3.3	2.8

Déterminer les séries marginales associées aux caractères x et y.

✍ **Ressource 3** : Point moyen

Exercice 5 :

Détermine les coordonnées du point moyen du nuage de points de la série statistique suivante :

X	10	11	13	15	17	18
Y	105	107	110	111	112	115

Exercice 6 :

Détermine les coordonnées du point moyen du nuage de points de la série statistique suivante :

X	-3	-1	0	5
Y	1	-1	4	2

✍ **Ressource 4** : **nuage de points**

Exercice 7 :

Les notes obtenues par 10 élèves aux épreuves de biologie et physique d'un examen sont indiquées dans le tableau suivant :

SVT	9	12	5	6	9	14	3	6	12	14
PHYS	10	13	8	10	13	17	5	8	16	16

Représente le nuage de points associé à cette série.

✍ **Ressource 5** : Ajustement affine par la méthode de Mayer.

Exercice 8 :

Le tableau suivant donne les recettes et dépenses en dinars d'une personne pendant 10 semaines.

Semaine	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Recette x_i	106	113	97	87	101	90	91	111	87	102
Dépense y_i	67	70	62	59	66	56	61	73	59	67

1) Représenter dans un repère orthonormé le nuage des points M_i (x_i, y_i).
2) Déterminer les coordonnées du point moyen G. placer G
3) On partage le nuage de points en deux sous nuages : le premier de point moyen G_1 est constitué par les 5 points les plus petites abscisses et le second de point moyen G_2 est constitué par les 5 autres points. Déterminer les coordonnées de G_1 et G_2.
4) Déterminer l'équation de la droite (G_1G_2).
5) Estimer la dépense de cette personne si sa recette est de 120 dinars.

✍ **Ressource 6** : Covariance

On appelle covariance de la série statistique double de caractère (X ; Y), le nombre réel noté COV (X ; Y) tel que : $COV(X,Y) = \frac{1}{n}\sum n_{ij}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ ou $COV(X,Y) = \frac{\sum n_{ij}x_i y_i}{n} - \bar{x}\bar{y}$.

Exercice 9 :

Les notes obtenues par 10 élèves aux épreuves de biologie et physique d'un examen sont indiquées dans le tableau suivant :

SVT	9	12	5	6	9	14	3	6	12	14
PHYS	10	13	8	10	13	17	5	8	16	16

Calcule la covariance de cette série statistique.

✍ **Ressource 7** : Coefficient de corrélation linéaire

Définition :
Soit V(X) la variance de la série statistique de caractère X, V(Y) la variance de la série statistique de
caractère Y et COV (X ; Y) la covariance de la série statistique (X ; Y).
On appelle coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double (X ; Y), le nombre réel noté
r tel que : $r = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$.

Exercice 10 :

Calcule le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique ci-dessous :

SVT	9	12	5	6	9	14	3	6	12	14
PHYS	10	13	8	10	13	17	5	8	16	16

✍ **Ressource 8** : Droites de régressions

Exercice 11 :

Les notes obtenues par 10 élèves aux épreuves de SVT et de Mathématiques au cours d'un examen sont indiquées dans le tableau suivant :

SVT(x_i)	3	5	6	6	9	9	12	12	14	14
Maths(y_i)	5	8	10	8	10	13	13	16	17	16

1) Représenter le nuage des points associe à cette série.
2) Calculer la variance de x, celle de y, puis la covariance de (x, y).
3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Le résultat justifie-t-il un ajustement linéaire ?
4) Ecrire l'équation de la droite de régression de y en x (D), puis la droite de régression de x en y (D'),

   Estimer la note en mathématique d'un élève qui a obtenu 16 en SVT, puis la note en SVT d'un élève qui a obtenu 18.5 en mathématiques.

II-Exercices de consolidation

EXERCICE 12 :

On donne la série statistique suivante :

x_i	**-2**	**-2**	**3**	**3**
y_i	**2**	**-2**	**3**	**-3**

1) Calculer $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les moyennes respectives de x_i et y_i. En déduire les coordonnées du point moyen G.

2) Représenter cette série par un nuage de points. Sans calculatrice, calculer le coefficient de corrélation linéaire et commenter le résultat.

Exercice 13 :

La taille (en cm) moyenne d'un jeune enfant est donnée, en fonction de son âge (en mois), au 06/02/2014 dans le tableau suivant :

Age (x_i)	**6**	**9**	**12**	**15**	**18**	**21**	**24**
Taille (y_i)	**66**	**71**	**74**	**77**	**80**	**83**	**85**

1) Calculer $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ les moyennes respectives de (x_i) et (y_i).
2) En déduire les coordonnées du point moyen G.
3) Représenter le nuage de points associés à cette série statistique. (unité : 1 cm pour 3 mois en abscisse et 1 cm pour 10 taille en ordonnée).
4) Déterminer par la méthode des moindres carrés l'équation la droite (d) de régression de y en x. Représenter graphique (d).
5) Montrer que la droite de régression de x en y est d'équation $x = 0{,}948y - 57{,}58$.

6) calculer le coefficient de corrélation r et interpréter ce résultat.

7) Quelle serait son âge à la date du 09/02/2014 ? en déduire à cette date sa taille en cm.

8) Quelle serait son âge s'il aura fait 1m ?

Exercice 14 :

Soit la série statistique double suivante

x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	10	25	41	k	69	80	86

1) Calculer $\bar{x}$ $puis$ $\bar{y}$ en fonction de k .
2) Déterminer la valeur de k sachant que la droite de regression de x en y est $d_{x/y}: x = 0{,}075y - 0{,}9$.

3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série.

EXERCICE 15 :

On a relevé la population d'une grande métropole sur 50 ans tous les 5 ans. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Année x_i	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Populations en milliers y_i	19,4	19,4	27,6	40,3	50	59	69	87	132	166	216

1) Représenter le nuage de points dans un repère.
2-a) On effectue le changement de variable $z = \ln y$. Réaliser un nouveau tableau présentant les valeurs prises par les variables x et z.
b) Représenter un nouveau nuage de points à partir des données des variables x et z.
c) A l'aide la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés. Représenter la droite d'ajustement.
3-a) En déduire la relation qui lie y et x puis tracer la courbe représentative de la fonction f définie par $y = f(x)$ dans le repère contenant le premier nuage de points.
b) En admettant que le modèle mathématique reste valable en dehors du domaine d'étude, extrapoler le nombre d'habitant 5 ans après l'étude.

Exercice 16:

Les notes obtenues par 10 élèves aux épreuves de physique et mathématiques au cours d'un examen sont indiqués dans le tableau ci-dessous

Physique (x_i)	3	5	6	6	9	9	12	12	14	14
Maths (y_i)	5	8	10	8	10	13	13	16	17	16

1) Construire le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ pour $1 \leq i \leq 10$ dans un plan muni d'un repère orthogonal.
2) Calculer la variance de x, celle de y, puis la covariance de (x, y).
3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique. Que peut-on en déduire ?
4) Déterminer une équation de la droite d'ajustement de ce nuage par la méthode de Mayer.
5) Déterminer les deux droites de régression de $y \; en \; x \; (D)$ et de $x \; en \; y \; (D')$ par la méthode des moindres carrés. Tracer ces droites.

Estimer la note en mathématiques d'un élève qui a obtenu 07 en physique, puis la note en physique d'un élève qui a obtenu 19.5 en mathématiques ?

EXERCICE 17 : *Corrélation et droites de régression*

1) (X, Y) est une série statistique double. Soit (D1) la droite de régression de $Y\ en\ X$. Soit (D2) la droite de régression de X en Y. On suppose que (D1) : y= ax+b et (D2) :x= a'y+b'. Soit r le coefficient de corrélation linéaire entre $X\ et\ Y$. Etablir que $r^2 = aa'$.
2) Dans une entreprise une étude simultanée portant sur deux caractères X et Y donnent les résultats suivants :

   - la droite de régression de $Y\ en\ X$ a pour équation : 2,4x – y = 0
   - la droite de régression de X en Y a pour équation : 3,5 y – 9 x + 24 = 0.
   a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y, sachant que leur covariance est positive.
   b) Calculer la moyenne de chacun des caractères X et Y.

EXERCICE 18 :

Dans cet exercice, le détail des calculs n'est pas exigé. On donnera les formules utilisées pour répondre aux questions. Les résultats seront donnés à 10^{-1} près. Le tableau ci-dessous donne le poids moyen (y) d'un enfant en fonction de son âge (x).

x (années)	0	1	2	4	7	11	12
y (kg)	3,5	6,5	9,5	14	21	32,5	34

1) Représenter le nuage de points de cette série statistique dans le plan muni du repère orthogonal. Unité graphique : en abscisse 1 cm pour 1 année et en ordonnée 1 cm pour 2 kg
2) Déterminer les coordonnées du point moyen G puis placer G.
3) a) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r
   b) Interpréter votre résultat.
4) Donner une équation de la droite de régression (D) de $y\ en\ x$. Tracer (D)
5) a) Déterminer graphiquement, à partir de quel âge le poids sera supérieur à 15 kg. Expliciter votre raisonnement.
   b) Retrouver ce résultat par le calcul.

EXERCICE 19 :

Une entreprise a mis au point un nouveau produit et cherche à fixer le prix de vente. Une enquête est réalisée auprès des clients potentiels; les résultats sont donnés dans le tableau suivant où y_i représente le nombre d'exemplaires du point que les clients sont disposés à acheter si le prix de vente exprimé en milliers de francs, est x_i.

x_i	60	80	100	120	140	160	180	200
y_i	952	805	630	522	510	324	205	84

1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de et. La valeur trouvée justifie-telle la recherche d'un ajustement linéaire ?
2) Déterminer l'équation de la droite de régression de $y\ en\ x$.
3) Les frais de conception du produit se sont élevés à 28 millions de francs. Le prix de fabrication de chaque produit est de 25000 francs.
   a) Déduire que le bénéfice z en fonction du prix de vente x est donne par l'égalité $z = -5{,}956x^2 + 1427{,}18x - 28000$ où z et x sont exprimés en milliers de francs.
   b) Déterminer, à un franc près, le prix de vente x permettant de réaliser le bénéfice maximum et calculer ce bénéfice.

EXERCICE 20 :

Une entreprise a mis au point un produit et veut que sa consommation soit maximale. Une enquête est menée sur le nombre de consommateurs y_i (en milliers) si son prix est fixé à x_i (en francs). Les résultats de l'enquête ont permis de dresser le tableau statistique ci-dessous :

x_i	1	2	2,5	3,25	3,5	3,75	4,25
y_i	4	4,5	4,375	3,718	3,375	2,968	1,968

1) Construire le nuage de points associe à cette série dans un repère orthonormé (O, I, J) où l'on prendra 2 cm comme unité sur les axes.
2) Peut-on envisager un ajustement linéaire de ce nuage de points ?
3) Pour trouver un meilleur ajustement de ce nuage de points, on pose $z_i = (x_i - 2)^2$
   a) Dresser le tableau statistique correspondant à cette nouvelle série
   b) Montrer que cette nouvelle série nécessite un ajustement linéaire.
   c) Ecrire une équation cartésienne de la droite de régression de y en z.
   d) Montrer que la série $(x_i; y_i)$ peut alors être ajustée par une parabole dont on donnera l'équation
   e) Quel doit être le prix maximal de ce produit pour que cette entreprise atteigne son objectif ?

EXERCICE 21 :
Une étude faite sur l'effectif X des familles d'une cité et la quantité Y de sucre en Kilogrammes consommée par mois dans chaque famille, a donné les résultats ci-dessous :

Y \ X	[5 ; 7]	[8 ; 10]	[11 ; 13]	[14 ; 18]
[10 ; 15]	1	3	0	0
[5 ; 25]	5	9	8	3
[25 ; 35]	0	7	5	9

1) Calculer la moyenne et l'écart-type des séries marginales X et Y.
2) A chaque centre X_i de classe de la série de X on associe la moyenne Z_i de Y sachant que X $=X_i$.
3) Dans la suite on considère la série (x, z) définie par le tableau suivant :

x_i	6	9	12	16
z_i	18,75	22,5	23,85	27,5

   a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z. Un ajustement affine est-il justifié ? (Justifier la réponse).
   b) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x.
   c) Estimer la quantité moyenne de sucre consommée par mois pour une famille d'effectif égal à 20.

III. Apprentissage à l'intégration

EXERCICE 22 :
Craignant une progression de grippe infectieuse, un service de sante d'une ville de 50000 habitants a relevé le nombre de consultations hebdomadaires concernant cette grippe dans cette ville pendant 7 semaines. Ces semaines ont été numérotées de 1 à 7. On a note x_i le rangs successifs des semaines et y_i le nombre de consultations correspondant.

Rang de la semaine : x_i	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de consultations : y_i	540	720	980	1320	1800	2420	3300

1) Tracer le nuage de points on prendra 2 cm pour unité en x et 1 cm pour 200 en y ; un modèle d'ajustement affine a été rejeté par le service de santé. Pourquoi ?
2) Pour effectuer un ajustement exponentiel, on décide de considérer les $z_i = \ln(y_i)$. Recopier et compléter le tableau suivant sur votre copie en arrondissant les z_i à 0,01 près.

Rang de la semaine : x_i	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln(y_i)$							

3) a) Calculer le coefficient de corrélation de $z\ et\ x,$ interpréter.

   b)Trouver à la calculatrice l'équation de la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés reliant $z\ en\ x$, puis deduire y en fonction de x.

4) En utilisant ce modèle, trouver par le calcul ;

a) Une estimation du nombre de consultation à la dixième semaine

b) La semaine à partir de laquelle le nombre de consultation dépassera le quart de la population

c) Le nombre moyen de consultation de la cinquième à la huitième semaine.

5) En observant les valeurs données par le model exponentiel grâce à un tableau obtenu à l'aide d'une calculatrice, expliquer si ce modèle reste valable sur le long terme.

EXERCICE 23 :

Dans le tableau suivant on reporte le chiffre d'affaires annuel (en milliers de dinars) d'une entreprise (de 1998 à 2005)

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaire (y_i)	80	83	78	78	78	73	72	70

1) Représenter dans repère orthonormé le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$.
2) Déterminer les coordonnées de G_1 point moyen des quatre premiers point du nuage et de G_2 point moyen des quatre derniers.
3) Déterminer une équation de la droite $(G_1G_2\ )$.

4) Déterminer graphiquement le chiffre d'affaires de l'entreprise pour l'année 2008.
5) Déterminer par le calcul en quelle année le chiffre d'affaires sera-t-il inferieur à 60.

IV. Activités d'intégration

□□**Situation 1 :**

Henri élève de la classe de cinquième est infecté par **la covid-19 version 2.** Un médecin lui injecte un médicament par voie intraveineuse a l'hôpital et dans les heures qui suivent. La substance est éliminée par les reins. La quantité y_i (en milligrammes mg) présente dans le sang a l'instant x_i (en heures) a été mesurée par des prises de sang toutes les deux heures comme le montre le tableau ci-dessous.

x_i	0	2	4	6	8
y_i	9,9	7,5	5,5	3,9	3

On suppose que ce modèle d'évacuation par les reins est valable a plus de 12 heures de temps.

Tâche 1 : Après combien de temps après l'injection, la quantité de médicament peut être nulle dans le sang ?

□□**Situation 2** :

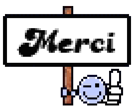
Monsieur Abessolo, cultivateur de café, se rend au marché au mois de janvier 2020 pour s'enquérir du prix de vente d'un kg de café. Malheureusement, il ne trouve pas les personnes bien indiquées. Néanmoins, il y a un ancien paysan qui lui présente l'évolution du prix d'un kilogramme de café de 2000 à 2005 comme ainsi indique dans le tableau ci-dessous.

Année (x_i)	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Prix d'un kg (y_i) en FCFA	400	460	520	560	640	720

Pour sa récolte, il compte vendre 300 kg de café en 2022 et utiliser la totalité de ce montant pour payer la pension de son fils qui s'élève à 500000 FCFA des septembre 2022 dans un institut universitaire de Technologie.

Tâches :

1. Estimer le prix d'un kilogramme de café en 2022.
2. Le montant total de la vente qu'effectuera Monsieur Abessolo, en 2022 lui permettra-il de payer la pension de son fils ?



« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. »

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES

LES GRANDPROFS DE MATHS « GPM »

ENSEIGNANT : ……DJOUTSOP Emile………

TEL : …… 675613560/695728002 ……….

ANNEE SCOLAIRE : 2022-2023

TD : MATHEMATIQUES

CLASSE : T^{LE} C

DUREE : ……. HEURES

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES

CHAPITRE 7 : PRODUIT VECTORIEL

Savoir-faire

- ✓ **Donner le sens d'un repère de l'espace en utilisant la règle du bonhomme d'ampère.**
- ✓ **Déterminer les configurations usuelles de l'espace (cube ; pavé droit etc…) le produit vectoriel entre deux vecteurs.**
- ✓ **Calculer les coordonnées dans une base orthonormée directe de l'espace du produit vectoriel de deux vecteurs.**
- ✓ **Calculer la distance d'un point à une droite de l'espace.**
- ✓ **Calculer la distance d'un point à un plan de l'espace.**
- ✓ **Calculer l'aire d'un triangle de l'espace**
- ✓ **Calculer le volume d'un tétraèdre de l'espace.**
- ✓ **Utiliser le produit vectoriel pour montrer que les points sont alignés ; que les points sont coplanaires ou non.**
- ✓ **Utiliser le produit vectoriel pour déterminer une équation cartésienne d'un plan.**
- ✓ **Utiliser le produit vectoriel pour étudier les positions relatives de deux plans ; d'un plan et d'une sphère de l'espace.**

IX. Exercices de fixation

Ressource 1 : Orientation d'un repère de l'espace

EXERCICE : 01

ABCDEFGH est un cube d'arête a. Dans chacun des cas suivants, dire si le repère est direct ou indirect :

$$a)\ \left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)\ b)\ \left(F;\overrightarrow{FG},\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FB}\right)\ c)\ \left(E;\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EH}\right)\ d)\ \left(C;\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CG}\right)$$

Ressource 2 : Calcul du produit vectoriel

NB : Si $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace, alors $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k};\ \vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}\ et\ \vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$

EXERCICE : 01

ABCDEFGH est un cube d'arête a tel que le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ soit direct. Dans chacun des cas exprimer en fonction de a :

$$a)\ \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\quad b)\ \overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{EH}\quad c)\ \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CH}\quad d)\ \overrightarrow{BH}\wedge\overrightarrow{AC}\quad e)\ \overrightarrow{CE}\wedge\overrightarrow{AG}$$

EXERCICE : 02

$\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est un repère orthonormé direct de l'espace.

On donne $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}\ et\ \vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$. Calculer $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

1- On donne $A(1;-1;1)$, $B(2;1;4)$ et $C(4;1;2)$. Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

✍ **Resource 3** : Utilisation du produit vectoriel

📖 **EXERCICE : 01**

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace. On donne

$A(1;2;1)$, $B(2;1;1)$, $C(0;1;-1)$ et $D(2;4;1)$

1- Démontrer que les points A, B et C définissent un plan dont-on donnera une équation cartésienne.

2- Calculer l'aire du triangle ABC.

3- Démontrer que ABCD est un tétraèdre et calculer son volume

📖 **EXERCICE : 02**

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace. On donne le point $M(-1;0;1)$ et la droite (D) dont une équation paramétrique est $\begin{cases} x=-1+t \\ y=5t \\ z=3t \end{cases}$ $(t\in IR)$. Calculer la distance du point M à la droite (D).

X. Exercices de consolidation

📖 **EXERCICE : 01**

I. Soient A et B deux points de l'espace orienté $\mathcal{E}$ tel que AB=6. Déterminer l'ensemble des points M tel que $\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\|=24$.

II. L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soient les points $A(1;-1;0)$; $B(3;0;1)$; $C(1;2;-1)$ et $D(1;0;0)$.

1- a) Vérifier que les points A, B et C définissent un plan (P).
   b) Déterminer une équation cartésienne du plan (P).

2- Calculer l'aire du triangle ABC

3- a) Vérifier que les points A, B, C et D sont non coplanaires.
   b) Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

📖 **EXERCICE : 02**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne $A(1;1;2)$; $B(1;2;1)$; $C(2;1;0)$ et $D(0;0;1)$.

1- Calculer l'aire du triangle ABC.

2- Démontrer que ABCD est un tétraèdre et calculer son volume.

3- Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

a) Déterminer une équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(1;-1;1)$ et tangente au plan (ABC).

b) Déterminer les coordonnées du point H intersection de la sphère avec le plan (ABC).

5- Déterminer l'ensemble des points de l'espace tel que les vecteurs $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MC}$ soient colinéaires.

🕮 EXERCICE : 03

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

1- On considère les points $A(0;1;1); B(1;0;1)\ et\ C(1;1;0)$.

a) Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (P) passant par les points A, B et C est $x+y+z-2=0$.

c) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) de centre O et tangente à (P). On notera I le point de contact de (S) et (P).

2- Etant donné α un réel, on considère les points $E\left(-\alpha;\frac{2}{\sqrt{3}};\alpha\right); F\left(-\alpha;-\frac{2}{\sqrt{3}};\alpha\right)$. Soit $\left(S_\alpha\right)$ l'ensemble des points M de l'espace tels que $ME^2+\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{EF}=0$.

a) Montrer que $\left(S_\alpha\right)$ est la sphère de diamètre [EF].

b) Montrer que pour tout réel α, $\left(S_\alpha\right)$ est tangente à (P).

c) On notera J le point de contact de $\left(S_\alpha\right)$ et (P). Déterminer α pour que $IJ=\sqrt{2}$.

🕮 EXERCICE : 04

I. Soient les deux plans (P) et (Q) d'équations respectives $2x-y+2z=5$ et $2x+2y-z-4=0$.

1- Montrer que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.

2- Calculer la distance du point $A(1;2;-1)$ à chacun des plans.

3- En déduire la distance du point A à la droite (Δ) intersection des deux plans.

4- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ).

5- Déterminer les coordonnées des points M de (Δ) tel que la distance AM soit minimale.

II. Soient les points $A(1;1;1); B(2;1;0); C(-1;2;2); D(3;0;0)\ et\ E(-4;3;4)$.

1- Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\ et\ \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

2- En déduire que les points A, B, C, D et E sont coplanaires.

🕮 EXERCICE : 05

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne les points $A(2;0;1)$; $B(3;-2;0)\ et\ C(2;8;-4)$.

1. Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace . Exprimer en fonction de $x, y\,et\,z$ les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}$.

2. Résoudre dans IR³ le système suivant : $\begin{cases} -x+y-2z=-4 \\ -x-y-z=-11 \\ 2x+y-z=8 \end{cases}$.

Montrer qu'il existe un unique point N vérifiant : $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$ et donner les coordonnées du point N.

3. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est $V=\frac{Surface\ de\ base \times hauteur}{3}$.

a) Le point N étant défini à la question précédente, montrer que le volume du tétraèdre ABCN est égal à $\frac{1}{6}CN^2$; puis calculer V.

b) En utilisant le résultat du 1) et en prenant M=C, calculer l'aire du triangle ABC.
c) En déduire la distance du point N au plan (ABC).

EXERCICE : 06

OABCDEFG est un cube tel $\left(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)$ soit un repère orthonormé direct. α est un réel strictement positif. L, M et K sont des points définis par $\overrightarrow{OL}=\alpha\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM}=\alpha\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BK}=\alpha\overrightarrow{BF}$

1- a) Calculer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{DM}\wedge\overrightarrow{DL}$; puis déduire l'aire du triangle DLM.
b) Montrer que la droite (OK) est orthogonal au plan (DLM).

2- On note H le projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DLM).
a) Montrer que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OK}$.
b) Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ étant $\overrightarrow{OK}$ colinéaires, on pose β le réel tel que $\overrightarrow{OH}=\beta\overrightarrow{OK}$. Montrer que $\beta=\frac{\alpha}{\alpha^2+2}$, puis en déduire que H appartient au segment [OK].
c) Déterminer les coordonnées du point H.
d) Exprimer $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{OK}$ et en déduire que $HK=\frac{\alpha^2-\alpha+2}{\sqrt{\alpha^2+2}}$.

3- A l'aide des questions précédentes, déterminer le volume du tétraèdre DLMK en fonction de α.

EXERCICE : 07

On considère l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ où $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$. On donne les points $A(3;1;0);B(1;2;0);C(3;2;1)$ et $D(0;0;d)$ où d est un réel positif non nul. On a ainsi un tétraèdre ABCD.

1- Soit (Γ) l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\right\|=6$. Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB). Montrer que $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MH}\wedge\overrightarrow{AB}$, puis déterminer (Γ).

2- On pose $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.
a) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{n}$.
b) En déduire l'aire du triangle ABC.
c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3- On pose K le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
a) On pose $\overrightarrow{DK}=\lambda\vec{n}$. Calculer λ en fonction de d.
b) En déduire l'expression de la distance DK en fonction de d.
c) Montrer que le volume du tétraèdre ABCD est $V_d=\frac{2d+5}{6}$.

4- Pour quelle valeur de d, la droite (DB) est-elle perpendiculaire au plan (ABC) ?
5- On suppose que $d=0$. Calculer la distance de A au plan (OBC).

EXERCICE : 08

L'espace est orienté par le repère orthonormal direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soient les points $A(6;0;0)$; $B(0;6;0)$ et $C(0;0;4)$.

1- Montrer que les points O, A et B définissent un plan dont-on déterminera une équation cartésienne.

2- Déterminer les coordonnées de $G = bar\{(O,1);(A,2);(B,3)\}$.

3- On note $(S) = \left\{M(x;y;z) \in \mathcal{E} / \left(\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{MC}\right\}$.

a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de (S).
b) Déterminer une équation cartésienne de (S).

4- Déterminer l'intersection de (S) avec le plan d'équation $x = 0$.

5- Soit $(P) = \left\{M(x;y;z) / MO^2 + 2MA^2 - 3MB^2 = 24\right\}$.

a) Montrer que $G \in (P)$.

b) Montrer que $M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}.\vec{u} = 0$ avec $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.

c) Déduire alors l'ensemble (P).

6- Déterminer l'ensemble $(\Gamma) = \left\{M(x;y;z) / \left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\| = 3\right\}$.

EXERCICE : 09

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1;6;4)$, $B(2;5;3)$, $C(3;1;1)$ *et* $D(8;1;7)$. On pose $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

a) Déterminer les coordonnées de $\vec{n}$. En déduire que les points A, B et C définissent un plan.

b) Détermine l'aire du triangle ABC.

2. Soit (Δ) la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2;\ -1;3)$

a) Démontrer que la droite (Δ) est orthogonal au plan (ABC).

b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ).

d) Déterminer les coordonnées du point K, intersection de de la droite (Δ) et du plan (ABC).

0,75 pt

3. On note H le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

a) On donne $\overrightarrow{DH} = \alpha\vec{n}$ Calculer le nombre réel α .
b) En déduire la distance DH et le volume du tétraèdre ABCD.

4. Soit (P_1) le plan d'équation $x + y + z - 6 = 0$ et (P_2) le plan d'équation $x + 4y - 7 = 0$.

a) Démontrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.

b) Vérifier que la droite (d), intersection des plans (P_1) et (P_2) , a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -4t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t + 5 \end{cases} \quad , \quad t \in IR.$$

c) La droite (d) et le plan (ABC) sont-ils parallèles ou sécants ?

5. On considère l'ensemble (S) des points $M(x;y;z)$ de l'espace d'équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 = 0.$$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (S).

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection de (S) avec le plan (P_2) le plan d'équation $x+4y-7=0$.

XI. Apprentissage à l'intégration

(Concevoir des exercices où la résolution d'une tâche ou deux est décomposée en étapes.)

Exercice 1 :

L'architecte d' une communauté a réalisé une cuve qui servira de réserve d'eau pour la communauté. La cuve a la forme d'un tétraèdre ABCD dont les coordonnées des points A, B, C et D dans repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace sont : $A(1;-1;0)$, $B(3;0;1)$, $C(1;2;-1)$ *et* $D(1;0;0)$. Il souhaite aisément déterminer le volume d'eau total qu'on pourra y stocker. Comment peut-il procéder ?

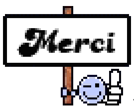
Exercice 2 :

XII. Activités d'intégration

(Concevoir des activités type évaluation des compétences.)

Situation 1 :

Situation 2 :



« La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ».

MINESEC
LES GRANDS PROFS ≪ GPM ≫
ENSEIGNANT : NGNAZOKE
TEL : 697818473

ANNEE SCOLAIRE 2022-2023
TD : MATHEMATIQUES
CLASSE : T^{le}C.

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGES
CHAPITRE 12 : THEORIE DES GRAPHES

Savoir-faire :

- Identifier / Déterminer un arbre couvrant d'un graphe connexe (BFS)
- Identifier / Déterminer un arbre couvrant de poids minimum d'un graphe pondéré (prim)
- Déterminer un chemin de poids minimum (plus court chemin) entre deux sommets d'un graphe pondéré (Dijkstra)

Exercice 1.

En une semaine, tu fais les trajets suivants : Maison-Lycée ; Maison-Boulangerie ; Maison-Stade ; Lycée-Hôpital ; Maison-Hôpital.

❶ *Construis un schéma modélisant tous les trajets que tu peux effectuer pendant la semaine.*

❷ *Combien de routes relient la maison aux autres destinations ?*

❸ *Détermine le nombre de trajets.*

❹ *Cite les endroits qui ne sont pas reliés ?*

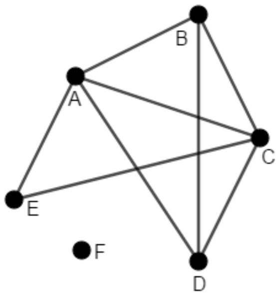
Exercice 2. ❶ *Ce graphe comporte ...sommets. C'est donc un graphe d'ordre ....*

❷ *Du sommet A partent 4 arêtes. Le degré du sommet A est donc ...*

❸ *Du sommet B partent ...arêtes. Le degré du sommet B est donc ...*

❹ *Du sommet C partent ...arêtes. Le degré du sommet C est donc ...*

❺ *Du sommet F partent ...arêtes. Le degré du sommet F est ...F est donc un sommet ....*



Exercice 3.

❶ *Dessiner un graphe dont les sommets sont représentés par les chiffres 2 à 9. Relie deux sommets du graphe lorsque l'un est multiple de l'autre.*

❷ *Quel est l'ordre du graphe ? Quels sont les sommets isolés ?Quels sont les sommets pendants ?*

❸ *Citer deux sommets adjacents. Nomme un sommet de degré 3.*

❹ *Dans une réunion de 5 personnes, combien de poignées de main sont échangée ? On suppose que tout le monde salue tout le monde.*

❺ *Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié exactement avec 3 autres ?*

<u>Exercice</u> 4. *Un tournoi de football oppose 06 équipes. Chaque équipe doit affronter tous les autres. Construire un graphe représentant toutes les rencontres possibles.*

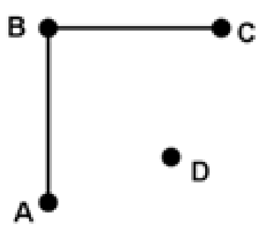
<u>Exercice</u> 5. *Construire un graphe orienté dont les sommets sont les entiers compris entre 1 et 12 et dont les arcs représentent la relation ≪ être diviseur de ≫ .*

<u>Exercice</u> 6.

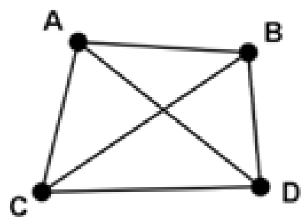
❶ *Completer le tableau ci-dessous*

❷ *Enoncer le lemme des poignées de main.*

	Dégré de A	*Dégré de B*	*Dégré de C*	*Dégré de D*	*Somme des dégrés*	*Nombre d'arêtes*
Graphe 1						
Graphe 2						



graphe 1



graphe 2

<u>Exercice</u> 7.

Représenter les situations ci-dessous à l'aide d'un graphe :

❶ *On considère un cube ; un sommet est associé à une face du cube et deux sommets sont reliés par une arête si les faces correspondantes ont une arête commune ;*

❷ *Les sommets du graphe sont tous les sous-ensembles à deux sommets $\{4, 3, 2, 1\}$; deux sommets sont reliés si leur intersection est non vide ;*

❸ *Comparer les deux graphes définis ci-dessus.*

<u>Exercice</u> 8. *On considère le projet de construction d'un réseau routier entre les villes A et G. Le tableau ci-dessous représente les différents tronçons possibles ainsi que les coûts de construction correspondants :*

Tronçon	A↦B	A↦C	C↦B	B↦D	B↦F	C↦E
Coût	8	5	4	9	7	10
C↦F	E↦B	E↦D	D↦G	E↦G	F↦G	F↦E
2	1	6	7	11	8	3

Le problème consiste à déterminer l'autoroute dont le coût total de construction est minimal.

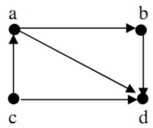
<u>Exercice</u> 9. *Combien de sommets possèdent les graphes simples suivants s'ils contiennent :*

❶ 12 *arêtes et tous les sommets sont de degré deux.*

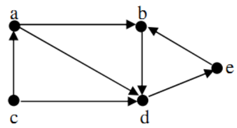
❷ 15 *arêtes,* 3 *sommets sont de degré* 4 *et les autres sont de degré* 3*.*

<u>Exercice</u> 10. *(TI uniquement)*

Etant données les deux graphes suivants :



Graphe G_1



Graphe G_2

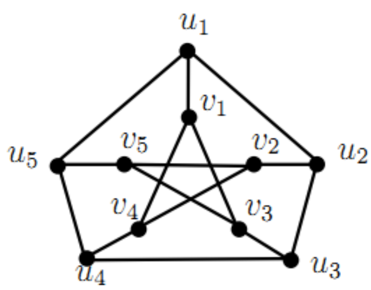
❶ *Donner les demi-degrés extérieurs, les demi-degrés intérieurs et les degrés des sommets du graphe Gi.*

❷ *Donner l'ensemble de successeurs et l'ensemble de prédécesseurs de chaque sommet du graphe Gi.*

❸ *Mettre en ordre chacun des deux graphes (si c'est possible).*

❹ *,Représenter chaque graphe par la matrice d'incidence, la matrice d'adjacence, puis par la table des successeurs.*

<u>Exercice</u> 11. *On considère le graphe suivant :*

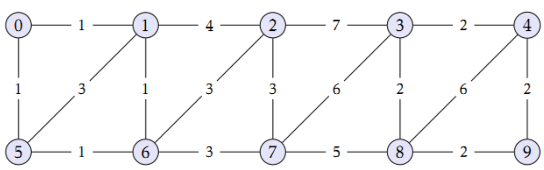


❶ *Donner l'ordre et le nombre d'arêtes de ce graphe.*

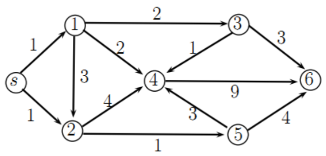
❷ *Vérifier le Lemme des poignées de mains.*

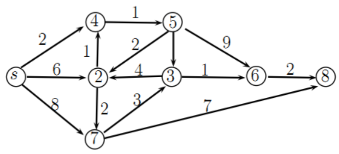
<u>Exercice</u> 12.

Appliquer l'algorithme de Kruskal au graphe suivant pour déterminer l'arbre couvrant de poids minimal :



<u>Exercice</u> 13. *Déterminer les plus courts chemin issus de* s *dans les réseaux suivants :*





Exercice 14. *Etant donné un groupe de dix personnes, le tableau suivant indique les paires de personnes qui ont une relation d'amitié.*

I	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Amis de I	*3,6,7*	*6,8*	*1,6,7*	*5,10*	*4,10*	*1,2,3,7*	*1,3,6*	*2*		*4,5*

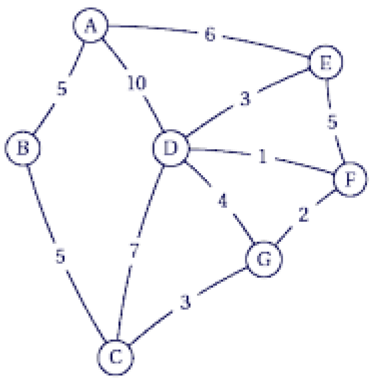
1. *Représentez cette situation par un graphe ?*
2. *Ce graphe est-il complet ? Connexe ?*
3. *Si l'adage (les amis de nos amis sont nos amis) était vérifié, que pourrait-on en conclure sur la structure du graphe.*

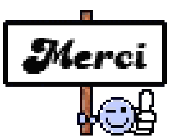
Exercice 15. *Le tableau ci-dessous donne les liaisons internes assurées par différentes compagnies d'Air au Cameroun.*

Arbitre	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
Rencontres	$M_1 - M_2$	$M_3 - M_4 - M_2$	$M_5 - M_4 - M_6$	$M_1 - M_3$	$M_6 - M_5$

Représenter la programmation du déroulement des rencontres de la première journée par un graphe.
Indication : Deux sommets sont reliés par une arête si les rencontres correspondantes peuvent se dérouler au même moment.

Exercice 16. *Laurent s'occupe de distribuer le courrier dans les bureaux d'une grande entreprise. Le graphe ci-dessous représente les différents parcours qu'il peut faire pour distribuer le courrier dans les bureaux* A, B, C, D, E, F *et* G*. Le poids de chaque arête indique le nombre d'obstacles (portes, escaliers, machines à café.) qui nuisent à la distribution du courrier. Laurent se voit confier par le bureau* A *un colis à livrer au bureau* G*. Indiquer un parcours qui permette à Laurent de partir du bureau* A *pour arriver au bureau* G *en rencontrant le minimum d'obstacles.*





≪ La première règle de la réussite, ne jamais remettre au lendemain l'exécution d'un travail. ≫